

Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 86. Iss. 5

EDITORIAL BOARD

- I.G. Goryacheva** (editor-in-chief, Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)
- V.G. Baydulov** (executive secretary, Ph.D., Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)
- J. Awrejcewicz** (Professor, Politechnika Łódzka, Lodz, Poland),
N.N. Bolotnik (Professor, Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
F.M. Borodich (Professor, Cardiff University, Cardiff, United Kingdom),
A.B. Freidin (Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),
A.M. Gaifullin (Professor, Corresponding RAS member, Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Zhukovsky, Russia),
M.L. Kachanov (Professor, Tufts University, Medford, MA, USA),
Ju.D. Kaplunov (Professor, Keele University, Staffordshire, United Kingdom),
A.A. Korobkin (Professor, University of East Anglia, Norwich, United Kingdom),
A.M. Kovalev (Professor, NASU member, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Ukraine),
V.V. Kozlov (Professor, RAS member, Vice-President RAS, Moscow, Russia),
A.M. Krivtsov (Professor, Corresponding RAS member, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),
A.G. Kulikovskii (Professor, RAS member, Steklov Institute of Mathematics, RAS, Moscow, Russia),
Yu.Yu. Makhovskaya (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
N.F. Morozov (Professor, RAS member, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia),
T.J. Pedley (Professor, FRS member, University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom),
F. Pfeiffer (Professor, FRS, Foreign RAS member, Technische Universität München, Munich, Germany),
V.V. Pukhnachev (Professor, Corresponding RAS member, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, RAS, Novosibirsk, Russia),
G. Rega (Professor, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy),
S.A. Reshmin (Professor, Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
V.A. Sabelnikov (Professor, The French Aerospace Lab ONERA, Paris, France),
Ye.I. Shifrin (Professor, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
F.E. Udwadia (Professor, University of Southern California, Los Angeles, CA, USA),
S.E. Yakush (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
V.F. Zhuravlev (Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
K. Zimmermann (Professor, Technische Universität Ilmenau, Ilmenau, Germany)
- Editorial advisory board: N.I. Amelkin, I.M. Anan'evskii, A.S. Andreev, V.A. Babeshko, A.M. Formalskii, Yu.P. Gupalo, A.P. Ivanov, A.N. Kraiko, A.P. Markeev, S.A. Nazarov, V.S. Patsko, A.G. Petrov, N.N. Rogacheva, V.V. Sazonov, A.P. Seyranian, I.A. Soldatenkov, S.Ya. Stepanov, G.A. Tirsksii, V.N. Tkhai

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

September–October

Учредитель: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Редакция:

В.Г. Байдулов – отв. секретарь

Е.В. Есина – зав. редакцией

Адрес редакции: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245

Телефон редакции: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

На сайте [Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU](http://eLIBRARY.RU) доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала "Прикладная математика и механика" в каталоге Роспечати 70706

ISSN 0032-8235

Founder: Russian Academy of Sciences

The Editorial Staff:

V.G. Baydulov – executive secretary

E.V. Esina – head of Editorial office (manager editor)

The Editorial Board Address: 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia

Phone: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

The subscription index in Rospechat catalogue 70706

ISSN 0021-8928

СО Д Е Р Ж А Н И Е

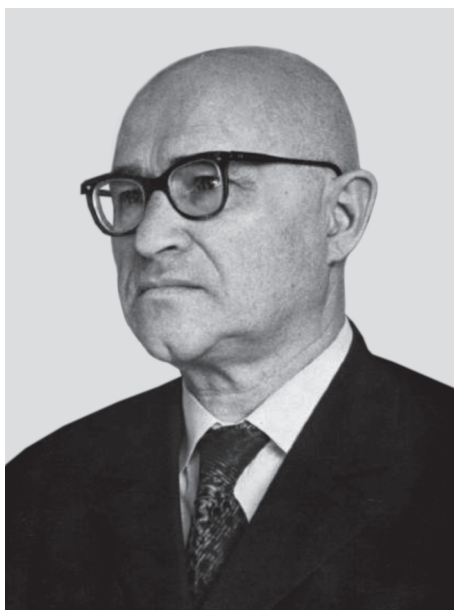
Лев Александрович Галин (К 110-летию со дня рождения)	625
Точное решение универсальным методом моделирования контактной задачи в четверти плоскости многослойной среды <i>В. А. Бабешко, О. В. Евдокимова, О. М. Бабешко</i>	628
К расчетам больших неизотермических деформаций упруговязкопластических материалов <i>А. С. Бегун, А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк</i>	638
Равновесие упругого тела с закругленными кромками на упругом наклонном полупространстве <i>А. А. Зобова, И. Г. Горячева</i>	654
О движении осесимметричного твердого тела, опирающегося на горизонтальную площадку, в условиях ортотропного динамически согласованного трения <i>Н. Н. Дмитриев</i>	666
К вопросу о контакте волнистого цилиндра и упругой полуплоскости <i>И. Ю. Цуканов</i>	685
Метод расчета пластин на взаимодействие с инерционной нагрузкой при переменной скорости движения <i>И. И. Иванченко</i>	695
Приближенная теория распространения звука в ограниченной вязкоупругой среде с цилиндрическими каналами <i>Л. И. Казаков</i>	710
Моделирование истечения сыпучего тела из емкости с учетом эффекта сцепления со стенкой <i>Т. Р. Аманбаев, С. Д. Энтони</i>	724
Автомодельные несимметричные течения вязкого газа в клине <i>М. А. Брутян, У. Г. Ибрагимов</i>	741
Формирование вихревых структур внутри области сильного взрыва в неоднородной атмосфере на его ранней стадии <i>В. А. Андрущенко, В. А. Головешкин, И. В. Мурашкин, Н. Н. Холин</i>	753
Об оценке вклада вторичных вихревых структур в перенос аэрозолей в атмосферном пограничном слое <i>М. А. Давыдова, О. Г. Чхетиани, Н. Т. Левашова, А. Л. Нечаева</i>	765

C O N T E N T S

Lev Aleksandrovich Galin (On his 110-th birthday)	625
The Exact Solution by the Universal Method Modeling of the Contactproblems in the Quarter Plane of a Multilayer Medium <i>V. A. Babeshko, O. V. Evdokimova, O. M. Babeshko</i>	628
Calculations of Large Nonisothermal Deformations of Elastoviscoplastic Materials <i>A. S. Begun, A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk</i>	638
Equilibrium of an Elastic Body with Rounded Edges on an Elastic Inclined Half-Space <i>A. A. Zobova, I. G. Goryacheva</i>	654
On the Motion of an Axisymmetric Rigid Body Supported by a Horizontal Plane under Conditions of Orthotropic, Dynamically Consistent Friction <i>N. N. Dmitriev</i>	666
To the Contact Problem for a Wavy Cylinder and an Elastic Half-Plane <i>I. Yu. Tsukanov</i>	685
Method to Calculate Plates under an Inertial Load Moving with Variable Speed <i>I. I. Ivanchenko</i>	695
Approximate Theory of Sound Propagation in a Limited Viscoelastic Medium with Cylindrical Channels <i>L. I. Kazakov</i>	710
Modeling of Particulate Solids Expiration from a Container Taking into Account the Effect of Adhesion to the Wall <i>T. R. Amanbaev, S. J. Antony</i>	724
Self-Similar Asymmetrical Flow of Viscous Gas in a Channel <i>M. A. Brutyan, U. G. Ibragimov</i>	741
Formation of Vortex Structures in Area of the Strong Explosion in the Non-Uniform Atmosphere at Its Early Stage <i>V. A. Andrushchenko, V. A. Goloveshkin, I. V. Murashkin, N. N. Kholin</i>	753
On Estimation of the Contribution of Secondary Vortex Structures to the Transport of Aerosols in the Atmospheric Boundary Layer <i>M. A. Davydova, O. G. Chkhetiani, N. T. Levashova, A. L. Nechaeva</i>	765

**ЛЕВ АЛЕКСАНДРОВИЧ ГАЛИН
(К 110-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)**

DOI: 10.31857/S0032823522050095



28 сентября 2022 года исполнилось 110 лет со дня рождения профессора, члена-корреспондента РАН Льва Александровича Галина – выдающегося ученого-механика, ответственного секретаря (1950–1959) и главного редактора журнала “Прикладная математика и механика” (1959–1981).

Научные интересы Льва Александровича относились к области механики сплошных сред. Им получены фундаментальные результаты в теории упругости, пластичности, вязкоупругости, газовой динамики, теории кавитации, в механике разрушения. Л.А. Галин создал научную школу исследователей сложных проблем механики и прикладной математики. Многие из его учеников стали крупными учеными.

Лев Александрович является одним из создателей теории контактных задач математической теории упругости. Оригинальные методы позволили ему получить точное решение ряда двумерных задач для полуплоскости (в том числе, с учетом анизотропии и сил инерции). Стараясь приблизить постановку задач к реальным условиям контактного взаимодействия тел, он создал новое направление в теории смешанных задач – контактные задачи при учете поверхностной микроструктуры и изнашиваемости взаимодействующих тел.

Многие работы Льва Александровича посвящены решению упругопластических задач с неизвестной границей между упругой и пластическими областями. В 1946 г.

Л.А. Галин решил плоскую упруго-пластическую задачу о растяжении пластинки с круговым отверстием, а также аналогичную задачу об изгибе балки. Многие из его результатов вошли в монографии по теории пластичности, изданные по всему миру. Была предложена также некоторая аналогия типа Прандтля–Надаи, которая позволила решить многие упругопластические задачи экспериментально.

Широкое внедрение полимерных материалов в промышленность побудило Л.А. Галина рассмотреть ряд контактных задач при учете реологических свойств взаимодействующих тел. Им изучено действие вибрационного нагружения на элементы конструкций из полимерных материалов, решена обратная задача о выборе контура отверстия в пластине из армированного стеклопластика.

Л.А. Галиным вместе с сотрудниками была предложена теория самоподдерживающегося разрушения, которая описывает динамику процесса разрушения перенапряженных высокопрочных стекол, горного удара и других явлений. Волна разрушения в таких процессах аналогична детонационной волне; стационарное распространение ее происходит за счет перехода запаса потенциальной упругой энергии в кинетическую.

Интересные результаты получены Львом Александровичем в области гидромеханики, где им исследован ряд задач теории удара, кавитации и механики дисперсных сред, в области газовой динамики (задача обтекания сверхзвуковым потоком крыла прямоугольной формы в плане), в области подземной гидромеханики, кибернетики (проблема “черного ящика”), по вопросам распространения излучения и применения математических методов в биологии, в частности, в экологии, физиологии и генетике. Только перечисление основных результатов, полученных ученым, заняло бы не одну страницу.

Л.А. Галиным опубликовано более 100 научных трудов. Широкую известность получила его монография “Контактные задачи теории упругости”, опубликованная в 1953 году и переведенная на несколько иностранных языков. Итогом многолетней деятельности Л.А. Галина, его последователей и учеников в области контактных задач явилась вышедшая под его редакцией в 1976 г. книга “Развитие теории контактных задач в СССР”, содержащая обзор основных научных результатов, посвященных решению контактных статических, динамических и температурных задач для упругих, вязкоупругих и пластических тел. Постановки и решения новых контактных задач с учетом несовершенной упругости, поверхностной микроструктуры и изнашивания взаимодействующих тел вошли в другую монографию Л.А. Галина “Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости” (1980). Эта монография в 2008 году была издана на английском языке в издательстве Springer под редакцией профессора Г. Гладуэлла в серии “Механика деформируемого твердого тела и ее приложения”. В это издание вошли также более поздние исследования в области механики контактного взаимодействия, продолжающие и развивающие идеи Л.А. Галина. Работы Льва Александровича в области теории упругопластических задач были включены в другую его монографию – “Упругопластические задачи”, вышедшую посмертно в 1984 году. За изданные монографии (1980, 1984 гг.), содержащие фундаментальные результаты в области механики деформируемого твердого тела, Л.А. Галин был удостоен (1986 г., посмертно) Государственной премии СССР.

За многолетнюю плодотворную научную работу, в том числе связанную с созданием термоядерного оружия, Лев Александрович Галин был награжден орденом Ленина, тремя орденами Трудового Красного Знамени и другими наградами.

Идеи, заложенные в научных трудах ученого, лежат в основе различных направлений механики, развиваемых в настоящее время его учениками и последователями. В 2012 г. в Москве проведена Международная конференция “Современные проблемы механики контактного взаимодействия”, которая была посвящена 100-летию Л.А. Галина и привлекла внимание большого количества ученых из разных стран ближнего и

дальнего зарубежья. На конференции обсуждались результаты исследований в области механики деформируемого твердого тела и механики контактных взаимодействий и их приложений в инженерном деле, трибологии и современных технологиях. По итогам конференции выпущен сборник заслушанных докладов и воспоминаний о Л.А. Галине – выдающемся ученом и замечательном человеке (“Развитие идей Л.А. Галина в механике” / Под ред. Горячевой И.Г. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2013. ISBN 978-5-91741-054-8). Научное наследие Л.А. Галина всегда будет являться источником творческого вдохновения и служить прогрессу науки.

УДК 539.3

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫМ МЕТОДОМ МОДЕЛИРОВАНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЫ

© 2022 г. В. А. Бабешко^{1,2,*}, О. В. Евдокимова^{1,**}, О. М. Бабешко^{2,***}

¹ Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Россия

² Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

*e-mail: babeshko41@mail.ru

**e-mail: evdokimova.olga@mail.ru

***e-mail: babeshko49@mail.ru

Поступила в редакцию 17.03.2022 г.

После доработки 18.05.2022 г.

Принята к публикации 18.05.2022 г.

В работе впервые строится точное решение контактной задачи, поставленной на поверхности многослойной среды в четверти плоскости. Это достигается в результате применения нового универсального метода моделирования, разработанного с целью исследования и решения граничных задач для уравнений в частных производных. В данной работе метод применяется к двумерным интегральным уравнениям Винера–Хопфа в четверти плоскости, возникающим в смешанных задачах механики деформируемого твердого тела, в контактных задачах. Особенностью смешанных задач для слоистых сред является наличие мероморфных функций в преобразованиях Фурье ядер интегральных уравнений. Это обстоятельство позволяет построить точное решение смешанной задачи в четверть плоскости.

Ключевые слова: контактная задача, блочный элемент, жесткий штамп, интегральное уравнение Винера–Хопфа

DOI: 10.31857/S0032823522050046

1. Введение. Одним из основоположников теории контактных задач является член-корреспондент АН СССР Л.А. Галин [1–4], которому в текущем году исполняется 110 лет. Он одним из первых обнаружил, что теория сингулярных интегральных уравнений может найти важное применение в смешанных, контактных, задачах теории упругости, и успешно это реализовал в своих выдающихся работах. В зоне контакта задавались условия скольжения, трения, сцепления, вязкоупругого, пластического поведения. Анализируя современные исследования ученых в области контактных задач, можно видеть, что импульс, данный публикациями Л.А. Галина, получивший современное добавление, в соответствии с запросами новых технологий, остается и преумножается в прекрасных работах не только его учеников [5], но и ученых разных стран, высоко ценящих его вклад. Так, в работе [6] исследуется вопрос роли трения в проблеме разрушения материала. В работе [7] исследуется частичное скольжение в зоне контакта, в работе [8] изучается контактная задача в условиях поверхностной упругости, в работе [9] изучается для жестких параболических штампов контакт с градуированной поверхностью полупространства. В работе [10] исследуется двумерный контакт с трением функционально градиентных материалов, в [11] исследуется упруго-пластический контакт, в [12] решается ряд линейных контактных задач механики, в [13] изучаются контактные задачи с Кулоновским трением, в [14] изучается нелиней-

ным подходом класс динамических контактных задач в условиях вязкоупругости. Список можно продолжить. Исследования проводятся чаще всего, численными методами, которые, далеко не всегда, способны улавливать различные тонкие свойства решений, вскрывающиеся лишь при значительном приближении к точным решениям. Примером может служить изучение методом контактных задач взаимодействия сближающихся литосферных плит. Выполнявшиеся исследования численными методами не позволили обнаружить новый тип землетрясений, выявленный точным решением смешанной задачи [15]. Решению новых задач, в частности, граничных для дифференциальных уравнений и двумерных уравнений Винера–Хопфа способствует совершенствование математического аппарата, объединение чисто теоретических топологических методов с прикладной математикой [16].

Наличие мероморфной функции в преобразовании Фурье ядра интегрального уравнения Винера–Хопфа, как и в случае дифференциальных уравнений [16], позволило найти фрагменты дифференциальных уравнений в представлении интегральных уравнений Винера–Хопфа. Это позволило найти способ сведения двумерного интегрального уравнения к одномерным.

Его применение позволяет свести интегральные уравнения в этой области к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, имеющих обратную бесконечную матрицу. Этот тип интегральных уравнений не доступен для численного решения, в связи с неограниченностью области задания уравнения, и ранее не был исследован аналитически.

Точное решение двумерного уравнения Винера–Хопфа в четверть плоскости открывает возможность построения высокоточных решений контактных задач в ограниченных областях, подобно тому, как это делалось в одномерном случае. Интегральные уравнения Винера–Хопфа имеют широкое применение в различных областях для материалов сложной реологии, в том числе, в теории прочности, дифракции, дефектокопии, трибологии.

2. Определяющие уравнения. Интегральное уравнение контактной задачи для изотропной слоистой среды в четверти плоскости в декартовой системе координат имеет вид [17, 18].

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \varphi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = f(x_1, x_2); \quad 0 \leq x_1, \quad x_2 \leq \infty$$

$$k(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} K(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha x)} d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$K(\alpha_1, \alpha_2) \equiv K(u) = \frac{R(u)}{P(u)}; \quad u = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \tag{2.1}$$

$$K(u) = \frac{R(u)}{P(u)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(u)}{P_n(u)}; \quad R_n(u) = (u^2 - z_n^2), \quad P_n(u) = (u^2 - \xi_n^2)$$

$$K(u) = \frac{1}{u} (1 + o(1)), \quad u \rightarrow \pm\infty$$

Здесь γ_1, γ_2 – контуры, лежащие на вещественной оси и отклоняющиеся от нее в динамических задачах гармонической во времени вибрации лишь обходя вещественные полюса, по малым полуокружностям, если они возникают [18].

В работе авторов [19], наверно впервые, исследовалось интегральное уравнение (2.1), которое методом факторизации было сведено к решению системы интегральных уравнений. Функции $R(u), P(u)$ являются четными целыми функциями, представимыми бесконечными произведениями. Предполагается, что функции $R(u)$ и $P(u)$ являются

целыми функциями первого порядка и конечного типа, то есть трансцендентными, в частности, полиномами. В принятых обозначениях целая функции $R(u)$ обращается в нуль на множествах значений и $u_n = \pm z_n$. Разрешая эти соотношения относительно переменных α_s , $s = 1, 2$, имеем нули в форме $\alpha_{11m\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_2^2 - z_m^2}$, $\alpha_{21m\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_1^2 - z_m^2}$. Соответственно, целая функция $P(u)$ имеет нули на множествах на $u_n = \pm \zeta_n$, $\alpha_{12r\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_2^2 - \zeta_r^2}$, $\alpha_{22r\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_1^2 - \zeta_r^2}$. Все нули, предполагаемые однократными, имеют точки сгущения на бесконечности в некоторых клиновидных областях, содержащих мнимые полуоси комплексной плоскости. Для нулей приняты обозначения: плюс – принадлежность верхней полуплоскости комплексной плоскости, минус – нижней. Примеры подобных интегральных уравнений возникают в смешанных граничных задачах механики сплошных сред для слоистых областей конечной толщины [17, 18]. Например, для статических задач в случае слоя с закрепленной нижней границей или слоя, лежащего на жестком основании без трения, имеем $K_1(u)$ и $K_2(u)$ соответственно

$$K_1(u) = -\frac{2(3-4\nu)\operatorname{sh} 2u - 4u}{u\left[2(3-4\nu)\operatorname{ch} 2u + 4u^2 + 1 + (1-\nu)^2\right]}, \quad K_2(u) = -\frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{u[\operatorname{sh} 2u + 2u]}$$

В динамическом случае для этих задач имеем

$$K_1(u) = \frac{\chi_2^2(\sigma_1 \operatorname{sh} 2\sigma_1 \operatorname{ch} 2\sigma_2 - \sigma_2^{-1}u^2 \operatorname{sh} 2\sigma_2 \operatorname{ch} 2\sigma_1)}{2\Delta_1(u)}$$

$$\Delta_1(u) = u^2(2u^2 - \chi_2^2) - (2u^4 - u^2\chi_2^2 + 0.25\chi_2^4)\operatorname{ch} 2\sigma_1 \operatorname{ch} 2\sigma_2 +$$

$$+ \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}u^2[2u^4 - u^2(2\chi_2^2 + \chi_1^2) + \chi_1^2\chi_2^2 + 0.25\chi_2^4]\operatorname{sh} 2\sigma_1 \operatorname{sh} 2\sigma_2$$

$$K_2(u) = \frac{\chi_2^2\sigma_1 \operatorname{sh} \sigma_1 \operatorname{sh} \sigma_2}{2\Delta(u)}, \quad \Delta_2(u) = (u^2 - 0.5\chi_2^2)^2 \sigma_1\sigma_2 \operatorname{ch} \sigma_1 \operatorname{sh} \sigma_2 - u^2 \operatorname{sh} \sigma_1 \operatorname{ch} \sigma_2$$

$$\sigma_n = \sqrt{u^2 - \chi_n^2}, \quad u = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}; \quad n = 1, 2$$

$$\chi_1^2 = \rho(\lambda + 2\mu)^{-1}\omega^2, \quad \chi_2^2 = \rho\mu^{-1}\omega^2$$

Другое представление интегрального уравнения (2.1), получаемое в результате перехода к преобразованиям Фурье для ядра и искомого решения, имеет вид

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} K(\alpha_1, \alpha_2) \Phi(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 = f(x_1, x_2) \quad (2.2)$$

Принятые обозначения нулей целых функций позволяют построить целые функции в форме бесконечных произведений. Построим сходящиеся четные целые функции $R(z_p)$ $P(z_p)$ в такой форме, приняв традиционные обозначения $\pm z_s = z_s^\pm$ [20]

$$R_m(u) = R_{m\pm}(\alpha_m) R_{m\mp}(\alpha_m), \quad R_{m\mp}(\alpha_m) = T_{m\mp} e^{\mp i\alpha_m} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha_m}{\alpha_{m1s\pm}}\right) e^{\frac{\alpha_m}{\alpha_{m1s\pm}}}$$

$$P_m(u) = P_{m\pm}(\alpha_m) P_{m\mp}(\alpha_m), \quad P_{m\mp}(\alpha_m) = S_{m\mp} e^{\mp i\alpha_m} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha_m}{\alpha_{m2s\pm}}\right) e^{\frac{\alpha_m}{\alpha_{m2s\pm}}}$$

$$m = 1, 2 \quad (2.3)$$

$$K_{+m}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{R_{m-}(\alpha_m)}{P_{m-}(\alpha_m)}, \quad K_{-m}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{R_{m+}(\alpha_m)}{P_{m+}(\alpha_m)}$$

$$T_{m\mp} = \text{const}, \quad S_{m\mp} = \text{const}; \quad m = 1, 2$$

После деления $R_m(u)$ на $P_m(u)$ дадут мероморфные функции, обозначенные $K(u)$. Их нулями являются $\pm z_{mp}$. Примем правую часть $f(x_1, x_2)$ интегрального уравнения (2.1) в форме

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(\eta_1, \eta_2) e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)} d\eta_1 d\eta_2 \quad (2.4)$$

Тогда для упрощения исследования и возможности построения решения для функции $f(x_1, x_2)$ достаточно в правой части взять выражение

$$Ae^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)}; \quad A = \text{const}, \quad \text{Im } \eta_n = 0, \quad n = 1, 2$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \varphi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = Ae^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)}; \quad 0 \leq x_1, \quad x_2 \leq \infty \quad (2.5)$$

Введем постоянные $A = A_1 A_2$, как коэффициенты перед каждой экспонентой, то есть $A_1 e^{-i\eta_1 x_1}$, $A_2 e^{-i\eta_2 x_2}$.

Применим для исследования и решения новый универсальный метод моделирования [16], который позволит установить общий вид решения интегрального уравнения и построить его представление.

Преобразуя представление двумерного интегрального уравнения (2.2), можно, с учетом свойств целых функций $R(u)$ и $P(u)$, записать его в виде дифференциального уравнения в частных производных

$$\prod_{s=1}^{\infty} R_s \left(i \frac{\partial}{\partial x_1}, i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \varphi(x_1, x_2) = f_0(x_1, x_2), \quad f_0(x_1, x_2) \equiv \prod_{s=1}^{\infty} P_s \left(i \frac{\partial}{\partial x_1}, i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) f(x_1, x_2) \quad (2.6)$$

Здесь дифференциальные операторы $R_s \left(i \frac{\partial}{\partial x_1}, i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$ и $P_s \left(i \frac{\partial}{\partial x_1}, i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$ имеют вид

$$R_s \left(i \frac{\partial}{\partial x_1}, i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) = -(\Delta + z_s^2), \quad P_s \left(i \frac{\partial}{\partial x_1}, i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) = -(\Delta + \xi_s^2)$$

В соответствии с общей теорией, решение дифференциального уравнения (2.6), принадлежащее классу суммируемых функций, можно представить в виде

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi_0(x_1, x_2) + \varphi_*(x_1, x_2)$$

Функция $\varphi_0(x_1, x_2)$ является общим решением однородного уравнения, а $\varphi_*(x_1, x_2)$ – частным решением неоднородного. Частное решение неоднородного уравнения для экспоненциальных правых частей (2.5) определяется просто и имеет для случая $f_0(x_1, x_2) = Ae^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)}$ вид

$$\varphi_*(x_1, x_2) = P(\eta_1, \eta_2) Ae^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)}$$

Общее решение $\varphi_0(x_1, x_2)$ однородного дифференциального уравнения (2.5) представимо в виде

$$\varphi_0(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(x_1, x_2)$$

Здесь $\varphi_s(x_1, x_2)$, $s = 1, 2, \dots$ – общие решения уравнений

$$R_s \left(i \frac{\partial}{\partial x_1}, i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \varphi_s(x_1, x_2) \equiv - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + z_s^2 \right) \varphi_s(x_1, x_2) = 0, \quad s = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

Последнее следует из вида характеристического уравнения для дифференциального оператора $\prod_{s=1}^{\infty} R_s \left(i \frac{\partial}{\partial x_1}, i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$, даваемое функцией $R(u)$.

3. Метод решения. Описанные свойства интегрального уравнения, с использованием нового универсального метода моделирования [16], позволяют применить к рассматриваемому интегральному уравнению метод разделения переменных. Этот метод, в некотором смысле, является аналогом метода разделения переменных в многомерных дифференциальных уравнениях, но имеет свою специфику в интегральных уравнениях Винера–Хопфа.

Предварительно установим общий вид решения интегрального уравнения. Следуя указанному методу [16], применяемому как к дифференциальным уравнениям, так и к интегральным, будем искать общее решение $\varphi(x_1, x_2)$ дифференциальных уравнений (2.6) в форме разложения по общим решениям однородных дифференциальных уравнений (2.7) для $s = 1, 2, 3, \dots$. Экспоненциальная подстановка $\varphi_s(x_1, x_2) = C e^{i(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}$, где β_n , $n = 1, 2$ – произвольные параметры, внесенная в дифференциальное уравнение (2.7) позволяет на основе характеристического уравнения $\beta_1^2 + \beta_2^2 - z_s^2 = 0$ получить две группы корней

$$\left\{ \beta_{11s+} = i\sqrt{\beta_2^2 - z_s^2}, \beta_2 \right\}, \quad \left\{ \beta_1, \beta_{21s+} = i\sqrt{\beta_1^2 - z_s^2} \right\}; \quad \text{Im } \beta_{n1+} \geq 0, \quad n = 1, 2$$

Каждая группа корней зависит от β_1 или от β_2 . Поэтому однородная составляющая решения дифференциального уравнения (2.7) ищется в форме

$$\varphi_{s0}(x_1, x_2) = C_{s1} e^{i(\beta_{11s+} x_1 + \beta_2 x_2)} + C_{s2} e^{i(\beta_1 x_1 + \beta_{21s+} x_2)}$$

Тогда общее решение интегрального уравнения (2.1) принимает вид

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1, x_2) + \varphi_2(x_1, x_2)$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2) &= \varphi_{10}(x_1, x_2) + \varphi_{1*}(x_1, x_2), & \varphi_2(x_1, x_2) &= \varphi_{20}(x_1, x_2) + \varphi_{2*}(x_1, x_2) \\ \varphi_{10}(x_1, x_2) &= \sum_{s=1}^{\infty} C_{s1} e^{i(\beta_{11s+} x_1 + \beta_2 x_2)}, & \varphi_{1*}(x_1, x_2) &= D_1 e^{-i\eta_1 x_1} \\ \varphi_{20}(x_1, x_2) &= \sum_{s=1}^{\infty} C_{s2} e^{i(\beta_1 x_1 + \beta_{21s+} x_2)}, & \varphi_{2*}(x_1, x_2) &= D_2 e^{-i\eta_2 x_2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Воспользуемся интегральным уравнением в форме (2.2). Здесь функции D_1 , D_2 и постоянные C_{s1} , C_{s2} являются неизвестными. Свойства описанных выше нулей целых функций (3) обеспечивают рядам экспонент сходимости и независимость экспоненциальных членов [21].

С учетом независимости экспоненциальных гармоник, будем искать решение в виде двух составляющих $\varphi_1(x_1, x_2)$ и $\varphi_2(x_1, x_2)$.

4. Разделение переменных в двумерном уравнении Винера–Хопфа. Рассмотрим интегральное уравнение (2.2), представленное с применением преобразований Фурье в виде

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K(\alpha_1, \alpha_2) \Phi(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 = A e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)}; \quad 0 \leq x_1, \quad x_2 \leq \infty \quad (4.1)$$

Здесь и в дальнейшем прописными буквами обозначаются преобразования Фурье, вычисленные от строчных функций

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x_1, x_2) e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2$$

Для использования представления (4.1) необходимо построить преобразования Фурье $\Phi(\alpha_1, \alpha_2)$ искомого решения. Ищем $D(\eta_1, \eta_2)$ в форме произведения функций с разделенными переменными $D_1(\eta_1)D_2(\eta_2)$.

Вычисления позволяют получить для фрагментов решений следующие представления

$$\Phi_{10}(\alpha_1, \alpha_2) : \int_0^\infty \int_0^\infty C_{s1} e^{i(\beta_{11s+} x_1 + \beta_2 x_2)} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2 = -\frac{2\pi C_{s1} \delta(\beta_2 + \alpha_2)}{i(\beta_{11s+} + \alpha_1)}$$

$$\Phi_{1*}(\alpha_1, \alpha_2) : \int_0^\infty \int_0^\infty D(\eta_1) e^{-i\eta_1 x_1} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2 = -\frac{2\pi D_1(\eta_1) \delta(\alpha_2)}{i(\alpha_1 - \eta_1)}$$

$$\Phi_{20}(\alpha_1, \alpha_2) : \int_0^\infty \int_0^\infty C_{s2} e^{i(\beta_1 x_1 + \beta_{21s+} x_2)} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2 = -\frac{2\pi C_{s2} \delta(\beta_1 + \alpha_1)}{i(\beta_2 + \beta_{21s+})}$$

$$\Phi_{2*}(\alpha_1, \alpha_2) : \int_0^\infty \int_0^\infty D(\eta_2) e^{-i(\eta_2 x_2)} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2 = -\frac{2\pi D_2(\eta_2) \delta(\alpha_1)}{i(\alpha_2 - \eta_2)}$$

Используя приведенные представления и вычислив интегралы, получаем следующие выражение интегрального уравнения (2.5)

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K(\alpha_1, \alpha_2) \Phi_{10}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 = \sum_{s=1}^\infty \frac{C_{s1} e^{-i(\alpha_{12r-} x_1 - \beta_2 x_2)}}{(\alpha_{12r-} + \beta_{11s+}) [K^{-1}(\alpha_{12r-}, \beta_2)]},$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K(\alpha_1, \alpha_2) \Phi_{1*}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 = \\ & = \sum_{s=1}^\infty \frac{2\pi D_1(\eta_1) C_{s1} e^{-i(\alpha_{12r-} x_1)}}{(\alpha_{12r-} - \eta_1) [K^{-1}(\alpha_{12r-}, 0)]} + K(\eta_1, 0) D_1(\eta_1) e^{-i(\eta_1 x_1)} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K(\alpha_1, \alpha_2) \Phi_{20}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 = \sum_{s=1}^\infty \frac{C_{s2} e^{-i(-\beta_1 x_1 + \alpha_{22r-} x_2)}}{(\alpha_{22r-} + \beta_{21s+}) [K^{-1}(\beta_1, \alpha_{22r-})]},$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K(\alpha_1, \alpha_2) \Phi_{2*}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 = \\ & = \sum_{s=1}^\infty \frac{2\pi D_2(\eta_2) C_{s2} e^{-i(\alpha_{22r-} x_2)}}{(\alpha_{22r-} - \eta_2) [K^{-1}(0, \alpha_{22r-})]} + K(0, \eta_2) D_2(\eta_2) e^{-i(\eta_2 x_2)} \end{aligned}$$

Отсюда из требования равенства соотношений слева правым частям интегрального уравнения, находим

$$D_1(\eta_1) = K^{-1}(\eta_1, 0) A_1, \quad D_2(\eta_2) = K^{-1}(0, \eta_2) A_2$$

После преобразований это приводит к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, свойственных одномерным уравнениям Винера–Хопфа и детально изученным в [17, 18].

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{m1}}{(\alpha_{12r+} - \beta_{11m+})} = \frac{A_1}{(\alpha_{12r+} + \eta_1)K(\eta_1, 0)}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{m2}}{(\alpha_{22r+} - \beta_{21m+})} = \frac{A_2}{(\alpha_{22r+} + \eta_2)K(0, \eta_2)}$$

Запишем операторы бесконечных систем, стоящих слева в матричном виде

$$A = \|a_{rm}\| = \left\| \frac{1}{\xi_r - z_m} \right\|$$

Для них в [17, 18] построены двусторонние обратные бесконечные матрицы, имеющие вид

$$A^{-1} = \|\tau_{gr}\|, \quad \tau_{gr} = \frac{1}{K'_+(-z_g)(\xi_r - z_g) \left[K_+^{-1}(-\xi_r) \right]'}$$

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I, \quad \tau_{gr}a_{rm} = \begin{cases} 1 \dots g = m \\ 0 \dots g \neq m \end{cases}$$

В рассматриваемом случае эти соотношения приводят к равенствам

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{K'_+(-\beta_{11g+}, \beta_2)(\alpha_{12r+} - \beta_{11g+}) \left[K_+^{-1}(-\alpha_{12r+}, \beta_2) \right]'(\alpha_{12r+} - \beta_{11s+})} = \begin{cases} 1 \dots g = s \\ 0 \dots g \neq s \end{cases}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{K'_+2(\beta_1, -\beta_{21g+})(\alpha_{22r+} - \beta_{21g+}) \left[K_+^{-1}(\beta_1, -\alpha_{22r+}) \right]'(\alpha_{22r+} - \beta_{21s+})} = \begin{cases} 1 \dots g = s \\ 0 \dots g \neq s \end{cases}$$

Применяя обратные матрицы, получаем следующее представление решений бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

$$C_{g1} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{K'_+(-\beta_{11g+}, \beta_2)(\alpha_{12r+} - \beta_{11g+}) \left[K_+^{-1}(-\alpha_{12r+}, \beta_2) \right]'(\alpha_{12r+} + \eta_1)K(\eta_1, 0)} \frac{A_1}{(\alpha_{12r+} + \eta_1)K(\eta_1, 0)}$$

$$C_{g2} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{K'_+2(\beta_1, -\beta_{21g+})(\alpha_{22r+} - \beta_{21g+}) \left[K_+^{-1}(\beta_1, -\alpha_{22r+}) \right]'(\alpha_{22r+} + \eta_2)K(0, \eta_2)} \frac{A_2}{(\alpha_{22r+} + \eta_2)K(0, \eta_2)}$$

Ряды суммируются в интегралы [5] и принимают вид

$$C_{g1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{K_{+1}(\xi, \beta_2)}{K'_+(-\beta_{11g+}, \beta_2)(-\xi - \beta_{11g+})} \frac{A_1}{(-\xi + \eta_1)K(\eta_1, 0)} d\xi$$

$$C_{g2} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{K_{+2}(\beta_1, \xi)}{K'_+2(\beta_1, -\beta_{21g+})(-\xi - \beta_{21g+})} \frac{A_2}{(-\xi + \eta_2)K(0, \eta_2)} d\xi$$

Используя представление (3.1) и, применив свертывание рядов в интегралы, получим представление решений, справедливое для данных частных значений параметров β_1, β_2 , которое имеет вид

$$\varphi_1(x_1, x_2, \beta_2, \eta_1) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_3} \frac{K_{+1}(\xi, \beta_2)}{K_{+1}(\lambda, \beta_2)(-\xi + \lambda)(-\xi + \eta_1)K(\eta_1, 0)} \frac{A_1}{(-\xi + \eta_1)K(\eta_1, 0)} e^{i(-\lambda x_1 + \beta_2 x_2)} d\xi d\lambda + \frac{A_1}{K(\eta_1, 0)} e^{-i\eta_1 x_1}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x_1, x_2, \beta_1, \eta_2) &= \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_3} \frac{K_{+2}(\beta_1, \xi)}{K_{+2}(\beta_1, \lambda)(-\xi + \lambda)(-\xi + \eta_2)K(0, \eta_2)} \frac{A_2}{A_2} e^{i(\beta_1 x_1 - \lambda x_2)} d\xi d\lambda + \frac{A_2}{K(0, \eta_2)} e^{-i\eta_2 x_2} \end{aligned}$$

Примем во внимание, что эти вещественные параметры имеют диапазон изменения $|\beta_n| \leq \infty$, а интегральные уравнения являются линейными. Для построения решения, справедливого для любых вещественных значений параметров β_1, β_2 , проинтегрируем полученные функции по диапазонам изменения параметров. В результате решение интегрального уравнения Винера–Хопфа (2.5) имеют представление в форме

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, \eta_1, \eta_2) &= \varphi_1(x_1, x_2, \eta_1) + \varphi_2(x_1, x_2, \eta_2) \\ \varphi_1(x_1, x_2, \eta_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x_1, x_2, \beta_2, \eta_1) d\beta_2 = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_3} \frac{K_{+1}(\xi, \beta_2)}{K_{+1}(\lambda, \beta_2)(\xi - \lambda)(\xi - \eta_1)K(\eta_1, 0)} \frac{A_1}{A_1} e^{i(-\lambda x_1 + \beta_2 x_2)} d\xi d\lambda d\beta_2 + \frac{A_1}{K(\eta_1, 0)} e^{-i\eta_1 x_1} \quad (4.2) \\ \varphi_2(x_1, x_2, \eta_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x_1, x_2, \beta_1, \eta_2) d\beta_1 = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_3} \frac{K_{+2}(\beta_1, \xi)}{K_{+2}(\beta_1, \lambda)(\xi - \lambda)(\xi - \eta_2)K(0, \eta_2)} \frac{A_2}{A_2} e^{i(\beta_1 x_1 - \lambda x_2)} d\xi d\lambda d\beta_1 + \frac{A_2}{K(0, \eta_2)} e^{-i\eta_2 x_2} \end{aligned}$$

Решение для произвольной правой части $f(x_1, x_2)$ уравнения (2.1) получаются, с учетом (2.4), в результате вычисления интеграла при $A_1 = A_2 = 1$

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2, \eta_1, \eta_2) A(\eta_1, \eta_2) e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)} d\eta_1 d\eta_2$$

Здесь функции $\varphi_1(x_1, x_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2)$ берутся из формулы (4.2).

Вывод. В работе впервые построена формула, позволяющая решать уравнение Винера–Хопфа в четверть плоскости. Она зависит только от аналитических свойств, именно, факторизационных свойств функций, входящих в описание формулы. Таким образом, возможно, установлен общий вид решения уравнения Винера–Хопфа в четверть плоскости, справедливый для более широкого класса функций, а не только имеющих мероморфные функции в представлении ядра. Этот результат дополняет результат подхода, изложенного в работе [19].

Благодаря развитым в [17, 18] подходам, этот метод позволяет исследовать контактные задачи не только в четверть плоскости, но и в некоторых ограниченных двумерных областях.

Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 22-29-00213.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 206 с.
2. Галин Л.А. Смешанная задача теории упругости с силами трения для полуплоскости // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39. № 3. С. 88–93.
3. Галин Л.А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 5. С. 413–424.
4. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
5. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 256 с.

6. *Papangelo A., Ciavarella M., Barber J.R.* Fracture mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws // *Proc. Roy. Soc.* 2015. A 471. Iss. 2180: Art. No. 20150271.
7. *Ciavarella M.* The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I-Theory, II-Examples // *Int. J. Solids Struct.* 1998. V. 35. P. 2349–2378.
8. *Zhou S., Gao X.L.* Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik.* 2013. V. 64. P. 145–166.
9. *Guler M.A., Erdogan F.* The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings // *Int. J. Mech. Sci.* 2007. V. 49. P. 161–182.
10. *Ke L.-L., Wang Y.-S.* Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials // *Eur. J. Mech. A/Solids.* 2007. V. 26. P. 171–188.
11. *Almqvist A., Sahlin F., Larsson R., Glavatskih S.* On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces // *Tribol. Int.* 2007. V. 40 (4). P. 574–579.
12. *Almqvist A.* An lcp solution of the linear elastic contact mechanics problem // <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/43216>.
13. *Andersson L.E.* Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction // *Appl. Math. Optim.* 2000. V. 42. P. 169–202.
14. *Cocou M.* A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity // *Nonlin. Anal.: Real World Appl.* 2015. V. 22. P. 508–519.
15. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach // *Acta Mech.* 2018. V. 229. № 5. P. 2163–2175. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-2092-0>
16. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования // *Докл. РАН.* 2021. Т. 499. С. 21–26. <https://doi.org/10.31857/S2686740021040039>
17. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости М.: Наука, 1974. 456 с.
18. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
19. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Метод блочного элемента для интегральных уравнений контактных задач в клиновидной области // *ПМТФ.* 2017. Т. 58. № 2. С. 133–140. <https://doi.org/10.15372/PMTF20170214>
20. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Т. 2. М.: Наука, 1968. 624 с.
21. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976. 537 с.

The Exact Solution by the Universal Method Modeling of the Contactproblems in the Quarter Plane of a Multilayer Medium

V. A. Babeshko^{a,b,#}, O. V. Evdokimova^{a,##}, and O. M. Babeshko^{b,###}

^a *Federal Research Centre the Southern Scientific Centre RAS, Rostov-on-Don, Russia*

^b *Kuban State University, Krasnodar, Russia*

[#] *e-mail: babeshko41@mail.ru*

^{##} *e-mail: evdokimova.olga@mail.ru*

^{###} *e-mail: babeshko49@mail.ru*

In this paper, for the first time, an exact solution of the contact problem posed on the surface of a multilayer medium in a quarter plane is constructed. This is achieved as a result of the application of a new universal modeling method developed for the purpose of studying and solving boundary value problems for partial differential equations. In this paper, the method is applied to two-dimensional Wiener–Hopf integral equations in the quarter plane arising in mixed problems of deformable solid mechanics, in contact problems. A feature of mixed problems for layered media is the presence of meromorphic functions in Fourier transforms of the kernels of integral equations.

As in differential equations, this circumstance made it possible to find fragments of differen-

tial equations in the representation of Wiener–Hopf integral equations, and to find a way to reduce a two-dimensional integral equation to one-dimensional ones.

Its application makes it possible to reduce integral equations in this field to infinite systems of linear algebraic equations having an inverse infinite matrix. This type of integral equations is not available for numerical solution, due to the unlimited scope of the equation, and has not been studied analytically before.

The exact solution of the two-dimensional Wiener–Hopf equation in a quarter plane opens up the possibility of constructing high-precision solutions to contact problems in limited domains, just as it was done in the one-dimensional case.

Wiener–Hopf integral equations are widely used in various fields for materials of complex rheology, including strength theory, diffraction, flaw detection, tribology.

Keywords: contact problem, block element, rigid stump, Wiener–Hopf integral equation

REFERENCES

1. Galin L.A. Contact Problems of Elasticity Theory. Moscow: Gostekhizdat, 1953. 206 p.
2. Galin L.A. Mixed problem of elasticity theory with friction forces for a half-plane // Dokl. AS USSR, 1943, vol. 39, no. 3, pp. 88–93.
3. Galin L.A. Stamp indentation in the presence of friction and adhesion // PMM, 1945, vol. 9, iss. 5, pp. 413–424.
4. Galin L.A. Contact Problems of the Theory of Elasticity and Viscoelasticity. Moscow: Nauka, 1980. 303 p.
5. Goryacheva I.G., Dobychin M.N. Contact Problems of Tribology. Moscow: Mashinost., 1988. 256 p.
6. Papangelo A., Ciavarella M., Barber J.R. Fracture mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws // Proc. Roy. Soc., 2015, A471, iss. 2180, art. no. 20150271.
7. Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I-Theory, II-Examples // Int. J. Solids Struct., 1998, vol. 35, pp. 2349–2378.
8. Zhou S., Gao X.L. Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 2013, vol. 64, pp. 145–166.
9. Guler M.A., Erdogan F. The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings // Int. J. Mech. Sci., 2007, vol. 49, pp. 161–182.
10. Ke L.-L., Wang Y.-S. Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials // Eur. J. Mech. A/Solids, 2007, vol. 26, pp. 171–188.
11. Almqvist A., Sahlin F., Larsson R., Glavatskih S. On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces // Tribol. Int., 2007, vol. 40 (4), pp. 574–579.
12. Almqvist A. An LCP solution of the linear elastic contact mechanics problem // <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/43216>
13. Andersson L.E. Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction // Appl. Math. Optim., 2000, vol. 42, pp. 169–202.
14. Cocou M. A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity // Nonlin. Anal.: Real World Appl., 2015, vol. 22, pp. 508–519.
15. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach // Acta Mech., 2018, vol. 229, no. 5, pp. 2163–2175. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-2092-0>
16. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Fractal properties of block elements and a new universal modeling method // Dokl. Phys., 2021, vol. 66, no. 8, pp. 218–222.
17. Vorovich I.I., Alexandrov V.M., Babeshko V.A. Nonclassical Mixed Problems of Elasticity Theory. Moscow: Nauka, 1974. 456 p. (in Russian)
18. Vorovich I.I., Babeshko V.A. Dynamic Mixed Problems of Elasticity Theory for Nonclassical Domains. Moscow: Nauka, 1979. 320 p. (in Russian)
19. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Block element method for integral equations of contact problems in a wedge-shaped domain // J. Appl. Mech. & Techn. Phys., 2017, vol. 58, no. 2, pp. 133–140. (in Russian) DOI: 10.15372/PMTF20170214
20. Markushevich A.I. Theory of Analytic Functions. Vol. 2. Moscow: Nauka, 1968. 624 p. (in Russian)
21. Leontiev A.F. Rows of Exponents. Moscow: Nauka, 1976. 537 p. (in Russian)

УДК 539.374+539.214

К РАСЧЕТАМ БОЛЬШИХ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

© 2022 г. А. С. Бегун^{1,2,*}, А. А. Буренин^{1,**}, Л. В. Ковтаник^{1,2,***}

¹ Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Россия

² Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия

*e-mail: ustinova@iacp.dvo.ru

**e-mail: aab@imim.ru

***e-mail: lk@iacp.dvo.ru

Поступила в редакцию 18.05.2022 г.

После доработки 15.06.2022 г.

Принята к публикации 15.06.2022 г.

Предлагается метод и обсуждаются результаты расчетов в связанной задаче теории больших деформаций о деформировании материала цилиндрического слоя, удерживаемого между жесткими цилиндрическими поверхностями. Материал слоя принимается упруговязкопластическим, контакт его с шероховатыми границами при повороте внешней из них происходит с трением, порождающим тепло, теплотворным считается и необратимое деформирование. Рассчитывается полный цикл процесса квазистатического деформирования от его начала до полной разгрузки и остывания слоя материала. Указываются моменты времени начала и окончания скольжения материала вдоль его жесткой граничной поверхности, начала и окончания его пристеночного вязкопластического течения.

Ключевые слова: упругость, пластичность, вязкопластическое течение, большие деформации, теплопроводность, связанное термомодеформирование

DOI: 10.31857/S0032823522050058

1. Введение. В каждом термодинамическом процессе параметры состояния задаются [1] дифференциальными уравнениями своего изменения (переноса, кинетическими уравнениями). Термодинамический процесс деформирования тел в таком своем качестве не является исключением. В общем случае этот процесс является необратимым и неравновесным [2]. С целью составления математической модели процесса деформирования полные деформации, которые возможно измерить экспериментально, приходится разделить на обратимую и необратимую составляющие. Данное разделение необходимо является гипотетическим, поскольку эти составляющие опытно неизмеримы. Но именно такие составляющие предстают в качестве термодинамических параметров состояния [2, 3] и для них необходимо указать дифференциальные уравнения их изменения. К этим основным термодинамическим параметрам состояния процесса деформирования могут добавляться иные, позволяющие учитывать специфические особенности процесса, например, повреждаемость [4, 5], но в таком случае добавляются и соответствующие дифференциальные уравнения изменения для добавляемых параметров состояния [5, 6].

Кинематический характер вводимых термодинамических параметров состояния, коими являются обратимые и необратимые составляющие полных деформаций, неизбежно приводит и к трудностям при записи для них дифференциальных уравнений их

изменения. Наряду с источниками (скоростями изменения) этих составляющих деформаций, дифференциальные уравнения изменения обязаны включать в себя потоковые слагаемые [2], определяющие взаимозависимость параметров состояния в процессе деформирования [2, 3]. Для источников в уравнениях изменения термодинамических параметров состояния в согласии с уравнением баланса энтропии формулируются определяющие законы (упругости, пластичности, ползучести и др.), а потоковые слагаемые обязаны обеспечить геометрическую корректность кинематики построенной теории больших деформаций. Основные трудности связаны как раз с последним обстоятельством и именно в этом допускались основные неточности в самых ранних построениях кинематики больших деформаций упругопластических материалов. Геометрически безупречная такая кинематика впервые, по-видимому, была построена в [7] на основе так называемого “мультипликативного” разделения полных деформаций на свои обратимую и необратимую составляющие. Основанием для данного разделения послужила гипотеза о взаимно однозначном соответствии каждому текущему состоянию тела наряду с недеформированным состоянием еще одного гипотетического состояния, когда в теле отсутствуют обратимые деформации (состояние разгрузки) и напряжения.

Последующее развитие данного подхода в построении кинематики больших упругопластических деформаций обсуждалось в [8]. Из-за широкого его распространения до настоящего времени уделим ему некоторое внимание. Имеются в “мультипликативном” подходе очевидные нестыковки. Состоят они в неединственности гипотетического состояния разгрузки получаемого предельным переходом при неограниченном разбиении тела на элементарные объемы с последующим снятием с них нагрузок. В качестве дифференциальных уравнений изменения термодинамических параметров состояния, а ими остаются обратимые и необратимые деформации, предлагается принять выбранные объективные производные составляющих полных деформаций. Задача “выбора” данных производных [9] оказывается задачей “выбора” взаимодействия между обратимыми и необратимыми деформациями в процессе деформирования. Для решения последней задачи имеется достаточное число уточняющих предложений [10–15], включая предложения по учету деформационной анизотропии [16, 17].

Несомненным достоинством “мультипликативного” разделения полных деформаций на их составляющие является геометрическая корректность построенной на такой основе кинематики конечных упругопластических деформаций. Однако, как ни странно, именно в этом заключается и основной недостаток этого подхода к построению теории. Необходимость постоянной отсылки в процессе решения задач теории к гипотетическому разгрузочному состоянию не позволяет получить такие решения даже в простейших одномерных случаях. Известны только многочисленные приближенные численные решения [12, 15, 18–24]. Попытки разрешить такие задачи, формулируя их в скоростях перемещений и деформаций, с необходимостью приводят к задаче “выбора” объективной производной по времени от тензора напряжений [20, 24]. В [25] исследовались решения, получаемые при разном “выборе” данных производных (Зарембо–Яумана, Грина–Нагди, Ли и др.). При таком выборе метода решений не исключено получение ошибочного решения [26]. Необходимо отметить публикации [27–31] отечественных авторов, предлагающие теории больших упругопластических деформаций с кинематикой, отличной от способа “мультипликативного” разделения деформаций на обратимые (упругие) и необратимые (пластические, вязкопластические) их составляющие.

Разделение полных деформаций на обратимую и необратимую составляющие с помощью формулирования для них дифференциальных уравнений их изменения на основе представлений [2, 28] было предложено в [32]. Предполагалось, что такое “простое” разделение получит свое обобщение в работах других авторов, но этого не последовало. Здесь кратко повторим этапы построения данной модели на примере ее

связанного варианта с температурными эффектами. Представляется это важным для заинтересованного читателя. Укажем также особенности решения в рамках такой модели термоупругопластического деформирования конкретной краевой задачи теории. Заметим, что при определении обратимых и необратимых деформаций записью для таких термодинамических параметров состояния дифференциальных уравнений их изменения получили свое решение, включая точные, целый ряд одномерных краевых задач теории, часть их составили содержание [3]. В [33–36] решается задача об изменениях в механизме производства необратимых деформаций на упругопластических и упруговязкопластических границах, продвигающихся по деформируемым материалам. Связанные задачи теории больших упруговязкопластических деформаций, когда необратимое деформирование порождает тепло, рассматривались в [37–40]. Здесь рассмотрим еще одну такую задачу.

2. Принимаемая модель процесса деформирования. Движение точек деформируемого материала зададим в пространственных переменных Эйлера

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

Здесь \mathbf{x} , $\boldsymbol{\xi}$ – векторы, указывающие место точек деформируемого тела в текущем и свободном его состоянии соответственно, \mathbf{u} – вектор перемещений. Для тензора дисперсии $\mathbf{a} = \partial \boldsymbol{\xi} / \partial \mathbf{x}$ и метрического тензора $\mathbf{g} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^T$ имеем уравнение их изменения [3, 9]

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0, \quad \frac{d\mathbf{g}}{dt} + \mathbf{g} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{g} \cdot \nabla^T \mathbf{v} = 0; \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (2.2)$$

Во введенных обозначениях “мультипликативное” разделение полных деформаций на обратимую (упругую) \mathbf{e} и необратимую (пластическую) \mathbf{p} составляющие связано [7, 9, 22] со следующим представлением для метрического тензора

$$\mathbf{g} = (\mathbf{I} - 2\mathbf{e}) \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{p})$$

Считая тепловое расширение–сжатие также обратимым процессом, обобщим последнее соотношение в форме

$$\mathbf{g} = (\mathbf{I} - 2\mathbf{m}) \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{p}); \quad \mathbf{m} = \mathbf{e} + \alpha T_0 \theta \mathbf{I}, \quad \theta = T_0^{-1}(T - T_0)$$

Здесь T , T_0 – текущая температура и температура свободного состояния тела (комнатная температура), α – коэффициент линейного расширения, \mathbf{I} – единичный тензор. Тензоры \mathbf{m} и \mathbf{p} приобретают механический смысл в качестве обратимых и необратимых деформаций процесса деформирования за счет принятия гипотезы о существовании единственного состояния полной разгрузки.

Отказываясь от назначенного механического смысла \mathbf{m} и \mathbf{p} , то есть от принятия гипотезы разгрузочного состояния, запишем [28]

$$\mathbf{g} = (\mathbf{I} - \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}) \quad (2.3)$$

В (2.3) \mathbf{m} и \mathbf{p} уже нельзя называть обратимыми и необратимыми деформациями. Что это такое и почему для них оставлены обозначения с ясным механическим смыслом выясним далее, а пока (2.3) некоторое алгебраическое соотношение, способное вместе с (2.2) привести к дифференциальным уравнениям изменения

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \nabla \mathbf{v} - \mathbf{b} - \mathbf{m} \cdot \nabla^T \mathbf{v} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{m}^T, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{b}^T) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{b}^T - \mathbf{b} \cdot \mathbf{p}^T \quad (2.4)$$

В (2.4) введены обозначения

$$\mathbf{b} = \mathbf{Y}^{-1} \frac{d\mathbf{Y}}{dt}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{Y} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m})^T, \quad \mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^T)$$

Следовательно \mathbf{p} – симметричный тензор. Для того, чтобы тензор \mathbf{m} был симметричным необходимо в согласии с первым равенством из (2.4) потребовать

$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}) - (\mathbf{I} - \mathbf{m}) \cdot \mathbf{b}^T = (\mathbf{I} - \mathbf{m}) \cdot \nabla \mathbf{v} - (\mathbf{I} - \mathbf{m}) \cdot \mathbf{b}^T \quad (2.5)$$

Равенство (2.5) можно рассматривать в качестве тензорного уравнения для поиска такого \mathbf{b} , чтобы \mathbf{m} оказался симметричным тензором. Решение (2.5) было построено А.И. Лурье [41] и имеет вид

$$\mathbf{b} = \Phi + (\mathbf{I} \cdot \mathbf{m}) \cdot \mathbf{h} \quad (2.6)$$

Здесь \mathbf{h} произвольный симметричный тензор. Кососимметричный $\Phi = -\Phi^T$ тензор вычисляется зависимостям

$$\begin{aligned} \Phi &= \omega + \mathbf{z}, \quad \nabla \mathbf{v} = \boldsymbol{\varepsilon} + \omega; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}), \quad \omega = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}) \\ \mathbf{z} &= \mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m}) = C^{-1}(B^2((\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + B(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m}^2 - \mathbf{m}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m}^2 - \mathbf{m}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m})) \\ B &= 2 - M_1, \quad C = 8 - 8M_1 + 3M_1^2 - M_2 - \frac{1}{3}M_1^3 + \frac{1}{3}M_3 \\ M_2 &= \text{tr } \mathbf{m}, \quad M_3 = \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} \end{aligned}$$

Исключая с помощью (2.6) из (2.4) неизвестный в них тензор \mathbf{b} , приходим к дифференциальным зависимостям

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{m}}{dt} &= \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{h} - \Phi + \omega - \mathbf{m} \cdot (\nabla \mathbf{v} - \mathbf{h}) + (\Phi + \mathbf{h}) \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{h} \cdot \mathbf{m} \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \mathbf{h} - \frac{1}{2}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{m}) + (\Phi - \mathbf{h}) \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot (\Phi - \mathbf{h}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Во всех вышеприведенных кинематических соотношениях неизвестным остается произвольный симметричный тензор \mathbf{h} . Если положить его равным нулю, то получим

$$\frac{D\mathbf{p}}{Dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \Phi \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \Phi = 0 \quad (2.8)$$

Замечаем, что дифференциальное соотношение (2.8) можно рассматривать в качестве объективной производной по времени от тензора \mathbf{p} . Она обратится в производную Зарембо—Яумана [42] если только положить равным нулю ($\mathbf{z} = 0$) нелинейную составляющую тензора вращений Φ . Равенство (2.8) тогда означает, что тензор \mathbf{p} неизменен в условиях $\mathbf{h} = 0$. Если считать, что \mathbf{p} — необратимые деформации, то $\mathbf{h} = 0$ оказывается условием обратимого деформирования в условиях предваряющих пластическое течение и при разгрузке. Отметим, что такое деформирование кинематически определено. В условиях пластического течения для определенности кинематики следует указать тензор \mathbf{h} , что только из кинематических соображений невозможно. При разгрузке ($\mathbf{h} = 0$) согласно (2.8) изменяются компоненты неизменного тензора \mathbf{p} и их изменение нелинейно зависит от изменений обратимых деформаций ($\mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m}) \neq 0$).

При пластическом течении $\mathbf{h} \neq 0$. С целью определения механического смысла до сих пор произвольного тензора \mathbf{h} рассмотрим следствие закона сохранения энергии

$$\rho \frac{d\gamma}{dt} + \text{div } \mathbf{q} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.9)$$

Здесь γ — плотность распределения внутренней энергии, \mathbf{q} — вектор потока тепла, $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений. Если ввести иной термодинамический потенциал $\Psi = \gamma - TS$ (плотность распределения свободной энергии) и предположить, что $\Psi = \Psi(\mathbf{m}, T)$, то из (2.9) можно получить [3]

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{m}} (\mathbf{I} - \mathbf{m}) \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J} - T^{-2} \mathbf{q} \cdot \nabla T + T^{-1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.11)$$

Упрощающее предположение о том, что термодинамический потенциал $\Psi = \Psi(\mathbf{m}, T)$ не зависит от необратимых деформаций, является гипотетическим, позволяющем разделить консервативную и диссипативную составляющие процесса деформирования. Оно используется в абсолютном большинстве публикаций [9, 11, 18, 22] посвященных расчетам больших деформаций. В (2.11) s – плотность распределения энтропии, $\mathbf{J} = \rho s \mathbf{v} + T^{-1} \mathbf{q}$ – поток энтропии, $\boldsymbol{\varepsilon}^p = (\mathbf{I} - \mathbf{m}) \cdot \mathbf{h}$ – тензор скоростей изменения необратимых (в нашем случае пластических) деформаций \mathbf{p} . Таким способом тензор \mathbf{h} однозначно связывается с тензором $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ и дифференциальные уравнения (2.7) приобретают свою окончательную форму

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{m}}{Dt} &= \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{1}{2} \left((\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p - \mathbf{z}) \right) \\ \frac{D\mathbf{p}}{Dt} &= \boldsymbol{\varepsilon}^p - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^p \cdot \mathbf{p} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Производная по времени в (2.12) задается зависимостями (2.8). Для тензора полных деформаций Альманси \mathbf{d} следует его представление через обратимую \mathbf{m} и необратимую \mathbf{p} составляющие

$$\mathbf{d} = \mathbf{m} + \mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{m} \quad (2.13)$$

Отсюда тензором обратимых деформаций следовало бы называть тензор $\mathbf{c} = \mathbf{m} - \frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}$. Однако использование в качестве обратимых деформаций только главной линейной части последнего привело к значительным удобствам в записи дифференциального уравнения изменения обратимых деформаций (2.12) и аналога формулы Мурнагана (2.10) в областях необратимого деформирования и разгрузки. Далее будет рассматриваться случай, в котором изменение объема деформируемого материала задается только его тепловым расширением, а механически он остается несжимаемым. В этом случае из (2.10) следует [3]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= -P_1 \mathbf{I} + (1 + 3\alpha T_0 \theta)^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{d}} \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{d}), \quad \text{где } \mathbf{p} = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} &= -P_2 \mathbf{I} + (1 + 3\alpha T_0 \theta)^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{m}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}), \quad \text{где } \mathbf{p} \neq 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

В (2.14) P_1, P_2 – добавочные неизвестные функции гидростатического давления, $W = W(\mathbf{m}, \theta) = \rho_0 \Psi(\mathbf{m}, T)$ – термоупругий потенциал. Полагая деформируемый материал изотропным и механически несжимаемым, для последнего принимаем наиболее простое представление [3]

$$\begin{aligned} W &= W(J_1, J_2, \theta) = -2\mu J_1 - \mu J_2 + b J_1^2 + (b - \mu) J_1 J_2 - \chi J_1^3 + \nu_1 J_1 \theta + \\ &\quad + \nu_2 \theta^2 - \nu_3 J_1 \theta^2 - \nu_4 J_1^2 \theta - \nu_5 J_2 \theta - \nu_6 \theta^3 + \dots \\ J_1 &= \begin{cases} L_k & \text{при } \mathbf{p} = 0 \\ I_k & \text{при } \mathbf{p} \neq 0 \end{cases} \\ L_1 &= \operatorname{tr} \mathbf{d}, \quad L_2 = \mathbf{d} \cdot \mathbf{d}, \quad I_1 = \operatorname{tr} \mathbf{c}, \quad I_2 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{m} - \frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь μ – модуль сдвига, $b, \chi, \nu_m, (m = 1, 2, \dots, 6)$, – термомеханические постоянные [43]. Если в уравнении баланса энтропии (2.11) закон теплопроводности принять в

форме Фурье, то с учетом (2.15) получаем уравнение теплопроводности. В областях, деформирующихся по-разному, это уравнение имеет различия в своей записи:

в области обратимого деформирования, предваряющей пластическое течение

$$(1 + \beta_1\theta + \beta_2 \operatorname{tr} \mathbf{d}) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta_3 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{d} = g \Delta \theta \quad (2.16)$$

в пластической области

$$(1 + \beta_1\theta + \beta_2 \operatorname{tr} \mathbf{c}) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta_3 (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \cdot \cdot \mathbf{d} = g \Delta \theta - \frac{1}{2\nu_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.17)$$

в области разгрузки

$$(1 + \beta_1\theta + \beta_2 \operatorname{tr} \mathbf{c}) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta_3 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{c} = g \Delta \theta \quad (2.18)$$

$$\beta_1 = \frac{\nu_2(1 - 3\alpha T_0) - 3\nu_6}{\nu_2}, \quad \beta_2 = -\frac{\nu_3}{\nu_2}, \quad \beta_3 = -\frac{\nu_1 + \nu_5}{\nu_2}$$

Здесь g – коэффициент температуропроводности.

В качестве пластического потенциала (условия течения) далее используется следующее обобщение условия пластичности Треска–Сен-Венана [3, 43]

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max |\varepsilon_k^p| \quad (2.19)$$

$$k = k_0 \left(1 - \frac{\theta^2}{\theta_m^2} \right); \quad \theta_m = (T_m - T_0) T_0^{-1}$$

В (2.19) $\sigma_j, \varepsilon_k^p$ – главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций; k, k_0 – текущий предел пластического течения и его значение при комнатной температуре; T_m – температура плавления деформируемого материала; η – коэффициент вязкого сопротивления пластическому течению. Замыкаем построенную математическую модель деформирования принятием принципа максимума Мизеса [44] с формулированием ассоциированного закона пластического течения

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \xi \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \max |\sigma_i - \sigma_j| - 2\eta |\varepsilon_k^p| - 2k = 0; \quad \xi > 0 \quad (2.20)$$

2. Начальное обратимое деформирование. Пусть материал, термомеханические свойства которого задаются зависимостями, представленными ранее, составляет цилиндрический слой, ограниченный поверхностями $r = r_0$ и $r = R$ ($r_0 < R$). Цилиндр $r \leq r_0$ полагаем жестко закрепленным, а граничная поверхность слоя $r = R$ поворачивается вокруг центральной оси. До момента начала процесса деформирования деформации в материале слоя отсутствуют, а напряженное состояние задается единственным параметром начального поджатия: $\sigma_{rr}(r_0, 0) = \sigma_0$. Таким образом, основными искомыми переменными задачи оказываются угол закручивания $\psi = \psi(r, t)$ и угловая скорость $\omega = \frac{d\psi}{dt} = \omega(r, t)$. Кинематические начальные условия, таким образом, являются однородными: $\psi(r, 0) = 0$ и $\omega(r, 0) = 0$. Граничные условия задачи зададим в форме

$$\psi_R = \psi(R, t) = \begin{cases} at^2 & \text{при } 0 \leq t \leq t_1 \\ at_1t - \frac{1}{2}at_1^2 & \text{при } t_1 \leq t \leq t_2 \\ at_1t - \frac{1}{2}a_1(t - t_2)^2 - \frac{1}{2}at_1^2 & \text{при } t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь a, a_1, t_1, t_2, t_3 – задаваемые параметры задачи.

