

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 497, 2021

---

---

## МАТЕМАТИКА

- Повышенная суммируемость градиента решения задачи Зарембы для уравнения Пуассона  
*Ю. А. Алхутов, Г. А. Чечкин* 3
- Способ задания центральных и гиббсовских мер и эргодический метод  
*А. М. Вершик* 7
- Некоторые свойства гладких выпуклых функций и метод Ньютона  
*Д. В. Денисов, Ю. Г. Евтушенко, А. А. Третьяков* 12
- Теорема о жесткости самоаффинных дуг  
*А. В. Тетенов, О. А. Челканова* 18
- Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении  
четырехмерного многообразия  
*М. В. Шамолин* 23
- 

## ИНФОРМАТИКА

- Метод поиска редуцированного базиса для нестационарных задач  
*И. В. Тимохин, С. А. Матвеев, Е. Е. Тыртышников, А. П. Смирнов* 31
- Особенности статистического распределения фазы квазигармонического сигнала  
*Т. В. Яковлева* 35
- 

- Правила для авторов 38
- 
-

# CONTENTS

---

---

**Volume 497, 2021**

---

---

## **MATHEMATICS**

Increased Summability of the Gradient of the Solution of the Zarembe Problem for the Poisson Equation <i>Yu. A. Alkhutov and G. A. Chechkin</i>	3
A Method of Defining Central and Gibbs Measures and the Ergodic Method <i>A. M. Vershik</i>	7
Some Properties of Smooth Convex Functions and Newton's Method <i>D. V. Denisov, Yu. G. Evtushenko, and A. A. Tretyakov</i>	12
Rigidity Theorem for Self-Affine Arcs <i>A. V. Tetenov and O. A. Chelkanova</i>	18
New Cases of Homogeneous Integrable Systems with Dissipation on the Tangent Bundles of Three-Dimensional Manifolds <i>M. V. Shamolin</i>	23

---

## **COMPUTER SCIENCE**

Method for Reduced Basis Discovery in Non-Stationary Problems <i>I. V. Timokhin, S. A. Matveev, E. E. Tyrtshnikov, and A. P. Smirnov</i>	31
Peculiarities of the Statistical Distribution of a Quasi-Harmonic Signal's Phase <i>T. V. Yakovleva</i>	35
For Authors	38

---

---

УДК 517.954; 517.982

## ПОВЫШЕННАЯ СУММИРУЕМОСТЬ ГРАДИЕНТА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЗАРЕМБЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

© 2021 г. Ю. А. Алхутов<sup>1,\*</sup>, Г. А. Чечкин<sup>2,3,4,\*\*</sup>

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 25.01.2021 г.

Поступило 18.02.2021 г.

После доработки 18.02.2021 г.

Принято к публикации 24.02.2021 г.

Получена оценка повышенной суммируемости градиента решения задачи Зарембы в ограниченной области на плоскости с липшицевой границей и быстрой сменой краевых условий Дирихле и Неймана с повышенным показателем суммируемости, не зависящим от частоты смены краевых условий.

*Ключевые слова:* оценки Мейерса, теоремы вложения, быстро меняющийся тип краевого условия

DOI: 10.31857/S2686954321020028

В настоящей работе обсуждаются интегральные свойства обобщенных решений уравнения Пуассона с быстро чередующимся краевым условием (Дирихле и Неймана). Устанавливается, что в ограниченной области на плоскости с липшицевой границей модуль градиента решения принадлежит пространству  $L_{2+\delta}$  при достаточно малом  $\delta > 0$ .

Повышенная суммируемость градиента решений дивергентных равномерно эллиптических уравнений с измеримыми коэффициентами на плоскости вытекает из результатов работы [1]. Позже в многомерном случае для уравнений такого же вида повышенная суммируемость градиента решения задачи Дирихле в области с достаточно регулярной границей была установлена в [2]. Отметим еще, что повышенная суммируемость градиента решений задачи Дирихле в области с липшицевой границей для уравнения  $p$ -Лапласа с переменным показателем  $p$ , обладающим

логарифмическим модулем непрерывности, получена в [3].

Установленный в настоящей работе результат позволяет улучшить ранее известные оценки решений задач с быстрой сменой типа краевых условий (см. [4–6]).

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для простоты рассмотрим модельный случай области  $D \subset \mathbb{R}^2$ , такой, что  $D = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ . Отрезок на оси абсцисс  $[0, 1]$  разделим на равные чередующиеся отрезки длины  $\varepsilon$ , которые обозначим через  $\Gamma_1^j$  и  $\Gamma_2^j$  соответственно, где  $j = 1, \dots, N$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{N}$  и  $N$  – нечетно. Ниже  $\Gamma_1$  означает объединение внутренностей отрезков  $\Gamma_1^j$  и полагается  $\Gamma_2 = \partial D \setminus \Gamma_1$ .

Рассмотрим в области  $D$  задачу Зарембы вида

$$\begin{aligned} \Delta u &= \operatorname{div} f \text{ в } D, \quad u = 0 \text{ на } \Gamma_2, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ на } \Gamma_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Стандартным методом с помощью теоремы Рисса о представлении линейного функционала можно показать, что если вектор-функция  $f = (f_1, f_2)$  имеет компоненты из  $L_2(D)$ , то существует единственное решение задачи (1) из соболевского пространства функций  $W_2^1(D)$ , имеющих нулевой след на  $\Gamma_2$ .

<sup>1</sup> Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Россия

<sup>2</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>3</sup> Институт математики с компьютерным центром – подразделение Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа, Россия

<sup>4</sup> Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

\*E-mail: yurij-alkhutov@yandex.ru

\*\*E-mail: chechkin@mech.math.msu.su

## ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Имеет место следующая

**Теорема.** Если  $f \in L_{2+\delta_0}(D)$ , где  $\delta_0 > 0$ , то существуют положительные постоянные  $\delta < \delta_0$  и  $C$ , зависящие только от  $\delta_0$ , такие, что для решения задачи (1) справедлива оценка

$$\int_D |\nabla u|^{2+\delta} dx \leq C \int_D |f|^{2+\delta} dx. \quad (2)$$

**Доказательство.** Ниже  $B_r^{x_0}$  означает открытый круг радиуса  $r$  с центром в точке  $x_0$ ,  $|B_r^{x_0}|$  — мера данного круга и полагается

$$\oint_{B_r^{x_0}} f dx = \frac{1}{|B_r^{x_0}|} \int_{B_r^{x_0}} f dx.$$

Продолжим решение  $u$  задачи (1) четно относительно оси абсцисс, оставив за продолжением предыдущее обозначение, и положим

$$\tilde{D} = \{(x, y): 0 < x < 1, -1 < y < 1\} \setminus \Gamma_2.$$

Продолженная функция  $u$  является решением задачи Дирихле

$$\Delta u = \operatorname{div} \tilde{f} \text{ в } \tilde{D}, \quad u = 0 \text{ на } \partial \tilde{D}, \quad (3)$$

где  $\tilde{f} = f$  в  $D$  и  $\tilde{f}(x, y) = (f_1(x, -y), -f_2(x, -y))$  в  $\tilde{D} \setminus (D \cup \Gamma_2)$ . Далее полагаем  $u = 0$  и  $\tilde{f} = 0$  вне области  $\tilde{D}$ . Ясно, что продолженная нулем функция  $u$  принадлежит соболевскому пространству  $W_2^1(\mathbb{R}^2)$ .

Следующий шаг — доказательство обратного неравенства Гёльдера для градиента  $u$  решения задачи (3), которое удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_D \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_D \tilde{f} \cdot \nabla \varphi dx \quad (4)$$

на всех пробных функциях  $\varphi \in W_2^1(\tilde{D})$  с нулевым следом на  $\partial \tilde{D}$ .

Сначала рассмотрим случай, когда  $B_{\frac{3R}{4}}^{x_0} \subset \tilde{D}$ , и выберем в интегральном тождестве (4) пробную функцию  $\varphi = (u - \lambda)\eta^2$ , где

$$\lambda = \oint_{B_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} u dx,$$

а срезающая функция  $\eta \in C_0^\infty(B_{\frac{3R}{4}}^{x_0})$  такова, что  $0 < \eta < 1$ ,  $\eta = 1$  в  $B_{\frac{R}{2}}^{x_0}$  и  $|\nabla \eta| \leq \frac{3}{R}$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \int_{B_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx &= -2 \int_{B_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} \eta(u - \lambda) \nabla u \cdot \nabla \eta dx + \\ &+ \int_{B_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} \eta^2 \tilde{f} \cdot \nabla u dx + 2 \int_{B_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} \eta(u - \lambda) \tilde{f} \cdot \nabla \eta dx. \end{aligned}$$

Поскольку  $0 \leq \eta \leq 1$ , то в силу неравенства Коши

$$|\eta(u - \lambda) \nabla u \cdot \nabla \eta| \leq \frac{1}{8} |\nabla u|^2 \eta^2 + 4(u - \lambda)^2 |\nabla \eta|^2,$$

$$|\eta^2 \tilde{f} \cdot \nabla u| \leq \frac{1}{8} |\nabla u|^2 \eta^2 + 4|\tilde{f}|^2,$$

$$|\eta(u - \lambda) \tilde{f} \cdot \nabla \eta| \leq \frac{1}{8} |\tilde{f}|^2 + 4(u - \lambda)^2 |\nabla \eta|^2.$$

Таким образом,

$$\int_{B_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx \leq C \left( \int_{B_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} (u - \lambda)^2 |\nabla \eta|^2 dx + \int_{B_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} |\tilde{f}|^2 dx \right).$$

В итоге, так как  $\eta = 1$  в  $B_{R/2}^{x_0}$  и  $|\nabla \eta| \leq \frac{C}{R}$ , то

$$\int_{B_{\frac{R}{2}}^{x_0}} |\nabla u|^2 dx \leq C \left( \frac{1}{R^2} \int_{B_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} (u - \lambda)^2 dx + \int_{B_R^{x_0}} |\tilde{f}|^2 dx \right). \quad (5)$$

Далее воспользуемся неравенством Пуанкаре—Соболева (см., например, [7, теорема 5.6])

$$\left( \oint_{B_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} (u - \lambda)^2 dx \right)^{1/2} \leq C(p) R \left( \oint_{B_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p},$$

где  $p \in [1, 2]$ . Для определенности считаем  $p = \frac{3}{2}$  и из (5) вытекает

$$\begin{aligned} &\left( \oint_{B_{\frac{R}{2}}^{x_0}} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &\leq C(p) \left( \left( \oint_{B_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} |\nabla u|^{\frac{3}{2}} dx \right)^{2/3} + \left( \oint_{B_R^{x_0}} |\tilde{f}|^2 dx \right)^{1/2} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть теперь  $x_0$  принадлежит замыканию  $\tilde{D}$  и  $B_{\frac{3R}{4}}^{x_0} \cap \partial\tilde{D} \neq \emptyset$ . Выберем в интегральном тождестве (4) пробную функцию  $\varphi = u\eta^2$  с такой же срезающей функцией, что и ранее. В результате получаем оценку (5) с  $\lambda = 0$ , в силу которой

$$\int_{B_{\frac{R}{2}}^{x_0}} |\nabla u|^2 dx \leq C \left( \frac{1}{R^2} \int_{B_R^{x_0}} u^2 dx + \int_{B_R^{x_0}} |\tilde{f}|^2 dx \right). \quad (7)$$

Сначала рассмотрим случай, когда  $B_{\frac{3R}{4}}^{x_0} \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$ . Поскольку функция  $u$  продолжена нулем вне области  $\tilde{D}$ , то отсюда с учетом структуры множества  $\Gamma_2$  вытекает, что для линейной меры  $l_R$  тех точек пересечения  $B_R^{x_0}$  с осью абсцисс, где  $u = 0$ , выполнено неравенство  $l_R \geq CR$  с константой  $C$ , не зависящей от  $\varepsilon$ . Теперь из неравенства теоремы [8, § 10.1] и оценки предложения 4 [8, § 9.1] будем иметь

$$\left( \int_{B_R^{x_0}} u^2 dx \right)^{1/2} \leq C(p)R \left( \int_{B_R^{x_0}} |\nabla u|^2 dx \right)^{3/2}. \quad (8)$$

Осталось предположить, что  $B_{\frac{3R}{4}}^{x_0} \cap (\partial\tilde{D} \setminus \Gamma_2) \neq \emptyset$ . Тогда для двумерной меры Лебега  $L_R$  множества  $B_R^{x_0} \cap (R^2 \setminus \tilde{D})$  справедлива оценка  $L_R \geq CR^2$ . Так как  $u = 0$  вне  $\tilde{D}$ , то хорошо известно, что неравенство (8) выполнено и в этом случае.

Таким образом, в силу (7) и (8) вновь приходим к (6). Ясно, что оценка (6) выполнена и для кругов с центрами, лежащими вне  $\tilde{D}$ . Итак, соотношение (6) имеет место для любых кругов. Поскольку  $|f| \in L_{2+\delta_0}(D)$  и мы пользовались продолжением, сохраняющим норму, то по модифицированной лемме Геринга (см. [9; 10, гл. VII]) получаем искомое неравенство (2). Теорема доказана.

Приведем простое следствие установленного результата, основанного на теореме вложения.

**Следствие.** Если выполнены условия теоремы, то решение задачи (1) непрерывно по Гельдеру в замыкании области  $D$  с показателем Гельдера, равным  $\delta/(2 + \delta)$ , и нормой Гельдера, зависящей только от постоянной  $C$  в оценке (2) и нормы  $f$  в  $L_{2+\delta_0}(D)$ .

### ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В работе рассмотрена модельная область с периодическим чередованием типа краевых усло-

вий. Однако те же результаты могут быть получены и для произвольной плоской ограниченной области  $D$  с липшицевой границей. Чередование типа краевых условий может быть как локально периодическим, так и непериодическим, но при этом требуется выполнение следующего условия: если  $x_0 \in \bar{D}$  и  $B_{\frac{3R}{4}}^{x_0} \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$ , то для меры  $l_R$  пересечения  $B_R^{x_0} \cap \Gamma_2$  должна быть выполнена оценка  $l_R \geq CR$  с константой  $C$ , не зависящей от  $\varepsilon$ .

### ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Первый автор поддержан грантом РФФИ (проект 19-01-00184), второй автор – грантом РНФ (проект 20-11-20272).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боярский Б.В. Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Матем. сб. 1957. Т. 43(85). № 4. С. 451–503.
2. Meyers N.G. An  $L^p$ -estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3-e serie. 1963. V. 17. № 3. P. 189–206.
3. Zhikov V.V. On some Variational Problems // Russian J. of Mathematical physics. 1997. V. 5. № 1. P. 105–116.
4. Чечкин Г.А. Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 6. С. 99–150.
5. Борисов Д.И. Асимптотики и оценки собственных элементов лапласиана с частой непериодической сменой граничных условий // Известия РАН. Серия матем. 2003. Т. 67. № 6. С. 23–70.
6. Chechkina A.G., Sadovnichy V.A. Degeneration of Steklov Type Boundary Conditions in One Spectral Homogenization Problem // Eurasian Mathematical J. 2015. V. 6. № 3. P. 13–29.
7. Назаров А.И., Поборчий С.В. Неравенство Пуанкаре и его приложения. СПб: Изд-во СПбГУ, 2012.
8. Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
9. Gehring F.W. The  $L^p$ -integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping // Acta Math. 1973. V. 130. P. 265–277.
10. Скрытник И.В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.

# INCREASED SUMMABILITY OF THE GRADIENT OF THE SOLUTION OF THE ZAREMBA PROBLEM FOR THE POISSON EQUATION

**Yu. A. Alkhutov<sup>a</sup> and G. A. Chechkin<sup>b,c,d</sup>**

<sup>a</sup> *A.G. and N.G. Stoletov Vladimir State University, Vladimir, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

<sup>c</sup> *Institute of Mathematics with Computing Center – Subdivision of the Ufa Federal Research Center of Russian Academy of Science, Ufa, Russian Federation*

<sup>d</sup> *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

In this paper, an estimate is obtained for the increased integrability of the gradient of the solution to the Zarembo problem in a plane bounded domain with a Lipschitz boundary and a fast change of the Dirichlet and Neumann boundary conditions, with an increased summability exponent, independent of the frequency of the boundary conditions change.

*Keywords:* the Meyers estimates, imbedding theorems, rapidly changing type of boundary conditions

УДК 519.857

## СПОСОБ ЗАДАНИЯ ЦЕНТРАЛЬНЫХ И ГИББСОВСКИХ МЕР И ЭРГОДИЧЕСКИЙ МЕТОД

© 2021 г. А. М. Вершик<sup>1, 2, 3,\*</sup>

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 02.02.2021 г.

Поступило 02.02.2021 г.

После доработки 02.02.2021 г.

Принято к публикации 24.02.2021 г.

Сформулирована общая постановка вопроса о задании инвариантных мер с теми или иными свойствами и предложен эргодический метод возмущений для описания некоторых таких мер.

**Ключевые слова:** отношение эквивалентности, коцикл, инвариантные меры, марковские цепи, копереходы

**DOI:** 10.31857/S2686954321020077

### 1. ЗАДАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР С ПОМОЩЬЮ ПРОЕКТИВНЫХ УСЛОВНЫХ МЕР

Во второй половине прошлого века постепенно выработался новый способ задания вероятностных мер в бесконечномерных системах, альтернативный классическому (колмогоровскому) способу. Вместо системы согласованных конечномерных распределений, которая позволяет определить меру единственным образом с помощью проекций, в новом методе задания предлагается иная система данных, грубо говоря, согласованная система условных мер. Метод возник независимо в теории марковских процессов (Е.Б. Дынкин), в статфизике (Р.Л. Добрушин) и др. Мы приводим абстрактную версию метода, рассматривая его одновременно как далекое обобщение теории измеримых разбиений пространств Лебега и систем условных мер по Рохлину и как проблему нахождения инвариантных мер в теории динамических систем и гиббсовских мер. Изложение ведется в терминах оснащенных отношений эквивалентности (о.о.э.), или, иначе, борелевских разбиений в стандартном борелевском пространстве и “проективных условных мер” на элементах этих раз-

биений. Можно было бы также использовать язык теории группоидов или язык теории продолжения мер со специальных алгебр (но не  $\sigma$ -алгебр) множеств на некоторую (не всю)  $\sigma$ -алгебру измеримых множеств. Сходные соображения в меньшей общности см. в [8, 11].

Новый метод по существу ввел в обиход большое количество комбинаторных, аналитических и алгебраических задач – о центральных мерах на пространствах путей градуированных графов, о марковских мерах с данными копереходами и т.д.

Пусть на стандартном борелевском пространстве  $(X, \mathfrak{A})$  (изоморфном отрезку  $[0, 1]$  как борелевскому пространству) с  $\sigma$ -алгеброй всех борелевских множеств  $\mathfrak{A}$  задано некоторое борелевское отношение эквивалентности (о.э.)  $\tau$  (т.е. разбиение) со счетными классами, а также борелевский 2-коцикл  $\rho$  с неотрицательными вещественными значениями на этом отношении, т.е. борелевская функция  $\rho$  на парах эквивалентных точек, удовлетворяющая условиям  $\rho(x, x) = \rho(x, y)\rho(y, x) = 1$ ,  $\rho(x, y)\rho(y, z) = \rho(x, z)$ . С помощью коцикла  $\rho$  на каждом классе эквивалентности однозначно с точностью до положительного множителя определяется конечная или  $\sigma$ -конечная неотрицательная мера (коротко – “условная проективная мера”). Назовем пару  $(\tau, \rho)$  оснащенный отношением эквивалентности на пространстве  $(X, \mathfrak{A})$ .<sup>1</sup> Если все классы конечны, то о.о.э. есть не что иное, как борелевски измеримое разбиение, а коцикл определяет условные вероятностные меры на всех классах.

