



А ВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

3

МАРТ

Москва

2020

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Васильев С.Н.

Заместители главного редактора:

Кулешов А.П., Поляк Б.Т., Рубинович Е.Я.

Ответственный секретарь:

Хлебников М.В.

Редакционный совет:

Куржанский А.Б., Мартынюк А.А. (Украина), Микрин Е.А., Пархоменко П.П.,
Пешехонов В.Г., Попков Ю.С., Рутковский В.Ю., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Васильев В.И., Вишневский В.М.,
Воронцов К.В., Галяев А.А., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В.,
Каравай М.Ф., Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М.,
Крищенко А.П., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,
Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М., Михальский А.И.,
Назин А.В., Немировский А.С. (США), Новиков Д.А., Олейников А.Я.,
Пакшин П.В., Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В.,
Соболевский А.Н., Степанов О.А., Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л.,
Хрусталев М.М., Цыбаков А.Б. (Франция), Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: (495) 334-87-70

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ООО «ИКЦ «АКАДЕМКНИГА»

Тематический выпуск

© 2020 г. В.М. АБРАМОВ, канд. физ.-мат. наук (vabramov126@gmail.com)
(Университет им. Монаша, Мельбурн, Австралия),
Б.М. МИЛЛЕР, д-р. физ.-мат. наук (bmiller@iitp.ru)
(Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва;
Университет им. Монаша, Мельбурн, Австралия),
Е.Я. РУБИНОВИЧ, д-р. техн. наук (rubinvch@ipu.rssi.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
П.Ю. ЧИГАНСКИЙ, канд. техн. наук (pchiga@mscc.huji.ac.il)
(Еврейский университет в Иерусалиме, Израиль)

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ СТОХАСТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ И ФИЛЬТРАЦИИ В РАБОТАХ Р.Ш. ЛИПЦЕРА¹



2 января 2019 г. от нас ушел дорогой друг и коллега Роберт Шевич Липцер (1936–2019). Долгие годы он был членом редакционной коллегии журнала “Автоматика и телемеханика”, и во многом благодаря его усилиям журнал стал одним из ведущих в России в области теории и практики управления. В настоящий памятный выпуск включены публикации его учеников и коллег, посвященные основным направлениям работы Р.Ш. Липцера в области стохастического управления. Данная статья

¹ Данный памятный сборник включает работы коллег и учеников Р.Ш. Липцера, охватывающие основные направления его деятельности в области стохастического анализа и его приложений в различных областях статистики, управления, теории массового обслуживания и финансовой математики. Публикация работ сборника будет продолжена в № 4, 2020.

является вводной, и ее цель показать основные этапы творческой биографии Р.Ш. Липцера, продемонстрировать его вклад в развитие теории стохастического управления и статистики случайных процессов и показать его влияние на развитие теории стохастического управления в России и за рубежом.

Ключевые слова: случайные процессы, фильтрация, стохастическое управление.

DOI: 10.31857/S0005231020030010

1. Основные этапы жизни и творчества

Роберт Шевичевич Липцер родился 20 марта 1936 г. на Украине в городе Кировограде. С 1953 по 1959 гг. он учился в Московском авиационном институте, где получил квалификацию инженера-электромеханика по специальности “Авиационные прицелы”. После окончания института, до 1962 г. он работал на заводе Министерства авиационной промышленности в городе Калининграде Московской области (ныне город Королев). Однако любовь к математике привела его в 1961 г. на вечернее отделение мехмата МГУ, где его научным руководителем, а позднее его коллегой и соавтором стал Альберт Николаевич Ширяев, плодотворное сотрудничество с которым продолжалось затем долгие годы. Следующим этапом стал переход в 1962 г. на работу в Институт проблем управления РАН, называвшийся в те годы Институтотом автоматики и телемеханики, где он прошел все ступени от старшего инженера до начальника сектора. В 1990 г. Р.Ш. Липцер был приглашен в Институт проблем передачи информации РАН на должность заведующего лабораторией стохастических систем, где проработал до 1993 г., и затем переехал с семьей в Израиль. Там он получил место профессора факультета систем управления (electrical engineering) Тель-Авивского университета, где и состоял до своей кончины 2 января 2019 г.

2. Основные направления исследований

На своей странице университетского сайта в середине 90-х гг. Р.Ш. Липцер перечисляет основные направления деятельности и текущие проекты. Следует отметить, что они включают многие современные направления стохастического анализа. С тех пор область его интересов только расширялась.

Основные направления исследований:

- Аппроксимация в задачах фильтрации.
- Большие отклонения.
- Диффузионная аппроксимация в системах массового обслуживания.
- Аппроксимация в задачах стохастического управления.
- Теория мартигалов.
- Умеренные отклонения в задачах диффузионной аппроксимации.
- Робастная диффузионная аппроксимация в задачах нелинейной фильтрации.
- Умеренные отклонения для случайно возбуждаемых динамических систем.

- Нелинейная фильтрация с “загрязнением”.
- Асимптотическая оптимальность для задач стохастического управления с использованием диффузионной аппроксимации.
- Принцип усреднения Боголюбова для семимартингалов.
- Умеренные отклонения для семимартингалов.
- Модель Бенеша с зависимостью от состояния с быстрой загрузкой и скоростью отклика.

За время своей работы Р.Ш. Липцер опубликовал 10 монографий и более 100 статей в самых престижных журналах по теории вероятностей и случайным процессам. Далее остановимся на наиболее значимых результатах Р.Ш. Липцера в этой области, поскольку описать его вклад во все разделы теории вероятностей и случайных процессов в рамках короткой заметки не представляется возможным.

Отметим, что данный выпуск продолжает традицию памятных изданий, посвященных деятельности ученых, оказавших существенное влияние на развитие математики и ее приложений. Сборник, посвященный 60-летию Р.Ш. Липцера, был издан в 1997 г. [1].