На первоначальном этапе процесса деформирования контакт материала с жесткими стенками осуществляется согласно закону сухого трения покоя

$$\begin{aligned} |\sigma_{r\varphi}| \leq f_0 |\sigma_{rr}| \quad \text{при} \quad r = r_0 \quad \text{и} \quad r = R \\ \omega(r_0, t) = 0, \quad \psi(r_0, t) = 0, \quad \omega(R, t) = \omega_R, \quad \psi(R, t) = \psi_R \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь f_0 – коэффициент трения покоя. Кинематические зависимости в данном случае позволяют записать

$$\begin{aligned} u_r = r(1 - \cos \psi(r, t)), \quad u_\varphi = r \sin \psi(r, t) \\ d_{rr} = -\frac{1}{2} r^2 \psi_{,r}^2 = -2d^2, \quad d_{r\varphi} = \frac{1}{2} r \psi_{,r} = d \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для компонент тензора напряжений согласно (2.14) и (2.15) можно получить

$$\sigma_{rr} = \sigma_{zz} = -P_1 - 2(\mu + b)d^2 = -\tau, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -\tau + 2\mu d^2, \quad \sigma_{r\varphi} = 2\mu d \quad (3.4)$$

Здесь записаны компоненты тензора напряжений с точностью до слагаемых второго порядка по упругим деформациям. Уравнения равновесия

$$\sigma_{rr,r} + r^{-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0, \quad \sigma_{r\varphi,r} + 2r^{-1}\sigma_{r\varphi} = 0 \quad (3.5)$$

с помощью (3.3) интегрируются, и решение такой изотермической задачи записывается в форме

$$\begin{aligned} \sigma_{r\varphi} = \frac{c}{r^2}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{zz} = \frac{c^2}{4\mu} \left(\frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r^4} \right) + \sigma_0 \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{c^2}{4\mu} \left(\frac{1}{r_0^4} - \frac{3}{r^4} \right) + \sigma_0, \quad \psi = \frac{c}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) \\ \omega = \frac{\dot{c}}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \dot{c} = \frac{dc}{dt}, \quad c = c(t) = \frac{a\mu t^2}{r_0^{-2} - R^{-2}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Решение (3.6) справедливо до момента времени $t = t_0$, когда на поверхности $r = r_0$ произойдет проскальзывание материала и начнется разогрев его за счет пристеночного трения. Принимаем, что проскальзывание произойдет раньше начала вязкопластического течения. Для этого считаем, что $f_0\sigma_0 < k$. С этого момента $t = t_0$ граничное условие (3.2) следует заменить на

$$|\sigma_{r\varphi}| = f |\sigma_{rr}| + \zeta |\omega| \quad \text{при} \quad r = r_0 \quad \text{и} \quad t > t_0 = \sqrt{\frac{f_0\sigma_0 r_0^2}{a\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{R^2} \right)}, \quad (3.7)$$

где ζ – постоянная вязкого трения; f – коэффициент сухого трения скольжения. При выполнении условий проскальзывания (3.7) начинается разогрев материала за счет пристеночного трения на поверхности $r = r_0$:

$$\theta(r, t_0) = 0, \quad \theta(r_0, t) = \alpha_1 \psi(r_0, t), \quad \theta_{,r}(R, t) = 0 \quad (3.8)$$

В (3.8) α_1 – постоянный коэффициент теплопроизводства за счет трения.

Для компонент тензора напряжений из (2.14) и (2.15) теперь следует

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \sigma_{zz} = -P_1 - 2(b + \mu)d^2 + (v_1 + 6\mu\beta)\theta - (v_3 + 18\mu\beta^2 + 3v_1\beta)\theta^2 = -\tau_1 \\ \sigma_{\varphi\varphi} = -\tau_1 + 2\mu d^2, \quad \sigma_{r\varphi} = 2(\mu - \theta(v_1 + v_3 + 3\mu\beta))d, \quad \beta = \alpha T_0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Разрешая второе из уравнений равновесия (3.5) с использованием (3.9), находим

$$d = \frac{c(t)}{2r^2(\mu - l\theta)}, \quad m_{r\varphi} = d, \quad m_{rr} = -\frac{3}{2}d^2, \quad m_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}d^2; \quad l = v_1 + v_5 + 3\mu\beta \quad (3.10)$$

Вместе с уравнением теплопроводности (следствием (2.15)) для определения неизвестных $\psi(r, t)$, $\theta(r, t)$, $c(t)$ имеем систему уравнений с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} \left(1 + \beta_1\theta + \beta_3 \frac{c^2 l}{2r^4(\mu - l\theta)^3}\right) \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\beta_3 c \dot{c}}{2r^4(\mu - l\theta)^2} &= g \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + r^{-1} \frac{\partial\theta}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial\psi}{\partial r} &= \frac{c}{r^3(\mu - l\theta)}, \quad \dot{\psi}(r_0, t) = -f\zeta^{-1}\sigma_0 + r_0^{-2}\zeta^{-1}c, \quad \psi(R, t) = \frac{at^2}{2} \\ \theta(r, t_0) &= 0, \quad \theta(r_0, t) = \alpha_1\psi(r_0, t), \quad \theta_{,r}(R, t) = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Задача (3.11), как и все последующие, разрешалась приближенно с помощью конечно-разностной схемы. Согласно найденным таким способом распределениям температуры и перемещений деформации и напряжения находятся согласно (3.9) и (3.10). Но такое решение справедливо лишь до момента времени $t = t_*$, когда на стенке $r = r_0$ выполнится условие пластического течения (2.18). В нашем случае оно сводится к требованию $\sigma_{r\varphi}(r_0, t_*) = k$. Для момента времени $t = t_*$ имеем уравнение

$$c(t_*) = k_0 r_0^2 \left(1 - \theta^2(r_0, t_*) \theta_m^{-2}\right) \quad (3.12)$$

4. Вязкопластическое течение. Область II вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ при $t > t_*$ развивается от граничной поверхности $r = r_0$ посредством продвижения ее границы $r = r_1(t)$. В области I при $r_1(t) \leq r \leq R$ материал продолжает деформироваться обратимо. Кинематические соотношения (2.12) и (2.13) в рассматриваемом случае позволяют записать:

$$\begin{aligned} v_\varphi &= r\omega, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{\partial d_{r\varphi}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) = \frac{1}{2} r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \varepsilon_{r\varphi}^e + \varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{\partial m_{r\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_{rr}^p = \frac{dp_{rr}}{dt} + 2p_{r\varphi}(\Phi_{\varphi r} + \varepsilon_{r\varphi}^p), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^p = \frac{dp_{\varphi\varphi}}{dt} + 2p_{r\varphi}(\Phi_{r\varphi} + \varepsilon_{r\varphi}^p)$$

Обратимые деформации задают напряжения в области течения согласно зависимостям

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \sigma_{zz} &= -P_2 - 2(b + \mu)m_{r\varphi}^2 + (v_1 + 6\mu\beta)\theta - (v_3 + 18\mu\beta^2 + 3v_1\beta)\theta^2 = -\tau_2 \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -\tau_1 + 2\mu m_{r\varphi}^2, \quad \sigma_{r\varphi} = 2(\mu - l\theta)m_{r\varphi} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Следствием выбранного условия вязкопластического течения и ассоциированного с ним закона имеем соотношения

$$\sigma_{r\varphi} = k + \eta \varepsilon_{r\varphi}^p, \quad \xi = \varepsilon_{r\varphi}^p (k + \eta \varepsilon_{r\varphi}^p)^{-1}, \quad \varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{1}{\eta} \left(\frac{c}{r^2} - k_0 \left(1 - \frac{\theta^2}{\theta_m^2}\right) \right) \quad (4.3)$$

Выполняя условие равенства напряжений на границе пластической области, получим уравнение для вычисления закона продвижения упругопластической границы

$$r = r_1(t) = \sqrt{\frac{c(t)}{k_0 \left(1 - \frac{\theta^2(r_1(t), t)}{\theta_m^2}\right)}} \quad (4.4)$$

Система дифференциальных уравнений для вычислений распределения температуры и угла поворота теперь состоит: из уравнений теплопроводности, записываемых отдельно для температуры $\theta^I(r, t)$ и области вязкопластического течения $\theta^{II}(r, t)$, из уравнений для углов поворота $\psi^I(r, t)$ и $\psi^{II}(r, t)$, функции времени $c(t)$ и уравнения (4.4) для закона продвижения границы области вязкопластического течения. Вместе с краевыми условиями такая задача теперь предстает в виде

$$\begin{aligned} & \left(1 + \beta_1 \theta^I + \frac{\beta_3 l c^2}{2r^4 (\mu - l \theta^I)^3} \right) \dot{\theta}^I + \frac{\beta_3 c \dot{c}}{2r^4 (\mu - l \theta^I)^2} = g (\theta_{,rr}^I + r^{-1} \theta_{,r}^I) \\ & \left(1 + \beta_1 \theta^{II} + \frac{\beta_3 l c^2}{2r^4 (\mu - l \theta^{II})^3} \right) \dot{\theta}^{II} + \frac{\beta_3 c \dot{c}}{2r^4 (\mu - l \theta^{II})^2} = \\ & = g (\theta_{,rr}^{II} + r^{-1} \theta_{,r}^{II}) - \frac{c}{2\nu_1 \eta r^2} \left(\frac{c}{r^2} - k_0 \left(1 - \frac{\theta^{II^2}}{\theta_m^2} \right) \right) \\ & \psi_{,r}^I = \frac{c}{r^3 (\mu - l \theta^I)} \\ & \psi_{,r}^{II} = \frac{\dot{c}}{r^3 (\mu - l \theta^{II})} + \frac{lc}{r^3 (\mu - l \theta^{II})} \dot{\theta}^{II} + \frac{2}{\eta} \left(\frac{c}{r^3} - \frac{k_0}{r} \left(1 - \frac{\theta^{II^2}}{\theta_m^2} \right) \right) \\ & c(t) = k_0 r_1^2 \left(1 - \frac{(\theta^I(r_1, t))^2}{\theta_m^2} \right), \quad \theta^{II}(r_0, t) = \alpha_1 \psi^{II}(r_0, t), \quad \theta^I(r_1, t) = \theta^{II}(r_1, t) \\ & \theta_{,r}^I(R, t) = 0, \quad \psi^I(R, t) = \frac{1}{2} a t^2, \quad \psi^I(r_0, t) = -f \zeta^{-1} \sigma_0 + r_0^{-2} \zeta^{-1} c(t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Приближенное численное разрешение задачи (4.5) встраивается таким способом в общий алгоритм расчетов. Для этого приходится использовать две изменяющихся на каждом временном шаге расчетов сетки дискретизации расчетной области. В области обратимого деформирования $r = r_{i+1} + h_{i+1}^e j$, $j = 0, N^e - 1$, $h_{i+1}^e = (1 - r_{i+1})(N^e)^{-1}$. В области вязкопластического течения $r = r_0 + h_{i+1}^p j$, $j = 1, N^p$, $h_{i+1}^p = (r_{i+1} - r_0)(N^p)^{-1}$. На каждом временном шаге расчетов $t = t_* + \Delta t(i + 1)$, $i = 0, N$ сетка меняется с учетом изменения положения упруговязкопластической границы. Значения угла поворота и температуры в узлах новой сетки на предыдущем временном шаге находятся интерполяцией.

Согласно рассчитанным распределениям температуры $\theta(r, t)$, угла поворота $\psi(r, t)$ и значений функций $c(t)$ определяются распределения иных искомым величин $\omega(r, t)$, $p_{r\varphi}(r, t)$, $m_{r\varphi}(r, t)$, $\sigma_{r\varphi}(r, t)$. Для диагональных компонент деформаций следует система уравнений

$$\begin{aligned} m_{rr} + m_{\varphi\varphi} &= -m_{r\varphi}^2, \quad p_{rr} + p_{\varphi\varphi} = -2p_{r\varphi}^2, \quad m_{rr} = p_{\varphi\varphi} - \frac{3}{2} m_{r\varphi}^2 - 2m_{r\varphi} p_{r\varphi} \\ \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} &= \varepsilon_{\varphi\varphi}^p + 2\varepsilon_{r\varphi}^p p_{r\varphi} + 4\varepsilon_{r\varphi} p_{r\varphi} (m_{\varphi\varphi} - 1)(m_{rr} + m_{\varphi\varphi} - 2)^{-1} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Напряжение σ_{rr} находится интегрированием первого уравнения из (3.5) с учетом (4.2). По найденному σ_{rr} вычисляются $\sigma_{\varphi\varphi}$ и неизвестная функция $p(r, t)$ добавочного гидростатического давления.

5. Деформирование при постоянной и уменьшающейся угловой скорости. Согласно задаваемым уравнениям (3.1) после момента времени $t = t_1$ угловая скорость $\omega_R(t) = at_1$ становится постоянной. Область вязкопластического течения при $t > t_1$ продолжает развиваться. Рост области продолжается даже после момента времени t_2 , когда вращение тормозится. При $t > t_2$ находится момент времени $t = t^*$ ($t^* > t_2$), после которого граница области течения, остановившись, начинает продвижение в обратную сторону. Последующий закон движения обозначим через $r = r_2(t)$. Теперь деформируемый материал разделен на три области, где его деформирование протекает по-разному: в области $r_0 \leq r \leq r_2(t)$ продолжается вязкопластическое течение; в области разгрузки $r_2(t) \leq r \leq r_1(t^*)$ пластические деформации не меняются; в области $r_1(t^*) \leq r \leq R$ деформирование обратимо.

Уравнения теплопроводности (2.16)–(2.18) следует записать применительно к рассматриваемому случаю. Таким способом получаем систему уравнений вместе с крайними условиями вполне аналогичную (4.5). Из-за громоздкости здесь ее не приводим. Решение такой задачи осуществляется тем же конечно-разностным методом на изменяющихся на каждом временном шаге сетках.

С момента времени $t = t_3$ (находится из соотношения $c(t_3) = f\sigma_0 r_0^2$) на поверхности $r = r_0$ проскальзывание завершается и выполняется условие прилипания (3.2) так, что $\psi(r_0, t) = \psi(r_0, t_3)$. При $t > t_3$ материал начинает остывать; свяжем такое остывание с условием

$$\theta(r_0, t) = \theta(r_0, t_3)(1 - \alpha_2(t - t_3)) \quad (5.1)$$

Продвигающаяся граница области вязкопластического течения $r = r_2(t)$ в некоторый момент времени $t = t_4$ достигает поверхности $r = r_0$ и область вязкопластического течения исчезает. Для дальнейших расчетов остаются две области: область с накопленными необратимыми деформациями $r_0 \leq r \leq r_1(t^*)$ и область, в которой происходило только обратимое деформирование $r_1(t^*) \leq r \leq R$. Момент времени $t = t_4$ вычисляется решением уравнения

$$r_0^2 k_0 \left(1 - \frac{\theta^2(r_0, t_4)}{\theta_m^2} \right) = c(t_4) \quad (5.2)$$

Поворот внешней жесткой поверхности $r = R$ останавливается в момент времени $t = t_5 = ab^{-1}t_1 + t_2$. После этого (при $t > t_5$) материал продолжает охлаждаться и в нем продолжается перераспределение напряжений вплоть до полного выравнивания температуры до комнатной по всему продеформированному материалу.

6. Результаты расчетов. При проведении расчетов независимые безразмерные переменные выбирались в форме: $\tilde{r} = rR^{-1}$, $\tilde{t} = at$, напряжения относились к модулю сдвига μ . Постоянными задачи и материала предписывались следующие значения: $k_0\mu^{-1} = 0.00621$, $r_0R^{-1} = 0.5$, $ab^{-1} = 1$, $\zeta a\mu^{-1} = 0.005$, $a\eta\mu^2 = 0.004$, $\beta_1 = 0.5$, $\beta_3 = -0.5$, $l\mu^{-1} = 0.001$, $\nu_1\mu^{-1} = 0.02$, $f\sigma_0\mu^{-1} = 0.005$, $\alpha_1 = 100$, $\alpha_2 = 50$, $gR^2 = 10$. Приведенные далее графические зависимости были получены именно при таких значениях постоянных.

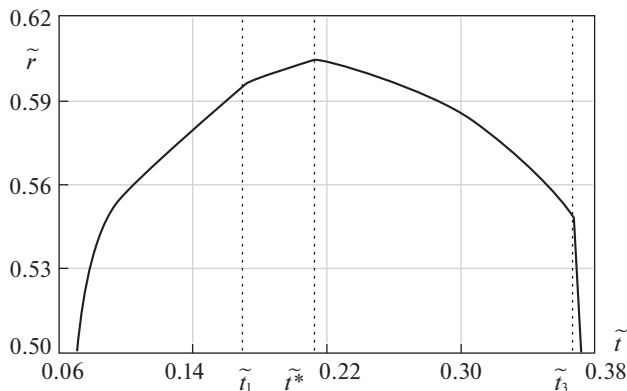


Рис. 1. Изменение области вязкопластического течения в процессе деформирования.

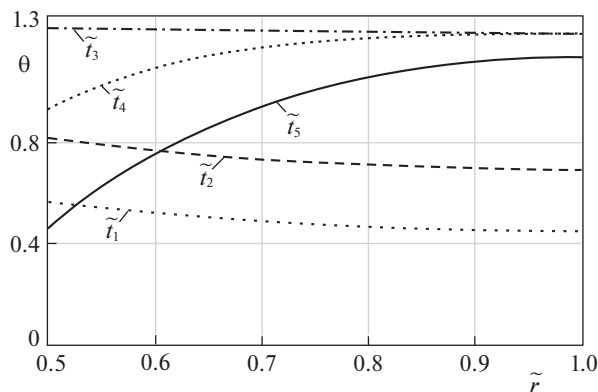


Рис. 2. Распределение температуры в различные моменты времени.

Графическая зависимость рис. 1 иллюстрирует развитие и схлопывание области вязкопластического течения со временем. Вертикальными прямыми пунктирными отрезками на рис. 1 отмечены характерные моменты времени \tilde{t}_1 , \tilde{t}^* и \tilde{t}_3 , когда угловая скорость ω_R перестает расти, когда упруговязкопластическая граница начинает двигаться в обратную сторону и когда заканчивается проскальзывание соответственно.

Распределение температуры по материалу в разные моменты времени показано графически на рис. 2. Тепло производится за счет пристеночного трения и необратимого деформирования.

Ниспадающие кривые рис. 2 соответствуют моментам времени, при которых отток тепла через границу $r = R$ превалирует над его производством за счет вязкопластического течения.

На рис. 3 показано распределение угла поворота в различные моменты времени.

Заключение. Рассматриваемая здесь задача рассчитывает не отдельное состояние упруговязкопластического тела в зависимости от действий конкретных нагрузок, а процесс упруговязкопластического деформирования от его начала до полной разгрузки и остывания. Возможное производство тепла в процессе связывается с трением матери-

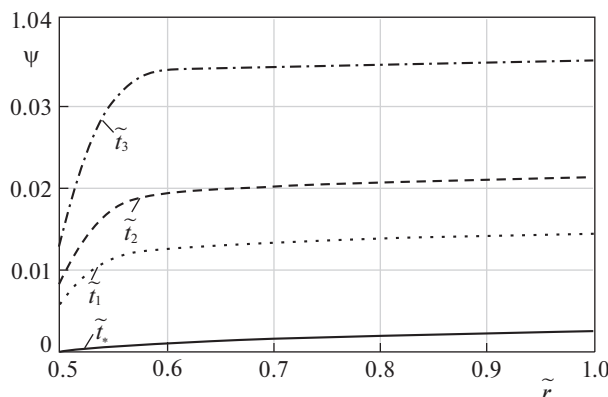


Рис. 3. Распределение угла поворота в различные моменты времени.

ла о шероховатую его границу и его необратимым деформированием. При этом совершенно необходимо подчеркнуть определяющую роль дифференциальных уравнений изменения (переноса) обратимых и необратимых деформаций. Именно следуя такому подходу (соотношения (2.12) и следующие из них зависимости (4.1)) удается получить систему дифференциальных уравнений, последующее разрешение которой в рамках сеточного конечно-разностного метода уже не встречает дополнительных трудностей. Для расчетов процессов неизоотермического деформирования в неоднородных задачах теории при таком подходе представляется возможным создание соответствующего вычислительного модуля расчетов. Для этого представленное решение может послужить в качестве средства тестирования создаваемых алгоритмов и вычислительных процедур. Преимущество расчетов на такой основе может оказаться значимым.

Работа выполнена в рамках проекта РФФ (грант 22-11-00163).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *de Groot С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
2. *Мясников В.П.* Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.
3. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В.* Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.
4. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
5. *Волков И.А., Коротких Ю.Г.* Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. М.: Физматлит, 2008. 424 с.
6. *Волков И.А., Игумнов Л.А.* Введение в континуальную механику поврежденной среды. М.: Физматлит, 2017. 310 с.
7. *Lee E.H.* Elastic-plastic deformation at finite strains // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1969. V. 36. № 1. P. 1–6.
8. *Левитас В.И.* Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев.: Наук. думка, 1987. 231 с.
9. *Naghdi P.M.* A critical review of the state of finite plasticity // ZAMP. 1990. V. 41. P. 315–394.
10. *Meyers A., Schiebye P., Bruhns O.T.* Some comments on objective rates of symmetric Eulerian tensors with application to Eulerian strain rates // Acta Mech. 2000. V. 139. P. 91–103.
11. *Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A.* A consistent finite elastoplasticity theory combining additive and multiplicative decomposition of the stretching and deformation gradient // Int. J. Plasticity. 2000. V. 16. P. 143–177.

12. *Khoei A.R., Bakhshiani A., Mofid M.* An implicit algorithm for hypoelasto-plastic and hypoelasto-viscoplastic endochronic theory in finite strain isotropic-kinematic-hardening model // *Int. J. Solids&Struct.* 2003. V. 40 (13–14). P. 3393–3423.
13. *Asghari M., Naghdabadi R.* On the objective corotational rates of Eulerian strain measures. // *J. Elasticity.* 2008. V. 90. P. 175–207.
14. *Shen L.-J.* Constitutive relations for isotropic or kinematic hardening at finite elastic-plastic deformations // *Int. J. Solids&Struct.* 2006. V. 43. P. 5613–5627.
15. *Султанов Л.У.* Исследование конечных упругопластических деформаций: алгоритм решения, численные примеры // *Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* 2017. Т. 159. кн. 4. С. 509–517.
16. *Shutov A.V., Ihlemann J.* Analysis of some basic approaches to finite strain elasto-plasticity in view of reference change // *Int. J. Plasticity.* 2014. V. 63. P. 183–197.
17. *Shutov A.V., Larichkin A.Y., Shutov V.A.* Modelling of cyclic creep in the finite strain range using a nested split of the deformation gradient // *ZAMM.* 2017. V. 97. № 9. P. 1083–1099.
18. *Simo J.C.* Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory // *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 1992. V. 99. P. 61–112.
19. *Stein E., Sagar G.* Theory and finite element computation of cyclic martensitic phase transformation at finite strain // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2007. V. 74. P. 1–31.
20. *Helm D.* Stress computation in finite thermoviscoplasticity // *Int. J. Plasticity.* 2006. V. 22 (9). P. 1699–1727.
21. *Har J.* A unified stress update algorithm for explicit transient shell dynamics with combined isotropic-kinematic hardening in Eulerian rate-type phenomenological finite elasto-plasticity models // *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 2007. V. 196. P. 3248–3275.
22. *Голованов А.И., Султанов Л.У.* Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред деформаций. Казань: КФУ, 2009. 465 с.
23. *Wriggers P.* *Nonlinear Finite Element Methods.* Springer. Sci.&Business Media, 2008. 560 p.
24. *Shutov A.V.* Efficient implicit integration for finite-strain viscoplasticity with a nested multiplicative split // *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 2016. V. 306. P. 151–174.
25. *Xia Z., Ellyin F.A.* A stress rate measure for finite elastic plastic deformations // *Acta Mech.* 1993. V. 98. P. 1–14.
26. *Ивлев Д.Д.* Из истории дискуссий в механике. Три дискуссии // *Теор. и прикл. мех.* 2012. Вып. 27. С. 5–10.
27. *Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И.* Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986. 232 с.
28. *Быковцев Г.И., Шитиков А.В.* Конечные деформации упругопластических сред // *Докл. АН СССР.* 1990. Т. 311. № 1. С. 59–62.
29. *Чернышов А.Д.* Определяющие уравнения для упругопластического тела при конечных деформациях // *Изв. РАН. МТТ.* 2000. № 1. С. 120–128.
30. *Новокушанов Р.С., Роговой А.А.* О построении эволюционных определяющих соотношений для конечных деформаций // *Изв. РАН. МТТ.* 2002. № 4. С. 77–95.
31. *Роговой А.А.* Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // *ПМТФ.* 2005. Т. 46. № 5. С. 138–149.
32. *Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтаныук Л.В.* Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // *Докл. РАН.* 1996. Т. 347. № 2. С. 199–201.
33. *Бегун А.С., Буренин А.А., Ковтаныук Л.В.* Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов // *Докл. РАН.* 2016. Т. 470. № 3. С. 275–278.
34. *Белых С.В., Буренин А.А., Ковтаныук Л.В., Прокудин А.Н.* Об учете вязких свойств материалов в теории больших упругопластических деформаций // *Чебышевский сб.* 2017. Т. 18. № 3. С. 108–130.
35. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Lemza A.O.* On the mechanisms of production of large irreversible strains in materials with elastic, viscous and plastic properties // *Arch. Appl. Mech.* 2020. V. 90 (4). P. 829–845.

36. *Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L.* Mathematical modelling of the production process of irreversible strains under the heating and cooling of a flat heavy layer on an inclined surface // *Lobachevskii J. Math.* 2021. V. 42. № 8. P. 1998–2005.
37. *Буренин А.А., Ковтанык Л.В., Панченко Г.Л.* Неизотермическое движение упруговязкопластической среды в трубе в условиях изменяющегося перепада давления // *Докл. РАН.* 2015. Т. 464. № 3. С. 284–287.
38. *Буренин А.А., Ковтанык Л.В., Панченко Г.Л.* Развитие и торможение вязкопластического течения в слое в условиях его нагрева за счет трения о шероховатую плоскость // *ПМТФ.* 2015. Т. 56. № 4. С. 101–111.
39. *Prokudin A.N., Firsov S.V.* Antiplane strain of hardening elastoviscoplastic medium // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phus.* 2018. V. 11. № 4. P. 399–400.
40. *Бегун А.С., Ковтанык Л.В.* Вискозиметрическое течение упруговязкопластического материала при его нагреве вследствие пристеночного трения // *ПМТФ.* 2021. № 5. С. 89–99.
41. *Лурье А.И.* Дифференцирование по тензорному аргументу // в сб.: *Вопросы математической физики.* Л.: Наука, 1976. С. 48–57.
42. *Прагер В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 312 с.
43. *Ковтанык Л.В., Шитиков А.В.* О теории больших упругопластических деформаций материалов при учете температурных и реологических эффектов // *Вестн. ДВО РАН.* 2006. № 4. С. 87–93.
44. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.

Calculations of Large Nonisothermal Deformations of Elastoviscoplastic Materials

A. S. Begun^{a,b,#}, A. A. Burenin^{a,##}, and L. V. Kovtanyuk^{a,b,###}

^a *Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy, FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia*

^b *Institute of Automation and Control Processes, FEB RAS, Vladivostok, Russia*

[#] *e-mail: ustinova@iacp.dvo.ru*

^{##} *e-mail: aab@imim.ru*

^{###} *e-mail: lk@iacp.dvo.ru*

Proposed method and the results of calculations are discussed in the coupled problem of the theory of large deformations on the deformation of the material of a cylindrical layer between rigid cylindrical surfaces. The material of the layer is assumed to be elastoviscoplastic, its contact with rough boundaries when turning the outer of them occurs with friction, which generates heat, and irreversible deformation is also considered calorific. The full cycle of the process of quasi-static deformation is calculated from its beginning to complete unloading and cooling of the material layer. The time points of the beginning and end of the sliding of the material along its rigid boundary surface, the beginning and end of its near-wall viscoplastic flow are indicated.

Keywords: elasticity, plasticity, viscoplastic flow, large deformations, thermal conductivity, coupled thermal deformation

REFERENCES

1. *de Groot S.R., Mazur P.* Non-equilibrium Thermodynamics. Amsterdam: North-Holland, 1962. 510 p.
2. *Myasnikov V.P.* Equations of motion of elastic-plastic materials under large deformations // *Vestn. FEB RAS*, 1996, no. 4, pp. 8–13. (in Russian)
3. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V.* Large Irreversible Deformations and Elastic Aftereffect. Vladivostok: Dalnauka, 2013. 312 p. (in Russian)
4. *Rabotnov Yu.N.* Creep of Structural Elements. Moscow: Nauka, 1966. 752 p. (in Russian)
5. *Volkov I.A., Korotkikh Yu.G.* Equations of State for Viscoelastic-Plastic Media with Damage. Moscow: Fizmatlit, 2008. 424 p. (in Russian)

6. *Volkov I.A., Igumnov L.A.* Introduction to the Continuum Mechanics of a Damaged Medium. Moscow: Fizmatlit, 2017. 310 p. (in Russian)
7. *Lee E.H.* Elastic-plastic deformation at finite strains // *Trans ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.*, 1969, vol. 36, no. 1, pp. 1–6.
8. *Levitas V.I.* Large Elastoplastic Deformations of Materials at High Pressure. Kyiv: Nauk. Dumka, 1987. 231 p. (in Russian)
9. *Naghdi P.M.* A critical review of the state of finite plasticity // *ZAMP*, 1990, 41, pp. 315–394.
10. *Meyers A., Schiebye P., Bruhns O.T.* Some comments on objective rates of symmetric Eulerian tensors with application to Eulerian strain rates // *Acta Mech.*, 2000, vol. 139, pp. 91–103.
11. *Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A.* A consistent finite elastoplasticity theory combining additive and multiplicative decomposition of the stretching and deformation gradient // *Int. J. Plasticity*, 2000, vol. 16, pp. 143–177.
12. *Khoei A.R., Bakshiani A., Mofid M.* An implicit algorithm for hypoelasto-plastic and hypoelasto-viscoplastic endochronic theory in finite strain isotropic-kinematic-hardening model // *Int. J. Solids&Struct.*, 2003, vol. 40 (13–14), pp. 3393–3423.
13. *Asghari M., Naghdabadi R.* On the objective corotational rates of Eulerian strain measures. // *J. Elasticity*, 2008, vol. 90, pp. 175–207.
14. *Shen L.-J.* Constitutive relations for isotropic or kinematic hardening at finite elastic-plastic deformations // *Int. J. Solids&Struct.*, 2006, vol. 43, pp. 5613–5627.
15. *Sultanov L.U.* Analysis of large elastic-plastic deformations: Integration algorithm and numerical examples // *Uch. Zap. Kazan. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2017, vol. 159, no. 4, pp. 509–517. (in Russian)
16. *Shutov A.V., Ihlemann J.* Analysis of some basic approaches to finite strain elasto-plasticity in view of reference change // *Int. J. Plasticity*, 2014, vol. 63, pp. 183–197.
17. *Shutov A.V., Larichkin A.Y., Shutov V.A.* Modelling of cyclic creep in the finite strain range using a nested split of the deformation gradient // *ZAMM*, 2017, vol. 97, no. 9, pp. 1083–1099.
18. *Simo J.C.* Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory // *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1992, vol. 99, pp. 61–112.
19. *Stein E., Sagar G.* Theory and finite element computation of cyclic martensitic phase transformation at finite strain // *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 2007, vol. 74, pp. 1–31.
20. *Helm D.* Stress computation in finite thermoviscoplasticity // *Int. J. Plasticity*, 2006, vol. 22 (9), pp. 1699–1727.
21. *Har J.* A unified stress update algorithm for explicit transient shell dynamics with combined isotropic-kinematic hardening in Eulerian rate-type phenomenological finite elasto-plasticity models // *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 2007, vol. 196, pp. 3248–3275.
22. *Golovanov A.I., Sultanov L.U.* Mathematical Models of Computational Nonlinear Mechanics of Deformable Media of Deformations. Kazan: KFU, 2009. 465 p. (in Russian)
23. *Wriggers P.* Nonlinear Finite Element Methods. Springer. Sci.&Business Media, 2008. 560 p.
24. *Shutov A.V.* Efficient implicit integration for finite-strain viscoplasticity with a nested multiplicative split // *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2016, vol. 306, pp. 151–174.
25. *Xia Z., Ellyin F.* A stress rate measure for finite elastic plastic deformations // *Acta Mech.*, 1993, vol. 98, pp. 1–14.
26. *Ivlev D.D.* From the history of discussions in mechanics. Three discussions // *Theoret.&Appl. Mech.*, 2012, iss. 27, pp. 5–10. (in Russian)
27. *Pozdeev A.A., Trusov P.V., Nyashin Yu.I.* Large Elastoplastic Deformations: Theory, Algorithms, Applications. Moscow: Nauka, 1986. 232 p. (in Russian)
28. *Bykovtsev G.I., Shitikov A.V.* Finite deformations of elastoplastic media // *Dokl. Math.*, 1990, vol. 35, no. 3, pp. 297–299.
29. *Chernyshov A.D.* Constitutive equations for an elastic-plastic body at finite deformations // *Mech. Solids*, 2000, no. 1, pp. 102–108.
30. *Novokshanov R.S., Rogovoi A.A.* On the construction of evolutionary constitutive relations for finite deformations // *Mech. Solids*, 2002, no. 4, pp. 63–78.
31. *Rogovoi A.A.* Constitutive relations for finite elastic-inelastic deformations // *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2005, vol. 46, no. 5, pp. 730–739.

32. *Burenin A.A., Bykovtsev G.I., Kovtanyuk L.V.* On one simple model for an elastoplastic medium under finite deformations // *Dokl. Phys.*, 1996, vol. 41, no. 3, pp. 127–129.
33. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V.* Large irreversible deformations under changing mechanisms of their production and the problem of specifying plastic potentials // *Dokl. Phys.*, 2016, vol. 61, no. 9, pp. 463–466.
34. *Belykh S.V., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Prokudin A.N.* On accounting of viscous properties of materials in the theory of large elastoplastic strains // *Chebyshevskii Sb.*, 2017, vol. 18 (3), pp. 109–130. (in Russian)
35. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Lemza A.O.* On the mechanisms of production of large irreversible strains in materials with elastic, viscous and plastic properties // *Arch. Appl. Mech.*, 2020, vol. 90 (4), pp. 829–845.
36. *Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L.* Mathematical modelling of the production process of irreversible strains under the heating and cooling of a flat heavy layer on an inclined surface // *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 8, pp. 1998–2005.
37. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L.* Nonisothermal motion of an elastoviscoplastic medium through a pipe under a changing pressure drop // *Dokl. Phys.*, 2015, vol. 60 (9), pp. 419–422.
38. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L.* Development and deceleration of viscoplastic flow in a layer heated by friction on a rough plane // *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2015, vol. 56 (4), pp. 626–635.
39. *Prokudin A.N., Firsov S.V.* Antiplane Strain of Hardening Elastoviscoplastic Medium // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2018, vol. 11, no. 4, pp. 399–400.
40. *Begun A.S., Kovtanyuk L.V.* Viscometric flow of elastoplastic material heated by wall friction // *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2021, vol. 62 (5), pp. 779–788.
41. *Lurie A.I.* Differentiation with respect to tensor argument // *Probl. Math. Phys.*, 1976, pp. 48–57. (in Russian)
42. *Prager W.* Introduction to Mechanics of Continua. Boston: Ginn, 1961. 230 p.
43. *Kovtanyuk L.V., Shitikov A.V.* On the theory of large elastoplastic deformations of materials with temperature and rheological effects taken into account // *Vestn. DVO RAN*, 2006, no. 4, pp. 87–93. (in Russian)
44. *Ishlinskii A.Yu., Ivlev D.D.* Mathematical Theory of Plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2001. 704 p. (in Russian)

УДК 531.31

РАВНОВЕСИЕ УПРУГОГО ТЕЛА С ЗАКРУГЛЕННЫМИ КРОМКАМИ НА УПРУГОМ НАКЛОННОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

© 2022 г. А. А. Зобова^{1,*}, И. Г. Горячева^{1,2,**}

¹ МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: alexandra.zobova@math.msu.ru

**e-mail: goryache@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 15.06.2022 г.

После доработки 15.07.2022 г.

Принята к публикации 25.07.2022 г.

Рассмотрена задача о равновесии упругого тела с плоским основанием и закругленными кромками на наклонном полупространстве из того же материала в поле силы тяжести. Получены уравнения, определяющие границы области контактного взаимодействия и подобластей частичного проскальзывания и сцепления на ней. Изучено влияние механических и геометрических характеристик взаимодействующих тел и коэффициента трения на структуру области контактного взаимодействия и угол поворота тела вследствие деформаций. Построены графики распределений нормальных и касательных напряжений в области контактного взаимодействия в зависимости от угла наклона основания и расположения центра масс упругого тела. Определено условие его скольжения по основанию.

Ключевые слова: равновесие упругого тела, сухое трение, частичное проскальзывание, наклонное основание

DOI: 10.31857/S0032823522050137

1. Введение. Задача о равновесии тела на деформируемом основании является классической задачей теории упругости [1–4]. Основное внимание при ее исследовании уделяется таким вопросам, как определение областей контактного взаимодействия, сближения взаимодействующих тел, а также распределения напряжений в деформируемом материале при заданных независимых друг от друга прижимной и касательной нагрузках и моменте. В теоретической механике в подобных задачах определяются возможные положения равновесия систем тел под действием некоторой заданной внешней силы, чаще всего, силы тяжести. При этом вопрос определения компонент реакции, т.е. прижимной и касательной нагрузки и момента, обеспечивающих равновесие, для систем с сухим трением представляет значительную сложность [6, 7]. В связи с этим модели контактного взаимодействия между телами значительно упрощаются. Так, например, при решении задачи о равновесии системы тел в [8] контакт между телами сложной формы предполагается сосредоточенным в трех точках, а трение между телами задается классическим законом Кулона–Амонтона.

В представленной работе подходы теории упругости и теоретической механики объединяются при исследовании равновесия тела на наклонной плоскости с сухим трением. Эта задача является составной частью многих практических задач: например, в динамике мобильных роботов (например, [9, 10]), в том числе при движении в сложной среде с препятствиями [11], задачах о движении гранулированных сред [12],

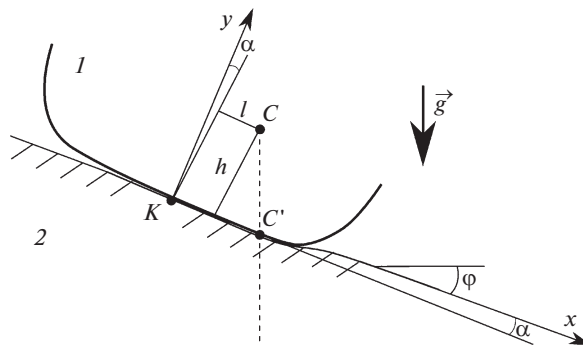


Рис. 1. Схема контакта упругого тела с основанием.

при экспериментальном определении параметров взаимодействия объектов в различных условиях [13, 14].

Рассматривается равновесие упругого цилиндрического тела на наклонном полупространстве из того же материала в поле силы тяжести. Предполагается, что контактирующая поверхность тела состоит из плоского участка и закругленных кромок. Вследствие деформируемости контактирующих тел и действия силы тяжести упругое тело поворачивается на некоторый угол, и в области контактного взаимодействия возникает несимметричное распределение нормальных p и касательных напряжений q , которое определяется решением статической задачи теории упругости [4, 15], учитывающим существование подобластей скольжения и сцепления поверхностей в области их контакта. В отличие от [4, 15], прижимающая и касательная внешние силы, действующие на тело, не являются независимыми величинами, а суть проекции силы тяжести и зависят от угла наклона полупространства к горизонту; при этом момент силы тяжести определяется как положением центра масс в теле, так и его поворотом вследствие упругих деформаций.

Целью исследования является изучение условий равновесия тела в зависимости от механических характеристик материалов взаимодействующих тел, расположения центра масс лежащего на наклонном основании тела, ширины его плоского участка, коэффициента трения и угла наклона к горизонту поверхности основания. Представлены постановка задачи (разд. 2), распределения контактных напряжений и уравнения, определяющие границы контактной области и угол наклона упругого тела (разд. 3), анализ влияния наклона основания и коэффициента трения на расположение подобластей сцепления и проскальзывания в области контактного взаимодействия (разд. 4), зависимость угла наклона упругого тела, лежащего на наклонном основании, от его геометрических, массово-инерционных и механических характеристик (разд. 5).

2. Постановка задачи. Рассмотрим (рис. 1) задачу о равновесии в поле силы тяжести тела I на полупространстве 2 из одного и того же линейно упругого материала с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . Недеформированная граница Oxz полупространства составляет угол φ с горизонтом. Тело предполагается бесконечно протяженным в направлении оси Oz , перпендикулярной к плоскости чертежа; обозначим m – его массу на единицу длины в этом направлении.

С недеформированной границей основания свяжем систему отсчета $Kxuz$, ось Ku перпендикулярна основанию, плоскость Kxu перпендикулярна образующей тела. Пусть точка K является серединой плоской части основания тела, ширину которой обозначим $2c$, радиусы кривизны кромок равны R (в точках $x = \pm c$). Наклон тела к

основанию, возникающий в результате действия на него силы тяжести и деформации контактирующих тел, обозначим α . Этот угол, как и границы области контактного взаимодействия $x \in [-a, b]$ заранее неизвестны и определяются решением контактной задачи. Обозначим $\gamma = \operatorname{tg} \alpha$, тогда форма наклоненного индентора описывается функцией:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+c)^2}{2R} - \gamma x, & -a \leq x \leq -c \\ -\gamma x, & -c \leq x \leq c \\ \frac{(x-c)^2}{2R} - \gamma x, & c \leq x \leq b \end{cases} \quad (2.1)$$

Замечание. Заметим, что форма наклоненного тела на скруглениях описывается указанной функцией лишь для малых углов α , таких что $\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$.

Сделаем следующие предположения о касательных напряжениях на деформированной границе двух тел, которая состоит из подобластей сцепления и проскальзывания точек взаимодействующих поверхностей [3, 4]:

- В области скольжения Ω_s направление касательных сил противоположно направлению относительного проскальзывания, т.е.

$$q(x) = -\mu p(x) \operatorname{sign} s(x), \quad (2.2)$$

где μ – коэффициент трения, $s(x) = (u_{x1}(x) - u_{x2}(x) - \delta_x)$ – относительное проскальзывание частиц материала, $u_{xi}(x)$ – смещение границы каждого тела ($i = 1, 2$) в результате их упругого деформирования вдоль оси Kx , $\delta_x = \operatorname{const}$ – относительное смещение в направлении оси Kx фиксированных точек тел, расположенных на некотором удалении от области контакта. Заметим, что величина этого смещения не оказывает влияние на распределение нормальных и касательных напряжений в области контактного взаимодействия.

- В области сцепления Ω_a относительное проскальзывание $s(x)$ равно нулю, т.е.

$$u_{x1}(x) - u_{x2}(x) = \delta_x, \quad (2.3)$$

и выполняется равенство

$$|q(x)| \leq \mu p(x) \quad (2.4)$$

Доказано [4], что возможна только одна зона сцепления внутри области контактного взаимодействия, т.е. $\Omega_a = [d_1, d_2]$, $\Omega_s = [-a, d_1) \cup (d_2, b]$. Суммарная реакция, действующая на тело со стороны основания, равна

$$\mathbf{R} = P\mathbf{e}_y + Q\mathbf{e}_x, \quad \text{где} \quad P = \int_{-a}^b p(x)dx, \quad Q = \int_{-a}^b q(x)dx$$

Момент касательных напряжений относительно точки K равен нулю, а момент нормальных напряжений направлен вдоль оси Kz и равен

$$\mathbf{M}_K = M_K \mathbf{e}_z, \quad M_K = \int_{-a}^b x p(x) dx$$

Составим уравнения равновесия тела. Пренебрегая перераспределением массы из-за деформации тела при контакте с основанием, будем считать, что действие силы тяжести в каждом вертикальном сечении сводится к одной силе $m\bar{g}$, приложенной в центре масс C , который находится на высоте h от плоской части основания и смещен на расстояние l от оси симметрии (рис. 1). Проекция силы тяжести на оси Ox и Oy соответственно равны $mg \sin \varphi$ и $-mg \cos \varphi$, а величина момента силы тяжести относи-

тельно точки K зависит от угла наклона тела и равна $mg(l \cos(\varphi + \alpha) + h \sin(\varphi + \alpha))$. Окончательно, условия равновесия тела имеют вид:

$$P = \int_{-a}^b p(x) dx = mg \cos \varphi \quad (2.5)$$

$$Q = \int_{-a}^b q(x) dx = mg \sin \varphi \quad (2.6)$$

$$M_K = \int_{-a}^b xp(x) dx = mg(l \cos(\varphi + \alpha) + h \sin(\varphi + \alpha)) \quad (2.7)$$

Это система уравнений относительно функций $p(x)$ и $q(x)$ и угла поворота тела α совместно с граничными условиями (2.2)–(2.4) для определения контактных напряжений служит для расчета как контактных напряжений, так и угла поворота тела при заданных точке приложения и величине силы тяжести.

3. Распределение нормальных и касательных напряжений. Обезразмерим величины, имеющие размерность длины, выбрав радиус скругления кромок тела в качестве масштаба:

$$\tilde{c} = c/R, \quad \tilde{l} = l/R, \quad \tilde{h} = h/R, \quad \tilde{x} = x/R, \quad \tilde{a} = a/R, \quad \tilde{b} = b/R, \quad \tilde{d}_i = d_i/R$$

(далее знак тильды в обозначениях опустим). Кроме того, введем безразмерный параметр

$$P^* = \frac{mg}{E^* R}; \quad E^* = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (3.1)$$

Параметр P^* задает соотношение между весом тела, радиусом скругления и упругими модулями материала.

Вследствие равенства упругих модулей тела и основания, уравнения, определяющие распределения нормальных $p(x)$ и касательных $q(x)$ контактных напряжений, разделяются. Согласно решению Мухелишвили [2], распределение нормальных напряжений определяется формулой:

$$\frac{p(x)}{E^*} = -\frac{\sqrt{(x+a)(b-x)}}{2\pi} \int_{-a}^b \frac{h'(t) dt}{(t-x)\sqrt{(t+a)(b-t)}}; \quad x \in [-a, b], \quad (3.2)$$

где функция $h'(x)$ описывает наклон границы тел и с учетом (2.1) в безразмерных переменных имеет вид:

$$h'(x) = -f'(x) = \begin{cases} -(x+c) + \gamma, & -a \leq x \leq -c \\ \gamma, & -c \leq x \leq c \\ -(x-c) + \gamma, & c \leq x \leq b \end{cases} \quad (3.3)$$

Границы области контактного взаимодействия a , b и тангенс угла наклона γ плоской части тела определяются из следующих уравнений, являющихся следствиями уравнений равновесия (2.5), (2.7) и условия сходимости интеграла (3.2):

$$\int_{-a}^b \frac{th'(t) dt}{\sqrt{(t+a)(b-t)}} = -2P^* \cos \varphi \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{E^*} \int_{-a}^b tp(t) dt = P^*(l \cos(\varphi + \alpha) + h \sin(\varphi + \alpha)) \quad (3.5)$$

$$\int_{-a}^b \frac{h'(t) dt}{\sqrt{(t+a)(b-t)}} = 0 \quad (3.6)$$

Распределение касательных напряжений, удовлетворяющее граничным условиям (2.2) и (2.4) в областях скольжения Ω_s и сцепления Ω_a , имеет вид [4]:

$$q(x) = \begin{cases} \mu p(x), & x \in \Omega_s = [-a, d_1) \cup (d_2, b] \\ \mu p(x) - q^*(x), & x \in \Omega_a = [d_1, d_2] \end{cases}$$

Функция $q^*(x)$ определяется соотношением [4]

$$\frac{q^*(x)}{E^*} = -\frac{\mu\sqrt{(d_2-x)(x-d_1)}}{2\pi} \int_{d_1}^{d_2} \frac{h'(t)dt}{(t-x)\sqrt{(d_2-t)(t-d_1)}}; \quad x \in [d_1, d_2], \quad (3.7)$$

причем $q^*(d_1) = q^*(d_2) = 0$. Границы d_1 и d_2 области сцепления определяются уравнениями:

$$\int_{d_1}^{d_2} \frac{h'(t)dt}{\sqrt{(d_2-t)(t-d_1)}} = 0 \quad (3.8)$$

$$\mu \int_{d_1}^{d_2} \sqrt{\frac{d_2-t}{t-d_1}} h'(t)dt = 2P^*(\mu \cos \varphi - \sin \varphi) \quad (3.9)$$

Последнее уравнение есть следствие уравнения равновесия (2.6).

Таким образом, решение задачи о равновесии упругого тела на наклонном основании сводится к последовательному решению системы (3.4)–(3.6) относительно a , b и $\gamma = \text{tg } \alpha$ и затем системы (3.8)–(3.9) относительно d_1 и d_2 . Параметрами первой системы являются величины P^* , угол наклона опорного полупространства φ , ширина плоской части c и положение центра масс (l, h) ; во второй системе к параметрам добавляется коэффициент трения μ .

Решение указанных систем проводилось численно с помощью библиотеки численных методов GNU Scientific Library. Заметим, что в [4] приведены точные аналитические выражения для распределения давлений (3.2) и касательных напряжений (3.7) для заданной функции (3.3), а также конечные уравнения на параметры распределений, равносильные (3.4)–(3.6) и (3.8)–(3.9). Эти выражения использовались для проверки точности численных расчетов, но так как в настоящей работе решение системы уравнений проводилось численно, то для получения результатов использовались указанные выше универсальные интегральные формулы. Это не ухудшало существенно скорости и точности получения результатов.

4. Влияние угла наклона основания и коэффициента трения на структуру области контактного взаимодействия. При расчетах в качестве базовых были выбраны следующие численные значения безразмерных параметров:

$$l = 0, \quad h = 1.2, \quad c = 0.4, \quad P^* = 2 \times 10^{-2}, \quad \mu = 0.3$$

Значение для P^* выбрано на основании значений плотности ρ и модулей упругости E , ν для некоторого типа резины ($\rho = 1100 \text{ кг/м}^3$, $E = 23 \text{ МПа}$, $\nu = 0.5$).

На рис. 2 приведена зависимость границ области контактного взаимодействия $-a$ и b и границ области сцепления d_1 и d_2 от угла наклона основания для трех значений коэффициента трения $\mu = 0.1$, $\mu = 0.2$, $\mu = 0.3$.

Коэффициент трения не влияет на ширину и положение области контактного взаимодействия. Кроме того, ясно, что при симметричном расположении центра масс ($l = 0$) структура контактной области симметрична для положительных и отрицательных углов наклона φ , поэтому далее рассматривается только случай $\varphi \geq 0$. Для указанных выше параметров при $\varphi < 12^\circ$ тело опирается как на плоскую часть, так и на оба

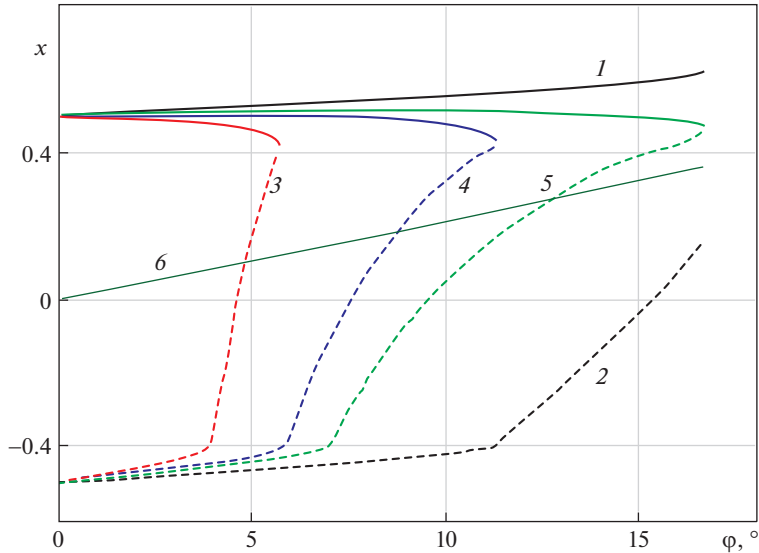


Рис. 2. Зависимость границ области контактного взаимодействия $[-a, b]$ (кривые 1 и 2) и области сцепления от угла φ для коэффициентов трения $\mu = 0.1$ (кривые 3, пунктир и сплошная), 0.2 (кривые 4), 0.3 (кривые 5). Тонкая линия 6 – координата вертикальной проекции центра масс тела на основание.

скругления. При $\varphi > 12^\circ$ контакт происходит по плоской части и правому краю тела (т.е. $a < c$).

Расчеты показывают, что если контактная область распространяется на оба (рис. 3, а,б) или один (рис. 3, в) скругленный край, то распределение давлений имеет максимум (один или два) на соответствующем участке контактной области. Давление минимально на плоской части контактирующей поверхности упругого тела. Распределение касательных напряжений в областях проскальзывания показано на рис. 3 красными линиями. При увеличении угла наклона основания величины максимальных контактных напряжений возрастают.

Коэффициент трения μ влияет на расположение и ширину областей проскальзывания и сцепления материалов. Область сцепления Ω_a всегда единственна и находится внутри контактной области, причем для малых углов распространяется на плоскую часть и оба скругления, т.е. $d_1 < -c, d_2 > c$ (рис. 3, а), на плоскую часть и правое скругление, т.е. $-c < d_1 < c, d_2 > c$ (рис. 3, б), только на скругление, т.е. $c < d_1 < d_2$ (рис. 3, в).

Максимальное значение угла наклона основания, при котором область сцепления существует и соответственно выполнено условие равновесия (3.5), определяется неравенством [4]

$$|Q| \leq \mu P,$$

откуда следует (см. (2.5), (2.6))

$$|\varphi| \leq \arctg \mu \quad (4.1)$$

При выполнении этого условия существует единственное решение системы уравнений (3.8)–(3.9). При критическом угле наклона основания $\varphi^* = \arctg \mu$ область сцепления вырождается в одну точку $d_1 = d_2$.

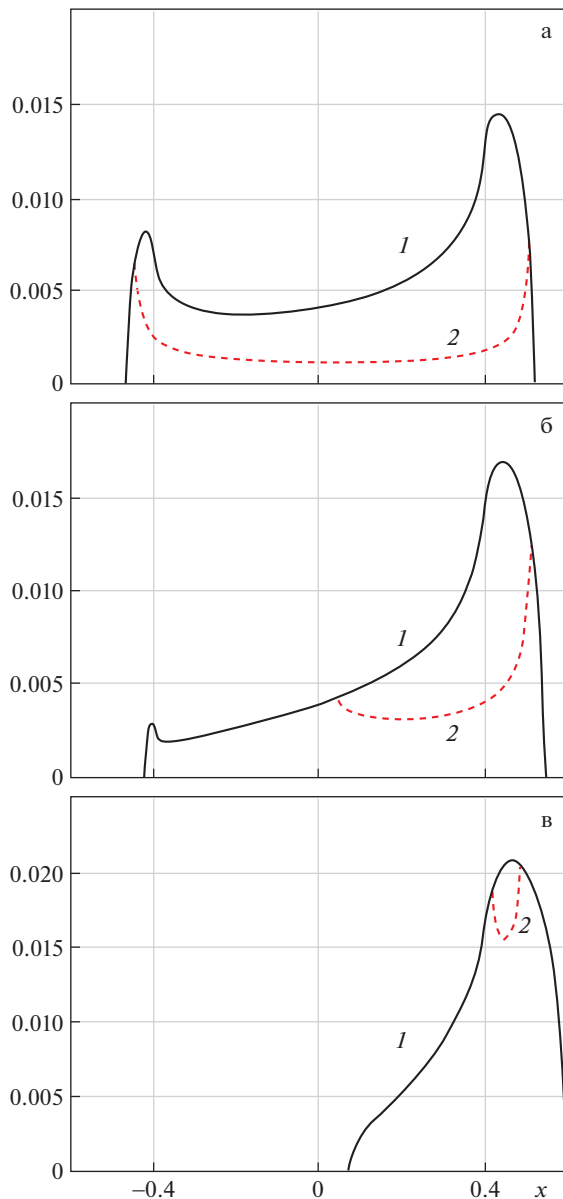


Рис. 3. Распределение нормированных нормальных $\mu p(x)/E^*$ (черная сплошная линия 1) и касательных $q(x)/E^*$ напряжений (красная штриховая линия 2) при $\varphi = 5^\circ$ (а), 10° (б), 16° (в), коэффициент трения $\mu = 0.3$.

Замечание. Поворот тела на угол α не влияет на условие равновесия (4.1), означающее отсутствие скольжения. Это связано с тем, что в линейной теории упругости вследствие предположения о малости деформаций как опоры, так и самого тела давление $p(x)$ и касательное напряжение $q(x)$ относят к недеформированной границе основания — т.е. оси Kx , поэтому касательные напряжения должны уравновешивать толь-

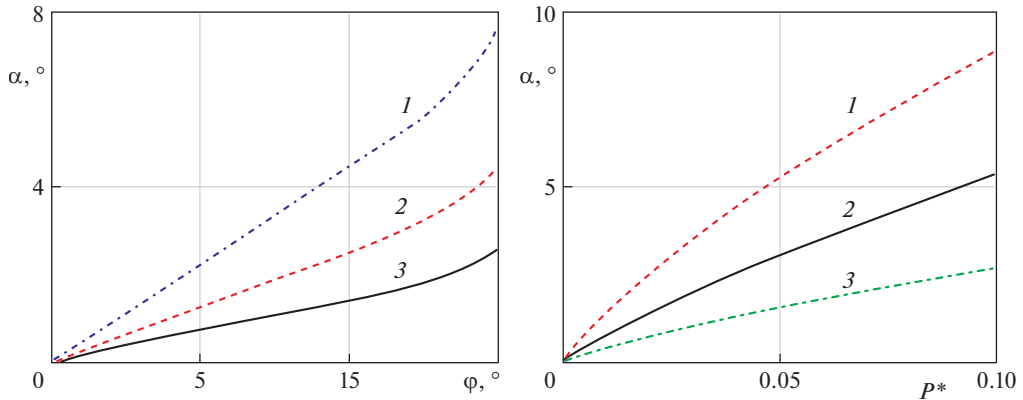


Рис. 4. Слева: зависимость угла наклона тела α от угла наклона основания ϕ . Кривая 1: $P^* = 8 \times 10^{-2}$, 2: $P^* = 4 \times 10^{-2}$, 3: $P^* = 2 \times 10^{-2}$. Справа: зависимость угла наклона тела α от параметра P^* . Кривая 1: $\phi = 15^\circ$, 2: $\phi = 10^\circ$, 3: $\phi = 5^\circ$.

ко касательную составляющую силы тяжести $Q = mg \sin \phi$ (не зависящую от α), а их момент относительно точки K равен нулю. Вообще говоря, при учете изменения наклона элементарных площадок в контактной области результирующая касательных напряжений Q не параллельна оси Kx , а их момент окажется ненулевым. Тогда модифицированные уравнения, соответствующие (3.4)–(3.6) и (3.8)–(3.9), не будут разделяться, а критический угол ϕ^* , помимо коэффициента трения μ , будет зависеть от остальных параметров задачи. Однако эти эффекты малы и в настоящей работе не учитываются.

5. Зависимость наклона тела от параметров задачи. Наклон тела α определяется как углом наклона упругого основания ϕ , так и другими параметрами задачи.

При расположении центра масс на оси симметрии тела ($l = 0$) на горизонтальном основании ($\phi = 0$) тело не наклоняется: $\alpha = 0$. На рис. 4, слева, приведена зависимость наклона тела α от угла ϕ при разных значениях параметра P^* . Правая часть рис. 4 показывает зависимость α от P^* при фиксированных углах наклона основания ϕ . Напомним, см. (3.1), что параметр P^* увеличивается при увеличении веса тела, либо при уменьшении жесткости материала E^* , либо при уменьшении радиуса скругления R (и одновременном пропорциональном уменьшении остальных параметров, имеющих размерность длины). Видно, что чем больше угол наклона основания ϕ , тем больше угол наклона α , причем, чем больше безразмерный параметр P^* , тем более выражен этот эффект. При этом в пределе при нулевом значении P^* (при нулевом весе тела $mg = 0$ или абсолютно жестком материале $E^* = +\infty$) тело не поворачивается $\alpha = 0$ даже при ненулевых углах наклона основания $\phi \neq 0$ (рис. 4, справа).

Кроме того, наклон тела существенно зависит от координат (l , h) центра масс тела. Как было указано выше, влияние деформаций в области контактного взаимодействия на относительное положение центра масс внутри тела пренебрежимо мало, поэтому величины l и h считаются постоянными. Момент массовой силы тяжести, действующей на тело, вычисляется как момент сосредоточенной силы, равной mg и приложенной к центру масс. Координата вертикальной проекции центра масс тела (см. рис. 1) для малых углов α может быть вычислена по формуле:

$$x_{c'} = l + h \operatorname{tg}(\phi + \alpha)$$

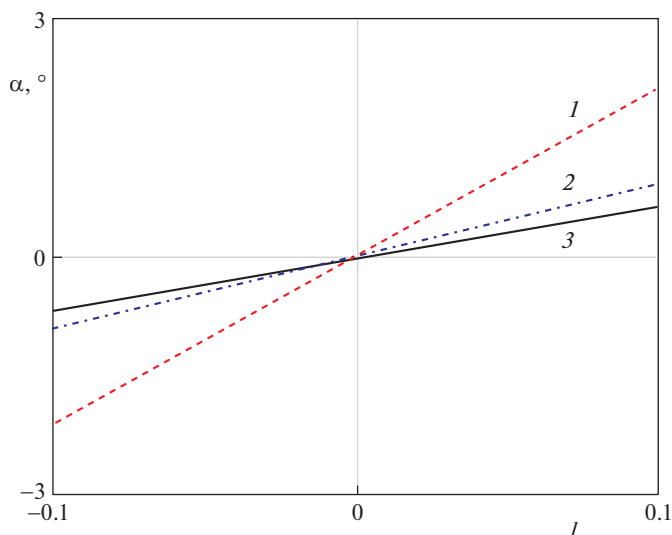


Рис. 5. Зависимость угла наклона тела α от сдвига l центра масс от оси симметрии для $\varphi = 0$. Значения параметров: 1 – $h = 1.2$, $c = 0.4$; 2 – $h = 3.5$, $c = 0.4$; 3 – $h = 1.2$, $c = 0.2$.

Условие положительности давлений $p(x) > 0$ внутри области контакта и условие равновесия (3.6) влечет неравенство $-a < x_C < b$, т.е. центр масс должен проектироваться внутрь области контактного взаимодействия. На рис. 2 положение проекции центра масс внутри области контактного взаимодействия отмечено тонкой линией (приведен случай симметричного расположения центра масс $l = 0$).

Если центр масс расположен несимметрично $l \neq 0$, то наклон тела возникает и на горизонтальном основании $\varphi = 0$. Так как наклон определяется величиной момента силы тяжести (см. (2.7)), то чем больше параметры l и h , тем больше наклон α . При уменьшении ширины c плоской части тела, угол наклона также увеличивается. Эти утверждения подтверждаются результатами расчета угла наклона α для $\varphi = 0$ при изменении параметра l при значениях $h = 1.2, 3.5$ и $c = 0.2, 0.4$ (рис. 5). Заметим, что при отрицательных значениях смещения центра масс $l < 0$, угол наклона тела на горизонтальном основании отрицателен $\alpha < 0$. (Для приведенных расчетов значение параметра $P^* = 2 \times 10^{-2}$, зависящего от механических параметров материала, не менялось.)

Аналогичный эффект наблюдается и при наклоне основания: при увеличении φ угол наклона тела α тем больше, чем больше высота h и смещение центра масс l и чем меньше ширина плоской части c (рис. 6). Две приведенные на этом рисунке кривые ($l = 0.05$, $l = 0.1$) имеют вертикальные касательные при $\varphi = 15.23^\circ$ и $\varphi = 13.35^\circ$: это означает, что указанные углы являются предельными, для которых равновесие тела возможно. Для больших углов проекция центра масс x_C выходит из области контакта и происходит переворот тела через переднюю кромку (см. рис. 7, представлены зависимости границ области контактного взаимодействия и подобластей сцепления и скольжения для несимметричного случая при $l = 0.1$, ср. с симметричным случаем, показанным на рис. 2).

Заключение. Проведено исследование условий равновесия упругого тела, представляющего собой бесконечный цилиндр, контактирующая поверхность которого имеет

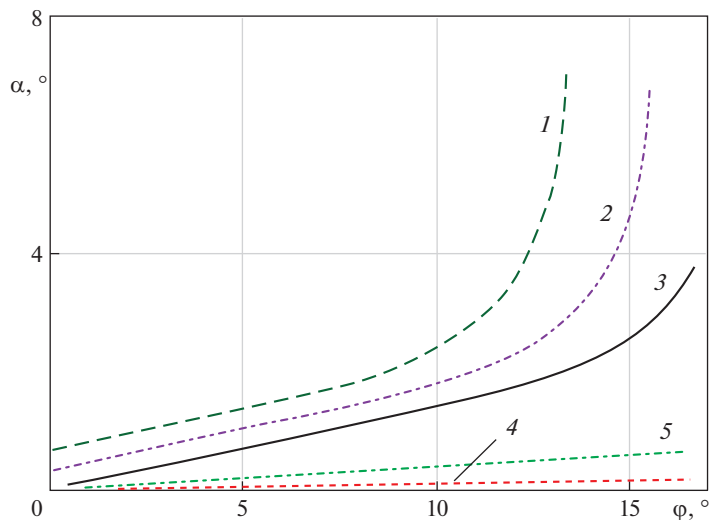


Рис. 6. Зависимость угла наклона тела α от угла наклона основания φ . Кривая 1 – $l = 0.1$; 2 – $l = 0.05$; 3 – $l = 0$; 4 – $h = 0.1$; 5: $h = 0.1$, $c = 0.8$.

