# СОДЕРЖАНИЕ

## Том 504, 2022

## ФИЗИКА

Высокоселективные сверхразмерные щелевые резонаторы для релятивистских гиротронов миллиметрового диапазона	
Ю. Ю. Данилов, А. Н. Леонтьев, А. М. Малкин, Р. М. Розенталь, Д. Ю. Щегольков, Н. С. Гинзбург	3
Модель всплытия подводного трубопровода	
М. А. Ильгамов	10
Влияние нелинейности на процесс генерации магнитного поля в звездах при достаточно больших динамо-числах	
Е. П. Попова	15
Синтез оксидных, нитридных и оксинитридных материалов микро- и наноразмеров на основе порошков Al/AlN, Al/Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub>	
А. С. Соколов, В. Д. Борзосеков, Е. В. Воронова, Д. В. Малахов, В. Д. Степахин, Е. А. Образцова, О. Н. Шишилов	19
Детектирование фазовых переходов в антиферромагнетике Ho <sub>0.8</sub> Lu <sub>0.2</sub> B <sub>12</sub> при измерениях эффекта Холла	
А. Л. Хорошилов, А. В. Богач, С. В. Демишев, К. М. Красиков, В. Н. Краснорусский, С. Е. Половец, В. Б. Филипов, Н. Е. Случанко	26
МЕХАНИКА	
Условия разделения девиаторных и шаровых свойств у изотропных тензорно-нелинейных функций	
Д. В. Георгиевский	32
Численное моделирование влияния волны Maxa на ламинарно-турбулентный переход в сверхзвуковом пограничном слое	
И. В. Егоров, Н. Х. Зыонг, Н. К. Нгуен, Н. В. Пальчековская	36
Оптимальные по расходу топлива траектории сверхзвукового пассажирского самолета	
С. А. Кумакшев, А. М. Шматков	41
Осмотическая конвекция	
М. М. Рамазанов, Н. С. Булгакова, Л. И. Лобковский	47
ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ	
Термоаккумулятор на основе фазоизменяемых материалов	

Г. С. Бочаров, А. О. Вагин, И. С. Григорьев, А. В. Дедов, А. В. Елецкий, А. В. Захаренков, М. А. Зверев 53 Влияние меняющихся ветровых нагрузок на надежность воздушных линий электропередачи

в различных регионах России В. В. Клименко, О. Е. Кондратьева, О. А. Локтионов, Е. В. Федотова

Механика интенсивной пластической деформации в процессах измельчения зерен в суперсплавах

Ф. З. Утяшев, Р. Ю. Сухоруков

66

58

# CONTENTS

\_

\_

# Volume 504, 2022

# PHYSICS

\_

Highly Selective Oversized Slited Cavities for Relativistic Gyrotrons Operating in the Millimeter Waveband	
Y. Y. Danilov, A. N. Leontyev, A. M. Malkin, R. M. Rozental, D. Y. Shchegolkov, and N. S. Ginzburg	3
Model of Underwater Pipeline Flotation M. A. Ilgamov	10
Influence of Nonlinearity on the Process of Magnetic Field Generation in Stars With Sufficiently Large Dynamo Numbers <i>E. P. Popova</i>	15
<ul> <li>Synthesis of Oxide, Nitride and Oxynitride Materials of Micro- and Nano-Sizes</li> <li>Based on Al/AIN, Al/Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> Powders</li> <li>A. S. Sokolov, V. D. Borzosekov, E. V. Voronova, D. V. Malakhov,</li> <li>V. D. Stepakhin, E. A. Obraztsova, and O. N. Shishilov</li> </ul>	19
Detection of Phase Transitions in Ho <sub>0.8</sub> Lu <sub>0.2</sub> B <sub>12</sub> Antiferromagnet During the Hall Effect Measurements <i>A. L. Khoroshilov, A. V. Bogach, S. V. Demishev, K. M. Krasikov, V. N. Krasnorussky,</i> <i>S. E. Polovec, V. B. Filipov, and N. E. Sluchanko</i>	26
MECHANICS	
The Conditions of Division of Deviator and Spherical Properties for Isotropic Tensor Non-Linear Functions <i>D. V. Georgievskii</i>	32
Numerical Simulation of Mach Wave Influence on Laminar-Turbulent Transition in Supersonic Boundary Layer I. V. Egorov, N. H. Duong, N. C. Nguyen, and N. V. Palchekovskaya	36
Optimal Minimum-Fuel Trajectories of a Supersonic Passenger Aircraft S. A. Kumakshev and A. M. Shmatkov	41
Osmotic Convection M. M. Ramazanov, N. S. Bulgakova, and L. I. Lobkovskiy	47
TECHNICAL SCIENCES	
Thermal Accumulator on the Basis of Phase Changing Materials G. S. Bocharov, A. O. Vagin, I. S. Grigoriev, A. V. Dedov, A. V. Eletskii, A. V. Zakharenkov, and M. A. Zverev	53
Impact of Changing Wind Loads on the Reliability of Power Transmission Lines in Different Regions of Russia V. V. Klimenko, O. E. Kondratieva, O. A. Loktionov, and E. V. Fedotova	58
Mechanics of Intense Plastic Deformation in Grain Grinding Processes in Superalloys F. Z. Utyashev and R. Y. Sukhorukov	66

———— ФИЗИКА ——

УДК 621.372.8; 621.385.69

# ВЫСОКОСЕЛЕКТИВНЫЕ СВЕРХРАЗМЕРНЫЕ ЩЕЛЕВЫЕ РЕЗОНАТОРЫ ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ГИРОТРОНОВ МИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА

© 2022 г. Ю. Ю. Данилов<sup>1</sup>, А. Н. Леонтьев<sup>1</sup>, А. М. Малкин<sup>1,2</sup>, Р. М. Розенталь<sup>1,\*</sup>, Д. Ю. Щегольков<sup>1</sup>, член-корреспондент РАН Н. С. Гинзбург<sup>1</sup>

> Поступило 07.12.2021 г. После доработки 13.12.2021 г. Принято к публикации 25.03.2022 г.

На основе аналитического подхода и численного моделирования показано, что в сверхразмерном цилиндрическом резонаторе с *М* продольно-щелевыми разрезами связь парциальных мод регулярного волновода с *М* и 2*M* азимутальными индексами может приводить к формированию высокодобротных мод с малыми радиальными потерями на квазикритических частотах. Это обеспечивает возможность селективного возбуждения подобных мод винтовыми электронными пучками в релятивистских гиротронах миллиметрового диапазона.

*Ключевые слова:* щелевые резонаторы, гиротроны, миллиметровое излучение **DOI:** 10.31857/S2686740022030051

В настоящее время гиротроны являются самыми мощными источниками излучения в диапазоне до 1 ТГц [1]. Дальнейшее увеличение мощности и частоты генерации в значительной степени ограничивается сложностью селекции рабочего колебания. Одним из путей решения данной проблемы является модификация резонатора гиротрона, который обычно представляет собой отрезок слабонерегулярного волновода, возбуждаемый винтовым электронным потоком [2]. На этом направлении можно выделить два основных подхода. Первый связан с изменением геометрии поперечного сечения резонатора, например, введения коаксиального стержня [3] или нарушения азимутальной симметрии [4]. Второй подход ориентирован на создание резонаторов, открытых в поперечном направлении. Достаточно широко распространенным подходом является прорезание продольных щелей для подавления паразитных мод [5]. Другими примерами могут служить резонаторы на основе фотонных кристаллов [6], конфокальные [7] и планарные резонаторы [8].

В данной работе предлагается новый тип продольно-щелевых резонаторов, открытых в поперечном направлении, основанных на связи мод с кратными азимутальными индексами. В первой части работы обсуждается принцип работы подобного резонатора, представлена его упрощенная теория и выполнены результаты расчета с использованием программы CST Microwave Studio. Во второй части работы выполнено трехмерное PIC-моделирование сильноточного релятивистского гиротрона диапазона 100 ГГц с выходной мощностью около 100 МВт, в котором используется комбинация мод  $H_{6.4}$  и  $H_{12.2}$ .

### ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРОДОЛЬНО-ЩЕЛЕВОГО РЕЗОНАТОРА

Рассмотрим механизм селекции колебаний в предлагаемом резонаторе. Предположим, что в резонаторе круглого сечения одновременно возбуждается две моды на одной частоте, имеющие *m* и 2*m* вариаций по азимуту, с одинаковой амплитудой полей на границе волновода. Суммарное поле таких мод на границе волновода будет иметь *m* вариаций с удвоенной амплитудой и *m* вариаций с половинной амплитудой. Если при этом в стенке волновода сделать *m* азимутальных разрывов (рис. 1а), то такое сочетание мод будет иметь преимущество по отношению к другим модам с точки зрения величины дифракционных потерь.

В первом приближении можно положить, что по азимутальной координате боковая поверх-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук, Нижний Новгород, Россия

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

<sup>\*</sup>E-mail: rrz@ipfran.ru



**Рис. 1.** Поперечное сечение резонатора гиротрона с продольными щелями в отсутствие (а) и при наличии (б) дополнительной внешней структуры.

ность указанного резонатора эквивалентна гофрировке, обеспечивающей селективную связь между двумя H-модами. Магнитный ток, создаваемый собственной модой резонатора с азимутальным индексом  $m_1$  на прямоугольном гофре, обладает гармоникой, синхронной собственной моде резонатора с азимутальным индексом  $m_2$  при условии

$$m_2 - m_1 = qM, \tag{1}$$

где *q* – натуральное нечетное число, *M* – число заходов гофра (в нашем случае, это число щелей). Селективную связь Н-мод с кратными азимутальными индексами *т* и 2*т* обеспечивает структура с М щелями. Винтовой электронный пучок со специально подобранным радиусом инжекции возбуждает моду *H*<sub>2*m*, *n*</sub> с определенным направлением азимутального вращения. Эта мода возбуждает сонаправленно вращающуюся моду  $H_{m, q}$  посредством связи на 1-й гармонике гофра. Моды  $H_{2m, n}$ и Н<sub>*m*, *a*</sub> противоположного направления вращения возбуждаются посредством связи на 3-й гармонике гофра. В результате в резонаторе возбуждается комбинация двух связанных *Н*-мод с кратными азимутальными индексами т и 2т и близкими корнями производной функции Бесселя. Паразитные осесимметричные Н-моды не войдут в рабочее колебание посредством связи на 1-й гармонике гофра только при существенном отличии их корней производной функции Бесселя от корней двух связанных *Н*-мод.

Ограничимся анализом продольно-щелевого резонатора в рамках дипольного приближения [9]. Это приближение позволяет оценить добротность резонаторной H-моды  $Q_{slit}$ , обусловленную излучением через щели продольной компоненты магнитного поля  $H_z$ . Значение добротности находится посредством решения самосогласованной

системы уравнений для резонаторной моды и волноводных мод в щелях и имеет вид

$$Q_{slit} \approx \frac{2}{f(M)} \frac{a^3 b R_0^2 L}{\lambda \kappa^2} \left( 1 - \frac{m^2}{\mu_{mp}^2} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \times \frac{1}{L} \int_0^L F^2(z) dz,$$
(2)

где a, b — длина и ширина щели,  $R_0$  и L — радиус и длина цилиндрического участка резонатора,  $\lambda$  — рабочая длина волны, m — азимутальный индекс рабочей моды резонатора,  $\mu_{mp}$  — p-й корень производной функции Бесселя 1-го рода m-го порядка, F(z) — нормированное распределение продольной компоненты поля собственной моды регулярного резонатора. Коэффициент магнитной поляризуемости к для прямоугольных щелей с поперечными размерами  $b/a \ll 1$  составляет [10]:

$$\kappa = \frac{\pi a^3}{24\left(\ln\left(\frac{4a}{b}\right) - 1\right)}.$$
(3)

Для осесимметричных или вращающихся по азимутальной координате мод множитель f(M), описывающий поляризацию рабочей моды резонатора, принимает значение f(M) = M [11]. В свою очередь, для комбинации двух стоячих мод с кратными азимутальными индексами *m* и 2*m* и близкими по значению корнями производной функции Бесселя данный множитель запишется в следующем виде:

$$f(M) = 2\sum_{p=1}^{M} \left(\cos\left(m\varphi_{p}\right) + \cos\left(2m\varphi_{p}\right)\right)^{2} =$$
  
= 
$$8\sum_{p=1}^{M} \left(\cos\left(\frac{m\varphi_{p}}{2}\right)\cos\left(\frac{3m\varphi_{p}}{2}\right)\right)^{2},$$
 (4)

где  $\phi_p$  — азимутальная координата щели на боковой стенке.

Легко видеть, что в последнем случае при прорезании M = m продольных щелей в боковой стенке резонатора фактор f(M) принимает нулевое значение. В свою очередь, добротность  $Q_{slit}$ при этом устремляется к бесконечности, что означает минимизацию потерь на излучение "супермоды", образованной модами с кратными азимутальными индексами. Среди *H*-мод с кратными азимутальными индексами можно выделить следующие комбинации с близкими значениями  $\mu_{mp}$ :  $H_{6.4}$  и  $H_{12.2}$  (различие значений  $\mu_{mp}$  составляет 0.6%),  $H_{8.7}$  и  $H_{16.4}$  (0.8%),  $H_{11.9}$  и  $H_{22.5}$ (0.6%) и т.д.

Точный расчет добротности одной из "супермод", состоящей из комбинации стоячих мод  $H_{6.4}$ и  $H_{12.2}$ , был произведен с использованием программы CST Microwave Studio. В моделировании





(B)

**Рис. 2.** Результаты моделирования в программе CST Microwave Studio: поперечное сечение щелевого резонатора (а) и пространственная структура продольной компоненты высокочастотного магнитного поля (б). Поперечная структура мод *H*<sub>6.4</sub> (в) и *H*<sub>12.2</sub> (г) в резонаторе со сплошной стенкой и результат их арифметического сложения (д).

исследовался резонатор на длине волны  $\lambda \approx 3$  мм с шестью щелями с угловым размером  $\Psi$  и толщиной стенки *h* (рис. 2а). Известно, что в гиротроне продольное волновое число рабочего колебания близко к нулевому значению. Это позволило фактически решать двумерную задачу, в которой область моделирования вдоль оси резонатора представляла собой тонкий цилиндрический слой. Граничные условия на торцах слоя были заданы в виде идеальной магнитопроводящей поверхности. В радиальном направлении были использованы граничные условия в виде "открытой границы".

Поле внутри резонатора возбуждалось диполем в виде тонкой нити, на который подавался импульсный сигнал, по окончанию которого поле свободно затухало. Поскольку рабочее колебание является самым высокодобротным, на конечном этапе процесса затухания вклад остальных мод в общее поле внутри резонатора становился пренебрежимо малым. В результате в резонаторе устанавливалась структура поля, соответствующая рабочему колебанию. В свою очередь, поскольку затухание приобретало экспоненциальный характер, появлялась возможность расчета добротности колебания. Омические потери при моделировании не учитывались, поэтому полная добротность найденного колебания определялась добротностью, связанной с излучением из щелей.

На первом этапе толщина стенки была выбрана равной длине волны, и свойства резонатора исследовались при различных значениях углового размера щелей Ч. Пространственная структура наиболее высокодобротного колебания показана



**Рис. 3.** Зависимость добротности "супермоды" от углового размера щели для случая  $h/\lambda = 1$  (а) и от относительной толщины стенки для случая  $\Psi = 24^{\circ}$  (б).

на рис. 26. Сравнение данной структуры с результатом арифметического сложения полей мод  $H_{6.4}$  и  $H_{12.2}$  (рис. 2в, г, д) позволяет сделать вывод, что действительно имеет место возбуждение "супермоды", состоящей из указанных парциальных мод.

При значениях  $\Psi > 30^{\circ}$  добротность моды уменьшается до значений менее 500 (рис. 3а), что делает подобный резонатор малопригодным для практического использования в силу значительных дифракционных потерь. При уменьшении размера щелей добротность естественным образом растет, однако при этом следует ожидать и нарастания добротности соседних мод, что может привести к их самовозбуждению при взаимодействии с электронным пучком. Отметим, что добротность моды меняется не слишком сильно при изменении толщины стенки (рис. 36). Таким образом, это позволяет использовать предложенный резонатор и на более высоких частотах.

### ТРЕХМЕРНОЕ РІС-МОДЕЛИРОВАНИЕ СИЛЬНОТОЧНОГО ГИРОТРОНА ДИАПАЗОНА 100 ГГц

Рассмотрим возможность одновременного возбуждения релятивистским сильноточным винтовым электронным пучком комбинации из четырех мод  $H_{6.4}$  и  $H_{12.2}$  прямого и обратного вращения. В гиротронах коэффициент связи электронного пучка с рабочей модой имеет следующий вид [12]:

$$G = \frac{J_{m\pm 1}^{2}(\mu_{mp} R_{beam}/R_{0})}{(\mu_{mp}^{2} - m^{2})J_{m}^{2}(\mu_{mp})},$$
(5)

где  $R_{beam}$  — радиус ведущих центров винтового электронного потока, знак "+" относится к случаю, когда направление вращения моды совпадает с направлением вращения электронов, знак "—" — в случае противоположного вращения. Анализируя зависимости коэффициентов связи от радиуса, можно выделить две области с соразмерными значения коэффициентов связи:  $0.7 \le R_0/R_{beam} \le \le 0.75$  и  $0.87 \le R_0/R_{beam} \le 0.9$ . Второй диапазон является менее предпочтительным, поскольку при его использовании возникает проблема транспортировки пучка через закритическое сужение на катодном конце резонатора. Для случая сильноточного гиротрона необходимо принимать во внимание провисание потенциала пучка [13]:

$$\Delta U = \frac{2J_{beam}[\mathbf{A}]}{\beta_{\parallel}} Z_0 \ln\left(\frac{R_0}{R_{beam}}\right),\tag{6}$$

где  $J_{beam}$  – ток пучка,  $Z_0 = (4\pi\epsilon_0 c)^{-1} \approx 30\Omega$ ,  $\epsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума. Рассматривая случай релятивистского электронного пучка с энергий 500 кэВ и питч-фактором g = 1.0, для которого  $\beta_{\parallel} \approx 0.6$ , и ограничивая падение потенциала пучка величиной в 50–70 кэВ, из (8) можно вычислить допустимый ток пучка, который составляет величину 1.5–2 кА.

Численное моделирование гиротрона проводилось методом крупных частиц с использованием трехмерной версии PIC-кода KARAT [14]. На рис. 4 а,б показана геометрия пространства взаимодействия и мгновенное положение макрочастиц. В моделировании винтовой электронный пучок (1) с энергией 500 кэВ, током 2 кА, питчфактором 1.0, радиусом инжекции 7 мм и начальным разбросом по поперечным скоростям около 40% возбуждал резонатор (2) с радиусом 9.5 мм с шестью продольными щелями.

Электронный импульс задавался в форме трапеции с длительностью переднего и заднего фронта 5 нс и длительностью однородного участка 10 нс (рис. 4д). На выходе электроны высаживались на стенку электродинамической системы за счет введения спадающего участка магнитного поля. Для моделирования условий излучения на коллекторном конце пространства взаимодействия был размещен поглощающий слой (*3*) с пе-



**Рис. 4.** Результаты моделирования сильноточного гиротрона диапазона 3 мм: а – продольное сечение пространства взаимодействия, б – поперечное сечение и структура рабочей моды, в – зависимость спектра излучения от величины магнитного поля для случая открытых поперечных щелей, г – то же для случая регулярного цилиндрического волновода, д, е – форма выходного сигнала и полный спектр СВЧ-импульса при магнитном поле 56 кЭ.

ременной проводимостью, коэффициент отражения от которого не превышал 1% от мощности падающей волны. Аналогичный слой был размещен вокруг резонатора для поглощения излучения, проникающего через щели.

Моделирование показало, что электронный пучок устойчиво возбуждает связку мод  $H_{6.4}$  и  $H_{12.2}$ , что подтверждается поперечной структурой ВЧ-поля (рис. 46), идентичной собственной моде холодного щелевого резонатора, полученной в

рамках метода конечных элементов (рис. 2д). При этом полоса одномодового возбуждения такой "супермоды" при изменении ведущего магнитного поля составляет около 12% (рис. 4в). Это более чем в два раза превышает ширину полосы одномодового возбуждения для случая регулярного резонатора (закрытого в поперечном направлении) такого же поперечного сечения, которая составляет величину около 5% (рис. 4г). Максимальная мощность излучения достигает уровня в 100 МВт, что соответствует КПД 10%. Это заметно меньше максимального КПД в регулярной системе, который может превышать 20%, что связано с довольно значительными дифракционными потерями в поперечном направлении, а также со стоячей по азимуту структурой рабочей моды.

Вместе с тем, путем уменьшения размеров щелей можно обеспечить повышение эффективности электронно-волнового взаимодействия. Однако при этом происходит сокращение области одномодовой генерации, что в реальном эксперименте, в условиях нестабильности энергетических параметров электронного потока, может оказаться недопустимым.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Относительно низкая добротность колебаний предложенного резонатора не позволяет использовать его напрямую в традиционных гиротронах со слаборелятивистскими электронными пучками. Это связано с тем, что оптимальная длина резонатора таких гиротронов в несколько раз больше, по сравнению с сильноточными гиротронами. В результате значение дифракционной добротности будет сравнимо с величиной добротности, связанной с потерями излучения через щели.

Щели, прорезанные в боковой стенке резонатора, имеют конечную ширину, поэтому для селективного возбуждения рабочей комбинации мод может потребоваться внесение дополнительных элементов, увеличивающих ее внешнюю добротность. С этой целью вокруг основного резонатора следует разместить аналогичную ему структуру, смещенную по угловой координате на  $\pi/M$  (рис. 16). Очевидно, что оптимальное радиальное расстояние между ними составляет  $\approx n\lambda/4$ , когда дополнительная структура представляет собой согласующий шлейф.

#### ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания №0030-2021-0027 (Программа "Развитие техники, технологий и научных исследований в области использования атомной энергии в Российской Федерации на период до 2024 года").

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Глявин М.Ю., Денисов Г.Г., Запевалов В.Е., Кошелев М.А., Третьяков М.Ю., Цветков А.И. Источники мощного терагерцового излучения для спектроскопии и диагностики различных сред // УФН. 2016. Т. 186. № 6. С. 667–677. https://doi.org/10.3367/UFNr.2016.02.037801
- 2. Гольденберг А.Л., Денисов Г.Г., Запевалов В.Е., Литвак А.Г., Флягин В.А. Мазеры на циклотронном ре-

зонансе: состояние и проблемы // Изв. вузов. Радиофизика. 1996. Т. 39. № 6. С. 635–669.

3. Shcherbinin V.I., Moskvitina Y.K., Avramidis K.A., Jelonnek J. Improved Mode Selection in Coaxial Cavities for Subterahertz Second-Harmonic Gyrotrons // IEEE Trans. Electron Dev. 2020. V. 67. № 7. P. 2933–2939.

https://doi.org/10.1109/TED.2020.2996179

- 4. Bandurkin I.V., Kalynova G.I., Kalynov Y.K., Osharin I.V., Savilov A.V., Shchegolkov D.Y. Mode Selective Azimuthally Asymmetric Cavity for Terahertz Gyrotrons // IEEE Trans. Electron Dev. 2021. V. 68. № 1. P. 347–352. https://doi.org/10.1109/TED.2020.3039209
- Гинзбург Н.С., Кременцов В.И., Петелин М.И., Стрелков П.С., Шкварунец А.Г. Экспериментальное исследование мазера на циклотронном резонансе с релятивистским сильноточным электронным пучком // ЖТФ. 1979. Т. 49. Вып. 2. С. 378– 385.
- Sirigiri J.R., Kreischer K.E., Machuzak J., Mastovsky I., Shapiro M.A., Temkin R.J. Photonic-Band-Gap Resonator Gyrotron // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. № 24. P. 5628–5631. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.5628
- Fu W., Guan X., Yan Y. Generating High-Power Continuous-Frequency Tunable Sub-Terahertz Radiation From a Quasi-Optical Gyrotron With Confocal Waveguide // IEEE Electron Dev. Lett. 2020. V. 41. № 4. P. 613–616. https://doi.org/10.1109/LED.2020.2972380
- Ginzburg N.S., Zotova I.V., Sergeev A.S., Zaslavsky V.Yu., Zheleznov I.V. High-Power Terahertz-Range Planar Gyrotrons with Transverse Energy Extraction // Phys. Rev. Lett. 2012. V. 108. № 10. Art.no.105101. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.105101
- Danilov Y.Y., Leontyev A.N., Leontyev N.V., Rozental R.M., Tarakanov V.P., Zheleznov I.V., and Abubakirov E.B. Slit-Type Cavities for Cyclotron Resonance Masers Operating at TM Modes // IEEE Trans. Electron Dev. 2021. V. 68. № 4. P. 2130–2132. https://doi.org/10.1109/TED.2021.3055162
- 10. *Харвей А.Ф.* Техника сверхвысоких частот. Пер с англ. М.: Советское радио, 1965. Т. 1. 784 с.
- Ваганов Р.Б., Матвеев Р.Ф., Мериакри В.В. Многоволновые волноводы со случайными нерегулярностями. М.: Советское радио, 1972. 232 с.
- 12. Гинзбург Н.С., Нусинович Г.С. К нелинейной теории релятивистского гиротрона // Изв. вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22. № 6. С. 754–763.
- 13. *Tsimring S.E.* Electron Beams and Microwave Vacuum Electronics. John Wiley & Sons, Inc. 2007.
- Tarakanov V.P. Code KARAT in simulations of power microwave sources including Cherenkov plasma devices, vircators, orotron, E-field sensor, calorimeter etc. // Proc. EPJ Web Conf. 2017. V. 149. Art.no. 04024. https://doi.org/10.1051/epjconf/20171490

# HIGHLY SELECTIVE OVERSIZED SLITED CAVITIES FOR RELATIVISTIC GYROTRONS OPERATING IN THE MILLIMETER WAVEBAND

Y. Y. Danilov<sup>a</sup>, A. N. Leontyev<sup>a</sup>, A. M. Malkin<sup>a,b</sup>, R. M. Rozental<sup>a</sup>, D. Y. Shchegolkov<sup>a</sup>, and Corresponding Member of the RAS N. S. Ginzburg<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences, Nizhni Novgorod, Russia <sup>b</sup>Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Russia

Based on the analytical approach and numerical simulations, we show that in an oversized cylindrical cavity with M longitudinal slits, coupling of the partial modes of a regular waveguide with M and 2M azimuthal indexes leads to formation of high-Q modes at quasi-critical frequencies. This provides a possibility for selective excitation of such modes by helical electron beams in millimeter-waveband relativistic gyrotrons.

Keywords: slit-type cavities, gyrotrons, millimeter radiation

—— ФИЗИКА ——

УДК 534.01:539.6

# МОДЕЛЬ ВСПЛЫТИЯ ПОДВОДНОГО ТРУБОПРОВОДА

© 2022 г. Член-корреспондент РАН М. А. Ильгамов<sup>1,2,3,\*</sup>

Поступило 12.01.2022 г. После доработки 12.01.2022 г. Принято к публикации 28.01.2022 г.

Разработана простейшая модель всплытия пролета подводного трубопровода между двумя опорами. Учитываются вес трубопровода с транспортируемой средой, выталкивающая сила воды, поперечные распределенные силы, обусловленные давлениями на внутреннюю и внешнюю поверхности, изменением кривизны осевой линии при изгибе, а также уменьшение давления воды и газа на стенки трубы при ее подъеме. Рассматривается линейный статический изгиб. Модель описывает подъем трубопровода до положения, когда его верхняя часть совпадает с поверхностью воды. Определены условия всплытия трубопровода.

*Ключевые слова:* подводный трубопровод, давления воды и газа, изгиб, критерий всплытия **DOI:** 10.31857/S2686740022030087

1. Анализ явления всплытия трубопровода, более тяжелого, чем выталкивающая сила воды, является важным с практической точки зрения [1-4]. Такое равновесное состояние сооружения является недопустимым для его безопасной эксплуатации. Причинами этого подъема являются температурное удлинение в результате сезонного нагрева воды, изменения температуры перекачиваемого газа, повреждение балластной части трубы, изменение рельефа дна (подъем, опускание, сдвиги), донных течений и т.д. Наиболее благоприятные условия для всплытия трубопровода возникают при одновременной реализации указанных факторов. Возможно, изучены еще не все частные механизмы, приводящие к рассматриваемому обстоятельству. Один из таких механизмов рассматривается в настоящей работе.

Конструкция трубопроводов, состоящих из слоистых (концентрических) труб, обеспечивает хорошие балластные, теплоизоляционные и антикоррозионные свойства [5–7], частично защищает от механических повреждений, пластических деформаций [8], трещинообразования [9]. В указанных работах анализируются эти свойства, приводится обширный обзор литературы.

<sup>1</sup>Институт машиноведения им А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup>Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

Большое внимание уделено анализу прочности и продольной устойчивости трубопровода при различных условиях опирания на земле, под землей, под водой [10–16]. Подъем трубопровода на вибрирующих опорах изучен в [17]. Рассматривается влияние начальной кривизны осевой линии, температурного удлинения трубопровода на его изгиб и выпучивание. Развиваются аналитические и численные методы исследований. Задачи изгиба трубопровода ставятся в линейной и нелинейной постановке. Во всех этих работах принимаются допущения о том, что при изгибе трубопровода поперечное сечение его остается плоским, круговая форма не меняется, напряжения в поперечном направлении малы по сравнению с ними в продольном направлении. Отметим, что такие же допущения принимаются при анализе деформации сверхпроводящего кабеля, который имеет слоистую структуру [18].

2. На рис. 1 приводится схема пролета трубопровода длиной L между двумя опорами на дне водоема глубиной H. Опоры находятся на одном уровне, допускают свободный поворот и скольжение без сопротивления. Допущение  $LH^{-1} > 10$ позволяет ограничиться линейным уравнением изгиба. Более полный анализ поведения пролета трубопровода включает учет начального искривления осевой линии, его взаимодействия с участками за опорами и упругих нелинейностей. Однако эти факторы не вносят качественных изменений в полученные результаты данной работы. При необходимости они могут быть учтены.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Институт механики Уфимского исследовательского центра, Уфа, Россия

<sup>\*</sup>*E-mail: ilgamov@anrb.ru* 



Рис. 1. Схема подводного трубопровода.

В уравнении изгиба относительно прогиба *w*(*x*)

$$D\frac{d^{4}w}{dx^{4}} = q, \quad g\rho F = 2\pi g \sum_{n=1}^{N} \rho_{n} R_{n} h_{n},$$
  
$$D = \pi \sum_{n=1}^{N} E_{n} R_{n}^{3} h_{n},$$
 (1)

за положительные значения *w* и распределенной поперечной силы *q* примем направление вверх. Вес *g*р*F* трубы единичной длины из *N* концентрических оболочек и ее эффективная изгибная жесткость *D* определяются обычным образом (как и в других конструкциях для слоистой круглой трубчатой балки [18]). Здесь  $R_n$  – средний радиус *n*-го слоя толщиной  $h_n$  ( $h_n \ll R_n$ ),  $\rho_n$ ,  $E_n$  – плотность и модуль упругости, g – земное ускорение. При определении *D* предполагается, что слои жестко скреплены между собой и при изгибе поперечное сечение остается плоской поверхностью.