<sup>1</sup> Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

<sup>3</sup> Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия

\*E-mail: [avershik@gmail.com](mailto:avershik@gmail.com)

<sup>1</sup> Естественно было бы, продолжая терминологию Рохлина, ввести термин “полуизмеримое разбиение с системой условных проективных мер”.

С другой стороны, хорошо известно, что если имеется некоторая вероятностная мера  $\mu$  на  $X$  (т.е. на пространстве Лебега), а  $\tau$  — о.э., то мера  $\mu$  однозначно определяет оснащение этого о.э., т.е. 2-коцикл, или условную проективную меру, на почти каждом классе эквивалентности; в случае конечного о.э. это и есть рохлинские условные меры на элементах разбиения. В случае, когда о.э. есть разбиение на траектории действия счетной группы с квазиинвариантной мерой, этот коцикл есть так называемый коцикл Радона–Никодима  $RN_\mu$ . Если коцикл тождественно равен единице, то мера называется инвариантной. В тех случаях, когда коцикл не указан, предполагается, что он тождественно равен единице. Сформулируем основную задачу.

**Задача 1.** Пусть задано о.о.э.  $(\tau, \rho)$  на стандартном борелевском пространстве  $(X, \mathfrak{A})$ ; найти все борелевские вероятностные меры  $\mu$ , у которых коцикл Радона–Никодима  $RN_\mu$  совпадает с коциклом  $\rho$  почти всюду по мере  $\mu$ , или, иначе, найти все вероятностные меры с данными условными проективными мерами на классах эквивалентности.

В том случае, когда такая мера единственна (именно этот случай отвечает колмогоровской системе конечномерных распределений), мы можем говорить о продолжении меры на  $\sigma$ -алгебру всех измеримых множеств; в общем случае единственности может не быть.

Совокупность всех мер на  $(X, \mathfrak{A})$ , задаваемых задачей 1, корректно определена и естественным образом образует симплекс Шоке. Множество его крайних точек (граница Шоке) называется абсолютом о.о.э.  $(\tau, \rho)$  и обозначается  $Ab(X, \tau, \rho)$ . Любые две различные меры из  $Ab(X, \tau, \rho)$  взаимно сингулярны и корректно определены на различных полных  $\sigma$ -алгебрах.

Традиционное построение гиббсовских мер, как и задача об инвариантных мерах действий групп в динамике, очевидным образом укладывается в описанную схему. Понятие абсолюта тесно связано с различными понятиями границ.

Если все классы о.о.э. конечны, то определено борелевское фактор-пространство  $X/\tau$ , которое совпадает с  $Ab(X, \tau, \rho)$ , и описание всех (не эргодических) мер из  $\mathcal{M}_{(\tau, \rho)}$  сводится к указанию меры на этом фактор-пространстве. Если же о.э. не определяет борелевского фактор-пространства (пространства классов), то изучение структуры абсолюта представляет серьезную проблему и существенно зависит от геометрии классов. Решение задачи 1 может быть “диким”, т.е. абсолютом может не иметь разумной параметризации, но во многих задачах, например комбинаторных, параметризация может быть предъявлена.

Нетрудно дословно обобщить все эти определения на такие о.э.  $\tau$ , у которых классы эквивалентности не счетны, но снабжены корректно определенной локально компактной топологией.

Важно подчеркнуть, что изучение о.э. возможно только вместе с коциклом, т.е. с системой условных проективных мер (даже если коцикл тождественно равен 1). Главную роль в дальнейшем изучении предмета (единственность, конкретные свойства мер и т.д.) должна играть геометрия классов о.о.э., но она пока еще плохо изучена.

Сформулируем теперь обратную задачу.

**Задача 2.** Рассматривается некоторое семейство вероятностных мер  $M$ , заданных на  $\sigma$ -алгебре  $\mathfrak{A}$  стандартного борелевского пространства  $X$ . Найти наименьшее о.э.  $\tau$ , для которого все меры  $\mu \in M$  задают один и тот же коцикл  $\rho \equiv RN_\mu$ .

Эта задача есть обобщение традиционной задачи о достаточных статистиках (ср. [7]), в которой обычно ищутся лишь измеримые (например, конечные) отношения эквивалентности. В приведенной постановке никаких ограничений на о.э. нет. Пусть, например, рассматривается множество всех мер Бернулли  $\prod_1^\infty (p, 1-p)$ ,  $p \in [0, 1]$ , в простран-

стве последовательностей  $\prod_1^\infty \{0; 1\}$ . Искомое о.о.э. есть разбиение де Финетти с единичным коциклом: две последовательности эквивалентны, если они совпадают с некоторого места  $n$  и имеют одинаковое число нулей среди первых  $n$  координат.

## 2. ГИПЕРКОНЕЧНЫЕ И РУЧНЫЕ ОСНАЩЕННЫЕ ОТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ, УНИВЕРСАЛЬНАЯ МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим сформулированную выше задачу 1 для специального случая, важность которого определяется большим количеством приложений. А именно, эта задача включает в себя задачу об описании характеров локально конечных групп или, более общо, об описании следов на АФ-алгебрах, а также задачу о центральных мерах на пространствах путей градуированных графов.

Оснащенное отношение эквивалентности  $\tau$  называется гиперконечным, если оно является монотонно возрастающим пределом последовательности конечных отношений эквивалентности:  $\tau = \bigcup_n \xi_n$ . Таким образом, гиперконечные о.о.э. можно задавать последовательностями их конечных аппроксимаций, т.е. убывающими последовательностями измеримых разбиений  $\{\xi_n\}_n$  с конечными элементами и условными мерами на них. Такие последовательности называются фильтрациями. Подробности см. в [2].



В силу ряда известных теорем траекторное разбиение для действия группы с инвариантной мерой гиперконечно тогда и только тогда, когда группа аменабельна. Однако траекторные разбиения с неединичным коциклом могут быть гиперконечными и для неаменабельных групп. Заметим, что условие гиперконечности о.о.э. есть условие на коцикл, т.е. на условные проективные меры, но как будто в таком виде оно не формулировалось. Для пространств Лебега гиперконечное о.о.э. единственно с точностью до изоморфизма (обобщенная теорема Г. Дая).

Мы накладываем чуть более сильное, чем гиперконечность, условие на аппроксимирующую последовательность измеримых разбиений  $\{\xi_n\}$ : о.э. называется ручным, или локально гиперконечным, если для каждого  $n$  число типов условных мер разбиения  $i_n$  конечно. Это условие определяет наиболее интересные для приложений гиперконечные о.э. Опишем универсальную модель ручного о.о.э.

**Определение 1.** Пусть  $X_n$  – конечное или компактное пространство и задано множество “операторов перехода”  $\{\pi_n\}$ , сопоставляющих точке  $x \in X_n$  подмножество  $\pi_n(x) \subset X_{n+1}$ . Марковским (нестационарным) компактом  $\text{Mar}$  называется пространство последовательностей

$$\text{Mar} \subset \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n \in X_n, n = 1, 2, \dots\},$$

где  $\{x_n\} \in \text{Mar} \Leftrightarrow x_{n+1} \in \pi_n(x_n)$  для любого  $n \geq 1$ .

Элементы компакта  $\text{Mar}$  мы называем траекториями, или путями. Хвостовым отношением эквивалентности  $\tau$  в марковском компакте  $\text{Mar}$  называется следующее отношение на траекториях:

$$\{x_n\} \sim_{\tau} \{y_n\} \Leftrightarrow \text{существует такое } N, \text{ что } x_n = y_n \text{ для любого } n > N.$$

Марковский компакт  $\text{Mar}$  снабжается слабой топологией и борелевской структурой. Определено понятие марковской борелевской меры  $P$ , которая задается начальным распределением  $\mu_1(\cdot)$  координаты  $x_1$  и набором переходных вероятностей, т.е. семейством мер  $\{P_{n,x}\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $x \in X_n$ , где  $P_{n,x}(y) = \text{Prob}(x_{n+1} = y | x_n = x)$ .

Но нам понадобится другая совокупность данных на марковском компакте – система копереходных вероятностей. Это семейство мер  $\{P^{n,x}\}$  на  $X_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $x \in X_{n+1}$ , где  $P^{n,x}(y) = \text{Prob}(x_n = y | x_{n+1} = x)$ . Такая система еще не определяет глобальной меры на всем марковском компакте.

**Лемма 1.** *Всякая система копереходных мер определяет коцикл на хвостовом о.э. марковского компакта: отношение условных мер двух путей  $\{x_n\}$*

*и  $\{y_n\}$ , совпадающих при  $n > N$ , равно отношению произведений соответствующих копереходных вероятностей*

$$\prod_{1 \leq i \leq N} \frac{\text{Prob}(x_i | x_{i+1})}{\text{Prob}(y_i | y_{i+1})}.$$

Назовем такие коциклы марковскими, а марковский компакт, снабженный марковским коциклом, т.е. системой копереходов, назовем оснащенным марковским компактом.

Очевидно, что всякая марковская мера на  $\text{Mar}$  однозначно определяет марковский коцикл, но, вообще говоря, система копереходов, т.е. марковский коцикл не определяет однозначно марковскую меру. Столь же ясно, что на марковском компакте могут существовать коциклы, не являющиеся марковскими.

**Теорема 1** (универсальная модель). *Для всякого стандартного борелевского пространства  $X$  и заданного в нем ручного оснащенного отношения эквивалентности  $\tau$  с коциклом  $\rho$  существует оснащенный марковский компакт  $\text{Mar}$  и борелевский изоморфизм  $T: X \rightarrow \text{Mar}$ , такой, что  $T$  отображает о.о.э.  $\tau$  в хвостовое о.э. на  $\text{Mar}$ , а коцикл  $\rho$  – в марковский коцикл.*

Таким образом, задача 1 об инвариантных мерах для ручных о.о.э. сводится к задаче о поиске всех марковских вероятностных мер  $P$  на некотором компакте  $\text{Mar}$  с заданной системой копереходных вероятностей. Иначе говоря, к описанию марковских цепей с заданными копереходами.

Если коцикл равен единице, т.е. все условные меры всех порядков равномерны, то мы получаем задачу об описании всех мер с максимальной энтропией на заданном марковском компакте.

Абсолют марковского компакта  $\text{Mar}$  обозначается через  $\text{Ab}(\text{Mar})$ . Доказательство теоремы фактически вытекает из результатов работы [2].

Вместо языка марковских компактов можно использовать язык  $\mathbb{N}$ -градуированных графов (диаграмм Браттели) – пространство путей в таком графе есть марковский компакт, что полностью определяет параллелизм изложений. Во многих ситуациях (в основном комбинаторных) язык графов предпочтительней. Модели, аналогичные марковской модели, для общих о.о.э. автору неизвестны.

### 3. ЭРГОДИЧЕСКИЙ МЕТОД И ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Под эргодическим методом решения задачи 1 об инвариантных мерах для гиперконечных отношений эквивалентности понимается метод отыскания инвариантных распределений и инвариантных мер, основанный на индивидуальной эргодической теореме или, точнее, на индивидуальной

теореме о сходимости мартингалов, применяемой к характеристическим функциям множеств из некоторого базиса  $\sigma$ -алгебры, на которой задана исковая мера. В таком понимании этот термин использован в работе автора [1] и в более ранних работах (см., например, [6]). Но практическое нахождение инвариантных мер, т.е. вероятностей цилиндров, или переходных вероятностей, как пределов некоторых условных ожиданий может быть весьма непросто. Очень существен выбор базиса множеств, меры которых вычисляются. Но, с другой стороны, сама проблема отыскания всех эргодических мер может быть “дикий”, и потому вычисления по существу не могут быть реализуемыми в полном объеме. Разумная классификация гиперконечных абсолютов (т.е. систем условных проективных мер) вряд ли возможна; в то же время борелевская классификация о.о.э., наоборот, слишком груба (см. [8]); другие, промежуточные критерии классификации автору неизвестны. Поэтому важно иметь доступные критерии разрешимости задачи об инвариантных мерах, а также способы редукции задач к некоторым каноническим задачам.

Одна из таких фундаментальных задач, решение которой получено с помощью канонического применения эргодического метода, — это задача об описании всех эргодических мер в бесконечном произведении  $X^\infty = \prod_1^\infty X$  (где  $X$  — некоторое борелевское пространство), инвариантных относительно группы  $S_\infty$  всех конечных подстановок координат. Обозначим через  $\tau^F$  о.э. в  $X^\infty$ , порожденное разбиением на траектории действия группы  $S_\infty$ . Ответ в задаче 1 дается теоремой де Финетти, и состоит он в том, что всякая эргодическая, инвариантная мера есть бернуллиевская мера с произвольным одномерным распределением (= мерой на  $X$ ). Таким образом,  $\text{Ab}(X^\infty, \tau^F) = \text{Meas}(X)$ .

Если рассматривать этот ответ с точностью до метрического изоморфизма, то окажется, что абсолют состоит из единственной чисто непрерывной меры на  $X$ , континуума дискретных мер и их смесей, т.е.  $\text{Ab}(X^\infty, \tau^F) = \{ \{\alpha_n\}: \alpha_n \geq 0, \sum_n \alpha_n \leq 1 \}$ .

Во многих недавних примерах задач о нахождении абсолюта в комбинаторных и алгебраических ситуациях ответ (предположительно или на самом деле) имеет сходную структуру: абсолют есть симплекс Шоке (его можно назвать вторичным симплексом), т.е. и сами эргодические меры также допускают разложение. Поэтому естественно предположить, что доказательство этого факта следует искать не прямым вычислением, а изучая редукцию к описанной выше фундаментальной задаче де Финетти. Мы предлагаем следующий способ, который можно назвать методом возмущений. В качестве невозмущенной задачи возьмем зада-

чу де Финетти о  $\tau^F$ . Первый этап состоит в построении такого гомоморфизма  $T$  пространства, в котором поставлена задача об абсолюте для некоторого о.э.  $\tau$ , в пространство  $X^\infty$ , что  $T(\tau)$  является подразбиением о.э.  $\tau^F$ . На втором этапе требуется проверить, что абсолют о.э.  $T(\tau)$  подобен или даже совпадает с абсолютом о.э.  $\tau^F$ . Нахождение гомоморфизма  $T$ , если он существует, есть наиболее нетривиальная часть метода.

Второй этап связан с проблемой, относящейся к бесконечному произведению  $X^\infty$ , которая интересна сама по себе.

**Задача 3.** Для каких о.э.  $\tau$ , удовлетворяющих условию  $\tau \succ \tau^F$ , абсолют  $\text{Ab}(X^\infty, \tau)$  состоит из всех бернуллиевских мер?

Следующий частичный ответ оказывается полезным.

**Лемма 2.** Пусть на борелевском пространстве  $X$  задано два о.о.э.  $\tau, \tau'$  с единичными коциклами, причем имеет место включение абсолютов  $\text{Ab}(X, \tau') \subset \text{Ab}(X, \tau)$ . Совпадение этих абсолютов равносильно следующему условию: для всякой эргодической меры  $\mu \in \text{Ab}(X, \tau')$  о.о.э.  $\tau$  эргодично относительно  $\mu$ .

В свою очередь, доказательство эргодичности, т.е. совпадения абсолютов, сводится к проверке стремления некоторой последовательности функционалов к константе по мере, а не к более сложной задаче нахождения слабых пределов, как в общей схеме эргодического метода.

Показательный пример пользы метода возмущений дает задача о центральных мерах графа Юнга. Теорема Тома о характерах, точнее, ее пересказ как утверждения об абсолюте графа Юнга, не оставляет сомнений в том, что эта задача должна рассматриваться в связи с теоремой де Финетти. Дело в том, что ответы в них удивительно похожи. А именно, абсолют стратифицирован: страта дискретных мер, параметризованных одномерными частотами, сумма которых равна единице, и страта мер с нулевыми частотами. Однако все известные до сих пор доказательства (см. об этом [3]) не элементарны и не вскрывают близости этих задач. Эта связь действительно нетривиальна, и основную роль в ее объяснении играют динамические свойства алгоритма RSK, который и позволяет построить нужное поднятие графа  $Q$ -таблиц до графа Шура–Вейля.

Использование  $Q$ -таблиц алгоритма RSK для накрытия бернуллиевскими мерами центральных мер для графа Юнга было впервые рассмотрено в [9], изоморфизм этого соответствия доказан в [10]. Но вложение, о котором сказано выше, не было замечено; в то же время внимательный ана-

лиз показывает, что метод возмущений позволяет доказать и саму теорему об абсолюте, т.е. доказать, что таким образом получаются все эргодические центральные меры. Для конечнострочечных таблиц Юнга этот результат неявно содержится в работе [5].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вершик А.М.* Описание инвариантных мер для действий некоторых бесконечномерных групп // ДАН СССР. 1974. Т. 218. № 4. С. 749–752.
2. *Вершик А.М.* Теория фильтраций подалгебр, стандартность и независимость // Успехи мат. наук. 2017. Т. 72. Вып. 2 (434). С. 67–146.
3. *Вершик А.М.* Три теоремы о единственности меры Планшереля с разных позиций // Тр. МИАН. 2019. Т. 305. С. 71–85.
4. *Вершик А.М.* Асимптотика разбиения куба на симплексы Вейля // Функци. анал. и прил. 2019. Т. 53. Вып. 2. С. 11–31.
5. *Вершик А.М., Цилевич Н.В.* Эргодичность и тотальность разбиений, связанных с алгоритмом RSK // Функци. анал. и прил. 2021. Т. 55. Вып. 1. С. 33–42.
6. *Линник Ю.В.* Эргодические свойства алгебраических полей. Л.: Изд-во ЛГУ, 1967.
7. *Diaconis P., Freedman D.* Partial exchangeability and sufficiency / In: Statistics: Applications and New Directions. Calcutta: Indian Statistical Institute, Calcutta, 1981. P. 205–236.
8. *Dougherty R., Jackson S., Kechris A.* The structure of hyperfinite Borel equivalence relations // Trans. Amer. Math. Soc. 1994. V. 341. № 1. P. 193–225.
9. *Kerov S.V., Vershik A.M.* The characters of the infinite symmetric group and probability properties of the Robinson–Schensted–Knuth algorithm // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. 1986. V. 7. № 1. P. 116–124.
10. *Romik D., Sniady P.* Jeu de taquin dynamics on infinite Young tableaux and second class particles // Ann. Probab. 2015. V. 43. № 2. P. 682–737.
11. *Schmidt K.* Invariant measures for certain expansive  $Z^2$ -actions // Israel J. Math. 1995. V. 90. P. 295–300.

## A METHOD OF DEFINING CENTRAL AND GIBBS MEASURES AND THE ERGODIC METHOD

A. M. Vershik<sup>a,b,c</sup>

<sup>a</sup> St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics, Saint Petersburg, Russian Federation

<sup>b</sup> St. Petersburg State University, Saint Petersburg, Russian Federation

<sup>c</sup> Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

We formulate a general statement of the problem of defining invariant measures with certain properties and suggest an ergodic method of perturbations for describing such measures.

*Keywords:* equivalence relation, cocycle, invariant measures, Markov chains, cotransitions

УДК 519.615

## НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ГЛАДКИХ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ И МЕТОД НЬЮТОНА

© 2021 г. Д. В. Денисов<sup>1,\*</sup>, академик РАН Ю. Г. Евтушенко<sup>1,2,3,4,\*\*</sup>, А. А. Третьяков<sup>2,5,6,\*\*\*</sup>

Поступило 26.11.2020 г.  
После доработки 03.02.2021 г.  
Принято к публикации 03.02.2021 г.

Получены новые свойства выпуклых бесконечно дифференцируемых функций, связанных с экстремальными задачами. Показано, что в окрестности решения даже при условии вырожденности матрицы Гессе в точке решения минимизируемой функции градиент целевой функции принадлежит образу ее второй производной. Это новое свойство выпуклых функций позволяет более широко рассматривать применение ньютоновских методов для решения задач безусловной оптимизации без требования невырожденности матрицы Гессе в точке — решении задачи и получать оценки скорости сходимости по аргументу при более общих предположениях.