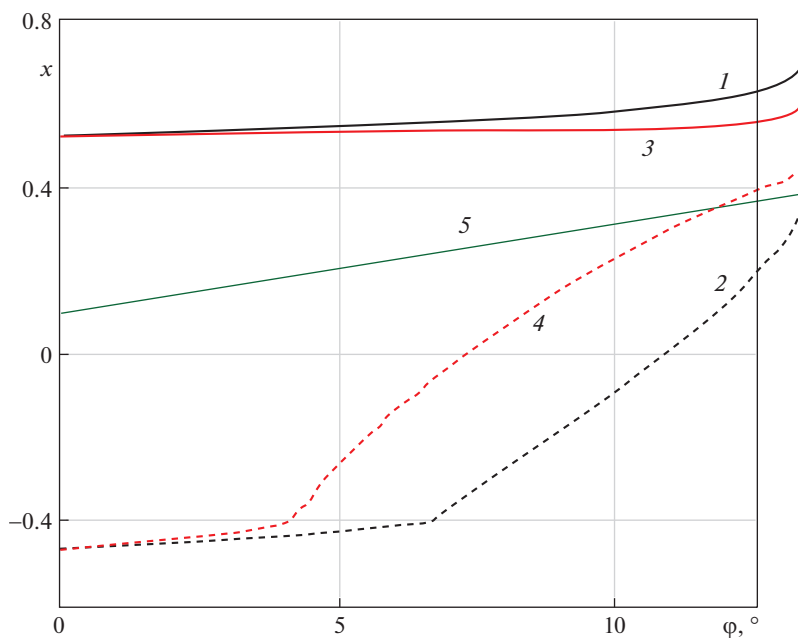


Рис. 7. Зависимость границ контакта (кривая 1: b , кривая 2: $-a$) и зоны сцепления (кривая 3: d_1 , кривая 4: d_2) от φ при $h = 1.2$, $c = 0.4$, $l = 0.1$. Кривая 5: вертикальная проекция центра масс x_C .

плоское основание и закругленные кромки, на наклонном упругом полупространстве из того же материала.

Показано, что в условиях покоя и деформируемости контактирующих тел область контакта состоит из подобластей сцепления и относительного проскальзывания, размеры которых, а также угол поворота основания упругого тела относительно поверхности полупространства, зависят от упругих характеристик взаимодействующих тел, геометрии контактирующей поверхности упругого тела, положения его центра масс и величины коэффициента трения.

Проведен анализ структуры области контактного взаимодействия и участка сцепления на ней, а также угла поворота упругого тела относительно основания от угла наклона основания, веса тела и механических характеристик материала, положения центра масс упругого тела и коэффициента трения.

Несмотря на то, что в рамках рассмотренной модели условие равновесия упругого тела на наклонном упругом основании совпадает с условием равновесия жестких тел (критический угол φ^* , при котором начинается скольжение тела, определяется соотношением $\varphi^* = \arctg \mu$, где μ – коэффициент трения), проведенное исследование позволяет провести оценку размера области сцепления в зависимости от наклона упругого основания, а также от формы, механических характеристик и положения центра масс лежащего на нем тела.

Анализ решения контактной задачи выполнен по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hertz H.* Über die Berührung fester elastischer Körper // J. Reine und angew. Mathematik. 1882. № 92. S. 156–171.
2. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
3. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
4. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
5. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 1. М.: Физматлит, 1960. 505 с.
6. *Джеллет Д.Х.* Трактат по теории трения. М.; Ижевск: 2009. 264 с.
7. *Иванов А.П.* Основы теории систем с трением. М.: Ижевск: 2011. 304 с.
8. *Иванов А.П.* О равновесии “балансирующих камней” // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 5. С. 592–598.
9. *Bolotnik N., Schorr P., Zeidis I., Zimmermann K.* Periodic locomotion of a two-body crawling system along a straight line on a rough inclined plane // ZAMM-J. Appl. Math.&Mech. 2018. Т. 98. № 11. P. 1930–1946.
10. *Bolotnik N.N., Figurina T.Y.* Control of a system of two interacting bodies on a rough inclined plane // 15th Int. Conf. Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). IEEE, 2020. P. 1–4.
11. *Golubev Y.F., Koryanov V.V.* Overcoming obstacles in the form of a stack of rough cylinders by an insectomorphic robot // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2022. V. 61. P. 253–269.
12. *Russell A.S., Johnson C.G., Edwards A.N., Viroulet S., Rocha F.M., Gray J.M.N.T.* Retrogressive failure of a static granular layer on an inclined plane // J. Fluid Mech. 2019. V. 869. P. 313–340.
13. *Carbone L., Gourc J.P., Carrubba P., Pavanello P., Moraci N.* Dry friction behaviour of a geosynthetic interface using inclined plane and shaking table tests // Geotextiles and Geomembranes. 2015. V. 43. № 4. P. 293–306.
14. *Sudoł E., Szewczak E., Matek M.* Comparative analysis of slip resistance test methods for granite floors // Materials. 2021. V. 14. № 5. P. 1108.
15. *Goryacheva I.G., Murthy H., Farris T.N.* Contact problem with partial slip for the inclined punch with rounded edges // Int. J. Fatigue. 2002. V. 24. № 11. P. 1191–1201.

Equilibrium of an Elastic Body with Rounded Edges on an Elastic Inclined Half-Space**A. A. Zobova^{a,#} and I. G. Goryacheva^{a,b,##}**^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*^b *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*[#] *e-mail: alexandra.zobova@math.msu.ru*^{##} *e-mail: goryache@ipmnet.ru*

The equilibrium of an elastic body with flat base and rounded edges on an inclined half-space of the same material in gravity field is investigated. The equations defining the borders of the contact region and the partial slip and stick subregions are stated. The influence of the mechanical and geometrical characteristics of the interacting bodies and friction coefficient on the contact region structure and the elastic body's angle of rotation due to deformations is analyzed. The graphs of the contact normal and shear stresses are plotted for various foundation's inclinations and the body's center of mass positions. The condition of the body slipping is obtained and discussed.

Keywords: elastic body equilibrium, dry friction, partial slip, inclined foundation

REFERENCES

1. *Hertz H.* Über die Berührung fester elastischer Körper // *J. Reine und angew. Mathematik*, 1882, no. 92, S. 156–171.
2. *Muskhelishvili N.I.* Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Dordrecht: Springer, 1977. 732 p.
3. *Galín L.A.* Contact Problems: the Legacy of LA Galín. Springer Science & Business Media, 2008. Vol. 155.
4. *Goryacheva I.G.* Contact Mechanics in Tribology. Dordrecht: Kluwer, 1998. 344 p.
5. *Appell P.E.* Traite de mecanique rationnelle. Vol. 1. Paris: Gauthier-Villars, 1909.
6. *Jellet J.H.* A Treatise on the Theory of Friction. L.: MacMillan&Co., 1872.
7. *Ivanov A.P.* Foundations of the Theory of Systems with Friction. Izhevsk: R&C. Dynamics, 2011. (in Russian)
8. *Ivanov A.P.* On the equilibrium of magic stones // *Mech. Solids*, 2018, vol. 53, no. 5, pp. 26–31.
9. *Bolotnik N., Schorr P., Zeidis I., Zimmermann K.* Periodic locomotion of a two-body crawling system along a straight line on a rough inclined plane // *ZAMM-J. Appl. Math.&Mech.*, 2018, vol. 98, no. 11, pp. 1930–1946.
10. *Bolotnik N.N., Figurina T.Y.* Control of a system of two interacting bodies on a rough inclined plane // 15th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). IEEE, 2020, pp. 1–4.
11. *Golubev Y.F., Koryanov V.V.* Overcoming Obstacles in the Form of a Stack of Rough Cylinders by an Insectomorphic Robot // *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2022, vol. 61, pp. 253–269.
12. *Russell A.S., Johnson C.G., Edwards A.N., Viroulet S., Rocha F.M., Gray J.M.N.T.* Retrogressive failure of a static granular layer on an inclined plane // *J. Fluid Mech.*, 2019, vol. 869, pp. 313–340.
13. *Carbone L., Gourc J.P., Carrubba P., Pavanello P., Moraci N.* Dry friction behaviour of a geosynthetic interface using inclined plane and shaking table tests // *Geotextiles and Geomembranes*, 2015, vol. 43, no. 4, pp. 293–306.
14. *Sudoł E., Szewczak E., Matek M.* Comparative analysis of slip resistance test methods for granite floors // *Materials*, 2021, vol. 14, no. 5, p. 1108.
15. *Goryacheva I.G., Murthy H., Farris T.N.* Contact problem with partial slip for the inclined punch with rounded edges // *Int. J. Fatigue*, 2002, vol. 24, no. 11, pp. 1191–1201.

УДК 531.3

О ДВИЖЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ОПИРАЮЩЕГОСЯ НА ГОРИЗОНТАЛЬНУЮ ПЛОЩАДКУ, В УСЛОВИЯХ ОРТОТРОПНОГО ДИНАМИЧЕСКИ СОГЛАСОВАННОГО ТРЕНИЯ

© 2022 г. Н. Н. Дмитриев^{1,*}

¹ Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: dn7@rambler.ru

Поступила в редакцию 19.05.2022 г.

После доработки 19.07.2022 г.

Принята к публикации 20.07.2022 г.

Анизотропия силы трения оказывает влияние на траекторию движения материальной точки, на кинематические характеристики твердых тел и на процессы, происходящие в области контакта пары трения. Известно также, что при движении твердых тел по плоскости плотность нормальной реакции может зависеть от скорости центра масс тела и его угловой скорости. Одновременному учету указанных явлений на динамику тела, опирающегося на круговую или кольцевую область, посвящена данная работа.

Ключевые слова: анизотропное трение, ортотропное трение, согласованное трение

DOI: 10.31857/S0032823522050083

1. Введение. Изучается движение твердого тела по горизонтальной плоскости. При расположении центра масс тела над плоскостью скольжения при движении происходит перераспределение плотности нормальных напряжений. С этим явлением связано понятие динамически согласованного трения, согласно которому при движении твердого тела с плоским основанием предполагается, что угловая скорость тела перпендикулярна плоскости опоры и должны выполняться общие теоремы динамики, записанные относительно осей, проходящих через центр масс тела [1, 11]. Этот подход получил свое развитие в публикациях [6–8, 18].

Но в упомянутых выше работах предполагалось, что сила трения во всех точках контакта обладает изотропными свойствами. Однако, во многих экспериментальных и теоретических работах показано, что сила трения может обладать анизотропными свойствами. Анизотропное трение возникает из-за неоднородности материала трущихся поверхностей, ориентированных следов механической обработки, износа поверхностей трения, кристаллической структуры материалов пары трения и многих других причин. В [2, 3] вводится тензор трения, через который описывается анизотропное трение, дается доказательство характерных свойств силы анизотропного трения и тензора трения.

В данном исследовании рассматривается влияние ортотропного трения на динамику движения тела при учете концепции динамически согласованного трения. При этом будет выбрана линейная модель ортотропного трения [2, 3].

2. Динамически согласованная модель контактных напряжений при ортотропном трении. Пусть контакт твердого тела с горизонтальной плоскостью происходит по площадке S . С этой площадкой свяжем систему координат $C\xi\eta\zeta$ так, что ось $C\xi$ перпен-

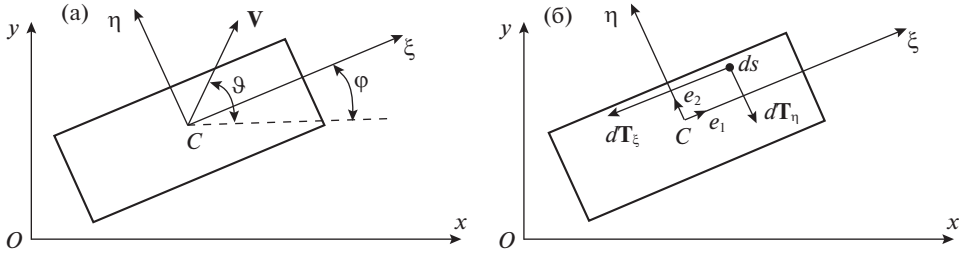


Рис. 1. Область контакта и системы координат. (а) Взаимное расположение осей подвижной и неподвижной систем координат; (б) Проекции силы трения на оси $C\xi$ и $C\eta$, действующей на площадку ds .

дикулярна плоскости скольжения. С плоскостью, по которой скользит тело, свяжем неподвижную систему координат Ox, y, z , причем ось Oz перпендикулярна плоскости. Будем полагать, что плотность давления $p(\xi, \eta)$ можно представить в виде [1, 11]:

$$p(\xi, \eta) = p_0 + p_1\xi + p_2\eta \quad (2.1)$$

Кроме того, оси Ox и Oy направлены так, что тензор коэффициентов трения имеет вид:

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} f_x & 0 \\ 0 & f_y \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

При сделанных допущениях, сила трения, действующая на элементарную площадку, выражается формулой (см. рис. 1а)

$$d\mathbf{T} = -p(\xi, \eta)\mathcal{F}\frac{\mathbf{v}}{v}d\xi d\eta, \quad (2.3)$$

где

$$\mathbf{v} = v_x(\xi, \eta)\mathbf{i} + v_y(\xi, \eta)\mathbf{j}, \quad \omega = \dot{\varphi} \quad (2.4)$$

$$v_x = v_0 \cos \vartheta - \omega(\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi), \quad v_y = v_0 \sin \vartheta + \omega(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi)$$

$\mathbf{v}_0 = v_0 \cos \vartheta \mathbf{i} + v_0 \sin \vartheta \mathbf{j}$ – вектор скорости точки C , $\omega = \dot{\varphi} \mathbf{k}$ – угловая скорость тела, \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} – орты системы координат $Cxyz$.

Проекции элементарной силы $d\mathbf{T}$ и момента этой силы относительно оси $C\xi$ записываются следующим образом

$$dT_x = -p(\xi, \eta)f_x \frac{v_0 \cos \vartheta - \omega(\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi)}{v} d\xi d\eta$$

$$dT_y = -p(\xi, \eta)f_y \frac{v_0 \sin \vartheta + \omega(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi)}{v} d\xi d\eta$$

$$dM_T = -\frac{p(\xi, \eta)}{v} \left[f_x \left(v_0 (\xi \sin (\vartheta - \varphi) - \eta \cos (\vartheta - \varphi)) + \omega (\xi^2 + \eta^2) \right) + \right. \quad (2.5)$$

$$\left. + \mu \left(v_0 (\xi \cos \varphi \sin \vartheta - \eta \sin \varphi \sin \vartheta) + \omega (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi)^2 \right) \right] d\xi d\eta$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 (\xi^2 + \eta^2) + 2v_0\omega(\xi \sin (\vartheta - \varphi) - \eta \cos (\vartheta - \varphi))}$$

$$\mu = f_y - f_x$$

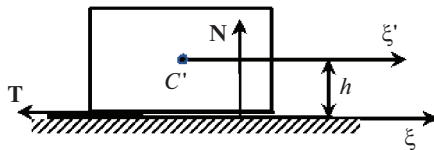


Рис. 2. Местоположение центра масс относительно опорной плоскости и силы, создающие момент вокруг него (T – сила трения, N – равнодействующая реакции опоры на тело).

Обозначим через C' точку, соответствующую центру масс твердого тела. Будем считать, что проекция точки C' на плоскость скольжения совпадает с точкой C – началом, выбранной ранее системы координат $C\xi\eta\zeta$, и оси $C'\xi'$, $C'\eta'$, $C'\zeta'$ – главные оси инерции тела, причем оси систем $C\xi\eta\zeta$ и $C'\xi'\eta'\zeta'$ параллельны. Так как в представленном исследовании рассматриваются осесимметричные тела, то такие допущения можно считать обоснованными. Если таких допущений сделать нельзя, то нижеприведенные рассуждения усложнятся в связи с необходимостью учитывать взаимную ориентацию систем $C\xi\eta\zeta$ и $C'\xi'\eta'\zeta'$.

Вектор $d\mathbf{T}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} d\mathbf{T} &= dT_x \mathbf{i} + dT_y \mathbf{j} = dT_\xi \mathbf{e}_1 + dT_\eta \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_1 &= \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_2 = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j} \end{aligned} \quad (2.6)$$

\mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 – орты осей $C\xi$ и $C\eta$, \mathbf{i} , \mathbf{j} – орты осей Ox и Oy соответственно (см. рис. 1б)). На рис. 1б) векторы $d\mathbf{T}_\xi$ и $d\mathbf{T}_\eta$ изображены условно. Направление вектора $d\mathbf{T}$ зависит от направления скорости элементарной площадки ds в плоскости Oxy в соответствии с формулами (2.5).

Для того, чтобы тело не опрокидывалось сумма моментов от силы трения и от реакции опорной плоскости относительно осей $C'\xi'$ и $C'\eta'$ должны равняться нулю (см. рис. 1б и рис. 2):

$$\begin{aligned} M_{C'\xi'} &= \iint_S [p(\xi, \eta) \cdot \eta + d\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_2 \cdot h] d\xi d\eta = 0 \\ M_{C'\eta'} &= \iint_S [-p(\xi, \eta) \cdot \xi - d\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_1 \cdot h] d\xi d\eta = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Кроме того, величина нормальной реакции опорной плоскости должна равняться весу твердого тела:

$$\iint_S p(\xi, \eta) d\xi d\eta = mg \quad (2.8)$$

Для определения коэффициентов p_0 , p_1 и p_2 стоящих в формуле (2.1) перепишем выражения (2.7) в виде

$$\begin{aligned} M_{C'\xi'} &= \iint_S \left\{ (p_0 + p_1 \xi + p_2 \eta) \eta + \frac{h}{v} [p_0 (v_0 \kappa_1 + \xi \omega \kappa_2 + \eta \omega \kappa_3) + \right. \\ &+ p_1 (v_0 \xi \kappa_1 + \xi^2 \omega \kappa_2 + \xi \eta \omega \kappa_3) + p_2 (v_0 \eta \kappa_1 + \xi \eta \omega \kappa_2 + \eta^2 \omega \kappa_3) \left. \right\} d\xi d\eta \\ M_{C'\eta'} &= -\iint_S \left\{ (p_0 + p_1 \xi + p_2 \eta) \xi - \frac{h}{v} [p_0 (v_0 \kappa_4 + \xi \omega \kappa_5 + \eta \omega \kappa_6) + \right. \\ &+ p_1 (v_0 \xi \kappa_4 + \xi^2 \omega \kappa_5 + \xi \eta \omega \kappa_6) + p_2 (v_0 \eta \kappa_4 + \xi \eta \omega \kappa_5 + \eta^2 \omega \kappa_6) \left. \right\} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (2.9)$$

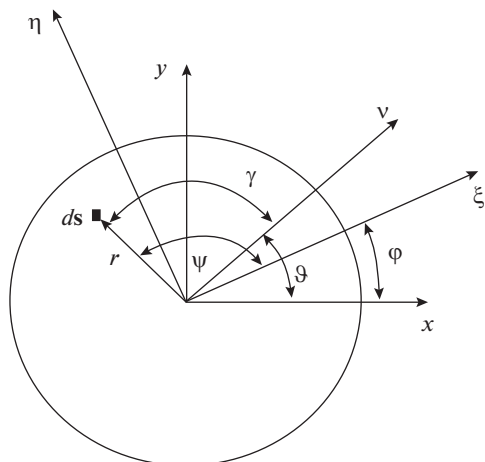


Рис. 3. Связь декартовой системы координат Sxy с полярной системой.

где

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= -f_x \sin(\vartheta - \varphi) - \mu \sin \vartheta \cos \varphi, & \kappa_2 &= -(f_x + \mu \cos^2 \varphi), & \kappa_3 &= \mu \sin \varphi \cos \varphi \\ \kappa_4 &= f_x \cos(\vartheta - \varphi) + \mu \sin \vartheta \cos \varphi, & \kappa_5 &= \mu \sin \varphi \cos \varphi, & \kappa_6 &= -(f_x + \mu \sin^2 \varphi), \end{aligned} \quad (2.10)$$

а v и μ выписаны в (2.5).

Для дальнейших рассуждений необходимо определиться с областью контакта твердого тела с плоскостью.

3. Опора на круг радиуса R . Пусть тело опирается на плоскость круговой площадкой радиуса R . Тогда декартовые координаты, введенные выше, можно заменить на полярные r и ψ (рис. 3):

$$\xi = r \cos \psi, \quad \eta = r \sin \psi; \quad r \in [0, R], \quad \psi \in [0, 2\pi] \quad (3.1)$$

В этом случае проекции на оси Ox и Oy скорости элементарной площадки и величина этой скорости, в соответствии с формулами (2.4) и (2.5) переписываются следующим образом

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \vartheta - \omega r \sin(\psi + \varphi) \\ v_y &= v_0 \sin \vartheta + \omega r \cos(\psi + \varphi) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 r^2 - 2v_0 \omega r \sin \gamma}, \quad \gamma = \psi - \vartheta + \varphi$$

Из соотношения (2.8) имеем

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} (p_0 + p_1 r \cos \psi + p_2 r \sin \psi) r dr d\psi = mg \quad (3.3)$$

и после интегрирования

$$p_0 \pi R^2 = mg,$$

откуда

$$p_0 = \frac{mg}{\pi R^2} \quad (3.4)$$

Отметим два частных случая: $v_0 = 0, \omega > 0$ и $v_0 > 0, \omega = 0$.

Из формул (2.9), (3.2) и условия (2.7) при $v_0 = 0$, $\omega > 0$ следует, что $p_1 = p_2 = 0$, т.е. при чистом вращении плотность давления распределена равномерно

$$p = p_0 = \frac{mg}{\pi R^2} \quad (3.5)$$

При $v_0 > 0$, $\omega = 0$ условие (2.7) позволяет определить p_1 и p_2 :

$$p_1 = \frac{4hp_0\kappa_4}{R^2}, \quad p_2 = -\frac{4hp_0\kappa_1}{R^2} \quad (3.6)$$

и, следовательно,

$$p = p_0 \left(1 + \frac{4hr}{R^2} (\kappa_4 \cos \psi - \kappa_1 \sin \psi) \right) \quad (3.7)$$

Подстановка κ_1 и κ_4 из (2.10) в это выражение позволяет записать два эквивалентных соотношения

$$p = p_0 \left[1 + \frac{4hr}{R^2} \sqrt{f_x^2 \cos^2 \vartheta + f_y^2 \sin^2 \vartheta} \cos(\psi + \alpha) \right], \quad \alpha = \arctg \frac{\kappa_1}{\kappa_4} \quad (3.8)$$

$$p = p_0 \left[1 + \frac{4hr}{R^2} (f_x \cos \gamma + \mu \sin \vartheta \sin(\psi + \varphi)) \right] \quad (3.9)$$

Так как рассматривается безотрывное скольжение, то должно быть выполнено условие $p(r, \psi) \geq 0$ при любых $\psi \in [0, 2\pi)$, $r \in [0, R]$, и, следовательно, имеет место неравенство, которое должно выполняться в случае безотрывного скольжения

$$R \geq 4h \sqrt{f_x^2 \cos^2 \vartheta + f_y^2 \sin^2 \vartheta}$$

При изотропном трении ($f_x = f_y$, $\mu = 0$) получаем известную формулу [10, 11]

$$R \geq 4hf_x$$

Далее полагаем, без ущерба для общности, что выполнены условия $v_0 > 0$, $\omega > 0$.

Введем величину $\beta = v_0/\omega$ и безразмерные переменные по формулам:

$$v_0 = v_{0*} \sqrt{\frac{Rg}{\pi}}, \quad \omega = \omega_* \sqrt{\frac{g}{\pi R}}, \quad \beta = \beta_* R, \quad t = t_* \sqrt{\frac{R\pi}{g}}$$

$$p_0 = p_{0*} \frac{mg}{\pi R^2}, \quad p_\ell = p_{\ell*} \frac{mg}{\pi R^3}; \quad \ell = 1, 2$$

$$h = h_* R\pi, \quad r = r_* R \quad (3.10)$$

$$M_\xi = M_{\xi*} mgR, \quad M_\eta = M_{\eta*} mgR$$

$$T_x = T_{x*} mg, \quad T_y = T_{y*} mg, \quad M_T = M_{T*} mgR$$

Тогда безразмерные моменты относительно осей $C'\xi'$ и $C'\eta'$ записываются в виде (звездочки далее не пишем)

$$M_{C'\xi'} = \frac{1}{4} p_2 + h \iint_S \left\{ p_0 \left[\beta \kappa_1 r + r^2 (f_{01\xi} \cos \gamma + f_{02\xi} \sin \gamma) \right] + \right. \\ \left. + p_1 \left[\beta \kappa_1 r^2 \cos(\gamma + \lambda) + r^3 (f_{10\xi} + f_{11\xi} \sin \gamma \cos \gamma + f_{12\xi} \cos^2 \gamma) \right] + \right. \\ \left. + p_2 \left[\beta \kappa_1 r^2 \sin(\gamma + \lambda) + r^3 (f_{20\xi} + f_{21\xi} \sin \gamma \cos \gamma + f_{22\xi} \cos^2 \gamma) \right] \right\} \frac{drd\gamma}{\sqrt{\beta^2 + r^2 - 2\beta r \sin \gamma}} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}
M_{C^{\cdot}\eta^{\cdot}} = & -\frac{1}{4} p_1 + h \iint_S \left\{ p_0 \left[\beta \kappa_4 r + r^2 (f_{01\eta} \cos \gamma + f_{02\eta} \sin \gamma) \right] + \right. \\
& + p_1 \left[\beta \kappa_4 r^2 \cos(\gamma + \lambda) + r^3 (f_{10\eta} + f_{11\eta} \sin \gamma \cos \gamma + f_{12\eta} \cos^2 \gamma) \right] + \\
& \left. + p_2 \left[\beta \kappa_4 r^2 \sin(\gamma + \lambda) + r^3 (f_{20\eta} + f_{21\eta} \sin \gamma \cos \gamma + f_{22\eta} \cos^2 \gamma) \right] \right\} \frac{dr d\gamma}{\sqrt{\beta^2 + r^2 - 2\beta r \sin \gamma}},
\end{aligned} \quad (3.12)$$

где $\lambda = \vartheta - \varphi$,

$$\begin{aligned}
f_{01\xi} &= \kappa_2 \cos \lambda + \kappa_3 \sin \lambda, & f_{02\xi} &= -\kappa_1 \sin \lambda + \kappa_3 \cos \lambda \\
f_{10\xi} &= \kappa_2 \sin^2 \lambda - \kappa_3 \sin \lambda \cos \lambda, & f_{11\xi} &= -\kappa_2 \sin 2\lambda + \kappa_3 \cos 2\lambda \\
f_{12\xi} &= \kappa_2 \cos 2\lambda + \kappa_3 \sin 2\lambda, & f_{20\xi} &= \kappa_3 \cos^2 \lambda - \kappa_2 \sin \lambda \cos \lambda \\
f_{21\xi} &= \kappa_2 \cos 2\lambda + \kappa_3 \sin 2\lambda, & f_{22\xi} &= \kappa_3 \sin 2\lambda - \kappa_2 \cos 2\lambda
\end{aligned} \quad (3.13)$$

Коэффициенты $f_{ij\eta}$ получаются из (3.13) путем замены κ_2 на κ_5 и κ_3 на κ_6 .

В выражениях (3.11) и (3.12) присутствуют интегралы

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint \frac{r dr d\gamma}{\sqrt{\beta^2 + r^2 - 2\beta r \sin \gamma}}, & I_2 &= \iint \frac{r^2 \cos \gamma dr d\gamma}{\sqrt{\beta^2 + r^2 - 2\beta r \sin \gamma}} \\
I_3 &= \iint \frac{r^2 \sin \gamma dr d\gamma}{\sqrt{\beta^2 + r^2 - 2\beta r \sin \gamma}}, & I_4 &= \iint \frac{r^3 dr d\gamma}{\sqrt{\beta^2 + r^2 - 2\beta r \sin \gamma}} \\
I_5 &= \iint \frac{r^3 \sin \gamma \cos \gamma dr d\gamma}{\sqrt{\beta^2 + r^2 - 2\beta r \sin \gamma}}, & I_6 &= \iint \frac{r^3 \cos^2 \lambda dr d\gamma}{\sqrt{\beta^2 + r^2 - 2\beta r \sin \gamma}},
\end{aligned} \quad (3.14)$$

в которых интегрирование производится по круговой области контакта тела с плоскостью. Подынтегральные функции в (3.11) и (3.12) непрерывны по переменной γ и интегрирование в (3.14) происходит в пределах $r \in [0, 1]$, $\gamma \in [-\lambda, 2\pi - \lambda]$. Интегралы (3.14) приводятся к следующим соотношениям

$$\begin{aligned}
I_2 &= I_5 = 0 \\
I_1 &= \begin{cases} 4\beta \left[E(\beta^{-1}) - (1 - \beta^{-2}) K(\beta^{-1}) \right]; & \beta > 1 \\ 4E(\beta); & \beta \leq 1 \end{cases} \\
I_3 &= \begin{cases} \frac{4\beta^2}{3} \left[(2 - \beta^{-2}) E(\beta^{-1}) - 2(1 - \beta^{-2}) K(\beta^{-1}) \right]; & \beta > 1 \\ \frac{4\beta^{-1}}{3} \left[(1 - \beta^2) K(\beta) + (2\beta^2 - 1) E(\beta) \right]; & \beta \leq 1 \end{cases} \\
I_4 &= \begin{cases} \frac{4\beta^3}{9} \left[(4 + \beta^{-2}) E(\beta^{-1}) - (1 - \beta^{-2})(4 + 3\beta^{-2}) K(\beta^{-1}) \right]; & \beta > 1 \\ \frac{4}{9} \left[2(1 - \beta^2) K(\beta) + (1 + 4\beta^2) E(\beta) \right]; & \beta \leq 1 \end{cases} \\
I_6 &= \begin{cases} \frac{4\beta^3}{45} \left[(3\beta^{-4} + 7\beta^{-2} - 2) E(\beta^{-1}) + (6\beta^{-4} - 8\beta^{-2} + 2) K(\beta^{-1}) \right]; & \beta > 1 \\ -\frac{4\beta^{-2}}{45} \left[(1 - \beta^2)(3 + \beta^2) K(\beta) + (2\beta^4 - 7\beta^2 - 3) E(\beta) \right]; & \beta \leq 1 \end{cases}
\end{aligned} \quad (3.15)$$

Здесь $K(\beta)$, $E(\beta)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Условия неопрокидывания тела (2.7) и выражения для безразмерных моментов (3.11), (3.12) позволяют записать систему уравнений для определения безразмерных величин p_1 и p_2 :

$$\begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 &= b_1 \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 &= b_2, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= h[\beta\kappa_1(I_2 \cos \lambda - I_3 \sin \lambda) + f_{10\xi}I_4 + f_{11\xi}I_5 + f_{12\xi}I_6] \\ a_{12} &= \frac{1}{4} + h[\beta\kappa_1(I_3 \cos \lambda + I_2 \sin \lambda) + f_{20\xi}I_4 + f_{21\xi}I_5 + f_{22\xi}I_6] \\ b_1 &= -hp_0(\beta\kappa_1I_1 + f_{01\xi}I_2 + f_{02\xi}I_3) \\ a_{21} &= -\frac{1}{4} + h[\beta\kappa_4(I_2 \cos \lambda - I_3 \sin \lambda) + f_{10\eta}I_4 + f_{11\eta}I_5 + f_{12\eta}I_6] \\ a_{22} &= h[\beta\kappa_4(I_3 \cos \lambda + I_2 \sin \lambda) + f_{20\eta}I_4 + f_{21\eta}I_5 + f_{22\eta}I_6] \\ b_2 &= -hp_0(\beta\kappa_4I_1 + f_{01\eta}I_2 + f_{02\eta}I_3) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Так как коэффициенты a_{ij} и b_i в (3.17) зависят от β , направления скорости центра масс относительно неподвижных осей, которое задается углом ϑ и компонент тензора трения, то и p_1 и p_2 являются функциями этих параметров.

4. Распределение давления при опоре твердого тела на тонкую кольцевую область. Рассмотрим второй классический случай опоры твердого тела на горизонтальную плоскость, а именно, опоры на кольцевую область [4, 5, 9, 11, 12, 18]. В этом случае область контакта тела с плоскостью задается полярными координатами (3.1), где $r \in [R_1, R_2]$, $\psi \in [0, 2\pi)$. При этом будем полагать, что кольцо области контакта тонкое ($R_1 \rightarrow R_2$) (см. рис. 4).

Для определения p_0 , p_1 , p_2 вначале проинтегрируем соотношение (2.8) по области контакта. В результате получаем

$$p_0 = \frac{mg}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \quad (4.1)$$

Из соотношений (2.9) при переходе к полярным координатам и интегрировании по кольцевой области получим

$$\begin{aligned} M_{C^{\cdot\xi}} &= \frac{p_2\pi(R_2^4 - R_1^4)}{4} + h \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \left\{ p_0 [\beta\kappa_1 r + r^2 (f_{01\xi} \cos \gamma + f_{02\xi} \sin \gamma)] + \right. \\ &+ p_1 [\beta\kappa_1 r^2 \cos(\gamma + \lambda) + r^3 (f_{10\xi} + f_{11\xi} \sin \gamma \cos \gamma + f_{12\xi} \cos^2 \gamma)] + \\ &+ p_2 [\beta\kappa_1 r^2 \sin(\gamma + \lambda) + r^3 (f_{20\xi} + f_{21\xi} \sin \gamma \cos \gamma + f_{22\xi} \cos^2 \gamma)] \left. \right\} \frac{dr d\gamma}{\sqrt{\beta^2 + r^2 - 2\beta r \sin \gamma}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

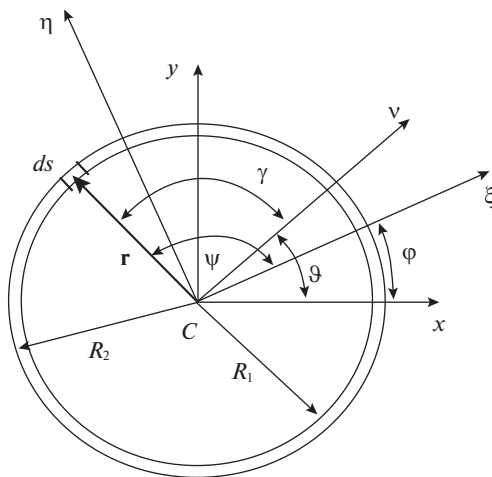


Рис. 4. Связь декартовой системы координат Cxy с полярной системой для кольцевой области в случае опоры на кольцо.

$$\begin{aligned}
 M_{C'\eta'} = & -\frac{p_1\pi(R_2^4 - R_1^4)}{4} + h \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \left\{ p_0 [\beta\kappa_4 r + r^2 (f_{01\eta} \cos \gamma + f_{02\eta} \sin \gamma)] + \right. \\
 & + p_1 [\beta\kappa_4 r^2 \cos(\gamma + \lambda) + r^3 (f_{10\eta} + f_{11\eta} \sin \gamma \cos \gamma + f_{12\eta} \cos^2 \gamma)] + \\
 & \left. + p_2 [\beta\kappa_4 r^2 \sin(\gamma + \lambda) + r^3 (f_{20\eta} + f_{21\eta} \sin \gamma \cos \gamma + f_{22\eta} \cos^2 \gamma)] \right\} \frac{drd\gamma}{\sqrt{\beta^2 + r^2 - 2\beta r \sin \gamma}}
 \end{aligned} \quad (4.3)$$

В выражениях (4.2) и (4.3) осуществим переход к безразмерным переменным по формулам (3.10), в которых R заменим на R_2 и

$$p_0 = \frac{mg}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} p_{0*}, \quad p_\ell = \frac{mg}{\pi(R_2^2 - R_1^2) R_2} p_{\ell*}; \quad \ell = 1, 2 \quad (4.4)$$

Кроме того, интегрирование по переменной r осуществляем аналогично тому как это было сделано в [4, 5] при стремлении $R_1 \rightarrow R_2$. В результате безразмерные моменты относительно осей $C'\xi'$ и $C'\eta'$ приводятся к виду

$$\begin{aligned}
 M_{C'\xi'} = & \frac{p_2}{2} + \frac{h}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ p_0 [\beta\kappa_1 + f_{01\xi} \cos \gamma + f_{02\xi} \sin \gamma] + \right. \\
 & + p_1 [\beta\kappa_1 \cos(\gamma + \lambda) + f_{10\xi} + f_{11\xi} \sin \gamma \cos \gamma + f_{12\xi} \cos^2 \gamma] + \\
 & \left. + p_2 [\beta\kappa_1 \sin(\gamma + \lambda) + f_{20\xi} + f_{21\xi} \sin \gamma \cos \gamma + f_{22\xi} \cos^2 \gamma] \right\} \frac{d\gamma}{\sqrt{\beta^2 + 1 - 2\beta \sin \gamma}} \\
 M_{C'\eta'} = & -\frac{p_1}{2} + \frac{h}{2} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \left\{ p_0 [\beta\kappa_4 + f_{01\eta} \cos \gamma + f_{02\eta} \sin \gamma] + \right. \\
 & + p_1 [\beta\kappa_4 \cos(\gamma + \lambda) + f_{10\eta} + f_{11\eta} \sin \gamma \cos \gamma + f_{12\eta} \cos^2 \gamma] +
 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$+ p_2 \left[\beta \kappa_4 \sin(\gamma + \lambda) + f_{20\eta} + f_{21\eta} \sin \gamma \cos \gamma + f_{22\eta} \cos^2 \gamma \right] \frac{d\gamma}{\sqrt{\beta^2 + 1 - 2\beta \sin \gamma}}$$

Введем обозначения для интегралов

$$\begin{aligned} I_{1R} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 + \beta^2 - 2\beta \sin \gamma}}, & I_{2R} &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos \gamma d\gamma}{\sqrt{1 + \beta^2 - 2\beta \sin \gamma}} \\ I_{3R} &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin \gamma d\gamma}{\sqrt{1 + \beta^2 - 2\beta \sin \gamma}}, & I_{4R} &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin \gamma \cos \gamma d\gamma}{\sqrt{1 + \beta^2 - 2\beta \sin \gamma}} \\ I_{5R} &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \gamma d\gamma}{\sqrt{1 + \beta^2 - 2\beta \sin \gamma}}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

которые выражаются через полные эллиптические интегралы первого и второго рода

$$\begin{aligned} I_{2R} &= I_{4R} = 0 \\ I_{1R} &= \begin{cases} 4\mathbf{K}(\beta); & \beta < 1 \\ \frac{4}{\beta}\mathbf{K}(\beta^{-1}); & \beta \geq 1 \end{cases} \\ I_{3R} &= \begin{cases} \frac{4}{\beta}[\mathbf{K}(\beta) - \mathbf{E}(\beta)]; & \beta < 1 \\ -4[\mathbf{E}(\beta^{-1}) - \mathbf{K}(\beta^{-1})]; & \beta \geq 1 \end{cases} \\ I_{5R} &= \begin{cases} \frac{4}{3\beta^2}[-(1 - \beta^2)\mathbf{K}(\beta) + (1 + \beta^2)\mathbf{E}(\beta)]; & \beta < 1 \\ \frac{4\beta}{3}[(1 + \beta^{-2})\mathbf{E}(\beta^{-1}) - (1 - \beta^{-2})\mathbf{K}(\beta^{-1})]; & \beta \geq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.7)$$

В итоге, для определения безразмерных значений p_1 и p_2 получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} & p_1 h (-\beta \kappa_1 \sin \lambda I_{3R} + f_{10\xi} I_{1R} + f_{12\xi} I_{5R}) + \\ & + p_2 [1 + h(\beta \kappa_1 \cos \lambda I_{3R} + f_{20\xi} I_{1R} + f_{22\xi} I_{5R})] = -h p_0 (\beta \kappa_1 I_{1R} + f_{02\xi} I_{3R}) \\ & p_1 [-1 + h(-\beta \kappa_4 \sin \lambda I_{3R} + f_{10\eta} I_{1R} + f_{12\eta} I_{5R})] + \\ & + p_2 h (\beta \kappa_4 \cos \lambda I_{3R} + f_{20\eta} I_{1R} + f_{22\eta} I_{5R}) = -h p_0 (\beta \kappa_4 I_{1R} + f_{02\eta} I_{3R}), \end{aligned} \quad (4.8)$$

которая может быть упрощена при совмещении системы координат $C\xi\eta\zeta$ с естественным трехгранником ($\lambda = 0$).

Итак, получены системы уравнений, из которых определяются коэффициенты стоящие в формуле распределения плотности давления (2.1). При этом, в отличие от классических работ, рассматривается случай ортотропного трения контакта тела с плоскостью. Это обстоятельство позволяет отметить, что распределение давления зависит от направления скорости центра масс тела, параметра β и компонентов тензора трения. Далее, изучим движение твердого тела, опирающегося на круговую и тонкую кольцевую площадки.

5. Сила трения и момент трения. Опора на круговую область. Из первых двух соотношений (2.5) получаем выражения для проекций элементарной силы трения:

$$\begin{aligned} dT_x &= -f_x [p_0 v_0 \cos \vartheta + \xi (p_1 v_0 \cos \vartheta - p_0 \omega \sin \varphi) + \eta (p_2 v_0 \cos \vartheta - p_0 \omega \cos \varphi) - \\ & - \xi^2 p_1 \omega \sin \varphi - \eta^2 p_2 \omega \cos \varphi - \xi \eta \omega (p_1 \cos \varphi + p_2 \sin \varphi)] \frac{d\xi d\eta}{v} \end{aligned}$$

$$dT_y = -f_y [p_0 v_0 \sin \vartheta + \xi (p_1 v_0 \sin \vartheta + p_0 \omega \cos \varphi) + \eta (p_2 v_0 \sin \vartheta - p_0 \omega \sin \varphi) + \quad (5.1)$$

$$+ \xi^2 p_1 \omega \cos \varphi - \eta^2 p_2 \omega \sin \varphi + \xi \eta \omega (-p_1 \sin \varphi + p_2 \cos \varphi)] \frac{d\xi d\eta}{v}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 (\xi^2 + \eta^2) + 2v_0 \omega (\xi \sin (\vartheta - \varphi) - \eta \cos (\vartheta - \varphi))},$$

в которых для круговой площадки контакта перейдем к безразмерным переменным по формулам (3.10), к полярным координатам (3.1) и проинтегрируем в предположении, что ось $C\xi$ направлена вдоль вектора скорости точки C ($\lambda = \vartheta - \varphi = 0$). В итоге получаем проекции силы трения на оси неподвижной системы координат $Oxyz$:

$$T_x = -\frac{f_x}{\pi} [(p_0 \beta I_1 - p_2 I_4 + (p_2 \beta - p_0) I_3) \cos \vartheta + (p_2 \cos \vartheta - p_1 \sin \vartheta) I_6] \quad (5.2)$$

$$T_y = -\frac{f_y}{\pi} [(p_0 \beta I_1 - p_2 I_4 + (p_2 \beta - p_0) I_3) \sin \vartheta + (p_2 \sin \vartheta + p_1 \cos \vartheta) I_6],$$

и, следовательно, на оси естественного трехгранника проекции силы трения будут иметь вид

$$T_\tau = T_x \cos \vartheta + T_y \sin \vartheta = -\frac{1}{\pi} [(f_x + \mu \sin^2 \vartheta) (p_0 \beta I_1 - p_2 I_4 + (p_2 \beta - p_0) I_3) + \quad (5.3)$$

$$+ (p_1 \mu \sin \vartheta \cos \vartheta + p_2 (f_x + \mu \sin^2 \vartheta)) I_6]$$

$$T_n = -T_x \sin \vartheta + T_y \cos \vartheta = -\frac{1}{\pi} [\mu \sin \tau \cos \vartheta (p_0 \beta I_1 - p_2 I_4 + (p_2 \beta - p_0) I_3) + \quad (5.3)$$

$$+ (p_1 (f_x + \mu \cos^2 \vartheta) + p_2 \mu \sin \vartheta \cos \vartheta) I_6]$$

Момент от силы трения, действующий на элементарную площадку, относительно оси $C\xi$ определен в (2.5). После перехода к полярным координатам и безразмерным величинам по формулам (3.10), и совмещении подвижной системы координат $C\xi\eta\zeta$ с естественным трехгранником получаем выражение для безразмерного элементарного момента

$$dM_T = -\left\{ p_0 [r^3 (f_x + \mu \sin^2 \vartheta) - r^2 \beta \sin \gamma (f_x + \mu \sin^2 \vartheta) + \quad (5.4)$$

$$+ r^2 \mu \beta \cos \gamma \sin \vartheta \cos \vartheta + r^3 \mu \cos^2 \gamma \cos 2\vartheta - r^3 \mu \sin \gamma \cos \gamma \sin 2\vartheta] + \right.$$

$$+ p_1 [-r^3 \beta \sin \gamma \cos \gamma (f_x + \mu \sin^2 \vartheta) + r^4 \cos \gamma (f_x + \mu \sin^2 \vartheta) + \quad (5.4)$$

$$+ r^3 \mu \beta \cos^2 \gamma \sin \vartheta \cos \vartheta + r^4 \mu \cos^3 \gamma \cos 2\vartheta - r^4 \mu \sin \gamma \cos^2 \gamma \sin 2\vartheta] +$$

$$+ p_2 [-r^3 \beta \sin^2 \gamma (f_x + \mu \sin^2 \vartheta) + r^4 \sin \gamma (f_x + \mu \cos^2 \vartheta) + \quad (5.4)$$

$$+ r^3 \mu \beta \sin \gamma \cos \gamma \sin \vartheta \cos \vartheta + r^4 \mu \cos^3 \gamma \sin 2\vartheta +$$

$$\left. + r^4 \mu \sin \gamma \cos^2 \gamma \cos 2\vartheta - r^4 \mu \cos \gamma \sin 2\vartheta \right] \frac{dr d\lambda}{\sqrt{\beta^2 + r^2 - 2\beta r \sin \gamma}}$$

После интегрирования по области круга получаем выражение для момента трения относительно оси $C\xi$:

$$M_T = -\left\{ p_0 [(f_x + \mu \sin^2 \vartheta) (I_4 - \beta I_3) + \mu \beta I_2 \sin \vartheta \cos \vartheta + \quad (5.4)$$

$$+ \mu (I_6 \cos 2\vartheta - I_5 \sin 2\vartheta)] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + p_1 \left[(f_x + \mu \sin^2 \vartheta) (-\beta I_5 + I_8) + \mu \beta I_6 \sin \vartheta \cos \vartheta - \right. \\
& \quad \left. - \mu (I_{10} \cos 2\vartheta + I_9 \sin 2\vartheta) \right] + \\
& + p_2 \left[\beta (f_x + \mu \sin^2 \vartheta) (-I_4 + I_6) + (f_x + \mu \cos^2 \vartheta) I_7 + \right. \\
& \quad \left. + \mu \beta I_5 \sin \vartheta \cos \vartheta + \mu ((I_{10} - I_8) \sin 2\vartheta + I_9 \cos 2\vartheta) \right] \} \quad (5.5)
\end{aligned}$$

Здесь к интегралам (3.14) добавляются следующие:

$$\begin{aligned}
I_7 &= \iint \frac{r^4 \sin \gamma dr d\gamma}{\sqrt{\beta^2 + r^2 - 2\beta r \sin \gamma}}, & I_8 &= \iint \frac{r^4 \cos \gamma dr d\gamma}{\sqrt{\beta^2 + r^2 - 2\beta r \sin \gamma}} \\
I_9 &= \iint \frac{r^4 \sin \gamma \cos^2 \gamma dr d\gamma}{\sqrt{\beta^2 + r^2 - 2\beta r \sin \gamma}}, & I_{10} &= \iint \frac{r^4 \cos^3 \gamma dr d\gamma}{\sqrt{\beta^2 + r^2 - 2\beta r \sin \gamma}},
\end{aligned} \quad (5.6)$$

которые при интегрировании по круговой области записываются в виде

$$\begin{aligned}
I_8 &= I_{10} = 0 \\
I_7 &= \begin{cases} 4\beta^4 \left[\frac{16 + 4\beta^{-2} - 9\beta^{-4}}{45} E(\beta^{-1}) - \frac{4}{45} (1 - \beta^{-2})(4 + 3\beta^{-2}) K(\beta^{-1}) \right]; & \beta > 1 \\ \frac{4}{225\beta} \left[(1 - \beta^2)(45 + 40\beta^2) K(\beta) + (80\beta^4 + 20\beta^2 - 45) E(\beta) \right]; & \beta \leq 1 \end{cases} \quad (5.7) \\
I_9 &= \begin{cases} 4\beta^4 \left[\frac{6\beta^{-6} - 9\beta^{-4} + 19\beta^{-2} - 8}{21} E(\beta^{-1}) + \frac{(1 - \beta^{-2})(8 - 15\beta^{-2} + 3\beta^{-4})}{21} K(\beta^{-1}) \right]; & \beta > 1 \\ -\frac{4 \left[(8\beta^6 - 19\beta^4 + 9\beta^2 - 6) E(\beta) + 2(1 - \beta^2)(2\beta^4 - 3\beta^2 + 3) K(\beta) \right]}{315\beta^3}; & \beta \leq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

6. Опора твердого тела на тонкую кольцевую область. Определение проекций силы трения и момента трения, действующих на твердое тело в рассматриваемом случае, происходит путем интегрирования выражений (5.1) и (5.4) по кольцевой области:

$$\begin{aligned}
T_x &= -\frac{f_x}{2\pi} \left[(I_{1R}(p_0\beta - p_2) + I_{3R}(p_2\beta - p_0)) \cos \vartheta + I_{5R}(p_2 \cos \vartheta - p_1 \sin \vartheta) \right] \\
T_y &= -\frac{f_y}{2\pi} \left[(I_{1R}(p_0\beta - p_2) + I_{3R}(p_2\beta - p_0)) \sin \vartheta + I_{5R}(p_2 \sin \vartheta + p_1 \cos \vartheta) \right] \\
M_T &= -\frac{1}{2\pi} \left\{ p_0 \left[(I_{1R} - \beta I_{3R})(f_x + \mu \sin^2 \vartheta) + I_{5R} \mu \cos 2\vartheta \right] + \right. \\
& \quad \left. + p_1 [I_{5R} \beta \mu \sin \vartheta \cos \vartheta - \mu I_{7R} \sin 2\vartheta] + \right. \\
& \quad \left. + p_2 \left[\beta (-I_{1R} + I_{5R})(f_x + \mu \sin^2 \vartheta) + I_{3R}(f_x + \mu \sin^2 \vartheta) + \mu I_{7R} \cos 2\vartheta \right] \right\} \quad (6.1)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
I_{7R} &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin \gamma \cos^2 \gamma d\gamma}{\sqrt{1 + \beta^2 - 2\beta \sin \gamma}} = \\
&= \begin{cases} \frac{4}{15\beta^3} \left[2(1 - \beta^2 + \beta^4) E(\beta) - (\beta^4 - 3\beta^2 + 2) K(\beta) \right]; & \beta < 1 \\ \frac{4}{15\beta^2} \left[2(1 - \beta^2 + \beta^4) E(\beta^{-1}) + (-2\beta^4 + 3\beta^2 - 1) K(\beta^{-1}) \right]; & \beta \geq 1 \end{cases} \quad (6.2)
\end{aligned}$$

Проекции на тангенциальную и нормальную оси естественного трехгранника силы трения имеют вид:

$$\begin{aligned} T_\tau &= -\frac{1}{2\pi} \{ [I_{1R}(p_0\beta - p_2) + I_{3R}(p_2\beta - p_0)](f_x + \mu \sin^2 \vartheta) + \\ &\quad + I_{5R} [p_2(f_x + \mu \sin^2 \vartheta) + \mu p_1 \sin \vartheta \cos \vartheta] \} \\ T_n &= -\frac{1}{2\pi} \{ [I_{1R}(p_0\beta - p_2) + I_{3R}(p_2\beta - p_0)]\mu \sin \vartheta \cos \vartheta + \\ &\quad + I_{5R} [p_2\mu \sin \vartheta \cos \vartheta + p_1(f_x + \mu \cos^2 \vartheta)] \} \end{aligned} \quad (6.3)$$

7. Уравнения движения и их анализ. Уравнения движения тела по горизонтальной плоскости в проекциях на оси естественного трехгранника записываются в виде

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= T_\tau(p_0, p_1, p_2, \beta, \vartheta) \\ mv\dot{\vartheta} &= T_n(p_0, p_1, p_2, \beta, \vartheta) \\ I\dot{\omega} &= M_T(p_0, p_1, p_2, \beta, \vartheta), \end{aligned} \quad (7.1)$$

где T_τ и T_n определены формулами (5.3) и (6.3), а M_T — (5.5) и (6.1) соответственно для опоры на круг и тонкую кольцевую область. Отметим, что $T_\tau(p_0, p_1, p_2, \beta, \vartheta) \leq 0$, $M_T(p_0, p_1, p_2, \beta, \vartheta) \leq 0$ при любых значениях β и ϑ , f_x , μ , а величина T_n при соответствующих параметрах, может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Покажем это для случая опоры на кольцевую область. Величина T_n в соответствии с соотношением (6.3) переписывается в виде

$$\begin{aligned} T_n &= -\frac{1}{2\pi} \{ \mu [p_0(I_{1R}\beta - I_{3R}) + p_2(I_{3R}\beta - I_{1R})] \sin \vartheta \cos \vartheta + \\ &\quad + I_{5R} [p_1(f_x + \mu \cos^2 \vartheta) + \mu p_2 \sin \vartheta \cos \vartheta] \} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Решим уравнение $T_n(\vartheta, \beta) = 0$ относительно переменной ϑ . Из формул (4.8) при $\lambda = 0$ ($\varphi = \vartheta$) следуют соотношения

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad p_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \Delta_1 &= p_0(\beta I_{1R} - I_{3R})h(f_x + \mu \sin^2 \vartheta) \\ \Delta_2 &= p_0(\beta I_{1R} - I_{3R})h(\mu \sin \vartheta \cos \vartheta + h I_{5R} f_x f_y) \\ \Delta &= a + b \sin \vartheta \cos \vartheta \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$a = 1 - h^2 I_{5R} f_x f_y (\beta I_{3R} - I_{1R} + I_{5R}), \quad b = -h\mu (\beta I_{3R} - I_{1R} + 2I_{5R}),$$

после подстановки которых в выражение для T_n в (7.2) получаем

$$\begin{aligned} T_n &= -\frac{p_0(I_{1R}\beta - I_{3R})}{8\pi(a + b \sin \vartheta \cos \vartheta)} \{ \sin^2 2\vartheta [\mu b + \mu^2 h(1 + I_{5R}) + I_{5R}\mu^2 h] + \\ &\quad + \sin 2\vartheta [2\mu a + 2\mu h^2 f_x f_y I_{5R}(1 + I_{5R})] + 4I_{5R} h f_x f_y \} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Откуда при $\mu = 0$ (изотропное трение) будем иметь

$$T_n = -\frac{p_0(I_{1R}\beta - I_{3R})}{2\pi a} I_{5R} h f_x^2 < 0, \quad (7.5)$$

что означает поворот вектора скорости центра масс по часовой стрелке, если смотреть вдоль вектора скорости. Данный факт отмечен в работах [9, 11].

При увеличении коэффициента $\mu = f_y - f_x > 0$ уравнение $T_n(\vartheta, \beta) = 0$ может приобрести корни $\vartheta(\beta)$. Для их определения выражения, стоящие в фигурных скобках в (7.4) приравняем нулю и рассмотрим его как квадратное уравнение относительно $\sin 2\vartheta$. Решение этого уравнения дается соотношениями

$$\sin 2\vartheta = \frac{-2[\mu a + \mu h^2 f_x f_y I_{5R}(1 + I_{5R})] \pm \sqrt{D}}{2[\mu b + \mu^2 h(1 + 2I_{5R})]} \quad (7.6)$$

$$D = 4[\mu a + \mu h^2 f_x f_y I_{5R}(1 + I_{5R})]^2 - 16I_{5R} h f_x f_y [\mu b + \mu^2 h(1 + 2I_{5R})]$$

Для существования решения (7.6) необходимо чтобы дискриминант D был неотрицательный и абсолютная величина $\sin 2\vartheta$ не превосходила единицу.

Решение системы уравнений (7.1) методом Рунге–Кутты с различными начальными условиями и изучение финальных характеристик движения показывают, что величина угла ϑ стремится к решению (7.6), при соответствующем финальном значении β_* . И, кроме того, в момент остановки выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \beta_* - \Phi(\beta_*, \vartheta_*) &= 0; & \Phi(\beta_*, \vartheta_*) &= \frac{I_* T_\tau(\beta_*, \vartheta_*)}{M_T(\beta_*, \vartheta_*)} \\ \tilde{\Phi}(\delta_*, \vartheta_*) - \delta_* &= 0; & \tilde{\Phi}(\delta_*, \vartheta_*) &= \frac{M_T(\delta_*, \vartheta_*)}{I_* T_\tau(\delta_*, \vartheta_*)} \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\delta_* = \beta_*^{-1}$$

Обсуждение этих условий представлено в [4, 5].

Замечание. Если в начальный момент угловая скорость рассматриваемых тел равна нулю, то при движении по инерции момент от сил трения будет равен нулю до полной остановки, иными словами, тело будет двигаться как материальная точка в соответствии с уравнениями

$$\ddot{x} = -gf_x \cos \vartheta, \quad \ddot{y} = -gf_y \sin \vartheta, \quad \ddot{\varphi} = 0$$

Аналогичная ситуация наблюдается в случае, когда начальная скорость центра масс равна нулю, но имеется угловая скорость не равная нулю. При таких начальных условиях движение будет чисто вращательным до полной остановки. Момент сил трения в этом случае равен

$$M_T = -\frac{1}{3} p_0 (R_2^3 - R_1^3) \pi (f_x + f_y) < 0,$$

и уравнения движения записываются в виде

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad J\ddot{\varphi} = M_T$$

Следует еще отметить, что уравнения (7.7) имеют решения по β_* ($\delta_* = \beta_*^{-1}$) отличные от нулевого или бесконечно большого при определенных значениях момента инерции. Это было показано для случаев распределения давления по законам Герца, Буссинеска и равномерного распределения давления [12, 14–17]. В рассматриваемой задаче такая зависимость тоже прослеживается.

Подчеркнем, что при численном решении системы уравнений (7.1) и определении финальных характеристик движения тела по инерции при отсутствии решения уравнения $T_n(\vartheta, \beta) = 0$ угол ϑ стремится к бесконечности. Очевидно, что в действительности это не происходит и следует иметь критерий остановки численного решения. В публикации [13] отмечено, что при скоростях меньше некоторого значения проис-

Таблица 1. Кинематические параметры, характеризующие момент остановки цилиндра, опирающегося на круговую площадку при учете согласованного ортотропного трения с учетом его высоты

μ	$h = 0$	$h = 0.5h_*$	$h = h_*$	μ	$h = 0$	$h = 0.5h_*$	$h = h_*$
0.00	$\vartheta = \vartheta_0$ $\beta = 0.653$	—	—	0.21	$\vartheta_1 = 0$ $\vartheta_2 = \pi$ $\beta = 0.928$	$\vartheta_1 = -0.186$ $\vartheta_2 = 2.955$ $\beta = 0.905$	$\vartheta_1 = -0.439$ $\vartheta_2 = 2.703$ $\beta = 0.823$
0.03	$\vartheta_1 = 0$ $\vartheta_2 = \pi$ $\beta = 0.697$	—	—	0.24	$\vartheta_1 = 0$ $\vartheta_2 = \pi$ $\beta = 0.967$	$\vartheta_1 = -0.165$ $\vartheta_2 = 2.976$ $\beta = 0.944$	$\vartheta_1 = -0.377$ $\vartheta_2 = 2.765$ $\beta = 0.869$
0.06	$\vartheta_1 = 0$ $\vartheta_2 = \pi$ $\beta = 0.739$	—	—	0.27	$\vartheta_1 = 0$ $\vartheta_2 = \pi$ $\beta = 1.014$	$\vartheta_1 = -0.148$ $\vartheta_2 = 2.993$ $\beta = 0.985$	$\vartheta_1 = -0.333$ $\vartheta_2 = 2.809$ $\beta = 0.911$
0.09	$\vartheta_1 = 0$ $\vartheta_2 = \pi$ $\beta = 0.778$	$\vartheta_1 = -0.437$ $\vartheta_2 = 2.704$ $\beta = 0.734$	—	0.30	$\vartheta_1 = 0$ $\vartheta_2 = \pi$ $\beta = 1.089$	$\vartheta_1 = -0.133$ $\vartheta_2 = 3.009$ $\beta = 1.043$	$\vartheta_1 = -0.299$ $\vartheta_2 = 2.843$ $\beta = 0.952$
0.12	$\vartheta_1 = 0$ $\vartheta_2 = \pi$ $\beta = 0.816$	$\vartheta_1 = -0.316$ $\vartheta_2 = 2.825$ $\beta = 0.785$	—	0.33	$\vartheta_1 = 0$ $\vartheta_2 = \pi$ $\beta = 1.211$	$\vartheta_1 = -0.117$ $\vartheta_2 = 3.024$ $\beta = 1.138$	$\vartheta_1 = -0.271$ $\vartheta_2 = 2.871$ $\beta = 0.996$
0.15	$\vartheta_1 = 0$ $\vartheta_2 = \pi$ $\beta = 0.854$	$\vartheta_1 = -0.254$ $\vartheta_2 = 2.888$ $\beta = 0.827$	—	0.36	$\vartheta_1 = 0$ $\vartheta_2 = \pi$ $\beta = 1.428$	$\vartheta_1 = -0.099$ $\vartheta_2 = 3.042$ $\beta = 1.297$	$\vartheta_1 = -0.243$ $\vartheta_2 = 2.899$ $\beta = 1.065$
0.18	$\vartheta_1 = 0$ $\vartheta_2 = \pi$ $\beta = 0.890$	$\vartheta_1 = -0.214$ $\vartheta_2 = 2.927$ $\beta = 0.867$	$\vartheta_1 = -0.545$ $\vartheta_2 = 2.597$ $\beta = 0.764$	0.39	$\vartheta_1 = 0$ $\vartheta_2 = \pi$ $\beta = 1.944$	$\vartheta_1 = -0.078$ $\vartheta_2 = 3.064$ $\beta = 1.620$	$\vartheta_1 = -0.212$ $\vartheta_2 = 2.930$ $\beta = 1.180$

ходит адгезионное схватывание. Опираясь на этот факт, можно задаться малой величиной ε и при условии $v < \varepsilon$, $\omega < \varepsilon$ остановить процедуру численного решения системы уравнений (7.1), так как при таких скоростях меняется физический процесс в зоне контакта и происходит остановка твердого тела.

В табл. 1 и 2 представлены финальные значения величин ϑ_* и β_* для случая скольжения по инерции цилиндра, опирающегося на круговое основание ($J_* = 1/2$) и полого цилиндра, опирающегося на тонкую кольцевую область ($R_1 \rightarrow R_2$, $J_* = 1$). Для сопоставления указанных финальных величин для этих тел было введено предположение, что центр масс тел располагается на одинаковой высоте ($h = 0$, $h = 0.5h_*$, $h = h_*$,

$$h_* = \frac{1}{4\pi f_{y \max}}, f_x = 0.42, f_{y \max} = f_x + \mu_{\max} = 0.84).$$

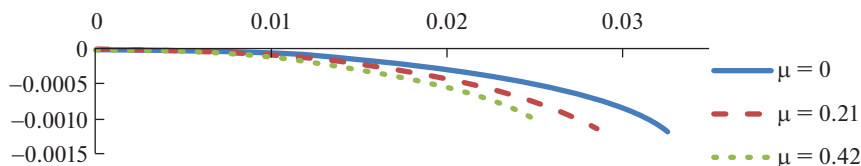
В табл. 1 и 2 имеются незаполненные ячейки. Это означает, что при параметрах μ и h , которые соответствуют этим ячейкам решение системы (7.7) отсутствует. Отметим, что нет решения и при значениях $\mu > 0.42$. Это означает, что финальное движение при данных параметрах характеризуется отсутствием решения уравнения $T_n(\vartheta_*, \beta_*) = 0$ и стремлением безразмерной величины $\beta_* = v_*/\omega_*$ к нулю или бесконечности.