Распределенная поперечная сила q равна

$$q = -g\left(\rho F + \rho_{gw}F_g\right) + g\rho_l F_l + q_w, \qquad (2)$$

где первые два члена представляют собой вес трубы и транспортируемого газа с плотностями  $\rho$  и  $\rho_{gw}$  и площадями поперечного сечения *F* и *F*<sub>g</sub>, третий — выталкивающая сила воды плотностью  $\rho_l$  и площадью поперечного сечения слоистой трубы *F*<sub>l</sub>. Плотность  $\rho_l$  не меняется с изгибом трубопровода. Плотность газа  $\rho_{gw}$ , соответствующая прогибу *w*, изменяется по изотермическому закону  $\rho_{gw}\rho_g^{-1} = p_{gw}p_g^{-1}$ , где  $p_g$ ,  $\rho_g$  — давление и плотность на уровне опор (z = 0),  $p_{gw}$ ,  $\rho_{gw} -$ эти величины при z = w.

Значения плотности транспортируемого газа  $\rho_g$  меняются в широких пределах. В случае легких газов (при температуре 20°С плотность водорода 0.09 кг · м<sup>-3</sup>, гелия — 0.18 кг · м<sup>-3</sup>) второй член в скобках (2) мал по сравнению с первым даже при давлении порядка 10 МПа. Однако влияние давления  $p_{gw}$  может быть существенным. В случае природного газа ( $\rho_g = 0.8 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ ), бутана ( $\rho_g = 2.7 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ )

и т.д., находящихся при указанных давлениях, необходимо учитывать влияние их веса на изгиб.

При определении давления  $p_{gw}$  на уровне z = wпримем приближенно  $p_{gw} = p_g - g\rho_{gw}w$ . Это допустимо ввиду поправочного характера этого уменьшения давления газа по высоте порядка  $10^3$  м (как известно из аэростатики, плотность газа уменьшается на 1% на высоте  $10^2$  м). Тогда с учетом приведенной выше связи  $p_{gw}(\rho_{gw})$  имеем

$$\frac{\rho_{gw}}{\rho_g} \approx 1 - \frac{g\rho_g w}{p_g}, \quad \frac{p_{gw}}{p_g} \approx 1 - \frac{g\rho_g w}{p_g}.$$
 (3)

Отметим, при w = 100 м и атмосферных значениях параметров при температуре 20°С по (3) получаем уменьшение  $\rho_{gw}$ ,  $p_{gw}$  на 1%. Давление воды по высоте изменяется по закону

$$p_{lw} = g\rho_l(H - w). \tag{4}$$

Последний член в (2) представляет собой распределенную поперечную силу, возникающую в результате изгиба трубы. При этом площади в областях растяжения и сжатия стенок трубы в продольном направлении соответственно увеличиваются и уменьшаются. Так как на них действует одинаковое давление, то это приводит к появлению поперечной силы [19]

$$q_{w} = -p_{gw}F_{g}\frac{d^{2}w}{dx^{2}} + p_{lw}F_{l}\frac{d^{2}w}{dx^{2}}.$$
 (5)

Сила на внутренней поверхности (первый член в (5)) направлена в сторону выпуклости осевой линии (при изгибе, показанном на рис. 1, вверх), на внешней поверхности — в сторону вогнутости (вниз).

Оценим влияние скорости движения газа на изгиб. Критическая комбинация давления  $p_g$  и скорости движения V равна

$$p_g + \rho_g V^2 = \frac{\pi D}{R_g^2 L^2}$$

При  $p_g = 10$  МПа,  $\rho_g = 10^2$  кг/м<sup>3</sup>, V = 30 м/с второй член в левой части равенства меньше первого более чем в 100 раз. Поэтому в составе поперечной силы (2), (4) влияние скорости движения газа не учтено. Так как рассматриваются равновесные состояния изогнутого трубопровода в воде, то силы инерции и возможное внешнее обтекание не учитываются.

Подставляя (2)-(5) в уравнение (1), получаем

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \alpha \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \beta w + \mu w \frac{d^2 w}{d\xi^2} = \gamma,$$
  

$$\alpha = \frac{p_g F_g - p_l F_l}{P_*},$$
  

$$\beta = -\frac{g^2 \rho_g^2 F_g L^2}{\pi^2 p_e P_*}, \quad \mu = \frac{g L \left(\rho_l F_l - \rho_g F_g\right)}{P_*},$$
(6)

$$\gamma = \frac{gL(\rho_l F_l - \rho F - \rho_g F_g)}{\pi^2 P_*}, \quad P_* = \frac{\pi^2 D}{L^2}, \quad \xi = \frac{\pi x}{L},$$

где прогиб w отнесен к длине L. Параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$  и члены уравнения (6) являются безразмерными. Параметр  $\alpha$  характеризует влияние давлений газа и воды на изгиб трубопровода, параметры  $\beta$  и  $\mu$  — влияние уменьшения веса газа и его давления на стенку трубы с подъемом на величину w, параметр  $\gamma$  представляет собой разность подъемной силы воды (Архимедовой силы) и веса трубопровода,  $P_*$  — критическая сила, приводящая к изгибу трубы при осевом сжатии (Эйлерова сила).

Решение уравнения (6), удовлетворяющее условиям  $w = d^2 w/d\xi^2 = 0$  ( $\xi = 0,\pi$ ), будем искать в виде ряда sin  $n\xi$ , где n = 1, 3, ..., ввиду симметрии изгиба относительно середины ( $\xi = 1/2$ ). Этот ряд быстро сходится. Например, при  $\alpha = \beta = \mu = 0$  сходимость  $n^{-5}$ . Поэтому ограничиваемся применением только члена w = Wsin $\xi$ . Подставив его в (6), умножив на sin $\xi$  и проинтегрировав в пределах от 0 до  $\pi$ , получаем уравнение относительно прогиба в середине пролета:

$$W^{2} - \frac{3\pi(1 - \alpha + \beta)}{8\mu}W + \frac{3\gamma}{2\mu} = 0,$$
 (7)

решение которого

$$W = \frac{3\pi(1-\alpha+\beta)}{16\mu} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{128\mu\gamma}{3\pi^2(1-\alpha+\beta)^2}}\right).$$
 (8)

3. В случае малого отношения глубины H водоема к пролету L между опорами можно не учитывать изменение поперечной силы, зависящей от давления газа и воды, а также от прогиба. Кроме того, по постановке задачи максимальное значение безразмерного прогиба равно  $w = (H - R_l)L^{-1}$ . Поэтому отношение первого члена в (7) к третьему составляет приближенно  $\pi^2 H L^{-1}$ . С такой погрешностью первый член в (7) может быть опущен. При этом безразмерный прогиб середины пролета равен

$$W = \frac{4\gamma}{\pi(1 - \alpha + \beta)}.$$
(9)

Как следует из (9), подъем (W > 0) может быть только при превышении подъемной силы воды над весом трубопровода ( $\gamma > 0$ ). При этом превышение давления газа над давлением воды на уровне опор ( $\alpha > 0$ ) приводит к большему подъему, а при  $\alpha < 0 - \kappa$  меньшему подъему. Равенство  $\alpha - \beta = 1$  дает критическую комбинацию параметров, при которой решение (9) неограниченно возрастает. Для рассмотрения решения при  $\alpha - \beta \ge 1$  требуется учет нелинейности деформирования трубы, что не входит в круг вопросов данной работы. Поэтому будем рассматривать только случай  $\alpha - \beta < 1$ .

Определим комбинацию входных параметров, при которой происходит всплытие трубопровода, т.е. безразмерный прогиб равен  $W = (H - R_l)L^{-1}$ . Из (9) получаем

$$4L\gamma = \pi (H - R_l)(1 - \alpha + \beta). \tag{10}$$

В случае легких газов ( $\beta \ll 1$ ) необходимое превышение Архимедовой силы  $\rho_l F_l$  над весом  $\rho F$  через исходные параметры равно

$$\rho_l F_l - \rho F \approx \frac{\pi^3 H}{4gL^2} \left( \frac{\pi^2 D}{L^2} + g \rho_l H F_l - p_g F_g \right).$$
(11)

Таким образом, чем больше давление газа  $p_g$ , тем меньше необходимая разность сил  $\rho_l F_l - \rho F$ для всплытия трубопровода. Кроме того, эта разность уменьшается с уменьшением изгибной жесткости *D* и глубины водоема *H*, с увеличением длины пролета *L* между опорами. При давлении газа

$$p_g = \frac{\pi^2 D}{L^2 F_g} + \frac{g \rho_l H F_l}{F_g}$$
(12)

всплытие происходит и при нулевой плавучести. Согласно (11) это может происходить и при превышении давления  $p_g$ , определяемого формулой (12), когда вес трубопровода больше подъемной силы воды. Это не противоречит и решению (9), где в этом случае  $\alpha > 1$ ,  $\gamma < 0$ . Однако для более точного определения условия всплытия необходимо учитывать упругую нелинейность трубы и возможные продольные перемещения на опорах. Отметим, что согласно (12) давление газа  $p_g$  идет на преодоление изгибной жесткости трубы длиной L и давления воды  $p_i = g\rho_i H$  (соответствует в (5) второму члену в правой части и второму члену в составе  $\alpha$  в (6)).

4. В предыдущем анализе не учитывалось увеличение поперечной силы с поднятием трубопровода. Теперь учтем этот фактор (параметр µ). При малой разнице между весом трубопровода и подъемной силой воды, считая второй член под корнем в (8) меньше единицы, сохраним три члена в разложении в степенной ряд. Верхний знак перед корнем дает результат, не имеющий физического смысла. С учетом нижнего знака получаем

$$W \approx \frac{4\gamma}{\pi(1-\alpha+\beta)} \left(1 + \frac{\mu\gamma}{(1-\alpha+\beta)^2}\right).$$
(13)



**Рис. 2.** Безразмерный прогиб *W* середины пролета в случае легкого газа ( $\beta \ll 1$ ) в зависимости от безразмерного параметра подъемной силы  $\gamma$ . Кривые *1, 2, 3* соответствуют формулам (9), (13), (8), в которых принято  $\alpha = 0.5$ ,  $\mu = 5$ .

Здесь первый член совпадает с линейным решением (9).

Из рис. 2 следует, что при значениях параметра  $\gamma < 0.003$  все три решения совпадают. С повышением значения  $\gamma$  эти решения расходятся. Важный результат состоит в том, что учет убывания внешнего давления с поднятием трубопровода (параметр  $\mu$ ) и соответствующего решения нелинейного уравнения (8) показывает всплытие при меньших значениях  $\gamma$ .

В соответствии с (8) условием поднятия трубопровода (W > 0) являются неравенства

$$\frac{1-\alpha+\beta}{\mu} > 0, \quad \frac{4.3\mu\gamma}{\left(1-\alpha+\beta\right)^2} < 1.$$
 (14)

Как было указано выше,  $1 - \alpha + \beta > 0$ . Поэтому по первому неравенству должно быть  $\mu > 0$  или  $\rho_l F_l > \rho_g F_g$ , что практически всегда выполняется. Второе неравенство (14) дает комбинацию параметров для W > 0. Чем больше внутреннее давление (параметр  $\alpha$ ) и уменьшение внешнего давления при подъеме (параметр  $\mu$ ), тем меньше может быть превышение подъемной силы над весом трубопровода ( $\gamma$ ).

Отношение подъема при учете параметра  $\mu$  (13) и без его учета (9) равно 1 +  $\mu\gamma(1 - \alpha + \beta)^{-2}$ . В исходных параметрах оно равно

$$\frac{W(\mu \neq 0)}{W(\mu = 0)} \approx 1 + 
+ \frac{g^2 L^2 \left(\rho_l F_l - \rho_g F_g\right) \left(\rho_l F_l - \rho F - \rho_g F_g\right)}{\pi (P_* + p_l F_l - p_g F_g + g^2 \rho_g^2 F_g L^2 (\pi p_g)^{-1})^2}.$$
(15)

Так как по (6)  $P_* = \pi^2 D L^{-2}$ , то в знаменателе (15)  $(\pi^3 D_E L^{-2})^2$ , где  $D_E - эффективная$  изгибная жест-

кость. В числителе можно ввести эффективную поперечную силу  $P_E$ . Таким образом,  $P_E$  зависит от плотностей воды и газа и радиусов контактных поверхностей, а  $D_E$  – кроме истинной изгибной жесткости слоистого трубопровода D, также от давления и плотностей сред. При  $\rho_g = 0$ ,  $p_g = 0$  имеем более наглядное значение

$$D_E = D + \pi^{-2} g \rho_l F_l L^2 H$$

5. Приведенное уточнение поперечной распределенной силы на подводный трубопровод между двумя опорами при его подъеме дает возможность больше приблизиться к описанию реальной картины. Соотношением между весом трубопровода и подъемной силой воды определяется характер изгиба (знак безразмерного параметра у в (6)). Силы, зависящие от прогиба, можно трактовать как вклад в эффективную изгибную жесткость  $D_E$ , которая в зависимости от входных параметров может быть больше или меньше, чем истинная изгибная жесткость *D* слоистой трубы. Преобладание давления газа над давлением воды  $(\alpha > 0)$  приводит к уменьшению  $D_E$  и увеличению прогиба (к большему подъему). При  $\alpha < 0$  проис-ходит увеличение  $D_E$  и уменьшение прогиба. Уменьшение плотности газа в поднятых участках трубопровода по сравнению с плотностью газа на уровне опор ( $\beta > 0$ ) приводит к уменьшению прогиба.

Использование только приведенной модели без привлечения других факторов, о чем сказано в начале статьи, не позволяет проводить приемлемый анализ реальных происшествий, например, всплытия обетонированного газового трубопровода "Бованенково–Ухта-2" через Байдарацкую губу (залив Карского моря, лето 2021 года, H = 20 м,  $R_g = 0.6$  м,  $p_g = 12$  МПа). Однако некоторые практически трудно определяемые величины могут быть оценены. Например, в предположении постоянной глубины H и известных других данных может быть определена длина L поднятой части трубопровода по формулам (10), (11).

Приведенная модель всплытия может быть обобщена с учетом упругой нелинейности трубопровода и податливости опор, его температурного расширения, колебаний давления газа с частотой работы перекачивающих станций.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00578.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астафьев В.Н. Проектирование подводных трубопроводов в условиях арктических морей. Уфа: УГНТУ, 2000. 76 с.

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ том 504 2022

- 2. *Palmer A.C., King R.A.* Subsea pipeline engineering. Oklahoma: PWC, 2004. 570 p.
- 3. *Мансуров М.Н., Черний В.П.* Методы расчета морских трубопроводов на прочность и устойчивость // Газовая промышленность. 2005. № 4. С. 47–51.
- 4. Лаптева Т.И., Мансуров М.Н. Сравнительный анализ устойчивости морских и сухопутных трубопроводов // Газовая промышленность. 2009. № 4. С. 37–40.
- Bi K., Hao H. Using pipe-in-pipe systems for subsea pipeline vibration control // Engineering Structures. 2016. V. 109. P. 75–84. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.11.018
- Davaripour F., Quinton B.W.T., Pike K. Effect of damage progression on the plastic capacity of a subsea pipeline // Ocean Engineering. 2021. V. 234. https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.109118
- Cheng A., Chen N.-Z. Corrosion fatigue crack growth modelling for subsea pipeline steels // Ocean Engineering. 2017. V. 142. P. 10–19. https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2017.06.057
- 8. *Айнбиндер А.Б.* Расчет магистральных и промысловых трубопроводов на прочность и устойчивость: Справочное пособие. М.: Недра, 1991. 287 с.
- 9. Зарипов Р.М., Коробков Г.Е., Чичелов В.А. Универсальный метод расчета на прочность магистральных трубопроводов // Газовая промышленность. 1998. № 4. С. 44–45.
- Коробков Г.Е., Зарипов Р.М., Шаммазов И.А. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния и устойчивости трубопроводов в осложненных условиях эксплуатации. СПб.: Недра, 2009. 410 с.
- 11. *Peek R., Yun H.* Flotation to trigger lateral buckles in pipelines on a flat seabed // Journal of Engineering Mechanics. 2007. V. 4. P. 442–451.

https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2007)133:4(442)

- Hong Z., Liu R., Liu W., Yan S. Study on lateral buckling characteristics of a submarine pipeline with a single arch symmetric initial imperfection // Ocean Engineering. 2015. V. 108. P. 21–32. https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2015.07.049
- Chee J., Walker A., White D. Controlling lateral buckling of subsea pipeline with sinusoidal shape pre-deformation // Ocean Engineering. 2018. V. 151. P. 170– 190. https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2018.01.024
- Wang Z., Tang Y. Study on symmetric buckling mode triggered by dual distributed buoyancy sections for subsea pipelines // Ocean Engineering. 2020. V. 216. https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.108019
- 15. *Chen Y., Dong S., et al.* Buckling analysis of subsea pipeline with idealized corrosion defects using homotopy analysis method // Ocean Engineering. 2021. V. 234. https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.108865
- Wang Z., Tang Y., Guedes S.C. Imperfection study on lateral thermal buckling of subsea pipeline triggered by a distributed buoyancy section // Marine Structures. 2021. V. 76. https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2020.102916
- 17. Ильгамов М.А., Шакирьянов М.М. Положения динамического равновесия изогнутого трубопровода с вибрирующими опорами // ДАН. 2021. № 1. С. 55–59. https://doi.org/10.31857/S2686740021010053
- Ilgamov M.A., Ratrout R.A. Large deflection of superconducting cable // International Journal of Nonlinear Mechanics. 1999. V. 34. № 5. P. 869–880. https://doi.org/10.1016/S0020-7462(98)00059-6
- 19. *Ilgamov M.A.* Static Problems of Hydroelasticity. M.: Fizmatlit, 1998. 208 p.

# MODEL OF UNDERWATER PIPELINE FLOTATION

### Corresponding Member of RAS M. A. Ilgamov<sup>a,b,c</sup>

<sup>a</sup>A.A. Blagonravov Institute of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>b</sup>Bashkir State University, Ufa, Russia

<sup>c</sup>Institute of Mechanics, UFIC of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia

The simplest model of a span flotation of an underwater pipeline between two supports has been developed. The weight of the pipeline with the transported medium, the buoyancy force of the water, the transverse distributed forces caused by the pressures on the inner and outer surfaces, the change in the curvature of the center line during bending, as well as the decrease in the pressure of water and gas on the pipe walls during its rise are taken into account. Linear static bending is considered. The model describes the rise of the pipeline to a position that coincides with its upper part with the surface of the water. The conditions for the flotation of the pipeline have been determined.

Keywords: underwater pipeline, water and gas pressures, bend, flotation criterion

#### 14

———— ФИЗИКА ——

УДК 533.9.01,523.9

# ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА ПРОЦЕСС ГЕНЕРАЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЗВЕЗДАХ ПРИ ДОСТАТОЧНО БОЛЬШИХ ДИНАМО-ЧИСЛАХ

© 2022 г. Е. П. Попова<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН Р.3. Сагдеевым 12.12.2021 г. Поступило 14.12.2021 г. После доработки 14.02.2022 г. Принято к публикации 15.02.2022 г.

Для нелинейной динамической системы уравнений, описывающей поведение гармоник магнитного поля Солнца на базе модели αΩ-динамо, показано, что в начале процесса генерации магнитного поля, когда динамо-число значительно превышает пороговое, лидируют наиболее быстро нарастающие волны, затем с течением времени они довольно быстро перестают расти и лидирующими становятся изначально медленно нараставшие, которые затем и дают основной вклад в процесс генерации магнитного поля.

*Ключевые слова:* динамо, магнитное поле, динамо-число, звезды, турбулентная диффузия **DOI:** 10.31857/S2686740022030129

Генерацию магнитных полей звезд, в частности Солнца, принято связывать с процессом динамо, который основан на совместном действии дифференциального вращения небесного тела и мерой нарушения отражательной инвариантности течений в зоне генерации магнитного поля, так называемой гидродинамической спиральности [1]. В кинематической модели динамо Паркера [1] поле скоростей считается заданным, а генерируемое магнитное поле рассматривается в виде бегущих динамо-волн. При этом магнитное поле рассматривается в виде двух компонент: тороидального (или азимутального) поля, вытянутого вдоль параллелей, и полоидального поля, вытянутого вдоль меридианов.

В моделях динамо для нелинейного ограничения роста магнитного поля обычно используют эффект стабилизации (подавления α-эффекта при достаточном росте амплитуды магнитного поля) [2]. Такой подход может дать специфические эффекты поведения волн магнитного поля, исследование которых представляет отдельный интерес.

Цель работы — показать на примере одномерной модели  $\alpha\Omega$ -динамо как эволюционируют волны в нелинейной среде и найти область применимости метода представления процесса динамо в виде динамических систем.

#### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Система уравнений αΩ-динамо Паркера [1] в квази-одномерном случае имеет вид

$$\frac{\partial A}{\partial t} = R_{\alpha} \alpha B + \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2},$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = R_{\omega} \sin \theta \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2},$$
(1)

где векторный потенциал A и тороидальная компонента магнитного поля B являются функциями широты  $\theta$ , измеряемой от полюса, и времени t. Безразмерные числа  $R_{\alpha}$  и  $R_{\omega}$ , аналогичные известному в гидродинамике числу Рейнольдса, характеризуют интенсивность  $\alpha$ -эффекта и дифференциального вращения соответственно ( $D = R_{\alpha}R_{\omega}$ ). Обычно в задачах о солнечном динамо D берется меньше нуля и в анализе подразумевается модуль D, поэтому далее в работе мы будем подразумевать модуль D. Здесь мы используем простейшую схему стабилизации роста магнитного поля, так называемое подавление спиральности. В рамках этой схемы считается, что

$$\alpha = \alpha_0(\theta)/(1+\xi^2 B^2) \approx \alpha_0(\theta)(1-\xi^2 B^2),$$

где  $\alpha_0(\theta)$  – значение спиральности в незамагниченной среде,  $B_0 = \xi^{-1}$  – магнитное поле, при котором происходит существенное подавление  $\alpha$ -эффекта. Мы используем простейшую форму для  $\alpha$ -эффекта  $\alpha_0(\theta) = \cos \theta$ , при которой выполняется условие равенства его нулю на экваторе. В качестве граничных условий используем условия

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Centro de Investigación en Astronomía, Universidad Bernardo O'Higgins, Santiago, Chile

<sup>\*</sup>E-mail: elena.popova@ubo.cl

 $A(0) = B(0) = A(\pi) = B(\pi) = 0$ , что соответствует дипольной симметрии. Выбор множителя sin  $\theta$  во втором уравнении отвечает уменьшению длины параллели вблизи полюса. В диффузионных членах опушены эффекты кривизны. Считается, что радиальный градиент угловой скорости не меняется с  $\theta$ . По соображениям симметрии уравнения (1) можно рассматривать лишь для одного (северного) полушария с условиями антисимметрии (дипольная симметрия) или симметрии (квадрупольная симметрия) на экваторе. Поскольку магнитное поле Солнца имеет дипольную симметрию, такой случай рассмотрен в данной модели. В системе (1) время и расстояния измеряются в безразмерных единицах, которые вводятся при построении динамо-числа. В частности, единицей времени является не год, а так называемое диффузионное время, за которое жидкая частица под действием турбулетной диффузии проходит конвективную зону. Магнитное поле измеряется в единицах того значения, при котором происходит нелинейная стабилизация решения (обычно принимается, что это поле равнораспределения между кинетической энергией турбулентности и магнитной энергией).

Будем исследовать систему (1) с помощью разложения в ряды Фурье с зависящими от времени коэффициентами. Впервые такое приближение было предложено в работе [3] и развито в работах [4-9]. Отметим, что динамические системы применяются и для других конфигураций динамо, как, например, в [10], где динамическая система строилась для дисковой динамо-системы, имеющей три связанных проводящих диска, и учитывалась вызванная взаимодействием временная задержка в динамических управляющих уравнениях. В рамках такого приближения предполагается, что возбуждаемое магнитное поле звезды или планеты можно описать подходящим образом подобранной динамической системой. Уравнения динамо проектируются на систему собственных функций для задачи о затухании магнитного поля при отсутствии источников генерации. Решение системы динамо фактически представляется в виде ряда Фурье с зависящими от времени неизвестными коэффициентами, которые могут быть найдены из динамической системы для них, полученной после подстановки выбранного вида решения в исходную систему динамо.

В работах [3–9] решение строилось на базисе малого числа старших собственных функций (не более трех). Однако очень важно при сужении базиса собственных функций (мод) не выходить за пределы применимости данного метода при выборе больших значений числа динамо.

Если изначально задаваемое динамо-число существенно превышает его пороговое значение

(порог генерации магнитного поля), необходимо учитывать большее число собственных функций (тем самым и их Фурье гармоник). Если это условие нарушено, вся нелинейная картина насыщения неустойчивости окажется некорректной. В зависимости от превышения динамо-числом его порогового значения оценим минимальное число мод (гармоник), которые необходимо учитывать в базисе. Если коротковолновые моды попадают изначально в область достаточно сильного затухания из-за магнитной турбулентной диффузии, их вклад становится пренебрежимо малым. Пусть в начальный момент времени задано достаточное большое динамо-число  $D_0$ , оценим минимальное количество мод, которое необходимо учитывать в базисе собственных функций при решении нелинейной динамической задачи нарастания магнитного поля и его нелинейного насыщения. При больших D<sub>0</sub>, когда число нарастающих мод достаточно велико ( $n \gg 1$ ), для оценки можно применить предположение о слабой пространственной неоднородности и найти локальное значение инкремента нарастания динамо-волны. Подставим в систему уравнений (1) решения в виде

$$A = \overline{A}e^{i(2n+1)\theta}e^{\omega t}, \quad B = \overline{B}e^{i2n\theta}e^{\omega t},$$

учитывая дипольную симметрию магнитного поля. При  $n \gg 1$  можно показать, что если положить

среднее значение  $\sin \theta \cos \theta \approx \frac{1}{4}$ , то

$$\operatorname{Re}\omega = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2nD}{4}} - (2n)^2.$$

Условие генерации поля  $\omega > 0$ , следовательно,

 $D > 8(2n)^3$ . В нелинейном балансе необходимо учитывать также и затухающие волны с несколько большими *n*. Именно нелинейная передача энергии от неустойчивых мод затухающим обеспечивает установление нелинейного насыщения. Тогда при динамо-числе, значительно превышающим порог генерации, необходим учет числа мод  $n > \frac{1}{4} \sqrt[3]{D}$ . Тогда применимость метода в зависимости от числа учитываемых мод будет ограни-

чена следующими диапазонами динамо-чисел: для n = 2, D < 512; n = 3, D < 1728; n = 5, D < 8000; n = 10, D < 64000.

Отметим, что в работах [6, 7, 9] рассматривался случай n = 2, а задача динамо исследовалась в том числе и на областях динамо-чисел, выходящих за область применимости метода (в [6] область динамо-чисел D была до 1000, в [7] — до 3000, работа [9] построена на исследовании поведения динамо-волн в диапазоне D от 10<sup>4</sup> до 10<sup>7</sup>).

В типичных случаях, как на Солнце и звездах, ожидаемое динамо-число значительно превышает пороговое значение неустойчивости. Высокие



Рис. 1. Зависимость амплитуды тороидального магнитного поля от времени для разных (а) и одинаковых (б) начальных амплитуд на начальной стадии генерации.

моды с достаточно большим волновым вектором k становятся неустойчивыми, что требует более сложного многомодового подхода к нелинейной задаче. Кроме того, в исходной постановке учитывалось, что  $\alpha$ -эффект и дифференциальное вращение зависят от  $\theta$ ,  $\alpha$  пропорционально соѕ $\theta$ , а дифференциальное вращение пропорциональное во в случае отсчета угла от полюса.

Можно показать, что амплитуды магнитного поля на стадии насыщения с большой точностью соответствуют полной компенсации превышения динамо-числа над порогом за счет нелинейного уменьшения α-эффекта:

$$D-D_{\rm cr}=rac{\delta lpha_{\rm He,T}\Delta V}{\beta^2 k^2},$$

где  $\delta \alpha_{\text{нел}} = \frac{\alpha_0 B^2}{B_0^2}, \beta$  – коэффициент турбулентной диффузии,  $\Delta V$  – скачок дифференциального вра-

щения на толщине эффективного слоя генерации магнитного поля.

Для исследования поведения гармоник в нашей задаче рассмотрим случай n = 10, для которого динамо-число Солнца находится в области применимости метода. Мы проводили также учет большего числа гармоник и нашли, что их вклад в решение пренебрежимо мал. Тороидальное поле *B* и векторный потенциал *A* представим в виде

$$B(\theta, t) = \sum_{n=1}^{10} b_n(t) \sin(2n\theta),$$
  

$$A(\theta, t) = \sum_{n=0}^{10} a_n(t) \sin((2n+1)\theta).$$
(2)

Подставляя выбранный вид решения в систему (1), получим динамическую систему из 20 уравнений относительно неизвестных функций  $a_n(t)$  и  $b_n(t)$ . Поскольку данная система получается слишком громоздкой, мы ее здесь не приводим.

### РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 1 представлена начальная стадия генерации магнитного поля Солнца для разных (а) и одинаковых (б) начальных амплитуд тороидального магнитного поля для динамо-числа, превышающего пороговое значение. Горизонтальной оси соответствует время, а вертикальной оси амплитуда тороидального магнитного поля. Компоненты магнитного поля отмечены цифрами, соответствующими номеру *п* из соотношений (2). Из рис. 1 видно, что с течением времени даже при больших начальных значениях амплитуды поля самых коротковолновых волн остаются только самые длинноволновые гармоники. Это является результатом нелинейного уменьшения динамочисла в процессе установления нелинейной сталии линамо, сопровожлающегося переходом коротковолновых мод из неустойчивого состояния в затухающее.

Из полученных результатов можно сделать следующий вывод. Когда самое быстро нарастающее решение входит в нелинейную стадию и α-эффект уменьшается, начиная с каких-то амплитуд волна перестает нарастать, а соседние гармоники, первоначально нараставшие медленно, догоняют предыдущие и самые быстрые из них тоже начинают затухать. В конечном итоге на первый план выходят самые медленно растушие волны. Подобный эффект был отмечен в работах Бранденбурга [11, 12], в которых говорилось, что до процесса насыщения генерации поля может быть возбуждено несколько различных мод, в нелинейном режиме большая часть мод подавляется наиболее доминирующей модой, и нелинейность поэтому обладает эффектом "самоочищения" (нелинейная зачистка). Поэтому для моделирования генерации магнитного поля при динамо-числах, существенно превышающих порог генерации магнитного поля, нельзя ограничиваться только одной (или даже несколькими собственными функциями), соответствующей наиболее быстро нарастающему решению. Такая волна в конце концов перестает расти, выходит из игры и ее вклад в процесс генерации магнитного поля становится несущественным. Иными словами, динамо-число в процессе выхода в нелинейный режим насыщения уменьшается и моды, в начале процесса являвшиеся наиболее неустойчивыми, формально стали бы затухающими, так что их амплитуды в итоге поддерживаются нелинейной перекачкой энергии от крупномасштабных волн.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Parker E.N. // Astrophys. J. 1955. V. 122. P. 293-314.
- Brandenburg A., Subramanian K. // Physics Reports. V. 417. P. 1–209.
- 3. Ruzmaikin A.A. // Comm. Astrophys. 1981. V. 9. P. 85–93.
- Kitiashvili I., Kosovichev A.G. // Astrophys. J. 2008. V. 688. P. 49–52.
- 5. Соколов Д.Д., Нефедов С.Н. // Вычислительные методы и программирование. 2007. Т. 8. С. 195–204.
- Нефедов С.Н., Соколов Д.Д. // Астрон. журн. 2010. Т. 87. С. 278–285.
- 7. Собко Г.С., Задков В.Н., Соколов Д.Д., Трухин В.И. // Геомагнетизм и аэрономия. 2012. Т. 52. С. 271–277.
- Popova H. // Magnetohydrodynamics. 2013. V. 49. P. 59–67.
- 9. *Тарбеева С.М., Соколов Д.Д.* // Астрон. журн. 2016. Т. 93. № 7. С. 669-674.
- 10. *Deng S., Ji J., Wen G., Xu H. //* Applied Mathematics and Computation. 2021. V. 399 (4): 126016.
- 11. Brandenburg A. // Astrophys. J. 2001. V. 550. P. 824-840.
- 12. Brandenburg A., Subramanian K. // Astron. Astrophys. 2000. V. 361. P. 33–36.

