
СОДЕРЖАНИЕ

Том 61, номер 9, 2021 год

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Численное решение краевых задач на многоблочных сетках

С. И. Мартыненко

1403

Алгоритм адаптивной интерполяции с использованием ТТ-разложения
для моделирования динамических систем с интервальными параметрами

В. Ю. Гидаснов, А. Ю. Морозов, Д. Л. Ревизников

1416

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Условная оптимизация функционального вычислительного ядерного алгоритма
приближения вероятностной плотности по заданной выборке

Т. Е. Булгакова, А. В. Войтишек

1431

Идентификация коэффициента теплопроводности вещества в трехмерном случае путем решения
соответствующей задачи оптимизации

А. Ф. Албу, В. И. Зубов

1447

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Optical solitons for Chen-Lee-Liu equation with two spectral collocation approaches

M. A. Abdelkawy, S. S. Ezz-Eldien, Anjan Biswas, A. Kamis Alzahrani, M. R. Belic

1464

Об использовании теории тонких оболочек при анализе линейной устойчивости
течения жидкости в трубе с податливой стенкой

К. В. Демьянко

1465

Об интегральных уравнениях типа М.М. Лаврентьева в коэффициентных
обратных задачах для волновых уравнений

А. И. Козлов, М. Ю. Кокурин

1492

Об аналитическом и численном решении одномерных уравнений холодной плазмы

О. С. Розанова, Е. В. Чижонков

1508

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Сравнительный анализ свойств алгоритмов решения обратных задач,
связанных с монохроматическим контролем процессов напыления оптических покрытий

*И. В. Кочкиков, Ю. С. Лагутин, А. А. Лагутина, Д. В. Лукьяненко,
А. В. Тихонравов, С. А. Шарапова, А. Г. Ягола*

1528

О решении обратных задач для волнового уравнения с нелинейным коэффициентом

А. В. Баев

1536

О методе частиц для электронов в неоднородной рассеивающей среде

А. В. Березин, М. Б. Марков, С. В. Паротькин

1545

Математическая модель магнитного торнадо

М. Б. Гавриков, А. А. Таюрский

1556

Математическое моделирование режима эмболизации
артериовенозной мальформации с перетоками на основе модели двухфазной фильтрации

Т. С. Гологуш, В. В. Остапенко, А. А. Черевко

1571

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА МНОГООБЛОЧНЫХ СЕТКАХ¹⁾

© 2021 г. С. И. Мартыненко^{1,2,3,4}

¹ 142432 Черноголовка, М.о., пр-т акад. Семенова, 1, ИПХФ РАН, Россия

² 125412 Москва, ул. Ижорская, 13, стр. 2, ОИВТ РАН, Россия

³ 105005 Москва, 2-я Бауманская ул., 5, стр. 1, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Россия

⁴ 111116 Москва, ул. Авиамоторная, 2, ЦИАМ им. П.И. Баранова, Россия

e-mail: Martynenko@ciam.ru; Martynenko@icp.ac.ru

Поступила в редакцию 24.11.2019 г.
Переработанный вариант 24.11.2019 г.
Принята к публикации 12.05.2020 г.

В статье представлены результаты теоретического анализа сходимости геометрических многосеточных алгоритмов при решении линейных краевых задач на двухблочной сетке. Доказаны свойство сглаживания для несимметричного итерационного метода с параметром и сходимость универсальной многосеточной технологии. Показано, что количество многосеточных итераций не зависит ни от величины шага, ни от количества блоков сетки. Приведены результаты вычислительных экспериментов по решению трехмерной краевой задачи Дирихле для уравнения Пуассона, иллюстрирующие теоретический анализ. Статья представляет интерес для разработчиков высокоэффективных алгоритмов решения краевых задач в областях со сложной геометрией. Библ. 13. Фиг. 6.

Ключевые слова: краевые задачи, многосеточные методы, многоблочные сетки.

DOI: 10.31857/S0044466921090143

ВВЕДЕНИЕ

Современное математическое моделирование физико-химических процессов в механике сплошных сред отличается применением сложных математических моделей, многообразных численных методов и различных суперкомпьютерных технологий. Сейчас уже вряд ли можно встретить специалиста, знакомого со всеми деталями современного вычислительного эксперимента. Поэтому основным направлением развития математического моделирования стало создание комплексов программ, устроенных по принципу “черного ящика”. Невозможность контроля пользователем построения сетки, аппроксимации уравнений математической модели и итерационного решения результирующей системы (не)линейных алгебраических уравнений на параллельном компьютере накладывает жесткие ограничения на численные методы для перспективных программных средств.

Как правило, математические модели стационарных физико-химических процессов в механике сплошных сред являются краевыми задачами для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Аппроксимация нелинейной краевой задачи на вычислительной сетке приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений высокого порядка, численное решение которой требует огромных вычислительных усилий. Поэтому разработка эффективных методов численного решения подобных краевых задач имеет важное теоретическое и прикладное значение. Проблемы численного моделирования, связанные с разработкой и теоретическим обоснованием универсальных, эффективных и параллельных алгоритмов, не снимаются сами собой по мере появления все более мощных и дешевых компьютеров. Это связано, по меньшей мере, с двумя причинами: усложнением выдвигаемых как практикой, так и

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект “Разработка и приложение высокоэффективных параллельных алгоритмов для суперкомпьютерного моделирования сложных реагирующих течений”, код проекта 21-51-46007).

теорией, задач и необходимостью проведения большого числа серий вычислительных экспериментов для достаточно полного изучения объекта [1].

В середине 80-х годов прошлого века многосеточные методы, история которых начинается с пионерских работ выдающихся отечественных математиков Р.П. Федоренко, Н.С. Бахвалова и Г.П. Астраханцева, получили широкое распространение для решения прикладных задач. Кроме того, появились персональные компьютеры, достаточно мощные для проведения научно-технических расчетов. К вычислительной технике получили широкий доступ инженеры, физики, химики и специалисты из других проблемных областей, которые не обладали достаточной подготовкой в области вычислительной математики, но сталкивались с необходимостью решения прикладных задач, требующих большого объема вычислений. Поэтому с середины 80-х годов предпринимаются многочисленные попытки разработать вычислительные алгоритмы для программ, устроенных по принципу “черного ящика” (black box software).

К настоящему времени предложено труднообозримое количество различных алгоритмов для численного решения краевых задач, но наиболее значимыми являются только два из них.

1. *Алгебраические многосеточные методы* (АММ). В АММ вспомогательные системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), необходимых для отыскания поправки, строят без привлечения геометрической информации о вычислительной сетке [2], [3]. АММ являются эффективными и высокоформализованными алгоритмами решения СЛАУ, полученных в результате аппроксимации линейных краевых задач на неструктурированных сетках. В нелинейном случае АММ применяют к решению СЛАУ, полученной в результате глобальной линеаризации дискретной краевой задачи. Помимо необходимости глобальной линеаризации исходной системы нелинейных алгебраических уравнений, остались проблемы, связанные с построением параллельных АММ.

2. *Метод вспомогательного пространства* (МВП или Auxiliary Space Method). Основная идея данного метода состоит в использовании вспомогательной задачи, решение которой проще, чем исходной [4]. Эффективность и параллелизм МВП определяется способом решения вспомогательной задачи.

Вычислительная сетка во многом определяет погрешность аппроксимации (начально-)краевых задач и трудоемкость итерационного алгоритма для решения результирующей системы (не)линейных алгебраических уравнений. Как правило, в области со сложной геометрией глобально-структурированную сетку построить гораздо сложнее, чем неструктурированную. Однако высокоэффективный и параллельный итерационный алгоритм для численного решения дискретных краевых задач проще разработать именно в случае использования глобально-структурированных сеток для аппроксимации (начально-)краевых задач. Очевидно, что вычислительная технология для перспективного программного обеспечения должна сочетать преимущества структурированных и неструктурированных сеток.

Целью данной работы является теоретическое исследование сходимости геометрических многосеточных методов на локально-структурированных (многоблочных) сетках в рамках классического многосеточного анализа, предложенного В. Хакбушем [5].

1. ЗАМЕЧАНИЯ О МЕТОДЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^3$ есть произвольная ограниченная область с границей $\partial\Omega$. Необходимо найти решение $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u^{(1)}(\mathbf{x}), u^{(2)}(\mathbf{x}), \dots, u^{(N_M)}(\mathbf{x}))^T$ 3D краевой задачи для системы линейных эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных

$$\sum_{j=1}^{N_M} \mathcal{L}_{\Omega}^{(ij)} u^{(j)}(\mathbf{x}) = f_{\Omega}^{(i)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad i = 1, 2, \dots, N_M, \quad (1a)$$

$$\sum_{j=1}^{N_M} \mathcal{L}_{\partial\Omega}^{(ij)} u^{(j)}(\mathbf{x}) = f_{\partial\Omega}^{(i)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \dots, N_B. \quad (1b)$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $\mathcal{L}_{\Omega}^{(ij)}$ и $\mathcal{L}_{\partial\Omega}^{(ij)}$ есть линейные эллиптические дифференциальные операторы, а $f_{\Omega}^{(i)}$ и $f_{\partial\Omega}^{(i)}$ – заданные функции в Ω и ее границе $\partial\Omega$ ($N_M \leq N_B$). Для краткости будем обозначать данную краевую задачу как $\mathcal{L}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ и полагать, что она имеет единственное решение $\mathbf{u} = \mathcal{L}^{-1}\mathbf{f}$.

Сначала сформулируем *базовый односеточный алгоритм* на основе метода Зейделя с блочным упорядочением неизвестных (Vanka-type smoother [6]) для численного решения краевой задачи (1). Использование метода Ванки означает совместное решение системы (1). Построим сетку G_0 с N_{G_0} узлами, аппроксимируем некоторым образом краевую задачу (1) на сетке G_0 и запишем дискретный аналог (1) в матричной форме

$$A_0 \varphi_0 = \mathbf{b}_0,$$

где вектор неизвестных φ_0 аппроксимирует вектор $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Базовый односеточный алгоритм представим в виде

$$W_V(\varphi_0^{(v+1)} - \varphi_0^{(v)}) = \mathbf{b}_0 - A_0 \varphi_0^{(v)}, \quad v = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где W_V есть матрица расщепления метода Ванки. Итерации (2) можно записать как

$$\varphi_0^{(v+1)} = (I - W_V^{-1} A_0) \varphi_0^{(v)} + W_V^{-1} \mathbf{b}_0,$$

Базовый односеточный алгоритм 3 содержит следующие проблемно-зависимые компоненты:

а) матрица коэффициентов A_0 и вектор правых частей $\mathbf{b}_0$. В общем случае, матрица коэффициентов A_0 и вектор правых частей $\mathbf{b}_0$ зависят от способа и порядка аппроксимации исходной краевой задачи и упорядочения неизвестных;

б) упорядочение неизвестных;

в) критерий останова итераций.

Далее всегда будем полагать, что итерационный метод является вполне согласованным, т.е. решение СЛАУ $(I - S_V) \varphi_0 = W_V^{-1} \mathbf{b}_0$ совпадает с решением исходной СЛАУ $A_0 \varphi_0 = \mathbf{b}_0$, где $S_V = I - W_V^{-1} A_0$ есть матрица итераций [7]. Отсюда следует, что

$$\varphi_0 - \varphi_0^{(v)} = S_V^v (\varphi_0 - \varphi_0^{(0)}).$$

Построим вычислительную сетку G_A с N_{G_A} узлами ($N_{G_A} \approx N_{G_0}$), далее нижний индекс “A” (auxiliary) будет означать принадлежность к вспомогательной сетке. Итерации метода вспомогательного пространства, показанные на фиг. 1, могут быть записаны в виде

$$(\mathbf{b}_0 - A_0 \varphi_0^{(q+1)}) = M(\mathbf{b}_0 - A_0 \varphi_0^{(q)}), \quad (3)$$

где матрица итераций линейного двухсеточного алгоритма имеет вид

$$M = A_0 S_0^v (A_0^{-1} - \mathcal{P}_{A \rightarrow 0} A_A^{-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow A}). \quad (4)$$

Здесь $\mathcal{R}_{0 \rightarrow A}$ есть оператор, проецирующий невязку $\mathbf{b}_0 - A_0 \varphi_0^{(q)}$ с исходной сетки G_0 на вспомогательную сетку G_A , $\mathcal{P}_{A \rightarrow 0}$ есть оператор, проецирующий поправку с исходной сетки G_0 на вспомогательную сетку G_A , S_0^v – матрица итераций Ванки, v – количество сглаживающих итераций, выполняемых на исходной сетке G_0 . Матрица A_A получена в результате аппроксимации линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}$ на вспомогательной сетке методом контрольного объема, причем порядок аппроксимации не превышает 2.

Классический анализ сходимости линейного двухсеточного алгоритма основан на следующих утверждениях [5].

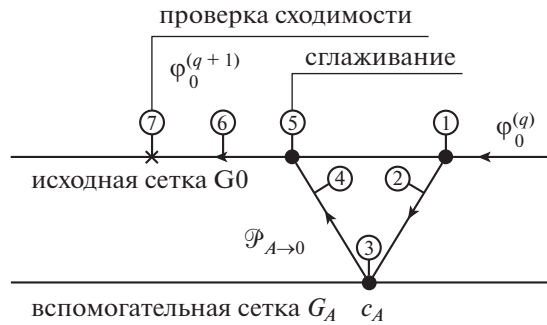
1. Свойство сглаживания: существует функция $\eta(v) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что $\eta(v) \rightarrow 0$ при $v \rightarrow \infty$ и

$$\|A_0 S_0^v\| \leq \eta(v) \|A_0\|. \quad (5)$$

2. Свойство аппроксимации: для некоторой константы $C_A > 0$

$$\|A_0^{-1} - \mathcal{P}_{A \rightarrow 0} A_A^{-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow A}\| \leq C_A \|A_0\|^{-1}. \quad (6)$$

Доказательство данных свойств является отдельной и очень трудной теоретической проблемой [8]. Наиболее значимые результаты были получены для симметричных положительно определенных матриц и точечного упорядочения неизвестных. В дальнейшем будем полагать, что



Фиг. 1. Межсеточная итерация метода вспомогательного пространства.

свойства сглаживания и аппроксимации всегда выполнены. Тогда справедлива следующая оценка:

$$\|M\| \leq \|A_0 S^v\| \cdot \|A_0^{-1} - \mathcal{P}_{A \rightarrow 0} A_A^{-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow A}\| \leq C_A \eta(v). \quad (7)$$

Выполняя достаточное количество сглаживающих итераций v , можно добиться сходимости линейного двухсеточного алгоритма, т.е. $\|M\| \leq C_A \eta(v) < 1$, причем из (3) следует оценка

$$\rho_q \leq C_A \eta(v) < 1, \quad (8)$$

где ρ_q есть коэффициент осредненного уменьшения нормы вектора невязки

$$\rho_q = \left(\frac{\|b_0 - A_0 \phi_0^{(q)}\|}{\|b_0 - A_0 \phi_0^{(0)}\|} \right)^{1/q},$$

который показывает среднее за q итераций уменьшение нормы вектора невязки $\|b_0 - A_0 \phi_0^{(q)}\|$ (см. [9]). Поскольку правая часть неравенства (8) не зависит от шага сетки, то количество межсеточных итераций также не зависит от шага сетки.

Фактически, линейный двухсеточный алгоритм можно рассматривать как способ построения предобуславливающей матрицы $P^{-1} = A_0^{-1}(I - M)$, т.е.

$$P^{-1} A_0 \phi_0 = P^{-1} b_0,$$

где матрица M определена согласно (4).

Наиболее трудоемкой частью итерации двухсеточного алгоритма (3) является обращение матрицы A_A , т.е. решение соответствующей СЛАУ. Вычислительная стоимость сглаживающей итерации на исходной сетке G_0 составит $\mathcal{W}_{G_0} = O(n_b^{-2} N_{G_0}^3 N_M^3)$ арифметических операций (ао), где N_{G_0} есть количество узлов исходной сетки G_0 , N_M есть количество уравнений в системе (1), а n_b — количество блоков неизвестных $1 \leq n_b \leq N_G N_M$. Трудоемкость обращения матрицы A_A не должна превышать $\mathcal{W}_{G_A} = O(n_b^{-2} N_{G_A}^3 N_M^3 \log N_{G_A}^{1/d})$ ао, $1 \leq n_b \leq N_G N_M$. Поскольку $N_{G_0} \approx N_{G_A}$, то вычислительная стоимость одной итерации двухсеточного алгоритма составит

$$\mathcal{W}^{(1)} = O(n_b^{-2} N_{G_0}^3 N_M^3 \log N_{G_0}^{1/d}) \quad \text{ао,} \quad 1 \leq n_b \leq N_G N_M.$$

Рассмотренный линейный двухсеточный алгоритм можно рассматривать как разновидность известного вычислительного приема, называемого *коррекцией дефекта* [2]. Если выполнены свойства сглаживания (5) и аппроксимации (6), то основной объем вычислительной работы приходится на обращение матрицы A_A , а итерации (3) сходятся к $\phi_0 = A_0^{-1} b_0$. Это позволяет гибко изменять способ и порядок аппроксимации системы (1).

Трудоемкость метода вспомогательного пространства определяется выбором итерационного метода для решения вспомогательной СЛАУ

$$A_A \mathbf{c}_A = \mathcal{R}_{0 \rightarrow A}(\mathbf{b}_0 - A_0 \Phi_0^{(q)}),$$

где $\mathbf{c}_A$ есть поправка.

Численные методы решения краевых задач можно разделить на оптимизированные и робастные [5]. В оптимизированных алгоритмах необходимо адаптировать проблемно-зависимые компоненты к рассматриваемой проблеме, чтобы получить минимально возможную трудоемкость. Робастные алгоритмы пытаются построить так, чтобы компоненты не зависели от данной проблемы для единообразного решения большего класса задач. Основной областью применения робастных алгоритмов являются комплексы программ, устроенные по принципу “черного ящика” (black box software).

В конце 80-х годов прошлого века в теоретическом отделе лаборатории в Лос-Аламосе был описан многосеточный алгоритм (superconvergent multigrid), в котором несколько сеток использовано для отыскания поправки [10], [11]. Основная идея состояла в построении на грубых сетках более точной поправки для ускорения сходимости. В 90-м году аналогичный алгоритм (Robust Multigrid Technique) был предложен в Москве [12], но основная идея состояла в минимизации количества проблемно-зависимых компонентов для расширения класса задач, решаемых унифицированным образом [13]. Забавно, но дополнительные сетки были использованы для построения как оптимизированного, так и робастного алгоритмов.

Новизна предлагаемого подхода состоит в: 1) использовании вспомогательной структурированной сетки G_A в методе вспомогательного пространства;

2) использовании универсальной многосеточной технологии (УМТ) для отыскания поправки на вспомогательной структурированной сетке G_A .

2. СГЛАЖИВАНИЕ НА ДВУХБЛОЧНЫХ СЕТКАХ

Пусть некоторая сетка G_0 образована N_{G_0} узлами. Положим, что из сетки G_0 можно выделить подсетки $G_i \in G_0$, состоящие из N_{G_i} узлов, такие, что

$$G_0 = \bigcup_{i=1}^I G_i \quad \text{и} \quad G_n \cap G_m = \emptyset, \quad n \neq m.$$

Будем говорить, что совокупность всех подсеток G_i , $i = 1, 2, \dots, I$, образует *сеточный уровень*, причем

$$\sum_{i=1}^I N_{G_i} = N_{G_0},$$

а исходная сетка G_0 образует нулевой сеточный уровень. Возможны различные варианты построения подсеток G_i , однако нас будут интересовать только те из них, которые позволят аппроксимировать исходную краевую задачу на сетках G_i с наименьшей погрешностью.

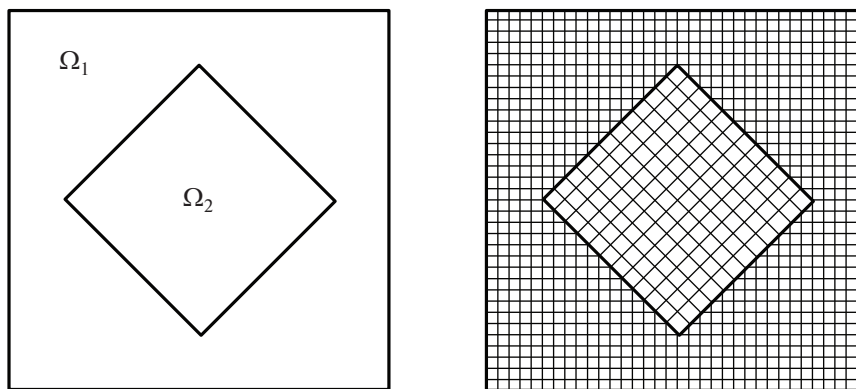
Определение 1. Вычислительная сетка G_1^0 называется глобально-структурированной, если ее подсетки G_k^l , $l = 1, 2, \dots, L^+$, $k = 1, 2, \dots, K$, обладают следующими свойствами.

Свойство 1. Каждая сетка G_k^l ($l \neq L^+$, где L^+ — уровень с самыми грубыми подсетками) представима в виде объединения K соответствующих ей грубых подсеток уровня $l + 1$. Как следствие, исходная сетка G_1^0 представима в виде объединения всех подсеток одного уровня l :

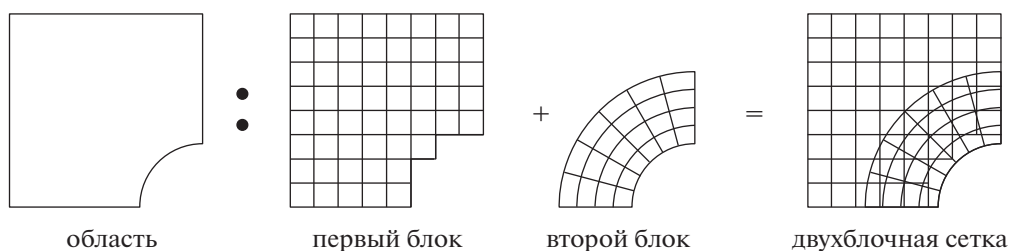
$$G_1^0 = \bigcup_{k=1}^K G_k^l, \quad l = 0, \dots, L^+.$$

Свойство 2. Подсетки одного уровня l не имеют общих точек, т.е.

$$G_n^l \cap G_m^l = \emptyset, \quad n \neq m, \quad l = 1, \dots, L^+.$$



Фиг. 2. Двумерная двухблочная сетка с общей границей.



Фиг. 3. Двумерная двухблочная сетка с пересечением.

Свойство 3. Каждый конечный объем на подсетках G_k^l представим в виде объединения K конечных объемов на исходной сетке G_1^0 .

Совокупность всех вычислительных сеток будем называть *многосеточной структурой*.

Построение глобально-структурированной сетки требует трудоемких действий, связанных либо с отображением области, либо с численным решением (начально-)краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных различных типов. Менее трудоемкими являются разделение области на подобласти более простой формы и построение структурированных сеток в каждой из подобластей. Такие сетки будем называть локально-структурированными или многоблочными. Блоки могут иметь общую границу (фиг. 2) или пересекаться (фиг. 3). В общем случае необходимо интерполировать приближение к решению исходной краевой задачи между блоками сеток, что приводит к снижению скорости сходимости итерационного алгоритма и затрудняет распараллеливание итераций. Способ интерполяции зависит от гладкости коэффициентов и решения. В дальнейшем интерполяцию между блоками сетки будем называть локальной.

Положим, что область Ω представима в виде объединения подобластей Ω_k , в каждой из которых возможно построение структурированной сетки G_k^h , однако их объединение $G^h = \bigcup_{k=1}^K G_k^h$ не является глобально структурированной сеткой. Сетки данного типа будут называться локально-структурированными или многоблочными.

Далее будет рассмотрен простейший случай $K = 2$, характерный пример показан на фиг. 2: область Ω состоит из двух подобластей Ω_1 и Ω_2 , в каждой из которых построена равномерная структурированная сетка.

Рассмотрим линейную краевую задачу

$$L_{\Omega_1}g(\mathbf{x}) = f_{\Omega_1}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_1, \quad (9a)$$

$$L_{\Omega_2}g(\mathbf{x}) = f_{\Omega_2}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_2, \quad (9b)$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^T$ и $\Omega \in \mathbb{R}^d$ — заданная открытая область с границей $\partial\Omega$, L_{Ω_1} и L_{Ω_2} — эллиптические дифференциальные операторы, определенные в подобластях Ω_1 и Ω_2 соответственно, f_{Ω_1} и f_{Ω_2} обозначают данные функции на Ω_1 и Ω_2 . На внешней границе $\partial\Omega$ области Ω заданы граничные условия

$$L_{\partial\Omega}g(\mathbf{x}) = f_{\partial\Omega}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (9\text{в})$$

а на внутренней границе $\partial\Omega_2$ заданы условия сопряжения

$$L_{\partial\Omega_2}g(\mathbf{x}) = f_{\partial\Omega_2}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_2. \quad (9\text{г})$$

Построим в каждой из областей Ω_1 и Ω_2 вычислительные сетки G_1 и G_2 с шагами h_1 и h_2 . Аппроксимация исходной дифференциальной задачи на двухблочной сетке, образованной сетками G_1 и G_2 , приводит к СЛАУ следующего вида:

$$\begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_u \\ \mathbf{b}_v \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ суть дискретные аналоги функции g на сетках G_1 и G_2 соответственно. Матрицы C и D в общем случае являются прямоугольными и $C^T \neq D$. Вид матриц C и D зависит от типа сеток G_1 и G_2 , которые могут иметь общую границу или пересекаться.

Рассмотрим простейший итерационный метод для решения СЛАУ (10)

$$W_B(\mathbf{u}^{(v+1)} - \mathbf{u}^{(v)}) = \mathbf{b}_u - B\mathbf{u}^{(v)} - C\mathbf{v}^{(v)}, \quad (11\text{а})$$

$$W_F(\mathbf{v}^{(v+1)} - \mathbf{v}^{(v)}) = \mathbf{b}_v - D\mathbf{u}^{(v+1)} - F\mathbf{v}^{(v)}, \quad (11\text{б})$$

где W_B и W_F есть матрицы расщепления матриц B и F .

Подставляя $\mathbf{u}^{(v+1)}$ из (11а) в (11б), получаем

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(v+1)} \\ \mathbf{v}^{(v+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_B & -W_B^{-1}C \\ -W_F^{-1}DS_B & \tilde{S}_F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(v)} \\ \mathbf{v}^{(v)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_B^{-1}\mathbf{b}_u \\ W_F^{-1}\mathbf{b}_v - W_F^{-1}DW_B^{-1}\mathbf{b}_u \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{S}_F &= I - W_F^{-1}(F - DW_B^{-1}C), \\ S_B &= I - W_B^{-1}B. \end{aligned}$$

Уравнение (12) можно записать в каноническом виде:

$$\Psi^{(v+1)} = (I - \tilde{W}^{-1}A)\Psi^{(v)} + W^{-1}\tilde{A}A^{-1}\tilde{\mathbf{b}}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi &= \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & DW_B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & C \end{pmatrix}, \\ W &= \begin{pmatrix} W_B & 0 \\ 0 & W_F \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -DW_B^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_u \\ \mathbf{b}_v \end{pmatrix}, \quad \tilde{W} = A\tilde{A}^{-1}W. \end{aligned}$$

Классический анализ сходимости многосеточных методов основан на свойствах сглаживания и аппроксимации [5]. К сожалению, наиболее изучен симметричный случай [8]. В несимметричном случае результаты получены лишь для сглаживателя с параметром [13]. Запишем (13) в виде

$$\Psi^{(v+1)} = S(\omega)\Psi^{(v)} + W^{-1}\tilde{A}A^{-1}\tilde{\mathbf{b}}, \quad (14)$$

где $S(\omega)$ есть матрица сглаживающих итераций

$$S(\omega) = I - \frac{1}{1+\omega}\tilde{W}^{-1}A,$$

а $\omega \geq 0$ есть некоторый параметр.

В несимметричном случае доказательство сглаживающих свойств основано на следующей лемме.

Лемма 1. Пусть для матрицы $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ выполнено $\|Q\| \leq 1$ в некоторой операторной норме и $3 - 2\sqrt{2} \leq \omega \leq 3 + 2\sqrt{2}$. Тогда в той же норме справедливо

$$\frac{1}{(1 + \omega)^{v+1}} \|(I - Q)(\omega I + Q)^v\| \leq \frac{1}{\sqrt{e\omega v}}, \quad v = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Доказательство леммы приведено в [13].

Тогда справедлива следующая лемма о сглаживающих свойствах.

Лемма 2. Пусть для матрицы сглаживающих итераций $S(0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ выполнено $\|S(0)\| < 1$ и $\|\tilde{W}\| \leq C\|A\|$ в некоторой операторной норме и C есть некоторая константа. Тогда в той же норме при $3 - 2\sqrt{2} \leq \omega \leq 3 + 2\sqrt{2}$ справедливо:

а)

$$\|AS^v(\omega)\| \leq C \frac{1 + \omega}{\sqrt{e\omega v}} \|A\|. \quad (16)$$

б)

$$\|r^{(v)}\| \leq C \frac{1 + \omega}{\sqrt{e\omega v}} \|A\| \cdot \|\psi^{(0)} - \psi\| \leq C \frac{1 + \omega}{\sqrt{e\omega v}} \text{cond}(A) \|r^{(0)}\|, \quad (17)$$

где $r^{(v)} = \tilde{b} - \tilde{A}\psi^{(v)}$ есть невязка v -го приближения $\psi^{(v)}$ к решению $\psi = \tilde{A}^{-1}\tilde{b}$.

Доказательство. 1) с учетом (15) нетрудно получить

$$\|AS^v(\omega)\| \leq \frac{1}{(1 + \omega)^{v+1}} \|(I - S(0))(\omega I + S(0))^v\| \cdot (1 + \omega) \|\tilde{W}\| \leq \frac{1 + \omega}{\sqrt{e\omega v}} \|\tilde{W}\|,$$

откуда следует (16);

2) для точного решения (14) справедливо

$$\psi^{(v)} - \psi = S^v(\omega)(\psi^{(0)} - \psi).$$

Откуда, домножая на матрицу A , следует, что

$$-r^{(v)} = AS^v(\omega)(\psi^{(0)} - \psi).$$

Далее, учитывая (16), нетрудно получить (17).

Тем не менее традиционный подход к доказательству свойства сглаживания в несимметричном случае, основанный на оценках типа (15), является достаточно грубым: например, не симметризованный метод Зейделя обладает свойством сглаживания, что не следует из (16) при $\omega = 0$. Поэтому нужны дополнительные исследования случая $\omega \rightarrow 0$.

Данный подход легко обобщить на случай $K > 2$, т.е. если количество блоков сетки больше двух.

3. МНОГОСЕТОЧНЫЕ ИТЕРАЦИИ НА ДВУХБЛОЧНЫХ СЕТКАХ

Сходимость односеточной УМТ проще анализировать в предположении, что сглаживание осуществляют на многосеточной структуре — особой последовательности подсеток самой мелкой сетки [13]. На самом деле, многосеточная структура используется лишь для аппроксимации Σ -модифицированной краевой задачи (9) интегроинтерполяционным методом. Тогда разностная краевая задача может быть записана в матричной форме:

$$A_l \mathbf{c}_l = \mathbb{R}_{0 \rightarrow l} \mathbf{r}_0, \quad l = 0, 1, \dots, L_3^+, \quad (18)$$

где матрица коэффициентов A_l имеет вид

$$A_l = \begin{pmatrix} B_l & C_l \\ D_l & F_l \end{pmatrix}.$$

Матрицы B_l , C_l , D_l и F_l имеют блочно диагональную форму, причем количество блоков на главной диагонали равно количеству сеток, образующих данный сеточный уровень — 3^{dl} , $d = 2, 3$, $l = 0, 1, \dots, L_3^+$, где L_3^+ есть номер сеточного уровня, состоящий из самых грубых сеток, построенных утроением шага. Векторы неизвестных $\mathbf{c}_l$ и $\mathbf{r}_0$ имеют вид

$$\mathbf{c}_l = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_l^u \\ \mathbf{c}_l^v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_0^u \\ \mathbf{r}_0^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_u - B_0 \hat{\mathbf{u}}^{(q)} - C_0 \hat{\mathbf{v}}^{(q)} \\ \mathbf{b}_v - D_0 \hat{\mathbf{u}}^{(q)} - F_0 \hat{\mathbf{v}}^{(q)} \end{pmatrix}.$$

Здесь q есть номер многосеточной итерации, $\mathbf{c}_0^u$ и $\mathbf{c}_0^v$ есть поправки к приближению к решению $\hat{\mathbf{u}}$ и $\hat{\mathbf{v}}$ на сетках G_1 и G_2 соответственно. Нижний индекс l указывает на принадлежность к сеточному уровню l , причем $l = 0$ есть самая мелкая сетка. Оператор сужения (restriction operator) $\mathcal{R}_{0 \rightarrow l}$

$$\mathcal{R}_{0 \rightarrow l} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{0 \rightarrow l}^{G_1} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{0 \rightarrow l}^{G_2} \end{pmatrix}$$

проецирует вектор невязок $\mathbf{r}_0$ с самых мелких сеток G_1 и G_2 ($l = 0$) на сетки уровня $l = 0, 1, \dots, L_3^+$. Очевидно, что $\mathcal{R}_{0 \rightarrow 0} = I$. Оператор сужения УМТ не зависит от решаемой задачи, а его конструкция однозначно определяется свойством аддитивности определенного интеграла относительно подобластей [13].

Сглаживающие итерации (13) на многосеточной структуре, порожденной двухблочной сеткой, могут быть записаны в виде

$$\mathbf{c}_l^{(v_l+1)} = S_l(\omega_l) \mathbf{c}_l^{(v_l)} + W_l^{-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow l}^* \mathbf{r}_0, \quad (19)$$

где

$$S_l(\omega_l) = I - \frac{1}{1 + \omega_l} W_l^{-1} \tilde{A}_l, \\ \tilde{A}_l = \begin{pmatrix} B_l & C_l \\ D_l & F_l \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_l W_{B_l}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_l & C_l \end{pmatrix}, \\ W_l = \begin{pmatrix} W_{B_l} & 0 \\ 0 & W_{F_l} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_{0 \rightarrow l}^* = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -D_l W_{B_l}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{0 \rightarrow l}^{G_1} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{0 \rightarrow l}^{G_2} \end{pmatrix}.$$

В УМТ используют пилообразный цикл (т.е. V-цикл без предварительного сглаживания [9]). После выполнения сглаживания на всех сетках уровня $l + 1$ осуществляют переход к более мелким сеткам уровня l

$$\mathbf{c}_l^{(0)} = \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} \mathbf{c}_l^{(v_l+1)},$$

где $\mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l}$ есть проблемно-независимый оператор пролонгации УМТ (перестановочная матрица), т.е. пролонгированное значение поправки с соседнего уровня с более грубыми сетками $l + 1$ принимают в качестве начального приближения для сглаживающих итераций на сетках уровня l [13]. На уровне с самыми грубыми сетками L_3^+ СЛАУ (18) решают точно.

Тогда из (19) нетрудно получить

$$\mathbf{c}_l - \mathbf{c}_l^{(0)} = \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} (\mathbf{c}_l - \mathbf{c}_l^{(v_l+1)}) + d_l \mathcal{R}_{0 \rightarrow l}^* \mathbf{r}_0,$$

где $\mathbf{c}_l = A_l^{-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow l} \mathbf{r}_0$ есть точное значение поправки, а d_l есть матрица вида

$$d_l = A_l^{-1} - \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} A_{l+1}^{-1} \mathcal{R}_{l \rightarrow l+1}^*. \quad (20)$$

Исследуя разность между точным и приближенным значением поправки на уровнях $l = L_3^+, \dots, 1, 0$, получаем

$$\mathbf{c}_l - \mathbf{c}_l^{(v_l)} = Q_l (\mathcal{R}_{0 \rightarrow l}^* \mathbf{r}_0 - A_l \mathbf{c}_l),$$

где матрица Q_l определена рекуррентным образом:

$$Q_l = \begin{cases} S_l^{v_l}(\omega_l)(d_l \mathcal{R}_{0 \rightarrow l}^* + \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} Q_{l+1}), & l = 0, 1, 2, \dots, L_3^+ - 2, \\ S_l^{v_l}(\omega_l) d_l \mathcal{R}_{0 \rightarrow l}^*, & l = L_3^+ - 1. \end{cases} \quad (21)$$

Значение поправки после выполнения многосеточной итерации УМТ составит

$$\mathbf{c}_0^{(v_0)} = \mathbf{c}_0 - Q_0 \mathbf{r}_0 = (A_0^{-1} - Q_0)(\mathcal{R}_{0 \rightarrow l}^* \mathbf{r}_0 - A_l \mathbf{c}_1).$$

Тогда нетрудно получить новое приближение к решению

$$\psi^{(q+1)} = \psi^{(q)} + \mathbf{c}_0^{(v_0)} = Q_0 A_0 \psi^{(q)} + (A_0^{-1} - Q_0) \mathcal{R}_{0 \rightarrow l}^* \mathbf{r}_0, \quad (22)$$

т.е. матрица многосеточной итерации на многосеточной структуре, порожденной двухблочной сеткой, есть $Q_0 \tilde{A}_0$.

Классический анализ сходимости многосеточных методов основан на следующих утверждениях [8].

1. Свойство сглаживания: существует функция $\eta(v_l) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что $\eta(v_l) \rightarrow 0$ при $v_l \rightarrow \infty$ и

$$\|A_l S_l^{v_l}\| \leq \eta(v_l) \|A_l\|, \quad l = 0, 1, \dots, L^+. \quad (23)$$

2. Свойство аппроксимации: для некоторой константы $C_A > 0$

$$\|d_l\| = \|A_l^{-1} - \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} A_{l+1}^{-1} \mathcal{R}_{l \rightarrow l+1}^*\| \leq C_A \|A_l\|^{-1}, \quad l = 0, 1, \dots, L^+ - 1. \quad (24)$$

Заметим, что из (16) следует

$$\eta(v_l) = C \frac{1 + \omega_l}{\sqrt{e \omega_l v_l}} \|A_l\|. \quad (25)$$

Перепишем (22) в виде

$$\mathbf{r}_0^{(q+1)} = A_0 Q_0 \mathbf{r}_0^{(q)}.$$

Тогда справедлива следующая теорема о сходимости УМТ.

Теорема. *Предположим, что выполнены свойства сглаживания (23) и аппроксимации (24), а также $\|I - \tilde{W}_l^{-1} A_l\| < 1$, $\|\mathcal{R}_{0 \rightarrow l}^*\| \leq C_{\mathcal{R}}$ и $3 - 2\sqrt{2} \leq \omega_l \leq 3 + 2\sqrt{2}$. Тогда многосеточные итерации УМТ сходятся, причем*

$$\|A_0 Q_0\| \leq C_A C C_{\mathcal{R}} \sum_{l=0}^{L_3^+-1} C_*^l \frac{1 + \omega_l}{\sqrt{e \omega_l v_l}}. \quad (26)$$

Доказательство. Из (21) следует оценка

$$\|A_0 Q_0\| \leq \|A_0 S_0^{v_0}(\omega_0) d_0\| + \sum_{l=1}^{L_3^+-1} \prod_{k=0}^{l-1} \|A_k S_k^{v_k}(\omega_k) \mathcal{P}_{k+1 \rightarrow k} A_{k+1}^{-1}\| \cdot \|A_l S_l^{v_l}(\omega_l) d_l\| \cdot \|\mathcal{R}_{0 \rightarrow l}^*\|. \quad (27)$$

Используя свойства сглаживания (23), (25) и аппроксимации (24), получаем

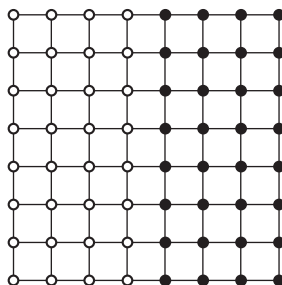
$$\|A_l S_l^{v_l}(\omega_l) d_l\| \leq \|A_l S_l^{v_l}(\omega_l)\| \cdot \|d_l\| \leq C_A C \frac{1 + \omega_l}{\sqrt{e \omega_l v_l}}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, L_3^+ - 1. \quad (28)$$

Далее очевидно следующее неравенство:

$$\|A_k S_k^{v_k}(\omega_k) \mathcal{P}_{k+1 \rightarrow k} A_{k+1}^{-1}\| \leq C_* \|A_k S_k^{v_k}(\omega_k) A_k^{-1}\| \leq C_*, \quad (29)$$

где C_* есть некоторая константа. Тогда оценка (27), с учетом (28) и (29), принимает вид (26).

Доказанная теорема показывает, что сходимость УМТ не зависит ни от шага двухблочной сетки, а определяется только количеством сглаживающих итераций v_l , выполняемых на сетках



Фиг. 4. 2D двухблочная сетка: блок G_1 ($\circ$) и блок G_2 ($\bullet$).

уровней l . Выполняя достаточное количество сглаживающих итераций, можно добиться, что $\|A_0 Q_0\| < 1$ (достаточное условие сходимости).

Полученные результаты легко обобщить на многоблочные сетки с количеством блоков больше двух.

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В качестве модельной выбрана трехмерная задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta w = -f$$

в единичном кубе Ω . Точное решение выбрано в виде

$$w_e(x, y, z) = \exp(x + y + z).$$

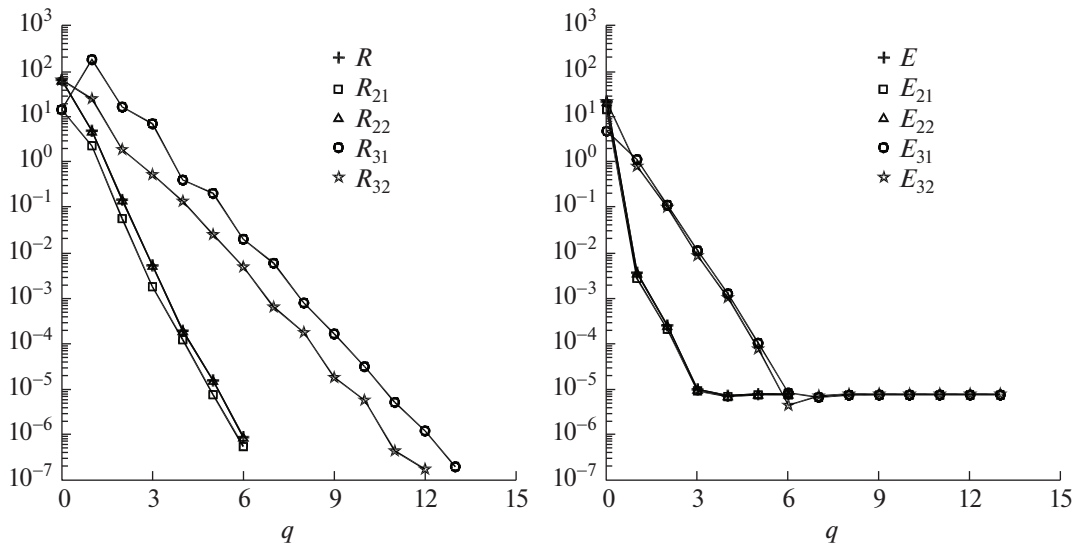
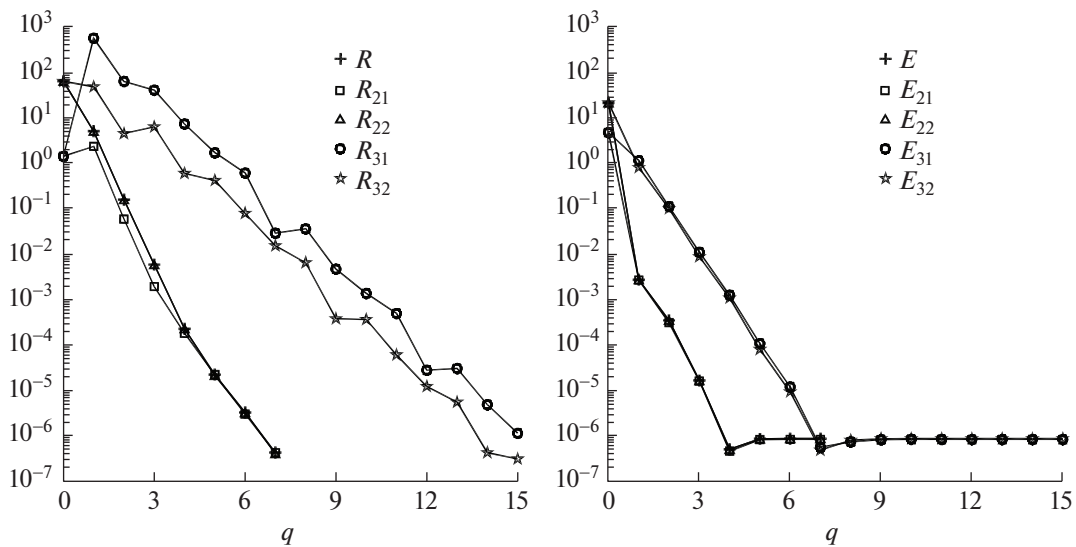
Данное точное решение определяет правую часть f и граничные условия.

Построим в области Ω равномерную сетку G . Разностный аналог исходной краевой задачи, полученный посредством аппроксимации на семиточечном шаблоне, запишем в матричной форме:

$$A\mathbf{w}^h = \mathbf{b}^h.$$

Первый тест предназначен для численного решения модельной краевой задачи в единичном кубе Ω (т.е. без деления области на подобласти). После каждой многосеточной итерации q вычислены норма вектора невязки $R = \|\mathbf{b}^h - A\mathbf{w}^h\|_\infty$ и ошибка численного решения $E = \max_{ijk} |w_e(x_i, y_j, z_k) - w_{ijk}^h|$. Критерием останова многосеточных итераций выбрано условие $R < 10^{-6}$. Результаты первого теста использованы для иллюстрации возможного уменьшения скорости сходимости многосеточных итераций УМТ, вызванного разбиением области Ω на две подобласти.

Второй тест предназначен для численного решения модельной краевой задачи на двухблочной сетке, построенной в единичном кубе Ω . Равномерная сетка G разделена на два блока G_1 и G_2 по плоскости $x = 0.5$. Пример деления в 2D случае показан на фиг. 4. После каждой многосеточной итерации q вычислены норма вектора невязки $R_{21} = \|\mathbf{b}^h - \tilde{A}\mathbf{w}^h\|_\infty$ и ошибка численного решения $E_{21} = \max_{ijk} |w_e(x_i, y_j, z_k) - w_{ijk}^h|$ на сетке G_1 , и $R_{22} = \|\mathbf{b}^h - \tilde{A}\mathbf{w}^h\|_\infty$ и $E_{22} = \max_{ijk} |w_e(x_i, y_j, z_k) - w_{ijk}^h|$ на сетке G_2 . Критерием останова многосеточных итераций выбрано условие $\max(R_{21}; R_{22}) < 10^{-6}$. Сглаживание осуществляется попеременно на подсетках сеток G_1 и G_2 .

Фиг. 5. Сходимость УМТ на сетке $101 \times 101 \times 101$.Фиг. 6. Сходимость УМТ на сетке $301 \times 301 \times 301$.

Третий тест отличается от второго только сглаживанием: сначала сглаживающие итерации выполняют на подсетках сетки G_1 , потом на подсетках сетки G_2 . После каждой многосеточной итерации q вычислены норма вектора невязки $R_{31} = \|\mathbf{b}^h - \tilde{A}\mathbf{w}^h\|_\infty$ и ошибка численного решения $E_{31} = \max_{ijk} |w_e(x_i, y_j, z_k) - w_{ijk}^h|$ на сетке G_1 , и $R_{32} = \|\mathbf{b}^h - \tilde{A}\mathbf{w}^h\|_\infty$ и $E_{32} = \max_{ijk} |w_e(x_i, y_j, z_k) - w_{ijk}^h|$ на сетке G_2 . Критерием останова многосеточных итераций выбрано условие $\max(R_{31}; R_{32}) < 10^{-6}$.

В качестве сглаживателя выбран метод Зейделя с упорядочением неизвестных в блоки $3 \times 3 \times 3$. Вычисления проведены на сетках $101 \times 101 \times 101$ ($h_x = h_y = h_z = 1/100$) и $301 \times 301 \times 301$ ($h_x = h_y = h_z = 1/300$).

Результаты вычислительного эксперимента показаны на фиг. 5 и 6. При надлежащей организации сглаживания (второй тест) сходимость УМТ на двухблочной сетке практически не отлича-

ется от сходимости на моноблочной сетке (первый тест). Выполнение сглаживания последовательно на каждом блоке приводит к замедлению сходимости УМТ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты выполненного теоретического анализа и проведенных вычислительных экспериментов показывают, что при надлежащей организации сглаживания количество многосеточных итераций не зависит ни от величины шага, ни от количества блоков сетки. Однако в теоретическом анализе сходимости многосеточных методов еще остаются пробелы, связанные, в частности, с доказательством свойства сглаживания для несимметричных итерационных методов, использующих блочное упорядочение неизвестных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин В.П. Математическое моделирование. Ч. 1. Непрерывные и дискретные модели. Новосибирск: Изд-во СО РАН. 2017.
2. Trottenberg U., Oosterlee C.W., Schüller A. Multigrid. London: Academic Press, 2001.
3. Brandt A., McCormick S.F., Ruge J. Algebraic multigrid (AMG) for automatic multigrid solution with application to geodetic computations. Institute for Computational Studies, Fort Collins, Colorado, 1982.
4. Xu J. The auxiliary space method and optimal multigrid preconditioning techniques for unstructured meshes // Computing. 1996. V. 56. P. 215–235.
5. Hackbusch W. Multi-grid methods and applications. Berlin: Springer, 1985.
6. Vanka S.P. Block-Implicit Multigrid Solution of Navier–Stokes Equations in Primitive Variables // J. Comput. Phys. 1986. V. 65. № 1. P. 138–158.
7. Hageman L.A., Young D.M. Applied Iterative Methods. International Series of Numerical Mathematics. New York: Academic Press, 1981.
8. Олышанский М.А. Лекции и упражнения по многосеточным методам. М.: Физматлит, 2005.
9. Wesseling P. An introduction to multigrid methods. Chichester: Wiley, 1992.
10. Frederickson P.O., McBryan O.A. Parallel superconvergent multigrid. Multigrid Methods: Theory, Applications and Supercomputing (ed. S. McCormick). 195–210. Marcel Dekker, New York, 1988.
11. Frederickson P.O., McBryan O.A. Recent developments for the PSMG multiscale method. Multigrid Methods III, Proceedings of the 3rd International Conference on Multigrid Methods (eds W. Hackbusch and U. Trottenberg). 21–40. Birkhauser, Basle, 1991.
12. Мартыненко С.И. Последовательное программное обеспечение для универсальной многосеточной технологии. М.: Триумф, 2020. https://github.com/simartynenko/Robust_Multigrid_Technique_2020
13. Martynenko S.I. The robust multigrid technique: For black-box software. Berlin: De Gruyter, 2017.

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.65

АЛГОРИТМ АДАПТИВНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТТ-РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ¹⁾

© 2021 г. В. Ю. Гидаспов^{1,*}, А. Ю. Морозов^{1,2,**}, Д. Л. Ревизников^{1,2,***}

¹ 125993 Москва, Волоколамское ш., 4, ФГБОУ ВО МАИ, Россия

² 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, к. 2, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: gidaspov@mai.ru

**e-mail: morozov@infway.ru

***e-mail: reviznikov@mai.ru

Поступила в редакцию 03.12.2019 г.

Переработанный вариант 19.03.2020 г.

Принята к публикации 12.05.2021 г.

Задачи с неточно заданными данными возникают во многих практических областях и часто формулируются как задачи анализа динамических систем с интервальными параметрами. Для таких систем необходимо уметь получать интервальную оценку решения по интервальным значениям параметров. Основная идея алгоритма адаптивной интерполяции заключается в построении над множеством, образованным интервальными начальными условиями и параметрами задачи, адаптивной иерархической сетки на основе kd-дерева, в которой каждая ячейка содержит в себе интерполяционную сетку. Для каждого момента времени в зависимости от особенностей решения выполняется адаптивное перестроение разбиения. Результатом работы алгоритма на каждом шаге является кусочно-полиномиальная функция, которая интерполирует зависимость решения задачи от значений параметров с заданной точностью. С ростом числа интервальных параметров количество узлов, содержащихся в интерполяционной сетке, возрастает экспоненциально, что ограничивает область применения алгоритма. Для улучшения этой ситуации в работе предлагается использовать вместо многомерных массивов, в которых хранятся значения узлов интерполяционных сеток, их ТТ-разложение. На модельных задачах продемонстрирована эффективность данной модификации алгоритма. Выполнено моделирование горения водородно-кислородной смеси при наличии неопределенностей в константах скоростей химических реакций. Библ. 24. Фиг. 10. Табл. 4.

Ключевые слова: алгоритм адаптивной интерполяции, интервальные ОДУ, kd-дерево, тензорный поезд, ТТ-разложение, химическая кинетика.

DOI: 10.31857/S0044466921090106

ВВЕДЕНИЕ

Задачи с неточно заданными данными возникают во многих практических областях и обычно формулируются в виде динамических систем с интервальными параметрами [1], [2]. Для таких систем необходимо уметь получать интервальную оценку решения по интервальным значениям параметров. Традиционно подобные задачи формулируются в виде задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с интервальными начальными условиями или параметрами.

Зачастую сложность существующих методов является экспоненциальной относительно количества интервальных начальных условий или параметров, поэтому есть необходимость в эффективных способах уменьшения так называемого проклятия размерности.

Существуют подходы [3]–[8], позволяющие уменьшить вычислительную сложность задач за счет выявления скрытых структур и устранения избыточности. В работе рассматриваются вопросы ускорения алгоритма адаптивной интерполяции [9]–[12] с помощью применения ТТ-разложения [7]. Суть алгоритма адаптивной интерполяции заключается в построении динамической

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (код проекта 075-15-2020-799).

структурированной сетки на основе kd-дерева над множеством, образованным интервальными параметрами задачи. Каждая вершина дерева представляет собой регулярную интерполяционную сетку, соответствующую заданной степени интерполяционного многочлена. С каждым узлом сетки сопоставляется решение, найденное при параметрах, определяемых положением узла в пространстве. В процессе выполнения алгоритма на каждом шаге интегрирования исходной системы ОДУ строится кусочно-полиномиальная функция, которая интерполирует зависимость решения задачи от конкретных значений интервальных параметров.

В каждой вершине дерева хранится многомерный массив. В соответствии с используемой в работах [7], [8] терминологией далее под тензором будем подразумевать многомерный массив.

Количество элементов в тензоре зависит от количества интервальных параметров как $(p + 1)^d$, где p — степень интерполяционного полинома по каждому измерению, а d — количество интервальных параметров задачи. Основная идея практического улучшения этой ситуации заключается в нахождении ТТ-разложения, которое можно построить с помощью алгоритма ТТ-cross [8], не вычисляя всех элементов тензора. Отметим, что ранее в работах [13], [14] разложение в тензорный поезд успешно применялось к приближению параметрических уравнений.

Важным свойством ТТ-разложения является то, что все арифметические (и не только) операции над тензорами можно выполнять в этом представлении. В процессе работы алгоритма над вершинами производятся следующие операции: интерполяция по сетке и разбиение вершины на две. В первом случае для каждой точки, в которой необходимо рассчитать приближенное значение, строится тензор, состоящий из значений базисных полиномов Лагранжа, в ТТ-формате. Далее полученный тензор поэлементно умножается на тензор, хранящийся в вершине, и в конце вычисляется сумма всех элементов. Во втором случае при разбиении вершины требуется применить одномерную интерполяцию по конкретному измерению, чтобы построить недостающие значения в узлах новых вершин. Данное действие тоже может быть представлено в виде композиций нескольких операций, доступных в ТТ-формате.

С использованием модифицированного алгоритма адаптивной интерполяции выполнено моделирование движения тел под действием гравитационных сил в условиях неопределенности начальных скоростей тел, а также моделирование горения водородно-кислородной смеси при наличии неопределенностей в константах скоростей химических реакций. Вторая задача имеет большую практическую значимость, так как кинетические механизмы, полученные разными исследователями, могут существенно различаться и при этом содержать сотни реакций.

Зачастую зависимость решения от параметров может быть вырожденной (например, большая часть смешанных производных тождественно равна нулю), при этом хранение всего тензора в чистом виде является нецелесообразным и избыточным. Использование ТТ-разложения в алгоритме адаптивной интерполяции позволяет расширить область его применения на случай большого числа интервальных параметров.

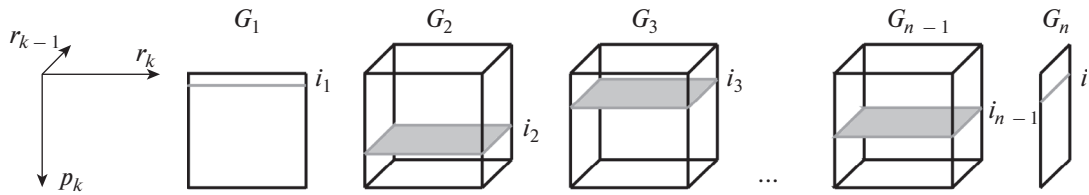
1. ТЕНЗОРНЫЙ ПОЕЗД

В основе подходов к уменьшению проклятия размерности лежит предположение о том, что исходные данные избыточны и могут быть представлены в более сжатом виде. Для матриц вопрос о компактном представлении является достаточно изученным и разработанным: существуют эффективные методы и алгоритмы [3]–[6]. Например, можно построить сингулярное разложение матрицы и столбцы и строки, соответствующие несущественным сингулярным числам, отбросить.

В случае большего количества измерений необходимо работать с многомерными массивами, с тензорами. Общая идея эффективного представления этих объектов основывается на разделении переменных. Существует несколько подходов: каноническое разложение [15], разложение Такера [16] и ТТ-разложение [7], [8] (tensor train, тензорный поезд). Для канонического разложения не существует надежных алгоритмов, а разложение Такера сложно применимо для большого числа измерений. ТТ-разложение появилось сравнительно недавно, и отличительной его особенностью является неподверженность проклятию размерности.

Пусть дан n -мерный тензор

$$A \in \mathbb{R}^{p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n}.$$



Фиг. 1. Иллюстрация ТТ-разложения.

Его ТТ-разложение записывается следующим образом:

$$\hat{A}(i_1, i_2, \dots, i_n) = G_1(i_1)G_2(i_2) \dots G_n(i_n),$$

где

$$G_k \in \mathbb{R}^{p_k \times r_{k-1} \times r_k}, \quad i_k = \overline{1, p_k}, \quad k = \overline{1, n}, \quad r_0 = r_n = 1.$$

Это есть произведение $n - 2$ трехмерных и 2 двухмерных тензоров (фиг. 1). Для вычисления значения конкретного элемента выполняется перемножение соответствующих матриц.

Построение ТТ-разложения сводится к обычным матричным разложениям. Выполняется переход от n измерений к двум с помощью группировки индексов. Для матрицы вычисляется SVD-разложение. Строки и столбцы, соответствующие несущественным сингулярным числам, отбрасываются. Полученные матрицы превращаются обратно в тензоры меньшей размерности, для которых рекурсивно применяется алгоритм. Идея алгоритма ТТ-cross, позволяющего построить ТТ-разложение, не вычисляя всех элементов тензора, заключается в замене SVD-разложения на разложение с меньшей вычислительной стоимостью и не требующего полного знания всех элементов тензора [8].

2. АЛГОРИТМ АДАПТИВНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Рассматривается задача Коши с m интервальными начальными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{du_i(t)}{dt} &= f_i(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)), \quad i = \overline{1, n}, \\ u_i(t_0) &\in [\underline{u}_i^0, \overline{u}_i^0], \quad i = \overline{1, m}, \\ u_i(t_0) &= \underline{u}_i^0, \quad i = \overline{m+1, n}, \\ t &\in [t_0, t_N]. \end{aligned} \quad (1)$$

Если система ОДУ – не автономная или содержит параметры, то в систему добавляются фиктивные уравнения так, чтобы она приняла вид (1). Вектор-функция $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ удовлетворяет всем условиям, обеспечивающим единственность и существование решения при всех $u_1(t_0) \in [\underline{u}_1^0, \overline{u}_1^0], u_2(t_0) \in [\underline{u}_2^0, \overline{u}_2^0], \dots, u_m(t_0) \in [\underline{u}_m^0, \overline{u}_m^0]$.

Цель алгоритма – для каждого момента времени t_k построить кусочно-полиномиальную вектор-функцию $\mathbf{P}^k(u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0)$, где $u_1^0 \in [\underline{u}_1^0, \overline{u}_1^0], u_2^0 \in [\underline{u}_2^0, \overline{u}_2^0], \dots, u_m^0 \in [\underline{u}_m^0, \overline{u}_m^0]$, которая интерполирует зависимость решения задачи от интервальных параметров с контролируемой точностью. При наличии функции $\mathbf{P}^k$ нахождение интервальной оценки решения (нахождение левой и правой границ интервалов) сводится к решению $2n$ задач условной оптимизации для явно заданной функции.

Суть алгоритма заключается в адаптивном иерархическом разбиении области неопределенности на прямоугольные подобласти с использованием kd-дерева. В каждой подобласти выполняется построение регулярной сетки и соответствующей полиномиальной функции, интерполирующей зависимость решения задачи от точечных значений интервальных параметров. Каждому узлу в сетке соответствует решение исходной неинтервальной задачи при значениях параметров, определяемых положением узла в пространстве.

Предположим, что в момент t_k известно решение $\mathbf{u}^k(u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0)$. Над множеством, образованным интервальными начальными условиями, строится регулярная интерполяционная сетка, которая соответствует корневой вершине kd-дерева. Значения в узлах сетки формируют $(m+1)$ -мерный тензор G_0^k :

$$G_0^k[i_1, i_2, \dots, i_m, j] = u_j^k \left(\frac{u_1^0}{p} + \frac{\overline{u_1^0} - u_1^0}{p} i_1, \frac{u_2^0}{p} + \frac{\overline{u_2^0} - u_2^0}{p} i_2, \dots, \frac{u_m^0}{p} + \frac{\overline{u_m^0} - u_m^0}{p} i_m \right),$$

$$i_1, i_2, \dots, i_m = \overline{0, p}, \quad j = \overline{1, n},$$

где p — степень интерполяционного многочлена по каждой переменной. Отметим, что требование равномерности сетки необязательно и используется здесь для сокращения записи. В каждом конкретном случае параметр p подбирается из соображений точности и минимизации вычислительных затрат: увеличение p приводит к повышению точности и увеличению количества вычислений в рамках одной вершины.

По G_0^k выполняется построение G_0^{k+1} , которое сводится к решению неинтервальных задач Коши для соответствующих элементов тензора:

$$\begin{aligned} \frac{du_j(t)}{dt} &= f_j(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)), \\ u_j(t_k) &= G_0^k[i_1, i_2, \dots, i_m, j], \\ G_0^{k+1}[i_1, i_2, \dots, i_m, j] &= u_j(t_{k+1}), \quad j = \overline{1, n}, \\ t &\in [t_k, t_{k+1}]. \end{aligned} \quad (2)$$

Систему (2) можно рассматривать как некоторую функцию черного ящика, на вход которой подается $G_0^k[i_1, i_2, \dots, i_m]$, а на выходе получается $G_0^{k+1}[i_1, i_2, \dots, i_m]$. При использовании алгоритма ТТ-cross для построения G_0^{k+1} нет необходимости знать все элементы G_0^k .

По полученному тензору G_0^{k+1} строится интерполяционный полином $\mathbf{P}^{k+1}(u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0) = (P_1^{k+1}(u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0), \dots, P_n^{k+1}(u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0))^T$ в форме Лагранжа:

$$P_j^{k+1}(u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m = 0}^p L(u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0)[i_1, i_2, \dots, i_m] G_0^{k+1}[i_1, i_2, \dots, i_m, j], \quad j = \overline{1, n},$$

где $L(u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0)$ есть m -мерный тензор, состоящий из значений базисных полиномов Лагранжа:

$$L(u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0)[i_1, i_2, \dots, i_m] = \prod_{j=0}^p \prod_{k=0}^m \prod_{i_k \neq j} \frac{p(u_k^0 - \underline{u}_k^0) / (\overline{u}_k^0 - \underline{u}_k^0) - j}{i_k - j}.$$

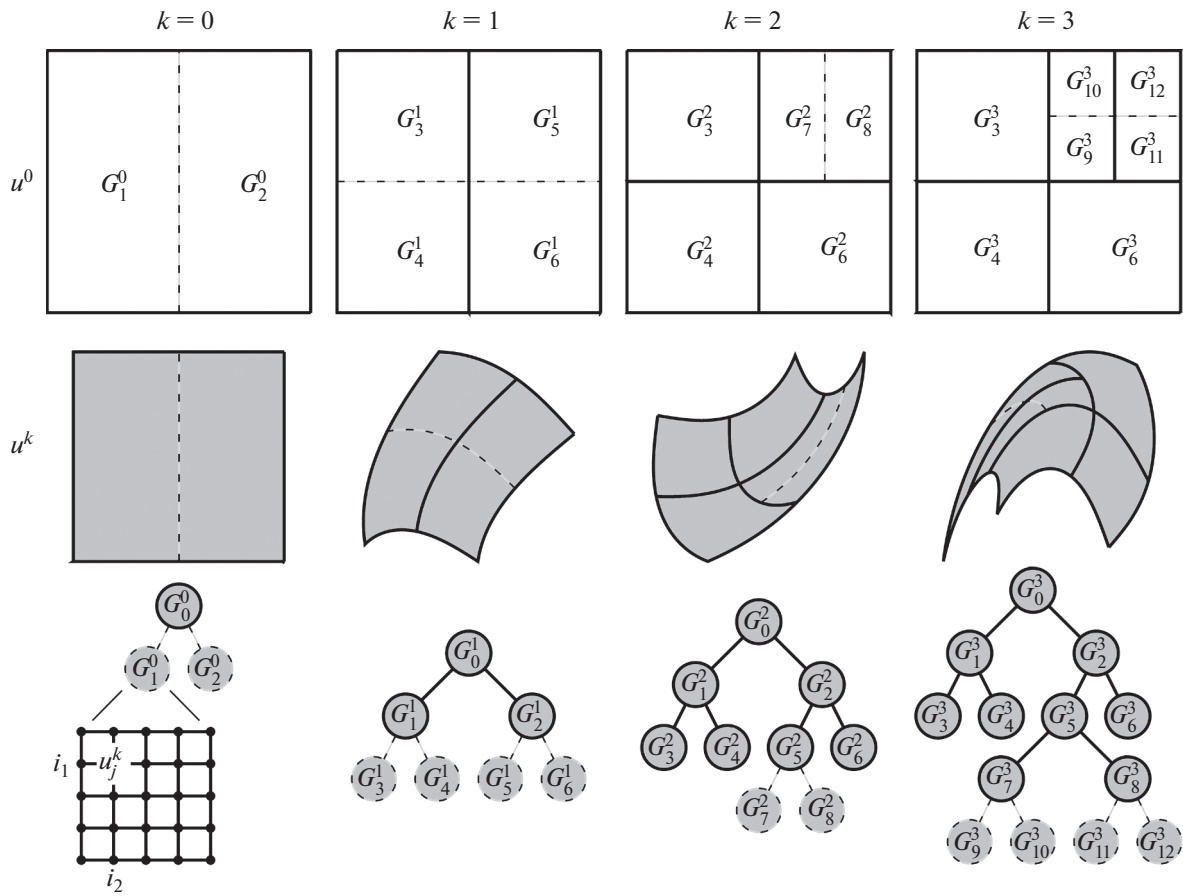
Интерполяционный полином можно записать компактно в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{k+1}(u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0) &= \hat{L}(u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0) \odot_{1,2,\dots,m} G_0^{k+1}, \\ \hat{L}(u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0)[i_1, i_2, \dots, i_m, ii] &= L(u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0)[i_1, i_2, \dots, i_m], \quad ii = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

где операция $\odot_{1,2,\dots,m}$ обозначает поэлементное перемножение и суммирование по измерениям $1, 2, \dots, m$. Операция $\odot$ доступна для тензоров в ТТ-формате.

Если апостериорная погрешность интерполяции

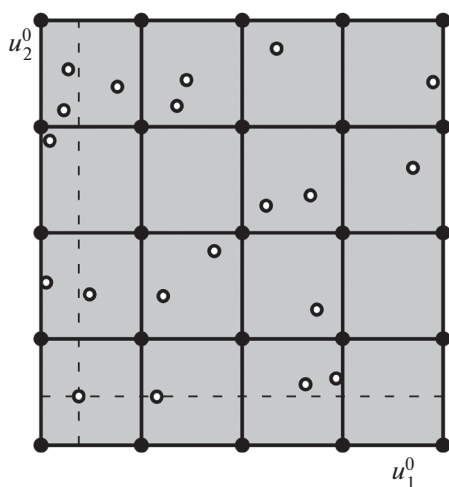
$$\text{error} = \max_{u_1^0 \in [\underline{u}_1^0, \overline{u}_1^0], \dots, u_m^0 \in [\underline{u}_m^0, \overline{u}_m^0]} \left\| \mathbf{u}^{k+1}(u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0) - \mathbf{P}^{k+1}(u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0) \right\| \quad (3)$$



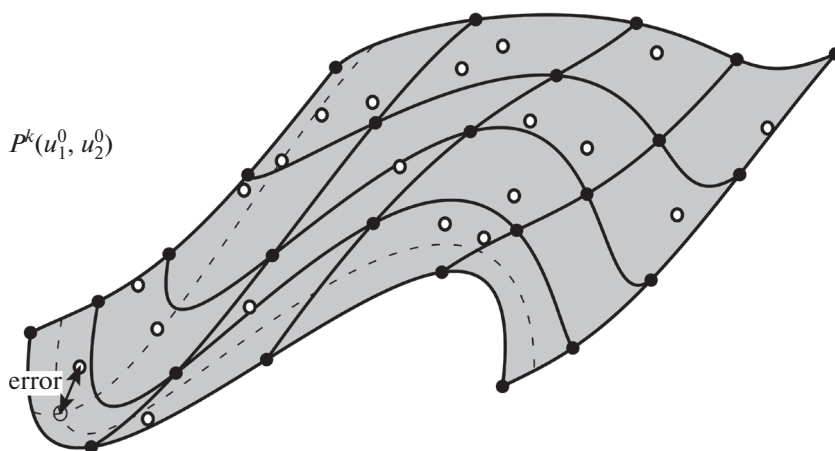
Фиг. 2. Иллюстрация работы алгоритма.

больше некоторого заданного числа ε , то G_0^k разбивается на две сетки: G_1^k и G_2^k таким образом, чтобы их оценка погрешности интерполяции была меньше ε . Для них выполняются все те же самые действия, что и для сетки G_0^k , и при необходимости они тоже разбиваются. Если $\mathbf{u}^{k+1}(u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0)$ непрерывно дифференцируема $p+1$ раз по $u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0$, то можно показать, что процесс дробления конечен [9]. В общем случае с теоретической точки зрения погрешность интерполяции оценивается сверху через старшие производные с коэффициентами пропорциональности, которые характеризуют интерполяционную сетку и ее размер. При каждом дроблении эти коэффициенты уменьшаются и, как следствие, уменьшается и погрешность интерполяции. На практике определяется минимальный размер ячейки, обычно сопоставимый с машинным эпсилоном, по достижении которого дробление дальше не происходит, а соответствующая область пространства помечается как “область разрыва”.

В результате на момент t_{k+1} будет получено kd-дерево и соответствующая ему кусочно-полиномиальная функция, интерполирующая решение с заданной точностью. Процесс построения kd-дерева проиллюстрирован на фиг. 2. Строить с нуля на каждом шаге kd-дерево нет необходимости, вместо этого используется дерево, полученное на предыдущем шаге, и в зависимости от оценки погрешности интерполяции оно перестраивается. Процесс дробления вершин всегда происходит на предыдущем шаге (пунктирные линии), потому что при создании новых вершин выполняется интерполяция связанных с их узлами значений, которую необходимо выполнять в момент, когда погрешность еще допустима. Если для вершины и всех ее потомков ошибка интерполяции становится приемлемой, то потомки удаляются и сама вершина становится листом.



Фиг. 3. Тестовое множество точек в одной вершине (выколотые точки).



Фиг. 4. Геометрическая интерпретация погрешности интерполяции для одной вершины.

Оценка (3) на практике выполняется не для всех точек из области неопределенности, а только для некоторых (фиг. 3, выколотые точки). При создании вершины G_0^k случайным образом создается тестовое множество точек:

$$U_0^k = \left\{ \mathbf{u}^k(\mathbf{x}^0) \mid \mathbf{x}^0 = \left(\text{rand} \left[\underline{u}_1^0, \overline{u}_1^0 \right], \text{rand} \left[\underline{u}_2^0, \overline{u}_2^0 \right], \dots, \text{rand} \left[\underline{u}_m^0, \overline{u}_m^0 \right] \right)^T \right\}.$$

По аналогии с построением G_0^{k+1} выполняется построение U_0^{k+1} по U_0^k с помощью решения неинтервальных задач Коши, подобных (2).

После этого апостериорная оценка погрешности интерполяции принимает следующий вид:

$$\text{error} = \max_{(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^{k+1}) \in U_0^{k+1}} \left\| \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{P}^{k+1}(\mathbf{x}^0) \right\|.$$

При этом тензор $L(\mathbf{x}^0)$, который участвует в вычислении $\mathbf{P}^{k+1}(\mathbf{x}^0)$, строится единожды, сразу при создании тестового множества, так как он никак не зависит от k . На фиг. 4 показана геометрическая интерпретация погрешности интерполяции в евклидовой норме для одной вершины.

Все линии получены путем интерполяции по закрашенным точкам и соответствуют линиям на фиг. 3.

Рассмотрим один из возможных вариантов построения разбиения G_0 на две сетки: G_1 и G_2 . Разбиение производится гиперплоскостью, перпендикулярной одной из координатных осей по середине. Выполняется перебор m различных вариантов разбиения, из которых выбирается оптимальный с точки зрения погрешности интерполяции. Предположим, что G_0 разбивается гиперплоскостью, перпендикулярной координатной оси с номером d , тогда

$$\begin{aligned} G_1[i_1, i_2, \dots, i_d, \dots, i_m, j] &= \sum_{k_d=0}^p L_1[i_d, k_d] G_0[i_1, i_2, \dots, k_d, \dots, i_m, j], \\ G_2[i_1, i_2, \dots, i_d, \dots, i_m, j] &= \sum_{k_d=0}^p L_2[i_d, k_d] G_0[i_1, i_2, \dots, k_d, \dots, i_m, j], \end{aligned} \quad (4)$$

где L_1 и L_2 — матрицы, состоящие из значений базисных полиномов Лагранжа:

$$L_1[i, j] = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^p \frac{i/2 - k}{j - k}, \quad L_2[i, j] = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^p \frac{(p+i)/2 - k}{j - k}, \quad i, j = \overline{0, p}.$$

Запишем (4) в компактном виде:

$$G_1 = \hat{L}_1 \odot_{(d+1)} \hat{G}_0, \quad G_2 = \hat{L}_2 \odot_{(d+1)} \hat{G}_0,$$

где

$$\begin{aligned} \hat{G}_0[i_1, i_2, \dots, i_{d-1}, ii, i_d, i_{d+1}, \dots, i_m, j] &= G_0[i_1, i_2, \dots, i_m, j], \\ \hat{L}_1[i_1, i_2, \dots, i_{d-1}, ii, jj, i_{d+1}, \dots, i_m, j] &= L_1[ii, jj], \\ \hat{L}_2[i_1, i_2, \dots, i_{d-1}, ii, jj, i_{d+1}, \dots, i_m, j] &= L_2[ii, jj], \\ i_1, i_2, \dots, i_m, \quad ii, jj = \overline{0, p}, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Тензоры $\hat{G}_0$, $\hat{L}_1$, $\hat{L}_2$ получаются путем произведения Кронекера G_0 , L_1 , L_2 на единичные тензоры с последующей перестановкой индексов.

В целом алгоритм адаптивной интерполяции состоит из трех элементов: перенос решений на следующий временной слой, оценка погрешности интерполяции для каждой вершины и разбиение вершин. Вместо явного хранения многомерных массивов в каждой вершине kd-дерева достаточно хранить только их ТТ-разложение: все необходимые действия в процессе работы алгоритма можно выполнять в рамках ТТ-формата.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

В данном разделе приводятся результаты решения двух систем ОДУ с интервальными параметрами и начальными условиями. Расчеты выполнены с помощью собственного разработанного программного обеспечения на языках программирования C++ и Python. При этом использовалась реализация тензорных поездов из пакета tpy [17].

Для оценки апостериорной относительной погрешности $\epsilon_{\text{огг}}$ в начальный момент времени случайным образом генерируется тестовое множество точек из области неопределенности параметров системы и строятся соответствующие решения, с которыми выполняется сравнение. Для оценки вычислительных затрат используется критерий I , введенный в работе [9] и численно равный числу решенных неинтервальных систем (1) при точечных значениях интервальных параметров.

В качестве примера рассмотрим модельную задачу: движение тел с неопределенностями в начальных скоростях под действием сил гравитации. Вокруг массивного тела, расположенного в центре координат, двигаются по круговым орбитам шесть небольших тел, у которых начальные скорости даны в виде интервалов. Получающаяся область неопределенности имеет размерность, равную $6 \times 3 = 18$.

Таблица 1. Результаты интегрирования системы (5)

Параметр	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-5}$
Максимальная высота kd-дерева	0	3	4
Максимальное количество вершин	1	9	31
$\max(\text{error}_g)$	3.9×10^{-4}	9.5×10^{-5}	8.8×10^{-6}
Значение критерия $I, \times 10^6$	0.5	8.3	29.4

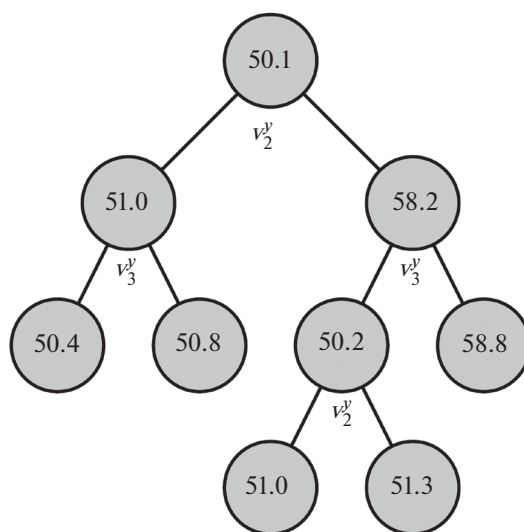
Система ОДУ в безразмерных переменных имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 (v_i^x)' &= \sum_{j=1, j \neq i}^7 m_j \frac{x_j - x_i}{r_{i,j}^3}, \quad (v_i^y)' = \sum_{j=1, j \neq i}^7 m_j \frac{y_j - y_i}{r_{i,j}^3}, \quad (v_i^z)' = \sum_{j=1, j \neq i}^7 m_j \frac{z_j - z_i}{r_{i,j}^3}, \\
 x_i' &= v_i^x, \quad y_i' = v_i^y, \quad z_i' = v_i^z, \quad i = \overline{1, 7}, \quad t \in [0.0, 0.02], \\
 x_1(0) &= y_1(0) = z_1(0) = v_1^x(0) = v_1^y(0) = v_1^z(0) = 0, \\
 x_{2,3}(0) &= \pm 1, \quad y_{2,3}(0) = z_{2,3}(0) = 0, \quad v_{2,3}(0) = (0 \pm v \ 0)^T + \Delta v_{2,3}^T, \\
 y_{4,5}(0) &= \pm 1, \quad x_{4,5}(0) = z_{4,5}(0) = 0, \quad v_{4,5}(0) = (0 \ 0 \pm v)^T + \Delta v_{4,5}^T, \\
 z_{6,7}(0) &= \pm 1, \quad x_{6,7}(0) = y_{6,7}(0) = 0, \quad v_{6,7}(0) = (\pm v \ 0 \ 0)^T + \Delta v_{6,7}^T,
 \end{aligned} \tag{5}$$

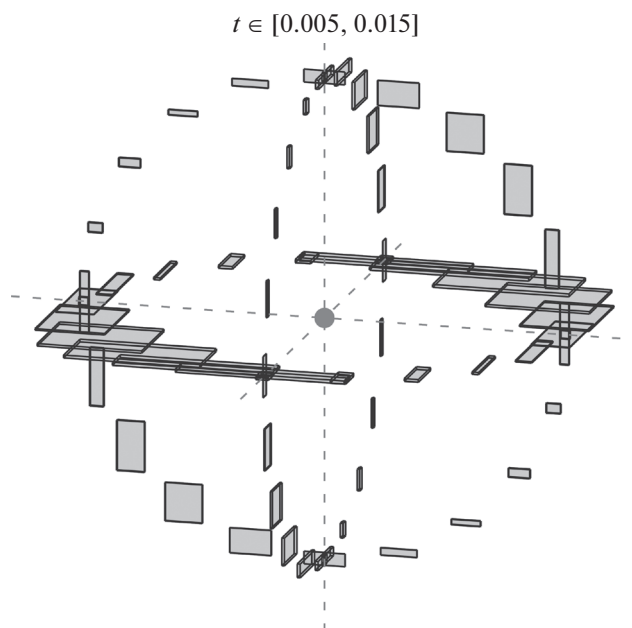
где $r_{i,j} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$ – расстояние между двумя телами, $v = 316.23^\circ$ – начальная скорость тел, $m_1 = 10^5$, $m_{2,7} = 10^{-5}$ – массы тел, $\Delta v_{2,3} = ([-2, 2], [-6, 6], [-2, 2])$, $\Delta v_{4,7} = ([-2, 2], [-2, 2], [-2, 2])$ – интервальные неопределенности в скоростях тел.

Данная система является показательной, потому что неопределенность в скорости конкретного тела влияет в основном только на положение и скорость этого же тела, а на другие тела влияет слабо. Параметр $p = 4$, количество элементов в тензоре в каждой вершине равно $5^{18} \times 42 \approx 10^{15}$. Число 42 соответствует количеству фазовых переменных. Использование алгоритма адаптивной интерполяции без применения ТТ-разложения привело бы к решению порядка 10^{12} систем ОДУ для каждой вершины, что потребовало бы колоссальных вычислительных мощностей.

В табл. 1 представлены результаты применения предлагаемого подхода к системе ОДУ (5) при разных значениях параметра ε . Во всех случаях значение критерия I , характеризующего вычис-



Фиг. 5. Kd-дерево в конечный момент времени интегрирования системы (5).



Фиг. 6. Неопределенности в положении тел в различные моменты времени.

лительные затраты, намного меньше, чем было бы при использовании классического варианта алгоритма ($I \approx 10^{12}$). При $\varepsilon = 10^{-3}$ решение фактически получено без kd-дерева (дерево состоит из одной корневой вершины). При уменьшении ε становится необходимым выполнять уплотнение сетки, что приводит к росту дерева.

На фиг. 5 показано kd-дерево в момент времени $t = 0.02$ при $\varepsilon = 10^{-4}$. В каждой вершине дерева указан эффективный ранг соответствующего тензора, который характеризует средний размер получающихся ядер ТТ-разложения. Не листовые вершины дерева дополнительно помечены названием интервального параметра, по которому происходило разбиение области неопределенности. Ширина интервала y -компоненты начальной скорости второго и третьего тела больше, чем у остальных тел, поэтому уплотнение выполнялось в основном только по v_2^y и v_3^y .

Решение задачи представлено на фиг. 6, прямоугольными параллелепипедами проиллюстрированы области неопределенности в пространстве для каждого тела в различные моменты времени.

Использование ТТ-разложения в алгоритме адаптивной интерполяции позволило успешно решить данную задачу на персональном компьютере, что говорит об эффективности предлагаемой модификации алгоритма.

Далее рассматривается прикладная задача: моделирование горения водород-кислородной смеси при наличии неопределенностей в константах скоростей химических реакций. Для моделирования газофазных химических превращений необходимо знать кинетический механизм и скорости протекающих реакций. Как правило, зависимости, которые описывают скорости, получают экспериментальными способами, зачастую дающими лишь приближенные значения [18]. Значения функций, аппроксимирующих скорость протекания одной и той же реакции, но полученных разными исследователями, могут различаться в десятки и в сотни раз. Естественно, для численного моделирования в этом случае необходимо применение интервальных методов, которые могут работать в условиях больших неопределенностей.

Многокомпонентная система переменного состава из N веществ, в которой протекает N_r реакций, имеет вид [19]:

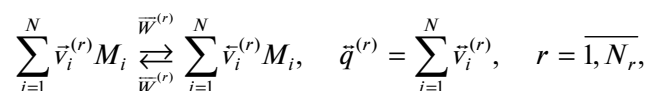


Таблица 2. Первый механизм горения смеси H_2-O_2

Реакция	A , м моль с	n	E , К
1. $O_2 + H \rightarrow OH + O$	2.0×10^8	0.0	8455
2. $H_2 + O \rightarrow OH + H$	5.06×10^{-2}	2.67	3163
3. $H_2 + OH \rightarrow H_2O + H$	1.0×10^2	1.6	1659
4. $OH + OH \rightarrow H_2O + O$	1.5×10^3	1.14	50
5. $H + H + M \rightarrow H_2 + M$	1.8×10^6	-1.0	0
6. $O + O + M \rightarrow O_2 + M$	2.9×10^5	-1.0	0
7. $H + OH + M \rightarrow H_2O + M$	2.2×10^{10}	-2.0	0

где r – порядковый номер реакции, $\tilde{\nu}_i^{(r)}$ – стехиометрические коэффициенты, $\tilde{q}^{(r)}$ – молекулярность элементарных реакций, M_i – символы молекул или атомов химических компонентов, $\tilde{W}^{(r)}$ – скорости r -й реакции в прямом и обратном направлении. Последняя величина определяет изменение концентрации компонентов с течением времени в единице объема смеси.

Скорость химической реакции $\tilde{W}^{(r)}$ определяется как произведение объемных концентраций компонентов и константы скорости реакции $\tilde{K}^{(r)}(T)$, зависящей от температуры:

$$\tilde{W}^{(r)} = \tilde{K}^{(r)}(T) \prod_i (\rho \gamma_i)^{\tilde{\nu}_i^{(r)}},$$

где ρ – плотность, γ_i – мольно-массовая концентрация i -го компонента.

Для аппроксимации температурной зависимости констант скоростей прямых реакций используется обобщенная формула Аррениуса:

$$\tilde{K}(T) = AT^n \exp\left(-\frac{E}{T}\right),$$

где A , n , E – некоторые постоянные величины, индивидуальные для каждой реакции. Именно в этих величинах и содержится неопределенность.

Константы скоростей обратных реакций для случая смеси совершенных газов вычисляются исходя из константы равновесия:

$$\tilde{K}^{(r)}(T) = \tilde{K}^{(r)}(T) \exp\left[\sum_i^N (\tilde{\nu}_i^{(r)} - \bar{\nu}_i^{(r)}) \left(\frac{G_i^0(T)}{RT} + \ln \frac{RT}{P_0}\right)\right],$$

где $P_0 = 101325$ – стандартное давление, R – универсальная газовая постоянная, $G_i^0(T)$ – стандартный молярный потенциал Гиббса i -го компонента, который задается с помощью полиномов из справочника [20].

Скорость образования i -го компонента имеет следующий вид:

$$W_i = \sum_{r=1}^{N_r} (\tilde{\nu}_i^{(r)} - \bar{\nu}_i^{(r)}) (\tilde{W}^{(r)} - \bar{W}^{(r)}), \quad i = \overline{1, N}.$$

Для демонстрации неопределенностей, содержащихся в константах скоростей химических реакций, рассмотрим кинетические механизмы, приведенные в работах [21] (табл. 2) и [22] (табл. 3). Большая часть содержащихся в таблицах реакций не совпадает по направлению, поэтому для их сравнения воспользуемся константой равновесия. На фиг. 7 показаны зависимости некоторых констант скоростей от температуры для разных механизмов.

В качестве интервального параметра выступает a коэффициент суперпозиции значений констант скоростей реакций из разных механизмов:

$$K(T) = (1 - a)K_1(T) + aK_2(T), \quad a \in [0, 1].$$

Таблица 3. Второй механизм горения смеси $\text{H}_2\text{--O}_2$

Реакция	A , м моль с	n	E , К
1. $\text{H}_2\text{O} + \text{H} \rightarrow \text{OH} + \text{H}_2$	8.4×10^7	0	10116
2. $\text{O}_2 + \text{H} \rightarrow \text{OH} + \text{O}$	2.2×10^8	0	8455
3. $\text{H}_2 + \text{O} \rightarrow \text{OH} + \text{H}$	1.8×10^4	1	4480
4. $\text{O}_2 + \text{M} \rightarrow 2\text{O} + \text{M}$	5.4×10^{12}	-1	59400
5. $\text{H}_2 + \text{M} \rightarrow 2\text{H} + \text{M}$	2.2×10^8	0	48300
6. $\text{H}_2\text{O} + \text{M} \rightarrow \text{OH} + \text{H} + \text{M}$	10^{18}	-2.2	59000
7. $\text{HO} + \text{M} \rightarrow \text{O} + \text{H} + \text{M}$	8.5×10^{12}	-1	50830
8. $\text{H}_2\text{O} + \text{O} \rightarrow 2\text{OH}$	5.8×10^7	0	9059

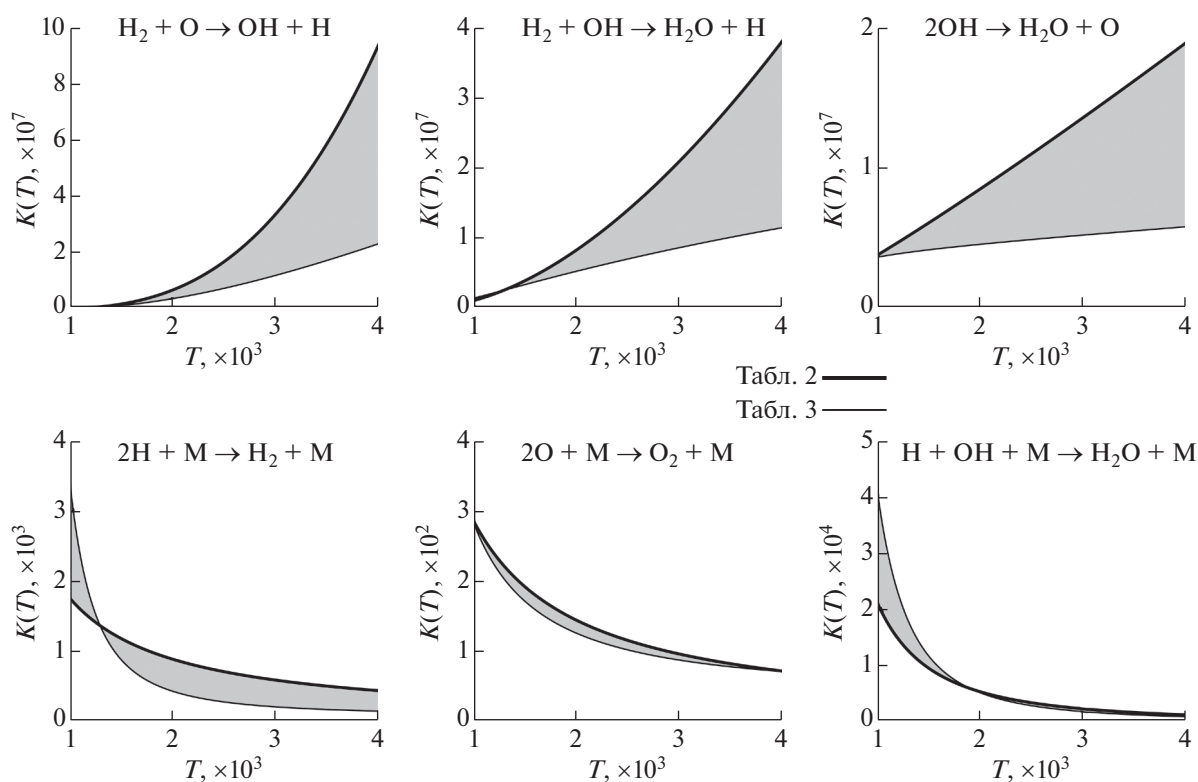
Рассматривается стехиометрическая смесь водорода и кислорода при начальной температуре $T = 1200$ К, постоянной плотности $\rho = 0.122$ кг/м³ и постоянной внутренней энергии $U = 1.48$ МДж/кг. Модель химической кинетики задается системой из шести компонентов (H_2O , OH , H_2 , O_2 , H , O), в которой протекает восемь реакций (табл. 2 и 3).