2.1. Теория условно-гауссовских процессов

Работы по фильтрации условно-гауссовских процессов значительно расширили теорию оценивания случайных процессов, позволив распространить принципы калмановской фильтрации на задачи со случайными матричными коэффициентами, зависящими от наблюдений. Кроме того, они обогатили теорию нелинейной фильтрации диффузионных процессов [2–4], позволив не только установить теоремы разделения в задачах управления с неполной информацией, но и открыть новые подходы к решению задач управления наблюдениями, в частности совместного управления наблюдаемым и ненаблюдаемым процессами [5].

В 1968 г. Р.Ш. Липцер защитил кандидатскую диссертацию на факультете радиотехники и кибернетики Московского физико-технического института, основу которой как раз и составили его результаты по фильтрации условно-гауссовских диффузионных процессов, а в 1974 г. опубликовал совместно с А.Н. Ширяевым монографию [6]. Эта книга и ее перевод стали настольными для российских и зарубежных специалистов в области статистики случайных процессов и теории стохастического управления.

2.2. Развитие теории мартингалов

Работы в области фильтрации стали базой для перехода к глубокому изучению теории мартингалов, что позволило перенести идеи калмановской фильтрации на более широкий класс дискретно-непрерывных случайных процессов [7]. С середины 70-х гг. работы Р.Ш. Липцера посвящены детальному исследованию процессов этого класса. Были доказаны теоремы, описывающие, в частности, сходимости и свойства предельных процессов [8].

Ряд работ по прикладной теории вероятностей привели к получению ключевых результатов в области статистики случайных процессов. В серии работ,

выполненных совместно с Ю.М. Кабановым и А.Н. Ширяевым, были получены фундаментальные результаты по абсолютной непрерывности и сингулярности вероятностных мер, выведены эффективные формулы для вычисления плотностей Радона–Никодима [9, 10], доказаны теоремы по представлению целочисленных мер и локальных мартингалов [11] с помощью случайных мер с детерминированными компенсаторами, и найдены условия контигуальности и полной асимптотической разделимости последовательностей вероятностных мер [12]. Эти результаты вместе с центральной предельной теоремой для семимартингалов [13, 14] вошли в монографию [15], которая совместно с упомянутой книгой [6] “образует наивысшее достижение в развитии парадигмы современного стохастического анализа и является стандартом для ссылок в данной области”, как отмечалось в [1].

Естественным развитием работ по теории мартингалов была теория больших и “умеренных” отклонений для семимартингалов. В этой области, которая получила свое развитие во многом благодаря работам Р.Ш. Липщера, была получена целая серия замечательных и неожиданных результатов. Отметим, что здесь он работал совместно с коллегами из России, Израиля и Австралии [16–19].

2.3. Приложения теории мартингалов в задачах статистики и управления

2.3.1. Методы диффузионной аппроксимации

В цикле работ, в которых использовались методы диффузионной аппроксимации, Р.Ш. Липшер с коллегами показал, как теория мартингалов может эффективно использоваться в различных прикладных задачах. Общая теория сходимости семимартингалов к процессам диффузионного типа была заложена еще в первых работах, посвященных данной тематике [20], в дальнейшем эти результаты были с успехом применены к различным типам непрерывных [21] и скачкообразных процессов [22]. Методы диффузионной аппроксимации были применены и к задачам анализа вычислительных процессов и сетей связи вычислительных машин [23], к методам передачи данных по каналам связи и системам массового обслуживания [24], к анализу решения задач оптимального стохастического управления [26], к случайным процессам с отражением [25] и к задачам разорения [27]. Эти работы демонстрируют блестящие способности Р.Ш. Липщера в использовании тонких математических подходов при решении прикладных проблем.

2.3.2. Приближенные методы в вырожденных задачах управления и фильтрации

Со времени появления фильтра Калмана в непрерывном времени было известно, что условие невырожденности матрицы шумов в наблюдениях необходимо для написания уравнений фильтра в замкнутом виде. Однако в дискретном времени ситуация оказывается проще: все решается заменой обратной матрицы шумов на псевдообратную. Как впервые показал Р.Ш. Липшер, аналогичное свойство имеет место и в непрерывном времени, но лишь

при выполнении специального условия согласованности [28]. В то же время аналогия между задачей фильтрации и задачей решения системы линейных уравнений методом наименьших квадратов позволила построить как эффективные алгоритмы псевдообращения матриц [30], так и алгоритмы решения плохо обусловленных систем линейных уравнений [29]. Интересное применение этих методов оказалось возможным и в задачах передачи данных по каналам с бесшумной обратной связью [31].

2.4. Работа в Тель-Авивском университете

2.4.1. Задачи теории массового обслуживания

В начале 1990-х гг. Роберт Липцер получил приглашение от Якова Когана из Хайфского Техниона для работы над проектом по вычислительным сетям массового обслуживания. Работа над проектом успешно завершилась публикациями [32, 33], которые основаны на использовании стохастического исчисления: теории мартингалов и стохастических дифференциальных уравнений. Среди важных технических элементов здесь следует отметить применение принципа отражения Скорохода и стохастических уравнений для описания длин очередей, для которых впоследствии, собственно, и использовались мартингаловые методы. Эти уравнения, являющиеся стохастическими аналогами уравнений Колмогорова–Чепмена, применялись в [32] впервые. Их важность заключается в том, что они могут использоваться (и в дальнейшем использовались) для случайных процессов в случайных средах – новом современном направлении, пронизывающем все области теории случайных процессов. В связи с этими результатами Р.Ш. Липцер в дальнейшем имел неоднократные приглашения в Bell Laboratory для работы со специалистами в области теории сетей обслуживания.