# INFLUENCE OF NONLINEARITY ON THE PROCESS OF MAGNETIC FIELD GENERATION IN STARS WITH SUFFICIENTLY LARGE DYNAMO NUMBERS

#### E. P. Popova<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Centro de Investigación en Astronomía, Universidad Bernardo O'Higgins, Santiago, Chile Presented by Academician of the RAS R.Z. Sagdeev

For a nonlinear dynamic system of equations describing the behavior of the harmonics of the solar magnetic field on the basis of the alpha-omega dynamo model, it is shown that at the beginning of the magnetic field generation process, when the dynamo number significantly exceeds the threshold, the most rapidly growing waves are in the lead, then over time, they are quite they quickly stop growing and the initially slowly growing ones become the leading ones, which then make the main contribution to the process of magnetic field generation.

Keywords: dynamo, magnetic field, dynamo number, stars, turbulent diffusion

———— ФИЗИКА ——

УДК 537.5

# СИНТЕЗ ОКСИДНЫХ, НИТРИДНЫХ И ОКСИНИТРИДНЫХ МАТЕРИАЛОВ МИКРО- И НАНОРАЗМЕРОВ НА ОСНОВЕ ПОРОШКОВ Al/AlN, Al/Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>

© 2022 г. А. С. Соколов<sup>1,\*</sup>, В. Д. Борзосеков<sup>1</sup>, Е. В. Воронова<sup>1</sup>, Д. В. Малахов<sup>1</sup>, В. Д. Степахин<sup>1</sup>, Е. А. Образцова<sup>2</sup>, О. Н. Шишилов<sup>1,3</sup>

Представлено академиком РАН В.И. Коновым 07.02.2022 г. Поступило 07.02.2022 г. После доработки 07.02.2022 г. Принято к публикации 28.03.2022 г.

Представлен результат экспериментов по получению оксидных, нитридных и оксинитридных материалов в микродисперсном состоянии с заданным составом и сложной поверхностью с помощью разрядов мощного импульсного гиротрона в смесях порошков Al/AlN, Al/Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>. Продемонстрирован синтез частиц наноразмеров (>10 нм) и микрочастиц (от 1 до 100 мкм) со сложной поверхностью. Приведены микрофотографии поверхности полученных частиц и их морфологический состав. Полученные материалы рассматриваются в качестве носителей для катализаторов.

*Ключевые слова:* носители для катализаторов, гиротрон, плазмохимия, микроволновый разряды, синтез веществ, микроструктуры, микрочастицы, оксиды, нитриды, оксинитриды, сложная поверхность

DOI: 10.31857/S2686740022030130

Задачи современного материаловедения, связанные с синтезом частиц микро- и наноразмеров, как носителей для гетерогенных катализаторов, могут быть решены с помощью плазменных микроволновых методов с применением мощных импульсных гиротронов, которые позволяют синтезировать вещества в цепных плазмохимических процессах [1]. Например, возможно создание оксидных, нитридных и оксинитридных материалов в микродисперсном состоянии с заданным составом и сложной (возможно, фрактальной) поверхностью, являющихся высококачественными носителями для гетерогенных катализаторов платиновой группы [2].

Экспериментальные исследования проводились на плазмохимическом стенде, с использованием микроволнового излучения мощного импульсного гиротрона [3]. Элементы стенда представлены на рис. 1.

<sup>2</sup>Институт биоорганической химии им. академиков

Описание плазмохимического реактора приведено в [4]. В реакторе смесь порошков металлдиэлектрик помещается на подложке со свободной верхней поверхностью, что обеспечивало разлет частиц в реактор. Внешний вид реактора ГР-1 представлен на рис. 1. Микроволновый разряд создавался при атмосферном давлении в воздухе и азоте.

Схема плазмохимического реактора с диагностиками, используемые в процессе синтеза материалов, представлена на рис. 2, а подробное описание методики представлено в [5].

Проведение плазмохимических исследований в разрядах, инициируемых излучением гиротрона, требует регистрации и обработки больших объемов различного типа данных. Для проведения корректных измерений нами был разработан аппаратно-программный диагностический комплекс. К программной части реализации относится электронный журнал, программные модули обработки данных и модули взаимодействия с аппаратурой. К аппаратной части относятся система видеонаблюдения, СВЧ-детекторы, блок высокоскоростных аналого-цифровых преобразователей, группа оптических спектрометров [6]. На рис. 3 представлена структурная схема диагностической части комплекса экспериментального стенда, с указанием моделей спектрометров и видеокамер.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук, Москва, Россия

М.М. Шемякина и Ю.А. Овчинникова

Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>МИРЭА — Российский технологический университет, Москва, Россия

<sup>\*</sup>E-mail: dmc63@yandex.ru



**Рис. 1.** Схема эксперимента: *1* – гиротрон, *2* – фокусирующие зеркала квазиоптического тракта, *3* – плоское зеркало, *4* – СВЧ-калориметр, *5* – квазиоптический СВЧ-ответвитель, *6*–*8* – СВЧ-детекторы падающего, отраженного и прошедшего излучения, *9* – плазмохимический реактор, ВН1 – промышленная камера, ВН2 – высокоскоростная видео-камера.

Для анализа структуры и элементного состава полученных материалов были использованы методы растровой электронной микроскопии (РЭМ) и энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии (ЭДС) [7–9]. Измерения проводились с помо-



Рис. 2. Схема плазмохимического реактора: 1 – боковое смотровое кварцевое окно, 2 – стенка реактора, 3 – CBЧ-согласованное кварцевое окно, 4 – кварцевая подложка, 5 – реакционная смесь, 6 – плазменная фаза разряда, 7 – газовая фаза разряда, 8 – кварцевая труба, BH1 – промышленная камера, BH2 – высокоскоростная камера, CП1, CП2 – световоды спектрометров, C1 – падающее CBЧ-излучение, C2 – непоглощенное CBЧ-излучение, C3 – отраженное CBЧ-излучение.

щью растрового электронного микроскопа Zeiss Merlin. Для получения изображений были использованы ускоряющие напряжения от 1 до 15 кВ, что позволило получать качественные изображения полученных частиц в диапазоне увеличений от 100 до 30 000 раз. Аналитические возможности микроскопа Zeiss Merlin расширены с помощью дополнительной приставки для рентгеновского микроанализа Oxford Instruments INCAx-act. Анализ химического состава исследуемых порошков был проведен методом энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии в ходе РЭМ-измерений.

В экспериментах по данной теме рассматривалось развитие цепных процессов в смесях порошков:

• Al + AlN в воздухе, соотношение по молям 1 : 4, 1 : 2, 1 : 1,

• Al + Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>, в воздухе, соотношение Al: Si по молям 1 : 5, 2 : 4, 3 : 3, 4 : 2.

Для этих смесей порошков были найдены необходимые микроволновые энергии для перехода к цепным реакциям плазмохимического синтеза (от 0.8 до 2.4 кДж). Измерены проходящие, отраженные и рассеянные СВЧ-сигналы балансных измерений, что позволяет определять поглощенную энергию. Определен процент металла, необходимый для перехода в режим цепного плазмохимического синтеза [10] для всех смесей. Показано, что температура газовой смеси над поверхностью порошковой смеси в реакторе превышает 3500 К (по



Рис. 3. Структурная схема диагностического комплекса плазмохимического стенда.



**Рис. 4.** Сигналы с СВЧ-датчика для падающего (а), отраженного (б) и прошедшего (в) излучения гиротрона в смеси AL + ALN при соотношении по молям 1:1 при инициации плазмохимической реакции.

регистрации молекулярных спектров AlO). По континууму спектров определены температуры нижней и верхней поверхностей порошков (2000— 3000 К). В каждой системе был получен осажденный материал, который отправлен на электронную микроскопию и рентгенофазовый анализ для определения морфологии и химического состава синтезированных частиц. Синтезированные частицы с развитой наноструктурированной поверхностью могут быть носителями для катализаторов на основе платиновых металлов.

### Al + AlN в воздухе (соотношение по молям 1 : 4, 1 : 2, 1 : 1)

Первый эксперимент связан с получением микроволнового пробоя и цепных процессов синтеза оксидов, нитридов и оксинитридов – по возможности с контролируемым составом – в смесях порошков Al, AlN и Al + AlN в воздухе при соотношении по молям 1:4, 1:2 и 1:1. Предполагается, что будет происходить окисление алюминия до оксида и его дальнейшее взаимодействие с нитридом, а



**Рис. 5.** Нарастание интенсивности оптических спектров в интервале 280–495 нм в реакторе ГР-1 для смеси порошков Al + AlN в соотношении 1 : 1.



**Рис. 6.** Фотографии разлета заряженных частиц при высокоскоростной съемке через 0.024–0.044 с после инициации плазмохимической реакции.



**Рис.** 7. Фотография поверхности порошка Al + AlN при соотношении по молям 1 : 1 до (а) и после (б) эксперимента.



**Рис. 8.** Сигналы с СВЧ-датчика для падающего (а), отраженного (б), прошедшего (в) излучения гиротрона в смеси Al+Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> (4 : 2) при инициации плазмохимической реакции.



**Рис. 9.** Изменение интенсивности оптических спектров  $Al + Si_3N_4$  при соотношении 4 : 2 в интервале 250–450 нм в реакторе ГР-1.

также окисление нитрида в условиях высоких температур.

Пробой в смеси порошков Al + AlN в воздухе произошел при соотношении по молям 1 : 1 при мощности гиротрона 300 кВт и длительности импульса СВЧ 4 мс (при энергии СВЧ 1.2 кДж). При меньших количествах металла переход к цепным реакциям не наблюдался.

При увеличении мощности СВЧ до 350 кВт и такой же длительности импульса (при энергии СВЧ 1.4 кДж) произошел переход к развитию плазмохимических процессов. Это видно на рис. 4, на котором уровень прошедшего сигнала резко уменьшается. В этом случае происходит выброс с верхней поверхности порошка частиц, которые при развитии процессов становятся центрами кристаллизации микро- и наночастиц. В случае поглощения микроволнового излучения и развития плазмохимических процессов с выделением энергии над порошком в реакторе появляется ин-



**Рис. 10.** Изображение поверхности микрочастиц Al и  $Si_3N_4$  (4 : 2) синтезированных в воздухе.

тенсивное свечение (свечение реагентов в процессе синтеза).

В экспериментах проводились измерения спектров свечения над порошком и под порошком. На рис. 5 приведены части спектра над порошком с интервалом по времени 1.1 мс. Отметим появление спектров алюминия AlI (310 и 395 нм), а также молекулярных спектров AlO (с максимумами в молекулярной полосе – 316, 337.5, 358 и 375.5 нм). Эти спектры нарастают в первые 3 мс после выключения СВЧ-импульса, а потом спадают после 10 мс на фоне роста общей яркости.

На всех спектрах фиксируется континуум. По нему возможна оценка температуры верхней и нижней поверхности порошковых смесей. Отметим, что регистрация молекулярного спектра AlO в объеме реактора указывает на высокую температуру газовой фазы, превышающую 3500 К (анализ произведен с использованием спектроскопической базы данных NIST – https://www.nist.gov/ pml/atomic-spectra-database, обр. 19.01.2022).

На рис. 6 приведены фотографии процесса синтеза в смеси порошков Al + AlN в соотношении 1 : 1 после инициации плазмохимической реакции. Для наработки синтезированного материала были проведены последовательные 70 разрядов, в течение которых весь материал порошка был переработан на нижней поверхности, а также перенесен на стенки и верхнюю крышку реактора. На рис. 7 приведены фотографии поверхности смеси порошков до и после эксперимента.

#### Al + Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> в воздухе (1:5, 2:4, 3:3, 4:2)

Следующий эксперимент проводился в смеси порошков Al + Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> в воздухе (1:5, 2:4, 3:3, 4:2). Микроволновый пробой и инициация цепных плазмохимических реакций произошли при максимальном содержании металла в порошке при мощности гиротрона 200 кВт и длительности им-



**Рис. 11.** Фотография и морфологический состав оксинитридных микрочастиц, синтезированных в смесях порошков Al и Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> (4 : 2) при разряде в воздухе.

пульса 4 мс (энергии СВЧ 0.8 кДж). СВЧ-сигналы показаны на рис. 8.

Эволюция во времени оптических спектров в диапазонах частот 250-450 нм и 450-750 нм представлена на рис. 9. В них вместе с линиями All (310 и 395 нм) присутствуют линии SiI (252, 288 и 390.5 нм), а также 4 канта с фиолетовым сдвигом AlO (316, 337.5, 358 и 375.5 нм, как и в порошке Al + AlN). Таким образом, температура газовой фазы в реакторе при синтезе превышает 3500 К.

На рис. 10 и 11 приведены частицы с размерами до 100 мкм. Микроэлектронные фотографии и морфологический состав представлены на рис. 12 для смесей порошков Al и Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> (4 : 2). На рисунках видна сложная поверхность синтезированных микрочастиц размером в несколько десятков микрон.

На рис. 12 приведена фотография синтезированных наноразмерных частиц (от 10 нм).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе выполнения научно-исследовательской работы развит метод получения оксидных, нитридных и оксинитридных материалов в микродисперсном состоянии с заданным составом и сложной (возможно, фрактальной) поверх-



**Рис. 12.** Пример синтезированных наноструктур, полученных в смесях порошков Al и Si $_3N_4$  (4 : 2) в воздухе.

ностью. Определены пороги перехода к цепным реакциям в обеих смесях по содержаниям металлов в смесях (1:1 по молям) и по микроволновому излучению мощного импульсного гиротрона (мощностью до 0.4 МВт, длительностью импульса до 6 мс).

Синтезированные микро- и наноматериалы – это новые функциональные материалы с технологически интересными свойствами и широким спектром применений в промышленности: создание гетерогенных катализаторов, допирование керамических материалов и др.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Коллектив выражает благодарность руководителю исследовательской работы Н.Г. Гусейн-заде, ведущему научному сотруднику профессору Н.Н. Скворцовой, а также другим членам исследовательской группы.

#### ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания ГЗ БВ10-2021, федерального проекта "Разработка технологий управляемого термоядерного синтеза и инновационных плазменных технологий", комплексной программы "Развитие техники, технологий и научных исследований в области использования атомной энергии в Российской Федерации на период до 2024 года" НИР "Изучение инновационного синтеза микро- и наночастиц с контролируемым составом и структурой на основе микроволнового разряда в гиротронном излучении" 2021–2024 гг.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Skvortsova N.N., Shishilov O.N., Akhmadullina N.S. et al.* Ceramics International. 2021. V. 47. P. 3978–3987. Ceramics International Volume 47. Issue 3. 1 February 2021.
- Шишилов О.Н., Скворцова Н.Н., Гусейн-заде Н.Г. и др. Материалы V Всероссийской научной конференции "Актуальные проблемы теории и практики гетерогенных катализаторов и адсорбентов". Иваново. 30 июня – 2 июля 2021 г. С. 467–470.
- 3. *Kharchev N.K. et al.* Optimization of operation of a three-electrode gyrotron with the use of a flow-type

calorimeter // Review of Scientific Instruments. 2013. V. 84. № 1. P. 013507.

- Skvortsova N.N. et al. Synthesis of micro- and nanostructured materials via oscillating reactions initiated by high-power microwave pulses // Ceramics International. 2020. P. S0272884220329813.
- 5. Скворцова Н.Н., Ахмадулина Н.С., Батанов Г.М., Соколов А.С., Степахин В.Д., Шишилов О.Н. Синтез микро- и наноструктур в цепных плазмохимических реакциях, инициируемых микроволновым излучением гиротрона в смесях порошков металла и диэлектрика // XV Школа по плазмохимии для молодых ученых России и стран СНГ Иваново. 10–15 сентября 2018 г.
- 6. *Malahov D.V. et al.* Data registration and analysis system of the GR-1 plasma chemical reactor // PPPT-8. Minsk. 2015. P.161.

- 7. *Goldstein J.I. et al.* Scanning Electron Microscopy and X-Ray Microanalysis. 4th ed. 2018. N.Y.: Springer New York : Imprint: Springer, 2018. 1 p.
- Малви Т. и др. Количественный электронно-зондовый микроанализ // Под ред. В. Скотта, Г. Лава. Пер. с англ. А.И. Козленкова. М.: Мир, 1986. 351 с.
- Козлов В.В. Системы рентгеноспектрального микроанализа Inca Energy и Inca Wave // Матер. конф. "Перспективные технологии, оборудование и системы для материаловедения и наноматериалов" / Под ред. Л.В. Кожитова. М.: Интерконтакт Наука; Усть-Каменогорск: ВКГТУ, 2008. С. 106–122.
- Скворцова Н.Н. и др. Инициация пылевых структур в цепных реакциях под воздействием излучения гиротрона на смесь порошков металла и диэлектрика с открытой границей // Письма в ЖЭТФ. 2017. № 15–16. С. 240–246.

# SYNTHESIS OF OXIDE, NITRIDE AND OXYNITRIDE MATERIALS OF MICRO- AND NANO-SIZES BASED ON AI/AIN, AI/Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> POWDERS

A. S. Sokolov<sup>a</sup>, V. D. Borzosekov<sup>a</sup>, E. V. Voronova<sup>a</sup>, D. V. Malakhov<sup>a</sup>,
 V. D. Stepakhin<sup>a</sup>, E. A. Obraztsova<sup>b</sup>, and O. N. Shishilov<sup>a,c</sup>

<sup>a</sup>Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia <sup>b</sup>Shemyakin–Ovchinnikov Institute of Bioorganic Chemistry of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia <sup>c</sup>MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia Presented by Academician of the RAS V.I. Konov

Presented information about experiments on obtaining oxide, nitride and oxynitride materials in a microdispersed state with a given composition and a complex surface using high-power pulsed gyrotron discharges in mixtures of Al/AlN, Al/Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> powders. The synthesis of nano-sized particles (>10 nm) and micro-particles (from 1 to 100 microns) with a complex surface is demonstrated. Micrographs of the surface of the obtained particles and their morphological composition are presented. The obtained materials are considered as carriers for catalysts.

*Keywords:* carriers for catalysts, gyrotron, plasma chemistry, microwave discharges, synthesis of substances, microstructures, microparticles, oxides, nitrides, oxynitrides, complex surface

———— ФИЗИКА ——

УДК 538.915

# ДЕТЕКТИРОВАНИЕ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ В АНТИФЕРРОМАГНЕТИКЕ Но<sub>0.8</sub>Lu<sub>0.2</sub>B<sub>12</sub> ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ ЭФФЕКТА ХОЛЛА

© 2022 г. А. Л. Хорошилов<sup>1,\*</sup>, А. В. Богач<sup>1</sup>, С. В. Демишев<sup>1</sup>, К. М. Красиков<sup>1</sup>, В. Н. Краснорусский<sup>1</sup>, С. Е. Половец<sup>2</sup>, В. Б. Филипов<sup>2</sup>, Н. Е. Случанко<sup>1</sup>

Представлено академиком РАН И.А. Щербаковым 28.12.2021 г. Поступило 28.12.2021 г. После доработки 28.12.2021 г. Принято к публикации 17.03.2022 г.

Выполнены детальные измерения эффекта Холла при гелиевых температурах 2.1-4.2 К в магнитоупорядоченных фазах антиферромагнетика (АФ)  $Ho_{0.8}Lu_{0.2}B_{12}$  в магнитном поле до 80 кЭ на монокристаллах с ориентацией нормалей **n** [[001] и **n** [[110]. На основе проведенного анализа угловых зависимостей холловского сопротивления найдены новые фазовые переходы в АФ-состоянии, а также обнаружены аномалии, связанные с эффектами взаимодействия динамических зарядовых страйпов с внешним магнитным полем.

*Ключевые слова:* додекаборид, антиферромагнетик, пространственная неоднородность, фазовая диаграмма, магнетосопротивление, эффект Холла, анизотропия **DOI:** 10.31857/S2686740022030099

В последние десятилетия большой интерес вызывают исследования сильно-коррелированных электронных систем (СКЭС) с металлической проводимостью и электронным фазовым расслоением атомного масштаба, перспективных для практических применений и построения современных теоретических моделей [1-14]. Среди различных типов пространственных неоднородностей особое место занимают динамические зарядовые страйпы, для которых характерны высокочастотные (~240 ГГц [4]) колебания электронной плотности зонных носителей заряда. Зарядовые страйпы за счет сильного взаимодействия с внешним магнитным полем модифицируют сверхпроводящие [15] и магнитные фазовые диаграммы СКЭС (см., например, [4, 16]. В случае антиферромагнитных (АФ) металлов  $Ho_x Lu_{1-x}B_{12}$  с зарядовыми страйпами вдоль направлений (110) в ГЦК-решетке, авторами [4, 16] были получены многокомпонентные магнитные фазовые диаграммы и показано, что в этих редкоземельных (РЗ) додекаборидах формирование филаментарной структуры проводящих каналов приводит к

<sup>2</sup>Институт проблем материаловедения

понижению симметрии и образованию угловых Н-ф магнитных фазовых диаграмм в виде мальтийского креста и сильной анизотропии рассеяния носителей в парамагнитном состоянии. Кроме того, недавно [17] было обнаружено, что в парамагнитном состоянии Ho<sub>0.8</sub>Lu<sub>0.2</sub>B<sub>12</sub> возникает существенная анизотропия эффекта Холла, вызванная резким ростом в полях выше 40 кЭ положительной аномальной ангармонической компоненты.

Для определения положения фазовых границ на магнитных фазовых диаграммах СКЭС Но<sub>0.8</sub>Lu<sub>0.2</sub>B<sub>12</sub> и выяснения механизма формирования анизотропии рассеяния носителей заряда представляет интерес выполнить исследования эффекта Холла в АФ-состоянии (температура Нееля  $T_N \approx 5.7 \text{ K}$  [16]) и провести сравнительный анализ аномалий на угловых зависимостях диагональной (магнетосопротивление) и недиагональной (холловское сопротивление) компонент тензора сопротивления. В работе представлены результаты измерений эффекта Холла в АФ состоянии Но<sub>0.8</sub>Lu<sub>0.2</sub>B<sub>12</sub> и на основе анализа получены аргументы в пользу существования дополнительных фазовых границ на угловых Н-ф магнитных фазовых диаграммах Ho<sub>0.8</sub>Lu<sub>0.2</sub>B<sub>12</sub>.

## МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

В работе исследовались монодоменные монокристаллические образцы  $Ho_{0.8}Lu_{0.2}B_{12}$ , выра-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Институт общей физики имени А.М. Прохорова Российской академии наук, Москва, Россия

им. И.Н. Францевича, Национальная академия наук Украины, Киев, Украина

<sup>\*</sup>*E-mail: poligon-5l@yandex.ru* 



**Рис. 1.** Схема вращения образца при измерениях эффекта Холла и схема формирования динамических зарядовых страйпов в ГЦК решетке редкоземельных додекаборидов RB<sub>12</sub>. Приведено распределение электронной плотности в страйповой фазе для плоскости (001) из работы [20].

щенные в ИПМ НАН Украины методом бестигельного вертикального индукционного зонного плавления в инертной атмосфере аргона [18]. Измерения поперечного магнетосопротивления и эффекта Холла проводились в ИОФ РАН стандартным пятиконтактным методом с коммутацией постоянного тока через образец. В работе использовалась измерительная ячейка с образцом, обеспечивающая вращение относительно оси измерительного тока I || [110] с пошаговой фиксацией положения образца во внешнем перпендикулярном магнитном поле Н напряженностью до 80 кЭ. Измерения проводились при температурах 2.1-4.2 К на монокристаллических образцах Но<sub>0.8</sub>Lu<sub>0.2</sub>B<sub>12</sub> с двумя различными направлениями нормали к поверхности образца **n** || [001] и **n** || [110], вращение вектора **H** на угол  $\phi = \angle \mathbf{n}$ , **H** в диапазоне  $\phi = 0 - 360^{\circ}$  осуществлялось в плоскости (110) (см. схему на рис. 1).

#### РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 2 представлено сравнение измеренных угловых кривых удельного ρ(φ) и холловского  $\rho_{\rm H}(\phi)$  сопротивления в полях 35 и 50 кЭ для нормали **n** || [001] при *T* = 2.1 К и для нормалей **n** || [001] и **n** || [110] в поле 30 кЭ при *T* = 4.2 К. Следует подчеркнуть, что все приведенные в работе угловые зависимости холловского сопротивления  $\rho_{\rm H}(\phi)$ были скорректированы путем вычитания вклада от магнетосопротивления (см., например, [19]), возникающего за счет не эквипотенциального расположения холловских контактов на образце. Для всех исследованных образцов вклад магнетосопротивления не превышал 2% от величины регистрируемого холловского сигнала. Положение фазовых границ (см. нумерацию фаз римскими цифрами на рис. 3 и на Н–Т магнитных фазовых диаграммах в [16]) зависит от направления (угол  $\phi$ )

и напряженности Н внешнего магнитного поля; на рис. 2 эти границы показаны схематически черными пунктирными линиями. Легко видеть, что основные особенности на кривых  $\rho(\phi)$  (рис. 2а, 2в и рис. 2д, 2ж) воспроизводятся также на кривых ρ<sub>н</sub>(φ) (рис. 26, 2г и рис. 2е, 23). Так, положению радиальных фазовых границ вдоль (112) (см. обозначения в верхней части рис. 2) отвечают как резкие аномалии на кривых  $\rho(\phi)$ , так и особенности в виде ступенек на зависимостях  $\rho_{\rm H}(\phi)$  (рис. 2). Указанные радиальные границы отделяют область максимальных значений магнетосопротивления в широкой окрестности направления (001) (см. рис. 3) и отвечают переходам между фазами II–III и VIII, которые наблюдаются в широком диапазоне магнитных полей (см. также [16]). Аналогично, положение сингулярностей на кривых  $\rho(\phi)$  вблизи **H** || (221) совпадает с положением схожих с ними особенностей на холловских кривых ρ<sub>н</sub>(φ) (см. рис. 2). Указанные аномалии наблюдаются на границах сектора, отвечающего окрестности направления (110) (переходы между фазами V и VIII, см. рис. 3), вдоль которого в РЗ додекаборидах формируются динамические зарядовые страйпы [4, 16, 17, 19].

На рис. 2д–23 для сравнения приведены кривые  $\rho(\phi)$  и  $\rho_{\rm H}(\phi)$  в фиксированном поле 30 кЭ при T = 4.2 К для двух различных нормалей **n** || [001] и **n** || [110] в плоскости ( $\overline{110}$ ) (см. схему на рис. 1). Как видно из рис. 2д–2з, угловые положения фазовых границ вблизи углов, отвечающих наиболее сильным изменениям сопротивления (рис. 2д, 2ж), заметно отклоняются от направлений (112) и (221) (рис. 3б). Отметим также, что при T = 4.2 К в узком интервале углов вблизи направлений (110) на угловых зависимостях удельного сопротивления формируется дополнительная особенность в виде симметричного прямоугольного пика малой амплитуды, склоны которого соответствуют пе-



**Рис. 2.** Угловые зависимости удельного  $\rho(\phi)$  и холловского  $\rho_H(\phi)$  сопротивления в полях 35 к $\ni$  (а, б) и 50 к $\ni$  (в, г) при температуре 2.1 К для нормали **n** [[001], и в поле 30 к $\ni$  при температуре 4.2 К для нормалей **n** [[110] (д, е) и **n** [[001] (ж, з). Синими пунктирными линиями обозначено положение новых фазовых границ, обнаруженных в холловских экспериментах. Римскими цифрами обозначены различные магнитоупорядоченные фазы.



**Рис. 3.** Угловые Н–ф-магнитные фазовые диаграммы при температурах 2.1 К (а) и 4.2 К (б) в плоскости (110). Римскими цифрами приведена нумерация магнитоупорядоченных фаз, которая соответствует Н–Т-магнитным фазовым диаграммам, построенным в [16]. Найденные в работе новые фазовые переходы и аномалии эффекта Холла отмечены голубыми ромбами, толстыми черными сплошными линиями показаны новые фазовые границы.

реходам в фазу VI (рис. 2д, 2ж). При этом на кривых холловского сопротивления  $\rho_H(\phi)$  в этой области также наблюдаются резкие аномалии в виде несимметричной двухступенчатой особенности (рис. 2е), либо узкого пика (рис. 23). Очевидно, синхронное появление сингулярностей на кривых удельного сопротивления  $\rho(H_0, \phi_0)$ и холловского сопротивления $\rho_H(H_0, \phi_0)$  (рис. 2) свидетельствует о наличии резких фазовых границ на H–T- и H– $\phi$ -диаграммах Ho<sub>0.8</sub>Lu<sub>0.2</sub>B<sub>12</sub>.

При этом, наряду с отмеченными выше синхронными аномалиями ρ и ρ<sub>н</sub> заметной амплитуды, которые отвечают ориентационным фазовым переходам [16], угловые кривые холловского сопротивления позволяют зарегистрировать и новые, дополнительные фазовые границы. Действительно, вместе с едва заметными особенностями на кривых удельного сопротивления  $\rho(\phi)$  вблизи направлений  $(001) \pm 15^{\circ}$  при температуре 2.1 К в поле 35 кЭ (рис. 2а) на зависимостях холловского сопротивления  $\rho_{\rm H}(\phi)$  регистрируются заметные "ступеньки" (рис. 2б), положение которых, повидимому, отвечает границам новой фазы IIa (см. рис. За). Аналогично, дополнительная фазовая граница наблюдается и при T = 4.2 K в поле 30 кЭ в тех же направлениях магнитного поля  $\mathbf{H} \| \langle 001 \rangle \pm$  $\pm 15^{\circ}$  (рис. 3б). Положения соответствующих особенностей ρ<sub>н</sub>(φ) обозначены синими пунктирными линиями на рис. 2. С ростом поля отвечающая фазе IIa (см. также IIIa на рис. За и 3б) область на Н-ф-диаграмме расширяется (граница показана голубыми ромбами и линиями на рис. 3). С учетом экспериментальной погрешности в позиционировании образца по углу, найденные нами дополнительные фазовые границы представляют собой близкие к радиальным отрезки, которые в малых полях начинаются от границы с фазой I и заканчиваются при переходе в фазу Х (рис. 3).

Отдельно следует отметить особенности на кривых  $\rho_{\rm H}(\phi)$ , которые наблюдаются в непосредственной близости от  $\langle 110 \rangle$  и  $\langle 001 \rangle$  (см., например, рис. 2б, г, з), совпадающих, соответственно, с направлениями магнитного поля вдоль и перпендикулярно динамическим зарядовым страйпам в кристалле Ho<sub>0.8</sub>Lu<sub>0.2</sub>B<sub>12</sub>. Поскольку похожее поведение холловского сопротивления наблюдалось ранее [19] в реперном диамагнитном соединени LuB<sub>12</sub>, представляется естественным и в A $\Phi$  металле Ho<sub>0.8</sub>Lu<sub>0.2</sub>B<sub>12</sub> связать указанные аномалии вблизи  $\mathbf{H} \| \langle 110 \rangle$  и  $\mathbf{H} \| \langle 001 \rangle$  с особенностями взаимодействия страйпов с внешним магнитным полем. Однако отсутствие теоретических моделей для описания неравновесных АФ металлов с электронным фазовым расслоением и филаментарной структурой проводящих каналов в настоящее время не позволяет выполнить более детальный анализ свойств СКЭС, исследуемой в настоящей работе.