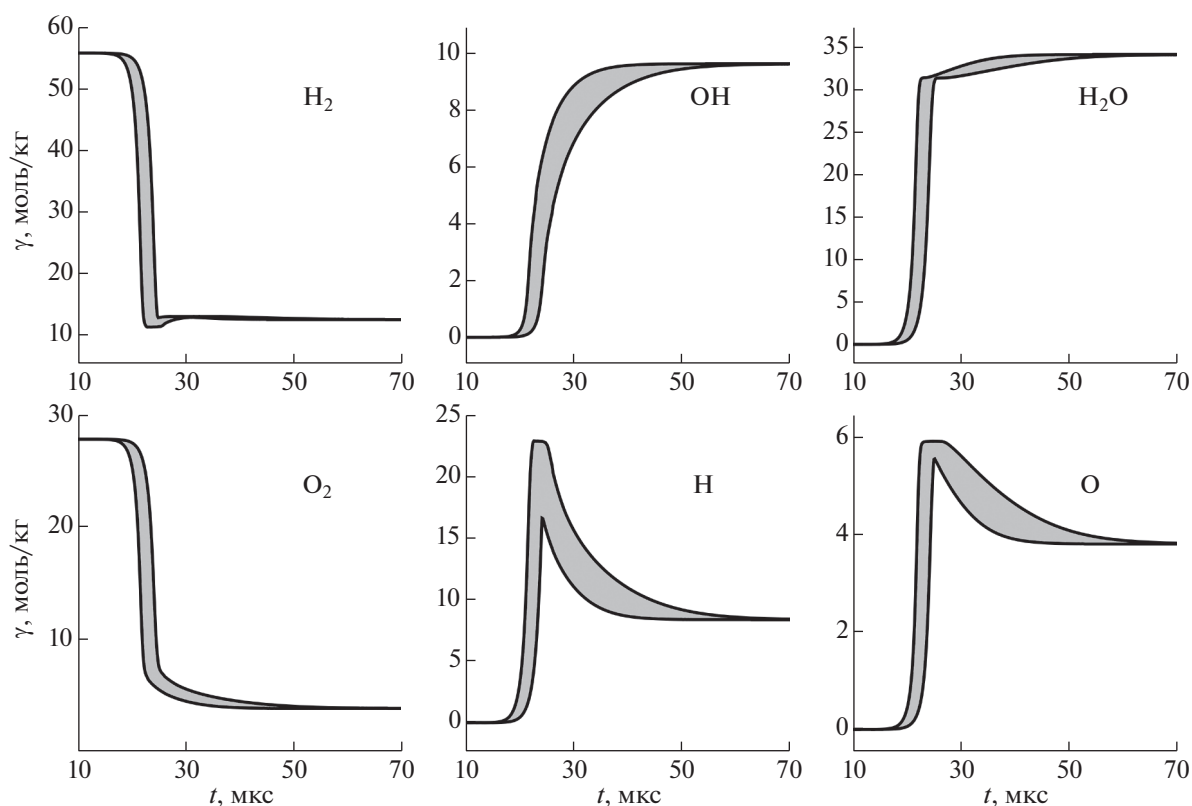
Система ОДУ записывается следующим образом:

$$\frac{d\gamma_i}{dt} = \frac{1}{\rho} \sum_{r=1}^8 (\bar{v}_i^{(r)} - \bar{v}_i^{(r)}) (\bar{W}^{(r)} - \bar{W}^{(r)}), \quad i = \overline{1, 6},$$

и дополняется уравнением сохранения внутренней энергии системы:

$$U(T, \gamma) = H(T, \gamma) - RT \sum_{i=1}^6 \gamma_i,$$

**Фиг. 7.** Сравнение различных механизмов горения смеси $\text{H}_2\text{--O}_2$.



Фиг. 8. Зависимость мольно-массовых концентраций от времени.

где $H(T, \gamma)$ — энтальпия (калорическое уравнение):

$$H(T, \gamma) = \sum_{i=1}^N \gamma_i \left(G_i^0(T) - T \frac{dG_i^0(T)}{dT} \right).$$

При каждом вычислении правой части системы ОДУ уравнение внутренней энергии разрешается относительно T с помощью метода Ньютона. Начальные условия:

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{H}_2} &= 55.50868 \frac{\text{моль}}{\text{кг}}, & \gamma_{\text{O}_2} &= 27.75434 \frac{\text{моль}}{\text{кг}}, \\ \gamma_{\text{H}_2\text{O}} &= \gamma_{\text{OH}} = \gamma_{\text{H}} = \gamma_{\text{O}} = 0 \frac{\text{моль}}{\text{кг}}. \end{aligned}$$

Полученная система ОДУ является жесткой, и для интегрирования неинтервальных ОДУ в процессе работы алгоритма используется неявный метод Розенброка с заморозкой матрицы Якоби [23] (отметим, что здесь возможно использовать методы, представленные в работе [24]). Выполняется расчет при значении $p = 4$. На фиг. 8 представлены верхние и нижние оценки для концентраций всех компонентов смеси. Неопределенность в константах скоростей реакций приводит к неопределенности важного параметра — времени задержки воспламенения в диапазоне от 18 до 20 мкс.

Отметим, что для данной модели характерным является переход в равновесное состояние, которое никак не зависит от констант скоростей реакций, о чем свидетельствует совпадение верхних оценок концентраций с нижними оценками после определенного момента времени. Так же важным моментом является то, что решения, полученные с использованием каждого механизма в отдельности, содержатся внутри найденных оценок и при этом не совпадают с границами (т.е. для получения оценки не достаточно просто посчитать решения с разными механизмами).

Не все реакции оказывают существенное влияние на протекание газофазных химических превращений. Адаптивный учет этого влияния позволяет сократить вычислительные затраты

Таблица 4. Результаты моделирования

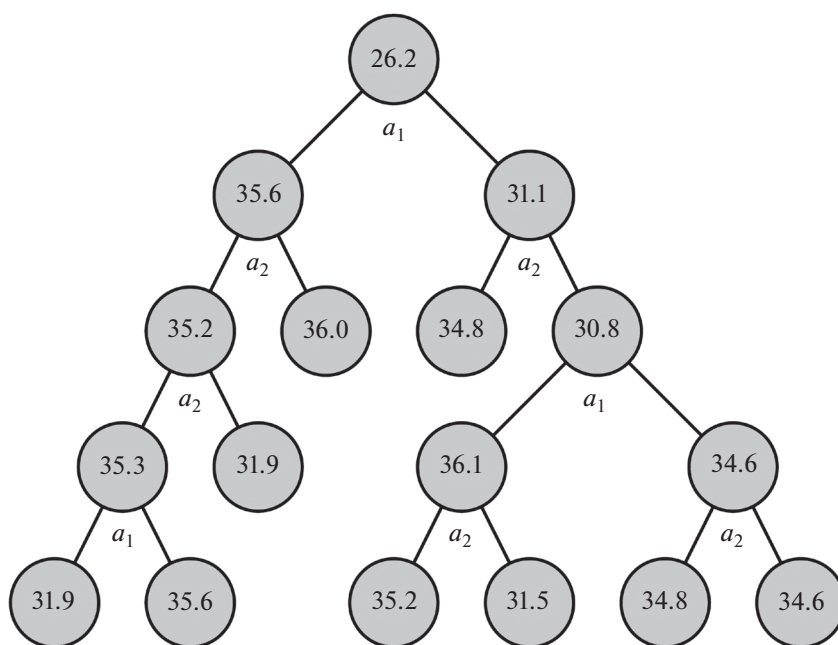
Параметр	Без kd-дерева	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$
Максимальная высота kd-дерева	—	4	6
Максимальное количество вершин	—	17	53
$\max(\text{err}_{g_i})$	0.04	10^{-3}	9.3×10^{-5}
Значение критерия I	6522	25032	57529
Значение критерия I (классический вариант алгоритма)	78125	105469	170703

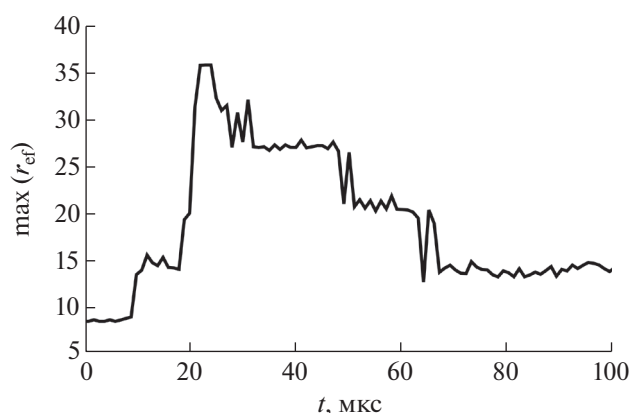
при моделировании химических превращений. За счет использования ТТ-разложения среднее количество проинтегрированных неинтервальных систем ОДУ уменьшилось в 3–4 раза (табл. 4, критерий I). В случае применения алгоритма без использования kd-дерева значение относительной апостериорной погрешности возрастает и равно 0.04, что дополнительно показывает эффективность предлагаемого подхода.

На фиг. 9 показано kd-дерево в момент времени $t = 24$ мкс при значении $\varepsilon = 10^{-3}$. В данный момент времени высота дерева является максимальной, это связано с тем, что при некоторых значениях параметров возгорание смеси уже произошло, а при некоторых еще нет, и в результате интерполируемая функция имеет резкие переходы, что требует уплотнения сетки. Отметим, что уплотнение в основном выполняется по измерениям, которые соответствуют первым трем реакциям в табл. 3.

Для уменьшения вычислительных затрат обновление тензоров (перевычисление решений содержащихся в узлах сетки на текущий временной слой) происходит только для листовых вершин kd-дерева. В связи с этим приведенные значения эффективных рангов во внутренних узлах дерева актуальны только на момент разбиения соответствующей вершины.

На фиг. 10 представлена зависимость максимального эффективного ранга от времени. Здесь наблюдается резкий рост максимального эффективного ранга в момент возгорания смеси, и

Фиг. 9. Kd-дерево в момент времени $t = 24$ мкс.



Фиг. 10. Зависимость максимального эффективного ранга от времени.

дальнейшее постепенное его уменьшение, по мере перехода системы к равновесному состоянию.

За счет использования ТТ-разложения в алгоритме адаптивной интерполяции требуемое вычислительное время для решения данной задачи сократилось в 3–4 раза.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Алгоритм адаптивной интерполяции позволяет моделировать динамические системы с интервальными параметрами. В процессе работы алгоритма над множеством, образованным интервальными неопределенностями, строится регулярная сетка, в которой количество узлов зависит экспоненциально от количества интервальных параметров, что ограничивает область применения алгоритма. Зачастую зависимость решения задачи от совокупности параметров может быть вырожденной, при этом данные, которые содержатся в сетках, будут обладать существенной избыточностью. Использование ТТ-разложения в алгоритме адаптивной интерполяции позволяет устранить эту избыточность и расширить область его применения на случай большого числа интервальных параметров. Все действия над сетками, которые происходят в процессе выполнения алгоритма, осуществляются в рамках ТТ-формата. Эффективность рассмотренной модификации алгоритма подтверждена на задаче моделирования движения тел под действием гравитационных сил в условиях неопределенности начальных скоростей тел, а также на практически значимой задаче моделирования горения водородно-кислородной смеси при наличии неопределенностей в константах скоростей химических реакций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Moore R.E., Kearfott R.B., Cloud M.J. Introduction to Interval Analysis // SIAM, 2009.
2. Shary S.P., Moradi B. Solving interval linear least squares problems by PPS-methods // Numerical Algorithms. 2020. <https://doi.org/10.1007/s11075-020-00958-x>
3. Тыртышников Е.Е. Тензорные аппроксимации матриц, порожденных асимптотически гладкими функциями // Матем. сборник. 2003. Т. 194. № 6. С. 147–160.
4. Тыртышников Е.Е., Щербакова Е.М. Методы неотрицательной матричной факторизации на основе крестовых малоранговых приближений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 8. С. 1314–1330.
5. Желтков Д.А., Тыртышников Е.Е. Параллельная реализация матричного крестового метода // Вычисл. методы и программирование. 2015. Т. 16. С. 369–375.
6. Горейнов С.А., Замазашкин Н.Л., Тыртышников Е.Е. Псевдоскелетные аппроксимации при помощи подматриц наибольшего объема // Матем. заметки. 1997. Т. 62. Вып. 4. С. 619–623.
7. Oseledets I.V. Tensor-train decomposition // SIAM Journal on Scientific Computing. 2011. V. 33. № 5. P. 2295–2317.
8. Oseledets I., Tyrtshnikov E. TT-cross approximation for multidimensional arrays // Linear Algebra and its Applications. 2010. V. 432. Iss. 1. P. 70–88.

9. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л. Алгоритм адаптивной интерполяции на основе kd-дерева для численного интегрирования систем ОДУ с интервальными начальными условиями // Дифференц. ур-ния. 2018. Т. 54. № 7. С. 963–974.
<https://doi.org/10.1134/S0374064118070130>
10. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л., Гидаспов В.Ю. Алгоритм адаптивной интерполяции на основе kd-дерева для решения задач химической кинетики с интервальными параметрами // Матем. моделирование. 2018. Т. 30. № 12. С. 129–144.
<https://doi.org/10.31857/S023408790001940-8>
11. Morozov A.Yu., Zhuravlev A.A., Reviznikov D.L. Sparse Grid Adaptive Interpolation in Problems of Modeling Dynamic Systems with Interval Parameters // Mathematics. 2021. V. 9. № 4. 298.
<https://doi.org/10.3390/math9040298>
12. Morozov A.Yu., Reviznikov D.L. Modelling of Dynamic Systems with Interval Parameters on Graphic Processors // Programmная Ingeneria. 2019. V. 10. № 2. P. 69–76.
<https://doi.org/10.17587/prin.10.69-76>
13. Dolgov S.V., Kazeev V.A., Khoromskij B.N. Direct tensor-product solution of one-dimensional elliptic equations with parameter-dependent coefficients // Mathematics and Computers in Simulation. 2018. V. 145. P. 136–155.
<https://doi.org/10.1016/j.matcom.2017.10.009>
14. Olivier C., Ryckelynck D., Cortial J. Multiple Tensor Train Approximation of Parametric Constitutive Equations in Elasto-Viscoplasticity // Mathematical and Computational Applications. 2019. V. 24. № 1. 17.
<https://doi.org/10.3390/mca24010017>
15. Hitchcock F.L. The expression of a tensor or a polyadic as a sum of products // J. Math. Phys. 1927. V. 6. № 1. P. 164–189.
16. Tucker L.R. Some mathematical notes on three-mode factor analysis // Psychometrika. 1966. V. 31. P. 279–311.
17. ttpy [сайт]. URL: <https://github.com/oseledets/ttpy> (дата обращения: 07.03.2021)
18. Вайтмиев В.А., Мустафина С.А. Поиск областей неопределенности кинетических параметров математических моделей химической кинетики на основе интервальных вычислений // Вестник ЮУрГУ. Серия “Математическое моделирование и программирование”. 2014. Т. 7. № 2. С. 99–110.
19. Гидаспов В.Ю., Северина Н.С. Элементарные модели и вычислительные алгоритмы физической газовой динамики. Термодинамика и химическая кинетика: Учебное пособие. М.: Факториал, 2014. 84 с.
20. Глушко В.П., Гурвич Л.В., Вейц И.В. и др. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. Т. 1. М.: Наука, 1978–2004.
21. Варнатц Ю., Маас У., Диббл Р. Горение. Физические и химические аспекты, моделирование, эксперименты, образование загрязняющих веществ / Пер. с англ. Г.Л. Агафонова. Под ред. П.А. Власова. М.: Физматлит, 2003. 352 с.
22. Старик А.М., Титова Н.С., Шарипов А.С., Козлов В.Е. О механизме окисления синтез-газа // Физ. горения и взрыва. 2010. Т. 46. № 5. С. 3–19.
23. Новиков Е.А., Голушко М.И. (m,3)-метод третьего порядка для жестких неавтономных систем ОДУ // Вычисл. технологии. 1998. Т. 3. № 3. С. 48–54.
24. Васильев Е.И., Васильева Т.А. Мульти-неявные методы с автоматическим контролем погрешности в приложениях с химическими реакциями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 9. С. 1570–1580.

ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.87

**УСЛОВНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЯДЕРНОГО АЛГОРИТМА ПРИБЛИЖЕНИЯ
ВЕРОЯТНОСТНОЙ ПЛОТНОСТИ ПО ЗАДАННОЙ ВЫБОРКЕ¹⁾**

© 2021 г. Т. Е. Булгакова^{1,*}, А. В. Войтишек^{1,2,**}

¹ 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2, Новосибирский государственный университет, Россия

² 630090 Новосибирск, пр-т Акад. Лаврентьева, 6, Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН, Россия

*e-mail: tatyana.bulgakova@gmail.com

**e-mail: vav@osmf.sccc.ru

Поступила в редакцию 18.08.2020 г.
Переработанный вариант 29.12.2020 г.
Принята к публикации 07.04.2021 г.

Рассмотрена задача получения численного функционального приближения вероятностной плотности по заданным или моделируемым выборочным значениям с заданным уровнем погрешности и с наименьшими затратами. Для решения этой задачи предложен вычислительный алгоритм, представляющий собой функциональную версию ядерной оценки вероятностной плотности. Этот алгоритм аналогичен функциональному вычислительному ядерному статистическому алгоритму приближения решения интегрального уравнения Фредгольма II рода, для которого в свое время была построена теория условной оптимизации. В данной работе эта теория строится для построенного функционального вычислительного ядерного алгоритма приближения вероятностной плотности. Библи. 27.

Ключевые слова: численное функциональное приближение вероятностной плотности, численная аппроксимация функций, функциональный вычислительный ядерный алгоритм, функциональный вычислительный статистический алгоритм, условно-оптимальные параметры.

DOI: 10.31857/S0044466921090076

**1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПЕРАТИВНОГО ЧИСЛЕННОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО
ПРИБЛИЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ПЛОТНОСТИ**

В [1]–[4] мы рассмотрели следующую задачу.

Задача 1. По заданной выборке $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ построить численное функциональное приближение неизвестной плотности $f_\eta(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^d$, случайной величины (вектора) $\eta \in X \subset \mathbb{R}^d$ с заданным уровнем погрешности $L > 0$ и с наименьшими вычислительными затратами S .

Сформулированная задача может быть весьма актуальной при оперативной обработке больших данных, т.е. при $\hat{n} \gg 1$ (см., например, [5], [6]).

Наше предложение состоит в том, чтобы, используя относительно небольшую часть $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ выборки $\{\eta_1, \dots, \eta_{\hat{n}}\}$ (здесь $n \ll \hat{n}$), применить следующий функциональный вычислительный ядерный алгоритм.

Алгоритм 1 (см. [1]–[4]). Вычисляем значения

$$\tilde{f}_\eta^{(\mathbf{x}_i)}(n) = Z_n(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta_j), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (1.1)$$

¹⁾ Работа выполнена в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект 0315-2019-0002).

и приближаем функцию $f_\eta(\mathbf{x})$ по формуле

$$f_\eta(\mathbf{x}) \approx L^{(M,n)} \tilde{f}_\eta(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M w^{(i)} [\tilde{f}_\eta^{(\mathbf{x}_1)}(n), \dots, \tilde{f}_\eta^{(\mathbf{x}_M)}(n)] \chi^{(i)}(\mathbf{x}). \quad (1.2)$$

Величина $Z_n(\mathbf{x}_i)$ из соотношения (1.1) представляет собой *ядерную оценку* плотности $f_\eta(\mathbf{x})$ (см. [7]) в точке $\mathbf{x}_i$, являющейся узлом аппроксимационной сетки

$$X^{(M)} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\}, \quad (1.3)$$

введенной в области X . При этом $\kappa^{(\mathbf{x})}(\mathbf{y})$ — некоторая финитная параметрическая, одинаковая по форме для всех значений параметра $\mathbf{x}$, *ядерная функция*. Эта функция выбирается таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$f_\eta(\mathbf{x}_i) \approx \tilde{f}_\eta^{(\mathbf{x}_i)}(n) = Z_n(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta_j) \approx \mathbf{E} \kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta) = \int \kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\mathbf{y}) f_\eta(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (1.4)$$

В свою очередь, выражение (1.2) представляет собой классическое сеточное приближение на сетке (1.3) (см., например, § 2 гл. 2 [8], § 2, гл. 2) с аппроксимационным базисом

$$\Xi^{(M)} = \{\chi^{(1)}(\mathbf{x}), \dots, \chi^{(M)}(\mathbf{x})\} \quad (1.5)$$

(эти функции определенным образом связаны с сеткой (1.3)), а значения

$$\tilde{\mathbf{W}}^{(M)}(n) = \{w^{(1)} [\tilde{f}_\eta^{(\mathbf{x}_1)}(n), \dots, \tilde{f}_\eta^{(\mathbf{x}_M)}(n)], \dots, w^{(M)} [\tilde{f}_\eta^{(\mathbf{x}_1)}(n), \dots, \tilde{f}_\eta^{(\mathbf{x}_M)}(n)]\}$$

представляют собой аппроксимационные коэффициенты, являющиеся определенными комбинациями приближенных значений функции $f_\eta(\mathbf{x})$ в узлах сетки (1.3) (см. соотношение (1.4)); чаще всего

$$w^{(i)} [\tilde{f}_\eta^{(\mathbf{x}_1)}(n), \dots, \tilde{f}_\eta^{(\mathbf{x}_M)}(n)] = \tilde{f}_\eta^{(\mathbf{x}_i)}(n), \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (1.6)$$

Помимо наших работ [1]–[4] идеология построения алгоритма 1 отражена в [9], [10], но необходимые детали использования теории сеточной аппроксимации функций в этих работах не приводятся.

Важным является следующее обстоятельство.

Замечание 1 (см. [1]–[4]). Конструкция функционального вычислительного ядерного алгоритма приближения вероятностной плотности $f_\eta(\mathbf{x})$ близка к схеме построения функционального вычислительного ядерного статистического алгоритма приближения решения интегрального уравнения Фредгольма II рода (см. [11], разд. 8.6), и поэтому при исследовании алгоритма 1 целесообразно использовать соображения теории условной оптимизации функциональных алгоритмов метода Монте-Карло (см. прежде всего [12]–[21]).

Данная работа посвящена детализации соображений из замечания 1.

2. ОБЩАЯ СХЕМА УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Общая схема оптимизации из [12]–[21] выглядит следующим образом. Ставится задача согласованного выбора параметров M и n (число узлов и выборочных значений из соотношений (1.1)) алгоритма 1, обеспечивающего заданный уровень $L > 0$ погрешности приближения (1.2) при минимальных вычислительных затратах $S(M, n)$.

Метод 1. Строится верхняя граница $UP^{(\mathbb{B})}(M, n)$ погрешности алгоритма $\delta^{(\mathbb{B})}(M, n)$ для используемого нормированного функционального пространства $\mathbb{B}(X)$, зависящая от параметров M и n :

$$\delta^{(\mathbb{B})}(M, n) = \|f_\eta - L^{(M,n)} \tilde{f}_\eta\|_{\mathbb{B}(X)} \leq UP^{(\mathbb{B})}(M, n). \quad (2.1)$$

Эта функция двух переменных приравнивается величине L . Из уравнения вида

$$UP^{(\mathbb{B})}(M, n) = L \quad (2.2)$$

один из параметров (например, n) выражается через другой: $n = \psi^{(L)}(M)$. Это соотношение подставляется в выражение для затрат $S(M, n)$ (которое тоже зависит от параметров M и n). В результате получается функция $\tilde{S}^{(\mathbb{B}, L)}(M)$ одного переменного M , которая исследуется на минимум с помощью известных приемов математического или численного анализа. Найденные значения $M_{\min}^{(\mathbb{B})}(L) = M_{\text{opt}}^{(\mathbb{B})}(L)$, $n_{\text{opt}}^{(\mathbb{B})}(L) = \psi[M_{\text{opt}}^{(\mathbb{B})}(L)]$ объявляются условно-оптимальными параметрами соответствующего функционального алгоритма.

“Условность” оптимизации по методу 1 связана с тем, что в левой части уравнения вида (2.2) используется не сама погрешность алгоритма $\delta^{(\mathbb{B})}(M, n)$, а ее верхняя граница $UP^{(\mathbb{B})}(M, n)$. К слову, оценка качества того или иного алгоритма по верхней границе погрешности используется в подавляющем числе теоретических рассуждений вычислительной математики (см., например, [8]), т.е. по сути речь идет об “условной оптимальности” исследуемых численных схем.

При изучении погрешности $\delta^{(\mathbb{B})}(M, n)$ необходимо выбрать как соответствующее нормированное функциональное пространство $\mathbb{B}(X)$, так и вероятностный смысл выполнения неравенства вида (2.1) (ведь $\delta^{(\mathbb{B})}(M, n)$ является случайной величиной). Следуя канонам классического численного анализа (см., например, [8]), в качестве пространств $\mathbb{B}(X)$ будем рассматривать $\mathbb{L}_2(X)$ и $\mathbb{C}(X)$.

Для хорошо разработанного (см. в первую очередь [12]–[21]) $\mathbb{L}_2$ -подхода выбирается сходимость в среднем погрешности

$$\delta^{(\mathbb{L}_2)}(M, n) = \|f_\eta - L^{(M, n)} \tilde{f}_\eta\|_{\mathbb{L}_2(X)} = \left(\int_X [f_\eta(\mathbf{x}) - L^{(M, n)} \tilde{f}_\eta(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}$$

к нулю при $M, n \rightarrow \infty$ и строятся оценки сверху $UP^{(\mathbb{L}_2)}(M, n)$ такие, что

$$[\mathbf{E} \delta^{(\mathbb{L}_2)}(M, n)]^2 \leq UP^{(\mathbb{L}_2)}(M, n). \quad (2.3)$$

Для $\mathbb{C}$ -подхода (см. [16]–[21]) величина

$$\delta^{(\mathbb{C})}(M, n) = \|f_\eta - L^{(M, n)} \tilde{f}_\eta\|_{\mathbb{C}(X)} = \sup_{\mathbf{x} \in X} |f_\eta(\mathbf{x}) - L^{(M, n)} \tilde{f}_\eta(\mathbf{x})|$$

ограничивается сверху по вероятности

$$\mathbf{P}[\delta^{(\mathbb{C})}(M, n) \leq UP^{(\mathbb{C})}(M, n)] > 1 - \varepsilon \quad (2.4)$$

для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Отметим, что для $\mathbb{L}_2$ -подхода используется относительно “слабая” интегральная норма $\|\cdot\|_{\mathbb{L}_2(X)}$ пространства $\mathbb{L}_2(X)$ и “сильная” вероятностная сходимость погрешности к нулю (в среднем). В свою очередь в $\mathbb{C}$ -подходе для “жесткой” нормы $\|\cdot\|_{\mathbb{C}(X)}$ используется относительно “слабая” сходимость (по вероятности).

Для $\mathbb{C}$ - и $\mathbb{L}_2$ -подходов можно разделить погрешность на три компоненты: детерминированную $\delta_{\text{det}}^{(\mathbb{B})}(M)$, стохастическую $\delta_{\text{stoch}}^{(\mathbb{B})}(M, n)$ и компоненту смещения $\delta_{\text{bias}}^{(\mathbb{B})}(M)$.

В частности, для $\mathbb{C}$ -подхода, согласно неравенству треугольника,

$$\begin{aligned} \delta^{(\mathbb{C})}(M, n) &\leq \delta_{\text{det}}^{(\mathbb{C})}(M) + \delta_{\text{stoch}}^{(\mathbb{C})}(M, n) + \delta_{\text{bias}}^{(\mathbb{C})}(M), & \delta_{\text{det}}^{(\mathbb{C})}(M) &= \|f_\eta - L^{(M)} f_\eta\|_{\mathbb{C}(X)}, \\ \delta_{\text{stoch}}^{(\mathbb{C})}(M, n) &= \|L^{(M)} \bar{f}_\eta - L^{(M, n)} \tilde{f}_\eta\|_{\mathbb{C}(X)}, & \delta_{\text{bias}}^{(\mathbb{C})}(M) &= \|L^{(M)} f_\eta - L^{(M)} \bar{f}_\eta\|_{\mathbb{C}(X)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь

$$L^{(M)} f_\eta(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M w^{(i)} [f_\eta(\mathbf{x}_1), \dots, f_\eta(\mathbf{x}_M)] \chi^{(i)}(\mathbf{x}), \quad (2.6)$$

$$L^{(M)} \bar{f}_\eta(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M w^{(i)} [\mathbf{E} \kappa^{(\mathbf{x}_1)}(\eta), \dots, \mathbf{E} \kappa^{(\mathbf{x}_M)}(\eta)] \chi^{(i)}(\mathbf{x}). \quad (2.7)$$

Для $\mathbb{L}_2$ -подхода, применяя неравенство Коши–Буняковского и теорему Фубини, получаем

$$[\mathbf{E}\delta^{(\mathbb{L}_2)}(M, n)]^2 \leq \mathbf{E} \left(\int_X [f_\eta(\mathbf{x}) - L^{(M, n)} \tilde{f}_\eta(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x} \right) \times \mathbf{E} 1 = \int_X \mathbf{E} [f_\eta(\mathbf{x}) - L^{(M, n)} \tilde{f}_\eta(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x}.$$

Далее заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [f_\eta(\mathbf{x}) - L^{(M, n)} \tilde{f}_\eta(\mathbf{x})]^2 &= \mathbf{E} \left([f_\eta(\mathbf{x}) - L^{(M)} f_\eta(\mathbf{x})] + [L^{(M)} f_\eta(\mathbf{x}) - L^{(M)} \bar{f}_\eta(\mathbf{x})] + [L^{(M)} \bar{f}_\eta(\mathbf{x}) - L^{(M, n)} \tilde{f}_\eta(\mathbf{x})] \right)^2 = \\ &= \left([f_\eta(\mathbf{x}) - L^{(M)} f_\eta(\mathbf{x})] + [L^{(M)} f_\eta(\mathbf{x}) - L^{(M)} \bar{f}_\eta(\mathbf{x})] \right)^2 + \mathbf{E} [L^{(M)} \bar{f}_\eta(\mathbf{x}) - L^{(M, n)} \tilde{f}_\eta(\mathbf{x})]^2. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $\mathbf{E} L^{(M, n)} \tilde{f}_\eta(\mathbf{x}) = L^{(M)} \bar{f}_\eta(\mathbf{x})$ (см. соотношения (1.2), (1.4), (2.7)). Используя очевидное неравенство $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, получаем

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}\delta^{(\mathbb{L}_2)}(M, n)]^2 &\leq 2[\delta_{\text{det}}^{(\mathbb{L}_2)}(M)]^2 + \delta_{\text{stoch}}^{(\mathbb{L}_2)}(M, n) + 2[\delta_{\text{bias}}^{(\mathbb{L}_2)}(M)]^2, \quad \delta_{\text{det}}^{(\mathbb{L}_2)}(M) = \|f_\eta - L^{(M)} f_\eta\|_{\mathbb{L}_2(X)}, \\ \delta_{\text{stoch}}^{(\mathbb{L}_2)}(M, n) &= \int_X \mathbf{D} L^{(M, n)} \tilde{f}_\eta(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \delta_{\text{bias}}^{(\mathbb{L}_2)}(M) = \|L^{(M)} f_\eta - L^{(M)} \bar{f}_\eta\|_{\mathbb{L}_2(X)}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

3. ВЕРХНИЕ ГРАНИЦЫ ДЛЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ КОМПОНЕНТ $\mathbb{C}$ - И $\mathbb{L}_2$ -ПОГРЕШНОСТЕЙ

В книгах и диссертациях [14], [16]–[21] и сопутствующих статьях [22]–[24] по теории условной оптимизации по методу 1 приведены весомые аргументы в пользу использования в качестве функций (1.5) базиса Стренга–Фикса (см. [25])

$$\chi^{(i, r)}(\mathbf{x}) = \beta^{(r)} \left(\frac{x^{(1)}}{h} - j_i^{(1)} \right) \times \dots \times \beta^{(r)} \left(\frac{x^{(d)}}{h} - j_i^{(d)} \right) \quad (3.1)$$

для равномерной сетки (1.3) с шагом h по каждой координате, т.е. с узлами вида $\mathbf{x}_i = (j_i^{(1)} h, \dots, j_i^{(d)} h)$ в прямоугольной области X ; здесь $\{j_i^{(k)}, i = 1, 2, \dots, M, k = 1, 2, \dots, d\}$ – целые числа.

Для такой сетки число M узлов сетки пропорционально величине h^{-d} , т.е. существует константа $H^{(h \rightarrow M)}$ такая, что

$$h = H^{(h \rightarrow M)} M^{-1/d}. \quad (3.2)$$

В формуле (3.1) функция $\beta^{(r)}(u)$ представляет собой B -сплайн r -го порядка (см., например, [25]), который можно определить с помощью следующих рекуррентных формул:

$$\beta^{(r)}(u) = \beta^{(r-1)} * \beta^{(0)}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \int \beta^{(r-1)}(v) \beta^{(0)}(u - v) dv, \quad \beta^{(0)}(u) = \begin{cases} 1 & \text{при } |u| \leq 1/2, \\ 0 & \text{при } |u| > 1/2. \end{cases} \quad (3.3)$$

Учитывая вид линейных преобразований координат $\{x^{(1)}, \dots, x^{(d)}\}$ в формуле (3.1), важным является требование того, что сплайн $\beta^{(r)}(u)$ должен представлять собой кусочно-гладкую функцию, причем границы разбиения интервала, на котором $\beta^{(r)}(u) > 0$, на соответствующие полуинтервалы должны быть целыми точками. Это требование выполняется, когда параметр r является натуральным нечетным числом: $r = 1, 3, 5, \dots$. Чаше всего используется B -сплайн первого порядка (или “функция-крышка”)

$$\beta^{(1)}(u) = \begin{cases} u + 1 & \text{при } -1 \leq u \leq 0, \\ -u + 1 & \text{при } 0 \leq u \leq 1, \\ 0 & \text{при } |u| > 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

При этом приближение (2.3) с базисными функциями $\{\chi^{(i,1)}(\mathbf{x}); i = 1, 2, \dots, M\}$ и с коэффициентами

$$W^{(M)}(\mathbf{f}_\eta) = \{w^{(1)}[f_\eta(\mathbf{x}_1), \dots, f_\eta(\mathbf{x}_M)], \dots, w^{(M)}[f_\eta(\mathbf{x}_1), \dots, f_\eta(\mathbf{x}_M)]\} \quad (3.5)$$

простейшего вида

$$w^{(i)}[f_\eta(\mathbf{x}_1), \dots, f_\eta(\mathbf{x}_M)] = f_\eta(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.6)$$

(это аналог соотношения (1.6)) определяет *мультилинейную аппроксимацию* плотности $f_\eta(\mathbf{x})$ (см. [14], [16]–[21]).

На основании подходов из [20], [25] можно получить следующие результаты.

Утверждение 1. Если функция $f_\eta(\mathbf{x})$ принадлежит пространству $\mathbb{C}^{r+1}(X)$ и в приближении (2.6) функции $f_\eta(\mathbf{x})$ используются базисные функции $\{\chi^{(i,r)}(\mathbf{x}); i = 1, 2, \dots, M\}$ из (3.1), то найдутся такие коэффициенты (3.5), что справедливы неравенства

$$\|f_\eta - L^{(M)} f_\eta\|_{\mathbb{C}^s(X)} \leq \tilde{H}_r^{(\mathbb{C}^s)} h^{r+1-s} \|f_\eta\|_{\mathbb{C}^{r+1}(X)}, \quad 0 \leq s \leq r,$$

причем константы $\tilde{H}_r^{(\mathbb{C}^s)}$ не зависят от $f_\eta(\mathbf{x})$ и h .

Утверждение 2. Если функция $f_\eta(\mathbf{x})$ принадлежит пространству $\mathbb{W}_2^{r+1}(X)$ и в приближении (2.6) используются базисные функции (3.1), то найдутся такие коэффициенты (3.5), что справедливы неравенства

$$\|f_\eta - L^{(M)} f_\eta\|_{\mathbb{W}_2^s(X)} \leq \tilde{H}_r^{(\mathbb{W}_2^s)} h^{r+1-s} \|f_\eta\|_{\mathbb{W}_2^{r+1}(X)}, \quad 0 \leq s \leq r,$$

причем константы $\tilde{H}_r^{(\mathbb{W}_2^s)}$ не зависят от $f_\eta(\mathbf{x})$ и h .

Заметим, что

$$\delta_{\det}^{(\mathbb{C})}(M) = \|f_\eta - L^{(M)} f_\eta\|_{\mathbb{C}^0(X)} \quad \text{и} \quad \delta_{\det}^{(\mathbb{L}_2)}(M) = \|f_\eta - L^{(M)} f_\eta\|_{\mathbb{W}_2^0(X)}.$$

Из утверждений 1 и 2 и соотношения (3.2) получаем

$$\begin{aligned} \delta_{\det}^{(\mathbb{C})}(M) &\leq \tilde{H}_r^{(\mathbb{C})} [H^{(h \rightarrow M)}]^{r+1} M^{-(r+1)/d} \|f_\eta\|_{\mathbb{C}^{r+1}(X)}, \\ \delta_{\det}^{(\mathbb{L}_2)}(M) &\leq \tilde{H}_r^{(\mathbb{L}_2)} [H^{(h \rightarrow M)}]^{r+1} M^{-(r+1)/d} \|f_\eta\|_{\mathbb{W}_2^{r+1}(X)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Особую проблему представляет собой нахождение коэффициентов (3.5), обеспечивающих выполнение неравенств вида (3.7). Относительно несложным является лишь случай $r = 1$.

Теорема 1 (см. [20], [25]). Выбор базисных функций (3.1), (3.4) и коэффициентов (3.6) мультилинейной аппроксимации обеспечивает выполнение неравенств вида (3.7)

$$\delta_{\det}^{(\mathbb{C})}(M) \leq H_{\det}^{(\mathbb{C})} M^{-2/d}, \quad \delta_{\det}^{(\mathbb{L}_2)}(M) \leq H_{\det}^{(\mathbb{L}_2)} M^{-2/d} \quad (3.8)$$

при $f_\eta \in \mathbb{C}^2(X)$ и $f_\eta \in \mathbb{W}_2^2(X)$ соответственно. При этом

$$H_{\det}^{(\mathbb{C})} = \frac{[H^{(h \rightarrow M)}]^2}{8} \sum_{s=1}^d \max_{\mathbf{x} \in X} \left| \frac{\partial^2}{\partial (x^{(s)})^2} f_\eta(\mathbf{x}) \right| \quad \text{и} \quad H_{\det}^{(\mathbb{L}_2)} = H_{\det}^{(\mathbb{C})} \times \sqrt{\text{mes } X}. \quad (3.9)$$

В случае $r > 1$ выбор подходящих коэффициентов (3.5), обеспечивающих выполнение неравенств вида (3.7), существенно более сложен. Отметим, что в [20] получены коэффициенты (3.5), представляющие собой специальные (существенно отличные от (3.6)) комбинации значений $\{f_\eta(\mathbf{x}_1), \dots, f_\eta(\mathbf{x}_M)\}$ и обеспечивающие оптимальный порядок $M^{-4/d}$ (см. утверждения 1, 2 и соот-

ношение (3.2)) величин $\delta_{\det}^{(\mathbb{C})}(M)$, $\delta_{\det}^{(\mathbb{L}_2)}(M)$ для $f_\eta \in \mathbb{C}^4(X)$ и $f_\eta \in \mathbb{W}_2^4(X)$, соответственно, и для функций (3.1) при $r = 3$. Здесь

$$\beta^{(3)}(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u > 2, \\ (2-u)^3/6 & \text{при } 1 \leq u \leq 2, \\ [1 + 3(1-u) + 3(1-u)^2 - 3(1-u)^3]/6 & \text{при } 0 \leq u \leq 1, \\ \beta^{(3)}(-u) & \text{при } u \leq 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Дальнейшие рассуждения показывают, что для исследуемого алгоритма 1 достаточно (и даже необходимо) рассмотрение случая $r = 1$ (т.е. использование мультилинейного восполнения (3.1), (3.4)) и выполнение принципиальных соотношений (3.6) и (3.8). В частности, это обусловлено тем, что компоненты смещения $\delta_{\text{bias}}^{(\mathbb{C})}(M)$, $\delta_{\text{bias}}^{(\mathbb{L}_2)}(M)$ имеют порядок $M^{-2/d}$ (как и детерминированные компоненты из соотношений (3.8)), во всяком случае, для простейшей “ядерной” функции (4.5) (см. далее разд. 4).

4. ВЕРХНИЕ ГРАНИЦЫ ДЛЯ КОМПОНЕНТ СМЕЩЕНИЯ $\mathbb{C}$ - И $\mathbb{L}_2$ -ПОГРЕШНОСТЕЙ

Для обоснования последнего замечания из предыдущего раздела нам понадобится следующий факт.

Утверждение 3. *Базис Стренга—Фикса (3.1) является разложением единицы, т.е. $\sum_i \chi^{(i,r)}(\mathbf{x}) \equiv 1$ для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ и $r \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Используем метод математической индукции по размерности d пространства $\mathbb{R}^d$.

Для $d = 1$ утверждение доказываем индукцией по порядку r сплайна $\beta^{(r)}(u)$. Пусть $r = 0$ и $x \in \mathbb{R}$. Найдется единственное целое число $\hat{i}$ такое, что $\hat{i}h - h/2 \leq x < \hat{i}h + h/2$. Тогда $\sum_i \beta^{(0)}(x/h - i) \equiv 1$ (см. соотношения (3.3)), так как в этой сумме все слагаемые равны нулю, кроме $\hat{i}$ -го, которое равно единице.

Пусть теперь

$$\sum_i \beta^{(r-1)}\left(\frac{x}{h} - i\right) \equiv 1 \quad (4.1)$$

для всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда, согласно определению B -сплайна (см. соотношения (3.3)), имеем

$$\begin{aligned} \sum_i \beta^{(r)}\left(\frac{x}{h} - i\right) &= \sum_i \int_{-\infty}^{+\infty} \beta^{(0)}(y) \beta^{(r-1)}\left(\frac{x - ih}{h} - y\right) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \beta^{(0)}(y) \sum_i \beta^{(r-1)}\left(\frac{x - ih}{h} - y\right) dy = \int_{-1/2}^{+1/2} \sum_i \beta^{(r-1)}\left[\frac{(x - hy) - ih}{h}\right] dy. \end{aligned}$$

Используя индуктивное предположение (5.1) для $(x - hy)$ вместо x , получаем $\sum_i \beta^{(r)}(x/h - i) \equiv 1$, т.е. утверждение 3 верно для $d = 1$.

Наконец, индуктивный переход по размерности d следует из соотношения

$$\sum_i \chi^{(i,r)}(\mathbf{x}) = \sum_{j_{(i)}^{(1)}, \dots, j_{(i)}^{(d)}} \chi_{(j_{(i)}^{(1)}, \dots, j_{(i)}^{(d)})}^{(r)}(x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) = \sum_{j_{(i)}^{(1)}, \dots, j_{(i)}^{(d-1)}} \chi_{(j_{(i)}^{(1)}, \dots, j_{(i)}^{(d-1)})}^{(r)}(x^{(1)}, \dots, x^{(d-1)}) \times \sum_{j_{(i)}^{(d)}} \beta^{(r)}\left(\frac{x^{(d)}}{h} - j_{(i)}^{(d)}\right).$$

Утверждение 3 доказано.

Из утверждения 3 следует, что константа Лебега $K^{(\Xi^{(M)})}$ (см. [26, разд. 3.1]) для базиса Стренга–Фикса $\Xi^{(M)}$ вида (3.1) равна единице:

$$K^{(\Xi^{(M)})} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\mathbf{x} \in X} \sum_{i=1}^M |\chi^{(i,r)}(\mathbf{x})| = \sup_{\mathbf{x} \in X} \sum_{i=1}^M \chi^{(i,r)}(\mathbf{x}) = 1,$$

и в случае, когда в алгоритме 1 используются базис Стренга–Фикса (3.1) и коэффициенты (3.5) простейшего вида (3.6), выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \delta_{\text{bias}}^{(\mathbb{C})}(M) &= \sup_{\mathbf{x} \in X} |L^{(M)} f_{\eta}(\mathbf{x}) - L^{(M)} \bar{f}_{\eta}(\mathbf{x})| = \sup_{\mathbf{x} \in X} \left| \sum_{i=1}^M f_{\eta}(\mathbf{x}_i) \chi^{(i)}(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^M \mathbf{E} \kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta) \chi^{(i)}(\mathbf{x}) \right| \leq \\ &\leq K^{(\Xi^{(M)})} \times \max_{i=1, \dots, M} |f_{\eta}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{E} \kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta)| = \max_{i=1, \dots, M} \left| f_{\eta}(\mathbf{x}_i) - \int \kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\mathbf{y}) f_{\eta}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right|, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\text{stoch}}^{(\mathbb{C})}(M, n) &= \sup_{\mathbf{x} \in X} |L^{(M)} \bar{f}_{\eta}(\mathbf{x}) - L^{(M,n)} \tilde{f}_{\eta}(\mathbf{x})| = \sup_{\mathbf{x} \in X} \left| \int \mathbf{E} \kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta) \chi^{(i)}(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^M \bar{f}_{\eta}^{(\mathbf{x}_i)}(n) \chi^{(i)}(\mathbf{x}) \right| \leq \\ &\leq K^{(\Xi^{(M)})} \times \max_{i=1, \dots, M} |\mathbf{E} \kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta) - \tilde{f}_{\eta}^{(\mathbf{x}_i)}(n)| = \max_{i=1, \dots, M} |Z_n(\mathbf{x}_i) - \mathbf{E} \kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta)|. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Заметим, что в [20] для аппроксимации Стренга–Фикса (2.6), (3.1) с кубической производящей функцией (3.10) для специального вида коэффициентов (3.5), дающих, согласно утверждениям 1 и 2, оптимальный порядок $M^{-4/d}$ величин $\delta_{\text{det}}^{(\mathbb{C})}(M)$, $\delta_{\text{det}}^{(\mathbb{L}_2)}(M)$, получено $K^{(\Xi^{(M)})} = 3$ (что тоже неплохо). А вот, например, для одномерной интерполяции Лагранжа константа Лебега $K^{(\Xi^{(M)})}$ растет с увеличением числа M узлов равномерной сетки как 2^M (см. [26]).

Предположим, что I является номером узла $\mathbf{x}_I$, в котором достигается максимум $\max_{i=1, \dots, M} |f_{\eta}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{E} \kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta)|$ в правой части соотношения (4.2). Тогда

$$\delta_{\text{bias}}^{(\mathbb{C})}(M) \leq \left| f_{\eta}(\mathbf{x}_I) - \int \kappa^{(\mathbf{x}_I)}(\mathbf{y}) f_{\eta}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right|. \quad (4.4)$$

Далее последуем рекомендациям из [14], [16]–[23] и выберем кусочно-постоянный вариант ядерной функции

$$\kappa^{(\mathbf{x})}(\mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{1}{h^d} & \text{при } \mathbf{y} \in \Delta^{(\mathbf{x})}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.5)$$

Здесь

$$\Delta^{(\mathbf{x})} = \left\{ \mathbf{y} = (y^{(1)}, \dots, y^{(d)}) : x^{(s)} - \frac{h}{2} \leq y^{(s)} \leq x^{(s)} + \frac{h}{2}; s = 1, \dots, d; \mathbf{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) \right\}$$

и $\mathbf{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)})$. В этом случае имеем

$$\left| f_{\eta}(\mathbf{x}_I) - \int \kappa^{(\mathbf{x}_I)}(\mathbf{y}) f_{\eta}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| = \left| \frac{h^d f_{\eta}(\mathbf{x}_I) - \int_{\Delta^{(\mathbf{x}_I)}} f_{\eta}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}}{h^d} \right|. \quad (4.6)$$

Далее проводим следующие рассуждения из теории численного интегрирования, касающиеся обоснования *квадратурной формулы центральных прямоугольников* (см., например, [8, § 1 гл. 3]).

Утверждение 4. Если $f_{\eta} \in \mathbb{C}^2(X)$, то справедливо неравенство

$$J_{(\mathbf{x}_I)} = \left| \frac{h^d f_{\eta}(\mathbf{x}_I) - \int_{\Delta^{(\mathbf{x}_I)}} f_{\eta}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}}{h^d} \right| \leq \frac{h^2}{24} \sum_{s=1}^d \max_{\mathbf{y} \in \Delta^{(\mathbf{x}_I)}} \left| \frac{\partial^2 f_{\eta}(\mathbf{y})}{\partial (y^{(s)})^2} \right|. \quad (4.7)$$

Здесь $\mathbf{y} = (y^{(1)}, \dots, y^{(d)})$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $d = 1$. Здесь $\Delta^{(x_I)} = \{y : x_I - h/2 \leq y \leq x_I + h/2\}$. Несложно показать, что

$$hf_\eta(x_I) = \int_{\Delta^{(x_I)}} [f_\eta(x_I) + f'_\eta(x_I)(y - x_I)] dy.$$

Кроме того, согласно формуле Тейлора, имеем

$$f_\eta(y) = f_\eta(x_I) + f'_\eta(x_I)(y - x_I) + D_1,$$

где $y \in \Delta^{(x_I)}$ и $D_1 \leq \frac{(y - x_I)^2}{2} \max_{y \in \Delta^{(x_I)}} |f''_\eta(y)|$. Тогда

$$J^{(x_I)} \leq \frac{1}{h} \max_{y \in \Delta^{(x_I)}} |f''_\eta(y)| \int_{\Delta^{(x_I)}} \frac{(y - x_I)^2}{2} dy = \frac{h^2}{24} \max_{y \in \Delta^{(x_I)}} |f''_\eta(y)|.$$

Очевидная индукция по размерности d дает соотношение (4.7). Утверждение 4 доказано.

Теорема 2. Для алгоритма с аппроксимационным базисом Стренга–Фикса (3.1) с образующей функцией (3.4), простейшими коэффициентами (3.6) и ядерной функцией (4.5) справедливы неравенства

$$\delta_{\text{bias}}^{(\mathbb{C})}(M) \leq H_{\text{bias}}^{(\mathbb{C})} M^{-2/d}, \quad \delta_{\text{bias}}^{(\mathbb{L}_2)}(M) \leq H_{\text{bias}}^{(\mathbb{L}_2)} M^{-2/d} \quad (4.8)$$

при $f_\eta \in \mathbb{C}^2(X)$ и $f_\eta \in \mathbb{W}_2^2(X)$ соответственно. Здесь

$$H_{\text{bias}}^{(\mathbb{C})} = \frac{[H^{(h \rightarrow M)}]^2}{24} \sum_{s=1}^d \max_{\mathbf{x} \in X} \left| \frac{\partial^2}{\partial (x^{(s)})^2} f_\eta(\mathbf{x}) \right| \quad \text{и} \quad H_{\text{bias}}^{(\mathbb{L}_2)} = H_{\text{bias}}^{(\mathbb{C})} \times \sqrt{\text{mes } X}. \quad (4.9)$$

Утверждение теоремы 2 следует из соотношений (4.2), (4.4), (4.6), (4.7) и очевидного неравенства $\delta_{\text{bias}}^{(\mathbb{L}_2)}(M) \leq \sqrt{\text{mes } X} \times \delta_{\text{bias}}^{(\mathbb{C})}(M)$.

Сравнивая неравенства (3.8), (3.9) и (4.8), (4.9), можно сделать вывод о том, что упомянутая выше возможность рассмотрения базиса (3.1) с кубической производящей функцией (3.10) для получения порядка $M^{-4/d}$ для величин $\delta_{\text{det}}^{(\mathbb{C})}(M)$, $\delta_{\text{det}}^{(\mathbb{L}_2)}(M)$ для рассматриваемого алгоритма 1 не имеет смысла, так как компоненты смещения имеют порядок $M^{-2/d}$ (это аналог основного вывода [24]).

Также можно высказать весьма правдоподобную гипотезу (имеющую некоторые численные подтверждения — у нас имеются соответствующие предварительные результаты тестовых расчетов, но требующую, впрочем, отдельной тщательной проверки) о том, что использование в алгоритме 1 ядерных функций $\kappa^{(x)}(\mathbf{y})$, отличных от (4.5) (например, оптимальных функций из работы [7]), не позволит получить верхних границ компонент смещения лучших, чем (4.8).

Из теоремы 2 и двух последних соображений вытекает следующий важный вывод.

Замечание 2. Для решения сформулированной в разделе 1 задачи 1 целесообразным является применение следующего приближения алгоритма 1 с аппроксимационным базисом $\Xi^{(M)}$ вида (3.1) с образующей функцией (3.4), простейшими аппроксимационными коэффициентами вида (3.6) и ядерной функцией $\kappa^{(x)}(\mathbf{y})$ вида (4.5):

$$f_\eta(\mathbf{x}) \approx L^{(M,n)} f_\eta(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M \tilde{f}_\eta^{(x_i)} \chi^{(i,1)}(\mathbf{x}); \quad \tilde{f}_\eta^{(x_i)} = \frac{1}{nh^d} \sum_{j=1}^n X^{(\Delta^{(x_i)})}(\eta_j). \quad (4.10)$$

Здесь $X^{(\Delta^{(x_i)})}(\mathbf{y})$ — индикатор множества $\Delta^{(x_i)}$: при $\mathbf{y} \in \Delta^{(x_i)}$ имеем $X^{(\Delta^{(x_i)})}(\mathbf{y}) = 1$, а при $\mathbf{y} \notin \Delta^{(x_i)}$ выполнено $X^{(\Delta^{(x_i)})}(\mathbf{y}) = 0$.

По аналогии с теорией рандомизированных функциональных алгоритмов приближения решения интегрального уравнения Фредгольма (см., в частности, [14], [16]–[24]), назовем вариант алгоритма 1, описанный в теореме 2 и в замечании 2 (см. соотношение (4.10)), многомерным ана-

логом метода полигона частот. Такой термин здесь более чем удачен, так как в одномерном случае $d = 1$ алгоритм 1 из теоремы 2 и замечания 2 дает в точности полигон частот.

В связи с замечанием 2 мы займемся выводом формул для условно-оптимальных параметров именно для многомерного аналога метода полигона частот (4.10). Для простоты везде далее будем полагать, что

$$f_\eta \in \mathbb{C}^2(X) \subset \mathbb{W}_2^2(X). \quad (4.11)$$

5. ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ КОМПОНЕНТЫ $\mathbb{L}_2$ -ПОГРЕШНОСТИ

Построим верхние границы стохастических компонент погрешности $\delta_{\text{stoch}}^{(\mathbb{L}_2)}(M, n)$, $\delta_{\text{stoch}}^{(C)}(M, n)$ из соотношений (2.5), (2.8) для многомерного аналога метода полигона частот (4.10). Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение.

Утверждение 5. Для приближения

$$f_\eta(\mathbf{x}) \approx L^{(M,n)} \tilde{f}_\eta(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta_j) \right] \chi^{(i,1)}(\mathbf{x})$$

справедливо соотношение

$$\delta_{\text{stoch}}^{(\mathbb{L}_2)}(M, n) = \int_X \mathbf{D} L^{(M,n)} \tilde{f}_\eta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \frac{\text{mes } X \max_{i=1, \dots, M} \mathbf{D} \kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta)}{n}.$$

Доказательство. С учетом известного тождества $\mathbf{D}\tau = \mathbf{D}(\tau + C)$, $C = \text{const}$, справедливого для любой случайной величины τ , имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{D} L^{(M,n)} \tilde{f}_\eta(\mathbf{x}) &= \mathbf{D} [L^{(M,n)} \tilde{f}_\eta(\mathbf{x}) - L^{(M)} \bar{f}_\eta(\mathbf{x})] = \mathbf{D} \left[\sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta_j) \right) \chi^{(i,1)}(\mathbf{x}) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^M \mathbf{E} \kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta) \chi^{(i,1)}(\mathbf{x}) \right] = \mathbf{D} \left[\sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{\zeta}_j^{(i)} \right) \chi^{(i,1)}(\mathbf{x}) \right], \end{aligned}$$

где $\tilde{\zeta}_j^{(i)} = \kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta_j) - \mathbf{E} \kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta_j)$ (здесь мы трактуем $\eta_1, \dots, \eta_n$ как независимые, одинаково распределенные — как η — случайные величины).

Зафиксируем $\mathbf{x} = \mathbf{z}_0 \in X$. Учитывая, что $\mathbf{E} \tilde{\zeta}_j^{(i)} = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, M$ и $j = 1, 2, \dots, n$, получаем равенство

$$\mathbf{D} L^{(M,n)} \tilde{f}_\eta(\mathbf{z}_0) = \sum_{i=1}^M \mathbf{D} \left[\frac{\chi^{(i,1)}(\mathbf{z}_0)}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{\zeta}_j^{(i)} \right] + \frac{1}{n} \int_{i_1, i_2=1, \dots, M; i_1 \neq i_2} \chi^{(i_1,1)}(\mathbf{z}_0) \chi^{(i_2,1)}(\mathbf{z}_0) \mathbf{E} [\tilde{\zeta}_{i_1} \tilde{\zeta}_{i_2}] ,$$

где $\tilde{\zeta}_j^{(i)}$ — случайная величина, распределенная как независимые для разных j , одинаково распределенные величины $\tilde{\zeta}_j^{(i)}$.

Далее, применяя вероятностный аналог неравенства Коши—Буняковского

$$\mathbf{E} [\tilde{\zeta}_{i_1} \tilde{\zeta}_{i_2}] \leq \sqrt{\mathbf{E} [\tilde{\zeta}_{i_1}]^2 \times \mathbf{E} [\tilde{\zeta}_{i_2}]^2} = \sqrt{\mathbf{D} \tilde{\zeta}_{i_1} \times \mathbf{D} \tilde{\zeta}_{i_2}}$$

и соотношения $\mathbf{D} \tilde{\zeta}_j^{(i)} = \mathbf{D} \kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta)$ для $i = 1, 2, \dots, M$ получаем оценку сверху

$$\begin{aligned} \mathbf{D} L^{(M,n)} \tilde{f}_\eta(\mathbf{z}_0) &\leq \frac{\max_{i=1, \dots, M} \mathbf{D} \kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta)}{n} \left[\sum_{i=1}^M (\chi^{(i,1)}(\mathbf{z}_0))^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i_1, i_2=1, \dots, M; i_1 \neq i_2} \chi^{(i_1,1)}(\mathbf{z}_0) \chi^{(i_2,1)}(\mathbf{z}_0) \right] = \frac{\max_{i=1, \dots, M} \mathbf{D} \kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta)}{n} \left[\sum_{i=1}^M \chi^{(i,1)}(\mathbf{z}_0) \right]^2. \end{aligned}$$

Наконец, в силу утверждения 3 и произвольности $\mathbf{z}_0 \in X$, имеем

$$\sup_{\mathbf{x} \in X} \mathbf{D}L^{(M,n)} \tilde{f}_\eta(\mathbf{x}) \leq \frac{\max_{i=1,\dots,M} \mathbf{D}\kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta)}{n} \quad \text{и} \quad \delta_{\text{stoch}}^{(\mathbb{L}_2)}(M, n) \leq \frac{\text{mes } X \max_{i=1,\dots,M} \mathbf{D}\kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta)}{n}.$$

Утверждение 5 доказано.

Теорема 3. Для многомерного аналога полигона частот (4.10) (т.е. для алгоритма 1 с аппроксимационным базисом $\Xi^{(M)}$ вида (3.1) с образующей функцией (3.4), простейшими аппроксимационными коэффициентами вида (3.6) и ядерной функцией $\kappa^{(\mathbf{x})}(\mathbf{y})$ вида (4.5)) при выполнении условия (4.11) справедливы неравенства

$$\max_{i=1,\dots,M} \mathbf{D}\kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta) \leq \frac{f_{\max} \times M}{[H^{(h \rightarrow M)}]^d} \quad \text{и} \quad \delta_{\text{stoch}}^{(\mathbb{L}_2)}(M, n) \leq \frac{H_{\text{stoch}}^{(\mathbb{L}_2)} M}{n}, \quad (5.1)$$

где

$$H_{\text{stoch}}^{(\mathbb{L}_2)} = \frac{f_{\max} \times \text{mes } X}{[H^{(h \rightarrow M)}]^d} \quad \text{и} \quad f_{\max} = \max_{\mathbf{x} \in X} f_\eta(\mathbf{x}). \quad (5.2)$$

Доказательство. Для ядерной функции (4.5) имеем

$$\mathbf{D}\kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta) = \frac{I_i - I_i^2}{h^{2d}}, \quad \text{где} \quad I_i = \int_{\Delta^{(\mathbf{x}_i)}} f_\eta(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Учитывая условие (4.11) и теорему о среднем для определенного интеграла от непрерывной функции, получаем, что существует $\mathbf{z}_i \in \Delta^{(\mathbf{x}_i)}$ такое, что

$$I_i = f_\eta(\mathbf{z}_i) \times h^d \quad \text{и} \quad \mathbf{D}\kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta) = \frac{f_\eta(\mathbf{z}_i)}{h^d} - f_\eta^2(\mathbf{z}_i), \quad (5.3)$$

и

$$f_\eta(\mathbf{z}_i) = \mathbf{E}\kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta). \quad (5.4)$$

В силу ограниченности функции $f_\eta \in \mathbb{C}^2(X)$ на компакте X , из утверждения 5 и соотношений (3.2), (5.3) получаем соотношения (5.1), (5.2). Теорема 3 доказана.

6. ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ КОМПОНЕНТЫ С-ПОГРЕШНОСТИ

Для С-подхода, используя соотношение (4.3), получаем

$$\begin{aligned} \delta_{\text{stoch}}^{(\mathbb{C})}(M, n) &\leq \max_{i=1,\dots,M} |Z_n(\mathbf{x}_i) - \mathbf{E}\kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta)| = \max_{i=1,\dots,M} \left| \sum_{j=1}^n \frac{\kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta_j) - n\mathbf{E}\kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta)}{n} \right| = \\ &= \max_{i=1,\dots,M} \left| \sqrt{\frac{\mathbf{D}\kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta)}{n}} \times \sum_{j=1}^n \frac{\kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta_j) - n\mathbf{E}\kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta)}{\sqrt{\mathbf{D}\kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta) \times n}} \right|. \end{aligned}$$

С учетом соотношений (5.1) имеем

$$\delta_{\text{stoch}}^{(\mathbb{C})}(M, n) \leq \sqrt{\frac{f_{\max} \times M}{[H^{(h \rightarrow M)}]^d \times n}} \times \max_{i=1,\dots,M} \left| \sum_{j=1}^n \frac{\kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta_j) - n\mathbf{E}\kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta)}{\sqrt{\mathbf{D}\kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta) \times n}} \right|.$$

В силу центральной предельной теоремы для одинаково распределенных случайных величин, суммы

$$\omega^{(i,M)}(n) = \sum_{j=1}^n \frac{\kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta_j) - n\mathbf{E}\kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta)}{\sqrt{\mathbf{D}\kappa^{(\mathbf{x}_i)}(\eta) \times n}}$$

сходятся (по распределению) к стандартным гауссовским величинам $\gamma^{(i,M)}$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, при фиксированном M для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое натуральное $N_1(\varepsilon_1, M)$, что при $n > N_1(\varepsilon_1, M)$ выполнено

$$\mathbf{P} \left\{ \delta_{\text{stoch}}^{(\mathbb{C})}(M, n) \leq \frac{H_{\text{stoch},1}^{(\mathbb{C})}(\varepsilon_1) \sqrt{M}}{\sqrt{n}} \times \max_{i=1, \dots, M} |\gamma^{(i,M)}| \right\} > 1 - \varepsilon_1, \quad (6.1)$$

где

$$H_{\text{stoch},1}^{(\mathbb{C})}(\varepsilon_1) = B_1(\varepsilon_1) \sqrt{\frac{f_{\max}}{[H^{(h \rightarrow M)}]^d}}. \quad (6.2)$$

Здесь $B_1(\varepsilon_1)$ — небольшая положительная константа, такая, что $\int_{-B_1(\varepsilon_1)}^{B_1(\varepsilon_1)} \frac{e^{-v^2/2} dv}{\sqrt{2\pi}} \approx 1 - \varepsilon_1$.

Подробному изучению распределений и асимптотических (при $M \rightarrow \infty$) свойств величин типа $Y^{(M)} = \max_{i=1, \dots, M} \gamma^{(i,M)}$ посвящена монография (см. [27]). Некоторая особенность рассматриваемого здесь случая состоит в том, что величины $\{\gamma^{(i,M)}; i = 1, 2, \dots, M\}$ являются зависимыми. Однако эта зависимость “ослабевает” с ростом M . Конкретнее, для ковариаций

$$\text{cov}[\gamma^{(i_1,M)}, \gamma^{(i_2,M)}] = E\gamma^{(i_1,M)}\gamma^{(i_2,M)}, \quad i_1 \neq i_2, \quad i_1, i_2 = 1, 2, \dots, M, \quad (6.3)$$

справедливы соотношения

$$\begin{aligned} |\text{cov}[\gamma^{(i_1,M)}, \gamma^{(i_2,M)}]| &= |\text{cov}[\omega^{(i_1,M)}(n), \omega^{(i_2,M)}(n)]| = \left| \frac{E\kappa^{(x_{i_1})}(\eta)\kappa^{(x_{i_2})}(\eta) - E\kappa^{(x_{i_1})}(\eta)E\kappa^{(x_{i_2})}(\eta)}{\sqrt{D\kappa^{(x_{i_1})}(\eta)D\kappa^{(x_{i_2})}(\eta)}} \right| = \\ &= \frac{[H^{(h \rightarrow M)}]^d \sqrt{f_\eta(\mathbf{z}_{i_1})f_\eta(\mathbf{z}_{i_2})}}{\sqrt{M^2 - M[H^{(h \rightarrow M)}]^d [f_\eta(\mathbf{z}_{i_1}) + f_\eta(\mathbf{z}_{i_2})] + [H^{(h \rightarrow M)}]^{2d} f_\eta(\mathbf{z}_{i_1})f_\eta(\mathbf{z}_{i_2})}}. \end{aligned}$$

Здесь использованы соотношения (3.2), (5.3), (5.4) и то, что для ядерной функции (4.5) выполнено $\kappa^{(x_{i_1})}(\eta) \times \kappa^{(x_{i_2})}(\eta) \equiv 0$ при $i_1 \neq i_2$.

Из последнего соотношения следует, что ковариации (6.3) убывают по модулю с ростом M со скоростью порядка $1/M$; при этом найдутся натуральное число $\hat{M}_1$ (например, $\hat{M}_1 = 2f_{\max}[H^{(h \rightarrow M)}]^d$) и “универсальная” константа $B_2 > 0$ (например, $B_2 = \sqrt{2}f_{\max}[H^{(h \rightarrow M)}]^d$) такие, что

$$|\text{cov}[\gamma^{(i_1,M)}, \gamma^{(i_2,M)}]| \leq \frac{B_2}{M} \quad \text{при} \quad M > \hat{M}_1. \quad (6.4)$$

Используя технологию изучения порядковых статистик из [27] по аналогии с [22], можно получить следующий результат.

Утверждение 6 (см. [22], [27]). Если для набора стандартных нормальных случайных величин $\gamma^{(1,M)}, \dots, \gamma^{(M,M)}$ выполнены соотношения (6.4), то асимптотическое при $M \rightarrow \infty$ распределение максимума $Y^{(M)} = \max_{i=1, \dots, M} \gamma^{(i,M)}$ таково, что

$$\mathbf{P}\{a_M(Y^{(M)} - b_M) < y\} \rightarrow \exp(-e^{-y}) = G(y),$$

где

$$a_M = \sqrt{2 \ln M}, \quad b_M = \sqrt{2 \ln M} - \frac{\ln \ln M + \ln 4\pi}{2\sqrt{2 \ln M}}. \quad (6.5)$$

В силу симметрии стандартного нормального распределения и с учетом соотношений

$$\begin{aligned} \max_{i=1, \dots, M} |\gamma^{(i,M)}| &= \max \left(\max_{i=1, \dots, M} \gamma^{(i,M)}, -\min_{i=1, \dots, M} \gamma^{(i,M)} \right), \\ \min\{\gamma^{(1,M)}, \dots, \gamma^{(M,M)}\} &= -\max\{-\gamma^{(1,M)}, \dots, -\gamma^{(M,M)}\} \end{aligned}$$

получаем, что

$$\mathbf{P}\left\{a_M \left(\max_{i=1,\dots,M} |\gamma^{(i,M)}| - b_M\right) < y\right\} \rightarrow \exp(-2e^{-y}) = G^2(y),$$

где коэффициенты a_M, b_M имеют вид (6.5).

Из последнего соотношения следует, что для любого $\varepsilon_2 > 0$ существуют константа $B_3(\varepsilon_2) > 0$ и натуральное число $\hat{M}_2$ такие, что

$$\mathbf{P}\left\{\max_{i=1,\dots,M} |\gamma^{(i,M)}| \leq \frac{B_3(\varepsilon_2)}{a_M} + b_M\right\} > 1 - \varepsilon_2 \quad \text{при} \quad M > \hat{M}_2. \quad (6.6)$$

С учетом соотношений (6.1), (6.2), (6.6) получаем следующий результат.

Теорема 4. Для многомерного аналога полигона частот (4.10) (т.е. для алгоритма с аппроксимационным базисом $\Xi^{(M)}$ вида (3.1) с образующей функцией (3.4), простейшими аппроксимационными коэффициентами вида (3.6) и ядерной функцией $\kappa^{(x)}(\mathbf{y})$ вида (4.5)) для любого $\varepsilon > 0$ существуют положительные действительные константы $H_{\text{stoch},1}^{(\mathbb{C})}(\varepsilon)$, $H_{\text{stoch},2}^{(\mathbb{C})}(\varepsilon)$ и натуральное число $\hat{M}$ такие, что для любого $M > \hat{M}$ существует натуральное число $\hat{N}(\varepsilon, M)$ такое, что для всех $n > \hat{N}(\varepsilon, M)$ выполнено

$$\mathbf{P}\left\{\delta_{\text{stoch}}^{(\mathbb{C})}(M, n) \leq \frac{H_{\text{stoch},1}^{(\mathbb{C})}(\varepsilon)\sqrt{M}}{\sqrt{n}} \times \left[\sqrt{2 \ln M} + \frac{H_{\text{stoch},2}^{(\mathbb{C})}(\varepsilon) - \frac{\ln \ln M}{2}}{\sqrt{2 \ln M}}\right]\right\} > 1 - \varepsilon. \quad (6.7)$$

7. УСЛОВНО-ОПТИМАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ДЛЯ $\mathbb{L}_2$ - И $\mathbb{C}$ -ПОДХОДОВ

Полученные в теоремах 1–4 верхние границы (3.8), (4.8), (5.1), (6.7) для компонент погрешности $\delta^{(\mathbb{B})}$ позволяют вывести выражения для условно-оптимальных параметров $M_{\text{opt}}^{(\mathbb{B})}(L)$ и $n_{\text{opt}}^{(\mathbb{B})}(L)$ для $\mathbb{B}(X) = \mathbb{C}(X) \vee \mathbb{L}_2(X)$ по представленному в разд. 2 методу 1.

Важной отличительной особенностью алгоритма 1 является то, что затраты S этого алгоритма пропорциональны величине $n \times t$, где t — время определения того, в какой из кубов $\Delta^{(x_i)}$ попадает очередное выборочное значение η_j случайной величины η , $i = 1, 2, \dots, M$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Несложно добиться, чтобы время t не зависело от числа M кубов $\Delta^{(x_i)}$. Таким образом, затраты оптимизированных версий алгоритма 1 явно не зависят от M (наши тестовые и прикладные численные эксперименты подтверждают это утверждение).

В оптимизационных процедурах метода 1 зависимость затрат S от параметра M возникает из-за наличия уравнений вида (2.2), определяющих зависимость параметра n (а значит, и затрат S) от M .

Рассмотрим такую процедуру для $\mathbb{L}_2$ -подхода. Здесь требуется решать следующую оптимизационную задачу: найти значения $M_{\text{opt}}^{(\mathbb{L}_2)}(L)$ и $n_{\text{opt}}^{(\mathbb{L}_2)}(L)$, для которых достигается минимум

$$\min_{M,n} S(M, n) = \min_{M,n} [t \times n(M, L) + S_0] \quad (7.1)$$

(здесь S_0 — время вычисления 2^d ненулевых слагаемых $\tilde{f}_{\eta}^{(x_i)} \chi^{(i,1)}(\mathbf{x})$ в сумме (4.10) для заданной точки $\mathbf{x} \in X$) при условии

$$\frac{A_1^{(\mathbb{L}_2)}}{M^{4/d}} + \frac{A_2^{(\mathbb{L}_2)} M}{n} L^2, \quad (7.2)$$

где $A_1^{(\mathbb{L}_2)} = 2(H_{\text{stoch}}^{(\mathbb{L}_2)})^2 + 2(H_{\text{bias}}^{(\mathbb{L}_2)})^2$ и $A_2^{(\mathbb{L}_2)} = H_{\text{stoch}}^{(\mathbb{L}_2)}$ (см. соотношения (2.8), (3.8), (3.9), (4.8), (4.9), (5.1), (5.2)).

Из равенств (7.1) и (7.2) имеем

$$n = \frac{A_2^{(\mathbb{L}_2)} M}{L^2 - A_1^{(\mathbb{L}_2)} / M^{4/d}} \quad \text{и} \quad \tilde{S}^{(\mathbb{L}_2, L)}(M) = \frac{t A_2^{(\mathbb{L}_2)} M}{L^2 - A_1^{(\mathbb{L}_2)} / M^{4/d}} + S_0.$$

Найдем теперь минимум функции $\tilde{S}^{(\mathbb{L}_2, L)}(M)$ по M . Продифференцируем эту функцию:

$$\frac{\partial \tilde{S}^{(\mathbb{L}_2, L)}(M)}{\partial M} t A_2^{(\mathbb{L}_2)} \left[L^2 - \frac{A_1^{(\mathbb{L}_2)}}{M^{4/d}} - \frac{4 A_1^{(\mathbb{L}_2)}}{d \times M^{4/d}} \right] \Bigg/ \left[L^2 - \frac{A_1^{(\mathbb{L}_2)}}{M^{4/d}} \right]^2,$$

и найдем критическое значение (точку минимума), а затем, и условно-оптимальные параметры для $\mathbb{L}_2$ -подхода:

$$M_{\text{opt}}^{(\mathbb{L}_2)}(L) = [A_1^{(\mathbb{L}_2)}]^{d/4} \left(\frac{d+4}{d} \right)^{d/4} L^{-d/2}, \quad (7.3)$$

$$n_{\text{opt}}^{(\mathbb{L}_2)}(L) = \frac{A_2^{(\mathbb{L}_2)} [A_1^{(\mathbb{L}_2)}]^{d/4} (d+4)^{d/4+1}}{4d^{d/4}} L^{-2-d/2}. \quad (7.4)$$

Для $\mathbb{C}$ -подхода решается задача нахождения минимума (7.1) при условии

$$\frac{A_1^{(\mathbb{C})}}{M^{2/d}} + \frac{A_2^{(\mathbb{C})} \sqrt{M}}{\sqrt{n}} \left[\sqrt{2 \ln M} + \frac{A_3^{(\mathbb{C})} - \ln \ln M}{\sqrt{2 \ln M}} \right] = L, \quad (7.5)$$

где $A_1^{(\mathbb{C})} = H_{\text{det}}^{(\mathbb{C})} + H_{\text{bias}}^{(\mathbb{C})}$, $A_2^{(\mathbb{C})} = H_{\text{stoch},1}^{(\mathbb{C})}(\epsilon)$, $A_3^{(\mathbb{C})} = H_{\text{stoch},2}^{(\mathbb{C})}(\epsilon)$ (см. соотношения (2.5), (3.8), (3.9), (4.8), (4.9), (6.2), (6.7)).

Выражение в левой части уравнения (7.5) является относительно сложным, и мы применим следующий прием из [22], позволяющий заменить это выражение на более простое. Используя промежуточный результат из доказательства теоремы 1.5.3 из [27], вместо (7.5) можно рассмотреть соотношение

$$\frac{A_1^{(\mathbb{C})}}{M^{2/d}} + \frac{A_2^{(\mathbb{C})} \sqrt{M}}{\sqrt{n}} \sqrt{2 \ln M - \ln \ln M + 2 A_3^{(\mathbb{C})}} = L. \quad (7.6)$$

Несложно показать, что для любых фиксированных $\bar{M} \in \mathbb{N}$ и $a > 0$ найдется $b > 0$ такое, что при $M > \bar{M}$ выполнено

$$\sqrt{2 \ln M - \ln \ln M + 2 A_3^{(\mathbb{C})}} \leq b M^a. \quad (7.7)$$

С учетом соотношений (7.6), (7.7) заменим соотношение (7.5) на следующее:

$$\frac{A_1^{(\mathbb{C})}}{M^{2/d}} + \frac{A_2^{(\mathbb{C})} \sqrt{M}}{\sqrt{n}} b M^a = L. \quad (7.8)$$

Из формул (7.1), (7.8) имеем

$$n = \frac{[A_2^{(\mathbb{C})}]^2 b^2 M^{2a+1}}{[L - A_1^{(\mathbb{C})} / M^{2/d}]^2} \quad \text{и} \quad \tilde{S}^{(\mathbb{C}, L)}(M) = \frac{t [A_2^{(\mathbb{C})}]^2 b^2 M^{2a+1}}{[L - A_1^{(\mathbb{C})} / M^{2/d}]^2} + S_0. \quad (7.9)$$

Дифференцируем $\tilde{S}^{(\mathbb{C}, L)}(M)$ по M :

$$\frac{\partial \tilde{S}^{(\mathbb{C}, L)}(M)}{\partial M} \frac{t [A_2^{(\mathbb{C})}]^2 b^2 (2a+1) M^{2a}}{[L - A_1^{(\mathbb{C})} / M^{2/d}]^3} \times \left(L - \frac{A_1^{(\mathbb{C})} [(2a+1)d + 4]}{M^{2/d} (2a+1)d} \right),$$

и найдем точку минимума — она же условно-оптимальное значение параметра M для $\mathbb{C}$ -подхода

$$M_{\text{opt}}^{(\mathbb{C})}(L) = \left(\frac{A_1^{(\mathbb{C})} [(2a+1)d + 4]}{(2a+1)d} \right)^{d/2} L^{-d/2}. \quad (7.10)$$

Несколько слов о том, как выбирать параметр b . С одной стороны, его следует брать по возможности малым, так как множитель b^2 входит в выражение для трудоемкости (7.9). С другой стороны, для значения $M_{\text{opt}}^{(\text{C})}(L)$ должно выполняться неравенство (7.7). Поэтому выберем b из условия равенства в соотношении (7.7) при $M = M_{\text{opt}}^{(\text{C})}(L)$:

$$b^2 = \frac{2 \ln M_{\text{opt}}^{(\text{C})}(L) - \ln \ln M_{\text{opt}}^{(\text{C})}(L) + 2A_3^{(\text{C})}}{[M_{\text{opt}}^{(\text{C})}(L)]^{2a}}. \quad (7.11)$$

Из соотношений (7.9)–(7.11) получаем условно-оптимальное значение параметра n для $\mathbb{C}$ -подхода

$$n_{\text{opt}}^{(\text{C})}(L) = \frac{[A_1^{(\text{C})}]^{d/2} [A_2^{(\text{C})}]^2 [(2a+1)d+4]^{2+d/2}}{16[(2a+1)d]^{d/2}} [2 \ln M_{\text{opt}}^{(\text{C})}(L) - \ln \ln M_{\text{opt}}^{(\text{C})}(L) + 2A_3^{(\text{C})}] L^{-2-d/2}. \quad (7.12)$$

Наконец, для важного предельного случая $a = 0$ имеем

$$M_{\text{opt}}^{(\text{C})}(L) = \left[\frac{A_1^{(\text{C})}(d+4)}{d} \right]^{d/2} L^{-d/2},$$

$$n_{\text{opt}}^{(\text{C})}(L) = \frac{[A_1^{(\text{C})}]^{d/2} [A_2^{(\text{C})}]^2 (d+4)^{2+d/2}}{16d^{d/2}} [2 \ln M_{\text{opt}}^{(\text{C})}(L) - \ln \ln M_{\text{opt}}^{(\text{C})}(L) + 2A_3^{(\text{C})}] L^{-2-d/2}.$$

Замечание 3. Формулы (7.10), (7.12) заметно сложнее формул (7.3), (7.4). Поэтому на практике целесообразно использовать $\mathbb{L}_2$ -подход к условной оптимизации алгоритма 1. Данное замечание вполне соответствует рекомендациям из [7]–[9].

Значения в правых частях соотношений (7.3), (7.4), (7.10), (7.12) могут быть нецелыми, поэтому на практике в качестве параметров $M_{\text{opt}}^{(\mathbb{L}_2)}(L)$, $n_{\text{opt}}^{(\mathbb{L}_2)}(L)$, $M_{\text{opt}}^{(\text{C})}(L)$, $n_{\text{opt}}^{(\text{C})}(L)$ следует брать ближайшие к этим значениям целые числа.

Отметим также наличие содержательной проблемы выбора или приближенного подсчета констант (3.9), (4.9), (5.2), (6.2), входящих в выражения (7.1)–(7.12).

При обсуждении результатов данной работы было отмечено, что использование в одномерном случае максимума $\max_{x \in X} \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_{\eta}(x) \right|$ в оценках сверху для детерминированной компоненты $\delta_{\text{det}}^{(\mathbb{L}_2)}(M)$ и компоненты смещения $\delta_{\text{bias}}^{(\mathbb{L}_2)}(M)$ (см. соотношения (3.9) и (4.9)) кажется достаточно “жестким” по сравнению с оценками вида

$$[\tilde{\delta}_{\text{bias}}^{(\mathbb{L}_2)}(M)]^2 \leq \tilde{H}_{\text{bias}}^{(\mathbb{L}_2)} M^{-4}, \quad \tilde{H}_{\text{bias}}^{(\mathbb{L}_2)} = \frac{[H^{(h \rightarrow M)}]^4}{576} \int_X \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_{\eta}(x) \right]^2 dx$$

для классических “непрерывных” ядерных статистических оценок плотности (см., например, [9], [10]). В связи с этим возникла идея попробовать использовать следующую двухстадийную технологию выбора параметров M и n в одномерном случае.

Сначала выбираем параметр $M = \tilde{M}$ по формулам

$$2 \times 16 \times \tilde{H}_{\text{bias}}^{(\mathbb{L}_2)} M^{-4} = \frac{L^2}{2} \quad \text{или} \quad \tilde{M} = \frac{H^{(h \rightarrow M)}}{\sqrt{3L}} \left(\int_X \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_{\eta}(x) \right]^2 dx \right)^2. \quad (7.13)$$

Здесь учтено соотношение (2.8), а также то, что $\delta_{\text{det}}^{(\mathbb{L}_2)}(M)$ примерно в три раза больше $\delta_{\text{bias}}^{(\mathbb{L}_2)}(M)$ (см. соотношения (3.9), (4.9)).

Далее рассматриваем уравнение

$$\tilde{\delta}_{\text{stoch}}^{(\mathbb{L}_2)}(\tilde{M}, \tilde{n}) = \frac{f_{\max} \times \text{mes } X \times \tilde{M}}{H^{(h \rightarrow M)} \tilde{n}} \quad \text{или} \quad \tilde{n} = \frac{2f_{\max} \times \text{mes } X \times \tilde{M}}{H^{(h \rightarrow M)} L^2}. \quad (7.14)$$

Мы сравнили формулы (7.3), (7.4) (для $d = 1$) и (7.13), (7.14) на тестовом примере приближения плотности $f_\eta(x) = \frac{e^{1-x}}{e-1}$, $0 < x < 1$. При этом выборочные значения случайной величины η моделировались по формулам $\eta_j = -\ln[1 - \alpha_j(1 - e^{-1})]$, где $\alpha_j \in U(0,1)$ – стандартные случайные числа (см., например, [19]).

Для уровня погрешности $L = 0.003$ формулы (7.3) и (7.4) дали значения $M_{\text{opt}}^{(\mathbb{L}_2)}(L) = 14$, $n_{\text{opt}}^{(\mathbb{L}_2)}(L) = 3\,256\,877$ (максимальная погрешность приближения функции $f_\eta(x)$ для таких параметров получилась равной $0.002871 \lesssim L$, а время счета $t_{\text{opt}} = 0.446$ с). Аккуратные массовые расчеты показали оптимальность полученных значений (т.е. при других сочетаниях параметров M и n были превышены либо уровень погрешности L , либо время счета t_{opt}).

Формулы (7.13) и (7.14) для рассмотренного примера и для $L = 0.003$ дали значения $\tilde{M} = 11$ и $\tilde{n} = 3\,779\,382$. Максимальная погрешность приближения функции $f_\eta(x)$ для таких параметров получилась равной 0.001696 (что заметно меньше заданного уровня L), а временные затраты 0.542 с (что заметно больше величины t_{opt}).

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложен новый конструктивный ядерный алгоритм численного функционального приближения вероятностной плотности $f_\eta(\mathbf{x})$ (алгоритм 1) по заданной выборке, основанный на использовании ядерной оценки (1.4) и на подходах теории численной аппроксимации функций. Использовано соображение из [1]–[4] о том, что построенный ядерный алгоритм 1 аналогичен функциональному вычислительному ядерному статистическому алгоритму для приближения решения интегрального уравнения Фредгольма II рода (см. замечание 1). В связи с этим в [1]–[4] было предложено использовать схему условной оптимизации функциональных алгоритмов, основанную на минимизации затрат $S(M, n)$ при фиксированном уровне погрешности L (метод 1), для функционального ядерного алгоритма 1. В данной работе получен вид условно-оптимальных параметров (7.3), (7.4) и (7.10), (7.12) (для известных $\mathbb{L}_2$ - и $\mathbb{C}$ -подходов соответственно) для простейшего случая алгоритма 1 с аппроксимационным базисом вида (3.1) с образующей функцией (3.4), простейшими аппроксимационными коэффициентами вида (3.6) и кусочно-постоянной ядерной функцией вида (4.5) (т.е. для многомерного аналога алгоритма метода полигона частот).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булгакова Т.Е., Войтишек А.В. Сравнительный анализ функционального “ядерного” алгоритма и метода полигона частот // Тр. Международ. конф. “Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики” (ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск, 1–5 июля 2019 г.). Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2019. С. 65–71.
2. Булгакова Т.Е., Войтишек А.В. Критерии оптимизации “ядерного” алгоритма приближения вероятностной плотности // Тр. XV Международ. Азиатской школы-семинара “Проблемы оптимизации сложных систем” (26–30 августа 2019 г., РФ, Новосибирск). Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2019. С. 15–23.
3. Voytishek A.V., Bulgakova T.E. On conditional optimization of “kernel” estimators of densities // Proceed. Fifth Inter. Workshop “Applied Methods of Statistical Analysis. Statistical Computation and Simulation” (Novosibirsk, Russia, 18–20 September, 2019). Novosibirsk: NSTU Publ., 2019. P. 152–159.
4. Voytishek A.V., Bulgakova T.E. Optimization of kernel estimators of probability densities // Jacimovic M., Khachay M., Malkova V., Posypkin M. (eds). Optimizat. and Appl. OPTIMA 2019. Comm. Comput. and Informat. Sci. 2020: Springer, Cham. V. 1145. P. 254–266.
5. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Блинов П.Ю. Критерии проверки статистических гипотез при анализе больших выборок: проблемы и их решение // Тр. Международ. конф. “Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики” (ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск, 1–5 июля 2019 г.). Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2019. С. 277–283.
6. Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., Semenova M.A. Features of testing statistical hypotheses under big data analysis // Proceed. Fifth Inter. Workshop “Applied Methods of Statistical Analysis. Statistical Computation and Simulation” (Novosibirsk, Russia, 18–20 September, 2019). Novosibirsk: NSTU Publ., 2019. P. 122–137.

7. Епанечников В.А. Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности // Теория вероятностей и ее применения. 1969. Т. 14. Вып. 1. С. 156–161.
8. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975.
9. Михайлов Г.А. Рандомизированные алгоритмы метода Монте-Карло для задач со случайными параметрами (метод “двойной рандомизации”) // Сиб. журн. вычисл. матем. 2019. Т. 22. № 2. С. 187–200.
10. Михайлов Г.А. Улучшение многомерных рандомизированных алгоритмов метода Монте-Карло с “расщеплением” // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 5. С. 822–828.
11. Войтишек А.В. Лекции по численным методам Монте-Карло. Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2018.
12. Mikhailov G.A. Minimization of Computational Costs of Non-Analogue Monte Carlo Methods // Ser. Sov. East Europ. Math. V. 5. Singapore: World Sci., 1991.
13. Mikhailov G.A. New Monte Carlo Methods with Estimating Derivatives. Utrecht: VSP, 1995.
14. Войтишек А.В. Основы метода Монте-Карло в алгоритмах и задачах. Ч. V. Вычисление многократных интегралов. Аппроксимация интегралов, зависящих от параметра. Новосибирск: НГУ, 1999.
15. Михайлов Г.А. Весовые методы Монте-Карло. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
16. Шкарупа Е.В. Сходимость и оптимизация численных дискретно-стохастических процедур: Дис. ... канд. физ.-мат. наук / НГУ. Новосибирск, 2000.
17. Войтишек А.В. Дискретно-стохастические численные методы: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук / РАН. Сиб. отд-ние, ИВМиМГ. Новосибирск, 2001.
18. Войтишек А.В. Основы метода Монте-Карло в алгоритмах и задачах. Ч. VI. Вычисление значений линейных функционалов от решения интегрального уравнения второго рода. Дискретно-стохастические методы решения интегрального уравнения второго рода. Новосибирск: НГУ, 2004.
19. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Изд. центр “Академия”, 2006.
20. Милосердов В.В. Дискретно-стохастические численные алгоритмы со сплайн-восполнениями: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 2006.
21. Войтишек А.В. Функциональные оценки метода Монте-Карло. Новосибирск: НГУ, 2007.
22. Шкарупа Е.В. Оценка погрешности и оптимизация метода полигона частот для глобального решения интегрального уравнения II рода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 4. С. 612–627.
23. Shkarupa E.V., Voytishek A.V. Convergence of discrete-stochastic numerical procedures with independent or weakly dependent estimators at grid nodes // J. Statist. Plann. and Infer. 2000. V. 85. P. 199–211.
24. Войтишек А.В., Головкин Н.Г., Шкарупа Е.В. Оценка погрешности многомерного аналога метода полигона частот // Сиб. ж. вычисл. матем. 2002. Т. 5. № 1. С. 11–24.
25. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
26. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. М.: Высш. школа, 2000.
27. Литбеттер М., Ротсен Х., Лингрен Г. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.

ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.63

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ВЕЩЕСТВА В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ ПУТЕМ РЕШЕНИЯ СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ¹⁾

© 2021 г. А. Ф. Албу¹, В. И. Зубов^{1,*}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: vladimir.zubov@mail.ru

Поступила в редакцию 30.11.2020 г.
Переработанный вариант 05.05.2021 г.
Принята к публикации 12.05.2021 г.

Рассматривается и исследуется обратная задача определения зависящего от температуры коэффициента теплопроводности вещества в параллелепипеде. Рассмотрение проводится на основе первой краевой задачи для трехмерного нестационарного уравнения теплопроводности. Обратная коэффициентная задача сводится к некоторой задаче оптимизации и решается численно с помощью градиентных методов минимизации функционала. На примере ряда нелинейных задач, коэффициенты которых зависят от температуры, показаны работоспособность и эффективность предложенного подхода. Библ. 17. Фиг. 9.

Ключевые слова: обратные коэффициентные задачи, нелинейные задачи, трехмерное уравнение теплопроводности, оптимальное управление, численные методы оптимизации, схемы переменных направлений.

DOI: 10.31857/S0044466921090040

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время наблюдается потребность в создании новых материалов. Однако некоторые характеристики новых материалов бывают неизвестными, и для их определения прибегают к решению обратных задач. Довольно часто приходится встречаться с ситуацией, когда коэффициент теплопроводности вещества зависит только от температуры и эта зависимость неизвестна. В связи с этим возникает задача определения зависимости коэффициента теплопроводности вещества от температуры по результатам экспериментального наблюдения за динамикой температурного поля в исследуемом веществе (задача относится к классу задач идентификации параметров модели).

Задача определения коэффициента теплопроводности вещества представляет повышенный интерес и рассматривается довольно давно. Подтверждением этому может служить большое количество публикаций, посвященных указанному вопросу (см., например, [1]–[8]). Большое внимание в этих работах уделяется не только теоретическому исследованию обратных коэффициентных задач, но и разработке численных методов их решения.

Ранее обратная коэффициентная задача, посвященная вопросу идентификации зависящего от температуры коэффициента теплопроводности вещества, исследовалась авторами настоящей статьи в работах, опубликованных в этом журнале (№ 10, Т. 56; № 10, Т. 58; № 12, Т. 58). Рассмотрение проводилось на основе первой краевой задачи для одномерного и двумерного нестационарного уравнения теплопроводности. В качестве исследуемых объектов там выступали стержень и прямоугольная пластина.

В настоящей работе задача восстановления коэффициента теплопроводности решается в трехмерной постановке. Именно этот случай имеет наибольший интерес для практики, так как при сборе экспериментальных данных имеют дело с трехмерными объектами. При проведении экспериментальных исследований используют, как правило, образцы материала простой формы

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (код проекта № 075-15-2020-799).

(обычно, это параллелепипед). Поэтому возникающую при этом обратную коэффициентную задачу в трехмерном случае разумно рассматривать также для объекта-параллелепипеда.

Рассмотренные ранее одномерный и двумерный варианты обратных коэффициентных задач представляют большой математический интерес и, безусловно, накопленный при их решении опыт оказался очень полезным при исследовании задачи в трехмерной постановке. Здесь, как и ранее, обратная задача сводится к вариационной задаче и решается численно с помощью градиентных методов минимизации функционала, а для вычисления градиента используется эффективная методология быстрого автоматического дифференцирования (БАД-методология, см. [9]).

Одна из сложностей, с которой приходится сталкиваться при решении задачи в трехмерной постановке, связана с решением прямой задачи. В отличие от одномерного и двумерного случаев, где можно однозначно указать эффективную разностную схему дискретизации уравнения теплопроводности, при решении задачи в трехмерной постановке необходимо проводить дополнительные исследования, касающиеся выбора разностной схемы в каждом конкретном случае.

В работе [10] поясняется, почему при решении обратной коэффициентной задачи для дискретизации уравнения теплопроводности целесообразно использовать одну из схем переменных направлений. В [10] на примере ряда нелинейных задач для трехмерного уравнения теплопроводности, коэффициенты которого зависят от температуры, проводится сравнительный анализ нескольких схем переменных направлений: локально-одномерной схемы ([11]), схемы Дугласа–Рекфорда (см. [12]) и схемы Писмена–Рекфорда (см. [13]). При сравнении методов принимались во внимание точность получаемого решения и время достижения требуемой точности на компьютере.

Основываясь на приведенных в работе [10] результатах исследований, авторы при решении практических задач рекомендуют реализовать все указанные выше схемы, чтобы на финальном этапе решения вариационной задачи проверить точность решения прямой задачи с помощью нескольких разностных схем. Схема Писмена–Рекфорда для трехмерного уравнения теплопроводности является условно устойчивой (см. [14]) и требует работы с мелким шагом по времени. Однако, как показали многочисленные расчеты и исследования (см. [10]), даже на грубых пространственных сетках при временном шаге, близком к максимально допустимому, эта схема позволяет получить высокую точность расчетов. Хочется отметить, что если реализована одна из схем переменных направлений, то на ее основе легко запрограммировать и остальные.

В настоящей работе задача идентификации параметров рассматриваемой трехмерной модели исследуется в следующей постановке: требуется найти такую зависимость коэффициента теплопроводности от температуры, при которой температурное поле, полученное в результате решения прямой задачи, мало отличается от данных, полученных экспериментально.

Сопряженные уравнения и формула для вычисления градиента целевого функционала, которые приводятся в настоящей работе, получены для случая использования локально-одномерной схемы, так как результаты проведенных численных экспериментов показали, что именно она оказалась наименее “капризной”. Для других разностных схем эти формулы можно получить аналогичным образом.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе [15] рассматриваемая обратная задача была сформулирована в общем, n -мерном случае. Здесь мы приводим краткую постановку задачи для трехмерного случая.

Пусть образец исследуемого вещества имеет форму прямого параллелепипеда длины R , ширины E и высоты H . Температура T этого параллелепипеда в начальный момент времени известна. Известно также, как изменяется во времени температура параллелепипеда на его гранях. Для математического описания процесса теплопроводности в параллелепипеде введем декартовы координаты x, y и z . Точки $s = (x, y, z)$ параллелепипеда образуют область $Q = \{(0, R) \times (0, E) \times (0, H)\}$ с границей $\Gamma = \partial Q$. Распределение температурного поля в параллелепипеде в каждый момент времени описывается решением следующей начально-краевой (смешанной) задачи:

$$C(s) \frac{\partial T(s, t)}{\partial t} = \nabla_s \cdot (K(T(s, t)) \cdot \nabla_s T(s, t)), \quad (s, t) \in \{Q \times (0, \Theta)\}, \quad (1.1)$$

$$T(s, 0) = w_0(s), \quad s \in \bar{Q}, \quad (1.2)$$

$$T(s, t) = w_T(s, t), \quad s \in \Gamma, \quad 0 \leq t \leq \Theta. \quad (1.3)$$

Здесь t — время; $T(s, t) \equiv T(x, y, z, t)$ — температура вещества в точке s с координатами (x, y, z) в момент времени t ; $C(s)$ — объемная теплоемкость материала; $K(T)$ — коэффициент теплопроводности; $w_0(s)$ — заданная температура параллелепипеда в начальный момент времени $t = 0$; $w_T(s, t)$ — заданная температура на границе области. Объемная теплоемкость $C(s)$ считается известной функцией координат. При заданном коэффициенте теплопроводности $K(T)$ можно найти распределение температуры $T(s, t)$ в любой точке области $Q \times (0, \Theta)$, решив прямую задачу (1.1)–(1.3).

Обратная коэффициентная задача сводится к следующей вариационной задаче: требуется найти такую зависимость коэффициента теплопроводности вещества $K(T)$ от температуры T , при которой температурное поле $T(s, t)$, полученное в результате решения прямой задачи (1.1)–(1.3), мало отличается от температурного поля $Y(s, t)$, полученного экспериментально. В качестве меры отклонения этих функций рассматривается величина

$$\Phi(K(T)) = \int_0^\Theta \int_Q \mu(s, t) [T(s, t) - Y(s, t)]^2 ds dt. \quad (1.4)$$

Здесь $\mu(s, t) \geq 0$ — заданная весовая функция, $Y(s, t)$ — заданное температурное поле.

Таким образом, обратная задача идентификации функции $K(T)$ сводится к следующей задаче оптимального управления: определить оптимальное управление $K(T)$ и соответствующее решение $T(s, t)$ задачи (1.1)–(1.3), при котором целевой функционал (1.4) достигает минимального значения.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРАДИЕНТА ЦЕЛЕВОГО ФУНКЦИОНАЛА

В работе [15] было получено аналитическое выражение для градиента целевого функционала в общей, n -мерной постановке сформулированной задачи оптимального управления. Однако использовать аналитическое выражение для градиента функционала при численном решении задачи практически невозможно в силу его сложности. Поэтому в предлагаемом алгоритме, как и ранее, для вычисления градиента функционала использовалась методология быстрого автоматического дифференцирования (БАД-методология).

Дискретная сопряженная задача, построенная на основе БАД-методологии, базируется на выбранной аппроксимации прямой задачи и согласованна с ней. Разностные схемы переменных направлений, которые мы рекомендуем для решения трехмерного уравнения теплопроводности, подробно описаны в [10]. В настоящей работе формула для вычисления градиента функционала получена для случая использования второго (итерационного) варианта локально-одномерной схемы при аппроксимации уравнения теплопроводности. Эти формулы могут быть использованы и в случае работы с явной локально-одномерной схемой, если полагать, что количество итераций равно единице.

Для дискретизации задачи в области $Q \times (0, \Theta)$ вводятся временная и пространственная сетки. Временная сетка задается набором узловых значений $\{t^j\}_{j=0}^J$, $t^0 = 0$, $t^J = \Theta$ с шагом $\tau = \Theta/J$. Пространственная сетка — множество точек $\{x_n, y_i, z_l\}$, где $n = \overline{0, N}$, $i = \overline{0, I}$ и $l = \overline{0, L}$; h_n^x — расстояние между опорными точками x_n и x_{n+1} , т.е. $h_n^x = x_{n+1} - x_n$, $n = \overline{0, N-1}$; аналогично: $h_i^y = y_{i+1} - y_i$, $i = \overline{0, I-1}$, $h_l^z = z_{l+1} - z_l$, $l = \overline{0, L-1}$ (подробнее см. [10]). В каждом узле (x_n, y_i, z_l, t^j) расчетной области $Q \times (0, \Theta)$ все функции задаются своими значениями в этой точке (например, $T(x_n, y_i, z_l, t^j) = T_{nil}^j$).

Границы отрезка $[a, b]$, на котором восстанавливается коэффициент теплопроводности $K(T)$, задавались как минимальное и максимальное значения функций $w_0(s)$ и $w_T(s, t)$. Отрезок $[a, b]$ разбивался точками $\tilde{T}_0 = a$, $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \dots, \tilde{T}_M = b$ на M частей (они могут быть как равными, так и неравными). Каждой из точек $\tilde{T}_m$, $m = 0, \dots, M$, ставилось в соответствие число $k_m = K(\tilde{T}_m)$. Искомая функция $K(T)$ аппроксимировалась непрерывной кусочно-линейной функцией с узлами в точках $\{(\tilde{T}_m, k_m)\}_{m=0}^M$ так, как это показано в [15]. Если в процессе решения задачи температура в точке

выходила за границы отрезка $[a, b]$, то для определения функции $K(T)$ использовалась линейная экстраполяция.

Целевой функционал (1.4) аппроксимировался функцией $F(k_0, k_1, \dots, k_M)$ конечного числа переменных следующим образом:

$$\Phi(K(T)) \approx F = \tau \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{n=1}^{N-1} \left((T_{nil}^j - Y_{nil}^j)^2 \mu_{nil}^j h_n^x h_i^y h_l^z \right). \quad (2.1)$$

Согласно БАД-методологии, каждое уравнение выбранного дискретного варианта прямой задачи (итерационный вариант локально-одномерной схемы) записывается в так называемом каноническом виде:

x — направление

$$T_{nil}^{j+1/3} = T_{nil}^j + a_{nil} \left(K(T_{n+1,il}^{j+1/3}) T_{n+1,il}^{j+1/3} + K(T_{nil}^{j+1/3}) T_{n+1,il}^{j+1/3} - K(T_{n+1,il}^{j+1/3}) T_{nil}^{j+1/3} - K(T_{nil}^{j+1/3}) T_{n+1,il}^{j+1/3} \right) + \\ + b_{nil} \left(K(T_{n-1,il}^{j+1/3}) T_{n-1,il}^{j+1/3} + K(T_{nil}^{j+1/3}) T_{n-1,il}^{j+1/3} - K(T_{n-1,il}^{j+1/3}) T_{nil}^{j+1/3} - K(T_{nil}^{j+1/3}) T_{n-1,il}^{j+1/3} \right) \equiv \Psi_{nil}^{j+1/3},$$

y — направление

$$T_{nil}^{j+2/3} = T_{nil}^{j+1/3} + c_{nil} \left(K(T_{n,i+1,l}^{j+2/3}) T_{n,i+1,l}^{j+2/3} + K(T_{nil}^{j+2/3}) T_{n,i+1,l}^{j+2/3} - K(T_{n,i+1,l}^{j+2/3}) T_{nil}^{j+2/3} - K(T_{nil}^{j+2/3}) T_{n,i+1,l}^{j+2/3} \right) + \\ + d_{nil} \left(K(T_{n,i-1,l}^{j+2/3}) T_{n,i-1,l}^{j+2/3} + K(T_{nil}^{j+2/3}) T_{n,i-1,l}^{j+2/3} - K(T_{n,i-1,l}^{j+2/3}) T_{nil}^{j+2/3} - K(T_{nil}^{j+2/3}) T_{n,i-1,l}^{j+2/3} \right) \equiv \Psi_{nil}^{j+2/3},$$

z — направление

$$T_{nil}^{j+1} = T_{nil}^{j+2/3} + e_{nil} \left(K(T_{ni,l+1}^{j+1}) T_{ni,l+1}^{j+1} + K(T_{nil}^{j+1}) T_{ni,l+1}^{j+1} - K(T_{ni,l+1}^{j+1}) T_{nil}^{j+1} - K(T_{nil}^{j+1}) T_{ni,l+1}^{j+1} \right) + \\ + f_{nil} \left(K(T_{ni,l-1}^{j+1}) T_{ni,l-1}^{j+1} + K(T_{nil}^{j+1}) T_{ni,l-1}^{j+1} - K(T_{ni,l-1}^{j+1}) T_{nil}^{j+1} - K(T_{nil}^{j+1}) T_{ni,l-1}^{j+1} \right) \equiv \Psi_{nil}^{j+1},$$

где

$$a_{nil} = \frac{\tau}{6C_{nil} h_n^x (h_n^x + h_{n-1}^x)}, \quad b_{nil} = \frac{\tau}{6C_{nil} h_{n-1}^x (h_n^x + h_{n-1}^x)}, \quad c_{nil} = \frac{\tau}{6C_{nil} h_i^y (h_i^y + h_{i-1}^y)}, \\ d_{nil} = \frac{\tau}{6C_{nil} h_{i-1}^y (h_i^y + h_{i-1}^y)}, \quad e_{nil} = \frac{\tau}{6C_{nil} h_l^z (h_l^z + h_{l-1}^z)}, \quad f_{nil} = \frac{\tau}{6C_{nil} h_{l-1}^z (h_l^z + h_{l-1}^z)}, \\ (n = \overline{1, N-1}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad l = \overline{1, L-1}, \quad j = \overline{0, J-1}).$$

БАД-методология позволяет формально записать систему сопряженных уравнений для используемой выше аппроксимации прямой задачи. Для более компактной записи этих соотношений введем следующие обозначения:

$$D_{nil}^j = \frac{dK(T)}{dT} (T_{nil}^j) = \frac{k_m - k_{m-1}}{\tilde{T}_m - \tilde{T}_{m-1}},$$

индекс m здесь определяется условием $\tilde{T}_{m-1} \leq T < \tilde{T}_m$,

$$A_{nil}^j = \frac{d(K(T_{nil}^j) T_{nil}^j)}{dT_{nil}^j} = D_{nil}^j T_{nil}^j + K(T_{nil}^j).$$

Для тех индексов (n, i, l, j) , для которых

$$(n < 0) \cup (n > N) \cup (i < 0) \cup (i > I) \cup (l < 0) \cup (l > L) \cup (j < 0) \cup (j > J),$$

будем полагать $p_{nil}^j = 0$. Наконец, если в выражениях встречается слагаемое, представляющее собой произведение сопряженной переменной p_{nil}^j на другие сеточные функции и эта $p_{nil}^j = 0$, то все слагаемое полагается равным нулю, несмотря на то, что другие сомножители могут быть в этой точке не определены.

Для того чтобы получить начальные условия для сопряженных переменных, необходимо на последнем временном слое $j = J$ для каждого $n = \overline{1, N-1}$ и для каждого $i = \overline{1, I-1}$ решить следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных p_{nil}^J :

$$p_{nil}^J = \left[e_{nil} \left(D_{nil}^J T_{ni,l+1}^J - K(T_{ni,l+1}^J) - A_{nil}^J \right) + f_{nil} \left(D_{nil}^J T_{ni,l-1}^J - K(T_{ni,l-1}^J) - A_{nil}^J \right) \right] p_{nil}^J - \\ - e_{ni,l-1} \left(D_{nil}^J T_{ni,l-1}^J - K(T_{ni,l-1}^J) - A_{nil}^J \right) p_{ni,l-1}^J - f_{ni,l+1} \left(D_{nil}^J T_{ni,l+1}^J - K(T_{ni,l+1}^J) - A_{nil}^J \right) p_{ni,l+1}^J + \frac{\partial F}{\partial T_{nil}^J}, \quad (2.2) \\ l = \overline{1, L-1}.$$

Далее сопряженная задача расщепляется на три подзадачи (по направлениям y , x и z), причем такое расщепление автоматически дает БАД-методология:

y – направление

$$p_{nil}^{j+2/3} = p_{nil}^{j+1} + \left[c_{nil} \left(D_{nil}^{j+2/3} T_{n,i+1,l}^{j+2/3} - K(T_{n,i+1,l}^{j+2/3}) - A_{nil}^{j+2/3} \right) + \right. \\ \left. + d_{nil} \left(D_{nil}^{j+2/3} T_{n,i-1,l}^{j+2/3} - K(T_{n,i-1,l}^{j+2/3}) - A_{nil}^{j+2/3} \right) \right] p_{nil}^{j+2/3} - \\ - c_{n,i-1,l} \left(D_{nil}^{j+2/3} T_{n,i-1,l}^{j+2/3} - K(T_{n,i-1,l}^{j+2/3}) - A_{nil}^{j+2/3} \right) p_{n,i-1,l}^{j+2/3} - d_{n,i+1,l} \left(D_{nil}^{j+2/3} T_{n,i+1,l}^{j+2/3} - K(T_{n,i+1,l}^{j+2/3}) - A_{nil}^{j+2/3} \right) p_{n,i+1,l}^{j+2/3}, \quad (2.3) \\ n = \overline{1, N-1}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad l = \overline{1, L-1}, \quad j = \overline{J-1, 0};$$

x – направление

$$p_{nil}^{j+1/3} = p_{nil}^{j+2/3} + \left[a_{nil} \left(D_{nil}^{j+1/3} T_{n+1,il}^{j+1/3} - K(T_{n+1,il}^{j+1/3}) - A_{nil}^{j+1/3} \right) + \right. \\ \left. + b_{nil} \left(D_{nil}^{j+1/3} T_{n-1,il}^{j+1/3} - K(T_{n-1,il}^{j+1/3}) - A_{nil}^{j+1/3} \right) \right] p_{nil}^{j+1/3} - \\ - a_{n-1,il} \left(D_{nil}^{j+1/3} T_{n-1,il}^{j+1/3} - K(T_{n-1,il}^{j+1/3}) - A_{nil}^{j+1/3} \right) p_{n-1,il}^{j+1/3} - b_{n+1,il} \left(D_{nil}^{j+1/3} T_{n+1,il}^{j+1/3} - K(T_{n+1,il}^{j+1/3}) - A_{nil}^{j+1/3} \right) p_{n+1,il}^{j+1/3}, \quad (2.4) \\ n = \overline{1, N-1}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad l = \overline{1, L-1}, \quad j = \overline{J-1, 0};$$

z – направление

$$p_{nil}^j = p_{nil}^{j+1/3} + \left[e_{nil} \left(D_{nil}^j T_{ni,l+1}^j - K(T_{ni,l+1}^j) - A_{nil}^j \right) + f_{nil} \left(D_{nil}^j T_{ni,l-1}^j - K(T_{ni,l-1}^j) - A_{nil}^j \right) \right] p_{nil}^j - \\ - e_{ni,l-1} \left(D_{nil}^j T_{ni,l-1}^j - K(T_{ni,l-1}^j) - A_{nil}^j \right) p_{ni,l-1}^j - f_{ni,l+1} \left(D_{nil}^j T_{ni,l+1}^j - K(T_{ni,l+1}^j) - A_{nil}^j \right) p_{ni,l+1}^j + \frac{\partial F}{\partial T_{nil}^j}, \quad (2.5) \\ n = \overline{1, N-1}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad l = \overline{1, L-1}, \quad j = \overline{J-1, 1}.$$

Полученные системы линейных алгебраических уравнений (2.2)–(2.5) решались с помощью метода прогонки (см. [16]).

Компоненты градиента целевой функции, в соответствии с БАД-методологией, вычисляются по формуле

$$\frac{\partial F}{\partial k_m} = \sum_{g=0}^J \sum_{r=0}^L \sum_{q=0}^I \sum_{s=0}^N \left(X_{rqs}^g \frac{\partial K(T_{rqs}^g)}{\partial k_m} \right) + \sum_{g=0}^{J-1} \sum_{r=0}^L \sum_{q=0}^I \sum_{s=0}^N \left(X_{rqs}^{g+1/3} \frac{\partial K(T_{rqs}^{g+1/3})}{\partial k_m} + X_{rqs}^{g+2/3} \frac{\partial K(T_{rqs}^{g+2/3})}{\partial k_m} \right), \quad (2.6) \\ m = \overline{0, M},$$

где

$$X_{rqs}^g = \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{\partial \Psi_{nil}^j}{\partial K(T_{rqs}^g)} p_{nli}^j + \frac{\partial \Psi_{nil}^{j-1/3}}{\partial K(T_{rqs}^g)} p_{nil}^{j-1/3} + \frac{\partial \Psi_{nil}^{j-2/3}}{\partial K(T_{rqs}^g)} p_{nil}^{j-2/3} \right) = \\ = \frac{\partial \Psi_{rq,s-1}^g}{\partial K(T_{rqs}^g)} p_{rq,s-1}^g + \frac{\partial \Psi_{rq,s}^g}{\partial K(T_{rqs}^g)} p_{rq,s}^g + \frac{\partial \Psi_{rq,s+1}^g}{\partial K(T_{rqs}^g)} p_{rq,s+1}^g +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial \psi_{rq,s-1}^{g+1/3}}{\partial K(T_{rqs}^g)} p_{rq,s-1}^{g+1/3} + \frac{\partial \psi_{rqs}^{g+1/3}}{\partial K(T_{rqs}^g)} p_{rqs}^{g+1/3} + \frac{\partial \psi_{rq,s+1}^{g+1/3}}{\partial K(T_{rqs}^g)} p_{rq,s+1}^{g+1/3} + \\
& + \frac{\partial \psi_{rq,s-1}^{g+2/3}}{\partial K(T_{rqs}^g)} p_{rq,s-1}^{g+2/3} + \frac{\partial \psi_{rqs}^{g+2/3}}{\partial K(T_{rqs}^g)} p_{rqs}^{g+2/3} + \frac{\partial \psi_{rq,s+1}^{g+2/3}}{\partial K(T_{rqs}^g)} p_{rq,s+1}^{g+2/3} = \\
& = \left(e_{rqs}(T_{rq,s+1}^g - T_{rqs}^g) + f_{rqs}(T_{rq,s-1}^g - T_{rqs}^g) \right) p_{rqs}^g + e_{rq,s-1}(T_{rqs}^g - T_{rq,s-1}^g) p_{rq,s-1}^g + \\
& \quad + f_{rq,s+1}(T_{rqs}^g - T_{rq,s+1}^g) p_{rq,s+1}^g, \\
X_{rqs}^{g+1/3} & = \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{\partial \psi_{nil}^j}{\partial K(T_{rqs}^{g+1/3})} p_{nli}^j + \frac{\partial \psi_{nil}^{j-1/3}}{\partial K(T_{rqs}^{g+1/3})} p_{nil}^{j-1/3} + \frac{\partial \psi_{nil}^{j-2/3}}{\partial K(T_{rqs}^{g+1/3})} p_{nil}^{j-2/3} \right) = \\
& = \frac{\partial \psi_{rq,s-1}^g}{\partial K(T_{rqs}^{g+1/3})} p_{rq,s-1}^g + \frac{\partial \psi_{rqs}^g}{\partial K(T_{rqs}^{g+1/3})} p_{rqs}^g + \frac{\partial \psi_{rq,s+1}^g}{\partial K(T_{rqs}^{g+1/3})} p_{rq,s+1}^g + \\
& + \frac{\partial \psi_{rq,s-1}^{g+1/3}}{\partial K(T_{rqs}^{g+1/3})} p_{rq,s-1}^{g+1/3} + \frac{\partial \psi_{rqs}^{g+1/3}}{\partial K(T_{rqs}^{g+1/3})} p_{rqs}^{g+1/3} + \frac{\partial \psi_{rq,s+1}^{g+1/3}}{\partial K(T_{rqs}^{g+1/3})} p_{rq,s+1}^{g+1/3} + \\
& + \frac{\partial \psi_{rq,s-1}^{g+2/3}}{\partial K(T_{rqs}^{g+1/3})} p_{rq,s-1}^{g+2/3} + \frac{\partial \psi_{rqs}^{g+2/3}}{\partial K(T_{rqs}^{g+1/3})} p_{rqs}^{g+2/3} + \frac{\partial \psi_{rq,s+1}^{g+2/3}}{\partial K(T_{rqs}^{g+1/3})} p_{rq,s+1}^{g+2/3} = \\
& = \left(a_{rqs}(T_{r+1,q}^{g+1/3} - T_{rqs}^{g+1/3}) + b_{rqs}(T_{r-1,q}^{g+1/3} - T_{rqs}^{g+1/3}) \right) p_{rqs}^{g+1/3} + a_{r-1,q}(T_{rqs}^{g+1/3} - T_{r-1,q}^{g+1/3}) p_{r-1,q}^{g+1/3} + \\
& \quad + b_{r+1,q}(T_{rqs}^{g+1/3} - T_{r+1,q}^{g+1/3}) p_{r+1,q}^{g+1/3}, \\
X_{rqs}^{g+2/3} & = \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{\partial \psi_{nil}^j}{\partial K(T_{rqs}^{g+2/3})} p_{nli}^j + \frac{\partial \psi_{nil}^{j-1/3}}{\partial K(T_{rqs}^{g+2/3})} p_{nil}^{j-1/3} + \frac{\partial \psi_{nil}^{j-2/3}}{\partial K(T_{rqs}^{g+2/3})} p_{nil}^{j-2/3} \right) = \\
& = \frac{\partial \psi_{rq,s-1}^g}{\partial K(T_{rqs}^{g+2/3})} p_{rq,s-1}^g + \frac{\partial \psi_{rqs}^g}{\partial K(T_{rqs}^{g+2/3})} p_{rqs}^g + \frac{\partial \psi_{rq,s+1}^g}{\partial K(T_{rqs}^{g+2/3})} p_{rq,s+1}^g + \\
& + \frac{\partial \psi_{rq,s-1}^{g+1/3}}{\partial K(T_{rqs}^{g+2/3})} p_{rq,s-1}^{g+1/3} + \frac{\partial \psi_{rqs}^{g+1/3}}{\partial K(T_{rqs}^{g+2/3})} p_{rqs}^{g+1/3} + \frac{\partial \psi_{rq,s+1}^{g+1/3}}{\partial K(T_{rqs}^{g+2/3})} p_{rq,s+1}^{g+1/3} + \\
& + \frac{\partial \psi_{rq,s-1}^{g+2/3}}{\partial K(T_{rqs}^{g+2/3})} p_{rq,s-1}^{g+2/3} + \frac{\partial \psi_{rqs}^{g+2/3}}{\partial K(T_{rqs}^{g+2/3})} p_{rqs}^{g+2/3} + \frac{\partial \psi_{rq,s+1}^{g+2/3}}{\partial K(T_{rqs}^{g+2/3})} p_{rq,s+1}^{g+2/3} = \\
& = \left(c_{rqs}(T_{r,q+1}^{g+2/3} - T_{rqs}^{g+2/3}) + d_{rqs}(T_{r,q-1}^{g+2/3} - T_{rqs}^{g+2/3}) \right) p_{rqs}^{g+2/3} + c_{r,q-1}(T_{rqs}^{g+2/3} - T_{r,q-1}^{g+2/3}) p_{r,q-1}^{g+2/3} + \\
& \quad + d_{r,q+1}(T_{rqs}^{g+2/3} - T_{r,q+1}^{g+2/3}) p_{r,q+1}^{g+2/3}.
\end{aligned}$$

Множители $\frac{\partial K(T_{rqs}^g)}{\partial k_m}$, присутствующие в формуле (2.6), вычисляются аналогично тому, как

показано в работе [17]. Отметим, что значение градиента целевой функции $F(k_0, k_1, \dots, k_M)$, вычисленное по формуле (2.6), является точным для выбранной аппроксимации задачи оптимального управления.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Анализ результатов решения большого числа обратных коэффициентных задач в одномерном и двумерном случаях показал, что эти задачи могут иметь неединственное решение. Будет решение обратной задачи единственным или нет — существенно зависит от заданного экспериментального поля $Y(s, t)$, $s = (x, y, z)$. Ответ на вопрос, в каких случаях возможно появление неединственности решения сформулированной обратной коэффициентной задачи, может дать следующее утверждение.

Утверждение. Пусть функция $Y(s, t) \in C_{s,t}^{2,1}(G) \cap C^1(\bar{G})$ является решением прямой задачи (1.1)–(1.3) при двух допустимых коэффициентах теплопроводности $K_1(T) \in C^1([a, b])$ и $K_2(T) \in C^1([a, b])$. Тогда

а) найдется функция $R(T) \in C([a, b])$ такая, что $\Delta_s Y(s, t) = R(Y(s, t)) \cdot |\nabla_s Y(s, t)|^2$,

б) при такой функции $Y(s, t)$ решений $K(T)$ обратной задачи бесконечно много.

Доказательство этого утверждения аналогично тому, которое приведено в работе [17] для двумерного случая.

Условия указанного выше утверждения выполняются, например, в том случае, когда экспериментальное поле температур $Y(s, t)$ является достаточно гладкой монотонной функцией линейной комбинации пространственных координат и времени, т.е.

$$Y(s, t) = Y(x, y, z, t) = f(\alpha x + \beta y + \gamma z + \lambda t), \quad \text{где} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0. \quad (3.1)$$

Сложности, с которыми приходится сталкиваться при решении задачи идентификации коэффициента теплопроводности в трехмерной постановке, связаны не только с выбором схемы дискретизации прямой задачи и с возможностью появления неединственности решения, но также с выбором расчетной сетки. Анализ полученных численных результатов показал, что если количество узлов пространственной сетки не меньше 20 по каждому направлению, то коэффициент теплопроводности восстанавливается с достаточно высокой точностью при условии, что грамотно выбран временной шаг (так как точность восстановления существенно зависит от выбора шага по времени).

Выбранная в настоящей работе локально-одномерная схема аппроксимации уравнения теплопроводности является устойчивой и позволяет работать с достаточно большим шагом по времени. Тем не менее для каждой используемой пространственной сетки необходимо проводить исследование, касающиеся выбора сетки по времени. Например, как показали расчеты, для пространственной сетки, у которой 25 узлов по каждому направлению (равномерная сетка), количество равных шагов по времени желательно брать не меньше 100. В случае использования более грубых сеток по времени коэффициенты теплопроводности могут восстанавливаться с большой погрешностью.

В приведенных примерах полагалось, что в целевом функционале (1.4) весовая функция $\mu(x, y, z, t) \equiv 1$, $(x, y, z) \in Q$. Минимизация целевой функции $F(k_0, k_1, \dots, k_M)$ проводилась численно с помощью градиентного метода. Отрезок $[a, b]$ разбивался на 80 интервалов, т.е. $M = 80$.

Хочется отметить, что для ускорения итерационного процесса спуска по градиенту во всех представленных здесь примерах использовался подход, предложенный в [17]. Он основан на последовательном увеличении числа M разбиений отрезка $[a, b]$. Начинать процесс желательно с $M = 1$. После получения оптимального решения его следует использовать в качестве начального приближения для варианта с $M = 2$. Получив оптимальное решение для $M = 2$, использовать его в качестве начального приближения для $M = 4$, и т.д.

Для проверки работоспособности предложенного алгоритма было решено большое количество тестовых задач. Наиболее характерные из них представлены здесь в виде нескольких серий расчетов. В качестве “экспериментального” поля температур рассматривалось как “аналитическое” поле (аналитическое решение прямой задачи, спроектированное на расчетную сетку), так и “численное” поле, т.е. температурное поле, которое получено в результате численного решения прямой задачи с заданным коэффициентом теплопроводности.

Для оценки точности получаемых численных решений обратной задачи использовались два критерия:

$$\varepsilon_1 = \max_{0 \leq m \leq M} \frac{|K_{\text{opt}}(\tilde{T}_m) - K(\tilde{T}_m)|}{K^*} \quad (3.2)$$

и

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{K^*} \sqrt{\sum_{m=0}^M \frac{(K_{\text{opt}}(\tilde{T}_m) - K(\tilde{T}_m))^2}{M + 1}}, \quad (3.3)$$

где $K(\tilde{T}_m)$ — значения аналитического коэффициента теплопроводности, вычисленные в опорных точках отрезка температур, $K_{\text{opt}}(\tilde{T}_m)$ — значения коэффициента теплопроводности, полученного в результате решения оптимизационной задачи, а K^* — некоторое характерное значение функции $K(T)$. В работе полагалось, что

$$K^* = \frac{\sum_{m=0}^M K(\tilde{T}_m)}{M+1}.$$

Проведенные численные эксперименты показали, что качество восстановления коэффициента теплопроводности сильно зависит от распределения “экспериментального” температурного поля. Бывают случаи, когда на некоторых участках отрезка $[a, b]$ слишком мало данных, необходимых для идентификации коэффициента теплопроводности. Поэтому в каждом конкретном случае необходимо проанализировать распределение экспериментальных данных по интервалам интересующего нас отрезка температур.

3.1. Первая серия расчетов

В первой серии расчетов рассматривалась задача нахождения коэффициента теплопроводности вещества при следующих входных данных: в качестве начальной функции $w_0(x, y, z)$ и граничной функции $w_1(x, y, z, t)$ выбирались следы функции

$$\Lambda(x, y, z, t) = x + y + z + 3t + 0.5 \quad (3.4)$$

на параболической границе области $Q \times (0, \Theta) = (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1)$. В этом случае функция (3.4) является решением смешанной задачи (1.1)–(1.3) при $C(s) = 1$ и $K(T) = T$. Температура на параболической границе рассматриваемой области изменяется от $a = 0.5$ до $b = 6.5$.

Этот пример — простейший из всех рассмотренных. Целью первой серии расчетов являлась не только проверка работоспособности предложенного алгоритма, но и проверка корректности созданных машинных кодов, реализующих этот алгоритм. Если в качестве “экспериментального” поля температур использовалось “аналитическое” поле, то

$$Y_{nil}^j = \Lambda(x_n, y_i, z_l, t^j) = x_n + y_i + z_l + 3t^j + 0.5, \\ n = \overline{1, N-1}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad l = \overline{1, L-1}, \quad j = \overline{1, J}.$$

В качестве “численного экспериментального” поля выбиралось численное решение задачи (1.1)–(1.3) с указанными в этом примере входными данными и с $K(T) = T$.

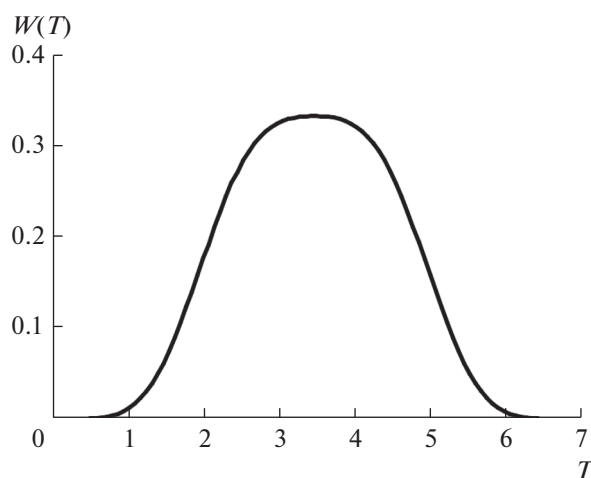
Для анализа распределения экспериментальных данных по интервалам интересующего нас отрезка температур введем функцию $W_*(T)$ — относительную меру той подобласти области $Q \times (0, \Theta)$, в которой функция $\Lambda(x, y, z, t)$ удовлетворяет условию $\Lambda(x, y, z, t) < T$, а через $W(T)$ обозначим плотность распределения (производную) функции $W_*(T)$ по переменной T . На фиг. 1 представлено распределение функции $W(T)$ вдоль отрезка $[0.5, 6.5]$.

Поведение этого распределения указывает на то, что могут возникнуть трудности с восстановлением коэффициента теплопроводности на концах отрезка $[0.5, 6.5]$. Преодолевать эти трудности помогает подход (см. [17]), основанный на последовательном увеличении числа M разбиений рассматриваемого отрезка.

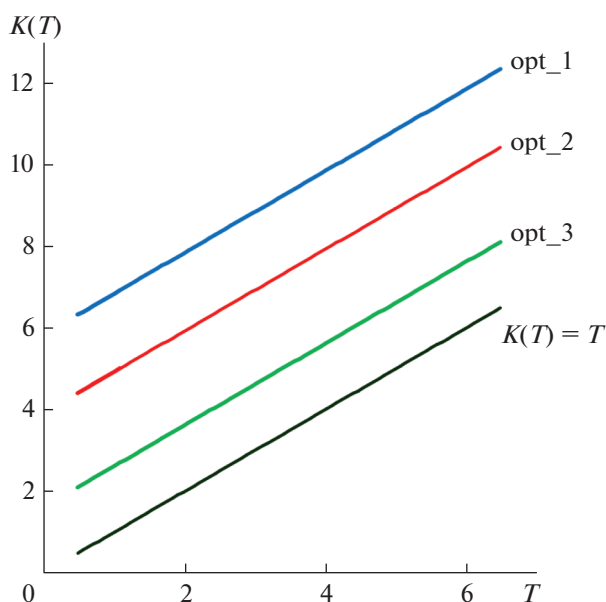
Как нетрудно заметить, функция (3.4) имеет вид (3.1). Следовательно, обратная коэффициентная задача в этом случае может иметь неединственное решение, и все ее решения будут отличаться на константу, т.е. $K_{\text{opt}}(T) = T + \text{Const}$, где $K_{\text{opt}}(T)$ — решение оптимизационной задачи.

Рассматриваемая задача идентификации коэффициента теплопроводности решалась численно несколько раз, при этом в качестве начального приближения $K_{\text{ini}}(T)$ выбиралась новая функция. Также использовалось несколько расчетных сеток.

На фиг. 2 линия, помеченная как “ $K(T) = T$ ”, представляет ожидаемое аналитическое решение поставленной задачи. Линии, отмеченные как “opt_1”, “opt_2” и “opt_3”, соответствуют разным решениям задачи оптимального управления. Они получены от начальных приближений $K_{\text{ini}}(T) = 9.0$, $K_{\text{ini}}(T) = 7.0$ и $K_{\text{ini}}(T) = 4.5$ соответственно. Приведенные результаты подтвержда-



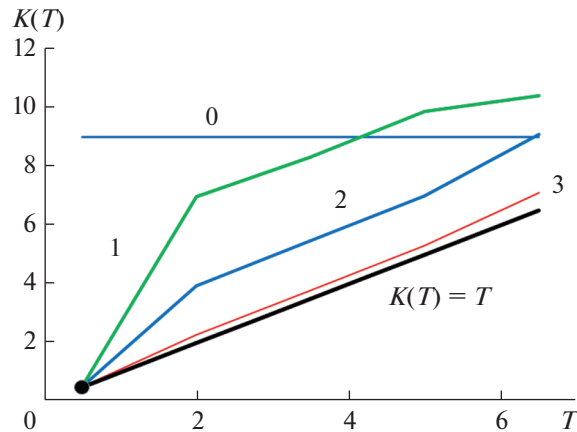
Фиг. 1



Фиг. 2

ют правильность вывода о том, что решение задачи идентификации коэффициента теплопроводности в данном случае является неединственным.

Для выделения единственного решения сформулированной задачи оптимального управления предлагается дополнительно задавать точку T_* , в которой искомым коэффициент теплопроводности известен, т.е. $K_* = K(T_*)$. Многочисленные расчеты показали, что если на каждом шаге процесса минимизации целевого функционала приближенная функция $K(T)$ проходит через заданную точку (T_*, K_*) , то решение обратной задачи будет единственным. На фиг. 3 проиллюстрировано, как в процессе минимизации функционала приближенные решения обратной задачи сходятся к точному решению $K(T) = T$. Здесь линия, отмеченная цифрой 0, соответствует начальному приближению $K_{\text{ini}}(T) = 9.0$ (оно не проходит через заданную точку). Далее приближения к решению задачи идентификации представлены через несколько итераций и отмечены возрастающими цифрами. Точка, помеченная кружком и имеющая координаты (T_*, T_*) , принадлежит всем приближенным решениям.



Фиг. 3

Коэффициент теплопроводности идентифицировался с машинной точностью как в случае использования “аналитического” поля, так и в случае использования “численного” поля в функционале. Например, когда использовалось “аналитическое” поле и задача решалась на равномерной пространственной сетке с параметрами $N = 25$, $I = 25$, $L = 25$ (количество интервалов вдоль оси x , y и z соответственно) при $J = 100$ (количество интервалов вдоль оси t), значение целевого функционала изменилось от 8.6332×10^{-5} на начальном приближении ($K_{\text{ini}}(T) = 9.0$) к коэффициенту теплопроводности до 5.9142×10^{-29} на финальном (оптимальном) приближении. Максимум модуля градиента целевого функционала изменился при этом от 4.0427×10^{-6} до 2.4148×10^{-18} . Максимальное относительное отклонение полученного коэффициента теплопроводности от его аналитического значения $K(T) = T$ не превосходит 5.0981×10^{-13} .

3.2. Вторая серия расчетов

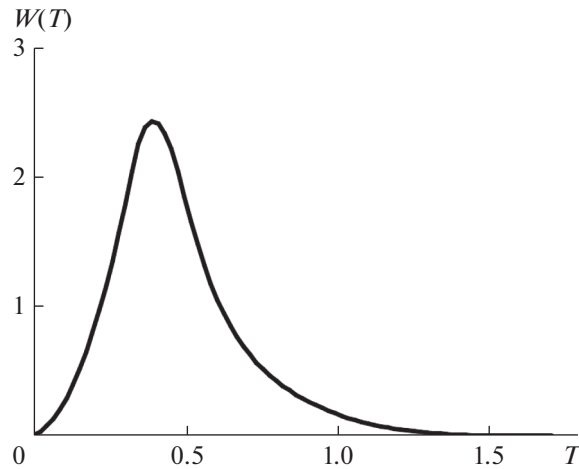
Во второй серии расчетов рассматривалась задача нахождения коэффициента теплопроводности при следующих входных данных: в качестве начальной функции $w_0(x, y, z)$ и граничной функции $w_T(x, y, z, t)$ выбирались следы функции

$$\Lambda(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{9 - 8t}} \quad (3.5)$$

на параболической границе области $Q \times (0, \Theta) = (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1)$. Функция (3.5) является в этом случае решением смешанной задачи (1.1)–(1.3) при $C(s) = 1$ и $K(T) = T^2$. Температура на параболической границе рассматриваемой области изменяется от $a = 0.0$ до $b = 1.732$.

Распределение экспериментальных данных вдоль отрезка температур $[0.0, 1.732]$ представлено на фиг. 4 в виде зависимости функции $W(T)$ от температуры. Анализ этого распределения показывает, что правому концу отрезка $[0.0, 1.732]$ соответствует слишком мало “экспериментальных” данных. Поэтому можно предположить, что там возникнут трудности с восстановлением коэффициента теплопроводности. Проведенные расчеты подтвердили это предположение: при равномерном разбиении отрезка температур на $M = 80$ интервалов последние две компоненты вектора управления не изменяются (там компоненты градиента равны нулю с машинной точностью).

Вариационная задача, к которой сводится задача идентификации коэффициента теплопроводности, для всех примеров решалась на нескольких расчетных сетках. Для каждой сетки расчеты были выполнены с использованием разных начальных приближений $K_{\text{ini}}(T)$.



Фиг. 4

Все проведенные расчеты второй серии можно разделить на две группы. В расчетах первой группы в качестве “экспериментального” поля температур использовалось “аналитическое” поле:

$$Y_{nil}^j = \Lambda(x_n, y_i, z_l, t^j) = \sqrt{\frac{x_n^2 + y_i^2 + z_l^2}{9 - 8t^j}}, \quad n = \overline{1, N-1}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad l = \overline{1, L-1}, \quad j = \overline{1, J}.$$

Расчеты этой группы выявили зависимость численного решения обратной задачи от точности решения прямой задачи. Все представленные ниже результаты расчетов первой группы получены при использовании равномерной пространственной сетки с параметрами $N = I = L = 25$. Количество J интервалов разбиения отрезка $[0, \Theta]$ по времени менялось.

1. Использовалась равномерная сетка по времени с количеством интервалов $J = 50$.

На фиг. 5а приведены начальное управление (Ini), функция $K(T) = T^2$ и оптимальные управления, полученные при $M = 1$, $M = 2$ и $M = 4$. Видно, что опорные точки кусочно-линейного оптимального управления, полученного при $M = 4$, почти лежат на линии $K(T) = T^2$.

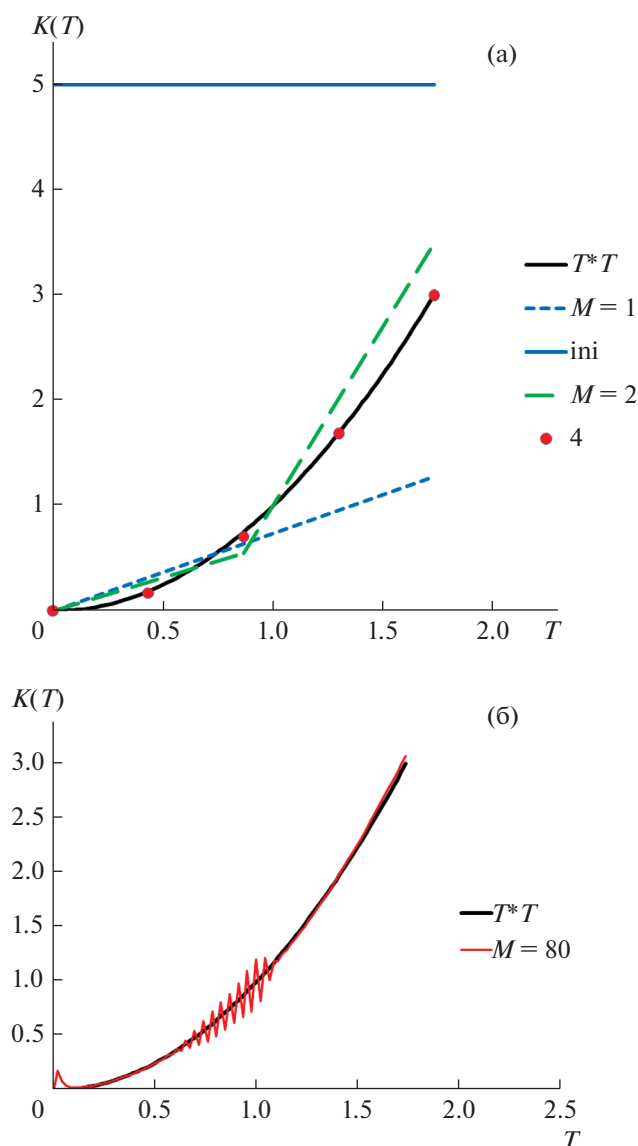
Что касается оптимального управления, полученного при $M = 8$, то оно практически совпадает с функцией $K(T) = T^2$ ($\varepsilon_1 = 6.7845 \times 10^{-2}$ и $\varepsilon_2 = 3.8748 \times 10^{-2}$).

Однако дальнейшее разбиение отрезка температур на более мелкие интервалы не приводит к желаемым результатам на выбранной пространственно-временной сетке. На фиг. 5б приведены функция $K(T) = T^2$ и оптимальное управление, полученные для $M = 80$. Видно, что в полученном решении присутствуют осцилляции. По-видимому, это связано с тем, что на используемой расчетной сетке решение прямой задачи определяется недостаточно точно. Использование небольшого количества разбиений (например, $M = 4$ или $M = 8$) отрезка температур в этом случае действует как сглаживающий фактор при решении задачи.

2. Использовалась равномерная сетка по времени с количеством интервалов $J = 100$.

Здесь в качестве начального приближения было выбрано управление $K_{\text{ini}}(T) \equiv 5.0$. В результате решения обратной задачи при $M = 80$ было получено гладкое решение, график которого практически совпадает с графиком функции $K(T) = T$. Небольшое отклонение от аналитического решения заметно лишь на правом конце, там, где, как показывает фиг. 4, намного меньше “экспериментальных” данных, чем на остальных подинтервалах температур.

В процессе решения оптимизационной задачи целевой функционал изменился от 7.8204×10^{-4} до 1.4955×10^{-7} , максимум модуля градиента уменьшился от 1.4016×10^{-5} до 8.2485×10^{-10} . Вычисленные по формулам (3.2) и (3.3) отклонения полученного коэффициента теплопроводности $K_{\text{opt}}(T)$ от его аналитического значения $K(T) = T^2$ составляют $\varepsilon_1 = 7.1707 \times 10^{-2}$ и $\varepsilon_2 = 2.0082 \times 10^{-2}$ соответственно.



Фиг. 5

3. Использовалась равномерная сетка по времени с количеством интервалов $J = 1000$.

Уменьшение временного шага в десять раз привело к тому, что точность идентификации коэффициента теплопроводности для разбиения отрезка температур на $M = 80$ частей улучшилась почти на два порядка по сравнению с предыдущим случаем. Целевой функционал упал до 1.9220×10^{-9} , максимум модуля градиента уменьшился до 1.6834×10^{-10} . Вычисленные по формулам (3.2) и (3.3) отклонения полученного коэффициента теплопроводности $K_{opt}(T)$ от его аналитического значения $K(T) = T^2$ составляют $\epsilon_1 = 1.6252 \times 10^{-3}$ и $\epsilon_2 = 8.4366 \times 10^{-4}$ соответственно. Графики функции $K_{opt}(T)$ и $K(T) = T^2$ полностью совпадают.

Следует также отметить, что для рассматриваемого примера мы не наблюдали неединственности решения обратной задачи. Расчеты, выполненные при разных начальных приближениях $K_{ini}(T)$, всегда приводили к одному и тому же решению.

В расчетах второй группы в качестве “экспериментального” температурного поля использовалось поле, полученное в результате численного решения задачи (1.1)–(1.3) с известным коэффициентом теплопроводности $K(T) = T^2$.

Для всех проведенных расчетов в данном случае коэффициент теплопроводности идентифицировался с высокой точностью. Даже при использовании равномерной пространственной сетки с параметрами $N = I = L = 25$ и количеством интервалов по времени $J = 25$ при $M = 80$ коэффициент теплопроводности восстанавливался без осцилляций и график полученной функции полностью накладывался на график функции $K(T) = T^2$ (см. п. 1 второй серии расчетов). Если же решать задачу при $N = I = L = 25$ и $J = 100$, то получаемые результаты превосходят результаты, описанные в п. 2 второй серии расчетов и полученные при $J = 1000$. Действительно, целевой функционал упал до 1.0894×10^{-16} , максимум модуля градиента уменьшился до 7.7676×10^{-13} , а для отклонений решения от теоретического получены оценки $\varepsilon_1 = 9.9378 \times 10^{-5}$ и $\varepsilon_2 = 2.9106 \times 10^{-5}$.

3.3. Третья серия расчетов

В третьей серии расчетов рассматривалась задача нахождения коэффициента теплопроводности при следующих входных данных: в качестве начальной функции $w_0(x, y, z)$ и граничной функции $w_\Gamma(x, y, z, t)$ выбирались следы функции

$$\Lambda(x, y, z, t) = \frac{3}{1.8(5 - x - y - z - 1.8t)} \quad (3.6)$$

на параболической границе области $Q \times (0, \Theta) = (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1)$. Функция (3.6) является решением смешанной задачи (1.1)–(1.3) при $C(s) = 1$ и $K(T) = \frac{1}{T}$. Температура на параболической границе рассматриваемой области изменяется от $a = 0.33$ до $b = 8.33$.

На фиг. 6а представлено распределение экспериментальных данных по отрезку температур $[0.33, 8.33]$ (функция $W(T)$), а на фиг. 6б – фрагмент фигуры 6а, который крупным планом показывает поведение функции $W(T)$ на правом конце отрезка. Анализируя представленные на этих фигурах графики, нетрудно увидеть, что на правом конце отрезка $[0.33, 8.33]$ практически нет “экспериментальных” данных. Как показали проведенные расчеты этой серии, коэффициент теплопроводности на подотрезке $[6.0, 8.33]$ не восстанавливается. При разбиении отрезка температур на $M = 80$ интервалов последние 23 компоненты градиента функционала всегда оказываются нулевыми (с машинной точностью). На этом участке коэффициент теплопроводности сохраняет определенный след выбранного начального приближения.

Кроме того, в этой серии расчетов мы опять сталкиваемся с неединственностью решения обратной задачи. Неединственность решения обусловлена экспериментальным полем

$$\Lambda(x, y, z, t) = \frac{3}{1.8(5 - x - y - z - 1.8t)},$$

которое является функцией линейной комбинации пространственных координат и времени, т.е. имеет вид (3.1). Решения обратной коэффициентной задачи содержатся в семействе функций

$$K_{\text{opt}}(T) = \frac{1}{T} + \frac{\text{Const}}{T^2}.$$

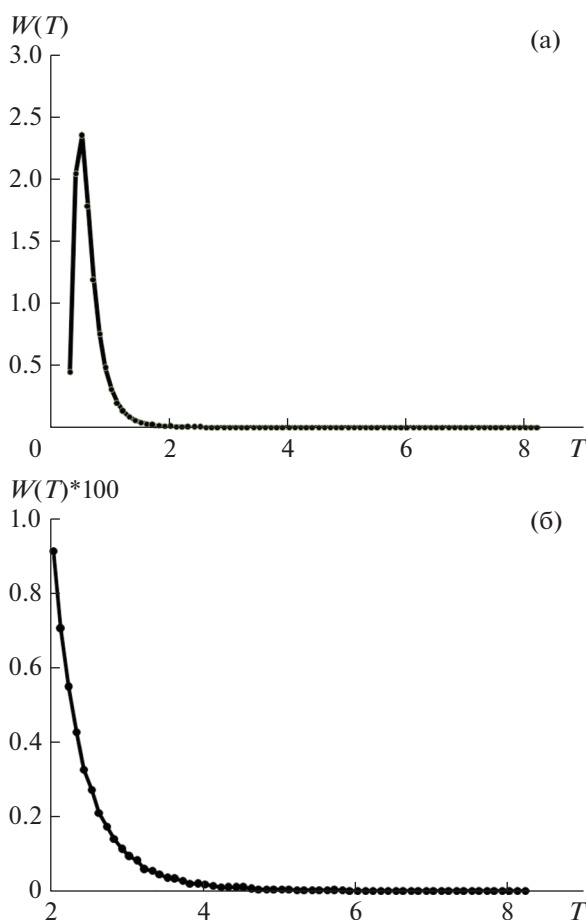
Для выделения единственного решения из этого семейства необходимо дополнительно задавать точку T_* , в которой искомый коэффициент теплопроводности известен.

В расчетах первой группы этой серии в качестве “экспериментального” поля температур рассматривалось “аналитическое” поле:

$$Y_{nil}^j = T(x_n, y_i, z_l, t^j) = \frac{3}{1.8(5 - x_n - y_i - z_l - 1.8t^j)},$$

$$(n = \overline{1, N-1}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad l = \overline{1, L-1}, \quad j = \overline{1, J}).$$

Задача оптимизации, к которой сводится рассматриваемая обратная коэффициентная задача, решалась при разных начальных приближениях $K_{\text{ini}}(T)$.



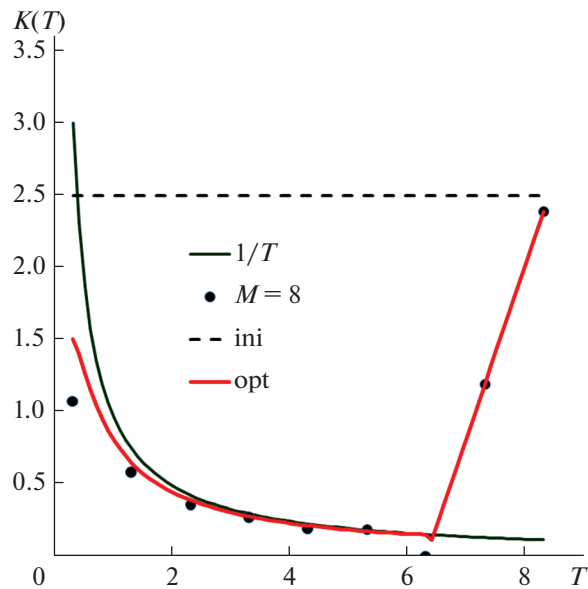
Фиг. 6

Первый расчет этой группы проводился без выделения и удержания какой-нибудь точки $(T_*, K(T_*))$. Использовалась равномерная пространственная сетка с параметрами $N = I = L = 25$ и количеством интервалов по времени $J = 100$. Отрезок $[0.33, 8.33]$ разбивался на $M = 1, 2, 4, \dots, 64$, и $M = 80$ подотрезков и для каждого разбиения решалась обратная задача. При росте числа M наблюдалась сходимость численных решений обратной задачи к некоторой предельной функции, причем численные решения, полученные при $M = 32$ и $M = 80$ (оптимальное управление), практически не отличаются.

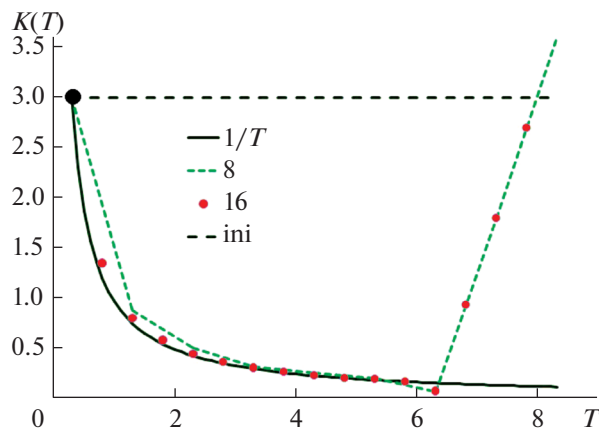
В качестве иллюстрации сказанного на фиг. 7 приведены функция $K(T) = \frac{1}{T}$, начальное управление — функция $K_{\text{ini}}(T) \equiv 2.5$, численные решения обратной задачи, полученное при $M = 8$ и $M = 80$. Видно, что на отрезке $[6.0, 8.33]$ сохранился след выбранного начального приближения (здесь компоненты градиента практически нулевые). Наблюдаемое отличие оптимального управления от функции $K(T) = \frac{1}{T}$ в окрестности левого конца отрезка $[0.33, 8.33]$ говорит о том, что получено некоторое решение обратной задачи из семейства

$$K_{\text{opt}}(T) = \frac{1}{T} + \frac{\text{Const}}{T^2} \quad \text{с} \quad \text{Const} \neq 0.$$

Для получения ожидаемого аналитического решения $K(T) = \frac{1}{T}$ поставленной обратной задачи дополнительно зададим точку T_* , в которой искомый коэффициент теплопроводности изве-



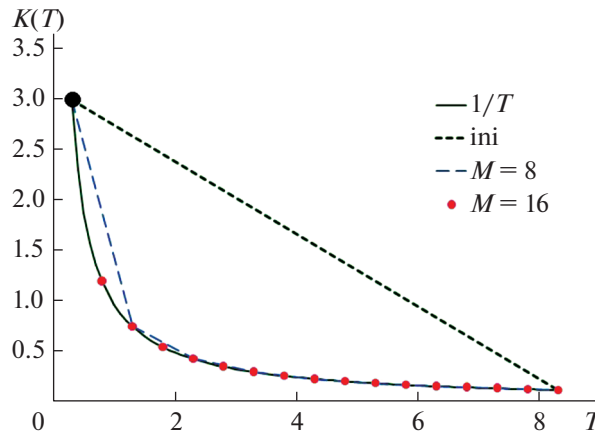
Фиг. 7



Фиг. 8

стен, т.е. $K_* = K(T_*)$, и будем держать ее на каждом шаге процесса минимизации целевого функционала. В качестве такой точки была выбрана точка $(0.33, 1/0.33)$.

На фиг. 8 приведены начальное управление (ini), функция $K(T) = \frac{1}{T}$ и оптимальные управления, полученные при $M = 8$ и $M = 16$. В этом расчете, как и в предыдущем, сохранился след выбранного начального приближения. Оптимальное управление $K_{\text{opt}}(T)$, полученное при разбиении отрезка температур на $M = 80$ интервалов, на фигуре не представлено, так как полностью совпадает с графиком функции $K(T) = \frac{1}{T}$ в точках, не принадлежащих указанному следу. Точка, помеченная кружком и имеющая координаты $\left(T_*, \frac{1}{T_*}\right)$, принадлежит всем приближенным решениям. Следует также отметить, что коэффициент теплопроводности, полученный при $M = 16$, достаточно хорошо аппроксимирует теоретический коэффициент $K(T) = \frac{1}{T}$.



Фиг. 9

Если же в качестве начального приближения $K_{\text{ini}}(T)$ выбрать функцию, которая кроме левого конца отрезка температур проходит и через правый конец $T = 8.33$, то коэффициент теплопроводности $K(T) = \frac{1}{T}$ будет восстанавливаться на всем отрезке $[0.33, 8.33]$. На фиг. 9 приведены начальное управление (ini), функция $K(T) = \frac{1}{T}$ и оптимальные управления, полученные при $M = 8$ и $M = 16$. Оптимальное управление $K_{\text{opt}}(T)$, полученное при разбиении отрезка температур на $M = 80$ интервалов, полностью совпадает с графиком функции $K(T) = \frac{1}{T}$. Точка, помеченная кружком и имеющая координаты $\left(T_*, \frac{1}{T_*}\right)$, принадлежит всем приближенным решениям.

Что касается решения $K_{\text{opt}}(T)$, то здесь целевой функционал изменился от 7.7560×10^{-5} до 8.9622×10^{-10} , максимум модуля градиента уменьшился от 8.6070×10^{-5} до 3.1018×10^{-12} . Отклонения полученного коэффициента теплопроводности $K_{\text{opt}}(T)$ от его аналитического значения $K(T) = \frac{1}{T}$ составляют $\varepsilon_1 = 9.3191 \times 10^{-3}$ и $\varepsilon_2 = 4.1455 \times 10^{-3}$ соответственно.

В расчетах второй группы третьей серии в качестве “экспериментального” температурного поля рассматривалось численное решение задачи (1.1)–(1.3) с известным коэффициентом теплопроводности $K(T) = \frac{1}{T}$. Как и в предыдущем примере, для выделения единственного решения сформулированной задачи оптимального управления задавалась точка $\left(T_*, \frac{1}{T_*}\right)$. Коэффициент теплопроводности идентифицировался в этом случае с высокой точностью. Так, целевой функционал на оптимальном решении упал до 2.2822×10^{-17} , максимум модуля градиента уменьшился до 7.3707×10^{-13} . Отклонения полученного коэффициента теплопроводности $K_{\text{opt}}(T)$ от его аналитического значения $K(T) = \frac{1}{T}$ составляют $\varepsilon_1 = 1.2985 \times 10^{-3}$ и $\varepsilon_2 = 2.1873 \times 10^{-4}$ соответственно.

Как показали многочисленные проведенные расчеты, предложенный алгоритм продемонстрировал свою устойчивость: небольшие отклонения в экспериментальных данных ($\sim 10\%$) приводят к погрешностям в решении того же порядка ($\sim 2\text{--}5\%$). При больших отклонениях в экспериментальных данных для получения устойчивого решения необходимо вводить регуляризатор.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные исследования показали, что трехмерная задача идентификации коэффициента теплопроводности вещества существенно сложнее подобных задач в одномерном и двумерном случаях. Во-первых, решение трехмерных обратных задач требует огромных затрат ресурсов компьютера. Это приводит к необходимости проведения предварительных исследований, связанных с выбором эффективных разностных схем, аппроксимирующих рассматриваемую прямую задачу. Во-вторых, в трехмерном случае большое влияние оказывают те значения температуры, которые при решении прямой задачи достигаются на множестве малой меры. Коэффициент теплопроводности для таких значений температуры не идентифицируется регулярным способом. Поэтому для его определения в таких точках требуется проведение дополнительных исследований или введение дополнительных предположений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коздоба Л.А., Круковский П.Г. Методы решения обратных задач теплопереноса. Киев: Наук. Думка, 1982.
2. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностр., 1988.
3. Вабищевич П.Н., Денисенко А.Ю. Численные методы решения коэффициентных обратных задач // Методы матем. моделирования и вычисл. диагностики. М.: Изд-во МГУ, 1990. С. 35–45.
4. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Разностные методы решения обратных задач математической физики // Фундаментальные основы матем. моделирования. М.: Наука, 1997. С. 5–97.
5. Марчук Г.И. Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. М.: Наука, 1992.
6. Balazs Czel, Gyula Grof. Inverse identification of temperature-dependent thermal conductivity via genetic algorithm with cost function-based rearrangement of genes// Internat. Journal of Heat and Mass Transfer. 2012. V. 55. № 15. P. 4254–4263.
7. Miao Cui, Kai Yang, Xiao-liang Xu, Sheng-dong Wang, Xiao-wei Gao. A modified Levenberg-Marquardt algorithm for simultaneous estimation of multi-parameters of boundary heat flux by solving transient nonlinear inverse heat conduction problems// Internat. Journal of Heat and Mass Transfer. 2016. V. 97. P. 908–916.
8. Matsevityi Yu.M., Alekhina S.V., Borukhov V.T., Zayats G.M., Kostikova A.O. Identification of the thermal conductivity coefficient for quasi-stationary two-dimensional heat conduction equations// J. of Engineering Physics and Thermophysics. 2017. V. 90. № 6. P. 1295–1301.
9. Евтушенко Ю.Г. Оптимизация и быстрое автоматическое дифференцирование. М.: ВЦ им. А.А. Дородницына РАН, 2013. 144 с.
10. Албу А.Ф., Евтушенко Ю.Г., Зубов В.И. О выборе разностных схем при решении обратных коэффициентных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 10. С. 1643–1655.
11. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003.
12. Douglas J., Rachford H.H. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables // Trans. Amer. Math. Soc. 1956. V. 82. P. 421–439.
13. Peaceman D.W., Rachford H.H. The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations // J. of the Society for Industrial and Appl. Math. 1955. V. 3. № 1. P. 28–41.
14. Gao Ch., Wang Y. A general formulation of Peaceman and Rachford ADI method for the N-dimensional heat diffusion equation // Int. Comm. Heat Mass Transfer 1996. V. 23. № 6. P. 845–854.
15. Албу А.В., Зубов В.И. Опыт использования методологии Быстрого Автоматического Дифференцирования для решения обратных коэффициентных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 1. С. 18–28.
16. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
17. Албу А.Ф., Зубов В.И. О восстановлении коэффициента теплопроводности вещества по температурному полю // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 10. С. 1642–1657.

**УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

УДК 519.63

**OPTICAL SOLITONS FOR CHEN-LEE-LIU EQUATION
WITH TWO SPECTRAL COLLOCATION APPROACHES¹⁾**

© 2021 г. М. А. Abdelkawy^{1,2}, S. S. Ezz-Eldien^{3,4}, Anjan Biswas^{5,6,7,8,*},
A. Kamis Alzahrani⁶, M. R. Belic⁹

¹ Department of Mathematics and Statistics, College of Science, Imam Mohammad Ibn Saud Islamic University, Riyadh, Saudi Arabia

² Department of Mathematics, Faculty of Science, Beni-Suef University, Beni-Suef, Egypt

³ Nanjing Normal Univ, Sch Math Sci, Jiangsu Key Lab NSLSCS, Nanjing 210023, Jiangsu, Peoples R China

⁴ New Valley Univ, Dept Math, Fac Sci, Kharga 72511, Egypt

⁵ Department of Physics, Chemistry and Mathematics, Alabama A&M University, Normal, AL 35762-4900, USA

⁶ Mathematical Modeling and Applied Computation (MMAC) Research Group, Department of Mathematics, King Abdulaziz University, Jeddah-21589, Saudi Arabia

⁷ Department of Applied Mathematics, National Research Nuclear University, 31 Kashirskoe Hwy, Moscow-115409, Russian Federation

⁸ Department of Mathematics and Applied Mathematics, Sefako Makgatho Health Sciences University, Medunsa-0204, Pretoria, South Africa

⁹ Science Program, Texas A&M University at Qatar, P.O. Box 23874 Doha, Qatar

*e-mail: biswas.anjan@gmail.com

Поступила в редакцию 12.05.2020 г.

Переработанный вариант 12.05.2020 г.

Принята к публикации 12.05.2021 г.

Оптические солитоны для уравнения Чен-Ли-Лю с двумя спектральными подходами коллокации. В работе продолжено исследование оптических солитонов, описываемых нелинейным уравнением Шрёдингера, также известным как модель Чена-Ли-Лю. Модель изучена с помощью метода коллокаций Якоби по пространственной и временной переменным. Численные результаты иллюстрируют, что предложенный метод является весьма эффективным и надежным для рассматриваемой модели. При этом спектр задачи описывается с очень высокой точностью.

Ключевые слова: уравнение Чен-Ли-Лю, сдвинутая квадратура Якоби-Гаусса-Лобатто.

DOI: 10.31857/S0044466921090027

¹⁾ Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 519.63

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ АНАЛИЗЕ ЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ С ПОДАТЛИВОЙ СТЕНКОЙ¹⁾

© 2021 г. К. В. Демьянко

119333 Москва, ул. Губкина, 8, Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН, Россия

e-mail: k.demyanko@inm.ras.ru

Поступила в редакцию 29.10.2020 г.

Переработанный вариант 25.01.2021 г.

Принята к публикации 09.04.2021 г.

Численно исследована линейная устойчивость течения Пуазейля в трубе круглого сечения с податливой стенкой с использованием двух различных моделей стенки на основе теории тонких оболочек. В рамках первой модели малые колебания стенки описываются уравнениями Лява общего вида, а в рамках второй — упрощенными уравнениями Лява, полученными с помощью известного приближения Доннела—Муштари—Власова. В частности, показано, что использование упрощенных уравнений Лява вместо общих качественно не меняет зависимость характеристик устойчивости основного течения от жесткости и демпфирования стенки, однако при некоторых значениях параметров задачи может приводить к появлению слабо нарастающих возмущений, которые не наблюдаются при использовании уравнений Лява общего вида и существенно подавляются при увеличении жесткости или демпфирования стенки. Библ. 36. Фиг. 14. Табл. 2.

Ключевые слова: линейная гидродинамическая устойчивость, критическое число Рейнольдса, течение Пуазейля в трубе, податливые покрытия, теория тонких оболочек, уравнения Лява, приближение Доннела—Муштари—Власова.

DOI: 10.31857/S0044466921090088

1. ВВЕДЕНИЕ

Линейная устойчивость течений над податливыми поверхностями исследуется с середины XX века, когда в экспериментальной работе [1] впервые была продемонстрирована возможность задержки ламинарно-турбулентного перехода за счет нанесения на твердую обтекаемую поверхность специально подобранного податливого покрытия. Позже было установлено теоретически (см. [2], [3]), что податливость обтекаемой поверхности приводит к новым конкурирующим между собой видам неустойчивости, по-разному зависящим от вязкоупругих характеристик поверхности. Поэтому актуальны разработка критериев возникновения таких неустойчивостей и создание на основе этих критериев новых податливых покрытий, которые можно эффективно использовать для пассивного управления ламинарно-турбулентным переходом.

С этой целью наиболее подробно изучено влияние податливости обтекаемой поверхности на устойчивость различных погранслоевых течений (см. обзор [4]), которые актуальны для приложений, связанных, например, с движением различных тел в жидкости. Помимо этого, исследовалась устойчивость течений в трубах круглого сечения с податливыми стенками (см. [5]). Такие течения актуальны для приложений, связанных, например, с производством медицинского оборудования, где интерес может представлять, как стабилизация потока для сокращения потерь на трение, так и его турбулизация для увеличения перемешивания и теплообмена. В ряде работ рассматривались течения в трубах, характерные для физиологических потоков в дыхательных путях или кровеносных сосудах, и делались общие выводы об их устойчивости (см. [6]–[9]). Также исследовалась устойчивость течений в каналах с податливыми стенками (см., например, [10]), в том числе, немодовая (см. [11]).

¹⁾Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение с Минобрнауки России № 075-15-2019-1624).

Для описания малых колебаний податливых стенок используются различные модели. Их разделяют на так называемые поверхностные и объемные (см. [4]). В поверхностных моделях, в частности, предполагается, что толщина стенки существенно меньше ее размеров в других направлениях, что позволяет сократить пространственную размерность модели. В рамках объемных моделей ограничений на толщину стенки не накладывается, и ее колебания описываются на основе трехмерных уравнений Навье (см. [12]). Объемные модели более востребованы в конкретных приложениях, однако поверхностные — проще и существенно экономичнее с точки зрения вычислительных затрат и воспроизводят основные динамические характеристики податливых поверхностей: инерцию, упругость и демпфирование. Поэтому их широко применяют во многих фундаментально-научных исследованиях (см. [4]).

Популярной поверхностной моделью является модель (см. [13]), в которой податливая стенка рассматривается, как тонкая эластичная пластина, закрепленная к твердой поверхности с помощью пружин и отклоняющаяся по нормали к поверхности. Более реалистичной альтернативой данной модели являются поверхностные модели на основе двумерной теории тонких оболочек (см. [14], [15]), допускающие смещения стенки не только в нормальном, но и в касательных направлениях. Среди них есть модели, в основе которых лежат различные упрощающие гипотезы о характере нагрузок, действующих на стенку (оболочку). Эти упрощенные модели успешно применяются во многих приложениях (см. [14], [15]), однако автору не известны работы, в которых на примере задач гидродинамической устойчивости выполнялось бы подробное сравнение различных вариантов моделей на основе теории оболочек и обсуждался бы эффект допущенных упрощений на характеристики устойчивости течения. Такое сравнение, в частности, позволило бы глубже изучить механизмы, определяющие возникновение различных неустойчивостей в потоке над податливой поверхностью.

В настоящей работе предложена новая численная модель для исследования линейной устойчивости течения вязкой несжимаемой жидкости в трубе круглого сечения с податливой стенкой. Стенка трубы рассматривается как тонкая, однородная и изотропная оболочка, которая может быть окружена основанием из однородного материала. Колебания оболочки описываются уравнениями Лява (см. [14], [15]), которые определяют ее смещения под действием сил давления любой природы. Основание рассматривается как равномерно распределенный набор пружин и демпферов (см. [15]). Такая модель основания является значительным упрощением, однако не накладывает ограничений на его толщину и позволяет рассматривать достаточно толстые двухслойные стенки, хотя и неоднородные. В уравнениях Лява основание учитывается как дополнительная нагрузка, действующая на оболочку и возникающая вследствие действия внешних сил.

В рамках численной модели уравнения Лява используются как динамические граничные условия на стенке для линеаризованных относительно основного стационарного течения уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости. Помимо этих динамических условий, которые в работе для краткости названы полными, рассмотрены и упрощенные, на основе уравнений Лява, записанных в приближении Доннела—Муштари—Власова (см. [14], [15]). В этом приближении предполагается, что оболочка нагружается и смещается в основном по нормали к поверхности. В частности, это подразумевает пренебрежение касательными компонентами вязкого тензора напряжений в жидкости на стенке. Поскольку учет нормальной компоненты вязкого тензора напряжений в жидкости на стенке слабо влияет на устойчивость потока (см. [16], [17]), то в упрощенных условиях она также была исключена.

Целью данной работы являются численное исследование линейной устойчивости течения Пуазейля в трубе с податливой стенкой и сравнение характеристик его устойчивости, полученных с использованием полных и упрощенных динамических граничных условий. Работа организована следующим образом. В разд. 2 приводятся уравнения эволюции малых возмущений. В разд. 3 описывается модель податливой стенки и дается вид кинематических, а также полных и упрощенных динамических граничных условий. В разд. 4 полученные уравнения приводятся к безразмерному виду. В разд. 5 формулируется задача временной устойчивости (см. [18]–[20]), в рамках которой предполагается, что возмущение основного течения и соответствующее отклонение стенки заданы в начальный момент времени, гармоничны в продольном и азимутальном направлениях, и исследуется их эволюция во времени. Описывается проблема собственных значений, к численному решению которой сводится расчет характеристик устойчивости основного течения (например, критических чисел Рейнольдса, скоростей нарастания возмущений). В разд. 6 выводится модифицированное уравнение Рейнольдса—Орра (см. [18]–[20]), описывающее баланс кинетической энергии возмущения основного течения. В разд. 7 описывается пространственная аппроксимация упомянутой проблемы собственных значений, в результате которой

получается обобщенная алгебраическая проблема собственных значений. Эта проблема сводится к обыкновенной проблеме примерно вдвое меньшей алгебраической размерности с помощью алгебраической редукции, предложенной и обоснованной в [21], [22]. В разд. 8 обсуждаются результаты численных экспериментов с предложенной моделью. В разд. 9 делаются выводы по результатам работы.

2. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

В декартовой системе координат рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в трехмерной бесконечной в продольном направлении трубе

$$\{(x, y, z): -\infty < x < \infty, y^2 + z^2 < r_b^2\} \quad (2.1)$$

постоянного круглого сечения. В качестве основного стационарного течения в трубе (2.1) рассмотрим течение Пуазейля с вектором скорости $\mathbf{U} = (U, 0, 0)^T$, давлением $P = -\tau x$, коэффициентом кинематической вязкости ν и плотностью ρ , где

$$U = U_0 \left(1 - \frac{y^2}{r_b^2} - \frac{z^2}{r_b^2} \right)$$

есть профиль скорости, достигающий своего максимума U_0 на продольной оси трубы, а τ — заданная положительная константа.

Перейдем в цилиндрическую систему координат (x, θ, r) , в которой θ и r связаны с y и z следующим образом:

$$y = r \sin \theta, \quad z = r \cos \theta,$$

где $-\pi \leq \theta < \pi$, $0 \leq r \leq r_b$, кроме того,

$$\mathbf{e}_x = (1, 0, 0)^T, \quad \mathbf{e}_\theta = (0, \cos \theta, -\sin \theta)^T, \quad \mathbf{e}_r = (0, \sin \theta, \cos \theta)^T$$

суть орты локального ортонормированного базиса, заданные в декартовой системе координат. Тогда вектор скорости основного течения и его профиль примут вид

$$\mathbf{U} = U \mathbf{e}_x, \quad U = U_0 \left(1 - \frac{r^2}{r_b^2} \right).$$

Нас будет интересовать линейная устойчивость (см. [18]–[20]) основного течения во временной постановке. Линеаризованные относительно основного течения уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости, которые будем называть *уравнениями эволюции возмущений*, в координатах (x, θ, r) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + U_r w + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= \nu \left[\left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right], \\ \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left[\left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) w - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right], \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) w &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $u(x, \theta, r, t)$, $v(x, \theta, r, t)$ и $w(x, \theta, r, t)$ — соответственно, продольная, азимутальная и радиальная компоненты вектора $\mathbf{u} = u \mathbf{e}_x + v \mathbf{e}_\theta + w \mathbf{e}_r$, возмущения скорости основного течения, $p(x, \theta, r, t)$ — возмущение давления, $U_r = -2U_0 r / r_b^2$ — производная U по r , а

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

есть оператор Лапласа в цилиндрических координатах.

Как правило, систему (2.2) рассматривают в области

$$\{(x, \theta, r): -\infty < x < \infty, -\pi \leq \theta < \pi, 0 < r < r_b\},$$

граница которой в радиальном направлении содержит ось трубы. Поэтому на оси накладывают граничные условия. Обычно (см., например, [19], [23], [24]) задают условия, обеспечивающие гладкость и ограниченность решений системы (2.2) вблизи оси. Для исключения необходимости в таких условиях в [25], [26] было предложено выбирать область так, чтобы ее граница не содержала ось трубы и, кроме того, для пространственной аппроксимации использовать сетку, не содержащую узла на оси трубы. Поэтому, следуя [27], далее будем рассматривать область

$$\{(x, \theta, r): -\infty < x < \infty, -\pi \leq \theta < \pi, -r_b < r < r_b\}. \quad (2.3)$$

Отметим, что каждой точке (x, y, z) в трубе (2.1) отвечают две различные точки из этой области: (x, θ, r) и $(x, \theta + \pi, -r)$, если $-\pi \leq \theta < 0$, или $(x, \theta - \pi, -r)$, если $0 \leq \theta < \pi$. Следовательно, преобразование координат $(x, \theta, r) \rightarrow (x, \theta \pm \pi, -r)$ не должно менять вектор скорости и давление. Тогда решения системы (2.2) в области (2.3) должны удовлетворять условиям симметрии

$$\begin{aligned} u(x, \theta \pm \pi, -r, t) &= u(x, \theta, r, t), & -v(x, \theta \pm \pi, -r, t) &= v(x, \theta, r, t), \\ -w(x, \theta \pm \pi, -r, t) &= w(x, \theta, r, t), & p(x, \theta \pm \pi, -r, t) &= p(x, \theta, r, t), \end{aligned} \quad (2.4)$$

благодаря которым расчеты в расширенной области (2.3) можно свести (см. Приложение А) к расчетам при $r > 0$ без использования граничных условий на оси трубы.

Таким образом, система (2.2) рассматривается в области (2.3) с периодическими граничными условиями для компонент скорости и их первых производных по θ . Если стенка трубы твердая, то на границе $r = r_b$ накладываются условия прилипания (равенство нулю компонент скорости), если же стенка податливая, то накладываются соответствующие кинематические и динамические граничные условия. Первые выражают непрерывность компонент скорости на границе, а вторые — баланс сил (см. [28]).

Кинематические граничные условия можно записать в виде

$$\frac{\partial \xi_b}{\partial t}(\mathbf{q}_b, t) = \hat{\mathbf{U}}(\mathbf{q}_b + \xi_b(\mathbf{q}_b, t), t). \quad (2.5)$$

Здесь вектор $\xi_b = \xi_b \mathbf{e}_x + \eta_b \mathbf{e}_\theta + \zeta_b \mathbf{e}_r$ с компонентами $\xi_b(x, \theta, t)$, $\eta_b(x, \theta, t)$ и $\zeta_b(x, \theta, t)$ описывает смещение некоторой расположенной на невозмущенной границе $r = r_b$ точки с радиус-вектором $\mathbf{q}_b = \mathbf{q}_b(x, \theta)$, кроме того, $\hat{\mathbf{U}} = (U + u)\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_\theta + w\mathbf{e}_r$. Поскольку смещения стенки предполагаются малыми, то правую часть в (2.5) можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $\mathbf{q}_b$. Отбросив нелинейные относительно компонент скорости и смещений члены, нетрудно получить покомпонентный вид линеаризованных кинематических граничных условий в точке с радиус-вектором $\mathbf{q}_b$:

$$\frac{\partial \xi_b}{\partial t} = u_b - 2 \frac{U_0}{r_b} \zeta_b, \quad \frac{\partial \eta_b}{\partial t} = v_b, \quad \frac{\partial \zeta_b}{\partial t} = w_b, \quad (2.6)$$

где u_b , v_b и w_b — компоненты скорости на стенке. В следующем разделе описывается модель податливой стенки и, при сделанных там предположениях, дается окончательный вид кинематических и динамических граничных условий.

3. МОДЕЛЬ ПОДАТЛИВОЙ СТЕНКИ ТРУБЫ

В настоящей работе стенка трубы (2.1) рассматривается как тонкая, однородная и изотропная оболочка постоянной толщины h_s с плотностью ρ_s , модулем Юнга E_s и коэффициентом Пуассона μ_s . Оболочку характеризуют срединной поверхностью, которая равноудалена от лицевых поверхностей оболочки (см. [14], [15]). Как правило, тонкой считается оболочка, для которой отношение h_s/R ее толщины к минимальному радиусу кривизны (либо характерному линейному размеру) ее срединной поверхности не превышает $1/20$. Далее будем предполагать, что это условие выполнено, хотя в некоторых случаях использование теории тонких оболочек дает приемлемые результаты даже при отношении порядка единицы (см. [14]).

Положение точки на срединной поверхности можно описать либо декартовыми координатами x , y и z , либо локальными ортогональными криволинейными координатами, заданными на

этой поверхности. Для цилиндрической оболочки в качестве таких координат выберем определенные выше координаты x и θ . Для такой оболочки $R = r_b$ с точностью до членов порядка $h_s/R \ll 1$.

Согласно геометрической гипотезе Кирхгофа (см. [14], [15]), лежащей в основе теории тонких оболочек, перпендикуляр, опущенный из произвольной точки оболочки на срединную поверхность, после деформации оболочки останется перпендикулярным к срединной поверхности и сохранит свою длину. Используя данную гипотезу, можно показать, что смещения оболочки в касательных направлениях меняются линейно по толщине оболочки, а нормальное смещение не зависит от расстояния до срединной поверхности. Таким образом, для рассматриваемой цилиндрической оболочки

$$\begin{aligned}\xi_h(x, \theta, h, t) &= \xi(x, \theta, t) + h\beta_x(x, \theta, t), \\ \eta_h(x, \theta, h, t) &= \eta(x, \theta, t) + h\beta_\theta(x, \theta, t), \\ \zeta_h(x, \theta, h, t) &= \zeta(x, \theta, t),\end{aligned}\quad (3.7)$$

где ξ_h, η_h, ζ_h и ξ, η, ζ — компоненты векторов $\xi_h = \xi_h \mathbf{e}_x + \eta_h \mathbf{e}_\theta + \zeta_h \mathbf{e}_r$ и $\xi = \xi \mathbf{e}_x + \eta \mathbf{e}_\theta + \zeta \mathbf{e}_r$ смещения оболочки и ее срединной поверхности соответственно, а $-h_s/2 \leq h \leq h_s/2$ — координата по нормали $\mathbf{e}_r$ с основанием в точке (x, θ) на срединной поверхности. Кроме того,

$$\beta_x = -\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \beta_\theta = \frac{\eta}{r_b} - \frac{1}{r_b} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta}$$

суть углы поворота окрестности точки срединной поверхности, как твердого тела, вокруг осей $\mathbf{e}_\theta$ и $\mathbf{e}_x$ соответственно, вследствие деформации. Таким образом, используя (3.7), исследование деформации трехмерного элемента тонкой оболочки можно свести к исследованию деформации двумерного элемента ее срединной поверхности. В частности, в условиях (2.6) можно выразить компоненты ξ_b, η_b и ζ_b смещения внутренней лицевой поверхности оболочки через смещения ее срединной поверхности:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial t} - u_b + \frac{h_s}{2} \frac{\partial w_b}{\partial x} + 2 \frac{U_0}{r_b} \zeta &= 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} - v_b + \frac{h_s}{2r_b} \frac{\partial w_b}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} - w_b &= 0.\end{aligned}$$

Малые колебания тонкой оболочки описываются на основе уравнений Лява (см. [15]), которые определяют смещения ее срединной поверхности под действием сил давления любой природы. Эти уравнения также позволяют описывать ситуации, когда силы, возвращающие оболочку к состоянию равновесия, вызваны внутренними напряжениями, изначально присутствующими в оболочке и не зависящими от ее смещения. В настоящей работе предполагается, что оболочка предварительно не нагружена, т.е. эти напряжения отсутствуют. Тогда колебания срединной поверхности цилиндрической оболочки описываются следующими уравнениями (см. [15]):

$$\begin{aligned}\rho_s h_s \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} - \frac{1}{r_b} \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} &= \hat{q}_x, \\ \rho_s h_s \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} - \frac{1}{r_b} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{Q_{\theta r}}{r_b} &= \hat{q}_\theta, \\ \rho_s h_s \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{\partial Q_{xr}}{\partial x} - \frac{1}{r_b} \frac{\partial Q_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{N_{\theta\theta}}{r_b} &= \hat{q}_r,\end{aligned}\quad (3.8)$$

где

$$N_{xx} = K(\epsilon_{xx} + \mu_s \epsilon_{\theta\theta}), \quad N_{\theta\theta} = K(\epsilon_{\theta\theta} + \mu_s \epsilon_{xx}), \quad N_{x\theta} = \frac{K(1 - \mu_s)}{2} \epsilon_{x\theta}$$

суть нормальные (N_{xx} и $N_{\theta\theta}$) и касательные ($N_{x\theta} = N_{\theta x}$) усилия,

$$Q_{xr} = \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{r_b} \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta}, \quad Q_{\theta r} = \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{r_b} \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta}$$

суть перерезывающие силы,

$$M_{xx} = D(k_{xx} + \mu_s k_{\theta\theta}), \quad M_{\theta\theta} = D(k_{\theta\theta} + \mu_s k_{xx}), \quad M_{x\theta} = \frac{D(1 - \mu_s)}{2} k_{x\theta}$$

суть изгибающие (M_{xx} и $M_{\theta\theta}$) и скручивающие ($M_{x\theta} = M_{\theta x}$) моменты,

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r_b} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} + \frac{\zeta}{r_b}, \quad \varepsilon_{x\theta} = \varepsilon_{\theta x} = \frac{1}{r_b} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

суть мембранные деформации (ε_{xx} и $\varepsilon_{\theta\theta}$ — обусловленные деформацией оболочки относительные удлинения “волокон”, расположенных вдоль координатных линий срединной поверхности, а $\varepsilon_{x\theta} = \varepsilon_{\theta x}$ — сдвиг, который можно определить, как косинус угла между координатными линиями x и θ после деформации),

$$k_{xx} = -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad k_{\theta\theta} = \frac{1}{r_b^2} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{1}{r_b^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2}, \quad k_{x\theta} = \frac{1}{r_b} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{2}{r_b} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial \theta}$$

суть изгибающие деформации (k_{xx} и $k_{\theta\theta}$ описывают изменение кривизны, а $k_{x\theta} = k_{\theta x}$ — кручение срединной поверхности при деформации). Кроме того,

$$K = \frac{E_s h_s}{1 - \mu^2}, \quad D = \frac{E_s h_s^3}{12(1 - \mu^2)}$$

суть мембранная и изгибная жесткости оболочки соответственно, а $\hat{q}_x$, $\hat{q}_\theta$, $\hat{q}_r$ — нагрузки, действующие на срединную поверхность оболочки в продольном, азимутальном и нормальном направлениях.