2.4.2. Оптимальное управление и фильтрация

Узнав, что Роберт Липцер находится в Израиле, им заинтересовались в Тель-Авивском университете. В результате переговоров и необходимых процедур Роберт получил позицию профессора университета на инженерном факультете в департаменте инженерных систем. В Тель-Авивском университете Роберт работал как со специалистами из инженерного факультета, где он непосредственно работал, так и со специалистами из математического департамента. Он также сотрудничал с учеными из Техниона. Среди его соавторов были З. Шус, В.З. Бобровский, О. Зейтуни и др. В свой израильский период Роберт продолжал работать преимущественно в двух основных тематиках: теория оптимального управления и фильтрации и вероятности больших отклонений стохастических процессов.

2.4.3. Задачи оценивания детерминированного гладкого сигнала

В ряде публикаций [35–39] Робертом и его коллегами изложены результаты о задаче оценки детерминированного гладкого сигнала в малом белом шуме. Это классическая задача непараметрической статистики, для которой известна точная асимптотика убывания оптимальной минимаксной ошибки.

Наилучшая скорость убывания достигается различными оценками, включая ядерные со специальным образом подобранными параметрами ядра. Основное новшество этих работ состояло в том, что оптимальная скорость оказалась достижима односторонними ядрами, которые могут реализовываться линейной динамической системой, действующей на входящий поток наблюдений последовательно по мере их поступления. Такое свойство имеет большое практическое преимущество, например в системах слежения с ограниченными вычислительными ресурсами за подвижными целями.

2.4.4. Устойчивость уравнений фильтрации

В другой серии публикаций [40–42] изучалась задача устойчивости по начальному условию для уравнений оптимальной нелинейной фильтрации. Оптимальный фильтр в общем случае представляет собой бесконечномерную нелинейную стохастическую динамическую систему на пространстве вероятностных мер. Ее устойчивость по различным параметрам, включая начальное распределение сигнала, интересна не только с чисто математической точки зрения, но и является важным фактором при построении практических систем, таких как многочастичные фильтры. В [40–42] был разработан подход, опирающийся на вероятностные свойства условных математических ожиданий, в то время как в предыдущих публикациях по данной тематике в основном использовался аппарат функционального анализа. Новый взгляд на эту задачу позволил лучше понять механизмы устойчивости уравнений фильтрации. В частности, оказалось, что вопреки устоявшимся представлениям и некоторым предыдущим ошибочным результатам, устойчивости самого сигнала может быть недостаточно для устойчивости фильтра. С другой стороны, было доказано, что информативность наблюдений, в некотором смысле, влечет за собой устойчивость без каких-либо дополнительных предположений.

2.4.5. Принцип больших уклонений

В этот же период Роберт Липцер продолжал изучение вероятностей больших уклонений в функциональных пространствах. Плодами его исследований, иногда совместных с рядом коллег, стало множество результатов, описание которых, к сожалению, не представляется возможным в рамках краткого биографического очерка. Упомянем лишь статью [43], в которой изучается поведение системы стохастических дифференциальных уравнений с быстрой и медленной компонентами. В [43] получен совместный Принцип больших уклонений (ПБУ) для траекторий и оккупационной меры медленной и быстрой компонент соответственно. Это один из первых результатов в изучении ПБУ в динамических системах с различными временными шкалами.

В Тель-Авивском университете под руководством Р.Ш. Липцера были написаны кандидатские и мастерские диссертации, включая работы его аспирантов В. Абрамова [34], П. Чиганского [19] и Л. Голдентайера [38, 39]. При этом его помощь во многих случаях не ограничивалась только научной стороной дела, но бывало, что и касалась затрудненного личного положения соискателей. Во всех таких ситуациях студенты все же успешно завершали свою научную работу с Р.Ш. Липцером и впоследствии с благодарностью его

вспоминали. Отметим, что, работая в Тель-Авивском университете, Роберт продолжал поддерживать тесные контакты с давними коллегами за рубежом, в том числе, конечно же, и в России.

2.4.6. Работа с зарубежными коллегами

Роберт Липцер не был “сухим” математиком, и к числу его постоянных увлечений стоит отнести и горные лыжи, и велопоходы, но, как правило, он проводил свободное от преподавания время в различных университетах по всему миру, где занимался совместными исследованиями с принимавшими его учеными или давал специальные курсы по тематике своих научных интересов. Здесь следует упомянуть Университет г. Падуа (Италия), где Р. Липцер работал с профессором Рунгалдиером, Wain State University в Детройте, США, где он работал с Р.З. Хасьминским. Однако одним из наиболее примечательных мест, куда Роберт Липцер приезжал почти каждый год, был университет им. Монаша (Monash University) в штате Виктория в Австралии. С этим университетом Роберт поддерживал весьма тесные контакты, работая совместно с профессором Ф. Клебанером. Отметим, что диссертационная работа одного из докторантов Роберта из Тель-Авивского университета, Л. Голдентауэра, выполнялась при тесном сотрудничестве со специалистами университета им. Монаша и завершилась публикацией [39]. При участии Роберта в математическом департаменте университета им. Монаша также выполнялись диссертационные работы. Одна из таких работ, выполненная докторантом А. Лим, опубликована в [44]. В университете им. Монаша для сотрудников университета Роберт провел цикл лекций по большим и умеренным отклонениям. Он также проводил семинары и консультировал сотрудников по многим направлениям работ в области теории случайных процессов. Семинары под руководством Р. Липцера и в России и за рубежом, пользовались неизменным вниманием. Их посещали как маститые, так и молодые ученые, для многих из которых это было началом знакомства с теорией стохастического управления, статистики и теории мартингалов. Возможно, именно это обстоятельство позволило многим из них получить впоследствии профессорские и административные позиции в российских и зарубежных исследовательских центрах. Думается, что влияние Роберта Липцера, его научная цельность и добросовестность были и остаются для всех примером настоящего ученого.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Statistics and Control of Stochastic Processes. The Liptser Festschrift / Ed. Kabanov Yu.M., Rozovskii B.L., Shiryaev A.N. World Scientific. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1997.
2. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Нелинейная фильтрация диффузионных марковских процессов // Тр. МИАН СССР. 1968. № 104. С. 135–180.
Liptser R.Sh., Shiryaev A.N. Nonlinear filtration of diffusion Markov processes // Proc. Steklov Inst. Math. 1968. No. 104. P. 163–218.
3. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Об абсолютной непрерывности мер, соответствующих процессам диффузионного типа, относительно винеровской // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. № 4. С. 847–889.