Таблица 2. Кинематические параметры, характеризующие момент остановки твердого тела, опирающегося на тонкую кольцевую площадку при учете согласованного ортотропного трения

μ	$h = 0$	$h = 0.5h_*$	$h = h_*$	μ	$h = 0$	$h = 0.5h_*$	$h = h_*$
0.00	$\vartheta = \vartheta_0$ $\beta = 1.000$	—	—	0.21	$\vartheta_1 = 0$ $\vartheta_2 = \pi$ $\beta = 1.192$	$\vartheta_1 = -0.146$ $\vartheta_2 = 2.996$ $\beta = 1.172$	$\vartheta_1 = -0.318$ $\vartheta_2 = 2.823$ $\beta = 1.118$
0.03	$\vartheta_1 = 0$ $\vartheta_2 = \pi$ $\beta = 1.010$	—	—	0.24	$\vartheta_1 = 0$ $\vartheta_2 = \pi$ $\beta = 1.257$	$\vartheta_1 = -0.128$ $\vartheta_2 = 3.013$ $\beta = 1.233$	$\vartheta_1 = -0.278$ $\vartheta_2 = 2.863$ $\beta = 1.167$
0.06	$\vartheta_1 = 0$ $\vartheta_2 = \pi$ $\beta = 1.026$	$\vartheta_1 = -0.499$ $\vartheta_2 = 2.639$ $\beta = 1.011$	—	0.27	$\vartheta_1 = 0$ $\vartheta_2 = \pi$ $\beta = 1.344$	$\vartheta_1 = -0.113$ $\vartheta_2 = 3.029$ $\beta = 1.313$	$\vartheta_1 = -0.245$ $\vartheta_2 = 2.896$ $\beta = 1.230$
0.09	$\vartheta_1 = 0$ $\vartheta_2 = \pi$ $\beta = 1.046$	$\vartheta_1 = -0.316$ $\vartheta_2 = 2.896$ $\beta = 1.033$	—	0.30	$\vartheta_1 = 0$ $\vartheta_2 = \pi$ $\beta = 1.466$	$\vartheta_1 = -0.099$ $\vartheta_2 = 3.043$ $\beta = 1.424$	$\vartheta_1 = -0.217$ $\vartheta_2 = 2.925$ $\beta = 1.314$
0.12	$\vartheta_1 = 0$ $\vartheta_2 = \pi$ $\beta = 1.071$	$\vartheta_1 = -0.240$ $\vartheta_2 = 2.901$ $\beta = 1.058$	$\vartheta_1 = -0.612$ $\vartheta_2 = 2.518$ $\beta = 1.014$	0.33	$\vartheta_1 = 0$ $\vartheta_2 = \pi$ $\beta = 1.651$	$\vartheta_1 = -0.085$ $\vartheta_2 = 3.056$ $\beta = 1.588$	$\vartheta_1 = -0.190$ $\vartheta_2 = 2.952$ $\beta = 1.432$
0.15	$\vartheta_1 = 0$ $\vartheta_2 = \pi$ $\beta = 1.102$	$\vartheta_1 = -0.197$ $\vartheta_2 = 2.945$ $\beta = 1.088$	$\vartheta_1 = -0.453$ $\vartheta_2 = 2.689$ $\beta = 1.045$	0.36	$\vartheta_1 = 0$ $\vartheta_2 = \pi$ $\beta = 1.971$	$\vartheta_1 = -0.070$ $\vartheta_2 = 3.071$ $\beta = 1.863$	$\vartheta_1 = -0.162$ $\vartheta_2 = 2.979$ $\beta = 1.613$
0.18	$\vartheta_1 = 0$ $\vartheta_2 = \pi$ $\beta = 1.142$	$\vartheta_1 = -0.167$ $\vartheta_2 = 2.974$ $\beta = 1.125$	$\vartheta_1 = -0.371$ $\vartheta_2 = 2.770$ $\beta = 1.079$	0.39	$\vartheta_1 = 0$ $\vartheta_2 = \pi$ $\beta = 2.717$	$\vartheta_1 = -0.052$ $\vartheta_2 = 3.090$ $\beta = 2.455$	$\vartheta_1 = -0.131$ $\vartheta_2 = 3.010$ $\beta = 1.931$

Важной особенностью движения при динамически согласованном трении является искривление траектории центра масс. На рис. 5 изображена траектория центра масс цилиндра в случае $h = 0.5h_*$ и μ равных 0, 0.21 и 0.42. На рис. 6 тоже, но при $h = h_*$. Траектория центра масс тонкостенного полого цилиндра при тех же параметрах h и μ представлены на рис. 7 и рис. 8. Начальные условия во всех случаях были одинаковыми: $t = 0$, $v_0 = 0.1$, $\vartheta_0 = 0$, $\omega_0 = 1$.

Численные расчеты представленные в табл. 1 и 2, а так же работа [5] показывают, что при $h = 0$ непосредственно перед остановкой центр масс пластины, имеющей форму круга или тонкого кольца, при равномерном распределении давления имеет скорость направленную параллельно оси, вдоль которой коэффициент трения мини-

**Рис. 5.** Траектории центра масс цилиндра, опирающегося на круг основания при $h = 0.5h_*$.

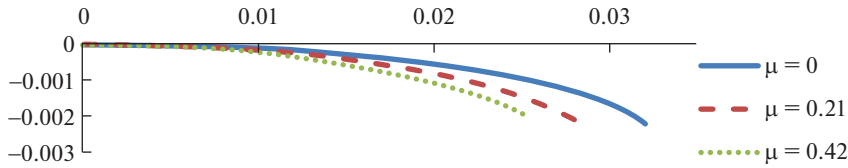


Рис. 6. Траектории центра масс цилиндра, опирающегося на круг основания при $h = h_*$.

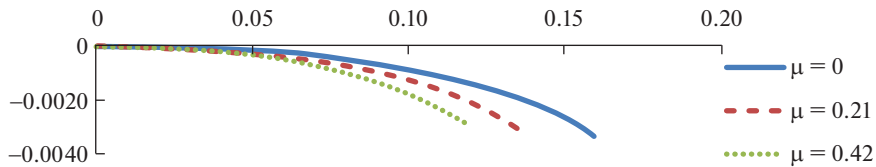


Рис. 7. Траектории центра масс полого цилиндра, опирающегося на окружность основания при $h = 0.5h_*$.

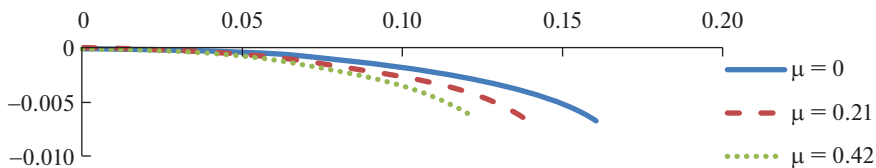


Рис. 8. Траектории центра масс полого цилиндра, опирающегося на окружность основания при $h = h_*$.

мален. В случае учета расстояния от плоскости скольжения до центра масс тела качественный и количественный результат меняется. При некоторых значениях параметра μ решения системы (7.7) и уравнения $T_n(\vartheta, \beta) = 0$ нет, формально угол ϑ при численном решении системы (7.1) стремится к бесконечности. Если решение (7.7) имеется, то финальное движение характеризуется искривлением траектории в сторону противоположную угловой скорости, как и в случае изотропного трения. То есть эффект учета расположения центра масс над плоскостью превосходит эффект, который возникает от ортотропности трения. Но при увеличении параметра μ влияние этих эффектов могут стать сопоставимыми, из представленных таблиц видно, что при увеличении параметра μ вектор скорости на финальном участке становится ближе к оси, вдоль которой коэффициент трения меньше.

Заключение. Подведем некоторые итоги.

1. При изучении движения твердого тела по инерции при наличии сил трения скорость центра масс и угловая скорость должны обратиться в ноль. Поэтому следует выработать условие, при котором численные расчеты следует остановить. Это важно, когда уравнение $T_n(\vartheta_*, \beta_*) = 0$ не имеет решений, так как в этом случае величина ϑ будет стремиться к бесконечности.

2. Введенная в работе величина $\beta = v_0/\omega$ соответствует расстоянию от центра масс до мгновенной оси вращения. При финальном движении эта характеристика может иметь конечное значение, равняться нулю или стремиться к бесконечности. Просле-

живается зависимость величины β от величины $\mu = f_y - f_x \geq 0$ и от расстояния от центра масс до плоскости h , по которой происходит скольжение. На данный момент не удалось получить утверждения, связывающие компоненты тензора трения, момент инерции тела, величину h и значение β , как это было сделано в [14–17].

3. Если начальная скорость направлена вдоль оси Oy ($f_y > f_x$), то сочетание согласованного трения и ортотропного трения, приводит к увеличению отклонения центра масс вправо, если смотреть вдоль вектора начальной скорости. В случае, когда начальная скорость направлена вдоль оси Ox , происходит уменьшение отклонения центра масс вправо, вызываемого учетом расстояния от центра масс до плоскости скольжения вследствие влияния сил ортотропного трения. В [5] было отмечено, что движение вдоль главной оси, соответствующей наибольшему коэффициенту трения при ортотропном трении, является неустойчивым главным направлением скольжения. Одновременный учет концепции согласованного трения и закона ортотропного трения усиливает неустойчивость движения вдоль оси Oy .

4. Движение при динамически согласованном изотропном трении изучалось в работах [11, 18, 19]. В них были сформулированы утверждения отражающие качественные особенности движения симметричных тел. Изучение движения при согласованном ортотропном трении требует изменения формулировок утверждений, сделанных в этих публикациях. В частности, появляется зависимость от направления скорости на финальном участке движения тела по инерции. Особым случаем является опора тела на несколько точек [20]. При таком контакте тела с плоскостью финальное движение может быть вращением вокруг оси, проходящей через точку опоры, быть поступательным или может существовать предельное положение мгновенной оси вращения. При этом все эти варианты зависят от ориентации опор по отношению к главным осям скольжения. В данном направлении предполагаются дальнейшие исследования.

5. Результаты, полученные в работе, могут быть применены при исследовании динамики систем, в которых контакт с плоскостью происходит по круговой или кольцевой площадке или совокупности таких площадок.

В ходе подготовки данной статьи автор обсуждал результаты со своим учителем Товстиком Петром Евгеньевичем. Его точные и доброжелательные замечания учтены при подготовке данной публикации. К огромному сожалению Петра Евгеньевича не стало в декабре 2020 года. Данную статью посвящаю большому ученому, моему наставнику Товстику Петру Евгеньевичу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов А.П. Динамически совместная модель контактных напряжений при плоском движении твердого тела // ПММ. Т. 73. Вып. 2. 2009. С. 189–203.
2. Александрович А.И., Векшин В.С., Потапов И.Н. Тензор коэффициентов трения анизотропных поверхностей // Трение и износ. 1985. Т. 4. № 6. С. 996–1004.
3. Zmitrowicz A. Mathematical descriptions of anisotropic friction // Int. J. Solids&Struct. 1989. № 25(8). P. 837–862.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(89\)90034-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(89)90034-6)
4. Ишлинский А.Ю., Соколов Б.Н., Черноусько Ф.Л. О движении плоских тел при наличии сухого трения // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 4. С. 17–28.
5. Дмитриев Н.Н. Движение диска и кольца по плоскости с анизотропным трением // Трение и износ. 2002. Т. 23. № 1. С. 10–15.
6. Русинова А.М. О динамике однородной шайбы на наклонной плоскости с трением // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 4. С. 538–544.
7. Русинова А.М. О динамике шайбы на наклонной плоскости при несимметричном распределении нормальных напряжений // ПММ. Механика. 2015. Т. 79. Вып. 6. С. 768–777.

8. Зобова А.А. Обзор моделей распределенного сухого трения // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 2. С. 194–206.
9. Иванов А.П., Шувалов Н.Д. О движении тяжелого тела с кольцевым основанием по горизонтальной плоскости и загадках керлинга // Нелин. дин. 2011. Т. 7. № 3. С. 521–530.
10. Мак-Миллан В.Д. Динамика твердого тела. М.: Иностран. лит., 1951. 468 с.
11. Иванов А.П. Основы теории систем с трением. М.; Ижевск: Регул. и хаотич. дин., 2011. 302 с.
12. Розенблат Г.М. Динамические системы с трением. М.; Ижевск: Регул. и хаотич. Дин., 2006. 204 с.
13. Веттегрень В.И., Савицкий А.В., Ляшков А.И., Мамалимов Р.И. Зависимость коэффициента трения одномерно армированного волокнистого композита от свойств матрицы // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. Вып. 19. С. 79–85.
14. Дмитриев Н.Н. Скольжение твердого тела, опирающегося на круговую площадку, по горизонтальной плоскости с ортотропным трением. Ч. I. Равномерное распределение нагрузки // Трение и износ. 2009. Т. 30. № 4. С. 317–326.
15. Дмитриев Н.Н. Скольжение твердого тела, опирающегося на круговую площадку, по горизонтальной плоскости с ортотропным трением. Ч. II. Распределение давления по закону Буссинеска // Трение и износ. 2009. Т. 30. № 5. С. 429–439.
16. Дмитриев Н.Н. Скольжение твердого тела, опирающегося на круговую площадку, по горизонтальной плоскости с ортотропным трением. Ч. III. Распределение давления по закону Герца // Трение и износ. 2010. Т. 31. № 4. С. 342–352.
17. Дмитриев Н.Н. Движение твердых тел, опирающихся на тонкую кольцевую область, по горизонтальной плоскости с ортотропным трением // Вестн. СПб. ун-та. Сер. I. 2011. Вып. 4. С. 109–117.
18. Ермакова Н.Н., Мамаев И.С. Динамика тела с осесимметричным основанием, скользящего по шероховатой плоскости // Нелин. дин. 2013. Т. 9. № 3. С. 521–545.
19. Сальникова Т.В., Трещев Д.В., Галлямов С.Р. Движение свободной шайбы по шероховатой горизонтальной плоскости // Нелин. дин. 2012. Т. 8. № 1. С. 83–101.
20. Розенблат Г.М. О движении тела, опирающегося на шероховатую горизонтальную плоскость тремя точками // Докл. РАН. 2017. Т. 476. № 1. С. 35–38.

On the Motion of an Axisymmetric Rigid Body Supported by a Horizontal Plane under Conditions of Orthotropic, Dynamically Consistent Friction

N. N. Dmitriev^{a, #}

^a Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia

[#] e-mail: dn7@rambler.ru

The anisotropy of the friction force affects the trajectory of the material point, the cinematic characteristics of solids and the processes occurring in the contact area of the friction pair. It is also known that when solids move along the plane, the density of the normal reaction may depend on the velocity of the center of mass of the body and its angular velocity. This work is devoted to the simultaneous consideration of these phenomena on the dynamics of a body leaning on a circular or annular region.

Keywords: anisotropic friction, orthotropic friction, consistent friction.

REFERENCES

1. Ivanov A.P. A dynamically consistent model of the contact stresses in the plane motion of a rigid body // JAMM, 2009, vol. 73 (2), pp. 134–144.
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2009.04.003>
2. Aleksandrovich A.I., Vekshin V.S., Potapov I.N. Tensor of friction coefficients of anisotropic surfaces // *Trenie Iznos*, 1985, vol. 6, pp. 996–1004.

3. *Zmitrowicz A.* Mathematical descriptions of anisotropic friction. *International // J. Solids&Struct.*, 1989, no. 25 (8), pp. 837–862.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(89\)90034-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(89)90034-6)
4. *Ishlinskii A.Yu., Sokolov B.N., Chernous'ko F.L.* Motion of flat bodies in case of dry friction // *Izv. AN SSSR. MTT*, 1981, no. 4, pp. 17–28.
5. *Rusinova A.M.* The dynamics of a homogeneous disc on an inclined plane with friction // *JAMM*, 2013, vol. 77 (4), pp. 386–391.
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.11.007>
6. *Dmitriev N.N.* Movement of the disk and ring over the plane with anisotropic friction // *Friction & Wear*, 2002, vol. 23, no. 1, pp. 10–15. (in Russian)
7. *Rusinova A.M.* The dynamics of a disk on a rough inclined plane when there is an uneven normal stress distribution // *JAMM*, 2015, vol. 79 (6), pp. 539–545.
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2016.04.012>
8. *Zobova A.A.* A review of models of distributed dry friction // *JAMM*, 2016, vol. 80 (2), pp. 141–148.
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2016.06.008>
9. *Ivanov A.P., Shuvalov N.D.* On the motion of a heavy body with a circular base on a horizontal plane and riddles of curling // *Reg. & Chaotic Dyn.* vol. 17 (1), pp. 97–104.
<https://doi.org/10.1134/S156035471201008X>
10. *Mac Millan W.D.* *Dynamics of Rigid Bodies.* N.Y.; L.: 1936.
11. *Ivanov A.P.* *Fundamentals of the Theory of Systems with Friction.* Moscow; Izhevsk: R&C Dyn., 2011. 304 p.
12. *Rozenblat G.M.* *Dynamical Systems with Dry Friction.* Moscow; Izhevsk: R&C Dyn., 2006. 204 p. (in Russian)
13. *Vettegren V.I., Savickiy A.V., Lyashkov A.I., Mamalimov R.I.* The dependence of friction coefficient of the one-direction reinforced fiber composite of the matrix properties // *Lett. J. Appl. Phys.*, 2008, vol. 34, no. 19, pp. 79–85.
14. *Dmitriev N.N.* Sliding of a solid body supported by a round platform on a horizontal plane with orthotropic friction. Part 1. Regular load distribution // *J. Friction & Wear*, 2009, vol. 30, iss. 4, pp. 227–234.
<https://doi.org/10.3103/S1068366609040011>
15. *Dmitriev N.N.* Sliding of a solid body borne on a circular area over a horizontal plane with orthotropic friction. Part 2. Pressure distribution according to the Bussinesque law // *J. Friction & Wear*, 2009, vol. 30, iss. 5, pp. 309–316.
<https://doi.org/10.3103/S106836660905002X>
16. *Dmitriev N.N.* Sliding of a solid body supported by a circular area on a horizontal plane with orthotropic friction. Part 3. Pressure distribution following the Hertzian law // *J. Friction&Wear*, 2010, vol. 31, iss. 4, pp. 253–260.
<https://doi.org/10.3103/S1068366610040021>
17. *Dmitriev N.N.* The motion of a rigid body along a horizontal plane with annular domain of support and with orthotropic friction // *Vestn. SPb. Univ.*, 2011, iss. 4, pp. 109–117.
18. *Erdakova N.N., Mamaev I.S.* On the dynamics of a body with an axisymmetric base sliding on a rough plane // *J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 3, pp. 521–545. (Russian)
19. *Salnikova T.V., Treschev D.V., Gallyamov S.R.* On the motion of free disc on the rough horizontal plane // *J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 1, pp. 83–101. (in Russian)
20. *Rozenblat G.M.* Motion of a body sliding on a rough horizontal plane and supported at three points // *Dokl. Phys.*, 2017, vol. 62, no. 9, pp. 430–433.
<https://doi.org/10.7868/S0869565217250089>

УДК 539.3

К ВОПРОСУ О КОНТАКТЕ ВОЛНИСТОГО ЦИЛИНДРА И УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

© 2022 г. И. Ю. Цуканов^{1,*}

¹ *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**e-mail: ivan.yu.tsukanov@gmail.com*

Поступила в редакцию 29.06.2022 г.

После доработки 19.07.2022 г.

Принята к публикации 20.07.2022 г.

На основе решения плоских контактных задач для одной и двух зон контакта исследовано влияние геометрии волнистого цилиндра на длину фактической области контакта при внедрении его в упругую полуплоскость. Получены аналитические выражения для определения границ двух зон контакта и полной нагрузки при произвольной функции зазора между поверхностями. Установлена связь между границами зоны контакта и фиктивной зоны отрицательных (растягивающих) контактных напряжений, возникающей при использовании решения для односвязной области. Показано, что волнистость поверхности цилиндра оказывает значительное влияние на зависимость длины фактической области контакта от нагрузки. Выявлено немонотонное поведение этой зависимости при переходе от двухсвязной области контакта к односвязной.

Ключевые слова: контактная задача, волнистый цилиндр, упругий контакт, неровности поверхности

DOI: 10.31857/S0032823522050125

Микрогеометрия поверхностей оказывает существенное влияние на условия их контактного взаимодействия, от которого, в свою очередь, зависят функциональные свойства подвижных и неподвижных сопряжений. Когда одно или оба контактирующих тела изготовлены из упругих материалов с низким модулем упругости зазор между ними может быть весьма мал даже при невысоких приложенных давлениях. Вследствие наличия нескольких масштабных уровней неровностей, связанных как с погрешностями изготовления деталей (например, волнистость и шероховатость), так и с наличием искусственно созданной текстуры, их взаимовлияние может приводить к смене режима взаимодействия неровностей, что не всегда возможно учесть в рамках континуальных (например, модель нелинейного слоя [1]) и иерархических (например, фрактальных [2]) моделей в механике контакта тел с многоуровневым микрорельефом. Влияние масштабных уровней неровностей особенно проявляется в поведении фактической площади касания соприкасающихся тел с ростом приложенной нагрузки, что важно для создания текстур поверхностей с управляемыми адгезионными свойствами [3].

Эффекты, связанные с взаимовлиянием масштабных уровней неровностей при контактном взаимодействии, хорошо иллюстрирует задача о контакте волнистого цилиндра и упругой полуплоскости. Численно-аналитическое решение для очень малых амплитуд волнистости получено в работе [4] в виде ряда Фурье. Численное моделирование данной задачи при конкретных геометрических параметрах проведено в ра-

ботах [5, 6] с помощью итерационного метода решения интегрального уравнения контактной задачи и в [7] методом граничных элементов. В недавней работе [8] разработан алгоритм решения задач дискретного контакта для семейства штампов и упругой полосы, в том числе для штампа, близкого по форме к волнистому цилиндру.

В работе [7] показано, что на основные контактные характеристики — зависимость длины фактической области контакта от нагрузки и максимальное контактное давление — оказывает существенное влияние геометрия в месте начального касания волнистого цилиндра и полуплоскости. В данной работе на основе решения задач механики контактного взаимодействия проведен анализ влияния двух вариантов геометрии в месте начального касания волнистого цилиндра и полуплоскости на фактическую область контакта.

1. Постановка задач и допущения. Рассмотрим контакт волнистого упругого цилиндра и упругой полуплоскости (рис. 1) в момент их начального касания. Функция профиля поверхности цилиндра определяется следующим выражением:

$$f(x) = \frac{x^2}{2R} + \Delta \cos(nx + \psi) + C_0, \quad (1.1)$$

где R — радиус цилиндра; Δ , n — амплитуда и частота волнистости; ψ — фаза, в данной работе рассмотрены случаи $\psi = 0$ (рис. 1, а) и $\psi = \pi$ (рис. 1, б); C_0 — константа, определяющая отсутствие зазора в зоне касания.

Задача рассматривается в рамках линейной теории упругости для полубесконечных тел в плоской постановке. При этом считается, что в направлении оси y контактирующие тела имеют неограниченную длину (плоское деформированное состояние).

В качестве допущений примем, что амплитуда Δ существенно меньше периода волнистости $\lambda = 2\pi/n$, который, в свою очередь, значительно меньше радиуса R цилиндра. Влиянием сил трения и межмолекулярных сил на распределение контактных напряжений в задаче пренебрегаем.

2. Определение зависимости длины фактической области контакта от нагрузки. Рассмотрим случай $\psi = 0$ (см. рис. 1, а). Изначально в контакт вступают две неровности, положение которых зависит от геометрических параметров цилиндра и волнистости. Начало координат расположим в центре впадины между неровностями.

Запишем интегральное уравнение контактной задачи [9]:

$$h'(x) = \frac{2}{\pi E^*} \int_L \frac{p(\xi) d\xi}{x - \xi}, \quad (2.1)$$

где функция зазора $h(x) = \delta - f(x)$, δ — величина сближения двух тел; L — множество зон контакта, в данном случае $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 = [-a, -b]$, $L_2 = [b, a]$, E^* — приведенный модуль упругости материалов контактирующих тел:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}, \quad (2.2)$$

где E_1 , E_2 и ν_1 , ν_2 — модули Юнга и коэффициенты Пуассона материалов контактирующих тел, соответственно.

Решение уравнения (2.1) для двух зон контакта с неизвестными границами имеет следующий вид [10]:

$$p(x) = \frac{E^* \sqrt{(x^2 - b^2)(a^2 - x^2)}}{2\pi} \int_L \frac{h'(\xi) d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - b^2)(a^2 - \xi^2)}(\xi - x)}; \quad \forall x \in L \quad (2.3)$$

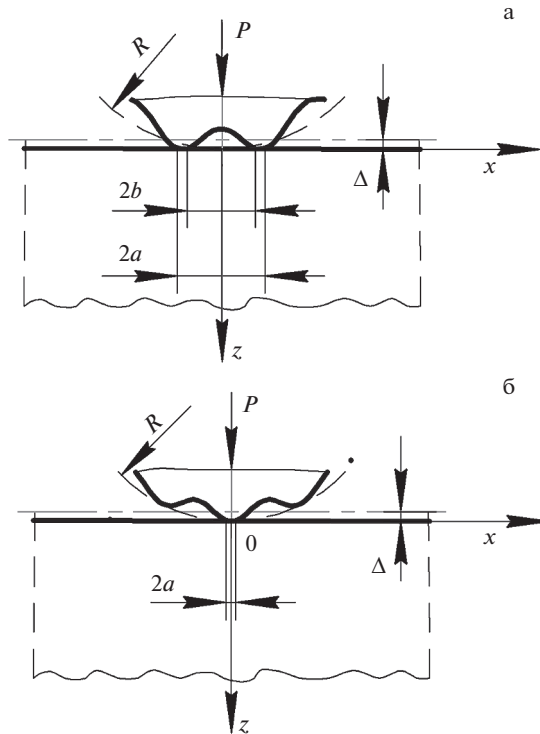


Рис. 1. Схема контакта волнистого цилиндра и упругой полуплоскости при $\psi = 0$ (а) и $\psi = \pi$ (б).

При этом граничные точки (a и b), в которых контактное давление $p(x)$ обращается в нуль, связаны условием согласованности [10]:

$$\int_b^a \frac{h'(\xi)d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - b^2)(a^2 - \xi^2)}} = 0 \tag{2.4}$$

Вычисление сингулярного интеграла в (2.3) для биквадратной функции зазора $h(x)$ получено в [11], однако для произвольного вида данной функции оно может быть затруднительно.

Для практических приложений наиболее важно определение зависимости длины фактической области контакта от приложенной нагрузки P , которая находится из уравнения равновесия

$$P = \int_L p(x)dx \tag{2.5}$$

С использованием (2.3), (2.5) и равенства Рисса для повторных интегралов с одним сингулярным интегралом [12] при удовлетворении функцией $h'(x)$ условия Гельдера имеем

$$P = \frac{E^*}{2\pi} \int_L \frac{h'(\xi)}{\sqrt{(\xi^2 - b^2)(a^2 - \xi^2)}} \int_L \frac{\sqrt{(x^2 - b^2)(a^2 - x^2)}}{\xi - x} dx d\xi; \quad \forall x \in L \tag{2.6}$$

Вычисление внутреннего интеграла в (2.6) дает выражение для полной нагрузки.

$$P = \frac{E^*}{2} \int_b^a \frac{(2\xi^2 - a^2 - b^2) h'(\xi) d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - b^2)(a^2 - \xi^2)}} \quad (2.7)$$

Интеграл в (2.7) не является сингулярным, что позволяет вычислить его стандартными численными методами. Выражения (2.4) и (2.7) образуют систему уравнений для определения граничных точек областей контакта при заданной нагрузке.

С использованием допущения $\Delta \ll 2\pi/n$ функция (1.1), описывающая форму волнистого цилиндра, может быть с достаточной точностью представлена рядом Тейлора 6-й степени. Тогда производная функции зазора $h'(x)$ будет иметь вид:

$$h'(x) = -A_1 x^5 + A_2 x^3 + A_3 x, \quad (2.8)$$

где $A_1 = \frac{\Delta n^6}{120}$; $A_2 = \frac{\Delta n^4}{6}$; $A_3 = \frac{1}{R} - \Delta n^2$.

Вычисляя интеграл в (2.4) при $a > b$ получим следующее уравнение:

$$\int_b^a \frac{(-A_1 x^5 + A_2 x^3 + A_3 x) d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - b^2)(a^2 - \xi^2)}} = \frac{-\pi A_1}{16} (4a^4 + 2a^2 b^2 + 3b^4) + \frac{\pi A_2}{4} (a^2 + b^2) + \frac{\pi A_3}{2} \quad (2.9)$$

Приравняв выражение (2.9) к нулю для выполнения условия согласованности, получим уравнение связи концов области контакта a и b .

$$-A_1 \left(\frac{3}{16} a^4 + \frac{1}{8} a^2 b^2 + \frac{3}{16} b^4 \right) + A_2 \frac{1}{4} (a^2 + b^2) + A_3 \frac{1}{2} = 0 \quad (2.10)$$

При $a > b > 0$ решение уравнения (2.10) относительно b имеет вид:

$$b = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{2A_2}{A_1} - \frac{2}{A_1} \sqrt{2A_1 A_2 a^2 - 2A_1^2 a^4 + 6A_3 A_1 + A_2^2} - a^2} \quad (2.11)$$

В условиях полного контакта на отрезке $x \in [-a, a]$ выражение для полной нагрузки, обеспечивающей “закрытие” зазора между неровностями определяется как [13]

$$P_f = E^* \int_0^a \frac{\xi h'(\xi) d\xi}{\sqrt{(a^2 - \xi^2)}} \quad (2.12)$$

Подставляя выражение (2.8) в (2.12) и вычисляя интегралы, получим:

$$P_f(a) = \frac{\pi E^*}{4} \left(-A_1 \frac{5a^6}{8} + A_2 \frac{3a^4}{4} + A_3 a^2 \right) \quad (2.13)$$

Так как задача симметрична относительно начала координат, то для определения контактного давления применим метод [14, 15] и определим производную нормальной силы P_f :

$$P_f'(a) = \frac{\pi E^*}{16} (-15A_1 a^5 + 12A_2 a^3 + 8A_3 a), \quad (2.14)$$

тогда распределение контактного давления определяется как [14, 15]:

$$p_f(x) = \frac{1}{\pi} \int_x^a \frac{P_f'(s) ds}{\sqrt{s^2 - x^2}} = \frac{E^*}{16} \int_x^a \frac{(-15A_1 s^5 + 12A_2 s^3 + 8A_3 s) ds}{\sqrt{s^2 - x^2}} \quad (2.15)$$

Вычисляя интеграл в (2.15), получим:

$$p_f(x) = E^* \sqrt{a^2 - x^2} \left(-A_1 \left(\frac{3}{16} a^4 + \frac{1}{4} a^2 x^2 + \frac{1}{2} x^4 \right) + \frac{1}{4} A_2 (a^2 + 2x^2) + \frac{1}{2} A_3 \right) \quad (2.16)$$

С уменьшением внешней нагрузки контакт становится неполным, и при использовании формулы (2.16) появляются зоны с отрицательным давлением. Решение задачи для распределения давлений в таком случае сводится к вычислению сингулярного интеграла (2.6), например, с использованием соотношений для многочленов Чебышева на двух симметричных интервалах [11].

Представляет интерес взаимосвязь фактических границ зоны контакта и фиктивной зоны отрицательных (растягивающих) контактных напряжений, появляющихся при использовании формулы (2.16) для полного контакта на отрезке $x \in [-a, a]$. Граница этой фиктивной зоны определяется из условия $p_f(x_0) = 0$. Сомножитель, содержащий радикал, в зависимости (2.16) не равен нулю при $x < a$, следовательно

$$-A_1 \left(\frac{3}{16} a^4 + \frac{1}{4} a^2 x_0^2 + \frac{1}{2} x_0^4 \right) + \frac{1}{4} A_2 (a^2 + 2x_0^2) + \frac{1}{2} A_3 = 0 \quad (2.17)$$

Уравнения (2.17) и (2.10) для определения величины x_0 и границы зоны контакта b являются уравнениями 4-й степени с одинаковым количеством членов. При малых значениях x_0 можно пренебречь компонентом при x_0 в 4-й степени. Тогда уравнение (2.17) приводится к виду

$$\left(-A_1 \frac{1}{2} a^2 + A_2 \right) x_0^2 = A_1 \frac{3}{8} a^4 - \frac{1}{2} A_2 a^2 - A_3 \quad (2.18)$$

Аналогично, при отбрасывании компонента при b в четвертой степени для (2.10) имеем

$$\left(-A_1 \frac{1}{2} a^2 + A_2 \right) \frac{b^2}{2} = A_1 \frac{3}{8} a^4 - A_2 \frac{1}{2} a^2 - A_3 \quad (2.19)$$

Из уравнений (2.18) и (2.19) напрямую следует, что при малых размерах области, в которой контакт отсутствует ($x \in [-b, b]$), соотношение между фактической b и фиктивной x_0 границами зоны контакта равно

$$\frac{b}{x_0} = \sqrt{2} \quad (2.20)$$

Выражение (2.20) в точности совпадает с соотношением, полученным в работе [16], при рассмотрении случая почти полного контакта как сжимаемой трещины под воздействием некоторого параболического давления, которым аппроксимируется распределение давления вблизи центра зоны, в которой контакт отсутствует.

В работе [17] выдвинуто предположение и показано на конкретных примерах, что исключение небольшой области с фиктивными растягивающими контактными напряжениями (в которой контакт отсутствует) путем представления ее сжимаемой трещиной не приводит к изменению полной нагрузки на контактирующие тела. Этот вывод справедлив для распределения фиктивных контактных напряжений, представимых степенным рядом [17]. С учетом условия согласованности (2.4), при $b \rightarrow 0$ подынтегральные выражения в формулах (2.12) и (2.7) совпадают. Кроме того, анализируя выражения (2.10) и (2.17) при $b = x_0 = 0$, становится ясно, что граница области контакта a , при которой реализуется односвязная область контакта, одинакова для указанных выражений.

Длина фактической области контакта будет определяться следующим выражением

$$L_r = 2(a - b) \approx 2(a - \sqrt{2}x_0) \quad (2.21)$$

При достижении полного контакта, при котором две зоны контакта сливаются ($b = 0$), из (2.10) следует выражение для длины фактической области контакта L_r^* :

$$L_r^* = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{2A_2}{A_1} - \frac{2\sqrt{6A_1A_3 + A_2^2}}{A_1}} \quad (2.22)$$

Описанные результаты относятся к случаю начального контакта тел при двух подобластях контакта. После слияния подобластей контакта в рамках приведенных допущений область контакта становится односвязной для $\psi = 0$. В случае $\psi = \pi$ область контакта изначально состоит только из одного отрезка ($L = [-a, a]$, см. рис. 1, б).

Для односвязной области контакта допустимо применение принципа суперпозиции, и контактное давление можно выразить как сумму двух составляющих:

$$p(x) = p_h(x) + p_w(x), \quad (2.23)$$

где $p_h(x)$ – герцевское давление, соответствующее, параболической компоненте функции зазора $h(x)$ [13]; $p_w(x)$ – давление, соответствующее гармонической компоненте. Решение интегрального уравнения (2.1) для $L = [-a, a]$ и гармонической функции зазора получено в [18] в виде ряда по многочленам Чебышева 2-го рода. Таким образом, контактное давление будет иметь вид:

$$p(x) = \frac{E^*}{2R} \sqrt{a^2 - x^2} \mp \frac{E^* \Delta n}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(an) U_{2j} \left(\frac{x}{a} \right), \quad (2.24)$$

где знак минус берется при $\psi = 0$, а знак плюс – при $\psi = \pi$; $J_k(x)$ – Функция Бесселя 1-го рода целого порядка k ; $U_k(x)$ – многочлен Чебышева 2-го рода.

Полная нагрузка для односвязной области контакта определяется интегрированием уравнения равновесия (2.5):

$$P = \int_{-a}^a p(x) dx = \frac{\pi E^* a^2}{4R} \mp \frac{\pi E^* \Delta n}{2} J_1(an), \quad (2.25)$$

а длина фактической области контакта $L_r = 2a$.

3. Результаты и их обсуждение. Зависимости полной нагрузки, обезразмеренные на нагрузку, при внедрении гладкого цилиндра [19] $P_h = \pi a^2 E^* / 4R$, от длины фактической области контакта приведены на рис. 2.

Из рис. 2 видно, что в области высоких нагрузок точное и приближенное решение удовлетворительно совпадают. На графике зависимости нагрузки от длины области контакта выделяется наличие трех участков: двух нелинейных (при малых и больших нагрузках соответственно) и линейный переходный участок. Такое же поведение кривой характерно для периодической задачи о контакте синусоидальной волнистости и полуплоскости [13, 19]. С ростом частоты и амплитуды волнистости длина фактической области контакта уменьшается, но характер кривых остается прежним.

На рис. 3 показаны графики длины фактической области контакта в зависимости от приложенной нагрузки при $R/\Delta = 1300$, $n = 9$ и различном значении фазы ψ .

Из рис. 3 видно, что фаза гармоника волнистости оказывает значительное влияние на поведение длины фактической области контакта для небольших нагрузок. Это связано с различием, как в количестве областей контакта, так и в производной функции зазора $h(x)$. Кривая для гладкого цилиндра находится между кривыми для $\psi = 0$ и

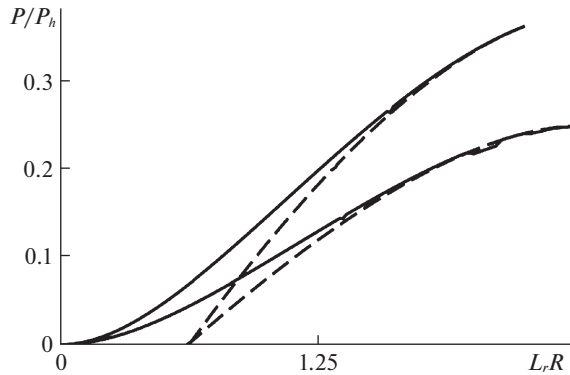


Рис. 2. Зависимость безразмерной нагрузки P от длины фактической области контакта L_r : сплошные линии – точное решение; штриховые линии – расчет на основе (2.13) и (2.20); 1 – $R/\Delta = 1300$, $n = 9$; 2 – $R/\Delta = 1600$, $n = 11$.

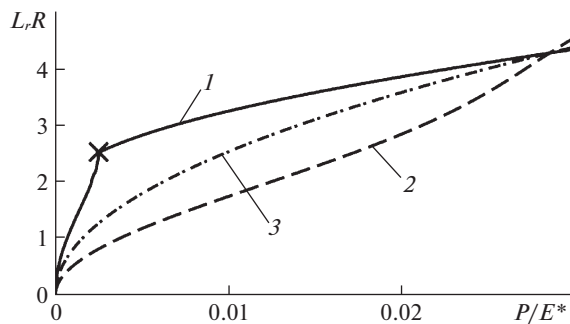


Рис. 3. Зависимости длины фактической области контакта от приложенной нагрузки при $\psi = 0$ (кривая 1); $\psi = \pi$ (кривая 2) и для гладкого цилиндра (кривая 3); символом “ \times ” обозначена точка перехода от двухсвязной области контакта к односвязной.

$\psi = \pi$, и при определенном значении нагрузки они пересекаются, что связано с осциллирующим поведением функции $P(a)$ при полном контакте на отрезке $x \in [-a, a]$. Переход от двухсвязной области контакта к односвязной характеризуется немонотонным изменением зависимости длины фактической области контакта от нагрузки. Такое поведение согласуется с численными результатами для многоуровневой волнистой поверхности [20] и показывает, что наличие таких переходных участков кривой длины фактической области контакта характеризует изменение связности контактной области.

Анализируя полученные результаты можно заключить, что если достигим полный контакт на конкретном масштабном уровне неровностей, то два механизма образования фактической области контакта – возрастание размеров отдельных пятен контакта и увеличение их количества – могут конкурировать друг с другом. Это приводит к нестабильности поведения контактных и фрикционных характеристик с ростом нагрузки. С ростом амплитуды и частоты волнистости полный контакт на отрезке $x \in [-a, a]$

становится недостижимым, и взаимодействие поверхностей будет осуществляться только на вершинах неровностей.

Заключение. Полученные решения контактной задачи для волнистого цилиндра, контактирующего с упругой полуплоскостью, позволили проанализировать различие в поведении длины фактической области контакта с ростом приложенной нагрузки в условиях односвязной и двухсвязной областей контакта, возникающих при различной фазе волнистости. Установлено, что геометрия начального касания оказывает влияние на размер длины фактической области контакта при фиксированной нагрузке. С ростом частоты и амплитуды волнистости длина фактической области контакта для двухсвязной области уменьшается, но характер ее зависимости от нагрузки не меняется и идентичен случаю периодической задачи о контакте синусоидальной волнистости и полуплоскости. На кривой выделяется наличие трех участков: двух нелинейных (при малых и больших нагрузках соответственно) и линейный переходный участок. Переход от двухсвязной области контакта к односвязной характеризуется немонотонным изменением зависимости длины фактической области контакта от нагрузки, что может отразиться на поведении других контактных и фрикционных характеристик. Это необходимо учитывать при создании микротекстурированных поверхностей, работающих в паре с упругими низкомолекулярными материалами.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00400.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горячева И.Г. Расчет контактных характеристик с учетом параметров макро- и микрогеометрии поверхностей // Трение и износ. 1999. Т. 20. № 3. С. 239–248.
2. Borodich F.M. Fractal Contact Mechanics. Encyclopedia of Tribology. 2013. P. 1249–1258.
3. Goryacheva I., Makhovskaya Yu. Discrete Contact Mechanics with Applications in Tribology. Elsevier, 2022. 209 p.
4. Guduru P.R. Detachment of a rigid solid from an elastic wavy surface: Theory // J. Mech. Phys. Solids. 2007. V. 55. P. 445–472.
5. Chekina O.G., Keer L.M. A new approach to calculation of contact characteristics // ASME J. Tribol. 1999. V. 121. № 1. P. 20–27.
6. Sundaram N., Farris T.N. Multiple contacts of similar elastic materials // J. Appl. Mech. T-ASME. 2009. V. 131. № 2. P. 1–12.
7. Seabra J., Berthe D. Influence of surface waviness and roughness on the normal pressure distribution in the hertzian contact // J. Tribology. 1987. V. 109. № 3. P. 462–469.
8. Бобылев А.А. Алгоритм решения задач дискретного контакта для упругой полосы // ПММ. 2022 Т. 86. Вып. 3. С. 404–423.
9. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1933. 382 с.
10. Ghanati P., Adibnazari S. Two-dimensional symmetric double contacts of elastically similar materials // Proc. Inst. Mech. Eng. Pt. C J. Mechan. Eng. Sci. 2015. V. 230. № 10. P. 1626–1633.
11. Gladwell G.M.L. Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity. Dordrecht: Springer, 1980. 736 p.
12. Хведелидзе Б.В. Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. 1975. Т. 7. С. 5–162.
13. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. 270 с.
14. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 336 с.
15. Barber J.R. Contact Mechanics. Cham: Springer Int. Publ., 2018. 592 p.
16. Manners W., Greenwood J.A. Some observations on Persson's diffusion theory of elastic contact // Wear. 2006. V. 261. № 5–6. P. 600–610.

17. Greenwood J.A. On the almost-complete contact of elastic rough surfaces: The removal of tensile patches // *Int. J. Solids Struct.* 2015. V. 56–57. P. 258–264.
18. Tsukanov I.Y. Partial contact of a rigid multisinusoidal wavy surface with an elastic half-plane // *Adv. Tribol.* 2018. V. 2018. P. 1–8.
19. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
20. Paggi M., Reinoso J. A variational approach with embedded roughness for adhesive contact problems // *Mech. Adv. Mater.* 2018. V. 2018. P. 1731–1747.

To the Contact Problem for a Wavy Cylinder and an Elastic Half-Plane

I. Yu. Tsukanov^{a,#}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: ivan.yu.tsukanov@gmail.com*

Based on the solution of plane contact problems for one and two contact zones, the influence of geometry of a wavy cylinder on the length of the real contact region during the penetration into an elastic half-plane is studied. Analytical expressions are obtained to determine the boundaries of two contact zones and the total load for an arbitrary gap function between the surfaces. A connection is established between the boundaries of the contact zone and the fictitious zone of negative (tensile) contact stresses that arise for the simply connected contact region solution. It is shown that the waviness of the cylinder surface has a significant effect on the dependence of length of the real contact region on load. A nonmonotonic behavior of this dependence is revealed in the transition from a doubly connected contact region to a simply connected one.

Keywords: contact problem, wavy cylinder, elastic contact, surface asperities

REFERENCES

1. Goryacheva I.G. Calculation of contact characteristics with consideration of surface macro- and microgeometric parameters // *J. Frict. & Wear*, 1999, vol. 20, no. 3, pp. 239–248.
2. Borodich F.M. *Fractal Contact Mechanics*. Encyclopedia of Tribology, 2013. P. 1249–1258.
3. Goryacheva I., Makhovskaya Yu. *Discrete Contact Mechanics with Applications in Tribology*. Elsevier, 2022. 209 p.
4. Guduru P.R. Detachment of a rigid solid from an elastic wavy surface: Theory // *J. Mech. Phys. Solids*, 2007, vol. 55, pp. 445–472.
5. Chekina O.G., Keer L.M. A new approach to calculation of contact characteristics // *ASME J. Tribol.* 1999, vol. 121, no. 1, pp. 20–27.
6. Sundaram N., Farris T.N. Multiple contacts of similar elastic materials // *J. Appl. Mech. T-ASME*, 2009, vol. 131, no. 2, pp. 1–12.
7. Seabra J., Berthe D. Influence of surface waviness and roughness on the normal pressure distribution in the Hertzian contact // *J. Tribol.*, 1987, vol. 109, no. 3, pp. 462–469.
8. Bobylev A.A. Application of the conjugate gradient method to solving discrete contact problems for an elastic half-plane // *Mech. Solids*, 2022, vol. 57, pp. 317–332.
9. Muskhelishvili N.I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Dordrecht: Springer, 1977. xxxi+732 p.
10. Ghanati P., Adibnazari S. Two-dimensional symmetric double contacts of elastically similar materials // *Proc. Inst. Mech. Eng. Pt. C J. Mechan. Engng. Sci.*, 2015, vol. 230, no. 10, pp. 1626–1633.
11. Gladwell G.M.L. *Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity*. Dordrecht: Springer, 1980. 736 p.
12. Khvedelidze B.V. The method of Cauchy-type integrals in the discontinuous boundary-value problems of the theory of holomorphic functions of a complex variable // *J. Sov. Math.*, 1977, vol. 7, no. 3, pp. 309–415.
13. Shtayerman I.Ya. *Contact Problem of the Theory of Elasticity*. Leningrad: Gostekhteoretizdat, 1970. 314 p.

14. *Aleksandrov V.M., Kovalenko E.V.* Problems of Continuum Mechanics with Mixed Boundary Conditions. Moscow: Nauka, 1986. 336 p. (in Russian)
15. *Barber J.R.* Contact Mechanics. Cham: Springer Int. Publ., 2018. 592 p.
16. *Manners W., Greenwood J.A.* Some observations on Persson's diffusion theory of elastic contact // *Wear*, 2006, vol. 261, no. 5–6, pp. 600–610.
17. *Greenwood J.A.* On the almost-complete contact of elastic rough surfaces: The removal of tensile patches // *Int. J. Solids Struct.*, 2015, vol. 56–57, pp. 258–264.
18. *Tsukanov I.Y.* Partial contact of a rigid multisinusoidal wavy surface with an elastic half-plane // *Adv. Tribol.*, 2018, vol. 2018, pp. 1–8.
19. *Johnson K.L.* Contact Mechanics. Cambridge: Univ. Press, 1985. xii+452 p.
20. *Paggi M., Reinoso J.* A variational approach with embedded roughness for adhesive contact problems // *Mech. Adv. Mater.*, 2018, vol. 2018, pp. 1731–1747.

УДК 624.07

МЕТОД РАСЧЕТА ПЛАСТИН НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ИНЕРЦИОННОЙ НАГРУЗКОЙ ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ

© 2022 г. И. И. Иванченко^{1,*}

¹ *Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, Россия*

**e-mail: ivaii011@mtu-net.ru*

Поступила в редакцию 24.12.2021 г.

После доработки 13.06.2022 г.

Принята к публикации 20.06.2022 г.

Предлагается метод расчета пластин при действии инерционной нагрузки и ее движении с переменной скоростью. Рассмотрены тестовые задачи об ударном воздействии и движении с переменной скоростью по свободно опертой прямоугольной пластине груза при моделировании нелинейного контактного сближения его с пластиной. Рассмотрена задача о взаимодействии транспортной системы, при движении ее в режиме торможения после приземления на протяженную пластину, лежащую на упругом основании.

Ключевые слова: переменная скорость, шаговые процедуры, метод узловых ускорений, пластина, подвижная инерционная нагрузка

DOI: 10.31857/S0032823522050101

1. Введение. При решении задачи о действии на пластины простейших подвижных нагрузок – сосредоточенных и распределенных сил, при постоянных и переменных скоростях движения, применяются интегральные преобразования Фурье и Лапласа [1–4], для грузов находят применения численные решения интегральных уравнений относительно динамических реакций при построении рекуррентных соотношений [5, 6]. В случае действия равномерно распределенной инерционной нагрузки, при переменной скорости движения, путем изменения ее ступенями в работе [7] используется специальное разделение переменных. Методы расчета на действие простейшей инерционной подвижной нагрузки на прямоугольные пластины, как и для стержней, распадаются на два основных подхода. В первом случае используются обобщенные координаты при разложении прогиба по собственным формам балки или пластины и задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [8, 9]. Во втором случае, после расчленения системы “балка–груз” или “пластина–груз”, задача сводится к решению интегрального уравнения относительно динамической реакции груза [5, 6]. В [8, 9] увеличение числа удерживаемых форм приводит к увеличению порядка системы уравнений, в [5, 6] возникают трудности при решении интегральных уравнений, связанные с условной устойчивостью шаговых процедур. В статье для прямоугольных пластин на упругом основании предлагается метод – “узловых ускорений”, объединяющий между собой указанные подходы и ликвидирующий указанные у них недостатки, так как доступно учитывает любое необходимое число форм в разложении прогиба, и имеет, как и в методе интегральных уравнений [5, 6], разрешающую систему уравнений с минимальным числом неизвестных, при использовании безусловно-устойчивой схемы интегри-

рования, предложенной в [10]. Отметим, что метод “узловых ускорений” применяется и для стержневых систем [11–14]. Колебания пластин при действии подвижной инерционной нагрузки исследуются, привлекая метод конечных элементов (МКЭ) в [15–18], как для простейшей силовой нагрузки при косоугольных пластинах [15], так и с привлечением комплексов, например, ABAQUS и LS-DYNA [16–18]. Используя конечно-элементную базу этих комплексов, в [16–18] реализуется, в том числе, аналог первого подхода к решению задачи на подвижную нагрузку, с привлечением набора собственных форм конструкции. В [17] решение задачи “груз–балка” или “груз–плита”, путем введения линейного элемента между движущимся грузом и проезжей частью, сводится к решению системы линейных уравнений с привлечением результатов вычисления форм колебаний конструкции, используя при этом метод Ньюмарка. Другой подход, с привлечением LS-DYNA, реализуемый в [18], сводится к изучению действия сложной подвижной инерционной нагрузки на конструкцию при применении метода динамической релаксации (DYNAMIC RELAXATION). Заметим, что метод “узловых ускорений”, предлагаемый для пластин, реализуется и в случае движения инерционной нагрузки в [14] при конечноэлементной дискретизации коробчатой конструкции пролетного строения моста.

1. Числовая процедура, используемая для решения задачи. Применяемый метод для решения задачи о действии подвижной нагрузки на пластину использует шаговую процедуру [10]. Рассмотрим предварительно решение задачи для осциллятора. Рассмотрим шаговую процедуру для решения уравнения (1.1)

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \mu\omega^2\dot{x} + \omega^2x &= \tilde{P}(t); & \omega^2 &= c/m, & \tilde{P}(t) &= r(t)/m \\ x_0 &= x(0), & v_0 &= \dot{x}(0) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Проведем временную дискретизацию с шагом, где $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, ($j = 0, 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{j+1} + \mu\omega^2\dot{x}_{j+1} + \omega^2x_{j+1} &= \tilde{P}_{j+1} \\ \dot{x}_{j+1} &= \dot{x}_j + \ddot{x}_{j+1/2}\Delta t_j \\ x_{j+1} &= x_j + \dot{x}_j\Delta t_j + \frac{1}{2}\ddot{x}_{j+1/2}\Delta t_j^2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Преобразуем первое уравнение (1.2), используя замену

$$\ddot{x}_{j+1} = 2\ddot{x}_{j+1/2} - \ddot{x}_j, \quad \tilde{P}_{j+1} = 2\tilde{P}_{j+1/2} - \tilde{P}_j \quad (1.3)$$

и выражения \dot{x}_{j+1} и x_{j+1} из второго и третьего уравнений (1.2). В итоге получаем шаговую процедуру

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{j+1/2} &= \tilde{a}_j \left(-\omega^2x_j - \omega^2((\Delta t_j/\alpha_1) + \mu)\dot{x}_j + \tilde{P}_{j+1/2} \right) \\ \dot{x}_{j+1} &= \dot{x}_j + \ddot{x}_{j+1/2}\Delta t_j, & x_{j+1} &= x_j + \dot{x}_j\Delta t_j + \ddot{x}_{j+1/2}\Delta t_j^2/2, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\tilde{a}_j = \left\{ 1 + \left(\omega^2/\alpha_2 \right) \left(\mu\Delta t_j + \Delta t_j^2/\alpha_3 \right) \right\}^{-1}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 2$

Схема (1.4), при обозначении $\beta = -\omega^2\tilde{a}_j$, имеет вид

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{j+1/2} \\ \dot{x}_{j+1} \\ x_{j+1} \end{bmatrix} &= \mathbf{A} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{j-1/2} \\ \dot{x}_j \\ x_j \end{bmatrix} + \mathbf{L}\tilde{P}_{j+1/2} \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & \beta(\mu + \Delta t_j)/2 & \beta \\ 0 & 1 + \beta\Delta t_j(\mu + \Delta t_j/2) & \beta\Delta t_j \\ 0 & \beta\Delta t_j^2(\mu + \Delta t_j/2)/2 + \Delta t_j & 1 + \beta\Delta t_j^2/2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для безусловно-устойчивой процедуры требуется выполнение условия $\rho(\mathbf{A}) = \max |\lambda_i| \leq 1$, $i = 1, 2, 3$, при любом Δt_j , где ρ – спектральный радиус оператора аппроксимации \mathbf{A} и λ_i – корни характеристического уравнения $\|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}\| = 0$ [19]. Для процедуры (1.4), раскрывая определитель по первой строке и делая замену $Z = 1 - \lambda + \beta \Delta t^2 / 2$, имеем уравнение $-\lambda [Z^2 - \mu \Delta t^2 \omega^2 \tilde{a}_j Z + \Delta t^2 \omega^2 \tilde{a}_j^2] = 0$. Решая квадратное уравнение относительно переменной Z , определяем $\lambda_{1,2}$ и $|\lambda_{1,2}|$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 - \frac{1}{4} \Delta t_j^2 \omega^2 \mp \Delta t_j \omega \sqrt{\frac{1}{4} \mu^2 \omega^2 - 1}}{1 + \frac{1}{4} \Delta t_j^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \mu \omega^2 \Delta t_j}, \quad |\lambda_{1,2}| = \left[\frac{1 + \frac{1}{4} \Delta t_j^2 \omega^2 - \frac{1}{2} \mu \Delta t_j \omega^2}{1 + \frac{1}{4} \Delta t_j^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \mu \omega^2 \Delta t_j} \right]^{1/2} < 1 \quad (1.6)$$

Для проверки условия $\max |\lambda_i| \leq 1$ рассматривается выполнение при $h = (\mu \omega / 2) > 1$ и $h = (\mu \omega / 2) < 1$, когда корни $\lambda_{1,2}$ действительные и, соответственно, комплексные. Из простейшей оценки неравенств, следует, что $\rho(\mathbf{A}) < 1$ при $\mu \neq 0$ и $\rho(\mathbf{A}) = 1$ при $\mu = 0$ для любых значений Δt_j . Отметим, что если положить в (1.4) $\mu = 0$, $\dot{x}_j = x_j = 0$ и $\tilde{P}(t) = P = \text{const}$, то при $\Delta t_j \rightarrow \infty$, $\ddot{x}_{j+1/2} \rightarrow 0$, $\dot{x}_{j+1} \rightarrow 0$, $x_{j+1} = 2x_C$, где x_C – статический прогиб осциллятора под действием силы P .

Применяемая процедура (1.4) совпадает с методом постоянного среднего ускорения, но с измененным начальным ускорением. Метод Ньюмарка [20], при $\delta = 0.5$, $\beta = 0.25$, совпадает с предложенным С.П. Тимошенко в [21] методом постоянного среднего ускорения. Процедура (1.4) имеет характеристики погрешности интегрирования такие же, как у метода Ньюмарка, при $\delta = 0.5$, $\beta = 0.25$, при этом, она приводит только к минимальному увеличению периода численного решения без снижения амплитуды [19].

Процедура (1.4), сохраняя указанные характеристики, находит применение к решению методом прямого интегрирования систем уравнений

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R}, \quad (1.7)$$

где \mathbf{M} , \mathbf{C} и \mathbf{K} – матрицы масс, демпфирования и жесткости, соответственно; \mathbf{R} – вектор внешних узловых нагрузок; $\ddot{\mathbf{U}}$, $\dot{\mathbf{U}}$, \mathbf{U} – векторы узловых ускорений, скоростей и перемещений узловых точек транспортной системы или узловых смещений ансамбля конечных элементов. Для решения (1.7) имеем процедуру

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{U}}_{j+1/2} &= \tilde{\mathbf{B}}_j^{-1} \{ -(\mathbf{C} + \mathbf{K}\Delta t_j / \alpha_1) \dot{\mathbf{U}}_j - \mathbf{K}\mathbf{U}_j + \mathbf{R}_{j+1/2} \} \\ \dot{\mathbf{U}}_{j+1} &= \dot{\mathbf{U}}_j + \ddot{\mathbf{U}}_{j+1/2} \Delta t_j \\ \mathbf{U}_{j+1} &= \mathbf{U}_j + \dot{\mathbf{U}}_j \Delta t_j + \ddot{\mathbf{U}}_{j+1/2} \Delta t_j^2 / 2, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $\tilde{\mathbf{B}}_j = \mathbf{M} + \mathbf{C}(\Delta t_j / \alpha_2) + \mathbf{K}\Delta t_j^2 / \tilde{\beta}$, при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 2$, $\tilde{\beta} = \alpha_2 \alpha_3 = 4$.

2. Общие формулы и тестовые примеры. Обратимся с начала к решению классической задачи о движении груза по пластине с переменной скоростью, а затем перейдем к случаю более сложной нагрузки. Используем, далее, безусловно-устойчивую шаговую процедуру по времени (1.8) и метод учета действия безмассовой и инерционной подвижной нагрузки, применяемый для расчета стержневых систем, и предложенных ранее в [10, 11]. Будем рассматривать случаи равнопеременного движения подвижной нагрузки по конструкциям.

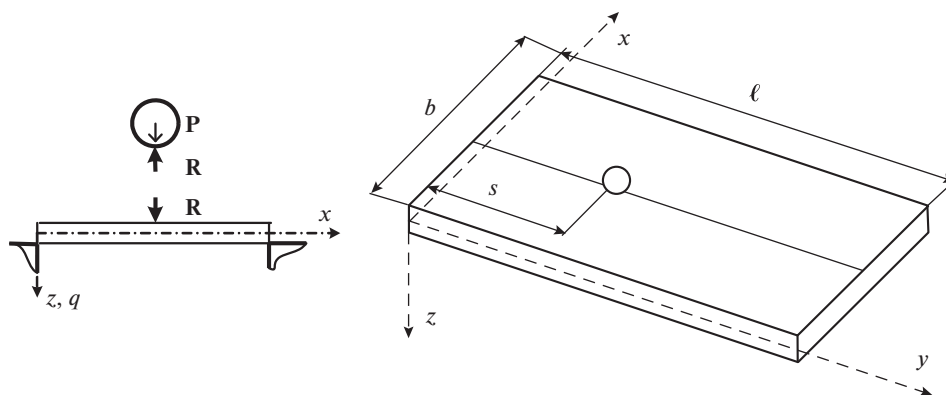


Рис. 1. Взаимодействие движущегося груза с пластиной.

Дифференциальное уравнение колебаний прямоугольной пластины при движении по ней груза весом P и массой M имеет вид

$$L_1 q^*(x, y, t) = \delta(x - 0.5b) \delta(y - s(t)) \times R_{o1}(s(t), t) \quad (2.1)$$

$$L_1 = D\Delta\Delta + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \tilde{\mu}_1 \frac{\partial}{\partial t} + k^*$$

Здесь D – цилиндрическая жесткость; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\tilde{\mu}_1$ – коэффициент, учитывающий диссипацию энергии, $q^*(x, y, t)$ – прогиб пластины, $R_{o1}(s(t), t)$ – давление груза на пластину, x и y – координаты по ширине и длине пластины (рис. 1), $\delta(y - s(t))$ – дельта-функция, $s(t) = s_0 + v_0 t + wt^2/2$ – закон движения груза по пластине, s_0 и v_0 – начальное положение и скорость груза при приземлении на плиту, $v = v_0 + wt$ и w – скорость и ускорение движения груза, m – погонная масса пластины, b и l – ширина и длина пластины, k^* – коэффициент постели.

Прогиб свободно опертой пластины на упругом основании в момент t_{j+1} при движении по ней сосредоточенной силы $R = \delta(x - 0.5b) \delta(y - s(t)) \times R_{o1}$, используя шаговую процедуру (1.4), предложенную в [10], можно записать в виде

$$q^*(\eta_1, \eta_2, t_{j+1}) = \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{i=1}^{n_2} W_k(\eta_1) W_i(\eta_2) q_{kij+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{i=1}^{n_2} W_k(\eta_1) W_i(\eta_2) \left(q_{kij} + \dot{q}_{kij} \Delta t_j + \ddot{q}_{ki+1/2} \frac{\Delta t_j^2}{2} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{i=1}^{n_2} W_k(\eta_1) W_i(\eta_2) \times$$

$$\times \left\{ \left(1 - \vartheta_{kij} \tilde{\omega}_{ki}^2 \right) q_{kij} + \left(\Delta t_j - \vartheta_{kij} \left(2n_{ki} + \frac{\Delta t_j}{2} \tilde{\omega}_{ki}^2 \right) \right) \dot{q}_{kij} + \vartheta_{kij} \int_0^1 \int_0^1 \bar{\eta} R_{j+1/2} d\eta_1 d\eta_2 \right\} \quad (2.2)$$

$$W_k(\eta_l) = \sin(r_k \eta_l), \quad \vartheta_{kij} = \frac{\Delta t_j^2}{2} \left(1 + n_{ki} \Delta t_j + \frac{\Delta t_j^2 \tilde{\omega}_{ki}^2}{4} \right)^{-1} = \frac{\Delta t_j^2}{2} G_{kij}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$$

$$\tilde{\omega}_{ki} = \left(\frac{D}{m} \left(\left(\frac{r_k}{b} \right)^2 + \left(\frac{r_i}{\ell} \right)^2 \right) + \frac{k^*}{m} \right)^{1/2}, \quad 2n_{ki} = \tilde{\mu}_1/m, \quad r_k = \pi k, \quad r_i = \pi i, \quad R_{01} = P - M\ddot{q}_2$$

$$\eta_1 = x/b, \quad \eta_2 = y/\ell, \quad \tilde{\eta} = \tilde{b} W_k(\eta_1) W_i(\eta_2), \quad \tilde{b} = \frac{4}{mb\ell}$$

$$k, i = 1, \dots, n_1, n_2, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь q_{kij} – обобщенные координаты пластины, $\tilde{\omega}_{ik}$ – круговая частота колебаний, σ – коэффициент Пуассона, h – толщина пластины, E – модуль упругости.

Полагая $\ddot{q}_{1j+1/2} = d^2 q^*(s(t), t) / dt^2$, при $t = t_{j+1/2}$, запишем полное вертикальное ускорение точки контакта груза [1] при постоянной координате его движения $x_c = \text{const}$ (рис. 1) в виде

$$\ddot{q}_{1j+1/2} = \frac{d^2 q^*(x, s(t), t)}{dt^2} \Big|_{x=\text{const}} \Big|_{t=t_{j+1/2}} = \frac{\partial^2 q^*}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 q^*}{\partial s \partial t} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial^2 q^*}{\partial s^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{\partial q^*}{\partial s} \frac{d^2 s}{dt^2} \Big|_{t=t_{j+1/2}} \quad (2.3)$$

Используя (2.2) и (2.3), имеем на шаге $[t_j, t_{j+1}]$

$$\ddot{q}_{1j+1/2} = \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{i=1}^{n_2} \sin\left(r_k \frac{x_c}{b}\right) \left\{ \alpha_{1ij} \ddot{q}_{kij+1/2} + \alpha_{2ij} \dot{q}_{kij} + \alpha_{3ij} q_{kij} \right\} = \tilde{D}_1(P - M\ddot{q}_2) + \tilde{D}_0 \quad (2.4)$$

$$\alpha_{1ij} = \sin(r_i \eta_{2j+1/2}) + \frac{r_i \Delta t_j}{\ell} [v_0 + w t_{j+1/2}] \cos(r_i \eta_{2j+1/2}) + \tilde{d}_{ij} \frac{\Delta t_j^2}{4}$$

$$\alpha_{2ij} = \frac{2r_i}{\ell} [v_0 + w t_{j+1/2}] \cos(r_i \eta_{2j+1/2}) + \tilde{d}_{ij} \frac{\Delta t_j}{2}, \quad \alpha_{3ij} = \tilde{d}_{ij}$$

$$\tilde{d}_{ij} = -\left(v_0^2 + 2w t_{j+1/2} v_0 + w^2 t_{j+1/2}^2 \right) \left(\frac{r_i}{\ell} \right)^2 \sin(r_i \eta_{2j+1/2}) + w \left(\frac{r_i}{\ell} \right) \cos(r_i \eta_{2j+1/2}) \quad (2.5)$$

$$\eta_{2j+1/2} = \left(s_0 + v_0 t_{j+1/2} + w \frac{t_{j+1/2}^2}{2} \right) / \ell, \quad \Delta t_j = t_{j+1} - t_j$$

$$\ddot{q}_{kij+1/2} = \left\{ -\tilde{\omega}_{ki}^2 q_{kij} - \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{m} + \frac{\Delta t_j}{2} \tilde{\omega}_{ki}^2 \right) \dot{q}_{kij} + \tilde{b} \sin\left(r_i \frac{x_c}{b}\right) \sin(r_i \eta_{2j+1/2}) R_{01, j+1/2} \right\} \frac{2\vartheta_{kij}}{\Delta t_j^2}$$

Здесь D_1 и D_0 – функции, сгруппированные и выделенные из (2.4).

Обозначим через $\varepsilon(R) = \tilde{\alpha} R^{2/3}$ контактное сближение груза и пластины. Уравнение динамического равновесия груза в момент контакта $t_{j+1/2}$ имеют вид

$$R_{j+1/2} = P - M\ddot{q}_{2j+1/2}; \quad q_2 > q_1 \quad (2.6)$$

$$0 = P - M\ddot{q}_{2j+1/2}; \quad q_2 \leq q_1, \quad (2.7)$$

где q_1 – смещение точки контакта груза на пластине, q_2 – вертикальное смещение центра масс груза.