### выводы

Таким образом, в антиферромагнитном металле  $Ho_{0.8}Lu_{0.2}B_{12}$  с электронным фазовым расслоением на основе проведенного сравнительного анализа угловых зависимостей удельного  $\rho(\phi)$  и холловского  $\rho_H(\phi)$  сопротивления обнаружены новые магнитоупорядоченные фазы и аномалии резистивных характеристик, возникающие вблизи направлений поля вдоль (**H** || (110)) и поперек (**H**  $\|\langle 001 \rangle$ ) динамических зарядовых страйпов. На примере Ho<sub>0.8</sub>Lu<sub>0.2</sub>B<sub>12</sub> продемонстрировано, что в ряде случаев именно эффект Холла оказывается наиболее чувствительным методом определения фазовых границ на магнитной фазовой диаграмме.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы признательны В.В. Глушкову за полезные дискуссии.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-22-00243).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Dagotto E. Complexity in Strongly Correlated Electronic Systems // Science. 2005. V. 309. I. 5732. P. 257. https://doi.org/10.1126/science.1107559
- Flachbart K., Alekseev P., Grechnev G., Shitsevalova N., Siemensmeyer K., Sluchanko N., Zogal O. Rare earth dodecaborides-magnetism, superconductivity and other properties. Chapter 2 in Rare Earths: Research and Applications (ed. Delfrey K.N.). N.Y.: Nova Science Publishers, 2008. P. 79–125. ISBN: 9781604562187.
- Mori T. Higher borides. Chapter 238 in Handbook on the Physics and Chemistry of Rare Earths (ed. Gschneidner K.A., Bünzli J.-C.G., Pecharsky V.K.). V. 38. Amsterdam: Elsevier, 2008. P. 105–173. ISBN: 9780444521439.
- Sluchanko N.E. Magnetism, quantum criticality, and metal-insulator transitions in RB<sub>12</sub>, Chapter 4 in Rare-Earth Borides / Ed. D.S. Inosov. Singapore: Jenny Stanford Publishing, 2021. P. 331–442. ISBN: 9781003146483.
- Gabani S., Flachbart K., Siemensmeyer K., Mori T. Magnetism and superconductivity of rare earth borides // Journal of Alloys and Compounds. 2020. V. 821. P. 153201.

https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2019.153201

- Loudon J.C., Mathur N.D., Midgley P.A. Charge-ordered ferromagnetic phase in La<sub>0.5</sub>Ca<sub>0.5</sub>MnO<sub>3</sub> // Nature. 2002. V. 420. I. 6917. P. 797–800. https://doi.org/10.1038/nature01299
- Salamon M.B., Jaime M. The physics of manganites: Structure and transport // Reviews of Modern Physics. 2001. V. 73. I. 3. P. 583–628. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.73.583
- Tranquada J.M., Woo H., Perring T.G., Goka H., Gu G.D., Xu G., Yamada K. Quantum magnetic excitations from stripes in copper oxide superconductors // Nature. 2001. V. 429. I. 6991. P. 534–538. https://doi.org/10.1038/nature02574
- Si Q., Yu R., Abrahams E. High-temperature superconductivity in iron pnictides and chalcogenides // Nature Rev. Mater. 2016. V. 1. P. 16017. https://doi.org/10.1038/natrevmats.2016.17
- Fernandes R.M., Chubukov A.V., Schmalian J. What drives nematic order in iron-based superconductors? //

Nature. Phys. 2014. V. 10. P. 97–104. https://doi.org/10.1038/nphys2877

 Lee J.J., Schmitt F.T., Moore R.G., Johnston S., Cui Y.-T., Li W., Yi M., Liu Z.K., Hashimoto M., Zhang Y., Lu D.H., Devereaux T.P., Lee D.-H., Shen Z.-X. Interfacial mode coupling as the origin of the enhancement of T(c) in FeSe films on SrTiO3 // Nature. 2014. V. 13. I. 515. P. 7526.

https://doi.org/10.1038/nature13894

- Jian-Feng Ge, Zhi-Long Liu, Canhua Liu, Chun-Lei Gao, Dong Qian, Qi-Kun Xue, Ying Liu, Jin-Feng Jia. Superconductivity above 100 K in single-layer FeSe films on doped SrTiO<sub>3</sub> // Nat. Mat. 2015. V. 14. P. 285. https://doi.org/10.1038/nmat4153
- Qisi Wang, Yao Shen, Bingying Pan, Yiqing Hao, Mingwei Ma, Fang Zhou, Steffens P., Schmalzl K., Forrest T.R., Abdel-Hafiez M., Xiaojia Chen, Chareev D.A., Vasiliev A.N., Bourges P., Sidis Y., Huibo Cao, Jun Zhao. Strong interplay between stripe spin fluctuations, nematicity and superconductivity in FeSe // Nat. Mat. 2001. V. 15. P. 159.

https://doi.org/10.1038/nmat4492

- Sachdev S., Keimer B. Quantum criticality // Phys. Today. 2011. V. 64. P. 29. https://doi.org/10.1063/1.3554314
- Azarevich A., Bogach A., Glushkov V., Demishev S., Khoroshilov A., Krasikov K., Voronov V., Shitsevalova N., Filipov V., Gabáni S., Flachbart K., Kuznetsov A., Gavrilkin S., Mitsen K., Blundell S.J., Sluchanko N.E. Inhomogeneous superconductivity in Lu<sub>x</sub>Zr<sub>1-x</sub>B<sub>12</sub> dodecaborides with dynamic charge stripes // Phys. Rev. B. 2021. V. 103. P. 104515. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.103.104515

- Khoroshilov A.L., Krasnorussky V.N., Krasikov K.M., Bogach A.V., Glushkov V.V., Demishev S. V., Samarin N. A., Voronov V. V., Shitsevalova N.Yu., Filipov V.B., Gabáni S., Flachbart K., Siemensmeyer K., Gavrilkin S.Yu., Sluchanko N.E. Maltese cross anisotropy in Ho<sub>0.8</sub>Lu<sub>0.2</sub>B<sub>12</sub> antiferromagnetic metal with dynamic charge stripes // Phys. Rev. B. 2019. V. 99. P. 174430. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.99.174430
- Khoroshilov A.L., Azarevich A.N., Bogach A.V., Glushkov V.V., Demishev S.V., Krasnorussky V.N., Krasikov K.M., Kuznetsov A. V., Shitsevalova N. Yu., Filipov V. B., Sluchanko N.E. Anisotropy of the Hall Effect in the Paramagnetic Phase of Ho<sub>0.8</sub>Lu<sub>0.2</sub>B<sub>12</sub> Cage Glass // JETP Letters. 2021. V. 113. P. 526–531. https://doi.org/10.1134/S0021364021080051
- Werheit H., Filipov V., Shirai K., Dekura H., Shitsevalova N., Schwarz U. and Armbrüster M. Raman scattering and isotopic phonon effects in dodecaborides // J. Phys.: Cond. Matter. 2011. V. 23. P. 065403. https://doi.org/10.1088/0953-8984/23/6/065403
- Sluchanko N., Azarevich A., Bogach A., Demishev S. Krasikov K., Voronov V., Filipov V., Shitsevalova N., Glushkov V. Hall effect and symmetry breaking in the nonmagnetic metal LuB<sub>12</sub> with dynamic charge stripes // Phys. Rev. B. 2021. V. 103. P. 035117. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.103.035117
- Bolotina N.B., Dudka A.P., Khrykina O.N., Glushkov V.V., Azarevich A.N., Krasnorussky V.N., Gabani S., Shitsevalova N.Yu., Dukhnenko A.V., Filipov V.B., Sluchanko N.E. On the role of isotopic composition in crystal structure, thermal and charge-transport characteristics of dodecaborides Lu<sup>N</sup>B<sub>12</sub> with the Jahn-Teller instability // J. of Physics and Chemistry of Solids. 2019. V. 129. P. 434–441.

https://doi.org/10.1016/j.jpcs.2019.01.026

# DETECTION OF PHASE TRANSITIONS IN Ho<sub>0.8</sub>Lu<sub>0.2</sub>B<sub>12</sub> ANTIFERROMAGNET DURING THE HALL EFFECT MEASUREMENTS

# A. L. Khoroshilov<sup>*a*</sup>, A. V. Bogach<sup>*a*</sup>, S. V. Demishev<sup>*a*</sup>, K. M. Krasikov<sup>*a*</sup>, V. N. Krasnorussky<sup>*a*</sup>, S. E. Polovec<sup>*b*</sup>, V. B. Filipov<sup>*b*</sup>, and N. E. Sluchanko<sup>*a*</sup>

<sup>a</sup>Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>b</sup>Institute for Problems of Materials Science, NASU, Kyiv, Ukraine

Presented by Academician of the RAS I.A. Shcherbakov

Detailed measurements of the Hall effect were carried out at helium temperatures of 2.1–4.2 K in magnetically ordered phases of the antiferromagnet (AF)  $Ho_{0.8}Lu_{0.2}B_{12}$  in a magnetic field up to 80 kOe on single crystals with the orientation of the normal  $\mathbf{n} \parallel [001]$  and  $\mathbf{n} \parallel [110]$ . Based on the analysis of the angular dependences of the Hall resistance, new phase transitions in the AF state are found, and anomalies associated with the effects of the interaction of dynamic charge stripes with an external magnetic field are found.

*Keywords:* dodecaboride, antiferromagnet, spatial inhomogeneity, phase diagram, magnetoresistance, Hall effect, anisotropy

———— МЕХАНИКА ——

УЛК 539.3

# УСЛОВИЯ РАЗДЕЛЕНИЯ ДЕВИАТОРНЫХ И ШАРОВЫХ СВОЙСТВ У ИЗОТРОПНЫХ ТЕНЗОРНО-НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

© 2022 г. Д. В. Георгиевский<sup>1,2,3,\*</sup>

Представлено академиком РАН Д.М. Климовым 27.01.2022 г. Поступило 28.01.2022 г. После доработки 28.01.2022 г. Принято к публикации 25.03.2022 г.

Для изотропных упругих сплошных сред рассматривается класс тензорно нелинейных определяющих соотношений, связывающих напряжения с малыми деформациями и включающих три материальные функции от какой-либо тройки независимых инвариантов. Выводятся общие условия на эти материальные функции, при которых девиаторные и шаровые свойства тензор-функции, задающей оператор определяющих соотношений, не связаны друг с другом. Эти условия сужаются, если среда обладает скалярным потенциалом, а также если дополнительно потребовать тензорную линейность. В последнем случае приводятся возможные параметризации девиаторов напряжений и деформаций и их отображения в пятимерных векторных пространствах.

Ключевые слова: тензор-функция, девиатор, шаровая часть, скалярный потенциал, тензорная линейность, материальные функции, определяющие соотношения

DOI: 10.31857/S2686740022030075

В теории определяющих соотношений механики сплошной среды часто используется класс тензорно нелинейных определяющих соотношений изотропных материалов [1-5]

$$\boldsymbol{\sigma} = A_0 \mathbf{I} + A_1 \boldsymbol{\varepsilon} + A_2 \boldsymbol{\varepsilon}^2, \qquad (1)$$

связывающих между собой два симметричных тензора второго ранга – тензор напряжений Коши  $\sigma$  и тензор малых деформаций  $\epsilon$ . В (1) I – единичный тензор второго ранга,  $A_0$ ,  $A_1$  и  $A_2$  – материальные функции трех независимых инвариантов **є**. Чаще всего в качестве этих инвариантов выбираются

$$I_{\varepsilon 1} = \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad I_{\varepsilon 2} = \sqrt{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2)}, \quad I_{\varepsilon 3} = \sqrt[3]{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^3)}.$$
 (2)

Изотропные тензорно нелинейные функции (1) в силу теоремы Гамильтона-Кели представляют собой довольно общую тензорную связь и описывают многие известные экспериментальные явления, демонстрирующие несоосность силового и

имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия

кинематического состояний в сплошной среде (как в деформируемых твердых телах, так и в неньютоновских жидкостях). В [6] такие явления названы ортогональными эффектами напряженно-деформированного состояния. Для удобства сохраним универсальность обозначений инвариантов (2) для любого симметричного тензора вто-

рого ранга:  $I_{an} = \sqrt[n]{\text{tr}(\mathbf{a}^n)}, n = 1, 2, ...$ 

Разложим тензоры о и є на девиаторы и шаровые части:

$$\mathbf{\varepsilon} = \mathbf{e} + \frac{1}{3}I_{\varepsilon l}\mathbf{I}, \quad \mathbf{\sigma} = \mathbf{s} + \frac{1}{3}I_{\sigma l}\mathbf{I}; \quad I_{el} = 0, \quad I_{sl} = 0$$
(3)

и перейдем от тройки (2) ( $I_{\epsilon l}, I_{\epsilon 2}, I_{\epsilon 3}$ ) к другой тройке независимых инвариантов деформаций  $(I_{\epsilon_1}, I_{\epsilon_2}, I_{\epsilon_3})$  с помощью соотношений [7]

$$I_{e2}^{2} = I_{\epsilon 2}^{2} - \frac{1}{3}I_{\epsilon 1}^{2}, \quad I_{e3}^{3} = I_{\epsilon 3}^{3} - I_{\epsilon 1}I_{\epsilon 2}^{2} + \frac{2}{9}I_{\epsilon 1}^{3}, \quad (4)$$

$$A_n(I_{\epsilon 1}, I_{\epsilon 2}, I_{\epsilon 3}) = \tilde{A}_n(I_{\epsilon 1}, I_{e 2}, I_{e 3}), \quad n = 0, 1, 2.$$
(5)

Инвариант  $I_{e2}$  в русскоязычной литературе часто называют интенсивностью тензора в. Тензорную связь (1) можно представить в виде объединения равенств

$$I_{\sigma l} = 3\tilde{A}_{0} + I_{\epsilon l}\tilde{A}_{l} + \left(I_{e2}^{2} + \frac{1}{3}I_{\epsilon l}^{2}\right)\tilde{A}_{2},$$
(6)

$$\mathbf{s} = \left(\tilde{A}_1 + \frac{2}{3}I_{\varepsilon 1}\tilde{A}_2\right)\mathbf{e} + \tilde{A}_2\left(\mathbf{e}^2 - \frac{1}{3}I_{e2}^2\mathbf{I}\right),\tag{7}$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Московский государственный университет

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Институт проблем механики

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

<sup>\*</sup>E-mail: georgiev@mech.math.msu.su

выражающих отдельно шаровую и девиаторную части напряжений через параметры тензора деформаций.

#### НЕСВЯЗАННОСТЬ ДЕВИАТОРНЫХ И ШАРОВЫХ СВОЙСТВ

Исследуем вопрос о разделении (несвязанности) девиаторных и шаровых свойств функции (1), позволяющей разбивать шестимерные пространства деформаций и напряжений на прямые суммы пятимерного и одномерного пространств и исследовать свойства материала внутри каждого из них вне зависимости от другого. Математически вопрос сводится к нахождению общего вида материальных функций  $\tilde{A}_0$ ,  $\tilde{A}_1$  и  $\tilde{A}_2$  (5) таких, что правая часть (6) не зависит от инвариантов  $I_{e2}$  и  $I_{e3}$ , а правая часть (7) не зависит от  $I_{e1}$ :

$$\frac{\partial}{\partial I_{en}} \left[ 3\tilde{A}_0 + I_{\varepsilon 1}\tilde{A}_1 + \left( I_{e2}^2 + \frac{1}{3}I_{\varepsilon 1}^2 \right)\tilde{A}_2 \right] = 0, \quad n = 2, 3, (8)$$

$$D_1 \mathbf{e} + D_2 \left( \mathbf{e}^2 - \frac{1}{3} I_{e2}^2 \mathbf{I} \right) = 0, \qquad (9)$$

где введены обозначения производных по  $I_{\varepsilon l}$ :

$$D_{1} = \frac{\partial}{\partial I_{\varepsilon 1}} \left( \tilde{A}_{1} + \frac{2}{3} I_{\varepsilon 1} \tilde{A}_{2} \right), \quad D_{2} = \frac{\partial \tilde{A}_{2}}{\partial I_{\varepsilon 1}}.$$
 (10)

Обращение в нуль всех компонент тензора в левой части (9) эквивалентно равенству нулю его квадратичного инварианта. Осуществляя полную свертку выражения (9) самого с собой и учитывая нетрудно устанавливаемую [7] связь инвариантов  $I_{e4}^4 = I_{e2}^4/2$ , имеющую место для любого девиатора, получим

$$D_1^2 I_{e2}^2 + 2D_1 D_2 I_{e3}^3 + \frac{1}{6} D_2^2 I_{e2}^4 = 0.$$
(11)

А) Случай  $D_1 \equiv 0$  и  $D_2 \equiv 0$ . Равенство (11) превращается в тождество, в частности, если  $D_1 \equiv 0$  и  $D_2 \equiv 0$ , т. е. обращается в нуль каждое из двух слагаемых в (9). Материальные функции  $\tilde{A}_1(I_{e1}, I_{e2}, I_{e3})$  и  $\tilde{A}_2(I_{e1}, I_{e2}, I_{e3})$  тогда можно параметризовать с помощью двух функций от  $I_{e2}$  и  $I_{e3}$ :

$$\tilde{A}_{1} = 3Q_{1}(I_{e2}, I_{e3}) - 2I_{e1}Q_{2}(I_{e2}, I_{e3}),$$
  

$$\tilde{A}_{2} = 3Q_{2}(I_{e2}, I_{e3}).$$
(12)

Подстановка (12) в (8) приводит к общему виду  $\tilde{A}_0(I_{\epsilon 1}, I_{e 2}, I_{e 3})$ , включающему еще одну параметризующую функцию только от  $I_{\epsilon 1}$ :

$$A_{0} = Q_{0}(I_{\varepsilon 1}) - I_{\varepsilon 1}Q_{1}(I_{e2}, I_{e3}) + + \left(\frac{1}{3}I_{\varepsilon 1}^{2} - I_{e2}^{2}\right)Q_{2}(I_{e2}, I_{e3}).$$
(13)

С учетом (12) и (13), определяющие соотношения (6) и (7) запишутся следующим образом:

$$I_{\sigma l} = 3Q_0, \quad \mathbf{s} = 3Q_l \mathbf{e} + 3Q_2 \left(\mathbf{e}^2 - \frac{1}{3}I_{e2}^2\mathbf{I}\right). \tag{14}$$

Видно, что, как и требовалось, девиаторные и шаровые свойства тензор-функции (1) оказываются разделенными.

Б) Оставшиеся случаи. Пусть теперь  $D_2 \neq 0$  тождественно. Тогда уравнение (11) эквивалентно квадратному уравнению относительно  $D_1/D_2$  с четвертью дискриминанта, равной  $I_{e3}^6 - I_{e2}^6/6$ . Заметим, что для любого девиатора е имеет место равенство

$$I_{e3}^{6} - \frac{1}{6}I_{e2}^{6} = -\frac{1}{3}(e_{1} - e_{2})^{2}(e_{2} - e_{3})^{2}(e_{3} - e_{1})^{2}, \quad (15)$$

где  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e_3$  – главные значения тензора е (разумеется,  $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ ). Выражая через них инварианты  $I_{e2}$  и  $I_{e3}$ , перепишем (15) в форме

$$(e_1^3 + e_2^3 + e_3^3)^2 - \frac{1}{6}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)^3 =$$
  
=  $-\frac{1}{3}(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2.$  (16)

Справедливость (16) устанавливается простым техническим раскрытием скобок с использованием вспомогательного факта:  $I_{e3}^3 \equiv e_1^3 + e_2^3 + e_3^3 = -3e_1e_2e_3 \equiv -3|\mathbf{e}|.$ 

Таким образом, дискриминант уравнения (11) неположителен и обращается в нуль только на классе девиаторов е с двумя равными главными значениями, а следовательно, на классе тензоров деформаций є с двумя равными главными деформациями. Данное сужение ограничивает общность задачи нахождения таких материальных функций  $\tilde{A}_0$ ,  $\tilde{A}_1$  и  $\tilde{A}_2$ , при которых разделение девиаторных и шаровых свойств (6) и (7) реализуется на всем множестве симметричных тензоров є. Поэтому пункт Б) новых, помимо (12) и (13), классов функций  $\tilde{A}_0$ ,  $\tilde{A}_1$  и  $\tilde{A}_2$  не дает.

### СУЩЕСТВОВАНИЕ СКАЛЯРНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Выясним, каким дополнительным связующим соотношениям должны удовлетворять параметризующие функции  $Q_0$ ,  $Q_1$  и  $Q_2$  в (12) и (13), если известно, что тензор-функция (1) обладает скалярным потенциалом W, т.е.  $\sigma = \partial W / \partial \varepsilon$ . Положим, что W, как и  $\tilde{A}_0$ ,  $\tilde{A}_1$ ,  $\tilde{A}_2$ , зависит от тройки инвариантов ( $I_{\varepsilon 1}$ ,  $I_{e2}$ ,  $I_{e3}$ ):

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial I_{\varepsilon 1}} \frac{\partial I_{\varepsilon 1}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial W}{\partial I_{e2}} \frac{\partial I_{e2}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial W}{\partial I_{e3}} \frac{\partial I_{e3}}{\partial \varepsilon}.$$
 (17)

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ том 504 2022

С учетом того, что

$$\frac{\partial I_{\varepsilon 1}}{\partial \varepsilon} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial I_{\varepsilon 2}}{\partial \varepsilon} = \frac{\varepsilon}{I_{\varepsilon 2}}, \quad \frac{\partial I_{\varepsilon 3}}{\partial \varepsilon} = \frac{\varepsilon^2}{I_{\varepsilon 3}^2}, \quad (18)$$

вычислим производные по ε, входящие в (17):

$$\frac{\partial I_{e2}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \sqrt{I_{\varepsilon 2}^2 - \frac{1}{3} I_{\varepsilon 1}^2} = \frac{1}{I_{e2}} \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} I_{\varepsilon 1} \mathbf{I}\right) = \frac{\mathbf{e}}{I_{e2}}, \quad (19)$$
$$\frac{\partial I_{e3}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} 3 \sqrt{I_{\varepsilon 3}^3 - I_{\varepsilon 1} I_{\varepsilon 2}^2 + \frac{2}{9} I_{\varepsilon 1}^3} =$$
$$= \frac{1}{I_{e3}^2} \left[ \boldsymbol{\varepsilon}^2 - \frac{2}{3} I_{\varepsilon 1} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{3} \left( \frac{2}{3} I_{\varepsilon 1}^2 - I_{\varepsilon 2}^2 \right) \mathbf{I} \right]. \quad (20)$$

После подстановки (18)–(20) в (17) и сравнения с выражением (1) приравняем коэффициенты при тензорах I,  $\varepsilon$  и  $\varepsilon^2$ . В результате преобразований получим

$$\frac{\partial W}{\partial I_{\varepsilon 1}} = \tilde{A}_0 + \frac{1}{3}I_{\varepsilon 1}\tilde{A}_1 + \frac{1}{3}\left(I_{e2}^2 + \frac{1}{3}I_{\varepsilon 1}^2\right)\tilde{A}_2,$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_{e2}} = I_{e2}\left(\tilde{A}_1 + \frac{2}{3}I_{\varepsilon 1}\tilde{A}_2\right), \quad \frac{\partial W}{\partial I_{e3}} = I_{e3}^2\tilde{A}_2.$$
(21)

Три равенства вторых смешанных производных от W, полученные на основании (21), приводят к трем условиям потенциальности на материальные функции  $\tilde{A}_0$ ,  $\tilde{A}_1$  и  $\tilde{A}_2$ . Подставим в (21) выражения (12) и (13):

$$\frac{\partial W}{\partial I_{\epsilon 1}} = Q_0(I_{\epsilon 1}), \quad \frac{\partial W}{\partial I_{e 2}} = 3I_{e 2}Q_1(I_{e 2}, I_{e 3}),$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_{e 3}} = 3I_{e 3}^2Q_2(I_{e 2}, I_{e 3}).$$
(22)

В терминах функций  $Q_0$ ,  $Q_1$  и  $Q_2$  нетривиальным остается лишь одно условие потенциальности:

$$I_{e3}^2 \frac{\partial Q_2}{\partial I_{e2}} = I_{e2} \frac{\partial Q_1}{\partial I_{e3}}.$$
 (23)

Таким образом, для потенциальных тензорфункций (1) общим условием разделения девиаторных и шаровых свойств является представимость скалярного потенциала как суммы

$$W = W_0(I_{e1}) + W_1(I_{e2}, I_{e3}).$$
(24)

### ТЕНЗОРНАЯ ЛИНЕЙНОСТЬ, ИЛИ КВАЗИЛИНЕЙНОСТЬ

Существует два эквивалентных определения тензорной линейности (по терминологии [4] квазилинейности) функции (1). Одно из них связано с тождественным равенством нулю функции  $A_2$ , а следовательно, и  $\tilde{A}_2$ , другое – с тем, что угол между девиаторами **s** и **e** нулевой [8]. В терминах функций  $Q_0$ ,  $Q_1$  и  $Q_2$ , параметризующих исходные соотношения (12) и (13), тензорная линейность означает, что  $Q_2 \equiv 0$ , т.е.

$$\tilde{A}_{0} = Q_{0}(I_{\epsilon 1}) - I_{\epsilon 1}Q_{1}(I_{e2}, I_{e3}), 
\tilde{A}_{1} = 3Q_{1}(I_{e2}, I_{e3}), \quad \tilde{A}_{2} \equiv 0.$$
(25)

Если совместить требования тензорной линейности и потенциальности, то это в силу (23) приведет к независимости  $Q_1$  от  $I_{e3}$ . Тогда определяющие соотношения (14) упростятся:

$$I_{\sigma l} = 3Q_0(I_{\varepsilon l}), \quad \mathbf{s} = 3Q_l(I_{e2})\mathbf{e}.$$
(26)

Из (26), в частности, следует связь интенсивностей  $I_{s2}$  и  $I_{e2}$ , называемая скалярным определяющим соотношением тензорно линейной среды:

$$I_{s2} = 3I_{e2} |Q_1(I_{e2})|.$$
<sup>(27)</sup>

Например, для изотропной физически линейной упругой среды с постоянными Ламе  $\lambda$  и  $\mu$ введенные ранее функции таковы:

$$Q_0 = \left(\lambda + \frac{2\mu}{3}\right) I_{\varepsilon 1}, \quad Q_1 \equiv \frac{2\mu}{3},$$

$$Q_2 \equiv 0, \quad I_{s2} = 2\mu I_{e2}.$$
(28)

Это единственный физически линейный случай (т.е. по определению случай, допускающий принцип суперпозиции) среди всего класса нелинейных тензор-функций (1).

## ПЯТИМЕРНЫЕ ВЕКТОРЫ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ

Пропорциональность девиаторов s и е в (26) наряду с зависимостью  $Q_1$  только от инварианта  $I_{e2}$  дает возможность поставить в соответствие множествам девиаторов s и е в трехмерном пространстве пятимерные векторные пространства, элементами которых являются векторы напряжений S и деформаций E. Взаимообратная параметризация е  $\leftrightarrow$  E покоординатно записывается следующим образом [3, 9, 10]:

$$e_{11} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( -E_1 \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) \pm E_2 \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) \right),$$

$$e_{22} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( E_1 \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \mp E_2 \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \right),$$

$$e_{33} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( -E_1 \cos\varphi \mp E_2 \sin\varphi \right),$$

$$e_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_3, \quad e_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_4, \quad e_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_5;$$

$$E_1 = \sqrt{2} \left[ e_{11} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) + e_{22} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) \right],$$

$$E_2 = \pm \sqrt{2} \left[ e_{11} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) + e_{22} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) \right],$$

$$E_3 = \sqrt{2} e_{12}, \quad E_4 = \sqrt{2} e_{23}, \quad E_5 = \sqrt{2} e_{31},$$
(29)

где  $\varphi$  – произвольный угол. Коэффициенты в (29) и (30) подобраны так, что если взять два произвольных девиатора  $e^{\{1\}}$  и  $e^{\{2\}}$  и построить соответ-

ствующие им векторы деформаций:  $\mathbf{e}^{\{1\}} \leftrightarrow \mathbf{E}^{\{1\}}$ ,  $\mathbf{e}^{\{2\}} \leftrightarrow \mathbf{E}^{\{2\}}$ , то сохранятся совместные инварианты обеих пар:  $\mathbf{e}^{\{1\}} : \mathbf{e}^{\{2\}} = \mathbf{E}^{\{1\}} \cdot \mathbf{E}^{\{2\}}$ . Следовательно,

$$I_{e2} \equiv \sqrt{\mathbf{e}} : \mathbf{e} = \sqrt{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{E} \equiv E.$$
(31)

Аналогичная (29) и (30) взаимообратная параметризация, вообще говоря, с другим углом  $\psi$ справедлива и для напряжений:  $s \leftrightarrow S$ . Если же для простоты выбрать  $\psi = \varphi$ , то тензорное (26) и скалярное (27) определяющие соотношения допускают запись в терминах пятимерных векторов:

$$S = 3Q_1(E)E, \quad S = 3|Q_1(E)|E.$$
 (32)

Заметим, что зависимость (32) представляет собой общий вид изотропной нелинейной вектор-функции в пространстве любой размерности (в данном случае в пятимерном). Эта вектор-функция обладает скалярным потенциалом w(E) таким, что

$$\mathbf{S} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{E}}, \quad w = 3 \int E Q_{\mathrm{I}}(E) dE.$$
 (33)

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана Российским научным фондом (проект № 22-21-00077).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Аннин Б.Д. Формула Лагранжа Сильвестра для тензорной функции, зависящей от двух тензоров // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133. № 4. С. 743–744.
- 2. Спенсер Э. Теория инвариантов. М.: Мир, 1974. 156 с.
- 3. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: ЛЕНАНД, 2014. 320 с.
- 4. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 264 с.
- 5. Димитриенко Ю.И. Нелинейная механика сплошной среды. М.: Физматлит, 2009. 624 с.
- 6. *Георгиевский Д.В.* Нелинейные тензор-функции двух аргументов и некоторые "ортогональные эффекты" напряженно-деформированного состояния // Известия РАН. МТТ. 2020. № 5. С. 21–26.
- 7. *Георгиевский Д.В.* Тензорно нелинейные эффекты при изотермическом деформировании сплошных сред // Успехи механики. 2002. Т. 1. № 2. С. 150–176.
- 8. *Георгиевский Д.В.* Порядок малости эффекта Пойнтинга с позиций аппарата тензорно нелинейных функций // Известия РАН. МТТ. 2018. № 4. С. 29–33.
- 9. Зубчанинов В.Г. Общая математическая теория пластичности и постулаты макроскопической определимости и изотропии А.А. Ильюшина // Вестн. Моск. ун-та. Математ., Механ. 2018. № 5. С. 29–46.
- Бровко Г.Л. Объективные тензоры и их отображения в классической механике сплошной среды // Известия РАН. МТТ. 2021. № 1. С. 83–105.

# THE CONDITIONS OF DIVISION OF DEVIATOR AND SPHERICAL PROPERTIES FOR ISOTROPIC TENSOR NON-LINEAR FUNCTIONS

### D. V. Georgievskii<sup>*a,b,c*</sup>

<sup>a</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

<sup>b</sup>Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics, Moscow, Russia

<sup>c</sup>Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS D.M. Klimov

For isotropic elastic continuous media, we consider a class of tensor nonlinear constitutive relations connecting stresses with small strains and including three material functions from any triple of independent invariants. General conditions are derived for these material functions, under which the deviatory and spherical properties of the tensor function defining the operator of the constitutive relations are not related to each other. These conditions are narrowed if the medium has a scalar potential, as well as if tensor linearity is additionally required. In the latter case, possible parametrizations of stress and strain deviators and their representations in five-dimensional vector spaces are given.