Liptser R.Sh., Shiryaev A.N. On the absolute continuity of measures corresponding to processes of diffusion type relative to a Wiener measure // *Math. USSR-Izv.* 1972. V. 36. No. 4. P. 839–882.

4. *Липцер Р.Ш.* Условно-гауссовские случайные процессы // Пробл. передачи информ. 1974. Т. 10. № 2. С. 75–94.

Liptser R.Sh. Conditionally Gaussian Random Processes // *Problems Inform. Transmission.* 1974. V. 10. No. 2. P. 151–167.

5. *Кузнецов Н.А., Липцер Р.Ш., Серебровский А.П.* Оптимальное управление и обработка информации в непрерывном времени (линейная система, квадратичный функционал) // *АиТ.* 1980. № 10. С. 47–53.

Kuznetsov N.A., Liptser R.Sh., Serebrovskii A.P. Optimal control and information processing in continuous time (a linear system and quadratic functional) // *Autom. Remote Control.* 1980. V. 41. No. 10. P. 1369–1374.

6. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
Liptser R.Sh., Shiryaev A.N. Statistics of Random Processes. New York: Springer, 1979.

7. *Липцер Р.Ш.* Гауссовские мартингалы и обобщение фильтра Калмана-Бьюси // Теория вероятн. и ее примен. 1975. Т. 20. № 2. С. 292–308.

Liptser R.Sh. Gaussian martingales and a generalization of the Kalman-Bucy filter // *Theory Probab. Appl.* 1976. V. 20. No. 2. P. 285–301.

8. *Липцер Р.Ш.* О представлении локальных мартингалов // Теория вероятн. и ее примен. 1976. Т. 21. № 4. С. 718–726.

Liptser R.Sh. On a representation of local martingales // *Theory Probab. Appl.* 1977. V. 21. No. 4. P. 698–705.

9. *Кабанов Ю.М., Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Абсолютная непрерывность и сингулярность локально абсолютно непрерывных вероятностных распределений. I // Матем. сб. 1978. Т. 107(149). № 3(11). С. 364–415.

Kabanov Yu.M., Liptser R.Sh., Shiryaev A.N. Absolute continuity and singularity of locally absolutely continuous probability distributions. I // *Math. USSR-Sb.* 1979. V. 35. No. 5. P. 631–680.

10. *Кабанов Ю.М., Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Абсолютная непрерывность и сингулярность локально абсолютно непрерывных вероятностных распределений. II // Матем. сб. 1979. Т. 108(150). № 1. С. 32–61.

Kabanov Yu.M., Liptser R.Sh., Shiryaev A.N. Absolute continuity and singularity of locally absolutely continuous probability distributions. II // *Math. USSR-Sb.* 1980. V. 36. No. 1. P. 31–58.

11. *Кабанов Ю.М., Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* О представлении целочисленных случайных мер и локальных мартингалов с помощью случайных мер с детерминированными компенсаторами // Матем. сб. 1980. Т. 111(153). № 2. С. 293–307.

Kabanov Yu.M., Liptser R.Sh., Shiryaev A.N. On the representation of integral-valued random measures and local martingales by means of random measures with deterministic compensators // *Math. USSR-Sb.* 1981. V. 39. No. 2. P. 267–280.

12. *Липцер Р.Ш., Пукельшейм Ф., Ширяев А.Н.* О необходимых и достаточных условиях контигуальности и полной асимптотической разделимости вероятностных мер // УМН. 1982. Т. 37. № 6(228). С. 97–124.

Liptser R.Sh., Pukel'sheim F., Shiryaev A.N. Necessary and sufficient conditions for contiguity and entire asymptotic separation of probability measures // *Russian Math. Surveys.* 1982. V. 37. No. 6. P. 107–136.

13. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Функциональная центральная предельная теорема для семимартингалов // Теория вероятн. и ее примен. 1980. Т. 25. № 4. С. 683–703.
Liptser R.Sh., Shiryaev A.N. A functional central limit theorem for semimartingales // Theory Probab. Appl. 1981. V. 25. No. 4. P. 667–688.
14. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* О необходимых и достаточных условиях в функциональной центральной предельной теореме для семимартингалов // Теория вероятн. и ее примен. 1981. Т. 26. № 1. С. 132–137.
Liptser R.Sh., Shiryaev A.N. Necessary and sufficient conditions for the functional central limit theorem for semimartingales // Theory Probab. Appl. 1981. V. 26. No. 1. P. 130–135.
15. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Теория мартингалов. М.: Наука, 1986.
Liptser R.Sh., Shiryaev A.N. Theory of Martingales. Amsterdam: Kluwer, 1989.
16. *Липцер Р.Ш.* Большие отклонения для эмпирических мер марковских процессов (дискретное время, некомпактный случай) // Теория вероятн. и ее примен. 1996. Т. 41. № 1. Р. 65–88.
Liptser R.Sh. Large deviations for occupation measures of Markov processes: discrete time, noncompact case // Theory Probab. Appl. 1997. V. 41. No. 1. P. 35–54.
17. *Клебнер Ф.К., Липцер Р.Ш.* Большие отклонения для рекуррентных последовательностей с последствием // Пробл. передачи информ. 1996. Т. 32. № 4. С. 23–34.
Klebaner F.K., Liptser R.Sh. Large Deviations for Past-Dependent Recursions // Problems Inform. Transmission. 1996. V. 32. No. 4. P. 320–330.
18. *Gulinsky O.V., Liptser R.Sh.* An example of large deviations for a stationary process // Теория вероятн. и ее примен. 1999. Т. 44. № 1. С. 211–225.
Gulinsky O.V., Liptser R.Sh. An example of large deviations for a stationary process // Theory Probab. Appl. 2000. V. 44. No. 1. P. 201–217.
19. *Липцер Р.Ш., Чиганский П.* Умеренные отклонения для процесса диффузионного типа в случайной среде // Теория вероятн. и ее примен. 2009. Т. 54. № 1. С. 39–62.
Liptser R.Sh., Chigansky P. Moderate Deviations for a Diffusion-Type Process in a Random Environment // Theory Probab. Appl. 2010. V. 54. No. 1 P. 29–50.
20. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* О слабой сходимости семимартингалов к стохастически непрерывным процессам с независимыми и условно независимыми приращениями // Матем. сб. 1981. Т. 116(158). № 3(11). С. 331–358.
Liptser R.Sh., Shiryaev A.N. On weak convergence of semimartingales to stochastically continuous processes with independent and conditionally independent increments // Math. USSR-Sb. 1983. V. 44. No. 3. P. 299–323.
21. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Слабая сходимость последовательности семимартингалов к процессу диффузионного типа // Матем. сб. 1983. Т. 121(163). № 2(6). С. 176–200.
Liptser R.Sh., Shiryaev A.N. Weak convergence of a sequence of semimartingales to a process of diffusion type // Math. USSR-Sb. 1984. V. 49. No. 1. P. 171–195.
22. *Кабанов Ю.М., Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Слабая и сильная сходимость распределений считающих процессов // Теория вероятн. и ее примен. 1983. Т. 28. № 2. С. 288–319.
Kabanov Yu.M., Liptser R.Sh., Shiryaev A.N. Weak and strong convergence of distributions of counting processes // Theory Probab. Appl. 1984. V. 28. No. 2. P. 303–336.

23. Коган Я.А., Липцер Р.Ш., Смородинский А.В. Гауссовская диффузионная аппроксимация марковских замкнутых моделей сетей связи ЭВМ // Пробл. передачи информ. 1986. Т. 22. № 1. С. 49–65.
Kogan A.Ya., Liptser R.Sh., Smorodinskii A.V. Gaussian Diffusion Approximation of Closed Markov Models of Computer Networks // Problems Inform. Transmission. 1986. V. 22. No. 1. P. 38–51.
24. Кричагина Е.В., Липцер Р.Ш., Пухальский А.А. Диффузионная аппроксимация для системы с входным потоком, зависящим от очереди, и произвольным обслуживанием // Теория вероятн. и ее примен. 1988. Т. 33. № 1. С. 124–135.
Krichagina E.V., Liptser R.Sh., Puhalskii A.A. Diffusion Approximation for Queue with Inter-Arrive Sequence Depending on Queue and with Arbitrary Service // Theory Probab. Appl. 1988. V. 33. No. 1. P. 114–124.
25. Анулова С.В., Липцер Р.Ш. Диффузионная аппроксимация для процессов с нормальным отражением // Теория вероятн. и ее примен. 1990. Т. 35. № 3. С. 417–430.
Anulova S.V., Liptser R.Sh. Diffusion approximation for processes with normal reflection // Theory Probab. Appl. 1990. V. 35. No. 3. P. 411–423.
26. Липцер Р., Рунггалдиер В., Таксар М. Диффузионная аппроксимация и оптимальное стохастическое управление // Теория вероятн. и ее примен. 1999. Т. 44. № 4. С. 705–737.
Liptser R., Runggaldier W.J., Taksar M.I. Diffusion approximation and optimal stochastic control // Theory Probab. Appl. 2000. V. 44. No. 4. P. 669–698.
27. Клебнер Ф.К., Липцер Р.Ш. Диффузионная модель разорения. Асимптотический анализ // Теория вероятн. и ее примен. 2010. Т. 55. № 2. С. 350–357.
Klebaner F.K., Liptser R.Sh. Asymptotic analysis of ruin in CEV model // Theory Probab. Appl. 2011. V. 55. No. 2. P. 291–297.
28. Липцер Р.Ш. Уравнения почти оптимального фильтра Калмана при особенной матрице ковариаций шума в наблюдениях // АиТ. 1974. Т. 1. С. 35–41.
Liptser R.Sh. Equations of near-optimal Kalman filter with a singular matrix of noise covariations in observations // Autom. Remote Control. 1974. V. 35. No. 1. P. 29–35.
29. Жуковский Е.Л., Липцер Р.Ш. О рекуррентном способе вычисления нормальных решений линейных алгебраических уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т. 12. № 4. С. 843–857.
Zhukovskii E.L., Liptser R.Sh. A recurrence method for computing the normal solutions of linear algebraic equations // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. 1972. V. 12. No. 4. P. 1–18.
30. Жуковский Е.Л., Липцер Р.Ш. О вычислении псевдообратных матриц // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1975. Т. 15. № 2. С. 489–492.
Zhukovskii E.L., Liptser R.Sh. The computation of pseudoinverse matrices // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. 1975. V. 15. No. 2. P. 198–202.
31. Липцер Р.Ш. Оптимальное кодирование и декодирование при передаче гауссовского марковского сигнала по каналу с бесшумной обратной связью // Пробл. передачи информ. 1974. Т. 10. № 4. С. 3–15.
Liptser R.Sh. Optimal Encoding and Decoding for Transmission of a Gaussian Markov Signal in a Noiseless-Feedback Channel // Problems Inform. Transmission. 1974. V. 10. No. 4. P. 279–288.
32. Коган Я., Липцер Р.Ш. Limit non-stationary behavior of large closed queueing networks with bottlenecks // Queueing Systems Theory Appl. 1993. V. 14. P. 33–55.