Представим выражение контактной силы на шаге $[t_j, t_{j+1}]$ в виде

$$R_{j+1/2} = k_1 \varepsilon_{j+1/2}^{3/2}; \quad k_1 = \tilde{\alpha}^{-3/2}, \quad \varepsilon_{j+1/2} = q_{2j+1/2} - q_{1j+1/2} \quad (2.8)$$

Для линеаризации полученного уравнения, учитывая (2.8), используем выражение, для приращения, например, функции $f(x, y)$ двух переменных в точке x_o, y_o в форме

$$df(x, y) = f'(x_o, y_o)dx + f'_y(x_o, y_o)dy$$

Преобразуем выражение (2.6) к виду

$$M\ddot{q}_{2j+1/2} + k_1 (q_{2j+1/2} - q_{1j+1/2})^{3/2} - k_1 (q_{2j} - q_{1j})^{3/2} = -k_1 (q_{2j} - q_{1j})^{3/2} + P_{j+1/2} \quad (2.9)$$

В итоге, имеем на шаге $[t_j, t_{j+1}]$

$$M\ddot{q}_{2j+1/2} + \tilde{k} (q_{2j+1/2} - q_{1j+1/2}) = L_{j+1/2}, \quad (2.10)$$

где $L_{j+1/2} = \tilde{k} (q_{2j} - q_{1j}) - \tilde{k}_1 (q_{2j} - q_{1j})^{3/2} + P_{j+1/2}$.

$$\tilde{k} = \begin{cases} 0 & \text{при } q_2 \leq q_1 \\ \frac{3}{2} k_1 (q_{2j} - q_{1j})^{1/2} & \text{при } q_2 > q_1 \end{cases}, \quad \tilde{k}_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } q_2 \leq q_1 \\ k_1 & \text{при } q_2 > q_1 \end{cases}$$

Объединяя в систему (2.10) и (2.4) на шаге $[t_j, t_{j+1}]$, имеем

$$\ddot{\mathbf{q}}_{j+1/2} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (2.11)$$

Здесь $\bar{\mathbf{q}} = [q_1, q_2]'$, $\mathbf{A} = [a_{ik}]$, $\mathbf{B} = [b_i]$, $i, k = 1, 2$, $j = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$a_{11} = -\tilde{k} \Delta t_j^2 / 4, \quad a_{12} = M + \tilde{k} \Delta t_j^2 / 4, \quad a_{21} = 1, \quad a_{22} = M \tilde{D}_1$$

$$b_1 = -\tilde{k} \frac{\Delta t_j}{2} (\dot{q}_{2j} - \dot{q}_{1j}) - k_1 (q_{2j} - q_{1j})^{3/2} + P_{j+1/2}, \quad b_2 = D_0 + P \tilde{D}_1$$

$$\bar{\mathbf{q}}_{j+1} = \bar{\mathbf{q}}_j + \dot{\bar{\mathbf{q}}}_j \Delta t_j + \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{j+1/2} \frac{\Delta t_j^2}{2}, \quad \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{j+1} = \dot{\bar{\mathbf{q}}}_j + \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{j+1/2} \Delta t_j$$

На шаге $[t_j, t_{j+1}]$ выражение $\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{j+1/2}$ из (2.11), используя (2.6) и (2.2), позволяет вычислять начальные условия для следующего шага интегрирования, используя, на каждом шаге, условия совместности деформаций в точке контакта груза и пластины.

На первом этапе проведем тестирование алгоритма для учета нелинейной упругости при сближении груза и пластины при ударе, будем для тестирования использовать пример, представленный в [5]. Рассмотрим удар при падении с высоты $h_0 = 0.26$ м груза весом $P = 14.7 \times 9.8$ Н в центр квадратной, стальной, свободно опертой пластины при $b = 0.6$ м, $h = 0.012$ м. Процедура (2.3)–(2.11) реализовывалась, полагая при $t = 0$, $s = s_0 = 0.3$ м, $v_0 = w = 0$ и $q_1 = \dot{q}_1 = q_2 = 0$, $\dot{q}_2 = \sqrt{2gh_0}$. Коэффициент k_1 определялся по формуле (для случая одинакового материала у соударяющихся тел) $k_1 = 2E\sqrt{r}/(3(1 - \sigma^2))$ [5], где $r = 0.07141$ м. На рис. 2а представлены изменения контактной силы R [кН] и смещение пластины под грузом $q_1 = Y \times 10^{-4}$ [м] в зависимости от времени $t = N \times \Delta t_j$, где N – число шагов при интегрировании системы (2.11), при $\Delta t_j = 0.1057 \times 10^{-4}$ с. Следует отметить, что результаты, представленные на рис. 2а, практически совпадают с результатами из ([5], с. 715, рис. 19.13). Вторая тестовая зада-

ча связана с равнопеременным движением груза по свободно опертой по контуру пластине с параметрами [6]

$$\beta = \frac{M\mu_1}{\rho h \ell^2}, \quad \alpha = \frac{v_c l}{\pi(1 + \mu_1^2)\sqrt{D/m}}, \quad w = \frac{v_0^2}{2\ell} \left(\left(\frac{v_1}{v_0} \right)^2 - 1 \right), \quad (2.12)$$

где $\mu_1 = \ell/b$, $v_c = (v_0 + v_1)/2$, v_0 и v_1 – скорости, соответственно, въезда и схода груза с плиты. Шаговая процедура (2.3)–(2.11) реализована при $\beta = 1$, $\alpha = 1/2$, $v_1/v_0 = 2/3$, $x_c = b/2$ и параметрах для пластины из [6] $\ell = 2$ м, $b = 1$ м, $h = 0.02$ м, $E = 2.06 \times 10^8$ кН/м², $\sigma = 0.3$, $\rho = 7.85$ кг/м³ и для груза при $E = 8.83 \times 10^3$ кН/м², $\sigma = 0.42$, вычисляя k_1 , для случая вдавливания шара с радиусом $r = 0.5$ м в пластину. На рис. 26 представлен характер изменения динамических коэффициентов при замедленном движении груза: $R = P_D/P$, P_D – давление под грузом; $Z_1 = Z_D/Z_0$, Z_D – динамический прогиб пластины при $y = \ell/2$ и $Z_0 = \alpha_1 P b^2/D$ – статический прогиб пластины при действии в том же месте силы P [6]; $Z_2 = Z_D/Z_0$, Z_D – динамический прогиб под грузом при $y = S(t)$. Следует отметить, что результаты, представленные на рис. 26, для изменения динамического коэффициента для прогиба в середине пластины – Z_1 близки к результатам из [6], с. 105, рис. 57), где для указанной пластины и въезжающего груза контакт по Герцу моделируется через распределенную по эллиптической поверхности нагрузку с использованием численного интегрирования и построения рекуррентных соотношений для определения динамического взаимодействия. Отметим, что динамические коэффициенты для давления в [6] не представлены.

3. Метод решения уравнений для системы “самолет–посадочная полоса”. Алгоритм (2.3)–(2.11) легко реализуется в случае движения системы грузов по плите. Выражения вида (2.5) при движении N грузов формируют систему N линейных, алгебраических уравнений

$$\mathbf{A} \mathbf{R}_{ok \ j+1/2} + \mathbf{E} \ddot{\mathbf{q}}_K \ j+1/2 = \mathbf{B} \quad (3.1)$$

Здесь \mathbf{A} , \mathbf{B} – матрица и вектор (порядок равен числу грузов), \mathbf{E} – единичная матрица, $\mathbf{R}_{ok} = [R_{O_i}]$ ($i = 1, \dots, N$) – вектор динамических давлений грузов на плиту, $\ddot{\mathbf{q}}_K$ – вектор вертикальных ускорений точек контактов движущихся грузов.

Рассмотрим механическую систему в виде пластины на упругом основании, свободно опертой по контуру, и самолета в момент пробега (заключительного этапа посадки самолета). Движение самолета на пробеге считается равнозамедленным с некоторым средним ускорением $-w$. На этапе пробега самолет кроме непрерывно уменьшающихся аэродинамических сил Y и F (рис. 3), т.е. подъемной силы $-Y$ и силы лобового сопротивления $-F$, включающей составляющую от тормозных парашютов, действует сила трения колес об аэродромное покрытие $F_{Tp} = \sum_{i=1}^3 F_{i,Tp} = \sum_{i=1}^3 f \times R_i$. Уравнение движения самолета при пробеге можно записать в виде [22, 23] $(G/g)w = F + F_m$, где G – вес самолета при посадке; f – коэффициент трения. При математическом моделировании посадки следует учесть этапы посадки, предшествующие пробегу, т.е. этап выдерживания, при котором $Y = G$ (снижение происходит до высоты 0.25–0.3 м) и этап парашютирования, малый по времени, при $Y < G$ [22, 23], путем ввода подвижной системы координат, в которой рассматриваются вертикальные смещения самолета в момент пробега.

Будем далее обозначать модель самолета через $\{e_h\}$ $h = 1, \dots, 4$, представляя ее, как систему жестких тел e_h , состоящую из корпуса и трех связанных с ним линейными упруго-вязкими связями колес шасси, имеющих нелинейные связи с пластиной (рис. 3). Будем считать, что начальные условия у $\{e_h\}$ нулевые, а параметры, определяющие по-

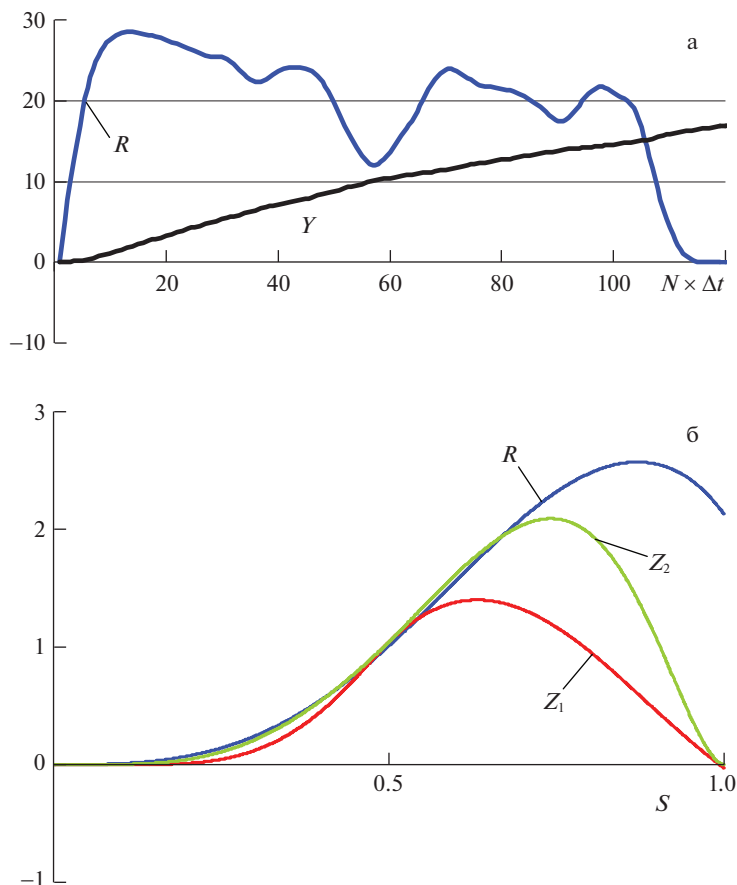


Рис. 2. Изменение динамических давлений и прогибов при взаимодействии груза и пластины.

ложение $\{e_h\}$ в системе $O_*X_*Y_*Z_*$, движущейся вдоль плиты поступательно, со скоростью v , имеют нулевые значения до момента касания колес самолета плиты, при этом в момент контакта $\{e_h\}$ с плитой считается, что подъемная сила $Y = 0$ (рис. 3). Положение в пространстве корпуса подвижной нагрузки на этапе пробега $\{e_h\}$ определяется параметрами: q_C – вертикальным смещением центра масс корпуса и малыми поворотами φ_x и φ_y относительно горизонтальных осей ox и oy (рис. 3). В качестве обобщенных координат q_i ($i = 1, \dots, 9$) будем рассматривать вертикальные смещения узловых точек, соединяющих элементы $\{e_h\}$ через связи (рис. 3).

Для составления системы дифференциальных уравнений движения $\{e_h\}$ применяется метод кинестатики. Используя метод расчленения для $\{e_h\}$, имеем

$$\begin{aligned}
 k_i \alpha_i^{3/2} &= R_i \\
 m_i \ddot{q}_{i+3} &= R_i - T_i - \mu \dot{T}_i + P_i \\
 m_4 \ddot{q}_C &= P_4 + \sum_{k=1}^3 (T_k + \mu \dot{T}_k)
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

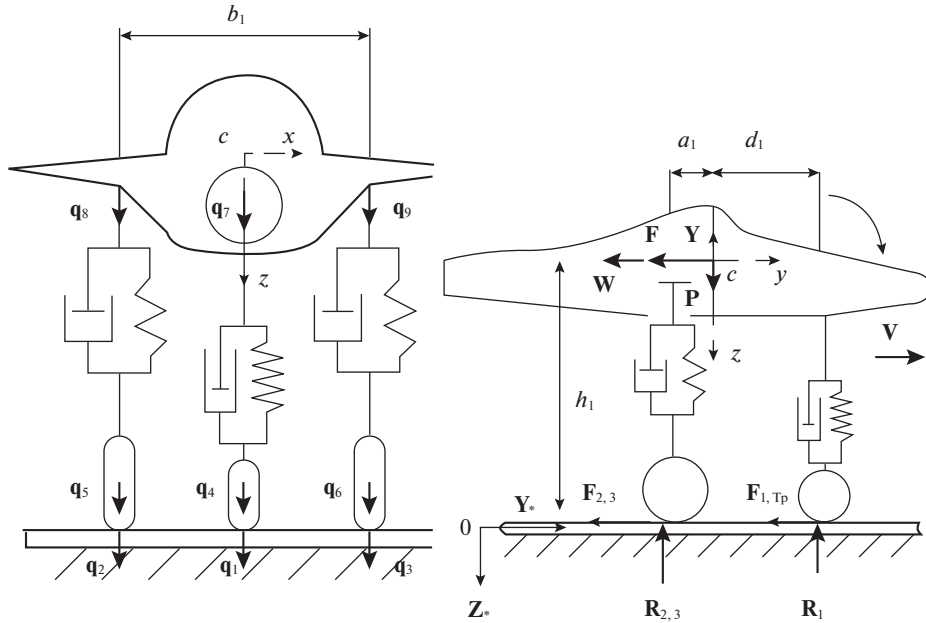


Рис. 3. Система $\{e_h\}$, моделирующая самолет и схема сил действующих на него при пробеге.

$$J_{Cj} \ddot{\varphi}_j = m_{Cj} \ddot{c}_j; \quad \tilde{j} = 1, 2, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\alpha_i = q_i - q_{i+3}$, $T_i = c_{i+3}(q_{i+3} - q_{i+6})$, $q_C = \left(\frac{1}{2}a_1(q_8 + q_9) + d_1q_7\right)/(a_1 + d_1)$.

$$\varphi_1 = \varphi_x = \left(q_7 - \frac{1}{2}(q_8 + q_9)\right)/(a_1 + d_1), \quad \varphi_2 = \varphi_y = (q_8 - q_9)/b_1$$

$$J_{C1} = J_x, \quad J_{C2} = J_y$$

$$m_{C1} = T_4b_1 - (T_5 + T_6)d_1 + M^{(ин)}, \quad m_{C2} = (T_5 - T_6)b_1/2$$

Здесь m_i – массы колес шасси при $i = 1, 2, 3$ и кузова $m_4 = M^{(куз)}$, c_{i+3} – жесткости линейных связей, моделирующих упругость шасси, μ – коэффициенты, учитывающие затухания в линейных связях, J_x, J_y – моменты инерции относительно осей, проходящих через центр масс кузова, $M^{(ин)} = F_{Tp} \times h_1 = (M^{(куз)}w - F) \times h_1$ – инерционный момент (рис. 3), a_1, b_1, c_1, d_1, h_1 – конструктивные размеры $\{e_h\}$, k_i – коэффициент характеризующий нелинейные связи, в соответствии с (2.8).

После дискретизации по времени системы уравнений (3.2), используя шаговую процедуру (1.8) из [10] и линеаризацию уравнений в соответствии с (2.8)–(2.11), имеем на шаге $[t_j, t_{j+1}]$ систему линейных уравнений

$$M_* \ddot{\bar{q}}_{cj+1} + C_* \dot{\bar{q}}_{cj+1} + K_* \bar{q}_{cj+1} = P_1 + R_*; \quad R_* = \Pi_* \bar{R}_{*j+1} \quad (3.3)$$

Здесь $\bar{q}_c = [q_1, \dots, q_9]' = [\bar{q}_1^0, \bar{q}_2^0]'$ – вектор независимых обобщенных координат, определяющих $\{e_h\}$ в системе $O_*X_*Y_*Z_*$ (рис. 3), где $\bar{q}_1^0 = [q_1, q_2, q_3]'$ – вертикальные смещения

точек контакта колес с пластиной на упругом основании, при движении $\{e_h\}$ в режиме торможения, \mathbf{M}_* , \mathbf{C}_* , \mathbf{K}_* матрицы масс, демпфирования и жесткости для $\{e_h\}$, \mathbf{P}_1 – вектор, учитывающий весовые характеристики, инерционный момент и элементы дискретизации при линеаризации системы (3.1) на шаге $[t_j, t_{j+1}]$, $\mathbf{\Pi}_*$ – матрица соединения векторов $\bar{\mathbf{R}}_*$ и \mathbf{R}_* , где $\bar{\mathbf{R}}_* = [R_1, R_2, R_3]'$ – вектор реакций $\{e_h\}$ в точках контакта с проезжей частью.

Представим систему (3.3), в соответствии с (1.8), на шаге $[t_j, t_{j+1}]$ в виде

$$\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{c\,j+1/2} = \tilde{\mathbf{G}}_1 \bar{\mathbf{q}}_{c\,j} + \tilde{\mathbf{G}}_2 \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{c\,j} + \mathbf{A}^* (\mathbf{P}_1 + \mathbf{\Pi}_* \bar{\mathbf{R}}_{*j+1/2}) \quad (3.4)$$

$$\mathbf{A}^* = \left[\mathbf{M}_* + \mathbf{C}_* \frac{\Delta t_j}{2} + \mathbf{K}_* \frac{\Delta t_j^2}{4} \right]^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{G}}_1 = -\mathbf{A}^* \mathbf{K}_*, \quad \tilde{\mathbf{G}}_2 = -\mathbf{A}^* \left[\mathbf{C}_* + \mathbf{K}_* \frac{\Delta t_j}{2} \right] \quad (3.5)$$

$$\bar{\mathbf{q}}_{c\,j+1} = \bar{\mathbf{q}}_{c\,j} + \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{c\,j} \Delta t_j + \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{c\,j+1/2} \frac{\Delta t_j^2}{2}, \quad \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{c\,j+1} = \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{c\,j} + \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{c\,j+1/2} \Delta t_j$$

Будем считать, что посадка $\{e_h\}$, при решении задачи происходит на три колеса одновременно (аварийный, но один из возможных вариантов), хотя методика, имея в основе шаговую процедуру, не накладывает ограничений на вид посадки, при этом торможение $\{e_h\}$ происходит при усредненном постоянном значении сил F и $Y = 0$ (рис. 3). При движении $\{e_h\}$ по пластине требуем выполнение условий неразрывности перемещений и скоростей $\bar{\mathbf{q}}_{ok} = \bar{\mathbf{q}}_1^o$, $\dot{\bar{\mathbf{q}}}_K = \dot{\bar{\mathbf{q}}}_1^o$ и условий равновесия в движущихся узлах (в точках контакта колес с пластиной)

$$\bar{\mathbf{R}}_{ok} + \bar{\mathbf{R}}_* = 0 \quad (3.6)$$

Выделим из (3.4) подсистему уравнений, отвечающих в левой части подвектору $\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{1j+1/2}^o$, и выразим далее эту подсистему относительно вектора динамических давлений, представив ее в виде

$$\bar{\mathbf{R}}_{*j+1/2} = \mathbf{W}^o \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{1j+1/2}^o + \mathbf{L}^o \quad (3.7)$$

Подставим в (3.6) векторы $\bar{\mathbf{R}}_{ok}$ и $\bar{\mathbf{R}}_*$, соответственно, из (3.1) и (3.7), в итоге имеем разрешающую систему уравнений на шаге $[t_j, t_{j+1}]$

$$\mathbf{D} \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{K\,j+1/2} = \mathbf{D}^o \quad (3.8)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{W}^o, \quad \mathbf{D}^o = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{L}^o,$$

где \mathbf{D} , \mathbf{D}^o – матрица и вектор, характеризующие на шаге $[t_j, t_{j+1}]$ движение самолета по посадочной полосе.

Проследим ход решения всей задачи при $j = 0, 1, 2, \dots$ На шаге $[t_j, t_{j+1}]$ при начальных условиях задачи в момент t_j определяется, применяя (3.8), вектор $\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{K\,j+1/2}$, далее, используя (3.4), (3.5) и (2.2), вычисляются поля смещений, давлений, скоростей и ускорений для системы $\{e_h\}$ в момент t_{j+1} . Далее процесс повторяется.

4. Результаты численного моделирования. Шаговая процедура (3.8) реализована для $\{e_h\}$ и пластины с параметрами $\ell = 130$ м, $b = 40$ м, $E_1 = 0.23 \times 10^8$ кН/м², $h = 0.18$ м, $m = 0.36$ т/м², $\sigma_1 = 0.18$, $k^* = 120 \times 10^3$ кН/м³, $n_1 = 240$ и $n_2 = 640$. Для системы $\{e_h\}$ (рис. 3) условно выбраны параметры: $b_1 = 3$ м, $a_1 + d_1 = 7$ м, $h_1 = 2.5$ м, $J_x = 397$ т м², $J_y = 53.5$ т м²,

$m_1 = 0.15$ т, $m_2 = m_3 = 0.25$ т, $m_4 = 22.0$ т, $c_i = 800$ кН/м, $\mu = 6$ кНс/м, $P_1 = 63.6$ кН, $P_2 = P_3 = 71.65$ кН, $\tilde{\alpha} = [9(\vartheta_1 + \vartheta_2)^2/256r]^{1/3}$, где $\vartheta_i = 4(1 - \sigma_i^2)/E_i$ ($i = 1, 2$), $E_2 = 8.83 \times 10^3$ кН/м², $\sigma_2 = 0.42$, $r = 0.5$ м [6, 22, 23].

Посадка самолета происходит со скоростью $v_o = 63$ м/с, а торможение с ускорением $w = -21$ м/с², при этом время движения $t_{дв} = 3$ с, с использованием тормозных парашютов. Интегрирование системы дифференциальных уравнений (3.8) происходит при $\Delta t_j = 0.00025$ с и числе шагов $N = 12000$. При посадке $\{e_h\}$ считается, что касание носового колеса пластины происходит при нулевой вертикальной скорости на расстоянии $s_o = 17$ м от края пластины, при $x_c = 20$ м (рис. 2). Тормозной путь системы $\{e_h\}$ до остановки составляет 94.5 м. На рис. 4(а, б, в), в режиме торможения $\{e_h\}$, представлены в зависимости от $s[\text{м}] = s_o + v_0t + wt^2/2$, при тестовом соответствии между графиками: 1) вертикальное смещение $y\{e_h\}$ носового (первого) колеса $Y = q_4$ [м] (рис. 4, а), при движении его с отскоком в зоне $s = 50-52$ м; 2) вертикальное смещение плиты $Y = q_1$ [м] (рис. 4, б) под первым колесом; 3) динамическое давление $\{e_h\}$ на плиту под первым колесом $R = R_1$ [кН] (рис. 4, в). Отметим, что при реализации шаговой процедуры $R = R_1 = 0$ в момент отскоков колеса. На рис. 5 представлены, в зависимости от времени t [с] вертикальные смещения узлов корпуса самолета $Y(\text{м}) = q_7$ и $Y(\text{м}) = q_8$ (рис. 3) при его движении с торможением по пластине на упругом основании. Следует отметить, что изменения динамических давлений R_1 и R_2 происходят, соответственно, относительно значений статических давлений P_1 и P_2 колес на пластину.

Остановимся еще на одном этапе исследования колебаний пластин при пробеге летательного аппарата по аэродромной полосе. К этому этапу относятся задачи, связанные с распространением волн деформаций в аэродромном покрытии. При решении волновых задач для протяженных пластин и стержней на упругом основании используются как интегральные преобразования при движении силовой нагрузки [1, 4], так и, для конструктивной конечных размеров, наборы собственных форм сооружения. Применение численных методов позволяет, при этом, отслеживать процесс движения, в частности, сдвиговых волн от внезапной нагрузки, например, для балки Тимошенко на дискретных упруго-инерционных опорах в [24]. В пластинах и стержнях на упругом основании с учетом затуханий распространяются волны с сильной дисперсией [25]. Отметим, что высокоскоростные режимы движения могут вызывать дополнительные эффекты, что требует определенных оценок. Используем комбинированный подход. Для оценки появления резонансных решений приведем решение задачи о движении сосредоточенной силы P по пластине на упругом основании, в виде бесконечной полосы свободно опертой по краям. Решение уравнения (2.1) при правой части $P\delta(x - x_c)\delta(\zeta)$ и $\tilde{\mu}_1 = 0$ ищется в виде $q^*(x, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\zeta) \sin(\omega_n x)$, ($\zeta = y - vt$, $\omega_n = \pi n/b$, $x_c = b/2$). Прогиб $q^*(x, y - vt)$ части бегущей волны у пластины перед силой, при $\zeta = y - vt \geq 0$, имеет вид

$$q^*(x, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha\zeta} P \sin \omega_n x \sin \omega_n x_c}{2Db\beta\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} (\alpha \sin \beta\zeta + \beta \cos \beta\zeta), \quad (4.1)$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{\tilde{b} - \tilde{a}v^2}{2}}$, $\beta = \sqrt{\frac{\tilde{b} + \tilde{a}v^2}{2}}$, $\tilde{a} = -\frac{\omega_n^2}{v^2} + \frac{m}{2D}$, $\tilde{b} = \sqrt{\omega_n^4 + \frac{k^*}{D}}$, здесь ζ – абсцисса текущего сечения пластины отсчитываемого от подвижного начала координат, совмещенного с движущейся силой P .

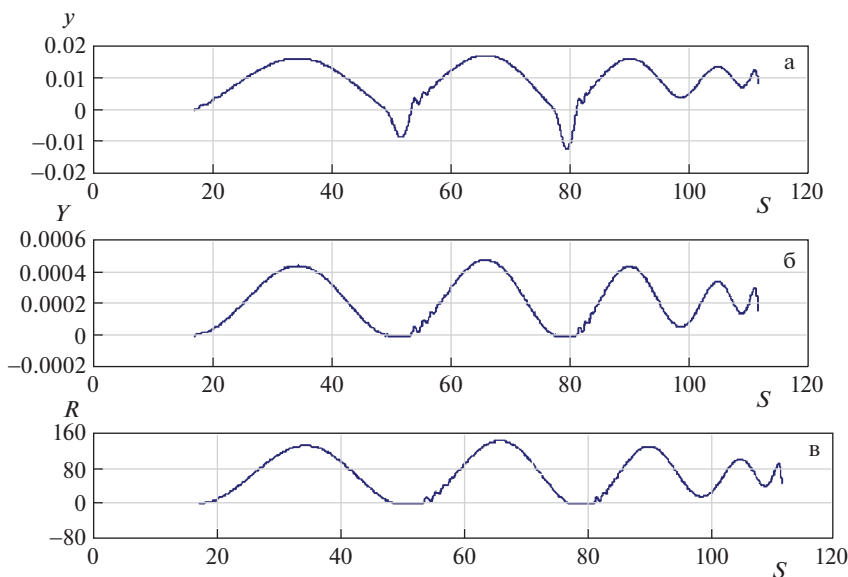


Рис. 4. Перемещения и динамические реакции y колес шасси системы $\{e_h\}$ в момент торможения при посадке.

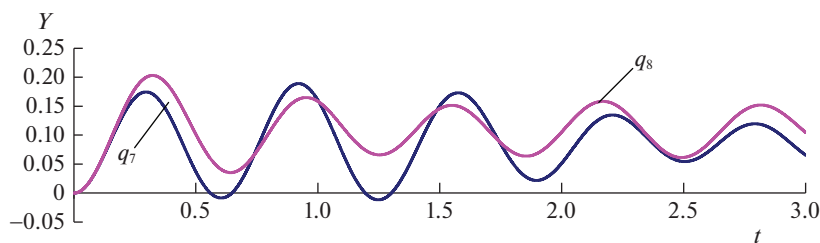


Рис. 5. Перемещения узлов корпуса $\{e_h\}$ в момент торможения при посадке.

В знаменателе (4.1), при $x = x_c$ и $\zeta = 0$, находится выражение $\tilde{b} - \tilde{a}v^2$, определяющее серию критических скоростей движения силы по бесконечной полосе, моделируемой пластиной на упругом винклеровском основании.

В итоге при $n = 1, 3, 5$

$$v_{n, KP} = \sqrt{\frac{2D}{m} \left[\sqrt{\omega_n^4 + \frac{k^*}{D}} + \omega_n^2 \right]} > 62 \text{ м/с} \quad (4.2)$$

Отметим, что в соответствии с (4.2) можно оценить диапазон появления критических скоростей при движении нагрузки в зависимости от параметров плиты и основания. В статье, при выбранных параметрах D , m , k^* , b , посадочная скорость самолета лежит вне зоны появления критических скоростей.

Заключение. Предложенный метод позволяет исследовать, используя шаговую процедуру, предложенную в [10] и метод узловых ускорений из [11], действие подвижной

инерционной нагрузки при движении с переменной скоростью, по пластинам при различных граничных условиях, используя соответствующие фундаментальные функции [5]. В задачах автомобильного и авиационного транспорта метод позволяет исследовать поведение системы “инерционная подвижная нагрузка – техническое покрытие, моделируемое плитой на упругом основании” при различных скоростях движения нагрузки и неровностях поверхности, и определять напряженно-деформируемое состояние пластины и динамические давления колес в режимах торможения или разгона $\{e_h\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fryba L.* Vibration of solids and structures under moving loads. Prague: Academia, 1972. 494 p.
2. *Zheng Lu, Hailin Yao, Yongxiang Zhan, Zhi Hu.* Vibrations of a plate on a two-parameter foundation subjected to moving rectangular loads of varying velocities // JVE Int. LTD. J. Vibroengng. 2014. V. 16. Iss. 3. P. 1543–1554.
3. *Ghafoori E., Kargarnovin M.H., Ghahremani A.R.* Dynamic responses of a rectangular plate under motion of an oscillator using a semi-analytical method // J. Vibr. & Control. 2011. V. 17. № 9. P. 1310–1324.
4. *Блинов А.Н.* Динамическая реакция пластины на действие движущейся нагрузки // Ж. Сиб. фед. унив. Математика и физика. 2009. Т. 2 (1). С. 41–47.
5. *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
6. *Кохманюк С.С., Янютин Е.Г., Романенко Л.Г.* Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. Киев: Наук. думка, 1980. 231 с.
7. *Серазутдинов М.И.* Колебания пластины под действием равномерно распределенной нагрузки, движущейся с переменной скоростью // Тр. сем. по теории оболочек. Казан. ФТИ АН СССР. 1975. Вып. 6. С. 163–167.
8. *Inglis C.E.* A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges, Cambridge: Univ. Press, 1934. 203 p.
9. *Моргаевский А.В.* О колебаниях пластины, несущей подвижную нагрузку // Прикл. мех. 1966. Т. 2. Вып. 8. С. 64–74.
10. *Иванченко И.И.* Расчеты на подвижные и импульсивные нагрузки стержневых систем с распределенными параметрами // Прикл. мех. 1988. Т. 24. № 9. С. 109–118.
11. *Иванченко И.И.* О действии подвижной нагрузки на мосты // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 180–185.
12. *Иванченко И.И.* Метод расчета на подвижную нагрузку стержневых систем, моделирующих мосты // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 4. С. 151–165.
13. *Иванченко И.И.* Метод расчета стержней под действием инерционной нагрузки с переменной скоростью движения // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 5–6. С. 808–816.
14. *Иванченко И.И.* Динамика мостов: высокоскоростные подвижные, аэродинамические и сейсмические нагрузки. М.: Наука, 2021. 527 с.
15. *Museros P., Martinez-Castro A.E., Castillo-Linares A.* Semi-analytic solution for Kirchhoff plates traversed by moving loads // Proc. EURO DYN 2005, Struct. Dyn., Paris. 2005. V. 3. P. 1619–1625.
16. *Bonin G., Cantisani G., Loprencipe G., Ranzo A.* Modeling of dynamic phenomena in road and airport pavements // Conf.: 5th Int. CROW. 2004. 14 p.
17. *Jing Yang, Huajiang Ouyang, Dan Stancioiu.* An approach of solving moving load problems by ABAQUS and MATLAB using numerical modes // ICVE2015, Shanghai (China), Sept. 18–20 2015. 8 p.
18. *Klasztorav M., Sziugott P.* Modeling and Simulation of Bridge–Track–Train Systems at High Service Velocities with LS-DYNA // 12th Int. LS-DYNA, Users Conf. 2012. 13 p.
19. *Bate K., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Наука, 1982. 447 с.
20. *Newmark N.* A method of computation for structural dynamics // J. Eng. Mech. Div. ASCE. 1959. V. 85. № EM3. P. 67–94.
21. *Timoshenko S.* Vibration Problems in Engineering. New York: Van Nostrand Co., 1928. P. 79–81.

22. Шумилов И.С. Математическое моделирование системы торможения колес шасси магистрального самолета // Машины и установки: проектирование, разработка и эксплуатация. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. ж. 2016. № 01. С. 24–42.
23. Балакин В.Л., Лазарев Ю.Н. Динамика полета самолета. Расчет траекторий и летных характеристик: электрон. Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С.П. Королева, 2011. 55 с.
24. Иванченко И.И. Численное моделирование волновых процессов в балке Тимошенко, лежащей на множестве упруго-вязких, инерционных опор // Волновая динамика машин и конструкций. Вторая Всерос. научн. конф., Нижний Новгород, 28–31 октября 2007 г. Тезисы, 42 с.
25. Нелинейные волны / Под ред. Лейбовича С., Сибасса А. М.: Мир, 1977. 320 с.

Method to Calculate Plates under an Inertial Load Moving with Variable Speed

I.I. Ivanchenko^{a,#}

^a Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia

[#]e-mail: ivaii011@mtu-net.ru

The method of calculation of plates at action of inertial loading and its movement with variable speed is offered. Test problems about shock influence and movement with variable speed of a cargo on rectangular, freely supported plate is considered. Nonlinear contact of a cargo to a plate is modelled. The problem about interaction of transport system, at its braking after a landing on the extended plate laying on the elastic basis is considered.

Keywords: variable speed, step-by-step procedures, a method “nodal accelerations”, a plate, mobile inertial loading

REFERENCES

1. Fryba L. Vibration of Solids and Structures under Moving Loads. Prague: Academia, 1972. 494 p.
2. Zheng Lu, Hailin Yao, Yongxiang Zhan, Zhi Hu. Vibrations of a plate on a two-parameter foundation subjected to moving rectangular loads of varying velocities // JVE Int. LTD. J. Vibroengng., 2014, vol. 16. iss. 3, pp. 1543–1554.
3. Ghafouri E., Kargarnovin M.H., Ghahremani A.R. Dynamic responses of a rectangular plate under motion of an oscillator using a semi-analytical method // J. Vibr. & Control, 2011, vol. 17, no. 9, pp. 1310–1324.
4. Blinov A.N. Dynamic response of plates on the effect of a moving load // J. Sib. Fed. Univ. Math. & Phys., 2009, vol. 2 (1), pp. 41–47.
5. Filippov A.P. Vibration of Deformable. Moscow: Mech. Engng., 1970. 734 p. (in Russian)
6. Kokhmanyuk S.S., Yanyutin E.G., Romanenko L.G. Vibrations of Deformable Systems under Pulse and Moving Loads. Kiev: Nauk. Dumka, 1980. 231 p. (in Russian)
7. Serazutdinov M.I. Vibration of a plate under action of in regular intervals distributed loading moving with variable speed // in: Proc. Sem. under the Theory of Shells. Kazan: Kazan Phys.-Techn. Inst. Akad. Nauk. USSR, 1975. no. 6, pp. 163–167. (in Russian)
8. Inglis C.E. A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges, Cambridge: Univ. Press, 1934. 203 p.
9. Morgaevsky A.V. On vibrations of a plate carrying a moving load // Appl. Mech., 1966, vol. 2, no. 8, pp. 64–74. (in Russian)
10. Ivanchenko I.I. Determining moving and impulsive loads of beam systems with distributed parameters // Int. Appl. Mech., 1988, vol. 24, no. 9, pp. 931–938.
11. Ivanchanko I.I. On the action of a movable load on bridges // Mech. Solids, 1997, vol. 32, no. 6, pp. 153–157.
12. Ivanchenko I. 1. Design of framed structures modeling bridges for moving loads // Mech. Solids, 2001, vol. 36, no. 4, pp. 121–132.
13. Ivanchenko I.I. Method to calculate rods under an inertial load moving with variable speed // Mech. Solids, 2020, vol. 55, pp. 1035–1041.

14. *Ivanchenko I.I.* Bridge Dynamics: High-Speed Moving, Aerodynamic and Seismic Loads. Moscow: Nauka, 2021. 527 p. (in Russian)
15. *Museros P., Martinez-Castro A.E., Castillo-Linares A.* Semi-analytic solution for Kirchhoff plates traversed by moving loads // Proc. EURODYN 2005, Struct. Dyn., Paris, 2005, vol. 3, pp. 1619–1625.
16. *Bonin G., Cantisani G., Loprencipe G., Ranzo A.* Modeling of dynamic phenomena in road and airport pavements // Conf.: 5th Int. CROW, 2004, 14 p.
17. *Jing Yang, Huajiang Ouyang, Dan Stancioiu.* An approach of solving moving load problems by ABAQUS and MATLAB using numerical modes // ICVE2015, Shanghai (China), Sept. 18–20, 2015, 8 p.
18. *Klasztorav M., Sziugott P.* Modeling and simulation of bridge–track–train systems at high service velocities with LS-DYNA // 12th Int. LS-DYNA, Users Conf., 2012, 13 p.
19. *Bathe K., Wilson E.* Numerical Methods in Finite Element Analysis. Moscow: Stroyizdat, 1982. 447 p. (in Russian)
20. *Newmark N.* A method of computation for structural dynamics // J. Eng. Mech. Div. ASCE, 1959, vol. 85, no. EM3. pp. 67–94.
21. *Timoshenko S.* Vibration Problems in Engineering. N.Y.: Van Nostrand Co., pp. 79–81.
22. *Shumilov I.S.* Math modeling of system of braking of wheels the chassis of the main plane // Machines and Installations: Designing, Development and Operation. Bauman Moscow State Techn. Univ., Electronic J., 2016, no. 1, pp. 24–42. (in Russian)
23. *Balakin V.L., Lazarev Y.N.* Aircraft Flight Dynamics. Calculation of Trajectories and Flight Characteristics. Samara: Samara Korolev Aero-Space Univ., 2011. 55 p. (in Russian)
24. *Ivanchenko I.I.* Numerical modelling of wave processes in beam Тимошенко laying on set of elastic–viscous, inertial support // Wave Dyn. of Mach. & Struct. 2nd All-Russia Sci. Conf., Nizhni Novgorod, October 28–31 2007. Abstracts, 42 p. (in Russian)
25. Nonlinear Waves / Ed. by *Leibovich S., Seebass A.* Moscow: Mir, 1977. 320 p. (in Russian)

УДК 534.113

ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА В ОГРАНИЧЕННОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ КАНАЛАМИ

© 2022 г. Л. И. Казаков*

*e-mail: lev-kazakov@rambler.ru

Поступила в редакцию 15.04.2022 г.

После доработки 20.06.2022 г.

Принята к публикации 20.06.2022 г.

Выполнен расчет акустических характеристик цилиндрической вязкоупругой трубки конечной длины с радиально закрепленной внешней поверхностью, замещающей шестигранную элементарную ячейку отрезка микронеоднородной среды с цилиндрическими каналами. Применены принцип наименьшего действия и гипотеза плоских сечений. Найдено дисперсионное уравнение для продольных звуковых волн в трубке, совпадающее с приближениями точного дисперсионного уравнения и имеющее типичную для микронеоднородных резонансных сред форму. Из подходящей аппроксимации результатов известных измерений приведенной входной проводимости “полубесконечных” образцов найдена частотная зависимость комплексного модуля сдвига применявшейся резины.

Ключевые слова: принцип наименьшего действия, гипотеза плоских сечений, вязкоупругая среда, цилиндрические каналы, торцевые пластинки, дисперсионное уравнение, эффект нераспространения

DOI: 10.31857/S0032823522050113

1. Введение. Акустические свойства искусственной упругой среды с цилиндрическими каналами, центры которых совпадают с узлами правильной треугольной сетки, можно найти, решая осесимметричную задачу о распространении упругих волн вдоль трубки с радиально-закрепленной внешней цилиндрической поверхностью, которая приближенно заменяет шестигранную поверхность, окружающую канал.

Идея создания и первый приближенный расчет такой среды принадлежат Г.Д. Малюжину. В работе В.В. Тютюкина [1] дана точная теория распространения осесимметричных упругих волн в безграничном волноводе типа “трубка”. Дальнейшие исследования этих вопросов изложены в работе А.Е. Вовк [2]. Получено точное решение для частного случая “трубки” конечного размера в работе [3].

Теория Г.Д. Малюжинца основана на применении принципа наименьшего действия Гамильтона–Остроградского и гипотезы плоских сечений и в этом отношении подобна расчету А. Лява ([4], § 278, с. 446) для продольных волн в стержне, учитывающему поправку Рэлея ([5], § 157, с. 273) на инерцию поперечного движения.

2. Вывод уравнения движения. Изложенная ниже приближенная теория также базируется на принципе наименьшего действия и гипотезе плоских сечений, которая состоит в предположении, что осевые смещения частиц U_z во времени t не зависят от радиуса r , т.е. любое поперечное сечение трубки остается при движении плоским:

$$\frac{\partial U_z}{\partial r} = 0, \quad U_z = f(z, t) \quad (2.1)$$

Радиальные смещения зададим, следуя Г.Д. Малюжинцу, в виде

$$U_r = A \frac{r_1^2 - r^2}{2r} f'(z, t), \quad (2.2)$$

где $A = \text{const}$, значение которой определим позже, r_1 – внешний радиус трубки, штрих над $f(z, t)$ означает производную по координате z .

Отличными от нуля компонентами тензоров деформаций и напряжений для осесимметричного случая будут ([6], с. 13, 23):

$$U_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z} = f'(z, t), \quad U_{rr} = \frac{\partial U_r}{\partial r}, \quad U_{\phi\phi} = \frac{U_r}{r}, \quad U_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial U_r}{\partial z} \quad (2.3)$$

$$\sigma_{rz} = 2\mu U_{rz} = \mu A \frac{r_1^2 - r^2}{2r} f''(z, t)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \lambda \text{div } \vec{U} + 2\mu U_{\alpha\alpha}, \quad \alpha\alpha = rr, \phi\phi, zz, \quad (2.4)$$

где

$$\text{div } \vec{U} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) + \frac{\partial U_z}{\partial z} = (1 - A) f'(z, t),$$

λ – первый коэффициент Ламе, μ – модуль сдвига материала трубки.

Заданная форма смещений (2.1), (2.2) удовлетворяет требуемым граничным условиям на внешней поверхности трубки

$$U_r(z, r_1) = 0, \quad \sigma_{rz}(z, r_1) = 0 \quad (2.5)$$

На свободной внутренней поверхности трубки радиуса r_0 должны выполняться условия

$$\sigma_{rz}(z, r_0) = 0 \quad (2.6)$$

$$\sigma_{rr}(z, r_0) = \left[\lambda(1 - A) - \mu A \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \right] f'(z, t) = 0, \quad (2.7)$$

где $\varepsilon = r_0^2/r_1^2$ – коэффициент перфорации. Если, следуя Г.Д. Малюжинцу, положить

$$A = A_0 = \left(1 + \mu \frac{1 + \varepsilon}{\lambda \varepsilon} \right)^{-1}, \quad (2.8)$$

то условие (2.7) выполнится точно. Лучше, однако, выбрать значение A из других соображений, приведенных ниже. При этом условия (2.6) и (2.7) будут выполняться лишь приближенно при соответствующих ограничениях, что станет ясно из дальнейшего.

Найдем кинетическую T и упругую E энергии отрезка трубки длиной h по формулам:

$$T(t) = \pi\rho \int_{r_0}^{r_1} \int_0^h \left[\left(\frac{\partial U_r}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_z}{\partial t} \right)^2 \right] r dr dz, \quad E(t) = 2\pi \int_{r_0}^{r_1} \int_0^h \varepsilon_1(r, z, t) r dr dz,$$

где ρ – плотность материала трубки, $\varepsilon_1(r, z, t)$ – упругая энергия единицы объема трубки, имеющая вид ([6], с. 21)

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(r, z, t) &= \frac{1}{2} (\sigma_{rr} U_{rr} + \sigma_{\phi\phi} U_{\phi\phi} + \sigma_{zz} U_{zz} + 2\sigma_{rz} U_{rz}) = \\ &= \frac{\lambda}{2} (\text{div } \vec{U})^2 + \mu (U_{rr}^2 + U_{\phi\phi}^2 + U_{zz}^2) + 2\mu U_{rz}^2 \end{aligned}$$

Вычисления дадут:

$$E(t) = \frac{\pi\mu r_1^2}{2} \int_0^h \left\{ D(A, \varepsilon) [f'(z, t)]^2 + \xi^2 A^2 r_0^2 b(\varepsilon) [f''(z, t)]^2 \right\} dz \quad (2.9)$$

$$T(t) = \frac{\pi\rho r_1^2}{2} \int_0^h \left\{ A^2 r_0^2 b(\varepsilon) \left[\frac{\partial f'(z, t)}{\partial t} \right]^2 + (1 - \varepsilon) \left[\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} \right]^2 \right\} dz, \quad (2.10)$$

где

$$D(A, \varepsilon) = \left[\frac{\lambda}{\mu} (1 - A)^2 + 2 + A^2 \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \right] (1 - \varepsilon), \quad b(\varepsilon) = \frac{4\varepsilon - 2 \ln \varepsilon - 3 - \varepsilon^2}{8\varepsilon}$$

Применим к решению задачи, которая состоит теперь в отыскании функции $f(z, t)$, принцип наименьшего действия Гамильтона–Остроградского

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - E + W) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta E + \delta W) dt = 0, \quad (2.11)$$

где W – работа внешних сил, действующих на торцах отрезка трубки; δ – символ вариации величины при малых произвольных изохронных вариациях вектора смещения $\delta \vec{U}$; t_1, t_2 – произвольные моменты времени. Подставив выражения (2.9) и (2.10) в формулу (2.11) и после варьирования, изменения порядка интегрирования и интегрирования по частям с учетом условия $\delta \vec{U}(t_1) = \delta \vec{U}(t_2) = 0$, получим

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^h \left(f^{IV} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 f''}{\partial t^2} - \frac{D(A, \varepsilon)}{A^2 r_0^2 b(\varepsilon)} f'' + \frac{\rho(1 - \varepsilon)}{\mu A^2 r_0^2 b(\varepsilon)} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) \delta f dz dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\left(f''' - \frac{D(A, \varepsilon)}{A^2 r_0^2 b(\varepsilon)} f' - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 f'}{\partial t^2} \right) \delta f - f'' \delta f' \right]_0^h + \frac{\delta W}{\pi \mu r_1^2 A^2 r_0^2 b(\varepsilon)} \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Вариация работы внешних сил δW есть линейная форма от вариаций $\delta f = \delta U_z$ и $\delta f' \sim \delta U_r$, взятых при $z = 0$ и $z = h$. В силу произвольности всех вариаций в выражении (2.12) каждый интеграл в отдельности должен обращаться в нуль. Тогда первый интеграл дает уравнение движения

$$f^{IV} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 f''}{\partial t^2} - \frac{D(A, \varepsilon)}{A^2 r_0^2 b(\varepsilon)} f'' + \frac{\rho(1 - \varepsilon)}{\mu A^2 r_0^2 b(\varepsilon)} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \quad (2.13)$$

а второй содержит два динамических граничных условия, которые зависят от характера осесимметричных напряжений, действующих на торцевых сечениях трубки, и от способа закрепления этих сечений.

Будем считать, что к торцевым сечениям трубки примыкают тонкие жесткие пластинки. Через них на трубку можно воздействовать извне только давлениями $P(0, t)$ и $P(h, t)$, работа которых запишется в виде

$$W(t) = \pi r_1^2 [P(0, t)f(0, t) - P(h, t)f(h, t)],$$

откуда

$$\delta W = -\pi r_1^2 [P \delta f]_0^h \quad (2.14)$$

Рассмотрим два крайних варианта крепления таких пластинок на торцах трубки: без трения (“скользящая” пластинка) и жесткое крепление, или сцепление. В первом

случае обращаются в нуль касательные напряжения σ_{rz} между пластинкой и трубкой, т.е. в соответствии с формулой (2.3) должно выполняться граничное условие

$$f''(z_0, t) = 0, \quad z_0 = 0, h \quad (2.15)$$

В случае сцепления запрещены радиальные смещения в торцевом сечении трубки, что на основании формулы (2.2) дает граничное условие

$$f'(z_0, t) = 0 \quad (2.16)$$

Соответствующие динамические граничные условия найдем из выражения (2.12) с учетом (2.14):

для “скользящей” пластинки:

$$f'''(z_0, t) - \frac{D(A, \varepsilon)}{A^2 r_0^2 b(\varepsilon)} f'(z_0, t) - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 f'(z_0, t)}{\partial t^2} = \frac{P(z_0, t)}{\mu A^2 r_0^2 b(\varepsilon)} \quad (2.17)$$

для случая сцепления:

$$f'''(z_0, t) = \frac{P(z_0, t)}{\mu A^2 r_0^2 b(\varepsilon)} \quad (2.18)$$

При гармонических колебаниях, когда временная зависимость величин задана сокращаемым множителем $e^{-i\omega t}$, где i – мнимая единица, ω – круговая частота, уравнение движения (2.13) и динамические граничные условия (2.17), (2.18) для комплексных амплитуд запишем в виде

$$f^{IV} + (k^2 - \kappa^2) f'' - k^2 \kappa^2 f = 0$$

$$f'''(z_0) + (k^2 - \kappa^2) f'(z_0) = \frac{k^2 \kappa^2 P(z_0)}{\omega^2 \rho (1 - \varepsilon)} \quad (2.19)$$

$$f'''(z_0) = \frac{k^2 \kappa^2 P(z_0)}{\omega^2 \rho (1 - \varepsilon)},$$

где

$$(k^2 - \kappa^2) = \frac{\omega^2 \rho}{\mu} - \frac{D(A, \varepsilon)}{A^2 r_0^2 b(\varepsilon)} \quad (2.20)$$

$$k^2 \kappa^2 = \frac{\omega^2 \rho (1 - \varepsilon)}{\mu A^2 r_0^2 b(\varepsilon)} \quad (2.21)$$

Введя дифференциальный оператор $\nabla \equiv d/dz$, уравнение (2.19) можно записать в виде

$$\left[\nabla^4 + (k^2 - \kappa^2) \nabla^2 - k^2 \kappa^2 \right] f = 0,$$

или

$$(\nabla^2 + k^2)(\nabla^2 - \kappa^2) f = 0$$

Общее решение этого уравнения может быть представлено суммой решений волновых уравнений

$$(\nabla^2 + k^2) f = 0, \quad (\nabla^2 - \kappa^2) f = 0,$$

из которых первое определяет распространяющуюся волну с волновым числом k , а второе — неоднородную волну с волновым числом κ . Таким образом решение уравнения (2.19) для отрезка трубки следует искать в виде

$$f(z) = A_1 \operatorname{sh} \kappa z + A_2 \operatorname{ch} \kappa z + A_3 \sin kz + A_4 \cos kz, \quad (2.22)$$

где A_i произвольные постоянные, определяемые из граничных условий на торцах, а k и κ могут быть найдены из уравнений (2.20), (2.21).

3. Дисперсионное уравнение. Пока остается неопределенной постоянная A . Ее можно связать с волновым числом k следующим образом. Возьмем точное уравнение в цилиндрических координатах для аксиальной составляющей смещения при осесимметричных движениях ([6], с. 126, (22.6))

$$\rho \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \right]$$

Усредним его по площади сечения трубки $\pi(r_1^2 - r_0^2)$ и, используя граничные условия (2.5) и (2.6), найдем:

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{U}_z}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \bar{U}_z}{\partial z^2} - \frac{2\lambda r_0}{r_1^2 - r_0^2} \frac{\partial U_r(z, r_0)}{\partial z},$$

где \bar{U}_z — среднее по сечению трубки аксиальное смещение. Подставив в это точное уравнение заданную форму движения (2.1), (2.2), получим для гармонических колебаний волновое уравнение

$$f''' + \frac{\omega^2 \rho}{\lambda + 2\mu - \lambda A} f = 0,$$

волновое число которого естественно отождествить с k :

$$k^2 = \frac{\omega^2 \rho}{\lambda + 2\mu - \lambda A} \quad (3.1)$$

Исключив из уравнений (2.20), (2.21), (3.1) κ и A , найдем

$$\frac{1}{(n^2 - 1) \left(1 - \frac{1}{2\alpha} n^2 \right)} \left[n^2 - \frac{1 + (2\alpha - 1)\varepsilon}{1 + \left(3 - \frac{2}{\alpha} \right) \varepsilon} \right] = \Omega^2, \quad (3.2)$$

где обозначено $n = k/k_l$ — показатель преломления перфорированной каналами среды относительно сплошной; $k_l = \omega \sqrt{\rho / (\lambda + 2\mu)}$ — волновое число для продольных волн в сплошной среде;

$$\alpha = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \quad (3.3)$$

$$\Omega^2 = \frac{2\alpha \varepsilon b(\varepsilon)}{a(\varepsilon)} (k_l r_1)^2 = \frac{\omega^2 \rho r_1^2 \varepsilon b(\varepsilon)}{\mu a(\varepsilon)} \quad (3.4)$$

$$a(\varepsilon) = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \left[1 + \left(3 - \frac{2}{\alpha} \right) \varepsilon \right] \quad (3.5)$$

Постоянную A найдем из формул (3.1)–(3.3):

$$A = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad (3.6)$$

Из формул (2.8), (3.6) и (3.2) при $\Omega \rightarrow 0$, получим:

$$A \rightarrow A_0,$$

что означает выполнение граничного условия (2.7) в квазистатическом случае.

Выражение (3.2) является приближенным дисперсионным уравнением для определения $k = nk_l$. Тогда получаем, что при $\Omega \rightarrow 0$

$$n^2(0) = \frac{2\epsilon\alpha + 1 - \epsilon}{1 + 3\epsilon - 2\epsilon/\alpha}$$

и

$$n^2(0) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 1, \quad \text{т.е.} \quad k(0) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} k_l$$

$$n^2(0) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 1} \frac{\alpha^2}{2\alpha - 1}, \quad \text{т.е.} \quad k^2(0) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 1} \frac{\omega^2 \rho(\lambda + 2\mu)}{4\mu(\lambda + \mu)},$$

как и должно быть для низкочастотных продольных волн, распространяющихся, соответственно этим предельным случаям, в сплошной среде ($\epsilon = 0$) и в тонкой пластине ($\epsilon \rightarrow 1$). Случаю $\Omega \rightarrow \infty$ соответствуют два варианта: $n \rightarrow 1$, т.е. $k(\infty) \rightarrow k_l$ – продольная волна в сплошной среде; $n \rightarrow \sqrt{2\alpha}$, или

$$k(\infty) \rightarrow \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} = k_t,$$

где k_t – волновое число для сдвиговых волн в сплошной среде.

Для вязкоупругих материалов (например, резин) модуль сдвига при гармонических колебаниях является комплексной функцией частоты:

$$\mu^*(\omega) = \mu(\omega)[1 - i\eta(\omega)], \quad (3.7)$$

где $\mu(\omega)$ – модуль сдвига, $\eta(\omega)$ – коэффициент сдвиговых потерь, величина которого обычно лежит в пределах $\eta(\omega) = 0.1 \dots 1.0$. Первый коэффициент Ламе λ на звуковых и ультразвуковых частотах можно считать вещественной постоянной, причем $\lambda \gg |\mu^*(\omega)|$. В связи с этим волновое число k_l , а также $a(\epsilon)$ (3.5) будем с малой ошибкой полагать вещественными. Для вязкоупругих материалов допустим, что

$$\left| \frac{n^{*2}}{2\alpha^*} \right| \ll 1 \quad (3.8)$$

Тогда дисперсионное уравнение (3.2) запишется в виде:

$$n^{*2} = \frac{\Omega_1^{*2} - \Omega^{*2}}{1 - \Omega^{*2}}; \quad \Omega_1^{*2} = \frac{1 + (2\alpha^* - 1)\epsilon}{1 + \left(3 - \frac{2}{\alpha^*}\right)\epsilon}, \quad (3.9)$$

где в согласии с (3.3), (3.4) и (3.7)

$$\alpha^* = \frac{\alpha}{1 - i\eta}, \quad |\alpha^*| \gg 1, \quad \Omega^{*2} = \frac{\Omega^2}{1 - i\eta} \quad (3.10)$$

Точное дисперсионное уравнение получено в работе [1]:

$$(1 - n^2) [n^2 \Phi(U) - \alpha] + (\alpha - n^2)^2 \Phi(V) = 0, \quad (3.11)$$

где

$$U = k_r r_1 \sqrt{2\alpha - n^2}, \quad V = k_r r_1 \sqrt{1 - n^2},$$

а функция $\Phi(x)$ выражается через функции Бесселя и Неймана:

$$\Phi(x) = \sqrt{\varepsilon x} \frac{J_1(x) N_0(\sqrt{\varepsilon x}) - N_1(x) J_0(\sqrt{\varepsilon x})}{J_1(x) N_1(\sqrt{\varepsilon x}) - N_1(x) J_1(\sqrt{\varepsilon x})} \quad (3.12)$$

Выражение (3.9) следует из (3.11) в качестве низкочастотного приближения при $|U|, |V| \ll 1$. Используя в (3.12) представления цилиндрических функций рядами при $|x| \ll 1$ ([8], с. 415, 428), получим

$$\Phi(x) = -\frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon} \frac{1 + \frac{x^2}{4}(1 + \ln \varepsilon - \varepsilon) + \dots}{1 - \frac{x^2}{8} \frac{1 + 2\varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon} + \dots} = -\frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon} \left(1 - \frac{\varepsilon b(\varepsilon)}{1 - \varepsilon} x^2 + \dots \right) \quad (3.13)$$

Ограничившись только выписанными здесь членами в разложениях для функций $\Phi(U)$ и $\Phi(V)$ и подставив последние в уравнение (3.11), получим в точности формулу (3.9) [7]. При таком выводе она справедлива для вязкоупругих материалов, лишь когда

$$|k_r r_1 \sqrt{2\alpha^*}| = |k_r^* r_1| \ll 1,$$

или

$$|\Omega^*| \ll \sqrt{\frac{\varepsilon b(\varepsilon)}{a(\varepsilon)}} < 0.15$$

Фактически формула (3.9) была получена таким способом уже в работе [1] в качестве квазистатического приближения с рэлеевской поправкой.

В наиболее интересных случаях применения (для звукопоглощения), когда справедливы допущения: (3.8), $|n^*| \sim 1$, $k_r r_1 \leq 1$, $\sqrt{2\varepsilon/\alpha} \ll 1$, $\varepsilon \ll 0.25$, можно считать, что $|U| \gg 1$, $|V| \ll 1$. Используя в формуле (3.12) для $\Phi(U)$ асимптотические представления цилиндрических функций [8, с. 449], а для $\Phi(V)$ – приближение (3.13), найдем:

$$\Phi(U) \approx i k_r r_1 \sqrt{2\varepsilon \alpha} \quad (3.14)$$

$$\Phi(V) \approx -\frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon} \left(1 - \frac{(k_r r_1)^2 \varepsilon b(\varepsilon)}{1 - \varepsilon} (1 - n^2) \right) \quad (3.15)$$

Подставив (3.14), (3.15) в (3.11), при принятых допущениях снова придем к формуле (3.9) [7].

Учитывая (3.3)–(3.5), (3.10), представим зависимость (3.9) в виде

$$n^{*2} = (n' + i n'')^2 = s^* = s' + i s'' = 1 + \frac{2\varepsilon \alpha}{(1 + 3\varepsilon)(1 - \Omega^2 - i \eta)}, \quad (3.16)$$

откуда

$$s' = n'^2 - n''^2 = 1 + \frac{2\varepsilon \alpha}{1 + 3\varepsilon} \frac{1 - \Omega^2}{(1 - \Omega^2)^2 + \eta^2} \quad (3.17)$$

$$s'' = 2n'n'' = \frac{2\varepsilon\alpha}{1 + 3\varepsilon} \frac{\eta}{(1 - \Omega^2)^2 + \eta^2} \quad (3.18)$$

Величину s^* можно назвать приведенной комплексной сжимаемостью перфорированной каналами среды [1]. Формула (3.16) подобна выражению для квадрата комплексного показателя преломления в теории дисперсии и абсорбции электромагнитных волн в разреженной среде, содержащей осцилляторы одного сорта, т.е. имеет обычный лоренцевский вид ([9], с. 56, (32.27)), ([10], § 156, с. 556). При этом s^* является аналогом комплексной диэлектрической проницаемости такой среды, и поэтому s' и s'' должны быть связаны дисперсионными соотношениями Крамерса–Кронига ([11], § 82, с. 389, [12]).

На рис. 1 построены зависимости от $k_1\eta$ функций s' (3.17) и s'' (3.18) при $\alpha = 800$, $\eta = 1$, $\varepsilon = 0.05^2$. Точками показаны значения этих величин для нулевой квазипродольной волны, вычисленные по точной теории в работе [2]. Видно хорошее совпадение. При $s' < 0$ мнимая часть k'' волнового числа $k^* = k_1n^*$ превышает вещественную часть k' . Из формулы (3.17) следует, что это возможно лишь при

$$\frac{\varepsilon\alpha}{1 + 3\varepsilon} > \eta \quad (3.19)$$

в диапазоне частот, границы которого определяет соотношение

$$\Omega_{1,2}^2 = 1 + \frac{\varepsilon\alpha}{1 + 3\varepsilon} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon\alpha}{1 + 3\varepsilon}\right)^2 - \eta^2},$$

откуда видно, что при уменьшении η этот диапазон расширяется, но не может превысить разницы между частотой зарождения первой квазипродольной волны [2], соответствующей значению $\Omega^2 = \Omega_1^2 = 1 + \frac{2\varepsilon\alpha}{1 + 3\varepsilon}$, и собственной частотой канала при $\Omega = 1$.

Отношение k''/k' максимально в центре диапазона при $\Omega^2 = 1 + \frac{\varepsilon\alpha}{1 + 3\varepsilon}$ и составляет

$$(k''/k')_{\max} = \frac{\varepsilon\alpha}{(1 + 3\varepsilon)\eta}. \text{ Это явление, которое можно назвать эффектом нераспространения, для среды с цилиндрическими каналами описано впервые в работе [13]. Аналогичное явление известно в электродинамике сплошных сред ([11], § 84, с. 399).}$$

Рисунок 2 демонстрирует степень совпадения расчетных приближенных значений $n'(k_1\eta)$ и $n''(k_1\eta)$ с точными из работы [2] при $\alpha = 125$, $\eta = 0.5$, $\varepsilon = 0.05^2$. Условие (3.19) здесь не выполняется и поэтому везде $n' > n''$, т.е. эффект нераспространения отсутствует.

Из формулы (3.16) с учетом (3.3)–(3.5), (3.10) найдем выражение для волнового числа:

$$k^{*2} = k_i^2 + \frac{1}{1 - \frac{\omega^2\mu(\omega_p)}{\omega_p^2\mu(\omega)} - i\eta} \cdot \frac{\omega^2\rho\varepsilon}{(1 + 3\varepsilon)\mu(\omega)}, \quad (3.20)$$

где $\omega_p = \frac{2}{R_{\text{eq}}} \sqrt{\mu(\omega_p)/\rho}$ – собственная круговая частота канала, $R_{\text{eq}} = 2r_0\sqrt{b(\varepsilon)/a(\varepsilon)}$.

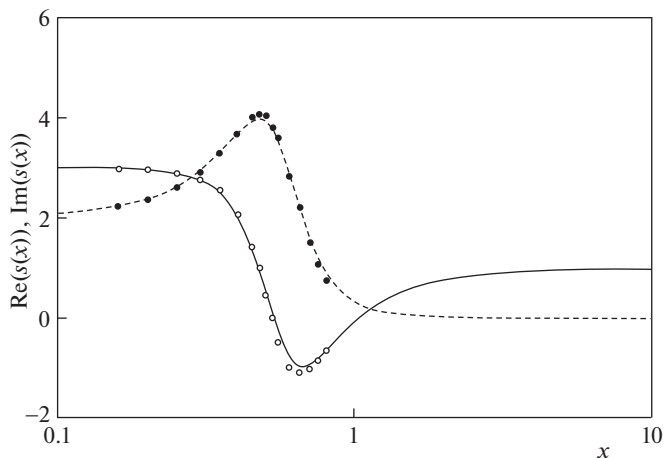


Рис. 1. Компоненты функции $s^*(x)$ (3.16), $x = k_l \eta$ при $\alpha = 800$, $\eta = 1.0$, $\varepsilon = 0.05^2$. $\text{Re}(s^*(x))$: \circ – данные [2], — по формуле (3.17); $\text{Im}(s^*(x))$: \bullet – данные [2], ---- по формуле (3.18).

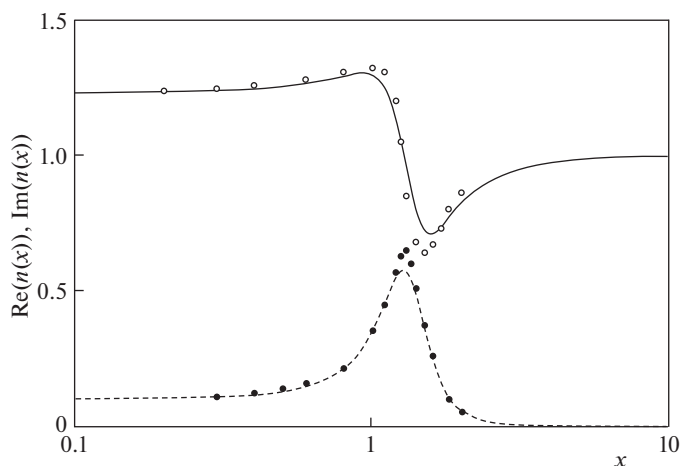


Рис. 2. Компоненты показателя преломления $n^*(x)$ при $\alpha = 125$, $\eta = 0.5$, $\varepsilon = 0.05^2$: $\text{Re}(n^*(x))$: \circ – из работы [2], — по формуле (3.16); $\text{Im}(n^*(x))$: \bullet – из работы [2], ---- по формуле (3.16).