*Ключевые слова:* выпуклая функция, метод Ньютона, разрешимость, сходимость, скорость сходимости, регулярность

**DOI:** 10.31857/S268695432102003X

В задаче поиска безусловного минимума рассматриваются функции  $f(\cdot)$ , определенные и достаточно гладкие в окрестности  $U(x^*)$  точки минимума функции  $n$  вещественных переменных. Всюду далее множество точек минимума функции  $f$  обозначается как  $X^* = \text{Arg min } f$  и предполагается непустым. Необходимое условие минимума функции  $f$  в точке  $x^*$  задается равенством  $f'(x^*) = 0$ , при этом матрица вторых производных функции в точке минимума является положительно полуопределенной. Следует отметить, что исследованиям по методу Ньютона посвящено значительное число научных работ, среди кото-

рых укажем [2–6]. Со многими работами можно ознакомиться в обзорной статье [1]. В данной работе показывается, что несмотря на возможную вырожденность матрицы Гессе в точке  $x^*$ , в окрестности этой точки градиент целевой функции принадлежит образу ее второй производной и, следовательно, ньютоновская система относительно направления спуска разрешима в точках этой окрестности. Это топологическое свойство выпуклости и экстремальности позволяет по-новому взглянуть на численные методы ньютоновского типа и обосновать скорость сходимости этих методов без обременительного предположения относительно невырожденности матрицы Гессе в точке  $x^*$ . Для задачи безусловной оптимизации получены свойства, уточняющие неравенство Лоясевича [7, 8]. Именно, неравенство обобщено для всего спектра производных до определенного порядка. В работе рассматриваются функции, производные которых равномерно по аргументу и в совокупности по порядку ограничены в некоторой окрестности  $U(x^*)$  точки  $x^*$ , т.е. для данной окрестности существует положительная константа  $M$  такая, что значения производных любого порядка не превосходят по абсолютному значению эту константу. Кроме того, объектом рассмотрения в работе будут достаточно гладкие в окрестности точки минимума функции, т.е. функции, имеющие неограниченное число порядков производных. Всюду далее без ограничения общности считаем  $f(x^*) = 0$  и обозначаем

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup> Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Федерального исследовательского центра “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>3</sup> Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

<sup>4</sup> Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

<sup>5</sup> System Research Institute, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland

<sup>6</sup> Siedlce University, Faculty of Sciences, Siedlce, Poland

\*E-mail: dvden@cs.msu.ru

\*\*E-mail: yuri-evtushenko@yandex.ru

\*\*\*E-mail: tret@ap.siedlce.pl

$f^{(0)}(x) = f(x)$ . Для функции одной переменной справедлива

**Лемма 1.** *Если  $x^*$  – точка изолированного локального минимума достаточно гладкой в  $U(x^*)$  функции  $f: R \rightarrow R$ , производные которой равномерно по аргументу и в совокупности по порядку ограничены в некоторой окрестности  $U(x^*)$ , то существует четная степень  $2p$ ,  $p = p_f \in \mathbb{N}$ , для которой справедливы неравенства*

$$f^{(2p)}(x^*) > 0, \quad f^{(k)}(x^*) = 0, \\ \frac{f^{(k)}(x)}{(x - x^*)^{2p-k}} \geq C_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2p - 1,$$

при всех  $x \in \overset{\circ}{U}(x^*)$ , где положительные константы  $C_k = C_{k,f}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, 2p - 1$ , не зависят от  $x$ .

**Доказательство.** Поскольку  $x^*$  – точка локального минимума функции  $f$ , то  $f'(x^*) = 0$ . Сначала покажем, что в условиях леммы невозможна ситуация, когда производные  $f^{(k)}(x^*) = 0$  при любом порядке  $k, k = 1, 2, \dots$ . Действительно, в этом случае для фиксированной точки  $x = x^* + t \in U(x^*)$  в силу ограниченности производных в окрестности  $x^*$  из формулы Тейлора при нулевых производных до любого фиксированного порядка  $k$  следует неравенство  $|f'(x^* + \theta t)| \leq \frac{M(|\theta t|)^k}{k!}$ , где  $M$  – обозначенная выше верхняя грань для множества значений производных функции  $f$  в указанной окрестности и  $\theta \in (0, 1)$ . Отсюда и из условия изолированности локального минимума  $x^*$

значение  $f(x^* + t) = \int_0^1 f'(x^* + \theta t) d\theta \leq \frac{M}{(k+1)!}$ . При

достаточно больших  $k$  это означает противоречие с возможным предположением  $f(x) \neq 0, x \neq x^*$ , что противоречит изолированности локального минимума  $x^*$ . Следовательно, существует конечное  $k > 1: f^{(k)}(x^*) \neq 0, f^{(l)}(x^*) = 0, l = 1, 2, \dots, k - 1$ . При этом порядок  $k$  может быть только четным:  $k = 2p, p \in \mathbb{N}$  и  $f^{(2p)}(x^*) > 0$ , поскольку  $x^*$  – точка локального минимума функции  $f$ . Теперь для завершения доказательства достаточно обозначить через  $C_0$  значение

$\frac{1}{(2p+1)!} f^{(2p)}(x^*)$ , тогда из формулы Тейлора

и ограниченности производной порядка  $2p + 1$  в окрестности  $U(x^*)$  будет вытекать первое неравенство леммы. Разложение в окрестности  $x^*$  по формуле Тейлора производной  $f^{(k)}(x)$  дает остальные неравенства леммы при любом  $k, k = 1, 2, \dots, 2p - 1$ , если через  $C_k$  обозначить  $\frac{1}{(2p+1-k)!} f^{(2p)}(x^*)$ .

**Следствие 1.** *При выполнении условий леммы 1 функция  $f$  локально выпукла.*

Действительно, если  $f^{(2)}(x^*) > 0$ , то в малой окрестности  $x^*$  вторая производная будет оставаться положительной, что означает локальную выпуклость  $f(x)$ . Если же  $f^{(2)}(x^*) = 0$ , то, как показано в лемме 1,  $f^{(2p)}(x^*) > 0$  для некоторого  $p = p_f \in \mathbb{N}, p > 1$ , и при этом  $f^{(k)}(x^*) = 0, k = 1, 2, \dots, 2p - 1$ . Тогда  $f^{(2)}(x) \geq C_2(x - x^*)^{2p-2}$  для любого  $x \in U(x^*)$ , положительная константа  $C_2$  определена ранее в лемме 1. Последнее неравенство также означает локальную выпуклость  $f$ .

Для функции  $n$  переменных производную  $k$ -го порядка по направлению  $h$  в точке  $x$  будем обозначать как  $f_h^{(k)}(x)$ .

**Следствие 2.** *Если достаточно гладкая функция  $f: R^n \rightarrow R$ , производные которой равномерно по аргументу и в совокупности по порядку ограничены в некоторой окрестности  $U(x^*)$  изолированной точки минимума  $x^*$ , то для каждого  $h \in R^n: \|h\| = 1$ , существует четная степень  $2p_{h,f}, p_{h,f} \in \mathbb{N}$ , для которой справедливы неравенства  $f^{(2p_{h,f})}(x^*) > 0, f^{(k)}(x^*) = 0, \frac{f^{(k)}(x^* + th)}{t^{2p_{h,f}-k}} \geq C_k, k = 0, 1, 2, \dots, 2p_{h,f} - 1$  при всех  $t \in (0, \delta_h]$ , где положительные константы  $C_k = C_{k,h,f}, k = 0, 1, 2, \dots, 2p_{h,f} - 1$ , не зависят от  $t, x^* + \delta_h \in U(x^*)$ , при этом сама функция локально выпукла вдоль направления  $h$ .*

Здесь элемент  $p = p_{h,f} \in \mathbb{N}$  определяется направлением  $h, \|h\| = 1$  и не зависит от малых  $t$ , для которых  $x^* + \delta_h \in U(x^*)$ , но значение  $\delta_h > 0$  зависит от  $h$  и в общем случае эта величина может быть бесконечно малой относительно  $h$ . Далее в лемме 2 будет показано, что для случая выпуклой функции  $f$  можно гарантировать существование верхней границы для величины  $p_{h,f} \in \mathbb{N}$  и положительной нижней границы для  $\delta_h$  на множестве векторов  $h: \|h\| = 1$ .

Из леммы 1 вытекает, что в точках достаточно малой выколотой окрестности решения корректно определен оператор Ньютона  $\psi(x) = x - f^{(2)}(x)^{-1} f'(x)$ . Для случая произвольной размерности пространства  $R^n$  лемма 1 означает выпуклость функции  $f$  вдоль любой прямой, проходящей через точку  $x^*$ , при условии достаточной гладкости функции на пересечении прямой и окрестности  $U(x^*)$ . Кроме того, для любой прямой, проходящей через точку  $x^*$  вдоль вектора  $h$ ,

справедливо неравенство  $f_h^{(2m)}(x^*) \geq C_2$  для некоторой степени  $2p, p = p_h \in \mathbb{N}$  и некоторой константы  $C_2 = C_{2,h} > 0$ . Неравенство Лоясевича гарантирует выполнимость данного неравенства в случае аналитичности в окрестности  $U(x^*)$  функции при некоторых  $p, C_2$ , не зависящих от  $h$ . Выпуклость в указанной окрестности функции позволяет требовать лишь достаточную гладкость функции и получить свойство “устойчивости” неравенства Лоясевича, что расширяет область применения метода Ньютона. Имеет место

**Лемма 2.** *Если выпуклая достаточно гладкая функция  $f: R^n \rightarrow R$ , производные которой равномерно по аргументу и в совокупности по порядку ограничены в некоторой окрестности  $U(x^*)$  изолированной точки минимума  $x^*$ , то существует четная степень  $2p, p = p_f \in \mathbb{N}$ , константа  $C = C_f > 0$  и величина  $\delta = \delta_f > 0$ , для которых*

$$f(x^* + th) \geq Ct^{2p}$$

при всех  $h: \|h\| = 1, t \in (0, \delta]$ .

**Доказательство.** Докажем существование такого  $p = p_f \in \mathbb{N}$ , обладающего свойством: если  $f_h^{(i)}(x^*) = 0, i = 0, 1, 2, \dots, 2p'(h) - 1, f_h^{(2p'(h))}(x^*) > 0$ , то  $p'(h) \leq p$ . Предположим противное, тогда для некоторых последовательностей  $h_k: \|h_k\| = 1, t_k: t_k \rightarrow +0$  имеет место неравенство  $f(x^* + t_k h_k) < C_k t_k^{m_k}$ , где  $C_k > 0$  – элементы некоторой ограниченной, а  $m_k \in \mathbb{N}$  – возрастающей последовательностей. Без ограничения общности можно считать, что  $h_k \rightarrow h, C_k \rightarrow C, k \rightarrow \infty$ . Обозначим  $\text{conv}\{h_k, h_{k+1}, h_{k+2}, \dots, h_{k+n}\}$  через  $V_k$ . В случае  $\dim V_k < n$  указанный набор векторов изменяется путем прибавления к  $n - \dim V_k$  векторам линейно независимых приращений длины порядка  $C_k t_k^{2p}, C_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ , после чего можно считать  $\dim V_k = n$ . Пусть далее  $h'_k \in \text{int } V_k, h''_k = h + \alpha_k(h'_k - h), \alpha_k \in (0, 1), \alpha_k = \inf\{\alpha > 0: h + \alpha(h'_k - h) \in V_k\}$ . Из выпуклости и непрерывности  $f$  следует  $f(x^* + t_k h''_k) \leq 2C t_k^{m_k}$ . С другой стороны, из леммы 1 следует, что для некоторого  $p = p_h \in \mathbb{N}$  существует степень  $k \in \mathbb{N}, k \leq p$ , для которой производная  $f_h^{(2k)}(x^*) \geq C_2 > 0$  для некоторого  $C_2 > 0$ . Поскольку  $h'_k \rightarrow h, k \rightarrow \infty$ , то при достаточно больших номерах  $k$  будут выполняться неравенства  $f(x^* + t_k h''_k) \geq C_2 t_k^{2k}$ , что противоречит предположению.

**Следствие 3.** *Из доказательства леммы 2 следует существование степени  $2p, p = p_f \in \mathbb{N}$ , а*

*также констант  $C_k = C_{k,f}, k = 1, 2, \dots, 2p' - 1$ , для которых*

$$f_h^{(2p')}(x^*) > 0, \quad f_h^{(k)}(x^*) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, 2p' - 1, \\ f_h^{(k)}(x^* + th) \geq C_k t^{2p-k}, \quad 0 < t \leq \delta,$$

при этом  $p' = p'(h) \leq p$  при всех  $h: \|h\| = 1$ .

Для точки  $x = x^* + th \in U(x^*), \|h\| = 1$  определим базис  $G = G(h) = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  пространства  $R^n$  и соответствующий индекс  $q = q(h)$  следующим образом. Рассмотрим матрицы

$$a_k = \frac{1}{(k-1)!} f^{(k)}(x^*) [h]^{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Тогда в точке  $x = x^* + th$  для достаточно гладкой функции  $f$  справедливы соотношения

$$f^{(2)}(x)th = \sum_{k \geq 2} (k-1) a_k h t^{k-1}, \\ f'(x) = \sum_{k \geq 2} a_k h t^{k-1}, \quad f(x) = \sum_{k \geq 2} \frac{a_k [h]^2 t^k}{k}. \quad (1)$$

Далее определим номер  $k_1 \geq 2$  как минимальный среди тех номеров  $k$ , для которых одномерное пространство  $L_1 = L_{k_1} = \text{Lin}\{a_{k_1} h\} \neq \{0\}$ . Прямую  $L_1$  переобозначим через  $L^1$ , вектор  $g_1$  определим как  $\frac{a_{k_1} h}{\|a_{k_1} h\|}$  и далее номер  $k_2 > k_1$  определим как минимальный номер  $k$ , для которого  $\text{Lin}\{a_k h\}$  не содержится в  $L^1$ . Тогда  $L_{k_2} = \text{Lin}\{a_{k_2} h\}, \dim(L_{k_2} \oplus L^1) = 2$ , одномерное подпространство  $L_2$  определяется как  $\text{Pr}_{(L^1)^\perp} L_{k_2}$ , вектор  $g_2$  определяется как нормированный вектор  $\text{Pr}_{L_2} a_{k_2} h$ . При этом  $\text{Pr}_{L_2}(a_{k_2} h) \subseteq \text{Pr}_{L_2} \text{Im} a_{k_2}$ . Далее пространство  $L^2$  определим  $L^1 \oplus L_2$ . Далее для каждого  $j = 3, 4, \dots, q = q(h)$  аналогично определяют прямые  $L_j = \text{Pr}_{(L^{j-1})^\perp} L_{k_j}, j = 3, 4, \dots, q$  и соответствующие единичные векторы  $g_j, j = 1, 2, \dots, q$ . Номер  $q = q(h) = \dim \text{Lin}\{a_1 h, a_2 h, \dots\} \leq n$ , прямая сумма  $L^{j-1} \oplus L_j$  обозначается как  $L^j$  и является подпространством в  $R^n$  размерности  $j$ . На конечном этапе построено подпространство  $L^q$  размерности  $q = q(h) \leq n$ . Обозначим ортогональное дополнение подпространства  $L^q$  через  $H: H = (L^q)^\perp$  в случае  $q < n$  и  $H = \{0\}$  при  $q = n$ . Определим базис  $G(h)$  пространства  $R^n$  как набор построенных единичных взаимно ортогональных векторов  $g_1, g_2, \dots, g_q$ , направленных вдоль построенных ортогональных прямых  $L_l, l = 1, 2, \dots, q$ , и произвольного ортогонального базиса  $g_{q+1}, g_{q+2}, \dots, g_n$  подпространства  $H$ .

Справедлива

**Теорема 1.** Если для достаточно гладкой функции  $f: R^n \rightarrow R$  производные равномерно по аргументу и в совокупности по порядку ограничены в некоторой окрестности  $U(x^*)$  изолированной точки минимума  $x^*$ , то для любого фиксированного  $h: \|h\| = 1$  система

$$f^{(2)}(x^* + th)s = f'(x^* + th) \quad (2)$$

разрешима относительно  $s$  при достаточно малых  $t$ .

**Доказательство.** Решение системы  $s$  в базисе  $G$  при любом фиксированном векторе  $h$  определим покоординатно следующим образом. Положим  $Pr_H s = 0$ , далее координата  $s_q$  в соответствии с (1) определяется из условия

$$Pr_{L_q}((k_q - 1)a_{k_q}t^{k_q-2}s) = Pr_{L_q}f'(x) = Pr_{L_q} \sum_{k \geq k_q} a_k ht^{k-1}.$$

При этом  $s_q = \frac{Pr_{L_q}ht}{k_q - 1} + o(t)$ . Подстановка координаты  $s_q$  в систему (2) позволяет получить координату  $s_{q-1} = \frac{Pr_{L_{q-1}}ht}{k_{q-1} - 1} + o(t)$ . Далее последовательно

определяются координаты  $s_l, l = q - 2, q - 3, \dots, 1$ . Решение системы (2), вообще говоря, не единственно, но из (1) следует, что координаты любого решения  $s$  в базисе  $G = G(h)$  имеют вид

$$s_j = \frac{Pr_{L_j}ht}{k_j - 1} + o(t), \quad j = 1, 2, \dots, q. \quad (3)$$

**Замечание 1.** Для получения единственного решения системы (2) определим задачу

$$\|s\|^2 \rightarrow \min_s, \quad f^{(2)}(x)s = f'(x), \quad (4)$$

решение которой существует при каждом фиксированном  $h$  при всех достаточно малых  $t$ , при условиях, указанных в теореме 1. При этом длина интервала для  $t$ , в пределах которого решение существует, зависит от  $h$ .

**Пример 1.** Для невыпуклой функции  $f(x) = x_1^4 + (x_2 - x_1^2)^2$  вывод теоремы 1 нарушается для точек параболы  $x_2 = x_1^2$ . Таким образом, длина интервала, для которого имеет место теорема 1, стремится к нулю по мере приближения вектора  $h$  к  $(1, 0)$ .

Далее будет показано, что в случае выпуклой функции можно указать общий для всех векторов единичной сферы радиус окрестности переменной  $t$ , в пределах которой задача (4) разрешима. Из вида целевой функции задачи (4) следует, что ее решение  $s = f^{(2)}(x)^+ f'(x)$ , где  $(\cdot)^+$  означает псевдообратный оператор на своем образе. Координаты решения этой задачи в базисе  $G$  удовлетворяют условию  $Pr_H s = 0$ .

**Теорема 2.** При выполнении условий леммы 2 при всех  $x$ , достаточно близких к  $x^*$ , задача (4) разрешима и ее решение удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} (f'(x), s) &\geq M_1 \|x - x^*\|^{2p}, \\ (f''(x)s, s) &\geq M_2 \|x - x^*\|^{2p}, \end{aligned} \quad (5)$$

где степень  $2p$  определена в лемме 2, константы  $M_1 = M_{1,f}, M_2 = M_{2,f} > 0$  не зависят от  $x$ .

**Доказательство.** Из леммы 2 и (1) следует, что при всяком  $h: \|h\| = 1$  номера  $k_j$ , определяющие базис  $G$ , удовлетворяют условию: существует индекс  $l_1 \in \{k_1, k_1 + 1, \dots, 2p\}$ , для которого  $a_{l_1}[h]^2 \geq C > 0$ , степень  $2p$  определена в лемме 2 и от  $h$  не зависит, константа  $C > 0$  также не зависит от  $h$  и определяется в следствии 3. Последнее неравенство эквивалентно условию  $\frac{a_{l_1}[h]^2}{l_1 - 1} \geq C_1 t^{2p}$  при малых  $t$ . Обозначая  $\frac{C}{2p - 1}$  через  $M_1$ , получим неравенство в утверждении теоремы. Аналогично из следствия 3 получается и второе неравенство.