*Keywords:* tensor-function, deviator, spherical part, scalar potential, tensor linearity, material functions, constitutive relations ——— МЕХАНИКА ——

УДК 533.6

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВОЛНЫ МАХА НА ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПЕРЕХОД В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

© 2022 г. Член-корреспондент РАН И. В. Егоров<sup>1,2,\*</sup>, Н. Х. Зыонг<sup>3,4</sup>, Н. К. Нгуен<sup>1</sup>, Н. В. Пальчековская<sup>1,2</sup>

Поступило 29.12.2021 г. После доработки 29.12.2021 г. Принято к публикации 28.01.2022 г.

Рассматриваются результаты численного моделирования влияния падающей волны Маха на процесс ламинарно-турбулентного перехода в сверхзвуковом пограничном слое на плоской пластине, обтекаемой сверхзвуковым потоком совершенного газа при числе Маха М = 2.5. Рассмотрено влияние амплитуды падающей волны Маха на ламинарно-турбулентный переход в сверхзвуковом пограничном слое. Показано, что влияние волны Маха с амплитудой 5% приводит к образованию турбулентного клина в пограничном слое на плоской пластине.

*Ключевые слова:* волна Маха, ламинарно-турбулентный переход, ламинарный пограничный слой, численное моделирование

DOI: 10.31857/S2686740022030063

Исследование возникновения турбулентности в сжимаемых пограничных слоях необхолимо лля развития перспективной высокоскоростной авиационной техники. В работе [1] показано, что сценарий ламинарно-турбулентного перехода (ЛТП) в пограничных слоях существенно зависит от уровня возмущений в свободном потоке. Кроме этого, в сверхзвуковых аэродинамических трубах имеются акустические пульсации в рабочей части [2-4], обусловленные турбулентным пограничным слоем на стенках сопла и рабочей части, а также различные неровности на них. Одним из наиболее сложных явлений, наблюдаемых при ламинарно-турбулентном переходе, является возникновение турбулентных клиньев [5]. Причина их появления может быть различной. В данной работе рассмотрен один из механизмов возникновения турбулентных клиньев в сверхзвуковом пограничном слое на плоской пластине, обусловленный слабой волной Маха, генерируемой неровностью на боковой стенке аэродинамической трубы. Решение задачи основано на прямом численном моделировании ламинарно-турбулентного перехода с помощью решения пространственных нестационарных уравнений Навье—Стокса [6]. Исследовано влияние амплитуды падающей волны Маха на ЛТП в сверхзвуковом пограничном слое.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Постановка задачи соответствовала эксперименту в сверхзвуковой малотурбулентной аэродинамической трубе Т-325 ИТПМ [7]. На рис. 1 показана общая схема постановки задачи.

Численное интегрирование осуществлялось в два этапа. Сначала рассчитывалось стационарное поле течения взаимодействия волны Маха, генерируемой неровностью на боковой стенке аэродинамической трубы, и сверхзвукового пограничного слоя на плоской пластине [8]. Полная сетка на данном этапе имела 61 млн узлов.

Основные определяющие параметры задачи соответствовали эксперименту [7] (число Маха M = = 2.5, единичное число Рейнольдса  $\text{Re}_1 = 5 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$ , температура торможения потока 293 K). В экспе-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского,

Жуковский, Московская обл., Россия

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Университет науки и технологии, Вьетнамская академия науки и технологий, Ханой, Вьетнам

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Инженерно-технологический университет Вьетнамского национального университета, Ханой, Вьетнам

<sup>\*</sup>E-mail: egorov.ivan.v@mipt.ru


Возмущение от волны Маха

**Рис.** 1. Схема взаимодействия N-волны, возбуждаемой двумерной неровностью на боковой стенке аэродинамической трубы (вид сверху).

рименте для генерации волны Маха на боковой стенке наклеивалась изолента толщиной 0.2 мм, шириной 20 мм и длиной около 150 мм на расстоянии  $x^* = -231$  мм вверх по потоку от передней кромки пластины (координата  $x^* = 0$  соответствовала передней кромке плоской пластины). Для математического моделирования неровности использована эквивалентная модель [9], основанная на формуле Аккерета. При численном решении задачи рассмотрены два случая, соответствующие толщине неровности 0.2 мм (амплитуда e = 1%) и 1 мм (амплитуда e = 5%). Пристенная 33 млн узлов для случая волн Маха с амплитудой e = 1% и 45 млн узлов для e = 5%.

На втором этапе расчета на поверхности пластины задавались нестационарные возмущения в виде вдува—отсоса в окрестности передней кромки пластины с параметрами из работы [10], соответствующими наиболее неустойчивой волне Толлмина—Шлихтинга. Параметры волны Толлмина—Шлихтинга выбраны на основе линейной теории устойчивости [10]. В безразмерном виде эти параметры были равными  $\omega_0 = 164.66$ ,  $\beta_0 = 561.93$ ,  $\alpha_{TS} = 305.46$ , а генератор возмущений был расположен на отрезке пластины  $[x_1, x_2]$ 

$$x_1 = x_0 - \frac{\lambda_{TS}}{2}, \quad x_2 = x_0 + \frac{\lambda_{TS}}{2}, \quad \lambda_{TS} = \frac{2\pi}{\alpha_{TS,r}}.$$

Координата центральной линии генератора  $x_0 = 0.03693$  располагалась в точке потери устойчивости. Безразмерное значение амплитуды нестационарных возмущений нормальной компоненты вектора скорости было выбрано равным  $\varepsilon = 0.001$ . Для сокращения вычислительных затрат расчеты на втором этапе выполнялись в пристенной подобласти [8].

В настоящей работе использована методика численного интегрирования полных уравнений Навье—Стокса, описанная в [6]. Моделирование проводилось с помощью численного решения нестационарных уравнений Навье—Стокса в трехмерной постановке для модели совершенного газа. При обезразмеривании уравнений Навье—Стокса декартовы координаты отнесены к характерному линейному размеру, время — к характерному времени, компоненты вектора скорости — к модулю вектора скорости набегающего потока, давление к удвоенному скоростному напору набегающего потока, остальные газодинамические переменные — к их значениям в набегающем потоке.

На первом этапе численного решения задачи использована монотонная разностная схема [6], на втором этапе - гибридная разностная схема [11] с параметром  $\Phi_0 = 0.4$ . При аппроксимации конвективной составляющей векторов потоков в полуцелых узлах использована схема WENO третьего порядка точности. При аппроксимации диффузионной составляющей векторов потоков на грани элементарной ячейки применяется разностная схема типа центральных разностей второго порядка точности. В результате разностной аппроксимации уравнений Навье-Стокса и соответствующих граничных условий на некоторой сетке интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных сводилось к решению системы нелинейных алгебраических уравнений. Для решения нелинейных сеточных уравнений использовался модифицированный метод Ньютона-Рафсона. Численный метод реализован на многопроцессорной супер-ЭВМ кластерного типа [6].

#### РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для иллюстрации характера течения на рис. 2 показаны вихревые структуры в пограничном слое для случая отсутствия волны Маха (рис. 2а) и с волной Маха с амплитудой e = 5% (рис. 26). Согласно этим данным, наличие волны Маха с амплитудой е = 5% приводит к образованию хорошо различимого турбулентного клина. Анализ расчетных данных для случая волны Маха с амплитудой е = 1% показал, что в этом случае существенного отличия в характере поведения ламинарно-турбулентного перехода от ситуации с е = 0 не наблюдается. Из данных рис. 2 также видно, что в окрестности переднего фронта волны Маха ( $z^* \approx 0.0122$  м) имеет место вершина турбулентного клина, тогда как в окрестности заднего фронта волны Маха ( $z^* \approx$  $\approx$  −0.0022 м) пульсации наоборот слегка затухают.

В качестве примера поведения зависимых переменных задачи в неравновесном турбулентном пограничном слое на плоской пластине на рис. 3





**Рис. 2.** Изоповерхности Q = 100 (*Q*-критерий), раскрашенные значением продольной компоненты вектора скорости. Вид сверху. e = 0 (a), e = 5% (б).



**Рис. 3.** Осредненное по времени безразмерное значение температуры в сечении  $x^* = 0.224$  м: e = 0 (a), e = 1% (б), e = 5% (в).

показаны осредненные по времени значения безразмерной температуры в сечении  $x^* = 0.224$  м, соответствующем турбулентному состоянию пограничного слоя. Осреднение проведено по времени, равном, примерно, пяти периодам действия генератора возбуждений волн Толлмина– Шлихтинга. Согласно этим данным (рис. 3), имеет место полосчатая вихревая структура течения в турбулентном пограничном слое. В присутствии в поле течения волны Маха с амплитудой e = 5% в окрестности переднего фронта полосчатая структура размывается (рис. 36). Спектральный анализ решения в окрестности переднего фронта свидетельствует о существенном его расширении.

Полосчатая структура также хорошо наблюдается по картинам коэффициента трения (рис. 4), осредненного по времени соответствующему, примерно, пяти периодам действия генератора возбуждений волн Толлмина–Шлихтинга. Согласно этим данным (рис. 4), волна Маха с амплитудой е = 1% слабо влияет на линию фронта ламинарно-турбулентного перехода.

В случае волны Маха с амплитудой е = 5% (рис. 4в) фронт ламинарно-турбулентного пере-



**Рис. 4.** Осредненное по времени значения коэффициента трения на плоской пластине: e = 0 (a), e = 1% (б), e = 5% (в).

хода сильно искривляется, образуется хорошо заметный турбулентный клин. В поперечном направлении вершина турбулентного клина находится вблизи переднего фронта волны Маха. Задний фронт волны Маха не оказывает существенного влияния на положение ламинарнотурбулентного перехода.

### выводы

На основе прямого численного моделирования установлено, что при взаимодействии волны Маха относительно малой амплитуды (менее 1%) со сверхзвуковым пограничным слоем имеет место ее слабое влияние на положение ламинарнотурбулентного перехода. В случае амплитуды волны Маха 5% имеет место достаточное заметное ее влияние на линию ламинарно-турбулентного перехода. В этом случае образуется хорошо заметный турбулентный клин.

В сверхзвуковом турбулентном пограничном слое хорошо просматривается полосчатая вихревая структура течения.

### ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-5854002 и Вьетнамской академии науки и технологии (VAST), номер проекта QTRU01.01./20-21.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Гапонов С.А., Маслов А.А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках // Новосибирск: Наука, 1980. 144 с.
- 2. *Laufer J*. Aerodynamic noise in supersonic wind tunnels // Aerospase Sci. 1961. V. 28. № 9. P. 685–692.
- 3. *Kendall J.M.* Wind tunnel experiments relating to supersonic and hypersonic boundary-layer transition // AIAA J. 1975. V. 13. № 3. P. 290–299.
- 4. Приданов В.Г., Харитонов А.М., Черных В.В. Совместное влияние чисел Маха и Рейнольдса на переход в пограничном слое // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1974. № 1. С. 160–163.
- 5. Боровой В.Я., Егоров И.В., Мошаров В.Е., Скуратов А.С., Радченко В.Н. Экстремальный нагрев тел в гиперзвуковом потоке. М.: Наука, 2018. 390 с.
- Егоров И.В., Новиков А.В. Прямое численное моделирование ламинарно-турбулентного обтекания плоской пластины при гиперзвуковых скоростях потока // ЖВМиМФ. 2016. Т. 56. № 6. С. 145–162.
- 7. Ваганов А.В., Ермолаев Ю.Г., Колосов Г.Л., Косинов А.Д., Панина А.В., Семенов Н.В., Яцких А.А. К воздействию падающей волны Маха на сверхзвуковой пограничный слой // Теплофизика и аэромеханика. 2016. Т. 23. № 1.

- Егоров И.В., Динь К.Х., Нгуен Н.К., Пальчековская Н.В. Численное моделирование взаимодействия волны Маха и сверхзвукового пограничного слоя на плоской пластине с острой передней кромкой // Ученые записки ЦАГИ. 2021. Т. LII. № 3. С. 18–28.
- 9. Динь К.Х., Егоров И.В., Федоров А.В. Взаимодействие волн Маха и пограничного слоя при сверхзвуковом обтекании пластины с острой передней кромкой // Ученые записки ЦАГИ. 2017. Т. 48. № 4. С. 10–19.
- Динь К.Х., Егоров И.В., Федоров А.В. Влияние волн Маха на ламинарно-турбулентный переход при сверхзвуковом обтекании плоской пластины // Известия РАН. МЖГ. 2018. № 5. С. 113–124.
- Egorov I.V., Novikov A.V., Nguen N.K. Hybrid numerical schemes in prediction of high-speed laminar-turbulent transition // 32th Congress of the International Council of Aeronautical Sciences (ICAS-2020/2021). Shanghai. China. Paper 2020\_0529. P. 1–17.

### NUMERICAL SIMULATION OF MACH WAVE INFLUENCE ON LAMINAR-TURBULENT TRANSITION IN SUPERSONIC BOUNDARY LAYER

### Corresponding Member of the RAS I. V. Egorov<sup>a,b</sup>, N. H. Duong<sup>c,d</sup>, N. C. Nguyen<sup>a</sup>, and N. V. Palchekovskaya<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow oblast, Russia <sup>b</sup>Central Aerohydrodynamic Institute, Zhukovsky, Moscow oblast, Russia <sup>c</sup>Graduate University of Science and Technology, Vietnam Academy of Science and Technology, Hanoi, Vietnam

<sup>d</sup>University of Engineering and Technology, Vietnam National University, Hanoi, Vietnam

The results of numerical simulation of the effect of the incident Mach wave on the process of laminar-turbulent transition in the supersonic boundary layer on a flat plate streamlined by a supersonic flow of perfect gas at Mach number M = 2.5 are considered. The influence of the amplitude of the incident Mach wave on the laminar-turbulent transition in the supersonic boundary layer is considered. It is shown that the effect of a Mach wave with an amplitude of 5% leads to the generation of a turbulent wedge in the boundary layer on a flat plate.

Keywords: Mach wave, laminar-turbulent transition, laminar boundary layer, numerical simulation

——— МЕХАНИКА ——

УДК 517.977

# ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО РАСХОДУ ТОПЛИВА ТРАЕКТОРИИ СВЕРХЗВУКОВОГО ПАССАЖИРСКОГО САМОЛЕТА

© 2022 г. С. А. Кумакшев<sup>1,\*</sup>, А. М. Шматков<sup>1,\*\*</sup>

Представлено академиком РАН Ф.Л. Черноусько 21.12.2021 г. Поступило 10.01.2022 г. После доработки 10.01.2022 г. Принято к публикации 28.01.2022 г.

С помощью классического метода динамического программирования построены траектории движения сверхзвукового пассажирского самолета, оптимальные по расходу топлива. Использована математическая модель воздушного судна, максимально учитывающая обычные ограничения, накладываемые на допустимые маневры самолета его конструктивными особенностями. Оптимальные решения были найдены без предварительного разбиения полета на отдельные участки. Несмотря на то, что при вычислениях никак не были учтены ограничения, накладываемые действующими правилами полетов гражданских самолетов, оказалось, что оптимальные траектории достаточно удобны для применения в рамках этих ограничений. Выяснилось, что участки движения со скоростью, превышающей скорость звука, находятся на большой высоте. Это позволяет избежать дополнительного акустического воздействия на людей, живущих вблизи аэропортов, и одновременно уменьшить расход топлива. Участки оптимальных траекторий, соответствующие крейсерскому полету, располагаются на большой высоте, а потому помехи движению обычных самолетов могут быть практически сведены к нулю. Начальные и конечные отрезки траектории, находящиеся в близких к аэропортам зонах с высокой плотностью движения, слабо отличаются для различных требуемых длительностей перелета, а потому не требуют большой точности при практической реализации.

*Ключевые слова:* сверхзвуковой полет, численная оптимизация, динамическое программирование **DOI:** 10.31857/S2686740022030117

1. Проблему выбора наилучшей траектории для самолета исследуют давно. Исходно цель состояла в достижении заданной высоты при минимизации времени движения или расхода топлива, однако с ростом скорости самолетов потребовалось одновременно с этим получать необходимую скорость полета [1]. При этом оптимизацию крейсерского участка траектории проводили отдельно [2]. Для воздушных судов, движущихся с дозвуковой скоростью, можно было произвести дополнительную декомпозицию задачи и тем самым упростить решение [3]. Резкий рост цен на нефть, вызвавший удорожание авиационного топлива, повысил актуальность его экономии. В связи с этим потребовалось значительно более точно учитывать как аэродинамические ограничения, так и ограничения на тягу двигателей [4]. В дальнейшем используемые математические модели продолжали усложняться [5], для чего потребовалось применение моделей, во все большей степени основывающихся на использовании численных методов [6]. Использование более мощных бортовых компьютеров сделало возможной оптимизацию траекторий по расходу топлива в режиме реального времени, с учетом текущих воздушных потоков [7, 8]. В последние годы все больше внимания уделяют снижению различных воздействий со стороны самолета на окружающую среду [9, 10], что тесно связано с проблемой экономии топлива [11]. Также возникли задачи экономии электрической энергии, поскольку появились воздушные суда, использующие соответствующие источники [12]. Усиливается интерес к сверхзвуковой авиации как в связи с исследованиями физических процессов, наблюдающихся при движении летательных аппаратов [13], так и в связи с развитием численных методов, описывающих эти процессы [14]. Использование новых материалов позволило перейти к изучению устройств, которые могут перемещаться с гиперзвуковыми скоростями [15].

Выбор наилучшей траектории носит комплексный характер [16]. Стандартный коммерческий полет имеет траекторию [17], которая значи-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>\*</sup>E-mail: kumak@ipmnet.ru

<sup>\*\*</sup>E-mail: shmatkov@ipmnet.ru



Рис. 1.

тельно отличается от типичной дозвуковой траектории, оптимальной по расходу топлива, пример которой [18] показан на рис. 1. Наиболее заметное отличие – отсутствие крейсерского этапа полета. Причина в том, что с точки зрения теории для экономии топлива оказывается целесообразным сначала набрать большую высоту полета, преобразовав внутреннюю энергию топлива в потенциальную энергию дозвукового самолета, а затем постепенно использовать этот резерв в процессе снижения до конечной точки полета. На практике приходится учитывать многочисленные ограничения, не связанные напрямую с техническими характеристиками самолета. Наиболее очевидным является то, что по современным воздушным трассам одновременно движется большое количество самолетов, и поэтому использование траекторий с постоянно изменяющейся высотой значительно усложнит управление воздушным движением и создаст риск столкновения в воздухе. Поэтому перелет между крупными центрами авиационных перевозок происходит, как правило, на постоянной высоте. Экипаж может сам (или по указанию авиадиспетчера) выбрать один из разрешенных эшелонов полета. Изменения эшелона во время полета случаются нечасто. Таким образом, возможности экономии топлива за счет глобальной оптимизации траектории дозвукового гражданского лайнера существенно ограничены, и на практике необходимо применять только локальную оптимизацию. Локальные решения, принимаемые в процессе полета, зависят во многом от бортовых автоматических систем. Используемые в них алгоритмы формируют на основе общего подхода к глобальной оптимизации [19]. Он, как правило, начинается с разбиения траектории на три этапа: взлет, крейсерский режим и посадка. Далее рассматривают три отдельные задачи [17, 20] и строят полное решение [21, 22]. Для их решения используют разнообразные численные методы [23, 24], но они, как правило, дают только субоптимальные траектории. Точные зависимости должны соответствовать принципу максимума Понтрягина, однако применение этого принципа затруднено большим количеством фазовых ограничений. Другим способом получения точных решений является метод динамического программирования Беллмана.

В данном сообщении применена математическая модель сверхзвукового пассажирского самолета, максимально приближенная к аналогичным моделям дозвуковых воздушных судов. Она учитывает самые разнообразные и весьма сложные конструктивные ограничения, которые наложены как на управляющие параметры, так и на фазовые переменные. Это обстоятельство делает применение принципа максимума крайне затруднительным, но существенно облегчает использование метода динамического программирования в классической форме, поскольку уменьшает количество вариантов возможных перемещений центра масс самолета, которые нужно перебрать. Этот метод позволил провести оптимизацию всей траектории целиком, без предварительного разлеления на участки и последующей стыковки полученных фрагментов. В отличие от ограничений, накладываемых особенностями конструкции, многочисленные ограничения, наложенные действующими правилами на допустимые траектории движения гражданских самолетов, не были учтены совершенно. Однако в результате вычислений выяснилось, что оптимальные решения весьма удобны для применения в рамках указанных ограничений.

Заметим, что в работе все размерные величины представлены в системе единиц СИ.

2. Для минимизации расхода топлива важно найти оптимальное управление в вертикальной плоскости. Поэтому будем полагать, что вся траектория полета находится в этой плоскости. Пусть масса самолета в текущий момент времени равна m. Обозначим абсциссу и ординату центра масс самолета через x и y соответственно. Обозначим через  $\theta$  угол, который составляет с осью абсцисс вектор скорости этого центра, причем модуль вектора равен V. Тогда уравнения движения самолета имеют следующий вид:

$$\dot{V} = g(n_x - \sin \theta),$$
  

$$\dot{\theta} = \frac{g}{V}(n_y - \cos \theta),$$
  

$$\dot{x} = V \cos \theta,$$
 (1)  

$$\dot{y} = V \sin \theta,$$
  

$$\dot{m} = -Q_t(M, y, P).$$

Здесь через g обозначено ускорение свободного падения,  $n_x$  и  $n_y$  обозначают величины тангенциальной и нормальной скоростной перегрузки соответственно, а функция  $Q_t$  задает секундный расход топлива, зависящий от числа Маха M, высоты полета y и тяги P.

Величина угла  $\theta$  должна удовлетворять условию  $-45^{\circ} \le \theta \le 45^{\circ}$ . Заметим, что для приведенных далее примеров оптимальных траекторий  $-11^{\circ} < \theta < 6^{\circ}$ .

Поскольку сила лобового сопротивления направлена против вектора скорости, то

$$n_x = \frac{P}{mg} - \frac{qSC_x}{mg}, \quad q = \frac{\rho(y)V^2}{2}, \tag{2}$$

где через  $\rho(y)$  обозначена плотность атмосферы в зависимости от высоты, а через *S* обозначена площадь крыла самолета. Входящий в формулу (2) коэффициент лобового сопротивления  $C_x$  зависит от коэффициента подъемной силы  $C_y$  и числа Маха *M*.

Будем полагать, что вектор силы тяги с модулем *P* всегда направлен вдоль вектора скорости. Тогда нормальная скоростная перегрузка определяется формулой

$$n_y = \frac{qSC_y}{mg}.$$
 (3)

Должно выполняться условие  $0 \le n_y \le n_y^{\max}$ , где  $n_y^{\max} = 4$ . Заметим, что для приведенных далее примеров оптимальных траекторий  $0.8 < n_y < 1.3$ . Величина коэффициента подъемной силы должна удовлетворять условию  $0 \le C_y \le C_{y\max}(M)$ .

Высота полета *у* должна быть не меньше 100 м и не больше 14000 м. Модуль *V* вектора скорости ограничен снизу функцией  $V_{\min}(y)$ , а сверху функцией  $V_{\max}(y)$ . Суммарная тяга двигателей *P* ограничена сверху и снизу функциями  $P_{\max}(y, M)$  и  $P_{\min}(y, M)$  соответственно.

Задача состоит в выборе таких функций  $C_y(t)$  и P(t), чтобы функционал

$$J = \int_{0}^{T} Q_{t} \left( M(t), y(t), P(t) \right) dt,$$
 (4)

определяющий суммарный расход топлива, имел наименьшее возможное значение. В формуле (4) через T обозначено требуемое время движения из заданной начальной точки траектории в конечную при заданных начальной и конечной скоростях.

Так как согласно наложенным условиям значение выражения  $V \cos \theta$  никогда не обращается в нуль, можно заменить независимую переменную в (1) и использовать дальность *x* вместо времени. Получим

$$\frac{dV}{dx} = \frac{g}{V} \left( \frac{n_x}{\cos \theta} - \mathrm{tg}\theta \right),$$
$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{g}{V^2} \left( \frac{n_y}{\cos \theta} - 1 \right), \quad \frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\theta, \tag{5}$$
$$\frac{dm}{dx} = -\frac{Q_t(M, y, P)}{V \cos \theta}, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{V \cos \theta}.$$

Граничные условия примут вид

$$V(x_0) = V_0, \quad \theta(x_0) = \theta_0, \quad m(x_0) = m_0, \quad t(x_0) = 0, \\ V(x_T) = V_T, \quad \theta(x_T) = \theta_T, \quad t(x_T) = T,$$
(6)

где через  $x_0$  и  $x_T$  обозначены начальная и конечная абсциссы центра масс самолета, причем без ограничения общности можно положить  $x_0 = 0$ . С учетом (5) минимизируемый функционал (4) можно записать в форме

$$J = \int_{0}^{x_{T}} \frac{Q_{l}(x)}{V \cos \theta} dx.$$
 (7)

Решение задачи поиска траектории, минимизирующей функционал (7) для системы дифференциальных уравнений (5) с начальными условиями (6) и удовлетворяющей всем указанным выше условиям, было проведено численно классическим методом динамического программирования. Далее описаны наиболее интересные свойства полученных решений.

3. Площадь крыла самолета была взята равной  $S = 110.16 \text{ м}^2$ . Были выбраны следующие граничные условия (6), одинаковые для всех описанных далее случаев:

$$V_0 = 140 \text{ M/c}, \quad \theta_0 = 0, \quad m_0 = 6 \cdot 10^4 \text{ Kr},$$
  
 $x_T = 10^6 \text{ M}, \quad V_T = 140 \text{ M/c}, \quad \theta_T = 0.$ 

Для различных значений времени движения на рис. 2 показаны оптимальные траектории, на которых видны участки набора высоты, крейсерского режима и снижения перед посадкой. Чем меньше общее время движения, тем раньше начинается набор высоты, дольше движение в крейсерском режиме и позже происходит снижение. Для самого длительного из представленных перелетов крейсерский режим практически отсутствует. Можно заметить, что по отношению к общему времени движения чувствительность скорости набора высоты больше, чем скорости снижения.

На рис. 3 показаны зависимости скорости движения самолета от дальности для тех же самых значений общего времени движения, что и на рис. 2. Видно, что типичный график состоит из семи участков. На начальном участке траектории скорость одинаково быстро растет во всех случаях. Потом в течение некоторого времени происходит движение с постоянной скоростью, прак-



Рис. 2.



Рис. 3.



Рис. 4.

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ том 504 2022

тически не зависящей от общей длительности полета. Затем на некотором удалении от начальной точки траектории начинается резкий набор скорости до значения, характерного для крейсерского режима. Чем меньше общее время движения, тем раньше начинается набор скорости. Полет на крейсерском режиме характеризуется практически постоянной скоростью, одинаковой для всех рассмотренных случаев. Далее виден участок, на котором скорость резко падает почти до того же самого значения, которое было до ее роста при переходе к крейсерскому режиму. Указанное уменьшение скорости начинается тем ближе к начальной точке траектории, чем больше общее время движения. Потом виден участок, на котором скорость почти постоянна и слабо отличается от одной траектории к другой. Завершающее движение происходит при резком снижении скорости, практически одинаковом для всех случаев. Как и на рис. 2, самый длительный перелет не имеет участка, характерного для крейсерского режима.

Из рис. 4 представлены зависимости значения числа Маха от дальности для того же набора траекторий, что и на рис. 2 и 3. Каждую кривую можно разбить на те же семь участков, что и на рис. 3. Видно, что участки, предшествующие выходу на крейсерский режим и следующие после него, соответствуют дозвуковым режимам полета. На том участке до крейсерского режима, где скорость движения почти одинакова для всех вариантов, число Маха медленно увеличивается. Переход к сверхзвуковому полету происходит при очень быстром росте скорости. В рамках крейсерского режима число Маха практически постоянно и равно приблизительно 1.44, а на участке примерного постоянства скорости после окончания этого режима число Маха медленно уменьшается. При этом сам выход из крейсерского режима происходит хотя и с быстрым уменьшением данного числа, однако менее резким, чем при переходе к сверхзвуковому полету.

4. Полученное решение представляется удобным для реализации. Начальные участки траекторий отличаются незначительно друг от друга, а различие между конечными участками еще меньше. Это позволяет унифицировать элементы движения самолетов на небольшом удалении от аэродромов взлета и посадки. Данное обстоятельство очень важно для упорядочения плотного потока воздушных судов в районах крупных транспортных vзлов. Сверхзвуковой полет сопровождается распространением ударных волн, оказывающих существенное акустическое воздействие на живые организмы, а иногда и на элементы зданий и сооружений. Вычисления показывают, что оптимальное движение со сверхзвуковой скоростью начинается и оканчивается на высотах около шести километров, а крейсерская часть полета происходит на высоте четырнадцати километров. Акустическое воздействие при этих условиях можно полагать приемлемым. Еще одно полезное свойство полученных траекторий заключается в удобстве реализации оптимального управления, так как, например, главные отличия между скоростями движения для разных случаев сводятся к изменению моментов времени перехода от одной скорости к другой, как это видно из рис. 3.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают признательность сотруднику Центрального аэрогидродинамического института имени профессора Н.Е. Жуковского Н.М. Гревцову за предоставленные численные параметры математической модели летательного аппарата.

#### ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 21-51-12004 и средствами государственного бюджета по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690138-6).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Rutowski E.S. Energy approach to the general aircraft performance problem // J. Aeronaut. Sci. 1954. V. 21. № 3. P. 187–195.
- Zagalsky N.R., Irons R.P., Schultz R.L. Energy state approximation and minimum-fuel fixed-range trajectories // J. Aircr. 1971. V. 8. № 6. P. 488–490.
- Calise A.J. Extended energy management for flight performance optimization // AIAA J. 1977. V. 15. № 3. P. 314–321.
- Erzberger H., Lee H. Constrained optimum trajectories with specified range // J. Guid. Control. 1980. V. 3. № 1. P. 78–85.
- Grimm W., Well K.H., Oberle H.J. Periodic control for minimum-fuel aircraft trajectories // J. Guid. Control Dyn. 1986. V. 9. № 2. P. 169–174.
- Raivio T., Ehtamo H., Hämäläinen R.P. Aircraft trajectory optimization using nonlinear programming / System Modelling and Optimization. Boston: Springer, 1996. P. 435–441.
- Langelaan J.W. Long distance / duration trajectory optimization for small UAVs / AIAA Guidance, Navigation and Control Conference. South Carolina: Hilton Head, 2007. P. 3654–3667.
- Rosenow J., Lindner M., Scheiderer J. Advanced Flight Planning and the Benefit of In-Flight Aircraft Trajectory Optimization // Sustainability. 2021. V. 13. № 3. P. 1383–1401.
- Wan J., Zhang H., Liu F., Lv W., Zhao Y. Optimization of aircraft climb trajectory considering environmental impact under RTA constraints // J. Adv. Transp. 2020. V. 2020. P. 1–17.
- Lim Y., Gardi A.G.M., Sabatini R. Optimal aircraft trajectories to minimize the radiative impact of contrails and CO<sub>2</sub> // Energy Procedia. 2017. V. 110. P. 446–452.