В настоящей работе также будет рассматриваться двухслойная стенка: тонкая оболочка, окруженная вязкоупругим основанием толщины h_f из однородного материала с плотностью ρ_f , модулем Юнга E_f и коэффициентом Пуассона μ_f . Основание может (см. [15]) рассматриваться в ряде случаев (см., например, [10]) как набор действующих на срединную поверхность оболочки равномерно распределенных пружин и демпферов с коэффициентами упругости k_x , k_θ , k_r и демпфирования d_x , d_θ , d_r соответственно по направлениям x , θ , r . Коэффициенты упругости можно оценить (см. [15]) по формулам

$$k_x = k_\theta = G_f/h_f, \quad k_r = E_f/h_f, \quad G_f = \frac{E_f}{2(1 + \mu_f)},$$

где G_f — модуль сдвига материала основания. В теории тонких оболочек основание моделируют, вводя дополнительную нагрузку, действующую на срединную поверхность оболочки со стороны основания и возникающую как “реакция” на действие внешних сил, при этом, исходя из энергетических соображений, к массе оболочки на единицу площади добавляют $\rho_f h_f/3$ (см. [15]). Тогда правые части в (3.8) примут вид

$$\begin{aligned} \hat{q}_x &= q_x - \frac{1}{3} \rho_f h_f \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - d_x \frac{\partial \xi}{\partial t} - k_x \xi, \\ \hat{q}_\theta &= q_\theta - \frac{1}{3} \rho_f h_f \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - d_\theta \frac{\partial \eta}{\partial t} - k_\theta \eta, \\ \hat{q}_r &= q_r - \frac{1}{3} \rho_f h_f \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - d_r \frac{\partial \zeta}{\partial t} - k_r \zeta, \end{aligned}$$

где q_x , q_θ и q_r — оставшиеся нагрузки, которые с учетом выбранного направления нормали к срединной поверхности будут равны компонентам тензора напряжений в жидкости на стенке, взятым с обратным знаком (см. [28]):

$$\begin{aligned} q_x &= -\tau_{rx}|_{r=r_b}, & \tau_{rx} &= \rho v \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ q_\theta &= -\tau_{r\theta}|_{r=r_b}, & \tau_{r\theta} &= \rho v \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right), \\ q_r &= -\sigma_{rr}|_{r=r_b}, & \sigma_{rr} &= -p + \tau_{rr}, & \tau_{rr} &= 2\rho v \frac{\partial w}{\partial r}. \end{aligned}$$

Рассмотренная модель вязкоупругого основания справедлива, если модули Юнга материалов оболочки и основания существенно различные. В данной работе будем предполагать, что это условие выполняется. В противном случае основание нужно моделировать в виде вязкоупругой сплошной среды на основе уравнений Навье, как это сделано, например, в [29].

Отметим, что в теории оболочек широко применяется приближение Доннела—Муштари—Власова (см. [14], [15]), в рамках которого предполагается, что оболочка нагружается и смещается в основном по нормали к поверхности, т.е. $\hat{q}_x = \hat{q}_\theta = 0$. В таком случае делается пренебрежение касательными смещениями ξ и η в выражениях для изгибающих деформаций, т.е.

$$k_{xx} = -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad k_{\theta\theta} = -\frac{1}{r_b^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2}, \quad k_{x\theta} = -\frac{2}{r_b} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial \theta},$$

кроме того, делается пренебрежение силами инерции в касательных направлениях, а также членом $Q_{\theta r}/r_b$. Тогда система (3.8) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{r_b} \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{r_b} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} &= 0, \\ \rho_s h_s \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{\partial Q_{xr}}{\partial x} - \frac{1}{r_b} \frac{\partial Q_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{N_{\theta\theta}}{r_b} &= \hat{q}_r. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Применение приближения Доннела—Муштари—Власова, в частности, подразумевает пренебрежение касательными компонентами τ_{rx} и $\tau_{r\theta}$ вязкого тензора напряжений. Учет нормальной компоненты τ_{rr} слабо влияет на устойчивость потока (см. [16], [17]), поэтому мы также исключим ее из рассмотрения, тогда в (3.9)

$$\hat{q}_r = p - \frac{1}{3} \rho_f h_f \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - d_r \frac{\partial \zeta}{\partial t} - k_r \zeta.$$

4. ПРИВЕДЕНИЕ К БЕЗРАЗМЕРНОМУ ВИДУ

Определим число Рейнольдса следующим образом: $Re = U_0 r_b / \nu$. Поделим x , r , ξ , η , ζ на r_b , скорости u , v и w — на U_0 , время — на r_b / U_0 , давление p — на ρU_0^2 . Обезразмеренные уравнения (2.2) эволюции трехмерных возмущений имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + U_r w + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{Re} \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= \frac{1}{Re} \left[\left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right], \\ \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{1}{Re} \left[\left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) w - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right], \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) w &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

и рассматриваются в области

$$\{(x, \theta, r): -\infty < x < \infty, -\pi \leq \theta < \pi, -1 < r < 1\}.$$

Обезразмеривание вязкоупругих параметров стенки выполним так, чтобы они не изменялись при изменении числа Рейнольдса. Для этого будем предполагать, что изменение Re обусловлено только изменением U_0 , а параметры r_b , ρ и ν — фиксированные. Тогда поделим мембранную K и изгибную D жесткости оболочки на $\rho\nu^2/r_b$ и $r_b\rho\nu^2$ соответственно, а коэффициенты упругости k_x , k_θ , k_r и демпфирования d_x , d_θ , d_r основания — на $\rho\nu^2/r_b^3$ и $\rho\nu/r_b$ соответственно, кроме того, введем обозначение

$$\gamma = \left(\rho_s h_s + \frac{1}{3} \rho_f h_f \right) / (\rho r_b).$$

Таким образом, получим безразмерный вид нормированных кинематических граничных условий

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} - u_b + \frac{h_s}{2r_b} \frac{\partial w_b}{\partial x} + 2\xi &= 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} - v_b + \frac{h_s}{2r_b} \frac{\partial w_b}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} - w_b &= 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

и динамических граничных условий

$$\begin{aligned} &\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{d_x}{Re} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{1}{Re^2} \left(K \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - k_x \right) \xi - \\ &- \frac{K(1+\mu)}{2Re^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial \theta} - \frac{K\mu}{Re^2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{r=1} = 0, \\ &\gamma \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{d_\theta}{Re} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{K(1+\mu)}{2Re^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{Re^2} \left[\frac{(K+D)(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (K+D) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - k_\theta \right] \eta + \\ &+ \frac{1}{Re^2} \left(-K \frac{\partial}{\partial \theta} + D \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} + D \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right) \zeta + \frac{1}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \Big|_{r=1} = 0, \\ &\gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{d_r}{Re} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{K\mu}{Re^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{1}{Re^2} \left(-K \frac{\partial}{\partial \theta} + D \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} + D \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right) \eta + \\ &+ \frac{1}{Re^2} \left(D \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \theta^2} + D \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + K + k_r \right) \zeta + \left(-p + \frac{2}{Re} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Вид условий симметрии (2.4) после обезразмеривания не изменится.

5. ЗАДАЧА ВРЕМЕННОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В случае анализа временной устойчивости предполагают (см. [18]–[20]), что возмущение основного течения и соответствующее смещение стенки заданы при $t = 0$ во всей трубе и являются гармоническими по x и θ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, \theta, r, t) &= \tilde{\mathbf{u}}(r) e^{i(\alpha x + n\theta - \omega t)}, \\ p(x, \theta, r, t) &= \tilde{p}(r) e^{i(\alpha x + n\theta - \omega t)}, \\ \xi(x, \theta, t) &= \tilde{\xi} e^{i(\alpha x + n\theta - \omega t)}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

где $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{u} \mathbf{e}_x + \tilde{v} \mathbf{e}_\theta + \tilde{w} \mathbf{e}_r$, $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_x \mathbf{e}_x + \tilde{\xi}_\theta \mathbf{e}_\theta + \tilde{\xi}_r \mathbf{e}_r$, i — мнимая единица, α — фиксированное вещественное продольное волновое число, n — фиксированное целое азимутальное волновое число, $\omega = \omega_r + i\omega_i$ — комплексная частота. Нам также потребуется комплексная фазовая скорость

$c = c_r + ic_i = \omega/\sqrt{\alpha^2 + n^2}$. Таким образом, исследование линейной устойчивости основного течения во временной постановке сводится к исследованию устойчивости нулевого решения системы (4.10), (4.11), (4.12), (2.4) к возмущениям (5.13). Подставляя (5.13) в (4.10), (4.11), (4.12), получим уравнения для амплитуд возмущений скорости и давления:

$$\begin{aligned} -i\omega\tilde{u} + i\alpha U\tilde{u} - 2r\tilde{w} + i\alpha\tilde{p} - \frac{1}{\text{Re}}\Delta_r\tilde{u} &= 0, \\ -i\omega\tilde{v} + i\alpha U\tilde{v} + \frac{in}{r}\tilde{p} - \frac{1}{\text{Re}}\left[\left(\Delta_r - \frac{1}{r^2}\right)\tilde{v} + \frac{2in}{r^2}\tilde{w}\right] &= 0, \\ -i\omega\tilde{w} + i\alpha U\tilde{w} + \frac{d\tilde{p}}{dr} - \frac{1}{\text{Re}}\left[\left(\Delta_r - \frac{1}{r^2}\right)\tilde{w} - \frac{2in}{r^2}\tilde{v}\right] &= 0, \\ i\alpha\tilde{u} + \frac{in}{r}\tilde{v} + \left(\frac{1}{r} + \frac{d}{dr}\right)\tilde{w} &= 0, \end{aligned} \quad (5.14)$$

где

$$\Delta_r = -\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2},$$

которые рассматриваются на интервале $-1 < r < 1$ с граничными условиями

$$\begin{aligned} -i\omega\tilde{\xi} + 2\tilde{\zeta} - \tilde{u}_b + i\alpha\frac{h_s}{2r_b}\tilde{w}_b &= 0, \\ -i\omega\tilde{\eta} - \tilde{v}_b + in\frac{h_s}{2r_b}\tilde{w}_b &= 0, \\ -i\omega\tilde{\zeta} - \tilde{w}_b &= 0, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} -i\omega\left(-2\tilde{\zeta} + \tilde{u}_b - i\alpha\frac{h_s}{2r_b}\tilde{w}_b\right) + \frac{1}{\gamma\text{Re}^2}\left[\left(\alpha^2 + n^2\frac{1-\mu}{2}\right)K + k_x\right]\tilde{\xi} + \alpha n\frac{K(1+\mu)}{2\gamma\text{Re}^2}\tilde{\eta} - \\ - \frac{1}{\gamma\text{Re}^2}(i\alpha K\mu + 2d_x\text{Re})\tilde{\zeta} + \frac{1}{\gamma\text{Re}}\left[d_x\tilde{u}_b + \tilde{u}_b^{(1)} + i\alpha\left(1 - \frac{h_s d_x}{2r_b}\right)\tilde{w}_b\right] &= 0, \\ -i\omega\left(\tilde{v}_b - in\frac{h_s}{2r_b}\tilde{w}_b\right) + \alpha n\frac{K(1+\mu)}{2\gamma\text{Re}^2}\tilde{\xi} + \frac{1}{\gamma\text{Re}^2}\left[\left(\alpha^2\frac{1-\mu}{2} + n^2\right)(K + D) + k_\theta\right]\tilde{\eta} - \\ - \frac{in}{\gamma\text{Re}^2}[K + (\alpha^2 + n^2)D]\tilde{\zeta} + \frac{1}{\gamma\text{Re}}\left[(d_\theta - 1)\tilde{v}_b + \tilde{v}_b^{(1)} + in\left(1 - \frac{h_s d_\theta}{2r_b}\right)\tilde{w}_b\right] &= 0, \\ -i\omega\tilde{w}_b + i\alpha\frac{K\mu}{\gamma\text{Re}^2}\tilde{\xi} + \frac{in}{\gamma\text{Re}^2}[K + (\alpha^2 + n^2)D]\tilde{\eta} + \\ + \frac{1}{\gamma\text{Re}^2}[K + (\alpha^2 + n^2)^2D + k_r]\tilde{\zeta} + \frac{d_r}{\gamma\text{Re}}\tilde{w}_b + \frac{2}{\gamma\text{Re}}\tilde{w}_b^{(1)} - \frac{1}{\gamma}\tilde{p}_b &= 0, \end{aligned} \quad (5.16)$$

где, например, $\tilde{u}_b^{(1)} = d\tilde{u}/dr|_{r=1}$. Используя (5.15), из уравнений (5.16) были исключены члены, содержащие ω^2 . Отметим, что при использовании приближения Доннела–Муштари–Власова уравнения (5.16) значительно упрощаются:

$$\begin{aligned} [2\alpha^2 + n^2(1-\mu)]\tilde{\xi} + \alpha n(1+\mu)\tilde{\eta} - 2i\alpha\mu\tilde{\zeta} &= 0, \\ \alpha n(1+\mu)\tilde{\xi} + [\alpha^2(1-\mu) + 2n^2]\tilde{\eta} - 2in\tilde{\zeta} &= 0, \\ -i\omega\tilde{w}_b + \frac{K}{\gamma\text{Re}^2}(i\alpha\mu\tilde{\xi} + in\tilde{\eta}) + \frac{1}{\gamma\text{Re}^2}[K + (\alpha^2 + n^2)^2D + k_r]\tilde{\zeta} + \frac{d_r}{\gamma\text{Re}}\tilde{w}_b - \frac{1}{\gamma}\tilde{p}_b &= 0. \end{aligned} \quad (5.16')$$

Система (5.14), (5.15), (5.16) является проблемой собственных значений относительно спектрального параметра ω и собственной функции

$$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}, \tilde{u}_b, \tilde{v}_b, \tilde{w}_b, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta})^T \neq 0.$$

Среди ее решений ищутся только те, что удовлетворяют условиям симметрии:

$$\begin{aligned} (-1)^n \tilde{u}(-r) &= \tilde{u}(r), & (-1)^{n+1} \tilde{v}(-r) &= \tilde{v}(r), \\ (-1)^{n+1} \tilde{w}(-r) &= \tilde{w}(r), & (-1)^n \tilde{p}(-r) &= \tilde{p}(r). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Отметим, что аналитические в окрестности $r = 0$ функции удовлетворяют аналогичным (5.17) условиям симметрии (см. [23], [24]).

Для заданных значений α , n и вязкоупругих параметров стенки трубы линейное критическое число Рейнольдса $\text{Re}_c(\alpha, n)$ будем определять как границу устойчивости нулевого решения системы (4.10), (4.11), (4.12), (2.4) ко всем возмущениям вида (5.13). Поскольку возмущение вида (5.13) нарастает со временем, если $\omega_i > 0$, и затухает, если $\omega_i < 0$, то

$$\text{Re}_c(\alpha, n) = \inf \{ \text{Re} : \max \text{Imag } \Lambda(\text{Re}, \alpha, n) = 0, \text{Re} > 0 \}, \quad (5.18)$$

где $\Lambda(\text{Re}, \alpha, n)$ означает спектр проблемы (5.14), (5.15), (5.16), (5.17). Далее будем обозначать через $\text{Re}'_c(\alpha, n)$ критическое число Рейнольдса, вычисленное для проблемы (5.14), (5.15), (5.16'), (5.17).

6. УРАВНЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ВОЗМУЩЕНИЯ

Величину

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \overline{u_i u_i^*} \frac{|r|}{2} dr = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{u}_i \tilde{u}_i^* \frac{|r|}{2} dr e^{2\omega_i t} = \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{u}}) e^{2\omega_i t} \quad (6.19)$$

будем называть средней плотностью кинетической энергии комплекснозначного возмущения $\mathbf{u}$ (5.13). В (6.19) использовано правило суммирования по повторяющемуся индексу $i = 1, 2, 3$, где, например, $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$, звездочка означает комплексное сопряжение, а горизонтальная черта — усреднение по x и θ :

$$\bar{f} = \frac{\alpha}{4\pi^2} \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} f dx d\theta.$$

Кроме того, вследствие интегрирования по отрезку $[-1, 1]$ вместо $[0, 1]$, под интегралом стоит модуль якобиана с коэффициентом $1/2$. Отметим, что самостоятельный физический смысл имеют действительные и мнимые части возмущений (5.13). Для действительной части $\text{Real}(\mathbf{u}) = (\mathbf{u} + \mathbf{u}^*)/2$ можно показать, что при $\alpha > 0$ (случай $\alpha = 0$ в данной работе не рассматривается)

$$\mathcal{E}\left(\frac{\mathbf{u} + \mathbf{u}^*}{2}\right) = \frac{1}{2} \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{u}}) e^{2\omega_i t}.$$

Скалярно умножая первые три уравнения в (4.10) на u^* , v^* и w^* соответственно и беря действительную часть, получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right] \frac{1}{2} u_i u_i^* &= \text{Real} \left\{ -U_r w u^* - \frac{\partial p u^*}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial p v^*}{\partial \theta} - \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) p w^* + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\text{Re}} \left[\Delta u_i u_i^* - \frac{1}{r^2} (v v^* + w w^*) + \frac{2}{r^2} \left(v^* \frac{\partial w}{\partial \theta} - w^* \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6.20)$$

где учтено соотношение

$$\frac{\partial p}{\partial x} u^* + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} v^* + \frac{\partial p}{\partial r} w^* = \frac{\partial p u^*}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial p v^*}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) p w^*,$$

которое нетрудно получить, используя уравнение неразрывности. Следуя работе [24], будем предполагать, что u , v и w обладают свойствами, обеспечивающими несингулярность урав-

нений (4.10) на оси трубы. Усредняя (6.20) по периоду вдоль x и θ , а также интегрируя по r , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{u})}{\partial t} = & -\text{Real} \left\{ \int_{-1}^1 U_r \overline{wu^*} \frac{|r|}{2} dr \right\} - \frac{1}{\text{Re}} \int_{-1}^1 \left[\frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_i^*}{\partial x} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_i}{\partial \theta} \frac{\partial u_i^*}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial u_i}{\partial r} \frac{\partial u_i^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} (|\bar{v}|^2 + |\bar{w}|^2) - \frac{2}{r^2} \left(\bar{v}^* \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} - \bar{w}^* \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} \right) \right] \frac{|r|}{2} dr - \\ & - \text{Real} \left\{ \frac{1}{2} \overline{pw^*} \Big|_{-1}^1 \right\} + \text{Real} \left\{ \frac{1}{2\text{Re}} \overline{u_i^*} \frac{\partial u_i}{\partial r} \Big|_{-1}^1 \right\}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Уравнение (6.21) является аналогом уравнения Рейнольдса—Орра (см. [18]–[20]), вид которого в случае круглой трубы с твердой стенкой можно найти, например, в [30]. Отличие заключается в двух последних слагаемых, которые не обращаются в нуль при наличии податливости стенки. Первые два слагаемых описывают, соответственно, обмен кинетической энергией между основным течением и возмущением под действием напряжений Рейнольдса и ее рассеивание в теплоту вследствие вязкости, т.е. второе слагаемое всегда отрицательное (см. [18]–[20]). Третье слагаемое интерпретируют как работу, выполняемую в единицу времени возмущением давления над податливой стенкой (см. [10], [16], [31]). Последнее слагаемое может либо служить дополнительным источником энергии, либо рассеивать ее (см. [10]).

Учитывая (5.13), уравнение (6.22) можно записать в виде

$$\begin{aligned} 2\omega_i \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{u}}) = & -\text{Real} \left\{ \int_{-1}^1 U_r \tilde{w} \tilde{u}_i^* \frac{|r|}{2} dr \right\} - \frac{1}{\text{Re}} \int_{-1}^1 \left(\alpha^2 \tilde{u}_i \tilde{u}_i^* + \frac{n^2}{r^2} \tilde{u}_i \tilde{u}_i^* + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial r} \frac{\partial \tilde{u}_i^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} (|\tilde{v}|^2 + |\tilde{w}|^2) - \frac{2in}{r^2} (\tilde{v}^* \tilde{w} - \tilde{v} \tilde{w}^*) \right) \frac{|r|}{2} dr - \\ & - \text{Real} \left\{ \frac{1}{2} \tilde{p} \tilde{w}^* \Big|_{-1}^1 \right\} + \text{Real} \left\{ \frac{1}{2\text{Re}} \tilde{u}_i^* \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial r} \Big|_{-1}^1 \right\}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Далее для фиксированных Re и α и параметров стенки мы будем обозначать через $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3, \tilde{I}_4$, либо $\tilde{I}_1', \tilde{I}_2', \tilde{I}_3', \tilde{I}_4'$, нормированные на $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{u}})$ значения, соответственно, первого, второго, третьего и четвертого слагаемых в правой части уравнения (6.22), отвечающие проблеме собственных значений (5.14), (5.15), (5.17) с динамическими условиями (5.16), либо (5.16'). Тогда сумма $\tilde{I}_i$, либо $\tilde{I}_i', i = 1, 2, 3, 4$, будет равна $2\omega_i$.

7. АППРОКСИМАЦИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Пространственную аппроксимацию проблемы (5.14), (5.15), (5.16), (5.17) по r выполним спектральным методом коллокаций (см. [32]). В качестве узлов интерполяции давления выберем корни $r_1, \dots, r_{2n_r}$ производной многочлена Лежандра L_{2n_r+1} степени $2n_r + 1$, а для аппроксимации компонент скорости — те же узлы и граничные точки $r_0 = -1$ и $r_{2n_r+1} = 1$ (узлы Гаусса—Лобатто). Узлы r_i не лежат на оси трубы и расположены неравномерно: расстояние между узлами вблизи оси составляет $\mathcal{O}(1/n_r)$, а вблизи стенки — $\mathcal{O}(1/n_r^2)$. В качестве базисных функций для давления используем элементарные интерполяционные многочлены Лагранжа степени $2n_r - 1$, которые можно представить в виде

$$\psi_k(r) = \frac{(r_k^2 - 1)L'_{2n_r+1}(r)}{(2n_r + 1)(2n_r + 2)(r - r_k)L_{2n_r+1}(r_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, 2n_r,$$

а для скорости — элементарные интерполяционные многочлены Лагранжа степени $2n_r + 1$, которые можно представить в виде

$$\varphi_k(r) = \frac{(r^2 - 1)L'_{2n_r+1}(r)}{(2n_r + 1)(2n_r + 2)(r - r_k)L_{2n_r+1}(r_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n_r + 1.$$

Для расчета значений первых и вторых производных приведенных выше элементарных интерполяционных многочленов воспользуемся методами, описанными в [33], [34]. Кроме того, давление на границе расчетной области, фигурирующее в уравнениях (5.16), (5.16') и (6.22), будем вычислять путем экстраполяции. Например, для расчета давления в узле $r_{2n_r+1} = 1$ достаточно вектор-столбец, содержащий значения давления во внутренних узлах, слева умножить на строку $\Pi_p^b = \{\psi_j(1)\}_{j=1}^{2n_r}$.

Учитывая условия симметрии (5.17), аппроксимацию проблемы (5.14), (5.15), (5.16), (5.17) можно выполнить в узлах r_i , $i = n_r + 1, \dots, 2n_r + 1$. В результате получим следующую линейную обобщенную алгебраическую проблему собственных значений:

$$\begin{aligned} i\omega B\mathbf{v} &= J\mathbf{v} + G\mathbf{p}, \\ 0 &= F\mathbf{v}, \end{aligned} \quad (7.23)$$

где $\mathbf{v} = [\mathbf{u}^T, \mathbf{v}^T, \mathbf{w}^T, \xi, \eta, \zeta, \mathbf{w}_b, \mathbf{v}_b, \mathbf{u}_b]^T$; $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ и $\mathbf{p}$ — n_r -компонентные векторы (столбцы), содержащие значения продольной, азимутальной и радиальной компонент скорости и давления в узлах r_i , $i = n_r + 1, \dots, 2n_r$, соответственно; $\mathbf{u}_b$, $\mathbf{v}_b$, $\mathbf{w}_b$ — значения тех же компонент скорости в узле r_{2n_r+1} ; ξ , η , ζ — значения продольной, азимутальной и нормальной компонент смещения срединной поверхности оболочки соответственно; матрицы B и J — квадратные порядка $n_v = 3n_r + 6$; G и F — прямоугольные матрицы размера $n_v \times n_p$ и $n_p \times n_v$ соответственно, где $n_p = n_r$. Вид матриц B , J , G и F дан в Приложении А.

При $\alpha > 0$ матрицы G и F в проблеме (7.23), полученной описанным методом коллокаций, хотя и не являются взаимно сопряженными, но имеют полные ранги, т.е. ядра матриц F и G^* имеют одинаковую размерность $n_v - n_p$, матрица B является нижней треугольной с единичной диагональю, а матрица $FB^{-1}G$ невырождена. Тогда с помощью алгебраической редукции, которая предложена и обоснована в [21], [22], можно свести обобщенную алгебраическую проблему (7.23) собственных значений к обыкновенной, имеющей в качестве спектра множество конечных собственных значений исходной проблемы (7.23). Отметим, что проблема (7.23) имеет бесконечное собственное значение кратности $2n_p$.

Для выполнения алгебраической редукции нам потребуются унитарные прямоугольные матрицы Q_F и Q_G , столбцы которых образуют ортонормированные базисы в ядрах матриц F и G^* соответственно, и которые можно вычислить на основе QR-разложения (см. [36]) матриц F^* и G соответственно. Поскольку B и $FB^{-1}G$ невырожденные, то матрица $Q_G^* B Q_F$ является невырожденной (см. [21]). Произвольный вектор $\mathbf{v}$, удовлетворяющий второму уравнению в (7.23), однозначно представим в виде $\mathbf{v} = Q_F \mathbf{u}$, где $\mathbf{u} = Q_F^* \mathbf{v}$. Подставим это представление в первое уравнение в (7.23) и умножим полученное уравнение слева на Q_G^* . Учитывая, что $Q_G^* G = 0$, получим уравнение

$$i\omega Q_G^* B Q_F \mathbf{u} = Q_G^* J Q_F \mathbf{u},$$

разделив которое слева на матрицу $Q_G^* B Q_F$, придем к обыкновенной проблеме собственных значений

$$i\omega \mathbf{u} = H \mathbf{u}, \quad (7.24)$$

где матрица $H = (Q_G^* B Q_F)^{-1} (Q_G^* J Q_F)$ имеет порядок $n_v - n_p = 2n_r + 6$, примерно вдвое меньший, чем алгебраическая размерность исходной проблемы (7.23). Отметим, что при использовании приближения Доннелла—Муштары—Власова после аппроксимации мы получим проблему вида (7.23) с единичной матрицей B . В случае твердой стенки аппроксимация проблемы (5.14), (5.17) с условиями прилипания на стенке также приводит к проблеме вида (7.23) с единичной

Таблица 1. Десять ведущих собственных значений проблемы (5.14), (5.17) для течения Пуазейля в трубе с твердой стенкой при $Re = 3000$, $\alpha = 1.0$ и различных n , вычисленные на сетке $n_r = 60$ (указаны значащие цифры, для которых получена сходимость по шагу сетки для $n_r = 60$ и 120)

$n = 0$		$n = 1$	
ω_r	ω_i	ω_r	ω_i
0.94836022205056	−0.0519731112827	0.911465567622	−0.0412756446937
0.94836019848	−0.051973123205	0.3709350926967	−0.061619018004
0.89671920086	−0.103612364	0.9582055429888	−0.0883460251884
0.8967204441005	−0.10361288922775	0.854788817407	−0.088870156644
0.412396334209	−0.112217160388	0.21680386299742	−0.116877153587
0.2184358147279	−0.121310028246	0.799699469658	−0.137490337036
0.845071799712	−0.15522016529	0.9100373095479	−0.1443461448649
0.845080668126	−0.155252667198	0.7453043578	−0.1864329862
0.3762423600256	−0.2004630477668	0.54931158266	−0.19583946656
0.793784129832	−0.206476811414	0.860749463473	−0.198646109021
$n = 2$		$n = 3$	
ω_r	ω_i	ω_r	ω_i
0.8882976587541	−0.0602856895581	0.8643639210456	−0.0832539769463
0.352554927086	−0.087898980374	0.346401953385	−0.1057084073627
0.832893360873	−0.1088383407	0.2149198697618	−0.1168779213441
0.93949721953134	−0.11200161615314	0.809746802303	−0.132392433171
0.2154918165293	−0.115514380221	0.916719174685	−0.1360354595293
0.778584988054	−0.15810861034	0.75587931562	−0.18203637298
0.89061857263	−0.16729404594995	0.86741365559	−0.190639836897
0.7250771394	−0.2075914662	0.371236498275	−0.212779412106
0.3750265375	−0.209314329982	0.7030072226	−0.231817870313
0.840975374942	−0.221474731306	0.5517316318	−0.2441112418

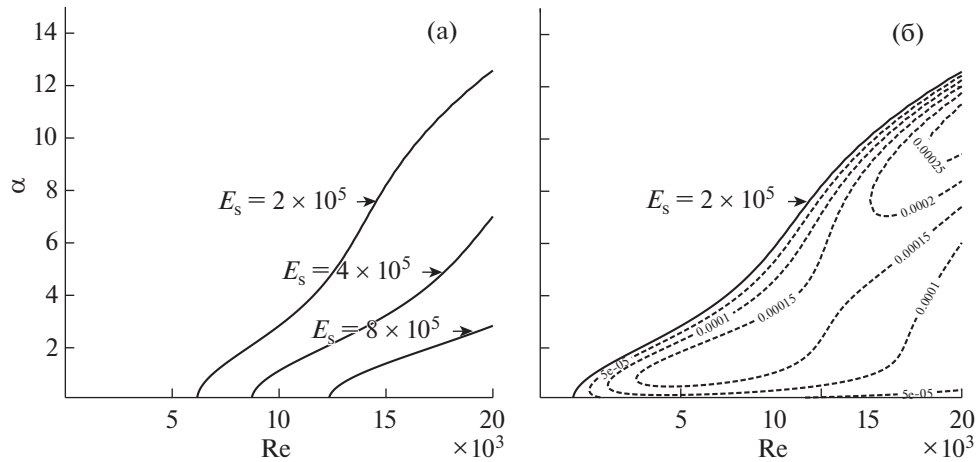
матрицей B и $\mathbf{v} = [\mathbf{u}^T, \mathbf{v}^T, \mathbf{w}^T]^T$, $n_v = 3n_r$, $n_p = n_r$. В обоих случаях матрица FG оказывается невырожденной и, следовательно, полученную проблему вида (7.23) можно свести с помощью редукции к проблеме вида (7.24).

Для расчета приближенных ведущих собственных значений и отвечающих им собственных функций исходной проблемы (5.14), (5.17) с соответствующими граничными условиями на стенке решались полные проблемы собственных значений вида (7.24) с помощью QR-алгоритма (см. [36]). Кроме того, для приближенного вычисления интегралов в уравнении (6.22) использовалась квадратурная формула с узлами и весами Гаусса–Лобатто (см. [32]), точная для многочленов степени не выше $4n_r + 1$.

8. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Валидация предложенной численной модели была выполнена на примере течения Пуазейля в трубе с твердой стенкой. В табл. 1 даны десять ведущих собственных значений проблемы (5.14), (5.17) с условиями прилипания, аппроксимированной на сетке с $n_r = 60$. Эти значения хорошо согласуются с собственными значениями, представленными в [30], где, в частности, для системы (2.2) задавались граничные условия на оси трубы.

Далее рассматривалось течение Пуазейля с плотностью $\rho = 10^3$ кг/м³ и коэффициентом кинематической вязкости $\nu = 3.5 \times 10^{-6}$ м²/с в трубе радиуса $r_b = 10$ мм с податливой стенкой и сравнивались характеристики устойчивости основного течения, вычисленные для проблемы (5.14),



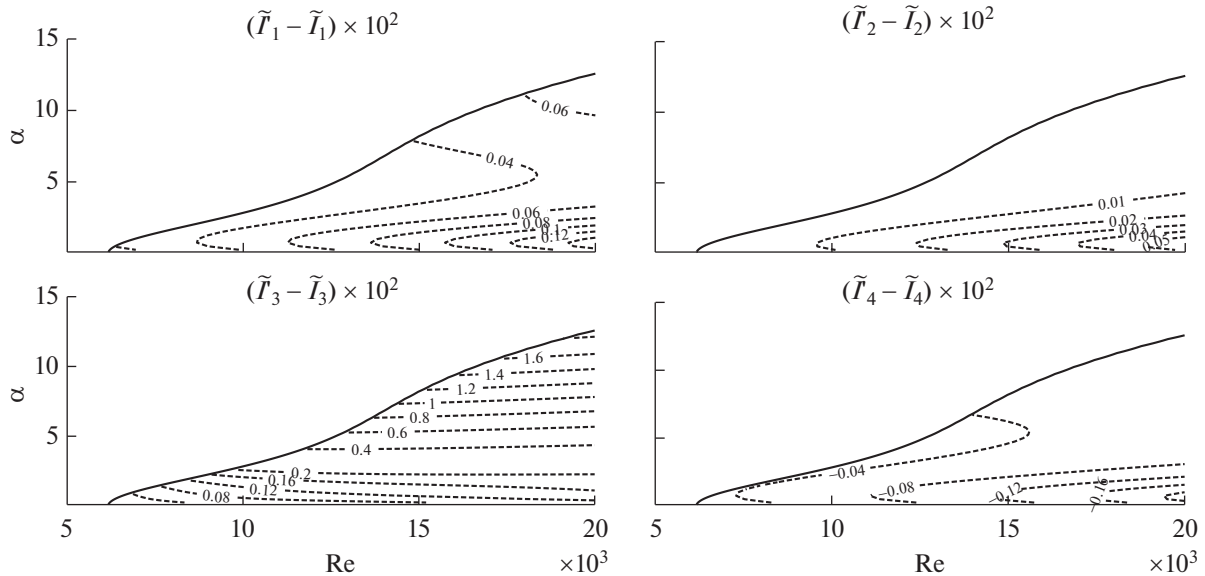
Фиг. 1. (а) – Нейтральные кривые $Re'_c(\alpha, 0)$ при различных значениях модуля Юнга E_s [Па] оболочки. (б) – Нейтральная кривая $Re'_c(\alpha, 0)$ (сплошная линия) и линии уровня скоростей нарастания ω_i возмущений (пунктир) для $E_s = 2 \times 10^5$ Па, $n = 0$. Однослойная стенка.

(5.15), (5.17) с динамическими условиями (5.16), с характеристиками, рассчитанными для той же проблемы, но с упрощенными условиями (5.16'). Выбранные значения ρ , ν и r_b близки к использовавшимся в работе [9] и характерны для медицинских приложений. Расчеты проводились как для однослойных стенок, состоящих из тонкой оболочки, так и для двухслойных, состоящих из оболочки, окруженной значительно более толстым и мягким основанием. Исследовалось влияние жесткости и демпфирования стенки на устойчивость основного течения. Причем демпфирование учитывалось только в основании, а оболочка была эластичной. Значения модуля Юнга оболочки E_s и основания E_f выбирались в диапазонах от 2×10^5 до 8×10^5 и от 1×10^3 до 2×10^3 Па соответственно. Выбранные значения E_s близки к тем, что рассматривались в работе [13], а E_f – в работе [29], и характерны для латекса и кремнийорганической резины соответственно. Коэффициенты демпфирования по направлениям полагались одинаковыми: $d_x = d_\theta = d_r = d$, и после нормировки их значения выбирались в диапазоне от 0 до 100. Остальные параметры стенки были фиксированы: толщины оболочки h_s и основания h_f полагались равными $r_b/50 = 0.2$ мм и $2r_b = 20$ мм соответственно, их плотности ρ_s и ρ_f , следуя работе [29], полагались равными плотности жидкости ρ . Коэффициенты Пуассона μ_s и μ_f в [29] равны 0.5 и 0.49 соответственно, однако в данной работе использовалось одно значение $\mu_s = \mu_f = 0.49$, поскольку изменение коэффициента Пуассона относительно слабо влияет на характеристики устойчивости потока (см. [6]).

8.1. Постоянные в азимутальном направлении возмущения

Сначала была проанализирована устойчивость основного течения к постоянным в азимутальном направлении возмущениям ($n = 0$). Здесь и далее рассматривались следующие диапазоны значений числа Рейнольдса и продольного волнового числа: $1 \leq Re \leq 20000$ и $0.1 \leq \alpha \leq 15$. В случае трубы с однослойной стенкой для рассматриваемого диапазона значений модуля Юнга E_s оболочки основное течение оказалось неустойчивым только при использовании упрощенных динамических условий (5.16').

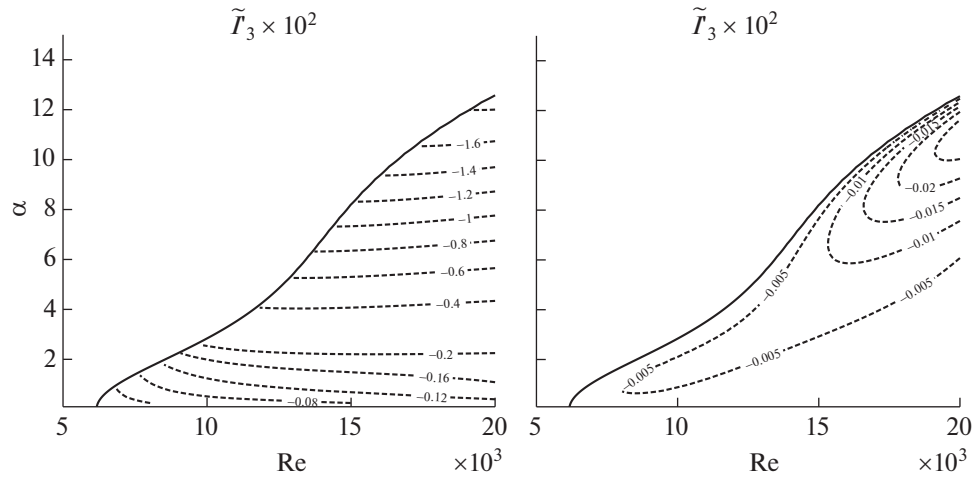
На фиг. 1 показаны нейтральные кривые и линии уровня скоростей нарастания возмущений, рассчитанные для проблемы (5.14), (5.15), (5.16'), (5.17) при различных значениях E_s . Нейтральные кривые отделяют области значений параметров Re и α , при которых течение устойчиво (в данном случае слева от кривых), от значений, при которых течение неустойчиво. С ростом жесткости оболочки нейтральные кривые смещаются вправо, т.е. течение стабилизируется. Это согласуется с тем, что в трубе круглого сечения с твердой стенкой течение Пуазейля линейно



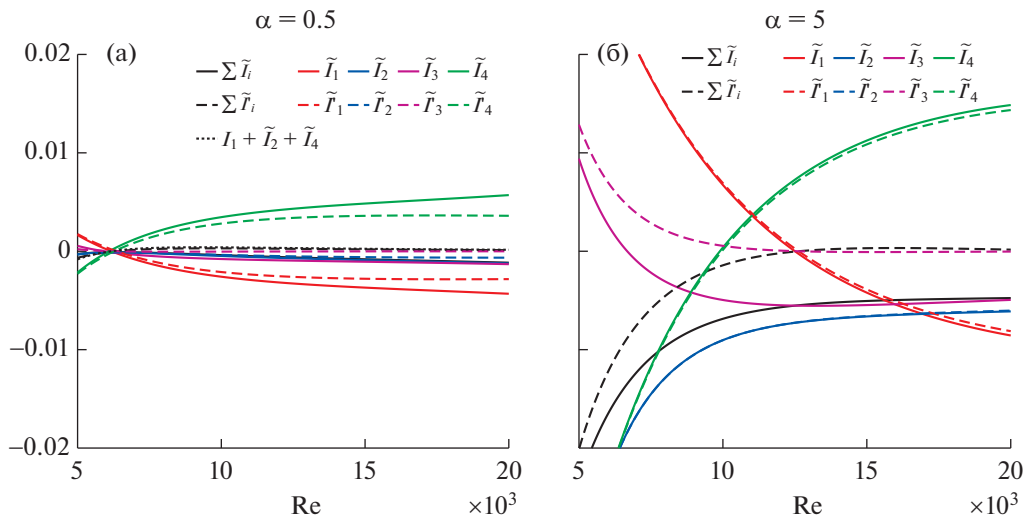
Фиг. 2. Нейтральная кривая $\text{Re}'_c(\alpha, 0)$ (сплошная линия) и линии уровня величины $(\tilde{I}'_i - \tilde{I}_i) \times 10^2$, $i = 1, \dots, 4$ (пунктир), $n = 0$. Однослойная стенка, $E_s = 2 \times 10^5$ Па.

устойчиво (см. [18]–[20]). При этом скорости роста нарастающих возмущений оказываются довольно малыми ($\omega_i < 3 \times 10^{-4}$ для $E_s = 2 \times 10^5$ Па).

Для исследования причин такого отличия характеристик устойчивости, полученных на основе динамических условий (5.16) и (5.16'), был проанализирован вклад каждого слагаемого в уравнении (6.22) в изменение кинетической энергии возмущения основного течения в зависимости от используемых динамических условий. Для этого в узлах некоторой достаточно подробной по Re и α сетки вычислялась приближенная собственная функция проблемы (5.14), (5.15), (5.17) с условиями (5.16), либо (5.16'), отвечающая ее ведущему собственному значению, для которой затем рассчитывались соответствующие значения $\tilde{I}_i$, либо $\tilde{I}'_i$, $i = 1, \dots, 4$. На фиг. 2 представлены линии уровня величины $(\tilde{I}'_i - \tilde{I}_i) \times 10^2$ в области неустойчивости. Видно, что в зависимости от используемых динамических условий при достаточно больших α (дополнительные расчеты показали, что при $\alpha \gtrsim 1$) наиболее сильно разнятся значения, которые принимает третье слагаемое, при этом значения остальных слагаемых отличаются гораздо слабее. Причем разница $\tilde{I}'_3 - \tilde{I}_3$ увеличивается с ростом α . На фиг. 3 видно, что третье слагаемое, которое отвечает за обмен энергией между возмущением основного течения и стенкой, при рассмотренных на фиг. 2 параметрах является отрицательным, как при использовании условий (5.16), так и (5.16'), что говорит об отводе кинетической энергии возмущения к стенке. Однако в случае упрощенных условий (5.16) отвод энергии оказывается значительно меньше, чем в случае условий (5.16), при всех рассмотренных α . Это также видно на фиг. 4, где представлены зависимости $\tilde{I}_i$ и $\tilde{I}'_i$ от Re для $\alpha = 0.5$ и 5. Интерес представляет их поведение при $\text{Re} \geq \text{Re}'_c(\alpha, 0)$, где, учитывая (5.18) и (6.22), $\text{Re}'_c(\alpha, 0)$ — это Re , при котором сумма $\tilde{I}'_i$ равна нулю. При достаточно малом продольном волновом числе, например, $\alpha = 0.5$, выбор динамических условий, главным образом, влияет на первое, третье и четвертое слагаемые в (6.22). В то же время, если рассмотреть сумму $\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + \tilde{I}_4$, т.е. исключить отвод кинетической энергии возмущения к стенке, то она окажется близка к сумме всех слагаемых $\tilde{I}'_i$ при $\text{Re} \geq \text{Re}'_c(0.5, 0)$ (см. фиг. 4а). Это позволяет предположить, что для $n = 0$ и рассмотренных на фиг. 2 параметров стенки, главной причиной неустойчивости основного течения при использовании упрощенных динамических условий (5.16') является малый, по сравнению со случаем использования условий (5.16), отток кинетической энергии возмущения основного течения к стенке.



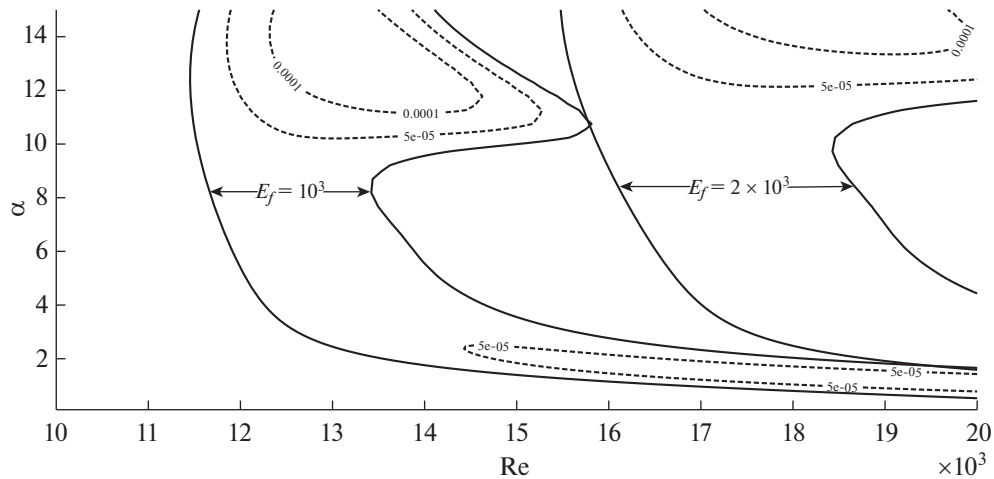
Фиг. 3. Нейтральная кривая $\text{Re}'_c(\alpha, 0)$ (сплошная линия) и линии уровня величин $\tilde{I}_3 \times 10^2$ и $\tilde{I}_3' \times 10^2$ (пунктир), $n = 0$. Однослойная стенка, $E_s = 2 \times 10^5$ Па.



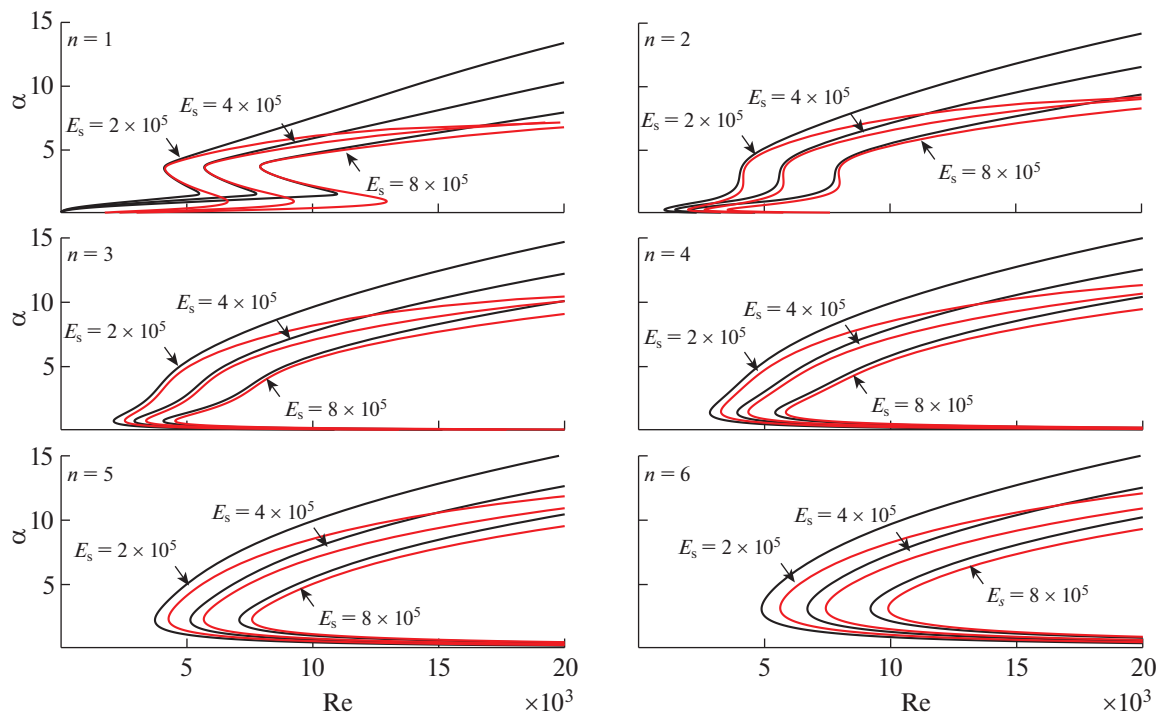
Фиг. 4. Зависимость от Re величин $\tilde{I}_i$ и $\tilde{I}_i'$, $i = 1, \dots, 4$, вычисленных при использовании условий (5.16) и (5.16') соответственно, $n = 0$. Однослойная стенка, $E_s = 2 \times 10^5$ Па.

В случае двухслойной стенки без демпфирования неустойчивость основного течения также наблюдается только при использовании упрощенных условий (5.16'). На фиг. 5 сравниваются нейтральные кривые $\text{Re}'_c(\alpha, 0)$ и соответствующие линии уровня скоростей нарастания возмущений. Видно, что при выбранных параметрах наличие второго слоя заметно подавляет нарастающие возмущения, хотя при достаточно больших α нарастание возмущений в рассматриваемом основном течении наблюдается при меньших числах Рейнольдса, чем в случае однослойной стенки. Скорости роста возмущений оказываются еще меньше, чем в случае однослойной стенки. Рост модуля Юнга основания так же, как и рост модуля Юнга оболочки, подавляет нарастающие возмущения.

В случае двухслойной стенки с демпфированием ($d = 10, 100$) в рассмотренном диапазоне значений Re и α не было обнаружено нарастающих возмущений с $n = 0$ ни при использовании условий (5.16), ни при использовании упрощенных условий (5.16').



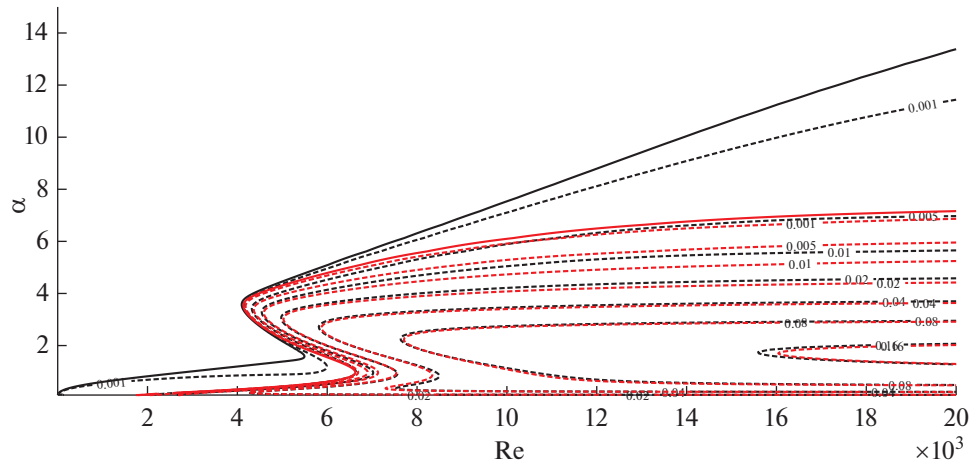
Фиг. 5. Нейтральные кривые $Re'_c(\alpha, 0)$ (сплошная линия) и линии уровня скоростей нарастания ω_i возмущений (пунктир), $n = 0$. Двухслойная стенка без демпфирования с модулем Юнга оболочки $E_s = 2 \times 10^5$ Па при различных значениях модуля Юнга E_f [Па] основания.

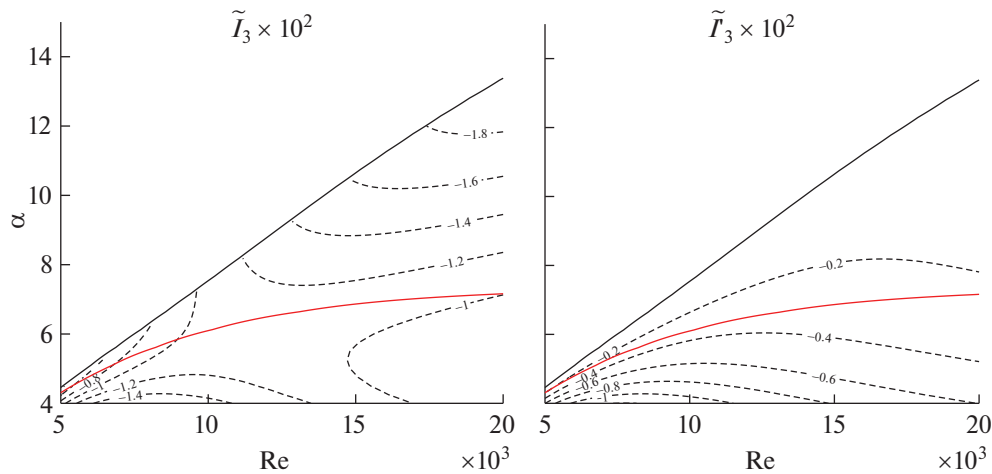


Фиг. 6. Нейтральные кривые $Re_c(\alpha, n)$ (красный) и $Re'_c(\alpha, n)$ (черный) для различных значений n и модуля Юнга E_s [Па] оболочки. Однослойная стенка.

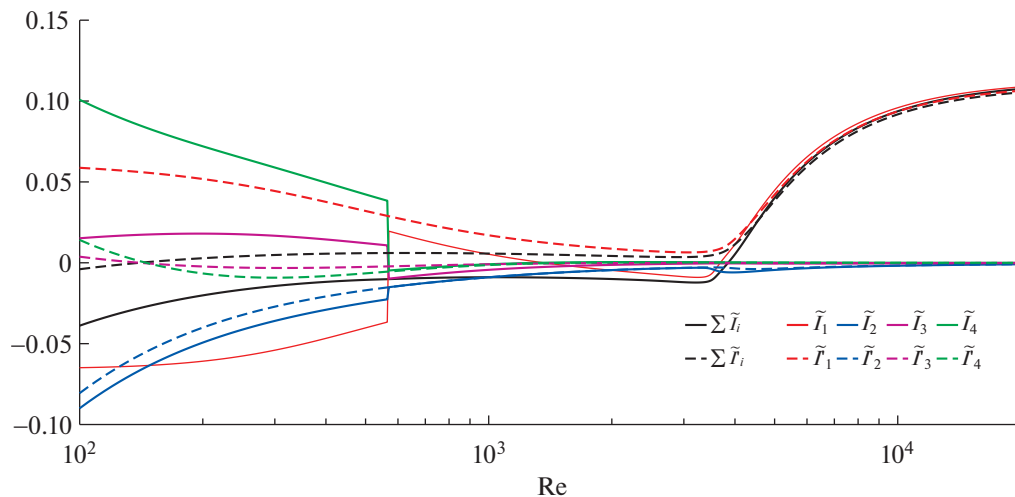
8.2. Гармонические в азимутальном направлении возмущения

Далее была проанализирована устойчивость основного течения по отношению к гармоническим в азимутальном направлении возмущениям. На фиг. 6 для трубы с однослойной стенкой представлены кривые нейтральной устойчивости $Re_c(\alpha, n)$ и $Re'_c(\alpha, n)$ при различных значениях модуля Юнга E_s оболочки. Видно, что при изменении E_s качественное поведение кривых совпадает при всех рассмотренных n и согласуется с тем, что с ростом жесткости стенки течение долж-





Фиг. 9. Нейтральные кривые $\text{Re}_c(\alpha, 1)$ (красная сплошная линия), $\text{Re}'_c(\alpha, 1)$ (черная сплошная линия) и линии уровня величин $\tilde{I}_3 \times 10^2$ и $\tilde{I}'_3 \times 10^2$ (пунктир), $n = 1$. Однослойная стенка, $E_s = 2 \times 10^5$ Па.

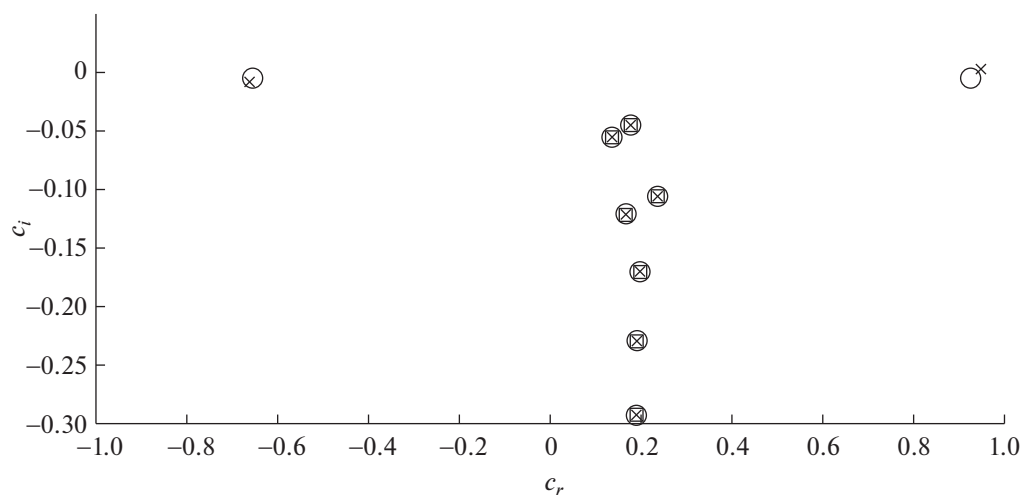


Фиг. 10. Зависимость от Re величин $\tilde{I}_i$ и $\tilde{I}'_i$, $i = 1, \dots, 4$, вычисленных при использовании условий (5.16) и (5.16') соответственно, $\alpha = 0.3$, $n = 1$. Однослойная стенка, $E_s = 2 \times 10^5$ Па.

приводит к появлению дополнительных областей значений Re и α , для которых существуют сравнительно слабо нарастающие возмущения.

Анализ слагаемых уравнения (6.22) показал (см. фиг. 8 и 9), что при $n = 1$ и достаточно больших α появление таких возмущений, как и при $n = 0$, главным образом, обусловлено существенно меньшим отводом кинетической энергии возмущения основного течения к стенке при использовании упрощенных динамических условий (5.16'), чем при использовании условий (5.16). При достаточно малых значениях α расчеты показали, что нельзя выделить какое-то одно слагаемое в (6.22), которое значительно сильнее других менялось бы в зависимости от выбранных динамических условий, и тем самым определить единственный механизм роста или убыли кинетической энергии возмущения, вызывающий в конечном счете отличия нейтральных кривых $\text{Re}_c(\alpha, 1)$ и $\text{Re}'_c(\alpha, 1)$. Например, для $\alpha = 0.3$ (см. фиг. 10) можно отметить следующее:

— при $\text{Re}'_c(0.3, 1) \lesssim \text{Re} \lesssim 565$ все слагаемые в (6.22) чувствительны к выбору динамических условий, хотя второе, отвечающее за рассеяние энергии возмущения из-за вязкости, — в меньшей степени, чем остальные;



Фиг. 11. Нормированная на $\sqrt{\alpha^2 + n^2}$ главная часть спектра проблемы (5.14), (5.15), (5.17) с динамическими условиями (5.16) (○) и (5.16') (×) в случае однослойной податливой стенки с $E_s = 2 \times 10^5$ Па, а также проблемы (5.14), (5.17) с условиями прилипания на твердой стенке (□), $Re = 565$, $\alpha = 0.3$, $n = 1$.

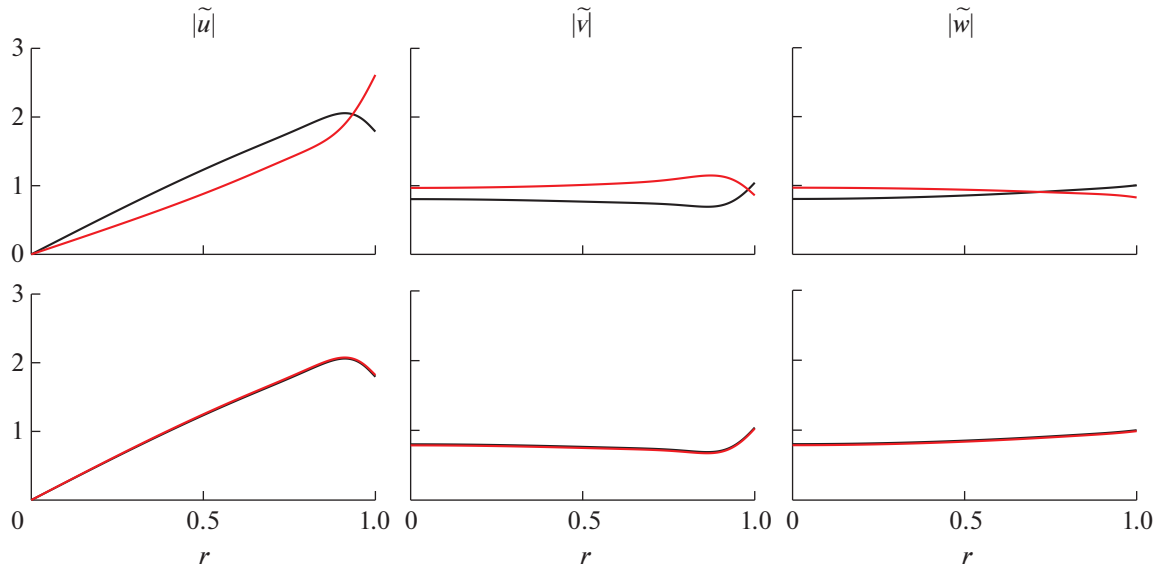
– при $565 \lesssim Re \leq Re_c(0.3, 1)$ чувствительны, главным образом, первое и третье слагаемые, причем с ростом Re третье слагаемое все слабее зависит от выбора динамических условий. Второе (за исключением узкого диапазона $3400 \lesssim Re \leq Re_c(0.3, 1)$) и четвертое слагаемые, напротив, принимают практически одинаковые значения, как при использовании условий (5.16), так и условий (5.16');

– при $Re \gtrsim Re_c(0.3, 1)$ все слагаемые принимают достаточно близкие значения, как при использовании условий (5.16), так и условий (5.16'). Как следствие, соответствующие линии уровня ω_i на фиг. 7 хорошо согласуются. Видно, что в этом случае нарастание возмущения, главным образом, обеспечивается за счет передачи ему энергии от основного течения.

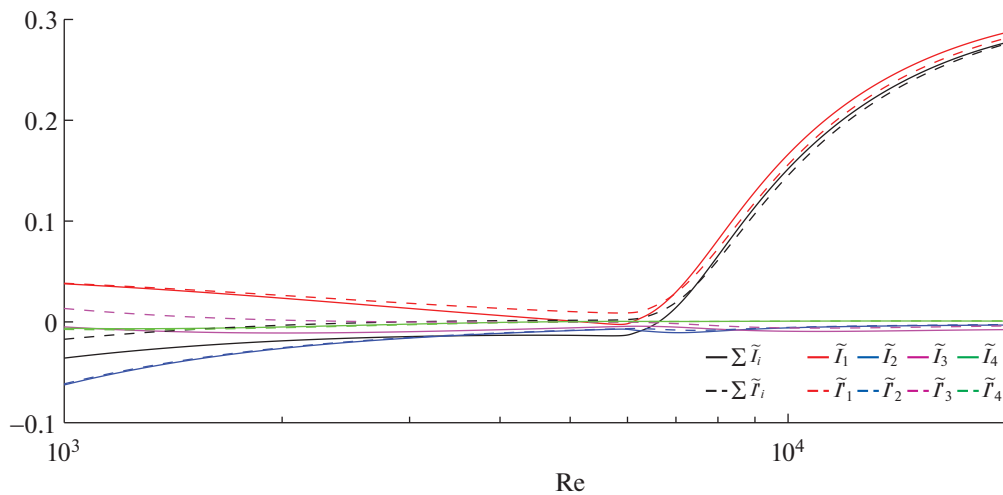
Скачкообразное изменение значений $\tilde{I}_i$ вблизи $Re = 565$ при $\alpha = 0.3$ связано со сменой ведущего собственного значения и отвечающей ему собственной функции проблемы (5.14), (5.15), (5.16), (5.17). На фиг. 11 даны нормированные на $\sqrt{\alpha^2 + n^2}$ главные части спектров проблемы (5.14), (5.15), (5.17) с условиями (5.16) и (5.16') в случае трубы с однослойной податливой стенкой с $E_s = 2 \times 10^5$ Па, а также проблемы (5.14), (5.17) с условиями прилипания на твердой стенке. Видно, что почти все собственные значения, отвечающие податливой стенке, близки к собственным значениям, отвечающим твердой стенке, и, как показали расчеты, сходятся к последним с увеличением жесткости оболочки. Однако два ведущих собственных значения сильно отличаются от ведущих собственных значений для твердой стенки и не сходятся к ним при увеличении жесткости стенки (хотя и перестают быть ведущими). Одному отвечает возмущение с отрицательной

Таблица 2. Первые два ведущих собственных значения проблемы (5.14), (5.15), (5.17) с динамическими условиями (5.16) и (5.16'), нормированные на $\sqrt{\alpha^2 + n^2}$, $\alpha = 0.3$, $n = 1$. Однослойная стенка, $E_s = 2 \times 10^5$ Па

	$c_r \times 10$	$c_i \times 10^3$	$c_r \times 10$	$c_i \times 10^3$
$Re = 565$				
(5.16)	–6.5505	–4.8592	9.2550	–4.8639
(5.16')	9.4815	2.8885	–6.6181	–8.0466
$Re = 570$				
(5.16)	9.1859	–4.8458	–6.4816	–4.8480
(5.16')	9.4113	2.8904	–6.5481	–8.0508

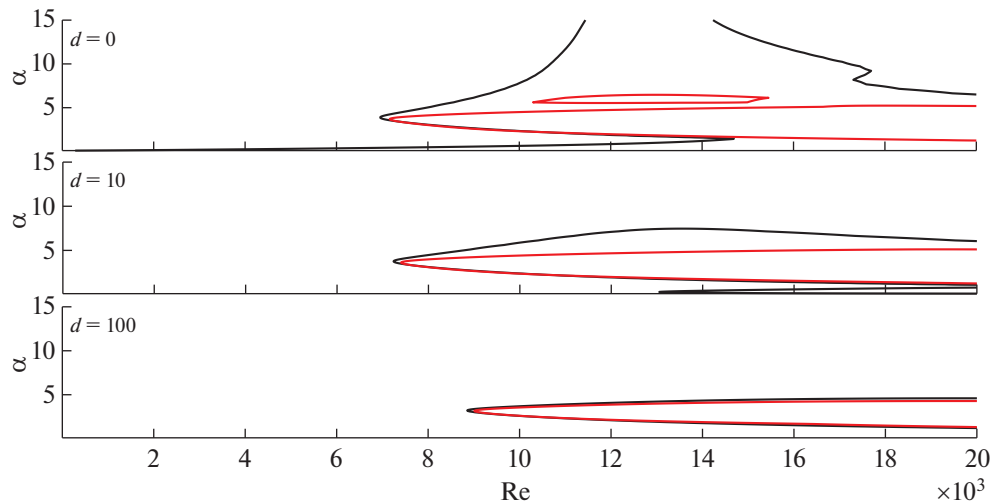


Фиг. 12. Нормированные на $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{u}})^{1/2}$ модули амплитуд компонент возмущения скорости, отвечающего ведущему собственному значению проблемы (5.14), (5.15), (5.17) с динамическими условиями (5.16) (красный) и (5.16') (черный), $\text{Re} = 565$ (верхний ряд), $\text{Re} = 570$ (нижний ряд), $\alpha = 0.3$, $n = 1$. Однослойная стенка, $E_s = 2 \times 10^5$ Па.



Фиг. 13. Зависимость от Re величин $\tilde{I}_i$ и $\tilde{I}_i^*$, $i = 1, \dots, 4$, вычисленных при использовании условий (5.16) и (5.16') соответственно, $\alpha = 1$, $n = 1$. Однослойная стенка, $E_s = 2 \times 10^5$ Па.

фазовой скоростью c_r , а второму — с положительной. В рассматриваемом диапазоне значений Re расчеты для $\alpha = 0.3$ и $E_s = 2 \times 10^5$ Па показали, что при $\text{Re} \leq 565$ ведущим является собственное значение с $c_r < 0$ в случае условий (5.16) и с $c_r > 0$ в случае условий (5.16'), а при $\text{Re} \geq 570$ ведущим всегда является собственное значение с $c_r > 0$ (см. также табл. 2). На фиг. 12 для $\alpha = 0.3$ показаны модули амплитуд $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ компонент возмущения скорости, отвечающего ведущему собственному значению при условиях (5.16) и (5.16'). Видно, что в случае условий (5.16) модули этих амплитуд при $\text{Re} = 565$ и $\text{Re} = 570$ заметно отличаются, чем и обусловлен скачок значений $\tilde{I}_i$ на фиг. 10. Отметим, что при $\text{Re} = 570$ амплитуды $|\tilde{u}|$, $|\tilde{v}|$, $|\tilde{w}|$, рассчитанные при условиях (5.16), гораздо слабее отличаются от соответствующих амплитуд, вычисленных при условиях (5.16').



Фиг. 14. Нейтральные кривые $Re_c(\alpha, 1)$ (красный) и $Re'_c(\alpha, 1)$ (черный), $n = 1$. Двухслойная стенка без демпфирования, $E_s = 2 \times 10^5$ Па, $E_f = 10^3$ Па.

Расчеты показали, что с ростом α упомянутые скачки значений $\tilde{I}_i$ наблюдаются при все меньших значениях числа Рейнольдса и, например, при $\alpha = 1$ отличия $Re_c(1, 1)$ и $Re'_c(1, 1)$ обусловлены, главным образом, отличием значений, которые принимают первое и третье слагаемые в (6.22) (фиг. 13).

В заключение было выполнено сравнение нейтральных кривых $Re_c(\alpha, 1)$ и $Re'_c(\alpha, 1)$ в случае двухслойной стенки (фиг. 14). Видно, что наличие второго слоя заметно подавляет нарастающие возмущения, как при использовании условий (5.16), так и (5.16'). При этом в случае условий (5.16) выделяется отдельная область неустойчивости при $5.5 \lesssim \alpha \lesssim 6.5$, а в случае упрощенных условий (5.16') появляются коротковолновые возмущения, которые нарастают при меньших числах Рейнольдса, чем в случае однослойной стенки, что также наблюдалось и при $n = 0$. Демпфирование сильно подавляет нарастающие возмущения. С его ростом разница между кривыми $Re_c(\alpha, 1)$ и $Re'_c(\alpha, 1)$ уменьшается и уже при $d = 100$ они согласуются очень хорошо.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена новая численная модель для исследования линейной устойчивости течения Пуазейля в круглой трубе с податливой стенкой. Стенка рассматривается как тонкая однородная и изотропная оболочка, которая может быть окружена вязкоупругим основанием из однородного материала. Колебания стенки описываются уравнениями Лява общего вида. В рамках модели эти уравнения используются как динамические граничные условия для линеаризованных относительно основного стационарного течения уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости. Кроме таких, полных, динамических условий, рассмотрены упрощенные, полученные с помощью приближения Доннела–Муштари–Власова. В рамках этого приближения предполагается, что оболочка нагружается и смещается в основном по нормали к срединной поверхности. Это, в частности, подразумевает пренебрежение касательными компонентами вязкого тензора напряжений в жидкости на стенке. Однако, учитывая уже известные результаты, при выводе упрощенных условий мы пренебрегли всеми компонентами вязкого тензора. Анализ характеристик устойчивости (нейтральных кривых, линий уровня скоростей нарастания возмущений) течения Пуазейля для широкого диапазона значений числа Рейнольдса, продольного и поперечного волновых чисел, жесткости и демпфирования стенки, позволил сделать следующие основные выводы:

- использование упрощенных динамических условий вместо полных качественно не меняет зависимость характеристик устойчивости основного течения от жесткости и демпфирования стенки;

- использование упрощенных динамических условий, по сравнению с полными, приводит к появлению дополнительных областей значений Re и α , при которых существуют слабо нарастающие возмущения;
- рост жесткости и/или демпфирования стенки значительно подавляет эти слабо нарастающие возмущения и, тем самым, сокращает отличия характеристик устойчивости основного течения, полученных при упрощенных динамических условиях, от характеристик, полученных при полных динамических условиях.

Для рассмотренных значений параметров задачи в зависимости от выбранных динамических условий сильнее всего отличаются характеристики устойчивости, отвечающие постоянным в азимутальном направлении возмущениям ($n = 0$) и стенке без демпфирования. В этом случае при использовании полных условий нарастающих возмущений обнаружено не было, в то время как при использовании упрощенных условий были найдены слабо нарастающие возмущения. Показано, что их наличие, главным образом, обусловлено значительно меньшим отводом кинетической энергии возмущения к стенке, чем при использовании полных динамических условий. При наличии демпфирования нарастающих возмущений с $n = 0$ найдено не было ни при полных, ни при упрощенных динамических условиях.

Кроме того, расчеты показали, что для рассмотренных значений α и параметров стенки устойчивость течения определяют гармонические в азимутальном направлении возмущения. Для $n = 1, \dots, 6$ наибольшие отличия нейтральных кривых в зависимости от выбранных динамических условий наблюдаются при $n = 1$ для стенки без демпфирования с минимальным из рассмотренных значением модуля Юнга оболочки. В этом случае кривые, главным образом, отличаются при $\alpha \lesssim 1.5$ и $\alpha \gtrsim 5$ из-за слабо нарастающих возмущений, появляющихся при использовании упрощенных динамических условий. Анализ уравнения кинетической энергии возмущений показал, что при $\alpha \lesssim 1.5$ нельзя выделить единственный механизм изменения кинетической энергии возмущения, который определял бы в конечном счете наблюдаемые отличия характеристик устойчивости. При $\alpha \gtrsim 5$, напротив, появление слабо нарастающих возмущений при использовании упрощенных динамических условий, как и при $n = 0$, вызвано, главным образом, значительно меньшим, чем при использовании полных динамических условий, отводом кинетической энергии возмущения к стенке.

Полученные результаты об устойчивости течения Пуазейля в трубе с податливой стенкой, моделируемой на основе теории тонких оболочек, позволяют заключить, что для качественного изучения влияния вязкоупругих характеристик стенки на устойчивость основного течения при значениях параметров задачи, характерных для медицинских приложений, колебания стенки можно описывать упрощенными уравнениями Лява, полученными в приближении Доннелла–Муштары–Власова. При этом важно анализировать не только нейтральные кривые, но и скорости роста возмущений. Их величина позволит судить о том, как изменятся нейтральные кривые при учете касательных напряжений, возникающих на податливой стенке.

Автор выражает благодарность А.В. Бойко (ИТПМ СО РАН) за плодотворные обсуждения результатов работы и рецензенту данной работы за важные замечания и предложения.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Покажем, как свести проблему (5.14), (5.15), (5.16), (5.17), аппроксимированную по пространственной переменной r методом, описанным в разд. 6, к виду (7.23). Пусть $\hat{D}^p$ — квадратная матрица порядка $2n_r$, являющаяся дискретным аналогом оператора первой производной в узлах r_i , $i = 1, 2, \dots, 2n_r$, для давления, заданного в тех же узлах, $\hat{D}_1$ и $\hat{D}_2$ — квадратные матрицы порядка $2n_r + 2$, являющиеся дискретными аналогами операторов первой и второй производной соответственно в узлах r_i , $i = 0, 1, \dots, 2n_r + 1$, для скорости, заданной в тех же узлах. Расчет перечисленных матриц выполнялся на основе алгоритмов, описанных в работах [33], [34].

Разобьем матрицы $\hat{D}_1$ и $\hat{D}_2$ на блоки следующим образом:

$$\begin{bmatrix} * & *** & * \\ D_1^{(1)} & D_1 & D_1^{(2)} \\ d^{(1)} & d & d^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} * & *** & * \\ D_2^{(1)} & D_2 & D_2^{(2)} \\ * & *** & * \end{bmatrix},$$

где D_1, D_2 — квадратные матрицы порядка $2n_r$; $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$, $k = 1, 2$, — $2n_r$ -компонентные столбцы; d — $2n_r$ -компонентная строка; и введем прямоугольные матрицы и строку

$$D_1^b = [D_1^{(1)} \ D_1^{(2)}], \quad D_2^b = [D_2^{(1)} \ D_2^{(2)}] \quad \text{и} \quad d^b = [d^{(1)} \ d^{(2)}]$$

соответственно. Тогда аппроксимированную по пространственным переменным проблему (5.14), (5.15), (5.16), (5.17) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} & -i\omega \Pi_e \mathbf{u} + \left(i\alpha U - \frac{1}{\text{Re}} L \right) \Pi_e \mathbf{u} - \frac{1}{\text{Re}} L^b \Pi_e^b \mathbf{u}_b + U_r \Pi_o \mathbf{w} + i\alpha \Pi_e \mathbf{p} = 0, \\ & -i\omega \Pi_o \mathbf{v} + \left(i\alpha U - \frac{1}{\text{Re}} L + \frac{1}{\text{Re}} M_r^2 \right) \Pi_o \mathbf{v} - \frac{1}{\text{Re}} L^b \Pi_o^b \mathbf{v}_b - \frac{2in}{\text{Re}} M_r^2 \Pi_o \mathbf{w} + G_v \Pi_e \mathbf{p} = 0, \\ & -i\omega \Pi_o \mathbf{w} + \frac{2in}{\text{Re}} M_r^2 \Pi_o \mathbf{v} + \left(i\alpha U - \frac{1}{\text{Re}} L + \frac{1}{\text{Re}} M_r^2 \right) \Pi_o \mathbf{w} - \frac{1}{\text{Re}} L^b \Pi_o^b \mathbf{w}_b + G_w \Pi_e \mathbf{p} = 0, \\ & -i\omega \xi + 2\zeta - \mathbf{u}_b + i\alpha \frac{h_s}{2r_b} \mathbf{w}_b = 0, \\ & -i\omega \eta - \mathbf{v}_b + in \frac{h_s}{2r_b} \mathbf{w}_b = 0, \\ & -i\omega \zeta - \mathbf{w}_b = 0, \\ & -i\omega \mathbf{w}_b + \frac{1}{\text{Re}^2} M_{\zeta \xi} \xi + \frac{1}{\text{Re}^2} M_{\zeta \eta} \eta + \frac{1}{\text{Re}^2} M_{\zeta \zeta} \zeta + \\ & + \frac{2}{\gamma \text{Re}} d \Pi_o \mathbf{w} + \frac{1}{\gamma \text{Re}} (d_r + 2d^b \Pi_o^b) \mathbf{w}_b - \frac{1}{\gamma} \Pi_\rho^b \Pi_e \mathbf{p} = 0, \\ & -i\omega \left(\mathbf{v}_b - in \frac{h_s}{2r_b} \mathbf{w}_b \right) + \frac{1}{\text{Re}^2} M_{\eta \xi} \xi + \frac{1}{\text{Re}^2} M_{\eta \eta} \eta + \frac{1}{\text{Re}^2} M_{\eta \zeta} \zeta + \\ & + \frac{1}{\gamma \text{Re}} d \Pi_o \mathbf{v} + \frac{1}{\gamma \text{Re}} ((d_\theta - 1) + d^b \Pi_o^b) \mathbf{v}_b + \frac{in}{\gamma \text{Re}} \left(1 - \frac{h_s d_\theta}{2r_b} \right) \mathbf{w}_b = 0, \\ & -i\omega \left(-2\zeta + \mathbf{u}_b - i\alpha \frac{h_s}{2r_b} \mathbf{w}_b \right) + \frac{1}{\text{Re}^2} M_{\xi \xi} \xi + \frac{1}{\text{Re}^2} M_{\xi \eta} \eta + \frac{1}{\text{Re}^2} M_{\xi \zeta} \zeta + \\ & + \frac{1}{\gamma \text{Re}} d \Pi_e \mathbf{u} + \frac{1}{\gamma \text{Re}} (d_x + d^b \Pi_e^b) \mathbf{u}_b + \frac{i\alpha}{\gamma \text{Re}} \left(1 - \frac{h_s d_x}{2r_b} \right) \mathbf{w}_b = 0, \\ & i\alpha \Pi_e \mathbf{u} + F_v \Pi_o \mathbf{v} + F_w \Pi_o \mathbf{w} + D_1^b \Pi_o^b \mathbf{w}_b = 0, \end{aligned} \tag{A.25}$$

где $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{p}, \mathbf{u}_b, \mathbf{v}_b, \mathbf{w}_b, \xi, \eta, \zeta$ определены в разд. 6. Кроме того, в (A.25) использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} M_r &= \mathcal{D}(1/r), \quad U = \mathcal{D}(1-r^2), \quad U_r = -2\mathcal{D}(r), \quad L = -\alpha^2 I_{2n_r} - n^2 M_r^2 + M_r D_1 + D_2, \\ L^b &= M_r D_1^b + D_2^b, \quad F_v = in M_r, \quad F_w = M_r + D_1, \quad G_v = in M_r, \quad G_w = D^p, \\ M_{\xi \xi} &= \frac{1}{\gamma} \left[\left(\alpha^2 + n^2 \frac{1-\mu}{2} \right) K + k_x \right], \quad M_{\xi \eta} = \frac{\alpha n}{2\gamma} K(1+\mu), \quad M_{\xi \zeta} = -\frac{1}{\gamma} (i\alpha K\mu + 2d_x \text{Re}), \\ M_{\eta \xi} &= M_{\xi \eta}, \quad M_{\eta \eta} = \frac{1}{\gamma} \left[\left(\alpha^2 \frac{1-\mu}{2} + n^2 \right) (K + D) + k_\theta \right], \quad M_{\eta \zeta} = -\frac{in}{\gamma} [K + (\alpha^2 + n^2) D], \\ M_{\zeta \xi} &= \frac{i\alpha}{\gamma} K\mu, \quad M_{\zeta \eta} = -M_{\eta \zeta}, \quad M_{\zeta \zeta} = \frac{1}{\gamma} [K + (\alpha^2 + n^2)^2 D + k_r]. \end{aligned}$$

Здесь, например, $\mathcal{D}(1/r)$ — диагональная матрица порядка $2n_r$ с диагональными элементами $1/r_i$, $i = 1, 2, \dots, 2n_r$. Кроме того, с помощью матриц

$$\Pi_e = \begin{bmatrix} (-1)^n I'_{n_r} \\ I_{n_r} \end{bmatrix}, \quad \Pi_o = \begin{bmatrix} (-1)^{n+1} I'_{n_r} \\ I_{n_r} \end{bmatrix}, \quad \Pi_e^b = \begin{bmatrix} (-1)^n \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Pi_o^b = \begin{bmatrix} (-1)^{n+1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

учитываются условия симметрии (5.17).

Умножая первое и последнее уравнения в (A.25) на $\Pi_e^T/2$, а второе и третье — на $\Pi_o^T/2$, после замены $\Pi_e := \Pi_e/\sqrt{2}$, $\Pi_o := \Pi_o/\sqrt{2}$, $\Pi_e^b := \Pi_e^b/\sqrt{2}$, $\Pi_o^b := \Pi_o^b/\sqrt{2}$ получим линейную обобщенную проблему собственных значений:

$$\begin{aligned} i\omega \mathbf{v} &= J\mathbf{v} + J^b \mathbf{v}_b + G\mathbf{p}, \\ i\omega \mathbf{v}_\xi &= M_k^\xi \mathbf{v}_\xi + M_k^b \mathbf{v}_b, \\ i\omega B_d^\xi \mathbf{v}_\xi + i\omega B_d^b \mathbf{v}_b &= \frac{1}{\text{Re}} M_d \mathbf{v} + \frac{1}{\text{Re}^2} M_d^\xi \mathbf{v}_\xi + \frac{1}{\text{Re}} M_d^b \mathbf{v}_b + M_d^p \mathbf{p}, \\ 0 &= F\mathbf{v} + \Pi_e^T D_1^b \Pi_o^b \mathbf{w}_b, \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_b \\ \mathbf{v}_b \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_\xi = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}, \\ J &= \Pi^T \left(J_1 + \frac{1}{\text{Re}} J_2 \right) \Pi, \\ J_1 &= \begin{bmatrix} i\alpha U & 0 & U_r \\ 0 & i\alpha U & 0 \\ 0 & 0 & i\alpha U \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} -L & 0 & 0 \\ 0 & -L + M_r^2 & -2inM_r^2 \\ 0 & 2inM_r^2 & -L + M_r^2 \end{bmatrix}, \\ J^b &= \frac{1}{\text{Re}} \Pi^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & -L^b \\ 0 & -L^b & 0 \\ -L^b & 0 & 0 \end{bmatrix} \Pi^b, \quad G = \Pi^T \begin{bmatrix} i\alpha I_{2n_r} \\ G_v \\ G_w \end{bmatrix} \Pi_e, \\ M_k^\xi &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_k^b = \begin{bmatrix} i\alpha \frac{h_s}{2r_b} & 0 & -1 \\ in \frac{h_s}{2r_b} & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_d^\xi = \begin{bmatrix} M_{\zeta\xi} & M_{\zeta\eta} & M_{\zeta\zeta} \\ M_{\eta\xi} & M_{\eta\eta} & M_{\eta\zeta} \\ M_{\xi\xi} & M_{\xi\eta} & M_{\xi\zeta} \end{bmatrix}, \\ M_d^b &= \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} d_r + 2\sqrt{2}d^b \Pi_o^b & 0 & 0 \\ in \left(1 - \frac{h_s d_\theta}{2r_b} \right) & d_\theta - 1 + \sqrt{2}d^b \Pi_o^b & 0 \\ i\alpha \left(1 - \frac{h_s d_x}{2r_b} \right) & 0 & d_x + \sqrt{2}d^b \Pi_e^b \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$M_d = \frac{\sqrt{2}}{\gamma} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2d\Pi_o \\ 0 & d\Pi_o & 0 \\ d\Pi_e & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_d^\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_d^b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -in\frac{h_s}{2r_b} & 1 & 0 \\ -i\alpha\frac{h_s}{2r_b} & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F = \Pi_e^T [i\alpha I_{2n_r}, F_v, F_w] \Pi, \quad \Pi = \mathcal{D}([\Pi_e, \Pi_o, \Pi_o]), \quad \Pi^b = \mathcal{D}([\Pi_o^b, \Pi_o^b, \Pi_e^b]).$$

Вводя обозначения

$$\mathbf{v} := \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{v}_\xi \\ \mathbf{v}_b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} I_{3n_r} & 0 & 0 \\ 0 & I_3 & 0 \\ 0 & B_d^\xi & B_d^b \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} J & 0 & J^b \\ 0 & M_k^\xi & M_k^b \\ \frac{1}{\text{Re}} M_d & \frac{1}{\text{Re}^2} M_d^\xi & \frac{1}{\text{Re}} M_d^b \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} G \\ 0 \\ G^b \end{bmatrix}, \quad G^b = -\frac{\sqrt{2}}{\gamma} \begin{bmatrix} \Pi_p^b \Pi_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F = [F \ 0 \ F^b], \quad F^b = [\Pi_e^T D_1^b \Pi_o^b \ 0 \ 0],$$

проблему (A.26) можно свести к виду (7.23).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kramer M.O.* Boundary layer stabilization by distributed damping // J. Aeron. Sci. 1957. V. 24. P. 459–460.
2. *Benjamin T.* Effects of a flexible boundary on hydrodynamic stability // J. Fluid Mech. 1960. V. 9. P. 513–532.
3. *Landahl M.T.* On the stability of a laminar incompressible boundary layer over a flexible surface // J. Fluid Mech. 1962. V. 13. P. 609–632.
4. *Gad-el-Hak M.* Compliant coatings for drag reduction // Progr. Aerosp. Sci. 2002. V. 38. P. 77–99.
5. *Kumaran V.* Hydrodynamic stability of flow through compliant channels and tubes. In: Carpenter P., Pedley T. ed. Flow Past Highly Compliant Boundaries and in Collapsible Tubes: Proceed. of the IUTAM Symp. held at the Univer. of Warwick, United Kingdom, 26–30 March 2001. Springer, 2003. P. 91–118.
6. *Eyvensel C.A., Khan M.R., Elli S., Krumpel P.E.* Viscous airflow through rigid tube with a compliant lining: a simple model for the air-mucus interaction in pulmonary airways // J. Biomech. Eng. 1993. V. 115. P. 262–270.
7. *Hamadiche M., Kizilova N.* Temporal and spatial instabilities of the flow in the blood vessels as multi-layered compliant tubes // Inter. J. Dyn. Fluids. 2005. V. 1. P. 1–25.
8. *Hamadiche M., Kizilova N., Gad-el-Hak M.* Suppression of absolute instabilities in the flow inside a compliant tube // Commun. Numer. Meth. Engng. 2009. V. 25. P. 505–531.
9. *Boiko A.V.* On modelling the stability of fluid flows in compliant pipes applied to hemodynamic problems // Siber. J. Phys. 2015. V. 10. P. 29–42. (In Russian)
10. *Guaus A., Bottaro A.* Instabilities of the flow in a curved channel with compliant walls // Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci. 2007. V. 463. № 2085. P. 2201–2222.
11. *Hæpffner J., Bottaro A., Favier J.* Mechanisms of non-modal energy amplification in channel flow between compliant walls // J. Fluid Mech. 2010. V. 642. P. 489–507.
12. *Hahn H.G.* Theory of Elasticity: Fundamentals of linear theory and its applications. Moscow: Mir, 1988. 344 p. (in Russian).
13. *Carpenter P.W., Garrad A.D.* The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Part 1. Tollmien–Schlichting instabilities // J. Fluid Mech. 1985. V. 155. P. 465–510.
14. *Novozhilov V.V., Chernykh K.F., Mikhailovsky E.I.* Linear theory of thin shells. Leningrad: Polytekhnika, 1991. 656 p. (in Russian).
15. *Soedel W.* Vibrations of shells and plates. 3rd ed.: Marcel Dekker, 2004. xxiv, 553 p.
16. *Domaradzki J.A., Metcalfe R.W.* Stabilization of laminar boundary layers by compliant membranes // Phys. Fluids 1986. V. 30. P. 695–705.
17. *Nagata M., Cole T.R.* On the stability of plane Poiseuille flow between compliant boundaries // WIT Trans. Model. Sim. 1999. V. 21. P. 231–240.
18. *Schmid P.J., Henningson D.S.* Stability and transition in shear flows. Berlin: Springer-Verlag, 2000. 556 p.
19. *Drazin P.G., Reid W.H.* Hydrodynamic stability, 2nd ed. Cambridge: Cambridge Univer. Press, 2004. 258 p.