**Следствие 4.** При выполнении условий леммы 2 для выпуклой функции  $f$  при всех  $x$ , достаточно близких к  $x^*$ , имеет место разрешимость относительно  $s$  системы

$$f^{(2)}(x)s = f'(x), \quad (6)$$

что равносильно справедливости включения

$$f'(x) \in \text{Im } f^{(2)}(x) \quad (7)$$

независимо от величины ранга матрицы  $f^{(2)}(x)$ .

Далее будем обозначать множество  $\{x \in R^n: f(x) \leq f(x^*) + \varepsilon\}$  как  $X_\varepsilon^*$ , диаметр множества  $A$  как  $\text{diam } A$ . Справедлива

**Теорема 3.** При выполнении условий леммы 2 существует натуральное  $p$  и константа  $\bar{C} < \infty$ , для которых справедливо неравенство

$$\text{diam } X_\varepsilon^* < \bar{C} \varepsilon^{\frac{1}{2p}} \quad (8)$$

**Замечание 2.** Указанные ранее свойства справедливы в предположении, что множество точек минимума функции  $f(x)$  представляет изолированную точку. Если отказаться от данного предположения, то при выполнении остальных предположений теоремы 1 справедливо представление

$$\text{Arg min } f = \{x^*\} + L, \quad (9)$$

где  $L$  – собственное подпространство  $R^n$ , которое определяется условием  $f^k(x^*)[h]^k = 0$  для всякого натурального  $k$ .

Из теоремы 1 не следует положительная определенность матрицы  $f^{(2)}(x)$  в окрестности точки минимума  $x^*$ . Тем не менее она гарантирует применимость метода Ньютона для поиска точки минимума гладкой функции при условии подходящей начальной точки, поскольку задача (1) позволяет получить вектор перехода в итерационной схеме без предположения выпуклости целевой функции. Кроме того, в данном случае удается получить монотонность по аргументу метода Ньютона, а при более сильных предположениях — линейную скорость сходимости. В случае же выпуклости целевой функции полученной свойство справедливо без дополнительных предположений.

Рассмотрим сначала применение результата теоремы 1 для доказательства монотонности по аргументу схемы метода Ньютона. Именно, определим оператор Ньютона  $\psi(x, s) = x - f^{(2)}(x)^+ f'(x)$ , где  $f^{(2)}(x)^+ f'(x) = s$  — решение задачи (4). Из процесса построения решения  $s$  в теореме 1 и замечания к теореме следует, что для любого фиксированного  $h: \|h\| = 1$ , при достаточно малых значениях  $t$  данный оператор корректно определен без предположения выпуклости функции  $f$ . Для получения оценки скорости сходимости дополнительно к предположениям теоремы 1 естественно определяется следующее свойство.

**Определение 1.** Функция  $f$  слабо регулярна в точке  $x^*$ , если существует константа  $d = d_f > 0$ , для которой  $\max_{j \leq q} |h_j| \geq d$  для всякого  $h, \|h\| = 1$ . Здесь, как и ранее,  $q = q(h) = \dim \text{Lin}\{a_2 h, a_3 h, \dots\}$ ,  $h_j$  — координата вектора  $h$  с номером  $j$  в базисе  $G$ .

**Теорема 4.** Если функция  $f$  слабо регулярна в точке  $x^*$ , то при выполнении условий теоремы 1 существует  $\lambda \in (0, 1)$ , для которого

$$\|\psi(x^* + th, s) - x^*\| \leq \lambda t$$

при всех достаточно малых  $t$ .

**Доказательство.** Для любого решения системы (1) в силу предположения слабой регулярности в точке  $x^*$  существует номер  $j$ , для которого  $\|Pr_{L_{k_j}} h\| > d$ . Отсюда

$$\begin{aligned} \|th - s\| &\leq \left\| t \sum_{l=1, l \neq k_j}^q Pr_{L_l} h - Pr_{L_l} s \right\| + \\ &+ t \|Pr_H h\| + |t Pr_{L_{k_j}} h - Pr_{L_{k_j}} s| \leq \\ &\leq t(1 - \alpha) + t\alpha \left( 1 - \frac{1}{k_j - 1} \right) \leq t \left( 1 - \frac{d}{k_j - 1} \right) = \lambda t, \end{aligned}$$

$$\lambda = \lambda(h) = 1 - \frac{d}{k_j - 1} \in (0, 1), \quad \alpha = \alpha(h) \geq d.$$

**З а м е ч а н и е 3.** Полученное неравенство не означает линейной сходимости метода Ньютона, поскольку знаменатель  $\lambda$ , который участвует в оценке, вообще говоря, зависит от  $h$ . В случае выпуклой функции полученный результат справедлив в более сильном виде:  $\|\psi(x, s) - x^*\| \leq \lambda \|x - x^*\|$  при всех  $x$  из достаточно малой окрестности  $x^*$ , поскольку для выпуклых функций справедливо следующее свойство.

**О п р е д е л е н и е 2.** Функция  $f$  равномерно регулярна в точке  $x^*$ , если существуют номер  $m = m_f \in \mathbb{N}$  и константа  $d = d_f > 0$ , для которых найдется индекс  $j \leq q: k_j \leq m$ , такой что  $\|Pr_{L_j} h\| \geq d$ .

Имеет место

**Т е о р е м а 5.** Если функция  $f$  равномерно регулярна в точке  $x^*$ , то при выполнении условий теоремы 1 существует  $\lambda \in (0, 1)$ , для которого  $\|\psi(x, s) - x^*\| \leq \lambda \|x - x^*\|$  при всех  $x$  из достаточно малой окрестности  $x^*$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Из теоремы 4 следует, что полученный знаменатель  $\lambda = \lambda(h)$  ограничен сверху равномерно по  $h, \|h\| = 1: \lambda(h) = 1 - \frac{d}{k_j - 1} \leq \lambda' < 1$ , где

$j: k_j \leq m$ . Такой номер  $j$  существует, как показано в теореме 1. Кроме того, из условия равномерной регулярности следует, что  $\|h_H^\perp\| > d$  для некоторого  $d > 0$ , не зависящего от  $h$ , где  $h_A$  — проекция вектора  $h$  на подпространство  $A$ . Отсюда следует оценка для знаменателя  $\lambda$ , не зависящая от  $h$ .

**З а м е ч а н и е 4.** Из леммы 2 следует, выпуклая функции равномерно регулярна в точке  $x^*$ :  $k_j = k_j(h) \leq m = 2p, \|h\| = 1$ . Условие равномерной регулярности является необходимым и достаточным условием линейной скорости сходимости метода Ньютона при выполнении условий теоремы 1 без предположения о выпуклости функции  $f$ . Итерационная схема метода Ньютона имеет вид

$$x_{k+1} = x_k - f^{(2)}(x_k)^+ f'(x_k),$$

а оценка скорости сходимости метода будет линейная:

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \lambda \|x_k - x^*\|, \quad \lambda \in (0, 1), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

при начальном приближении, достаточно близком к решению  $x^*$  в случае равномерно регулярной в точке минимума функции  $f$ .

**С л е д с т в и е 5.** При выполнении условий теоремы 2 для выпуклой функции скорость сходимости итерационной схемы метода Ньютона является линейной при любом выборе начальной точки  $x$  из достаточно малой окрестности решения. Действительно, из теоремы 2 следует, что выпуклая функция является равномерно регулярной в решении  $x^*$ ,



откуда вытекает линейная оценка скорости сходимости.

Для получения сходимости метода Ньютона с более высокой скоростью, чем линейная, рассмотрим модифицированный оператор  $\psi_1(x, s)$ , покоординатная запись которого в базисе  $G$  представляет собой  $\psi_1(x, s)_j = x - (k_j - 1)s_j, j = 1, 2, \dots, q$ ;  $\psi_1(x, s)_H = x_H - g(x, h)$ , где вектор-функция  $g(x, h): H \rightarrow H, s = f^{(2)}(x)^+ f'(x)$ . Оператор  $\psi_1(x, s)_H$  позволяет определить модифицированную схему Ньютона  $x_{k+1} = \psi_1(x_k, s_k)$ . Из теоремы 1 следует

**Теорема 6.** *Модифицированная схема Ньютона гарантирует сверхлинейную оценку скорости сходимости при хорошем начальном приближении в том и только в том случае, когда функция  $g(x, h)$  удовлетворяет условию  $\|g(x, h) - h_H\| = o(t)$ .*

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-71-30005).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т. Метод Ньютона и его роль в оптимизации и вычислительной математике // Труды Ин-та системного анализа РАН. 2006. Т. 28. С. 44–62.
2. Бомадио Б., Лебедев К.А. Метод Ньютона для нахождения экстремумов сильно выпуклых функций // Международный науч.-исслед. журнал. 2015. Вып. 6-2 (37). С. 11–14.
3. Заботин В.И., Черняев Ю.А. Метод Ньютона для задачи минимизации выпуклой дважды гладкой функции на предвыпуклом множестве // ЖВМиФМ. 2018. Т. 58. № 3. С. 340–345. <https://doi.org/10.7868/S0044466918030031>
4. Budzko D., Cordero A., Torregrosa J. R. Modification of Newton's Method to extend the convergence domain // SeMA J. 2014. V. 66. № 1. P. 43–53. <https://doi.org/10.1007/s40324-014-0020-y>
5. Nesterov Y. Accelerating the cubic regularization of Newton's method on convex problems // Mathematical Programming. 2008. V. 112. № 1. P. 159–181. <https://doi.org/10.1007/s10107-006-0089-x>
6. Polyak B., Tremba A. New versions of Newton method: step-size choice, convergence domain and under-determined equations // Optimization Methods and Software. 2019. P. 1272–1303. <https://doi.org/10.1080/10556788.2019.1669154>
7. Colding T.H., Minicozzi W.P. Lojasiewicz inequalities and applications // arXiv:1402.5087. 2014
8. Lojasiewicz S. Division d'une distribution par une fonction analytique de variables reelles // C. R. Acad. Sci. 1958. V. 246. № 5. P. 683–686.

## SOME PROPERTIES OF SMOOTH CONVEX FUNCTIONS AND NEWTON'S METHOD

D. V. Denisov<sup>a</sup>, Academician of the RAS Yu. G. Evtushenko<sup>a,b,c,d</sup>, and A. A. Tret'yakov<sup>b,e,f</sup>

<sup>a</sup> Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

<sup>b</sup> Dorodnicyn Computing Centre, Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

<sup>c</sup> Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation

<sup>d</sup> Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

<sup>e</sup> System Research Institute, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland

<sup>f</sup> Siedlce University, Faculty of Sciences, Siedlce, Poland

In the article, new properties of convex infinitely differentiable functions related to extremal problems are obtained. It is shown that in the vicinity of the solution, even if the Hessian matrix is degenerate at the solution point of the function to be minimized, the gradient of the objective function belongs to the image of its second derivative. This new property of convex functions allows a broader consideration of the application of Newtonian methods for solving optimization problems in the absence of the requirement for the nondegeneracy of the Hessian matrix in the solution of the problem and to obtain estimates of the rate of convergence in argument under fairly general assumption.

**Keywords:** convex function, Newton's method, solvability, convergence, rate of convergence, regularity

УДК 517.54

## ТЕОРЕМА О ЖЕСТКОСТИ САМОАФФИННЫХ ДУГ

© 2021 г. А. В. Тетенев<sup>1,2,3,\*</sup>, О. А. Челканова<sup>2</sup>

Представлено академиком РАН Ю. Г. Решетняком 24.12.2020 г.

Поступило 24.12.2020 г.

После доработки 11.01.2021 г.

Принято к публикации 26.01.2021 г.

Как известно более десятилетия, всякая самоподобная жорданова дуга  $\gamma$ , для которой существуют подобия, сколь угодно близкие к тождественному отображению и сдвигающие эту дугу по самой себе на малое расстояние, является отрезком прямой. В настоящей работе мы распространяем это утверждение на класс самоаффинных дуг и доказываем, что всякая самоаффинная дуга, допускающая сколь угодно малые аффинные сдвиги, является отрезком параболы или прямой.

*Ключевые слова:* самоаффинная дуга, аттрактор, слабое условие отделимости, теорема жесткости

**DOI:** 10.31857/S2686954321020053

Вопрос о строении самоподобных кривых играет важную роль во фрактальной геометрии и отражен во многих работах, начиная с ее зарождения. Первыми примерами фрактальных кривых были график функции Вейерштрасса (1861), кривая Коха (1906), треугольник Серпинского (1914). В 1938 г. П. Леви исследовал равносторонние самоподобные кривые, а в 1958 г. Де Рам описал класс двузвенных самоаффинных кривых.

Важным шагом к пониманию структуры самоподобных кривых было исследование В.В. Асеевым самоподобных ципперов [7] и описание условия жордановости и ограниченности искривления их аттракторов.

В работе [8] была получена теорема жесткости для жордановых самоподобных дуг. Она состоит в том, что если жорданова дуга  $\gamma$  задана системой  $\mathcal{S}$  сжимающих подобий в  $\mathbb{R}^2$ , не удовлетворяющей слабому условию отделимости, то  $\gamma$  является отрезком прямой. Из нее вытекают теорема о конечной представимости самоподобных кривых [9] и теорема о жесткости одномерных самоподобных структур [10].

Эти результаты справедливы для жордановых дуг, порожденных системами сжимающих подо-

бий. Открытым оставался вопрос о распространении этих теорем на класс самоаффинных дуг.

К. Бандтом и А. С. Кравченко [2] было доказано, что всякая самоаффинная кривая класса гладкости  $C^2$  является поддугой параболы или отрезком прямой.

Цель настоящей работы – доказать теорему жесткости для самоаффинных дуг, устанавливающую условия, при которых жорданова дуга, порожденная конечной или бесконечной системой сжимающих аффинных отображений, является отрезком параболы или прямой.

### 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть  $\gamma \subset \mathbb{R}^n$  – жорданова дуга.  $\gamma$  называется самоподобной (соответственно самоаффинной), если она является аттрактором конечной системы  $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$  сжимающих подобий (соответственно, невырожденных аффинных отображений) в  $\mathbb{R}^n$ .

Дугу  $\gamma$  назовем локально самоаффинной, если для любой собственной поддуги  $\gamma' \subset \gamma$  существует невырожденное аффинное отображение  $S$ , такое что  $S(\gamma) \subset \gamma'$ .

Аттрактором системы  $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$  сжимающих отображений полного метрического пространства  $X$  в себя называется такое непустое компактное множество  $K \subset X$ , что  $K = S_1(K) \cup \dots \cup S_m(K)$ .

Существование и единственность аттрактора обеспечивается теоремой Хатчинсона [4].

<sup>1</sup> Институт математики им. С.Л. Соболева  
Сибирского отделения Российской академии наук,  
Новосибирск, Россия

<sup>2</sup> Горно-Алтайский государственный университет,  
Горно-Алтайск, Россия

<sup>3</sup> Новосибирский государственный университет,  
Новосибирск, Россия

\*E-mail: a.tetenov@g.nsu.ru

Для системы  $\mathcal{S}$  и ее множества индексов  $I = \{1, \dots, m\}$  назовем слова  $\mathbf{i} = i_1 \dots i_k \in I^k$  мультииндексами, а множество всех мультииндексов обозначим через  $I^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} I^k$ . Каждый мультииндекс  $\mathbf{i} = i_1 i_2 \dots i_k$  задает отображение  $S_{\mathbf{i}} = S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_k}: X \rightarrow X$ , а множества  $K_{\mathbf{i}} = S_{\mathbf{i}}(K)$  называются копиями ранга  $k$  аттрактора  $K$ .

Заметим, что всякая самоаффинная дуга является локально самоаффинной; обратное неверно.

При исследовании размерности самоподобных множеств К. Бандт и З. Граф [1] рассматривали отображения соседства  $S_i^{-1} S_j$  пар копий  $K_i$  и  $K_j$ . Множество всех отображений соседства  $\mathcal{F}(\mathcal{S}) = \{S_i^{-1} S_j, \mathbf{i}, \mathbf{j} \in I^*, i_1 \neq j_1\}$  называется ассоциированным семейством подобий системы  $\mathcal{S}$ . Система  $\mathcal{S}$  удовлетворяет слабому условию отделимости (WSP) [6], если тождественное отображение  $\text{Id}$  не является предельной точкой семейства  $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ .

Жордановы дуги  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  имеют правильное пересечение, если  $\gamma_1 \cap \gamma_2$  — дуга, один из концов которой является концом дуги  $\gamma_1$ , а другой — концом  $\gamma_2$ . Невырожденное аффинное отображение  $g(x) = Ax + b$  пространства  $\mathbb{R}^2$  мы назовем аффинным сдвигом жордановой дуги  $\gamma$ , если  $\gamma$  и  $g(\gamma)$  имеют правильное пересечение,  $\|A - E\| < \frac{1}{2}$ , а  $g(x)$  не имеет неподвижных точек на  $\gamma$ .

Главный результат настоящей работы — это следующая теорема о жесткости самоаффинных дуг.

**Теорема 1.** Пусть локально самоаффинная жорданова дуга  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  удовлетворяет одному из следующих условий:

(i) Существует последовательность аффинных сдвигов  $f_k$  дуги  $\gamma$ , сходящаяся к тождественному отображению  $\text{Id}$ ;

(ii)  $\gamma$  является аттрактором системы  $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$  сжимающих аффинных отображений, не удовлетворяющей слабому условию отделимости.

Тогда  $\gamma$  — отрезок параболы или прямой.

Доказательству утверждения теоремы в случае (i) посвящена большая часть сообщения. Основная проблема состоит в том, чтобы показать, что дуга  $\gamma$  принадлежит классу  $C^2$ . Для этого в разделе 2 мы доказываем, что каждый аффинный сдвиг  $f$  дуги  $a$  можно вложить в однопараметрическую подгруппу  $G_f = \{f^t, t \in \mathbb{R}\}$  группы аффинных отображений  $\mathbb{R}^2$ . Мы отмечаем, что орбиты точек  $x \in \mathbb{R}^2$  относительно группы  $G_f$  являются кривыми класса гладкости  $C^\infty$ . Это позволяет получить в разделе 3 по-

следовательность поддуг  $\Lambda_k$  класса  $C^\infty$ , равномерно сходящуюся к некоторой поддуге  $\gamma' \subset \gamma$ , и тем доказать требуемую гладкость  $\gamma$ . В случае (ii) требуется только доказать выполнение условия (i).

## 2. АФФИННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И АССОЦИИРОВАННЫЕ С НИМИ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

В этом разделе мы сопоставляем каждому аффинному сдвигу  $f$  однопараметрическую подгруппу  $G_f = \{f^t\}$  и показываем, что траектории  $\{f^t(x), t \in \mathbb{R}\}$  для почти всех точек  $x \in \mathbb{R}^2$  — кривые класса  $C^\infty$ .

Зададим окрестность  $\mathcal{U}$  тождественного отображения  $\text{Id}$  в группе невырожденных аффинных отображений  $GA(\mathbb{R}^2)$  равенством

$$\mathcal{U} = \left\{ f(x) = Ax + b, A \in GL(2, \mathbb{R}), \right. \\ \left. \|A - E\| < \frac{1}{2}, b \in \mathbb{R}^2, \|b\| < 1 \right\}.$$

Пусть  $A(\mathbb{R}^2)$  — пространство всех аффинных отображений плоскости  $g(y) = Ly + \beta$ , где  $L \in L(2, \mathbb{R})$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^2$ .