- Díaz M.V., Comendador V.F.G., Carretero J.G.-H., Valdís R.M. Environmental benefits in terms of fuel efficiency and noise when introducing continuous climb operations as part of terminal airspace operation // Int. J. Sustain. Transp. 2020. V. 14. № 12. P. 903–913.
- Li Y., Zhang Z., Zhang J. Research on trim simulation and flight test of a general electric aircraft // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. V. 1802. P. 1–10.
- 13. Зубин М.А., Максимов Ф.А., Остапенко Н.А. Управление структурой обтекания ромбовидного крыла в сверхзвуковом потоке // ДАН. 2019. Т. 485. № 3. С. 290–294.
- Елизарова Т.Г., Широков И.А. Коэффициенты искусственной диссипации в регуляризованных уравнениях сверхзвуковой аэродинамики // ДАН. 2018. Т. 483. № 3. С. 260–264.
- 15. *Суржиков С.Т.* Расчетный анализ экспериментальных данных по аэротермодинамике гиперзвукового аппарата HIFiRE-I // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2020. Т. 495. № 1. С. 68–72.
- Rosenow J., Förster S., Lindner M., Fricke H. Multi-objective trajectory optimization // Int. Transportation. 2016. V. 68. № 1. P. 40–43.
- 17. *Murrieta-Mendoza A., Botez R.M.* Methodology for vertical-navigation flight-trajectory cost calculation using a performance database // J. Aerosp. Inf. Syst. 2015. V. 12. № 8. P. 519–532.
- Kumakshev S.A., Shmatkov A.M. Flight trajectory optimization without decomposition into separate stages / 2018 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2018. V. 468. N 012033.
- Rosenow J., Strunck D., Fricke H. Trajectory optimization in daily operations // CEAS Aeronaut. J. 2020. V. 11. P. 333–343.
- 20. *Alligier R.* Predictive Distribution of Mass and Speed Profile to Improve Aircraft Climb Prediction // J. Air Transp. 2020. V. 28. № 3. P. 114–123.
- Franco A., Rivas D. Optimization of multiphase aircraft trajectories using hybrid optimal control // J. Guid. Control Dyn. 2015. V. 38. № 3. P. 452–467.
- 22. *Murrieta-Mendoza A., Romain C., Botez R.M.* 3D Cruise Trajectory Optimization Inspired by a Shortest Path Algorithm // Aerospace. 2020. № 7. P. 99–119.
- Soler M., Olivares A., Staffetti E. Multiphase optimal control framework for commercial aircraft four-dimensional flight-planning problems // J. Aircr. 2015. V. 52. № 1. P. 274–286.
- García-Heras J., Soler M., Saez F.J. Collocation methods to minimum-fuel trajectory problems with required time of arrival in ATM // J. Aerosp. Inf. Syst. 2016. V. 13. № 7. P. 243–265.

### OPTIMAL MINIMUM-FUEL TRAJECTORIES OF A SUPERSONIC PASSENGER AIRCRAFT

### S. A. Kumakshev<sup>a</sup> and A. M. Shmatkov<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia Presented by Academician of the RAS F.L. Chernousko

The trajectories of a supersonic passenger aircraft, which are optimal in terms of fuel consumption, are constructed using the classical method of dynamic programming. The mathematical model of the aircraft maximally takes into account the usual restrictions imposed on the permissible maneuvers of the aircraft by its design features. Optimal solutions were found without prior partitioning flight to separate areas. Despite the fact that the calculations did not take into account the restrictions imposed by the current rules for flying civil aircraft, it turned out that the optimal trajectories are quite convenient for use within the framework of these restrictions. Sections of movement with a speed exceeding the speed of sound are at a high altitude. This allows us to avoid additional acoustic impact on people living near airports, and at the same time to reduce fuel consumption. Sections of optimal trajectories corresponding to cruise phase of the flight are located at a high altitude, and therefore interference with the movement of conventional aircraft can be practically reduced to zero. The initial and final segments of trajectory, located in areas close to airports with a high air traffic density, differ slightly for various required flight durations, and therefore do not require great accuracy in practical implementation.

Keywords: supersonic flight, numerical optimization, dynamic programming method

——— МЕХАНИКА ——

УДК 532.685, 532.71

### ОСМОТИЧЕСКАЯ КОНВЕКЦИЯ

© 2022 г. М. М. Рамазанов<sup>1,\*</sup>, Н. С. Булгакова<sup>1,2,\*\*</sup>, академик РАН Л. И. Лобковский<sup>3,4,\*\*\*</sup>

Поступило 15.12.2021 г. После доработки 15.12.2021 г. Принято к публикации 28.01.2022 г.

Решена новая задача об осмотической конвекции в вертикальной проницаемой полуплоскости, содержащей полупроницаемое включение в виде круга. Исследованы свойства осмотической конвекции, приведены соответствующие иллюстрации. Используется предложенная авторами математическая модель движения растворов с учетом осмотического эффекта в пористой среде с полупроницаемыми включениями и метод малого параметра.

*Ключевые слова:* осмос, осмотическая конвекция, движение растворов, обобщенная математическая модель, полупроницаемое включение

DOI: 10.31857/S2686740022020109

Считается, что открытие осмоса принадлежит французскому аббату Жану-Антуану Нолле, который в 1748 г. впервые заметил и описал это явление. Обычно под осмосом понимают явление, сущность которого заключается в том, что если по разные стороны полупроницаемой мембраны, способной пропускать только молекулы воды, находятся водные растворы солей с разной концентрацией, молекулы воды будут перемещаться через мембрану из слабо концентрированного раствора в более концентрированный. Различают прямой осмос и обратный осмос. Полупроницаемость определяется как способность материала предотвращать прохождение растворенного вещества, не влияя на прохождение растворителя.

Осмотический эффект может проявляться и при отсутствии тонкой мембраны, а именно в малопроницаемых пористых средах. Например, хорошо установлено, что глины могут действовать как полупроницаемые мембраны и, следовательно, способны вызывать осмотический перенос воды [1]. В этом случае наряду с градиентом давления движущей силой растворителя может быть и градиент концентрации соли в растворе (химический осмос) [2], и градиент температуры (термический осмос) [3], и градиент электрического поля (электроосмос) [4]. В работе [5] приведены результаты лабораторных исследований коэффициента осмоса. Показано, что коэффициент осмоса некоторых природных пород и тампонажных материалов может в десятки, а то и в сотни раз превышать коэффициент фильтрации. В работе [6] указывается порядок величины коэффициента термического ос-

моса в границах  $10^{-9}$ ÷ $10^{-5}$  м<sup>2</sup>/(К · сут).

Явления химического и термического осмоса изучаются теоретически на основе принципов неравновесной термодинамики [7-10] и экспериментально в лабораторных условиях [11, 12]. Явление осмоса применяется в различных научнотехнических областях. Например, в Норвегии вблизи города Тофте компанией "Statkraft" запущена первая в мире электростанция – прототип, использующая для выработки электричества явление осмоса, возникающее из-за разности концентрации солей в соленой морской воде и в пресной воде фьорда. В морской геологии на основе осмоса объясняется эффект "плавучести" железо-марганцевых конкреций [13], которые не тонут в рыхлых осадочных слоях на дне океана на геологических масштабах времени [14, 15].

Возможно, что осмос имеет прямое отношение к процессу миграции расплавов в мантии Земли, имея в виду механизм "растворения переосаждения" [16, 17], где движущей силой

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Институт проблем геотермии и возобновляемой энергетики — филиал Объединенного института высоких температур Российской академии наук, Махачкала, Россия

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Дагестанский государственный университет народного хозяйства, Махачкала, Россия

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Институт океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),

Долгопрудный, Московская область, Россия

<sup>\*</sup>E-mail: mukamay-ipg@mail.ru

<sup>\*\*</sup>E-mail: ipgnatali@mail.ru

<sup>\*\*\*</sup>E-mail: llobkovsky@ocean.ru



**Рис. 1.** Модель задачи: 1 -слой соленой воды; 2 - проницаемая пористая среда; 3 - полупроницаемое включение;  $\gamma_c -$  градиент концентрации соли.

миграции расплава предполагается градиент химического потенциала в зависимости от концентрации растворенного компонента [18].

Существует целый ряд научных направлений, где осмотический эффект должен также учитываться. Например, при моделировании процессов деградации многолетнемерзлых пород необходимо учитывать особенности взаимодействия растворов солей с мерзлыми грунтами [19]. Имеются экспериментальные исследования указанного взаимодействия [20], которые свидетельствуют о существенном влиянии осмотического механизма переноса раствора совместно с процессами адсорбции и десорбции солей.

Следует отметить, что понимание свойств фильтрации растворов с учетом осмотического эффекта представляет собой актуальную задачу. В этой связи в настоящей работе, используя математическую модель фильтрации растворов в среде с полупроницаемыми включениями [10], аналитическими методами решается новая нелинейная задача об осмотической конвекции.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать двумерную задачу. Пусть в вертикальной проницаемой полуплоскости расположено полупроницаемое включение формы круга (рис. 1). Вдали от включения невозмущенная концентрация соли  $c_s$  линейно убывает с глубиной, т.е. по закону  $c_s = c_0 - \gamma_c z$  (ось *z* направлена вниз). На границе полуплоскости (*z* = 0) поддерживается концентрация соли, равная  $c_0$ . Будем отчитывать давление от гидростатического, а концентрацию от указанного линейного. Считаем, что температура среды тоже линейно убывает с глубиной так, что плотность раствора с глубиной слабо растет, т.е. имеем устойчивую стратификацию, и естественная конвекция не возникает. Далее, для простоты, процесс считаем изотермическим, а плотность постоянной. Механическое равновесие в таких условиях невозможно и поэтому возникнет течение, вызванное осмосом. Необходимо найти стационарное решение задачи, описывающее данное течение.

Предполагаем, что концентрация соли внутри включения равна нулю, а проницаемость вне включения не слишком мала. Тогда градиентом концентрации в уравнениях движения, т.е. осмотической движущей силой [10], в обеих средах можно пренебречь и в данном случае осмос проявляется лишь за счет скачка концентрации соли на границе полупроницаемого включения. Кроме того, пренебрегаем выпадением соли в осадок, т.е. адсорбцией.

Математическую формулировку задачи для краткости приведем сразу в безразмерном виде и в бицилиндрических координатах. Бицилиндрические координаты запишутся в виде

$$x = \frac{a\sin\sigma}{ch\tau - \cos\sigma}, \quad z = \frac{ash\tau}{ch\tau - \cos\sigma}, \quad (1)$$
$$h = acth\tau_0, \quad r_0 = a\sqrt{cth^2\tau_0 - 1} = \frac{a}{sh\tau_0},$$
$$a = \sqrt{h^2 - r_0^2}, \quad ch\tau_0 = \frac{h}{a}.$$

Граница включения определяется уравнениями  $\tau = \tau_0, 0 \le \sigma \le 2\pi$ ;  $r_0$  — радиус включения; h — глубина залегания включения.

Масштабы величин введем следующим образом:

$$[x] = [z] = r_0, \quad [v] = -\frac{k_e}{\eta h} \rho \frac{\partial \mu_1}{\partial c} c_0,$$
  

$$[p] = -\rho \frac{\partial \mu_1}{\partial c} c_0, \quad [c] = c_0,$$
  

$$\beta_0 = \frac{\eta r_0}{k_i} \beta, \quad \text{Pe} = -\frac{\rho k_e c_0}{\eta D} \frac{\partial \mu_1}{\partial c}.$$
(2)

Здесь индексы *е* и *і* относятся к областям вне и внутри включения соответственно; Ре – диффузионное число Пекле; **v**, *p*, *c* – поля скорости раствора, давления и концентрации соли соответственно;  $\eta$  – вязкость раствора; *k* – проницаемость; *m* – пористость;  $\rho$  – плотность раствора; *D* – коэффициент диффузии соли;  $\mu_1$  – химический потенциал растворителя;  $1/\beta$  – сопротивление границы полупроницаемого включения фильтрации растворителя.

Вывод системы уравнений фильтрации растворов в пористой среде с полупроницаемыми включениями и соответствующие граничные условия даны в [10]. С учетом сделанных упрощающих предположений, в безразмерном виде и в бицилиндрических координатах они запишутся следующим образом:

$$\Delta p_e = 0, \quad \mathbf{v}_e = -\nabla p_e,$$

$$\operatorname{Pev}_e \nabla c_e = \Delta c_e, \tag{3}$$

$$\Delta p_i = 0, \quad \mathbf{v}_i = -\frac{k_i}{k_e} \nabla p_i. \tag{4}$$

Граничные условия

$$\tau = 0; \ c = 0; \quad p_e = 0,$$
  

$$\tau = \tau_0; \ \frac{\partial p_e}{\partial \tau} = \frac{k_i}{k_e} \frac{\partial p_i}{\partial \tau},$$
  

$$\frac{ch\tau - \cos\sigma}{a} \frac{\partial p_e}{\partial \tau} = -\frac{k_i}{k_e} \beta_0 \left[-1 + \gamma z - c + p_e - p_i\right], \quad (5)$$
  

$$\gamma = \frac{\gamma_c r_0}{c_0}, \quad \operatorname{Pe} \frac{\partial p_e}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \tau} (-z + c) = 0,$$
  

$$\oint_{\partial \Omega} \frac{\partial p_e}{\partial \tau} ds = 0.$$

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Будем искать решение задачи (3)-(5) в виде рядов по степеням  $\gamma \ll 1$ :

$$p_{e} = p_{e0} + \gamma p_{e1} + \gamma^{2} p_{e2} + ...,$$
  

$$p_{i} = p_{i0} + \gamma p_{i1} + \gamma^{2} p_{i2} + ...,$$
  

$$c = \gamma c_{1} + \gamma^{2} c_{2} + ..., \qquad \gamma = \frac{\gamma_{c} r_{0}}{c_{0}}.$$
(6)

Подставляя (6) в (3)-(5), получим уравнения и граничные условия в нулевом и в первом приближении.

В нулевом приближении имеем

$$p_{e0} = \text{const}, \quad p_{i0} = \text{const},$$
  
 $p_{e0} - p_{i0} = 1.$  (7)

В первом приближении далее дополнительный индекс 1 будем опускать. Первое приближение удовлетворяет системе уравнений

 $\Delta c_e = 0$ ,

$$\Delta p_e = 0, \quad \mathbf{v}_e = -\nabla p_e, \tag{8}$$

$$\Delta p_i = 0, \quad \mathbf{v}_i = -\frac{k_i}{k_e} \nabla p_i \tag{9}$$

и следующей системе граничных условий:

$$\tau = 0; \ c = 0; \qquad p_e = 0,$$
  

$$\tau = \tau_0; \frac{\partial p_e}{\partial \tau} = \frac{k_i}{k_e} \frac{\partial p_i}{\partial \tau},$$
  

$$\frac{ch\tau - \cos\sigma}{a} \frac{\partial p_e}{\partial \tau} = -\frac{k_i}{k_e} \beta_0 [z - c + p_e - p_i],$$
  

$$Pe \frac{\partial p_e}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \tau} (-z + c) = 0.$$
  
(10)

Δ

Таким образом, необходимо решать задачу (8)-(10).

Ишем решение в виде рядов

- 0

$$p_{e} = A_{0} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n} \frac{\operatorname{sh} n\tau}{\operatorname{sh} n\tau_{0}} \cos n\sigma,$$
  

$$p_{i} = B_{0} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{n} e^{-n(\tau-\tau_{0})} \cos n\sigma,$$
 (11)  

$$c = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n} \frac{\operatorname{sh} n\tau}{\operatorname{sh} n\tau_{0}} \cos n\sigma.$$

Нетрудно убедиться, что (11) удовлетворяет уравнениям (8)-(9), поскольку каждое слагаемое под знаком суммы является гармонической функцией, т.е. является решением уравнения Лапласа. Осталось учесть граничные условия.

Подставляя (11) в граничные условия (10), получим следующие уравнения для коэффициентов:

$$\frac{\operatorname{ch}\tau_{0} - \cos\sigma}{a} \sum_{n=1}^{\infty} A_{n} \frac{\operatorname{nch}n\tau_{0}}{\operatorname{sh}n\tau_{0}} \cos n\sigma =$$

$$= -\frac{k_{i}}{k_{e}} \beta_{0} \left[ a \left( 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\tau_{0}} \left( 1 + \frac{\operatorname{sh}n\tau_{0}}{\operatorname{ch}n\tau_{0}} \right) \cos n\sigma \right) + (12) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n} \left( 1 + \operatorname{Pe} + \frac{k_{e}}{k_{i}} \frac{\operatorname{ch}n\tau_{0}}{\operatorname{sh}n\tau_{0}} \right) \cos n\sigma + A_{0} - B_{0} \right] -$$

$$-A_{n} \frac{\operatorname{ch}n\tau_{0}}{\operatorname{sh}n\tau_{0}} = \frac{k_{i}}{k_{e}} B_{n}, \quad C_{n} = -2ae^{-n\tau_{0}} \frac{\operatorname{sh}n\tau_{0}}{\operatorname{ch}n\tau_{0}} - \operatorname{Pe} A_{n}.$$

Здесь использовано разложение

$$z = \frac{a \operatorname{sh} \tau}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma} = a \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\tau} \cos n\sigma \right].$$

Ограничимся в (12) в суммах конечным числом N слагаемых, выбираемого из необходимой точности. Далее умножая (12) последовательно на  $1, \cos \sigma, \cos 2\sigma, \dots \cos N\sigma$  и интегрируя на отрезке  $[0, 2\pi]$ , получим N уравнений для определения N неизвестных коэффициентов  $A_n, n = 1, ..., N$ . Остальные коэффициенты определяются из (12).

В итоге для определения указанных коэффициентов получим следующую систему уравнений:

$$\omega_{kn} = \left[ \frac{k_e}{2k_i} \frac{n \operatorname{ch} n \tau_0}{\beta_0 \operatorname{sh} n \tau_0} \frac{\delta_{nk}}{J_k} + \left( 1 + \operatorname{Pe} + \frac{k_e}{k_i} \frac{\operatorname{ch} n \tau_0}{\operatorname{sh} n \tau_0} \right) \left( \frac{I_{nk}}{J_k} - \frac{I_{n0}}{J_0} \right) \right], \\
k = 1, 2..., \quad m = 1, 2..., \\
f_k = -\left[ 2a \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\tau_0} \left( 1 + \frac{\operatorname{sh} n \tau_0}{\operatorname{ch} n \tau_0} \right) \left( \frac{I_{nk}}{J_k} - \frac{I_{n0}}{J_0} \right) \right], \\
k = 1, 2..., \quad k = 1, 2..., \\$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_{kn} A_n = f_k, \quad I_{nk} = \int_0^{2\pi} \frac{a \cos n\sigma \cdot \cos k\sigma}{ch\tau_0 - \cos \sigma} d\sigma,$$

$$J_k = \int_0^{2\pi} \frac{a \cos k\sigma}{ch\tau_0 - \cos \sigma} d\sigma.$$
(14)

Отсюда решение запишется в виде

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}^{-1} \mathbf{f}.$$
 (15)

Таким образом, (11), (13), (15) решают поставленную задачу.

Рассмотрим случай  $\tau_0 \ll 1$ . Это приближение, когда глубина залегания включений много больше его радиуса. В этом случае решение сильно упрощается и, если ввести полярные координаты  $(r, \theta)$  с центром в начале координат и полярной осью, направленной вниз, оно запишется в виде

$$A_{1} = -\frac{2\beta_{0}k_{i}}{k_{e} + \beta_{0}[k_{e} + k_{i}(1 + Pe)]}, \quad B_{1} = -\frac{k_{e}}{k_{i}}A_{1},$$

$$C_{1} = -2ae^{-\tau_{0}} - PeA_{1} = -1 - PeA_{1},$$

$$p_{e} = \frac{A_{1}}{r}\cos\theta, \quad p_{i} = B_{1}r\cos\theta, \quad c = \frac{C_{1}}{r}\cos\theta. \quad (16)$$

Из полученных выражений нетрудно выписать функцию тока.

### ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Таким образом, выражения (11), (15), а в случае  $\tau_0 \ll 1$  (16) дают искомое стационарное решение в безразмерном виде. Масштабы величин даны выражениями (2). Эти выражения позволяют получить полное представление о зависимости полей и, в частности, поля скоростей от параметров задачи включая осмотическую силу.

Предположим, что градиент концентрации  $\gamma_c$  равен нулю. Тогда  $c = c_0 = \text{const}$ , скорость фильтрации равна нулю и система находится в равновесии. При этом концентрация соли и давление терпят скачок на границе включения. Эти скачки, согласно третьему уравнению (5), в котором при механическом равновесии левая часть равна нулю, связаны с учетом (2) формулой

$$p_e - p_i = -\rho \frac{\partial \mu_1}{\partial c} c_0 = -\rho \frac{\partial \mu_1}{\partial c} (c_e - c_i).$$

Для слабых растворов  $\frac{\partial \mu_1}{\partial c} = -RT$ , и мы получаем известную формулу Вант-Гоффа

$$p_e - p_i = RT(c_e - c_i).$$
 (17)

Давление вне включения будет исходным гидростатическим, а внутри включения будет отличаться от гидростатического на постоянную величину, определяемую уравнением Вант-Гоффа (17).

Приведем оценку скорости фильтрации и числа Пекле для следующих значений параметров:

$$k_i = 10^{-21} \text{ м}^2, \quad \eta = 10^{-4} \Pi a \cdot c,$$
  
 $\rho = 10^3 \text{ кг/m}^3, \quad \gamma_c = 35 \times 10^{-3} \text{ кг/(кг м)},$   
 $R = 8.3 \text{ Дж/моль} \cdot \text{K}, \quad T_0 = 300 \text{ K}, \quad i = 2.$ 

Используя формулу

$$\mathbf{v}_i = \frac{k}{\eta} \rho RT \frac{i}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \gamma_c$$

при  $D \sim 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$ , для скорости фильтрации, коэффициента химического осмоса и числа Пекле получим оценки

$$v_i \sim 6 \times 10^{-11} \text{ м/c} = 2 \times 10^{-3} \text{ м/год},$$
  
 $K_f \sim 5.5 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{год} = 1.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{сут},$   
 $\text{Pe} = \frac{v_i r_0}{D} \sim 10^{-1}.$ 

Эти оценки получены для очень низкой проницаемости, равной нанодарси. Если проницаемость взять на два-три порядка выше, то и осмотическая скорость (соответственно и коэффициент осмоса) будет на два-три порядка выше. С другой стороны, сделанные оценки соответствуют случаю, когда мембранные свойства идеальные. Поэтому для оценки снизу для осмотической скорости в данных условиях можно принять величину на порядок ниже.

На рис. 2 показаны линии тока раствора в рассматриваемой пористой среде. Во включении естественно течет только растворитель в силу его полупроницаемости. Из рис. 2 следует, что во включении линии тока представляют собой почти вертикальные отрезки, вдоль которых растворитель движется вверх. Вне включения раствор движется вниз, образуя в итоге либо непосредственно замкнутые линии тока, либо линии тока, замыкающиеся с помощью вышележащего слоя соленой воды.

Величина скорости воды во включении (как и в конвективной ячейке в целом), как показывают расчеты, с ростом глубины его залегания увеличивается, стремясь к предельному значению. С увеличением числа Пекле скорость конвекции в рассматриваемом первом приближении уменьшается. Это связано с тем, что рост числа Пекле



Рис. 2. Линии тока. Шкала уровней нормирована.



Рис. 3. Линии уровня возмущения поля концентрации соли.



**Рис. 4.** Распределение возмущений концентрации (*1*) и надгидростатического давления (*2*) с глубиной вдоль оси симметрии включения.

способствует выравниванию концентраций соли над и под включением, тем самым уменьшая осмотическую движущую силу. Скорость конвекции растет с ростом проницаемости включений (оставаясь достаточно малой) при фиксированных значениях прочих параметров.

Рисунок 3 демонстрирует линии уровня возмущений начального линейного распределения концентраций. Видно, что возмущение концентрации соли над включением выше, чем под ним, что и приводит к возникновению осмотической конвекции.

Рисунок 4 показывает распределения возмущений концентрации (1) и надгидростатического давления (2) с глубиной вдоль оси симметрии включения. Здесь давление над включением отличается от истинного на постоянную величину (для наглядности).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В качестве приложения ранее предложенной авторами обобшенной математической модели движения растворов в среде с полупроницаемыми включениями [10] решена новая задача об осмотической конвекции, которая может иметь практическое значение. Найдено аналитическое нелинейное стационарное решение задачи в первом приближении по градиенту концентрации соли. Приведены иллюстрации свойств осмотической конвекции. Полученное решение может иметь разные приложения, и, в частности, как одно из возможных объяснений парадоксального явления "непотопляемости" тяжелых пористых конкреций в осадочном слое на дне океана [13]. Использованная здесь обобщенная модель [10] может быть применена при моделировании процессов деградации ПММП, содержащих газогидратные скопления, процессов миграции расплава-раствора в мантии Земли и т.д.

### ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены за счет средств государственных заданий: №121121700223-8 Института проблем геотермии фил. ОИВТ РАН, № FMWE-2021-0004 Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Kemper W.D.* Movement of water as effected by free energy and pressure gradients: II. Experimental analysis of porous systems in which free energy and pressure gradients act in opposite directions // Soil Sci. Soc. Am. Proc. 1961. V. 25. P. 260–265.
- 2. *Рельтов Б.Ф., Новицкая Н.А.* Осмотические явления в связных грунтах при неравномерном их засолении // Изв. ВНИИГ. 1954. Т. 51. С. 94–122.

- Dirksen C. Thermo-osmosis through compacted saturated clay membranes // Soil Sci. Soc. Am. J. 1969. V. 33. P. 821–826.
- 4. *Grundl T., Michalski P.* Electroosmotically driven water flow in sediments // Water Res. 1996. 301811–818.
- Воронкевич С.Д., Емельянов С.Н., Сергеев В.И. Исследование фильтрационно-осмотических процессов при создании плотных защитных экранов // Задачи механики природных процессов. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 47–63.
- Soler J.M. The effect of coupled transport phenomena in the Opalinus Clay and implications for radionuclide transport // J. Contaminant Hydrology. 2001. V. 53. P. 63–84.
- Graham J., Tanaka N., Crilly T., Alfaro M. Modified Cam-Clay modeling of temperature effects in clays // Can. Geotech. J. 2001. V. 38. P. 608–621.
- Srivastava R.C., Avasthi P.K. Non-equilibrium thermodynamics of thermo-osmosis of water through kaolinite // J. Hydrol. 1975. V. 24. P. 111–120.
- Keijzer Th.J.S., Loch J.P.G. Chemical osmosis in compacted dredging sludge // Soil. Sci. Soc. Am. J. 2001. V. 65. P. 1045–1055.
- Рамазанов М.М., Каракин А.В., Лобковский Л.И. Математическая модель движения растворов с учетом осмотического эффекта // ДАН. 2019. Т. 489. № 1. С. 75–79.
- 11. *Keijzer Th.J.S.* Chemical osmosis in natural clayey materials. Geologica Ultraiectina №196. Ph.D. thesis, Utrecht University. 2000. 170 p.
- 12. *Malusis M.A., Shackelford C.D., Olsen H.W.* A laboratory apparatus to measure chemico- osmotic efficiency

coefficients for clay soils // Geotechnical Testing Journal. 2001. V. 24. P. 229–242.

- 13. *Рамазанов М.М., Каракин А.В.* Эффект "непотопляемости" конкреций на дне океана // Физика Земли. 2018. № 2. С. 205–210.
- 14. Баренблатт Г.И., Батурин Г.Н. О "непотопляемости" железомарганцевых конкреций и некоторых особенностях придонного слоя океана // ДАН. 1989. Т. 308. № 1. С. 183–188.
- 15. Батурин Г.Н. Геохимия железомарганцевых конкреций океана. М.: Наука, 1968. 328 с.
- Watson E.B. Melt infiltration and magma evolution // Geology. 1982. V. 10. P. 236–240.
- Hammouda T., Laporte D. Ultrafast mantle impregnation by carbonatite melts // Geology. 2000. V. 28. P. 283–285.
- Шацкий А.Ф., Литасов К.Д. Условия образования карбонатов и механизм миграции карбонатных расплавов в мантии Земли. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2015. 247 с.
- Shakhova N., Semiletov I., Dudarev O., Mazurov A.K., Charkin A., Salyuk A., Kosmach D., Karnaukh V., Chernykh D., Gustafsson O., Sergienko V., Lobkovsky L., Ananiev R., Dmitrevsky N., Meluzov A., Tumskoy V., Koshurnikov A., Gunar A., Grigoriev M. Current rates and mechanisms of subsea permafrost degradation in the east siberian Arctic shelf // Nature Communications. 2017. V. 8. P. 15872.
- Chuvilin E.M. Migration of ions of chemical elements in freezing and frozen soils // Polar Record. 1999. V. 35. № 192. P. 59–66.

### **OSMOTIC CONVECTION**

### M. M. Ramazanov<sup>a</sup>, N. S. Bulgakova<sup>a,b</sup>, and Academician of the RAS L. I. Lobkovskiy<sup>c,d</sup>

<sup>a</sup>Institute for Geothermal Research and Renewable Energy, Branch of Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Sciences, Makhachkala, Russia

<sup>b</sup>Dagestan State Institute of National Economy, Makhachkala, Russia

<sup>c</sup>Shirshov Institute of Oceanology of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>d</sup>Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russia

A new problem has been solved of osmotic convection in a vertical permeable half-plane containing a semipermeable inclusion in the form of a circle. To accomplish the task, the authors suggest a mathematical model of the solutions movement with osmotic effect in a porous medium with semipermeable inclusions, and the method of a small parameter. The properties of osmotic convection have been investigated, and the corresponding illustrations have been presented.

*Keywords:* osmosis, osmotic convection, solution movement, generalized mathematical model, semi-permeable inclusion

52

### —— ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ ——

УДК 536.2

### ТЕРМОАККУМУЛЯТОР НА ОСНОВЕ ФАЗОИЗМЕНЯЕМЫХ МАТЕРИАЛОВ

© 2022 г. Г. С. Бочаров<sup>1,\*</sup>, А. О. Вагин<sup>1,\*\*</sup>, И. С. Григорьев<sup>1,\*\*\*</sup>, член-корреспондент РАН А. В. Дедов<sup>1,\*\*\*\*</sup>, А. В. Елецкий<sup>1,\*\*\*\*</sup>, А. В. Захаренков<sup>1,\*\*\*\*\*</sup>, М. А. Зверев<sup>1,\*\*\*\*\*</sup>

> Поступило 13.12.2021 г. После доработки 13.12.2021 г. Принято к публикации 25.03.2022 г.

Предложена и проанализирована конструкция водяного термоаккумулятора на основе фазоизменяемых материалов (ФИМ). В такой системе накопление (выделение) энергии происходит в результате фазового перехода в ФИМ, а в качестве рабочего тела используется вода. Термоаккумулятор состоит из некоторого количества одинаковых модулей, число которых определяет величину запасаемой энергии. Каждый модуль представляет собой двойную концентрическую трубку, внутренняя полость которой заполняется проточной водой, а внешняя полость заполнена ФИМ. В качестве ФИМ используется парафин, имеющий теплоту плавления 216 Дж/г. С целью повышения коэффициента теплопроводности ФИМ используется присадка термически восстановленного оксида графена. При пропускании через внутреннюю трубку горячей воды происходит плавление парафина, который аккумулирует тепловую энергию, соответствующую теплоте плавления. Эта энергия извлекается при пропускании через систему, содержащую расплавленный парафин, холодной воды, которая нагревается в результате затвердевания парафина. Представлены оценки теплового режима термоаккумулятора, а также результаты расчетов нестационарного продольного и поперечного распределения температуры в различные моменты времени.