При $\sqrt{\varepsilon} \leq 0.3$ достаточно хороша приближенная формула $\sqrt{b(\varepsilon)/a(\varepsilon)} = \frac{1}{2} \sqrt{\ln \frac{1}{\varepsilon} - 1.5}$. Для заданного значения η_1 собственная частота канала минимальна при $\varepsilon = \varepsilon_0 = 0.11$ и слабо зависит от r_0 в широком диапазоне относительно больших значений ε , возрастаая до бесконечности как при $\varepsilon \rightarrow 0$, так и при $\varepsilon \rightarrow 1$. Такое же значение ω_p получено в теории Г.Д. Малюжинца. Значение параметра $k_l r_0$ на резонансе: $(k_l r_0)_p = \sqrt{a(\varepsilon)/b(\varepsilon)}$.

Эффективные комплексные параметры дисперсных микронеоднородных сред – волновое число $\tilde{\kappa}$, сжимаемость \tilde{k} , плотность $\tilde{\rho}$ – связаны соотношением $\tilde{\kappa}^2 = \omega^2 \tilde{k} \tilde{\rho}$. Некоторые такие среды обладают резонансными свойствами, например, вода с газовыми пузырьками ([14], с. 379), резина с полостями, резина с твердыми включениями [15, 16]. В двух первых случаях за резонансные свойства отвечает комплексная сжимаемость \tilde{k} , тогда как $\tilde{\rho}$ – величина вещественная. В последнем случае наоборот: сжимаемость \tilde{k} вещественна (при учете только вязких потерь), а резонансные свойства среды обусловлены ее комплексной плотностью $\tilde{\rho}$. Для таких сред, если они малоконцентрированные и монодисперсные, квадраты волновых чисел $\tilde{\kappa}^2$ выражаются такими же формулами, как (3.20).

Для вязкоупругих материалов согласно (3.6) и (3.10)

$$A^* = 1 - n^{*-2} \tag{3.21}$$

Поэтому при заданной форме движений (2.1), (2.2) для распространяющейся волны ($\partial/\partial z \rightarrow ik^*$), используя зависимость (3.16), найдем:

$$\left| \frac{U_r(z, r_0)}{U_z(z)} \right| = \left| \frac{\sqrt{\alpha} \frac{1-\varepsilon}{2} \sqrt{a(\varepsilon)}}{1+3\varepsilon} \frac{\Omega}{\sqrt{b(\varepsilon)} \sqrt{(1-\Omega^2-i\eta) \left(1 + \frac{2\varepsilon\alpha}{1+3\varepsilon} - \Omega^2 - i\eta\right)}} \right|$$

Отсюда видно, что относительное радиальное движение стенок канала имеет два резонанса: на собственной частоте канала при $\Omega^2 = 1$ и на частоте зарождения первой квазипродольной волны при $\Omega^2 = 1 + 2\varepsilon\alpha/(1+3\varepsilon)$. На низких и высоких частотах радиальное движение стенок канала ослабевает.

Из формул (2.3), (2.4), (3.16), (3.21) для распространяющихся волн получим:

$$\left| \frac{\sigma_{rz}(z, r_0)}{\sigma_{zz}(z)} \right| = \frac{(1-\varepsilon)k_r r_0}{2(1+3\varepsilon)} \left| \frac{n^*(1-i\eta)}{1-\Omega^2-i\eta} \right|$$

При $|n^*| \sim 1$, $\eta \sim 1$ это отношение всегда много меньше единицы, в том числе и на резонансе канала, что позволяет считать граничное условие (2.6) выполняющимся приближенно на всех частотах.

Волновое число неоднородных волн κ^* при известных k^* (3.20) и A^* (3.21) следует из уравнения (2.21):

$$\kappa^{*2} = \frac{1+3\varepsilon}{\varepsilon} \frac{(1-\Omega^2-i\eta)^2}{\Omega^2(1-i\eta)} k^{*2}$$

При $\varepsilon \ll 1$, $\eta \sim 1$ на всех частотах $|\kappa^*| \gg |k^*|$, откуда следует, что область неоднородных волн вблизи торцов трубки весьма мала в сравнении с длиной продольной волны.

Входная акустическая проводимость трубки с тонкой жесткой пластинкой на торце согласно (2.1) имеет вид:

$$Y(0) = \frac{\dot{U}_z(0)}{P(0)} = \frac{-i\omega f(0)}{P(0)},$$

где $P(0)$ – звуковое давление на торец. Используя граничные условия (2.15)–(2.19) для определения (2.22), найдем входные проводимости полубесконечных ($h \rightarrow \infty$) трубок:

при пластинке без трения

$$Y(0) = \frac{k^*}{\omega\rho(1-\varepsilon)} \frac{1 - \frac{ik^*}{\kappa^*}}{1 - \frac{ik^*}{\kappa^*} - \frac{k^{*2}}{\kappa^{*2}}} \approx \frac{k^*}{\omega\rho(1-\varepsilon)}; \quad (3.22)$$

при пластинке, приклеенной к торцу,

$$Y(0) = \frac{k^*}{\omega\rho(1-\varepsilon)} \frac{1}{1 - \frac{ik^*}{\kappa^*}} \quad (3.23)$$

Здесь второй множитель в правой части отражает влияние радиального закрепления входной поверхности трубки. В первом же случае ролью свободного от касательных напряжений торца чаще всего можно пренебречь.

В работе [17] приведены результаты измерений на установке “Импульсная труба” акустических характеристик образцов разной длины из резины с цилиндрическими каналами. Предполагалось, что длина каждого образца обеспечивает выполнение условия $n''k_i h > 2$, позволяющего считать образец полубесконечным. Каналы в образцах несквозные – “со стороны основания оставляется тонкая диафрагма (толщина ее около 0.5 мм)” [17]. Для каждого образца измеряли входную проводимость, приведенную к проводимости сплошной среды с волновым сопротивлением $\rho(1-\varepsilon)c_l$, т.е.

$$Y_\varepsilon = P + iQ = \rho(1-\varepsilon)c_l Y(0),$$

где под $Y(0)$ следует понимать либо (3.22), либо (3.23) – в зависимости от предположения о характере колебаний торцевой поверхности образца, граничащей с водой. Тогда получим:

для “скользящей” пластинки:

$$P + iQ \approx n^*; \quad (3.24)$$

для пластинки, приклеенной к торцу трубки:

$$P + iQ = \frac{n^*}{1 - \frac{ik^*}{\kappa^*}} \quad (3.25)$$

На рис. 3 приведены средние по измерениям на 1–3 образцах значения P (черные точки) и Q (белые точки), аппроксимированные частотными зависимостями $P(f)$ и $Q(f)$ в виде полиномов пятой степени (сплошная линия). Подставив эти зависимости в левые части выражений (3.24) или (3.25), получим уравнения для нахождения комплексного модуля сдвига (3.7) резины образцов. В первом случае это уравнение квадратное, и значения $\mu^*(f)$ относительно $P(f)$ и $Q(f)$ находятся точно. При этом на высоких частотах величина коэффициента сдвиговых потерь возрастает до $\eta(f) > 6$, что нереально и говорит о непригодности представления о “скользящей” пластинке на входном торце образца. Во втором случае уравнение для $\mu^*(f)$ переходит в квадратное, лишь если пренебречь в знаменателе правой части (3.25) малым слагаемым $(k^*/\kappa^*)^2$, так что решение не будет точным. Его можно улучшить, умножив на близкий к единице комплексный линейный полином и варьируя коэффициенты последнего. Компоненты уточненного модуля сдвига $\mu^*(f)$ показаны на рис. 4. Подстановка их в правую часть уравнения (3.25) дает представленные на рис. 3 пунктирные кривые, близкие к

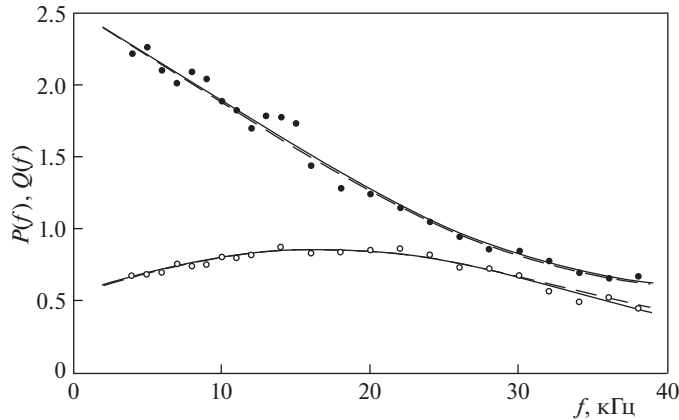


Рис. 3. Частотные зависимости компонентов приведенной входной проводимости $Y_{\epsilon} = P + iQ$ образцов работы [17]: ● – активная проводимость P ; ○ – реактивная проводимость Q ; — — аппроксимирующие кривые $P(f)$ и $Q(f)$; ---- — кривые проверки решения для $\mu^*(f)$.

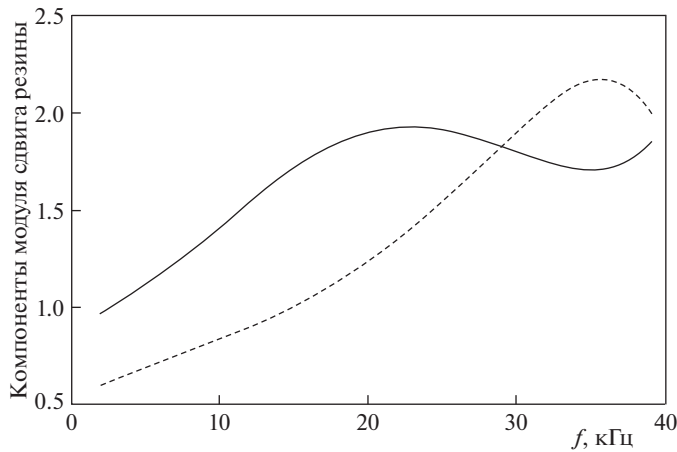


Рис. 4. Частотные зависимости расчетных компонентов комплексного модуля сдвига $\mu^*(f) = \mu(f)[1 - i\eta(f)]$ резины измеренных образцов: — — модуль сдвига $\mu(f) \times 10^{-7}$ Па, ---- — коэффициент сдвиговых потерь $\eta(f)$.

исходным $P(f)$ и $Q(f)$. Результат рис. 4 вполне реалистичен до частот $f \approx 20$ кГц и несколько сомнителен на высоких частотах, где данных о $\mu(f)$ и $\eta(f)$ в [17] нет.

Заключение. Показано, что для распространяющейся в вязкоупругой среде с цилиндрическими каналами звуковой волны дисперсионное уравнение имеет такую же форму, как для других известных резонансных микронеоднородных сред. Это тем более справедливо, чем меньше коэффициент перфорации ϵ (объемная концентрация каналов). Поскольку теория учитывает неоднородные волны вблизи торцевых поверхностей трубки, она применима к перфорированным резиновым слоям произвольной малой толщины с двумя типами граничных условий на поверхностях слоев [18].

Развитую здесь теорию можно привлечь к измерениям упругих параметров вязкоупругих материалов с помощью “Импульсной трубы” или вибростола. При определении модуля сдвига резины образцов работы [17] более подходящим (как и в [18]) оказалось допущение о сцеплении входного торца трубки с тонкой жесткой пластинкой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тютюкин В.В.* Распространение упругих волн в среде с цилиндрическими каналами // Акуст. ж. 1956. Т. 2. № 3. С. 291–301.
2. *Вовк А.Е.* Некоторые вопросы распространения упругих волн в твердых волноводах. Дисс. на соискание уч. ст. к.ф.-м.н. Москва, 1967. 128 с.
3. *Шейба Л.С., Шляпочников С.А.* Об одном классе собственных колебаний упругого цилиндра // Акуст. ж. 1974. Т. 20. № 2. С. 331–333.
4. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 473 с.
5. *Рэлей.* Теория звука. Том 1. М.: Гостехиздат, 1955. 503 с.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987. 247 с.
7. *Казакон Л.И.* Акустические свойства упругой среды с цилиндрическими каналами // Деп. в ВИНТИ 12.09.84 № 6203–84. Деп. 26 с.
8. *Арфкен Г.* Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970. 712 с.
9. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сендс М.* Фейнмановские лекции по физике. Физика сплошных сред. М.: Мир, 1977. 288 с.
10. *Ландсберг Г.С.* Оптика. М.: Наука, 1976. 926 с.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
12. *Гинзбург В.Л.* Об общей связи между поглощением и дисперсией звуковых волн // Акуст. ж. 1955. Т. 1. № 1. С. 31–39.
13. *Вовк А.Е., Тютюкин В.В.* О “сверхвязких” продольных волнах в упругой среде // Акуст. ж. 1961. Т. 7. № 2. С. 256–257.
14. *Скучик Е.* Основы акустики. Том II. М.: Иностран. лит., 1959. 565 с.
15. *Викторова Р.Н., Тютюкин В.В.* Физические основы создания звукопоглощающих материалов с использованием среды с комплексной плотностью // Акуст. ж. 1998. Т. 44. № 3. С. 331–336.
16. *Казакон Л.И.* Ячеечные модели вязкоупругой среды с твердыми сферическими включениями // Акуст. ж. 2022. Т. 68. № 2. С. 173–181.
17. *Вовк А.Е., Пастернак Р.Н., Тютюкин В.В.* Экспериментальное исследование волновых свойств среды с цилиндрическими каналами // Акуст. ж. 1958. Т. 4. № 1. С. 24–32.
18. *Казакон Л.И.* Акустические характеристики нагруженных перфорированных слоев // Деп. в ВИНТИ 19.08.87. № 6092. В87. 17 с.

Approximate Theory of Sound Propagation in a Limited Viscoelastic Medium with Cylindrical Channels

L. I. Kazakov[#]

[#]*e-mail: lev-kazakov@rambler.ru*

The acoustic characteristics of a cylindrical viscoelastic tube of finite length with a radially fixed outer surface replacing a hexagonal unit cell a segment of a micro-inhomogeneous medium with cylindrical channels are calculated. The principle of least action and the hypothesis of flat sections are applied. A dispersion equation for longitudinal soundwaves in a tube is found that coincides with the approximations of the exact dispersion equation and has the form typical for micro-inhomogeneous resonant media. From a suitable approximation of the results of the known measurements of the reduced input conductivity of “semi-infinite” samples the frequency dependence of the complex shear modulus of the rubber used was found.

Keywords: the principle of least action, the hypothesis of flat sections, viscoelastic medium, cylindrical channels, end plates, dispersion equation, non propagation effect

REFERENCES

1. *Tyutkin V.V.* Propagation of elastic waves in a medium with cylindrical channels // *Acoust. J.*, 1956, vol. 2, no. 3, pp. 291–301.
2. *Vovk A.E.* Some questions of elastic wave propagation in solid waveguides. Ph.D. Thesis. Phys.&Math. Moscow, 1967. 128 p.
3. *Sheiba L.S., Shlyapochnikov S.A.* On one class of natural oscillations of an elastic cylinder // *Acoust. J.*, 1974, vol. 20, no. 2, pp. 331–333.
4. *Lyav A.* Mathematical Theory of Elasticity. Moscow; Leningrad: ONTI NKTP USSR, 1935. 473 p. (in Russian)
5. *Rayleigh.* Theory of Sound. Vol. 1. Moscow: Gostekhizdat, 1955. 503 p. (in Russian)
6. *Landau L.D., Lifshits E.M.* Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1987. 247 p. (in Russian)
7. *Kazakov L.I.* Acoustic properties of an elastic medium with cylindrical channels // *Dep. in VINITI* 12.09.84, № 6203, 84 Dep. 26 p.
8. *Arfken G.* Mathematical Methods in Physics. Moscow: Atomizdat, 1970. 712 p. (in Russian)
9. *Feynman R., Leighton R., Sands M.* Feynman Lectures on Physics. Physics of Continuous Media. Moscow: Mir, 1977. 288 p. (in Russian)
10. *Landsberg G.S.* Optics. Moscow: Nauka, 1976. 926 p. (in Russian)
11. *Landau L.D., Lifshits E.M.* Electrodynamics of Continuous Media. Moscow: Nauka, 1982. 620 p. (in Russian)
12. *Ginzburg V.L.* On the general relationship between absorption and dispersion of sound waves // *Acoustic. J.*, 1955, vol. 1, no. 1, pp. 31–39.
13. *Vovk A.E., Tyutkin V.V.* On “ultra-viscous” longitudinal waves in an elastic medium // *Acoust. J.*, 1961, vol. 7, no. 2, pp. 256–257.
14. *Skushik E.* Fundamentals of Acoustics. Vol. II. Moscow: Inostr. Lit., 1959. 565 p. (in Russian)
15. *Viktorova R.N., Tyutkin V.V.* Physical foundations of sound-absorbing materials using a medium with a complex density // *Acoust. J.*, 1998, vol. 44, no. 3, pp. 331–336.
16. *Kazakov L.I.* Cellular models of viscoelastic medium with solid spherical inclusions // *Acoust. J.*, 2022, vol. 68, no. 2, pp. 173–181.
17. *Vovk A.E., Pasternak R.N., Tyutkin V.V.* Experimental research wave properties of a medium with cylindrical channels // *Acoustic. J.*, 1958, vol. 4, no. 1, pp. 24–32.
18. *Kazakov L.I.* Acoustic characteristics of loaded perforated layers // *Dep. in VINITI* 19.08.87, no. 6092, B87. 17 p.

УДК 532.511+ 532.516.5

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСТЕЧЕНИЯ СЫПУЧЕГО ТЕЛА ИЗ ЕМКОСТИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА СЦЕПЛЕНИЯ СО СТЕНКОЙ

© 2022 г. Т. Р. Аманбаев^{1,2,*}, С. Д. Энтони^{3,**}

¹ Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан

² Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

³ Школа химической и технологической инженерии, Университет Лидса,

LS2 9JT, Лидс, Великобритания

*e-mail: tulegen_amanbaev@mail.ru

**e-mail: s.j.antony@leeds.ac.uk

Поступила в редакцию 08.11.2021 г.

После доработки 26.05.2022 г.

Принята к публикации 10.06.2022 г.

В рамках подхода, основанного на уравнении вязкой жидкости как непрерывной среды (НС), изучен процесс истечения сыпучей среды под действием силы тяжести из объема между двумя пластинами, наклоненными друг к другу под некоторым углом. На границе с твердой стенкой принимается условие частичного скольжения (или сцепления), описываемое с помощью некоторого коэффициента, который меняется от 0 до 1. В двумерной постановке найдено распределение скорости движения среды внутри емкости. Проанализировано влияние изменения коэффициента скольжения на характер течения сыпучей среды. Проведено сравнение подхода НС, и подхода, основанного на описании гранулированной среды как дискретных слоев (ДС). Приведены формулы для скорости и расхода сыпучего тела на выходе из емкости. Проанализированы зависимости указанных параметров от коэффициента внутреннего трения и угла раствора между пластинами.

Ключевые слова: сыпучая среда, емкость, сила тяжести, истечение, коэффициент скольжения, расход

DOI: 10.31857/S0032823522050022

1. Введение. В настоящее время в порошковой технологии нашли широкое применение аппараты дозирования, сушки, смешения и т.п. гранулированных сред [1–3]. Для дальнейшего усовершенствования этих устройств необходимо создание математических моделей процессов, происходящих в них [4, 5]. Для описания течения сыпучей среды используются различные подходы, основными из которых являются дискретный и непрерывный подходы. В дискретном подходе изучается поведение каждой индивидуальной частицы сыпучей среды в отдельности. Здесь воспользуемся непрерывным подходом, где гранулированная среда рассматривается как непрерывная (сплошная) среда. Обычно движение плотного слоя сыпучей среды условно разделяют на два режима: квазистатический, соответствующий малым скоростям сдвига, который описывается в рамках теории предельного равновесия [6], и инерционный, отвечающий большим скоростям сдвига [7]. При инерционном режиме движения внутренние напряжения в среде возникают вследствие переноса импульса гранулами, аналогично тому, как это происходит при хаотическом движении молекул в жидкости. Описание этого режима течения основывается, как правило, на законах сохранения

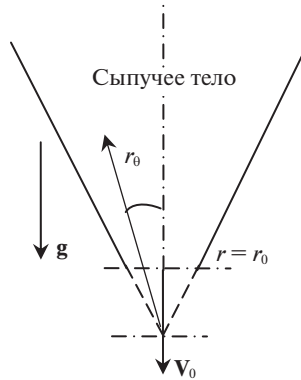


Рис. 1. Схема истечения сыпучего тела из емкости.

массы и импульса. Существуют также методы описания движения сыпучей среды, основанные на ее дискретном представлении [8–11].

2. Постановка и решение задачи в рамках подхода НС. Рассмотрим процесс истечения несвязной (эффект когезии не учитывается) гранулированной среды под действием силы тяжести из объема между наклоненными друг к другу под некоторым углом двух плоскостей через нижнее выпускное отверстие (рис. 1). При этом допустим, что высота сыпучего тела намного больше, а частицы намного меньше размеров выпускного отверстия. Для описания этого процесса воспользуемся уравнениями движения НС как вязкой несжимаемой жидкости (уравнения Навье–Стокса), записанными в цилиндрической системе координат r, θ, z (ось z направлена перпендикулярно к плоскости рис. 1). Рассмотрим стационарный процесс движения НС вдоль радиальной координаты. Таким образом, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \equiv 0, \quad \rho = \text{const}, \quad v_\theta = 0, \quad v_z = 0, \quad v_r = v(r, \theta), \quad (2.1)$$

где ρ – плотность среды, v_θ, v_z, v_r – компоненты вектора скорости по цилиндрическим координатам. Тогда уравнения сохранения импульсов (в проекциях на оси координат) и уравнение несжимаемости НС в рамках предположений (2.1) примут форму

$$v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{v}{r^2} \right) + F_r \quad (2.2)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta \left(\frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + F_\theta \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0 \quad (2.4)$$

$$F_r = -g \cos \theta, \quad F_\theta = g \sin \theta$$

Здесь p, η – давление и “кинематическая вязкость” (которая в ходе дальнейших преобразований выпадает из уравнений) среды, g – ускорение силы тяжести, F_r, F_θ – компоненты вектора силы тяжести по координатам r, θ соответственно. Уравнения (2.2),

(2.3) это уравнения сохранения импульса, уравнение (2.4) – уравнение несжимаемости. Из (2.4) сразу следует

$$v = \frac{\psi(\theta)}{r}, \quad (2.5)$$

где $\psi(\theta)$ – неизвестная функция. Далее пренебрежем нелинейным членом в левой части уравнения (2.2), считая, что в основной зоне емкости скорость течения достаточно мала. Кроме того, исключим давление из уравнений. Для этого уравнение (2.2) продифференцируем по θ , а уравнение (2.3) после умножения обеих его частей на r – по r , и вычтем полученные уравнения друг из друга. В результате придем к уравнению, где отсутствуют давление и сила тяжести (считается, что $\eta \neq 0$)

$$\eta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial^3 v}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} \right) = 0$$

Приравнявая нулю выражение внутри круглых скобок, и учитывая соотношение (2.5) получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции ψ

$$\frac{d^3 \psi}{d\theta^3} + 4 \frac{d\psi}{d\theta} = 0 \quad (2.6)$$

Общее решение уравнения (2.6) имеет вид

$$\psi = C_1 + C_2 \cos 2\theta + C_3 \sin 2\theta,$$

где C_1, C_2, C_3 – постоянные интегрирования. Из соображений симметричности движения среды относительно плоскости $\theta = 0$ сразу вытекает, что постоянная C_3 должна быть равна нулю: $C_3 = 0$. Остальные неизвестные постоянные определяются из граничных условий на стенках и условия постоянства расхода среды.

Учитывая то обстоятельство, что скорость на стенке не может быть больше (из-за трения) скорости на плоскости симметрии, граничное условие на стенках емкости поставим в форме

$$v \left(r, \pm \frac{\alpha}{2} \right) = \Lambda v(r, 0), \quad (2.7)$$

где α – угол раствора между плоскостями. Граничные условия (2.7) учитывают эффект частичного сцепления сыпучей среды с поверхностью стенок, где Λ есть коэффициент скольжения, зависящий от физико-механических свойств поверхности стенок (шероховатости и др.) и гранулированного материала. Очевидно, $0 \leq \Lambda \leq 1$, при этом, если $\Lambda = 1$, то имеет место полное скольжение (скорость на стенке совпадает со скоростью на плоскости симметрии), а в случае $\Lambda = 0$ реализуется полное сцепление (прилипание). Отметим, что величина $v(r, 0)$ в правой части (2.7) представляет собой скорость среды на плоскости симметрии на расстоянии r от вершины угла. Так что коэффициент Λ показывает, насколько меньше скорость на стенке по сравнению со скоростью на плоскости симметрии.

Следует заметить, что граничное условие на твердой стенке, устанавливающее эффект сцепления, может быть задан и по-другому [4]. Анализ показал, что при задании граничного условия как в [4] решение поставленной задачи при определенных углах раствора становится бесконечным. Кроме того, коэффициент, введенный в [4], и характеризующий эффект частичного скольжения, меняется от нуля до бесконечности, что создает некоторые неудобства по определению значений данного коэффициента. В связи с этим принятие в настоящей работе условия на границе в виде (2.7) с коэффициентом скольжения, меняющимся от нуля до единицы, можно считать вполне це-

лесообразным. К тому же так введенный коэффициент легко измерить экспериментально. Обычно для жидкости на твердой границе ставится условие прилипания (полного сцепления), а в случае сыпучей среды граничное условие допускает скольжение с некоторой скоростью, характеризуемой свойствами контактирующих материалов.

Очевидно, через любое сечение $r = \text{const}$ проходит (в 1 с) одинаковое количество сыпучего материала (полный расход) Q_- ($\text{м}^2/\text{с}$)

$$Q_- = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} v(r, \theta) r d\theta = \text{const} < 0 \tag{2.8}$$

Используя граничное условие на одной из стенок, например, при $\theta = \alpha/2$, (второе условие при этом выполняется автоматически из-за симметричности движения) и условие (2.8) находим функцию ψ , подставляя которую в (2.5) получим распределение скорости внутри рассматриваемого объема

$$v(r, \theta) = -\frac{Q}{Ar} \left[1 - (1 - \Lambda) \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right] \tag{2.9}$$

$$A = \alpha - (1 - \Lambda) \frac{\alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}, \quad -\frac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2}, \quad Q = -Q_- > 0, \quad \alpha \neq 0$$

В частном случае $\Lambda = 1$ имеем $A = \alpha$. Анализ показал, что при приближении α к нулю величина A также стремится к нулю (возникающая при этом неопределенность типа $0/0$ во втором слагаемом в выражении для A легко раскрывается разложением в ряд тригонометрических функций). Очевидно, при $\alpha \neq 0$ параметр A всегда меньше α . Для малых углов раствора с точностью до второго порядка малости по α имеет место следующее асимптотическое представление:

$$A \cong \left(\frac{2 + \Lambda}{3} \right) \alpha \tag{2.10}$$

При крайнем значении $\Lambda = 1$ асимптотическая формула (2.10) дает $A = \alpha$, что совпадает с вышеприведенной основной формулой для A (с учетом условия $\Lambda = 1$). Более подробная картина поведения зависимости A от α при разных коэффициентах скольжения Λ показана на рис. 2, где видно, что с ростом α и Λ величина A также увеличивается. Причем асимптотическая формула (2.10) довольно хорошо описывает зависимость $A(\alpha)$ для не очень больших α .

На плоскости симметрии ($\theta = 0$) из (2.9) следует

$$v(r) = -\frac{Q}{Ar} \equiv v_s(r), \tag{2.11}$$

так что скорость на линии симметрии зависит от координаты r , угла раствора α , коэффициента скольжения Λ и расхода Q . Из (2.11) следует, что в случае одного и того же расхода усиление эффекта сцепления (соответствует уменьшению коэффициента Λ , и как следствие согласно рис. 2, уменьшению A) приводит к увеличению (по модулю) скорости v_s . С учетом формулы (2.11) решение (2.9) примет вид

$$v(r, \theta) = v_s(r) \left[1 - (1 - \Lambda) \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right] \tag{2.12}$$

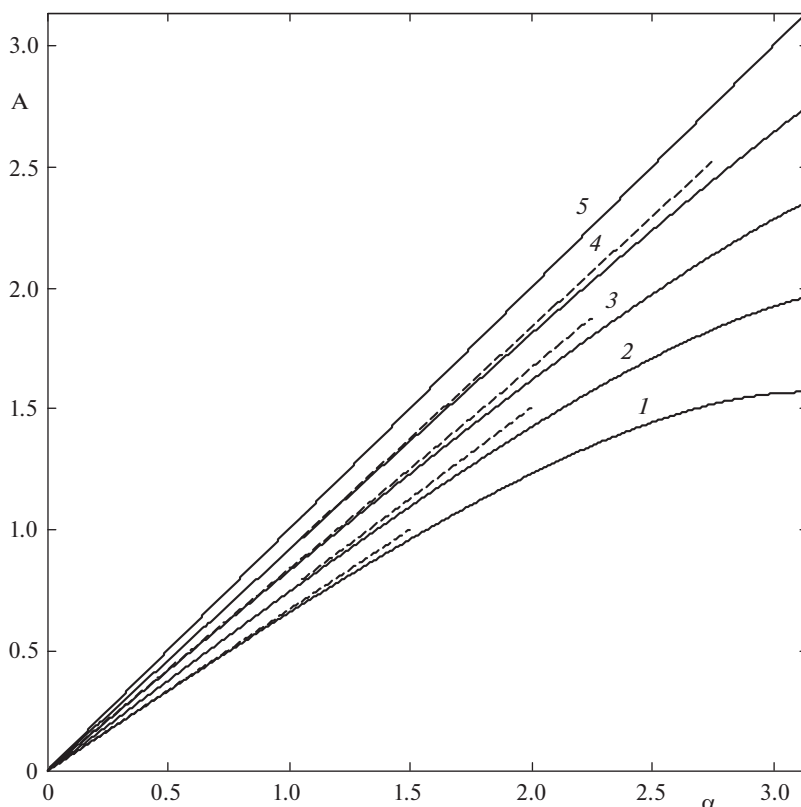


Рис. 2. Зависимость параметра A от α (рад) при разных значениях коэффициента скольжения: 1 – $\Lambda = 0$, 2 – $\Lambda = 0.25$, 3 – $\Lambda = 0.5$, 4 – $\Lambda = 0.75$, 5 – $\Lambda = 1$. Штриховые линии – асимптотическая формула (2.10).

3. Анализ влияния коэффициента скольжения. Проанализируем некоторые частные случаи, соответствующие характерным значениям коэффициента скольжения. В случае полного сцепления $\Lambda = 0$ (т.е. при отсутствии скольжения) из (2.12) вытекает

$$v(r, \theta) = v_s^{(0)}(r) \left[1 - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right]; \quad v_s^{(0)}(r) = -\frac{Q}{r} \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}$$

Из решения (2.9) видно, что в случае полного скольжения ($\Lambda = 1$) скорость среды не зависит от угловой координаты θ и имеет равномерное распределение для любого r

$$v(r) = -\frac{Q}{\alpha r} \equiv v^{(1)}(r)$$

При этом очевидно, что в данном случае (т.е. когда $\Lambda = 1$) $v^{(1)} = v_s$. В этом случае скорость имеет потенциал $\Phi = -(Q/\alpha) \ln r$, соответствующий находящемуся на вершине угла плоскому стоку интенсивности Q , в то время как движение среды в общем случае, описываемое уравнением (2.9) не является потенциальным. Таким образом, наличие сцепления со стенкой нарушает свойство потенциальности течения сыпучей среды.

Интересно сравнить распределения скоростей среды при наличии ($\Lambda < 1$) и отсутствии ($\Lambda = 1$) сцепления со стенкой. С этой целью рассмотрим отношение $v/v^{(1)}$

$$\frac{v}{v^{(1)}} = \frac{v_s}{v^{(1)}} \left[1 - (1 - \Lambda) \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right]$$

Видно, что данное соотношение характеризуется величиной $\kappa = v_s/v^{(1)}$, поэтому имеет смысл подробно проанализировать зависимость κ от определяющих параметров α и Λ . Отношение характерных скоростей κ при одном и том же расходе Q запишется в форме

$$\kappa = \frac{v_s}{v^{(1)}} = \frac{\alpha}{A} = \left[1 - (1 - \Lambda) \frac{\alpha - \sin \alpha}{\alpha(1 - \cos \alpha)} \right]^{-1} \quad (3.1)$$

Формула (3.1) показывает, насколько скорость на линии симметрии при наличии сцепления со стенкой v_s отличается от скорости при полном скольжении среды $v^{(1)}$. Поскольку величина A всегда меньше или равна α (см. выше), то имеет место соотношение $\kappa \geq 1$ (или $v_s \geq v^{(1)}$). В предельном случае полного сцепления ($\Lambda = 0$) имеем

$$\kappa = \left[1 - \frac{\alpha - \sin \alpha}{\alpha(1 - \cos \alpha)} \right]^{-1} = \frac{\alpha(1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}$$

В этом случае κ принимает свое максимальное значение. Очевидно, при $\Lambda = 1$ величина $\kappa = 1$. Разлагая тригонометрические функции в формуле (3.1) в ряды, и пренебрегая в этих рядах членами выше пятого порядка малости, получим приближенное выражение, пригодное для расчета величины κ при малых углах раствора $\alpha \ll 1$

$$\kappa = \frac{3}{2 + \Lambda} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{\gamma}{2 + \Lambda} \right) \alpha^2 \right], \quad \gamma = 1 - \frac{1}{5} (1 - \Lambda) \quad (3.2)$$

Из (3.2) вытекает соотношение для случая, когда $\alpha \rightarrow 0$

$$\kappa = \frac{3}{2 + \Lambda}$$

Отсюда, в частности, следует, что при движении сыпучей среды между параллельными плоскостями скорость на плоскости симметрии в крайних ситуациях полного сцепления и полного скольжения различается в 1.5 раза (в предположении одинакового расхода).

Эпюры безразмерной скорости v/v_s при $\alpha = \pi/3$ и различных значениях коэффициента скольжения Λ представлены на рис. 3. Видно, что с ростом Λ профиль скорости среды стремится к равномерному распределению. Следует иметь в виду, что профили скорости на рис. 3 соответствуют разным расходам, поскольку в данном случае величина v_s фиксирована, и поэтому при изменении Λ меняется также и Q (от которых зависит v_s).

На рис. 4 показан график зависимости κ от α , откуда видно, что при увеличении угла раствора α величина κ растет, тогда как с увеличением коэффициента Λ оно, наоборот, уменьшается. Необходимо подчеркнуть, что при значениях Λ , близких к единице, а также при не очень больших углах раствора α указанное отношение скоростей меняется достаточно слабо. Следует иметь в виду, что значение величины κ , соответ-

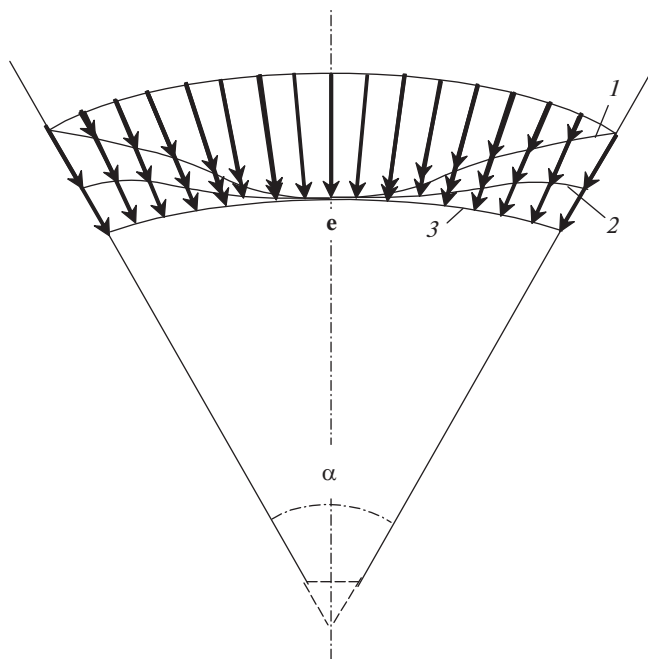


Рис. 3. Эпюры безразмерной скорости v/v_s в случае $\alpha = \pi/3$ при разных коэффициентах скольжения. Профили: 1 – $\Lambda = 0$, 2 – $\Lambda = 0.5$, 3 – $\Lambda = 1$, e – единичный вектор.

ствующее нулевому углу раствора достигается в пределе при $\alpha \rightarrow 0$. Заметим, что приближенная формула (3.2) хорошо аппроксимирует исходную зависимость.

Особенности взаимосвязи между скоростями v_s и $v^{(1)}$ наглядно демонстрирует диаграмма, приведенная на рис. 5, где эпюры скоростей построены для угла раствора $\alpha = \pi/3$. Поскольку расход сыпучей среды один и тот же, то площади, охваченные профилями скоростей v и $v^{(1)}$ должны быть одинаковыми.

4. Средняя скорость истечения. Также можно определить среднюю скорость на расстоянии r от вершины угла

$$v_a(r) = \frac{1}{\alpha r} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} v(r, \theta) r d\theta = -\frac{Q}{\alpha r} \quad (4.1)$$

Интересно, что как видно из (4.1), при заданном Q средняя скорость не зависит от Λ и для одного и того же расхода Q совпадает со скоростью среды при полном скольжении. Причем она обладает таким же потенциалом $\Phi = -(Q/\alpha) \ln r$, соответствующим находящемуся на вершине угла α плоскому стоку интенсивности Q , в то время как движение среды в общем случае, описываемое уравнением (2.9), как отмечено выше, не является потенциальным. Таким образом, в соотношениях $v_s/v^{(1)}$ и $v/v^{(1)}$ скорость $v^{(1)}$ вполне можно заменить на v_a .

Введем некоторую характерную скорость V по формуле $V = Q/\alpha$, которую можно трактовать как среднюю скорость истечения сыпучего тела через выпускное отверстие

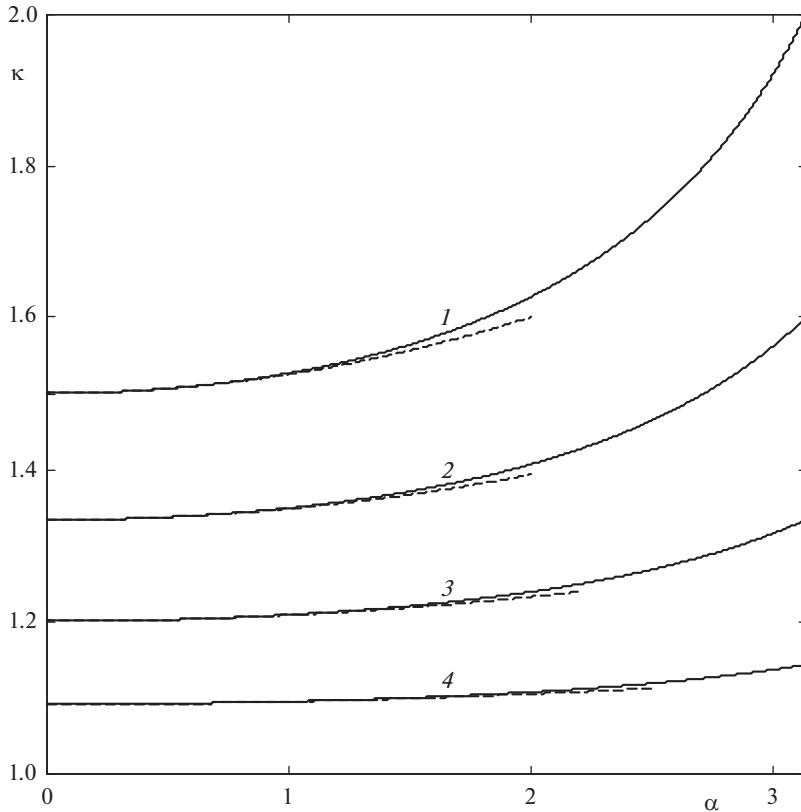


Рис. 4. Зависимость $\kappa = v_s/v^{(1)}$ от α (рад) при разных значениях коэффициента скольжения: 1 – $\Lambda = 0$, 2 – $\Lambda = 0.25$, 3 – $\Lambda = 0.5$, 4 – $\Lambda = 0.75$. Штриховые линии – расчеты по приближенной формуле (3.2).

шириной a , поскольку величина aV дает расход среды. Тогда используя формулу для V решение (2.9) можно переписать в другой форме

$$v(r, \theta) = -\frac{aV}{Ar} \left[1 - (1 - \Lambda) \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right] \quad (4.2)$$

Для сравнения запишем выражение для скорости среды на линии симметрии ($\theta = 0$)

$$v_s(r) = -\frac{aV}{Ar} \quad (4.3)$$

и для средней скорости (совпадающей со скоростью при полном скольжении)

$$v_a(r) = v^{(1)}(r) = -\frac{aV}{\alpha r} \quad (4.4)$$

Формулы (4.2)–(4.4) позволяют рассчитать распределение скорости среды внутри емкости через характерную скорость на выходе V . Указанные формулы физически правильно описывают поведение зависимостей скоростей v , v_s , v_a от ширины выходной щели a : они с увеличением a растут.

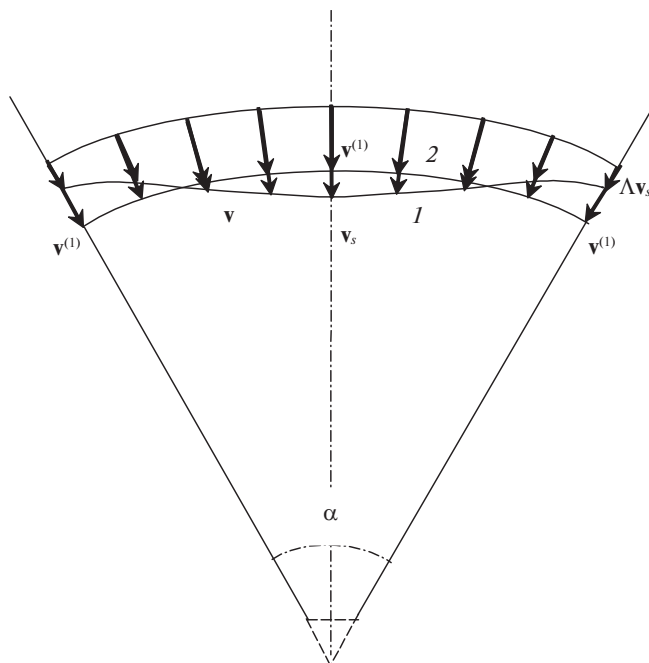


Рис. 5. Эпюры скорости в случаях частичного v и полного $v^{(1)}$ скольжения при одинаковом расходе сыпучего материала (для $\alpha = \pi/3$). Профили: $1 - \Lambda = 0.25$, $2 - \Lambda = 1$.

Для сравнения далее рассмотрим другой подход для моделирования истечения сыпучего груза из емкости, основанный на представлении гранулированной среды как дискретных слоев (ДС).

5. Моделирование истечения сыпучего тела с использованием ДС. Для приближенного описания сформулированной выше задачи об истечении сыпучего тела из бункера может быть использована точка зрения Лагранжа к изучению движения среды. Пусть среда истекает с интенсивностью $Q > 0$ и пусть эффект сцепления сыпучего тела со стенкой отсутствует ($\Lambda = 1$). В начальный момент времени $t = t_0$ выбираем любой элементарный объем среды высотой h (рис. 6), которую назовем “крупной частицей” или элементарным “дискретным слоем” (ДС) [12]. В качестве лагранжевой координаты примем начальную координату центра ДС, так что

$$\begin{cases} t = t_0 : x = \xi \\ t > t_0 : x = L(\xi, t), \end{cases}$$

где x – эйлерова координата центра ДС (координата x начинается от плоскости выпускного отверстия). Необходимо найти закон движения ДС

$$x = L(\xi, t)$$

За время $t - t_0$ первоначальный слой высотой h перейдет в новое положение с высотой h_1 . Для несжимаемой среды площадь элементарного слоя будет постоянной. Учитывая это условие вместе с геометрическими размерами емкости можно получить сле-

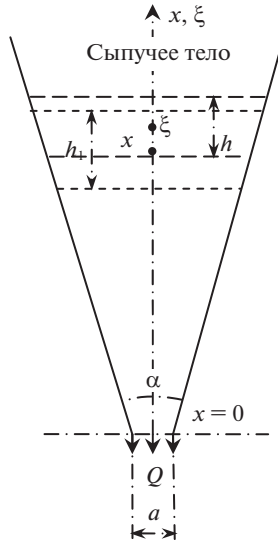


Рис. 6. Схема деформации ДС.

дующие соотношения для разработки расчетных схем с целью последующего анализа истечения сыпучей среды из бункера

$$x = \frac{h}{h_1} \left(\xi + \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

$$h_1 = (h_{11} - h_{12}) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \tag{5.1}$$

$$h_{11} = \sqrt{\left[\left(\xi + \frac{h}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \frac{a}{2} \right]^2 - (t - t_0) Q \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

$$h_{12} = \sqrt{\left[\left(\xi - \frac{h}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \frac{a}{2} \right]^2 - (t - t_0) Q \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

Скорость дискретного элемента выражается как

$$u = \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{hQ}{h_1 h_{11} h_{12}} \left(\xi \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \frac{a}{2} \right) \tag{5.2}$$

Из формул (5.1) и (5.2) устремляя h к нулю $h \rightarrow 0$ можно получить закон движения среды (после раскрытия неопределенности h/h_1)

$$x = \left[-\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2} + \xi \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^2 - Q(t - t_0) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \right] \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \tag{5.3}$$

а также скорость движения выбранной точки с координатой ξ в зависимости от времени

$$u = -\frac{1}{2} \frac{Q}{\sqrt{\left(\frac{a}{2} + \xi \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^2 - Q(t - t_0) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}} \tag{5.4}$$

Из (5.3) следует выражение для времени, в течение которого частица с начальной координатой ξ достигнет выпускного отверстия ($x = 0$)

$$t_{\xi} = \frac{1}{Q} \xi \left(a + \xi \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)$$

Видно, что зависимость характерного времени t_{ξ} от начальной координаты частицы ξ подчиняется квадратичному закону. Причем величина t_{ξ} обратно пропорциональна расходу Q , что согласуется с физическими соображениями: чем больше расход среды, тем меньше время истечения.

Комбинируя формулы (5.3) и (5.4) получаем распределение скорости среды вдоль оси x

$$u = - \frac{Q}{a + 2x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \quad (5.5)$$

Далее для удобства переходим к координате y (вместо x), начало которой откладывается, аналогично r , от линии пересечения рассматриваемых плоскостей

$$x = y - \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

Тогда (5.5) переписывается в виде

$$u = - \frac{Q}{2y} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \quad y \geq \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \quad (5.6)$$

Здесь расход Q аналогично предыдущему разделу можно представить в виде $Q = aV$. Напомним, что в подходе ДС используется только закон сохранения массы без привлечения закона сохранения импульсов (в этом заключается простота подхода ДС).

На рис. 7 проводится сравнение безразмерных скоростей, вычисленных по разным формулам (2.17) и (5.6), соответствующим разным подходам описания истечения сыпучей среды. Видно, что оба рассмотренных здесь подхода дают значения скорости, незначительно отличающиеся друг от друга, хотя с увеличением угла раствора различие между ними растёт.

6. Расчет скорости и расхода сыпучего тела на выходе из емкости. Таким образом, как следует из предыдущих разделов, распределение скорости внутри емкости зависит от расхода Q сыпучего материала через нижнее выпускное отверстие. В связи с этим для полного описания приведенных выше моделей, необходимо указать способ определения расхода. Для расчета расхода разработаны различные подходы [13–17]. Далее укажем на один из способов определения установившейся скорости гранулированного потока V_0 и расхода Q на выходе из емкости. Для этого воспользуемся структурно-механической моделью истечения сыпучей среды, изложенной в [17]. Здесь остановимся на ключевых моментах данной модели. Вкратце, траектории зерен внутри бункера разделены на разные зоны. В данном случае цель состоит в том, чтобы сосредоточить внимание на скорости потока зерна на выходе из бункера. Поэтому здесь рассматривается описание зоны выходного потока D , ограниченной параболой (рис. 8). В этой зоне гранулированные частицы сталкиваются с другими частицами непрерывно в хаотическом движении [16–18]. Следовательно, сыпучая среда в этой зоне находится в свободнодисперсном состоянии и, согласно [7, 18] ее движение описывается уравнениями непрерывной среды. С помощью круга Мора можно показать, что для несвязного сыпучего тела граница между динамическим сводом C и зоной обрушения D

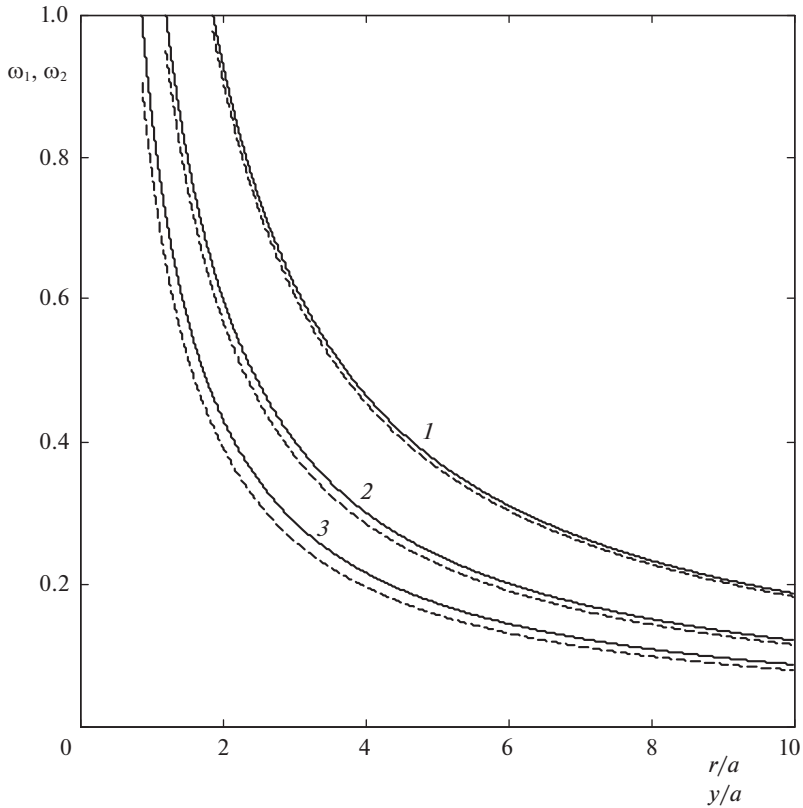


Рис. 7. Распределения безразмерной скорости в радиальном направлении при разных значениях угла раствора: 1 – $\alpha = \pi/6$, 2 – $\alpha = \pi/4$, 3 – $\alpha = \pi/3$. Сплошные кривые – средняя скорость в рамках модели НС $\omega_1 = -v_a/V$ (зависит от r/a), штриховые кривые – скорость в рамках подхода ДС $\omega_2 = -u/V$ (зависит от y/a).

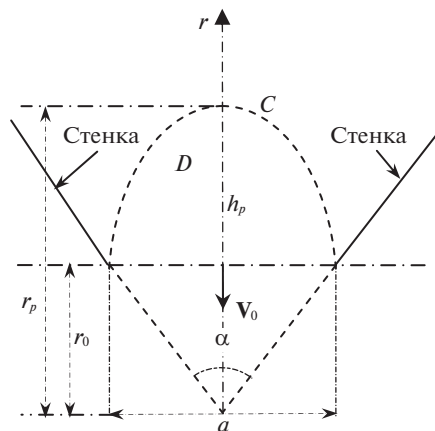


Рис. 8. Диаграмма истечения сыпучего тела в зоне выхода (согласно [17]).

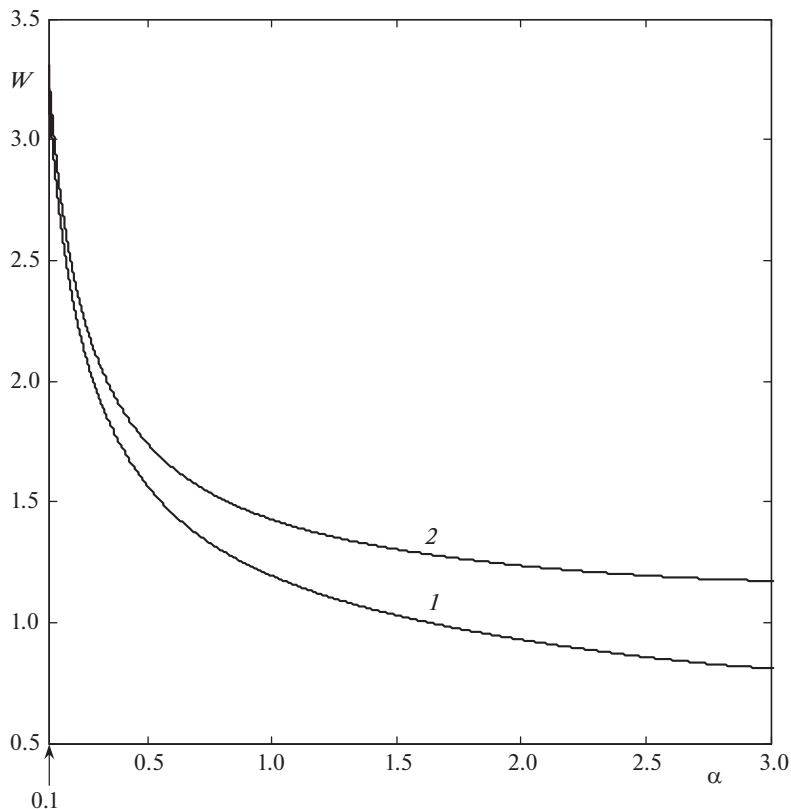


Рис. 9. Зависимость безразмерной скорости на выходе W от угла раствора α (рад) при разных значениях угла внутреннего трения сыпучей среды φ : 1 – $\varphi = 15^\circ$ (песок и др.), 2 – $\varphi = 50^\circ$ (цемент и др.).

представляет собой параболу [19] (рис. 8), высота которой h_p зависит от параметров внутреннего трения среды и определяется по формуле

$$h_p = \frac{a}{4} \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{a}{4} \left(f + \sqrt{1 + f^2} \right); \quad f = \operatorname{tg} \varphi$$

Здесь f , φ – коэффициент и угол внутреннего трения в сыпучей среде.

Используя на линии симметрии уравнение Бернулли в [17] получены следующие формулы для скорости истечения на линии симметрии и расхода среды на выходе

$$V_0 = \left[\frac{2g(r_p - r_0)}{1 + \zeta - (r_0/r_p)^2} \right]^{1/2} = \left(\frac{2gh_p}{1 + \zeta - B} \right)^{1/2} = \left(\frac{agK}{1 + \zeta - B} \right)^{1/2} \quad (6.1)$$

$$Q = \frac{2}{3} a^{3/2} \left(\frac{gK}{1 + \zeta} \right)^{1/2} \frac{1 - 8\beta^{3/2}}{1 - 4\beta} \quad (6.2)$$

$$\beta = \frac{\lambda \lambda - 1}{2\lambda + 1}, \quad \lambda = \frac{\sqrt{1 + f^2}}{f} \geq 1, \quad B = \left(1 + K \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^{-2} \leq 1, \quad K = \frac{1}{2} \left(f + \sqrt{1 + f^2} \right),$$

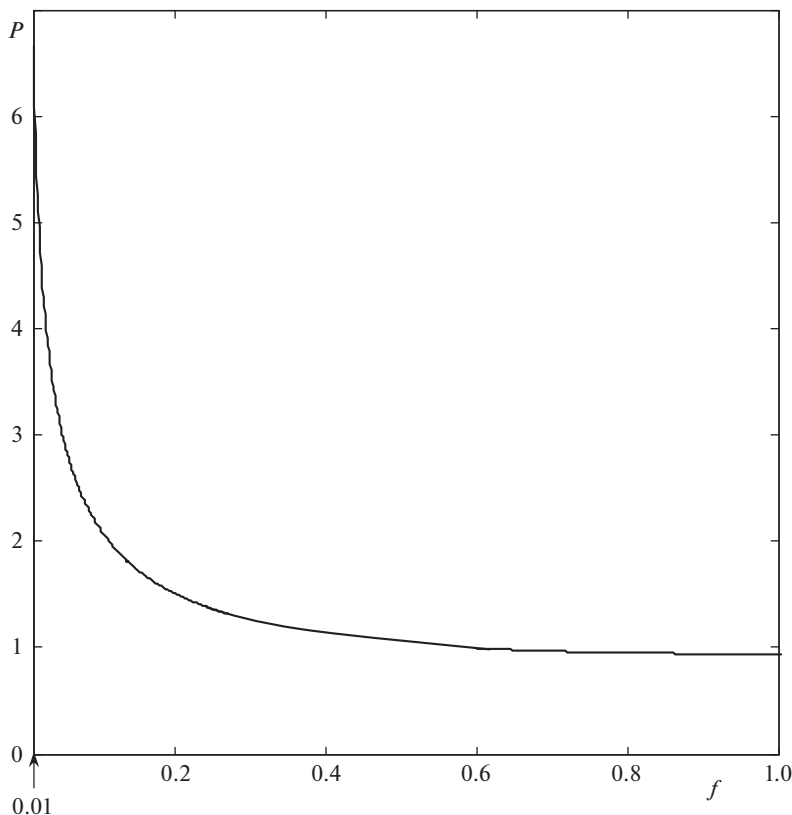


Рис. 10. Зависимость безразмерного расхода P от коэффициента внутреннего трения сыпучего тела f .

где нижние индексы p и 0 отвечают точкам на вершине параболы и на выходе соответственно; V_0 — скорость на линии симметрии на выходе; ζ — коэффициент местных потерь Дарси–Вейсбаха, характеризующий потери механической энергии потока сыпучей среды при столкновениях частиц между собой [20, 21]. Анализ показал, что для достаточно малых по сравнению с размерами выпускного отверстия частиц коэффициентом местных потерь механической энергии в формулах (6.1), (6.2) можно пренебречь ($\zeta \ll 1$). Параметры V_0 и Q удобно записать в безразмерных формах

$$W = V_0/(ag)^{1/2}, \quad P = Q/(a^{3/2}g^{1/2})$$

На рис. 9 показана зависимость безразмерной скорости истечения среды на линии симметрии W от угла раствора α при разных углах внутреннего трения сыпучего тела φ , соответствующих некоторым характерным сыпучим средам (песок, цемент и др.). С увеличением α безразмерная скорость W сначала резко падает, затем меняется достаточно плавно. Причем различие скоростей истечения разных сред с ростом α постепенно увеличивается. Зависимость безразмерного расхода от коэффициента внутреннего трения f представлена на рис. 10. Видно, что безразмерный расход P с ростом f быстро уменьшается.

Таким образом, зная расход сыпучей среды из емкости нетрудно рассчитать распределение скорости внутри объема сыпучего тела (в частности, в зависимости от коэф-

фициента скольжения, коэффициента внутреннего трения сыпучей среды и т.п.) по формулам из предыдущих разделов.

Заключение. В рамках модели непрерывной среды изучено распределение скорости сыпучего тела при истечении из емкости с учетом эффекта сцепления со стенками. Проанализировано влияние коэффициента скольжения, характеризующего степень сцепления со стенкой, на течение гранулированной среды. Проведено сравнение скорости движения сыпучей среды при разных подходах, а именно, в рамках непрерывной среды и дискретных слоев, которое показало, что оба эти подхода дают примерно одинаковые результаты. Данное обстоятельство позволяет утверждать, что для описания характеристик течения сыпучей среды в емкости наряду с моделью, основанной на подходе непрерывной среды, вполне можно использовать в пределах допустимой погрешности простую геометрическую модель, базирующуюся на представлении сыпучей среды как дискретных слоев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Макаров Ю.И.* Аппараты для смешения сыпучих материалов. М.: Машиностроение, 1973. 216 с.
2. *Росляк А.Т., Бирюков Ю.А., Пачин В.Н.* Пневматические методы и аппараты порошковой технологии. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1990. 272 с.
3. *Першина С.В., Катыльмов А.В., Однолько В.Г., Першин В.Ф.* Весовое дозирование зернистых материалов. М.: Машиностроение, 2009. 164 с.
4. *Шваб А.В., Марценко А.А., Марценко М.С.* Моделирование гидродинамики высококонцентрированной гранулированной среды в смесительном бункере // Вестн. Томского гос. ун-та. Сер. Математика, механика. 2013. № 4. С. 126–132.
5. *Шваб А.В., Марценко М.С., Рыжих Ю.Н.* Моделирование гидродинамики и процесса усреднения высококонцентрированной гранулированной среды в аппаратах порошковой технологии // Инж.-физ. ж. 2011. Т. 84. № 4. С. 676–682.
6. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2003. 704 с.
7. Механика гранулированных сред. Теория быстрых движений / Под ред. *Ишлинского А.Ю.* М.: Мир, 1985. 280 с.
8. *Клишин С.В., Лавриков С.В., Ревуженко А.Ф.* Численное моделирование выпуска раздробленного материала методами дискретных элементов и клеточных автоматов // Геодинамика и напряженное состояние недр Земли. 2013. С. 208–215.
9. *Krugger-Emden H., Simsek E., Rickelt S. et al.* Review and extension of normal force models of the Discrete Element Method // Powder Technol. 2007. V. 171. № 3. P. 157–173.
10. *Losert W., Bocquet L., Lubensky T.C., Gollub J.P.* Particle dynamics in sheared granular matter // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. № 7. P. 1428–1431.
11. *Ojha R.P., Lemieux P.-A., Dixon P.K. et al.* Statistical mechanics of a gas-fluidized particle // Nature. 2004. V. 427. P. 521–523.
12. *Antony S.J., Arowosola B., Richter L., Amanbayev T., Barakat T.* Flow behavior of grains through the dosing station of spacecraft under low-gravity environments // J. Aerospace Engng. 2017. V. 30. № 6. 04017078.
13. *Катыльмов А.В., Лукьянов П.И.* Теоретическое определение расхода сыпучего материала при свободном истечении из отверстия // Теор. основы химич. технол. 1976. Т. 10. № 1. С. 162–164.
14. *Генералов М.Б.* Истечение сыпучих материалов из аппаратов // Теор. основы химич. технол. 1985. Т. 19. № 1. С. 53–58.
15. *Лукьянов П.И.* Аппараты с движущимся зернистым слоем. М.: Машиностроение, 1974. 184 с.
16. *Богомяжких В.А., Несмиян А.Ю.* Функционирование бункеров максимального расхода в условиях сводообразующего истечения зерновых материалов. Зерноград: Азово-Черном. инж. ин-т ФГБОУ ВПО ДГАУ, 2015. 179 с.

17. Кирия Р.В. Описание процесса истечения сыпучего груза из бункера с помощью структурно-механических моделей // Системные технол. 2009. № 3 (62). С. 3–19.
18. Кирия Р.В. Кинетический подход к выводу уравнений движения сыпучих сред // Вестн. Днепропетр. гос. унив. Сер. Механика. 1999. № 2. С. 143–150.
19. Зенков Р.Л. Механика насыпных грузов. М.: Машиностроение, 1964. 251 с.
20. Штеренлихт Д.В. Гидравлика. М.: Энергоатомиздат, 1984. 639 с.
21. Кирия Р.В. О коэффициенте внутренних потерь при движении сыпучей среды по элементам перегрузочных узлов ленточных конвейеров // Геотехн. мех. 2003. № 41. С. 159–167.

Modeling of Particulate Solids Expiration from a Container Taking into Account the Effect of Adhesion to the Wall

T. R. Amanbaev^{a,b,#} and S. J. Antony^{c,##}

^a Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan

^b Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

^c School of Chemical and Process Engineering, University of Leeds, Leeds, LS2 9JT, UK

[#]e-mail: tulegen_amanbaev@mail.ru

^{##}e-mail: s.j.antony@leeds.ac.uk

Within the framework of the approach based on the equation of a viscous fluid as a continuous medium (CM), the process of outflow of a granular medium under the action of gravity from a volume between two plates inclined to each other at a certain angle has been studied. On the boundary with a solid wall, the condition of partial slip (or adhesion) is accepted, which is described by a certain coefficient that varies from 0 to 1. In a two-dimensional setting, the distribution of the velocity of the medium inside the container is found. The influence of a change in the slip coefficient on the nature of the flow of a granular medium is analyzed. The CM approach is compared with the approach based on the description of a granular medium as discrete layers (DL). Formulas for the speed and flow rate of a granular body at the outlet of the tank are given. The dependences of these parameters on the coefficient of internal friction and the opening angle between the plates are analyzed.