**Лемма 1.** Существует гомеоморфизм  $\Psi$  окрестности  $\mathcal{U}$  тождественного отображения в  $GA(\mathbb{R}^2)$  на окрестность  $\mathcal{V}$  нулевого отображения в  $A(\mathbb{R}^2)$  такой, что для любого  $f \in \mathcal{U}$  отображение  $g = \Psi(f)$  удовлетворяет условию:

для любого  $x \in \mathbb{R}^2$  решение  $y = f^t(x)$  задачи Коши  $\{\dot{y} = g(y), y(0) = x\}$  при  $t = 1$  равно  $f(x)$ .

Иными словами, отображение  $g(y) = Ly + \beta$  таково, что для любого  $x \in \mathbb{R}^2$  значение  $f(x)$  совпадает со значением оператора эволюции

$$f^t(x) = e^{tL}x + e^{tL} \int_0^t e^{-sL} ds \cdot \beta \quad (1)$$

аффинной системы

$$\dot{y} = Ly + \beta \quad (2)$$

при  $t = 1$ . Таким образом, мы вкладываем  $f(x)$  в однопараметрическую группу невырожденных аффинных отображений  $\{f^t(x), t \in \mathbb{R}\}$ , задаваемую уравнением (2).

Следуя [3, 5], в качестве  $L$  мы берем главное значение  $\ln A$  матричного логарифма  $A$ , задаваемое рядом  $L = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(A-E)^n}{n}$ , а вектор  $\beta$  находим из равенства  $b = e^L \int_0^1 e^{-sL} ds \cdot \beta$ . Интегрирование дает, что  $(e^L - E)\beta = Lb$  или, в других обозначениях,  $(A - E)\beta = \ln A \cdot b$ .

Поэтому  $b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n}{(n+1)!} \beta$  и  $\beta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(A-E)^n}{n+1} b$ .

Таким образом, отображения  $\Psi$  и  $\Psi^{-1}$  задаются равенствами

$$g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(A-E)^n}{n} \cdot y + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(A-E)^n}{n+1} b, \tag{3}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n}{n!} x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n}{(n+1)!} \beta. \tag{4}$$

Заметим, что при  $f \in \mathcal{O}_U$ ,  $\|E - A\| < \frac{1}{2}$ , а  $\|L\| < \ln 2 < 0.7$ . Это обеспечивает равномерную сходимость рядов в выражениях (3) и (4) и показывает, что  $\Psi$  гомеоморфно отображает множество  $U$  на некоторую окрестность  $\mathcal{V} = \Psi(U)$  нуля в  $A(\mathbb{R}^2)$ .

**Лемма 2.** *Интегральные кривые  $L_f(x) = \{f^t(x); t \in \mathbb{R}\}$  системы (2) принадлежат классу гладкости  $C^\infty$ .*

Напомним, как задаются эти кривые в зависимости от выбора  $g \in \mathcal{V}$ . Как известно, здесь возможны три случая:

1. Оба собственных значения  $\lambda_1, \lambda_2$  матрицы  $L$  отличны от 0. Тогда собственные значения  $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}$  матрицы  $A$  не равны 1. В этом случае уравнение (2) имеет единственную стационарную точку  $x_0 = -L^{-1}\beta = (I - A)^{-1}b$ , а

$$f^t(x) = e^{Lt}(x - x_0) + x_0. \tag{5}$$

2. Матрица  $L$  вырождена и ее собственные значения равны  $\lambda \neq 0$  и 0. Если соответствующие собственные векторы  $e_1, e_2$ , а векторы  $b$  и  $x$  соответственно равны  $b_1e_1 + b_2e_2$  и  $x_1e_1 + x_2e_2$ , то

$$f^t(x) = \left( x_1 e^{\lambda t} + b_1 \frac{e^{\lambda t} - 1}{e^\lambda - 1} \right) e_1 + (x_2 + b_2 t) e_2. \tag{6}$$

3. Если  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , а  $L \neq 0$ , то матрица  $L$  подобна жордановой клетке с нулями на диагонали.

Пусть  $(e_1, e_2)$  – базис, в котором матрица  $L$  имеет вид  $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , и пусть  $\beta = ue_1 + ve_2$  и  $b = b_1e_1 + b_2e_2$ . Тогда

$$f^t(x) = \left( \frac{b_2}{2} t^2 + \left( x_2 + b_1 - \frac{b_2}{2} \right) t + x_1 \right) e_1 + (b_2 t + x_2) e_2. \tag{7}$$

В случаях 2 и 3 система (2) либо не имеет стационарных точек, либо, если  $b_2 = 0$ , имеет неподвижную прямую  $\{x = \tau e_1 + x_2 e_2; \tau \in \mathbb{R}\}$ , параллельную вектору  $e_1$ .

В каждом из этих случаев если  $x$  не является точкой покоя системы (2), то кривая  $L_f(x)$  принадлежит классу гладкости  $C^\infty$ .

### 3. АППРОКСИМАЦИЯ ДУГИ $\gamma$ ГЛАДКИМИ КРИВЫМИ

Пусть  $f_k$  – последовательность аффинных сдвигов жордановой дуги  $\gamma$ , сходящаяся к  $\text{Id}$ . Пусть  $a_0, a_1$  – концы дуги  $\gamma$ . Не ограничивая общности, мы можем предполагать, что дуга  $\gamma$  содержится в круге  $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$  и что  $f_k(a_0) \in \gamma$  для любого  $f_k$ .

**Лемма 3.** *Для любого  $x \in \gamma$  можно выбрать такие  $n_k, N_k$ , что последовательность множеств*

$$P(k, x) = \{f_k^n(x), -n_k \leq n \leq N_k - n_k\} \tag{8}$$

*сходится к  $\gamma$  в метрике Хаусдорфа  $d_H$ .*

Наметим идею доказательства леммы 3.

В силу компактности дуги  $\gamma$  для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta$ , что если  $x_1, x_2 \in \gamma$  и  $d(x_1, x_2) < \delta$ , то диаметр поддуги  $\gamma_{x_1, x_2}$  меньше  $\varepsilon$ . Пусть  $\sigma_{k,0} = \gamma f_k(\gamma)$ . Для всякого  $k \in \mathbb{N}$  существует такое число  $N_k$ , что множество точек  $\{f_k^n(a_0), 0 \leq n \leq N_k\}$  разбивает дугу  $\gamma$  на непересекающиеся поддуги  $\sigma_{k,n} = f_k^n(\sigma_{k,0})$  с концами  $(f_k^n(a_0), f_k^{n+1}(a_0))$  при  $0 \leq n \leq N_k - 1$  и поддугу  $\sigma_{k,N_k} = f_k^{N_k}(\sigma_{k,0}) \cap \gamma$  с концами  $(f_k^{N_k}(a_0), a_1)$ .

Существует такое  $N$ , что при  $k > N$  и  $y \in \gamma$ ,  $\|f_k(y) - y\| < \delta$ . Тогда диаметры поддуг  $\sigma_{k,n}$  меньше  $\varepsilon$ . Пусть  $n_k$  – такой номер, что точка  $x \in f_k^{n_k}(\sigma_{k,0})$ . Тогда множество  $P(k, x)$  содержит точки каждой из поддуг  $\sigma_{k,n}$ , поэтому  $d_H(P(k, x), \gamma) < \varepsilon$ .

Это показывает справедливость утверждения леммы 3.

Покажем теперь, что дуга  $\gamma$  принадлежит классу гладкости  $C^2$ .

Пусть  $\Lambda_k(x) = \{f_k^t(x), -n_k \leq t \leq N_k - n_k\}$  – поддуга интегральной кривой  $L_{f_k}(x)$ . Так как  $\Lambda_k(x) \supset P(k, x)$ , дуга  $\gamma$  содержится в верхнем топологическом пределе  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_k(x)}$  последовательности множеств  $\Lambda_k(x)$ .

Множества  $\Lambda_k$  являются отрезками интегральных кривых линейных динамических систем  $\dot{y} = L_k y + \beta_k$ .

Так как  $f_k \rightarrow \text{Id}$ , последовательность  $g_k = \Psi(f_k)$  сходится к 0. Воспользуемся тем, что кривые  $\Lambda_k$  являются отрезками интегральных кривых уравнений  $\dot{y} = \theta g_k(y)$  при любом выборе  $\theta > 0$  и, выбрав подходящие множители  $\theta_k$ , построим последовательность  $\theta_k g_k$ , отделенную от 0.

Для этого возьмем  $\theta_k = 1 / \max\{\|g_k(y)\|, y \in D\}$ . Положив  $\hat{g}_k = \theta_k g_k$ , мы получим последовательность линейных динамических систем в  $D$ , интегральные кривые которых совпадают с интегральными кривыми систем  $\dot{y} = g_k(y)$ . При этом  $\max\{\|\hat{g}_k(y)\|, y \in D\}$  равен единице и, в силу выпуклости функции  $\|\hat{g}_k(y)\|$ , достигается на границе  $D$ .

В силу теоремы Арцела, из последовательности  $\hat{g}_k$  можно выделить подпоследовательность, которая равномерно сходится к некоторой аффинной функции  $g_0$ , которая отлична от нуля, поскольку  $\max\|g_0(x)\|$  на  $D$  также равен 1.

Если  $\gamma \cap D$  не является отрезком прямой, то найдется такая точка  $\xi \in \gamma$ , что  $g_0(\xi) = a \neq 0$ . Найдём такое  $N$  и такую окрестность  $V(\xi)$ , что при  $x \in V$  и  $n \geq N$ ,  $\|\hat{g}_n(x) - a\| < \|a/2\|$ . Тогда существует такое  $T > 0$ , что для любого  $n > N$  и для любой точки в  $x \in V$  время выхода этой точки за пределы  $V$  по траектории  $\Lambda_n$  не превосходит  $T$ .

При этом в силу непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от правых частей решения уравнений  $\dot{x}(t) = \hat{g}_n(x)$ ,  $x(0) = \xi$  равномерно сходятся вместе со всеми производными к решению уравнения  $\dot{x}(t) = g_0(x)$ ,  $x(0) = \xi$ , а интегральные кривые  $L_{n_k}$  сходятся к интегральной кривой  $L_0$  уравнения  $\dot{x}(t) = g_0(x)$ .

Так как для любой точки  $x \in \gamma \cap V$ ,  $g_0(x) \neq 0$ , эта кривая принадлежит классу  $C^\infty$ , но тогда и  $\gamma \in C^\infty$ .

Поскольку, согласно теореме К. Бандта и А.С. Кравченко [2], всякая самоаффинная дуга класса гладкости  $C^2$  является отрезком параболы, таковой является и дуга  $\gamma$ . Это завершает доказательство теоремы в случае (i).

Чтобы получить доказательство утверждения (ii) теоремы 1, мы опираемся на следующие рассуждения:

1. Пусть  $\gamma$  – самоаффинная жорданова дуга  $\gamma$ ,  $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$  – порождающая ее система, а отображение  $f$  принадлежит ассоциированному семейству  $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ . Тогда либо  $f(\gamma) \cap \gamma$  – поддуга в  $f(\gamma)$  и  $\gamma$ , либо  $f(\gamma) \cap \gamma = \emptyset$ .

2. Из условий теоремы следует, что существует последовательность  $f_n \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$ , сходящаяся к Id такая, что последовательность поддуг  $f_n(\gamma) \cap \gamma$  сходится к  $\gamma$ . Тогда существует последовательность аффинных сдвигов  $\hat{f}_n \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$  дуги  $\gamma$ , сходящаяся к Id. Поэтому  $\gamma$  – отрезок параболы.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2019-1613.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bandt Ch., Graf S.* Self-similar sets 7. A characterization of self-similar fractals with positive Hausdorff measure // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 114. № 4. P. 995–1001.
2. *Bandt C., Kravchenko A.S.* Differentiability of fractal curves // Nonlinearity. 2011. V. 24. P. 2717.
3. *Гантмахер Ф.П.* Теория матриц. 5-е изд. М.: Физматлит, 2004. 560 с. ISBN 5-9221-0524-8.
4. *Hutchinson J.* Fractals and self-similarity // Indiana Univ. Math. J. 1981. V. 30. № 5. P. 713–747.
5. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
6. *Zerner M.P.W.* Weak separation properties for self-similar sets // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. V. 124. № 11. P. 3529–3539.
7. *Асеев В.В., Тетенев А.В., Кравченко А.С.* О самоподобных жордановых кривых на плоскости // Сиб. матем. журн. 2003. Т. 44. № 3. С. 481–492.
8. *Асеев В.В., Тетенев А.В.* О жордановых самоподобных дугах, допускающих структурную параметризацию // Сиб. матем. журн. 2005. Т. 46. № 4. С. 733–748.
9. *Тетенев А.В.* Самоподобные жордановы дуги и граф-ориентированные системы подобий // Сиб. матем. журн. 2006. Т. 47. № 5. С. 1147–1153.
10. *Tetenov A.V.* On the rigidity of one-dimensional systems of contraction similitudes // Siberian Electr. Math. Rep. 2006. V. 3. P. 342–345.

**RIGIDITY THEOREM FOR SELF-AFFINE ARCS****A. V. Tetenov<sup>a,b,c</sup> and O. A. Chelkanova<sup>b</sup>**<sup>a</sup> *Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*<sup>b</sup> *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation*<sup>c</sup> *Gorno-Altai State University, Gorno-Altai, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS Yu.G. Reshetnyak

It is known for more than a decade that if a self-similar arc  $\gamma$  can be shifted along itself by similarity maps which are arbitrarily close to identity then it is a straight line segment. We extend this statement to the class of self-affine arcs and prove that each self-affine arc, admitting affine shifts which may be arbitrarily close to identity, is a segment of a parabola or a straight line.

*Keywords:* self-affine arc, attractor, weak separation property, rigidity theorem

УДК 517+531.01

## НОВЫЕ СЛУЧАИ ОДНОРОДНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2021 г. М. В. Шамолин<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН В. В. Козловым 27.01.2021 г.

Поступило 27.01.2021 г.

После доработки 27.01.2021 г.

Принято к публикации 14.02.2021 г.

В работе показана интегрируемость некоторых классов однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким четырехмерным многообразиям. При этом силовые поля приводят к появлению диссипации переменного знака и обобщают ранее рассмотренные.

**Ключевые слова:** динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл

**DOI:** 10.31857/S2686954321020041

Изучение интегрируемости автономных систем на четырехмерном конфигурационном многообразии  $M^4$  приводит к изучению систем восьмого порядка на касательном расслоении  $TM^4$ . При этом ключевым, наряду с геометрией многообразия  $M^4$ , является структура силового поля, присутствующего в системе. Например, задача о движении пятимерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к четырехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [1, 2]. Системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [2, 3].

Известны также задачи о движении точки по четырехмерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского той же размерности и т.д. Но иногда в системах с диссипацией все-таки удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных, в смысле комплексного анализа, функций, поскольку полный список даже непрерывных автономных первых интегралов найти не удастся. Данные результаты

важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного силового поля.

В работе показана интегрируемость некоторых классов однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким четырехмерным многообразиям. При этом силовые поля приводят к появлению диссипации переменного знака и обобщают ранее рассмотренные [2, 3].

### 1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Как известно, в случае четырехмерного риманова многообразия  $M^4$  с координатами  $(\alpha, \beta)$ ,  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ , и аффинной связностью  $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$  уравнения геодезических линий на касательном расслоении  $TM^4\{\alpha^\bullet, \beta_1^\bullet, \beta_2^\bullet, \beta_3^\bullet; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$   $\alpha = x^1$ ,  $\beta_1 = x^2$ ,  $\beta_2 = x^3$ ,  $\beta_3 = x^4$ ,  $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ , примут следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

$$x^{i\bullet\bullet} + \sum_{j,k=1}^4 \Gamma_{jk}^i(x) x^{j\bullet} x^{k\bullet} = 0, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (1)$$

Изучим структуру уравнений (1) при изменении координат на касательном расслоении  $TM^4$ . Для этого рассмотрим замену координат касательного пространства:

$$x^{i\bullet} = \sum_{j=1}^4 R^{ij} z_j, \quad (2)$$

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*E-mail: shamolin@imec.msu.ru

которую можно обратить:  $z_j = \sum_{i=1}^4 T_{ji} x^{i\bullet}$ , при этом  $R^{ij}, T_{ji}, i, j = 1, \dots, 4$ , – функции от  $x$ , а также  $RT = E$ , где  $R = (R^{ij}), T = (T_{ji})$ . Назовем также уравнения (2) новыми кинематическими соотношениями, т.е. линейными соотношениями на касательном расслоении  $TM^4$ . Справедливы равенства:

$$z_i^\bullet = \sum_{j,k=1}^4 T_{ij,k} x^{j\bullet} x^{k\bullet} - \sum_{j,p,q=1}^4 T_{ij} \Gamma_{pq}^j x^{p\bullet} x^{q\bullet}, \quad (3)$$

где  $T_{ji,k} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}, j, i, k = 1, \dots, 4$ , при этом в системе

(3) вместо  $x^{i\bullet}, i = 1, \dots, 4$ , надо подставить формулы (2), и правые части составной системы (2), (3) являются однородными формами соответствующих степеней по квазискоростям  $z_1, \dots, z_4$ .

**Предложение 1.** Система (1) в той области, где  $\det R(\alpha, \beta) \neq 0$ , эквивалентна составной системе (2), (3).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1) к эквивалентной системе (2), (3) зависит как от замены (2) (т.е. вводимых кинематических соотношений), так и от аффинной связности  $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$ .

Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\begin{aligned} \alpha^\bullet &= z_4 f_4(\alpha), & \beta_1^\bullet &= z_3 f_1(\alpha), \\ \beta_2^\bullet &= z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), & \beta_3^\bullet &= z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $f_k(\alpha), k = 1, 2, 3, g_l(\beta_1), l = 1, 2, h(\beta_2)$  – гладкие функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты  $z_1, \dots, z_4$  в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических [4, 5], например, с 13 ненулевыми коэффициентами связности (в частности, на четырехмерных поверхностях вращения, в пространстве Лобачевского и т.д.):

$$\begin{aligned} \alpha^{\bullet\bullet} + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \alpha^{\bullet 2} + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \beta_1^{\bullet 2} + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \beta_2^{\bullet 2} + \\ + \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) \beta_3^{\bullet 2} &= 0, \\ \beta_1^{\bullet\bullet} + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) \alpha^\bullet \beta_1^\bullet + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \beta_2^{\bullet 2} + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \beta_3^{\bullet 2} &= 0, \\ \beta_2^{\bullet\bullet} + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \alpha^\bullet \beta_2^\bullet + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \beta_1^\bullet \beta_2^\bullet + \\ + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \beta_3^{\bullet 2} &= 0, \\ \beta_3^{\bullet\bullet} + 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) \alpha^\bullet \beta_3^\bullet + 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) \beta_1^\bullet \beta_3^\bullet + \\ + 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) \beta_2^\bullet \beta_3^\bullet &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (4) уравнения (3) примут вид

$$\begin{aligned} z_1^\bullet &= -f_4(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha)] z_1 z_4 - \\ &- f_1(\alpha) [2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + Dg_2(\beta_1)] z_1 z_3 - \\ &- f_2(\alpha) g_1(\beta_1) [2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + Dh(\beta_2)] z_1 z_2, \\ z_2^\bullet &= -f_4(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)] z_2 z_4 - \\ &- f_1(\alpha) [2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1)] z_2 z_3 - \\ &- \frac{f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1)}{f_2(\alpha) g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) z_1^2, \\ z_3^\bullet &= -f_4(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)] z_3 z_4 - \\ &- \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) z_2^2 - \\ &- \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) z_1^2, \\ z_4^\bullet &= -f_4(\alpha) [\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_4(\alpha)] z_4^2 - \\ &- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) z_3^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) z_2^2 - \\ &- \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) z_1^2, \end{aligned} \quad (6)$$

$Dj(\gamma) = \frac{d \ln |j(\gamma)|}{d\gamma}$ , и уравнения (5) геодезических почти всюду эквивалентны составной системе (4), (6) на многообразии  $TM^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ .

Для полного интегрирования системы (4), (6) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. При этом первые интегралы (в частности, и для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее.

**Предложение 2.** Если всюду справедлива система дифференциальных равенств

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_4(\alpha) &\equiv 0, \\ f_4^2(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)] + f_1^2(\alpha) \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv 0, \\ f_4^2(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)] + \\ + f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv 0, \\ f_4^2(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha)] + \\ + f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv 0, \\ f_1^2(\alpha) [2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1)] + \\ + f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) &\equiv 0, \\ f_1^2(\alpha) [2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + Dg_2(\beta_1)] + \\ + f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) &\equiv 0, \end{aligned} \quad (7)$$



$$f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) \left[ 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + Dh(\beta_2) \right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \equiv 0,$$

то система (4), (6) имеет аналитический первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_1(z_4, \dots, z_1) = z_1^2 + \dots + z_4^2 = C_1^2 = \text{const}. \quad (8)$$

Примеры. Уравнения (5) геодезических в четырехмерном пространстве Лобачевского в модели Клейна примут вид

$$\alpha'' - \frac{1}{\alpha}(\alpha'^2 - \beta_1'^2 - \beta_2'^2 - \beta_3'^2) = 0, \quad (9)$$

$$\beta_k'' - \frac{2}{\alpha}\alpha'\beta_k' = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Можно выписать 7-параметрическую систему, эквивалентную уравнениям (9) геодезических и имеющая первый интеграл вида (8). Аналогичными свойствами обладают уравнения геодезических и на четырехмерных поверхностях вращения.

Система равенств (7) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (8) (или см. ниже (21)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [5, 6]). Поиск же как первого интеграла (8), так и других (см. далее) опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

Можно доказать отдельную теорему существования решения  $f_k(\alpha)$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $g_l(\beta_1)$ ,  $l = 1, 2$ ,  $h(\beta_2)$  системы (7) для наличия аналитического интеграла (8) для исследуемой системы (4), (6) уравнений геодезических. Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией не всегда все условия (7) нам потребуются. Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (4) выполнение условия

$$f_1(\alpha) \equiv f_2(\alpha) \equiv f_3(\alpha) = f(\alpha), \quad (10)$$

при этом функции  $g_l(\beta_1)$ ,  $l = 1, 2$ ,  $h(\beta_2)$  должны удовлетворять, вообще говоря, преобразованным уравнениям из (7):

$$2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1) + g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \equiv 0,$$

$$2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + Dg_2(\beta_1) + g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \equiv 0, \quad (11)$$

$$g_1^2(\beta_1) \left[ 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + Dh(\beta_2) \right] + g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \equiv 0.$$

Таким образом, функции  $g_l(\beta_1)$ ,  $l = 1, 2$ ,  $h(\beta_2)$  зависят от коэффициентов связности, а ограничения на функции  $f(\alpha)$ ,  $f_4(\alpha)$  будут даны ниже.

Предложение 3. Если выполнены свойства (10), (11), при этом справедливы равенства

$$\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) = \Gamma_1(\alpha), \quad (12)$$

то система (4), (6) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_2(z_3, z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \quad (13)$$

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\}.$$

Предложение 4. Если выполнены условия предложения 3, а также

$$g_1(\beta_1) \equiv g_2(\beta_1) = g(\beta_1), \quad (14)$$

при этом справедливы равенства

$$\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) = \Gamma_2(\beta_1), \quad (15)$$

то система (4), (6) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_3(z_2, z_1; \alpha, \beta_1) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \quad (16)$$

$$\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{10}}^{\beta_1} \Gamma_2(b) db \right\}.$$

Предложение 5. Если выполнены условия предложений 3, 4, при этом справедливо равенство

$$\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) = \Gamma_3(\beta_2), \quad (17)$$

то система (4), (6) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_4(z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = z_1 \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) \Psi_2(\beta_2) = C_4 = \text{const}, \quad (18)$$

$$\Psi_2(\beta_2) = h(\beta_2) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{20}}^{\beta_2} \Gamma_3(b) db \right\}.$$

Предложение 6. Если выполнены условия предложений 3–5, то система (4), (6) имеет первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_5(\beta_2, \beta_3) = \beta_3 \pm \int_{\beta_{20}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2 \Psi_2^2(b) - C_4^2}} db = C_5 = \text{const}, \quad (19)$$

где, после взятия интеграла (19), вместо постоянных  $C_3$ ,  $C_4$  можно подставить левые части равенств (16), (18) соответственно.

Теорема 1. Если выполнены условия предложений 2–6, то система (4), (6) обладает пятью независимыми первыми интегралами вида (8), (13), (16), (18), (19).

То, что полный набор при некоторых условиях состоит из пяти, а не из семи первых интегралов, будет показано ниже.

**2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ**

Модифицируем (4), (6), получив систему консервативную. А именно, введем гладкое (внешнее) силовое поле в проекциях на оси  $z_k^\bullet$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , соответственно:  $F_1(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2)$ ,  $F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1)$ ,  $F_3(\beta_1)f_1(\alpha)$ ,  $F_4(\alpha)f_4(\alpha)$ . Рассматриваемая система на касательном расслоении  $TM^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  примет вид

$$\begin{aligned} \alpha^\bullet &= z_4 f_4(\alpha), \\ z_4^\bullet &= F_4(\alpha)f_4(\alpha) - f_4(\alpha) \left[ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_4(\alpha) \right] z_4^2 - \\ &\quad - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) z_3^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) z_2^2 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) z_1^2, \\ z_3^\bullet &= F_3(\beta_1)f_1(\alpha) - f_4(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)] z_3 z_4 - \\ &\quad - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) z_2^2 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) z_1^2, \\ z_2^\bullet &= F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1) - \\ &\quad - f_4(\alpha) \left[ 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha) \right] z_2 z_4 - \\ &\quad - f_1(\alpha) \left[ 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1) \right] z_2 z_3 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) z_1^2, \\ z_1^\bullet &= F_1(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2) - \\ &\quad - f_4(\alpha) \left[ 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha) \right] z_1 z_4 - \\ &\quad - f_1(\alpha) \left[ 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + Dg_2(\beta_1) \right] z_1 z_3 - \\ &\quad - f_2(\alpha)g_1(\beta_1) \left[ 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + Dh(\beta_2) \right] z_1 z_2, \\ \beta_1^\bullet &= z_3 f_1(\alpha), \quad \beta_2^\bullet = z_2 f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \\ \beta_3^\bullet &= z_1 f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2), \end{aligned} \tag{20}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned} \alpha^{\bullet\bullet} - F_4(\alpha)f_4^2(\alpha) + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta)\alpha^{\bullet 2} + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)\beta_1^{\bullet 2} + \\ + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)\beta_2^{\bullet 2} + \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta)\beta_3^{\bullet 2} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_1^{\bullet\bullet} - F_3(\beta_1)f_1^2(\alpha) + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta)\alpha^\bullet\beta_1^\bullet + \\ + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)\beta_2^{\bullet 2} + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta)\beta_3^{\bullet 2} = 0, \\ \beta_2^{\bullet\bullet} - F_2(\beta_2)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta)\alpha^\bullet\beta_2^\bullet + \\ + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta)\beta_1^\bullet\beta_2^\bullet + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)\beta_3^{\bullet 2} = 0, \\ \beta_3^{\bullet\bullet} - F_1(\beta_3)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) + 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta)\alpha^\bullet\beta_3^\bullet + \\ + 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta)\beta_1^\bullet\beta_3^\bullet + 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta)\beta_2^\bullet\beta_3^\bullet = 0. \end{aligned}$$

**Предложение 7.** Если всюду справедлива система равенств (7), то система (20) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\begin{aligned} \Phi_1(z_4, \dots, z_1; \alpha, \beta) = \\ = z_1^2 + \dots + z_4^2 + V(\alpha, \beta) = C_1 = \text{const}, \\ V(\alpha, \beta) = V_4(\alpha) + \sum_{k=1}^3 V_{4-k}(\beta_k) = \\ = -2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F_4(a) da - 2 \sum_{k=1}^3 \int_{\beta_{k0}}^{\beta_k} F_{4-k}(b) db. \end{aligned} \tag{21}$$

Следующие утверждения справедливы в более общем виде, но мы ограничимся следующим.

**Предложение 8.** Пусть  $F_{4-k}(\beta_k) \equiv 0$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Если выполнены условия предложений 3–5, то система (20) имеет четыре гладких первых интеграла вида (13), (16), (18), (19).

**Теорема 2.** Пусть  $F_{4-k}(\beta_k) \equiv 0$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Если выполнены условия предложений 7, 8, то система (20) обладает пятью независимыми первыми интегралами вида (21), (13), (16), (18), (19).

То, что полный набор при некоторых условиях состоит из пяти, а не из семи первых интегралов, будет показано ниже.

**3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В СИЛОВОМ ПОЛЕ С ДИССИПАЦИЕЙ**

Теперь несколько модифицируем (20) при условиях (10)–(12), (14), (15), (17), а также при  $F_{4-k}(\beta_k) \equiv 0$ ,  $k = 1, 2, 3$ . При этом получим систему со знакопеременной диссипацией, наличие которой характеризует не только коэффициент  $b\delta(\alpha)$ ,  $b > 0$ , в первом уравнении (22), но и следующая зависимость (внешнего) силового поля в проекциях на оси  $z_k^\bullet$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , соответственно:  $z_1 F^1(\alpha)$ ,  $z_2 F^1(\alpha)$ ,  $z_3 F^1(\alpha)$ ,  $F_4(\alpha)f_4(\alpha) + z_4 F_4^1(\alpha)$ . Рассматриваемая система на касательном расслоении  $TM^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  примет вид

$$\begin{aligned} \alpha^\bullet &= z_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ z_4^\bullet &= F_4(\alpha)f_4(\alpha) - f_4(\alpha) \left[ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_4(\alpha) \right] z_4^2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)z_3^2 - \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)z_2^2 - \\
 & -\frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta)z_1^2 + z_4F_4^1(\alpha), \\
 & z_3^\bullet = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right]z_3z_4 - \\
 & -f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)z_2^2 - \\
 & -f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha, \beta)z_1^2 + z_3F^1(\alpha), \\
 & z_2^\bullet = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right]z_2z_4 - \\
 & -f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right]z_2z_3 - \\
 & -f(\alpha)g(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)z_1^2 + z_2F^1(\alpha), \\
 & z_1^\bullet = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right]z_1z_4 - \\
 & -f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right]z_1z_3 - \\
 & -f(\alpha)g(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)\right]z_1z_2 + z_1F^1(\alpha), \\
 & \beta_1^\bullet = z_3f(\alpha), \quad \beta_2^\bullet = z_2f(\alpha)g(\beta_1), \\
 & \beta_3^\bullet = z_1f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2),
 \end{aligned} \tag{22}$$

и она почти всюду эквивалентна системе на вторые производные от  $\alpha, \beta$ , в которой явно выделяется знакопеременная диссипация [2, 3].

Перейдем теперь к интегрированию системы восьмого порядка (22) при выполнении группы условий (11) и при выполнении равенств

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) & \equiv \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)g^2(\beta_1) \equiv \\
 & \equiv \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) = \Gamma_4(\alpha).
 \end{aligned}$$

Пусть при этом функция  $f_4(\alpha)$  удовлетворяет первому из группы равенств (7). Введем также (по аналогии с (11)) ограничение и на функцию  $f(\alpha)$ : она должна удовлетворять следующему преобразованному равенству из (7):

$$f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right] + \Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha) \equiv 0,$$

и происходит отделение независимой подсистемы седьмого порядка:

$$\begin{aligned}
 \alpha^\bullet & = z_4f_4(\alpha) + b\delta(\alpha), \\
 z_4^\bullet & = F_4(\alpha)f_4(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma_4(\alpha)(z_3^2 + z_2^2 + z_1^2) + z_4F_4^1(\alpha), \\
 z_3^\bullet & = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right]z_3z_4 - \\
 & -f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1)z_2^2 - \\
 & -f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\beta_1, \beta_2)z_1^2 + z_3F^1(\alpha), \\
 z_2^\bullet & = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right]z_2z_4 - \\
 & -f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right]z_2z_3 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -f(\alpha)g(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\beta_1, \beta_2)z_1^2 + z_2F^1(\alpha), \\
 z_1^\bullet & = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right]z_1z_4 - \\
 & -f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right]z_1z_3 - \\
 & -f(\alpha)g(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)\right]z_1z_2 + z_1F^1(\alpha), \\
 \beta_1^\bullet & = z_3f(\alpha), \quad \beta_2^\bullet = z_2f(\alpha)g(\beta_1), \\
 \beta_3^\bullet & = z_1f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2).
 \end{aligned}$$

Для полного интегрирования данной системы необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных  $w_4 = z_4, w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, w_2 = \frac{z_2}{z_1}, w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}$ , последняя система распадается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \alpha^\bullet & = w_4f_4(\alpha) + b\delta(\alpha), \\
 w_4^\bullet & = F_4(\alpha)f_4(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma_4(\alpha)w_3^2 + w_4F_4^1(\alpha),
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$w_3^\bullet = \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma_4(\alpha)w_3w_4 + w_3F^1(\alpha),$$

$$\begin{aligned}
 w_2^\bullet & = (\pm)w_3\sqrt{1 + w_2^2}f(\alpha)g(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)\right], \\
 \beta_2^\bullet & = (\pm)\frac{w_2w_3}{\sqrt{1 + w_2^2}}f(\alpha)g(\beta_1),
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 w_1^\bullet & = (\pm)w_3\sqrt{1 + w_1^2}f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right], \\
 \beta_1^\bullet & = (\pm)\frac{w_1w_3}{\sqrt{1 + w_1^2}}f(\alpha),
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\beta_3^\bullet = (\pm)\frac{w_3}{\sqrt{1 + w_2^2}}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2). \tag{26}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (23)–(26) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (23), по одному – для систем (24) и (25) (меняя в них независимые переменные), и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (26) (т.е. всего пять).

Будем также предполагать, что для некоторого  $\kappa \in \mathbf{R}$  выполнено равенство

$$\begin{aligned}
 \frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}\Gamma_4(\alpha) & = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln|\Delta(\alpha)|, \\
 \Delta(\alpha) & = \frac{\delta(\alpha)}{f_4(\alpha)},
 \end{aligned} \tag{27}$$

а для некоторых  $\lambda_4^0, \lambda_k^1 \in \mathbf{R}$  выполнены равенства

$$\begin{aligned} F_4(\alpha) &= \lambda_4^0 \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2}, \\ F_k^1(\alpha) &= \lambda_k^1 f_4(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \Delta(\alpha), \\ k &= 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь  $F_1^1(\alpha) = F_2^1(\alpha) = F_3^1(\alpha) = F^1(\alpha)$ , т.е.  $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \lambda_3^1 = \lambda^1$ . Условие (27) назовем “геометрическим”, а условия из группы (28) — “энергетическими”.

Условие (27) названо геометрическим, в том числе, потому, что накладывает условие на коэффициент связности  $\Gamma_4(\alpha)$ , приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции  $\Delta(\alpha)$ . Условия же группы (28) названы энергетическими, в том числе, потому, что силы становятся, в некотором смысле, “потенциальными” по отношению к функциям  $\Delta^2(\alpha)/2$  и  $\Delta(\alpha)$ , приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции  $\Delta(\alpha)$ ). При этом функция  $\Delta(\alpha)$  и вводит в систему диссипацию разных знаков.

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия (27) и (28). Тогда система (23)–(26) обладает полным набором — пятью независимыми, вообще говоря, трансцендентными [7, 8] первыми интегралами.

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко (поскольку приходится интегрировать уравнение Абеля [9]). В частности, если  $\kappa = -1$ , явный вид ключевого первого интеграла таков:

$$\begin{aligned} \Theta_1(w_4, w_3; \alpha) &= G_1 \left( \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\Delta(\alpha)} \right) = \\ &= \frac{f_4^2(\alpha)(w_4^2 + w_3^2) + (b - \lambda^1)w_4\delta(\alpha)f_4(\alpha) - \lambda_4^0\delta^2(\alpha)}{w_3\delta(\alpha)f_4(\alpha)} = \\ &= C_1 = \text{const}. \end{aligned} \quad (29)$$

При этом дополнительный первый интеграл системы (23) имеет следующий структурный вид:

$$\begin{aligned} \Theta_2(w_4, w_3; \alpha) &= \\ &= G_2 \left( \Delta(\alpha), \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\Delta(\alpha)} \right) = C_2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (30)$$

Первые интегралы для систем (24) и (25) будут иметь вид

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, 2, \quad (31)$$

о функциях  $\Psi_s(\beta_s)$ ,  $s = 1, 2$ , см. (16), (18). А дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (26), находится по аналогии с (19):

$$\begin{aligned} \Theta_5(\beta_2, \beta_3) &= \beta_3 \pm \int_{\beta_{20}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2 \Psi_2^2(b) - C_4^2}} db = \\ &= C_5 = \text{const}, \end{aligned} \quad (32)$$

при этом после взятия этого интеграла вместо постоянных  $C_3, C_4$  можно подставить соответствующие левые части равенств (31).

Выражение первых интегралов (29)–(32) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции  $\Delta(\alpha)$ . Действительно, при  $\kappa = -1$  дополнительный первый интеграл системы (23) найдется из квадратуры

$$\begin{aligned} d \ln |\Delta(\alpha)| &= \frac{(b - u_4) du_4}{2W(u_4) - C_1 \{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4W(u_4)}\}/2}, \\ W(u_4) &= u_4^2 + (b - \lambda^1)u_4 - \lambda_4^0, \quad u_4 = \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}. \end{aligned}$$

При этом после интегрирования вместо  $C_1$  можно подставить (29). Правая часть данной квадратуры выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции  $\Delta(\alpha)$ .

Справедлива и теорема, в некотором смысле обратная к теореме 3.

**Теорема 4.** Условия (27), (28) (например, при  $\kappa = -1$ ) являются необходимыми условиями существования первого интеграла (29) для системы (23)–(26).

#### 4. СТРУКТУРА ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

Если  $\alpha$  — периодическая координата периода  $2\pi$ , то система (23)–(26) в условиях теоремы 3 становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [2, 10]. При этом

при  $b = -\lambda^1$  она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами:

$$\begin{aligned} \Phi_1(-b; w_4, w_3; \alpha) &= w_3^2 + w_4^2 + 2bw_4\Delta(\alpha) - \\ &- \lambda_4^0\Delta^2(\alpha) = \text{const}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\Phi_2(w_3; \alpha) = w_3\Delta(\alpha) = \text{const}. \quad (34)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (33), (34) также является первым интегралом

системы (23)–(26) при  $b = -\lambda^1$ . Но при  $b \neq -\lambda^1$  каждая из функций

$$\begin{aligned} \Phi_1(\lambda^1; w_4, w_3; \alpha) = \\ = w_3^2 + w_4^2 + (b - \lambda^1)w_4\Delta(\alpha) - \lambda_4^0\Delta^2(\alpha) \end{aligned} \quad (35)$$

и (34) по отдельности не является первым интегралом системы (23)–(26). Однако отношение функций (35), (34) является первым интегралом системы (23)–(26) (при  $\kappa = -1$ ) при любом  $b$ .

Вообще же, для систем любого порядка с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [11, 12].