33. *Kogan Y., Liptser R.Sh., Shenfeld M.* State dependent Benes buffer model with fast loading and output rates // *Ann. Appl. Probab.* 1995. No. 5. P. 97–120.
34. *Abramov V., Liptser R.* On existence of limiting distribution for time-nonhomogeneous countable Markov process // *Queueing Syst.* 2004. V. 46. No. 3–4. P. 353–361.
35. *Chow P.-L., Khasminskii R., Liptser R.* Tracking of signal and its derivatives in Gaussian white noise // *Stochastic Process. Appl.* 1997. V. 69. No. 2. P. 259–273.
36. *Chow P.-L., Khasminskii R., Liptser R.* On estimation of time dependent spatial signal in Gaussian white noise // *Stochastic Process. Appl.* 2001. V. 96. No. 1. P. 161–175.
37. *Липцер Р.Ш., Хасминский Р.З.* Слежение за гладкой функцией регрессии // *Теория вероятн. и ее примен.* 2002. Т. 47. № 3. С. 567–575.
Liptser R.Sh., Khas'minskii R.Z. Online estimation of a smooth regression function // *Theory Probab. Appl.* 2003. V. 47. No. 3. P. 541–550.
38. *Goldentayer L., Liptser R.* On-line tracking of a smooth regression function // *Stat. Inference Stoch. Process.* 2006. V. 9. No. 1. P. 17–30.
39. *Голдентаер Л., Клебнер Ф.К., Липцер Р.Ш.* Слежение за функцией волатильности // *Пробл. передачи информ.* 2005. Т. 41. № 3. С. 32–50.
Goldentayer L., Klebaner F.K., Liptser R.Sh. Tracking the Volatility Function // *Problems Inform. Transmission.* 2005. V. 41. No. 3. P. 212–229.
40. *Baxendale P., Chigansky P., Liptser R.* Asymptotic stability of the Wonham filter: ergodic and nonergodic signals // *SIAM J. Control Optim.* 2004. V. 43. No. 2. P. 643–669.
41. *Chigansky P., Liptser R.* Stability of nonlinear filters in nonmixing case // *Ann. Appl. Probab.* 2004. V. 14. No. 4. P. 2038–2056.
42. *Chigansky P., Liptser R.* On a role of predictor in the filtering stability // *Electron. Comm. Probab.* 2006. No. 11. P. 129–140.
43. *Liptser R.* Large deviations for two scaled diffusions // *Probab. Theory Related Fields.* 1996. V. 106. No. 1. P. 71–104.
44. *Klebaner F., Lim A., Liptser R.* FCLT and MDP for stochastic Lotka-Volterra model // *Acta Applicandae Mathematicae.* 2007. V. 97. No. 1–3. P. 53–68.
45. *Клебнер Ф.К., Липцер Р.Ш.* Когда стохастическая экспонента является мартингалом. Развитие метода Бенеша // *Теория вероятн. и ее примен.* 2013. Т. 58. № 1. С. 53–80.
Klebaner F.K., Liptser R.Sh. When a stochastic exponential is a true martingale. Extension of the Beneš method // *Theory Probab. Appl.* 2014. V. 58. No. 1. P. 38–62.
46. *Liptser R.* Beneš condition for discontinuous exponential martingale // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* 2011. Т. 396. С. 144–154.
Liptser R. Beneš condition for discontinuous exponential martingale // *J. Math. Sci.* 2013. V. 188. No. 6. P. 717–723.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 20.06.2019

После доработки 17.07.2019

Принята к публикации 26.09.2019

© 2020 г. А.А. БУТОВ, д-р физ.-мат. наук (butov.a.a@gmail.com)
(Ульяновский государственный университет)

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПРОДУКТИВНЫХ СИСТЕМ, РАБОТАЮЩИХ ПО ПРИНЦИПУ «ТОЧНО В СРОК»

Рассматриваются распределенные системы процессов “точно в срок”. Даны описания таких процессов в терминах точечных (считающих) процессов. Сформулированы и решены задачи оценивания времени завершения и времени выполнения операций для распределенной системы однородных продуктивных процессов “точно в срок”. Математическая модель и доказательства приведены в мартингальных терминах.

Ключевые слова: продуктивная система, время выполнения операций, мартингальные методы, случайное блуждание, “точно в срок”, оценивание.

DOI: 10.31857/S0005231020030022

1. Введение

Настоящая работа является в некотором смысле логическим продолжением [1]. Здесь (в мартингальных терминах [2]) рассматриваются стохастические системы, реализующие достаточно известный принцип “точно в срок”. Примеры таких систем включают в себя производственные системы “точно в срок”, педагогические стратегии обучения, методы лечения, а также методы компиляции в компьютерном программировании (см. литературу в [1]). Получивший распространение термин “точно в срок” в настоящее время является устоявшимся и восходит к описанию производственной системы Toyota в [3]. Также необходимо отметить, что (в отличие от финансовой математики, рассматривающей преимущественно распределительные, по сути игровые, с точки зрения теории вероятностей задачи) исследованиям стохастических продуктивных систем в последнее время посвящается увеличивающееся количество работ (см., например, [4, 5] и ссылки в них).

Рассмотрим описание продуктивных систем “точно в срок” в терминах точечных считающих процессов. Предполагается, что в таких системах должно быть выполнено некоторое целое число операций $K \geq 1$ к фиксированному моменту времени $T > 0$ (при начале отсчета времени с нулевого момента). Это означает, что в каждый момент $t \in [0, T]$ количество оставшихся для выполнения операций равно X_t , т.е. числу K за вычетом значения B_t процесса, считающего числа выполнений, и плюс A_t — возвращенные на переработку или доработку операции (см. в [6] пример подобного описания технологических процессов, но не “точно в срок”). В простом случае без возвращений и при однородном процессе выполнения описание продуктивного процесса X представляет собой так называемый пуассоновский мост [7, 8] и в обратном

времени соответствует пуассоновскому процессу при условии, что его значение в момент времени T равно точно K (см., например, [9, 10]).