20. *Boiko A.V., Dovgal A.V., Grek G.R., Kozlov V.V.* Physics of transitional shear flows. Berlin: Springer, 2012. 272 p.
21. *Boiko A.V., Nechepurenko Yu.M.* Numerical spectral analysis of temporal stability of laminar duct flows with constant cross sections // J. Comput. Math. Math. Phys. 2008. V. 48. № 10. P. 1–17.
22. *Nechepurenko Yu.M.* On the dimension reduction of linear differential-algebraic control systems // Doklady Mathematics. 2012. V. 86. P. 457–459.
23. *Boyd J.P.* Chebyshev and Fourier Spectral Methods, 2nd ed. DOVER Publ., Inc., New York, 2000. 594 p.
24. *Meseguer Á., Trefethen L.N.* A spectral Petrov–Galerkin formulation for pipe flow I: linear stability and transient growth. Rep. 00/18, Numerical Analysis Group, Oxford Univer., Computing Lab., 2000.
25. *Fornberg B.* A pseudospectral approach for polar and spherical geometries // SIAM J. Sci. Comp. 1995. V. 16. P. 1071–1081.
26. *Trefethen L.N.* Spectral Methods in MATLAB. Philadelphia: SIAM, 2000. 160 p.
27. *Demyanko K.V.* Numerical model for the investigation of hydrodynamic stability of shear flows in pipes of elliptic cross-section // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modell. 2019. V. 34. P. 301–316.
28. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Fluid mechanics, 2nd ed. Oxford: Pergamon Press, 1987. 539 p.
29. *Lucey A.D., Carpenter P.W.* Boundary layer instability over compliant walls: Comparison between theory and experiment // Phys. Fluids. 1995. V. 7. P. 2355–2363.
30. *Schmid P.J., Henningson D.S.* Optimal energy density growth in Hagen–Poiseuille flow // J. Fluid Mech. 1994. V. 227. P. 197–225.
31. *Davies C., Carpenter P.W.* Numerical simulation of the evolution of Tollmien–Schlichting waves over finite compliant panels // J. Fluid Mech. 1997. V. 335. P. 361–392.
32. *Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A.* Spectral methods. Fundamentals in single domains. Springer, Berlin, 2006. 563 p.
33. *Weideman J.A.C., Reddy S.C.* A MATLAB differentiation matrix suite // ACM Trans. Math. Software. 2000. V. 26. № 4. P. 465–519.
34. *Berrut J.P., Trefethen L.N.* Barycentric Lagrange interpolation // SIAM Rev. 2004. V. 46. № 3. P. 501–517.
35. *Temam R.* Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis. NorthHolland, Amsterdam, 1977. 500 p.
36. *Golub G.H., van Loan C.F.* Matrix computations. Third ed. London: The John Hopkins Univer. Press, 1996. 694 p.

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 519.635

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ТИПА М.М. ЛАВРЕНТЬЕВА В КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ¹⁾

© 2021 г. А. И. Козлов¹, М. Ю. Кокурин^{2,*}

¹ 424000 Республика Марий Эл, Йошкар-Ола, ул. Вознесенская, 110, АНО ДПО “Инфосфера”,
центр профессиональной подготовки “Институт программных систем”, Россия

² 424000 Республика Марий Эл, Йошкар-Ола, пл. Ленина, 1, Марийский государственный университет, Россия

*e-mail: kokurinm@yandex.ru

Поступила в редакцию 01.01.2021 г.
Переработанный вариант 01.01.2021 г.
Принята к публикации 01.01.2021 г.

Исследуются коэффициентные обратные задачи для уравнений второго и третьего порядков с одним и двумя неизвестными коэффициентами. В качестве исходных данных рассматривается решение уравнения для набора зондирующих источников, усредненное по времени со степенными весами. Установлено, что исходные нелинейные обратные задачи допускают эквивалентную редукцию к интегральным уравнениям, которые в зависимости от способа усреднения могут быть как линейными, так и нелинейными. Доказывается, что эти уравнения имеют единственное решение, определяющее искомое решение обратных задач. Приводятся результаты численного эксперимента по решению получаемого линейного интегрального уравнения с ядром специального вида. Библ. 18. Фиг. 4.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, коэффициентная обратная задача, линейное интегральное уравнение, бигармоническое уравнение, единственность, численный эксперимент.

DOI: 10.31857/S0044466921090131

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1], [2] М.М. Лаврентьев предложил подход к решению нелинейных коэффициентных обратных задач для широкого класса уравнений в частных производных, позволяющий редуцировать такие задачи к линейным интегральным уравнениям. Подход использует преобразование Лапласа исследуемого уравнения по времени. Поясним схему действий применительно к обратной задаче для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим обратную задачу акустического зондирования ограниченной неоднородности набором точечных источников, расположенных вне этой неоднородности (см. [3]). Акустическое поле $u(x, t) = u(x, t; q)$, возбуждаемое источником, находящимся в точке q , определяется решением задачи Коши

$$\frac{1}{c^2(x)} u_{tt}(x, t) = \Delta u(x, t) - \delta(x - q)g(t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0; \quad (1.1)$$
$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Здесь $c(x) > 0$ — скорость звука в точке $x \in \mathbb{R}^3$ и предполагается, что $c(x) \equiv c_0$ вне априори заданной ограниченной замкнутой области $D \subset \mathbb{R}^3$ с известной постоянной c_0 , а значения $c(x)$ при

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 20-11-20085).

$x \in D$ неизвестны. Для определенности функцию $c = c(x)$ считаем непрерывной на $\mathbb{R}^3$. Непрерывная функция g удовлетворяет условиям

$$\int_0^\infty g(t)dt \neq 0, \quad |g(t)| \leq C_0 e^{-\beta t}, \quad \beta > 0, \quad t \geq 0. \quad (1.2)$$

Для отыскания $c(x)$ при $x \in D$ рассеянное поле $u = u(x, t; q)$ измеряется при $t > 0$ в точках $x \in X$, где $X \subset \mathbb{R}^3$ — множество детекторов, $X \cap D = \emptyset$. Будем считать, что в эксперименте зондирования используется множество источников $q \in Y$, $Y \cap D = \emptyset$. Множества X и Y далее считаем замкнутыми областями, расположенными на многообразиях в $\mathbb{R}^3$, вид которых будет уточнен далее. Для суммируемой функции $f = f(t)$, $t \geq 0$, определим преобразование Лапласа $\tilde{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$. Будем считать, что все функции $u(x, t; q)$, $q \in Y$, и их производные по t до второго порядка включительно достаточно быстро убывают при $t \rightarrow +\infty$, когда $x \in X$, так что их преобразования Лапласа существуют. Кроме того, предполагаем, что $u(x, t; q) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ равномерно по $q \in Y$ и $t > 0$. Условия на функцию $c(x)$, обеспечивающие эти требования, обсуждаются в [4], [5]. Обозначим

$$\xi(x) = \frac{1}{c^2(x)} - \frac{1}{c_0^2}, \quad x \in D, \quad (1.3)$$

и перепишем уравнение (1.1) в виде

$$\Delta u - \frac{1}{c_0^2} u_{tt}(x, t) = \xi(x) u_{tt}(x, t) + \delta(x - q) g(t).$$

Функция c , очевидно, однозначно определяется по ξ , поэтому далее ограничимся отысканием $\xi(x)$ при $x \in D$. Применяя к обеим частям последнего равенства преобразование Лапласа по времени, получаем

$$\Delta \tilde{u}(x, p; q) - \frac{p^2}{c_0^2} \tilde{u}(x, p; q) = p^2 \xi(x) \tilde{u}(x, p; q) + \tilde{g}(p) \delta(x - q), \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (1.4)$$

В силу сделанных предположений, $\tilde{u}(x, p; q) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ равномерно по $q \in Y$, $p \geq 0$. Нам потребуется фундаментальное решение (функция Грина) уравнения

$$\Delta u(x) - \frac{p^2}{c_0^2} u(x) = \delta(x - q), \quad p \geq 0,$$

с условием на бесконечности $u(x) \rightarrow 0$, $|x| \rightarrow \infty$. Эта функция имеет вид

$$G(x, q; p) = -\frac{e^{-\frac{p}{c_0}|x-q|}}{4\pi|x-q|}. \quad (1.5)$$

Из (1.4) с учетом (1.5) следует равенство

$$\tilde{u}(x, p; q) = \tilde{g}(p) G(x, q; p) + p^2 \int_D G(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) \xi(x') dx', \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (1.6)$$

Обозначим для краткости

$$H^0(x, q; p) = \tilde{g}(p) G(x, q; p). \quad (1.7)$$

Двукратное дифференцирование равенства (1.6) по p с учетом (1.7) дает

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{pp}(x, p; q) &= H_{pp}^0(x, q; p) + 2 \int_D G(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) \xi(x') dx' + \\ &+ 4p \int_D [G_p(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) + G(x, x'; p) \tilde{u}_p(x', p; q)] \xi(x') dx' + \\ &+ p^2 \int_D [G_{pp}(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) + 2G_p(x, x'; p) \tilde{u}_p(x', p; q) + G(x, x'; p) \tilde{u}_{pp}(x', p; q)] \xi(x') dx'.\end{aligned}\quad (1.8)$$

Полагая в (1.6) и (1.8) $p = 0$, получаем

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, 0; q) &= H^0(x, q; 0) = \tilde{g}(0)G(x, q; 0), \\ \tilde{u}_{pp}(x, 0; q) &= \int_0^\infty t^2 u(x, t; q) dt = H_{pp}^0(x, q; 0) + 2 \int_D G(x, x'; 0) \tilde{u}(x', 0; q) \xi(x') dx' = \\ &= H_{pp}^0(x, q; 0) + 2\tilde{g}(0) \int_D G(x, x'; 0) G(x', q; 0) \xi(x') dx' .\end{aligned}$$

Отсюда и из (1.5) следует, что для определения функции $\xi(x)$ имеем линейное интегральное уравнение

$$\int_D \frac{\xi(x') dx'}{|x - x'| |x' - q|} = f_0(x, q), \quad (x, q) \in X \times Y, \quad (1.9)$$

где

$$f_0(x, q) = \frac{8\pi^2}{\tilde{g}(0)} \left(\int_0^\infty t^2 u(x, t; q) dt - H_{pp}^0(x, q; 0) \right). \quad (1.10)$$

Заметим, что $\tilde{g}(0) \neq 0$ в силу первого условия в (1.2), функция $H_{pp}^0(x, q; 0)$ определяется из (1.7). Таким образом, входными данными для определения ξ служит величина рассеянного поля $u(x, t; q)$, усредненная по времени с весом t^2 , для различных $(x, q) \in X \times Y$.

К уравнению (1.9), называемому в работе уравнением М.М. Лаврентьева, сводятся также обратные задачи зондирования неоднородности точечными гармоническими по времени источниками с частотой $\omega \in (0, \omega_0]$ (см. подробнее в [6, с. 223], [7, § 3.1], [8]). К аналогичному уравнению с заменой (1.5) функцией Грина в ограниченной области G сводится обратная задача зондирования неоднородного включения $D \subset G$ (см. [9]).

Начиная с [2], значительное число работ было посвящено условиям, при которых уравнение (1.9) для любой правой части имеет не более одного решения (см. [3], [7, § 3.1], [8], [10]–[12]). Это свойство имеет место, например, если X, Y — замкнутые области на плоскости, не пересекающей D , либо ограниченные поверхности, содержащие множество D внутри. В качестве X, Y можно выбрать также замкнутые области на аналитических поверхностях, например, сферах, содержащих D внутри. В этих случаях размерность пространственного носителя данных $X \times Y$ в (1.9) равна четырем, в то время как искомая функция ξ зависит от трех переменных. Тем самым обратная задача оказывается переопределенной. Отметим в этой связи следующий недавний результат.

Теорема 1 (см. [11], [12]). Пусть $\Pi, \mathcal{L}$ — плоскость и прямая в $\mathbb{R}^3$, не пересекающие $\bar{D}$, одно из X и Y — замкнутая область в Π , другое — замкнутый отрезок в $\mathcal{L}$. Тогда для любой правой части f_0 уравнение (1.9) имеет не более одного решения.

В условиях теоремы 1 размерность носителя данных $X \times Y$ оказывается равной трем, как и размерность носителя D искомой функции. Несмотря на достаточно продолжительную историю теоретического исследования уравнения М.М. Лаврентьева, вопросы численного решения этого уравнения ранее практически не изучались. Альтернативный способ редукции описанной обратной задачи к линейному интегральному уравнению развивается в [13].

Дальнейшее содержание работы следующее. Во-первых, с целью более адекватного моделирования реальных процессов зондирования в (1.1) вместо обобщенной функции $\delta(x - q)$, сосре-

доточенной в точке $x = q$, мы рассматриваем распределенный источник, описываемый непрерывной функцией $\varphi(|x - q|)$, где $\varphi(r) = 0$ при $r \geq \varepsilon > 0$. Таким образом, неоднородность зондируется сигналами одной и той же пространственной формы, сосредоточенными в ε -окрестностях точек $q \in Y$. Переход к описанию зондирующих сигналов обычными, а не обобщенными функциями, в определенной степени упрощает теоретический анализ соответствующих волновых уравнений, к которым теперь применим классический инструментарий исследования гиперболических уравнений (см., например, [14], [15]). Наряду с этим рассматриваются уравнения более общего вида, в том числе уравнение третьего порядка, с двумя подлежащими определению коэффициентами. Устанавливается, что при наличии данных об усреднении рассеянного поля с весами t^m , $m = 2, 3$, определение указанных коэффициентов сводится к уравнениям вида (1.9). Эти результаты излагаются ниже в разд. 2 и 3. В то же время использование в гиперболическом уравнении в качестве входных данных усреднений с весами t^m , $m = 3, 4$, приводит к новым типам интегральных уравнений. Их мы называем уравнениями типа уравнения М.М. Лаврентьева. При подходящем выборе многообразий источников и детекторов X, Y мы устанавливаем, что эти уравнения также имеют единственное решение. В начале разд. 4 исследуется случай $m = 3$. Получаемое интегральное уравнение оказывается линейным, но его оператор отличается от оператора в (1.9). Завершающая часть разд. 4 посвящена случаю $m = 4$. В этой ситуации соответствующее уравнение оказывается уже нелинейным, однако доказываем, что оно имеет единственное решение. Раздел 5 посвящен описанию и результатам численного эксперимента по решению уравнения вида (1.9).

2. ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВУХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Рассмотрим задачу Коши для гиперболического уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2(x)} u_{tt}(x, t) + b(x) u_t(x, t) &= \Delta u(x, t) - \varphi(|x - q|) g(t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0; \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Относительно функции $u(x, t) = u(x, t; q)$ считаем выполненными сделанные ранее предположения. В рассматриваемой обратной задаче по измеренным усредненным по времени значениям $u(x, t; q)$, $(x, q) \in X \times Y$, подлежат определению кусочно-непрерывные коэффициенты $b(x)$, $c(x)$, $x \in D$. Считаем, что $c(x) \equiv c_0$ и $b(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^3 \setminus D$, функция $g(t)$ удовлетворяет условию (1.2). Пусть $\varphi = \varphi(r)$, $r \geq 0$ — непрерывная функция и выполняются условия

$$\varphi(r) = 0, \quad r \geq \varepsilon; \quad \int_0^\varepsilon r^2 \varphi(r) dr \neq 0. \quad (2.2)$$

Обозначим $O_\varepsilon(q) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - q| \leq \varepsilon\}$. Будем предполагать, что

$$\left(\bigcup_{q \in Y} O_\varepsilon(q) \right) \cap D = \emptyset. \quad (2.3)$$

Как и выше, будем интерпретировать точки $q \in Y$ как координаты зондирующих источников, описываемых слагаемым $\varphi(|x - q|)g(t)$ в (2.1). Указанные источники сосредоточены в ε -окрестности точек q . Согласно (2.3), эти окрестности не пересекаются с носителем неоднородности D . Усреднение по t волнового поля $u(x, t; q)$ происходит в точках $x \in X$, где X — множество детекторов. Выполняя в (2.1) преобразование Лапласа по t и пользуясь обозначением (1.3), получаем подобное (1.6) равенство

$$\tilde{u}(x, p; q) = H(x, q; p) + p^2 \int_D G(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) \xi(x') dx' + p \int_D G(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) b(x') dx', \quad (2.4)$$

где

$$H(x, q; p) = \tilde{g}(p) \int_{O_\varepsilon(q)} G(x, x'; p) \varphi(|x' - q|) dx', \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (2.5)$$

Дифференцируя обе части (2.4) по p , находим

$$\begin{aligned}\tilde{u}_p(x, p; q) = & H_p(x, q; p) + 2p \int_D G(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) \xi(x') dx' + p^2 \int_D [G_p(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) + \\ & + G(x, x'; p) \tilde{u}_p(x', p; q)] \xi(x') dx' + \int_D G(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) b(x') dx' + \\ & + p \int_D [G_p(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) + G(x, x'; p) \tilde{u}_p(x', p; q)] b(x') dx'.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Далее нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. Для $x \in \mathbb{R}^3 \setminus O_\varepsilon(q)$ справедливо равенство

$$\int_{O_\varepsilon(q)} \frac{\varphi(|x' - q|) dx'}{|x' - x|} = \frac{A(\varphi, \varepsilon)}{|x - q|}, \quad A(\varphi, \varepsilon) = 4\pi \int_0^\varepsilon r^2 \varphi(r) dr.$$

Доказательство сводится к непосредственному интегрированию. Имеем

$$J \triangleq \int_{O_\varepsilon(q)} \frac{\varphi(|x' - q|) dx'}{|x' - x|} = \int_{O_\varepsilon(q)} \frac{\varphi(|y'|) dy'}{|y' - (x - q)|}.$$

Проводя при необходимости в последнем интеграле ортогональное преобразование $y' = Uz'$, без ограничения общности можем считать, что направление вектора $x - q$ совпадает с направлением оси y'_3 в координатах (y'_1, y'_2, y'_3) , т.е. $x - q = (0, 0, |x - q|)$. Переходя к сферическим координатам

$$y'_1 = r \sin \chi \cos \theta, \quad y'_2 = r \sin \chi \sin \theta, \quad y'_3 = r \cos \chi, \quad \chi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

и выполняя интегрирование по χ , получаем

$$\begin{aligned}J &= \int_0^\varepsilon \varphi(r) r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \frac{\sin \chi d\chi}{\sqrt{r^2 - 2r|x - q| \cos \chi + |x - q|^2}} = \\ &= \frac{1}{|x - q|} \int_0^\varepsilon \varphi(r) r dr \int_0^{2\pi} d\theta \left[\sqrt{r^2 + 2|x - q|r + |x - q|^2} - \sqrt{r^2 - 2|x - q|r + |x - q|^2} \right].\end{aligned}$$

По условию леммы $|x - q| > \varepsilon \geq r$, поэтому выражение в квадратных скобках есть $(r + |x - q|) - (|x - q| - r) = 2r$. Требуемое утверждение непосредственно следует отсюда.

Полагая $p = 0$ в (2.4) и используя (2.5) и лемму 1, получаем

$$\tilde{u}(x, 0; q) = H(x, q; 0) = -\frac{\tilde{g}(0)}{4\pi} \int_{O_\varepsilon(q)} \frac{\varphi(|x' - q|) dx'}{|x' - x|} = -\frac{\tilde{g}(0) A(\varphi, \varepsilon)}{4\pi |x - q|}, \quad x \in D. \quad (2.7)$$

Заметим, что условие леммы выполняется в силу (2.3). Полагая теперь $p = 0$ в (2.6) и пользуясь (2.7), находим

$$\begin{aligned}\tilde{u}_p(x, 0; q) &= -\int_0^\infty t u(x, t; q) dt = H_p(x, q; 0) + \int_D G(x, x'; 0) \tilde{u}(x', 0; q) b(x') dx' = \\ &= H_p(x, q; 0) + \frac{\tilde{g}(0) A(\varphi, \varepsilon)}{16\pi^2} \int_D \frac{b(x') dx'}{|x - x'| |x' - q|}.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Таким образом, для определения коэффициента $b(x)$ имеем аналогичное (1.9) интегральное уравнение

$$\begin{aligned}\int_D \frac{b(x') dx'}{|x - x'| |x' - q|} &= f_1(x, q), \quad (x, q) \in X \times Y, \\ f_1(x, q) &= -\frac{16\pi^2}{\tilde{g}(0) A(\varphi, \varepsilon)} \left(\int_0^\infty t u(x, t; q) dt + H_p(x, q; 0) \right).\end{aligned}\quad (2.9)$$

Перейдем к определению коэффициента $c(x)$ или, эквивалентно, функции $\xi(x)$. Дифференцируя (2.6) по p и полагая в полученном равенстве $p = 0$, находим

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{pp}(x, 0; q) &= \int_0^\infty t^2 u(x, t; q) dt = H_{pp}(x, q; 0) + 2 \int_D G(x, x'; 0) \tilde{u}(x', 0; q) \xi(x') dx' + \\ &+ 2 \int_D [G_p(x, x'; 0) \tilde{u}(x', 0; q) + G(x, x'; 0) \tilde{u}_p(x', 0; q)] b(x') dx'. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Поскольку функция $b(x)$ уже определена, функция $\tilde{u}_p(x, 0; q)$ также известна в силу (2.8). В свою очередь, функция $\tilde{u}(x, 0; q)$ определена в (2.7). Таким образом, из (2.10) получаем уравнение для определения функции ξ :

$$\int_D \frac{\xi(x') dx'}{|x - x'| |x' - q|} = f_2(x, q), \quad (x, q) \in X \times Y, \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} f_2(x, q) &= \frac{8\pi^2}{\tilde{g}(0)A(\varphi, \varepsilon)} \left(\int_0^\infty t^2 u(x, t; q) dt - H_{pp}(x, q; 0) - \right. \\ &\left. - 2 \int_D [G_p(x, x'; 0) \tilde{u}(x', 0; q) + G(x, x'; 0) \tilde{u}_p(x', 0; q)] b(x') dx' \right). \end{aligned}$$

Видим, что для определения двух коэффициентов в уравнении (2.1) достаточно иметь усредненные значения рассеянного поля

$$\left\{ \int_0^\infty t u(x, t; q) dt, \int_0^\infty t^2 u(x, t; q) dt : (x, q) \in X \times Y \right\}. \quad (2.12)$$

При этом обе искомые функции $b(x)$, $c(x)$ определяются из интегральных уравнений (2.9), (2.11) с одним и тем же ядром. Однозначность восстановления указанных функций следует из теоремы 1.

Следующая теорема подытоживает проведенные рассуждения.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (1.2), (2.2), (2.3), множества X , Y выбраны как в теореме 1. Тогда данные (2.12) позволяют однозначно определить функции $b(x)$, $c(x)$ в уравнении (2.1). Именно, они находятся из уравнений (2.9) и (2.11), имеющих единственные решения.

В следующем разделе обратимся к задаче реконструкции двух коэффициентов в уравнении третьего порядка.

3. УРАВНЕНИЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА, ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВУХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2(x)} u_{tt}(x, t) - b(x) \Delta u_t(x, t) &= \Delta u(x, t) - \varphi(|x - q|) g(t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0; \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) описывает акустические процессы в вязкой теплопроводной среде, параметр $b(x)$ определяется коэффициентами вязкости среды (см. [16]). Как и выше, требуется реконструировать кусочно-непрерывные коэффициенты $c(x)$ и $b(x)$, $x \in D$, причем $c(x) \equiv c_0$, $b(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^3 \setminus D$. Считаем выполненными условия (1.2), (2.2), (2.3). При прежних предположениях относительно функции $u(x, t) = u(x, t; q)$ преобразование Лапласа уравнения (3.1) дает

$$\frac{p^2}{c^2(x)} \tilde{u}(x, p; q) = (1 + pb(x)) \Delta \tilde{u}(x, p; q) - \tilde{g}(p) \varphi(|x - q|), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Поскольку $b(x) = 0$ вне D , с учетом (2.3) получаем

$$\frac{p^2}{c^2(x)(1+pb(x))} \tilde{u}(x, p; q) = \Delta \tilde{u}(x, p; q) - \tilde{g}(p) \Phi(|x - q|). \quad (3.2)$$

Обозначим

$$\eta(x, p) = \frac{1}{c^2(x)(1+pb(x))} - \frac{1}{c_0^2}, \quad (3.3)$$

тогда из (3.2) вытекает

$$\Delta \tilde{u}(x, p; q) - \frac{p^2}{c_0^2} \tilde{u}(x, p; q) = p^2 \eta(x, p) \tilde{u}(x, p; q) + \tilde{g}(p) \Phi(|x - q|), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Следовательно,

$$\tilde{u}(x, p; q) = H(x, q; p) + p^2 \int_D G(x, x'; p) \eta(x', p) \tilde{u}(x', p; q) dx'. \quad (3.4)$$

Поэтому для $\tilde{u}(x, 0; q)$ выполняется равенство (2.7). Дифференцируя тождество (3.4) дважды по p и полагая $p = 0$, с учетом равенства $\eta(x, 0) = \xi(x)$ (см. (1.3), (3.3)), получаем

$$\tilde{u}_{pp}(x, 0; q) = \int_0^\infty t^2 u(x, t; q) dt = H_{pp}(x, q; 0) + 2 \int_D G(x, x'; 0) \tilde{u}(x', 0; q) \xi(x') dx'.$$

Из (1.5), (2.7) следует, что для определения функции $\xi(x)$ и вместе с ней $c(x)$ имеем уравнение

$$\begin{aligned} \int_D \frac{\xi(x') dx'}{|x - x'| |x' - q|} &= f_3(x, q), \quad (x, q) \in X \times Y, \\ f_3(x, q) &= \frac{8\pi^2}{\tilde{g}(0)A(\Phi, \varepsilon)} \left(\int_0^\infty t^2 u(x, t; q) dt - H_{pp}(x, q; 0) \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Покажем, что и коэффициент $b(x)$ определяется из интегрального уравнения с тем же ядром, что и в (3.5). С этой целью продифференцируем равенство (3.4) трижды по p и в итоговом равенстве положим $p = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{ppp}(x, 0; q) &= H_{ppp}(x, q; 0) + 6 \int_D [G_p(x, x'; 0) \xi(x') \tilde{u}(x', 0; q) + \\ &+ G(x, x'; 0) \eta_p(x', 0) \tilde{u}(x', 0; q) + G(x, x'; 0) \xi(x') \tilde{u}_p(x', 0; q)] dx'. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из (3.4) следует $\tilde{u}_p(x, p; q) = H_p(x, q; p) + O(p)$ при $p \rightarrow 0$. Поэтому $\tilde{u}_p(x, 0; q) = H_p(x, q; 0)$ есть известная функция. Кроме того, согласно (3.3),

$$\eta_p(x, 0) = -\frac{b(x)}{c^2(x)}, \quad x \in D.$$

По построению функция $c(x)$ уже известна. Поэтому (3.6) приводит к интегральному уравнению для функции $v(x) = c^{-2}(x)b(x)$:

$$\int_D \frac{v(x') dx'}{|x - x'| |x' - q|} = f_4(x, q), \quad (x, q) \in X \times Y, \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} f_4(x, q) &= \frac{8\pi^2}{3\tilde{g}(0)A(\Phi, \varepsilon)} \left(\int_0^\infty t^3 u(x, t; q) dt + H_{ppp}(x, q; 0) + \right. \\ &+ 6 \int_D [G_p(x, x'; 0) \tilde{u}(x', 0; q) + G(x, x'; 0) \tilde{u}_p(x', 0; q)] \xi(x') dx' \left. \right). \end{aligned}$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (1.2), (2.2), (2.3), множества X, Y выбраны как в теореме. Тогда данные

$$\left\{ \int_0^\infty t^2 u(x, t; q) dt, \int_0^\infty t^3 u(x, t; q) dt : (x, q) \in X \times Y \right\}$$

позволяют однозначно определить функции $b(x), c(x)$ в уравнении (3.1). Именно, они находятся из уравнений (3.5) и (3.7), при этом $b(x) = c^2(x)v(x)$. Уравнения (3.5), (3.7) имеют единственные решения.

В рассмотренных выше примерах реконструкция неизвестных коэффициентов уравнений сводилась к интегральному уравнению М.М. Лаврентьева с различными правыми частями. Наличие результатов типа теоремы 1 избавляет от необходимости отдельного анализа единственности решения каждого возникающего уравнения. Ниже покажем, что описанная ранее схема редукции коэффициентных обратных задач к интегральным уравнениям при использовании альтернативных схем усреднения сигнала может приводить к интегральным уравнениям новых типов. Вопросы единственности решений таких уравнений нуждаются в отдельном исследовании.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ЗВУКА В ВОЛНОВОМ УРАВНЕНИИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СХЕМАХ УСРЕДНЕНИЯ РАССЕЯННОГО ПОЛЯ

Обратимся к задаче реконструкции скорости распространения сигнала $c(x)$ в уравнении

$$\frac{1}{c^2(x)} u_{tt}(x, t) = \Delta u(x, t) - \varphi(|x - q|)g(t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0; \quad (4.1)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Здесь в отличие от (1.1) при каждом $q \in Y$ зондирующий источник распределен в шаре $O_\varepsilon(q)$. Считаем выполненными условия разд. 2. Дополнительно предположим, что

$$\int_0^\infty t g(t) dt \neq 0. \quad (4.2)$$

Без ограничения общности можем считать функцию φ в (4.1) нормированной условием

$$\int_{O_\varepsilon(0)} \varphi(|y'|) dy' = 1. \quad (4.3)$$

В данном случае вместо (2.4) имеем уравнение

$$\tilde{u}(x, p; q) = H(x, q; p) + p^2 \int_D G(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) \xi(x') dx' \quad (4.4)$$

с функцией H , определенной в (2.5). Выясним возможность однозначной реконструкции коэффициента $c(x)$ по усредненным данным $\int_0^\infty t^3 u(x, t; q) dt$ для $(x, q) \in X \times Y$.

Дифференцируя (4.4) по p трижды и полагая $p = 0$, для $(x, q) \in X \times Y$ получаем равенство

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{ppp}(x, 0; q) &= - \int_0^\infty t^3 u(x, t; q) dt = H_{ppp}(x, q; 0) + \\ &+ 6 \int_D [G_p(x, x'; 0) \tilde{u}(x', 0; q) + G(x, x'; 0) \tilde{u}_p(x', 0; q)] \xi(x') dx'. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Используя (4.4) и (2.7), находим

$$\tilde{u}(x, 0; q) = H(x, q; 0) = - \frac{\tilde{g}(0) A(\varphi, \varepsilon)}{4\pi |x - q|}. \quad (4.6)$$

Кроме того, из (4.4) и (2.5) следует, что при $p \rightarrow 0$ выполняется

$$\begin{aligned}\tilde{u}_p(x, p; q) &= H_p(x, q; p) + O(p) = \tilde{g}'(p) \int_{O_\varepsilon(q)} G(x, x'; p) \varphi(|x' - q|) dx' + \\ &+ \tilde{g}(p) \int_{O_\varepsilon(q)} G_p(x, x'; p) \varphi(|x' - q|) dx' + O(p).\end{aligned}$$

Поэтому, ввиду (1.5), (4.3) и леммы 1,

$$\begin{aligned}\tilde{u}_p(x, 0; q) &= \tilde{g}'(0) \int_{O_\varepsilon(q)} G(x, x'; 0) \varphi(|x' - q|) dx' + \tilde{g}(0) \int_{O_\varepsilon(q)} G_p(x, x'; 0) \varphi(|x' - q|) dx' = \\ &= -\frac{\tilde{g}'(0)}{4\pi} \int_{O_\varepsilon(q)} \frac{\varphi(|x' - q|) dx'}{|x' - x|} + \frac{\tilde{g}(0)}{4\pi c_0} \int_{O_\varepsilon(q)} \varphi(|x' - q|) dx' = -\frac{\tilde{g}'(0)A(\varphi, \varepsilon)}{4\pi|x - q|} + \frac{\tilde{g}(0)}{4\pi c_0}.\end{aligned}\quad (4.7)$$

Объединяя равенства (4.5)–(4.7), для $(x, q) \in X \times Y$ получаем

$$\begin{aligned}-\int_0^\infty t^3 u(x, t; q) dt &= H_{ppp}(x, q; 0) + 6 \int_D \left[\frac{1}{4\pi c_0} \left(-\frac{\tilde{g}(0)A(\varphi, \varepsilon)}{4\pi|x' - q|} \right) + \right. \\ &\left. + \left(-\frac{1}{4\pi|x' - x|} \right) \left(-\frac{\tilde{g}'(0)A(\varphi, \varepsilon)}{4\pi|x' - q|} + \frac{\tilde{g}(0)}{4\pi c_0} \right) \right] \xi(x') dx' .\end{aligned}$$

Поэтому для нахождения функции $\xi(x)$ имеем интегральное уравнение

$$\begin{aligned}\int_D \left[\frac{1}{|x - x'| |x' - q|} - \left(\frac{a}{|x' - x|} + \frac{b}{|x' - q|} \right) \right] \xi(x') dx' &= f_5(x, q), \\ (x, q) \in X \times Y, \quad a &= (\tilde{g}'(0)A(\varphi, \varepsilon)c_0)^{-1} \tilde{g}(0), \quad b = (\tilde{g}'(0)c_0)^{-1} \tilde{g}(0),\end{aligned}\quad (4.8)$$

$$f_5(x, q) = -\frac{8\pi^2}{3\tilde{g}'(0)A(\varphi, \varepsilon)} \left(\int_0^\infty t^3 u(x, t; q) dt + H_{ppp}(x, q; 0) \right).$$

Заметим, что, согласно (4.2), в этих формулах $\tilde{g}'(0) \neq 0$.

Следующая теорема устанавливает единственность решения уравнения (4.8), которое мы называем уравнением типа М.М. Лаврентьева.

Теорема 4. Пусть выполняются условия (1.2), (2.2), (2.3), (4.2), (4.3), множества X, Y выбраны как в теореме 1. Тогда данные

$$\left\{ \int_0^\infty t^3 u(x, t; q) dt : (x, q) \in X \times Y \right\}$$

позволяют однозначно определить функцию $s(x)$. Уравнение (4.8) с любой правой частью имеет в классе кусочно-непрерывных функций не более одного решения.

Доказательство. Пусть для определенности X и Y — замкнутая область плоскости Π и отрезок прямой $\mathcal{L}$ соответственно, $\Pi \cap D = \mathcal{L} \cap D = \emptyset$. Достаточно убедиться, что соответствующее однородное уравнение

$$\int_D \left\{ \frac{1}{|x - x'| |x' - q|} - \left(\frac{a}{|x' - x|} + \frac{b}{|x' - q|} \right) \right\} \xi(x') dx' = 0, \quad (x, q) \in X \times Y, \quad (4.9)$$

имеет в указанном классе лишь нулевое решение. Заметим, что функция $\psi(x, q)$, определенная интегралом в левой части (4.9), вещественно аналитична по $x \in \Pi$ и $q \in \mathcal{L}$. Поэтому равенство (4.9) продолжается по аналитичности на все $(x, q) \in \Pi \times Y$. Зафиксируем произвольно точку

$x \in \Pi$ и перейдем в (4.9) к пределу при $q \in \mathcal{L}$, удаляющейся в бесконечность. Аналогично зафиксируем $q \in Y$ и перейдем к пределу при $x \in \Pi$, удаляющейся в бесконечность. В результате получаем

$$\int_D \frac{\xi(x')dx'}{|x' - x|} = 0, \quad \int_D \frac{\xi(x')dx'}{|x' - q|} = 0$$

для всех $x \in X$ и $q \in Y$ соответственно. Поэтому из (4.9) следует

$$\int_D \frac{\xi(x')dx'}{|x - x'| |x' - q|} = 0, \quad (x, q) \in X \times Y.$$

Ссылка на теорему 1 дает $\xi \equiv 0$, что и завершает доказательство.

Замечание 1. Аналогично устанавливается инъективность для более широкого класса вполне непрерывных интегральных операторов

$$L_{a,b}(\xi)(x, q) = \int_D \left\{ \frac{1}{|x - x'| |x' - q|} - \left(\frac{a(x', x)}{|x' - x|} + \frac{b(x', q)}{|x' - q|} \right) \right\} \xi(x') dx', \quad (x, q) \in X \times Y,$$

где $a(x', x)$, $b(x', q)$ – фиксированные ограниченные суммируемые функции. Оператор $L_{a,b}$ доставляет пример нелокального (при больших $\|a\|_{L_\infty}$, $\|b\|_{L_\infty}$) возмущения вполне непрерывного оператора М.М. Лаврентьева $L_{0,0}$ с сохранением свойства инъективности последнего.

Всюду выше в качестве входных данных для определения искомых коэффициентов обратных задач использовались результаты усреднения по времени рассеянного поля с весами t^m , $m = 2, 3$. При этом нелинейные обратные задачи сводились к линейному интегральному уравнению I рода (2.9), (2.11), (3.5), (3.7), (4.8). Сейчас покажем, что переход по той же схеме к усреднению с весом t^4 существенно меняет картину и приводит уже к нелинейному интегральному уравнению. Тем не менее при подходящем выборе областей локализации источников X и детекторов Y оператор этого уравнения все же остается инъективным. Этим обеспечивается единственность решения соответствующей обратной задачи волнового зондирования. Далее считаем выполненными условия (1.2), (2.2), (2.3), (4.3).

Дифференцируя равенство (4.4) по p четырежды и полагая $p = 0$, для $(x, q) \in X \times Y$ получаем

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{pppp}(x, 0; q) &= \int_0^\infty t^4 u(x, t; q) dt = H_{pppp}(x, q; 0) + 12 \int_D [G_{pp}(x, x'; 0) \tilde{u}(x', 0; q) + \\ &+ 2G_p(x, x'; 0) \tilde{u}_p(x', 0; q) + G(x, x'; 0) \tilde{u}_{pp}(x', 0; q)] \xi(x') dx'. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Кроме того, из (4.4) следует, что при $p \rightarrow 0$ выполняется равенство

$$\tilde{u}_{pp}(x, p; q) = H_{pp}(x, q; p) + 2 \int_D G(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) \xi(x') dx' + O(p), \quad (4.11)$$

где

$$H_{pp}(x, q; p) = G_{pp}(x, q; p) \tilde{g}(p) + 2G_p(x, q; p) \tilde{g}'(p) + G(x, q; p) \tilde{g}''(p).$$

Из (4.6) и (4.11) следует

$$\tilde{u}_{pp}(x, 0; q) = \left(-\frac{\tilde{g}(0)|x - q|}{4\pi c_0^2} + \frac{\tilde{g}'(0)}{2\pi c_0} - \frac{\tilde{g}''(0)}{4\pi|x - q|} \right) + \frac{\tilde{g}(0)A(\varphi, \varepsilon)}{8\pi^2} \int_D \frac{\xi(x')dx'}{|x - x'| |x' - q|}. \quad (4.12)$$

Используя (4.6), (4.7), (4.12), из (4.10) для функции $\xi(x)$ получаем нелинейное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} & \int_D \left\{ \frac{\tilde{g}(0)}{16\pi^2 c_0^2} \left(A(\varphi, \varepsilon) \frac{|x' - x|}{|x' - q|} + \frac{|x' - q|}{|x' - x|} \right) + \frac{\tilde{g}(0)}{8\pi^2 c_0^2} - \right. \\ & \left. - \frac{\tilde{g}'(0)}{8\pi^2 c_0} \left(\frac{1}{|x' - x|} + \frac{A(\varphi, \varepsilon)}{|x' - q|} \right) + \frac{\tilde{g}''(0)}{16\pi^2 |x' - x| |x' - q|} \right\} \xi(x') dx' - \\ & - \frac{\tilde{g}(0) A(\varphi, \varepsilon)}{32\pi^3} \iint_D \frac{\xi(x') \xi(x'') dx' dx''}{|x - x'| |x' - x''| |x'' - q|} = f_6(x, q), \quad (x, q) \in X \times Y. \end{aligned} \quad (4.13)$$

В (4.13) функция

$$f_6(x, q) = \frac{1}{12} \left(\int_0^\infty t^4 u(x, t; q) dt - H_{ppp}(x, q; 0) \right)$$

определяется усредненными значениями рассеянного поля с весом t^4 .

Покажем, что при определенных требованиях к выбору X, Y , сохраняющих равенство $\dim(X \times Y) = 3$, уравнение (4.13) имеет единственное решение. Указанное равенство имеет место, если одно из многообразий X, Y — двумерное, а второе — одномерное. Выше было достаточно одно из них выбрать в виде замкнутой области на плоскости, а второе — в виде отрезка прямой. Для обеспечения единственности решения уравнения (4.13) конструкцию двумерного многообразия необходимо несколько усложнить. Пусть Σ — объединение двух различных сфер с произвольными центрами и радиусами в $\mathbb{R}^3$, расположенных так, что шары, ограниченные этими сферами, не имеют общих точек с D . Нам потребуется следующее известное утверждение о том, что Σ является множеством единственности для бигармонических функций в области, содержащей Σ .

Лемма 2 (см. [17]). Пусть функция $w = w(x)$ удовлетворяет условиям

$$\Delta^2 w(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus D; \quad w(x) = 0, \quad x \in \Sigma.$$

Тогда w тождественно равна нулю в $\mathbb{R}^3 \setminus D$.

Пусть теперь одно из X, Y совпадает с Σ , а второе, как в теореме 1, есть отрезок прямой $\mathcal{L}$. Примем для определенности $X = \Sigma$. Предположим, что уравнение (4.13) имеет два кусочно-непрерывных решения ξ_1, ξ_2 и обозначим $\zeta = \xi_1 - \xi_2$. Тогда из (4.13) следует

$$\begin{aligned} & \int_D \left\{ \frac{\tilde{g}(0)}{16\pi^2 c_0^2} \left(A(\varphi, \varepsilon) \frac{|x' - x|}{|x' - q|} + \frac{|x' - q|}{|x' - x|} \right) + \frac{\tilde{g}(0)}{8\pi^2 c_0^2} - \right. \\ & \left. - \frac{\tilde{g}'(0)}{8\pi^2 c_0} \left(\frac{1}{|x' - x|} + \frac{A(\varphi, \varepsilon)}{|x' - q|} \right) + \frac{\tilde{g}''(0)}{16\pi^2 |x' - x| |x' - q|} \right\} \zeta(x') dx' - \\ & - \frac{\tilde{g}(0) A(\varphi, \varepsilon)}{32\pi^3} \iint_D \frac{(\xi_1(x') \xi_1(x'') - \xi_2(x') \xi_2(x'')) dx' dx''}{|x - x'| |x' - x''| |x'' - q|} = 0, \quad (x, q) \in \Sigma \times Y. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Заметим, что при $x \neq y$ выполняются равенства

$$\Delta_x \frac{1}{|x - y|} = 0, \quad \Delta_x |x - y| = \frac{2}{|x - y|}, \quad \Delta_x^2 |x - y| = 0, \quad (4.15)$$

где через Δ_x обозначен оператор Лапласа по переменной $x \in \mathbb{R}^3$. Поэтому функция $\psi(x, q)$, стоящая в левой части (4.14), является бигармонической по x вне D . Используя лемму 2, заключаем,

что равенство (4.14) распространяется на все точки $x \in \mathbb{R}^3 \setminus D$. Из (1.2), (2.2) следует $\tilde{g}(0)A(\varphi, \epsilon) \neq 0$. Применяя оператор Δ_x к обеим частям (4.14) для $x \in \mathbb{R}^3 \setminus D$ и используя тождества (4.15), получаем

$$\int_D \frac{\zeta(x') dx'}{|x - x'| |x' - q|} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus D, \quad y \in Y.$$

Ссылка на теорему 1 дает теперь следующий результат.

Теорема 5. Пусть выполняются условия (1.2), (2.2), (2.3), (4.3) и одно из множеств X, Y совпадает с Σ , а второе есть отрезок прямой $\mathcal{L}$. Тогда данные

$$\left\{ \int_0^\infty t^4 u(x, t; q) dt : (x, q) \in X \times Y \right\}$$

позволяют однозначно определить функцию $c(x)$ в уравнении (4.1). Уравнение (4.13) с любой правой частью имеет не более одного решения.

Замечание 2. Оператор левой части (4.13) описывает широкий класс нелокальных нелинейных возмущений оператора М.М. Лаврентьева $L_{0,0}$, сохраняющих инъективность $L_{0,0}$.

В следующем разделе приведем некоторые результаты численных экспериментов по решению уравнения М.М. Лаврентьева.

5. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Выше показано, что решение различных коэффициентных обратных задач для уравнений волнового типа сводится к решению интегральных уравнений вида (1.9) с одним и тем же оператором в левой части и различными правыми частями. Эти уравнения имеют вид

$$\int_D \frac{\xi(x') dx'}{|x - x'| |x' - q|} = f(x, q), \quad (x, q) \in X \times Y, \quad (5.1)$$

с соответствующей функцией $f(x, q)$. В прикладных задачах зачастую искомая функция ξ описывает одну или несколько локализованных неоднородностей типа всплесков на плавно меняющемся фоне, которую удобно моделировать постоянной, равной нулю. В дальнейшем для определенности считаем, что X — прямоугольник, Y — отрезок, параллельные одной и той же координатной плоскости, зондируемая область $D = [0, 1]^3$. Согласно теореме 1, уравнение (5.1) с фиксированной правой частью имеет не более одного решения. Целью численного эксперимента является изучение возможности определения местоположения локализованных возмущений в D с использованием при дискретизации сеток умеренных размеров. На D, X, Y вводятся равномерные сетки $\{\bar{x}_{ijk}\}, \{\bar{x}_{pq}\}, \{\bar{y}_r\}$, $0 \leq i, j, k; p, q, r \leq N$. Дискретизация интегрального уравнения (5.1) с использованием схемы прямоугольников приводит к линейной системе

$$\sum_{i,j,k=0}^{N-1} a_{pqr,ijk} \xi_{ijk} = f(\bar{x}_{pq}, \bar{y}_r); \quad (5.2)$$

$$0 \leq p, q, r \leq N - 1.$$

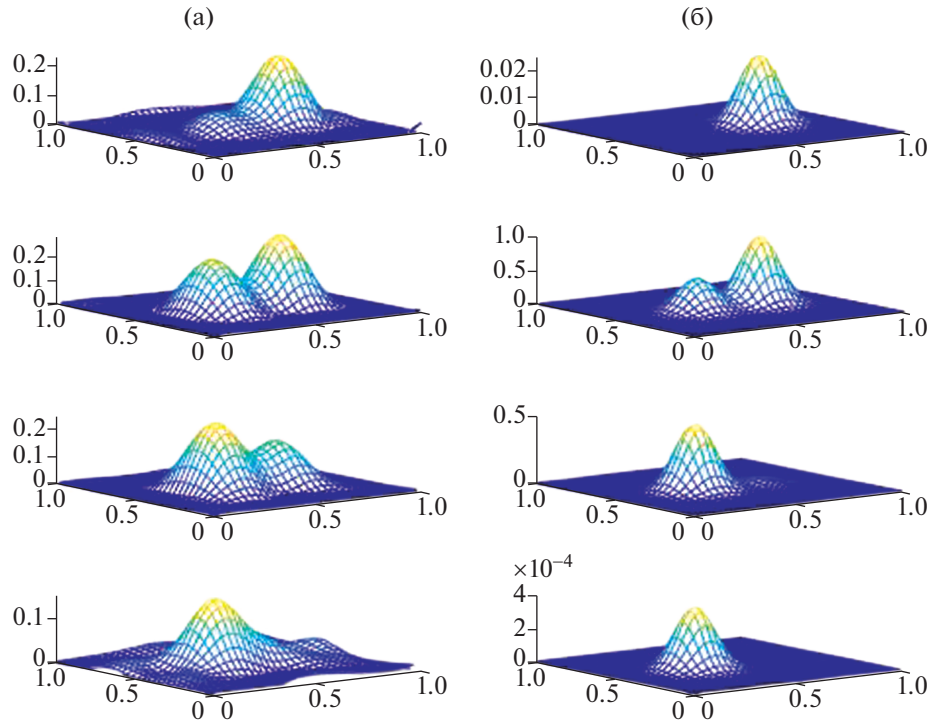
Здесь ξ_{ijk} есть искомая аппроксимация для $\xi(\bar{x}_{ijk})$, $0 \leq i, j, k \leq N - 1$,

$$a_{pqr,ijk} = \frac{h^3}{|\bar{x}_{ijk} - \bar{x}_{pq}| |\bar{x}_{ijk} - \bar{y}_r|}, \quad h = \frac{1}{N}.$$

Регуляризация задачи (5.2) по схеме Тихонова приводит к линейной системе

$$(A^*A + \alpha E)\xi_\alpha = A^*f + \alpha \xi^0.$$

Здесь $A = (a_{pqr,ijk}) \in \mathbb{R}^{N^3 \times N^3}$, $f = (f_{pqr}) \in \mathbb{R}^{N^3}$, ξ^0 — начальная оценка искомого вектора $(\xi_{ijk}) \in \mathbb{R}^{N^3}$, $\alpha > 0$ — параметр регуляризации. В расчетах полагаем $N = 32$, $\alpha = 10^{-11}$, вектор ξ^0 выбираем нулевым.



Фиг. 1. Тест 1. Пример 1. Неоднородности одного размера на разных высотах. (а) Аппроксимация, (б) точное решение.

Тест 1. В этом тесте решаются два примера по реконструкции неоднородностей, находящихся на разных высотах в D . В примере 1 модельное решение выбрано в виде

$$\xi^*(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = \exp(-81((x^{(1)} - 0.5)^2 + (x^{(2)} - 0.4)^2 + (x^{(3)} - 0.5)^2)) + \\ + \exp(-81((x^{(1)} - 0.5)^2 + (x^{(2)} - 0.7)^2 + (x^{(3)} - 0.4)^2)).$$

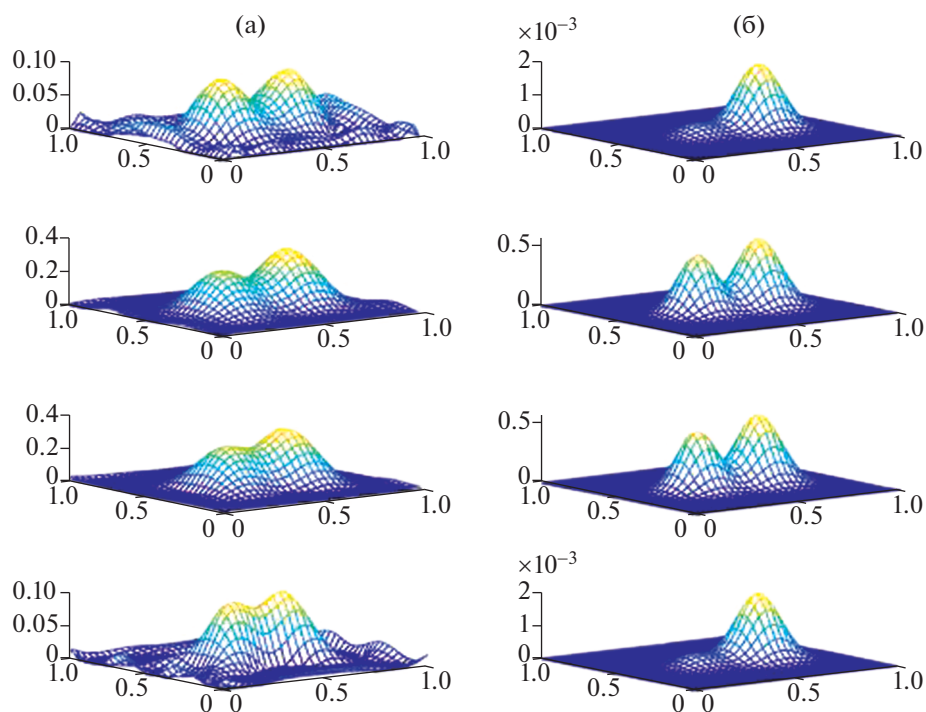
Функция ξ^* описывает две неоднородности одинаковой геометрии, расположенные на высотах $x^{(3)} = 0.4, 0.5$ с центрами в точках $Z_1 = (0.5, 0.7, 0.4)$ и $Z_2 = (0.5, 0.4, 0.5)$. Множества детекторов и источников имеют вид $X = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.0001) : 0 \leq x^{(1)}, x^{(2)} \leq 1\}$ и $Y = \{(0.5, x^{(2)}, 1.0001) : 0 \leq x^{(2)} \leq 1\}$. После дискретизации указанные множества принимают соответственно вид $X_N = \{(rh, sh, -0.0001) : 0 \leq r, s \leq N\}$, $Y_N = \{(0.5, ph, 1.0001) : 0 \leq p \leq N\}$. В примере 2 тестовое решение

$$\xi^*(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = \exp(-81((x^{(1)} - 0.5)^2 + (x^{(2)} - 0.4)^2 + (x^{(3)} - 0.5)^2)) + \\ + \exp(-64((x^{(1)} - 0.5)^2 + (x^{(2)} - 0.7)^2 + (x^{(3)} - 0.4)^2))$$

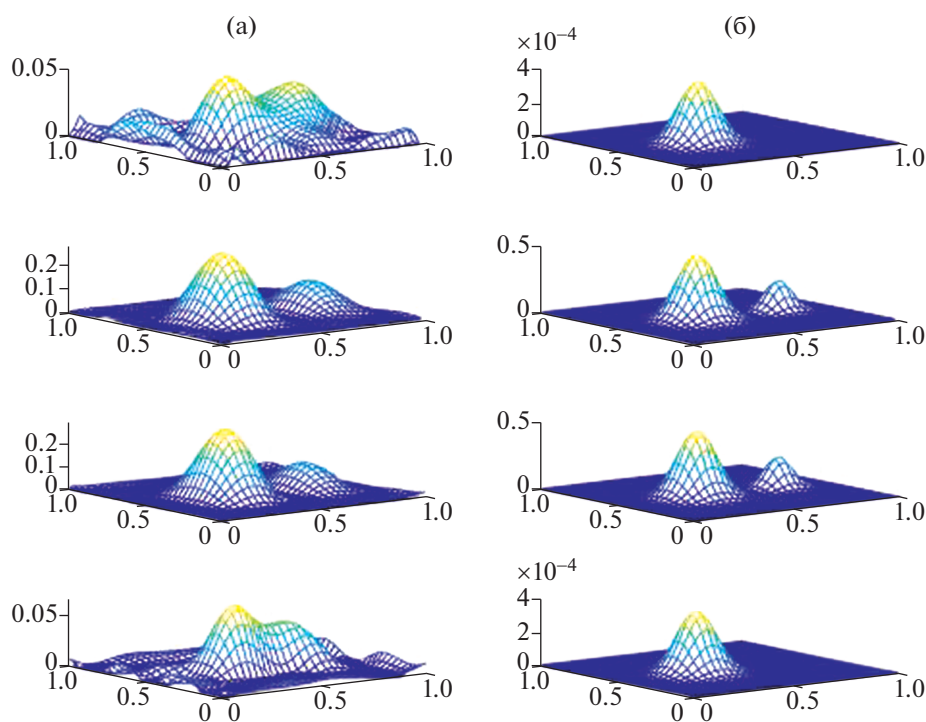
описывает две неоднородности разных размеров, локализованные в окрестности точек Z_1, Z_2 . В этом примере множество источников Y выбрано как в примере 1, а множество детекторов взято более протяженным: $X = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.0001) : -0.5 \leq x^{(1)} \leq 1.5, 0 \leq x^{(2)} \leq 1\}$. После дискретизации получаем $X_N = \{(-0.5 + rh_x, sh, -0.0001) : 0 \leq r, s \leq N\}$, где $h_x = 0.0625$.

Тест 2. В примерах этого теста неоднородности располагаются на одной высоте. В примере 3 неоднородности сосредоточены в окрестности точек $(0.5, 0.4, 0.5)$ и $(0.5, 0.7, 0.5)$ и имеют различный размер,

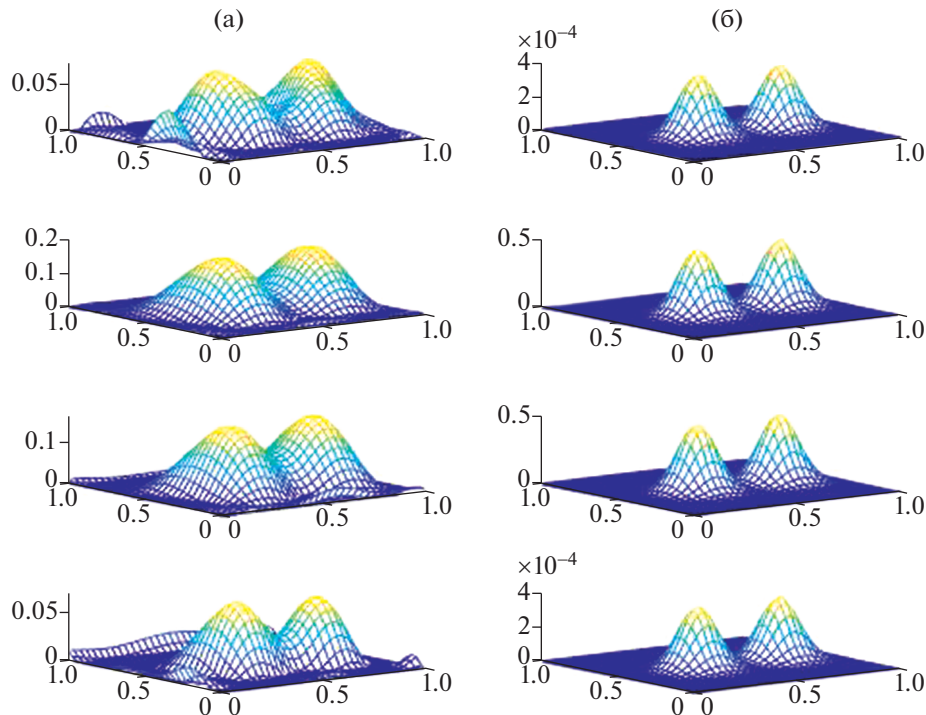
$$\xi^*(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = \exp(-81((x^{(1)} - 0.5)^2 + (x^{(2)} - 0.4)^2 + (x^{(3)} - 0.5)^2)) + \\ + \exp(-169((x^{(1)} - 0.5)^2 + (x^{(2)} - 0.7)^2 + (x^{(3)} - 0.5)^2)).$$



Фиг. 2. Тест 1. Пример 2. Неоднородности разных размеров на разных высотах. (а) Аппроксимация, (б) точное решение.



Фиг. 3. Тест 2. Пример 3. Неоднородности разных размеров на одной высоте. (а) Аппроксимация, (б) точное решение.



Фиг. 4. Тест 2. Пример 4. Неоднородности одного размера на одной высоте. (а) Аппроксимация, (б) точное решение.

Множества источников и детекторов здесь выбираются как в Примере 2. В Примере 4 неоднородности одинаковы по размеру и сосредоточены в окрестности точек $(0.5, 0.4, 0.5)$ и $(0.5, 0.8, 0.5)$,

$$\xi^*(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = \exp(-8l((x^{(1)} - 0.5)^2 + (x^{(2)} - 0.4)^2 + (x^{(3)} - 0.5)^2)) + \\ + \exp(-8l((x^{(1)} - 0.5)^2 + (x^{(2)} - 0.8)^2 + (x^{(3)} - 0.5)^2)).$$

Вид и расположение множеств X и Y относительно D в этом примере изменены, $X = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.0001) : -1 \leq x^{(1)} \leq 10, 0 \leq x^{(2)} \leq 1\}$, $Y = \{(0.1, x^{(2)}, 1.1) : 0 \leq x^{(2)} \leq 1\}$. При этом $X_N = \{(-1 + rh_x, sh, -0.0001) : 0 \leq r, s \leq N\}$, $h_x = 0.3438$; $Y_N = \{(0.1, ph, 1.1) : 0 \leq p \leq N\}$.

Результаты численной реконструкции модельных неоднородностей ξ^* показаны на фиг. 1–4. Результат каждого примера представлен двумя колонками графиков. В правой колонке приведены изображения точного решения ξ^* , в левой колонке — соответствующие изображения приближенных решений ξ_α . На фигурах сверху вниз представлены графики точных и приближенных функций $\xi(\cdot, \cdot, x^{(3)})$ при $x^{(3)} = 0.1875, 0.4062, 0.5937, 0.8125$ соответственно. Видно, что в большинстве случаев приближенное решение достаточно точно восстанавливает место расположения источников неоднородностей и их относительные амплитуды. Заметное отклонение в относительных размерах всплесков в точном и приближенном решении наблюдается на фиг. 2, 3 в плоскостях $x^{(3)} = 0.1875, 0.8125$ (см. крайние верхние и нижние пары графиков). Это расхождение можно объяснить расположением источников и детекторов относительно реконструируемых неоднородностей в соответствующих примерах. На фиг. 1–4 также показано, что абсолютные значения амплитуд неоднородностей аппроксимируются более грубо по сравнению с местом локализации неоднородностей.

Альтернативный подход к численному решению интегрального уравнения (5.1) развивается в [18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев М.М. Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157. № 3. С. 520–521.

2. *Лаврентьев М.М.* Об одном классе обратных задач для дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160. № 1. С. 32–35.
3. *Бакушинский А.Б., Козлов А.И., Кокурин М.Ю.* Об одной обратной задаче для трехмерного волнового уравнения // Ж. вычисл. матем. матем. физ. 2003. Т. 47. № 3. С. 1201–1209.
4. *Вайнберг М.М.* Асимптотические методы в уравнениях математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1982.
5. *Романов В.Г.* О гладкости фундаментального решения для гиперболического уравнения второго порядка // Сиб. матем. журнал. 2009. Т. 50. № 4. С. 883–889.
6. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
7. *Рамм А.Г.* Многомерные обратные задачи рассеяния. М.: Мир, 1994.
8. *Бухгейм А.Л., Дятлов Г.В., Кардаков В.Б., Танцерева Е.В.* Единственность в одной обратной задаче для системы уравнений упругости // Сиб. матем. журнал. 2004. Т. 45. № 4. С. 747–757.
9. *Кокурин М.Ю., Паймеров С.К.* Об обратной коэффициентной задаче для волнового уравнения в ограниченной области // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 1. С. 117–128.
10. *Kokurin M.Yu.* On a multidimensional integral equation with data supported by low-dimensional analytic manifolds // J. of Inverse and Ill-Posed Probl. 2013. V. 21. № 1. P. 125–140.
11. *Кокурин М.Ю.* О полноте произведений гармонических функций и единственности решения обратной задачи акустического зондирования // Матем. заметки. 2018. Т. 104. № 5. С. 708–716.
12. *Кокурин М.Ю.* Полнота асимметричных произведений решений эллиптического уравнения второго порядка и единственность решения обратной задачи для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2.
13. *Бакушинский А.Б., Леонов А.С.* Экономичный численный метод решения коэффициентной обратной задачи для волнового уравнения в трехмерном пространстве // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 4. С. 561–574.
14. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.
15. *Ikawa M.* Hyperbolic Partial Differential Equations and Wave Phenomena. Providence R.I.: AMS, 2000.
16. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
17. *Бицадзе А.В.* О полигармонических функциях // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294. № 3. С. 521–525.
18. *Klibanov M., Li J., Zhang W.* Linear Lavrent'ev integral equation for the numerical solution of a nonlinear coefficient inverse problem // arXiv:2010.14144v1 [math.NA] 27 Oct., 2020.

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 519.633

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ И ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЫ¹⁾

© 2021 г. О. С. Розанова^{1,*}, Е. В. Чижонков^{1,**}

¹ 119899 Москва, Ленинские горы, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Россия

*e-mail: rozanova@mech.math.msu.su

**e-mail: chizhonk@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию 24.08.2020 г.

Переработанный вариант 24.08.2020 г.

Принята к публикации 07.04.2021 г.

Для моделирования колебаний холодной плазмы как в нерелятивистском случае, так и с учетом релятивизма, предложены и обоснованы численные алгоритмы высокой точности. Спецификой подхода является использование лагранжевых переменных для приближенного решения задачи, сформулированной в эйлеровых переменных. Основной результат представлен теоремами о сходимости предложенных алгоритмов относительно малых параметров дискретизации независимых эйлеровых переменных. Численные эксперименты наглядно иллюстрируют полученные теоретические результаты. В частности, проведено моделирование известного эффекта опрокидывания плазменных колебаний и подтверждено, что он имеет характер градиентной катастрофы. Библ. 19. Фиг. 4.

Ключевые слова: квазилинейные гиперболические уравнения, плазменные колебания, теоремы существования, эйлеровы и лагранжевы переменные, метод характеристик, численное решение, эффект опрокидывания, градиентная катастрофа.

DOI: 10.31857/S0044466921090155

ВВЕДЕНИЕ

Гидродинамическая модель “холодной” плазмы хорошо известна и подробно описана в учебниках и монографиях по физике плазмы. Она является одной из простейших моделей, в которой плазма рассматривается как релятивистская электронная жидкость, в пренебрежении столкновительными и рекомбинационными эффектами, а также движением ионов. В настоящее время внимание к этой модели обусловлено, в первую очередь, задачами, связанными с распространением сверхмощных коротких лазерных импульсов в плазме (см. [1], [2]). В процессе движения импульс возбуждает позади кильватерную плазменную волну, которая представляет собой волну плотности заряда, распространяющуюся в направлении движения импульса и ограниченную в поперечном направлении. Предсказанный первоначально теоретически эффект возбуждения кильватерной плазменной волны лазерным импульсом в дальнейшем получил подтверждение в ряде экспериментов, где было проведено исследование пространственной структуры кильватерных полей.

При математическом моделировании процессов в бесстолкновительной холодной плазме наиболее часто используются два подхода — Лагранжа и Эйлера: метод частиц, позволяющий отслеживать их индивидуальные траектории, и гидродинамическое описание на базе уравнений с частными производными (см., например, [3], [4]). В рамках обоих подходов хорошо известен эффект опрокидывания колебаний (см. [5]). В первом случае критерием опрокидывания колебаний является пересечение траекторий электронов, а во втором — обращение в бесконечность функции, описывающей плотность электронов. В [6] имеется физическое обоснование появления сингулярности плотности среды при пересечении траекторий частиц. С математической точки зрения это явление означает появление сильной (дельтаобразной) сингулярности у функции, описывающей плотность среды, и также описано на примере некоторых моделей, например, газовой динамики “без давления”.

¹⁾Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

По существу, кильватерные волны в плазме, инициируемые лазерными импульсами, тесно связаны с колебаниями, возникающими вследствие неоднородности плотности заряда, которая формирует начальное электрическое поле специальной формы. В [7] проанализированы две различные постановки задачи Коши для уравнений, описывающих плоские одномерные свободные электронные колебания в холодной плазме. Для нерелятивистского случая результат указанной работы позволяет разделить начальные данные задачи Коши, описывающей плоские одномерные нерелятивистские электронные колебания в холодной плазме, на два класса. Один — порождает гладкое 2π -периодическое решение на бесконечном интервале времени, а другой — приводит к образованию сингулярности в течение уже первого периода колебаний. Для релятивистской постановки в общем случае разделить начальные данные задачи Коши на два класса аналогичным образом, т.е. получить критерий образования особенности, удастся только для промежутка времени, соответствующего первому колебанию. Настоящая работа базируется на результатах о существовании решения дифференциальных задач для обеих постановок (см. [7]).

Статья организована следующим образом. В разд. 1 ставится задача о колебаниях плазмы в общем трехмерном случае и осуществляется редукция полной системы для случая одномерных плоских колебаний для релятивистского и нерелятивистского случаев. В разд. 2 предложен и проанализирован численный алгоритм без учета релятивистских эффектов, включая условия регулярности получаемой эйлеровой сетки и положительности функции электронной плотности. Раздел 3 посвящен релятивистскому случаю. С учетом возникновения у решения градиентной катастрофы, сначала определена область определения приближенного решения, т.е. “зона ответственности” численного метода во времени, а затем предложен и проанализирован он сам. При обосновании корректности численного алгоритма особое внимание уделяется отличиям от нерелятивистского случая, разобранных в разд. 2. В разд. 4 рассмотрена процедура возврата к эйлеровым переменным, основанная на эрмитовой кубической интерполяции, а также сформулированы и доказаны теоремы о сходимости предложенных алгоритмов относительно малых параметров дискретизации независимых эйлеровых переменных. Раздел 5 посвящен численным иллюстрациям полученных теоретических результатов. В частности, при использовании предложенного подхода проведено моделирование известного эффекта опрокидывания плазменных колебаний и подтверждено, что он имеет характер градиентной катастрофы. В заключение систематизированы результаты проведенных исследований.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ

Система уравнений гидродинамики “холодной” плазмы, включающая гидродинамические уравнения совместно с уравнениями Максвелла, в векторной форме имеет вид (см., например, [8]–[11])

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{v}) &= 0, \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{p} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right), \\ \gamma &= \sqrt{1 + \frac{|\mathbf{p}|^2}{m^2 c^2}}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m\gamma}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -\frac{4\pi}{c} en\mathbf{v} + \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где e , m — заряд и масса электрона (здесь заряд электрона имеет отрицательный знак: $e < 0$), c — скорость света; n , $\mathbf{p}$, $\mathbf{v}$ — концентрация, импульс и скорость электронов; γ — лоренцевский фактор; $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ — векторы электрического и магнитного полей.

С целью построения численного решения плоских одномерных релятивистских плазменных колебаний базовые уравнения (1) можно существенно упростить.

Будем обозначать независимые переменные в декартовой системе координат обычным образом (x, y, z) и примем допущения, что:

- решение определяется только x -компонентами вектор-функций $\mathbf{p}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{E}$;
- зависимость в этих функциях от переменных y и z отсутствует, т.е. $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$.

Тогда из системы (1) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nv_x) &= 0, \quad \frac{\partial p_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial p_x}{\partial x} = eE_x, \\ \gamma &= \sqrt{1 + \frac{p_x^2}{m^2 c^2}}, \quad v_x = \frac{p_x}{m\gamma}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = -4\pi env_x. \end{aligned} \quad (2)$$

Введем безразмерные величины

$$\rho = k_p x, \quad \theta = \omega_p t, \quad V = \frac{v_x}{c}, \quad P = \frac{p_x}{mc}, \quad E = -\frac{eE_x}{mc\omega_p}, \quad N = \frac{n}{n_0},$$

где $\omega_p = (4\pi e^2 n_0 / m)^{1/2}$ — плазменная частота, n_0 — значение невозмущенной электронной плотности, $k_p = \omega_p / c$. В новых переменных система (2) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \rho}(NV) &= 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} + E + V \frac{\partial P}{\partial \rho} = 0, \\ \gamma &= \sqrt{1 + P^2}, \quad V = \frac{P}{\gamma}, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} = NV. \end{aligned} \quad (3)$$

Из первого и последнего уравнений (3) следует

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[N + \frac{\partial}{\partial \rho} E \right] = 0.$$

Это соотношение справедливо как при отсутствии плазменных колебаний ($N \equiv 1, E \equiv 0$), так и при их наличии. Поэтому отсюда имеем более простое выражение для электронной плотности $N(\rho, \theta)$:

$$N(\rho, \theta) = 1 - \frac{\partial E(\rho, \theta)}{\partial \rho}. \quad (4)$$

Воспользовавшись им в (3), приходим к уравнениям, описывающим плоские одномерные релятивистские плазменные колебания (см. [12]):

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} + V \frac{\partial P}{\partial \rho} + E = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} + V \frac{\partial E}{\partial \rho} - V = 0, \quad V = \frac{P}{\sqrt{1 + P^2}}, \quad (5)$$

где ρ и θ — безразмерные координаты по пространству и времени, соответственно, P — импульс электронов, V — скорость электронов, E — функция, характеризующая электрическое поле. К системе (5) необходимо присоединить уравнение (4), описывающее поведение важнейшей функции в модели холодной плазмы — электронной плотности.

Ниже мы будем изучать в полуплоскости $\{(\rho, \theta) : \rho \in \mathbb{R}, \theta > 0\}$ численное решение задачи Коши для (4), (5) с начальными условиями

$$P(\rho, 0) = P_0(\rho), \quad E(\rho, 0) = E_0(\rho), \quad \rho \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Можно также рассмотреть систему (5) в упрощенном (нерелятивистском) приближении. А именно, в предположении малости скорости электронов V имеет место представление

$P = V + \frac{V^3}{2} + O(V^5)$, $V \rightarrow 0$. Таким образом, с точностью до кубически малых слагаемых мы можем считать, что $P = V$. Это предположение позволяет записать (5) в виде

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} + V \frac{\partial V}{\partial \rho} + E = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} + V \frac{\partial E}{\partial \rho} - V = 0, \quad (7)$$

при этом начальные условия примут вид

$$V(\rho, 0) = V_0(\rho), \quad E(\rho, 0) = E_0(\rho), \quad \rho \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Системы (5) и (7) относятся к гиперболическому типу. Известно, что для таких систем существует локально по времени единственное решение задачи Коши того же класса, что и начальные данные (см. [13]).

2. РЕШЕНИЕ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ УРАВНЕНИЙ

Прежде, чем описывать алгоритм решения задачи (4), (7) с начальными условиями (8), напомним основные результаты из [7].

2.1. Вспомогательные сведения

Для нерелятивистских уравнений принципиально важной является теорема существования глобального по времени решения (см. [7]).

Утверждение 2.1. Пусть начальные данные (8) принадлежат классу $C^2(\mathbb{R})$. Для существования и единственности непрерывно дифференцируемого по обоим переменным 2π -периодического по времени при всех $\theta > 0$ решения $V(\theta, \rho)$, $E(\theta, \rho)$ задачи (7), (8) необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке $\rho \in (-\infty, \infty)$ было выполнено неравенство

$$(V'_0(\rho))^2 + 2E'_0(\rho) - 1 < 0. \quad (9)$$

Если же существует хотя бы одна точка ρ , для которой выполняется неравенство, противоположное (9), то в течение конечного времени производные решения обращаются в бесконечность.

Следствие. Если необходимое и достаточное условие существования решения (9) выполнено в начальный момент времени, то оно сохраняется во времени и пространстве, т.е. для произвольной точки (ρ, θ) справедливо

$$\left(\frac{\partial V(\rho, \theta)}{\partial \rho}\right)^2 + 2\frac{\partial E(\rho, \theta)}{\partial \rho} - 1 < 0. \quad (10)$$

Даже если условие (9) не выполнено, то сами функции $V(\rho, \theta)$ и $E(\rho, \theta)$ все равно остаются ограниченными, в силу равенства $V^2 + E^2 = V_0^2(\rho_0) + E_0^2(\rho_0) = \text{const}$, справедливого для произвольной характеристики системы (7), стартующей из точки ρ_0 . Отсюда следует, что разрушение решения может иметь только вид градиентной катастрофы.

Следует отметить, что, в силу соотношения (4), из (10) вытекают строгая положительность и отделенность от нуля функции электронной плотности:

$$N(\rho, \theta) > \frac{1}{2}.$$

Таким образом, из приведенной информации следует, что решение задачи (4), (7) с начальными условиями (8) полностью характеризуется поведением функций $V(\rho, \theta)$, $E(\rho, \theta)$ и их пространственных производных (градиентов).

В дальнейшем нам потребуется решение вспомогательной задачи для функций $W(\theta)$ и $D(\theta)$ с вещественными начальными данными:

$$\begin{aligned} W' &= -D - W^2, & D' &= (1 - D)W, \\ W(0) &= \beta, & D(0) &= \alpha. \end{aligned} \quad (11)$$

Легко убедиться в том, что фазовые траектории системы (11) представляют собой кривые второго порядка (эллипсы, параболы или гиперболы, в зависимости от начальных данных). Нас будет интересовать явный вид решения в случае ограниченности фазовых траекторий, т.е. эллипсов.

Полученные ниже формулы (12), (13) были известны ранее (см. [14], а также [12]), однако мы приведем наиболее естественный геометрический способ их получения, основанный на эллиптической параметризации.

Утверждение 2.2. Пусть величина $s = (1 - \alpha)/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ удовлетворяет условию $s > 1$, тогда решение (11) имеет вид

$$W(\theta) = \frac{\cos(\theta + \theta_2)}{s + \sin(\theta + \theta_2)}, \quad D(\theta) = \frac{\sin(\theta + \theta_2)}{s + \sin(\theta + \theta_2)}, \quad (12)$$

где

$$\cos \theta_2 = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \sin \theta_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \quad (13)$$

Доказательство. Воспользуемся следующими представлениями искомых функций:

$$W(\theta) = r(\theta) \cos \varphi(\theta), \quad D(\theta) = r(\theta) \sin \varphi(\theta). \quad (14)$$

В этом случае уравнения из (11) примут вид

$$\begin{aligned} r' \cos \varphi - r \varphi' \sin \varphi &= -r \sin \varphi - r^2 \cos^2 \varphi, \\ r' \sin \varphi + r \varphi' \cos \varphi &= -r \cos \varphi - r^2 \cos \varphi \sin \varphi. \end{aligned} \quad (15)$$

Умножим в (15) первое уравнение на $\sin \varphi$ и вычтем из полученного второе уравнение, предварительно умноженное на $\cos \varphi$. В результате получим

$$\varphi' = 1, \quad \text{т.е.} \quad \varphi(\theta) = \theta + \theta_2. \quad (16)$$

Умножим в (15) первое уравнение на $\cos \varphi$ и сложим с полученным второе уравнение, предварительно умноженное на $\sin \varphi$. В результате получим

$$r' = -r^2 \cos \varphi. \quad (17)$$

Разделение переменных в (17) дает

$$r(\theta) = \frac{1}{\sin \varphi + \text{const}}, \quad (18)$$

следовательно, искомые представления (14) определены. Для завершения вывода формул (12) остается определить θ_2 в (13) и $\text{const} = s$ в (18), используя начальные данные из (11).

Заметим, что константа $1/s < 1$ играет роль эксцентриситета эллипса, таким образом, условие $s > 1$ гарантирует корректность формул (12) в произвольный момент времени θ . Утверждение доказано.

Наконец, для завершения подготовки к численному решению нерелятивистских уравнений отметим, что пространственные частные производные решения системы (7):

$$W(\rho, \theta) = \frac{\partial V(\rho, \theta)}{\partial \rho}, \quad D(\rho, \theta) = \frac{\partial E(\rho, \theta)}{\partial \rho},$$

удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dW}{d\theta} = -D - W^2, \quad \frac{dD}{d\theta} = (1 - D)W, \quad (19)$$

где $\frac{d}{d\theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} + V \frac{\partial}{\partial \rho}$, и начальным условиям

$$W_0(\rho) = V'_0(\rho), \quad D_0(\rho) = E'_0(\rho), \quad (20)$$

которые могут быть получены непосредственным дифференцированием (7) и (8). Видно, что (19) и (20) совпадают с задачей (11).

2.2. Численный алгоритм

По сути, излагаемый ниже метод является методом характеристик, однако его конструкцию весьма удобно привести в терминах лагранжева описания среды, т.е. используя понятия частиц и их траекторий.

Определим для нахождения численного решения на прямой $\rho \in (-\infty, \infty)$ произвольную сетку в начальный момент времени $\theta = 0$:

$$\rho_1(0) < \rho_2(0) < \dots < \rho_M(0),$$

состоящую из M узлов. В каждый узел $\rho_k(\theta = 0)$, $1 < k < M$, поместим частицу, маркированную лагранжевой координатой ρ_k^L .

Напомним, что траектория каждой частицы характеризуется двумя параметрами: лагранжевой координатой ρ^L и функцией смещения $R(\rho^L, \theta)$, которые совместно определяют эйлерову координату $\rho(\rho^L, \theta)$, т.е. местонахождение частицы в момент времени θ :

$$\rho(\rho^L, \theta) = \rho^L + R(\rho^L, \theta). \quad (21)$$

Перепишем систему уравнений (7) в более удобной форме:

$$\frac{dV(\rho, \theta)}{d\theta} = -E(\rho, \theta), \quad \frac{dE(\rho, \theta)}{d\theta} = V(\rho, \theta), \quad (22)$$

использующей полную производную по времени, и добавим к ней уравнение, описывающее траекторию частицы

$$\frac{d\rho}{d\theta} = V(\rho^L, \theta),$$

которое с учетом (21) примет вид

$$\frac{dR(\rho^L, \theta)}{d\theta} = V(\rho^L, \theta). \quad (23)$$

Сопоставляя второе уравнение в (22) с (23), получаем важную связь между функцией смещения R и электрическим полем E :

$$R(\rho^L, \theta) = E(\rho, \theta) \equiv E(\rho^L + R(\rho^L, \theta), \theta). \quad (24)$$

Уточним, что проведенное сопоставление имеет следующий смысл: пусть в момент времени θ в точке, имеющей эйлерову координату ρ , располагается некоторая частица, помеченная лагранжевой координатой ρ^L , тогда наблюдаемая в этой точке пространства скорость $V(\rho, \theta)$ совпадает со скоростью частицы $V(\rho^L, \theta)$, а величина смещения этой частицы $R(\rho^L, \theta)$ тождественно равна значению электрического поля $E(\rho, \theta)$. В результате из (22) и (24) следуют уравнения, описывающие динамику частиц:

$$\frac{dV(\rho_k^L, \theta)}{d\theta} = -R(\rho_k^L, \theta), \quad \frac{dR(\rho_k^L, \theta)}{d\theta} = V(\rho_k^L, \theta), \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (25)$$

Соотношения (24), (25) хорошо известны (см. [5], а также [12], [15]). Их вывод выше приведен исключительно для полноты изложения численного алгоритма.

Воспользуемся равенствами (21) и (24) для получения недостающих начальных условий к системам вида (25). В узле ρ_k при $\theta = 0$ определено $E_0(\rho_k)$, т.е. выполнено $\rho_k = \rho_k^L + E_0(\rho_k)$, откуда для частицы, помеченной лагранжевой координатой ρ_k^L , сразу следуют начальные условия

$$V(\rho_k^L, \theta = 0) = V_0(\rho_k), \quad R(\rho_k^L, \theta = 0) = E_0(\rho_k), \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (26)$$

Полученные соотношения позволяют вместо задачи (7), (8), записанной в эйлеровых переменных, численно решать задачу (25), (26), сформулированную в лагранжевых переменных.

Однако решение задачи (25), (26) не позволяет найти пространственные производные искоемых функций V и E , что делает невозможным определение функции электронной плотности N в соответствии с (4). Чтобы избежать этого недостатка, достаточно переформулировать задачу (19), (20), записанную в эйлеровых переменных, также в лагранжевы переменные, используя рассуждения, изложенные выше. Формальные преобразования дают уравнения

$$\frac{dW(\rho_k^L, \theta)}{d\theta} = -D(\rho_k^L, \theta) - W^2(\rho_k^L, \theta), \quad \frac{dD(\rho_k^L, \theta)}{d\theta} = (1 - D(\rho_k^L, \theta))W(\rho_k^L, \theta) \quad (27)$$

и начальные условия

$$W(\rho_k^L, \theta = 0) = W_0(\rho_k) \equiv \beta_k, \quad D(\rho_k^L, \theta = 0) = D_0(\rho_k) \equiv \alpha_k, \quad (28)$$

соответствующие отдельным частицам с номерами $k = 1, 2, \dots, M$.

Теперь с помощью решения задачи (27), (28) и соотношения (21) для каждой частицы

$$\rho_k(\theta) = \rho_k^L + R(\rho_k^L, \theta), \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (29)$$

можно в эйлеровой точке пространства $(\rho_k(\theta), \theta)$ определить значение электронной плотности

$$N(\rho_k, \theta) = 1 - D(\rho_k^L, \theta).$$

Таким образом, предлагаемый численный алгоритм заключается в точном (аналитическом) нахождении в узлах переменной эйлеровой сетки (29) решений уравнений (25) с условиями (26) для $k = 1, 2, \dots, M$:

$$\begin{aligned} V(\rho_k^L, \theta) &= A_k \cos(\theta + \theta_1), & R(\rho_k^L, \theta) &= A_k \sin(\theta + \theta_1), \\ A_k &= \sqrt{V_0^2(\rho_k) + E_0^2(\rho_k)}, & \cos \theta_1 &= V_0(\rho_k)/A_k, & \sin \theta_1 &= E_0(\rho_k)/A_k. \end{aligned} \quad (30)$$

Кроме того, в тех же самых точках (29) по формулам (12), (13) можно определить решения уравнений (27) с условиями (28). Как уже отмечалось выше, описываемый алгоритм заключается в точном интегрировании исходных уравнений вдоль характеристик, отождествляемых с траекториями отдельных лагранжевых частиц. По этой причине устойчивость метода, т.е. влияние возмущений начальных данных, полностью определяется формулами (12) и (30).

Далее необходимо обсудить вопросы о корректности предлагаемых формул и восстановлении функций, найденных в узлах переменной эйлеровой сетки, для произвольных значений ρ между этими узлами.

Важным для ответа на первый вопрос является

Утверждение 2.3. Пусть выполнены условия утверждения 2.1, тогда эйлеровы траектории частиц $\rho_k(\theta), 1 \leq k \leq M$, определяемые соотношением (29), не пересекутся ни при каком $\theta > 0$.

Доказательство. Применим формулу (21) для двух бесконечно близких частиц с координатами ρ^L и $\rho^L + \Delta\rho^L$ соответственно, получим

$$\rho(\rho^L, \theta) = \rho^L + R(\rho^L, \theta), \quad \rho(\rho^L + \Delta\rho^L, \theta) = \rho^L + \Delta\rho^L + R(\rho^L + \Delta\rho^L, \theta).$$

Пусть в некоторый момент времени θ эйлеровы координаты частиц (левые части соотношений) станут одинаковыми, т.е. траектории соседних частиц пересекутся, тогда вычтем из второго равенства первое. Будем иметь

$$R(\rho^L + \Delta\rho^L, \theta) - R(\rho^L, \theta) = -\Delta\rho^L.$$

Поделим обе части на $\Delta\rho^L$ и перейдем к пределу при $\Delta\rho^L \rightarrow 0$. Вследствие дифференцируемости $R(\rho^L, \theta)$, что следует из условий утверждения 2.1, получим равенство

$$\frac{\partial R(\rho^L, \theta)}{\partial \rho^L} = -1.$$

Наоборот, чтобы траектории частиц не пересекались, достаточно выполнения условия

$$\left| \frac{\partial R(\rho^L, \theta)}{\partial \rho^L} \right| < 1,$$

которое, в свою очередь, следует из ограничения на полную энергию частицы:

$$T(\rho^L, \theta) \equiv \left(\frac{\partial R(\rho^L, \theta)}{\partial \rho^L} \right)^2 + \left(\frac{\partial V(\rho^L, \theta)}{\partial \rho^L} \right)^2 < 1. \quad (31)$$

Величина $T(\rho^L, \theta)$ является первым интегралом и от времени не зависит, так как функции $\partial R(\rho^L, \theta)/\partial \rho^L$ и $\partial V(\rho^L, \theta)/\partial \rho^L$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial V(\rho^L, \theta)}{\partial \rho^L} \right) = -\frac{\partial R(\rho^L, \theta)}{\partial \rho^L}, \quad \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial R(\rho^L, \theta)}{\partial \rho^L} \right) = \frac{\partial V(\rho^L, \theta)}{\partial \rho^L}, \quad (32)$$

которые следуют из дифференцирования уравнений (25), описывающих динамику лагранжевых частиц. Поэтому для проверки условия (31) достаточно проанализировать только значение $T(\rho^L, \theta = 0)$.

С этой целью рассмотрим выражение $\partial \rho(\rho^L, \theta) / \partial \rho^L$, следующее из (21). Отметим, что в произвольный момент времени θ его обратная величина в точности совпадает со значением электронной плотности, т.е.

$$N(\rho(\rho^L, \theta), \theta) = \frac{\partial \rho^L}{\partial \rho(\rho^L, \theta)}.$$

Действительно, после дифференцирования соотношений (21) и (24) по переменной ρ^L и исключения из полученных выражений величины $\partial R(\rho^L, \theta) / \partial \rho^L$ получим

$$\frac{\partial \rho(\rho^L, \theta)}{\partial \rho^L} = \frac{1}{1 - \partial E(\rho, \theta) / \partial \rho},$$

что с учетом (4) порождает искомую формулу для $N(\rho(\rho^L, \theta), \theta)$.

Теперь воспользуемся тем, что при $\theta = 0$ электронная плотность выражается формулой

$$N(\rho, \theta = 0) = 1 - E'_0(\rho).$$

Это дает возможность выразить искомую величину:

$$\frac{\partial \rho(\rho^L, \theta = 0)}{\partial \rho^L} = \frac{1}{N(\rho, \theta = 0)} = \frac{1}{1 - E'_0(\rho)}.$$

Отсюда, используя (24) при $\theta = 0$ и явное выражение

$$T(\rho^L, \theta) = \left(\frac{\partial E}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \rho^L} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \rho^L} \right)^2,$$

приходим к оценке для произвольного ρ , или, что то же самое — для произвольного ρ^L :

$$T(\rho^L, \theta = 0) = [(E'_0(\rho))^2 + (V'_0(\rho))^2] / [1 - E'_0(\rho)]^2 < 1,$$

которая легко доказывается от противного на основании неравенства (9). Утверждение доказано.

Следствие. Порядок лагранжевых частиц (29) сохраняется во времени, т.е. для произвольного $\theta \geq 0$ справедливо

$$\rho_{k+1}(\theta) > \rho_k(\theta) \quad \forall k = 1, 2, \dots, M - 1. \quad (33)$$

Рассмотрим теперь вопрос о положительности электронной плотности $N(\rho, \theta)$ в узлах сетки $\rho_k(\theta)$, $k = 1, 2, \dots, M$. Имеет место

Утверждение 2.4. Пусть выполнены условия утверждения 2.1, тогда в произвольный момент времени $\theta \geq 0$ в произвольном узле сетки $\rho_k(\theta)$, $k = 1, 2, \dots, M$, выполнено неравенство

$$N(\rho_k, \theta) > \frac{1}{2}. \quad (34)$$

Доказательство. В каждом узле эйлеровой сетки

$$\rho_k(\theta) = \rho_k^L + R(\rho_k^L, \theta), \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

значение электронной плотности определено формулой

$$N(\rho_k, \theta) = 1 - D(\rho_k^L, \theta).$$

В свою очередь, значения $D(\rho_k^L, \theta)$ порождаются решением системы (27), (28), т.е. даются формулами (12), (13).

Обратим внимание, что условие $s > 1$, т.е. неравенство $1 - 2D(0) - W^2(0) > 0$ эквивалентно выполнению условий утверждения 2.1 (неравенству (9)) и, кроме того, сохраняется во времени. Другими словами, в произвольный момент времени $\theta \geq 0$ справедливо

$$1 - 2D(\theta) - W^2(\theta) > 0,$$

что можно проверить простой подстановкой формул (12). Отсюда, в свою очередь, следует неравенство $D(\theta) < 1/2$, которое с учетом (4) приводит к искомой оценке снизу для электронной плотности. Утверждение доказано.

Следует отметить, что из формул (12) можно получить также оценку сверху для электронной плотности вида

$$N(\rho_k, \theta) < \frac{1}{1-r}, \quad r = \sup_{\rho} \frac{\sqrt{(V'_0(\rho))^2 + (E'_0(\rho))^2}}{1 - E_0(\rho)}.$$

Однако при выполнении неравенства (9) величина $0 < r < 1$ может быть сколь угодно близка к единице. Поэтому оценка сверху представляется малоинформативной, хотя и может являться конечной величиной. Это будет, например, в случае, если носитель ненулевых начальных данных ограничен.