### 5. СИСТЕМЫ НА РАССЛОЕНИИ К ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Выше уже были выделены в качестве примеров два класса многообразий (поверхности вращения и пространства Лобачевского), для которых применима предлагаемая методика интегрирования систем с диссипацией. Теперь отметим однопараметрическое семейство функций  $f(\alpha)$  и  $f_4(\alpha)$ , определяющей метрику на четырехмерной сфере:

$$\begin{aligned} f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sqrt{1 + \mu_1\sin^2\alpha}}, \quad \mu_1 \in \mathbf{R}, \\ f_4(\alpha) \equiv -1, \end{aligned}$$

при этом выделим два существенных подслучая:

$$\mu_1 = 0, \quad (36)$$

$$\mu_1 = -1. \quad (37)$$

Случай (36) формирует класс систем, соответствующих движению динамически симметричного пятимерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов, вообще говоря, в неконсервативном поле сил, при дополнительной зависимости силового поля от (тензора второго ранга) угловой скорости [2, 10]. Случай (37) формирует класс систем, соответствующих движению точки на четырехмерной сфере с естественной метрикой, индуцированной метрикой всеобъемлющего пятимерного евклидова пространства. В частности, при  $\delta(\alpha) = F_4(\alpha) \equiv 0$  рассматриваемая система описывает геодезический поток на четырехмерной сфере. В случае (36) если  $\delta(\alpha) = F_4(\alpha)/\cos\alpha$ , то система описывает движение пятимерного твердого тела в силовом поле  $F_4(\alpha)$  под действием следящей силы [2, 3]. В частности, если  $F_4(\alpha) = \sin\alpha \cos\alpha$ ,  $\delta(\alpha) = \sin\alpha$ , то система описывает обобщенный сферический маятник, помещенный в поток набегающей среды в пяти-

мерном пространстве, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [2, 3, 10, 11].

Если функция  $\delta(\alpha)$  не является периодической, то рассматриваемая диссипативная система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является собственно диссипативной). Тем не менее, и в этом случае (благодаря теоремам 3 и 4) можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также определяет новые нетривиальные случаи интегрируемости динамических систем с диссипацией на касательном расслоении гладкого четырехмерного многообразия в явном виде.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шамолин М.В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. Вып. 3. С. 209–210.
2. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере // ДАН. 2017. Т. 474. № 2. С. 177–181.
3. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // ДАН. 2018. Т. 479. № 3. С. 270–276.
4. Козлов В.В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
5. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. Пер. с нем. Изд. 4, испр., обновл. М.: URSS, 2017. 352 с.
6. Вейль Г. Симметрия. М.: URSS, 2007.
7. Козлов В.В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3–67.
8. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
10. Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.
11. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия // ДАН. 2018. Т. 482. № 5. С. 527–533.
12. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.

**NEW CASES OF HOMOGENEOUS INTEGRABLE SYSTEMS  
WITH DISSIPATION ON THE TANGENT BUNDLES  
OF THREE-DIMENSIONAL MANIFOLDS**

**M. V. Shamolin<sup>a</sup>**

*<sup>a</sup> Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The integrability of certain classes of homogeneous dynamical systems is shown on the tangent bundles to four-dimensional manifolds. In this case, the force fields have the so-called variable dissipation and generalize the previously considered fields.

*Keywords:* dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral

УДК 519.622.2

## МЕТОД ПОИСКА РЕДУЦИРОВАННОГО БАЗИСА ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ

© 2021 г. И. В. Тимохин<sup>1,2,\*</sup>, С. А. Матвеев<sup>1,2</sup>,  
академик РАН Е. Е. Тыртышников<sup>1,2</sup>, А. П. Смирнов<sup>1</sup>

Поступило 16.02.2021 г.

После доработки 16.02.2021 г.

Принято к публикации 24.02.2021 г.

Методы редукции модели позволяют заметно сократить вычислительные затраты при решении больших систем дифференциальных уравнений при помощи перехода к расчетам для специального пространства малой размерности. Эти методы требуют априорной информации о базисе такого маломерного пространства, которую возможно получить лишь при численном решении исходной системы высокой размерности. Основное наблюдение данной работы состоит в том, что на широком классе экспериментально рассмотренных задач агрегационной кинетики базис малой размерности существует, следовательно, редукция возможна. В данной работе мы предлагаем новый и эффективный алгоритм построения искомого базиса редуцированной модели без проведения полного расчета. Предложенный алгоритм позволяет существенно выиграть от использования методов редукции модели даже при решении единичной системы без существенной априорной информации о ней.

*Ключевые слова:* уравнение Смолуховского, редукция модели, метод снимков

DOI: 10.31857/S2686954321020065

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Мы будем рассматривать метод редукции модели применительно к общего вида системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{df}{dt} = F(f(t), t), \quad f(t) \in \mathbb{R}^N. \quad (1)$$

Идея метода в такой ситуации состоит в том, чтобы найти подпространство  $V \subset \mathbb{R}^N$  размерности существенно меньшей  $N$ , на котором хорошо приближается  $f(t)$ , и построить по (1) систему на координаты такого приближения; при этом численная сложность решения такой системы может оказаться заметно меньше сложности решения полной системы. Построение такого пространства в общем случае требует некоторой априорной информации о решении, что затрудняет использование метода для единичных систем.

В данной работе мы предложим прямолинейный алгоритм построения такого подпростран-

ства на основе метода POD [4] по ходу решения исходной системы, с автоматическим критерием завершения построения. При этом мы будем предполагать дополнительно, что  $f(t)$  (приближенно) пробегает искомое пространство за некоторый начальный временной интервал  $t \in [0; T_H]$ , меньший интересующего нас (например, решение циклично начиная с некоторого момента)  $t \in [0; T_H]$ ,  $T_H < T_H$ . Работоспособность метода будет продемонстрирована на примере уравнения Смолуховского.

### 2. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Разобьем весь временной интервал на окна фиксированной длины и будем решать (обычным методом в  $N$ -мерном пространстве) систему (1) на каждом окне по очереди. Решив систему на очередном окне, с помощью классического метода снимков и POD, найдем базис, аппроксимирующий решение на этом окне. Сравним полученный базис с уже накопленным (изначально пустым); если накопленный базис приближает новый достаточно хорошо, процесс можно останавливать, искомым базис найден; если достаточно плохо, дополним накопленный базис новым и продолжим расчеты.

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup> Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: m@ivan.timokhin.name

В качестве меры качества приближения нового базиса накопленным будем использовать норму проекции

$$\|(I - U_i U_i^*) V_i\|_2,$$

где  $V_i$  – базис текущего окна, а  $U_i$  – накопленный (все базисы предполагаются ортонормированными). За оценку качества приближения в алгоритме отвечают два параметра:  $\epsilon' > \epsilon > 0$ . Если это значение меньше  $\epsilon$ , процесс останавливается; если больше  $\epsilon'$  – базис расширяется; в противном случае процесс продолжается без расширения базиса; это важно для предотвращения переобучения на начальном отрезке решения. Подбор подходящего значения  $\epsilon'$ , таким образом, связан с необходимостью балансировки скорости построения базиса и опасности переобучения; в наших экспериментах мы использовали  $\epsilon' = 10^3 \epsilon$ .

Для дополнения базиса  $U_i$  новым базисом  $V_i$  прибегнем к сингулярному разложению. А именно, составим из векторов обоих базисов блочную матрицу  $A = (U_i | V_i)$  и возьмем в качестве нового базиса левые сингулярные векторы  $A$ , соответствующие сингулярным значениям, большим некоторого  $\delta > 0$ .

Полученный таким образом алгоритм идейно очень прост, но, как мы покажем далее на примере уравнения Смолуховского, вполне работоспособен.

### 3. КОНКРЕТНЫЙ ПРИМЕР НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

#### 3.1. Формулировка задачи

Мы рассматриваем модель пространственно-однородной системы частиц, эволюционирующей посредством слипания частиц с образованием более крупных. Базовой моделью агрегации частиц в таком случае является формально бесконечная система уравнений, предложенная Смолуховским [5]. В данной работе мы концентрируемся на модели агрегации частиц с источниками и стоком частиц массы большей  $N$ :

$$\frac{dn_k}{dt} = J_k + \frac{1}{2} \sum_{i+j=k} C_{ij} n_i n_j - n_k \sum_{j=1}^N C_{jk} n_j, \quad (2)$$

$$k = 1, 2, \dots, N.$$

Здесь  $n_k$  – концентрация частиц массы  $k$ ,  $C_{ij}$  – ядро, характеризующее вероятность столкновения частиц размеров  $i$  и  $j$ ,  $J_k$  – мощность источников частиц размера  $k$ .

Время вычисления правой части непосредственно по формуле (2) составляет  $O(N^2)$ , что задает для решения прикладных задач с (2) непозволительно высокую нижнюю границу сложности. В [3, 6] для

отдельных ядер предложены алгоритмы сложности  $O(N \log N)$ , но для достаточно больших систем (а на практике существует необходимость решать системы с  $N$  до  $10^9$ ) желательно иметь возможность сократить вычислительные расходы дальше; нашей целью будет получить сжатое описание решения за время  $o(N)$ .

#### 3.2. Применение редукции

Покажем теперь, как, построив искомое подпространство, воспользоваться им для ускорения вычислений. Для этого соберем коэффициенты при квадратичных членах в (2) в тензор  $S \in \mathbb{R}^{N \times N \times N}$  с элементами

$$S_{ijk} = \frac{1}{2} (\delta_{i+j,k} - \delta_{i,k} - \delta_{j,k}) C_{ij},$$

где  $\delta_{i,j}$  – символ Кронекера, и запишем уравнение (2) в эквивалентной форме

$$\frac{dn_k}{dt} = J_k + \sum_{i,j=1}^N S_{ijk} n_i n_j. \quad (3)$$

Теперь, если нам известен искомый базис  $U$ , мы можем записать

$$n_k \approx \sum_{i=1}^R U_{ki} x_i$$

и преобразовать уравнение (3) в следующий вид:

$$\frac{dx_\alpha}{dt} \approx \hat{J}_\alpha + \sum_{\beta,\gamma} \hat{S}_{\alpha\beta\gamma} x_\beta x_\gamma,$$

$$\hat{S}_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{i,j,k} S_{ijk} U_{i\alpha} U_{j\beta} U_{k\gamma}, \quad (4)$$

$$\hat{J}_\alpha = \sum_i U_{i\alpha} J_i.$$

Заменяв в (4) приближенное равенство на точное, получим систему ОДУ на координаты разложения  $n_k$  по базису  $U$ .

Сложность вычисления правой части для (4) “в лоб”  $O(R^3)$ , что для достаточно малых  $R$  может оказаться лучше, чем  $O(N \log N)$ .

#### 3.3. Численные результаты

Численные эксперименты проводились с системой (2) со следующими значениями параметров:

$$N = 32768,$$

$$J_k = \delta_{k1},$$

$$C_{ij} = i^a j^{-a} + i^{-a} j^a,$$

с окнами размером  $\tau = 2$  и 65 снимками на каждом окне на интервале  $[0, 256]$ .



**Таблица 1.** Сравнение полного решения  $n(t)$  и редуцированного решения  $\tilde{n}(t)$  системы (2) для  $N = 32\,768$ , с различными значениями параметра ядра  $a$  и параметра точности  $\epsilon$  (здесь  $\epsilon' = 10^3 \epsilon$ ). Приведены время полного расчета на всем интервале  $t_{\Pi}$ , время расчета редуцированной системы на том же интервале  $t_p$ , размер полученного базиса  $R$ , момент времени  $T$ , на котором он был построен, и относительная погрешность редуцированного решения в конце интервала

$a$	$\epsilon$	$t_{\Pi}$ , с	$t_p$ , с	$R$	$T$	$\frac{\ n(T) - \tilde{n}(T)\ _2}{\ n(T)\ _2}$
0.55	$10^{-9}$	$4.8 \times 10^3$	75	49	56	$2.7 \times 10^{-3}$
0.55	$10^{-11}$	$4.8 \times 10^3$	$1.9 \times 10^3$	121	256	$9.0 \times 10^{-8}$
0.55	$10^{-13}$	$4.8 \times 10^3$	$4.5 \times 10^3$	330	256	$5.0 \times 10^{-10}$
0.65	$10^{-9}$	$4.8 \times 10^3$	83	51	62	$3.8 \times 10^{-2}$
0.65	$10^{-11}$	$4.8 \times 10^3$	$3.5 \times 10^3$	144	224	$2.8 \times 10^{-9}$
0.65	$10^{-13}$	$4.8 \times 10^3$	$4.5 \times 10^3$	345	250	$1.5 \times 10^{-9}$

Для этой системы в [1, 2, 7] было найдено циклическое поведение решения, начиная с некоторого момента времени при  $a > 1/2$ .

В табл. 1 представлено время построения полного решения  $t_{\Pi}$  и редуцированного  $t_p$ , а также размеры использовавшихся при этом базисов  $R$  и момент времени  $T$ , до которого строился базис. Как видно из табл. 1, размерность построенного подпространства, а значит и  $t_p = O(R^3)$ , существенно зависят от  $\epsilon$ , и при высокой точности может  $t_p$  даже превышать время построения полного решения. При близком к пограничному для образования циклов значению  $a$  для построения базиса с большой точностью потребовалось использовать весь интервал времени решения. Данное наблюдение можно считать весьма естественным, так как по мере приближения значения  $a$  к 0.5 быстро растет и период колебаний в системе. Остальные случаи показывают возможность получения приемлемого уровня точности даже с очень небольшим базисом, построенным по достаточно короткому начальному отрезку. Точность решения при этом зависит от  $\epsilon$  в основном опосредовано, через  $T$ , а потому не демонстрирует никакой простой зависимости.

Для решения всех систем дифференциальных уравнений использовался явный метод средней точки с шагом по времени  $2^{-12}$ ; правая часть в полной системе при этом вычислялась по методу, описанному в [3]. Все расчеты проводились на системе с процессором Intel Core i7-7700K, с использованием библиотеки Intel MKL.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для систем дифференциальных уравнений с циклическими решениями предложен эффективный алгоритм построения маломерного пространства для редукции модели по ходу численного решения исходной системы высокой размерности. Работоспособность нового алгоритма

проверена для важного класса задач кинетики агрегации с источником и стоком частиц, обладающих периодическими решениями по времени. Открытым для нас остается вопрос об эффективном построении такого пространства для систем без циклов, в которых искомое маломерное пространство, вообще говоря, восстанавливается только по полному решению.

### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Данная работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00338).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zagaynov V.A., Denisenko K., Moskaev A., Lushnikov A.A. Periodical regimes in source-enhanced coagulating systems with sinks // J. Aerosol Sci. 2001. V. 32. P. S983–S984.
2. Brilliantov N.V., Otienom W., Matveev S.A., Smirnov A.P., Tyrtysnikov E.E., Krapivsky P.L. Steady oscillations in aggregation-fragmentation processes // Phys. Rev. E. 2018. V. 98. № 1.
3. Matveev S.A., Smirnov A.P., Tyrtysnikov E.E. A fast numerical method for the Cauchy problem for the Smoluchowski equation // J. Comput. Phys. 2015. V. 282. № FEB. P. 23–32.
4. Pinnau R. Model Reduction via Proper Orthogonal Decomposition / In W.H.A. Schilders, H.A. van der Vorst, J. Rommes, ed. Model Order Reduction: Theory, Research Aspects and Applications. Mathematics in Industry. B.-Heidelberg: Springer, 2008, V. 13.
5. Smoluchowski M.V. Drei vortrage uber diffusion, Brownsche bewegung und koagulation von kolloidteilchen // Zeitschrift fur Physik. 1916. V. 17. P. 557–585.
6. Timokhin I.V., Matveev S.A., Siddharth N., Tyrtysnikov E.E., Smirnov A.P., Brilliantov N.V. Newton method for stationary and quasi-stationary problems for Smoluchowski-type equations // J. Comput. Phys. 2019. V. 382. P. 124–137.
7. Ball R.C., Connaughton C., Jones P.P., Rajesh R., Zabornski O. Collective oscillations in irreversible coagulation driven by monomer inputs and large-cluster outputs // Phys. Rev. Lett. 2012. V. 109. № 16. P. 168304.

## METHOD FOR REDUCED BASIS DISCOVERY IN NON-STATIONARY PROBLEMS

I. V. Timokhin<sup>a,b</sup>, S. A. Matveev<sup>a,b</sup>,

Academician of the RAS E. E. Tyrtyshnikov<sup>a,b</sup>, and A. P. Smirnov<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Marchuk Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Model reduction methods allow in some cases to significantly decrease the time required to solve a large ODE system by performing all calculations in a vector space of significantly lower dimension than the original one. Unfortunately, these methods frequently require a priori information about the structure of the solution, possibly obtained by solving the same system for different values of parameters. We suggest a simple algorithm for constructing such a subspace while simultaneously solving the system, thus allowing one to benefit from model reduction even for a single system without significant a priori information, and demonstrate its effectiveness using the Smoluchowski equation as an example.

*Keywords:* Smoluchowski equation, model reduction, method of snapshots

УДК 519.6

## ОСОБЕННОСТИ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФАЗЫ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА

© 2021 г. Т. В. Яковлева<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым 13.10.2020 г.

Поступило 14.10.2020 г.

После доработки 14.10.2020 г.

Принято к публикации 13.02.2021 г.

Проведено теоретическое исследование статистического распределения фазы квазигармонического сигнала. Впервые получено аналитическое выражение для функции плотности вероятности этого распределения, показано, что распределение фазы квазигармонического сигнала является двухпараметрическим и определяется следующими параметрами: отношением сигнала к шуму и величиной отклонения текущего значения фазы от значения фазы исходного, незашумленного сигнала. Проанализирована зависимость функции плотности вероятности фазы квазигармонического сигнала от определяющих ее параметров. Данное исследование является значимым для решения задач высокоточных фазовых измерений методами статистической обработки данных.

*Ключевые слова:* квазигармонический сигнал, гауссовский шум, функция плотноствероятности

**DOI:** 10.31857/S2686954321020089

Задача высокоточного измерения фазы сигнала является предметом научных исследований в течение десятилетий [1–4]. Достижение высокой точности фазовых измерений является важным для решения широкого круга научных и прикладных задач, причем во многих задачах фазовые характеристики сигнала по своей информативности являются более значимыми, чем амплитудные, см., например, [5].