В работе приводятся определения процессов “точно в срок” в терминах как распределений, так и интенсивностей скачков точечных процессов. Показано, что интенсивности бесконечно возрастают к программному (запланированному) моменту выполнения продуктивного процесса. Рассматриваются системы, в которых выполнение операций завершается до некоторого момента, вообще говоря а priori не известного. Такие системы (называемые здесь распределенными системами “точно в срок”) формализованы в терминах семейств случайных блужданий. Для распределенных продуктивных систем приводятся выражения интенсивностей скачков. Из этих выражений следует, что распределенная система процессов “точно в срок” сама, вообще говоря, может и не обладать свойством “точно в срок”. Однако если она этим свойством обладает, то при ее наблюдении (как и при наблюдении одиночного процесса “точно в срок”), завершение операций выполнения наступает строго до запрограммированного момента выполнения. В связи с этим возникает задача оценивания момента выполнения по наблюдениям значений продуктивного процесса X_t . Задачи такого типа достаточно востребованы. Например, в геронтологии не утихают дискуссии о запрограммированной или потенциально бесконечной видовой продолжительности жизни (т.е. отсутствует понимание возможности бесконечного носителя распределенной системы при финитных носителях “распределяемых” процессов), см., например, [11, 12]. Также, актуальной остается задача определения видовой продолжительности жизни однородной когорты, к которой в распределенной системе и принадлежит наблюдаемый индивидум с известным временем “завершения жизненного цикла”. Аналогичные задачи известны при моделировании процессов жизненного цикла в моделях систем лесоводства, сельскохозяйственных и ряда технических (для которых изначально не устанавливается верхний предел эксплуатации или развития). По-прежнему интерес представляет задача последовательного оценивания момента завершения процесса “точно в срок” при наблюдаемом продуктивном процессе. Предлагаемая работа посвящена задачам последовательного оценивания времени завершения продуктивного процесса и параметров случайного блуждания с поглощением, характеризующего время выполнения операций (что в определенном смысле является продолжением задач оценивания параметров случайной среды по наблюдаемым блужданиям [13]). Описания задач и их решения выполнены в мартингальных терминах. Доказательства всех не являющихся очевидными результатов приведены в Приложении.

2. Определение процессов “точно в срок”

Пусть вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ снабжено неубывающим непрерывным справа потоком σ -алгебр $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, пополненным по мере $\mathbf{P}$ (т.е. выполняются условия Деллашери [2, 14]). Рассмотрим на стохастическом базисе $\mathbf{B} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ процесс случайного блуждания $X = (X_t)_{t \geq 0}$ с начальным значением $X_0 = K \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, с регулярными траекториями из пространства Скорохода и значениями $X_t \in \{0, 1, 2, \dots, K\}$. Для скач-

ков предполагается, что $\Delta X_t = X_t - X_{t-} \in \{-1, 0, 1\}$, т.е. переходы случайного блуждания осуществляются только в ближайшие состояния. Очевидно, процесс X может единственным образом быть представлен (см., например, [15–18]) в следующем виде:

$$X = X_0 + A - B = K + A - B,$$

где точечные процессы $A = (A_t)_{t \geq 0}$ и $B = (B_t)_{t \geq 0}$ являются считающими количества положительных и отрицательных скачков X соответственно: при всех $t \geq 0$ $\mathbf{P}$ -п.н.

$$A_t = \sum_{0 < s \leq t} \mathbb{I}\{\Delta X_s = 1\}, \quad B_t = \sum_{0 < s \leq t} \mathbb{I}\{\Delta X_s = -1\}$$

при нулевых начальных значениях $A_0 = B_0 = 0$ (здесь и далее $\mathbb{I}\{\cdot\}$ — индикаторная функция, т.е. $\mathbb{I}\{\text{true}\} = 1$, $\mathbb{I}\{\text{false}\} = 0$). Введем следующие определения.

Определение 1. Процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ назовем продуктивным, $B = (B_t)_{t \geq 0}$ процессом выполнения (операций) и $A = (A_t)_{t \geq 0}$ — процессом возвращения.

Продуктивный процесс заключается в выполнении K запланированных операций, и X_t в каждый момент времени $t \geq 0$ соответствует числу оставшихся невыполненными операций. При этом количество собственно выполнений B_t может оказываться больше K , если число возвращений A_t (например на доработку, как это показано в прикладной работе [6]) оказывается положительным.

Определение 2. Марковский момент τ , определенный на стохастическом базисе $\mathbf{B}$ и являющийся моментом достижения нулевого значения продуктивным процессом X , называется моментом завершения:

$$(1) \quad \tau = \inf\{t > 0: X_t = 0\}, \quad \text{где} \quad \inf\{\emptyset\} = +\infty.$$

В настоящей работе рассматриваются продуктивные процессы только “с одним циклом выполнения”, т.е. нулевое состояние является поглощающим для X : $X_t = 0$ при всех $t \geq \tau$.

Определение 3. Продуктивный процесс конечен, если $\mathbf{P}\{\tau < \infty\} = 1$, т.е. τ — момент остановки на стохастическом базисе $\mathbf{B}$.

Определение 4. Конечный продуктивный процесс называется “точно в срок” (или процессом “точно в срок и”), если существует число $u \in (0, \infty)$ такое, что

$$(2) \quad \mathbf{P}\{\tau \leq u\} = 1,$$

$$(3) \quad \mathbf{P}\{\tau > t\} > 0 \quad \text{для любого} \quad t \in [0, u).$$

Определение 5. Если $X = (X_t)_{t \geq 0}$ — конечный продуктивный процесс “точно в срок u ”, то величину u назовем временем выполнения продуктивного процесса.