Ключевые слова: термоаккумулятор, фазоизменяемые материалы, теплопроводность

DOI: 10.31857/S2686740022030038

Фазоизменяемые материалы (ФИМ) способны запасать и выделять значительное количество энергии в результате фазового перехода. Благодаря этой особенности ФИМ находят свое применение в конструкциях зданий для снижения амплитуды температурных колебаний в помещениях под влиянием окружающей среды (см., например, [1, 2]), для стабилизации температуры в электронных устройствах и сложных установках [3], для накопления энергии, выработанной сол-

<sup>1</sup>Национальный исследовательский университет

\*\*E-mail: artem.vagin2611@mail.ru

нечными или ветровыми электростанциями [4] и др. На пути широкого распространения ФИМ в строительстве, энергетике и других областях стоит проблема, связанная с весьма низким значением коэффициента теплопроводности большинства ФИМ (на уровне 0.2 Вт/м К). В силу этого обстоятельства устройства, содержащие ФИМ, обладают высокой инерционностью, что затрудняет использование таких устройств для подавления температурных флуктуаций окружающей среды. С целью решения указанной проблемы применяются присадки наноуглеродных частиц (углеродные нанотрубки [5, 6], графен [7, 8]). Коэффициент теплопроводности таких частиц достигает значений 5000 Вт/м К [9, 10], так что уже небольшого количества присадки достаточно для многократного увеличения коэффициента теплопроводности композита. Так, согласно результатам эксперимента [11], добавление к парафину 15% (по массе) многослойных УНТ привело к увеличению теплопроводности материала в 3 раза. Значительно эффективнее оказалось исполь-

<sup>&</sup>quot;МЭИ", Москва, Россия

<sup>\*</sup>E-mail: Bocharovgs@mail.ru

<sup>\*\*\*</sup>E-mail: vectr2015@yandex.ru

<sup>\*\*\*\*</sup>E-mail: DedovAV@mpei.ru

<sup>\*\*\*\*\*</sup>E-mail: eletskii@mail.ru

<sup>\*\*\*\*\*\*</sup>E-mail: zaharenkov.aleks@mail.ru

<sup>\*\*\*\*\*\*</sup>E-mail: zverev-ma@yandex.ru



Рис. 1. Схема модуля термоаккумулятора: 1 - трубопровод для пропускания горячей или холодной воды; 2 - медная оболочка внутреннего трубопровода ( $R_1 = 7.5$  мм, L = 1100 мм, h = 1 мм); 3 - пространство между внешним и внутренним цилиндром, заполненное ФИМ ( $R_2 = 13.5$  мм, L = 1000 мм, h = 6 мм); 4 полипропиленовая оболочка внешнего цилиндра ( $R_3 = 40$  мм, L = 1020 мм, h = 6.5 мм); 5 - источник холодной воды; 6 - источник горячей воды; 7 - приемник нагретой воды; 8 - приемник охлажденной воды; 9 - краны подачи воды; 10 - термопары (с шагом 500 мм).

зование в качестве присадки хлопьев графена [7]: введение всего 1% (по массе) присадки приводит к пятнадцатикратному повышению коэффициента теплопроводности материала, а при содержании присадки 6% коэффициент теплопроводности композита возрастает в 36 раз (до 7.95 Вт/м К). Другой подход, позволяющий снизить время теплообмена между ФИМ и окружающей средой, связан с использованием капсулирования ФИМ [12]. Согласно этому подходу, термоаккумулятор содержит капсулы небольших размеров, заполненные ФИМ. В этом случае характерное время теплообмена определяется размером капсул и может быть достаточно коротким. Капсулированный ФИМ удобно использовать в строительных панелях, однако наличие материала капсул повышает стоимость материала и снижает его удельную энергоемкость.

В данном сообщении рассмотрена и проанализирована новая конфигурация накопителя тепловой энергии на основе ФИМ, основанная на использовании длинных цилиндрических емкостей для ФИМ. В этом случае время теплообмена определяется геометрией цилиндра и для цилиндров малого радиуса может быть достаточно коротким. Подобная конфигурация подразумевает модульную структуру термоаккумулятора, энергоемкость которого может быть легко увеличена в результате увеличения числа используемых модулей. Приведены результаты расчетов поля температур и характера накопления и выделения энергии в таком устройстве. Рассмотрено влияние присадки, увеличивающей теплопроводность материала, на характер распространения тепла в объеме ФИМ.

Рассматриваемый термоаккумулятор имеет модульную структуру, т.е. он составлен из некоторого количества одинаковых модулей. Подобная структура позволяет увеличивать энергоемкость системы в результате увеличения числа модулей. Схема одного из таких модулей представлена на рис. 1. Основу модуля составляет двойной цилиндрический трубопровод, представляющий собой две вложенные друг в друга концентрические трубки с радиусами R<sub>1</sub> и R<sub>2</sub>. Внутренний трубопровод выполнен из меди для облегчения теплообмена между водой и ФИМ. Внешний трубопровод выполнен из пластика (полипропилен), имеющего низкую теплопроводность, что предотвращает утечку тепловой энергии в окружающую среду. Пространство между внешним и внутренним цилиндром заполнено ФИМ, в то время как по внутренней трубке пропускается вода, которая служит рабочим телом. В объеме ФИМ помещены термопары, обеспечивающие контроль температуры в процессе теплообмена.

При пропускании через трубопровод горячей воды ФИМ нагревается и испытывает фазовый переход, в результате которого материал плавится и переходит в жидкое состояние. При этом в нем запасается энергия *E*, равная произведению массы ФИМ *M* на удельное значение энтальпии фазового перехода *H*:

$$E = MH. \tag{1}$$

Эта энергия может быть извлечена и использована в результате пропускания через трубопровод холодной воды. Охлаждение ФИМ вызывает фазовый переход, что приводит к нагреву воды до температуры, близкой к температуре фазового перехода.

Масса ФИМ определяется объемом пространства между внешним и внутренним цилиндром, который выражается через радиусы внутреннего  $R_1$  и внешнего  $R_2$  цилиндров:

$$M = \pi (R_2^2 - R_1^2) L \rho, \qquad (2)$$

где  $\rho$  — плотность ФИМ, а L — длина трубопровода. Характерное время теплообмена  $\tau$  выражается соотношением

$$\tau \sim \left(R_2 - R_1\right)^2 / \alpha, \qquad (3)$$

где  $\alpha = \lambda/\rho c$  – коэффициент температуропроводности ФИМ,  $\lambda$  – теплопроводность, c – удельная теплоемкость материала.

В данной работе в качестве ФИМ используется парафин П2, теплофизические характеристики которого приведены в табл. 1. Учитывая характеристики парафина, приведенные в табл. 1, оценим параметры рассматриваемого термоаккумулятора. Используя значения  $R_1 = 0.75$  см,  $R_2 = 1.35$  см, L = 110 см, получаем, что масса ФИМ, заключенная в одном модуле, составляет, согласно (2),

### ТЕРМОАККУМУЛЯТОР

Температура плавления <i>T</i> <sub>m</sub> , °С	Удельная теплота плавления <i>H</i> , Дж/г	Плотность р, г/см <sup>3</sup>	Удельная теплоемкость <i>с</i> , Дж/г К	Теплопро- водность λ, Вт/(м К)	Температуро- проводность α, см <sup>2</sup> /с	
55	212	0.734	2.1	0.21	$0.74 \times 10^{-3}$	

Таблица 1. Теплофизические характеристики парафина П2, используемого в эксперименте

 $M_{\Phi UM} = 317$  г. Это соответствует, согласно (1), энергосодержанию модуля  $E \approx 67$  кДж. Такая энергия может быть запасена в ФИМ в результате охлаждения  $M_w \approx 800$  г воды, имеющей температуру выше температуры фазового перехода на  $20^{\circ}$ С. Характерное время теплообмена, оцененное на основании (3), составляет около 500 с. Это время может быть существенно сокращено в результате введения в ФИМ присадки из наноуглеродных частиц. Полагая, что такими частицами является термически восстановленный оксид графена, и используя результаты эксперимента [7], согласно которому коэффициент теплопроводности при добавлении 1% присадки возрастает в 15 раз, получаем, что время теплообмена составляет порядка  $\tau \approx 30$  с. Указанное время определяет минимальную продолжительность взаимодействия горячей воды с объемом ФИМ, а следовательно, максимальную усредненную по сечению трубопровода скорость водяного потока, которая выражается через массу воды  $M_w = 800$  г, используемой для плавления ФИМ:

$$v = M_{\rm w} / \rho S \tau \approx 20 \, \rm cm/c, \tag{4}$$



**Рис. 2.** Продольный и поперечный профили температуры ФИМ, вычисленные для различных моментов времени  $\tau$  после начала прокачивания воды. а  $-\tau = 10$  с;  $6 - \tau = 50$  с;  $B - \tau = 150$  с;  $r - \tau = 250$  с. Различные линии соответствуют различным расстояниям от оси.

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ том 504 2022

где  $S = \pi R_l^2 = 1.8 \text{ см}^2 - площадь поперечного сечения трубопровода. При большей скорости течения вода "не успевает" израсходовать свою тепловую энергию на плавление парафина, и ее температура изменится лишь незначительно. Отметим, что относительно простая и недорогая процедура термического восстановления оксида графена и свойства получаемого при этом материала детально описана в работах [13, 14].$ 

Аналогичные оценки могут быть выполнены для случая, когда вода, имеющая температуру ниже температуры фазового перехода, пропускается через трубопровод, внешний цилиндр которого заполнен жидким парафином. В этом случае затвердевание ФИМ вызывает нагрев протекающей воды.

Процесс теплообмена при протекании через термоаккумулятор горячей воды моделировался с помощью пакета программ COMSOL с учетом энергии, поглощаемой при фазовом переходе. Решалось нестационарное уравнение теплопроводности в предположении, что теплопроводность внутренней трубки, выполненной из меди, равна бесконечности, а теплопроводность наружной трубки, выполненной из полимерного материала, равна нулю. Теплопроводность ФИМ с присадкой графена принималась равной 10.37 Вт/(м К) (в твердой фазе) и 13.82 Вт/(м К) (в жидкой фазе). Начальная температура воды составляла 90°С, начальная температура ФИМ задавалась равной 20°С. Результаты моделирования представлены на рис. 2 в виде зависимостей температуры от продольной и радиальной координаты в различные моменты времени. Радиальная координата отсчитывается от оси трубопровода. Как видно, результаты численных расчетов нахолятся в качественном соответствии с выполненными выше оценками. Расчеты показывают, что при скорости водного потока 10 см/с время полного расплавления парафина составляет примерно 250 с, что соответствует массе протекающей воды около 1.7 кг. Как видно, изменение температуры в радиальном направлении относительно невелико практически в течение всего времени теплообмена.

Таким образом, выполненные расчеты показывают, что в рассматриваемой модели термоаккумулятора происходит накопление энергии в результате фазового перехода в ФИМ. Характер теплообмена между рабочим телом и ФИМ находится в соответствии с выполненными выше оценками и численными расчетами.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания № FSWF-2020-0023.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Sharifi N.P., Sakulich A. Application of phase change materials in gypsum boards to meet building energy conservation goals // Energy and buildings. 2017. V. 138. P. 455.
- 2. Григорьев И.С., Дедов А.В., Елецкий А.В. Фазоизменяемые материалы и энергетика // Теплоэнергетика. 2021. № 4. С. 1–14.
- 3. Васильев Е.Н., Деревянко В.А. Динамика фазовых превращений в тепловом аккумуляторе системы терморегулирования бортовой радиоэлектронной аппаратуры // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25. № 3. С. 481.
- Kanimozhi B, Ramesh Bapu B.R., Sivashanmugam M. Enhancement of Solar Thermal Storage System Using PCM // National J. on Advances in Building Sciences and Mechanics. 2010. V. 1. P. 48.
- Liu Z.-P., Yang R. Synergistically-Enhanced Thermal Conductivity of Shape-Stabilized Phase Change Materials by Expanded Graphite and Carbon Nanotube // Appl. Sci. 2017. V. 7. P. 574.
- Bocharov G.S., Gerasimov D.N., Grigoriev I.S., Dedov A.V., Eletskii A.V. Thermal Conductivity of Phase Changing Materials Doped with Carbon Nanotubes // J. of Physics. Conf. Series. 2020. 1683. 032011.
- Aryanfar A., Medlej S., Tarhini A., Damadi S.R., Tehrani B., Goddard W.A. 3D percolation modeling for predicting the thermal conductivity of graphene-polymer composites // Computational Materials Science. 2021. V. 197 (11). 11065.
- 8. *Li A., Zhang C., Zhang Y.-F.* Thermal conductivity of graphene-polymer composites: Mechanisms, properties, and applications // Polymers. 2017. № 9 (9). P. 437.
- 9. *Елецкий А.В.* Транспортные свойства углеродных нанотрубок // Успехи физ. наук. 2009. Т. 179. С. 225.
- Елецкий А.В., Искандарова И.М., Книжник А.А., Красиков Д.Н. Графен: методы получения и теплофизические свойства // Успехи физ. наук. 2011. Т. 181. № 3. С. 233–267.
- Han L., Jia X., Li Z., Yang Z., Wang G., Ning G. Effective Encapsulation of Paraffin Wax in Carbon Nanotube Agglomerates for a New Shape-Stabilized Phase Change Material with Enhanced Thermal-Storage Capacity and Stability // Ind. Eng. Chem. Res. 2018. V. 57. 13026.
- Hawes D.W., Feldman D. Absorption of phase change materials in concrete // Solar Energy Mater Solar Cells. 1992. V. 27. P. 91.
- Bocharov G.S., Eletskii A.V. Percolation conduction of carbon nanocomposites // Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures. 2019. V. 28 (2). P. 104–111.
- Bocharov G.S., Eletskii A.V. Percolation Conduction of Carbon Nanocomposites // Int. J. Mol. Sci. 2020. V. 21. 7634.

ТЕРМОАККУМУЛЯТОР

### THERMAL ACCUMULATOR ON THE BASIS OF PHASE CHANGING MATERIALS

### G. S. Bocharov<sup>a</sup>, A. O. Vagin<sup>a</sup>, I. S. Grigoriev<sup>a</sup>, Corresponding Member of the RAS A. V. Dedov<sup>a</sup>, A. V. Eletskii<sup>a</sup>, A. V. Zakharenkov<sup>a</sup>, and M. A. Zverev<sup>a</sup>

<sup>a</sup>National Research University "MPEI", Moscow, Russia

Concept of a water thermal accumulator on the basis of phase changing materials (PCM) has been proposed and analyzed. In such a system the energy accumulation and release proceeds in result of the phase transition in PCM and water is used as a working fluid. The thermal accumulator is consisted of similar modules the number of which determines the quantity of the energy to be stored. Each module presents the double concentric cylindrical tube so that the inner tube is filled by flowing water and the outer cavity is filled with a PCM. As a PCM is used paraffin having the specific phase transition enthalpy 216 J/g. PCM is doped with thermally reduced graphene oxide in order to enhance the thermal conduction coefficient. Passage of hot water through the inner tube results in the melting of paraffin which accumulates the thermal energy corresponding to the phase transition enthalpy. This energy is extracted at the passage of cold water through the system containing melted paraffin which results in heating the water in result of the paraffin congeal. Three have been presented the estimations of the thermal regime of the thermal accumulator and the results of numerical calculations of non-stationary longitudinal and transverse distribution of the temperature.

Keywords: thermal accumulator, phase changing materials, thermal conductivity

———— ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ ———

УДК 621.315.1

### ВЛИЯНИЕ МЕНЯЮЩИХСЯ ВЕТРОВЫХ НАГРУЗОК НА НАДЕЖНОСТЬ ВОЗДУШНЫХ ЛИНИЙ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ В РАЗЛИЧНЫХ РЕГИОНАХ РОССИИ

© 2022 г. Член-корреспондент РАН В. В. Клименко<sup>1,2,\*</sup>, О. Е. Кондратьева<sup>1,2</sup>, О. А. Локтионов<sup>1,2</sup>, Е. В. Федотова<sup>1,2,\*\*</sup>

Поступило 28.01.2022 г. После доработки 28.01.2022 г. Принято к публикации 25.03.2022 г.

Выполнен анализ основных причин технологических нарушений в электросетевых комплексах США, ЕС и России, который позволил установить, что из всех видов климатических воздействий ветровые нагрузки играют ключевую роль для аварийности. Наблюдения метеостанций России были использованы для расчета вероятностных характеристик скорости ветра в ряде российских регионов. Для рассмотренных территорий проведен анализ данных региональных электросетевых компаний по технологическим нарушениям. Это позволило предложить модель для вероятности безотказной работы электросетевого хозяйства в зависимости от скорости ветра. Выполненная прогнозная оценка позволила показать, что вероятное в следующие несколько десятилетий изменение ветровых условий способно заметно повлиять на надежность электроснабжения в нескольких областях страны. В частности, повышение частоты аварий, в соответствии с нашими расчетами, может составить до 25% на северо-западе Европейской территории и вплоть до 50% на Дальнем Востоке.

*Ключевые слова:* воздушные линии электропередачи, ветровая нагрузка, технологические нарушения, отключения ЛЭП, вероятностная модель аварийности

DOI: 10.31857/S2686740022030105

Современный глобальный энергопереход предполагает осуществление беспрецедентной по масштабам электрификации мировой энергетики [1], которая невозможна без соответствующего развития электрических сетей. Новые сети, как и большинство действующих, скоро будут работать в условиях более теплого климата, значительно отличающегося от современного. Поэтому чрезвычайно важно установить достоверные связи показателей работы электрических сетей с климатическими параметрами, чтобы иметь возможность принимать опережающие проектные решения.

К электросетевому комплексу как объекту критической инфраструктуры предъявляются повышенные требования надежности как в области энергетической безопасности и качественного электроснабжения, так и с точки зрения кон-

<sup>1</sup>Национальный исследовательский университет "МЭИ", Москва, Россия

структивных особенностей и стабильного функционирования. Ретроспективный анализ аварийности за последние 10 лет на воздушных линиях электропередачи (как наиболее уязвимых элементах, вследствие широкой пространственной рассредоточенности и высокой степени физического износа) в России (МЭС<sup>3</sup> и РЭС<sup>4</sup> ПАО "Россети") и зарубежных странах (членах ENTSO-Е<sup>5</sup> и  $NERC^{6}$ ) показал, что в структуре коренных причин технологических нарушений доля внешних природных воздействий имеет тенденцию к увеличению. Имеющиеся данные показывают (рис. 1), что средняя доля технологических нарушений за период 2011-2020 гг. по причине воздействия климатических факторов составила для США -33%, для EC – 38%, для России – 43%.

Такой тренд является закономерным, во-первых, вследствие снижения конструктивных и экс-

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Институт энергетических исследований

Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>\*</sup>E-mail: nilgpe@mpei.ru

<sup>\*\*</sup>E-mail: kasilovayv@mpei.ru

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Магистральные электрические сети (ПАО "ФСК ЕЭС"). <sup>4</sup> Распределительные электрические сети (МРСК и другие

дзо). 5. Supreme Network of Transmission System Operators for

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> European Network of Transmission System Operators for Electricity. Network reliability (major events).

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup> North American Electric Reliability Corporation. Annual reports of National electricity emergency response capabilities.



Рис. 1. Структура причин технологических нарушений в электросетевых комплексах США, ЕС и России.

плуатационных причин аварий за счет технологического и цифрового перевооружения электросетей и, во-вторых, вследствие увеличения частоты, интенсивности и продолжительности опасных погодных явлений в результате нарастающих процессов изменения климата. Вопросы оценки климатических рисков для электроэнергетики широко рассматриваются профильными сообществами IEA, CIGRE [2, 3], отдельными исследователями развитых [4–6] и развивающих стран [7, 8], подтверждая необходимость разработки и реализации мер адаптации к новым условиям из-за нарушений нормального функционирования и выхода за рамки ранее применяемых проектных нормативов.

Необходимо отметить, что ветровая нагрузка является одной из наиболее значимых причин аварий в электросетевом комплексе не только в России, где ее доля достигает 17% от всех причин отключений, но и в других странах, что подтверждается результатами многочисленных исследований [9–11]. Причем, как было обозначено ранее, если для технических и прочих причин аварий наблюдается тенденция к снижению, то в случае с климатическими факторами фиксируется рост как в абсолютных, так и в относительных величинах. Предположение о дальнейшем росте технологических нарушений по причине воздействия ветра также подтверждается результатами исследований, представленных в недавнем 6-м отчете МГЭИК [12], в соответствии с которым в перспективе будет наблюдаться увеличение интенсивности и частоты экстремальных метеорологических явлений. Высказанные соображения позволяют заключить, что процедура определения нормативных значений нагрузок в перспективе должна осуществляться не только на основе стандартных данных о конструктивных особенностях, но и с учетом предполагаемого дрейфа ключевых климатических параметров.

Рассматриваемая работа направлена на выявление зависимости между ветровыми нагрузками и технологическими нарушениями на воздушных линиях электропередачи (ВЛЭП) на основе статистических данных для нескольких регионов России с различными по ветровому давлению климатическими зонами, а именно: Ямало-Ненецкий автономный округ, Республика Башкортостан, Краснодарский край и Республика Адыгея, Забайкальский край, Республика Тыва.

### ОЦЕНКА ВАРИАЦИИ ВЕТРОВЫХ НАГРУЗОК ЗА ПЕРИОД 1981–2020 гг.

Для расчетов были использованы сведения ВНИИГМИ-МЦД по 8-срочным суточным наблюдениям за последние 40 лет (1981–2020 гг.) для максимальных скоростей ветра, осредненных за 10-минутный интервал времени. Распределение среднегодовых значений максимальных (V<sub>max</sub>)

#### КЛИМЕНКО и др.

Территория анализа	Метеостанции	Район по ветр.	<i>V</i> <sub>max</sub> , м/с	
	Merederandum	давлению	1981-2000	2001-2020
Ямало-Ненецкий автоном-	Надым, Новый Порт, Ныда, Салехард,	III–V	7.2	7.4
ный округ	Тарко-Сале, Толька, Халесовая, Марре-			
	саля, Антипаюта			
Республика Башкортостан	Аксаково, Уфа, Дуван, Стерлитамак, Зилаир	III–IV	5.4	5.9
Краснодарский край	Анапа, Сочи, Туапсе, Краснодар, Армавир,	III–IV	6.1	6.8
и Республика Адыгея	Приморско-Ахтарск			
Забайкальский край	Борзя, Могоча, Сретенск, Хилок, Чара, Чита	II–III	2.7	2.9
Республика Тыва	Кызыл, Тоора-Хем, Мугур-Аксы, Эрзин	II	5.1	4.7

**Таблица 1.** Среднегодовые значения максимальных ( $V_{max}$ ) скоростей ветра по 8-срочным наблюдениям на исследуемых территориях с указанием района по климатическим картам, м/с (по данным ВНИИГМИ-МЦД)

**Таблица 2.** Значения максимальных скоростей ветра на исследуемых территориях для 95-го и 99-го процентилей в выборках распределений за период 2001–2020 гг., м/с

Процентиль	Ямало-Ненецкий автономный округ	Республика Башкортостан	Краснодарский край и Республика Адыгея	Забайкальский край	Республика Тыва
p <sub>95%</sub> (V)	15	12	14	7	11
p <sub>99%</sub> (V)	19	16	18	9	14

скоростей ветра по территориям и метеостанций, а также районов по климатическим картам ветрового давления приведено в табл. 1.

Детальные графики плотности распределения максимальных за 10-минутный интервал времени  $(V_{\rm max})$  (за три часа между сроками наблюдений) скоростей ветра в двух периодах 1981—2000 гг. и 2001—2020 гг. для рассматриваемых регионов приведены на рис. 2.

Результаты, представленные на рис. 2, показывают, что вклад крайних процентилей в распределение максимальных скоростей ветра является заметным. Смещение плотности распределения значений скоростей ветра в область более высоких значений с течением времени зафиксировано практически для всех исследуемых территорий. Кроме этого, согласно табл. 1, также наблюдается увеличение среднегодовых значений максимальных скоростей ветра за период 2001-2020 гг. относительно периода 1981-2000 гг. Однако с точки зрения оценки уязвимости объектов электросетевого комплекса сведений только о характере распределения максимальных или среднегодовых значений скоростей ветра недостаточно. Поэтому в целях проведения более детального анализа ретроспективных ветровых нагрузок и выявления наиболее значимых диапазонов скоростей ветра с точки зрения оценки надежности определены значения максимальной скорости ветра для 95-го и 99-го процентилей в выборках распределений за период 2001-2020 гг., которые приведены в

табл. 2. Рассматриваемые значения являются высоко значимыми при оценке аварийности ВЛЭП, так как именно скорости ветра, располагающиеся на "хвосте" распределения, представляют наибольшую опасность с точки зрения частоты технологических нарушений и потенциальных негативных последствий.

### ОЦЕНКА ЗАКОНОМЕРНОСТИ АВАРИЙНОСТИ ВОЗДУШНЫХ ЛИНИЙ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВЕТРОВЫХ НАГРУЗОК

В рамках определения связи между ветровой нагрузкой и возникновением аварий на воздушных линиях электропередачи, располагающихся на исследуемых территориях, рассчитаны значения вероятности отключений ВЛЭП с помощью алгоритма ранее разработанной модели [13]. В качестве исходных данных использованы сведения журналов технологических нарушений АО "Россети Тюмень", ООО "Башкирэнерго", ПАО "Россети Кубань", филиалов ПАО "Россети Сибирь" в Республике Тыва и Забайкальском крае за период 2014—2020 гг. и сведения ВНИИГМИ-МЦД о максимальных скоростях ветра, осредненных за 10-минутный интервал времени, в момент аварий за тот же период.

Значения вероятности возникновения технологических нарушений p(V) оценены как отношение числа фактических аварий ( $N_{\text{аварий}}$ ) к чис-



**Рис. 2.** Распределение максимальных (V<sub>max</sub>) (за три часа между сроками наблюдений) скоростей ветра по градациям в 1981–2000 гг. и 2001–2020 гг. для исследуемых территорий.

лу зафиксированных случаев максимальных скоростей ветра на метеостанциях соответствующих территорий в момент аварии на ВЛЭП ( $N_{V_{\text{max}}}$ ) по формуле:

$$p(V) = \frac{N_{\text{аварий}}}{N_{V_{\text{max}}}}.$$
 (1)

Аппроксимация ретроспективных значений вероятностей возникновения технологических нарушений осуществлена с помощью кумулятивной функции распределения Вейбулла по формуле

$$Q(V_{\max}) = F(V_{\max}Vk,\lambda) =$$
  
=  $\int_{0}^{V_{\max}} k \cdot \lambda^{-k} \cdot V^{k-1} \cdot e^{-\left(\frac{V}{\lambda}\right)^{k}} dV = 1 - e^{-\left(\frac{V_{\max}}{\lambda}\right)^{k}},$  (2)

где  $\lambda$  — коэффициент масштаба кривой вероятности технологического нарушения; k — коэффициент формы кривой вероятности технологического нарушения.

Рассматриваемая модель отражает закономерность, характеризующую увеличение вероятности возникновения технологического нарушения на ВЛЭП при воздействии различных максимальных скоростей ветра, осредненных за 10-минутный интервал времени. Основные значения коэффициентов масштаба  $\lambda$  и формы k для обозначенной закономерности по каждой из рассматриваемых территорий приведены в табл. 3.

Обратная задача, а именно анализ надежности воздушных линий электропередачи при воздействии на них ветровых нагрузок различной экспозиции, может быть выполнен с помощью стан-

Территория (энергосистема)	Коэффициент масштаба λ, м/с	Коэффициент формы <i>k</i>
Ямало-Ненецкий автономный округ (АО "Россети Тюмень")	5.8	24.4
Республика Башкортостан (ООО "Башкирэнерго")	4.8	18.4
Краснодарский край и Республика Адыгея (ПАО "Россети Кубань")	6.4	20.2
Забайкальский край (филиал ПАО "Россети Сибирь" в Забайкальском крае)	3.6	13.8
Республика Тыва (филиал ПАО "Россети Сибирь" в Республике Тыва)	5.8	13.6

**Таблица 3.** Значения коэффициентов масштаба λ и формы *k* для функции зависимости возникновения технологического нарушения на ВЛЭП от максимальной скорости ветра для исследуемых территорий

**Таблица 4.** Значения вероятности безотказной работы  $R(V_{\max})$  для максимальных скоростей ветра, соответствующих 95-му и 99-му процентилям распределения, и среднее значение *R* между сроками наблюдений на рассмотренных территориях (%)

Процентиль	Ямало-Ненецкий автономный округ	Республика Башкортостан	Краснодарский край и Республика Адыгея	Забайкальский край	Республика Тыва	
$R(V_{95\%})$	94	88	91	92	75	
$R(V_{99\%})$	79	60	62	81	31	
$R_{\rm cp}$	99	98	97	99	96	

Примечание. Расчет выполнен на основе данных для 2001-2020 гг.

дартной модели оценки вероятности безотказной работы  $R(V_{\text{max}})$ , характеризующей вероятность, что авария на ВЛЭП не возникнет при данном значении скорости ветра:

$$R(V_{\max}) = 1 - Q(V_{\max}) = e^{-\left(\frac{V_{\max}}{\lambda}\right)^k}.$$
 (3)

Графики модельных оценок вероятности безотказной работы  $R(V_{\text{max}})$  при различных значениях скорости ветра для каждого рассмотренного региона приведены на рис. 3. На графике также отмечены точки, соответствующие значениям максимальных скоростей ветра на исследуемых территориях для 95-го и 99-го процентилей в выборках распределений за период 2001–2020 гг. (из табл. 2). Для данных, которые охватывают практически весь диапазон изменения скорости ветра для каждой из территорий, оценены ретроспективные вероятности безотказной работы ВЛЭП. Результаты этих расчетов сведены в табл. 4.

Как видно из данных, представленных на рис. 3 и в табл. 4, для максимальных скоростей ветра, соответствующих 95-му процентилю распределения с учетом отличающихся территориальных особенностей ветровых нагрузок, значения вероятностей безотказной работы варьируются между 88 и 94% (исключение составляет лишь Республика Тыва с 75%), что можно назвать весьма высокой оценкой надежности. Для 99-го процентиля, как и следовало ожидать, значения вероятности безотказной работы существенно снижаются до 60-81%, а для Республики Тыва и вовсе достигают катастрофически низкого значения в 31%. Таким образом, даже при незначительном увеличении частоты встречаемости экстремальных скоростей ветра в рамках отдельных регионов, вероятность безотказной работы будет резко уменьшаться в соответствии с графиками рис. 3. Полученные значения чувствительности для вероятности безотказной работы в зависимости от скорости ветра лежат между двумя предельными случаями, рассмотренными в [9], находясь несколько ближе к верхней границе. Приращение максимальной скорости ветра обеспеченности более 95 и более 99% на 1 м/с для каждого региона снижает вероятность безотказной работы на 5 и 10%.

Средние значения безотказной работы  $R_{\rm cp}$  между сроками наблюдений зависят не только от вида самих функций вероятности безотказной работы  $R(V_{\rm max})$ , но и от плотности распределения максимальных скоростей ветра на рассматриваемых территориях. Для большинства из проанализированных региональных энергосистем средняя вероятность отказа между сроками наблюдений, которая определяется как  $(1 - R_{\rm cp})$ , лежит между 1 и 5%.

В условиях продолжающегося изменения климата и нестационарности, вносимой этим процессом в климатические условия, полученные



**Рис. 3.** График функций вероятности безотказной работы  $R(V_{\text{max}})$  для ВЛЭП исследуемого региона в зависимости от максимальных скоростей ветра за период 2014—2020 гг.

оценки аварийности могут меняться по мере развития потепления. При этом динамика экстремальных значений параметров плохо поддается моделированию, особенно для параметров, характеризующихся высокой природной изменчивостью, таких как скорость ветра. На сегодня известно, что для средней скорости ветра над континентами из-за потепления климата, как правило, следует ожидать некоторого снижения. Прогнозные оценки, выполненные для настоящей работы на основе данных глобальных климатических моделей последнего поколения СМІР6 [14], подтверждают наличие такой тенденции и для территории России.