Рассмотрим вопрос о регулярности эйлеровой сетки $\rho_k(\theta)$, $k = 1, 2, \dots, M$, получаемой в процессе численного алгоритма. С этой целью удобно проанализировать функцию расстояний между соседними частицами

$$h_k(\theta) = \rho_{k+1}(\theta) - \rho_k(\theta), \quad k = 1, 2, \dots, M-1.$$

Следствие утверждения 2.3 дает оценку снизу $h_k(\theta) > 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, M-1$, но представляет интерес также оценка сверху. Для этого потребуется

Утверждение 2.5. Пусть выполнены условия утверждения 2.1, тогда в произвольный момент времени $\theta > 0$ для соседних узлов эйлеровой сетки $\rho_k(\theta)$, $k = 1, 2, \dots, M$, выполнен закон сохранения заряда

$$\int_{\rho_k(\theta)}^{\rho_{k+1}(\theta)} N(\rho, \theta) d\rho = \int_{\rho_k(0)}^{\rho_{k+1}(0)} N(\rho, \theta = 0) d\rho. \quad (35)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$h_k(\theta) = \rho_{k+1}(\theta) - \rho_k(\theta) = \rho_{k+1}^L + R(\rho_{k+1}^L, \theta) - (\rho_k^L + R(\rho_k^L, \theta)).$$

Добавим к ней (и одновременно вычтем) величины смещений этих частиц при $\theta = 0$, т.е. добавим ноль $-\pm R(\rho_{k+1}^L, 0)$, $\pm R(\rho_k^L, 0)$. После перегруппировки слагаемых будем иметь

$$h_k(\theta) = h_k(0) + [R(\rho_{k+1}^L, \theta) - R(\rho_k^L, \theta)] - [R(\rho_{k+1}^L, 0) - R(\rho_k^L, 0)].$$

Полученное равенство при использовании соотношения (24):

$$R(\rho_k^L, \theta) = E(\rho_k(\theta), \theta),$$

можно переписать в виде

$$h_k(\theta) - [E(\rho_{k+1}, \theta) - E(\rho_k, \theta)] = h_k(0) - [E(\rho_{k+1}, 0) - E(\rho_k, 0)]. \quad (36)$$

Учитывая формулу для электронной плотности (4) в произвольный момент $\theta \geq 0$:

$$N(\rho, \theta) = 1 - \frac{\partial E(\rho, \theta)}{\partial \rho},$$

замечаем, что (36) представляет собой искомый закон сохранения заряда (35). Утверждение доказано.

Следствие. Для функции расстояния между частицами в произвольный момент времени $\theta > 0$ справедливы неравенства

$$0 < h_k(\theta) < 2 \int_{\rho_k(0)}^{\rho_{k+1}(0)} N(\rho, \theta = 0) d\rho, \quad k = 1, 2, \dots, M-1.$$

Кроме того, из утверждения 2.5 явно следует рекомендация выбирать начальную эйлерову сетку $\rho_k(0)$, $k = 1, 2, \dots, M$, таким образом, чтобы интегралы в правой части соотношения (35) были примерно равны и достаточно малы. Это несложно сделать, учитывая начальные данные (8) и формулу для плотности (4).

Суммируя приведенное описание численного алгоритма и результаты, связанные с анализом его корректности, подчеркнем, что для решения исходной задачи (4), (7), (8), записанной в эйлеровых переменных, удобно перейти в лагранжевы переменные и использовать явные формулы для вычисления искомых функций в точках $\rho_k(\theta)$, $k = 1, 2, \dots, M$, принадлежащих траекториям частиц. Этого вполне достаточно для исследования большинства постановок. Однако вполне возможно возникновение ситуаций, когда требуется определить решение в заданных эйлеровых точках (ρ, θ) , которые не обязаны принадлежать рассчитываемым траекториям частиц.

В этом случае в момент времени θ необходимо определить сначала интервал $[\rho_k(\theta), \rho_{k+1}(\theta)]$, которому принадлежит заданное значение ρ , а затем с помощью процедуры интерполяции найти приближенное значение. Учитывая, что в узлах эйлеровой сетки $\rho_k(\theta)$, $k = 1, 2, \dots, M$, имеются не только значения функций $V(\rho, \theta)$ и $E(\rho, \theta)$, но и значения их пространственных производных, представляется весьма удобным применение в этих целях эрмитовой кубической интерполяции. Необходимые формулы и оценки погрешностей будут приведены в разд. 4 (см. также [16]).

3. РЕШЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ УРАВНЕНИЙ

Прежде, чем описывать алгоритм решения задачи (4), (5) с начальными условиями (6), напомним ее основные свойства, а также отличия от нерелятивистского случая.

3.1. Существование решения и уравнения в лагранжевых переменных

Система уравнений (5) также является гиперболической, и для нее справедливы общие результаты о локальном существовании гладкого решения задачи Коши и характере возникновения особенностей, отмеченные ранее (см. [13]). В рассматриваемом случае эти результаты можно уточнить (см. [7]):

Утверждение 3.1. Пусть начальные данные (6) принадлежат классу $C^2(\mathbb{R})$ и выражение $2\sqrt{1 + P_0^2(\rho)} + E_0^2(\rho)$ не равно тождественно константе. Тогда, если существует хотя бы одна точка ρ_0 , для которой выполняется неравенство

$$K_-(P'_0(\rho_0))^2 + 2E'_0(\rho_0) - 1 \geq 0, \quad K_- = \frac{8}{(2\sqrt{1 + P^2(\rho_0)} + E^2(\rho_0))^3},$$

то производные решения задачи (5), (6) в течение конечного времени, не превышающего период колебания $T(\rho_0)$, обращаются в бесконечность.

Выполнение для всех ρ условия

$$(P'_0(\rho))^2 + 2E'_0(\rho) - 1 < 0$$

обеспечивает сохранение гладкости решения, по крайней мере, в течение одного полупериода $T(\rho)$ на каждой характеристике, т.е. до момента времени $t_* = \min_{\rho \in \mathbb{R}} T(\rho)$, $t_* \geq \pi$.

Следует отметить, что начальные данные (6) рассматриваются на всей прямой, поэтому условие отличия от константы выражения $2\sqrt{1 + P_0^2(\rho)} + E_0^2(\rho)$ следует воспринимать, в первую очередь, как конечность области или ограниченность энергии исследуемого решения. Тем более, что даже в этом случае типичным является возникновение градиентной катастрофы у решения системы (5). Действительно, из ее системы характеристик:

$$\frac{dP}{d\theta} = -E, \quad \frac{dE}{d\theta} = \frac{P}{\sqrt{1 + P^2}}, \quad \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{P}{\sqrt{1 + P^2}}, \quad (37)$$

следует, что

$$2\sqrt{1 + P^2} + E^2 = 2\sqrt{1 + P_0^2(\rho_0)} + E_0^2(\rho_0) = \text{const} \quad (38)$$

вдоль характеристики, стартовой из точки ρ_0 . Поэтому само решение всегда является ограниченным, чего нельзя гарантировать для его производных, так как справедливо (см. [7])

Утверждение 3.2. У любого решения задачи Коши (5), (6), для которого $2\sqrt{1 + P_0^2(\rho)} + E_0^2(\rho)$ не равно тождественно константе, являющегося сколь угодно малым отклонением от положения равновесия $P = 0$, $E = 0$, производные решения в течение конечного времени обращаются в бесконечность.

Суммируя вышесказанное, подчеркнем, что в отличие от нерелятивистского случая численное решение задачи (4), (5) с начальными условиями (6) имеет смысл обсуждать только на конечном временном интервале. Причем получаемое решение, как правило, будет завершаться градиентной катастрофой, т.е. обращением в бесконечность функции электронной плотности.

По этой причине представляется вполне разумным подход к численному решению, основанный на использовании лагранжевых переменных, как в разд. 2. С этой целью переформулируем соответствующим образом исходную постановку (4)–(6). Уравнения динамики лагранжевых частиц для $k = 1, 2, \dots, M$ примут следующий вид:

$$\frac{dP(\rho_k^L, \theta)}{d\theta} = -R(\rho_k^L, \theta), \quad \frac{dR(\rho_k^L, \theta)}{d\theta} = \frac{P(\rho_k^L, \theta)}{\sqrt{1 + P^2(\rho_k^L, \theta)}} \equiv V(\rho_k^L, \theta), \quad (39)$$

так как важные соотношения (21) и (24) остаются в релятивистском случае неизменными:

$$\rho_k = \rho_k^L + R(\rho_k^L, \theta), \quad R(\rho_k^L, \theta) = E(\rho_k^L + R(\rho_k^L, \theta), \theta) \equiv E(\rho_k, \theta).$$

При их использовании начальные данные из (6) преобразуются аналогичным образом:

$$P(\rho_k^L, \theta = 0) = P_0(\rho_k), \quad R(\rho_k^L, \theta = 0) = E_0(\rho_k), \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (40)$$

Дополним полученную постановку для функций $P(\rho, \theta)$ и $E(\rho, \theta)$ задачей для их производных:

$$Q(\rho, \theta) = \frac{\partial P(\rho, \theta)}{\partial \rho}, \quad D(\rho, \theta) = \frac{\partial E(\rho, \theta)}{\partial \rho}.$$

Продифференцируем по ρ уравнения (5):

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta} + V \frac{\partial Q}{\partial \rho} = -D - \frac{Q^2}{(1 + P^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial D}{\partial \theta} + V \frac{\partial D}{\partial \rho} = (1 - D) \frac{Q}{(1 + P^2)^{3/2}},$$

и перепишем их в лагранжевых переменных

$$\frac{dQ}{d\theta} = -D - \frac{Q^2}{(1 + P^2)^{3/2}}, \quad \frac{dD}{d\theta} = (1 - D) \frac{Q}{(1 + P^2)^{3/2}}. \quad (41)$$

Здесь искомые функции Q и D зависят уже от переменных (ρ_k^L, θ) и должны быть дополнены начальными данными

$$Q(\rho_k^L, \theta = 0) = P_0(\rho_k), \quad D(\rho_k^L, \theta = 0) = E_0(\rho_k), \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (42)$$

Отметим, что аналогично нерелятивистскому случаю электронная плотность в эйлеровой точке (ρ_k, θ) траектории частицы вычисляется по формуле

$$N(\rho_k, \theta) = 1 - D(\rho_k^L, \theta).$$

Подчеркнем различие между задачами Коши в релятивистском (41), (42) и нерелятивистском (27), (28) случаях: уравнения (27) не зависят от функций $V(\rho_k^L, \theta)$, $R(\rho_k^L, \theta)$, поэтому их решения находятся отдельно от (25); в свою очередь, уравнения (41) зависят от функции $P(\rho_k^L, \theta)$, поэтому их решения можно определить только при совместном решении с (39).

3.2. Численный алгоритм и особенности его использования

Преобразование исходной гиперболической постановки (4)–(6) к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (39)–(42) порождает численный метод

нахождения искомых переменных в точках траекторий лагранжевых частиц $(\rho_k(\theta), \theta)$, где $\rho_k(\theta) = \rho_k^L + R(\rho_k^L, \theta)$, $k = 1, 2, \dots, M$.

При наличии у решения достаточной гладкости по переменной θ весьма удобным представляется использование классического метода Рунге—Кутты четвертого порядка точности (см. [16]), в противном случае (меньшей гладкости) следует применять схемы меньшего порядка точности вплоть до метода Эйлера. В любом случае, в силу использования приближенного метода интегрирования, формируется его погрешность, поэтому для дальнейшего важно, что даже при отсутствии ошибок округлений мы будем оперировать в узлах эйлеровой сетки не точными значениями искомых функций $F(\rho_k, \theta^n)$, как в нерелятивистском случае, а их приближениями $F_k(\theta^n)$, которые в общем случае удовлетворяют асимптотическому равенству

$$|F_k(\theta^n) - F(\rho_k, \theta^n)| = O(\tau^p), \quad p > 0, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (43)$$

где дискретные моменты времени определены так: $\theta^n = \theta^{n-1} + \tau_n$, $n \geq 1$ (шаг по времени в общем случае может быть переменным). В этом случае под параметром τ понимается величина $\max_n \tau_n$.

Отметим также, что устойчивость интегрирования по времени уравнений для импульса и электрического поля полностью определяется равенством (38). Аналогичное свойство для уравнений, описывающих динамику их производных, отсутствует, поэтому при начальных условиях, не приводящих к пересечению лагранжевых траекторий в нерелятивистском случае, в релятивистском случае эти траектории пересекаются. Такая ситуация приводит к возникновению разрыва у функции $E(\rho, \theta)$, и, как его следствие, сингулярности функции электронной плотности в соответствии с (4). Поэтому в процессе вычислений необходимо постоянно контролировать сохранение стартового порядка частиц, т.е. условия $\rho_k(\theta^n) < \rho_{k+1}(\theta^n)$ для всех $k = 1, 2, \dots, M - 1$. Нарушение этого условия хотя бы для одного значения k означает прекращение процесса колебаний (невозможность дальнейшего применения модели), обозначаемое термином “опрокидывание” (breaking). Вышесказанное означает, что наблюдение или исследование решения с конкретными начальными данными имеет смысл только до наступления момента опрокидывания, т.е. релятивистский аналог утверждения 2.3 справедлив только локально во времени. По этой причине далее будем иметь в виду, что численный метод применяется на ограниченном интервале времени $\theta \in [0, \theta_{br}]$, пока искомое решение задачи (4)–(6) существует, единственно и ограничено вместе с необходимыми производными. Другими словами, далее предполагается, что на отрезке $[0, \theta_{br}]$ порядок лагранжевых частиц не изменяется, т.е. выполнено неравенство

$$h_k(\theta) = \rho_{k+1}(\theta) - \rho_k(\theta) > 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, M - 1,$$

а также условие локального по времени существования решения (см. утверждение 3.1)

$$\left(\frac{\partial P(\rho, \theta)}{\partial \rho} \right)^2 + 2 \frac{\partial E(\rho, \theta)}{\partial \rho} - 1 < 0. \quad (44)$$

В этих предположениях справедливо

Утверждение 3.3. Пусть выполнено условие (44) и погрешность численного алгоритма имеет вид (43), тогда при достаточно малом τ в произвольный момент времени θ^n из отрезка $[0, \theta_{br}]$ в произвольном узле сетки $\rho_k(\theta)$, $k = 1, 2, \dots, M$, выполнено неравенство

$$N_k(\theta^n) \geq \frac{1}{2}. \quad (45)$$

Доказательство. В каждом узле эйлеровой сетки

$$\rho_k(\theta^n) = \rho_k^L + R(\rho_k^L, \theta^n), \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

приближенное значение электронной плотности дается формулой

$$N_k(\theta^n) = 1 - D_k(\theta^n).$$

При этом

$$|D_k(\theta^n) - D(\rho_k, \theta^n)| = O(\tau^p), \quad p > 0, \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

учитывая справедливость неравенства (44) для точных значений функций

$$Q^2(\rho, \theta) + 2D(\rho, \theta) - 1 < 0,$$

а также достаточную малость параметра дискретизации по времени τ , получаем неравенство (45). Утверждение доказано.

Ответ на вопрос о регулярности эйлеровой сетки $\rho_k(\theta^n)$, $k = 1, 2, \dots, M$, получаемой в процессе численного алгоритма дает

Утверждение 3.4. Пусть погрешность алгоритма численного интегрирования имеет вид (43) и на отрезке $[0, \theta_{br}]$ порядок лагранжесевых частиц не изменяется, тогда при достаточно малом τ в произвольный момент времени θ^n из отрезка $[0, \theta_{br}]$ для соседних узлов эйлеровой сетки $\rho_k(\theta^n)$, $k = 1, 2, \dots, M$, выполнен закон сохранения заряда

$$\int_{\rho_k(\theta^n)}^{\rho_{k+1}(\theta^n)} N(\rho, \theta^n) d\rho = \int_{\rho_k(0)}^{\rho_{k+1}(0)} N(\rho, \theta = 0) d\rho + O(\tau^p), \quad p > 0. \quad (46)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию, получаемую в процессе вычислений,

$$h_k(\theta^n) = \rho_{k+1}(\theta^n) - \rho_k(\theta^n) = \rho_{k+1}^L + R_{k+1}(\theta^n) - (\rho_k^L + R_k(\theta^n)).$$

Добавим к ней (и одновременно вычтем) точные величины смещений этих частиц при $\theta = 0$, т.е. добавим ноль: $\pm R(\rho_{k+1}^L, 0)$, $\pm R(\rho_k^L, 0)$. После перегруппировки слагаемых будем иметь

$$h_k(\theta^n) = h_k(0) + [R_{k+1}(\theta^n) - R_k(\theta^n)] - [R(\rho_{k+1}^L, 0) - R(\rho_k^L, 0)].$$

Теперь, учитывая погрешность метода интегрирования, т.е.

$$|R_k(\theta^n) - R(\rho_k, \theta^n)| = O(\tau^p), \quad p > 0, \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

а также равенство (24)

$$R(\rho_k^L, \theta^n) = E(\rho_k(\theta^n), \theta^n),$$

получим приближенное (асимптотическое) соотношение

$$h_k(\theta^n) - [E(\rho_{k+1}, \theta^n) - E(\rho_k, \theta^n)] = h_k(0) - [E(\rho_{k+1}, 0) - E(\rho_k, 0)] + O(\tau^p). \quad (47)$$

Равенство (47) с учетом формулы для электронной плотности (4) в произвольный момент θ^n из отрезка $[0, \theta_{br}]$ приводит к искомому закону сохранения заряда (46). Утверждение доказано.

Следствие. Для функции расстояния между частицами в произвольный момент времени θ^n из отрезка $[0, \theta_{br}]$ справедливы неравенства

$$0 < h_k(\theta^n) \leq 2 \int_{\rho_k(0)}^{\rho_{k+1}(0)} N(\rho, \theta = 0) d\rho + O(\tau^p), \quad k = 1, 2, \dots, M - 1.$$

Кроме того, из утверждения 3.4 явно следует рекомендация выбирать начальную эйлерову сетку $\rho_k(0)$, $k = 1, 2, \dots, M$, таким образом, чтобы интегралы в правой части соотношения (46) были примерно равны и достаточно малы. Это несложно сделать, учитывая начальные данные (6) и формулу для плотности (4).

С помощью выражений, использовавшихся при доказательстве утверждения 3.4, можно оценить величину скачка функции $E(\rho, \theta)$ в момент опрокидывания колебаний. Действительно, предположим, что траектории двух соседних частиц пересеклись, т.е. для некоторого k из диапазона $1 \leq k \leq M - 1$ выполнено $h_k(\theta^n) = \rho_{k+1}(\theta^n) - \rho_k(\theta^n) = 0$, тогда из выражения (47) следует

$$[E(\rho_k, \theta^n)] = -(\rho_{k+1}(0) - \rho_k(0)) + (E_0(\rho_{k+1}) - E_0(\rho_k)) + O(\tau^p). \quad (48)$$

Величина $[E]$ в левой части (48), как обычно, обозначает скачок функции E , т.е. разность между предельными значениями справа и слева в точке разрыва.

Суммируя приведенное описание численного алгоритма и результаты, связанные с анализом его корректности, подчеркнем, что для решения исходной задачи (5), (6), записанной в эйлеровых переменных, удобно перейти в лагранжевы переменные и использовать приближенные методы интегрирования по времени для вычисления искомых функций в точках $p_k(\theta'')$, $k = 1, 2, \dots, M$, принадлежащих траекториям частиц. Этого вполне достаточно для исследования большинства постановок. Однако вполне возможно возникновение ситуаций, когда требуется определить решение в заданных эйлеровых точках (p, θ) , которые не обязаны принадлежать рассматриваемым траекториям частиц.

В этом случае в момент времени θ'' необходимо определить сначала интервал $[p_k(\theta''), p_{k+1}(\theta'')]$, которому принадлежит заданное значение p , а затем с помощью процедуры интерполяции найти приближенное значение. Учитывая, что в узлах эйлеровой сетки $p_k(\theta'')$, $k = 1, 2, \dots, M$, имеются не только значения функций $P(p, \theta)$ и $E(p, \theta)$, но и значения их пространственных производных, представляется весьма удобным применение в этих целях эрмитовой кубической интерполяции. Необходимые формулы и оценки погрешностей будут приведены в следующем разделе.

4. ЭРМИТОВА КУБИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ О СХОДИМОСТИ

Отметим, что использование кубической интерполяции требует от решения большей гладкости, чем $C^2(\mathbb{R})$, однако при условии ограниченности решения и его первых производных в развитии во времени потери начальной гладкости не происходит (см. [13]). Поэтому погрешность интерполируемых данных в общем случае зависит от гладкости начальных функций.

Если в узлах сетки известны не только значения достаточно гладкой функции, но и значения ее производных, удобным способом ее приближенного представления является эрмитова кубическая интерполяция. Вывод необходимых формул и оценок погрешностей приведен в [17], практические детали использования, включая необходимые программы, хорошо описаны в [16]. Далее нам потребуется известное (см. [17])

Утверждение 4.1. Пусть на отрезке $[a, b]$ длины $h > 0$ задана функция $f(x)$ такая, что $\max_{[a, b]} |f^{(4)}(x)| = A_4 < \infty$, и по значениям $f(a)$, $f(b)$, $f'(a)$, $f'(b)$ построен ее эрмитов кубический интерполант

$$C(x) = f(a)[y^2(2y-3)+1] + f(b)y^2(2y-3) + f'(a)hy(y-1)^2 + f'(b)hy^2(y-1), \quad (49)$$

где $y = (x-a)/h$. Тогда для произвольного значения $x \in [a, b]$ справедливо

$$|f^{(l)}(x) - C^{(l)}(x)| \leq C_l h^{4-l} A_4, \quad l = 0, 1, 2, 3, \quad (50)$$

при этом значения постоянных равны

$$C_0 = \frac{1}{384}, \quad C_1 = \frac{\sqrt{3}}{216}, \quad C_2 = \frac{1}{12}, \quad C_3 = \frac{1}{2}.$$

Обратим внимание, что приведенный интерполант с разумной точностью приближает не только саму функцию, но еще и три ее производных, что может оказаться полезным для приложений. Кроме того, представляет интерес вычислительная устойчивость сплайна (49). Справедливо

Утверждение 4.2. Пусть в эрмитовом кубическом интерполанте $C(x)$, построенном на отрезке $[a, b]$ длины $h > 0$, величины $f(a)$, $f(b)$, $f'(a)$, $f'(b)$ заданы с возмущениями так, что

$$|f(a) - f_*(a)| \leq \varepsilon_a, \quad |f(b) - f_*(b)| \leq \varepsilon_b, \quad |f'(a) - f'_*(a)| \leq \delta_a, \quad |f'(b) - f'_*(b)| \leq \delta_b.$$

Тогда для произвольного значения $x \in [a, b]$ справедливо

$$|C(x) - C_*(x)| \leq \varepsilon_a + \varepsilon_b + \frac{4h}{27}(\delta_a + \delta_b), \quad |C'(x) - C'_*(x)| \leq \frac{3}{2h}(\varepsilon_a + \varepsilon_b) + \delta_a + \delta_b. \quad (51)$$

Доказательство. Явная формула для разности эрмитовых кубических интерполянтов, построенных по точным и возмущенным значениям,

$$C(x) - C_*(x) = [f(a) - f_*(a)][y^2(2y - 3) + 1] + [f(b) - f_*(b)]y^2(2y - 3) + \\ + [f'(a) - f'_*(a)]hy(y - 1)^2 + [f'(b) - f'_*(b)]hy^2(y - 1),$$

а также элементарные оценки для $0 \leq y \leq 1$:

$$-1 \leq y^2(2y - 3) \leq 0, \quad \max_y y(y - 1)^2 = \max_y y^2(1 - y) = \frac{4}{27}, \quad \max_y 6y(1 - y) = \frac{3}{2},$$

приводят к справедливости неравенств (51). Утверждение доказано.

Следствие. Из утверждений 4.1 и 4.2 вытекает оценка близости точного и приближенного значений функции $f(x)$, полученного с помощью возмущенного интерполанта $\forall x \in [a, b]$,

$$|f(x) - C_*(x)| \leq C_0 h^4 A_4 + \varepsilon_a + \varepsilon_b + \frac{4h}{27}(\delta_a + \delta_b). \quad (52)$$

Подчеркнем, что в (52) слагаемые в правой части имеют различное происхождение, а именно: возмущение точных значений функции и ее производных в концах отрезка и замена гладкой функции внутри отрезка на кубический многочлен.

Используя оценки выше, можно привести окончательные результаты о сходимости численных алгоритмов из разд. 2 и 3. Для численного решения нерелятивистских уравнений справедлива

Теорема 1. Пусть выполнены условия утверждения 2.1, тогда в произвольный момент времени $\theta \geq 0$ формулы (12) и (30) в предположении отсутствия ошибок округлений дают точное решение задачи (4), (7), (8) в узлах эйлеровой сетки (29).

Если начальные данные (8) принадлежат классу $C^5(\mathbb{R})$, то для $\forall \rho \in [\rho_1(\theta), \rho_M(\theta)]$ значения функций $V(\rho, \theta)$, $E(\rho, \theta)$, $N(\rho, \theta)$ можно восстановить с точностью $O(h^4)$, где $h = \max_{1 \leq k \leq M-1} (\rho_{k+1}(\theta) - \rho_k(\theta))$. При этом значения электронной плотности будут при достаточно малых h удовлетворять оценке $N(\rho, \theta) \geq 1/2$.

Доказательство. Численный алгоритм для решения задачи (4), (7) с начальными условиями (8), изложенный в разд. 2, позволяет в произвольный момент времени $\theta > 0$ получать точные (в предположении отсутствия ошибок округлений) значения функций $V(\rho, \theta)$, $E(\rho, \theta)$, $N(\rho, \theta)$ в узлах эйлеровой сетки $\rho_k(\theta)$, $k = 1, 2, \dots, M$, которые принадлежат характеристикам системы уравнений (7).

Согласно утверждениям 2.3 и 2.5, эта сетка будет невырожденной, т.е. порядок узлов будет сохраняться и длины отрезков $h_k(\theta)$ будут равномерно ограничены. Это необходимо, когда точка (ρ, θ) , в которой требуется найти решение задачи, не принадлежит множеству узлов получаемой в процессе вычислений сетки. В такой ситуации необходимо определить отрезок $[a, b] \equiv [\rho_{k+1}(\theta), \rho_k(\theta)]$, которому принадлежит заданное ρ , и по известным в концах отрезка значениям функции и производной построить эрмитов кубический интерполант.

Далее применяется неравенство (52), в котором параметры ε и δ играют роль вычислительной погрешности и поэтому могут быть опущены. Требование принадлежности начальных данных к классу $C^5(\mathbb{R})$ диктуется принадлежностью функции $D(\rho, \theta)$ к классу $C^4(\mathbb{R})$, так как электронная плотность вычисляется по формуле

$$N(\rho, \theta) = 1 - \frac{\partial E(\rho, \theta)}{\partial \rho} \equiv 1 - D(\rho, \theta).$$

В частности, из этого равенства, утверждения 2.4 и (52) при достаточно малом h следует оценка

$$N(\rho, \theta) > \frac{1}{2} + O(h^4), \quad \text{т.е.} \quad N(\rho, \theta) \geq \frac{1}{2}.$$

Теорема доказана.

Напомним, что при решении релятивистских уравнений численный алгоритм предусматривает решение задачи Коши по времени с точностью $O(\tau^p)$, $p > 0$, где τ — параметр дискретизации

по времени. Это приводит к тому, что значения искомых функций $P(\rho, \theta)$, $E(\rho, \theta)$, $N(\rho, \theta)$ вычисляются не просто в узлах эйлеровой сетки $\rho_k(\theta^n)$, $k = 1, 2, \dots, M$, принадлежащих характеристикам, но еще и с погрешностями $O(\tau^p)$. Кроме того, в релятивистском случае отсутствует глобальная по времени теорема существования решения, т.е. можно обсуждать сходимость численного алгоритма только до наступления градиентной катастрофы. Поэтому для численного решения релятивистских уравнений справедлива

Теорема 2. Пусть погрешность численного интегрирования задачи Коши (39)–(42) имеет вид (43), на отрезке $[0, \theta_{br}]$ порядок лагранжевых частиц не изменяется и выполнено условие локального по времени существования решения (44), тогда при достаточно малом τ в произвольный момент времени θ^n из отрезка $[0, \theta_{br}]$ в узлах эйлеровой сетки (29) справедлива оценка погрешности

$$|F_k(\theta^n) - F(\rho_k, \theta^n)| = O(\tau^p), \quad p > 0, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (53)$$

где под $F(\rho, \theta)$ понимается любая из функций $P(\rho, \theta)$, $E(\rho, \theta)$, $N(\rho, \theta)$.

Если начальные данные (6) принадлежат классу $C^5(\mathbb{R})$, то в произвольный момент времени $\theta^n \in [0, \theta_{br}]$ и в произвольной точке пространства $\rho \in [\rho_1(\theta^n), \rho_M(\theta^n)]$ значения функций $P(\rho, \theta)$, $E(\rho, \theta)$, $N(\rho, \theta)$ можно восстановить с точностью $O(h^4 + \tau^p)$, $p > 0$, где $h = \max_k(\rho_{k+1}(\theta) - \rho_k(\theta))$. При этом значения электронной плотности при достаточно малых h и τ будут удовлетворять оценке $N(\rho, \theta) \geq 1/2$.

Доказательство. Численный алгоритм для решения задачи (4), (5) с начальными условиями (6), изложенный в разд. 3, позволяет в произвольный момент времени $\theta^n \in [0, \theta_{br}]$ получать значения функций $V(\rho, \theta)$, $E(\rho, \theta)$, $N(\rho, \theta)$ с точностью $O(\tau^p)$, $p > 0$, в узлах эйлеровой сетки $\rho_k(\theta^n)$, $k = 1, 2, \dots, M$, которые принадлежат характеристикам системы уравнений (5) в дискретные моменты времени θ^n .

Согласно предположению о локальной гладкости решения и утверждению 3.4, на отрезке $[0, \theta_{br}]$ эта сетка будет невырожденной, т.е. порядок узлов будет сохраняться при любом θ^n и длины отрезков $h_k(\theta^n)$ будут равномерно ограничены. Это необходимо, когда точка (ρ, θ^n) , в которой требуется найти решение задачи, не принадлежит множеству узлов получаемой в процессе вычислений сетки. В такой ситуации необходимо определить отрезок $[a, b] \equiv [\rho_{k+1}(\theta^n), \rho_k(\theta^n)]$, которому принадлежит заданное ρ , и по вычисленным с точностью $O(\tau^p)$, $p > 0$, в концах отрезка значениям функции и производной построить эрмитов кубический интерполянт.

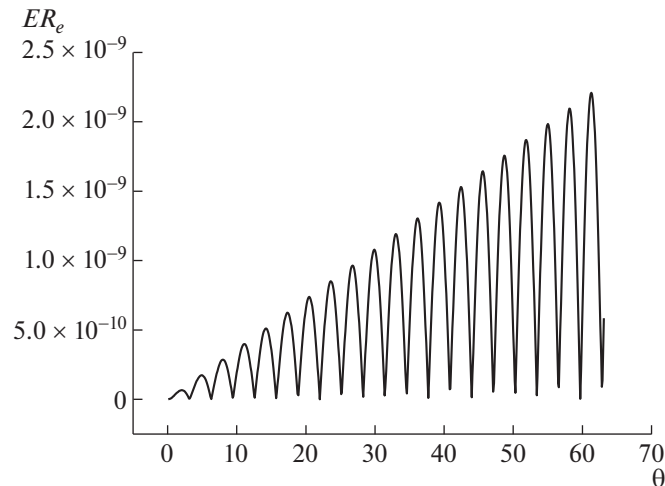
Далее применяется неравенство (52), в котором параметры ϵ и δ играют роль погрешности численного интегрирования задачи Коши (39)–(42), т.е. при достаточно малом τ имеют порядок $O(\tau^p)$, $p > 0$. Требование принадлежности начальных данных к классу $C^5(\mathbb{R})$ диктуется принадлежностью функции $D(\rho, \theta)$ к классу $C^4(\mathbb{R})$, так как электронная плотность вычисляется по формуле

$$N(\rho, \theta) = 1 - \frac{\partial E(\rho, \theta)}{\partial \rho} \equiv 1 - D(\rho, \theta).$$

В частности, из этого равенства, утверждения 3.3 и (52) при достаточно малых h и τ следует оценка

$$N(\rho, \theta) > \frac{1}{2} + O(h^4) + O(\tau^p), \quad \text{т.е.} \quad N(\rho, \theta) \geq \frac{1}{2}.$$

Теорема доказана.



Фиг. 1. Динамика погрешности электрического поля в нерелятивистском расчете.

5. ЧИСЛЕННЫЕ ИЛЛЮСТРАЦИИ

В качестве начальных условий выберем функции

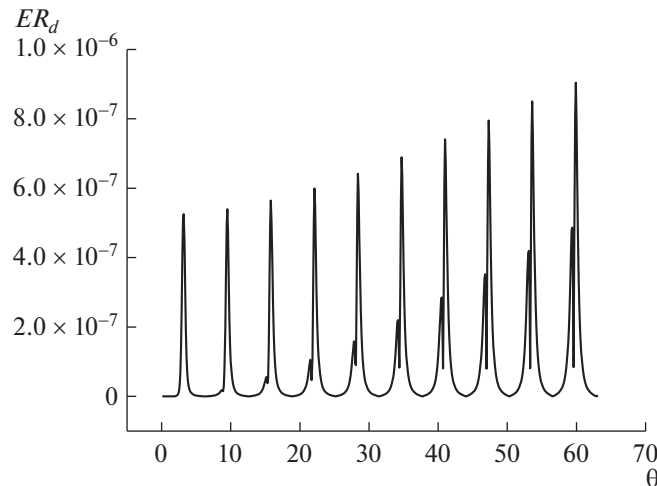
$$E_0(\rho) = \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 \rho \exp\left\{-2\frac{\rho^2}{\rho_*^2}\right\}, \quad P_0(\rho) = V_0(\rho) = 0. \quad (54)$$

Согласно (54) и (4), первоначально минимум плотности находится в начале координат, а отклонения плотности от равновесного значения, равного единице, экспоненциально затухают. Этот выбор является самым естественным с точки зрения физики, так как моделирует воздействие на разреженную плазму короткого мощного лазерного импульса при его фокусировке в линию (этого можно добиться при использовании цилиндрической линзы) (см. детали в [18]). Зафиксируем параметры $a_* = 2.07$, $\rho_* = 3$ с целью удовлетворения условию существования решения: глобального по времени для системы (7) и локального — для системы (5). Их выбор значим, в первую очередь, для значений функции электронной плотности: концентрация электронов в центре области может многократно превосходить равновесное (фоновое) значение, равное единице. Указанные параметры приводят к колебаниям небольшой интенсивности, когда максимальное значение плотности всего примерно в 10 раз превышает фоновое значение.

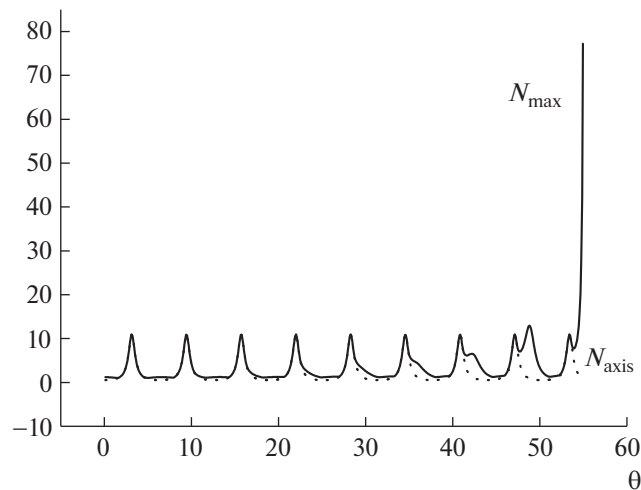
В качестве рабочей области локализации колебаний выберем отрезок $[-d, d]$ при $d = 4.5\rho_*$. В этом случае амплитуды колебаний частиц на границах будут по порядку величины совпадать с машинной точностью, в силу $\exp\{-2d^2/\rho_*^2\} \approx 2.58 \times 10^{-18}$, т.е. приграничные характеристики с большой степенью точности будут совпадать с прямыми $\rho \approx \pm d$. Начальную сетку удобно брать равномерной $\rho_k(\theta = 0) = kh - d$, $k = 0, 1, \dots, M$, $h = 2d/M$.

В качестве иллюстрации нерелятивистского алгоритма из разд. 2 возьмем точные формулы (30) и (12) и вычислим значения функций $V(\rho, \theta)$, $E(\rho, \theta)$, $W(\rho, \theta)$, $D(\rho, \theta)$ в узлах переменной эйлеровой сетки (29) в моменты времени $\theta = n\tau$, $n \geq 0$, на отрезке $[0, 20\pi]$. Сравним полученные значения с результатом численного интегрирования задачи Коши (25)–(28) классическим методом Рунге–Кутты 4-го порядка точности в те же моменты времени при $\tau = h$.

На фиг. 1 и 2 приведены зависимости от времени максимальной по области абсолютной погрешности для функций электрического поля и электронной плотности при $\tau = h = 0.01$. Обратим внимание, что верхняя граница погрешностей на обоих графиках растет практически линейно по времени. Эта тенденция не меняется, если провести вычисления с другими параметрами дискретизации. Например, при $\tau = h = 0.1$ вид графиков неотличим от представленных, зато сами значения погрешностей в полном соответствии с теорией методов Рунге–Кутты ровно в 10^4 раз больше. Следует также отметить, что абсолютные значения погрешностей электрического поля и электронной плотности отличаются примерно на три порядка. Это указывает на то, что функ-



Фиг. 2. Динамика погрешности плотности электронов в нерелятивистском расчете.

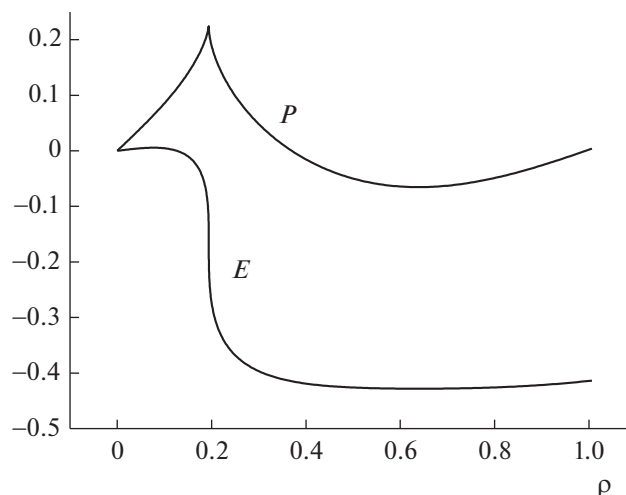


Фиг. 3. Динамика плотности электронов в релятивистском расчете: максимум по области (сплошная линия) и в начале координат (пунктирная линия).

ция электронной плотности является наиболее трудной (чувствительной) для вычислений. Обратим также внимание, что, начиная с некоторого периода, становятся заметными “провалы” в погрешности, соответствующие тождественно нулевым значениям функции $D(\rho, \theta)$ на отрезке $[-d, d]$ в некоторые моменты времени θ^n , что полностью соответствует формулам (12) при $\beta = 0$.

В качестве иллюстрации релятивистского алгоритма из разд. 3 приведем расчет эффекта опрокидывания при $\tau = h = 0.01$.

Так как начальные условия в силу утверждения 3.1 обеспечивают существование решения более, чем в течение одного периода, а утверждение 3.2 гарантирует нам наблюдение за градиентной катастрофой решения, то в соответствии с теоретическим анализом в процессе колебаний можно отметить две тенденции. Первая из них заключается в том, что колебания плотности вне начала координат несколько опережают по фазе колебания плотности в точке $\rho = 0$, и от периода к периоду этот фазовый сдвиг увеличивается. Вторая тенденция более наглядна: с течением времени происходит постепенное формирование абсолютного максимума плотности, расположенного вне начала координат. На фиг. 3 пунктиром изображено изменение во времени электронной плотности в начале координат, а сплошной линией — динамика максимального по области значения. Сначала колебания носят регулярный характер, т.е. глобальные по области миниму-



Фиг. 4. Пространственное распределение импульса и электрического поля в момент опрокидывания в релятивистском расчете.

мы и минимумы плотности сменяют друг друга через половину периода и располагаются в начале координат. После седьмого регулярного (центрального) максимума в момент времени $\theta \approx 42.2$ возникает новая структура — максимум электронной плотности вне начала координат, тогда как в окрестности начала координат продолжают наблюдаться регулярные колебания. Вновь возникший максимум в момент времени $\theta \approx 48.8$ возрастает по величине примерно в два раза и на следующем периоде (в $\theta \approx 55.1$) на его месте возникает дельтаобразная сингулярность электронной плотности.

На фиг. 4 изображены пространственные распределения импульса P и электрического поля E в момент опрокидывания $\theta \approx 55.1$, когда абсолютный максимум плотности вне начала координат стал неограниченным, а траектории пары соседних частиц пересеклись. Отметим, что в силу структуры уравнений (5) их решения будут оставаться нечетными функциями координат в случае, если таким свойством обладают начальные данные. Начальные данные (54) именно таковы, поэтому мы привели результаты численных расчетов только на положительной полуоси.

Видно, что в окрестности максимума плотности у компоненты скорости образуется разрыв производной (слабый разрыв), но не самой функции, тогда как у функции электрического поля образуется сильный разрыв. Именно такие качественные характеристики P и E обеспечивают опрокидывание колебаний. Важно отметить, что опрокидывание носит характер “градиентной катастрофы”, т.е. сами функции P и E при этом остаются ограниченными.

Следует отметить, что представленные результаты расчетов замечательно согласуются с данными, полученными с помощью других идейно отличающихся алгоритмов (см. [12]), использующих как лагранжевы, так и эйлеровы переменные.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе для одномерных плоских уравнений холодной плазмы на основе теорем существования решений, подробные доказательства которых приведены в [19], построены и обоснованы новые численные алгоритмы. Особенностью подхода является использование лагранжевых переменных, что фактически эквивалентно методу характеристик для исходной постановки в эйлеровых переменных.

При пренебрежении релятивистскими эффектами получены аналитические выражения для искомых функций в точках, принадлежащих траекториям лагранжевых частиц, т.е. характеристикам системы уравнений (7). В случае учета эффектов релятивизма заменой аналитическим формулам является численное интегрирование стандартной задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, приводящее как к определению самих характеристик системы (5), так и к значениям искомого решения в точках характеристик. В обоих случаях, если необходимо вычисление решения в точках, не принадлежащих траекториям лагранжевых ча-

стиц, прилагаются формулы и оценки погрешностей эрмитовой кубической интерполяции, включая оценки вычислительной устойчивости. Результатом работы являются теоремы о сходимости предложенных алгоритмов относительно малых параметров дискретизации независимых эйлеровых переменных.

Проведенные вычислительные эксперименты полностью согласуются с полученными теоретическими результатами о сходимости алгоритмов в нерелятивистском и релятивистском случаях. В частности, при использовании предложенного подхода проведено моделирование известного эффекта опрокидывания плазменных колебаний и подтверждено, что он имеет характер градиентной катастрофы.

Полученные результаты могут быть использованы при численном моделировании лазер-плазменных взаимодействий, когда требуется высокая точность расчетов, а также для развития теории численных методов решения гиперболических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Esarey E., Schroeder C.B., Leemans W.P.* Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators // *Rev. Mod. Phys.* 2009. V. 81. P. 1229.
2. *Bulanov S.V., Esirkepov T.Zh., Hayashi Y. et al.* On some theoretical problems of laser wake-field accelerators // *J. Plasma Phys.* 2016. V. 82. № 3. P. 905820308.
3. *Birdsall C.K., Langdon A.B.* Plasma physics via computer simulation. New York: McGraw-Hill Inc., 1985.
4. *Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П.* Математическое моделирование плазмы. М.: Наука, 1982.
5. *Dawson J.M.* Nonlinear electron oscillations in a cold plasma // *Phys. Rev.* 1959. V. 113. № 2. P. 383–387.
6. *Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д.* Элементы математической физики. М.: Наука, 1973. С. 86–94.
7. *Розанова О.С., Чижонков Е.В.* О существовании глобального решения одной гиперболической задачи // *Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления.* 2020. V. 492. № 1. P. 97–100.
8. *Силин В.П.* Введение в кинетическую теорию газов. М.: Наука, 1971. С. 119.
9. *Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* Основы электродинамики плазмы. М.: Высш. школа, 1978. С. 55–60.
10. *Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А.* Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1975. С. 46–51.
11. *Силин В.П., Рухадзе А.А.* Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. Изд. 2-е испр. М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2012. С. 104–110.
12. *Чижонков Е.В.* Математические аспекты моделирования колебаний и кильватерных волн в плазме. М.: Физматлит, 2018. С. 50–72.
13. *Dafermos C.M.* Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics. The 4th Ed., Berlin-Heidelberg: Springer, 2016. P. 221–225.
14. *Чижонков Е.В.* К моделированию электронных колебаний в плазменном слое // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2011. Т. 51. № 3. С. 456–469.
15. *Davidson R.C.* Methods in nonlinear plasma theory. New York: Acad. Press, 1972. P. 33–53.
16. *Kahaner D., Moler C., Nash S.* Numerical Methods and Software. New Jersey: Prentice-Hall Inter., Inc., 1989. P. 100–114.
17. *Schultz M.H.* Spline Analysis. New York: Prentice-Hall Inter., Inc., 1973. P. 24–39.
18. *Sheppard C.J.R.* Cylindrical lenses – focusing and imaging: a review Invited // *Appl. Opt.* 2013. V. 52. № 4. P. 538–545.
19. *Rozanova O.S., Chizhonkov E.V.* On the conditions for the breaking of oscillations in a cold plasma // *Z. Angew. Math. Phys.* 2021. V. 72. P. 13.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.635

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СВОЙСТВ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С МОНОХРОМАТИЧЕСКИМ КОНТРОЛЕМ ПРОЦЕССОВ НАПЫЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ПОКРЫТИЙ¹⁾

© 2021 г. И. В. Кочкиков^{1,*}, Ю. С. Лагутин^{2,3}, А. А. Лагутина^{2,3}, Д. В. Лукьяненко^{2,3},
А. В. Тихонравов^{1,2}, С. А. Шарапова^{1,2}, А. Г. Ягола³

¹ 119234 Москва, Ленинские горы, 1, стр. 4, НИВЦ МГУ, Россия

² 119234 Москва, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Россия

³ 119991 Москва, Ленинские горы, 1, стр. 2, МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Россия

*e-mail: igor@kochikov.ru

**e-mail: lagutin.math@gmail.com

***e-mail: lagutina.math@gmail.com

****e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru

*****e-mail: tikh@srcc.msu.ru

*****e-mail: svet.sharapova@gmail.com

*****e-mail: yagola@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 05.11.2020 г.

Переработанный вариант 05.11.2020 г.

Принята к публикации 11.02.2021 г.

Проводится сравнительный анализ трех принципиально различных алгоритмов решения обратных задач контроля толщин слоев оптических покрытий на основе данных монохроматических измерений коэффициентов отражения/пропускания покрытий в процессе их напыления. Разработанный ранее геометрический подход к исследованию корреляции ошибок в толщинах слоев напыляемых покрытий распространен на случай монохроматических измерений. Для оценки наличия эффекта самокомпенсации ошибок введен новый параметр, названный фактором самокомпенсации. Показана его роль при оценке перспектив использования различных алгоритмов для контроля напыления оптических покрытий. Библ. 16. Фиг. 3. Табл. 2.

Ключевые слова: обратные задачи, алгоритмы, оптические покрытия, монохроматический контроль, корреляция ошибок, самокомпенсация ошибок.

DOI: 10.31857/S004446692109012X

ВВЕДЕНИЕ

Повышение точности решения обратных задач, связанных с контролем процессов напыления оптических покрытий, играет ключевую роль в совершенствовании технологий создания новых типов покрытий для современной оптики и оптоэлектроники (см. [1]). Основным способом создания многослойных оптических покрытий является их напыление в вакууме. При этом наиболее перспективными методами контроля процессов напыления являются различные методы оптического контроля, основанные на измерении коэффициентов отражения/пропускания напыляемых покрытий (см. [2]). Основной целью контроля является максимально точная практическая реализация толщин слоев теоретически рассчитанных конструкций многослойных покрытий. Для ее достижения необходимо с максимальной точностью решать обратные задачи определения толщин напыляемых слоев по данным оптических измерений (см. [2]).

Разнообразие применяемых в настоящее время методов оптического контроля чрезвычайно велико (см. [2]). В данной работе мы рассматриваем алгоритмы, связанные с методами монохроматического контроля. При использовании этих методов в процессе напыления покрытия изме-

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10219).

ряются его коэффициенты отражения/пропускания на одной длине волны, которая, вообще говоря, может меняться от слоя к слою. Измеряемые данные получаются через равные промежутки времени, за которые толщина напыляемого слоя изменяется на доли нанометра. На основе этих данных и решаются обсуждаемые обратные задачи.

Использование любого метода оптического контроля приводит к корреляции ошибок в толщинах напыляемых слоев (см. [3]). С корреляцией ошибок связан негативный кумулятивный эффект роста ошибок при увеличении номера напыляемого слоя (см. [3], [4]). Но эта корреляция может вызывать и позитивный эффект самокомпенсации ошибок, впервые обнаруженный около 50 лет назад при напылении узкополосных оптических фильтров (см. [5], [6]). Исследование данного эффекта имеет большое значение как для выбора метода оптического контроля, так и для определения наиболее перспективного алгоритма решения обратных задач определения толщин напыляемых слоев.

В последние годы корреляция ошибок и связанный с ней эффект самокомпенсации ошибок были детально исследованы для методов широкополосного оптического контроля (см. [7]–[11]). Предложенный в [11] подход к исследованию корреляции ошибок основывается на статистическом анализе результатов большого числа вычислительных экспериментов по симуляции процесса напыления покрытий. На основе вычислительных экспериментов может быть исследовано и наличие эффекта самокомпенсации ошибок (см. [10]). В настоящей работе предложенный в [11] подход распространяется на методы монохроматического контроля процессов напыления и с его помощью анализируются свойства трех принципиально различных алгоритмов решения обратных задач определения толщин слоев покрытий в процессе их напыления. В разд. 1 дается краткая характеристика рассматриваемых алгоритмов, описываются условия проведения вычислительных экспериментов и оценивается степень корреляции ошибок. В разд. 2 проводится сравнительный анализ свойств обсуждаемых алгоритмов.

1. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО НАПЫЛЕНИЮ ПОКРЫТИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗЛИЧНЫХ АЛГОРИТМОВ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

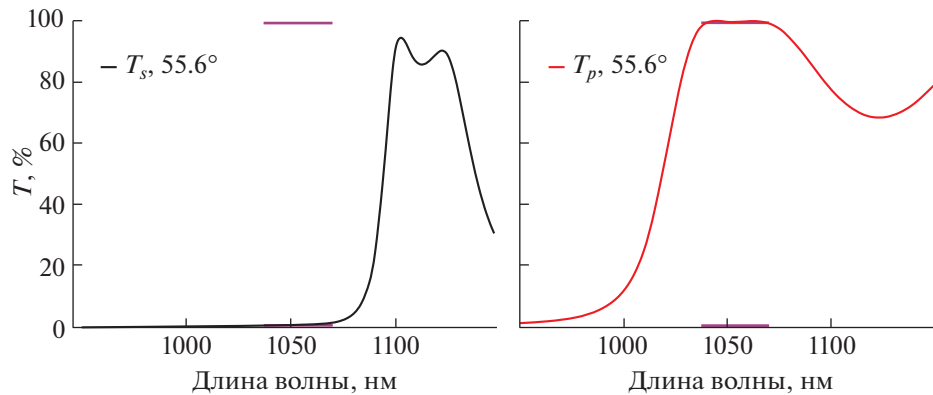
В данном разделе мы рассматриваем три принципиально различающихся алгоритма. Их базовое различие состоит в способе определения времени прерывания напыления очередного слоя покрытия. Подробное описание рассматриваемых алгоритмов дано в [12]. Здесь же мы приводим только краткое описание их особенностей. В дальнейшем для краткости будем именовать рассматриваемые алгоритмы классическим, квазисвинговым и независимым.

Пусть $d_1^t, \dots, d_m^t$ – теоретически рассчитанные толщины слоев напыляемого покрытия, здесь m – общее число слоев покрытия. Обозначим через $d_1^a, \dots, d_j^a$ реально получаемые толщины слоев, которые вследствие различных ошибок процессов напыления и измерения, а также ошибок, допущенных при решении обратных задач, отличаются от расчетных значений. В данной работе мы рассматриваем монохроматический контроль процесса напыления по коэффициенту отражения R , измеряемому во время напыления всех слоев покрытия на одной длине волны λ .

В случае классического алгоритма, который часто называется алгоритмом контроля по уровню измеряемого сигнала (см. [13]), на основании теоретических значений толщин слоев покрытия для каждого слоя рассчитывается ожидаемый коэффициент отражения $R_j^{\text{theor,term}}$ в конце напыления этого слоя. Алгоритм определяет время остановки напыления очередного j -го слоя покрытия из условия совпадения измеряемого коэффициента отражения с теоретически рассчитанным коэффициентом отражения. Основным недостатком этого алгоритма является кумулятивный рост уровня ошибок в толщинах последующих слоев вследствие влияния на измеряемый коэффициент отражения ошибок в толщинах ранее напыленных слоев (см. [3]).

Квазисвинговым мы называем алгоритм, при котором время остановки напыления очередного слоя определяется из условия совпадения измеряемого коэффициента отражения со скорректированным уровнем остановки, определяемым по формуле

$$R_{j,i}^{\text{act,term}} = R_{j,i}^{\text{act,extr.last}} - \left(R_j^{\text{theor,extr.last}} - R_j^{\text{theor,term}} \right) \frac{A_{j,i}^{\text{act}}}{A_j^{\text{theor}}}.$$



Фиг. 1. Спектральные коэффициенты пропускания поляризатора при угле падения 55.6 градусов для: (а) — s -поляризованного излучения, (б) — p -поляризованного излучения.

Здесь $R_j^{\text{theor,extr.last}}$ — теоретически рассчитанное экстремальное значение коэффициента отражения перед окончанием напыления слоя, $R_{j,i}^{\text{act,extr.last}}$ — фактически определяемое по ходу напыления экстремальное значение, A_j^{theor} и $A_{j,i}^{\text{act}}$ — теоретическая и фактическая амплитуды изменения коэффициента отражения в j -м слое соответственно (более детальное описание см. в [12]).

Независимый алгоритм определения времени прерывания напыления очередного слоя покрытия был разработан и подробно описан в [12]. Он основан не на сравнении измеренного сигнала с теоретическим или скорректированным уровнем остановки, а на оценке времени окончания напыления слоя. Такая оценка проводится постоянно во время напыления и для нее используются все данные, полученные к текущему моменту времени (нелокальный характер алгоритма, см. [14]).

Для исследования корреляции ошибок в толщинах слоев при использовании обсуждаемых алгоритмов мы рассматриваем результаты вычислительных экспериментов по симуляции процесса напыления 28-слойного поляризатора лазерного излучения для узкой спектральной области в окрестности длины волны 1054 нм. Данное покрытие интересно тем, что для него был обнаружен очень сильный эффект самокомпенсации ошибок при использовании широкополосного оптического контроля (см. [7]).

Спектральные коэффициенты пропускания рассматриваемого покрытия для s - и p -поляризованного излучения при угле падения 55.6 градусов (это угол Брюстера для подложки, на которую нанесен поляризатор) представлены на фиг. 1. Такие покрытия (поляризаторы для угла падения Брюстера) являются одними из основных элементов в лазерных системах установок термоядерного синтеза. Вектор теоретических толщин слоев поляризатора, записанных в нанометрах, имеет вид $d^{\text{theor}} = \{128.330, 195.813, 119.487, 183.328, 115.574, 183.111, 118.132, 189.457, 122.690, 196.483, 126.669, 201.566, 128.960, 203.485, 129.034, 201.793, 126.873, 196.878, 122.968, 189.891, 118.363, 183.304, 115.509, 182.830, 118.919, 194.655, 129.795, 530.535\}$. Все нечетные слои поляризатора имеют показатели преломления 2.05, а четные — 1.46. Поляризатор напыляется на подложку с показателем преломления 1.52. Выделенные отрезки на фиг. 1 указывают целевые значения спектральных коэффициентов в диапазоне длин волн от 1039 до 1069 нм. Близость спектральных коэффициентов поляризатора к целевым значениям оценивается с помощью целевого функционала

$$MF = \sqrt{\sum_{\lambda} \{[T_s(\lambda)]^2 + [T_p(\lambda) - 1]^2\}}. \quad (1)$$

Суммирование в (1) ведется по сетке длин волн от 1039 до 1069 нм с шагом 1 нм, T_s и T_p — спектральные коэффициенты пропускания поляризатора при угле падения 55.6 градусов для s - и p -поляризованного излучения. Для указанного выше решения d^{theor} функционал MF достигает минимума, равного 0.29946.

Таблица 1. Параметры, характеризующие корреляцию ошибок в толщинах слоев покрытия и их распределение в m -мерном пространстве

Параметры	Классический	Квазисвинговый	Независимый	Аддитивный	Относительный
β	4.22	1.59	1.04	1.00	1.17
σ_{av}	5.01	1.66	1.85	1.00	1.87
σ_{min}	0.11	0.09	1.50	0.95	1.14
σ_{max}	18.83	3.03	3.32	1.05	5.29

Предложенный в [11] подход к исследованию корреляции ошибок основывается на статистическом анализе векторов ошибок в толщинах слоев покрытий, полученных в ходе вычислительных экспериментов по симуляции процесса их напыления. В данной работе для каждого из рассматриваемых алгоритмов мы проводили по 10000 таких вычислительных экспериментов с помощью симулятора, описанного в [15]. Средние скорости напыления материалов с высокими и низкими показателями преломления были равны 1 нм/с. Моделировались флуктуации этих скоростей со среднеквадратичными отклонениями 0.1 нм/с. Монохроматический контроль проводился по коэффициенту отражения от покрытия на длине волны 790 нм. Интервал времени между измерениями составлял 2 с. На рассчитываемый коэффициент отражения накладывался случайный шум со среднеквадратичным значением 0.2%.

Обозначим через $\Delta = \{\delta d_1, \dots, \delta d_m\}$ полученные в результате вычислительных экспериментов векторы ошибок в толщинах слоев. В соответствии с [11] вероятностная плотность распределения этих векторов в m -мерном пространстве может быть представлена многомерным Гауссовым распределением вида

$$f(\Delta) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sqrt{\det \mu}} \exp \left[-\sum_{i=1}^m \frac{(\delta d_i)^2}{2\sigma_i^2} \right], \quad (2)$$

где μ — квадратная матрица с элементами, определяемыми полученным набором из M векторов ошибок:

$$\mu_{ij} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \delta d_i^{(k)} \delta d_j^{(k)}, \quad (3)$$

а стандартные отклонения σ_i в знаменателях (2) — квадратные корни из собственных значений матрицы μ .

Поверхности уровня вероятностной плотности распределения (2) в m -мерном пространстве представляют собой многомерные эллипсоиды, при этом стандартные отклонения σ_i характеризуют геометрию этих эллипсоидов.

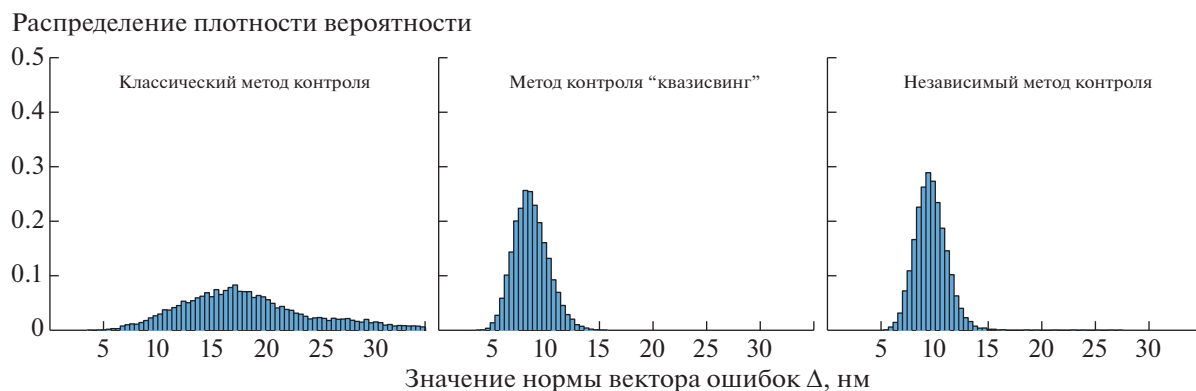
Пусть σ_{av} — среднеквадратичное значение стандартных отклонений. В [11] была введена следующая оценка степени корреляции ошибок в толщинах слоев покрытий:

$$\beta = \sigma_{av} \left[\prod_{i=1}^m \sigma_i \right]^{-1/m}. \quad (4)$$

Для процессов напыления с широкополосным оптическим контролем было показано, что корреляция ошибок тем сильнее, чем больше значение коэффициента β . Было также отмечено, что при отсутствии корреляции ошибок в толщинах слоев покрытий значение коэффициента β должно быть близко к единице.

В табл. 1 (в первых трех столбцах) показаны значения коэффициента β для векторов ошибок в толщинах слоев покрытия, полученных при использовании трех рассматриваемых алгоритмов определения времени прерывания напыления слоя. В табл. 1 приведены также минимальные и максимальные значения стандартных отклонений, характеризующие вытянутость эллипсоидов, определяющих геометрию распределения векторов ошибок в m -мерном пространстве.

Понятно, что наборы из 10000 векторов ошибок представляют собой весьма разреженные множества в 28-мерном пространстве ошибок. Поэтому для проверки состоятельности полученных в табл. 1 значений были проведены дополнительные эксперименты со случайными вектора-



Фиг. 2. Плотность распределения вероятностей для норм векторов ошибок при использовании различных алгоритмов определения времени прерывания напыления слоев покрытия.

ми ошибок. При этом были рассмотрены два типа таких ошибок: аддитивные ошибки и относительные ошибки. В первом случае ошибки в толщинах всех слоев задавались как независимые случайные величины с гауссовскими распределениями, нулевыми математическими ожиданиями и среднеквадратичными отклонениями, равными 1 нм. Во втором случае ошибки во всех толщинах слоев также имели гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием, но их среднеквадратичные отклонения составляли 1% от толщин соответствующих слоев. Естественно, эксперименты с такого рода ошибками проводятся значительно быстрее, чем симуляции процесса напыления покрытий. Поэтому имеется возможность оценить обсуждаемые параметры при существенно большем числе векторов ошибок.

В двух последних столбцах табл. 1 приведены значения параметров, вычисленные при использовании 10000 векторов аддитивных и относительных ошибок. Очевидно, что при увеличении числа тестов векторы аддитивных ошибок должны все более равномерно распределяться в 28-мерном пространстве и поверхности уровня их вероятностной плотности распределения должны принимать все более близкую к сферической форму. Как следует из таблицы, даже при рассматриваемом числе тестов величины $\sigma_{\min}$ и $\sigma_{\max}$ близки к единице, т.е. поверхности уровня имеют форму, близкую к сферической. При увеличении числа векторов аддитивных ошибок до 1 млн значения $\sigma_{\min}$ и $\sigma_{\max}$ становятся равными 1.00 и 1.01 соответственно. При увеличении числа векторов относительных ошибок с 10 000 до 1 млн значения $\sigma_{\min}$ и $\sigma_{\max}$ изменяются лишь на величины порядка 0.02, а значения σ_{av} и β не изменяются во втором знаке после десятичной точки. Приведенные результаты свидетельствуют о достаточной точности оценки параметров $\sigma_{\min}$, $\sigma_{\max}$, σ_{av} , β при использовании 10000 вычислительных экспериментов по симуляции процесса напыления покрытий.

2. СРАВНИТЕЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЛЩИН НАПЫЛЯЕМЫХ СЛОЕВ

Данные табл. 1 подтверждают выводы работы [11] о возможности использования коэффициента β для оценки степени корреляции ошибок в толщинах слоев покрытий. Предложенный в [12] независимый алгоритм определения времени прерывания напыления очередного слоя покрытия исключает корреляцию ошибок в толщинах слоев. Указанное в табл. 1 значение коэффициента β для этого алгоритма соответствует данному утверждению.

При использовании классического алгоритма корреляция ошибок существенно сильнее, чем в случае квазисвингового алгоритма. Как было отмечено в разд. 1, при использовании классического алгоритма часто имеет место кумулятивный эффект роста ошибок в толщинах последующих слоев вследствие влияния на измеряемые данные ошибок в ранее напыленных слоях. В силу этого эффекта нормы векторов ошибок при использовании классического алгоритма, как правило, заметно выше, чем при использовании двух других алгоритмов. Это наглядно демонстрирует фиг. 2, на которой представлены плотности распределения вероятностей для норм векторов ошибок, рассчитанные на основе 10000 вычислительных экспериментов для каждого из трех рассматриваемых алгоритмов.

Таблица 2. Математические ожидания нормы векторов ошибок и фактора самокомпенсации ошибок при использовании различных алгоритмов определения времени прерывания напыления слоев покрытия

Параметры	Классический	Квазисвинговый	Независимый
$E \ \Delta\ $	18.8	8.62	9.66
$E c$	2.77	1.51	1.28

Как следует из фиг. 2, в случае классического алгоритма средние значения норм векторов ошибок примерно вдвое больше соответствующих средних значений для двух других алгоритмов. Более точные сравнительные оценки приведены в табл. 2.

Проявление значительного кумулятивного эффекта накопления ошибок еще не является основанием для отказа от использования рассматриваемого алгоритма. Так, при использовании алгоритма, основанного на обработке данных прямого широкополосного оптического контроля процесса напыления поляризатора, возникает очень сильный кумулятивный эффект роста ошибок (см. [16]). Однако использование данного алгоритма является оправданным в силу наличия сильного эффекта самокомпенсации ошибок, компенсирующего негативный кумулятивный эффект.

Таким образом, для полноценного сравнения эффективности алгоритмов решения обратных задач определения толщин напыляемых слоев на основе данных монохроматического контроля необходимо провести еще и оценки наличия эффекта самокомпенсации ошибок. Предложенные в [10], [11] оценки этого эффекта основываются на сравнении вариаций целевого функционала (1), возникающих при использовании рассматриваемого алгоритма, с усредненной величиной вариаций этого функционала, полученной при рассмотрении большого числа случайных векторов ошибок. В качестве таковых использовались случайные относительные ошибки со среднеквадратичными отклонениями, равными 1% от толщин соответствующих слоев (см. выше). В настоящей работе мы используем данный подход в несколько измененной форме.

Пусть сгенерирован набор векторов случайных относительных ошибок с уровнем 1%. В дальнейших расчетах это – набор из 10000 векторов. Среднеквадратичное значение нормы этих векторов равно 1% от нормы вектора теоретических толщин слоев покрытия. В нашем случае – это 9.88 нм. Естественно, нормы сгенерированных векторов имеют разброс относительно этой величины. Пронормируем все векторы так, чтобы их норма была в точности равна этой величине и найдем математическое ожидание вариаций целевого функционала для полученных векторов ошибок. Обозначим его $\langle \delta MF \rangle$. Пусть теперь Δ – вектор ошибок, полученный при использовании рассматриваемого алгоритма. Нормируем его так, чтобы его норма также составляла 9.88 нм. Обозначим через $\delta MF(\Delta)$ вариацию целевого функционала для нормированного таким образом вектора ошибок. Для оценки наличия эффекта самокомпенсации введем параметр

$$c = \frac{\delta MF(\Delta)}{\langle \delta MF \rangle}, \quad (5)$$

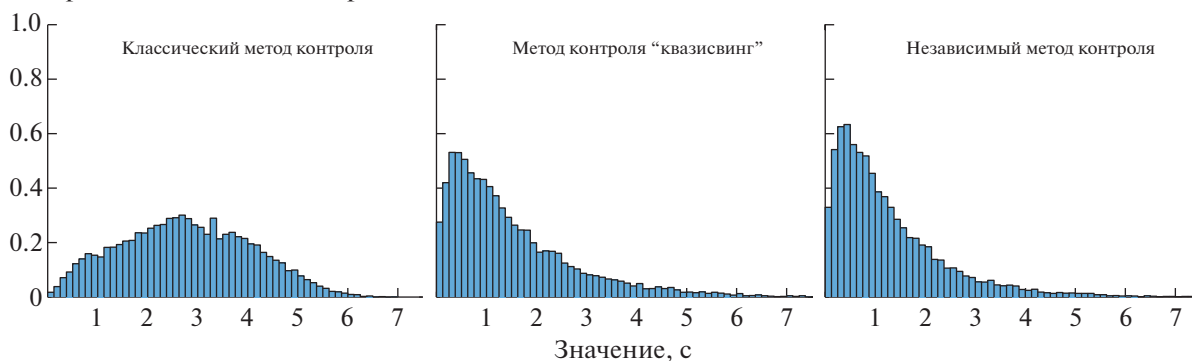
который назовем фактором компенсации ошибок. По сути дела это – обратная величина к силе эффекта самокомпенсации ошибок, использовавшейся в [10] при рассмотрении широкополосных методов оптического контроля. Мы будем говорить о наличии эффекта самокомпенсации ошибок, если $c < 1$, и о его отсутствии, если $c > 1$.

На фиг. 3 представлены плотности распределения вероятностей для фактора компенсации ошибок, рассчитанные на основе серий из 10000 вычислительных экспериментов для трех рассматриваемых алгоритмов определения времени прерывания напыления слоя на основе данных монохроматического оптического контроля.

Математические ожидания для показанных на фиг. 3 распределений фактора самокомпенсации ошибок приведены в табл. 2. В ней же представлены и математические ожидания нормы векторов ошибок при использовании рассматриваемых алгоритмов.

Полученные результаты показывают, что в среднем эффект самокомпенсации ошибок при использовании монохроматического контроля процесса напыления поляризатора отсутствует. Однако это не означает, что данный метод контроля существенно уступает широкополосному оптическому контролю. При напылении поляризаторов нормы векторов ошибок в случае широкополосного контроля в несколько раз выше средних значений, представленных в табл. 2 (см. [16]), и успешное производство поляризаторов оказывается возможным только благодаря

Распределение плотности вероятности



Фиг. 3. Плотность распределения вероятностей для фактора самокомпенсации ошибок при использовании различных алгоритмов определения времени прерывания напыления слоев покрытий.

наличию сильного эффекта самокомпенсации ошибок. Вполне возможно, что в случае монохроматического оптического контроля эффект самокомпенсации будет проявляться для других типов покрытий.

В целом результаты проведенного исследования открывают возможность сравнительного анализа различных алгоритмов обработки данных измерений без использования дорогостоящих натуральных экспериментов. Они также однозначно свидетельствуют о существенном преимуществе независимого и квазисвингового алгоритмов по сравнению с классическим алгоритмом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены три алгоритма решения обратных задач определения толщин слоев покрытий в процессе их напыления. Эти алгоритмы принципиально различаются способом определения времени прерывания напыления очередного слоя покрытия. Сравнительный анализ алгоритмов проводится на основе данных вычислительных экспериментов по симуляции процесса напыления покрытий. Для каждого из алгоритмов используются результаты 10000 экспериментов. Показано, что данное число экспериментов достаточно для получения адекватных оценок свойств алгоритмов. Предложенный ранее геометрический подход к исследованию корреляции ошибок в толщинах слоев покрытий при широкополосном оптическом контроле процессов их напыления распространен на случай монохроматических измерений. Получены оценки степени корреляции ошибок при использовании различных алгоритмов обработки данных измерений.

Для оценки наличия эффекта самокомпенсации ошибок введен параметр, названный фактором компенсации ошибок. Исследованы вероятностные плотности распределения фактора компенсации ошибок для рассматриваемых алгоритмов. Показано, что для анализа перспектив использования различных алгоритмов определения времени прерывания напыления слоев покрытий могут быть использованы оценки математических ожиданий нормы векторов ошибок и фактора самокомпенсации ошибок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Optical thin films and coatings // ed. A. Piegari and F. Flory, 2nd Ed., Woodhead Publ., UK, 2018.
2. Tikhonravov A., Trubetskov M., Amotchkina T. Production strategies for high precision optical coatings // Optical thin films and coatings, ed. Piegari A. and Flory F., 2nd Ed., Woodhead Publ., Cambridge, UK, 2018. P. 65–101.
3. Macleod H.A. Thin-Film Optical Filters. 4th ed. // Taylor & Francis, 2010.
4. Tikhonravov A.V., Trubetskov M.K., Amotchkina T.V. Investigation of the effect of accumulation of thickness errors in optical coatings production using broadband optical monitoring // Appl. Opt. 2006. V. 45. P. 7026–7034.
5. Macleod H.A. Turning value monitoring of narrow-band all-dielectric thin-film optical filters // Optica Acta. 1972. V. 19. P. 1–28.
6. Bousque P., Fornier A., Kowalczyk R., Pelletier E., Roche P. Optical filters: monitoring process allowing the auto-correction of thickness errors // Thin Solid Films. 1972. V. 13. P. 285–290.

7. *Tikhonravov A., Kochikov I., Yagola A.* Mathematical investigation of the error self-compensation mechanism in optical coating technology // *Inverse Probl. Sci. Eng.* 2018. V. 26. P. 1214.
8. *Тихонравов А.В., Кочкиков И.В., Матвиенко И.А., Шаропова С.А., Ягола А.Г.* Оценки, связанные с механизмом самокомпенсации ошибок в процессе напыления оптических покрытий // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика, Астрономия.* 2018. № 6. С. 50–54.
9. *Тихонравов А.В., Кочкиков И.В., Матвиенко И.А., Исаев Т.Ф., Лукьяненко Д.В., Шаропова С.А., Ягола А.Г.* Корреляция ошибок при напылении оптических покрытий с широкополосным оптическим контролем // *Вычисл. методы и программирование: Нов. вычисл. технологии.* 2018. Т. 19. С. 439–448.
10. *Tikhonravov A., Kochikov I., Matvienko I., Isaev T., Yagola A.* Strategies of broadband monitoring aimed at minimizing deposition errors // *COATINGS.* 2019. V. 9. № 12. P. 1–10.
11. *Kochikov I.V., Sharapova S.A., Yagola A.G., Tikhonravov A.V.* Correlation of errors in inverse problems of optical coatings monitoring // *J. Inverse and Ill-Posed Probl.* 2020.
12. *Кочкиков И.В., Лагутин Ю.С., Лагутина А.А., Лукьяненко Д.В., Тихонравов А.В., Ягола А.Г.* Устойчивый метод оптического контроля процесса напыления многослойных оптических покрытий // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2020. V. 60. № 12. С. 181–189.
13. *Macleod A.* Monitoring of optical coatings // *Appl. Opt.* 1981. V. 20. P. 82–89.
14. *Кочкиков И.В., Лагутин Ю.С., Лагутина А.А., Лукьяненко Д.В., Тихонравов А.В., Ягола А.Г.* Нелокальный алгоритм анализа данных монохроматического контроля процесса напыления многослойных покрытий // *Вычисл. методы и программирование: Нов. вычисл. технологии.* 2019. V. 20. С. 471–480.
15. *Кочкиков И.В., Лагутин Ю.С., Лагутина А.А., Лукьяненко Д.В., Тихонравов А.В., Ягола А.Г.* Повышение точности контроля напыления оптических покрытий за счет использования нелокального алгоритма анализа данных // *Сиб. журн. индустр. матем.* 2020. V. 24. № 2. С. 93–105.
16. *Zhupanov V., Kozlov I., Fedoseev V., Konotopov P., Trubetskov M., Tikhonravov A.* Production of Brewster angle thin film polarizers using a $\text{ZrO}_2/\text{SiO}_2$ pair of materials // *Appl. Opt.* 2017. V. 56. P. 30–34.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.633

О РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ
С НЕЛИНЕЙНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ¹⁾

© 2021 г. А. В. Баев

119991 Москва, Воробьевы горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

e-mail: drbaev@mail.ru

Поступила в редакцию 23.02.2021 г.
Переработанный вариант 23.02.2021 г.
Принята к публикации 23.02.2021 г.

Рассмотрены два уравнения гиперболического типа с нелинейным коэффициентом при старшей производной, определяющим как скорость нелинейных волн, так и характеризующим рассеивающие свойства среды. Для установившихся решений типа бегущих волн поставлены обратные задачи, состоящие в определении нелинейного коэффициента по зависимости периода от амплитуды стационарных колебаний. Получены и исследованы нелинейные интегро-функциональные уравнения обратной задачи, установлены достаточные условия существования и единственности решения обратных задач. Для решения функциональных уравнений предложены алгоритмы эволюционного типа, представлены решения модельных обратных задач. Библ. 15. Фиг. 3.

Ключевые слова: волновое уравнение, стационарное решение, интегро-функциональное уравнение, режим с обострением.

DOI: 10.31857/S0044466921090052

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи для нелинейных уравнений в частных производных составляют важный класс задач теоретической и математической физики (см. [1]–[3]). Среди этих задач значительное место занимают задачи, связанные с распространением возмущений различной природы, а именно, задачи для нелинейных уравнений гиперболического типа. Наряду с прямыми задачами, состоящими в определении таких возмущений, возникают обратные задачи, связанные с восстановлением параметров модели. Случай квазилинейных гиперболических уравнений рассматривался в [4]–[9] (в [4]–[6] указаны более ранние работы).

В настоящей работе рассмотрены обратные задачи, восходящие по постановке к известным задачам из [10] [11, с. 42], но в отличие от них не сводящиеся к линейным интегральным уравнениям типа Вольтерра I или II рода. В качестве исходных данных для восстановления нелинейной скорости распространения волн рассмотрены доступные в наблюдениях период и амплитуда установившихся колебаний. Близкие по постановке обратные задачи для стационарных колебаний для системы уравнений мелкой воды и уравнения КдВ (см. [1]–[3], [12]) рассмотрены в [13]–[15].

Волновое уравнение

$$u_{tt} = a^2(x)u_{xx} + (-1)^k a(x)a'(x)u_x, \quad a > 0, \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

описывает широкий класс процессов распространения колебаний в неоднородной среде. Случай $k = 1$ соответствует распространению волн без рассеяния, случай $k = 2$ — распространению с коэффициентом отражения, равным $-a'(x)/a(x)$. Наряду с прямыми задачами, в которых при некоторых дополнительных условиях и известной функции $a(x)$ требуется найти функцию $u(x, t)$, возможна постановка обратных задач. В этих задачах по дополнительным данным о решении прямой задачи требуется восстановить $a(x)$.

Уравнение (1) справедливо в рамках линейной теории, когда силы напряжения линейно зависят от деформаций (в терминах теории упругости). Очевидно, что возникает потребность рас-

¹⁾Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

смаивать процессы, где такая зависимость нелинейна. Простейшим уравнением, обобщающим (1) на случай нелинейной однородной среды, является уравнение

$$u_{tt} = a^2(u)u_{xx} + (-1)^k a(u)(a(u))_x u_x. \quad (2)$$

Функцию $a(u)$ считаем четной, и пусть $a'(u) > 0$ при $u > 0$.

Уравнение (2) допускает решения в виде бегущих волн. Среди таких решений наиболее просто как в лабораторных экспериментах, так и в натурных наблюдениях изучать установившиеся колебания, которые мы будем также называть стационарными волнами. Построим такое решение для уравнения (2) при $k = 1$. Запишем (2) в виде

$$u_{tt} = a^2(u)u_{xx} - a'(u)a(u)u_x^2 \quad (3)$$

и рассмотрим установившееся решение

$$u(x, t) = q(ct - x) = q(\xi), \quad \xi = ct - x.$$

После подстановки $q(\xi)$ в (3) находим

$$(c^2 - a^2(q))q'' = -a'(q)a(q)(q')^2,$$

что после разделения переменных дает

$$\frac{q''}{q'} = -\frac{a'(q)a(q)q'}{c^2 - a^2(q)}.$$

Интегрируя последнее равенство и полагая постоянную интегрирования равной нулю, что не ограничивает общности рассмотрения, получаем

$$\ln |q'| = \ln \sqrt{c^2 - a^2(q)},$$

откуда приходим к равенству

$$(q')^2 + a^2(q) = c^2. \quad (4)$$

Нетрудно заметить, что последнее равенство определяет гамильтонову систему с гамильтонианом

$$H(p, q) \equiv \frac{p^2}{2} + \frac{a^2(q)}{2} = E, \quad p = q'(\xi), \quad 2E = c^2,$$

и энергией E . Как известно, при определенных свойствах функции $a(y)$ (например, $a''(y) > 0$) существуют ограниченные фазовые траектории этой системы, зависящие от параметра c , т.е. стационарные решения вида $q = q(\xi, c)$.

Установившиеся решения, другими словами, периодические колебания, характеризуются двумя величинами: периодом и амплитудой, которые, в свою очередь, зависят от энергии E . Изменяя энергию системы, можно получить параметрическую зависимость периода колебаний от амплитуды. Действительно, возвращаясь к (4), получаем

$$\frac{dq}{\sqrt{c^2 - a^2(q)}} = \pm d\xi,$$

откуда для четной функции $a(y)$, делая y независимой переменной, находим

$$\oint \frac{dy}{\sqrt{a^2(Y) - a^2(y)}} = T(Y), \quad (5)$$

где $T(Y)$ — период колебаний, Y — амплитуда, а контурный интеграл считается по замкнутой фазовой траектории. Полагаем, что период T и амплитуда Y являются величинами, доступными в измерениях. Равенство (4) соответствует переходу от параметрической зависимости периода и амплитуды от энергии E к явной.

Пусть теперь зависимость $T(Y)$ известна на $[0, h]$, и требуется найти $a(y)$. Такую задачу будем называть обратной по отношению к прямой задаче для уравнения (2), а четную, гладкую на $[0, h]$, функцию $a(y)$ такую, что $a'(y) > 0$ при $y > 0$, удовлетворяющую уравнению (5), — ее решением. Эта обратная задача является, с одной стороны, простейшей в своем классе, с другой стороны, к ней сводится задача из более широкого класса, в частности, задача восстановления в (2) коэффициента вида $a(u, x)$.

2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ($k = 1$)

Очевидно, что (5) может быть записано в форме нелинейного функционального уравнения типа Вольтерра I рода относительно $a(y)$:

$$4 \int_0^Y \frac{dy}{\sqrt{c^2 - a^2(y)}} = T(Y), \quad c = a(Y). \quad (6)$$

Лемма 1. Пусть $a \in C^2[0, h]$. Тогда $T \in C^1(0, h]$.

Доказательство. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_0^Y \frac{dy}{\sqrt{a^2(Y) - a^2(y)}} = \int_{a_0}^c \frac{dy(a)}{\sqrt{c^2 - a^2}} = \int_{a_0}^c \frac{y'(a)da}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \quad a_0 = a(0), \quad (7)$$

где $y(a)$ — функция, обратная к $a(y)$ при $y \in [0, h]$, $c > a_0$, $a_0 = a(0)$, и $y'(a) \rightarrow +\infty$ при $a \rightarrow a_0$. Разобьем (7) на два слагаемых:

$$\int_{a_0}^c \frac{y'(a)da}{\sqrt{c^2 - a^2}} = \int_{a_0}^{a_1} \frac{y'(a)da}{\sqrt{c^2 - a^2}} + \int_{a_1}^c \frac{y'(a)da}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \quad a_0 < a_1 < c.$$

Очевидно, что первый интеграл имеет под интегралом особенность при $a = a_0$. Но любой интеграл вида

$$\int_{a_0}^{a_1} \frac{y'(a)da}{\sqrt{(c^2 - a^2)^n}}$$

является сходящимся при $n \in \mathbb{N}$, так как

$$\lim_{\varepsilon_m \rightarrow 0} \int_{a_0 + \varepsilon_m}^{a_1} \frac{y'(a)da}{\sqrt{(c^2 - a^2)^n}} < \lim_{\varepsilon_m \rightarrow 0} \frac{y(a_1) - y(a_0 + \varepsilon_m)}{\sqrt{(c^2 - a_1^2)^n}} \leq \frac{y(a_1)}{\sqrt{(c^2 - a_1^2)^n}},$$

а последовательность интегралов монотонно возрастает по ε_m при монотонной последовательности $\{\varepsilon_m\} \rightarrow +0$. Следовательно, первый интеграл дифференцируем по $c > a_1$.

Второй интеграл имеет под интегралом особенность типа $1/\sqrt{x}$ и может быть взят по частям:

$$\int_{a_1}^c \frac{y'(a)da}{\sqrt{c^2 - a^2}} y'(a) \arcsin \frac{a}{c} \Big|_{a_1}^c - \int_{a_1}^c y''(a) \arcsin \frac{a}{c} da = y'(c) \frac{\pi}{2} - y'(a_1) \arcsin \frac{a_1}{c} - \int_{a_1}^c y''(a) \arcsin \frac{a}{c} da.$$

Ясно, что последнее выражение дифференцируемо по $c > a_1$, и, следовательно, интеграл (7) дифференцируем по $Y > 0$, так как $c = a(Y)$.

Пример 1. Пусть $a^2(y) = a_0^2 + a_2^2 y^2$, $a_2 > 0$. Тогда

$$T(Y) = 4 \int_0^Y \frac{dy}{\sqrt{a^2(Y) - a^2(y)}} = \frac{2\pi}{a_2}.$$

Полагая $T(0) = \lim_{Y \rightarrow 0} T(Y) = 2\pi/a_2$, получаем гладкую на отрезке $[0, h]$ функцию $T(Y)$.

Из этого примера следует, что a_0 условиями обратной задачи, вообще говоря, не определяется. Поэтому полагаем $a_0 > 0$ известной величиной.

Замечание. Поведение функции T в нуле зависит от поведения функции a в нуле; при этом функция T может быть как дифференцируемой, так и нет в этой точке. Например, если $a''(0) > 0$, $a \in C^3[0, h]$, то $T \in C^1[0, h]$. Более детальное изучение аналитических свойств интеграла (6) выходит за рамки настоящей статьи.

Теорема 1. Пусть $T \in C^1[0, h]$. Тогда на $[0, h]$ существует не более одного решения обратной задачи.

Доказательство. Преобразуем исходное уравнение (6). Домножим его на $c/\sqrt{c^2 - a^2}$ и проинтегрируем обе части по c . При этом, используя прием Дирихле, имеем

$$4 \int_{a_0}^v \int_0^{y(c)} \frac{cdydc}{\sqrt{(v^2 - c^2)(c^2 - a^2(y))}} = 4 \int_{a_0}^v \int_a^v \frac{cdcdy(a)}{\sqrt{(v^2 - c^2)(c^2 - a^2)}} = 2\pi \int_{a_0}^v dy(a) = 2\pi y(v),$$

откуда следует равенство

$$\int_{a_0}^v \frac{T(y(c))cdc}{\sqrt{v^2 - c^2}} = 2\pi y(v). \quad (8)$$

Дальнейшее доказательство единственности проведем от противного, а именно, допустим, что найдется точка $y_0 \in [0, h]$, число $\delta > 0$ и решения обратной задачи $a_1(y)$, $a_2(y)$ такие, что $a_1(y) = a_2(y) = a(y)$ при $y \leq y_0$ (возможно, $y_0 = 0$), и $a_1(y) \neq a_2(y)$ при $y_0 < y < y_0 + \delta \leq h$. Тогда для разности обратных функций $y_1(a) \neq y_2(a)$ при $a(y_0) \leq a \leq a(y_0) + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, из (8) имеем

$$\begin{aligned} 2\pi |y_1(a) - y_2(a)| &\leq \int_{a(y_0)}^a \frac{|T(y_1(c)) - T(y_2(c))|cdc}{\sqrt{a^2 - c^2}} \leq \\ &\leq \max_{y \in [0, h]} |T'(y)| \int_{a(y_0)}^a \frac{|y_1(c) - y_2(c)|cdc}{\sqrt{a^2 - c^2}} \leq \sqrt{\varepsilon} M \max_{c \in [a_0, a]} |y_1(c) - y_2(c)|, \end{aligned}$$

где M не зависит от ε . В точке $a_* = \operatorname{argmax}_{c \in [a_0, a]} |y_1(c) - y_2(c)|$ приходим к противоречию в силу произвольности выбора ε .

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ($k = 1$)

Справедлива следующая теорема существования в малом обратной задачи для случая $k = 1$.

Теорема 2. Пусть $T \in C^1[0, h]$, $T(Y) > 0$ при $Y \in [0, h]$. Тогда найдется точка $h_0 \in (0, h]$ такая, что на $[0, h_0]$ существует строго монотонная функция $a \in C^1[0, h_0]$ (решение уравнения (5)), такая, что $a(0) = a_0$, $a'(0) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{y_n(a)\}_{n \in \mathbb{N}}$, определяемую равенством

$$y_n(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{a_0}^a \frac{T(y_{n-1}(c))cdc}{\sqrt{a^2 - c^2}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad y_0 = \text{const}, \quad y_0 \in [0, h], \quad (9)$$

при $a \in [a_0, a_\varepsilon]$, $a_\varepsilon = a_0 + \varepsilon$, $\varepsilon \leq \delta$. Повторяя рассуждения теоремы 1, для $n \geq 2$ получаем

$$2\pi |y_{n+1}(a) - y_n(a)| \leq \sqrt{\varepsilon} \sqrt{2a_0 + \delta} \max_{y \in [0, h]} |T'(y)| \max_{c \in [a_0, a_\varepsilon]} |y_n(c) - y_{n-1}(c)|,$$

откуда при $M = \sqrt{2a_0 + \delta} \max_{y \in [0, h]} |T'(y)|$ имеем рекуррентную оценку

$$2\pi \max_{a \in [a_0, a_\varepsilon]} |y_{n+1}(a) - y_n(a)| \leq \sqrt{\varepsilon} M \max_{a \in [a_0, a_\varepsilon]} |y_n(a) - y_{n-1}(a)|, \quad n \geq 2.$$

Из нее следует, что функциональный ряд

$$y(a) = \sum_{n=1}^{\infty} (y_{n+1}(a) - y_n(a))$$

равномерно сходится на отрезке $[a_0, a_\varepsilon]$ к непрерывной функции $y(a)$ при достаточно малом ε в силу признака Вейерштрасса, поскольку любая функция $y_n \in C[a_0, a_\varepsilon]$, причем $y_n(a_0) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Докажем последнее по индукции. Так как $y_0 = \text{const}$, то из (9) при $a_0 < a \leq a_\varepsilon$ следует, что $2\pi y_1(a) = T(y_0) \sqrt{a^2 - a_0^2}$, и, доопределив $y_1(a)$ при $a = a_0$ как $y_1(a_0) = 0$, получаем, что $y_1 \in C[a_0, a_\varepsilon]$.

Пусть $y_n \in C[a_0, a_\varepsilon]$, $n > 1$. Разобьем интеграл в (9) на сумму двух:

$$\int_{a_0}^a \frac{T(y_n(c))cdc}{\sqrt{a^2 - c^2}} = \int_{a_0}^{a_1} \frac{T(y_n(c))cdc}{\sqrt{a^2 - c^2}} + \int_{a_1}^a \frac{T(y_n(c))cdc}{\sqrt{a^2 - c^2}}.$$

Аналогично лемме 1 доказываем, что функция $y_{n+1}(a)$ непрерывна при любом $a \in [a_1, a_\varepsilon]$, причем

$$2\pi \lim_{a \rightarrow a_0} y_{n+1}(a) = \lim_{a \rightarrow a_0} \int_{a_0}^a \frac{T(y_n(c))cdc}{\sqrt{a^2 - c^2}} = T(y_n(a_0)) \lim_{a \rightarrow a_0} \sqrt{a^2 - a_0^2} = 0.$$

Доопределив $y_{n+1}(a_0) = 0$, получаем, что $y_{n+1} \in C[a_0, a_\varepsilon]$.