Keywords: granular medium, container, gravity, outflow, slip coefficient, flow rate

REFERENCES

1. Makarov Y.I. Apparatus for Mixing Bulk Materials. Moscow: Mashinostroenie, 1973. 216 p. (in Russian)
2. Roslyak A.T., Biriukov Y.A., Pachin V.N. Pneumatic Methods and Apparatus for Powder Technology. Tomsk: TSU Publ., 1990. 272 p. (in Russian)
3. Pershina S.V., Katalymov A.V., Odnol'ko V.G., Pershin V.F. Weight Batching of Granular Materials. Moscow: Mashinostroenie, 2009. 164 p. (in Russian)
4. Shvab A.V., Martsenko A.A., Martsenko M.S. Simulation of the hydrodynamics of a highly concentrated granular medium in a mixing bin // Tomsk Univ. Bull. Ser. Math., Mech., 2013, no. 4, pp. 126–132. (in Russian)
5. Shvab A.V., Martsenko M.S., Ryzhikh Y.N. Modeling the hydrodynamics and the process of averaging a highly concentrated granulated medium in powder technology apparatuses // J. Eng. Phys. Thermophys., 2011, vol. 84, art. no. 730. <https://doi.org/10.1007/s10891-011-0528-2>
6. Ishlinskii A. Yu., Ivlev D.D. The Mathematical Theory of Plasticity Moscow: Fizmatlit, 2003. 704 p. (in Russian)
7. The Mechanics of Granular Media. The Theory of Rapid Movements / Ed. by Ishlinskii A. Yu. Moscow: Mir, 1985. 280 p. (in Russian)
8. Klishin S.V., Lavrikov S.B., Revuzhenko A.F. Numerical modeling of the release of crushed material by the methods of discrete elements and cellular automata // Geodynamics and stress state of the Earth's interior, 2013, pp. 208–215. (in Russian)

9. *Krugger-Emden H., Simsek E., Rickelt S. et al.* Review and extension of normal force models of the Discrete Element Method // *Powder Technol.*, 2007, vol. 171, no. 3, pp. 157–173.
10. *Losert W., Bocquet L., Lubensky T.C., Gollub J.P.* Particle dynamics in sheared granular matter // *Phys. Rev. Lett.*, 2000, vol. 85, no. 7, pp. 1428–1431.
11. *Ojha R.P., Lemieux P.-A., Dixon P.K. et al.* Statistical mechanics of a gas-fluidized particle // *Nature*, 2004, vol. 427, pp. 521–523.
12. *Antony S.J., Arowosola B., Richter L., Amanbayev T., Barakat T.* Flow behavior of grains through the dosing station of spacecraft under low-gravity environments // *J. Aerospace Engng.*, 2017, vol. 30, no. 6, 04017078.
13. *Katalymov A.V., Luk'ianov P.I.* Theoretical determination of the flow rate of bulk material with free flow from the hole // *Theor. Found. Chem. Engng.*, 1976, vol. 10, no. 1, pp. 162–164.
14. *Generalov M.B.* The outflow of bulk materials from the apparatus // *Theor. Found. Chem. Engng.*, 1985, vol. 19, no. 1, pp. 53–58.
15. *Luk'ianov P.I.* *Moving Granular Bed Machines.* Moscow: Mashinostroenie, 1974. 184 p. (in Russian)
16. *Bogomyagkih V.A., Nesmian A.Yu.* *Functioning of Bunkers of Maximum Flow in Conditions of a Vault-Forming Outflow of Grain Materials.* Zernograd: Azov-Chernomorsk Engng. Inst. Publ., 2015. 179 p. (in Russian)
17. *Kiryay R.V.* Description of the process of expiration of bulk cargo from the bunker using structural and mechanical models // *Syst. Technol.*, 2009, no. 3(62), pp. 3–19. (in Russian)
18. *Kiryay R.V.* Kinetic approach to the derivation of equations of motion of bulk media. // *Dnepropetrovsk Univ. Bull. Ser. Mech.*, 1999, no. 2, pp. 143–150. (in Russian)
19. *Zenkov R.L.* *Bulk Cargo Mechanics.* Moscow: Mashinostroenie, 1964. 251 p. (in Russian)
20. *Shterenliht D.V.* *Hydraulics.* Moscow: Energoatomizdat, 1984. 639 p. (in Russian)
21. *Kiryay R.V.* On the coefficient of internal losses during the movement of a granular medium along the elements of the transfer units of the belt conveyor. // *Geotechn. Mech.*, 2003, no. 41, pp. 159–167. (in Russian)

УДК 532.533.2

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО ГАЗА В КЛИНЕ

© 2022 г. М. А. Брутян^{1,2,*}, У. Г. Ибрагимов^{2,**}

¹ Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия

² Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

*e-mail: murad.brutyanyan@tsagi.ru

**e-mail: umar.ibragimov@phystech.edu

Поступила в редакцию 29.03.2022 г.

После доработки 01.07.2022 г.

Принята к публикации 05.07.2022 г.

Рассматривается течение вязкого сжимаемого газа, истекающего из вершины плоского клина. Показано, что несимметричное автомодельное течение возможно и реализуется при задании специальных граничных условий на температуру стенок канала. Для случая малых дозвуковых скоростей течений газа при постоянной, но различной температуре стенок клина, найдено асимптотическое решение. В общем случае полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений решается численно.

Ключевые слова: течения вязкого газа, уравнения Навье–Стокса, точные решения типа Джеффри–Гамеля

DOI: 10.31857/S003282352205006X

1. Введение. Известное точное решение Джеффри–Гамеля уравнений Навье–Стокса для случая течения вязкой несжимаемой жидкости описывает автомодельное течение в плоском клиновидном диффузоре от источника/стока, расположенного в вершине клина [1, 2]. В случае конфузорного течения (сток), решение существует при любых числах Рейнольдса Re , произвольном угле раствора клина $2\alpha < \pi$ и является симметричным относительно плоскости $\theta = 0$, рис. 1. В случае диффузорного течения профиль скорости в поперечном направлении, при достижении некоторого критического числа $Re = Re_{max}$, оказывается немонотонным. При увеличении числа $Re > Re_{max}$ возникают области возвратного течения, и профиль скорости может стать несимметричным. При дальнейшем увеличении Re возникает симметричное решение с одним минимумом и двумя максимумами скорости. Во всех этих решениях имеются чередующиеся области вытекающей и втекающей жидкости. При $Re \rightarrow \infty$ наблюдается увеличение числа локальных минимумов и максимумов, поэтому определенного предельного решения не существует, что, по всей видимости, связано с тем, что при увеличении Re стационарное диффузорное течение описанного типа вскоре после достижения некоторого критического значения делается неустойчивым и в действительности возникает нестационарное турбулентное движение [3].

Для несжимаемых течений в работе [4] дано описание широкого класса известных и новых точных решений уравнений Навье–Стокса, в частности известного решения Джеффри–Гамеля для течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском диффузоре.

Вопросам возможности построения автомодельных течений типа Джеффри–Гамеля для течения вязкого сжимаемого газа посвящены работы [5–13]. В [5] рассмотрена

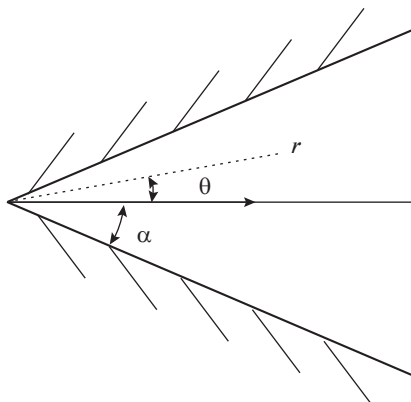


Рис. 1. Схема течения в плоском клине.

задача о течении вязкого газа в коническом диффузоре с граничными условиями проскальзывания на стенках. В [6, 7] также рассмотрена задача о течении газа в коническом диффузоре с наличием внутри потока внутреннего объемного источника/стока энергии. Другие автомодельные осесимметричные решения уравнений Навье–Стокса для течений вязкого газа получены в работах [8, 9].

В работах [10, 11] рассмотрен класс автомодельных решений для течения газа в плоском клине. При этом в [10] рассмотрено течение газа твердых сфер и максвелловских молекул, для которых коэффициент динамической вязкости $\eta \sim T^{0.5}$ и $\eta \sim T$ соответственно. В работе [11] найдено аналитическое решение для произвольной степенной зависимости коэффициентов переноса от температуры $\eta \sim T^k$ (закон Фроста). В работе [12] рассмотрено аналогичное автомодельное течение вязкого сжимаемого газа от струи (источника импульса), истекающей в область между двумя расходящимися стенками. Точное решение уравнений Навье–Стокса для течений Куэтта и Пуазейля горячего газа с коэффициентом вязкости, зависящим от температуры по закону Сазерленда, получено в работах [13, 14].

В недавней работе [15] установлено, что автомодельное решение существует и для течения вязкого газа, у которого коэффициенты переноса зависят от температуры произвольным образом, $\eta = \eta(T)$. Во всех выше перечисленных работах, посвященных автомодельным течениям вязкого газа, рассмотрены исключительно симметричные режимы течения.

В настоящей работе аналитически и численно изучается возможность построения автомодельных несимметричных решений типа Джеффри–Гамеля для течений вязкого сжимаемого теплопроводного газа в плоском диффузоре.

2. Автомодельные течения типа Джеффри–Гамеля. Рассмотрим течение вязкого газа, истекающего из вершины плоского клина при различной температуре стенок T_w^+ и T_w^- , рис. 1.

Уравнения Навье–Стокса в полярных координатах (r, θ) (рис. 1), записанные в безразмерных переменных, имеют вид [16]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}_0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \right] \quad (2.2)$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{\text{Re}_0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{r\theta}}{r} \right] \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho u}{(\gamma - 1) M_0^2} \frac{\partial T}{\partial r} &= u \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\nabla \cdot (\kappa \nabla T)}{(\gamma - 1) M_0^2 \text{Pr Re}_0} + \\ &+ \frac{1}{\text{Re}_0} \left[2\eta (\varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{\theta\theta}^2) + 4\eta \varepsilon_{r\theta}^2 - \frac{2}{3} \eta (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

Течение предполагается радиальным, $\mathbf{V} = (u, 0)$. Компоненты тензора вязких напряжений σ и тензора скоростей деформации ε имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \eta \varepsilon_{rr} - \frac{2}{3} \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru), & \sigma_{\theta\theta} &= \eta \varepsilon_{\theta\theta} - \frac{2}{3} \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru), & \sigma_{r\theta} &= \eta \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{rr} &= 2 \frac{\partial u}{\partial r}, & \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{2u}{r} \end{aligned}$$

В уравнениях (2.1)–(2.4) безразмерные переменные связаны с размерными газодинамическими параметрами, помеченными звездочкой, следующим образом:

$$\rho = \frac{\rho^*}{\rho_0}, \quad p = \frac{p^*}{\rho_0 u_0^2}, \quad T = \frac{T^*}{T_0}, \quad u = \frac{u^*}{u_0}, \quad \eta = \frac{\eta^*}{\eta_0}, \quad \kappa = \frac{\kappa^*}{\kappa_0},$$

где ρ_0, u_0, T_0, η_0 и κ_0 – соответственно плотность, скорость, температура, коэффициент вязкости и теплопроводности в некоторой точке $(r_0, 0)$ на оси клина. Газ считается совершенным, так что $\gamma M_0^2 p = \rho T$. Число Маха M_0 , число Рейнольдса Re_0 и число Прандтля Pr вычисляются по правилам:

$$\text{Re}_0 = \frac{\rho_0 u_0 r_0}{\eta_0}, \quad M_0 = \frac{u_0}{\sqrt{\gamma R T_0}}, \quad \text{Pr} = \frac{c_p \eta_0}{\kappa_0}$$

В уравнении энергии (2.4) учтены члены, отвечающие за диссипацию энергии вследствие влияния вязкости. Как будет показано ниже, при умеренных числах M_0 число Рейнольдса в автомодельном решении оказывается небольшим, т.е. вязкость и диссипация энергии оказывает влияние на все поле течения внутри клина.

Автомодельное решение уравнений (2.1)–(2.4) ищем в виде:

$$u = \frac{u(\theta)}{r^m}, \quad \rho = r^{m-1} \rho(\theta), \quad p = \frac{p(\theta)}{r^{m+1}}, \quad T = \frac{T(\theta)}{r^{2m}}, \quad \eta = \left(\frac{T(\theta)}{r^{2m}} \right)^k, \quad \kappa = \left(\frac{T(\theta)}{r^{2m}} \right)^k \quad (2.5)$$

Показатель m назовем параметром автомодельности. Как было показано ранее в работах [9–11], для существования плоских автомодельных решений необходимо выполнение следующего условия:

$$mk = 0$$

Вопрос существования автомодельных решений при $k = 0$ и различных значениях m в зависимости от определяющих параметров задачи для случая симметричных плоских течений исследован в работе [9]. Течения газа при $m \neq 0$ оказываются более сложными для исследования. Решение в этом случае сводится к анализу системы нелинейных дифференциальных уравнений с заранее неизвестным параметром автомодельности m , который должен определяться в процессе численного решения задачи.

В настоящей работе рассматривается иной случай, а именно $k \neq 0, m = 0$. В [15] установлено, что в этом случае автомодельное решение может быть построено при

произвольной зависимости коэффициентов переноса от температуры. Ниже при изучении несимметричных решений для определенности предполагается степенная зависимость, $\eta \sim T^k$.

3. Автомоделное течение газа в клине при различной температуре стенок. Для получения несимметричных решений температуру стенок клина будем считать различной, но постоянной. Подставляя (2.5) в (2.1)–(2.4) легко убедиться, что уравнение неразрывности (2.1) выполняется автоматически, а уравнения (2.2)–(2.4) можно переписать в виде следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\text{Re}_0 p - \frac{4}{3} u \eta + \frac{d}{d\theta} \left(\eta \frac{du}{d\theta} \right) = 0 \quad (3.1)$$

$$\text{Re}_0 \frac{dp}{d\theta} = \eta \frac{du}{d\theta} + \frac{4}{3} \frac{d}{d\theta} (\eta u) \quad (3.2)$$

$$\text{Re}_0 u p = \frac{1}{(\gamma - 1) \text{M}_0^2 \text{Pr}} \frac{d}{d\theta} \left(\eta \frac{dT}{d\theta} \right) + \eta \left[\frac{4}{3} u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right] \quad (3.3)$$

с граничными условиями прилипания скорости и заданной температурой на стенках клина:

$$u|_{\theta=\pm\alpha} = 0, \quad T|_{\theta=\pm\alpha} = T_w^\pm$$

Из условия нормировки для параметров течения на оси клина при $\theta = 0$ имеем:

$$u(0) = 1, \quad T(0) = 1, \quad p(0) = \frac{1}{\gamma \text{M}_0^2} \quad (3.4)$$

Продифференцируем уравнение (3.1) один раз по θ и вычтем из (3.2). В результате получим следующее уравнение:

$$\eta \frac{du}{d\theta} + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\eta \frac{du}{d\theta} \right) = 0,$$

решение которого имеет вид:

$$\eta \frac{du}{d\theta} = a \sin \theta + b \cos \theta, \quad (3.5)$$

где a и b некоторые константы. Подставляя в (3.1) вместо выражения $\eta du/d\theta$ правую часть уравнения (3.5) получаем:

$$\text{Re}_0 p = \frac{4}{3} \eta u - a \cos \theta + b \sin \theta \quad (3.6)$$

Используя условия нормировки (3.4) находим связь между константой a и числами M_0 и Re_0 :

$$a = \frac{4}{3} - \frac{\text{Re}_0}{\gamma \text{M}_0^2}$$

Подставим (3.5) и (3.6) в уравнение энергии (3.3) и проинтегрируем один раз по θ . В результате получим следующее выражение:

$$\frac{1}{\text{M}_0^2 \text{Pr}(\gamma - 1)} \eta \frac{dT}{d\theta} + au \sin \theta + bu \cos \theta = Q,$$

которое с учетом (3.5) перепишем в виде:

$$\frac{1}{M_0^2 \text{Pr}(\gamma - 1)} \eta \frac{dT}{d\theta} + \eta u \frac{du}{d\theta} = Q, \quad (3.7)$$

где Q – некоторая константа.

Используя полученное выражение (3.7) можно определить удельный тепловой поток через стенки канала в азимутальном направлении:

$$q_\theta^* = - \left. \frac{\kappa^*}{r^*} \frac{dT^*}{d\theta} \right|_{\theta=\pm\alpha} \quad (3.8)$$

Введем безразмерный тепловой поток $q_\theta = q_\theta^* r_0 / \kappa_0 T_0$ и перепишем (3.8) в следующей форме:

$$q_\theta = - \left. \frac{\kappa}{r} \frac{dT}{d\theta} \right|_{\theta=\pm\alpha}$$

Тогда используя (3.7) и учитывая, что в безразмерных переменных $\eta = \kappa$, получаем:

$$q_\theta = - \frac{Q}{r} M_0^2 \text{Pr}(\gamma - 1), \quad (3.9)$$

где \mathbf{e}_θ – единичный вектор в азимутальном направлении. Из полученного соотношения (3.9) видно, что константа Q пропорциональна величине теплового потока через стенки клина. Из (3.9) также следует, что абсолютная величина теплового потока через нижнюю и верхнюю стенки клина одинакова. При этом если $Q > 0$, то к верхней стенке подводится тепло, а от нижней стенки тепло отводится.

Равенство по модулю величин тепловых потоков через стенки клина объясняется тем, что в автотомодельном течении поток энергии в радиальном направлении отсутствует, так как при $m = 0$ температура, как это следует из (2.5), не зависит от r , $T = T(\theta)$. Таким образом, в полученном решении перенос тепловой энергии наблюдается только в азимутальном направлении. Заметим, что поскольку в азимутальном направлении отсутствует перенос иного вида энергии, то равенство тепловых потоков обусловлено законом сохранения энергии.

4. Аналитическое решение для случая малых дозвуковых скоростей течения газа в клине. Введем безразмерный параметр $\chi = M_0^2 \text{Pr}(\gamma - 1)$ и рассмотрим предельный случай $\chi \ll 1$, соответствующий малым дозвуковым скоростям течения газа в клине. Очевидно, что решение задачи зависит от величины теплового потока Q . Для получения наглядного результата по влиянию разницы температур стенок клина на симметрию решения, рассмотрим случай сильного теплового потока, $Q \sim 1/\chi \gg 1$.

Решение уравнений (3.5), (3.7) будем искать в виде степенных рядов по малому параметру χ

$$u = u^0 + \chi u^1 + \dots, \quad T = T^0 + \chi T^1 + \dots$$

Далее будем предполагать, что производные $du/d\theta$ и $dT/d\theta$ ограничены всюду в области течения. Тогда в нулевом приближении получаем следующую систему уравнений:

$$\eta^0 \frac{du^0}{d\theta} = a \sin \theta + b \cos \theta \quad (4.1)$$

$$\eta^0 \frac{dT^0}{d\theta} = X, \quad (4.2)$$

где $X = Q\chi \sim O(1)$. При заданной зависимости $\eta^0 = \eta^0(T^0)$ решение уравнения (4.2) с учетом условий нормировки (3.4) принимает вид:

$$N(T^0) = \theta X, \quad N(T^0) = \int_1^{T^0} \eta^0(T) dT \quad (4.3)$$

Откуда видно, что температура T_w^+ , T_w^- на стенках клина, полуугол раствора α и тепловой поток X в нулевом приближении связаны соотношениями:

$$N(T_w^+) = \alpha X, \quad N(T_w^-) = -\alpha X$$

Из уравнений (4.1) и (4.2) с учетом соотношений (4.3) получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{du^0}{dT^0} = \frac{a}{X} \sin\left(\frac{N(T^0)}{X}\right) + \frac{b}{X} \cos\left(\frac{N(T^0)}{X}\right),$$

решение которого с учетом условий нормировки (3.4) принимает форму:

$$u^0(T^0) = \frac{a}{X} \int_1^{T^0} \sin\left(\frac{N(T)}{X}\right) dT + \frac{b}{X} \int_1^{T^0} \cos\left(\frac{N(T)}{X}\right) dT + 1$$

Значения констант a и b определяются из граничных условий прилипания скорости на стенках клина. Используя значения температур на стенках T_w^+ , T_w^- данные условия можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{a}{X} \int_1^{T_w^+} \sin\left(\frac{N(T)}{X}\right) dT + \frac{b}{X} \int_1^{T_w^+} \cos\left(\frac{N(T)}{X}\right) dT &= -1 \\ \frac{a}{X} \int_{T_w^-}^1 \sin\left(\frac{N(T)}{X}\right) dT + \frac{b}{X} \int_{T_w^-}^1 \cos\left(\frac{N(T)}{X}\right) dT &= 1 \end{aligned}$$

Рассмотрим случай степенной зависимости $\eta^0 = (T^0)^k$. Тогда интеграл (4.3) принимает вид:

$$T^0 = (1 + (k+1)X\theta)^{\frac{1}{k+1}} \quad (4.4)$$

Используя данное выражение можно найти решение уравнения (4.1) в квадратурах:

$$u^0(\theta) = a \int_0^\theta \frac{\sin \Theta}{(1 + (k+1)X\Theta)^{\frac{k}{k+1}}} d\Theta + b \int_0^\theta \frac{\cos \Theta}{(1 + (k+1)X\Theta)^{\frac{k}{k+1}}} d\Theta + 1 \quad (4.5)$$

Здесь учтены условия нормировки (4.3). Константы a и b определяются из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} a \int_0^\alpha \frac{\sin \Theta}{(1 + (k+1)X\Theta)^{\frac{k}{k+1}}} d\Theta + b \int_0^\alpha \frac{\cos \Theta}{(1 + (k+1)X\Theta)^{\frac{k}{k+1}}} d\Theta &= -1 \\ a \int_{-\alpha}^0 \frac{\sin \Theta}{(1 + (k+1)X\Theta)^{\frac{k}{k+1}}} d\Theta + b \int_{-\alpha}^0 \frac{\cos \Theta}{(1 + (k+1)X\Theta)^{\frac{k}{k+1}}} d\Theta &= 1 \end{aligned}$$

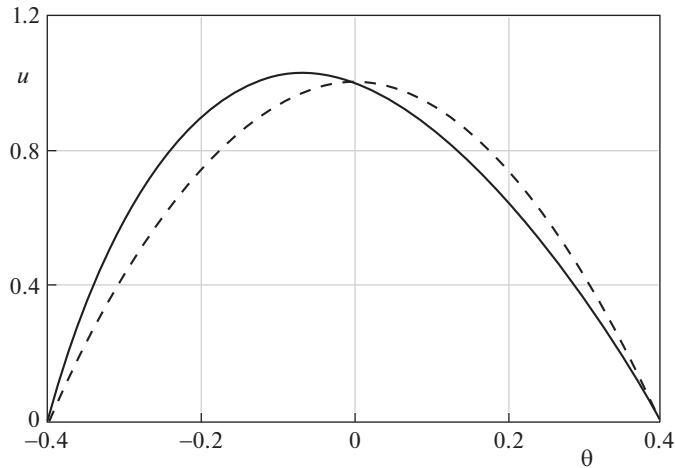


Рис. 2. Сравнение автомодельных решений; сплошная линия – несимметричный профиль скорости, штриховая линия – симметричный профиль скорости.

В частном случае модели газа сверхтвёрдых частиц ($k = 0$) решения (4.4), (4.5) принимают простую форму:

$$T^0 = 1 + X\theta, \quad u^0 = \frac{\cos \alpha - \cos \theta}{\cos \alpha - 1}, \tag{4.6}$$

откуда следует, что профиль скорости оказывается симметричным. Полученное выражение совпадает с решением, найденным ранее в работах [11, 15], где в частности рассмотрен случай симметричного течения газа с постоянными коэффициентами переноса, $k = 0$. Модель газа сверхтвёрдых частиц, встречалась в работах по кинетической теории (см. [17]). Эта модель основана на предположении о том, что дифференциальное сечение рассеяния растёт прямо пропорционально относительной скорости соударяющихся частиц. Несмотря на указанное нефизическое поведение сечения рассеяния, данная модель оказалась чрезвычайно полезной при построении точных решений уравнения Больцмана [18–20].

Сравнение симметричного (4.6) и несимметричного профиля скорости в нулевом приближении для течения одноатомного газа максвелловских молекул ($k = 1$) [21] в клине с углом полураствора $\alpha = 0.4$ рад при $X = 1$ показано на рис. 2.

5. Численное исследование несимметричных решений при различных числах Маха течения газа на оси клина. При произвольном числе Маха система уравнений (3.5), (3.7) не поддаётся аналитическому рассмотрению, поэтому для получения решений требуется численное исследование задачи. Для удобства и простоты процедуры численного расчёта вместо решения краевой задачи с заданными параметрами (угол α , температура стенок T_w^+ , T_w^- и числа M_0 , Re_0), решается задача Коши с начальными условиями на оси клина для скорости $u(0) = 1$ и температуры $T(0) = 1$ в областях $\theta > 0$ и $\theta < 0$; при этом значения чисел M_0 , Re_0 и Q считаются заданными. В ходе численного интегрирования угол раствора клина 2α находится из условия равенства нулю скорости на стенках канала: $u(\theta_w^+) = u(\theta_w^-) = 0$, $2\alpha = \theta_w^+ - \theta_w^-$, где θ_w^+ , θ_w^- – значение азимутальной координаты на верхней и нижней стенках соответственно. Температура стенок опре-

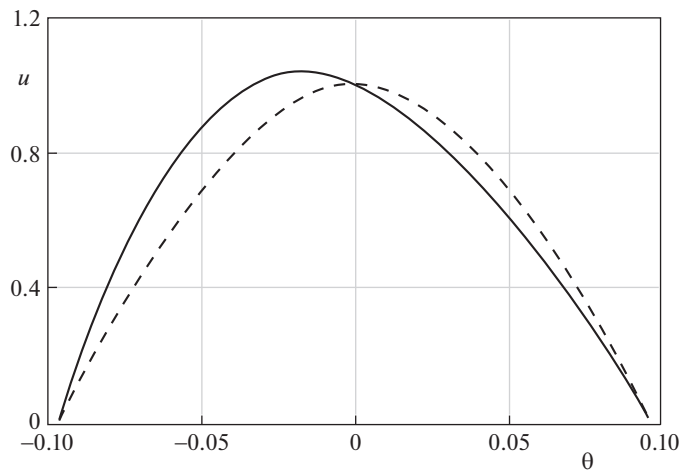


Рис. 3. Профили скорости; сплошная линия – симметричный профиль, штриховая линия – несимметричный профиль.

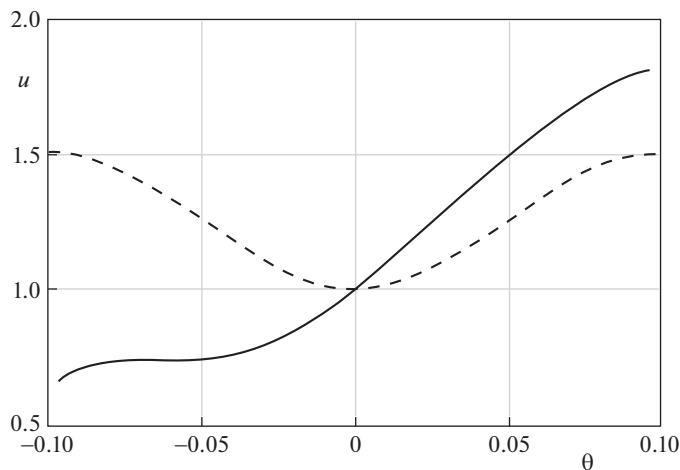


Рис. 4. Профили температуры; сплошная линия – симметричный профиль, штриховая линия – несимметричный профиль.

деляется в результате численного интегрирования при заданном значении теплового потока Q , $T_w^\pm = T(\theta_w^\pm)$.

Ниже приведены результаты численных расчетов для течения одноатомного гелия $\gamma = 5/3$, $Pr = 2/3$ при $k = 1$. Сравнение профилей скорости и температуры при $M_0 = 1.5$, $Re_0 = 1000$ для $Q = 8$ в несимметричном случае и $Q = 0$ в симметричном случае, представлено на рис. 3 и рис. 4. Отметим, что заметное отличие от симметрии течения проявляется при достаточно большом перепаде температур на стенках канала.

На основании проведенных систематических расчетов можно сделать вывод, что автомодельное несимметричное течение существует лишь в ограниченном диапазоне

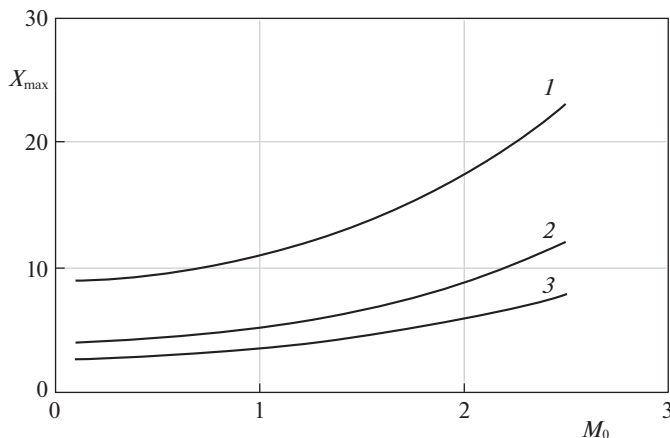


Рис. 5. Зависимость X_{\max} от M_0 ; 1 – $\alpha \approx 0.1$ рад, 2 – $\alpha \approx 0.2$ рад, 3 – $\alpha \approx 0.3$ рад.

значений Q . Оказывается, что при некотором предельном значении Q_{\max} температура на одной из стенок клина обращается в ноль. Зависимость величины $X_{\max} = Q_{\max} M_0^2 \text{Pr}(\gamma - 1)$, которая пропорциональна безразмерному тепловому потоку через стенки клина, от числа Маха на оси M_0 показана на рис. 5 при различных углах раствора клина $2\alpha = 0.2$ рад, $2\alpha = 0.4$ рад и $2\alpha = 0.6$ рад.

Как видно из данного рисунка, при увеличении M_0 максимально возможный тепловой поток увеличивается. Это объясняется тем, что по мере увеличения M_0 температура на одной из стенок канала увеличивается, а следовательно растет перепад температур. При увеличении угла раствора клина перепад температур уменьшается.

Заключение. В рамках уравнений Навье–Стокса установлена возможность построения несимметричных точных решений типа Джеффри–Гамеля для течения вязкого сжимаемого газа в плоском клине. Для степенной зависимости коэффициентов переноса от температуры показано, что несимметричное автомодельное течение реализуется при различной температуре нижней и верхней стенок клина. В полученном решении перенос тепловой энергии имеет место только в азимутальном направлении, причем суммарный тепловой поток через стенки клина оказывается равным нулю. Для случая малых дозвуковых скоростей течений газа найдено аналитическое решение.

Полученное решение имеет весьма специальный вид: скорость течения оказывается радиальной и постоянной на линиях тока $\theta = \text{const}$, температура также постоянна на линиях тока, а плотность и давление убывают обратно пропорционально расстоянию от вершины клина. Подобное поведение решения наблюдалось ранее в работах [10, 11, 15] при построении автомодельных решений стационарных уравнений Навье–Стокса вязкого теплопроводного газа для источника массы и в работе [12] для источника импульса.

Известно [22], что автомодельные решения описывают не только поведение физических систем в некоторых частных условиях, но и промежуточно-асимптотическое поведение решений более широких классов задач в той области, где эти решения перестают зависеть от деталей начальных и (или) граничных условий, но система еще далека от предельного состояния. Это означает, что полученное решение описывает не только физически нереализуемое поле течения от точечного источника, истекающего в бесконечное пространство. Оно описывает также и реальное поле течения, воз-

никающее в конечной области размером D , если истечение с заданным расходом происходит не из точки, а из конечной области $d \ll D$. При этом автомодельное решение будет справедливым на расстояниях много больших d , и вместе с тем, много меньших D .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jeffery G.B.L.* The two-dimensional steady motion of a viscous fluid // The London, Edinburgh & Dublin Phil. Mag. & J. of Sci. 1915. V. 29. 172. P. 455–465.
2. *Hamel G.* Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1917. V. 25. P. 34–60.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 735 с.
4. *Аристов С.Н., Князев Д.В., Полянин А.Д.* Точные решения уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теорет. основы хим. технол. 2009. Т. 43. № 5. С. 547–566.
5. *Williams J.C. III.* Conical nozzle flow with velocity slip and temperature jump // AIAA J. 1967. V. 5. № 12. P. 2128–2134.
6. *Williams J.C. III.* Diabatic internal source flow // Appl. Sci. Res. 1967. V. 17. P. 407–421.
7. *Williams J.C. III.* Conical nozzle flow of a viscous compressible gas with energy extraction // Appl. Sci. Res. 1968. V. 19. P. 285–301.
8. *Брутян М.А., Ибрагимов У.Г.* Автомодельные течения вязкого газа, истекающего из вершины конуса // Уч. зап. ЦАГИ. 2018. Т. XLIX. № 3. С. 26–35.
9. *Брутян М.А., Ибрагимов У.Г.* Влияние параметра автомодельности на критические характеристики сжимаемого течения типа Гамеля // Тр. МАИ. 2018. Вып. 100. <http://trudymai.ru/published.php?ID=93319>
10. *Быркин А.П.* Об одном точном решении уравнений Навье–Стокса для сжимаемого газа // ПММ. 1969. Т. 33. № 1. С. 152–157.
11. *Брутян М.А.* Автомодельные решения типа Джеффери–Гамеля для течения вязкого сжимаемого газа // Уч. зап. ЦАГИ. 2017. Т. XLVIII. № 6. С. 13–22.
12. *Брутян М.А., Крапивский П.Л.* Точные решения стационарных уравнений Навье–Стокса вязкого теплопроводного газа для плоской струи из линейного источника // ПММ. 2018. Т. 82. № 5. С. 644–656.
13. *Голубкин В.Н., Сизых Г.Б.* О сжимаемом течении Куэтта // Уч. зап. ЦАГИ. 2018. Вып. 49. № 1. С. 27–38.
14. *Хорин А.Н., Конюхова А.А.* Течение Куэтта горячего вязкого газа // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Вып. 24. № 2. С. 365–378.
15. *Брутян М.А., Ибрагимов У.Г.* Автомодельные течения вязкого газа в плоском канале при произвольной зависимости коэффициентов переноса от температуры // ПММ. 2021. Т. 85. № 6. С. 755–764.
16. *Probstein R.F., Kemp N.H.* Viscous aerodynamic characteristics in hypersonic rarefied gas flow // J. Aerosp. Sci. 1960. V. 27. № 3. P. 174–192.
17. *Ферцигер Дж., Канер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976.
18. *Ernst M.N.* Nonlinear model-Boltzmann equations and exact solutions // Phys. Rev. 1981. V. 78. № 1. P. 1–171.
19. *Ernst M.N.* Exact solutions of nonlinear Boltzmann equation // J. Stat. Phys. 1984. V. 34. № 516. P. 1001–1017.
20. *Бобылев А.В.* Точные решения нелинейного уравнения Больцмана и теория релаксации максвелловского газа // ТМФ. 1984. Т. 60. № 2. С. 280–310.
21. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. Т. 10.
22. *Баренблатт Г.И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 255 с.

Self-Similar Asymmetrical Flow of Viscous Gas in a Channel**M. A. Brutyan^{a,b,#} and U. G. Ibragimov^{b,##}**^a *Central Aerohydrodynamic Institute named after N.E. Zhukovsky, Zhukovsky, Russia*^b *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia*[#] *e-mail: murad.brutyan@tsagi.ru*^{##} *e-mail: umar.ibragimov@phystech.edu*

Two-dimensional flow of viscous compressible gas from source in an apex of wedge is considered. It is shown, when special temperature boundary conditions at the walls are specified, asymmetrical gas flow is possible. In the case of small subsonic flow of gas in a wedge with constant but different walls temperature asymptotic solution is found. In the general case, obtained system of ordinary differential equations is solved numerically.

Keywords: viscous gas flow, Navier–Stokes equations, Jeffery–Hamel type exact solution

REFERENCES

1. *Jeffery G.B.L.* The two-dimensional steady motion of a viscous fluid // The London, Edinburgh & Dublin Phil. Mag. & J. of Sci., 1915, vol. 29.172, pp. 455–465.
2. *Hamel G.* Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1917, vol. 25, pp. 34–60.
3. *Landau L.D., Lifschitz E.M.* Fluid Mechanics. Moscow: Nauka, 1986. 735 p. (in Russian)
4. *Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyatin A.D.* Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // Theor. Found. Chem. Engng., 2009, vol. 43, no. 5, pp. 642–662. (in Russian)
5. *Williams J.C. III.* Conical nozzle flow with velocity slip and temperature jump // AIAA J., 1967, vol. 5, no. 12, pp. 2128–2134.
6. *Williams J.C. III.* Diabatic internal source flow // Appl. Sci. Res., 1967, vol. 17, pp. 407–421.
7. *Williams J.C. III.* Conical nozzle flow of a viscous compressible gas with energy extraction // Appl. Sci. Res., 1968, vol. 19, pp. 285–301.
8. *Brutyan M.A., Ibragimov U.G.* Self-similar flow of a viscous gas from source in an apex of cone // Uch. Zap. TsAGI, 2018, vol. XLIX, no. 3, pp. 26–35. (in Russian)
9. *Brutyan M.A., Ibragimov U.G.* Self-similarity parameter effect on critical characteristics of Hamel type compressible flow // Tr. MAI, 2018, no. 100, <http://trudymai.ru/published.php?ID=93319> (in Russian)
10. *Byrkin A.P.* Concerning one exact solution of the Navier–Stokes equations for compressible gas // PMM, 1969, vol. 33, no. 1, pp. 152–157. (in Russian)
11. *Brutyan M.A.* Self-similar solutions of Jeffrey–Gamel type for compressible viscous gas flow // Uch. Zap. TsAGI, 2017, vol. XLVIII, no. 6, pp. 13–22 (in Russian)
12. *Brutyan M.A., Krapivsky P.I.* Exact solutions of the stationary Navier–Stokes equations of a viscous heat-conducting gas for a flat jet from a linear source // PMM, 2018, vol. 82, no. 5, pp. 644–656. (in Russian)
13. *Golubkin V.N., Sizykh G.B.* Concerning compressible Couette flow // Uch. Zap. TsAGI, 2018, vol. 49, no. 1, pp. 27–38. (in Russian)
14. *Khorin A.N., Konyukhova A.A.* Couette flow of hot viscous gas // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, 2020, vol. 24, no. 2, pp. 365–378. (in Russian)
15. *Brutyan M.A., Ibragimov U.G.* Two-dimensional self-similar flow in a channel of viscous gas with transfer coefficients arbitrarily depending on temperature // PMM, 2021, vol. 85, no. 6, pp. 755–764. (in Russian)
16. *Probstein R.F., Kemp N.H.* Viscous aerodynamic characteristics in hypersonic rarefied gas flow // J. Aerosp. Sci., 1960, vol. 27, no. 3, pp. 174–192.

17. *Ferziger J.H., Kaper H.G.* Mathematical Theory of Transport Processes in Gases Hardcover. North-Holland, 1972. 579 p.
18. *Ernst M.N.* Nonlinear model-Boltzmann equations and exact solutions // *Phys. Rev.*, 1981, vol. 78, no. 1, pp. 1–171.
19. *Ernst M.N.* Exact solutions of nonlinear Boltzmann equation // *J. Stat. Phys.*, 1984, vol. 34, no. 516, pp. 1001–1017.
20. *Bobylev A.V.* Exact solutions of the nonlinear Boltzmann equation and the theory of relaxation of a Maxwellian gas // *TMF*, 1984, vol. 60, no. 2, pp. 280–310. (in Russian)
21. *Lifschitz E.M., Pitaevskii L.P.* Physical Kinetics. Moscow: Nauka, 1979. 527 p. (in Russian)
22. *Barenblatt G.I.* Scaling, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics. Leningrad: Hydrometeoizdat, 1982. 255 p. (in Russian)

УДК 534.222.2

ФОРМИРОВАНИЕ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР ВНУТРИ ОБЛАСТИ СИЛЬНОГО ВЗРЫВА В НЕОДНОРОДНОЙ АТМОСФЕРЕ НА ЕГО РАННЕЙ СТАДИИ

© 2022 г. В. А. Андрущенко^{1,*}, В. А. Головешкин^{2,3,**},
И. В. Мурашкин^{1,***}, Н. Н. Холин^{2,****}

¹ Институт автоматизации проектирования РАН, Москва, Россия

² Российский технологический университет МИРЭА, Москва, Россия

³ Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия

*e-mail: andrusvictor@ya.ru

**e-mail: vag-1953@ya.ru

***e-mail: murashkin@inbox.ru

****e-mail: mostu@bk.ru

Поступила в редакцию 09.04.2022 г.

После доработки 22.07.2022 г.

Принята к публикации 22.07.2022 г.

Аналитически решается задача о сильном точечном взрыве с учетом неоднородности атмосферы. Полученное авторами ранее численное решение подобной задачи показало, что уже на начальной стадии процесса в сферическом слое газа внутри области взрыва, прилегающем к фронту ударной волны, образуются вихревые структуры. Поскольку для этих малых времен решение незначительно отличается от точного решения Л.И. Седова, методом возмущений проводится теоретическое исследование течения во внутренней области взрыва, позволившее объяснить возникновение таких вихревых образований.

Ключевые слова: сильный точечный взрыв, неоднородная атмосфера, метод возмущений, вихревые структуры

DOI: 10.31857/S0032823522050034

1. Введение. В настоящее время задачи теории точечного взрыва вновь выдвинулись в ряд задач первостепенной значимости в связи с реальностью вторжения в атмосферу Земли малых космических тел и их возможном взрыве в ней, что подтвердилось в ходе падения, фрагментации [1] и последующими взрывами осколков челябинского болида 15 февраля 2013 г. [2].

В данной работе исследуется эволюция объема газа, охваченного фронтом ударной волны, при сильном точечном взрыве в экспоненциальной атмосфере для малых моментов времени. Как известно, для достаточно большого промежутка времени, когда ударная волна уходит на значительное расстояние от точки взрыва, под действием конвекции “огненный” шар около его центра трансформируется в вихревую топологическую структуру типа тора [3, 4]. В ходе численного эксперимента, проведенного авторами в [5], было выявлено, что вихревые тороидальные структуры в сферическом слое, прилегающем к фронту ударной волны, в задаче о сильном точечном взрыве образуются уже и на начальной стадии (порядка нескольких десятых секунды) при учете неоднородности атмосферы. Этот факт означает, что для момента времени, близкого к началу взрыва, малые возмущения (незначительное проявление стратификации ат-

мосферы по высоте), возникающие только на фронте ударной волны (см. ниже), оказывают заметное влияние на решение исходной системы уравнений в некоторой части газа внутри области взрыва. Здесь проводится теоретическое исследование течения во внутренней области сильного точечного взрыва методом возмущений. Полученное аналитическое решение поставленной задачи позволяет объяснить причину возникновения тороидальных вихревых структур на ранней стадии точечного взрыва в неоднородной атмосфере.

2. Постановка задачи. Рассматривается задача о сильном точечном взрыве в экспоненциальной атмосфере: $\rho = \rho_0 \exp(-z/H)$, где ρ_0 – плотность на высоте взрыва, H параметр неоднородности атмосферы. Численное решение задачи показало образование вихревых структур внутри области взрыва уже на ранней стадии процесса (см. рис. 1, на котором представлены линии равной завихренности (замкнутые структуры около фронта УВ) $\pm |\text{rot } \mathbf{u}|$ и линии тока (расходящиеся веером от центральной области направленные линии) в вертикальной плоскости сечения области взрыва для момента времени $t = 0.6$ с в задаче о сильном точечном взрыве с энергией $E = 15$ кТ на высоте 1 км в неоднородной атмосфере в отсутствие гравитации и противодействия) [5]. Из рис. 1 видно, что уже на начальном этапе эволюции взрыва в сферическом слое, прилегающем к фронту ударной волны, возникли четыре тороидальные вихревые области некругового сечения, в которых направления движения чередуются (в верхнем тороиде направление по часовой стрелке – отрицательные значения компоненты завихренности, в следующем против – положительные значения компоненты завихренности, и т.д.; величины завихренности безразмерны и поэтому их численные значения порядка сотых от единицы малоинформативны).

Исходная система уравнений в сферических координатах (R, θ) для газодинамических функций ρ, P, u_R, u_θ – плотности, давления, радиальной и азимутальной компонент скорости (c – скорость фронта ударной волны, $R = S(\theta, t)$ – уравнение фронта ударной волны) такова:

1. Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial t}(\ln \rho) + u_R \frac{\partial}{\partial R}(\ln \rho) + \frac{u_\theta}{R} \frac{\partial}{\partial \theta}(\ln \rho) + \frac{\partial u_R}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{2u_R}{R} - \frac{u_\theta}{R} \text{tg } \theta = 0 \quad (2.1)$$

2. Уравнения движения (g – ускорение свободного падения)

$$\frac{\partial u_R}{\partial t} + u_R \frac{\partial u_R}{\partial R} + \frac{u_\theta}{R} \frac{\partial u_R}{\partial \theta} - \frac{u^2 \theta}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R} - ag \sin \theta \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_R \frac{\partial u_\theta}{\partial R} + \frac{u_\theta}{R} \frac{\partial u_R}{\partial \theta} - \frac{u_R u_\theta}{R} = -\frac{1}{\rho R} \frac{\partial P}{\partial \theta} - ag \cos \theta \quad (2.3)$$

3. Закон сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) + u_R \frac{\partial}{\partial R} \ln \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) + \frac{u_\theta}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad (2.4)$$

Уравнение фронта

$$R = S(\theta, t) \quad (2.5)$$

Уравнение движения фронта

$$\frac{\partial S}{\partial t} = c \sqrt{1 + \frac{1}{S^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2} \quad (2.6)$$

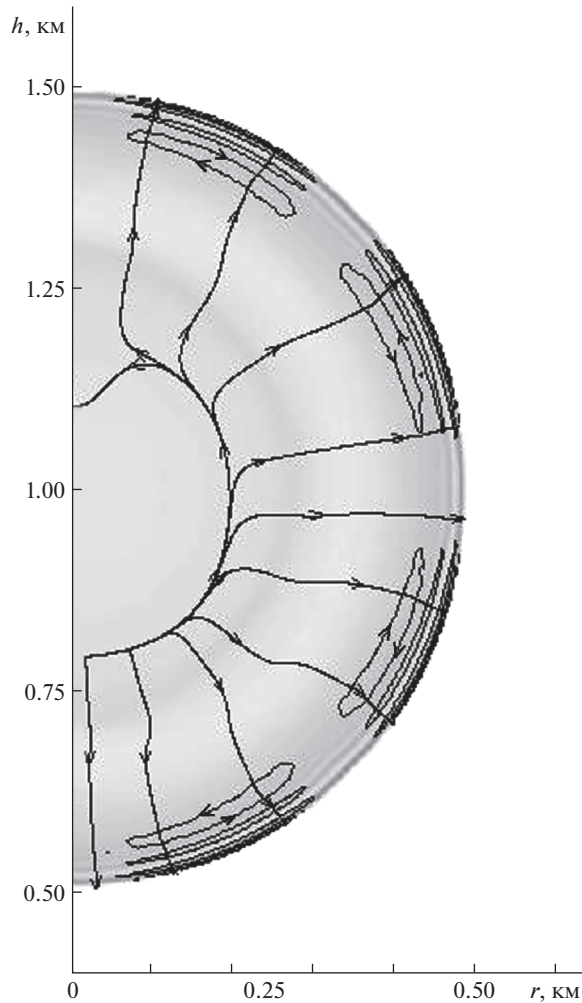


Рис. 1.

Условия на фронте

$$\begin{aligned}
 u_R \sqrt{1 + \frac{1}{S^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2} &= \frac{2}{\gamma + 1} c \left(1 - \beta \gamma \frac{P_0}{\rho_0 c^2} \right) \\
 u_\theta \sqrt{1 + \frac{1}{S^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2} &= \frac{2}{\gamma + 1} c \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial \theta} \left(1 - \beta \gamma \frac{P_0}{\rho_0 c^2} \right) \\
 P &= \rho_0 \frac{2}{\gamma + 1} c^2 \left(1 - \beta \gamma \frac{P_0}{\rho_0 c^2} \right) \exp \left(-\mu \frac{S \sin \theta}{H} \right) \\
 \rho &= \rho_0 \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} c^2 \left(1 + \beta \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_0}{\rho_0 c^2} \right) \exp \left(-\mu \frac{S \sin \theta}{H} \right),
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

где параметры α , β , μ равны единице. Цель их введения – разделение влияния трех различных факторов: α – ускорения свободного падения, β – противодавления, μ – неоднородности атмосферы.

Из закона сохранения энергии следует

$$2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^S \left\{ \rho \left[U_R^2 + U_\theta^2 \right] + \frac{1}{\gamma - 1} \left[P - P_0 \exp \left(-\mu \frac{R \sin \theta}{H} \right) \right] + \right. \\ \left. + \alpha g R \sin \theta \left[\rho - \rho_0 \exp \left(-\mu \frac{R \sin \theta}{H} \right) \right] \right\} R^2 dR = E_0, \quad (2.8)$$

где E_0 — энергия взрыва.

При $t \rightarrow 0$ решение определяется из решения данной системы уравнений (2.1)–(2.8) при условиях: $u_\theta = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$, $F(\theta, t) = 1$ — сильный точечный взрыв в однородной атмосфере [6].

Предварительно поставленная таким образом задача (2.1)–(2.8) исследовалась качественно методом возмущений для случая сильного взрыва в неоднородной атмосфере в отсутствие гравитации и противодействия. Было выявлено наличие вихревых движений внутри области газа, возмущенного ударной волной без явного представления выражения для функции $\text{rot } \mathbf{u}$, то есть было доказано, что уже на раннем этапе развития взрыва $|\text{rot } \mathbf{u}| \neq 0$ [5].

Целью настоящей работы является исследование начального этапа развития процесса с явным определением функции $\text{rot } \mathbf{u}$. В [5] было показано, что на этом этапе главный вклад вносит неоднородность атмосферы, поэтому ниже полагается $\alpha = \beta = 0$, то есть исключается влияние силы тяжести и противодействия. Также было доказано, что образование вихревых структур — реальное физическое явление, а не эффект схемной вязкости в численных расчетах.

3. Методика исследования задачи. Асимптотики. Итоговые результаты. После ввода безразмерной координаты λ по формуле $R = \lambda s_0(t)$; и неизвестных функций $\bar{\rho}$, \bar{P} , \bar{u}_R , \bar{u}_θ , \bar{c} :

$$\rho = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0 \bar{\rho}, \quad P = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0 \left(\frac{ds_0}{dt} \right)^2 \bar{P}$$

$$u_R = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{ds_0}{dt} \bar{u}_R, \quad u_\theta = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{ds_0}{dt} \bar{u}_\theta$$

$$S(\theta, t) = s_0(t) F(\theta, t), \quad c = \frac{ds_0}{dt} \bar{c}; \quad s_0 = (E/\rho_0)^{1/5} t^{2/5},$$

E — константа, имеющая размерность энергии, выбирается из условия, чтобы при $t \rightarrow 0$ уравнение фронта имело вид $F(\theta, t) = 1$. Система (2.1)–(2.8) примет вид (ниже черта опущена):

$$\frac{5(\gamma + 1)}{4} t \frac{\partial}{\partial t} (\ln \rho) + \left(u_R - \frac{\gamma + 1}{2} \lambda \right) \frac{\partial}{\partial \lambda} (\ln \rho) + \\ + \frac{u_\theta}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \theta} (\ln \rho) + \frac{\partial u_R}{\partial \lambda} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{2u_R}{\lambda} - \frac{u_\theta}{\lambda} \text{tg } \theta = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{5(\gamma + 1)}{4} t \frac{\partial u_R}{\partial t} + \left(u_R - \frac{\gamma + 1}{2} \lambda \right) \frac{\partial u_R}{\partial \lambda} + \frac{u_\theta}{\lambda} \frac{\partial u_R}{\partial \theta} - \\ - \frac{u_\theta^2}{\lambda} - \frac{3}{4} (\gamma + 1) u_R = - \frac{(\gamma - 1)}{2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \lambda} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{5(\gamma+1)}{4} t \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \left(u_R - \frac{\gamma+1}{2} \lambda \right) \frac{\partial u_\theta}{\partial \lambda} + \frac{u_\theta}{\lambda} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_R u_\theta}{\lambda} - \\ & - \frac{3}{4} (\gamma+1) u_\theta = - \frac{(\gamma-1)}{2} \frac{1}{\lambda \rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\frac{5(\gamma+1)}{4} t \ln \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) + \left(u_R - \frac{\gamma+1}{2} \lambda \right) \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) + \frac{u_\theta}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) - \frac{3}{2} (\gamma+1) = 0 \quad (3.4)$$

Уравнение фронта волны представляется в виде

$$\lambda = F(\theta, t) \quad (3.5)$$

Уравнение движения фронта

$$\frac{5}{2} t \frac{\partial F}{\partial t} + F = c \sqrt{1 + \frac{1}{F^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2} \quad (3.6)$$

Условия на фронте

$$\begin{aligned} & u_R \sqrt{1 + \frac{1}{F^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2} = c, \quad u_\theta \sqrt{1 + \frac{1}{F^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2} = \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial \theta} c, \\ & P = c^2 \exp \left(-\mu \frac{A t^{2/5} F \sin \theta}{H} \right), \quad \rho = \exp \left(-\mu \frac{A t^{2/5} F \sin \theta}{H} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Соотношение (2.8) примет вид

$$\frac{32}{25\pi} \frac{\rho_0 A^5}{\gamma^2 - 1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^F \left\{ \rho (U_R^2 + U_\theta^2) + P \right\} \lambda^2 d\lambda = E_0 \quad (3.8)$$

Начальные условия при $t = 0$ соответствуют автомодельному решению при $\alpha = \beta = \mu = 0$ [6]. В момент, близкий к начальному наиболее значительное влияние оказывают слагаемые с параметром μ [5] поэтому положим $\alpha = \beta = 0$.

Представим неизвестные функции в виде

$$U_R = \lambda u, \quad U_\theta = \lambda v, \quad \rho = G/\lambda^2 \quad (3.9)$$

Сделаем замену переменной

$$\lambda = \exp(-\varepsilon s), \quad \varepsilon = \gamma - 1 \quad (3.10)$$

Тогда система (3.1)–(3.8) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{5(2+\varepsilon)}{4} t \frac{\partial}{\partial t} (\ln G) - \frac{1}{\varepsilon} \left(u - \frac{2+\varepsilon}{2} \right) \frac{\partial}{\partial s} (\ln G) + V \frac{\partial}{\partial \theta} (\ln G) - \\ & - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial \theta} + u + 2 + \varepsilon - v \operatorname{tg} \theta = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\frac{5(2+\varepsilon)}{4} t \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} \left(u - \frac{2+\varepsilon}{2} \right) \frac{\partial u}{\partial s} + V \frac{\partial u}{\partial \theta} + \left[u - \frac{5(2+\varepsilon)}{4} \right] u - v^2 = \frac{1}{2G} \frac{\partial P}{\partial S} \quad (3.12)$$

$$\frac{5(2+\varepsilon)}{4} t \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} \left(u - \frac{2+\varepsilon}{2} \right) \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial \theta} + \left[2u - \frac{5(2+\varepsilon)}{4} \right] u = - \frac{\varepsilon}{2G} \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{5(2+\varepsilon)}{4} t \left(\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{1+\varepsilon}{G} \frac{\partial G}{\partial t} \right) - \frac{1}{\varepsilon} \left(u - \frac{2+\varepsilon}{2} \right) \left(\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial s} - \frac{1+\varepsilon}{G} \frac{\partial G}{\partial s} \right) + \\ & + \left(\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{1+\varepsilon}{G} \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) + 2(1+\varepsilon) \left(u - \frac{2+\varepsilon}{2} \right) - \frac{3}{2} (2+\varepsilon) = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Уравнение фронта

$$s = -\frac{1}{\varepsilon} \ln F \quad (3.15)$$

Уравнение движения фронта

$$\frac{5}{2} t \frac{\partial F}{\partial t} + F = c \sqrt{1 + \frac{1}{F^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2} \quad (3.16)$$

Условия на фронте $s = -\frac{1}{\varepsilon} \ln F$

$$u = \frac{c}{F \sqrt{1 + \frac{1}{F^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2}}, \quad v = \frac{c}{F^2 \sqrt{1 + \frac{1}{F^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2}} \frac{\partial F}{\partial \theta}$$

$$P = c^2 \exp \left(-\mu \frac{At^{2/5} F \sin \theta}{H} \right), \quad G = F^2 \exp \left(-\mu \frac{At^{2/5} F \sin \theta}{H} \right) \quad (3.17)$$

$$\frac{32}{25} \pi \frac{\rho_0 A^5}{2 + \varepsilon} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^F \{G(u^2 + v^2) + P\} \exp(-3\varepsilon s) ds = E_0 \quad (3.18)$$

Представим неизвестные функции в виде

$$G = N + \mu \delta G, \quad P = K + \mu \delta P, \quad u = T + \mu \delta u$$

$$v = \mu \delta v, \quad F = 1 + \mu \delta F, \quad c = 1 + \mu \delta c,$$

где $G = N(s)$, $P = K(s)$, $u = T(s)$ решение соответствующей системы при $t \rightarrow 0$. Разлагая по параметру μ для членов первого порядка, получим систему уравнений.

Согласно (3.11)–(3.14)

$$\frac{5(2 + \varepsilon)}{4} t \frac{1}{N} \frac{\partial \delta G}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} \left(T - \frac{2 + \varepsilon}{2} \right) \frac{1}{N} \frac{\partial \delta G}{\partial s} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \delta u}{\partial s} + \frac{\partial \delta v}{\partial \theta} + \frac{1}{\varepsilon} \left(T - \frac{2 + \varepsilon}{2} \right) \frac{1}{N^2} \delta G + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{N} \frac{dN}{ds} \right) \delta u - \delta v \operatorname{tg} \theta = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{5(2 + \varepsilon)}{4} t \frac{\partial \delta u}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} \left(T - \frac{2 + \varepsilon}{2} \right) \frac{\partial \delta u}{\partial s} + \left[2T - \frac{1}{\varepsilon} \frac{dT}{ds} - \frac{5(2 + \varepsilon)}{4} \right] \delta u =$$

$$= \frac{1}{2N} \frac{\partial \delta P}{\partial s} - \frac{1}{2N^2} \frac{dK}{ds} \delta G \quad (3.20)$$

$$\frac{5(2 + \varepsilon)}{4} t \frac{\partial \delta v}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} \left(T - \frac{2 + \varepsilon}{2} \right) \frac{\partial \delta v}{\partial s} + \left[2T - \frac{5(2 + \varepsilon)}{4} \right] \delta v = -\frac{\varepsilon}{2N} \frac{\partial \delta P}{\partial \theta} \quad (3.21)$$

$$\frac{5(2 + \varepsilon)}{4} t \left(\frac{1}{K} \frac{\partial \delta P}{\partial t} - \frac{1 + \varepsilon}{N} \frac{\partial \delta G}{\partial t} \right) - \frac{1}{\varepsilon} \left(T - \frac{2 + \varepsilon}{2} \right) \left[\frac{1}{K} \frac{\partial \delta P}{\partial s} - \frac{1 + \varepsilon}{N} \frac{\partial \delta G}{\partial s} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{K^2} \frac{dK}{ds} \delta P + \frac{1 + \varepsilon}{N^2} \frac{dN}{ds} \delta G \right] + \left[2(1 + \varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{K} \frac{dK}{ds} - \frac{1 + \varepsilon}{N} \frac{dN}{ds} \right) \right] \delta u = 0 \quad (3.22)$$

Уравнение фронта

$$s = -\frac{1}{\varepsilon} \delta F \quad (3.23)$$

Уравнение движения фронта

$$\frac{5}{2} t \frac{\partial \delta F}{\partial t} + \delta F = \delta c \quad (3.24)$$

Условия на фронте при $s = 0$

$$\begin{aligned} \delta u - \frac{dT}{ds} \frac{1}{\varepsilon} \delta F = \delta c - \delta F, \quad \delta v = \frac{\partial \delta F}{\partial \theta} \\ \delta P - \frac{dK}{ds} \frac{1}{\varepsilon} \delta F = 2\delta c - \frac{At^{2/5}}{H} \sin \theta, \quad \delta G - \frac{dN}{ds} \frac{1}{\varepsilon} \delta F = 2\delta F - \frac{At^{2/5}}{H} \sin \theta \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{32}{25} \pi \frac{\rho_0 A^5}{2 + \varepsilon} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^F (\delta G T^2 + 2NT\delta u + \delta P) \exp(-3\varepsilon s) ds + \\ + \frac{32}{25} \pi \frac{\rho_0 A^5}{2 + \varepsilon} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (NT^2 + K) \Big|_{s=0} \frac{\delta F}{\varepsilon} \cos \theta d\theta = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Представим неизвестные функции в виде

$$\begin{aligned} \delta P = \delta P(s) t^{2/5} \sin \theta, \quad \delta G = \delta G(s) t^{2/5} \sin \theta, \quad \delta u = \delta u(s) t^{2/5} \sin \theta \\ \delta v = \delta v(s) t^{2/5} \cos \theta, \quad \delta F = \delta F t^{2/5} \sin \theta, \quad \delta c = \delta c t^{2/5} \sin \theta \end{aligned} \quad (3.27)$$

Для их определения, используя (3.19)–(3.27), получим следующую систему соотношений:

Согласно (3.19)–(3.22)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\varepsilon} \left(T - \frac{2 + \varepsilon}{2} \right) \frac{1}{N} \frac{d\delta G}{ds} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\delta u}{ds} + \\ + \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(T - \frac{2 + \varepsilon}{2} \right) \frac{1}{N^2} + \frac{(2 + \varepsilon)}{2} \frac{1}{N} \right] \delta G + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{N} \frac{dN}{ds} \right) \delta u - 2\delta v = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\varepsilon} \left(T - \frac{2 + \varepsilon}{2} \right) \frac{d\delta u}{ds} + \left[2T - \frac{1}{\varepsilon} \frac{dT}{ds} - \frac{3(2 + \varepsilon)}{4} \right] \delta u = \\ = \frac{1}{2N} \frac{d\delta P}{ds} - \frac{1}{2N^2} \frac{dK}{ds} \delta G \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$-\frac{1}{\varepsilon} \left(T - \frac{2 + \varepsilon}{2} \right) \frac{d\delta v}{ds} + \left[2T - \frac{3(2 + \varepsilon)}{4} \right] \delta v = -\frac{\varepsilon}{2N} \delta P \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\varepsilon} \left(T - \frac{2 + \varepsilon}{2} \right) \left[\frac{1}{K} \frac{d\delta P}{ds} - \frac{1 + \varepsilon}{N} \frac{d\delta G}{ds} - \frac{1}{K^2} \frac{dK}{ds} \delta P + \frac{1 + \varepsilon}{N^2} \frac{dN}{ds} \delta G \right] + \\ + \frac{2 + \varepsilon}{2} \left(\frac{1}{K} \delta P - \frac{1 + \varepsilon}{N} \delta G \right) + \left[2(1 + \varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{K} \frac{dK}{ds} - \frac{1 + \varepsilon}{N} \frac{dN}{ds} \right) \right] \delta u = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Согласно (3.24)

$$2\delta F = \delta c \quad (3.32)$$

Согласно (3.25) условия на фронте при $s = 0$

$$\begin{aligned} \delta u - \frac{dT}{ds} \frac{1}{\varepsilon} \delta F = \delta c - \delta F, \quad \delta v = \delta F \\ \delta P - \frac{dK}{ds} \frac{1}{\varepsilon} \delta F = 2\delta c - \frac{A}{H}, \quad \delta G - \frac{dN}{ds} \frac{1}{\varepsilon} \delta F = 2\delta c - \frac{A}{H} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Соотношение (3.26) удовлетворяется тождественно.

Представим искомые функции в виде

$$T = 1 - \frac{\varepsilon}{2}(L - 1), \quad \delta P = K\delta\bar{P}, \quad \delta G = N\delta\bar{G}, \quad \delta u = \varepsilon L\delta\bar{u}$$

$$\delta v = \varepsilon L\delta\bar{v}, \quad \delta F = \varepsilon\delta\bar{F}, \quad \delta c = \varepsilon\delta\bar{c}$$

В дальнейшем волну опускаем.

При $\varepsilon \rightarrow 0$ функции L , N , K стремятся к следующим значениям [5]:

$$L = 2 - \omega, \quad K = \frac{1}{2 - \omega}, \quad N = \frac{\omega}{(2 - \omega)^2}, \quad (3.34)$$

здесь $\omega = \exp(-3s)$.

При $\varepsilon \rightarrow 0$ система (3.28)–(3.33) примет вид

$$\frac{L}{2} \frac{d\delta G}{ds} + \delta G - L \frac{d\delta u}{ds} - \left(\frac{1}{L} \frac{dL}{ds} + \frac{1}{N} \frac{dN}{ds} \right) L\delta u = 0 \quad (3.35)$$

$$\frac{1}{K} \frac{dK}{ds} \delta G - \frac{1}{K} \frac{dK}{ds} \delta P - \frac{d\delta P}{ds} = 0 \quad (3.36)$$

$$\frac{d\delta v}{ds} + \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{L} \frac{dL}{ds} \right) \delta v + \frac{K}{L^2 N} \delta P = 0 \quad (3.37)$$

$$\frac{L}{2} \left(\frac{d\delta P}{ds} - \frac{d\delta G}{ds} \right) + \delta P - \delta G - \left(\frac{1}{K} \frac{dK}{ds} - \frac{1}{N} \frac{dN}{ds} \right) L\delta u = 0 \quad (3.38)$$

Согласно (3.32)

$$2\delta F = \delta c \quad (3.39)$$

Согласно (3.33) условия на фронте при $s = 0$ примут вид

$$\delta u + \frac{1}{2} \frac{dL}{ds} \delta F = \delta c - \delta F, \quad \delta v = \delta F \quad (3.40)$$

$$\delta P - \frac{dK}{ds} \delta F = -\frac{A}{H}, \quad \delta G - \frac{dN}{ds} \delta F = -\frac{A}{H}$$

Отметим, что использовать приближенную оценку разложения по ε можно лишь вблизи границы фронта волны $s = 0$, поскольку при $s \rightarrow \infty$ значение G стремится к нулю и приближенное представление $1/G$ в виде ряда невозможно.