Эффективным инструментом обработки стохастических данных при решении задач прикладной математики и теоретической информатики являются методы статистического анализа исследуемых данных. В этой связи актуальной становится задача изучения свойств статистического распределения анализируемой величины. В работе впервые проводится теоретическое исследование особенностей статистического распределения фазы квазигармонического сигнала, который формируется исходно гармоническим сигналом под воздействием неизбежного гауссовского шума.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для решения поставленной задачи уточним используемые понятия. Как известно, модель гармонического, синусоидального сигнала с постоянной амплитудой эффективно используется в теории. На практике же неизбежное воздей-

ствие шума на процесс распространения любого исходно гармонического сигнала приводит к случайным флуктуациям величины амплитуды и фазы такого сигнала. В результате образуется так называемый квазигармонический сигнал, амплитуда и фаза которого представляют собой случайные величины. В каждый момент времени  $t$  такой сигнал может быть представлен в следующей форме:

$$x(t) = R(t) \sin(\omega t + \varphi(t)), \quad (1)$$

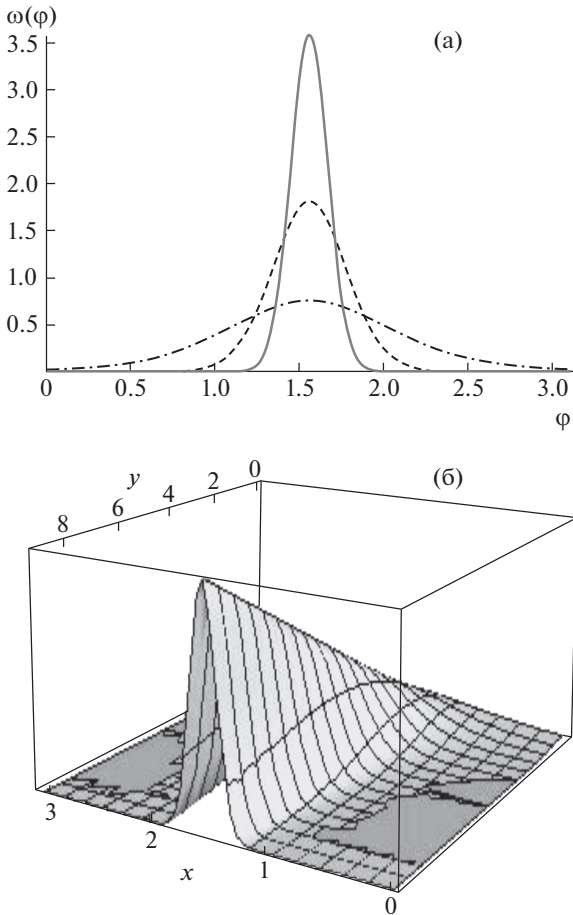
где  $\omega$  – частота,  $R(t)$  – амплитуда, или огибающая сигнала, которая изменяется случайным образом под воздействием гауссовского шума, величина фазы  $\varphi(t)$  также изменяется во времени случайным образом под воздействием шума в силу амплитудно-фазовой модуляции. Рассмотрим сигнал (1) в комплексной плоскости, как комплексную величину, обозначив ее  $S(t)$ :

$$S(t) = R(t) \exp[i(\omega t + \varphi(t))] = s(t) \exp(i\omega t). \quad (2)$$

Для изучения фазовых характеристик сигналов мы будем анализировать “медленную” составляющую сигнала, т.е. функцию  $s(t) = R(t) \exp[i\varphi(t)]$ . Обозначим “медленную” составляющую исходного гармонического, не искаженного шумом комплексного сигнала как вектор  $\mathbf{A}(A, \varphi_0)$ , характеризуемый постоянными величинами амплитуды  $A$  и фазы  $\varphi_0$ . Распространение сигнала по какой-либо среде неизбежно сопровождается тем, что действительная  $A \cos \varphi_0$  и мнимая  $A \sin \varphi_0$  составляющие исходного сигнала независимо изменяются под воздействием большого числа случайных шумовых составляющих. Обозначим как  $\mathbf{r}(r, \psi)$  суммарный вектор шума, который наклад-

<sup>1</sup> Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: tan-ya@bk.ru



**Рис. 1.** Графики функции плотности вероятности статистического распределения фазы квазигармонического сигнала для следующих значений параметров  $\varphi_0$  и  $S$ : а –  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $S = 1, 5, 9$  (штрихпунктирная, штриховая и сплошная линии соответственно); б –  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ .

дывается на исходный сигнал  $\mathbf{A}$ , искажая его. Компоненты  $r_x, r_y$  вектора шума  $\mathbf{r}$  являются независимыми случайными величинами и подчиняются нормальному распределению:  $\bar{r}_x = \bar{r}_y = 0, \overline{r_x^2} = \overline{r_y^2} = \sigma^2$ , где величина  $\sigma^2$  представляет собой дисперсию шума. Очевидно, что амплитуда  $r$  шумового вектора и его фаза  $\psi$  представляют собой независимые случайные величины и распределены следующим образом: случайная величина амплитуды  $r$  подчиняется статистическому распределению Рэлея, в то время как фаза  $\psi$  шумовой компоненты распределена равномерно на интервале  $(0, 2\pi)$ .

## 2. РАСЧЕТ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ФАЗЫ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА

Обозначим как вектор  $\mathbf{R}(R, \varphi)$  “медленную” составляющую результирующего квазигармонического

го сигнала, формируемого суммированием исходного гармонического сигнала  $\mathbf{A}$  и шума  $\mathbf{r}$ :  $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{r}$ . Нетрудно показать, что совместная функция распределения случайных величин амплитуды  $R$  и фазы  $\varphi$  результирующего сигнала  $\mathbf{R}$  определяется выражением [6]

$$W(R, \varphi) dR d\varphi = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{A^2 + R^2 - 2AR\cos(\varphi - \varphi_0)}{2\sigma^2}\right\} R dR d\varphi. \quad (3)$$

Из (3) следует, что распределения амплитуды  $R$  и фазы  $\varphi$  результирующего сигнала не являются независимыми, причем фаза  $\varphi$  результирующего сигнала, в отличие от фазы  $\psi$  шумовой составляющей, уже не является равномерно распределенной величиной.

Для определения функции плотности вероятности статистического распределения фазы квазигармонического сигнала проинтегрируем выражение (3) по  $R$  в пределах от нуля до бесконечности. В результате вычислений получаем

$$\omega_\varphi(\varphi) d\varphi = d\varphi \int_0^\infty W(R, \varphi) dR = e^{-A^2/2\sigma^2} \left[1 + \sqrt{\pi}\eta e^\eta (1 + \Phi(\eta))\right] \frac{d\varphi}{2\pi}, \quad (4)$$

где используются следующие обозначения:  $\eta = \frac{A}{\sqrt{2}\sigma} \cos(\varphi - \varphi_0)$ , а функция  $\Phi(\eta)$  представляет собой известную специальную функцию, называемую интегралом ошибок:  $\Phi(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-t^2} dt$ .

Формула (4) характеризует распределение фазы случайного сигнала, полученного в результате воздействия гауссовского шума с дисперсией  $\sigma^2$  на исходно детерминированный сигнал  $\mathbf{A}$  с амплитудой  $A$  и фазой  $\varphi_0$ . Нетрудно видеть, что в предельном случае отсутствия детерминированной составляющей, т.е. при  $A = 0$ , ожидаемо получаем равномерное распределение фазы сигнала:

$$\omega_\varphi(\varphi) d\varphi|_{A=0} = \frac{1}{2\pi} d\varphi.$$

Введем обозначение  $S = \frac{A}{\sqrt{2}\sigma}$ . Величину  $S^2 = \frac{A^2}{2\sigma^2}$  часто используют в качестве характеристики отношения сигнала к шуму. С учетом введенного параметра  $S$  выражение для выше введенного параметра  $\eta$  имеет вид  $\eta = S \cos(\varphi - \varphi_0)$ .

Из вышеизложенного следует, что статистическое распределение фазы, описываемое выражением (4), определяется двумя параметрами задачи: отношением сигнала к шуму  $S$  и величиной отклонения текущего значения фазы  $\varphi$  от значения фазы  $\varphi_0$  исходного сигнала, и является чет-

ной функцией этого отклонения, что вполне ожидаемо. Для функции плотности вероятности распределения фазы будем использовать обозначение  $\omega_\varphi(\varphi|S, \varphi_0)$ :

$$\begin{aligned}\omega_\varphi(\varphi|S, \varphi_0) &= \frac{1}{2\pi} e^{-S^2} \left\{ 1 + \sqrt{\pi} \eta e^{\eta^2} [1 + \Phi(\eta)] \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-S^2} \left\{ 1 + \sqrt{\pi} S \cos(\varphi - \varphi_0) \times \right. \\ &\quad \left. \times e^{S^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0)} [1 + \Phi(S \cos(\varphi - \varphi_0))] \right\}.\end{aligned}\quad (5)$$

На рис. 1 представлены графики функции плотности вероятности распределения фазы квазигармонического сигнала в зависимости от значения параметра отношения сигнала к шуму  $S$  (рис. 1а), а также трехмерный график этой функции (рис. 1б). На рис. 1б по оси  $x$  отложена величина фазы, вдоль оси  $y$  отложена величина отношения сигнала к шуму.

Как следует из представленных графических данных, с ростом величины отношения сигнала к шуму функция плотности вероятности фазы сигнала заметно сужается, что вполне ожидаемо, учитывая, что в предельном случае очень малой величины отношения сигнала к шуму мы имеем сигнал, состоящий практически из шумовой составляющей, с функцией плотности вероятности, близкой к равномерной, в то время как при большой величине отношения сигнала к шуму мы имеем практически детерминированный сигнал, функция плотности вероятности которого близка к  $\delta$ -функции.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе теоретически исследуется статистическое распределение величины фазы квазигармонического сигнала, впервые получено аналитическое

выражение для функции плотности вероятности распределения фазы. Показано, что данное распределение является двухпараметрическим и определяется следующими параметрами: величиной отношения сигнала к шуму и величиной отклонения фазы от ее значения, соответствующего исходно детерминированному, незашумленному сигналу.

Полученные в работе результаты вносят вклад в развитие теории вероятностей и могут эффективно использоваться при решении различных научных и прикладных задач, связанных с высокоточными измерениями фазы квазигармонического сигнала, в частности, в таких областях науки и техники, как радиофизика, оптика, радиолокация, радионавигация, метрология.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Electrical Measurement, Signal Processing, and Displays. Ed. J.G. Webster. Boca Raton: CRC Press, 2004. 723 p.
2. Daryanoosh Sh., Slussarenko S., Berry D.W., Howard M. Wiseman, Geoff J. Pryde. Experimental optical phase measurement approaching the exact Heisenberg limit // Nature Communications. 2018. V. 9. 4606.
3. Baoqiang Dua, Songlin Lia, et al. High-precision frequency measurement system based on different frequency quantization phase comparison // Measurement. July 2018. V. 122. P. 220–223.
4. Яковлева Т.В. Свойство устойчивости статистического распределения Райса: теория и применение в задачах измерения фазового сдвига сигналов // Компьютерные исследования и моделирование. 2020. Т. 12. № 3. С. 475–485.
5. Зельдович Б.Я., Шкунов В.В., Яковлева Т.В. Теория восстановления толстослойных голограмм спекл-полей // Квантовая электроника. 1983. Т. 10. № 8. С. 1581–1586.
6. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы. М.: Наука, 1976. 494 с.

## PECULIARITIES OF THE STATISTICAL DISTRIBUTION OF A QUASI-HARMONIC SIGNAL'S PHASE

T. V. Yakovleva<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

A theoretical investigation of the statistical distribution of phase has been implemented. An analytical expression for the probability density function of such a distribution has been first obtained, and the quasi-harmonic signal's phase distribution has been shown to be a two-parameter one and to be determined by the following parameters: the signal-to-noise ratio and the deviation of the current phase value from the initial noiseless signal's phase value. The dependence of the probability density function for the quasi-harmonic signal's phase upon its parameters has been analyzed. This research is a meaningful for solving the tasks of high-precision phase measurements by means of the statistical data processing.

*Keywords:* quasi-harmonic signal, Gaussian noise, the probability density function

Журнал “Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления” публикует статьи и краткие сообщения, содержащие результаты приоритетных, оригинальных, ранее неопубликованных исследований в области математики, информатики, процессов управления. Цель журнала — ознакомление широкого круга специалистов с последними достижениями в различных разделах этих наук. Высокое качество публикаций должно обеспечиваться соблюдением требований к рукописям и всесторонним экспертным рецензированием.

Журнал публикует сообщения, авторами которых являются действительные члены (академики) и члены-корреспонденты Российской академии наук. Журнал публикует также сообщения других авторов, представленные академиками РАН по соответствующей специальности. Представление должно быть получено автором до направления статьи в редакцию.

Журнал издается на русском языке один раз в 2 месяца (6 выпусков в год). Периодичность англоязычной версии “Doklady Mathematics” — 6 выпусков в год.

Подразделы журнала: Математика, Информатика, Процессы управления.

В журнале не публикуются работы полемические и узкоспециальные; содержащие решения стандартных задач; статьи обзорные и методические; статьи, излагающие обобщения и предположения; статьи серийные, разделенные на несколько последовательных публикаций; статьи о рядовых исследованиях, не представляющие общего интереса.

Решением редакционной коллегии работа может быть отклонена, если она не удовлетворяет перечисленным выше требованиям. Статьи, отклоненные редколлекгией, повторно не рассматриваются.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

DOI: 10.31857/S2686954321020090

Редакция журнала “Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления” просит авторов руководствоваться приводимыми ниже правилами и надеется, что авторы ознакомятся с ними, прежде чем отошлют сообщение в редакцию.

**Работы, оформленные без соблюдения этих правил, возвращаются без рассмотрения.**

1. Публикуемые статьи должны иметь представление действительного члена Российской Академии наук, если оно требуется.

2. Авторы должны определить раздел, в который они рекомендуют поместить сообщение, и индекс по Универсальной десятичной классификации (УДК).

3. Рукописи статей и сопроводительные материалы загружаются в Редакционно-издательскую систему издательства Pleiades Publishing Ltd по ссылке <https://sciencejournals.ru/journal/danmiup/> или направляются в редакцию по электронной почте [doklady\\_mathematics@mail.ru](mailto:doklady_mathematics@mail.ru).

Бумажный вариант представлять в редакцию не требуется.

4. На отдельной странице нужно указать полное название (на русском и английском языках) учреждения, в котором выполнено исследование; фамилии, имена и отчества всех авторов; почтовый индекс, адрес, номера телефонов и E-mail каждого соавтора. Необходимо также указать автора, с которым редакция будет вести переговоры и переписку.

5. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к печати. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией. Доработанный текст автор должен срочно вернуть вместе с исходным вариантом, а также с ответом на все замечания.

6. Журнал публикует статьи и краткие сообщения, занимающие не более 25000 знаков. В этот объем входят текст, таблицы, библиография (не более 25 источников). Рекомендуется включать в список литературы актуальные журнальные статьи, опубликованные за последние 2 года, в том числе в журнале “Доклады Академии наук”. Число рисунков не должно превышать восьми. Части, обозначенные как а, б и т.д., считаются различными рисунками. Повторение данных в тексте, таблицах и графиках недопустимо. Рисунки должны быть выполнены четко, в формате, обеспечивающем ясность передачи всех деталей.

7. Электронная версия должна включать (текст в формате .doc):

— название статьи; ФИО каждого автора статьи; аффилиация; аннотация; ключевые слова; текст сообщения; список литературы; рисунки (отдельными файлами в формате jpeg или tif);

— на английском языке: название статьи; ФИО каждого автора статьи; аффилиация; аннотация; ключевые слова.

8. Текст статьи должен быть тщательно отредактирован и подписан всеми авторами. При ис-

пользовании сокращений необходимо дать их расшифровку; следует ограничиваться общепринятыми сокращениями и не вводить новых без достаточных на то оснований.

9. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

10. Финансирование работы. Укажите информацию о грантах и любой другой финансовой поддержке исследований.

11. Обязательное указание конфликта интересов – любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (например, член редколлегии обязан указывать, что он публикуется в журнале, где он член редколлегии).

12. Авторы могут приложить свою версию перевода статьи на английский язык или дать необходимые пояснения переводчику.

13. В формулах следует избегать громоздких обозначений. Занумерованные формулы обязательно выключаются в красную строку, номер формулы ставится у правого края.

14. Ссылки в тексте на цитируемую литературу даются в квадратных скобках, например [1]. В списке все работы перечисляются в порядке цитирования. Самоцитирование допускается в объеме не более 30%.

*Для книг:* фамилия и инициалы автора, полное название книги, место издания, издательство, год издания, том или выпуск и общее количество страниц.

Ссылки на книги, переведенные на русский язык, должны сопровождаться ссылками на оригинальные издания с указанием выходных данных.

*Для периодических изданий:* фамилия и инициалы автора, название статьи, название журнала, год издания, том, номер, первая и последняя страницы статьи.

Желательно указывать индекс DOI цитируемой статьи.

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

15. Редакция обращает внимание авторов на то, что журнал “Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления” является органом общей научной информации и в связи с этим просит авторов излагать материал в ясной и доступной форме.

16. Если материал не может быть изложен в объемах, указанных выше, или требует большого числа иллюстраций, редакция советует авторам направлять его в какой-либо специализированный журнал. Работы, нарушающие эти условия, редакция возвращает авторам для сокращения.

17. Появление краткого сообщения в “Докладах Академии наук” не препятствует впоследствии

публикации расширенного варианта в другом периодическом издании, с соблюдением всех этических норм. Одновременная отсылка рукописи в “Доклады” и в другой журнал не допускается.

18. В соответствии с новыми международными правилами будет проводиться проверка на предмет соблюдения авторами прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Проверка с использованием компьютерных программ проводится и зарубежными партнерами Издательства в отношении переводной версии статьи. Если автором нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отозвано.

19. Рукописи проходят процедуру анонимного внешнего рецензирования ведущими отечественными и зарубежными экспертами и рекомендуются к печати Редколлегией журнала на конкурсной основе.

20. Важно соблюдать правила публикационной этики и избегать следующих нарушений: 1) фабрикация и фальсификация данных, т.е. их подделки или изменения; 2) плагиата и самоплагиата – копирования без надлежащего цитирования хотя бы одного предложения из чужой или даже собственной ранее опубликованной рукописи, а также рисунков и таблиц; 3) многократной подачи рукописи в несколько журналов одновременно; 4) избыточных публикаций, основанных на одном и том же эксперименте; 5) неподобающего указания авторства, когда в авторский коллектив включены люди, не внесшие вклада в работу, или, наоборот, не включены люди, внесшие значительный вклад.

21. На любой материал, который автор заимствует из других работ, необходимо получить разрешение от правообладателя и приложить к рукописи. Правообладателем статей в журналах, как правило, является не автор, а издатель журнала, в котором опубликован материал. Подробнее о получении разрешения см. по ссылке <https://www.pleiades.online/ru/authors/permission/>

22. Все используемые в статье цитаты обязательно приводятся на оригинальном языке и сопровождаются соответствующей ссылкой.

23. Для более полного описания исследования к статье могут прилагаться дополнительные материалы (аудио- и видеофайлы, презентации, дополнительные таблицы и рисунки и пр.). Они публикуются только в электронной версии на сайте <https://link.springer.com/> (для англоязычных журналов) и <https://elibrary.ru> (для русскоязычных журналов).

## ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ СООБЩЕНИЯ

Раздел (Математика, Информатика, Процессы управления)

УДК

## НАЗВАНИЕ СТАТЬИ

© 2021 г. Академик РАН В. П. Иванов<sup>1,\*</sup>, Г. В. Сидоров<sup>2,\*\*</sup><sup>1</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия<sup>2</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*E-mail: ivanov@niisi.ras.ru

\*\*E-mail: sidorov@msu.su

Поступило 23.01.2021 г.

Аннотация (объем не должен превышать 1000 знаков с учетом пробелов) может быть размещена в свободном доступе в электронных базах поиска и индексирования. Она должна быть информативной, описывать методы и главные результаты исследования и не должна содержать ссылок на другие работы и аббревиатур. Из аннотации должно быть ясно, какие вопросы поставлены для исследования и какие ответы на них получены. Должен быть сформулирован приоритетный научный результат, требующий срочной публикации.

*Ключевые слова:* необходимо указать от 3 до 10 ключевых слов, способствующих индексированию статьи в поисковых системах. Рекомендуется использовать общепринятые термины

Текст статьи....

## БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят...

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены за счет средств Российского научного фонда, проект № 00101.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов С.М., Петров В.С. Экспериментальное доказательство // ДАН. 2016. Т. 469. № 6. С. 711–716.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.

В таком же порядке метаданные должны быть представлены на английском языке:

## THE TITLE OF ARTICLE

© 2021 г. Academician of the RAS V. P. Ivanov<sup>a</sup>, G. V. Sidorov<sup>b</sup><sup>a</sup>Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation<sup>b</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Summary

Keywords:

## СОПРОВОДИТЕЛЬНЫЕ ДОКУМЕНТЫ

Вместе с рукописью в редакцию высылаются отсканированные копии следующих сопроводительных документов:

- Лицензионный договор для русской версии, подписанный всеми авторами

[https://sciencejournals.ru/journals/danmiup/license\\_agreement.doc](https://sciencejournals.ru/journals/danmiup/license_agreement.doc)

- Авторский договор для английской версии

<https://www.pleiades.online/ru/authors/agreement/>

При использовании заимствованных материалов обязательно наличие разрешения от правообладателя.