Итак, доказано, что найдется такой отрезок $[a_0, a_\varepsilon]$, что на нем определена непрерывная функция $y(a)$, удовлетворяющая уравнению (8). Аналогично лемме 1 доказываем, что $y \in C^1[a_0, a_\varepsilon]$.

Докажем, что $y'(a) > 0$ при $a \in (a_0, a_0 + \varepsilon]$ и, более того,

$$2\pi y(a) = T(0)\sqrt{a^2 - a_0^2} + \varphi(a), \quad \varphi \in C^1[a_0, a_\varepsilon], \quad \varphi(a_0) = 0.$$

Для этого продифференцируем (8), предварительно проинтегрировав интеграл по частям:

$$\begin{aligned} \int_{a_0}^v \frac{T(y(c))c dc}{\sqrt{v^2 - c^2}} &= -T(y(c))\sqrt{v^2 - c^2} \Big|_{a_0}^v + \int_{a_0}^v T'(y(c))y'(c)\sqrt{v^2 - c^2} dc = \\ &= T(0)\sqrt{v^2 - a_0^2} + \int_{a_0}^v T'(y(c))y'(c)\sqrt{v^2 - c^2} dc = T(0)\sqrt{v^2 - a_0^2} + \varphi(v). \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} 2\pi\varphi'(v) &= 2\pi \int_{a_0}^v \frac{vT'(y(c))y'(c)}{\sqrt{v^2 - c^2}} dc = \int_{a_0}^v \frac{vT'(y(c))\varphi'(c)}{\sqrt{v^2 - c^2}} dc + \\ &+ \int_{a_0}^v \frac{vT(0)T'(y(c))}{\sqrt{(v^2 - c^2)(c^2 - a_0^2)}} c dc = \int_{a_0}^v \frac{vT'(y(c))\varphi'(c)}{\sqrt{v^2 - c^2}} dc + F(v), \end{aligned} \quad (10)$$

где $F \in C^1[a_0, a_\varepsilon]$ — известная функция, причем величина $F(a_0)$ конечна. Равенство (10) является уравнением Абеля II рода относительно функции $\varphi'(v)$ и, таким образом, имеет непрерывное на $[a_0, a_\varepsilon]$ решение. Отсюда следует, что $\varphi \in C^1[a_0, a_\varepsilon]$ и $\varphi(a_0) = 0$.

Из структуры функции $y(a)$ следует, что

$$2\pi y'(a) = \frac{aT(0)}{\sqrt{a^2 - a_0^2}} + \varphi'(a)$$

при $a \in (a_0, a_\varepsilon]$, и, таким образом, $y'(a) > 0$, если ε достаточно мало. Очевидно, что при этом на отрезке $[a_0, y(a_\varepsilon)]$ существует гладкая монотонная функция $a(y)$, обратная к $y(a)$, причем

$$a^2(y) = a_0^2 + (2\pi/T(0))^2 y^2 + \dots$$

Теперь, когда доказана монотонность функции $y(a)$, остается доказать, что $a(y)$ является решением уравнения (5). Для этого домножим (8) на $v/\sqrt{u^2 - v^2}$ и проинтегрируем по отрезку $[a_0, u]$, воспользовавшись приемом Дирихле. Взяв полученный при этом интеграл по частям, имеем

$$\int_{a_0}^u T(y(c))c dc = 4 \int_{a_0}^u \frac{y(v)v dv}{\sqrt{u^2 - v^2}} = 4 \int_{a_0}^u y'(v)\sqrt{u^2 - v^2} dv.$$

В результате последующего дифференцирования получаем

$$T(y(u)) = 4 \int_{a_0}^u \frac{y'(v)dv}{\sqrt{u^2 - v^2}}.$$

Положим $Y = y(u)$. Учитывая монотонность функции $y(v)$ для обратной к ней функции $a(y)$, окончательно приходим к равенству

$$4 \int_0^Y \frac{dy}{\sqrt{a^2(Y) - a^2(y)}} = T(Y).$$

Пример 2. Нетривиальный пример дает зависимость $T(Y) = 2\pi \cos Y$. Нетрудно проверить, что решением уравнения (5) при $a_0 = 1$ является $a(y) = 1/\cos y$. Таким образом, решение обратной задачи существует при выполнении условия $T(Y) > 0$.

4. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ($k = 2$)

Повторяя рассуждения из разд. 1, приходим к следующему равенству:

$$\sqrt{c^2 - a^2(q)} dq = \pm d\xi. \quad (11)$$

Покажем, что и в этом случае физическая система, описываемая (3), допускает периодические колебания. Выберем в (11) знак +, тогда с учетом монотонности и четности $a(q)$ получаем решение $q(\xi)$, возрастающее от значения $-a^{-1}(c)$ до $a^{-1}(c)$ на интервале $(\xi(-c), \xi(c))$, где

$$\xi(c) = \int_{-a^{-1}(c)}^{a^{-1}(c)} \sqrt{c^2 - a^2(y)} dy = 2 \int_0^{a^{-1}(c)} \sqrt{c^2 - a^2(y)} dy \quad (12)$$

и $y = a^{-1}$ — функция, обратная к функции a .

Доопределим функцию $y(\xi)$ в точках $\pm\xi(c)$ по непрерывности, положив $y(\pm\xi(c)) = \pm a^{-1}(c)$. Очевидно, что при этом $y'(\pm\xi(c)) = +\infty$. Такое построение для ОДУ (11) можно продолжить на всей числовой прямой $\mathbb{R} \ni \xi$. В итоге приходим к стационарному решению $y(\xi)$ (волновому процессу с обострением) (см. фиг. 1) с периодом $4\xi(c)$ и амплитудой $a^{-1}(c)$.

Поставим следующую обратную задачу: по периоду $X(Y)$, как функции амплитуды Y , найти функцию $a(y)$ (см. разд. 1). Полагая $c = a(Y)$, из (12) получаем относительно $a(y)$ основное уравнение обратной задачи:

$$X(Y) = 4 \int_0^Y \sqrt{a^2(Y) - a^2(y)} dy. \quad (13)$$

Лемма 2. Пусть $a \in C^2[0, h]$. Тогда $X \in C^2(0, h]$ и $X'(Y) > 0$ при $Y \in (0, h]$.

Доказательство. Формальное дифференцирование (13) дает

$$X'(Y) = 4a'(Y)a(Y) \int_0^Y \frac{dy}{\sqrt{a^2(Y) - a^2(y)}} = a'(Y)a(Y)T(Y),$$

где функция $T(Y)$ определяется равенством (6). Из леммы 1 следует, что $T \in C^1(0, h]$, откуда следует утверждение леммы.

Пример 3. Рассмотрим $a^2(y) = a_0^2 + a_2^2 y^2$. Несложные вычисления дают $X(Y) = \pi a_2 Y^2$. Отсюда следует, что a_0 данными обратной задачи, вообще говоря, не определяется. Кроме того, $X(Y)$ имеет при $Y = 0$ нуль порядка не менее второго, если функция $a(y)$ достаточно гладкая.

Теорема 3. Пусть $X \in C^2[0, h]$, и пусть решение обратной задачи $a(y)$ известно при $y \in [0, \varepsilon]$, $0 < \varepsilon < h$. Тогда обратная задача имеет не более одного решения на $[0, h]$.

Доказательство. Допустим, что при $y > \varepsilon$ существуют $a_1(y) \neq a_2(y)$, что эквивалентно существованию $y_1(a) \neq y_2(a)$ при $a > a_\varepsilon$, $a_\varepsilon = a_i(\varepsilon)$, $i = 1, 2$. Продифференцируем (13) и запишем полученное уравнение в виде

$$X'(y(v))y'(v) = 4 \int_0^v \frac{y y'(a) da}{\sqrt{v^2 - a^2}}.$$

Для разности $y_1(v) - y_2(v) = z(v)$ имеем

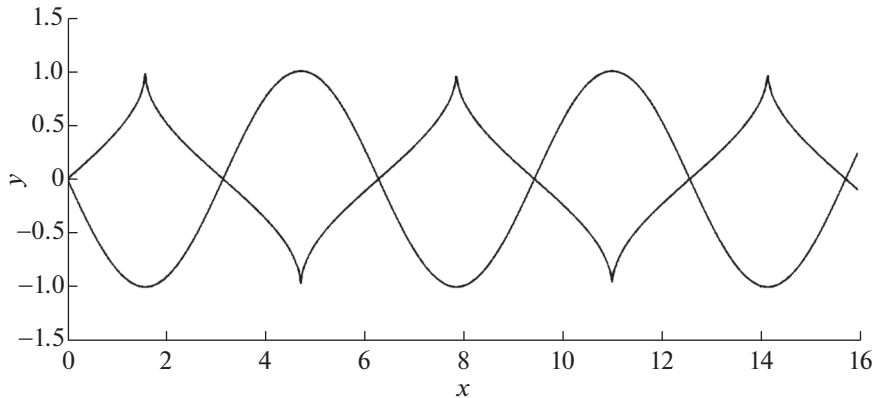
$$X'(y_1(v))z'(v) = 4 \int_0^v \frac{v z'(a) da}{\sqrt{v^2 - a^2}} + [X'(y_2(v)) - X'(y_1(v))]y_2'(v).$$

Отсюда при $v \in [a_\varepsilon, b]$, $b = \min_{i=1,2} \{a_i(h)\}$ вытекает следующая оценка:

$$|z'(v)| \min_{v \in [a_\varepsilon, b]} |X'(y_1(v))| \leq (4v/a_\varepsilon) \sqrt{v^2 - a_\varepsilon^2} \max_{a \in [a_\varepsilon, v]} |z'(a)| + \max_{Y \in [0, h]} |X''(Y)| |y_2'(v)| \max_{a \in [a_\varepsilon, v]} |z(a)|,$$

т.е.

$$m |z'(v)| \leq [M_1 \sqrt{v - a_\varepsilon} + M_2(v - a_\varepsilon)] \max_{a \in [a_\varepsilon, v]} |z'(a)|,$$



Фиг. 1. Стационарные колебания для $k = 1$ и в режиме с обострением для $k = 2$.

где величины $m, M_1, M_2 > 0$ и не зависят от v . При достаточно малой разности $v - a_\varepsilon \leq \delta$ из этой оценки в точке $v^* = \operatorname{argmax}_{v \in [a_\varepsilon, a_\varepsilon + \delta]} |z'(v)|$ имеем

$$m|z'(v^*)| \leq (M_1\sqrt{\delta} + M_2\delta)|z'(v^*)|.$$

В силу произвольности выбора $\delta > 0$ приходим к противоречию.

5. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ $k = 1, 2$

Исходное уравнение (5) обратной задачи в случае $k = 1$ имеет под интегралом интегрируемую особенность, что затрудняет непосредственное использование (5). Получим эквивалентное функциональное уравнение, лишенное этого недостатка.

Обратимся к уравнению (8) и проинтегрируем левую часть по частям:

$$-T(y(c))\sqrt{v^2 - c^2}\Big|_{a_0}^v + \int_{a_0}^v \sqrt{v^2 - c^2} T'(y(c)) y'(c) dc = 2\pi y(v).$$

Возвращаясь к переменной y , имеем

$$T(0)\sqrt{a^2(Y) - a_0^2} + \int_0^Y \sqrt{a^2(Y) - a^2(y)} T'(y) dy = 2\pi Y.$$

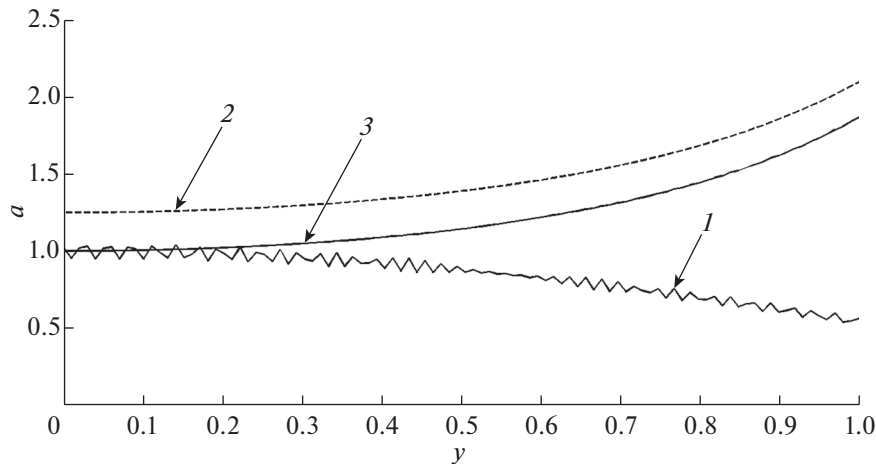
Сделаем замену $Z^2(Y) = a^2(Y) - a_0^2$ и окончательно получим следующее функциональное уравнение:

$$T(0)Z(Y) + \int_0^Y \sqrt{Z^2(Y) - Z^2(y)} T'(y) dy = 2\pi Y. \quad (14)$$

Это функциональное уравнение не является уравнением типа Вольтерра II рода, поскольку выражение под интегралом не локально. Однако (14) является эволюционным уравнением, что вытекает из следующего нелокального дифференциального уравнения:

$$\frac{dZ}{dY} = 2\pi \left(T(0) + Z(Y) \int_0^Y \frac{T'(y)}{\sqrt{Z^2(Y) - Z^2(y)}} dy \right)^{-1}.$$

Численное решение этого дифференциального уравнения можно построить, например, методом ломаных, единственность этого решения следует из результатов разд. 2. Очевидно, что построенное таким образом решение имеет наибольшую область определения, в то время как решение, построенное методом последовательных приближений для (14) этого, вообще говоря, не гарантирует. Данное обстоятельство полностью подтвердилось при проведении вычислительных экспериментов.



Фиг. 2. Входные данные для $k = 1$: функция $T(y)$, относительная погрешность 10% (кривая 1). Точное решение обратной задачи: функция $a(y)$, сдвиг по a на $+0.25$ (кривая 2). Численное решение (кривая 3).

Опираясь на свойство эволюционности уравнения (14), в настоящей работе был применен следующий дискретный алгоритм нахождения функции $Z(y)$. Для выражения под интегралом в (14) использовалась формула прямоугольников на равномерной сетке, что приводило к рекуррентному вычислению $z_n = Z(y_n)$, $n = 1, 2, \dots, N$:

$$T(0)z_n = 2\pi y_n - \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{z_{n-1}^2 - z_k^2} T'(y_k) h, \quad z_0 = 0, \quad y_n = nh, \quad y_0 = 0.$$

Для функции $T(y)$, заданной приближенно, при вычислении $T'(y_n)$ осуществлялась соответствующая регуляризация.

Результаты численного моделирования представлены на фиг. 2 для $T(y) = 2\pi \cos(y)$, точное решение $a(y) = 1/\cos(y)$, $y \in [0, \pi/2)$. Относительная погрешность задания $T(y)$ по норме $C_h[0, \pi/2]$ составляла 10%.

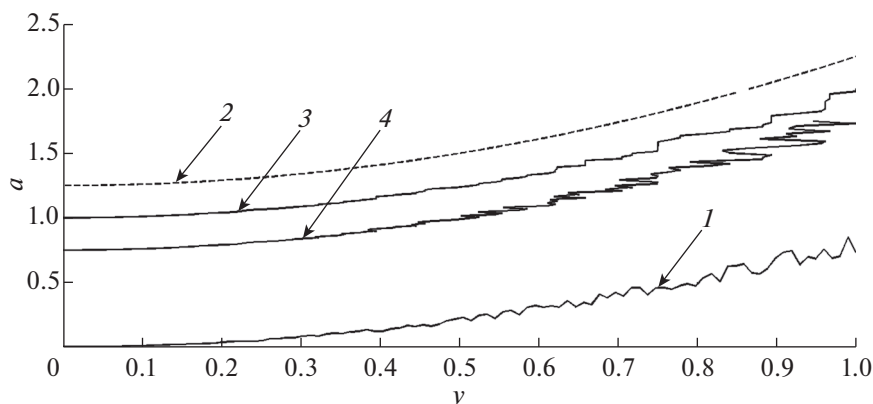
Очевидно, что обратная задача при $k = 2$ является хуже обусловленной, чем при $k = 1$, поскольку уравнение (13) однократным дифференцированием не приводится к функциональному уравнению II рода. Однако в результате интегрирования (13) по частям удается получить интегральное уравнение I рода с особенностью в ядре типа $1/\sqrt{x}$. Основным моментом при построении численного алгоритма является аналитически точное вычисление квадратур с особенностью.

Проинтегрировав (13) по частям, имеем

$$X(y(v)) = \int_{a_0}^v \sqrt{v^2 - a^2} y'(a) da = \int_{a_0}^v \frac{ay(a)}{\sqrt{v^2 - a^2}} da = \sum_{j=1}^N \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{ay(a)}{\sqrt{v^2 - a^2}} da,$$

откуда на равномерной сетке $a_k = a_0 + kh$, $k = 0, 1, \dots, N$, получаем рекуррентное уравнение на $\{y_n\}$, $n = 1, 2, \dots, N$:

$$y_n \sqrt{a_n^2 - a_{n-1}^2} = X(y_n) - \sum_{j=0}^{n-1} y_j (\sqrt{a_n^2 - a_{j-1}^2} - \sqrt{a_n^2 - a_j^2}), \quad y_0 = 0.$$



Фиг. 3. Входные данные для $k = 2$: функция $X(y)$, относительная погрешность 2.5% (кривая 1). Точное решение обратной задачи: функция $a(y)$, сдвиг по a на +0.25 (кривая 2). Численное решение (кривая 3). Результат без учета монотонности $y(a)$, сдвиг по a на -0.25 (кривая 4).

Результаты численного моделирования представлены на фиг. 3. Поскольку на приближенных данных $X(y_n)$ сеточная функция $y_n = y(a_n)$ оказывается не монотонной, то графическое изображение функции $a_n = a(y_n)$ носит весьма причудливый характер. С учетом необходимой монотонности $\{y_n\}$ результат решения также представлен на фиг. 3. Относительная погрешность задания $X(y)$ по норме $C_h[0, \pi/2]$ составляла 2.5%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Whitham G.B.* Linear and nonlinear waves. N.Y.: A Wiley-Interscience Publ., 1974. 636 p.
2. *Leibovich S., Seebass A.R.* (Ed.) Linear and nonlinear waves. Ithaca, NY: Cornell Univer. Press, 1974. 331 p.
3. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988. 368 с.
4. *Денисов А.М.* Существование решения обратной коэффициентной задачи для квазилинейного гиперболического уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 4. С. 587–596.
5. *Денисов А.М.* Обратная задача для квазилинейной системы в частных производных с нелокальным краевым условием // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 10. С. 1571–1579.
6. *Денисов А.М.* Обратная задача для квазилинейной системы в частных производных с нелокальным краевым условием // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 10. С. 1571–1579.
7. *Чурбанов Д.В., Щеглов А.Ю.* Итерационный метод решения обратной задачи для нелинейного уравнения первого порядка в частных производных с оценками гарантированной точности и числа шагов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 2. С. 275–280.
8. *Денисов А.М., Макеев А.С.* Численный метод решения обратной задачи для модели популяции // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 3. С. 490–500.
9. *Щеглов А.Ю.* Метод определения коэффициентов квазилинейного уравнения гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 5. С. 813–833.
10. *Herglotz G.* Über das Benndorfsche Problem der Portpflanzungsgeschwindigkeit der Erdbebenstrahlen // Phys. Zeltshr. 1907. V. 8. № 5. P. 145–147.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Физматлит, 2004. 224 с.
12. *Newell A.* Solitons in mathematics and physics. Arizona: Soc. for Industrial and Appl. Math., 1985. 246 p.
13. *Баев А.В.* О решении одной обратной задачи для уравнений мелкой воды в бассейне с переменной глубиной // Матем. моделирование. 2020. Т. 32. № 11. С. 3–15.
14. *Баев А.В.* Об одной обратной задаче для уравнения КдВ с переменным коэффициентом // Матем. заметки. 2019. Т. 106. № 5. С. 788–792.
15. *Кабанихин С.И., Криворотько О.И.* Алгоритм восстановления источника возмущений в системе нелинейных уравнений мелкой воды // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 8. С. 138–147.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.635

**О МЕТОДЕ ЧАСТИЦ ДЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ
В НЕОДНОРОДНОЙ РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ**

© 2021 г. А. В. Березин^{1,*}, М. Б. Марков^{1,**}, С. В. Паротькин^{1,***}

¹ 125047 Москва, Миусская пл., 4, ФГУ ФИЦ ИПМ РАН, Россия

*e-mail: a_v_berezin@mail.ru

**e-mail: m_b_markov@mail.ru

***e-mail: s_v_p_@mail.ru

Поступила в редакцию 11.02.2020 г.
Переработанный вариант 11.02.2020 г.
Принята к публикации 11.04.2021 г.

Рассматривается задача Коши для кинетических и электродинамических уравнений, описывающих самосогласованное электромагнитное поле пучка электронов, распространяющихся в среде с разрывными рассеивающими свойствами и электрофизическими характеристиками. Представлена интерпретация обобщенного решения как метода частиц для численного решения кинетического уравнения в самосогласованном поле. Предложен подход к численному решению на основе сглаживания коэффициентов кинетического уравнения и рассмотрен его решение в классе финитных обобщенных функций. Библ. 26.

Ключевые слова: электрон, кинетическое уравнение, электромагнитное поле, обобщенная функция, мера Дирака.

DOI: 10.31857/S0044466921090064

ВВЕДЕНИЕ

Исследования неравновесных сред актуальны для многих научно-технических приложений. К ним, в частности, относятся генерация плазмы и взаимодействие ионизирующего излучения с веществом [1]. Математическое моделирование является эффективным методом исследования данных предметных областей.

Два основных подхода к моделированию неравновесных сред развиваются в настоящее время. Первый подход основан на построении конечно-разностных или конечно-элементных схем для уравнений сплошной среды [2], [3]. Второй подход заключается в переходе к рассмотрению динамической системы путем построения обобщенных решений уравнений сплошной среды. Следует отметить, что методы моделирования динамических систем сходятся медленно, но обеспечивают эффективное распараллеливание вычислений.

Наиболее известным динамическим методом является метод частиц (см. [4], [5]). Он разработан для моделирования бесстолкновительной плазмы как метод решения квазилинейной системы квазилинейных электродинамических и однородных кинетических уравнений Власова. Рассматривается движение заряженных частиц под действием самосогласованного электромагнитного поля. Переход к моделированию динамической системы заключается в построении обобщенного решения кинетического уравнения посредством так называемой “дельта-подстановки”. Возможность такой подстановки обусловлена тем, что уравнение Власова допускает “микроскопические решения” в виде набора дельта-функций от фазовых переменных системы многих частиц.

Решение некоторых актуальных практических задач потребовало использования метода частиц для моделирования переноса электронов в рассеивающей среде. Электроны высокой энергии ионизируют [6] и возбуждают [7] атомы рассеивающей среды, генерируют тормозное излучение, испытывают упругое рассеяние [8]. При ударной ионизации образуются вторичные электроны [9]. Распространение электронов формирует пространственный заряд и самосогласованное электромагнитное поле [10]. Влияние поля на движение электронов приводит к неустойчивости потока [11]. Процессы переноса и рассеяния интенсивного электронного потока описывает квазилинейное неоднородное кинетическое уравнение с интегралом столкновений. Электронный пучок с интенсивностью, достаточной для формирования самосогласованного поля, создает, напри-

мер, ускоритель КАЛЬМАР, эксплуатируемый в Национальном исследовательском центре “Курчатовский институт” [12].

Применимость метода частиц для численного решения квазилинейного неоднородного кинетического уравнения с интегралом столкновений необходимо обосновать построением аналога “дельта-подстановки”. Обобщенное решение неоднородного уравнения Власова в однородной рассеивающей среде построено в [13]. Но это не исчерпывает все практически важные задачи. Например, в работе [12] рассматривается эксперимент, в котором пучок электронов образует анодную плазму при рассеянии в преграде из эпоксидной смолы. Как сечения рассеяния электронов, так и коэффициенты уравнений Максвелла для самосогласованного электромагнитного поля испытывают разрывы на границе преграды. В результате испытывают разрывы компоненты силы Лоренца и ядро оператора рассеяния в кинетическом уравнении. Неоднородность имеет место во всех физических экспериментах и практических приложениях.

Данная работа посвящена обоснованию применимости метода частиц для моделирования переноса электронов в средах с нестационарными разрывными рассеивающими свойствами. Предполагается дать интерпретацию решения кинетического уравнения и указать особенности численной реализации, позволяющие избежать проблем, связанных с неоднородностью коэффициентов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим функцию распределения электронов $f = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ в фазовом пространстве $(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbb{R}_r^3 \times \mathbb{R}_p^3$ координат $\mathbf{r} = (x, y, z)$ и импульсов $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$. Данная функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}_r(\mathbf{v}f) + e \operatorname{div}_p[(\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta}, \mathbf{H}])f] + \sigma' v f = Q(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) + \int d\mathbf{p}' \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{p}') v' f(\mathbf{p}'), \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (1.2)$$

где t — лабораторное время, $\mathbf{v}$ — скорость электрона, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t, \mathbf{r})$ — напряженности электрического и магнитного полей, div_r и div_p — дивергенции в пространствах координат и импульсов, e — заряд электрона, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$, c — скорость света в вакууме, σ' — полное макроскопическое сечение рассеяния электронов, $\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ — дифференциальное макроскопическое сечение рассеяния электронов, $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{p}$ — импульсы электрона до и после рассеяния, соответственно, $\mathbf{j}$ — плотность тока электронов. Внешний источник электронов задается функцией $Q = Q(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ в правой части уравнения (1.1).

Задача Коши для уравнений (1.1), (1.2), как показано в [13], имеет решение в пространстве финитных обобщенных функций [14], определенных на основном пространстве финитных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ в фазовом пространстве $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$. Обобщенные функции зависят от параметра $t \geq 0$. Начальные условия предполагаются однородными. Плотность тока $\mathbf{j} = \mathbf{j}(t, \mathbf{r})$ в уравнениях Максвелла (1.2) определена как действие финитной обобщенной функции $\mathbf{v}f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ на бесконечно дифференцируемую функцию $W(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \Delta)$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_r^3$, $\Delta > 0$, удовлетворяющую условиям:

$$\int_{\mathbb{R}_r^3} W(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \Delta) d\boldsymbol{\alpha} = 1, \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}_r^3} d\mathbf{r} W(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \Delta) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \varphi(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{p}).$$

Функция $W(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \Delta)$ не удовлетворяет свойству финитности в пространстве $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$. Тем не менее плотности тока и заряда электронов $n = n(t, \mathbf{r})$ определяются корректно именно по причине финитности $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$:

$$\mathbf{j} = (f(t, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{p}), \mathbf{v}W(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \Delta)), \quad n = (f(t, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{p}), W(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \Delta)). \quad (1.3)$$

В рамках определения (1.3) плотность тока и, как следствие, напряженности электрического и магнитного полей, вычисляемые решением уравнений Максвелла (1.2), являются бесконечно дифференцируемыми функциями координат. Тогда слагаемое $\operatorname{div}_r(\mathbf{v}f) + e \operatorname{div}_p[(\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta}, \mathbf{H}])f]$ в левой части уравнения (1.1) есть финитная обобщенная функция [13].

В [13] также показано, что интеграл столкновений в уравнении (1.1) может быть представлен как свертка финитной обобщенной функции $\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ и $f = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$. Внешний источник электронов в правой части уравнения (1.1) задается финитной обобщенной функцией $Q = Q(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ переменных $\mathbf{r}, \mathbf{p}$.

Неоднородность среды приводит к следующим проблемам. Величины σ и σ' становятся функциями $\sigma = \sigma(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{p}')$, $\sigma'(t, \mathbf{r}, p)$. По переменным $\mathbf{r}$ эти функции испытывают разрывы I рода. Уравнения (1.2) для электромагнитного поля в вакуумоподобной среде превращаются в уравнения Максвелла для сплошной среды:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\xi \mathbf{E} + \mathbf{j}), \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (1.4)$$

где $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$ — диэлектрическая проницаемость, $\xi = \xi(\mathbf{r})$ — собственная проводимость, $\mu = \mu(\mathbf{r})$ — магнитная проницаемость.

Возникают сложности при обосновании численного алгоритма решения уравнения (1.1) посредством доказательства его эквивалентности интегральному уравнению:

$$f = \int_0^t d\tilde{t} \int d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} \left[Q(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}) + \int d\mathbf{p}' \sigma(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{p}') v' f(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{p}') \right] \times \\ \times \exp \left\{ - \int_{\tilde{t}}^t dt' \sigma' v^{s'} \right\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^s) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}^s), \quad (1.5)$$

где функции $\mathbf{r}^s = \mathbf{r}^s(t, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})$, $\mathbf{p}^s = \mathbf{p}^s(t, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})$ являются решениями уравнений движения:

$$\frac{d\mathbf{r}^s}{dt} = \mathbf{v}^s, \quad \frac{d\mathbf{p}^s}{dt} = e \left(\mathbf{E}(t, \mathbf{r}^s) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}^s, \mathbf{H}(t, \mathbf{r}^s)] \right) \quad (1.6)$$

с начальными условиями $\mathbf{r}^s|_{t=\tilde{t}} = \tilde{\mathbf{r}}$, $\mathbf{p}^s|_{t=\tilde{t}} = \tilde{\mathbf{p}}$. Подынтегральное выражение в показателе экспоненты имеет вид:

$$\sigma' v^{s'} \equiv \sigma'(t', \mathbf{r}^{s'}, p^{s'}) v(p^{s'}), \quad (1.7)$$

где $\mathbf{r}^{s'} = \mathbf{r}^s(t', \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})$, $\mathbf{p}^{s'} = \mathbf{p}^s(t', \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})$.

Эквивалентность уравнений (1.1) и (1.5) рассмотрена в [13] для бесконечно дифференцируемых в фазовом пространстве $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ коэффициентов $\sigma = \sigma(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{p}')$, $\sigma'(t, \mathbf{r}, p)$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t, \mathbf{r})$. Рассмотрим действие результата подстановки (1.5) в (1.1) на функцию из основного пространства. Получаем невязку следующей структуры [15]:

$$\int_0^t d\tilde{t} \int d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} \int d\mathbf{p}' \int d\mathbf{r}' \left[Q(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}) + \int d\mathbf{p}' \sigma(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{p}') v' f(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{p}') \right] \exp \left\{ - \int_{\tilde{t}}^t dt' \sigma' v^{s'} \right\} \times \\ \times \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^s) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}^s) \left[\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) (\sigma'(t, \mathbf{r}^s, p^s) - \sigma'(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})) \tilde{v} + \langle \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}), (\mathbf{v}^s - \mathbf{v}) \rangle + \right. \\ \left. + \langle \operatorname{grad}_{\mathbf{p}} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}), e \left(\mathbf{E}(t, \mathbf{r}^s) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}^s, \mathbf{H}(t, \mathbf{r}^s)] - \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}(t, \mathbf{r})] \right) \rangle \right]. \quad (1.8)$$

Если функции $\sigma(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{p}')$, $\sigma'(t, \mathbf{r}, p)$, $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ и $\mathbf{H}(t, \mathbf{r})$ бесконечно дифференцируемы, то интегрирование по $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$ обращает невязку в ноль. В противном случае представленное рассмотрение теряет смысл.

В актуальных задачах зависимость функций $\sigma(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{p}')$, $\sigma'(t, \mathbf{r}, p)$ от пространственных переменных определяется, главным образом, распределением плотности. Невозмущенное распределение задается кусочно-постоянной функцией координат, т.е. испытывающей разрывы I рода. Если преграда разрушается ионизирующим излучением, то плотность определяется решением уравнений сплошной среды. В этом случае распределение плотности может иметь разрывы I рода и быть дифференцируемым вне точек разрыва. Аналогично, нормальная компонента электрического поля испытывает разрыв I рода на границах сред с разными диэлектрическими проницаемостями, сохраняя дифференцируемость вне областей разрывов.

2. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАК ПЛОТНОСТЬ МЕРЫ

Рассмотрим функцию Хэвисайда $\Theta(\mathbf{r}^s - \mathbf{r})\Theta(\mathbf{p}^s - \mathbf{p})$, определяющую меру Дирака в фазовом пространстве [16]. Эта мера сконцентрирована в точке $(\mathbf{r}^s, \mathbf{p}^s)$. Она принимает значение 1 для каждого открытого множества евклидова пространства $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, содержащего точку $(\mathbf{r}^s, \mathbf{p}^s)$. Для открытого множества, которое не содержит точку $(\mathbf{r}^s, \mathbf{p}^s)$, мера Дирака равна нулю. В этой интерпретации соотношение (1.8) является интегралом функции

$$\begin{aligned} & \int_0^t d\tilde{t} \int d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} \left[Q(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}) + \int d\mathbf{p}' \sigma(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{p}') v' f(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{p}') \right] \exp \left\{ - \int_{\tilde{t}}^t dt' \sigma' v^{s'} \right\} \times \\ & \times \left[\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) (\sigma'(t, \mathbf{r}^s, \mathbf{p}^s) - \sigma'(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})) \tilde{v} + \langle \text{grad}_{\mathbf{r}} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}), (\mathbf{v}^s - \mathbf{v}) \rangle + \right. \\ & \left. + \langle \text{grad}_{\mathbf{p}} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}), e \left(\mathbf{E}(t, \mathbf{r}^s) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}^s, \mathbf{H}(t, \mathbf{r}^s)] - \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}(t, \mathbf{r})] \right) \rangle \right] \end{aligned}$$

по мере Дирака, определенной распределением $\Theta(\mathbf{r}^s - \mathbf{r})\Theta(\mathbf{p}^s - \mathbf{p})$.

Области разрыва коэффициентов являются поверхностями в пространстве $\mathbb{R}_r^3$, поэтому их мера равна нулю. Ограниченность и финитность $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, а также компонент ее градиента, наряду с ограниченностью остальных функций в подынтегральном выражении, обеспечивают конечность интеграла в бесконечных пределах и его равенство нулю. В результате уравнения (1.1) и (1.5) эквивалентны. В этой интерпретации функцию распределения электронов, являющуюся решением уравнений (1.1) или (1.5), можно рассматривать как плотность меры Дирака, определенной на открытых множествах в пространстве $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$. Например, при отсутствии рассеяния решение уравнения (1.1) имеет вид

$$f = \int_0^t d\tilde{t} \int d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} Q(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}) \exp \left\{ - \int_{\tilde{t}}^t dt' \sigma' v^{s'} \right\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^s) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}^s). \quad (2.1)$$

Плотность (2.1) соответствует мере Дирака, определяемой соотношением

$$F(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \int_0^t d\tilde{t} \int d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} Q(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}) \exp \left\{ - \int_{\tilde{t}}^t dt' \sigma' v^{s'} \right\} \Theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^s) \Theta(\mathbf{p} - \mathbf{p}^s). \quad (2.2)$$

Из (2.1) и (2.2) следует $dF = f d\mathbf{r} d\mathbf{p}$.

Требование бесконечной дифференцируемости $W(\mathbf{r}, \alpha, \Delta)$ в такой интерпретации становится излишним. Соотношения (1.3) преобразуются к виду

$$\mathbf{j} = \int \mathbf{v} W(\mathbf{r}, \alpha, \Delta) dF(t, \alpha, \mathbf{p}), \quad n = \int W(\mathbf{r}, \alpha, \Delta) dF(t, \alpha, \mathbf{p}). \quad (2.3)$$

3. СГЛАЖИВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Рассмотрим геометрическую модель рассеивающей среды в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Пусть она состоит из M элементов с заданными физическими свойствами. Простые линейно связанные области воздуха или вакуума внутри и в окрестности преграды также рассматриваются как отдельные элементы. Поставим в соответствие каждому элементу с номером m , $m = 1, \dots, M$, максимальное открытое множество D_m точек $\mathbb{R}_r^3$ внутри него. Символом ∂D_m обозначим границу множества D_m , $m = 1, \dots, M$. Пусть $\bar{D}_m$ есть замыкание множества D_m . Обозначим $D_0 = \mathbb{R}_r^3 \setminus \bigcup_{m=1}^M \bar{D}_m$.

Уравнения (1.1), (1.2) содержат неоднородные нестационарные коэффициенты. Будем рассматривать эти коэффициенты как ограниченные функции в пространстве $\mathbb{R}_r^3$, дифференцируемые на каждом из множеств D_m и испытывающие разрыв I рода на границах ∂D_m .

Существует бесконечно дифференцируемая функция $h_m(\mathbf{r})$ из основного пространства, равная единице для $\mathbf{r} \in D_m$, нулю для $\mathbf{r} \in \mathbb{R}_r^3 \setminus \bar{D}_m$ и принимающая значения между нулем и единицей

для $\mathbf{r} \in \bar{D}_m \cap (\mathbb{R}^3 \setminus D_m)$. Данное утверждение доказывается аналогично лемме, приведенной в [14, с. 62]. Действительно, следуя [14], обозначим через V_m^δ объединение открытых шаров радиуса δ с центрами в точках множества $\mathbb{R}^3 \setminus D_m$. Данное объединение называют дельта-окрестностью множества $\mathbb{R}^3 \setminus D_m$. Число δ выберем настолько малым, чтобы выполнялось условие $V_m^{2\delta} \subset \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}_m$. Введем функцию

$$\psi(\mathbf{r}, \delta) = \begin{cases} C_\delta \exp\{-\delta^2/(\delta^2 - r^2)\}, & r < \delta, \\ 0, & r > \delta, \end{cases}$$

где $|\mathbf{r}| = r$, $C_\delta = \int_{r \leq \delta} \exp\{-\delta^2/(\delta^2 - r^2)\} d\mathbf{r}$, причем $\int_{\mathbb{R}^3} \psi(\mathbf{r}, \delta) d\mathbf{r} = 1$.

Рассмотрим функцию

$$h_m^\delta(\mathbf{r}) = 1 - \int_{V_m^\delta} \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \delta) d\mathbf{r}'. \quad (3.1)$$

Подынтегральная функция в (3.1) принимает ненулевое значение $C_\delta \exp\{-\delta^2/(\delta^2 - (r - r')^2)\}$ в шаре радиуса δ с центром в точке $\mathbf{r}$. Данный шар является носителем функции $\psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \delta)$. Если $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus D_m$, то носитель целиком оказывается в V_m^δ . Интегрирование по V_m^δ сводится к интегрированию по носителю и $\int_{V_m^\delta} \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \delta) d\mathbf{r}' = 1$. Функция $h_m(\mathbf{r})$ в этом случае равна нулю. Если $\mathbf{r} \in D_m$, то в силу условия $V_m^{2\delta} \subset \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}_m$ носитель подынтегральной функции не попадает в область интегрирования V_m^δ и интеграл обращается в ноль. Функция $h_m^\delta(\mathbf{r})$ в этом случае равна единице. Если $\mathbf{r} \in \bar{D}_m \cap (\mathbb{R}^3 \setminus D_m)$, то в область интегрирования попадает часть носителя подынтегральной функции. Тогда функция $h_m^\delta(\mathbf{r})$ принимает значение от нуля до единицы. Функция $h_m^\delta(\mathbf{r})$ бесконечно дифференцируема также, как и $\psi(\mathbf{r}, \delta)$.

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^\delta(t, \mathbf{r}) &= \sum_{m=0}^M h_m^\delta(\mathbf{r}) \mathbf{E}(t, \mathbf{r}), & \mathbf{H}^\delta(t, \mathbf{r}) &= \sum_{m=0}^M h_m^\delta(\mathbf{r}) \mathbf{H}(t, \mathbf{r}), \\ \sigma_\delta^t(t, \mathbf{r}) &= \sum_{m=0}^M h_m^\delta(\mathbf{r}) \sigma^t(t, \mathbf{r}), & \sigma^\delta(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \sum_{m=0}^M h_m^\delta(\mathbf{r}) \sigma(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Функции (3.2) во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ обладают теми же свойствами гладкости, что и функции $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{H}(t, \mathbf{r})$, $\sigma^t(t, \mathbf{r})$ и $\sigma(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{p}')$ на множествах D_m . На границах ∂D_m функции (3.2) обращаются в ноль.

Заменяем разрывные коэффициенты в уравнениях (1.1), (1.5) соответствующими функциями из набора (3.2):

$$\frac{\partial f^\delta}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{r}}(\mathbf{v} f^\delta) + e \operatorname{div}_{\mathbf{p}}[(\mathbf{E}^\delta + [\boldsymbol{\beta}, \mathbf{H}^\delta]) f^\delta] + \sigma_\delta^t v f^\delta = Q(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) + \int d\mathbf{p}' \sigma^\delta(\mathbf{p}, \mathbf{p}') v' f^\delta(\mathbf{p}'), \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} f^\delta &= \int_0^t d\tilde{t} \int d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} [Q(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}) + \int d\mathbf{p}' \sigma^\delta(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{p}') v' f(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{p}')] \times \\ &\quad \times \exp\left\{-\int_{\tilde{t}}^t dt' \sigma_\delta^{t'} v^{s'}\right\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\delta^s) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_\delta^s), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где функции $\mathbf{r}_\delta^s = \mathbf{r}_\delta^s(t, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})$, $\mathbf{p}_\delta^s = \mathbf{p}_\delta^s(t, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})$ являются решениями уравнений движения:

$$\frac{d\mathbf{r}_\delta^s}{dt} = \mathbf{v}_\delta^s, \quad \frac{d\mathbf{p}_\delta^s}{dt} = e\left(\mathbf{E}^\delta(t, \mathbf{r}_\delta^s) + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_\delta^s, \mathbf{H}^\delta(t, \mathbf{r}_\delta^s)]\right) \quad (3.5)$$

с начальными условиями $\mathbf{r}^s|_{t=\tilde{t}} = \tilde{\mathbf{r}}$, $\mathbf{p}^s|_{t=\tilde{t}} = \tilde{\mathbf{p}}$.

Подставляя (3.4) в (3.3), получаем невязку

$$\begin{aligned} & \int_0^t d\tilde{t} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{p} \int d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} \left[Q(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}) + \int d\mathbf{p}' \sigma^\delta(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{p}') v' f^\delta(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{p}') \right] \exp \left\{ - \int_{\tilde{t}}^t dt' \sigma_\delta^t v^{s'} \right\} \times \\ & \times \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\delta^s) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_\delta^s) \left[\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) (\sigma_\delta^t(t, \mathbf{r}^s, \mathbf{p}^s) - \sigma_\delta^t(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})) \tilde{v} + \left\langle \text{grad}_{\mathbf{r}} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}), (\mathbf{v}_\delta^s - \mathbf{v}) \right\rangle + \right. \\ & \left. + \left\langle \text{grad}_{\mathbf{p}} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}), e \left(\mathbf{E}^\delta(t, \mathbf{r}_\delta^s) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_\delta^s, \mathbf{H}^\delta(t, \mathbf{r}_\delta^s)] - \mathbf{E}^\delta(t, \mathbf{r}) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}^\delta(t, \mathbf{r})] \right) \right\rangle \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Обозначим символом V_Γ^δ объединение открытых шаров радиуса δ с центрами в точках множества $\Gamma = \bigcup_{m=0}^M \partial D_m$. Данное объединение есть дельта-окрестность множества $\Gamma = \bigcup_{m=0}^M \partial D_m$. Коэффициенты уравнений (1.1) и (3.3) различаются только для $\mathbf{r} \in V_\Gamma^\delta$. В этой области функции (3.2) при каждом $\mathbf{r}$ принимают значения, меньшие по модулю, чем $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{H}(t, \mathbf{r})$, $\sigma^t(t, \mathbf{r})$ и $\sigma(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{p}')$, а при $\mathbf{r} \in \Gamma$ обращаются в ноль. Из этого очевидно, что различие решений уравнений (1.1) и (3.3) будет максимальным, если при $\mathbf{r} \in V_\Gamma^\delta$ функции (3.2) положить равными нулю. Это будет означать, что в дельта-окрестности границы V_Γ^δ электроны переносятся свободно, т.е. не поглощаясь, не рассеиваясь и не изменяя импульс под действием электромагнитного поля.

Рассмотрим погрешности, вносимые заменой коэффициентов уравнения (1.1) функциями (3.2). Анализ выполним отдельно для сечений в интеграле столкновений, и напряженностей электромагнитного поля.

Пусть функции $\sigma^t(t, \mathbf{r})$ и $\sigma(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{p}')$ в уравнениях (1.1) и (1.5) заменены на функции $\sigma_\delta^t(t, \mathbf{r})$ и $\sigma^\delta(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{p}')$. Решения уравнений (1.5) и (3.4) могут быть построены методом последовательных поколений [17]. Например, для уравнения типа (3.4) данное решение имеет вид

$$f^\delta(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^\delta(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} f_0^\delta &= \int_0^t d\tilde{t} \int d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} Q(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}) \exp \left\{ - \int_{\tilde{t}}^t dt' \sigma_\delta^t v^{s'} \right\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^s) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}^s), \\ f_1^\delta &= \int_0^t d\tilde{t} \int d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} \exp \left\{ - \int_{\tilde{t}}^t dt' \sigma_\delta^t v^{s'} \right\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^s) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}^s) \int d\mathbf{p}' \sigma^\delta(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{p}') v' f_0^\delta(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{p}'), \\ & \dots \dots \dots \\ f_{n+1}^\delta &= \int_0^t d\tilde{t} \int d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} \exp \left\{ - \int_{\tilde{t}}^t dt' \sigma_\delta^t v^{s'} \right\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^s) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}^s) \int d\mathbf{p}' \sigma^\delta(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{p}') v' f_n^\delta(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{p}'), \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Рассмотрим действие разности этих решений

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) - f^\delta(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) - f_n^\delta(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}))$$

на функцию из основного пространства:

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{p} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) (f_0 - f_0^\delta) = \\ & = \int_0^t d\tilde{t} \int_{V_\Gamma^\delta} d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} \varphi(\mathbf{r}^s, \mathbf{p}^s) Q(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}) \left(\exp \left\{ - \int_{\tilde{t}}^t dt' \sigma^t v^{s'} \right\} - \exp \left\{ - \int_{\tilde{t}}^t dt' \sigma_\delta^t v^{s'} \right\} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int d\mathbf{r} \int d\mathbf{p} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) (f_1 - f_1^\delta) &= \int_0^t d\tilde{t} \int_{V_\Gamma^\delta} d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} \varphi(\mathbf{r}^s, \mathbf{p}^s) \left(\exp \left\{ - \int_{\tilde{t}}^t dt' \sigma' v^{s'} \right\} \int d\mathbf{p}' \sigma(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{p}') \times \right. \\
&\quad \times v' f_0(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{p}') - \exp \left\{ - \int_{\tilde{t}}^t dt' \sigma_\delta' v^{s'} \right\} \int d\mathbf{p}' \sigma^\delta(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{p}') v' f_0^\delta(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{p}') \Big) \\
&\quad \dots \dots \dots \\
\int d\mathbf{r} \int d\mathbf{p} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) (f_{n+1} - f_{n+1}^\delta) &= \int_0^t d\tilde{t} \int_{V_\Gamma^\delta} d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} \varphi(\mathbf{r}^s, \mathbf{p}^s) \left(\exp \left\{ - \int_{\tilde{t}}^t dt' \sigma' v^{s'} \right\} \int d\mathbf{p}' \sigma(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{p}') \times \right. \\
&\quad \times v' f_n(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{p}') - \exp \left\{ - \int_{\tilde{t}}^t dt' \sigma_\delta' v^{s'} \right\} \int d\mathbf{p}' \sigma^\delta(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{p}') v' f_n^\delta(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{p}') \Big), \\
&\quad \dots \dots \dots
\end{aligned}$$

В силу положительности функций σ_δ' и σ^δ для неотрицательных $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
\int d\mathbf{r} \int d\mathbf{p} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) |f_0 - f_0^\delta| &\leq \int_0^t d\tilde{t} \int_{V_\Gamma^\delta} d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} \varphi(\mathbf{r}^s, \mathbf{p}^s) Q(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}) \exp \left\{ - \int_{\tilde{t}}^t dt' \sigma' v^{s'} \right\}, \\
\int d\mathbf{r} \int d\mathbf{p} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) |f_1 - f_1^\delta| &\leq \\
&\leq \int_0^t d\tilde{t} \int_{V_\Gamma^\delta} d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} \varphi(\mathbf{r}^s, \mathbf{p}^s) \exp \left\{ - \int_{\tilde{t}}^t dt' \sigma' v^{s'} \right\} \int d\mathbf{p}' \sigma(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{p}') v' f_0(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{p}'), \\
&\quad \dots \dots \dots \\
\int d\mathbf{r} \int d\mathbf{p} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) |f_{n+1} - f_{n+1}^\delta| &\leq \\
&\leq \int_0^t d\tilde{t} \int_{V_\Gamma^\delta} d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} \varphi(\mathbf{r}^s, \mathbf{p}^s) \exp \left\{ - \int_{\tilde{t}}^t dt' \sigma' v^{s'} \right\} \int d\mathbf{p}' \sigma(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{p}') v' f_n(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{p}').
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Интегрирование по переменной $\tilde{\mathbf{r}}$ в (3.8) ведется по области V_Γ^δ . Сравним (3.8) с действием (3.7) на функцию из основного пространства. Действия решения (3.7) и его погрешности (3.8) будут сравнимы, если объемы носителя основной функции и его пересечения с множества V_Γ^δ окажутся сравнимыми величинами. Таким образом, погрешность, вносимая заменой коэффициентов уравнения (1.1) функциями (3.5), будет пропорциональна объему области пересечения V_Γ^δ с носителем функции $W(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \Delta)$.

Погрешность, вносимую сглаживанием функций $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ и $\mathbf{H}(t, \mathbf{r})$, достаточно рассмотреть для уравнений (1.1) и (1.5) без учета столкновений. В соответствии с формулой (2.1) для этого необходимо сравнить величины $\int_0^t d\tilde{t} \int d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} \varphi(\mathbf{r}^s, \mathbf{p}^s) Q(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})$ и $\int_0^t d\tilde{t} \int d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} \varphi(\mathbf{r}_\delta^s, \mathbf{p}_\delta^s) Q(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})$.

Для функций $\Delta \mathbf{r}^s \equiv \mathbf{r}_\delta^s - \mathbf{r}^s$, $\Delta \mathbf{v}^s \equiv \mathbf{v}_\delta^s - \mathbf{v}^s$, $\Delta \mathbf{p}^s \equiv \mathbf{p}_\delta^s - \mathbf{p}^s$ справедливы уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta \mathbf{r}_\delta^s}{dt} &= \Delta \mathbf{v}_\delta^s, \\
\frac{d\Delta \mathbf{p}_\delta^s}{dt} &= e \left(\mathbf{E}^\delta(t, \mathbf{r}_\delta^s) - \mathbf{E}(t, \mathbf{r}^s) + \frac{1}{c} \left(\left[\mathbf{v}_\delta^s, \mathbf{H}^\delta(t, \mathbf{r}_\delta^s) \right] - \left[\mathbf{v}^s, \mathbf{H}(t, \mathbf{r}^s) \right] \right) \right).
\end{aligned}$$

Рассмотрим погрешность

$$\Pi = \int_0^t d\tilde{t} \int d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} \left[\varphi(\mathbf{r}^s, \mathbf{p}^s) - \varphi(\mathbf{r}_\delta^s, \mathbf{p}_\delta^s) \right] Q(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}).$$

Пользуясь гладкостью функции $\varphi(\mathbf{r}_\delta^s, \mathbf{p}_\delta^s)$, разложим ее в ряд Тейлора с центром в точке $(\mathbf{r}^s, \mathbf{p}^s)$ по всем аргументам, сохраняя нулевой и первый члены разложения:

$$\Pi \approx \int_0^t d\tilde{t} \int d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} \left[\langle \text{grad}_{\mathbf{r}^s} \varphi(\mathbf{r}^s, \mathbf{p}^s); \Delta \mathbf{r}_\delta^s \rangle + \langle \text{grad}_{\mathbf{p}^s} \varphi(\mathbf{r}^s, \mathbf{p}^s); \Delta \mathbf{p}_\delta^s \rangle \right] Q(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}).$$

Рассмотрим следующую оценку:

$$\begin{aligned} & \langle \text{grad}_{\mathbf{r}^s} \varphi(\mathbf{r}^s, \mathbf{p}^s); \Delta \mathbf{r}_\delta^s \rangle + \langle \text{grad}_{\mathbf{p}^s} \varphi(\mathbf{r}^s, \mathbf{p}^s); \Delta \mathbf{p}_\delta^s \rangle \leq \\ & \leq |\text{grad}_{\mathbf{r}^s} \varphi(\mathbf{r}^s, \mathbf{p}^s)| |\Delta \mathbf{r}_\delta^s| + |\text{grad}_{\mathbf{p}^s} \varphi(\mathbf{r}^s, \mathbf{p}^s)| |\Delta \mathbf{p}_\delta^s| \approx \varphi(\mathbf{r}^s, \mathbf{p}^s) (|\Delta \mathbf{r}_\delta^s|/|\mathbf{r}^s| + |\Delta \mathbf{p}_\delta^s|/|\mathbf{p}^s|). \end{aligned}$$

Тогда

$$\Pi \approx \int_0^t d\tilde{t} \int d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} \varphi(\mathbf{r}^s, \mathbf{p}^s) (|\Delta \mathbf{r}_\delta^s|/|\mathbf{r}^s| + |\Delta \mathbf{p}_\delta^s|/|\mathbf{p}^s|) Q(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}). \quad (3.9)$$

Формула (3.9) показывает, что погрешность определяется отношением длин траекторий в фазовом пространстве и их возмущений, вносимых сглаживанием компонент электромагнитного поля. Положим при решении уравнений (3.9), что $\mathbf{E}^\delta(t, \mathbf{r}) = 0$, $\mathbf{H}^\delta(t, \mathbf{r}) = 0$ в области V_Γ^δ . Получим, что погрешность пропорциональна сумме двух величин. Первая величина, $|\Delta \mathbf{r}_\delta^s|/|\mathbf{r}^s|$, есть отношение длины пересечения траектории частицы в пространстве $\mathbb{R}_r^3$ с областью V_Γ^δ к длине самой траектории. Вторая величина, $|\Delta \mathbf{p}_\delta^s|/|\mathbf{p}^s|$, есть отношение изменения импульса, накапливаемого частицей при прохождении области V_Γ^δ , к характерной величине импульса.

4. ХАРАКТЕРНЫЕ РАЗМЕРЫ ЗАДАЧИ

Полученные оценки имеют простой физический смысл. Для его выявления рассмотрим связь $\Delta \mathbf{r}_\delta^s$ и $\Delta \mathbf{p}_\delta^s$ с характерными частотами задачи (1.1), (1.2).

Обобщенное решение уравнения (1.1) сводит задачу к моделированию движения частиц с координатами $\mathbf{r} = \mathbf{r}^s(t, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}^s(t, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})$ и вероятностью $\exp\left\{-\int_t^t dt' \sigma' v^s\right\}$ испытать столкновение к моменту времени t .

Пусть в момент времени t частица оказалась на границе области V_m^δ , а в момент времени $t + t_\delta$ ее покинула. Импульс частицы изменялся при этом за счет взаимодействия с электромагнитным полем. Времена характерного изменения самосогласованного электромагнитного поля и импульсов генерирующих его заряженных частиц совпадают. Рассмотрим характерные частоты самосогласованного электромагнитного поля, описываемого уравнениями (1.1), (1.2). Для этого построим момент уравнения (1.1), соответствующий плотности тока — действие на функцию $\mathbf{v} W(\mathbf{r}, \mathbf{a}, \Delta)$. Для интеграла столкновений используем приближение времени релаксации к равновесному распределению. Пренебрегая градиентом давления в левой части уравнения, получаем

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \frac{e^2 \mathbf{E} n}{\gamma^3 m} + \frac{e}{mc\gamma} [\mathbf{j}, \mathbf{H}] + \frac{\mathbf{j}}{\tau_g} = e \int d\mathbf{p} \mathbf{v} W(\mathbf{r}, \mathbf{a}, \Delta) Q(t, \mathbf{a}, \mathbf{p}), \quad (4.1)$$

где τ_g — время релаксации, $\gamma = \sqrt{1 + (p_c/mc)^2}$, p_c — характерный импульс частиц, например, средний по распределению $Q(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$, m — масса электрона.

Первые два слагаемых (4.1) в совокупности с локально плоским уравнением Максвелла $\partial \mathbf{E}/\partial t + 4\pi \mathbf{j} = 0$ определяют частоту плазменных колебаний $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n / (m\gamma^3)$. Первое и третье слагаемые (4.1) определяют ларморовскую частоту $\omega_L = eH/(mc\gamma)$.

Первое и четвертое слагаемые (4.1) определяют характерное время релаксации импульса за счет столкновений τ_g . Одновременно второе и четвертое слагаемые определяют характерное время затухания электрического поля за счет компенсации стороннего тока быстрых частиц дрейфом термализованных электронов $\tau_\sigma = \gamma^3 m / \tau_g e^2 n$. Величина $1/\tau_\sigma$ есть электронная электро-

проводность ионизированной среды. Здесь следует отметить, что величина τ_g может существенно превосходить время жизни до первого столкновения $(\sigma'v)^{-1}$. Все дифференциальные сечения рассеяния электронов устроены так, что наиболее вероятными являются малые изменения импульса при столкновениях [7]–[9]. Поэтому время релаксации импульса можно оценить снизу величиной транспортного времени релаксации

$$\tau_g^{-1} \approx 2\pi v(p_c) \int_{-1}^1 \sigma_{el}(p_c, \cos \vartheta) (1 - \cos \vartheta) d \cos \vartheta,$$

где σ_{el} — дифференциальное сечение упругого рассеяния электронов на угол ϑ .

Плазменная и ларморовская частоты, электропроводность и транспортное время релаксации импульса являются классическими фундаментальными параметрами ионизированной среды [18, 19]. Представленный анализ лишь показывает их связь с задачей (1.1), (1.2). Из анализа непосредственно следуют условия малости импульса, приобретаемого электроном в области V_m^δ :

$$\omega_p \tau_\delta \ll 1, \quad \omega_L \tau_\delta \ll 1, \quad \tau_\delta \ll \tau_g, \quad \tau_\delta \ll \tau_\sigma. \quad (4.2)$$

Первые три из неравенств (4.2) влекут очевидные условия малости возмущения, вносимого сглаживанием коэффициентов уравнения (1.1):

$$\delta \ll r_D, \quad \delta \ll r_L, \quad \delta \ll \lambda_{tr}, \quad (4.3)$$

где $r_D = v(p_c)/\omega_p$ — радиус Дебая, $r_L = v(p_c)/\omega_L$ — радиус Лармора, $\lambda_{tr} = \left(v(p_c) \int_{-1}^1 \sigma(\mathbf{p}', \mathbf{p}) (1 - \cos \vartheta) d\mathbf{p}' \right)^{-1}$ — транспортная длина пробега.

Последнее из соотношений (4.2) имеет нетривиальное следствие. В соответствии с уравнениями Максвелла (1.2) время затухания электрического поля за счет тока проводимости определяется величиной $4\pi/\tau_\sigma = 4\pi e^2 n \tau_g / m \gamma^3 = \omega_p^2 \tau_g$. Тогда рассматриваемое соотношение принимает вид $\omega_p \tau_g \omega_p \tau_\delta \ll 1$.

С учетом первого из соотношений (4.2) данное условие не допускает, чтобы величина $\omega_p \tau_\delta$ существенно превысила единицу. Формально это означает, что столкновениями можно пренебречь по сравнению с плазменными колебаниями, т.е. справедливо приближение бесстолкновительной плазмы. Но сравнение тока быстрых электронов с дрейфовым током термализованных электронов предполагает приближение проводимости. Это сугубо столкновительный эффект. В этом приближении термализованные электроны под действием электрического поля приходят в движение мгновенно. Следует отметить, что в ряде задач вторичные электроны низкой энергии, образующиеся при ударной ионизации среды, удобно рассматривать как электроны проводимости [20]. Для данного приближения рассмотрим характерный пространственный параметр — глубину скин-слоя [21] $d_\sigma = c\sqrt{2/\omega_p^3 \tau_g}$, где предполагается, что электрическое поле имеет характерную частоту, совпадающую с плазменной. Если $\omega_p \tau_g$ стремится к бесконечности, то глубина скин-слоя стремится к нулю. При этом очевидно, что электромагнитное поле в приближении проводимости не должно искажаться существенно областью V_m^δ . Это означает, что должно выполняться условие $d_\sigma \gg \delta$, что действительно невозможно, если $\omega_p \tau_\delta \gg 1$.

5. ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА

Численное решение уравнений (1.1)–(1.4) осуществляется с помощью алгоритмов, подробно представленных в работах [13], [15], [20], [22–26]. Например, в работе [22] изложен алгоритм численного решения уравнений движения частиц и интерполяции создаваемого ими тока в узлы разностной сетки. На данной сетке аппроксимируются уравнения Максвелла, разностная схема решения которых представлена в работе [23]. Рассмотрим некоторые элементы алгоритмов, позволившие избежать проблем с разрывами свойств рассеивающей среды.

Первым элементом алгоритма является разностная сетка [23]. Пусть Ω — прямоугольная под-область пространства $\mathbb{R}_r^3$, в которой рассматривается численное решение начально-краевой за-

дачи для уравнений (1.1)–(1.4). Введем в Ω прямоугольную декартову разностную сетку для разностного решения уравнений Максвелла. По переменной x сетка имеет вид

$$x_{i+1} = x_i + \Delta_i; \quad i = 0, \dots, N_x - 1, \quad x_0 = x_{\min}, \quad x_{N_x} = x_{\max}, \\ x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2; \quad i = 0, \dots, N_x - 1, \quad x_{-1/2} = x_0, \quad x_{N_x+1/2} = x_{N_x}.$$

По переменным (y, z) сетка вводится аналогично. Узлы сетки разместим так, чтобы разрывы сечений в интеграле столкновений кинетического уравнения (1.1) и электрофизических параметров в уравнениях Максвелла (1.4) оказались на поверхностях $x = x_i$, $y = y_j$ и $z = z_k$. Таким образом, расчетная область делится на декартовы прямоугольные ячейки. Значения коэффициентов уравнений Максвелла задаются в точках сетки с дробными индексами. Эти точки совпадают с центрами ячеек. Компонента напряженности электрического поля, нормальная к поверхности разрыва диэлектрической проницаемости, может претерпевать разрыв при переходе через эту поверхность. Касательная к этой поверхности компонента напряженности электрического поля при этом непрерывна. Поэтому сеточные компоненты электрического поля определяются в середине соответствующих ребер указанных выше прямоугольных ячеек.

Будем рассматривать ячейки разностной сетки как множества D_m , $m = 1, \dots, M$, определенные в предыдущем разделе. Введем величину

$$\delta \ll \min \{ |x_{i+1} - x_i| |y_{j+1} - y_j| |z_{k+1} - z_k| \}.$$

В однородном материале вероятность испытать столкновение за время τ определяется по формуле $p = \exp\{-\tau\sigma'v\}$. Вероятность $\xi = 1 - p$ не испытать столкновение за время τ является случайной величиной, равномерно распределенными на отрезке $[0, 1]$. Тогда время жизни τ до первого столкновения определяется по формуле $\tau = -\log(\xi)/\sigma'v$.

Рассмотрим координату $\mathbf{r} = \mathbf{r}^s(t_n, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})$ и импульс $\mathbf{p} = \mathbf{p}^s(t_n, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})$ частицы в момент времени $t = t_n$. Будем считать, что частица в этот момент времени находится в ячейке с номером (i, j, k) , соответствующей множеству D_m . Рассмотрим луч с началом в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}^s(t_n, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})$ в направлении вектора $\mathbf{p} = \mathbf{p}^s(t_n, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})$. Рассмотрим отрезки, соединяющие точку $\mathbf{r} = \mathbf{r}^s(t_n, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})$ с ближайшей (№ 1) и наиболее (№ 2) удаленной из точек области V_m^δ на луче. Обозначим через Δ_δ – время, потребное частице, чтобы преодолеть отрезок между точками $\mathbf{r} = \mathbf{r}^s(t_n, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})$ и № 1. Рассмотрим $T = \min\{\Delta, \Delta_\delta, \tau\}$. Вычислим $\mathbf{r} = \mathbf{r}^s(t_n + T, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})$ и $\mathbf{p} = \mathbf{p}^s(t_n + T, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})$. Для этого используется центрированная по времени разностная схема, рассмотренная в [22]. В конце вычисления пересчитывается время жизни частицы на данном временном шаге: $\Delta = \Delta - T$.

Если оказалось, что $T = \tau$, то рассматривается столкновение. Если частица поглощается, то из рассмотрения она выбывает. Если частица рассеивается, то ее новый импульс определяется статистически. Если в столкновении рождается новая частица, то она включается в рассмотрение с параметрами, также определенными статистически [13], [22].

Если оказалось, что $T = \Delta_\delta$, то частица поглощается в точке № 1 и генерируется в точке № 2 с тем же импульсом.

Таким образом, разностная схема для уравнений Максвелла разрывную компоненту электрического поля в точке разрыва диэлектрической проницаемости не рассматривает. Поле усредняется по соседним ячейкам. Движение частиц в окрестности границ просто игнорируется.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод частиц разработан как алгоритм решения уравнения Власова для бесстолкновительной плазмы в самосогласованном электромагнитном поле. Развитие и применение показали, что в сочетании с методом последовательных поколений, он эффективен для моделирования динамически ионизируемых сред со столкновениями.

Основой метода частиц является наличие обобщенного решения у кинетического уравнения Власова. Применение метода частиц для решения практических задач (см., например, [24]–[26]) на основе кинетических уравнений показало, что он работает правильно даже до построения обобщенного решения. Например, это оказалось верным для рассеивающих сред с разрывными свойствами.

Предложены две интерпретации обобщенного решения кинетического уравнения в столкновительной среде с разрывными свойствами. Первая вводит меру Дирака и исключает поверхность разрывов из рассмотрения. Вторая интерпретация предполагает сглаживание коэффициентов уравнений. Опыт применения алгоритма метода частиц для сред с разрывом показал следующее. Сила Лоренца — коэффициент слагаемого в кинетическом уравнении, которое соответствует балансу в импульсном пространстве — определяется решением уравнений Максвелла. Коэффициенты уравнений Максвелла усредняются по разрывам при построении полностью консервативной разностной схемы [24]. В результате сглаживаются функции, определяющие значения напряженностей компонентов электромагнитного поля. В то же время при рассмотрении движения электронов считается, что они мгновенно перемещаются из одной среды в другую [23]. Это означает, что точки разрыва не учитываются. Таким образом, можно сказать, что в численном алгоритме, который показал свою эффективность в практических задачах, используются обе интерпретации обобщенного решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fortov V.E. Extreme States of Matter. High Energy Density Physics. Springer Series in Material Science, 2016.
2. Карлсон Б., Белл Дж. Решение транспортного уравнения Sn-методом // Физика ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1959. С. 408–432.
3. Karlson B.G., Latrop K.D. Transport Theory: The Method of Discrete Ordinates. In Greenspan H., Kelber C.N., Okrent D. (eds) Computing Methods in Reactor Physics. New-York: Gordon and Breech, P. 167–265.
4. Braun W., Hepp K. The Vlasov Dynamics and Its Fluctuations in the $1/N$ Limit of Interacting Classical Particles // Commun. Math. Phys. 1977. V. 56. № 2. P. 101–113.
5. Hockney R.W., Eastwood J.W. Computer Simulation Using Particles. New York: McGraw-Hill, 1981.
6. Heitler W. The Quantum Theory of Radiation. Oxford: Clarendon Press, 1954.
7. Massey H.S.W., Burhop E.H.S. Electronic and Ionic Impact Phenomena. Oxford: Clarendon Press, 1969.
8. Mott N.F., Massey H.S.W. The theory of atomic collisions. Oxford: Clarendon Press, 1965.
9. Mac Daniel E.W. Collision Phenomena in Ionized Gasses. John Wiley & Sons, 1964.
10. Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields, 4th Edition, Butterworth–Heinemann. 1975. V. 2.
11. Courant E.D., Livingston M.S., Snyder H.S. The Strong-Focusing Synchrotron — A New High-Energy Accelerator // Phys. Rev. 1952. V. 88. P. 1190–1196.
12. Demidov V.A., Efremov V.P., Ivkin M.V., Meshcheryakov A.N., Petrov V.A. Effect of intense energy fluxes on vacuum-tight rubber // Techn. Phys. 2003. V. 48. № 6. P. 787–792.
13. Berezin A.V., Vorontsov A.S., Zhukovskiy M.E., Markov M.B., Parot'kin S.V. Particle method for electrons in a scattering medium // Comput. Math. Math. Phys. 2015. V. 55. № 9. P. 1534–1546.
14. Shilov G.E. Generalized Functions and Partial Differential Equations. New-York: Gordon and Breech Science Publishers Inc., 1968.
15. Березин А.В., Марков М.Б., Парот'кин С.В., Сысенко А.В. О методе частиц в неоднородной рассеивающей среде // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 116. С. 16.
16. Edwards R.E. Functional Analysis, Theory and Applications, New York: HOLT, Rinehart and Winston, 1965.
17. Whittaker E.T., Watson G.N. A Course of Modern Analysis. Cambridge University Press, 1996.
18. Longmire C.L. Elementary Plasma Physics. Interscience Publishers, 1963.
19. Alfven H., Falthammar C. Cosmical Electrodynamics. Fundamental Principles. Oxford at the Clarendon Press, 1963.
20. Марков М.Б., Парот'кин С.В., Сысенко А.В. Метод частиц для модели электромагнитного поля потока электронов в газе // Матем. моделирование. 2008. Т. 20. № 5. С. 35–54.
21. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
22. Березин А.В., Марков М.Б., Парот'кин С.В., Сысенко А.В. Алгоритм метода частиц в рассеивающей среде // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018. № 115. С. 12.
23. Berezin A.V., Kriukov A.A., Pliushchenkov B.D. The method of electromagnetic field with the given wavefront calculation // Math. Mod. 2008. V. 23. № 3. С. 109–126.
24. Berezin A.V., Volkov Yu.A., Markov M.B., Tarakanov I.A. The radiation-induced conductivity of silicon // Mathematica Montisnigri. 2015. V. 33. P. 69–87.
25. Berezin A.V., Vorontsov A.V., Zakharov S.V., Markov M.B., Parot'kin S.V. Modeling of prebreakdown stage of gaseous discharge // Math. Models Comput. Simul. 2013. V. 5. P. 492–500.
26. Березин А.В., Жуков Д.А., Жуковский М.Е., Конюков В.В., Крайнюков В.И., Марков М.Б., Помазан Ю.В., Потапенко А.И. Моделирование электромагнитных эффектов в сложных конструкциях при воздействии импульсных излучений // Матем. моделирование и числ. методы. 2015. V. 6. P. 58–72.

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА**

УДК 517.95

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАГНИТНОГО ТОРНАДО¹⁾© 2021 г. М. Б. Гавриков^{1,*}, А. А. Таюрский^{1,**}¹ 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия

*e-mail: mbgavrikov@yandex.ru

**e-mail: tayurskiy2001@mail.ru

Поступила в редакцию 04.09.2020 г.
Переработанный вариант 27.02.2021 г.
Принята к публикации 09.04.2021 г.

Предложена математическая модель магнитного торнадо в магнитогидродинамической плазме, опирающаяся на аппарат механики сплошных сред и электродинамики Максвелла. На двух конкретных примерах исследуется взаимное влияние динамики плазмы и магнитного поля, приводящее к появлению магнитного торнадо. Особый интерес представляет взаимодействие плазмы и магнитного поля при движении идеальной плазмы вдоль силовых линий магнитного поля. В этом случае изучение магнитного торнадо сводится к чисто гидродинамическому случаю торнадо в атмосферном воздухе. Полученные численные результаты дают теоретическое подтверждение существования наблюдаемых в хромосфере солнечной плазмы вихревых образований, отождествляемых с магнитным супер-торнадо. Библ. 27. Фиг. 3.

Ключевые слова: магнитное торнадо, магнитное антиторнадо, циклон, антициклон, метод установления.

DOI: 10.31857/S004446692109009X**1. ВВЕДЕНИЕ**

Под магнитным торнадо в широком смысле понимаются вихревые высокоскоростные потоки проводящего электрический ток газа в электромагнитном поле. Такие потоки неоднократно наблюдались в солнечной плазме [1]–[4]. Есть основания считать [5], что магнитные торнадо, зарождающиеся в хромосфере Солнца, образуют канал для транспортировки энергии из нижних слоев Солнца в солнечную корону и являющиеся причиной ее аномального разогрева, возникновения солнечных пятен и генерации солнечного ветра.

При построении математической теории магнитного торнадо естественно использовать опыт математического моделирования торнадо в атмосферном воздухе Земли. К настоящему времени считается, что торнадо порождается вихревым движением в материнском (смерчевом) облаке. Судя по наблюдениям [6], [7], вихрь, порождающий торнадо, имеет сложную трехмерную структуру, состоящую из одновременной циркуляции воздуха в полоидальном и азимутальном направлениях и образующую изогнутый тор (вихревое кольцо). Причины возникновения вихревого кольца, равно как и механизм генерации им торнадо, плохо изучены. Прямое математическое моделирование торнадо, основанное на численном решении уравнений газовой динамики применительно к воздушной атмосфере Земли с учетом трехмерности движения, турбулентности воздушных течений, зависимости динамической вязкости воздуха от водяной и песчаной пыли и т.д. [8]–[11], наталкивается на ряд серьезных проблем, главной из которых следует считать выбор начальных и граничных условий. Экстраполяция последних по данным наблюдений неизбежно приводит к большим погрешностям, обесценивающим результаты вычислений параметров торнадо. В этой связи в [12], [13] была предложена простая математическая модель, позволяющая исследовать причинно-следственную связь между наличием вихревого движения в материнском облаке и возникновением закрученного восходящего потока воздуха. Эта модель абстрагируется от ряда важных особенностей торнадо, снимает остроту проблемы выбора граничных условий и позволяет дать теоретическое решение задачи предсказания и предотвращения

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики, соглашение с Минобрнауки РФ № 075-15-2019-1623.

ния торнадо — где и когда могут возникнуть торнадо и какова их мощность, какие меры необходимо предпринять для предотвращения возможного или нейтрализации уже случившегося торнадо? Для практического ответа на эти вопросы на базе простой модели [12], [13] необходим дополнительный анализ данных мониторинга вихревых образований в верхних слоях атмосферы и распределения давления в атмосферном воздухе.

Прямое математическое моделирование магнитного торнадо на Солнце на базе численного решения уравнений классической МГД [14] сопряжено с дополнительной проблемой выбора счетной области. Поскольку Солнце — это огромный плазменный шар, в котором отсутствуют твердая поверхность Солнца и атмосфера, то при исследовании магнитного торнадо исчезают естественные границы типа поверхности Земли и верхних слоев атмосферы, которые имели место при изучении торнадо в атмосферном воздухе Земли и на которых ставились граничные условия. Неопределенность в задании границ счетной области существенно усугубляет проблему выбора начальных и граничных условий при прямом математическом моделировании магнитного торнадо. В этой связи в настоящей статье обобщаются идеи работ [12], [13] для исследования магнитных торнадо на Солнце. При этом делается ряд предположений. Во-первых, считается, что среда, где возникает магнитное торнадо, является плазмой, динамика которой подчиняется уравнениям классической МГД теории Х. Альфвена. Во-вторых, магнитным торнадо будем называть стационарное течение солнечной плазмы, гидродинамические и электродинамические параметры которого обладают осевой симметрией относительно некоторой вертикальной прямой, а вертикальная скорость имеет конечный и положительный предел при $z \rightarrow +\infty$. Здесь z — координата на вертикальной прямой, которая однозначно определяется лучом, исходящим из центра Солнца, причем координата z отсчитывается от солнечного центра. В этом определении специально не предполагается вращение плазмы вокруг вертикальной прямой, чтобы единой теорией охватить магнитные торнадо различной природы. Например, если солнечная плазма в силу различных причин аксиально симметричным образом сжимается к некоторой вертикальной оси с координатой z , то в возникающем z -пинче, как известно [15], имеет место эффект аномального ускорения частиц плазмы вдоль вертикальной прямой, что приводит к появлению магнитного торнадо в указанном выше смысле.

В настоящей работе анализируется другой возможный механизм возникновения магнитного торнадо, обусловленный наличием плазменного вихря в фотосфере или хромосфере в плоскости, ортогональной некоторой вертикальной прямой, центр которого лежит на этой прямой, и перепада плазменного давления периферия-центр (к образованию плазменного вихря могут привести различные причины, например, электрический дрейф плазмы в скрещенных электромагнитных полях). Согласно [12], [13], перечисленные причины приводят к появлению гидродинамического торнадо, однако возникает вопрос, насколько совместимо существование этого торнадо с магнитным полем, взаимодействующим с плазменным веществом?

Цель работы — дать теоретическое подтверждение существования наблюдаемых магнитных торнадо и указать пути математического исследования этого явления. Первая задача решается изучением специальных классов точных решений уравнений классической МГД, среди которых содержатся течения типа магнитных торнадо. Вторая сводится к построению специального математического аппарата — уравнений магнитного торнадо, численное и аналитическое решение которых позволяет практически искать магнитные торнадо.

2. УРАВНЕНИЯ МАГНИТНОГО ТОРНАДО

Рассмотрим динамику плазменной среды, подчиненной уравнениям классической МГД для несжимаемой вязкой плазмы с конечной проводимостью в постоянном гравитационном поле [16]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{U} &= 0, \quad \rho = \text{const}, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{Div} \left(\rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} + \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) \mathbf{I}_3 - \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}}{4\pi} \right) &= 2\mu \operatorname{Div} \operatorname{def} \mathbf{U} + \rho \mathbf{g}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ \mathbf{E} &= \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\mathbf{U}, \mathbf{H}], \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mu = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$ — гидродинамическая вязкость и проводимость плазмы, $\mathbf{g}$ — постоянное ускорение силы тяжести, I_3 — единичный трехмерный тензор, $\text{def } \mathbf{U}$ — тензор скоростей деформаций векторного поля $\mathbf{U}$.

В осесимметричном случае, $\partial/\partial\varphi = 0$, система (1) в цилиндрических координатах примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial r U_r}{\partial r} + \frac{\partial U_z}{\partial z}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial r H_r}{\partial r} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \\ & \rho \frac{\partial U_r}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial U_r^2}{\partial r} + \frac{\partial U_r U_z}{\partial z} + \frac{U_r^2 - U_\varphi^2}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(p + \frac{H_r^2 + H_\varphi^2 + H_z^2}{8\pi} \right) - \\ & - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial H_r^2}{\partial r} + \frac{\partial H_r H_z}{\partial z} + \frac{H_r^2 - H_\varphi^2}{r} \right) = \mu \left(\Delta U_r - \frac{U_r}{r^2} \right), \\ & \rho \frac{\partial U_\varphi}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial U_\varphi U_r}{\partial r} + \frac{\partial U_\varphi U_z}{\partial z} + \frac{2U_\varphi U_r}{r} \right) - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial H_\varphi H_r}{\partial r} + \frac{\partial H_\varphi H_z}{\partial z} + \frac{2H_\varphi H_r}{r} \right) = \mu \left(\Delta U_\varphi - \frac{U_\varphi}{r^2} \right), \\ & \rho \frac{\partial U_z}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial U_r U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_z^2}{\partial z} + \frac{U_r U_z}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(p + \frac{H_r^2 + H_\varphi^2 + H_z^2}{8\pi} \right) - \\ & - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial H_r H_z}{\partial r} + \frac{\partial H_z^2}{\partial z} + \frac{H_r H_z}{r} \right) = \mu \Delta U_z - rg, \\ & \frac{1}{c} \frac{\partial H_r}{\partial t} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = 0, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = 0, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r E_\varphi}{\partial r} = 0, \\ & E_r = -\frac{c}{4\pi\sigma} \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} - \frac{1}{c} (U_\varphi H_z - U_z H_\varphi), \quad E_r = \frac{c}{4\pi\sigma} \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) - \frac{1}{c} (U_z H_r - U_r H_z), \\ & E_r = \frac{c}{4\pi\sigma r} \frac{\partial r H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{c} (U_r H_\varphi - U_\varphi H_r), \quad \Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \end{aligned}$$

где в цилиндрических координатах $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$.

Последняя система допускает частные решения вида

$$\begin{aligned} U_r &= rA(t, z), \quad U_\varphi = rB(t, z), \quad U_z = C(t, z), \\ p &= r^2 Q(t, z) + \Phi(t, z), \\ H_r &= rP(t, z), \quad H_\varphi = rS(t, z), \quad H_z = G(t, z), \end{aligned} \quad (2)$$

где функции $A, B, C, P, S, G, Q, \Phi$ подлежат нахождению. В этом несложно убедиться, подставляя выражения (2) в систему (1), записанную в цилиндрических координатах. Тогда получим следующий результат.

Теорема 1. В случае осевой симметрии функции (2) являются решением системы (1) тогда и только тогда, когда комплексные функции $u = A + iB$, $w = P + iS$ и вещественные функции C и G удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{G}{4\pi\rho} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u^2 - \frac{w^2}{4\pi\rho} + \frac{2\gamma_0(t)}{\rho} = 0, \\ & \frac{\partial S}{\partial t} + C \frac{\partial S}{\partial z} - G \frac{\partial B}{\partial z} - v_m \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = 0, \\ & \frac{\partial G}{\partial t} + C \frac{\partial G}{\partial z} - G \frac{\partial C}{\partial z} - v_m \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = 0, \\ & \frac{\partial C}{\partial z} = -2 \text{Re } u, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = -2 \text{Re } w, \quad -\infty < z < +\infty, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\gamma_0(t)$ — произвольная вещественная функция, $v_m = c^2/(4\pi\sigma)$ — магнитная вязкость, Re — символ вещественной части комплексного числа. По решению системы (3) функция Q ищется из равенства

$$Q = \gamma_0(t) - \frac{|w|^2}{8\pi} = \gamma_0(t) - \frac{P^2 + S^2}{8\pi}, \quad (4)$$

а функция Φ однозначно, с точностью до произвольной константы, из уравнения

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{C^2}{2} + \frac{2\mu}{\rho} \text{Re } u + \frac{\Phi}{\rho} + gz \right) = 0.$$

Функции (2) в достаточно малой окрестности оси симметрии сколь угодно точно аппроксимируют любое осесимметричное течение плазмы, не имеющее особенностей на оси. Действительно, раскладывая параметры течения в степенные ряды по радиусу r и ограничиваясь при достаточно малом r первыми, главными членами разложений, приходим к формулам (2). При этом надо учесть, что радиальные и азимутальные компоненты векторных величин являются нечетными функциями радиуса, а осевые компоненты и термодинамические параметры — четными.

Теорема 2. 1) Любое решение системы (3) удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{G}{4\pi\rho} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u^2 - \frac{w^2}{4\pi\rho} + \frac{2\gamma_0(t)}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + C \frac{\partial w}{\partial z} - G \frac{\partial u}{\partial z} - v_m \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial C}{\partial z} &= -2 \text{Re } u, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = -2 \text{Re } w. \end{aligned} \quad (5)$$

2) Любое решение системы (5), для которого при некотором z_0 тождественно по t выполнено равенство

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial t} + v_m \frac{\partial P}{\partial z} - CP + AG \right) \Big|_{z=z_0} = 0, \quad (6)$$

удовлетворяет системе (3).

3) Если для решения системы (5) условие (6) выполнено в некоторой точке z_0 , то круглая скобка в левой части равенства (6) тождественно равна нулю для всех t и z .

Система (5) называется уравнениями магнитного торнадо. Согласно теореме 2, физический смысл имеют только решения (5), удовлетворяющие условию (6) в некоторой точке z_0 , в качестве которой надо взять граничную точку области по z , где решаются системы (3), (5), $z_0 \leq z < +\infty$. Поэтому ниже условие (6) называется граничным и для простоты считается $z_0 = 0$. Достаточным условием справедливости (6) являются, очевидно, соотношения

$$\left(v_m \frac{\partial P}{\partial z} - CP + AG \right) \Big|_{z=z_0} = 0, \quad G(t, z_0) = \text{const}.$$

В частном случае $w = 0$, $G = 0$ (отсутствует магнитное поле) граничное условие (6) выполнено, а система (5) дает

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u^2 + \frac{2\gamma_0}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = -2 \text{Re } u. \quad (7)$$

Система (7) называется уравнениями торнадо и позволяет исследовать явление торнадо в атмосферном воздухе [12], [13]. Ниже существенно используются результаты этого исследования. В безразмерном виде система (5) и граничное условие (6) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial u}{\partial z} - M_A^2 G \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u^2 - M_A^2 w^2 + \Gamma &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + C \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{R_m} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - G \frac{\partial u}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial C}{\partial z} &= -2 \text{Re } u, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = -2 \text{Re } w, \\ 0 \leq z < +\infty, \quad t &\geq 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{R_m} \frac{\partial P}{\partial z} - CP + AG \right) \Big|_{z=z_0} = 0, \quad (9)$$

где $R = \rho L_0 U_0 / \mu$, $R_m = L_0 U_0 / v_m$ — числа Рейнольдса (гидродинамическое и магнитное), $M_A = v_A / U_0$ — альфвеновское число Маха, $v_A = H_0 / \sqrt{4\pi\rho}$ — альфвеновская скорость, $\Gamma = \Gamma(t) = 2\gamma_0(t)t_0^2 / \rho$, $t_0 = L_0 / U_0$, L_0 , H_0 , U_0 , — характерные значения длины, напряженности магнитного поля и скорости.

Система (8) в матричной форме имеет тот же вид, что и уравнение торнадо (7). Введем комплексный и вещественный векторы $\mathbf{u} = (u, w)^T$, $\mathbf{c} = (C, G)^T$ и для вектора $\mathbf{x} = (x, y)^T$ рассмотрим 2×2 -матрицу $A(\mathbf{x})$:

$$A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x & -M_A^2 y \\ -y & x \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R_m^{-1} \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (8) равносильна нелинейной системе уравнений относительно векторных функций — комплекснозначной $\mathbf{u}(t, z)$ и вещественнозначной $\mathbf{c}(t, z)$:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A(\mathbf{c}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - D \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + A(\mathbf{u})\mathbf{u} + \Gamma = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial z} = -2 \operatorname{Re} \mathbf{u},$$

$$0 \leq z < +\infty, \quad t \geq 0.$$

Рассмотрим специальные решения системы (8).

Определение. 1) *Магнитным торнадо (антиторнадо)* называется стационарное решение системы (8), (9), для которого существует конечный предел и верно неравенство $\lim_{z \rightarrow +\infty} C(z) > 0$ ($\lim_{z \rightarrow +\infty} C(z) < 0$).

2) *Магнитным циклоном (антициклоном)* называется стационарное решение системы (8), (9), для которого справедливо асимптотическое равенство (эквивалентность в смысле матанализа) $C(z) \sim \alpha z^n$, $z \rightarrow +\infty$, для некоторых $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) и $n \geq 0$, зависящих от стационарного решения; если при этом $\Gamma > 0$ ($\Gamma < 0$), то стационарное решение называется магнитным циклоном (антициклоном) гидродинамического типа. Числа α , n называются *показателями* циклона или антициклона.

Показатели α и n характеризуют силу циклона или антициклона — чем больше $|\alpha|$ и n , тем выше энергия этих течений. Ниже чаще всего $n = 0$ или $n = 1$. Магнитным циклоном (антициклоном) с показателем $n = 0$ является любое магнитное торнадо (антиторнадо). Другой пример дают точные стационарные решения системы (8), (9) вида $u_0(z) \equiv A_0 + iB_0$, $w_0(z) \equiv P_0 + iS_0$, $C_0(z) = -2A_0z$, $G_0(z) = -2P_0z$, где постоянные комплексные числа $A_0 + iB_0$, $P_0 + iS_0$ подчинены условию $(A_0 + iB_0)^2 + \Gamma = M_A^2(P_0 + iS_0)^2$. Тогда при $A_0 > 0$ имеем антициклон, а при $A_0 < 0$ — циклон — оба с показателем $n = 1$.

Система уравнений магнитного торнадо (8) должна быть дополнена начальными и граничными условиями. При рассмотрении стационарных течений начальные условия теряют актуальность, а граничные условия для u и w ставятся в точках $z = 0$ и $z = \infty$, а для C и G — в точке $z = 0$. Как уже отмечалось, по данным наблюдений за солнечной плазмой трудно сделать осмысленный выбор граничных условий. Разумеется, надо использовать граничное условие (9), но его недостаточно. Дополнительные соображения можно извлечь из экспериментального исследования закрученных потоков в ртутной плазме [17], порождаемых вращающимся диском, обобщающего работу Т. Кармана [18] на случай плазменных течений [19], [20].

Ниже рассматриваются два класса решений уравнений магнитного торнадо (8), (9), анализ которых приводит к важным выводам, в частности, показывает, что течения типа магнитных торнадо, антиторнадо, циклона, антициклона теоретически существуют и приводят к появлению высокоскоростных потоков плазмы с огромными напряженностями магнитного поля. При этом граничные условия выбирались так, чтобы гарантировать при численном решении существование и единственность решения рассматриваемых краевых задач на полупрямой.

3. ДВА КЛАССА ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОГО ТОРНАДО

Рассмотрим решения системы (8) с $G = 0$ и чисто мнимой функцией w . Тогда $w = iS$, граничное условие (9) выполнено и система (8) упрощается:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u^2 - M_A^2 S^2 + \Gamma &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + C \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{1}{R_m} \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} &= 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = -2 \operatorname{Re} u, \\ 0 \leq z < +\infty, \quad t &\geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Система (10) описывает взаимодействие чисто азимутального ($H_r = H_z = 0$) магнитного поля, для которого $H_\phi = rS(t, z)$, с осесимметричными течениями плазмы вида (2). Ограничимся еще более частным случаем $S = \text{const}$, тогда второе уравнение в (10) выполнено тождественно и система (10) сводится к следующей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u^2 + M_A^2 S^2 + \Gamma &= 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = -2 \operatorname{Re} u, \\ 0 \leq z < +\infty, \quad t &\geq 0, \end{aligned} \quad (11)$$

которая отличается от уравнений торнадо (7) заменой $\Gamma \rightarrow M_A^2 S^2 + \Gamma$. Случай $S = \text{const}$ соответствует осесимметричному чисто азимутальному магнитному полю без особенностей на оси, создаваемому однородным осевым током, $j_r = j_\phi = 0$, $j_z = \text{const}$, причем j_z связано с S соотношением $j_z = 2S$. Система (11) позволяет исследовать влияние указанного магнитного поля на осесимметричные течения плазмы вида (2), при этом движущаяся плазма на магнитное поле не воздействует. Ниже рассмотрены стационарные решения (11) для определенных граничных условий.