Используя явные выражения для функций (3.34), систему (3.35)–(3.40) представим в виде:

$$\frac{(2 - \omega)}{2} \frac{d\delta G}{ds} + \delta G - (2 - \omega) \frac{d\delta u}{ds} + 6\delta u = 0 \quad (3.41)$$

$$\frac{-3\omega}{(2 - \omega)} \delta G + \frac{3\omega}{(2 - \omega)} \delta P - \frac{d\delta P}{ds} = 0 \quad (3.42)$$

$$(2 - \omega) \frac{d\delta v}{ds} + (1 + 3\omega) \delta v + \delta P/\omega = 0 \quad (3.43)$$

$$\frac{(2 - \omega)}{2} \left(\frac{d\delta P}{ds} - \frac{d\delta G}{ds} \right) + \delta P - \delta G - 6\delta u = 0 \quad (3.44)$$

Согласно (3.39), (3.40) условия при $s = 0$ примут вид

$$\delta u = -\frac{1}{2} \delta F, \quad \delta v = \delta F, \quad \delta P = -3\delta F - \frac{A}{H}, \quad \delta G = -9\delta F - \frac{A}{H} \quad (3.45)$$

Система дифференциальных уравнений (3.41)–(3.44) решается по следующей схеме:
Согласно (3.41)

$$\frac{\omega}{(2-\omega)} \frac{d\delta G}{ds} + \frac{2\omega}{(2-\omega)^2} \delta G - \frac{2\omega}{(2-\omega)} \frac{d\delta u}{ds} + \frac{12\omega}{(2-\omega)^2} \delta u = 0$$

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{\omega}{(2-\omega)} \delta G \right] + \frac{8\omega}{(2-\omega)^2} \delta G - \frac{d}{ds} \left[\frac{2\omega}{(2-\omega)} \delta u \right] = 0$$

Используя (3.42), получим

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{\omega}{(2-\omega)} \delta G \right] + \frac{8}{3(2-\omega)} \left[\frac{\omega}{(2-\omega)} \delta P - \frac{dP}{ds} \right] - \frac{d}{ds} \left[\frac{2\omega}{(2-\omega)} \delta u \right] = 0$$

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{\omega}{(2-\omega)} \delta G \right] + \frac{8}{3(2-\omega)} \left[\frac{\omega}{(2-\omega)} \delta P - \frac{dP}{ds} \right] - \frac{d}{ds} \left[\frac{2\omega}{(2-\omega)} \delta u \right] = 0$$

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{\omega}{(2-\omega)} \delta G \right] - \frac{8}{3} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{(2-\omega)} \delta P \right] - \frac{d}{ds} \left[\frac{2\omega}{(2-\omega)} \delta u \right] = 0$$

Интегрируя данное соотношение с условиями (3.45), получим

$$\frac{\omega}{(2-\omega)} \delta G - \frac{8}{3} \frac{1}{(2-\omega)} \delta P - \frac{2\omega}{(2-\omega)} \delta u = \frac{5}{3} \frac{A}{H} \quad (3.46)$$

Согласно (3.46)

$$\delta u = \frac{1}{2} \delta G - \frac{4}{3} \omega^{-1} \delta P - \frac{5}{6} \frac{A}{H} (2\omega^{-1} - 1) \quad (3.47)$$

Согласно (3.42)

$$\delta G = \delta P - \frac{1}{3} (2\omega^{-1} - 1) \frac{d\delta P}{ds} \quad (3.48)$$

Согласно (3.47)–(3.48)

$$\delta u = -\frac{1}{6} (2\omega^{-1} - 1) \frac{d\delta P}{ds} - \frac{1}{6} (8\omega^{-1} - 3) \delta P - \frac{5}{6} \frac{A}{H} (2\omega^{-1} - 1) \quad (3.49)$$

Используя (3.44), получим дифференциальное уравнение для определения δP

$$\begin{aligned} (2\omega^{-1} - 1)^2 \frac{d^2 \delta P}{ds^2} + 14(2\omega^{-1} - 1) \omega^{-1} \frac{d\delta P}{ds} + 6(8\omega^{-1} - 3) \omega^{-1} \delta P = \\ = -30 \frac{A}{H} (2\omega^{-1} - 1) \omega^{-1} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Неизвестную функцию δP представим в виде $\delta P = (2\omega^{-1} - 1)^{2/3} \psi$.

Тогда для отыскания ψ имеем дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} (2\omega^{-1} - 1)^2 \frac{d^2 \psi}{ds^2} + 22(2\omega^{-1} - 1) \omega^{-1} \frac{d\psi}{ds} + (120\omega^{-2} - 30\omega^{-1}) \psi = \\ = -30 \frac{A}{H} (2\omega^{-1} - 1)^{1/3} \omega^{-1} \end{aligned} \quad (3.51)$$

С начальными условиями $\psi = -3\delta F - \frac{A}{H}$, $\frac{d\psi}{ds} = 30\delta F + 4 \frac{A}{H}$ при $s = 0$. Уравнение преобразуется к виду

$$\frac{d}{ds} \left[(2\omega^{-1} - 1)^2 \frac{d\psi}{ds} \right] + \frac{d}{ds} \left[(20\omega^{-2} - 10\omega^{-1}) \psi \right] = -30 \frac{A}{H} (2\omega^{-1} - 1)^{1/3} \omega^{-1}$$

Интегрируя с учетом начальных условий, получим

$$(2\omega^{-1} - 1)^2 \frac{d\Psi}{ds} + (20\omega^{-2} - 10\omega^{-1})\Psi = -\frac{15}{4} \frac{A}{H} (2\omega^{-1} - 1)^{4/3} - \frac{9}{4} \frac{A}{H},$$

тогда

$$(2\omega^{-1} - 1)^{5/3} \frac{d\Psi}{ds} + 10\omega^{-1} (2\omega^{-1} - 1)^{2/3} \Psi = -\frac{15}{4} \frac{A}{H} (2\omega^{-1} - 1) - \frac{9}{4} \frac{A}{H} \frac{1}{(2\omega^{-1} - 1)^{1/3}}$$

$$\frac{d}{ds} \left[(2\omega^{-1} - 1)^{5/3} \Psi \right] = -\frac{15}{4} \frac{A}{H} (2\omega^{-1} - 1) - \frac{9}{4} \frac{A}{H} \frac{1}{(2\omega^{-1} - 1)^{1/3}}$$

Далее введем обозначение $\sigma = \exp(3t)$

$$(2\omega^{-1} - 1)^{5/3} \Psi = -\frac{5}{2} \frac{A}{H} \omega^{-1} + \frac{15}{4} \frac{A}{H} s - \frac{9}{4} \frac{A}{H} \int_0^s \frac{dt}{(2\sigma - 1)^{1/3}} + \frac{3}{2} \frac{A}{H} - 3\delta F$$

Следовательно

$$\delta P = \frac{1}{(2\omega^{-1} - 1)} \left[-\frac{5}{2} \frac{A}{H} \omega^{-1} + \frac{15}{4} \frac{A}{H} s - \frac{9}{4} \frac{A}{H} \int_0^s \frac{dt}{(2\sigma - 1)^{1/3}} + \frac{3}{2} \frac{A}{H} - 3\delta F \right] \quad (3.52)$$

Согласно (3.48), (3.52)

$$\begin{aligned} \delta G = \frac{2\omega^{-1} + 1}{(2\omega^{-1} - 1)} & \left[-\frac{5}{2} \frac{A}{H} \omega^{-1} + \frac{15}{4} \frac{A}{H} s - \frac{9}{4} \frac{A}{H} \int_0^s \frac{dt}{(2\sigma - 1)^{1/3}} + \frac{3}{2} \frac{A}{H} - 3\delta F \right] + \\ & + \frac{5}{4} \frac{A}{H} (2\omega^{-1} - 1) + \frac{3}{4} \frac{A}{H} \frac{1}{(2\omega^{-1} - 1)^{1/3}} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Согласно (3.47), (3.52), (3.53)

$$\begin{aligned} \delta u = \frac{3 - 2\omega^{-1}}{6(2\omega^{-1} - 1)} & \left[-\frac{5}{2} \frac{A}{H} \omega^{-1} + \frac{15}{4} \frac{A}{H} s - \frac{9}{4} \frac{A}{H} \int_0^s \frac{dt}{(2\sigma - 1)^{1/3}} + \frac{3}{2} \frac{A}{H} - 3\delta F \right] + \\ & + \frac{5}{8} \frac{A}{H} (2\omega^{-1} - 1) + \frac{3}{8} \frac{A}{H} \frac{1}{(2\omega^{-1} - 1)^{1/3}} - \frac{5}{6} \frac{A}{H} (2\omega^{-1} - 1) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Согласно (3.43)

$$(2\omega^{-1} - 1) \frac{d\delta v}{ds} + (\omega^{-1} + 3) \delta v = -\omega^{-2} \delta P \quad (3.55)$$

Решение соответствующего однородного уравнения

$$(2\omega^{-1} - 1) \frac{d\delta v}{ds} + (\omega^{-1} + 3) \delta v = 0$$

может быть представлено в виде

$$v = \frac{1}{(2\omega^{-1} - 1)^{1/6} (2 - \omega)} = \frac{1}{(2 \exp(3s) - 1)^{1/6} (2 - \exp(-3s))}$$

Тогда решение (3.55) (после подстановки значений ω и σ) имеет вид

$$v = \frac{1}{(2 \exp(3s) - 1)^{1/6} (2 - \exp(-3s))} \left[\delta F - \int_0^s \frac{(2 - \exp(-3t))}{(2 \exp(3t) - 1)^{5/6}} \exp(6t) \delta P(t) dt \right] \quad (3.56)$$

При этом, поскольку ротор имеет единственную ненулевую составляющую, она может быть представлена в виде:

$$(\text{rot } \mathbf{u})_\varphi = \frac{4}{5} \frac{1}{\gamma + 1} \frac{1}{t^{3/5}} \cos \theta M; \quad M = \varepsilon(\delta u - 2\delta v) + \frac{d\delta v}{ds}$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $M = \frac{d\delta v}{ds}$. Следовательно, значение ротора скорости непосредственно за фронтом УВ отлично от нуля.

Заключение. В статье дано качественное объяснение возникновения завихренности, вызванное только неоднородностью атмосферы по высоте, уже для малых значений времени (несколько десятых секунды). Дальнейшее исследование предполагает изучение процесса для больших значений времени и учета влияния гравитации и противодействия на развитие завихренности внутри области, охваченной фронтом УВ.

Работа Андрущенко В.А., Мурашкина И.В. выполнена в рамках госзадания Института автоматизации проектирования РАН, работа Головешкина В.А. выполнена в рамках госзадания Института прикладной механики РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Егорова Л.А. Напряженно-деформированное состояние и разрушение метеороида при движении в атмосфере // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 3. С. 513–518.
2. Андрущенко В.А., Сызранова Н.Г., Шевелев Ю.Д. Моделирование падения Челябинского метеорита // Компьютерные исследования и моделирование. 2013. Т. 5. № 6. С. 927–940.
3. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных газодинамических явлений. М.: Физматгиз, 1963. 632 с.
4. Андрущенко В.А., Кестенбойм Х.С., Чудов Л.А. Движение газа, вызванное точечным взрывом в неоднородной атмосфере // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 6. С. 144–151.
5. Андрущенко В.А., Головешкин В.А., Холин Н.Н. О формировании вихревых структур внутри области сильного взрыва в неоднородной атмосфере / XI Всерос. съезд по фундам. проблемам теоретич. и прикл. мех. Сб. докл. Казань, 20–24 августа 2015 г. Казань: АН РТ, 2015. С. 162–163.
6. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. 438 с.

Formation of Vortex Structures in Area of the Strong Explosion in the Non-Uniform Atmosphere at Its Early Stage

V. A. Andrushchenko^{a,#}, V. A. Goloveshkin^{b,c,###}, I. V. Murashkin^{a,###}, and N. N. Kholin^{b,####}

^a Institute for Computer Aided Design RAS, Moscow, Russia

^b Russian Technological University MIREA, Moscow, Russia

^c Institute of Applied Mechanics RAS, Moscow, Russia

[#]e-mail: andrusvictor@ya.ru

^{##}e-mail: vag-1953@ya.ru

^{###}e-mail: murashkin@inbox.ru

^{####}e-mail: mostu@bk.ru

The problem about strong pointed explosion in non-uniform atmosphere is analytically solved. Earlier numerical solution of a similar task received by authors showed that already at an initial stage of process in a spherical gas layer in explosion area, adjacent to the front of a shock wave, vortex structures are formed. As for these small times the decision slightly dif-

fers from the exact decision of L.I. Sedov, the method of indignations conducts the theoretical research of a current in internal area of explosion which allowed to explain emergence of such vortex educations.

Keywords: strong point explosion, inhomogeneous atmosphere, perturbation method, vortex structures

REFERENCES

1. *Egorova L.A.* Stress-strain state and destruction of a meteoroid when moving in the atmosphere // PMM, 2011, vol. 75, iss. 3, pp. 513–518.
2. *Andryushchenko V.A., Syzranova N.G., Shevelev Yu.D.* Modeling of the Chelyabinsk meteorite fall // Comput. Res.&Model., 2013, vol. 5, no. 6, pp. 927–940.
3. *Zeldovich Ya.B., Raiser Yu.P.* Physics of Shock Waves and High-Temperature Gas-Dynamic Phenomena. Moscow: Fizmatgiz, 1963. 632 p.
4. *Andryushchenko V.A., Kestenboim H.S., Chudov L.A.* Gas movement caused by a point explosion in an inhomogeneous atmosphere // Izv. AN USSR. MZhG, 1981, no. 6, pp. 144–151.
5. *Andrushchenko V.A., Goloveshkin V.A., Kholin N.N.* On the formation of vortex structures inside the region of a strong explosion in an inhomogeneous atmosphere / XI Vseros. Cong. on Fundam. Problems of Theor.&Appl. Mecha. Abstracts. Kazan, August 20–24, 2015. Kazan: AS of the Rep. of Tatarstan, 2015. pp. 162–163.
6. *Sedov L.I.* Methods of Similarity and Dimension in Mechanics. Moscow: Nauka, 1977. 438 p.

УДК 504.35

ОБ ОЦЕНКЕ ВКЛАДА ВТОРИЧНЫХ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР В ПЕРЕНОС АЭРОЗОЛЕЙ В АТМОСФЕРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

© 2022 г. М. А. Давыдова^{1,*}, О. Г. Чхетиани^{2,**},
Н. Т. Левашова^{1,***}, А. Л. Нечаева^{1,****}

¹ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Москва, Россия

*e-mail: m.davydova@physics.msu.ru

**e-mail: ochkheti@ifaran.ru

***e-mail: levashovant@physics.msu.ru

****e-mail: nechaeva.al15@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 30.05.2022 г.

После доработки 20.07.2022 г.

Принята к публикации 20.07.2022 г.

В настоящей работе рассматриваются два обоснованных подхода к задаче численного моделирования распределения концентрации мелкодисперсного аэрозоля в спиралевидных вихревых структурах (роллах) в атмосферном пограничном слое с целью оценивания вклада вихревых структур в перенос аэрозолей через пограничный слой. С использованием методов теории возмущений получено приближенное решение стационарной пространственно-периодической сингулярно возмущенной задачи типа реакция–диффузия–адвекция, моделирующей распределение аэрозоля в вихрях, оценен остаточный член и предложен метод численного решения задачи нулевого приближения. В качестве альтернативного подхода к задаче численного моделирования поля концентраций аэрозоля в роллах рассмотрена реализация метода эволюционной факторизации. С использованием модельных данных получена оценка количества аэрозоля, переносимого вихревыми структурами.

Ключевые слова: атмосферный пограничный слой, мезомасштабная циркуляция, транспорт аэрозоля, сингулярные возмущения, асимптотические методы и их приложения, задачи типа реакция–диффузия–адвекция, математическое моделирование полей концентраций малых примесей в атмосферном пограничном слое

DOI: 10.31857/S0032823522050071

1. Введение. Во второй половине XX века было обнаружено, что большая часть турбулентного атмосферного пограничного слоя (АПС) занята роллами – упорядоченными спиралевидными вихрями (валами) с горизонтальной осью, по направлению близкой к среднему направлению геострофического ветра (см., например, [1]). На спутниковых снимках пограничного слоя роллы выглядят, как “облачные улицы” – вытянувшиеся на сотни километров параллельные ряды с периодом в несколько километров, сохраняющиеся в течение нескольких суток. Облака в таком случае формируются в области восходящих движений между роллами при соответствующих термодинамических условиях (см. рис. 1). Возникновение роллов, как правило, является следствием развития гидродинамических неустойчивостей в АПС [1, 2], в том числе и конвективной неустойчивости при умеренных ветрах (2–3.5 м/с), развивающейся как в умеренных и южных широтах, так и в высоких при холодных вторжениях [3–7].



Рис. 1. Роллы над Каспийским морем, 6 октября 2019 г.

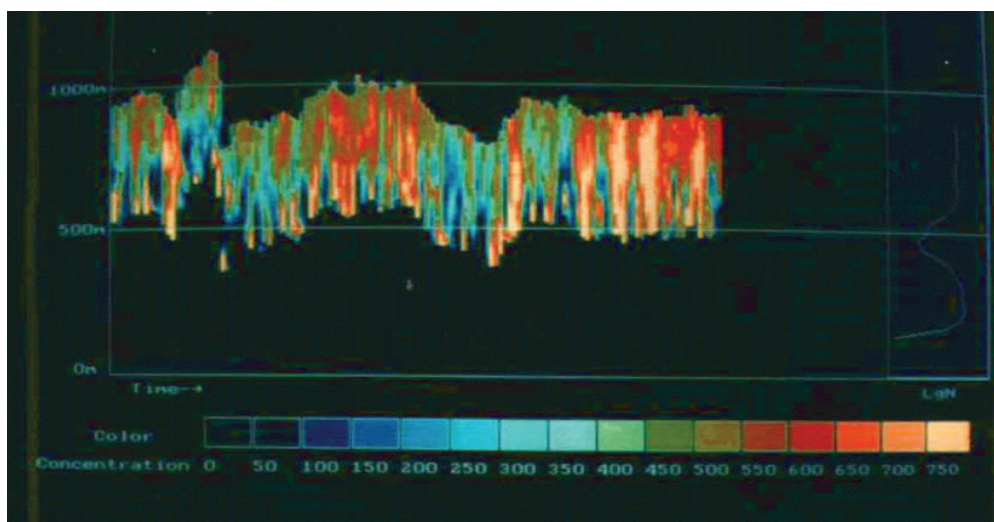


Рис. 2. Пространственная структура распределения аэрозолей в пограничном слое атмосферы—лидарные измерения коэффициента обратного рассеяния с самолета на высоте 1 км, Калмыкия.

В безоблачных условиях спиралевидные вихри также хорошо наблюдаются средствами дистанционного зондирования в других диапазонах волн [3, 4, 8, 9]. На рис. 2 представлено пространственно-периодическое распределение аэрозоля (мелкая фракция), зафиксированное с помощью лидарных измерений коэффициента обратного рассеяния на пыли в пустынях Калмыкии [10], где из-за низкой влажности образование облачности в области локализации вихревых структур не происходит. Пространственный масштаб квазипериодичности зафиксированных аэрозольных слоев составляет 2–5 км, что характерно для валиковой циркуляции, высота роллов — не более 2 км [11]. Периодичность в распределении аэрозоля отмечается на всех высотах лидарного зондирования — от 300 м до 1000 м.

Согласно оценкам, вклад мезомасштабных роллов в тепломассоперенос через АПС составляет от 20 до 60%, причем вклад в вертикальный перенос в высоких широтах превалирует над турбулентным [6, 7, 12]. Роллы играют важную роль в индуцировании формирования новых частиц и, соответственно, образования ядер облачной конденсации [13]. В океаническом пограничном слое наблюдаются схожие движения (ленгмюровская циркуляция) [14]. Совокупность этих факторов и того, что оценки мощно-

сти антропогенных выбросов аэрозолей в атмосферу составляют порядка 10^7 – 10^8 т. в год [15, 16], делают задачу моделирования распределений концентраций мелкодисперсных аэрозолей в роллах существенной для моделирования процессов переноса и химической трансформации антропогенных примесей в АПС в целом.

Особый интерес представляет задача переноса аэрозолей в случае, когда тяжелый аэрозоль вступает в реакцию с внешней средой или распадается. Распространяясь в атмосфере, он диффундирует и под действием силы тяжести опускается на землю с постоянной скоростью, которая предвычисляется из задачи Стокса [17, 18].

В настоящей работе предлагаются два обоснованных метода расчета полей концентраций мелкодисперсных аэрозолей в вихревых структурах, использующих результаты моделирования поля скоростей в вихрях [19]. На основе методов теории возмущений [20] получено приближенное решение стационарной пространственно-периодической сингулярно возмущенной задачи реакция–диффузия–адвекция, моделирующей распределений аэрозоля, оценен остаточный член и предложен метод численного решения задачи нулевого приближения. В качестве альтернативного подхода к задаче численного моделирования поля концентраций рассмотрена реализация метода эволюционной факторизации, на основе которого исследован вопрос о влиянии величин скоростей распада и оседания аэрозоля на распределение концентрации этой примеси в роллах. Использование этих двух подходов строго обосновано с привлечением методов и результатов [20–23]. Таким образом, описано единственное устойчивое стационарное состояние системы путем описания распределения концентрации аэрозоля, отвечающего этому состоянию. С использованием модельных данных получена оценка количества переносимого аэрозоля.

В заключение этого параграфа отметим другие примеры эффективного использования методов асимптотического анализа при решении прямых и обратных задачах атмосферной диффузии малых примесей [24–26], связанных с получением оценок эмиссий локальных и распределенных источников загрязняющих примесей и параметров турбулентной диффузии для устойчивого или нейтрального АПС, а также при решении обратных задач по восстановлению параметров моделей реакция–диффузия–адвекция других приложений [27–32].

2. Постановка задачи. Изменение концентрации $C(x_1, x_2, x_3, t)$ аэрозоля при миграции через АПС описывается уравнением типа реакция–диффузия–адвекция [17]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \langle k \rangle \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(k_3(x) \frac{\partial C}{\partial x_3} \right) - \sum_{i=1}^2 u_i(x) \frac{\partial C}{\partial x_i} - (u_3(x) - v_g) \frac{\partial C}{\partial x_3} + F(C, x) \quad (2.1)$$

$$x \in \mathbb{R}^2 \times (a, b), \quad t > 0,$$

где $\langle k \rangle$ – среднее значение горизонтального коэффициента турбулентной диффузии, $k_3(x)$ – вертикальный коэффициент турбулентной диффузии [17], $u_i(x)$, $i = \overline{1, 3}$ – составляющие средней скорости переноса примеси вдоль соответствующих осей, v_g – абсолютная величина скорости оседания частиц примеси, $F(C, x)$ – мощность стока вещества.

В качестве масштабов длины, скорости и времени выберем толщину экмановского слоя $L = (K/f)^{1/2} \sim 1000$ м, скорость геострофического ветра $G \sim 10$ м/с [2] и $1/f$, где $f = \Omega \sin \theta$, Ω – угловая скорость вращения Земли, θ – широта, K – характерная вертикальная турбулентная вязкость (подробнее см. [1, 2, 33, 34]). Поскольку характерные горизонтальные масштабы развивающихся структур кратны высоте экмановского слоя, то в качестве характерного пространственного масштаба по трем измерениям используется высота слоя Экмана (см., например, [2, 11, 19]).

Заметим, что детальный анализ данных позволяет говорить о сосуществовании в АПС наряду со структурами, горизонтальный масштаб λ которых в несколько раз пре-

восходит вертикальный h , где $\lambda/h \geq 2$, структур, вертикальный масштаб которых равен и меньше горизонтального $\lambda/h \leq 1$ [6, 35].

Определим безразмерные переменные посредством соотношений: $x' = \frac{x}{L}$, $t' = \frac{t}{T}$, $C' = \frac{C}{\tilde{C}}$, где T – характерное время существования валиковых структур (несколько суток), \tilde{C} – характерная концентрация, например, фоновое значение концентрации (или ее среднее на некоторой высоте). Тогда в безразмерных переменных уравнение (2.1) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{L}{TG} \frac{\partial C'}{\partial t'} = & \frac{\langle k \rangle}{LG} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 C'}{\partial x_i'^2} + \frac{k_3(x)}{LG} \frac{\partial^2 C'}{\partial x_3'^2} - \sum_{i=1}^2 \frac{u_i(x)}{G} \frac{\partial C'}{\partial x_i'} + \\ & + \left(\frac{1}{G} \frac{\partial k_3}{\partial x_3} - \frac{u_3(x) - v_g}{G} \right) \frac{\partial C'}{\partial x_3'} + \frac{F(C, x)L}{G\tilde{C}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Согласно [18] на высоте более 100 м над поверхностью Земли изменчивостью коэффициента обмена можно пренебречь. Следовательно

$$\frac{k_3(x)}{LG} \approx \frac{\langle k \rangle}{LG} = (\text{Pr}_D \text{Re})^{-1} \sim 10^{-3},$$

где Pr_D – турбулентное диффузионное число Прандтля, Re – число Рейнольдса. В левой части уравнения (2.2) при производной от концентрации по времени в качестве множителя содержится отношение характерного временного масштаба LG^{-1} к характерному времени существования валиковых структур. Этот масштаб соответствует времени установления экмановского профиля при изменении внешних условий (напр., при изменении направления и скорости ветра), а также характерному времени развития субмезомасштабных структур вследствие сдвиговых неустойчивостей [36], обеспечивающих основной первичный вынос аэрозоля с поверхности. Поскольку $T \gg LG^{-1}$, то влиянием нестационарности можно пренебречь и рассматривать процесс как стационарный. Сохранив прежние обозначения для безразмерных концентраций, скорости переноса и оседания примеси приходим к уравнению в безразмерных переменных:

$$(\text{Pr}_D \text{Re})^{-1} \Delta C - (\mathbf{u}(x), \nabla C) + v_g \frac{\partial C}{\partial x_3} + \frac{F(C, x)L}{G\tilde{C}} = 0 \quad (2.3)$$

Заметим, что валиковыми структурами переносятся в основном мелкодисперсные аэрозоли, для которых скорость оседания ~ 1 см/с [34]. В таком случае безразмерная скорость оседания $v_g \sim 10^{-3}$.

Пусть в уравнении (2.1) $F(C, x) = -\gamma(C - \tilde{C})$, где $\gamma > 0$ – скорость распада аэрозоля (величина, обратно пропорциональная времени жизни примеси), а слагаемое $F(C, x)$ описывает распад вещества за счет столкновения частиц при миграции аэрозоля. Тогда уравнение (2.3) примет следующий вид:

$$(\text{Pr}_D \text{Re})^{-1} \Delta C - (\bar{\mathbf{u}}(x), \nabla C) - \gamma(C - 1) = 0, \quad (2.4)$$

где под обозначением $\bar{\mathbf{u}}(x)$ понимается вектор с компонентами $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x) - v_g$, v_g и $\gamma := \gamma LG^{-1}$ – безразмерные параметры модели.

Поскольку поле скоростей $\bar{\mathbf{u}}(x)$ в уравнении (2.4) предполагается гладким, то решение краевой задачи для уравнения в ограниченной области с гладкой границей, включающей в себя гряду роллов, и граничным условием смешанного типа [17], которое соответствует заданию концентрации или нулевого потока вещества на различных частях границы, существует и единственно [21, 22], а также глобально устойчиво по Ляпунову [23] как стационарное решение соответствующей начально-краевой задачи для уравнения:

$$\frac{L}{TG} \frac{\partial C}{\partial t} = (\text{Pr}_D \text{Re})^{-1} \Delta C - (\bar{\mathbf{u}}(x), \nabla C) - \gamma(C - 1), \quad (2.5)$$

где $L(TG)^{-1} \sim (\text{Pr}_D \text{Re})^{-1}$. Эти свойства стационарного решения ниже будут использованы для обоснования численного алгоритма расчета распределения концентрации аэрозоля в вихревых структурах.

С целью выбора рациональных средств численного моделирования распределения аэрозоля внутри вихревых структур, перейдем к эквивалентной (в области локализации вихревых структур) пространственно-периодической задаче для уравнения (2.4) в полосе:

$$\begin{aligned} \varepsilon \Delta C - (\bar{\mathbf{u}}(x), \nabla C) - \gamma(C - 1) &= 0; & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, & \quad x_3 \in (a, b) \\ C(x_1 + L_1, x_2, x_3) &= C(x_1, x_2, x_3); & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, & \quad x_3 \in [a, b] \\ C(x_1, x_2 + L_2, x_3) &= C(x_1, x_2, x_3); & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, & \quad x_3 \in [a, b] \\ C|_{x_3=a} &= C^a(x_1, x_2), & (\nabla C, \mathbf{n})|_{x_3=b} &= 0; & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\varepsilon := (\text{Pr}_D \text{Re})^{-1} \sim 10^{-3} > 0$ – малый параметр, L_1, L_2, a, b – некоторые положительные числа (параметры расчетной области), функции $u_i(x) = u_i(x_2, x_3)$, $i = \overline{1, 3}$ – L_2 -периодические по переменной x_2 , непрерывно дифференцируемые в области $\mathbb{R}^1 \times [a, b]$, $C^a(x_1, x_2)$ – непрерывно дифференцируемая L_1 -периодическая по переменной x_1 и L_2 -периодическая по переменной x_2 функция, \mathbf{n} – внутренняя нормаль к границе $x_3 = b$. Ось x_1 ориентирована по оси симметрии вихревых структур.

3. Численное моделирование распределения концентрации аэрозоля. Существуют разные возможности (в смысле выбора средств) в моделировании распределения аэрозоля внутри вихревых структур. Рассмотрим два возможных подхода к решению этой задачи.

Алгоритм построения численного решения задачи (2.6) основан на использовании свойства единственности и глобальной устойчивости решения этой задачи как стационарного решения соответствующей начально-краевой задачи для уравнения (2.5) и реализуется путем стационарирования решения задачи для уравнения (2.5) к решению задачи (2.6). В свою очередь, численное решение задачи для уравнения (2.5) выполняется с использованием метода эволюционной факторизации [37] в расчетной области, представляющей собой прямоугольный параллелепипед $\Pi = \{(x_1, x_2, x_3): 0 \leq x_1, x_2 \leq 49, 0.3 \leq x_3 \leq 12\}$, в котором введена равномерная сетка, состоящая из $N_1 \times N_2 \times N_3$ узлов. Безразмерный шаг сетки соответствует пространственному расстоянию в 0.1 км. Пространственные шаги сетки одинаковы по каждому из трех направлений: $h_x = h_y = h_z = 0.1$ (в безразмерных переменных). Безразмерный шаг по времени выбирается равным $\tau = 0.01$. Точность метода эволюционной факторизации при таком выборе пространственного и временного шага составляет $O(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)$ [37]. Поэтому численные расчеты проводились с точностью 0.01. По вертикали расчетная область начинается с уровня $x_3 = 0.3$, поскольку вынос аэрозоля возникает на субмезомасштабных

движениях, которые “не разрешимы” в используемом приближении. К структурам, обеспечивающим такое движение относятся, например, спонтанные вихри с вертикальной осью – пыльные дьяволы и термики. Они тянут частицы аэрозоля вверх.

В ходе реализации метода эволюционной факторизации трехмерный оператор Лапласа заменяется на произведение трех одномерных, что позволяет решить уравнение в три этапа, на каждом из которых решение уравнения сводится к решению $N_i \times N_j$, $i, j = 1, 2, 3$ обыкновенных дифференциальных уравнений методом прогонки. Метод прогонки реализуется в соответствии с алгоритмом из работы [38].

На рис. 3–4 а)–в) представлены компоненты u_1 , u_2 , u_3 вектора скорости переноса [33], рассчитанные при условиях нейтральной стратификации для достаточно характерных для АПС значениях $Re = 200$, угле поворота по отношению к геострофическому ветру 15° . На рис. 3–4 г)–е) представлены результаты по расчету безразмерной концентрации $C(x)$, полученные при численном решении задачи (2.6) при различных значениях безразмерных параметров v_g , γ и $\varepsilon = 0.004$ (в сечении вертикальной плоскостью). Рисунки 3–4 ж) или з) – разности безразмерных концентраций, которые представлены распределениям γ (уменьшаемое) и δ (вычитаемое) или δ (уменьшаемое) и ε (вычитаемое). Расчеты выполнены при различных граничных значениях концентрации C^a , равных 10 и 100.

Отметим, что согласно использованным данным [33] на верхней границе $x_3 = 12$ (в безразмерных единицах) величина компоненты скорости u_3 равна нулю, а рассчитанная концентрация постоянна и совпадает с фоновой. В связи с этим на рисунках представлены только те области изменения соответствующих физических величин, на которых наблюдаются распределения, отличные от постоянных.

В работах [13, 34] показано, что значительное количество аэрозоля попадает в приосевую область вихрей. Согласно численным расчетам, представленным на рис. 3, 4, распределение концентрации аэрозоля имеет пространственно-периодическую структуру (что соответствует данным наблюдений [10]), согласованную с периодической структурой поля скоростей [19, 33]. Основная масса увлекаемого вихрями аэрозоля удерживается ими и переносится в горизонтальной плоскости. Смещение области локализации вещества к нижней границе (по сравнению с результатами моделирования [13, 34]) связано с учетом распада и оседания вещества в модели (2.6). Учет процесса оседания аэрозоля приводит к незначительным изменениям в распределении концентрации этой примеси, не превышающим 1% от граничного значения C^a (по данным моделирования), причем наибольшее отличие величин концентраций при $v_g = 0$ и $v_g = 0.001$ приходится на области с наибольшими значениями компонент скорости переноса u_2 и u_3 , которые определяют структуру распределения примеси по вертикали (см. рис. 3 б), в), ж) и рис. 4 б), в), ж)). На эти же области приходится наибольшее отличие величин концентраций при различных скоростях распада: $\gamma = 0.1$ и $\gamma = 1$ (см. рис. 3 д), е), з) и рис. 4 д), е), з)). Покажем, что при таком выборе параметров модели (2.6) процессы распада и переноса аэрозоля преобладают над диффузией и определяют структуру поля концентраций аэрозоля в вихрях.

Рассмотрим следующую задачу Коши

$$\begin{aligned}
 (\bar{\mathbf{u}}(x), \nabla \bar{C}_0) + \gamma(\bar{C}_0 - 1) &= 0; \quad x \in \mathbb{R}^2 \times (a, b) \\
 \bar{C}_0(x_1, x_2, x_3) &= \bar{C}_0(x_1 + L_1, x_2, x_3); \quad x \in \mathbb{R}^2 \times [a, b] \\
 \bar{C}_0(x_1, x_2, x_3) &= \bar{C}_0(x_1, x_2 + L_2, x_3); \quad x \in \mathbb{R}^2 \times [a, b] \\
 \bar{C}_0(x_1, x_2, a) &= C^a(x_1, x_2); \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

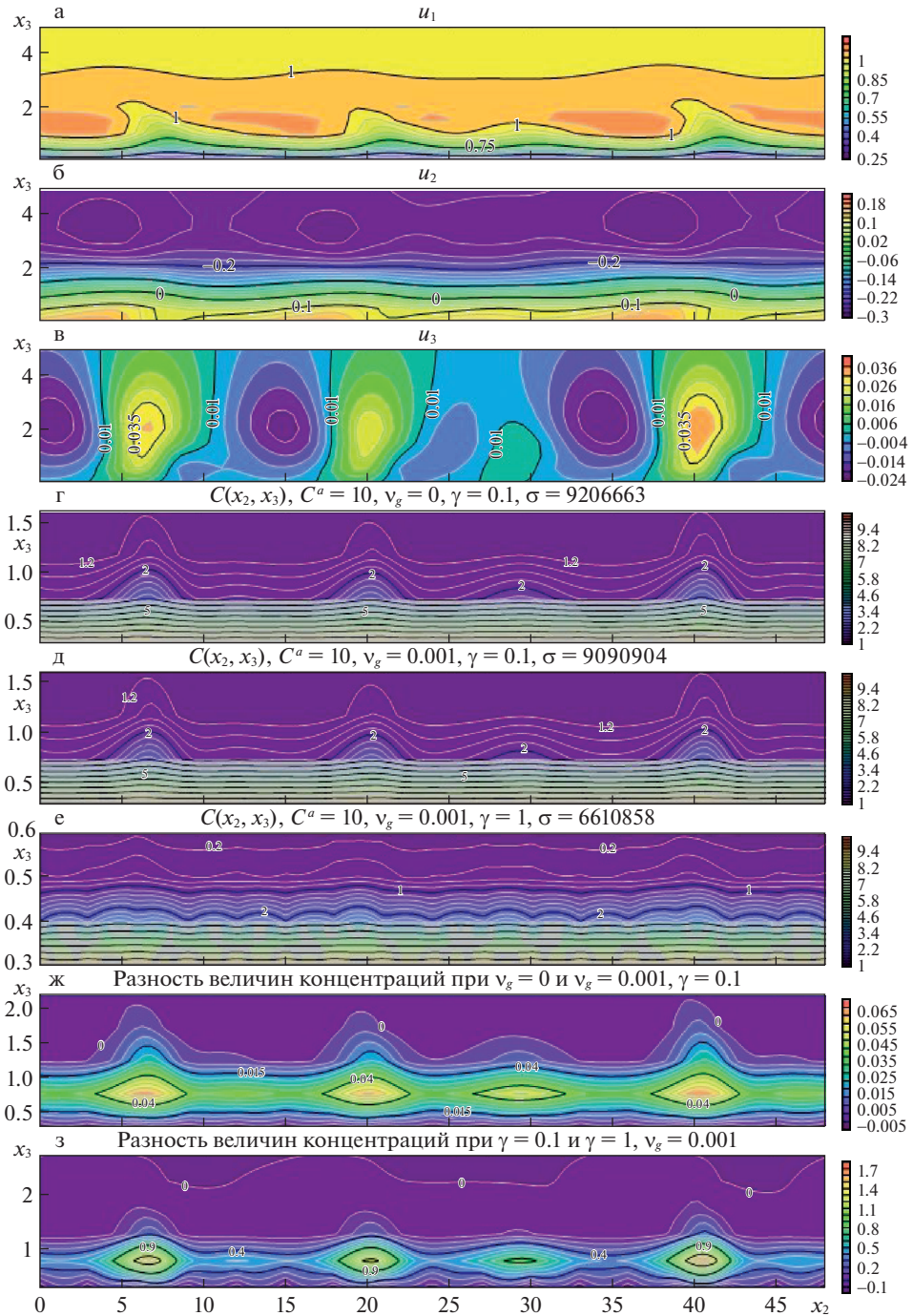


Рис. 3. Результаты расчетов при граничном условии $C^a = 10, a = 0, 3$: а–в) – компоненты скорости переноса; г–е) – поле концентраций при различных значениях v_g, γ в случае $\epsilon = 0.004$; ж) разность концентраций, г) (уменьшаемое) и д) (вычитаемое), з) разность концентраций, д) (уменьшаемое) и е) (вычитаемое).

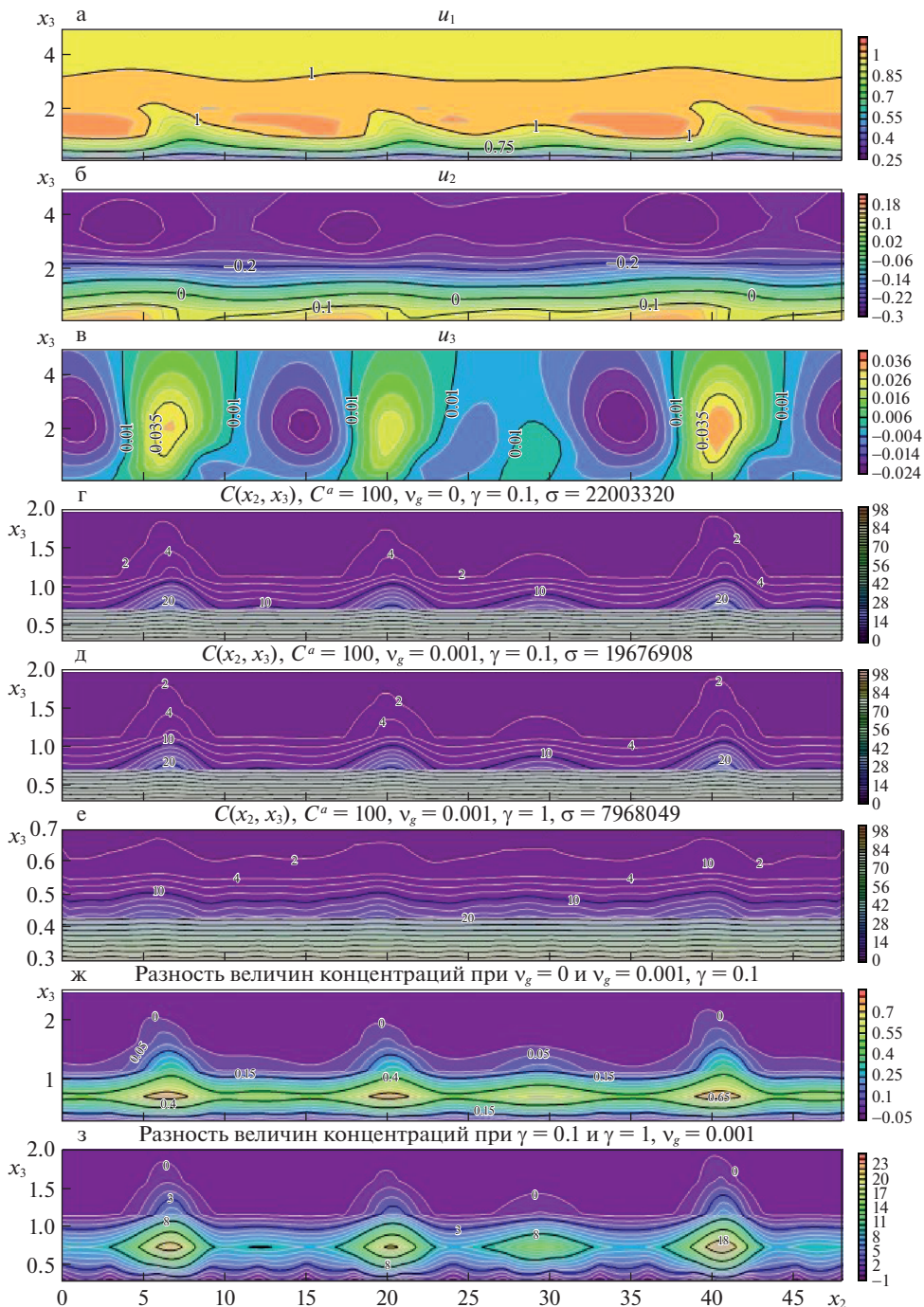


Рис. 4. Результаты расчетов при граничном условии $C^a = 100$, $a = 0, 3$: а–в) – компоненты скорости переноса; г–е) – поле концентраций при различных значениях v_g , γ в случае $\varepsilon = 0.004$; ж) разность концентраций г) (уменьшаемое) и д) (вычитаемое), з) разность концентраций д) (уменьшаемое) и е) (вычитаемое).

которая получается из задачи (2.6) при $\varepsilon = 0$ без учета условия на верхней границе при $x_3 = b$. Задача (3.1) разрешима единственным образом в классе функций $C^1(\mathbb{R}^2 \times (a, b)) \cap C(\mathbb{R}^2 \times [a, b])$, так как одна из горизонтальных компонент скорости переноса всегда отлична от нуля [39, с. 46]. Заметим, что две другие компоненты скорости переноса могут обращаться в нуль. Получим оценку точности приближенного решения $\hat{C}(x, \varepsilon) = \bar{C}_0(x)$ задачи (2.6) при $\gamma = 1$, используя метод верхних и нижних решений (см., например, [20]).

Определение. Упорядоченная пара L_1 -периодических по переменной x_1 и L_2 -периодических по переменной x_2 функций $\beta(x, \varepsilon), \alpha(x, \varepsilon) \in C^1(\mathbb{R}^2 \times [a, b]) \cap C^2(\mathbb{R}^2 \times (a, b))$ называется соответственно верхним и нижним решениями задачи (2.6), если при $0 < \varepsilon \ll 1$ выполняются следующие дифференциальные неравенства:

- 1) $\alpha(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon); \quad x \in \mathbb{R}^2 \times [a, b]$
- 2) $L_\varepsilon[\beta] := \varepsilon \Delta \beta - (\bar{\mathbf{u}}(x), \nabla \beta) - \gamma(\beta - 1) \leq 0 \leq L_\varepsilon[\alpha]; \quad x \in \mathbb{R}^2 \times (a, b)$
- 3) $\alpha(x_1, x_2, a, \varepsilon) \leq C^a(x_1, x_2) \leq \beta(x_1, x_2, a, \varepsilon)$
 $(\nabla \beta, \mathbf{n})|_{x_3=b} \leq 0 \leq (\nabla \alpha, \mathbf{n})|_{x_3=b}; \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

Известно, что если существуют верхнее и нижнее решения задачи (2.6), то решение $C(x, \varepsilon)$ этой задачи заключено между верхним и нижним решениями (см. напр., [20]):

$$\alpha(x, \varepsilon) \leq C(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon); \quad x \in \mathbb{R}^2 \times [a, b] \tag{3.2}$$

Верхнее и нижнее решения задачи (2.6) получим путем модификации приближенного решения $\hat{C}(x, \varepsilon)$ определенным образом:

$$\begin{aligned} \beta(x, \varepsilon) &= \bar{C}_0(x) + \delta + \varepsilon B \exp(\xi) \\ \alpha(x, \varepsilon) &= \bar{C}_0(x) - \delta - \varepsilon B \exp(\xi); \quad x \in \mathbb{R}^2 \times [a, b], \quad \xi \leq 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $\bar{C}_0(x)$ – решение задачи (3.1), $\varepsilon = 0.004$, $\delta = 2 \times 10^{-2}$, $B = 10^{-2}$, $\xi = (x_3 - b) / \varepsilon$.

Лемма. Функции $\beta(x, \varepsilon), \alpha(x, \varepsilon)$, определяемые равенствами (3.3), являются верхним и нижним решениями задачи (2.6).

Для доказательства леммы достаточно проверить выполнение неравенств 1)–3). Подставляя функции (3.3) в неравенства 1)–2), имеем:

$$\begin{aligned} \beta(x, \varepsilon) - \alpha(x, \varepsilon) &= 2(\delta + \varepsilon B \exp(\xi)) > 0 \\ L_\varepsilon[\beta] &= -\gamma\delta + B e^\xi + O(\varepsilon) = (-2 + e^\xi) \times 10^{-2} + O(\varepsilon) < 0 \\ L_\varepsilon[\alpha] &= \gamma\delta - B e^\xi + O(\varepsilon) = (2 - e^\xi) \times 10^{-2} + O(\varepsilon) > 0 \end{aligned}$$

При $x_3 = a$ и $x_3 = b$ имеем неравенства:

$$\begin{aligned} \alpha|_{x_3=a} &= C^a(x_1, x_2) - \delta < C^a(x_1, x_2) < C^a(x_1, x_2) + \delta = \beta|_{x_3=a} \\ \frac{\partial \beta}{\partial x_3}|_{x_3=b} &= \frac{\partial \bar{C}_0}{\partial x_3}|_{x_3=b} + B \geq 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x_3}|_{x_3=b} = \frac{\partial \bar{C}_0}{\partial x_3}|_{x_3=b} - B \leq 0, \end{aligned}$$

выполнение которых обеспечивается за счет соответствующего выбора параметра модели b . Лемма доказана. Итак, имеет место двойное неравенство (3.2).

Получим оценку остаточного члена. Поскольку $\beta(x, \varepsilon) - \alpha(x, \varepsilon) = O(\mu)$ и $\beta(x, \varepsilon) - \bar{C}_0(x) = O(\mu)$, где $\mu \sim 10^{-2}$, то в силу неравенства треугольника:

$$\|C(x, \varepsilon) - \bar{C}_0(x)\| \leq \|C(x, \varepsilon) - \beta(x, \varepsilon)\| + \|\beta(x, \varepsilon) - \bar{C}_0(x)\| = O(\mu) \quad (3.4)$$

в равномерной норме.

Теорема. Существует единственное классическое решение $C(x, \varepsilon)$ задачи (2.6), удовлетворяющее при $\gamma = 1$ оценке (3.4), где $\bar{C}_0(x)$ – решение задачи (3.1).

Заметим, что в случае $\gamma = 0.1$ справедлива аналогичная теорема с оценкой (3.4), в которой $\mu \sim 10^{-1}$. Доказательство теоремы легко получить, если положить $\delta = 2 \times 10^{-1}$.

Таким образом, в качестве модельной задачи может быть использована задача (3.1), причем допущенная при этом ошибка в решении определяется неравенством (3.4). Для численного решения задачи (3.1) можно использовать метод конечных элементов [40], реализуемый в FEniCS Project (вычислительная платформа с открытым исходным кодом (LGPLv3) для решения уравнений в частных производных) через API для Python, дающий результат вычислений близкий (в соответствии с теоремой) к результату, представленному на рис. 3, 4.

4. Обсуждение результатов. Оценка количества переносимого аэрозоля. Из общих теорем теории линейных уравнений 2-го порядка в частных производных [21–23] следует, что состояние системы, которому соответствует стационарное распределение концентрации аэрозоля, изменившись по причине внешнего возмущения, возвращается в исходное стационарное состояние в силу устойчивости и единственности стационарного решения, описывающего это состояние. Таким образом, стационарное распределение концентрации аэрозоля отвечает наиболее вероятному состоянию этой системы.

В результате численного моделирования установлено, что поле концентрации аэрозоля в вихревых структурах имеет пространственно-периодическую структуру, согласованную с периодическим изменением поля скоростей [19, 33], что также согласуется с данными наблюдений [10]. Учет распада и оседания аэрозоля приводит к смещению области локализации вещества по вертикали в направлении нижней границы расчетной области (по сравнению с данными моделирования [13, 34]).

Количество вещества Q , переносимое через сечение $S \approx (50 \times 4)$ км² за 1 мин определяется формулой (в размерных переменных):

$$Q \approx \tilde{C}L^3 m_0 \iint_{S'} dx_2 dx_3 \int_0^1 C(x) dx_1,$$

где m_0 – масса молекулы аэрозоля, S' – прямоугольная область: $(x_2, x_3) \in [0, 45] \times [0.3, 4]$.

В разд. 3 на рис. 3, 4 приведены вычисленные значения интеграла

$$\sigma := \iint_{S'} dx_2 dx_3 \int_0^1 C(x) dx_1$$

для поля скоростей [19, 33] и различных значений параметров модели (2.6).

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-10080 и Фонда развития теоретической физики и математики “Базис” в рамках гранта № 19-2-6-178-1.

Авторы выражают глубокую благодарность проф. В.Ф. Бутузову за внимание к работе и полезные рекомендации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lilly D.K. On the stability of Ekman boundary flow // J. Atmos. Sci. 1966. V. 23. № 5. P. 481–494.
2. Пономарев В.М., Хапаев А.А., Чхетиани О.Г. Роль спиральности в формировании вторичных структур в экмановском пограничном слое // Изв. РАН. ФАО. 2003. Т. 39. № 4. С. 435–444.
3. Thompson T.W., Liu W.T., Weissman D.E. Synthetic aperture radar observation of the ocean roughness from rolls in an unstable marine boundary layer // J. Geophys. Res. 1983. V. 10. P. 172–175.
4. Mourad P.D., Walter B.A. SAR streaks vs cold streets: viewing a cold air outbreak using satellite-based SAR and AVHRR imagery // J. Geophys. Res. 1996. V. 101. P. 16391–16400.
5. Atkinson B.W., Wu Zhang J. Mesoscale shallow convection in the atmosphere // Rev. Geophys. 1996. V. 34. № 4. P. 403–431.
6. Brummer B. Structure, dynamics and energetics of boundary layer from Kontur aircraft observations // Beitr. Phys. Atmos. 1985. V. 58. P. 237–254.
7. Chou S.-H., Ferguson M.P. Heat fluxes and roll circulation over the western gulf stream during an intense cold-air outbreak // Bound. Lay. Meteor. 1991. V. 55. № 3. P. 255–281.
8. Gerling T.W. Structure of the surface wind fields from Seasat SAR // J. Geophys. Res. 1986. V. 91. P. 2308–2320.
9. Alpers W., Brummer B. Atmospheric boundary layer rolls observed by the synthetic aperture radar aboard the ERS-1 satellite // J. Geophys. Res. 1994. V. 99. P. 12613–12621.
10. Golitsyn G.S., Granberg I.G., Andronova A.V., Ponomarev V.M., Zilitinkevich S.S., Smirnov V.V., Yablokov M.Yu. Investigation of boundary layer fine structure in arid regions: injection of fine dust into the atmosphere // Water, Air&Soil Pollut.: Focus 3. 2003. P. 245–257.
11. Вазаева Н.В., Чхетиани О.Г., Шестакова Л.В., Максименков Л.О. Нелинейное развитие структур в экмановском слое // Вычисл. мех. сплошн. сред. 2017. Т. 10. № 2. С. 197–211.
12. LeMone M.A. The structure and dynamics of horizontal roll vortices in the planetary boundary layer // J. Atmos. Sci. 1973. V. 30. P. 1077–1091.
13. Lampilahti J., Manninen H.E., Leino K. et al. Roll vortices induce new particle formation bursts in the planetary boundary layer // Atmos. Chem. Phys. 2020. V. 20. № 20. P. 11841–11854.
14. Zedel L., Farmer D.M. Organised structures in subsurface bubble clouds: Langmuir circulation in the open ocean // J. Geophys. Res. 1991. V. 96. P. 8889–8900.
15. Ивлев Л.С., Довгалюк Ю.А. Физика атмосферных аэрозольных систем. СПб.: НИИХ СПбГУ, 1999. 194 с.
16. Joint MSC-W&CCC&CEIP Rep. Transboundary particulate matter, photo-oxidants, acidifying and eutrophying components. https://emep.int/publ/reports/2019/EMEP_Status_Report_I_2019.pdf
17. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 319 с.
18. Берлянд М.Е. Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы. Гидрометеоздат, 1985. 272 с.
19. Пономарев В.М., Чхетиани О.Г., Шестакова Л.В. Нелинейная динамика крупномасштабных вихревых структур в турбулентном экмановском слое // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 2. С. 81–91.
20. Нефедов Н.Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущенных задач в частных производных // Дифф. уравн. 1995. Т. 31. № 4. С. 719–722.
21. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
22. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. 256 с.
23. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. 427 с.
24. Давыдова М.А., Еланский Н.Ф., Захарова С.А., Постыляков О.В. Применение численно-асимптотического подхода в задаче восстановления параметров локального стационарного источника антропогенного загрязнения // Докл. РАН. 2021. Т. 496. С. 34–39.
25. Zakharova S.A., Davydova M.A., Lukanenko D.V. Use of asymptotic analysis for solving the inverse problem of source parameters determination of nitrogen oxide emission in the atmosphere // Inverse Problems in Sci.&Engng. 2021. V. 29. № 3. P. 365–377.
26. Давыдова М.А., Еланский Н.Ф., Захарова С.А. О новом подходе к задаче восстановления вертикального коэффициента турбулентной диффузии в пограничном слое атмосферы // Докл. РАН. 2020. Т. 490. № 2. С. 51–56.

27. Davydova M.A., Zakharova S.A. Multidimensional thermal structures in the singularly perturbed stationary models of heat and mass transfer with a nonlinear thermal diffusion coefficient // J. Comput.&Appl. Math. 2022. V. 400. P. 113731.
28. Lukyanenko D.V., Borzunov A.A., Shishlenin M.A. Solving coefficient inverse problems for nonlinear singularly perturbed equations of the reaction-diffusion-advection type with data on the position of a reaction front // Commun. in Nonlin. Sci.&Numer. Simul. 2021. V. 99. P. 105824.
29. Argun R., Gorbachev A., Levashova N., Lukyanenko D. Inverse problem for an equation of the reaction-diffusion-advection type with data on the position of a reaction front: features of the solution in the case of a nonlinear integral equation in a reduced statement // Mathematics. 2021. V. 9. № 18. P. 2342.
30. Lukyanenko D., Yeleskina T., Prigorniy I., Isaev T., Borzunov A., Shishlenin M. Inverse problem of recovering the initial condition for a nonlinear equation of the reaction–diffusion–advection type by data given on the position of a reaction front with a time delay // Mathematics. 2021. V. 9. № 4. P. 342.
31. Levashova N., Gorbachev A., Argun R., Lukyanenko D. The problem of the non-uniqueness of the solution to the inverse problem of recovering the symmetric states of a bistable medium with data on the position of an autowave front // Symmetry. 2021. V. 13. № 5. P. 860.
32. Lukyanenko D.V., Prigorniy I.V., Shishlenin M.A. Some features of solving an inverse backward problem for a generalized burgers' equation // J. Inverse&Ill-Posed Problems. 2020. V. 28. № 5. P. 641–649.
33. Пономарев В.М., Чхетиани О.Г., Шестакова Л.В. Численное моделирование развитой горизонтальной циркуляции в атмосферном пограничном слое // Вычисл. мех. сплошных сред. 2009. Т. 2. № 1. С. 68–80.
34. Вазаева Н.В., Чхетиани О.Г., Максименков Л.О. Организованная валиковая циркуляция и перенос минеральных аэрозолей в атмосферном пограничном слое // Изв. РАН. ФАО. 2019. Т. 55. № 2. С. 17–31.
35. Mourad P.D., Brown R.A. On multiscale large eddy states in weakly stratified boundary layers // J. Atmos. Sci. 1990. V. 47. P. 414–438.
36. Чхетиани О.Г., Вазаева Н.В. Об алгебраических возмущениях в атмосферном пограничном слое // Изв. РАН. ФАО. 2019. Т. 55. № 5. С. 62–75.
37. Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Численные методы: в 2 кн. Кн 2. Методы математической физики. М.: ИЦ Академия, 2013. 303 с.
38. Абрамов А.А., Андреев В.Б. О применении метода прогонки к нахождению периодических решений дифференциальных и разностных уравнений // ЖВММФ. 1963. Т. 3. № 2. С. 377–381.
39. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука. Физматлит, 1966. 260 с.
40. Guermont J.L. A finite element technique for solving first-order PDEs in L_p // SIAM J. Numer. Anal. 2004. V. 42. № 1. P. 714–737.

On Estimation of the Contribution of Secondary Vortex Structures to the Transport of Aerosols in the Atmospheric Boundary Layer

M. A. Davydova^{a,#}, O. G. Chkhetiani^{b,##}, N. T. Levashova^{a,###}, and A. L. Nechaeva^{a,####}

^a Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

^b A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of the RAS, Moscow, Russia

[#] e-mail: m.davydova@physics.msu.ru

^{##} e-mail: ochkheti@ifaran.ru

^{###} e-mail: levashovant@physics.msu.ru

^{####} e-mail: nechaeva.al15@physics.msu.ru

In this paper, we consider two reasonable approaches to the problem of numerical simulation of the concentration distribution of finely dispersed aerosol in helical vortex structures (rolls) in the atmospheric boundary layer in order to estimate the contribution of vortex structures to the transport of aerosols through the boundary layer. Using the methods of perturbation theory, an approximate solution of a stationary spatially periodic singularly perturbed problem of the reaction-diffusion-advection type, which models the distribution of

aerosol in vortices, is obtained, the residual term is estimated, and a method for numerically solving the zero-approximation problem is proposed. As an alternative approach to the problem of numerical modeling of the aerosol concentration field in rolls, the implementation of the evolutionary factorization method is considered. Using model data, an estimate of the amount of aerosol carried by vortex structures was obtained.

Keywords: atmospheric boundary layer, mesoscale circulation, aerosol transport, singular perturbations, asymptotic methods and their applications, reaction-diffusion-advection problems, mathematical modeling of concentration fields of small impurities in the atmospheric boundary layer

REFERENCES

1. Lilly D.K. On the stability of Ekman boundary flow // *J. Atmos. Sci.*, 1966, vol. 23, no. 5, pp. 481–494.
2. Ponomarev V.M., Khapaev A.A., Chkhetiani O.G. Role of helicity in the formation of secondary structures in the Ekman boundary layer // *Izv. Atmos. Ocean. Phys.*, 2003, vol. 39, no. 4, pp. 391–400.
3. Thompson T.W., Liu W.T., Weissman D.E. Synthetic aperture radar observation of the ocean roughness from rolls in an unstable marine boundary layer // *J. Geophys. Res.*, 1983, vol. 10, pp. 172–175.
4. Mourad P.D., Walter B.A. SAR streaks vs cloud streets: viewing a cold air outbreak using satellite-based SAR and AVHRR imagery // *J. Geophys. Res.*, 1996, vol. 101, pp. 16391–16400.
5. Atkinson B.W., Wu Zhang J. Mesoscale shallow convection in the atmosphere // *Rev. Geophys.*, 1996, vol. 34, no. 4, pp. 403–431.
6. Brummer B. Structure, dynamics and energetics of boundary layer from Kontur aircraft observations // *Beitr. Phys. Atmos.*, 1985, vol. 58, pp. 237–254.
7. Chou S.-H., Ferguson M.P. Heat fluxes and roll circulation over the western gulf stream during an intense cold-air outbreak // *Bound. Lay. Meteor.*, 1991, vol. 55, no. 3, pp. 255–281.
8. Gerling T.W. Structure of the surface wind fields from Seasat SAR // *J. Geophys. Res.*, 1986, vol. 91, pp. 2308–2320.
9. Alpers W., Brummer B. Atmospheric boundary layer rolls observed by the synthetic aperture radar aboard the ERS-1 satellite // *J. Geophys. Res.*, 1994, vol. 99, pp. 12613–12621.
10. Golitsyn G.S., Granberg I.G., Andronova A.V., Ponomarev V.M., Zilitinkevich S.S., Smirnov V.V., Yablokov M.Yu. Investigation of boundary layer fine structure in arid regions: injection of fine dust into the atmosphere // *Water, Air&Soil Pollut.: Focus 3*, 2003, pp. 245–257.
11. Vazaeva N.V., Chkhetiani O.G., Shestakova, Maksimenkov L.O. Nonlinear development of the Ekman layer structures // *Comput. Cont. Mech.*, 2017, vol. 10, no. 2, pp. 197–211. (in Russian)
12. LeMone M.A. The structure and dynamics of horizontal roll vortices in the planetary boundary layer // *J. Atmos. Sci.*, 1973, vol. 30, pp. 1077–1091.
13. Lampilahti J., Manninen H.E., Leino K. *et al.* Roll vortices induce new particle formation bursts in the planetary boundary layer // *Atmos. Chem. Phys.*, 2020, vol. 20, no. 20, pp. 11841–11854.
14. Zedel L., Farmer D.M. Organised structures in subsurface bubble clouds: Langmuir circulation in the open ocean // *J. Geophys. Res.*, 1991, vol. 96, pp. 8889–8900.
15. Ivlev L.S., Dovgalyuk YU.A. *Physics of Atmospheric Aerosol Systems*. SPb.: NIIKH SPbGU, 1999. 194 p. (in Russian).
16. Joint MSC-W&CCC, CEIP Rep. Transboundary particulate matter, photo-oxidants, acidifying and eutrophying components. https://emep.int/publ/reports/2019/EMEP_Status_Report_1_2019.pdf
17. Marchuk G.I. *Mathematical Models in Environmental Problems*. Amsterdam: Elsevier, 1986. 220 p.
18. Berlyand M.E. *Prediction and Regulation of Air Pollution*. Netherlands: Springer, 1991. 312 p.
19. Ponomarev V.M., Chkhetiani O.G., Shestakova L.V. Nonlinear dynamics of large-scale vortex structures in a turbulent Ekman layer // *Fluid Dyn.*, 2007, vol. 42, no. 4, pp. 571–580.
20. Nefedov N.N. The method of differential inequalities for some singularly perturbed partial differential equations // *Differ. Eqn.*, 1995, vol. 31, no. 4, pp. 668–671.

21. *Ladzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N.* Linear and Quasilinear Elliptic Equations. N.Y.: Acad. Press, 1968. xviii + 495 p.
22. *Miranda C.* Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico. Berlin: Springer, 1955. viii+ 222 p.
23. *Friedman A.* Partial Differential Equations of Parabolic Type. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1964. 347 p.
24. *Davydova M.A., Elansky N.F., Zakharova S.A., Postylyakov O.V.* Application of a numerical-asymptotic approach to the problem of restoring the parameters of a local stationary source of anthropogenic pollution // Dokl. Math., 2021, vol. 103, no. 1, pp. 26–31.
25. *Zakharova S.A., Davydova M.A., Lukyanenko D.V.* Use of asymptotic analysis for solving the inverse problem of source parameters determination of nitrogen oxide emission in the atmosphere // Inverse Problems in Sci.&Enging., 2021, vol. 29, no. 3, pp. 365–377.
26. *Davydova M.A., Elanskii N.F., Zakharova S.A.* A new approach to the problem of reconstructing the vertical turbulent diffusion coefficient in the atmospheric boundary layer // Dokl. Earth Sci., 2020, vol. 490, no. 2, pp. 92–96.
27. *Davydova M.A., Zakharova S.A.* Multidimensional thermal structures in the singularly perturbed stationary models of heat and mass transfer with a nonlinear thermal diffusion coefficient // J. Comput.&Appl. Math., 2022, vol. 400, pp. 113731.
28. *Lukyanenko D.V., Borzunov A.A., Shishlenin M.A.* Solving coefficient inverse problems for nonlinear singularly perturbed equations of the reaction-diffusion-advection type with data on the position of a reaction front // Commun. in Nonlin. Sci.&Numer. Simul., 2021, vol. 99, pp. 105824.
29. *Argun R., Gorbachev A., Levashova N., Lukyanenko D.* Inverse problem for an equation of the reaction-diffusion-advection type with data on the position of a reaction front: features of the solution in the case of a nonlinear integral equation in a reduced statement // Mathematics, 2021, vol. 9, no. 18, pp. 2342.
30. *Lukyanenko D., Yeleskina T., Prigorniy I., Isaev T., Borzunov A., Shishlenin M.* Inverse problem of recovering the initial condition for a nonlinear equation of the reaction–diffusion–advection type by data given on the position of a reaction front with a time delay // Mathematics, 2021, vol. 9, no. 4, pp. 342.
31. *Levashova N., Gorbachev A., Argun R., Lukyanenko D.* The problem of the non-uniqueness of the solution to the inverse problem of recovering the symmetric states of a bistable medium with data on the position of an autowave front // Symmetry, 2021, vol. 13, no. 5, pp. 860.
32. *Lukyanenko D.V., Prigorniy I.V., Shishlenin M.A.* Some features of solving an inverse backward problem for a generalized burgers' equation // J. Inverse&Ill-Posed Problems, 2020, vol. 28, no. 5, pp. 641–649.
33. *Ponomarev V.M., Chkhetiani O.G., Shestakova L.V.* Numerical modeling of developed horizontal circulation in the atmospheric boundary layer. // Comput. Contin. Mech., 2009, vol. 2, no. 1, pp. 68–80. (in Russian)
34. *Vazaeva N.V., Chkhetiani O.G., Maksimenkov L.O.* Organized roll circulation and transport of mineral aerosols in the atmospheric boundary layer // Izv., Atmos. Ocean. Phys., 2019, vol. 55, no. 2, pp. 17–31.
35. *Mourad P.D., Brown R.A.* On multiscale large eddy states in weakly stratified boundary layers // J. Atmos. Sci., 1990, vol. 47, pp. 414–438.
36. *Chkhetiani O.G., Vazaeva N.V.* On the algebraic perturbations in atmospheric boundary layer // Izv., Atmos. Ocean. Phys., 2019, vol. 55, no. 5, pp. 62–75.
37. *Kalitkin N.N., Koryakin P.V.* Numerical Methods: in 2 vols. Vol. 2. Methods of Mathematical Physics. Moscow: Publ. Center Akademiya, 2013. 303 p. (in Russian)
38. *Abramov A.A., Andreev V.B.* On the application of the sweep method to finding periodic solutions of differential and difference equations // Comput. Math. Math. Phys., 1963, vol. 3, no. 2, pp. 377–381.
39. *Kamke E.* Differential gleichungen Erster Ordnung fur Eine Gesuchte Funktion. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1979. 246 p.
40. *Guermond J.L.* A finite element technique for solving first-order PDEs in L_p // SIAM J. Numer. Anal., 2004, vol. 42, no. 2, pp. 714–737.