При этом для отдельных регионов динамика будет противоположной из-за особенностей локальных условий. К таким регионам в первую очередь относится южный сектор российского побережья Тихого океана. Кроме того, в оценках на основе СМІРб по сравнению с оценками, выполненными на основе предыдущей фазы модельного проекта СМІР5, повысилась статистическая достоверность для увеличения средней скорости в локальной области на северо-западе Европейской территории. По-видимому, это объясняется усилением циклонических процессов над Балтийским морем, которые более корректно воспроизводятся моделями СМІР6.

Величина вероятных изменений средней скорости ветра для обеих областей с возрастанием скорости ветра невелика и лежит в пределах 0.25 м/с на горизонте ближайших десятилетий. На основе верхних значений мультимодельного ансамбля, соответствующих доверительной вероятности 90%, был выполнен консервативный расчет для изменения экстремальных значений скорости ветра и связанного с этим процессом изменения вероятности аварий электросетевого хозяйства (табл. 5) при реалистическом климатическом сценарии SSP2 4.5.

Представленные прогнозные оценки свидетельствуют, что, несмотря на казалось бы умеренное возрастание скорости ветра, ее влияние на динамику аварийности может оказаться заметным. Из-за высокой чувствительности вероятности аварий к изменению экстремальных значений скорости ветра увеличение средней скорости ветра в северо-западной области России на 0.07– 0.2 м/с, а в дальневосточной области на 0.15– 0.25 м/с способно привести к уменьшению средней вероятности безотказной работы электросетевого хозяйства рассмотренных территорий до 0.4–1 и

#### КЛИМЕНКО и др.

*	-		-	-				
	<i>R</i> <sub>cp</sub> , %	$(1-R_{\rm cp}),$	2035—2044 гг.			2065—2074 гг.		
			$\Delta V_{ m cp}$ , м/с	$\Delta V_{\rm max},$ M/C	$\Delta R_{\rm cp},\%$	$\Delta V_{ m cp}$ , м/с	$\Delta V_{\rm max},$ M/C	$\Delta R_{\rm cp},\%$
Северо-западная область	96	4	0.07	0.18*	0.4	0.2	0.52*	1
Дальневосточная область	94	6	0.15	0.29*	1	0.25	0.48*	3

**Таблица 5.** Результаты ансамблевых оценок для изменения среднегодовой скорости ветра [м/с] и связанного с этим процессом снижения вероятности безотказной работы электросетевого хозяйства

Примечание. В качестве базового периода выбран интервал 2016-2025 гг.

\*Оценено пропорционально по данным 2001–2020 гг.:  $\Delta V_{\text{max}} = \frac{\Delta V_{\text{cp}}}{V_{\text{cp}}} \cdot V_{\text{max}}$  при номинальных технических характеристиках

аварийности, определенных осреднением по всем рассмотренным регионам.

1—3 п.п. соответственно. Несмотря на невысокие абсолютные значения, эти оценки означают существенное повышение частоты аварий, которое в соответствии с нашими расчетами может составить до 25% на северо-западе и вплоть до 50% на Дальнем Востоке.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы считают своим долгом поблагодарить команду Copernicus Climate Data Store и рабочие группы эксперимента CMIP6 за предоставление доступа к данным климатического моделирования.

### ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-79-30013) в части проведения климатических расчетов и анализа работы энергосистем, а также Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-08-00320) в части разработки подхода к характеристике экстремальных величин.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. IEA (2021) World Energy Outlook 2021. Paris.
- 2. IEA (2020) Power Systems in Transition. Challenges and opportunities ahead for electricity security. Paris.
- 3. CIGRE (2014) WG B2.54 Technical brochure №598. Guidelines for the management of risks associated with severe climate conditions and climate change in relation to air lines.
- 4. *Carden L.C., Harrison G.P.* Adapting overhead lines to climate change: Are dynamic ratings the answer? // Energy Policy. 2013. V. 63. P. 197–206. https://doi.org/10.1016/j.enpol.2013.08.052
- 5. *Brockway A.M., Dunn L.N.* Weathering adaptation: Grid infractusture planning in a changing climate // Climate Risk Management. 2020. V. 30. 100256. https://doi.org/10.1016/j.crm.2020.100256
- Ward D.M. The effect of weather on grid systems and the reliability of electricity supply // Climatic Change. 2013. V. 121. P. 103–113. https://doi.org/10.1007/s10584-013-0916-z

- Han B., Ming Z., Zhao Y., Wen T., Xie M. Comprehensive risk assessment of transmission lines affected by multi-meteorological disasters based on fuzzy analytic hierarchy process // International Journal of Electrical Power and Energy Systems. 2021. V. 133 (1). 107190. https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2021.107190
- 8. *Kondrateva O., Myasnikova E., Loktionov O.* Analysis of the climatic factors influence on the overhead transmission lines reliability // Environmental and Climate Technologies. 2020. V. 24. № 3. P. 201–214. https://doi.org/10.2478/rtuect-2020-0097
- 9. Клименко В.В., Кондратьева О.Е., Терешин А.Г., Федотова Е.В., Локтионов О.А., Воронкова Е.М. Изменение ветрового режима на территории России и аварийность воздушных линий электропередачи // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2021. Т. 497. № 1. С. 57–64. https://doi.org/10.31857/S2686740021020048
- 10. *Lee S., Ham Y.* Probabilistic framework for assessing the vulnerability of power distribution infrastructures under extreme wind conditions // Sustainable Cities and Society. 2021. V. 65. 102587. https://doi.org/10.1016/j.scs.2020.102587
- Costa I.C., Venturini L.F., Rosa M.A. Wind severity scale model applies to overhead line reliability simulation // Electric Power Systems Research. 2019. V. 171. P. 240– 250.

https://doi.org/10.1016/j.epsr.2019.02.007

- 12. IPCC, 2021: Climate Change 2021: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Sixth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change.
- Loktionov O.A., Kondrateva O.E., Fedotova E.V., Makeev A.I., Myasnikova E.M. Analysis of dangerous wind loads influence on 110-220 kV power grid reliability in Yamalo-Nenets autonomous district of Russian Federation // 2020 International Youth Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE). 2020. P. 1–6. https://doi.org/10.1109/REEPE49198.2020.9059204
- Eyring V., Bony S., Meehl G.A., Senior C.A., Stevens B., Stouffer R.J., Taylor K.E. Overview of the Coupled Model Intercomparison Project Phase 6 (CMIP6) experimental design and organization // Geosci. Model Dev. 2016. V. 9. P. 1937–1958. https://doi.org/10.5194/gmd-9-1937-2016

### IMPACT OF CHANGING WIND LOADS ON THE RELIABILITY OF POWER TRANSMISSION LINES IN DIFFERENT REGIONS OF RUSSIA

## Corresponding Member of the RAS V. V. Klimenko<sup>*a,b*</sup>, O. E. Kondratieva<sup>*a,b*</sup>, O. A. Loktionov<sup>*a,b*</sup>, and E. V. Fedotova<sup>*a,b*</sup>

<sup>a</sup>National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russia <sup>b</sup>The Energy Research Institute of the Russian Academy of Science, Moscow, Russia

Analysis of the main causes of technological failures in the US, EU and Russian power grids was performed. It has been shown that wind loads are of key importance for grid failures across all the climatic impacts. Observations of Russian meteorological stations were used to calculate probabilistic characteristics of wind speed across different Russian regions. Regional power grid operators' data on technological failures were used to propose a probabilistic model considering power grid reliability as a wind speed function. Climate projections were employed to estimate likely changes of wind conditions across Russia in the next decades. It has been shown that the climate change can have a significant impact on power supply reliability in some regions of the country. In particular, the frequency of power grid failures could increase by up to 25% in northwestern part of European Russia and up to 50% in the Russian Far East.

Keywords: transmission lines, wind load, operational disturbances, outages, probabilistic model of failures

УДК 620.186

### МЕХАНИКА ИНТЕНСИВНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ПРОЦЕССАХ ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ ЗЕРЕН В СУПЕРСПЛАВАХ

© 2022 г. Ф. З. Утяшев<sup>1</sup>, Р. Ю. Сухоруков<sup>2,\*</sup>

Представлено академиком РАН Р.Ф. Ганиевым 07.12.2021 г. Поступило 07.12.2021 г. После доработки 07.12.2021 г. Принято к публикации 25.03.2022 г.

При изготовлении деталей для газотурбинных двигателей из суперсплавов на основе никеля и железа используют сверхпластическую деформацию ультрамелкозернистых полуфабрикатов. Технология получения таких полуфабрикатов, известная как гэторайзинг-процесс, осуществляется в безокислительной атмосфере. Деформация полуфабрикатов в условиях сверхпластичности позволяет получать высококачественные детали. В данном сообщении обоснована возможность применения более экономичного процесса — интенсивной пластической деформации суперсплавов методом кручения с одноосным сжатием или растяжением в изотермических условиях воздушной среды. Показано, что в этом случае существенно снижается критически важная нагрузка на инструмент и обеспечивается однопереходный процесс накопления деформации, необходимой для однородного измельчения зерен в материале крупногабаритных изделий из суперсплавов.

*Ключевые слова:* сверхпластичность, осадка с кручением, суперсплавы, зернограничное проскальзывание, комбинированная деформация, границы деформационного происхождения **DOI:** 10.31857/S2686740022030142

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При реализации методов интенсивной пластической деформации (ИПД) материал образцов из суперсплавов<sup>#</sup> подвергают сложному нагружению, при котором под воздействием ротационной моды значительно изменяется ориентация тензора деформации, и последняя становится немонотонной [1-5]. Структурообразование в этом случае определяется длиной и кривизной траектории деформации. Длина с точностью до постоянной определяет степень деформации, необходимой для образования множества границ деформационного происхождения (ГДП), а кривизна приволит к пересечению ГДП и к образованию сетки большеугловых границ мелких зерен. В последние годы к использованию такого метода ИПД, как кручение под давлением (КД), привлечено большое внимание. Известны работы, в которых

<sup>2</sup>Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия детально изучаются индуцированные такой деформацией необычные структурные и фазовые превращения [4—6], синтезируются новые материалы [7, 8], достигается высокий уровень механических и функциональных свойств [9—11]. В основном эти работы выполнены на небольших цилиндрических образцах (таблетках): диаметром 10—20 мм и с небольшой толщиной, ограниченной обычно несколькими миллиметрами (рис. 1).

Однако сведения о разработке и применении таких технологических процессов в отношении объемных материалов, например, дисков для газотурбинных двигателей, отсутствуют. Это связано с недостаточной изученностью механики таких процессов и сложностью их реализации.

В данной работе на основе анализа напряженнодеформированного состояния при КД показано, что в температурно-скоростном режиме сверхпластичности этот процесс можно реализовать при небольшом давлении и степени деформации, чем обычно при ИПД. Важно лишь обеспечить характерное для методов ИПД равномерное распределение в образце сдвиговой и ротационной моды деформации, чтобы образовывалось большое множество центров динамической рекристаллизации. Таковыми центрами в металлических материалах становятся ГДП, отличающиеся повышенной кривизной и кручением. Формирование таких границ, как известно [2], связано с повышением плотности геометрически

<sup>&</sup>lt;sup>#</sup> В России эти сплавы получили название жаропрочные сплавы.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Институт проблем сверхпластичности металлов Российской академии наук, Уфа, Россия

<sup>\*</sup>E-mail: labutps@yandex.ru



**Рис. 1.** Схема кручения диска под давлением: в открытых бойках (а); в закрытых бойках (б); *1*, *3* – бойки, *2* – диск.

необходимых дислокаций, что отмечается во многих работах [12–14], и приводит к развитию динамической рекристаллизации (ДР). Этот концептуальный подход применяют в настоящее время при получении ультрамелкозернистой (УМЗ) структуры в суперсплавах. Для этого производят их дробную квазиизотермическую осадку образцов с промежуточными рекристаллизационными отжигами [2]. Однако этот процесс отличается высокой трудоемкостью, низкой стойкостью инструмента и невысоким коэффициентом использования металла. Повысить эффективность процесса получения объемных УМЗ полуфабрикатов из суперсплавов позволяет не только кручение под давлением, но и кручение с растяжением. В том и другом случае этот процесс можно реализовать за одну операцию.

### ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ МАТЕРИАЛА ПРИ КОМБИНИРОВАННОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Пусть цилиндрический образец с исходным радиусом  $r_0$  и длиной  $L_0$  равномерно растягивается (или осаживается) при постоянной температуре со скоростью *v* и одновременно подвергается кручению с угловой скоростью. Компоненты вектора скорости *и* материальной точки в цилиндрической системе координат (*r*,  $\varphi$ , *z*), соответствующие граничным условиям и несжимаемости, имеют вид

$$u_r = -\frac{rv}{2L}, \quad \varphi = \frac{\omega zr}{L}, \quad u_z = \frac{zv}{L}.$$
 (1)

Тензор скорости деформации в соответствии с известными формулами запишем в виде

$$\{\xi_{ij}\} = \begin{pmatrix} -\frac{v}{2L} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{v}{2L} & \frac{r\omega}{2L}\\ 0 & \frac{r\omega}{2L} & \frac{v}{L} \end{pmatrix}.$$
 (2)

Интенсивность скорости деформации  $\xi_e$  определится выражением

$$\xi_e = \sqrt{\frac{2}{3}\xi_{ij}\xi_{ij}} = \frac{1}{L} = \sqrt{v^2 + \frac{r^2\omega^2}{3}}.$$
 (3)

Интегрирование  $\xi_e$  по времени деформации, как показано в [2, 15], приводит к громоздкой зависимости от осевой и ротационной компонент деформации. Для анализа деформированного состояния материала и определения степени, необходимой для измельчения зерен, целесообразно построить траекторию деформирования. Для этого введем плоскую систему координат: с абсциссой  $e_1$ , показывающую степень осевой деформации, с ординатой  $e_2$  – показывающей степень ротационной деформации. Принимая во внимание, что линейная скорость движения активного инструмента v = dL/dt, а вращения  $\omega = d\varphi/dt$ , из формулы (3) получим

$$(de)^{2} = (de_{1})^{2} + (de_{2})^{2}$$

где

$$de_1 = d(L/L_0), \quad de_2 = rd\varphi/L\sqrt{3}.$$

Введем далее вектор деформации  $e = e_1 \mathbf{i} + e_2 \mathbf{j}$ , где

$$e_1 = \ln(L/L_0), \quad e_2 = \int (r/L\sqrt{3})d\varphi$$

Кривая перемещения конца вектора *е* в плоскости ( $e_1$ ,  $e_2$ ) определит траекторию деформации. На рис. 2 приведены варианты траекторий, полученные при различных соотношениях  $e_2/e_1 = k$ . Видно, что при  $k \ge 2$  даже после небольшой осадки  $e_1 \ge 0.2-0.25$  ротационная составляющая достигает значения  $e_2 \ge 0.7-0.8$ , что достаточного для измельчения зерен в результате ДР [2].

### НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ОСЕВАЯ СИЛА ПРИ КОМБИНИРОВАННОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Интенсивность напряжений можно определить, используя допустимую для умеренных деформаций гипотезу о пропорциональности девиаторов скоростей деформации и напряжений *S*<sub>ij</sub>. В соответствие с этой гипотезой девиатор напряжений имеет вид, аналогичный девиатору скоростей [2, 15]:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} S_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & S_{\phi\phi} & S_{\phi z} \\ 0 & S_{z\phi} & S_{zz} \end{pmatrix}.$$
 (4)

Между компонентами напряжений имеют место такие же соотношения, как и между компонентами девиатора скоростей, т.е.

$$S_{rr} = S_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2}S_{zz};$$

а так как

$$\frac{S_{\varphi z}}{S_{zz}} = \frac{\xi_{\varphi z}}{\xi_{zz}} = \left(\frac{r\omega}{2l}\right) / \left(\frac{v}{l}\right) = \frac{r\omega}{2v},$$

то

$$S_{\varphi z} = \left(\frac{r\omega}{2v}\right) S_{zz}.$$

Отсюда интенсивность напряжений, представляющая собой модуль вектора скоростей, описывающий годограф траектории деформации, определяется выражением

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}} = \frac{3}{2} S_{zz} \sqrt{1 + \frac{r^2 \omega^2}{3v^2}}.$$
 (5)

Уравнения движения сплошной среды в цилиндрической системе координат для медленной изотермической деформации сводится к уравнениям равновесия:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dz} = 0 \Rightarrow \sigma_{rr} = \sigma_{rr}(z),$$

$$\frac{d\sigma_{\varphi z}}{dz} = 0 \Rightarrow \sigma_{\varphi z}(r),$$

$$\frac{d\sigma_{zz}}{dz} = 0 \Rightarrow \sigma_{zz} = \sigma_{zz}(r).$$
(6)

Компоненты тензора напряжений найдем, используя смешанные граничные условия, в которых заданы осевая и угловая скорости движения друг относительно друга торцов деформируемого цилиндра. Кроме того, принято силовое условие:

$$\sigma_{rr}|_{r=R}=-p_0,$$

где  $p_0$  — приложенное извне гидростатическое давление.

Отсюда получим

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = -p_0; \quad \sigma_{zz} = \frac{3}{2}S_{zz} - p_0.$$

И, с учетом (6):

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{1 + r^2 \omega^2 / 3v^2}} - p_0.$$
(7)

Тогда формула для величины осевого усилия:



**Рис. 2.** Траектории деформации при *k* = 1 (*1*), *k* = 2 (*2*), *k* = 3 (*3*).

$$P_{z} = \iint_{s} (\sigma_{zz} + p_{0}) dS = \iint_{s} \sigma_{e} / \sqrt{1 + \frac{r^{2} \omega^{2}}{3v^{2}}} dS, \qquad (8)$$

где область интегрирования по площади *S* – торцевой поверхности цилиндра.

Сопоставим осевую силу, необходимую для деформации образца, в случае ее кручения по отношению к силе деформации в отсутствие кручения. Для этого необходимо знать реологическое определяющее соотношение (ОС), связывающее напряжение с деформацией. Установить ОС для суперсплавов при горячей деформации из-за изменения микроструктуры – трудоемкая задача. Для сравнительной оценки сил можно использовать упрощенные реологические соотношения. Первое – для нелинейно-вязкой среды, второе – для вязкопластичной среды, которые достаточно адекватно позволяют описывать деформационное поведение крупнозернистого материала на начальной стадии горячей деформации и мелкозернистого материала на завершающей стадии [2, 15]. Первое ОС имеет вид

$$\sigma = K\xi^m,$$

где  $K = \text{const}, \xi - \text{скорость деформации, } m = d(\log\sigma)/d(\log\xi) - коэффициент скоростной чувствительности, характеризующий вязкость материала. Второе ОС:$ 

$$\sigma = \sigma_0 + A\xi$$

где  $A = 3\mu$ ,  $\mu$  — вязкость материала. Подставляя выражения этих ОС в формулу (8), соответственно, получим относительные значения осевой силы  $\overline{P} = P_k/P_0$  для первого ОС (9), и аналогично для второго ОС (10). В числителе формулы (9), например, для нелинейно-вязкой среды указана осевая сила с учетом кручения, а в знаменателе — без учета кручения:

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ том 504 2022

68



**Рис. 3.** Относительная осевая сила для нелинейно-вязкого материала в зависимости от параметров  $e = v_0 t/L_0$  при  $\theta = 1$  (а) и  $\theta = r_0 \sigma_0/v_0$  при e = 0 (б). Вычислено при разных значениях параметра скоростной чувствительности *m* (указано цифрами у кривых). Для вязко-пластичной среды: (в) – зависимость относительной осевой силы от параметра  $e = v_0 t/L_0$  при  $\theta = 1$  и различных значениях  $k = Av/\sigma_0 L_0$  (указаны цифрами у кривых); пунктиром показана кривая, вычисленная при  $\theta = 10$  и k = 1; (г) – зависимости относительной осевой силы от величины параметра  $\theta = r_0 \sigma_0/v_0$ ; при e = 0 (сплошные линии) и e = -0.5 (пунктирные линии) и различных значениях  $k = Av/\sigma_0 L_0$  (указаны цифрами у кривых).

$$\frac{P_k}{P_0} = \frac{3(1+e)}{\theta^2} \frac{2}{m+1} \left\{ \left[ 1 + \frac{\theta^2}{3(1+e)} \right]^{\frac{m+1}{2}} - 1 \right\}, \qquad (9)$$

$$P_0 = K \left[ \frac{v}{L_0 (1+e)} \right]^m \frac{\pi r^2}{1+e}.$$
 (10)

В графическом виде эти зависимости  $\overline{P} = P_k/P_0$ для указанных сред от значений  $e = v_0 t/L_0$  и  $q = r_0 s_0/v_0$ , т.е. относительных параметров осевой и ротационной деформации представлены на рис. 3. Не останавливаясь на анализе детальных отличий в графиках, обусловленных вариациями коэффициентов, влияющих на ОС, отметим следующее. В целом, полученные результаты показывают эффект снижения осевого усилия деформации образца, составляющий 1.2–2.5 раза в случае пластического кручения образца в сравнении с деформацией без кручения.

В работе показаны общие закономерности, характерные как для кручения цилиндрического образца с растяжением, так и со сжатием. Выполненные расчеты показали значительное снижение осевого усилия при осадке с кручением в сравнении с осадкой без кручения, что согласуется с экспериментальными данными, опубликованными профессорами О.А. Ганаго и О.М. Смирновым [4].

### РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Экспериментальное подтверждение основных положений сообщения получено на разработанных и изготовленных ИМАШ РАН и ИПСМ РАН



**Рис. 4.** Образец из жаропрочного сплава ВТ9, подвергнутый растяжению с кручением на стане для раскатки дисков и его макротемплет с однородной ультрамелкозернистой структурой.

станах для формообразования деталей из суперсплавов (дисков, полых валов) в условиях сверхпластичности в рамках конкурсных проектов Минпромторга России и Минобрначки России в 2011-2021 гг. [5, 13]. Экспериментальную проверку процесса комбинированной деформации выполнили на примере жаропрочного сплава ВТ9 (рис. 4). Из горячекованного сплава, имевшего крупнозернистую пластинчатую структуру, изготовили образец диаметром 100 мм, длиной 700 мм по форме, подобной круглым образцам, используемым в тестах на растяжение. Рабочая часть у такого образца составляла 300 мм. Образец установили в печь экспериментального раскатного стана, позволяющего производить комбинированную деформацию, нагрели до 950°С и выполнили закручивание на 2160° (6 оборотов) со скоростью 0.6 об/мин и одновременно растяжение на 15 мм. После деформации образец охладили вместе с печью. Металлографические исследования показали, что в результате комбинированной деформации в сплаве формируется однородная глобулярная структура с размером зерен менее 10 мкм [2].

Наряду с однородным измельчением зерен не менее важным эффектом комбинированной деформации стало снижение в два и более раз осевого усилия в случае с кручением образца по отношению к случаю деформации без кручения.

#### ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Обсудим причины снижения осевого усилия сначала на примере растяжения с кручением и без кручения, а затем на примере осадки с кручением и без него.

Носителями деформации сдвига в кристаллических материалах являются решеточные и зернограничные дислокации. Для генерации решеточных дислокаций необходимо напряжение выше критического, определяемого соотношением

$$\tau_c = \frac{Gb}{\Delta},$$

где G – модуль упругости, b – вектор Бюргерса,  $\Delta$  – длина источника дислокации, ограниченная размером зерна. Кроме того, необходимо напряжение больше напряжения Пайерлса-Наббора, сопротивляющееся скольжению лислокации в кристаллической решетке т<sub>п-N</sub> (напряжение "внутреннего трения"). Общее напряжение, необходимое для деформации, определится суммой этих напряжений. В случае кручения с растяжением момент кручения, равный  $M = \tau_c \cdot V$ , активизирует во всем объеме образца И множество источников дислокаций. В такой ситуации роль осевой силы заключается лишь в создании напряжения сдвига, ориентирующего кристаллографическое скольжение дислокаций в направлении, обеспечивающем удлинение образца. В случае отсутствия кручения роль осевой силы станет ответственной как за производство дислокаций, так и за их перемещение в направлении удлинение образца, т.е. большая по величине в сравнении со случаем растяжения с кручением. При осадке с кручением, а также при осадке без кручения кроме внутреннего трения на силу деформации влияет внешнее трение – трение на контактной поверхности образца с инструментом. Запишем условие трения на контактной поверхности как векторную сумму напряжений в радиальном  $\tau_r$  и окружном (тангенциальном)  $\mathbf{\tau}_t$  направлении, т.е.

### $\mathbf{\tau} = \mathbf{\tau}_r + \mathbf{\tau}_t.$

Для пластического кручения образца необходимо, чтобы трение на контактной поверхности превысило напряжение течения материала во всем его объеме. При этом важно, чтобы это условие было обеспечено окружной активной составляющей трения, т.е. обеспечивало момент кручения образца, равный  $M = \tau_t \cdot F_t > M_t$ , где  $F_t$  – площадь элементов поверхности инструмента, ориентированная нормально к направлению  $\tau_t$ ;  $M_t$  – момент пластического кручения материала образца  $M_t = \tau V$ , где  $\tau$  – напряжение течения материала, V – объем материала. Для выполнения этого условия целесообразно увеличить площадь  $F_t$ . радиальном направлении на поверхности ее контакта с инструментом. В этой связи необходимо ограничить степень осадки образца значением 0.25–0.30, достаточным для образования ГДП, и пассировать поверхность инструмента и торцов образца для предотвращения адгезионного схватывания.

Таким образом, механизм формирования УМЗ-структуры в никелевых суперсплавах при деформации в режиме СПД связан с возникновением центров рекристаллизации (участков ГДП), которые приводят к образованию множества зародышей рекристаллизации и способствуют активизации ротационной компоненты деформации [13–15]. В результате прохождения рекристаллизации и измельчения зерен изменяется механизм сдвига: он становится зернограничным, требующим меньшего напряжения, чем внутризеренный кристаллографический сдвиг.

### выводы

Определено напряженное и деформированное состояние материала при комбинированной пластической деформации образцов кручением со сжатием или с растяжением. Установлен механизм значительного снижения радиальной составляющей силы и накопления необходимой степени деформации для формирования УМЗ-структуры в образцах из суперсплавов. В практическом плане использование процесса кручения под давлением в режиме сверхпластичности позволит существенно упростить технологию, оборудование и инструмент лля изготовления ультрамелкозернистых полуфабрикатов из суперсплавов. В результате будет снижена сила деформации, развиваемая гидропрессом, что повысит стойкость штампового инструмента, существенно уменьшатся размеры оборудования и инструмента, а также сократится количество операций (до одной) для получения УМЗ-полуфабрикатов из суперсплавов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Athey R.L., Moore J.B.* Progress Report on the Gatorizing<sup>™</sup> Forging Process / National Aerospace Engineering and Manufacturing Meeting. 17–20 Nov. 1975. Los Angeles, 1975. P. 1–11.
- Kaibyshev O.A., Utyashev F.Z. Superplasticity: Microstructural Refinement and Superplastic Roll Forming. Futurepast Arlington, Virginia USA, ISTC Science and Technology Series. V. 3. 2005.
- 3. *Tan L., Li Y., Liu F., et al.* Superplastic behavior of a powder metallurgy superalloy during isothermal compression // Journal of Materials Science & Technology, 2019. V. 35. № 11. P. 2591–2599. https://doi.org/10.1016/j.jmst.2019.05.025
- Смирнов О.М., Ершов А.Н., Кропотов В.А. и др. Влияние комбинированного нагружения на параметры штамповки плоских дисков в состоянии сверх-

пластичности // Кузнечно-штамповое производство. 1997. № 1. С. 7–9.

- Nagimov M.I., Mukhtarov S.K., Utyashev F.Z., et al. Constructive-technological features of a rotary drawing of geometrically complex hollow shafts for gas turbine engines // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2017. V. 46. № 6. P. 596–602.
- 6. *Pandey K.K., Levitas VI.* In situ quantitative study of plastic strain-induced phase transformations under high pressure: Example for ultra-pure Zr // Acta Materialia. 2020. V. 196. № 11. P. 338–346. https://doi.org/10.1016/j.actamat.2020.06.015
- Asghari-Rad P., Sathiyamoorthi P., Nguyen N.T.-C., et al. Fine-tuning of mechanical properties in V<sub>10</sub>Cr<sub>15</sub>Mn<sub>5</sub>Fe<sub>35</sub>Co<sub>10</sub>Ni<sub>25</sub> high-entropy alloy through high-pressure torsion and annealing // Materials Science and Engineering A. 2020. V. 771. P. 138604. https://doi.org/10.1016/j.msea.2019.138604
- Shuitcev A., Gunderov D.V., Sun B., et al. Nanostructured Ti<sub>29.7</sub>Ni<sub>50.3</sub>Hf<sub>20</sub> high temperature shape memory alloy processed by high-pressure torsion // J. Materials Science and Technology. 2020. V. 52. № 7–8. P. 218–225.

https://doi.org/10.1016/j.jmst.2020.01.065

9. Korznikova G., Kabirov R., Nazarov K., et al. Influence of constrained high-pressure torsion on microstructure and mechanical properties of an aluminum-based metal matrix composite // Journal of the minerals metals & materials society (JOM). 2020. V. 72. № 8. P. 2898– 2911.

https://doi.org/10.1007/s11837-020-04152-1

- 10. Kawasaki M., Han J.K., Jung S.H., et al. Mechanical bonding of aluminum hybrid alloy systems through high-pressure torsion // Advanced engineering materials. 2020. V. 22. № 1. P. 1900483. https://doi.org/10.1002/adem.201900483
- Horita Z., Tang Y., Masuda T., et al. Severe plastic deformation under high pressure: Upsizing sample dimensions // Materials transactions. 2020. V. 61. Iss. 7. P. 1177–1190. https://doi.org/10.2320/matertrans.MT-M2020074
- Lv Sh., Jia Ch., He X., et al. Superplastic Deformation and Dynamic Recrystallization of a Novel Disc Superalloy GH4151 // Materials. 2019. V. 12. Iss. 22. P. 3667. https://doi.org/10.3390/ma12223667
- Афонин В.Л., Гаврилина Л.В., Ибрагимов А.Р. и др. Исследования и разработка инновационных технологических процессов и интеллектуальных систем управления для изготовления деталей газотурбинных двигателей (ГТД) / Под ред. Р. Ю. Сухорукова. Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН. 2019.
- Hughes D.A., Hansen N. Microstructure and strength of nickel at large strains // Acta Materialia. 2000. V. 48. № 11. P. 2985–3004. https://doi.org/10.1016/S1359-6454(00)00082-3
- 15. *Zhilyaev A.P., Pshenichnyuk A.I., Utyashev F.Z., et al.* Superplasticity and Grain Boundaries in Ultrafine-Grained Materials 2nd ed. Duxford (UK): Woodhead Publishing, 2020.

### MECHANICS OF INTENSE PLASTIC DEFORMATION IN GRAIN GRINDING PROCESSES IN SUPERALLOYS

### F. Z. Utyashev<sup>a</sup> and R. Y. Sukhorukov<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Institute for Metals Superplasticity Problems of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia <sup>b</sup>Institute of Machines Science named after A.A. Blagonravov of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia Presented by Academician of the RAS R.F. Ganiev

In the manufacture of parts for gas turbine engines from superalloys based on nickel and iron, superplastic deformation of ultrafine-grained semi-finished products is used. The technology for obtaining such semi-finished products, known as the getraising process, is carried out in a non-oxidizing atmosphere. The deformation of such semi-finished products under conditions of superplasticity makes it possible to obtain high-quality parts. This article substantiates the possibility of using a more economical process – intensive plastic deformation of superalloys by the method of torsion with uniaxial compression or tension in isothermal air conditions. It is shown that in this case the critical load on the tool is significantly reduced and a one-pass process of deformation accumulation is provided, which is necessary for uniform grinding of grains in the material of large-sized superalloy products.

*Keywords:* superplasticity, torsional settlement, superalloys, grain boundary slip, combined deformation, boundaries of deformation origin