Второй класс стационарных решений системы (8), (9) образован течениями плазмы вида (2) вдоль силовых линий магнитного поля. Известно [21], что интегрирование уравнений классической МГД может быть сведено к интегрированию уравнений обычной гидродинамики в случае стационарных течений плазмы, когда магнитное поле и гидродинамическая скорость параллельны друг другу. Рассмотрим стационарные решения системы (8) с $R_m = \infty$ (идеально проводящая плазма), для которых $w = ku$, $G = kC$, где k — произвольная заданная вещественная константа. Для таких решений граничное условие (9) выполнено, а система (8) сводится к следующей:

$$(1 - k^2 M_A^2) C \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (1 - k^2 M_A^2) u^2 + \Gamma = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = -2 \operatorname{Re} u. \quad (12)$$

Комбинация $k^2 M_A^2$ ниже называется *параметром замагниченности* и характеризует роль магнитного поля при движении плазменного вещества. Нетрудно проверить, что $k^2 M_A^2$ равно отношению энергии магнитного поля к кинетической энергии плазмы, отнесенных к единице объема, $k^2 M_A^2 = H^2 / (8\pi) : \rho U^2 / 2$. При $k^2 M_A^2 \rightarrow 0$ влияние магнитного поля на движение плазмы исчезающе мало. При $k^2 M_A^2 \rightarrow +\infty$ и, что самое интересное, $k^2 M_A^2 \rightarrow 1$ это влияние резко возрастает, и значение $k^2 M_A^2 = 1$ является бифуркационным, разделяющим разные типы стационарных течений (см. разд. 5). При $k^2 M_A^2 = 1$ система (12) становится линейной и легко интегрируется:

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2} R \Gamma z^2 + K_0 z + K_1, \quad K_0, K_1 \in \mathbb{C}, \\ C(z) &= -\frac{1}{3} R \Gamma z^3 - (\operatorname{Re} K_0) z^2 - 2(\operatorname{Re} K_1) z + K_2, \quad K_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (13)$$

где K_0, K_1, K_2 — произвольные постоянные. Формулы (13) задают пятимерное вещественное пространство, состоящее при $\Gamma \neq 0$ из циклонов или антициклонов с показателями $\alpha = -R\Gamma/3$, $n = 3$, заведомо не относящиеся к гидродинамическому типу в смысле данного выше определения.

При $k^2 M_A^2 \neq 1$ система (12) следующим образом редуцируется к уравнениям торнадо (7). При $k^2 M_A^2 < 1$ заменой переменных

$$C = \tilde{C}/(1 - k^2 M_A^2)^{1/2}, \quad z = x/(1 - k^2 M_A^2)^{1/2}, \quad \tilde{\Gamma} = \Gamma/(1 - k^2 M_A^2) \quad (14)$$

система (12) сводится к виду

$$\tilde{C} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^2 + \tilde{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} = -2 \operatorname{Re} u, \quad (15)$$

$$0 \leq x < +\infty,$$

который совпадает с системой (7) в безразмерном виде при $\partial/\partial t = 0$.

При $k^2 M_A^2 > 1$ заменой переменных

$$C = -\tilde{C}/(k^2 M_A^2 - 1)^{1/2}, \quad z = x/(k^2 M_A^2 - 1)^{1/2}, \quad u = -\bar{v}, \quad \tilde{\Gamma} = \Gamma/(k^2 M_A^2 - 1), \quad (16)$$

где черта означает комплексное сопряжение, система (12) сводится к виду

$$\tilde{C} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v^2 - \tilde{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} = -2 \operatorname{Re} v, \quad (17)$$

который совпадает с системой (7) для $\partial/\partial t = 0$, где Γ заменено на $-\Gamma$.

Итак, исследование стационарных осесимметричных течений плазмы вида (2) вдоль силовых линий магнитного поля полностью редуцируется к исследованию стационарных решений уравнений торнадо (7).

4. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТОРНАДО

Рассмотрим уравнения торнадо (7) в безразмерном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u^2 + \Gamma = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = -2 \operatorname{Re} u, \quad (18)$$

$$0 \leq z < +\infty, \quad t \geq 0.$$

Система (18) нелинейная, и в нашем распоряжении нет математической теоремы, позволяющей определить граничные условия, для которых возникающая краевая задача для системы (18) имеет и притом единственное решение. Физические соображения [12], [13] приводят к следующим граничным условиям:

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{C}, \quad C(0) = 0, \quad u(\infty) = i\sqrt{\Gamma}. \quad (19)$$

Факт существования и единственности стационарного решения задачи (18), (19) устанавливается численно посредством изложенного ниже метода установления.

Выберем счетную область $[0, L]$ на оси z с достаточно большим L (результаты проводимых расчетов существенно не меняются при увеличении L) и равномерную сетку $z_k = kh$, $0 \leq k \leq N$, $h = L/N$, $N > 1$ — натуральное. Рассмотрим неявную разностную схему

$$\frac{u_k^1 - u_k^0}{\tau} + C_k^0 \frac{u_{k+1}^1 - u_{k-1}^1}{2h} - \frac{u_{k+1}^1 - 2u_k^1 + u_{k-1}^1}{Rh^2} + u_k^1 u_k^0 + \Gamma = 0, \quad (20)$$

$$0 < k < N, \quad u_0^1 = u_0, \quad u_N^1 = i\sqrt{\Gamma},$$

из которой значения u_k^1 , $0 < k < N$, на верхнем слое ищутся по значениям u_k^0 , $0 < k < N$, на нижнем слое прогонкой при решении системы линейных уравнений:

$$u_{k+1}^1 \left[\frac{\tau}{2h} C_k^0 - \frac{\tau}{Rh^2} \right] + u_k^1 \left[1 + \tau u_k^0 + \frac{2\tau}{Rh^2} \right] + u_{k-1}^1 \left[-\frac{\tau}{2h} C_k^0 - \frac{\tau}{Rh^2} \right] = u_k^0 - \tau \Gamma, \quad (21)$$

$$0 < k < N, \quad u_0^1 = u_0, \quad u_N^1 = i\sqrt{\Gamma}.$$

После этого величины C_k^1 на верхнем слое ищутся решением задачи Коши на отрезке $[0, L]$:

$$dC^1/dz = -2 \operatorname{Re} u^1, \quad C^1(0) = 0 \quad (22)$$

с учетом того, что правая часть (22) задана в узлах z_k . Поскольку порядок аппроксимации разностной схемы (20) равен $O(\tau + h^2)$ при численном решении задачи Коши (22), можно использовать метод счета невысокого порядка. Достаточно, например, рассмотреть метод Рунге–Кутты второго порядка точности, который в данном случае сводится к квадратурной формуле трапеций:

$$C_k^1 = C_{k-1}^1 - h(A_k^1 + A_{k-1}^1), \quad k = 1, \dots, N, \quad C_0^1 = 0, \quad A_k^1 = \operatorname{Re} u_k^1. \quad (23)$$

Условие устойчивости прогонки выполнено при наличии диагонального преобладания (по строкам) матрицы коэффициентов системы (21)

$$\left| \frac{\tau}{2h} C_k^0 - \frac{\tau}{Rh^2} \right| + \left| \frac{\tau}{2h} C_k^0 + \frac{\tau}{Rh^2} \right| < \left| 1 + \tau u_k^0 + \frac{2\tau}{Rh^2} \right|, \quad 0 < k < N.$$

Последнее условие, нетрудно убедиться, заведомо выполнено, если

$$\tau < h \left(2 \max_{0 \leq k \leq N} |C_k^0| \right)^{-1}, \quad \tau < \left(2 \max_{0 \leq k \leq N} |u_k^0| \right)^{-1}. \quad (24)$$

Неравенства (24) дают ограничения на временной шаг τ .

По разностной схеме (20), (23) вычисления ведутся до момента установления, т.е. пока не будет выполнено условие

$$\max_{0 \leq k \leq N} \max \left\{ |u_k^1 - u_k^0|, |C_k^0 - C_k^1| \right\} < \varepsilon, \quad (25)$$

где $\varepsilon > 0$ — задаваемая до начала счета малая положительная величина. Для шагов $h = 10^{-2}$, $h = 10^{-3}$ минимальное значение $\varepsilon = 10^{-9}$. При выполнении неравенства (25) вычисления прекращаются, а u_k^1 , C_k^1 , $0 \leq k \leq N$, рассматриваются как сеточные аппроксимации искомого стационарного решения. От выбора начальных значений функций u и C результат расчета не зависит, но существенно зависит время установления. Для его минимизации начальные функции $u(z)$, $C(z)$ следует выбирать так, чтобы $u(z)$ удовлетворяло граничным условиям (19), а $C(z)$ — граничному условию (19) и уравнению $dC/dz = -2 \operatorname{Re} u(z)$. Мы использовали простейшие аппроксимации

$$u(z) = \frac{u_0 + zu(\infty)}{1 + z}, \quad C(z) = -2 \int_0^z \operatorname{Re} u(z) dz.$$

В частности, в узлах сетки $C(z_k)$ вычислялись по формулам (23): $C(z_k) = C(z_{k-1}) - h(A_k + A_{k-1})$, $k = 1, \dots, N$, $C(z_0) = 0$, $A_k = \operatorname{Re} u(z_k)$.

Построенный выше алгоритм нахождения стационарных решений краевой задачи (18), (19) значительно проще прямых методов — типа метода стрельбы [22] или метода квазилинеаризации Р. Беллмана [23] — решения краевой задачи на полупрямой для нелинейной системы ОДУ пятого порядка, которая получится, если в (18) положить $\partial/\partial t = 0$ и перейти к вещественным неизвестным функциям A , B , C . Частным случаем последней задачи, для $\Gamma = 0$, $u_0 = i$, $R = 1$, является известная задача Т. Кармана [18] о бесконечном плоском диске, погруженном в вязкую несжимаемую жидкость и вращающимся с постоянной угловой скоростью. Требуется определить скорость жидкости, приводимой в движение указанным диском. Решение этой задачи известно [24], [25] (в частности, $C(\infty) = -0.886$) и использовалось в качестве одного из тестов для предложенного выше алгоритма.

Существование и единственность стационарного решения краевой задачи (18), (19) и тип этого решения зависят от граничного условия u_0 в нуле. Характер этой зависимости до конца не ясен и требует дополнительного исследования. Ниже мы ограничимся важнейшим частным случаем граничного условия (19), когда $u_0 = i\omega$, $\omega > 0$:

$$u(0) = i\omega, \quad \omega > 0, \quad C(0) = 0, \quad u(\infty) = i\sqrt{\Gamma}. \quad (26)$$

Стационарное решение краевой задачи (18), (26) зависит от трех вещественных параметров $\omega > 0$, $R > 0$, Γ . Преобразованием подобия эта зависимость сводится к одному параметру, что важно для численного исследования.

Теорема 3. Пусть $\omega > 0$ и

$$u = \omega \tilde{u}, \quad C = \omega^{1/2} R^{-1/2} \tilde{C}, \quad z = x \omega^{-1/2} R^{-1/2}, \quad t = \tau \omega^{-1}. \quad (27)$$

Тогда функции u , C от (t, z) удовлетворяют системе (18) тогда и только тогда, когда функции $\tilde{u}$, $\tilde{C}$ от (τ, x) удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \tilde{C} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \tilde{u}^2 + \frac{\Gamma}{\omega^2} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} = -2 \operatorname{Re} \tilde{u}. \quad (28)$$

В переменных $\tilde{u}$, $\tilde{C}$ краевая задача (18), (26) равносильна задаче (28), (29)

$$\tilde{u}(0) = i, \quad \tilde{C}(0) = 0, \quad \tilde{u}(\infty) = i\sqrt{\Gamma/\omega^2}, \quad (29)$$

решения которой зависят, очевидно, от одного параметра Γ/ω^2 и позволяют восстановить решение краевой задачи (18), (26) посредством преобразования (27).

Рассмотрим краевые условия

$$u(0) = i, \quad C(0) = 0, \quad u(\infty) = i\sqrt{\Gamma}, \quad \Gamma \geq 0, \quad (30)$$

причем в (30) берется арифметическое значение корня. Численные расчеты на установление по приведенному выше алгоритму приводят к следующим результатам:

- 1) при $\Gamma > 1$ краевая задача (18), (30) имеет стационарное решение типа торнадо;
- 2) при $0 \leq \Gamma < 1$ краевая задача (18), (30) имеет стационарное решение типа антиторнадо;
- 3) при $\Gamma = 1$ краевая задача (18), (30) имеет точное решение $u(z) \equiv i$, $C(z) \equiv 0$;
- 4) при $\Gamma < 0$ краевая задача (18), (31)

$$u(0) = i, \quad C(0) = 0, \quad u(\infty) = \sqrt{\Gamma}, \quad \Gamma < 0, \quad (31)$$

имеет стационарное решение типа антициклон с показателями $\alpha = -2\sqrt{\Gamma}$, $n = 1$, в частности $C(z) \sim -2\sqrt{\Gamma}z$, $z \rightarrow +\infty$.

Графическая иллюстрация результатов 1)–4) приведена в [12], [26]. Численные расчеты на установление для различных начальных условий не обнаружили неединственности стационарных решений указанных выше краевых задач. Из обратного преобразования подобия (27) отсюда следует, что для краевого условия (26), где для $\Gamma \geq 0$ берется арифметическое значение корня, а при $\Gamma < 0$ считается $i\sqrt{\Gamma} = \sqrt{\Gamma}$, имеет место следующий

Вывод. Существует критическое значение $\Gamma_{\text{кр}} = \omega^2$, для которого при $\Gamma > \Gamma_{\text{кр}}$ краевая задача (18), (26) имеет стационарное решение типа торнадо, а при $0 \leq \Gamma < \Gamma_{\text{кр}}$ — типа антиторнадо; при $\Gamma = \Gamma_{\text{кр}}$ стационарное решение суть $u(z) = i\omega$, $C(z) = 0$. Наконец, при $\Gamma < 0$ краевая задача (18), (26) имеет стационарное решение типа антициклон с показателями $\alpha = -2\sqrt{\Gamma}$, $n = 1$.

В заключение укажем на источник важных приближенных формул для так называемых мощных торнадо, под которыми ниже подразумеваются стационарные решения краевой задачи (18), (19) с $\Gamma > 0$ (арифметическим значением корня в (19)) и $|u_0| \Gamma^{-1/2} \ll 1$. Из формулы (4) следует, что Γ в чисто гидродинамическом случае ($w = 0$, $G = 0$) определяет перепад гидродинамического давления в центре торнадо ($r = 0$) и на его периферии ($r = \infty$). Интуитивно ясно, что чем больше Γ и, значит, указанный перепад давления, тем с большей скоростью потоки воздуха будут стремиться к оси z и тем сильнее они должны закручиваться вокруг оси и приобретать большую вертикальную скорость, что приводит к значительному росту кинетической энергии воздушных масс такого торнадо и оправдывает для него эпитет “мощный”. Вероятно, все воздушные по шкале Фуджиты [7] торнадо, представляющие основную опасность, относятся к мощным. Оценим величину $|u_0| \Gamma^{-1/2}$ для $u_0 = i\omega$. Тогда под ω надо понимать угловую скорость вращения ω_k , с которой сила Кориолиса закручивает радиальные потоки воздуха у поверхности Земли. Из фи-

зических соображений $u(\infty) = i\Omega$, где Ω — угловая скорость вращения воздуха в вихревом кольце материнского облака (см. Введение). Из (19) следует, что $\Omega = \sqrt{\Gamma}$ и, значит, $|u_0|\Gamma^{-1/2} = |\omega_k/\Omega|$. Нелегко установить [7], что $\omega_k = \Omega_3 \sin \varphi$, где $\Omega_3 = 7.3 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ — угловая скорость вращения Земли, φ — широта местности возникновения торнадо. По данным наблюдений [6], [7] для разрушительных торнадо с типичными значениями скорости воздуха $U = 100 \text{ м/с}$ и радиуса $r = 10 \text{ км}$ вихревого кольца материнского облака получим $\Omega = U/r = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ и $|u_0|\Gamma^{-1/2} = 7.3 \times 10^{-3}$. Таким образом, для разрушительных торнадо, действительно, можно считать $|u_0|\Gamma^{-1/2} \ll 1$.

Для получения приближенных формул воспользуемся преобразованием подобия.

Теорема 4. Пусть $\Gamma > 0$ и

$$u = \Gamma^{1/2} \tilde{u}, \quad C = \Gamma^{1/4} R^{-1/2} \tilde{C}, \quad z = x \Gamma^{-1/4} R^{-1/2}, \quad t = \tau \Gamma^{-1/2}. \quad (32)$$

Тогда функции u, C от (t, z) удовлетворяют системе (18) тогда и только тогда, когда функции $\tilde{u}, \tilde{C}$ от (τ, x) удовлетворяют системе

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \tilde{C} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \tilde{u}^2 + 1 = 0, \quad \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} = -2 \operatorname{Re} \tilde{u}. \quad (33)$$

Если $u(z), C(z)$ — стационарное решение краевой задачи (18), (19), то, согласно теореме 4,

$$\tilde{u}(x) = \Gamma^{-1/2} u(x \Gamma^{-1/4} R^{-1/2}), \quad \tilde{C}(x) = \Gamma^{-1/4} R^{1/2} C(x \Gamma^{-1/4} R^{-1/2})$$

есть стационарное решение системы (33) с граничными условиями $\tilde{u}(0) = u_0 \Gamma^{-1/2}$, $\tilde{u}(\infty) = i$, $\tilde{C}(0) = 0$. Если $|u_0|\Gamma^{-1/2} \ll 1$, то, предполагая аналитическую зависимость стационарного решения системы (33) с указанными краевыми условиями от граничного условия для $\tilde{u}$ в нуле, можно построить теорию возмущений по граничному условию для $\tilde{u}$ в нуле [26] и сколь угодно точно вычислить функции $\tilde{u}(x), \tilde{C}(x)$, а значит, используя преобразование (32), и функции $u(z), C(z)$. При этом функции $\tilde{u}(x), \tilde{C}(x)$ рассматриваются как возмущения функций $u_0(x), C_0(x)$, являющихся стационарным решением системы (33) для невозмущенных граничных условий $\tilde{u}(0) = 0$, $\tilde{C}(0) = 0$, $\tilde{u}(\infty) = i$. Графики этих функций, полученные численно и представленные на фиг. 1, показывают, что это решение имеет тип торнадо. Ограничимся ниже нулевым приближением, считая $\tilde{u}(x) \equiv u_0(x)$, $\tilde{C}(x) \equiv C_0(x)$, что дает приближенные формулы $u(z) \equiv \Gamma^{1/2} u_0(z \Gamma^{1/4} R^{1/2})$, $C(z) \equiv \Gamma^{1/4} R^{-1/2} C_0(z \Gamma^{1/4} R^{1/2})$, которые не зависят от граничного условия $u(0) = u_0$, и чья точность возрастает при $u_0 \Gamma^{-1/2} \rightarrow 0$. Вторая формула позволяет вычислить $C(\infty) \equiv \Gamma^{1/4} R^{-1/2} C_0(\infty)$. Последнее равенство можно уточнить [26], показав, что имеет место асимптотика $C(\infty) \sim \Gamma^{1/4} R^{-1/2} C_0(\infty)$, $u_0 \Gamma^{-1/2} \rightarrow 0$. Из графиков на фиг. 1 следует, что $C_0(\infty) \equiv 1.35$, поэтому окончательно получим важную асимптотическую формулу

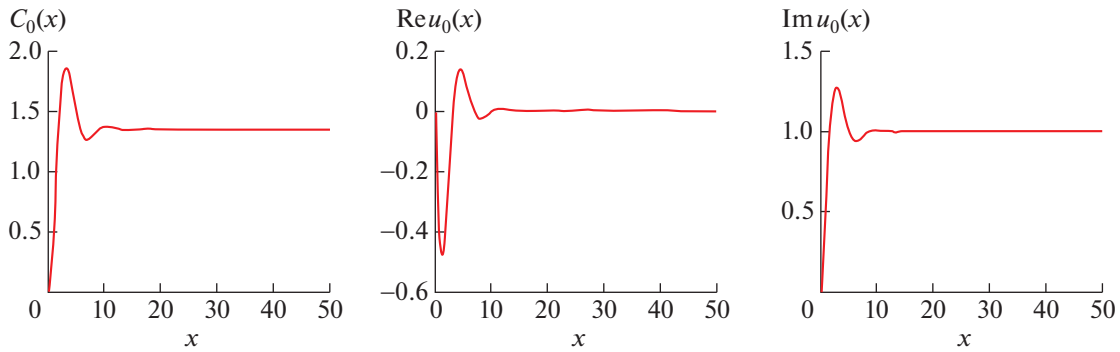
$$C(\infty) \sim 1.35 \Gamma^{1/4} R^{-1/2}, \quad u_0 \Gamma^{-1/2} \rightarrow 0. \quad (34)$$

В частности, $C(\infty)$ растет пропорционально $\Gamma^{1/4}$ при $\Gamma \rightarrow +\infty$ и фиксированном u_0 , что подтверждается численными расчетами.

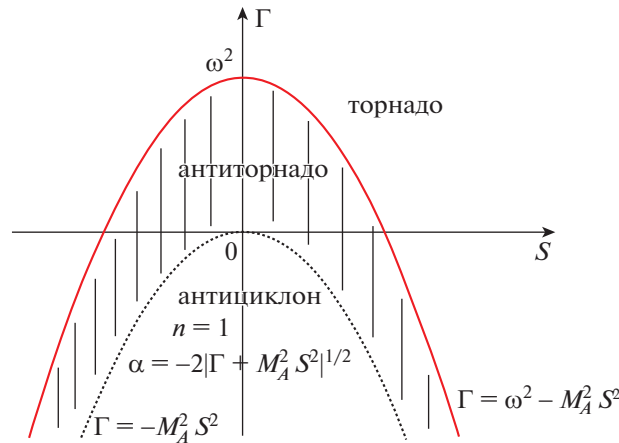
5. РОЛЬ АЗИМУТАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Проанализируем течения из первого класса разд. 3, задаваемого решениями системы (11) и позволяющего исследовать влияние чисто азимутального магнитного поля, порождаемого постоянным однородным осевым током, на осесимметричные течения плазмы. Рассмотрим решения системы (11), подчиненные краевым условиям

$$u(0) = i\omega, \quad \omega \geq 0, \quad C(0) = 0, \quad u(\infty) = \begin{cases} i\sqrt{\Gamma + M_A^2 S^2}, & \Gamma + M_A^2 S^2 \geq 0, \\ \sqrt{\Gamma + M_A^2 S^2}, & \Gamma + M_A^2 S^2 < 0. \end{cases} \quad (35)$$



Фиг. 1. Графики функций $C_0(x)$, $\operatorname{Re} u_0(x)$, $\operatorname{Im} u_0(x)$ с граничным условием $u(0) = 0$, $u(\infty) = i$, $C(0) = 0$.



Фиг. 2. Типы течений в зависимости от Γ и S .

Из результатов 1)–4) разд. 4 следует, что стационарные решения задачи (11), (35) существуют и относятся к типам торнадо, антиторнадо или антициклон в зависимости от значений Γ и S , как это указано на фиг. 2, где приведены показатели α и n антициклона и граничные параболы $\Gamma = -M_A^2 S^2$, $\Gamma = \omega^2 - M_A^2 S^2$, разделяющие различные типы течений. Парабола $\Gamma = -M_A^2 S^2$ входит в область антиторнадо, а парабола $\Gamma = \omega^2 - M_A^2 S^2$ состоит из точек, задающих равномерное вращение плазмы вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω . Разумеется, система (11) имеет и другие решения, определяемые более общими граничными условиями в нуле $u(0) = u_0 \in \mathbb{C}$, $C(0) = C_0 \in \mathbb{R}$. Как отмечалось выше, для более общих граничных условий классификация решений системы (11) неизвестна и требует дополнительного исследования. Скорее всего, основные типы решений — торнадо, антиторнадо, антициклон останутся, но области на плоскости (S, Γ) , определяемые этими решениями, усложнятся; не исключено также появление на плоскости (S, Γ) “мертвой зоны”, где решения краевой задачи для системы (11) не существует.

Полученные результаты приводят к трем важным выводам:

1) азимутальное магнитное поле смещает в сторону уменьшения границы, разделяющей три типа течений — торнадо ($\Gamma > \Gamma_{\text{кр}} = \omega^2 - M_A^2 S^2$), антиторнадо ($\Gamma_{\text{кр}} > \Gamma \geq -M_A^2 S^2$) и антициклон ($\Gamma < -M_A^2 S^2$);

2) в сильном азимутальном магнитном поле $|S| > \omega/M_A$ течение типа торнадо возникает и для $\Gamma < 0$, т.е. когда суммарное (магнитное и гидродинамическое) давление в центре торнадо больше, чем на его периферии;

3) для $\omega(\Gamma + M_A^2)^{-1/2} \ll 1$ стационарное решение задачи (11), (35) имеет тип торнадо, вертикальная скорость которого на бесконечности, согласно (34), приближенно равна $C(\infty) \cong 1.35(\Gamma + M_A^2 S^2)^{1/4} R^{-1/2}$, в частности, азимутальное магнитное поле $H_\varphi = rS$ вызывает генерацию (увеличение) вертикальной скорости торнадо на бесконечности.

Дополнительное обсуждение содержится в [27].

6. ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ПЛАЗМЫ ВДОЛЬ СИЛОВЫХ ЛИНИЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим течения из второго класса разд. 3, задаваемые решениями системы (12) и описывающие осесимметричные потоки плазмы вида (2) вдоль силовых линий магнитного поля, для которых магнитные и гидродинамические параметры пропорциональны, $w = ku$, $G = kC$, $k = \text{const}$.

Согласно результатам 1)–4) разд. 4, система (15) имеет решения для граничных условий

$$u(0) = i\omega, \quad \omega > 0, \quad \tilde{C}(0) = 0, \quad u(\infty) = \begin{cases} i\tilde{\Gamma}^{1/2}, & \tilde{\Gamma} \geq 0, \\ |\tilde{\Gamma}|^{1/2}, & \tilde{\Gamma} < 0, \end{cases}$$

а система (17) имеет решения для граничных условий

$$v(0) = i\omega, \quad \omega > 0, \quad \tilde{C}(0) = 0, \quad v(\infty) = \begin{cases} \tilde{\Gamma}^{1/2}, & \tilde{\Gamma} > 0, \\ i|\tilde{\Gamma}|^{1/2}, & \tilde{\Gamma} \leq 0, \end{cases}$$

принадлежащих к одному из трех типов — торнадо, антиторнадо, антициклон. Применяя преобразования (14), (16), заключаем, что исследуемая система (12) при $k^2 M_A^2 \neq 1$ имеет решения для граничных условий

$$u(0) = i\omega, \quad \omega > 0, \quad C(0) = 0, \quad u(\infty) = \begin{cases} i\left(\frac{\Gamma}{1 - k^2 M_A^2}\right)^{1/2}, & \frac{\Gamma}{1 - k^2 M_A^2} \geq 0, \\ \text{sgn}(1 - k^2 M_A^2) \left|\frac{\Gamma}{1 - k^2 M_A^2}\right|^{1/2}, & \frac{\Gamma}{1 - k^2 M_A^2} < 0, \end{cases} \quad (36)$$

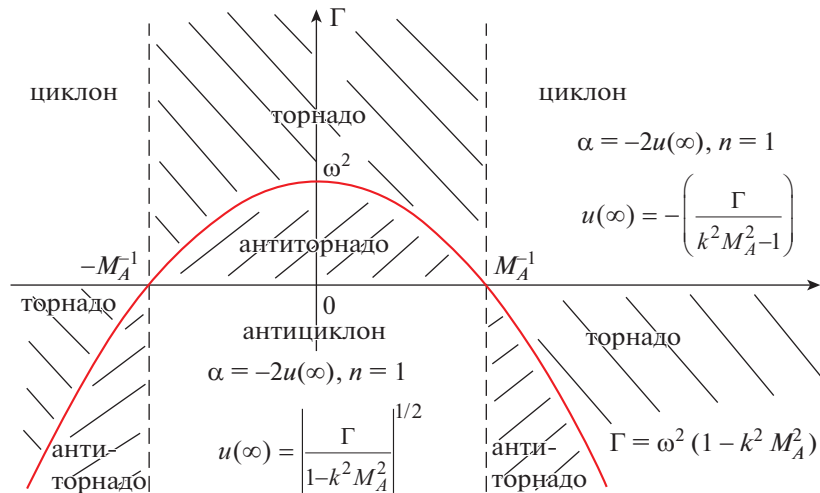
принадлежащих к одному из четырех типов — торнадо, антиторнадо, циклон, антициклон, в зависимости от значений Γ и k , как это показано на фиг. 3. Интервал $(-M_A^{-1}, M_A^{-1})$ на оси k входит в область антиторнадо, а бесконечные интервалы $(-\infty, -M_A^{-1})$, $(M_A^{-1}, +\infty)$ — в область торнадо, точки параболы $\Gamma = \omega^2(1 - k^2 M_A^2)$, не лежащие на оси k , соответствуют решениям системы (12), задающим вращение плазмы вокруг оси z с постоянной угловой скоростью ω . При $\omega|1 - k^2 M_A^2|^{1/2}|\Gamma|^{-1/2} \ll 1$ решение краевой задачи (12), (36) имеет тип торнадо или антиторнадо, вертикальная скорость которого на бесконечности, согласно (34), равна

$$C(\infty) = 1.35R^{-1/2} \begin{cases} \Gamma^{1/4}(1 - k^2 M_A^2)^{-3/4} & \text{для торнадо,} \\ -|\Gamma|^{1/4}(k^2 M_A^2 - 1)^{-3/4} & \text{для антиторнадо.} \end{cases} \quad (37)$$

Система (12) имеет, разумеется, и другие решения, определяемые более общими граничными условиями в нуле $u(0) = u_0 \in \mathbb{C}$, $C(0) = C_0 \in \mathbb{R}$, но их классификация в общем случае неизвестна и требует дополнительного исследования. Скорее всего, основные типы решений — торнадо, антиторнадо, циклон, антициклон остаются, но области на плоскости (k, Γ) , определяемые этими решениями, существенно изменятся.

Проведем некоторые вычисления. Имеем для торнадо и антиторнадо с учетом формулы (36):

$$\frac{H_\varphi(\infty)}{H_\varphi(0)} = \frac{u(\infty)}{u(0)} = \left(\frac{\Gamma}{1 - k^2 M_A^2}\right)^{1/2} \frac{1}{\omega} = \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_{\text{кр}}}\right)^{1/2}, \quad \Gamma_{\text{кр}} = \omega^2(1 - k^2 M_A^2), \quad (38)$$



Фиг. 3. Типы течений в зависимости от Γ и k .

где $\Gamma_{кр}$ – граница, отделяющая на прямой Γ область торнадо от области антиторнадо (см. фиг. 3). Пусть $u(z)$, $C(z)$ – стационарное решение задачи (18), (26) для $\Gamma \geq 0$, $u_0(z)$, $C_0(z)$ – указанное решение для $\Gamma = 0$, являющееся антиторнадо, $u_{Кар}(z)$, $C_{Кар}(z)$ – решение этой задачи для $\omega = 1$, $R = 1$, $\Gamma = 0$, полученное Карманом. В частности, $C_{Кар}(\infty) = -0.886$ [24]. В [12] показано, что $C(\infty)$ – монотонно возрастающая непрерывная функция от Γ , в частности, $\lim_{\Gamma \rightarrow 0} C(\infty) = C_0(\infty)$. Из теоремы 3 следует $u_0(z) = \omega u_{Кар}(\sqrt{\omega R} z)$, $C_0(z) = \sqrt{\omega/R} C_{Кар}(\sqrt{\omega R} z)$, откуда $C_0(\infty) = \sqrt{\omega/R} C_{Кар}(\infty) = -0.886 \sqrt{\omega/R}$. Вычислим теперь предельные значения $H_z(\infty)$ при $|kM_A| \rightarrow 1 \pm 0$. При $|kM_A| \rightarrow 1 - 0$ для торнадо имеем

$$H_z(\infty) = kC(\infty) = \frac{k\tilde{C}(\infty)}{(1 - k^2 M_A^2)^{1/2}} \sim \frac{1.35k\Gamma^{1/4} R^{-1/2}}{(1 - k^2 M_A^2)^{3/4}} \rightarrow \pm\infty, \quad (39)$$

где $\tilde{C}(x)$ – решение (15), $\pm$ совпадает с $\text{sgn } k$ и использованы преобразования (14) и асимптотическая формула (34). При $|kM_A| \rightarrow 1 + 0$ для антиторнадо имеем аналогичную выкладку

$$H_z(\infty) = kC(\infty) = -\frac{k\tilde{C}(\infty)}{(k^2 M_A^2 - 1)^{1/2}} \sim -\frac{1.35k|\Gamma|^{1/4} R^{-1/2}}{(k^2 M_A^2 - 1)^{3/4}} \rightarrow \pm\infty, \quad (40)$$

где $\tilde{C}(x)$ – решение (17). При $|k| \rightarrow +\infty$ для торнадо имеем

$$H_z(\infty) = kC(\infty) = -\frac{k\tilde{C}(\infty)}{(k^2 M_A^2 - 1)^{1/2}} \rightarrow -\frac{kC_0(\infty)}{|k| M_A} = \text{sgn } k \frac{0.886}{M_A} \sqrt{\frac{\omega}{k}}, \quad (41)$$

где $\tilde{C}(x)$ – решение (17). Отсюда следует $\lim_{|k| \rightarrow +\infty} C(\infty) = 0$, а из (36) вытекает соотношение $\lim_{|k| \rightarrow +\infty} u(\infty) = 0$.

Полученные результаты приводят к следующим выводам.

1. Существует критическое (бифуркационное) значение параметра замагниченности, равное 1, разделяющее типы течений плазмы – торнадо от циклонов, антиторнадо от антициклонов. При стремлении точки (k, Γ) к бифуркационным прямым $k = \pm M_A^{-1}$ различия между указанными типами течений не стираются, а усиливаются, что выражается, во-первых, согласно формулам (36), (37), в неограниченном возрастании скорости плазмы – вертикальной и угловой скорости вращения торнадо и антиторнадо, а также радиальной скорости и показателя α циклона и антициклона и, во-вторых, согласно формулам (39), (40), в генерации сколь угодно сильного осевого магнитного поля. В частности, *существуют сверхмощные магнитные торнадо, в которых плазма течет вдоль магнитного поля и имеет конечную замагниченность.*

2. В сильном магнитном поле с параметром замагниченности, большим 1, существуют плазменные течения типа торнадо и для $\Gamma < 0$, т.е. когда суммарное (гидродинамическое и магнитное) давление в центре торнадо больше, чем на его периферии.

3. Для фиксированного Γ при стремлении параметра замагниченности к бесконечности скорость плазмы в циклонах и торнадо, согласно (36), (37), стремится к нулю, а осевое магнитное поле имеет конечный предел, вычисляемый по (41), в частности, сильное магнитное поле препятствует возникновению магнитных торнадо и циклонов.

4. В слабом магнитном поле ($|kM_A| < 1$), согласно (38), происходит усиление (для торнадо) или ослабление (для антиторнадо) в $\sqrt{\Gamma/\Gamma_{кр}}$ раз азимутального магнитного поля на бесконечности по сравнению с азимутальным магнитным полем при $z = 0$; в сильном магнитном поле ($|kM_A| > 1$), наоборот, происходит ослабление (для торнадо) или усиление (для антиторнадо) в $\sqrt{\Gamma/\Gamma_{кр}}$ раз $H_\varphi(\infty)$ по сравнению с $H_\varphi(0)$.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрено математическое моделирование явления торнадо применительно к солнечной плазме посредством точных решений специального вида уравнений классической МГД. Выведены уравнения магнитного торнадо. Комплексификация уравнений и преобразования подобия позволили редуцировать уравнения магнитного торнадо к удобной для построения алгоритмов их численного решения форме, сводящейся к нелинейной системе двух уравнений теплопроводности относительно комплексных “температур”, и понизить размерность задачи.

Рассмотрены два класса решений уравнений магнитного торнадо, содержащих течения плазмы типа торнадо, исследование которых удастся редуцировать к уравнениям торнадо в атмосферном воздухе. Рассмотрен численный метод установления нахождения стационарных решений уравнений торнадо. Полученные классы точных решений являются тестами при численном исследовании уравнений магнитного торнадо. Анализ решения указанных классов, с одной стороны, дает теоретическое доказательство существования магнитных торнадо в плазме, а с другой, — позволяет обнаружить ряд важных закономерностей взаимодействия магнитного поля с плазмой торнадо. Достоверность полученных результатов такая же, как и уравнений классической МГД, применимость которых к анализу явлений в солнечной плазме общепринята.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Parker E.* Nanoflares and the solar X-ray corona // *Astrophys. Journal* 1988. V. 330. P. 474–479.
2. *Brandt P., Scharmer G., Ferguson S., Shine R., Tarbell T.* Vortex flow in the solar photosphere // *Nature*. 1988. V. 335. P. 238–240.
3. *Bonet J., Marquez I., Sanchez Almeida J., Cabello I., Domingo V.* Convectively driven vortex flows in the Sun // *Astrophys. Journal* 2008. V. 687. L131–L134.
4. *Bonet J. et al.* SUNRISE/IMaX observations of convectively driven vortex flows in the Sun // *Astrophys. Journal* 2010. V. 723. L139–L143.
5. *Sven Wedemeyer-Böhm, Eamon Scullion, Oskar Steiner, Luc Rouppe van der Voort, Jaime de la Cruz Rodriguez, Viktor Fedun, Robert Erdélyi.* Magnetic tornadoes as energy channels into the solar corona // *Nature*. 2012. V. 486. P. 505–508.
6. *Наливкин Д.В.* Ураганы, бури и смерчи. Географические особенности и геологическая деятельность. Л.: Наука, 1969. 487 с.
7. *Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Конейцев В.Н.* Торнадо. М.: Физматлит, 2011. 344 с.
8. *Баутин С.П.* Математическое моделирование сильного сжатия газов. Новосибирск: Наука, 2007. 312 с.
9. *Grasso L.D., Cotton W.R.* Numerical simulation of a tornado vortex // *J. Atmospheric Sciences*. 1995. V. 52. № 8. P. 1192–1203.
10. *Klemp J.B., Wilhelmson R.B.* 1978: The simulation of three dimensional convective storm dynamics // *J. Atmospheric Sciences*. V. 35. № 6. P. 1070–1096.
11. *Rotunno R.* Numerical simulation of a tornado vortex // *J. Atmospheric Sciences*. 1977. V. 34. № 12. P. 1942–1956.
12. *Гавриков М.Б., Тайурский А.А.* Простая математическая модель торнадо // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2019. № 42. 34 с.
13. *Gavrikov M.B., Taiurskii A.A.* A Mathematical Model of Tornado // *J. of Physics: Conference Series*. 2019. V. 1336. № 012001. P. 1–11.

14. *Альфвен Х.* Космическая электродинамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1952.
15. *Филиппов Н.В.* Обзор экспериментальных работ, выполненных в ИАЭ им. И.В. Курчатова, по исследованию плазменного фокуса // *Физика плазмы*. 1983. Т. 9. № 1. С. 25–44.
16. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957. 2-е изд.: М.: Наука, 1982. 624 с.
17. *Lundquist S.* Experimental Investigation of Magneto-Hydrodynamic Waves // *Physical Review*. 1949. V. 76. № 12. P. 1805–1809.
18. *Karman T.* Über laminare und turbulente Reibung // *ZAMM*. 1921. V. 1. P. 244–247.
19. *Сычев В.В.* О движении вязкой электропроводной жидкости под действием вращающегося диска в присутствии магнитного поля // *Прикл. матем. и механ.* 1960. Т. 24. № 5. С. 906.
20. *Шидловский В.П.* Исследование движения вязкой электропроводной жидкости, вызванное вращением диска, при наличии осевого магнитного поля // *Магнитная гидродинамика*. 1966. № 1. С. 93–97.
21. *Куликовский А.Г., Любимов Г.А.* Магнитная гидродинамика. М.: Логос, 2005. 328 с.
22. *Холл Дж., Уатт Дж.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1979. 312 с.
23. *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные уравнения. М.: Наука, 1982.
24. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
25. *Дразин Ф.* Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005. 288 с.
26. *Гавриков М.Б., Таюрский А.А.* Математическая модель мощного торнадо в атмосфере // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2020. № 48. 32 с.
27. *Гавриков М.Б., Таюрский А.А.* Математическая модель магнитного торнадо // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2020. № 42. 36 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.635

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЖИМА ЭМБОЛИЗАЦИИ АРТЕРИОВЕНОЗНОЙ МАЛЬФОРМАЦИИ С ПЕРЕТОКАМИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ¹⁾

© 2021 г. Т. С. Гологуш¹, В. В. Остапенко^{1,2}, А. А. Черевко^{1,2,*}

¹ 630090 Новосибирск, пр-т Лаврентьева, 15, ИГиЛ СО РАН, Россия

² 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 1, НГУ, Россия

*e-mail: cherevko@mail.ru

Поступила в редакцию 01.02.2020 г.
Переработанный вариант 19.01.2021 г.
Принята к публикации 09.04.2021 г.

Артериовенозная мальформация (АВМ) — это врожденная патология развития сосудов головного мозга, при которой артериальное и венозное кровеносные русла соединены напрямую беспорядочно переплетенными вырожженными сосудами. Это опасное заболевание, влияющее на функционирование головного мозга, при котором велик риск внутримозгового кровоизлияния. Одним из методов лечения АВМ является эмболизация — операция по эндоваскулярному заполнению сосудов АВМ специальной эмболизирующей композицией для блокирования кровотока через них. Данный метод широко применяется, но до сих пор в некоторых случаях сопровождается интраоперационным разрывом сосудов АВМ. В данной работе для описания процесса эмболизации предлагается комбинированная модель, в которой наряду с течением крови и эмболизата в АВМ учитывается переток крови в окружающие здоровые сосуды. При этом для моделирования совместного течения крови и эмболизирующей композиции внутри АВМ используется одномерная модель двухфазной фильтрации, построенная на основе клинических данных реальных пациентов, полученных во время нейрохирургических операций в НМИЦ им. акад. Е.Н. Мешалкина. Математически это приводит к решению специальной начально-краевой задачи для интегродифференциального уравнения с невыпуклым потоком. Для численных расчетов построена монотонная модификация схемы CABARET, которая с высокой точностью локализует сильные и слабые разрывы, возникающие в решении рассматриваемой задачи. Основной целью работы является отыскание оптимального с точки зрения безопасности и эффективности сценария эмболизации АВМ. Целевой функционал и ограничения, возникающие в получаемой задаче оптимального управления, выбираются в соответствии с медицинскими показаниями. Построенные оптимальные решения в дальнейшем планируется использовать для усовершенствования методики и повышения безопасности проведения нейрохирургических операций. Библ. 29. Фиг. 4. Табл. 3.

Ключевые слова: двухфазная фильтрация, схема CABARET, оптимальное управление, артериовенозная мальформация, эмболизация.

DOI: 10.31857/S0044466921090118

1. ВВЕДЕНИЕ

Церебральная артериовенозная мальформация (АВМ) — это врожденная патология развития сосудов головного мозга, при которой осуществляется прямой сброс крови из артериального бассейна в венозный, минуя капиллярную сеть сосудов. Наличие АВМ нарушает нормальное кровоснабжение мозга, изменяя скорость и давление крови в близлежащей части сосудистой системы. Из-за отсутствия капиллярной сети уменьшается сопротивление соответствующей части кровеносной системы, возникает ишемия близлежащего мозгового вещества. Чаще всего АВМ становятся симптоматическими в возрасте от 20 до 50 лет и выявляются в этот период жизни, причем внутричерепное кровоизлияние является наиболее распространенным клиническим проявлением АВМ, по данным [1] его частота варьируется от 30 до 82%. Высокий риск смертно-

¹⁾ Работа выполнена (разделы 5–7) при финансовой поддержке Правительства РФ (проект 14.W03.31.0002).

сти и инвалидизации из-за внутримозгового кровоизлияния определяет опасность этой патологии [2].

На данный момент эмболизация — это наиболее прогрессивный метод лечения АВМ, представляющий собой избирательное выключение кровеносных сосудов из кровотока путем их заполнения специальной эмболизирующей композицией (эмболизатом) в процессе эндоваскулярной нейрохирургической операции. Эндоваскулярное лечение артериовенозных мальформаций достигается микрокатетерной доставкой агентов, таких как N-бутил-2-цианоакрилат или неадгезивный сополимер этилена и винилового спирта [3], [4]. По данным исследования 408 пациентов с АВМ, которые лечились эндоваскулярно, Baharvahdat и соавт. отмечали 11%-ную частоту геморрагических осложнений, связанных с лечением [5]. По данным исследования группы из 192 пациентов с тотально эмболизированной артериовенозной мальформацией летальность за период госпитализации составила 9.3% [6]. Таким образом, несмотря на хорошо развитую технику операций по эмболизации, риск интраоперационного разрыва сосудов по-прежнему вызывает озабоченность. Гемодинамика, связанная с внутримозговыми АВМ, сложна и изменяется по мере изменения ее морфологии и ангиоархитектуры. В связи с вышесказанным, математическое моделирование процесса эмболизации АВМ является актуальной задачей.

Для адекватного моделирования АВМ необходимо знать ее геометрическую структуру. Современные методы реконструкции геометрии АВМ по данным нейровизуализации (КТ, МРТ, церебральная ангиография) позволяют выделить сосуды со средним диаметром не менее 0.5 мм, чего недостаточно для определения *in vivo* детальной геометрической структуры АВМ, состоящей из очень большого количества сросшихся переплетенных тонких сосудов, диаметр которых может достигать 0.1 мм. Также измерение *in vivo* гемодинамических параметров представляется возможным только в достаточно крупных примыкающих к АВМ сосудах, а измерения непосредственно внутри АВМ серьезно затруднены и зачастую невозможны. Из-за отсутствия необходимых данных существующие математические модели имеют упрощенный характер, хотя и позволяют получить качественно правильное описание гемодинамики рассматриваемой патологии.

Взаимодействие АВМ и кровотока в окружающих сосудах часто изучается на основе аналогии с электрическими или гидравлическими сетями, например, в работах [7]–[9]. Такие модели позволяют оценить влияние различных сценариев эмболизации на перестройку кровотока и согласуются с общим медицинским взглядом на гемодинамику АВМ. Для описания совместного течения крови и эмболизата используются различные подходы, например в работе [10] использовали двухфазную модель потока для моделирования движения вязкой капли эмболизата через точку бифуркации или мультифуркации на основе безразмерных уравнений Навье–Стокса для несжимаемых жидкостей. В работе [11] описывается модель эмболизации АВМ на основе концепции двухжидкостного моделирования и скалярного транспорта, а взаимодействие эмболизата с кровью и его затвердевание здесь имитировались увеличением вязкости одной из фаз.

В настоящей работе для моделирования совместного течения крови и эмболизирующей композиции внутри АВМ используется одномерная модель двухфазной фильтрации, построенная на основе клинических данных реальных пациентов, полученных во время нейрохирургических операций в НМИЦ им. акад. Е.Н. Мешалкина. Такой подход, по нашему мнению, оправдан для описания эмболизации мелкососудистых компартментов АВМ. Поскольку АВМ является частью кровеносной системы, то расход крови на входе в АВМ меняется с течением операции, за счет перераспределения крови в здоровые сосуды. Этот эффект учитывается сопряжением фильтрационной модели с моделью здорового сосуда постоянного сопротивления. Математическое описание данного процесса сводится к решению начально-краевой задачи для интегродифференциального уравнения с невыпуклым потоком. Для численных расчетов разработана монотонная модификация схемы CABARET, которая с высокой точностью локализует сильные и слабые разрывы, возникающие в решении данной задачи. Основная цель работы заключается в отыскании оптимального с точки зрения безопасности и эффективности сценария эмболизации АВМ. Целевой функционал и ограничения, возникающие в такой задаче оптимального управления, выбираются в соответствии с медицинскими показаниями. Управлением является зависящая от времени функция, определяющая объемный расход эмболизата на входе в АВМ. Проведено сравнение оптимальных сценариев эмболизации АВМ при различных режимах перетока крови в здоровые сосуды для конкретных пациентов.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Движение крови и эмболизата через мелкососудистую рацемозную АВМ моделируется как процесс двухфазной фильтрации несмешивающихся несжимаемых жидкостей, где вытесняемой фазой является кровь, а вытесняющей — эмболизат. Мы будем предполагать однородность структуры АВМ и рассматривать пространственно-одномерный случай, для которого соответствующее математическое описание, основанное на законе Дарси и законах сохранения масс для каждой фазы, впервые было предложено в работе С. Баклея, М. Леверетта [12]. Пусть $S(t, x) \in [0, 1]$ — локальная насыщенность АВМ кровью (концентрация крови) во время эмболизации. С учетом этого концентрация эмболизата будет равна $1 - S(t, x)$. Уравнение для $S(t, x)$ внутри АВМ можно записать по аналогии с уравнением Баклея–Леверетта [13]:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial \psi(t, S)}{\partial x} = 0, \quad \psi(t, S) = \frac{Q(t)f(S)}{Am}, \quad (2.1)$$

где $x \in [0, L]$, L — длина АВМ (которую будет определять по клиническим данным); m — пористость АВМ (которую будем считать постоянной и равной единице); A — площадь поперечного сечения АВМ (которую будем предполагать постоянной и определять по клиническим данным); $f(S)$ — функция Баклея–Леверетта, которая задает закон распределения потоков фаз внутри АВМ и удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} f'(S) > 0, \quad S \in [0, 1]; \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1; \\ f''(S) > 0, \quad S \in [0, \xi]; \quad f''(S) < 0, \quad S \in [\xi, 1] \end{aligned} \quad (2.2)$$

(конкретный вид этой функции, получаемый по данным интраоперационного мониторинга, будет приведен ниже);

$$Q(t) = Q_b(t, x) + Q_e(t, x) \quad (2.3)$$

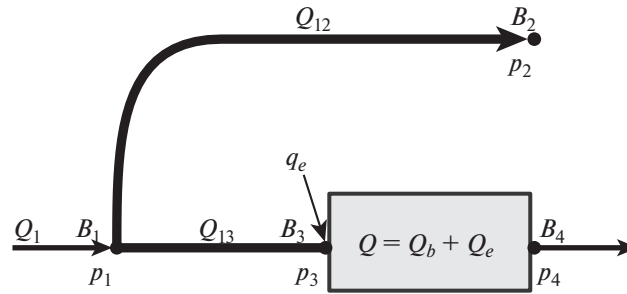
есть расход смеси двух фаз внутри АВМ, где $Q_b = Qf(S)$ — расход крови, а $Q_e = Q(1 - f(S))$ — расход эмболизата, граничное значение которого $Q_e(t, 0)$ определяется сценарием проведения операции.

Расход смеси $Q(t)$ не зависит от пространственной координаты x , поскольку кровь и эмболизат рассматриваются как несжимаемые жидкости. Здесь и везде далее под расходом жидкости понимается ее объемный расход, представляющий собой массовый расход жидкости, деленный на ее плотность. С учетом этого из соотношения (2.3) следует, что плотность потока смеси крови и эмболизата внутри АВМ задается формулой

$$\rho(t, x) = \frac{\rho_b Q_b(t, x) + \rho_e Q_e(t, x)}{Q(t)} = \rho_e + (\rho_b - \rho_e)f(S(t, x)),$$

где ρ_b — плотность крови и ρ_e — плотность эмболизата.

Рассмотрим систему кровеносных сосудов (фиг. 1), которая в упрощенном виде воспроизводит перераспределение артериального потока крови вблизи АВМ, изображенной на фиг. 1 серой фигурой. Кривыми l_j , соединяющими на фиг. 1 узлы B_1 и B_j , где $j = 2, 3$, моделируются здоровые мозговые сосуды, через которые в течение всей операции протекает только кровь. $B_1 - B_2$ — здоровый кровеносный сосуд постоянного сопротивления R_{12} ; $B_1 - B_3$ — сосуд, подводящий кровь к АВМ (афферент) постоянного сопротивления R_{13} ; $B_3 - B_4$ — участок кровеносной системы, включающий в себя АВМ (серая фигура) с расходом крови Q_b и расходом эмболизата Q_e , расход эмболизата на входе в АВМ обозначен q_e ; Q_1 — расход артериальной крови, приходящей в узел B_1 , Q_{12} и Q_{13} — потоки крови в соответствующих сосудах. Будем предполагать, что геометрия этих сосудов во время операции не изменяется, в силу чего расходы крови $Q_{1j}(t)$ в этих сосудах не зависят от пространственных координат и изменяются в процессе эмболизации только как функции времени. Поскольку за счет механизма ауторегуляции церебральный поток крови изменяется достаточно мало, будем считать, что входной расход артериальной крови Q_1 , приходящей в узел B_1 , является постоянным. Обозначим через p_i давление крови в узле B_i на фиг. 1, где $i = 1, 2, 3$. Давления $p_1(t)$ и $p_3(t)$ изменяются в течение эмболизации. Начальные значения давлений $p_1(0)$, $p_3(0)$ задаются в соответствии с клиническими данными. Давление p_2 на выходе из здорового сосуда l_{12} будем считать постоянным, в то время как давление p_4 на выходе из АВМ с те-



Фиг. 1. Модель АВМ, включенная в систему церебрального кровообращения.

чением времени изменяется. Конкретные значения давлений p_2 , p_4 считаются известными и получаются из клинических данных, причем p_4 зависит от распределения эмболизата в теле АВМ и задается как функция от средней концентрации крови в АВМ $p_4 = p_4(\bar{S})$, где $\bar{S}(t) = 1/L \int_0^L S(x, t) dx$.

Из закона гидравлического сопротивления [14] для здоровых кровеносных сосудов получаем

$$p_1 - p_j = R_{1j} Q_{1j}, \quad R_{1j} = \int_{x \in l_{1j}} r_{1j}(x) dl_{1j}, \quad j = 2, 3, \quad (2.4)$$

где r_{1j} — локальное (удельное) гидравлическое сопротивление сосуда, соединяющего узлы B_1 и B_j ; dl_{1j} — дифференциал длины дуги кривой l_{1j} , которой моделируется этот сосуд. Из закона Дарси для АВМ [13] в общем случае находим:

$$p_3 - p_4 = \int_0^L r_b(x, S(t, x)) Q_b(t, x) dx, \quad (2.5)$$

где

$$r_b(x, S) = \frac{\eta_b}{AK(x)k_b(x, S)}$$

есть локальное сопротивление прохождению крови внутри АВМ, в котором η_b — вязкость крови, $K(x)$ — абсолютная проницаемость АВМ, а $k_b(x, S)$ — относительная проницаемость для крови (способ их определения по клиническим данным будет описан ниже).

Исключая из уравнений (2.4) давление p_1 с учетом того, что

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{13} \Rightarrow Q_{12} = Q_1 - Q_{13},$$

получаем

$$p_2 + R_{12} Q_1 = p_3 + R_{13} Q_{13}, \quad R_1 = R_{12} + R_{13}. \quad (2.6)$$

Исключая из уравнений (2.5) и (2.6) давление p_3 , приходим к формуле

$$p_2 + R_{12} Q_1 = p_4 + R_{13} Q_{13} + \int_0^L r_b(x, S(t, x)) Q_b(t, x) dx,$$

которую с учетом того, что $Q_{13} = Q_b(t, 0)$ и $Q_b(t, x) = Q(t) f(S(t, x))$, можно переписать в виде

$$Q(t) = a(\bar{S}(t)) \left(R_1 f(S(t, 0)) + \int_0^L \varphi(x, S(t, x)) dx \right)^{-1}, \quad \varphi(x, S) = f(S) r_b(x, S), \quad (2.7)$$

где $a(\bar{S}(t)) = p_2 - p_4(\bar{S}(t)) + R_{12} Q_1$. При известных значениях расхода Q_1 , давлений p_2 , p_4 и сопротивлений R_{12} , R_{13} , а также при заданных функциях $f(S)$ и $r_b(x, S)$, уравнения (2.1) и (2.7) образуют

замкнутую систему интегродифференциальных уравнений для определения расхода смеси $Q(t)$ и концентрации крови $S(t, x)$ внутри АВМ.

Поскольку в начальный момент времени $t = 0$ внутри АВМ находится только кровь, то начальное значение ее концентрации равно единице, т.е.

$$S(0, x) = 1, \quad x \in [0, L]. \quad (2.8)$$

С учетом условий (2.2) и (2.8) из уравнения (2.7) получаем начальное значение расхода крови (в смеси отсутствует эмболизат)

$$Q(0) = a(1) \left(R_1 + \int_0^L r_b(x, 1) dx \right)^{-1}. \quad (2.9)$$

Из физической постановки задачи следует, что в течение всего времени T проведения хирургической операции выполнено неравенство

$$Q(t) > 0, \quad t \in [0, T],$$

в силу чего характеристики дифференциального уравнения (2.1) распространяются со скоростями $Q(t)f'(S(t, x)) > 0$. Это означает, что для корректной постановки начально-краевой задачи для уравнения (2.1) на отрезке $[0, L]$ граничное условие необходимо задавать на левой границе этого отрезка. Поскольку процесс лечения происходит путем заполнения АВМ эмболизатом через подводящую артерию (точка B_3 на фиг. 1), то расход

$$q_e(t) = Q_e(t, 0), \quad Q(t) = \frac{q_e(t)}{1 - f(S(t, 0))}$$

вводимого эмболизата с учетом формулы (2.7) задает интегральное граничное условие для $S(t, 0)$:

$$f(S(t, 0)) = \frac{1}{a(\bar{S}(t)) + R_1 q_e(t)} \left(a(\bar{S}(t)) - q_e(t) \int_0^L \varphi(x, S(t, x)) dx \right), \quad (2.10)$$

в котором граничное значение концентрации крови $S(t, 0)$ зависит от значений этой концентрации на всем отрезке $[0, L]$.

Следует заметить, что в рассматриваемой задаче $a(\bar{S}) > 0$ в силу того, что из физиологии перепад давления $p_2 - p_4(\bar{S})$ между венозным концом здорового сосуда B_2 и венозным концом мальформации B_4 по абсолютной величине не превосходит перепада давления $R_1 Q_1$ между артериальным B_1 и венозным концом здорового сосуда B_2 , который реализуется при полном прекращении потока крови через АВМ. Поэтому знаменатель в формуле (2.10) не может быть отрицательным, и поскольку по определению $f(S) \geq 0$, то из формулы (2.10) следует ограничение на возможный расход эмболизата $q_e(t)$:

$$q_e(t) \leq a(\bar{S}(t)) \left(\int_0^L \varphi(x, S(t, x)) dx \right)^{-1}. \quad (2.11)$$

Это ограничение является естественным, поскольку перепад давления между артериальным и венозным бассейнами не может обеспечить фильтрацию сколь угодно большого количества эмболизата через тело АВМ.

3. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

В работе [15] для численного решения гиперболических уравнений была предложена трехслойная по времени и двухточечная по пространству схема Upwind Leapfrog, которая имеет второй порядок аппроксимации на гладких решениях, является явной и условно устойчивой при числах Куранта $r \in (0, 1]$. Детальный анализ этой схемы был проведен в работах [16], [17], в которых с учетом кососимметричности своего пространственного шаблона она была названа схемой CABARET. Основные достоинства этой схемы связаны с тем, что она задана на компактном пространственном шаблоне, является обратимой по времени и точной при двух различных числах

Куранта $r = 0.5, 1$, что наделяет ее уникальными диссипативными и дисперсионными свойствами [17]. Для численного решения уравнений одномерной газовой динамики был разработан балансно-характеристический вариант схемы CABARET [18], который с учетом коррекции потоковых переменных (необходимой для монотонизации разностного решения на ударных волнах) показал высокую точность при расчете классического теста Blast Wave [19]. В настоящее время для численного моделирования пространственно многомерных газодинамических [20] и гидравлических [21] течений широко применяется двухслойная по времени форма записи схемы CABARET [22], [23]. Монотонность этой схемы при аппроксимации скалярного закона сохранения с выпуклым потоком исследовалась в [24] и с невыпуклым потоком — в [25]. В настоящей работе численный расчет начально-краевой задачи (2.8), (2.10) для системы интегродифференциальных уравнений (2.1), (2.7) проводится на основе предложенной в [25], [26] монотонной модификации схемы CABARET. Краткое описание численного алгоритма приводится ниже.

Разобьем отрезок $[0, L]$, на котором решается задача, на N равных частей длины $h = L/N$ и зададим равномерную по пространству прямоугольную разностную сетку

$$\{x_j, t_n\}: x_j = jh, \quad j = \overline{0, N}; \quad t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad t_0 = 0; \quad (3.1)$$

в которой h — постоянный шаг сетки по пространству, а τ_n — шаг сетки по времени, определяемый из условия устойчивости Куранта. В схеме CABARET используются потоковые $u_j^n = U(x_j, t_n)$ и консервативные $U_{j+1/2}^n = U(x_{j+1/2}, t_n)$ переменные, заданные соответственно в целых x_j и полуцелых $x_{j+1/2} = x_j + h/2$ пространственных узлах разностной сетки (3.1), где U — приближенное численное значение концентрации крови S .

Пусть $u_j^n, U_{j+1/2}^n$ — известное численное решение задачи (2.1), (2.7), (2.8), (2.10) на n -м временном слое t_n ; при $n = 0$ — точная сеточная аппроксимация начального условия (2.8):

$$u_j^0 = S(0, x_j) = 1, \quad j = \overline{0, N}; \quad U_{j+1/2}^0 = S(0, x_{j+1/2}) = 1, \quad j = \overline{0, N-1}.$$

Численное решение $u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1}$ на $(n+1)$ -м временном слое t_{n+1} будем находить по схеме CABARET в несколько этапов. На первом этапе по формуле

$$\tau_n = \frac{rh}{\max_j \Psi'_S(t_n, U_{j+1/2}^n)}, \quad \Psi'_S(t, S) = \frac{Q(t)f'(S)}{Am},$$

где $r = 0.5$, вычисляется шаг схемы по времени на n -м временном слое.

На втором этапе путем аппроксимации со вторым порядком интегрального уравнения (2.7) находится численное значение потока смеси на n -м временном слое

$$Q_n = a \left(\frac{h}{L} \sum_{j=0}^{N-1} U_{j+1/2}^n \right) \left(R_1 f_0^n + h \sum_{j=0}^{N-1} \Phi_{j+1/2}^n \right)^{-1}, \quad \Phi_{j+1/2}^n = r_b(x_{j+1/2}, U_{j+1/2}^n) f_{j+1/2}^n, \quad (3.2)$$

после чего на третьем этапе по разностным уравнениям

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1/2} - U_{j+1/2}^n}{\tau_n/2} + \frac{Q_n}{Am} \left(\frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{h} \right) = 0, \quad j = \overline{0, N-1}, \quad (3.3)$$

вычисляются значения консервативных переменных $U_{j+1/2}^{n+1/2} = U(x_{j+1/2}, t_{n+1/2})$ на полуцелом временном слое $t_{n+1/2} = t_n + \tau_n/2$. При записи формул (3.2) и (3.3) использованы сокращенные обозначения $f_j^n = f(u_j^n)$ и $f_{j+1/2}^n = f(U_{j+1/2}^n)$.

На четвертом этапе находятся значения численных потоков $f_j^{n+1/2} = f(u_j^{n+1/2})$, в которых $u_j^{n+1/2} = U(x_j, t_{n+1/2})$. В результате аппроксимации со вторым порядком интегрального граничного условия (2.10) находится значение численного потока на левой границе расчетной области

$$f_0^{n+1/2} = \frac{a \left(\frac{h}{L} \sum_{j=0}^{N-1} U_{j+1/2}^{n+1/2} \right) - q_e(t_{n+1/2}) h \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_{j+1/2}^{n+1/2}}{a(t_{n+1/2}) + R_1 q_e(t_{n+1/2})}, \quad \varphi_{j+1/2}^{n+1/2} = r_b(x_{j+1/2}, U_{j+1/2}^{n+1/2}) f_{j+1/2}^{n+1/2}, \quad (3.4)$$

где $f_{j+1/2}^{n+1/2} = f(U_{j+1/2}^{n+1/2})$. Численные потоки $f_j^{n+1/2}$ при $j = \overline{1, N}$ вычисляются также, как в работе [25].

На пятом этапе по формуле (3.2), в которой индекс n заменен на $n + 1/2$, определяется численное значение потока смеси $Q_{n+1/2}$ на полущелом временном слое, после чего на шестом этапе по разностным уравнениям

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j+1/2}^n}{\tau_n} + \frac{Q_{n+1/2}}{Am} \left(\frac{f_{j+1}^{n+1/2} - f_j^{n+1/2}}{h} \right) = 0, \quad j = \overline{0, N-1}, \quad (3.5)$$

вычисляются значения консервативных переменных $U_{j+1/2}^{n+1}$ на $(n + 1)$ -м временном слое. На седьмом этапе на $(n + 1)$ -м временном слое находятся значения потоковых переменных u_j^{n+1} , которые вычисляются также, как в работе [25].

4. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОЙ ЭМБОЛИЗАЦИИ

Для постановки задачи оптимальной эмболизации необходимо определить критерии эффективности операции и необходимые медицинские ограничения. Эффективность эмболизации мы будем определять тем, насколько полно заполняется АВМ с помощью эмболизата. Математически это условие требует нахождения оптимального расхода эмболизата $q_e(t)$, при котором достигается минимум функционала

$$J[q_e] = \frac{1}{L} \int_0^L S_{q_e}(T, x) dx, \quad (4.1)$$

где $S_{q_e}(t, x)$ – решение начально-краевой задачи (2.1), (2.7), (2.8), (2.10) с заданным расходом эмболизата $q_e(t)$. Медицинские ограничения требуют выполнения следующих двух условий:

$$\max_{t \in [0, T]} p_3 \leq p_{\max}, \quad (4.2)$$

$$S_{q_e}(t, L) = 1, \quad t \in [0, T]. \quad (4.3)$$

Первое из этих условий означает, что давление p_3 на артериальном конце АВМ не превышает заданного критического давления $p_{\max}$, а второе условие позволяет избежать проникновения эмболизата в венозное русло. Нарушение этих условий увеличивает риск мозгового кровоизлияния.

Рассмотрим решение начально-краевой задачи (2.1), (2.7), (2.8), (2.10), удовлетворяющее ограничениям (2.11), (4.2), (4.3). Одна из возможных методик проведения операции заключается в задании некоторого начального расхода эмболизата, а затем снижение этого расхода до нуля при завершении операции. В соответствии с этим рассмотрим сценарий подачи эмболизата специального вида $q_e(t) = \gamma Q(0)E(t)$, где γ – безразмерный параметр, $E(t)$ – безразмерная функция, которая имеет следующий вид:

$$E(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \tau_1, \\ 1 - (t - \tau_1)/\tau_2, & \tau_1 \leq t < \tau_1 + \tau_2, \\ 0, & \tau_1 + \tau_2 \leq t, \end{cases} \quad (4.4)$$

где $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, $\tau_1 + \tau_2 = T$. Из формулы (4.4), в частности, следует, что если $\gamma = 1$, то в начальный момент времени расход эмболизата совпадает с расходом крови через АВМ до эмболизации, т.е. $q_e(0) = Q(0)$, а затем в течение операции расход эмболизата уменьшается по линейному зако-

ну и становится равным нулю к концу операции. В сценарии эмболизации, который задается формулой (4.4), управление подачей эмболизата на вход АВМ происходит при помощи трех параметров: γ , τ_1 и τ_2 . Мы расширим класс допустимых управлений, включая в рассмотрение разрывную функцию

$$E(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \tau_1, \\ 0, & \tau_1 \leq t, \end{cases} \quad (4.5)$$

получаемую из непрерывной функции (4.4) при $\tau_2 \rightarrow 0$.

Далее решение задачи оптимальной эмболизации ищется в классе функций (4.4), (4.5) при различных значениях входных параметров γ , τ_1 и τ_2 .

5. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ БАКЛЕЯ–ЛЕВЕРЕТТА ПО КЛИНИЧЕСКИМ ДАННЫМ

Для решения задачи эмболизации используются функции Баклея–Левретта, построенные по клиническим данным мониторинга гемодинамических параметров во время нейрохирургических операций в НМИЦ им. Мешалкина [27]. Для этого при помощи аппарата Philips Combo-Mар с датчиком Philips ComboWire (диаметр датчика – 0.36 мм, длина датчика – 1.85 м) в процессе нейрохирургических операций измеряются скорость и давление кровотока внутри различных сосудов головного мозга вблизи патологии. Таким способом получены значения давления и скорости на входе АВМ (в артерии) перед, во время и после проведения операции по эмболизации, а также на выходе из АВМ (в вене) перед и после проведения операции.

Функция Баклея–Левретта $f(S)$ полностью определяется относительными фазовыми проницаемостями и вязкостями крови и эмболизата:

$$f(S) = \frac{k_b(S)/\eta_b}{k_b(S)/\eta_b + k_e(S)/\eta_e}, \quad (5.1)$$

здесь $k_b(S)$, η_b – относительная фазовая проницаемость и коэффициент динамической вязкости крови, $k_e(S)$, η_e – эмболизирующего вещества. Далее используются известные вязкости крови [28] и распространенного эмболизата ONYX18 [4], которые составляют: $\eta_b = 4$ сП, $\eta_e = 18$ сП.

Будем считать, что зависимость между падением давления и объемным расходом крови в теле АВМ приближенно описывается законом Дарси:

$$Q_b(t) = -KA \frac{k_b(\bar{S}(t))\Delta p(t)}{\eta_b L}, \quad (5.2)$$

где K – постоянная абсолютная проницаемость пористой среды, которая вычисляется по данным мониторинга до начала эмболизации при $t = 0$, когда через АВМ течет только кровь, в силу чего $\bar{S}(0) = 1$, $k_b(\bar{S}(0)) = 1$. С учетом этого из формулы (5.2) получаем

$$K = -\frac{Q_b(0)\eta_b L}{A\Delta p(0)}. \quad (5.3)$$

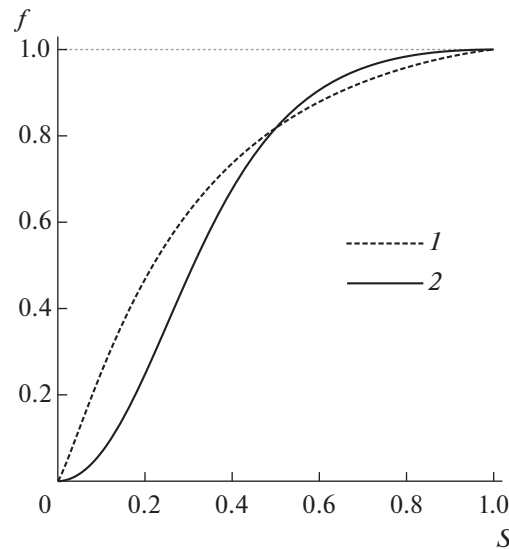
Из закона Дарси (5.2) с учетом (5.3) можно получить следующую формулу для относительной проницаемости крови:

$$k_b(\bar{S}(t)) = \frac{Q_b(t)\Delta p(0)}{Q_b(0)\Delta p(t)}. \quad (5.4)$$

Из формулы (5.4) видно, что полученная таким образом относительная проницаемость крови не зависит от вязкостей крови и эмболизата, а также от геометрических свойств АВМ.

Для аналитической аппроксимации относительной фазовой проницаемости крови используется модель Кори [29], в которой $k_b(S) = S^\alpha$, где параметр $\alpha > 1$ при известной функции $\bar{S}(t)$ с учетом (5.4) определяется из формулы

$$(\bar{S}(t))^\alpha = \frac{Q_b(t)\Delta p(0)}{Q_b(0)\Delta p(t)}. \quad (5.5)$$



Фиг. 2. Функции Баклея–Левретта, построенные по клиническим данным для пациентов 1 и 2.

Относительная проницаемость эмболизата $k_e(S)$ предполагается симметричной относительно проницаемости крови в следующем смысле:

$$k_e(S) = k_b(1 - S). \quad (5.6)$$

Таким образом, функция Баклея–Левретта принимает следующий вид:

$$f(S) = \frac{S^\alpha / \eta_b}{S^\alpha / \eta_b + (1 - S)^\alpha / \eta_e}. \quad (5.7)$$

Для нахождения из формулы (5.5) параметра α методом наименьших квадратов используются данные операций, в которых достигалась тотальная эмболизация АВМ, означающая, что поток крови через АВМ в конце операции прекратился. По данным i -го измерения в момент времени t_i восстанавливаются объемный расхода крови $Q_b(t_i)$, перепад давления $\Delta p(t_i)$ между артериальным и венозным концами патологии, а также средняя по объему концентрация крови $\bar{S}(t_i)$ в теле АВМ. Давление p_4 на венозном конце АВМ во время операции определяется путем линейной интерполяции значений этого давления до и после операции. На фиг. 2 кружками и треугольниками показаны значения функции Баклея–Левретта для пациентов 1 и 2 соответственно, полученные из клинических данных по формуле (5.1), в которой относительная проницаемость крови определяется по формуле (5.4), а относительная проницаемость эмболизата — по формуле (5.6). Линиями показаны графики приближенных функций Баклея–Левретта, полученных по формуле (5.7), которые используются во всех дальнейших расчетах.

6. ОПТИМАЛЬНЫЙ СЦЕНАРИЙ ЭМБОЛИЗАЦИИ

Оптимальные сценарии эмболизации найдены численно путем расчета значений целевого функционала (4.1) и ограничений (2.11), (4.2), (4.3). При расчетах предполагалось, что структура АВМ достаточно однородна и в силу этого величины K , k_b не зависят от x , кроме того предполагалось, что $R_{13} \ll R_{12}$ и сопротивлением подводящего сосуда можно пренебречь, т.е. $R_{13} = 0$. Значение критического давления $p_{\max}$ выбрано равным 80 мм рт.ст. Параметры модели АВМ, включенной в систему церебрального кровообращения для двух пациентов, приведены в табл. 1. Чтобы изучить поведение целевого функционала и ограничений для двух пациентов в зависимости от значений параметров τ_1 , τ_2 и γ , рассматривается сетка в области параметров $[\tau_1', \tau_1''] \times [\tau_2', \tau_2''] \times [\gamma', \gamma']$. Также изучается вопрос о влиянии на процесс эмболизации исходного распределения кровотока между здоровым сосудом и АВМ, для этого все расчеты проведены для

Таблица 1. Параметры модели АВМ из клинических данных пациентов

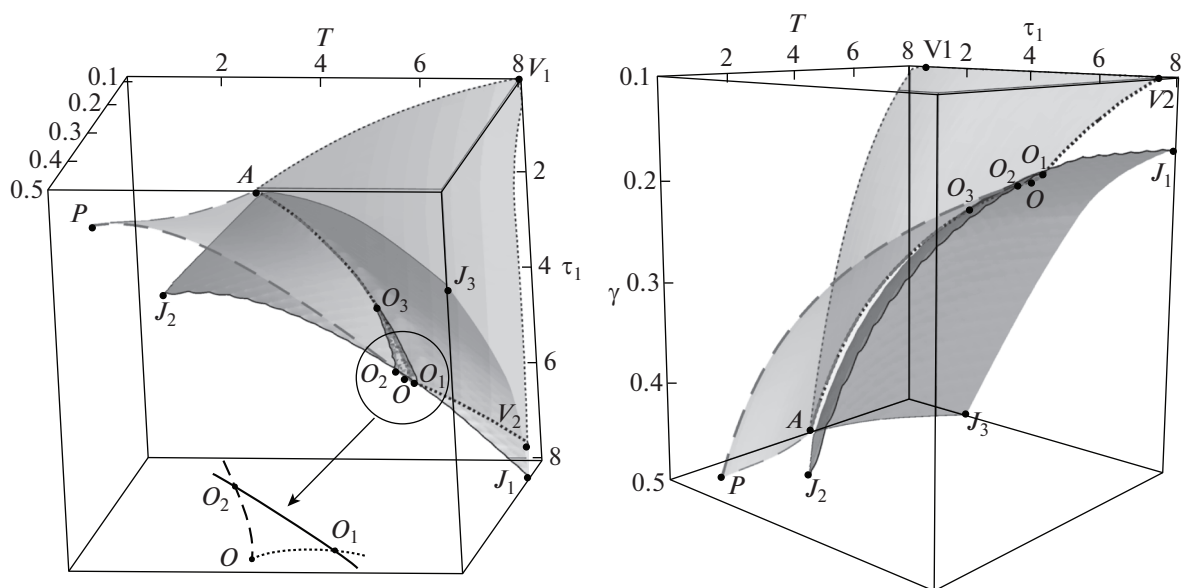
Пациент	α	A [см ²]	L [см]	K [см ²]	$Q(0)$ [см ³ /с]	p_2 [мм рт. ст.]	$p_3(0)$ [мм рт. ст.]	$p_4(\bar{S})$ [мм рт. ст.]
1	1.18	0.83	2.4	2.014E-6	0.94	7	58.26	0.82(21.75 - $\bar{S}$)
2	1.89	1.46	3	2.299E-6	1.22	7	49.47	3.09(5.47 - $\bar{S}$)

Таблица 2. Характеристики расчетной сетки

Пациент	k_{12}	τ'_1	τ''_1	$\Delta\tau_1$	τ'_2	τ''_2	$\Delta\tau_2$	γ'	γ''	$\Delta\gamma$
1	0.5	0.05	8.05	0.25	0.05	8.05	0.25	0.1	0.7	0.025
	1	0.05	8.05	0.25	0.05	8.05	0.25	0.1	0.5	0.025
	1.5	0.05	8.05	0.25	0.05	8.05	0.25	0.1	0.4	0.025
2	0.5	0.05	16.05	0.25	0.05	16.05	0.25	0.1	0.5	0.025
	1	0.05	16.05	0.5	0.05	16.05	0.5	0.1	0.45	0.025
	1.5	0.05	12.05	0.5	0.05	12.05	0.5	0.1	0.375	0.0125

трех различных значений потока через здоровый сосуд до эмболизации, когда $Q_{12}(0) = k_{12}Q(0)$, где k_{12} принимает значения 0.5, 1, 1.5. Характеристики выбранной сетки параметров приведены в табл. 2. Для нахождения экстремума функционала и проверки ограничений использовались сеточные данные, а для визуализации результатов использовалась интерполяция сеточных данных.

На фиг. 3 представлен расчет для пациента 1 при $k_{12} = 1$. Данная картина является типичной и для остальных случаев. Область допустимых значений параметров лежит выше поверхности ограничений $OPAV_1V_2$, составленной из поверхности критического давления OPA и поверхности венозного ограничения OAV_1V_2 , две эти поверхности пересекаются по кривой AO . Также на фиг. 3 изображена одна из поверхностей уровня $J_1J_2J_3$ целевого функционала J , соответствующее ей значение функционала больше оптимального, вследствие чего в область допустимых па-



Фиг. 3. Поверхность ограничений $OPAV_1V_2$ и типичная поверхность уровня $J_1J_2J_3$ функционала в пространстве параметров (τ_1, T, γ) для пациента 1 при $k_{12} = 1$.

Таблица 3. Таблица оптимальных значений параметров и функционала

Пациент	k_{12}	τ_1	τ_2	γ	J
1	0.5	Кривая OA			0.588
	1	5.55	0.05	0.2	0.474
	1.5	5.3	0.05	0.25	0.372
2	0.5	Кривая OA			0.568
	1	9.55	0.05	0.225	0.401
	1.5	7.55	0.05	0.375	0.211

раметров попадают точки этой поверхности, лежащие в криволинейном треугольнике $O_1O_2O_3$. При уменьшении значения функционала до оптимального в данном случае весь криволинейный треугольник переходит в точку O .

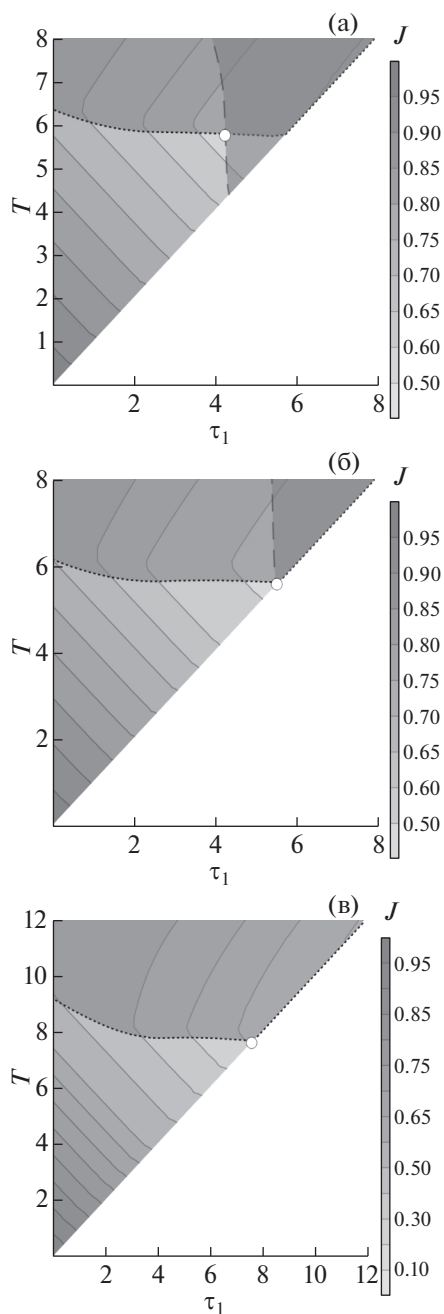
Результаты всех расчетов приведены в табл. 3, в которой указаны оптимальные значения параметров и соответствующие им значения целевого функционала. Наблюдаются три качественно различных случая оптимальной эмболизации, которые переходят из одного в другой при изменении расхода крови через здоровый сосуд. Эти случаи проиллюстрированы на фиг. 4, где показаны результаты расчетов на плоскости (τ_1, T) , которая представляет собой сечение пространства параметров (τ_1, T, γ) плоскостью оптимального значения γ . Область $OCDE$ — область венозного ограничения, граница этой области указана пунктирной линией, а область OBC — область превышения критического давления, граница этой области указана штриховой линией. Значения линий уровня функционала отмечены шкалой справа от фигуры, а белая точка отмечает оптимальное значение параметров $\tau_1, \tau_2 = T - \tau_1$. В первых двух случаях (фиг. 4а, б) активными являются венозное ограничение (4.3), а также ограничение, соответствующее достижению критического давления (4.2). В этих случаях оптимальное значение функционала достигается на кривой OA (фиг. 3) — кривой пересечения границы области венозного ограничения и поверхности критического давления.

В первом случае (фиг. 4а) кривая OA лежит на весьма малом расстоянии от поверхности уровня целевого функционала, соответствующей режиму оптимальной эмболизации — значения целевого функционала в точках кривой OA различаются на величину порядка 1%. В этом случае с практической точки зрения в качестве оптимального режима эмболизации могут использоваться все точки кривой OA , соответствующие как разрывному режиму эмболизации — для граничной точки O (4.5), так и непрерывным кусочно-линейным режимам — для остальных точек кривой (4.4). Данный случай соответствует значениям $k_{12} = 0.5$ для пациента 1 и пациента 2. На фиг. 4а изображен один из оптимальных режимов эмболизации с параметрами $\tau_1 = 4.3, \tau_2 = 1.55, \gamma = 0.175$.

Во втором случае (фиг. 4б) кривая OA пересекается с поверхностью уровня целевого функционала, соответствующей оптимальному режиму эмболизации в единственной точке O , в результате чего оптимальный режим эмболизации является разрывным и задается формулой (4.5). Данный случай реализуется для пациента 1 при $k_{12} = 1, 1.5$ и для пациента 2 при $k_{12} = 1$.

В третьем случае (фиг. 4в) для пациента 2 при $k_{12} = 1.5$ не достигается значение критического давления для всех рассмотренных значений параметров, а оптимальный режим реализуется при максимально допустимом расходе эмболизата, определяемый ограничением (2.11). Точка, соответствующая оптимальному режиму эмболизации, лежит на границе области допустимых параметров, и режим эмболизации также является разрывным (4.5). В этом случае достигается самая маленькая степень содержания крови в АВМ в конце операции.

Из результатов расчетов следует, что большее значение потока крови через обходящий (здоровый) сосуд до эмболизации приводит к меньшему значению средней концентрации крови в АВМ в конце эмболизации (меньшему значению целевого функционала J). Кроме того, оптимальный сценарий эмболизации во всех рассмотренных случаях характеризуется приближением эмболизата к венозному концу АВМ и активностью одного из оставшихся ограничений.



Фиг. 4. Плоскость (τ_1, T) для различных режимов эмболизации, (а) пациент 1, $k_{12} = 0.5$, (б) пациент 1, $k_{12} = 1$, (в) пациент 2, $k_{12} = 1.5$.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе поставлена задача оптимального управления для интегродифференциальной системы, возникающая из прикладной проблемы об оптимальном режиме эмболизации артериовенозных мальформаций сосудистой системы человека. Роль управления играет режим подачи эмболизата в АВМ.

Для описания движения эмболизата в теле АВМ используется уравнение двухфазной фильтрации Баклея—Левретта, в котором функции Баклея—Левретта находятся для двух пациентов по данным интраоперационных измерений. В модели учитывается перераспределение крови в здоровые сосуды в процессе эмболизации.

Для численного исследования поставленной задачи разработана модификация схемы CABARET.

Для семейства режимов эмболизации специального вида численно найдены оптимальные режимы эмболизации, соответствующие краевым экстремумам целевого функционала. Расчеты проведены для двух пациентов при трех различных значениях расхода в прилегающих к АВМ здоровых сосудах. Получено, что большее значение потока крови через обходящий (здоровый) сосуд до эмболизации приводит к меньшему значению средней концентрации крови в АВМ в конце оптимальной эмболизации, таким образом эмболизация малопоточных АВМ более эффективна. Оптимальный сценарий эмболизации во всех случаях характеризуется приближением эмболизата к венозному концу АВМ и активностью одного из оставшихся ограничений: на давление на артериальном конце АВМ и на максимальный расход эмболизата. В зависимости от строения тела АВМ и примыкающих к нему сосудов оптимальные режимы эмболизации могут быть как разрывными, так и непрерывными функциями времени.

Построенные оптимальные решения в дальнейшем планируется использовать для усовершенствования методики и повышения безопасности проведения нейрохирургических операций. В дальнейшем планируется совершенствование метода поиска оптимального решения, а также развитие модели с целью более полного учета физиологических особенностей кровеносной системы.

Исследование проводилось в соответствии с Хельсинкской декларацией и было одобрено Инспекционной комиссией Клиники им. Мешалкина (заседание № 549). Все включенные пациенты дали информированное согласие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mast H., Mohr J.P., Osipov A., Pile-Spellman J., Marshall R.S., Lazar R.M., Stein B.M., Young W.L. "Steal" is an unestablished mechanism for the clinical presentation of cerebral arteriovenous malformations // *Stroke*. 1995. V. 26. № 7. P. 1215–1220.
2. Arteriovenous Malformation Study Group. Arteriovenous malformations of the brain in adults // *NEJM*. 1999. V. 340. № 23. P. 1812–1818.
3. Solomon R.A., Connolly E.S., Jr. Arteriovenous malformations of the brain // *NEJM*. 2017. V. 376. № 19. P. 1859–1866.
4. Maimon S., Strauss I., Frolov V., Margalit N., Ram Z. Brain arteriovenous malformation treatment using a combination of Onyx and a new detachable tip microcatheter, SONIC: short-term results // *AJNR*. 2010. V. 31. № 5. P. 947–954.
5. Baharvahdat H., Blanc R., Termechi R., Pistocchi S., Bartolini B., Redjem H., Piotin M. Hemorrhagic complications after endovascular treatment of cerebral arteriovenous malformations // *AJNR*. 2014. V. 35. № 5. P. 978–983.
6. Бруснянская А.С., Кривошапкин А.Л., Орлов К.Ю., Альшевская А.А., Москалев А.В., Сергеев Г.С., Гайтан А.С., Симонович А.Е. Сравнение результатов и выявление предикторов неблагоприятного исхода после эндоваскулярной эмболизации у больных с разными типами течения артериовенозных мальформаций головного мозга // *Патология кровообращения и кардиохирургия*. 2019. Т. 23. № 1.
7. Guglielmi G. Analysis of the hemodynamic characteristics of brain arteriovenous malformations using electrical models: baseline settings, surgical extirpation, endovascular embolization, and surgical bypass // *Neurosurgery*. 2008. V. 63. № 1. P. 1–11.
8. Litaio M.L.S., Pilar-Arceo C.P.C., Legaspi G.D. AVM Compartments: Do they modulate transnidial pressures? An electrical network analysis // *AJNS*. 2012. V. 7. № 4. P. 174.
9. Telegina M.N., Chupakhin A.P., Cherevko A.A. Local model of arteriovenous malformation of the human brain // *JPCS*. 2013. V. 410. P. 012001.
10. White A.H., Smith F.T. Computational modelling of the embolization process for the treatment of arteriovenous malformations (AVMs) // *Math. and Comput. Modelling*. 2013. V. 57. № 5–6. P. 1312–1324.
11. Orlowski P., Summers P., Noble J.A., Byrne J., Ventikos Y. Computational modelling for the embolization of brain arteriovenous malformations // *Medical Eng-ng and Physics*. 2012. V. 34. № 7. P. 873–881.
12. Buckley S.E., Leverett M.C. Mechanism of fluid displacement in sands // *Transactions of the AIME*. 1942. V. 146. № 01. P. 107–116.
13. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993.
14. Башта Т.М., Руднев С.С., Некрасов Б.Б., Байбаков О.В., Кирилловский Ю.Л. Гидравлика, гидромашины и гидроприводы. М.: Машиностр., 1982.
15. Iserles A. Generalized leapfrog methods // *IMA Journal of Numerical Analysis*. 1986. V. 6. № 4. P. 381–392.

16. Головизнин В.М., Самарский А.А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Матем. моделирование. 1998. Т. 10. № 1. С. 86–100.
17. Головизнин В.М., Самарский А.А. Некоторые свойства разностной схемы “Кабаре” // Матем. моделирование. 1998. Т. 10. № 1. С. 101–116.
18. Головизнин В.М. Балансно-характеристический метод численного решения уравнений газовой динамики // Докл. АН. 2005. Т. 403. № 4. С. 459–464.
19. Woodward P., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // J. Comput. Phys. 1984. V. 54. № 1. P. 115–173.
20. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. New efficient high-resolution method for nonlinear problems in aeroacoustics // AIAA Journal. 2007. V. 45. № 12. P. 2861–2871.
21. Karabasov S.A., Berloff P.S., Goloviznin V.M. CABARET in the ocean gyres // Ocean Modelling. 2009. V. 30. № 2–3. P. 155–168.
22. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. Compact Accurately Boundary-Adjusting high-Resolution Technique for fluid dynamics // J. Comput. Phys. 2009. V. 228. № 19. P. 7426–7451.
23. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Изд-во Московского университета, 2013.
24. Зюзина Н.А., Остапенко В.В. О монотонности схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей скалярный закон сохранения с выпуклым потоком // Докл. АН. 2016. Т. 466. № 5. С. 513–517.
25. Остапенко В.В., Черевко А.А. Применение схемы КАБАРЕ для расчета разрывных решений скалярного закона сохранения с невыпуклым потоком // Докл. АН. 2017. Т. 476. № 5. С. 518–522.
26. Gologush T.S., Cherevko A.A., Ostapenko V.V. Comparison of the WENO and CABARET schemes at calculation of the scalar conservation law with a nonconvex flux // AIP Conf. Proc. 2020. V. 2293. № 1. P. 370006.
27. Хе А.К., Черевко А.А., Чупахин А.П., Кривошапкин А.Л., Орлов К.Ю., Панарин В.А. Мониторинг гемодинамики сосудов головного мозга // Прикл. механ. и техн. физ. 2017. Т. 58. № 5. С. 7–16.
28. Caro C.G., Pedley T.J., Schroter R.C., Seed W.A. The mechanics of the circulation. Oxford University Press, 1978.
29. Brooks R.H., Corey A.T. Hydraulic properties of porous media and their relation to drainage design // Transactions of the ASAE. 1964. V. 7. № 1. P. 0026–0028.