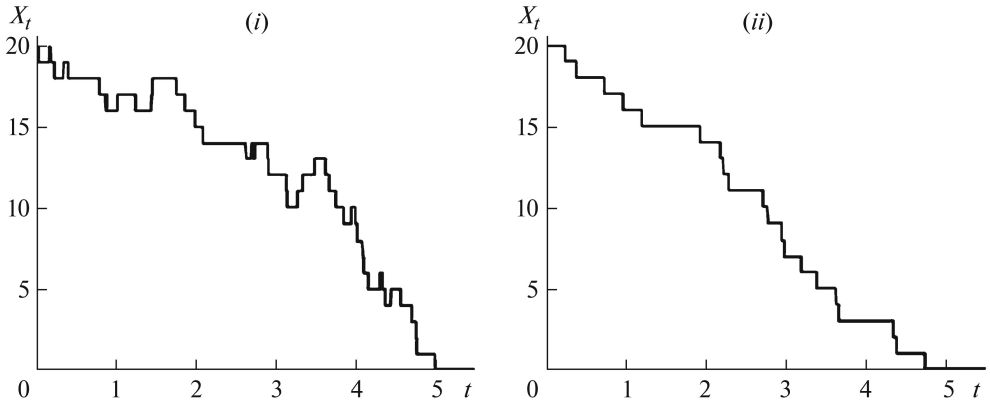


Рис. 1. Траектории продуктивного процесса “точно в срок u ” $X^u = (X_t^u)_{t \geq 0}$ с $u = 5$ и $K = 20$; i — процесс с возвратами, ii — без возвратов.

Пример 1. На рис. 1, i приведен график траектории продуктивного процесса $X = X^u = (X_t^u)_{t \geq 0}$ “точно в срок u ” со временем выполнения $u = 5$ и начальным значением $K = 20$. Процесс возвратов A порожден пуассоновским процессом π с компенсатором $\tilde{\pi}_t = 2,0 \cdot t$: $A_t = \int_0^t \mathbb{I}\{1 \leq X_{s-} \leq K-1\} d\pi_s$. Точечный процесс выполнения B имеет компенсатор, обеспечивающий конечность продуктивного процесса “точно в срок u ”: $\tilde{B}_t = \int_0^t (K - X_s) \frac{1}{u-s} \mathbb{I}\{s < u\} ds$. На рис. 1, ii представлен график траектории продуктивного процесса без возвратов (т.е. $A_t = 0$ при всех $t \geq 0$). Траектории процессов получены в результате имитационного компьютерного моделирования.

Для момента остановки τ , отвечающего конечному продуктивному процессу, определена функция распределения $F_\tau(t) = \mathbf{P}\{\tau \leq t\}$, и поэтому условия (2) и (3) могут быть представлены как

$$(4) \quad F_\tau(u) = 1,$$

$$(5) \quad F_\tau(t) < 1 \quad \text{для любого} \quad t \in [0, u).$$

Не ограничивая общности, для упрощения изложения в настоящей работе предполагаем, что все рассматриваемые далее функции распределения абсолютно непрерывны, имеют носитель в $[0, +\infty)$ и, следовательно, имеют соответствующие плотности вероятностей (например, $F_\tau(x) = 0$ при $t \leq 0$ и $F_\tau(x) = \int_0^x \rho_\tau(t) dt$ при $x > 0$).

Исследования процессов “точно в срок” оказываются удобными на основе традиционных описаний характеристик интенсивностей процессов завершения продуктивных процессов, поскольку именно в этих терминах рассматриваются модели завершаемых событий (например, смертности, разрушения) в биологии или демографии, а также в современных описаниях рисков для сложных технических систем. При этом для момента τ на базисе $\mathbf{B}$ определяется процесс “одного скачка” $N = (N_t)_{t \geq 0}$:

$$(6) \quad N(t) = \mathbb{I}\{\tau \leq t\}$$

с $N(0) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 1$ $\mathbf{P}$ -п.н. По теореме Деллашери разложение Дуба-Мейера на базисе $\mathbf{B}^N = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^N = (\mathcal{F}_t^N)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ с $\mathcal{F}_t^N = \sigma\{N_s; s \leq t\}$ (т.е. в минимальном представлении) имеет вид

$$N(t) = \tilde{N}(t) + m^N(t).$$

Здесь $m^N = (m^N(t))_{t \geq 0}$ — мартингал на стохастическом базисе $\mathbf{B}^N$, а $\tilde{N} = (\tilde{N}(t))_{t \geq 0}$ — компенсатор (неубывающий предсказуемый процесс) с

$$\tilde{N}(t) = \int_0^t h(s) \mathbb{I}\{s < \tau\} ds,$$

где интенсивность $h(t)$ скачков процессов N (известная в моделях разрушения как “hazard rate”, а в демографических и биологических описаниях называемая “смертность”) определяется следующими выражениями:

$$(7) \quad h(t) = \frac{\rho_\tau(t)}{1 - F_\tau(t)} \quad \text{и} \quad \int_0^t h(s) ds = -\ln(1 - F_\tau(t)).$$

Из (4)–(5) и (7) вытекает очевидное утверждение для “точно в срок” в терминах интенсивностей скачков

Предложение 1. Процесс X является “точно в срок u ”, если выполняются следующие два условия:

$$\int_0^u h(s) ds = \infty, \quad \int_0^t h(s) ds < \infty \quad \text{для любого} \quad t \in [0, u].$$

Это предложение оказывается полезным не только в качестве критерия свойства “точно в срок”, но и при анализе распределенных продуктивных процессов.

3. Распределенные системы продуктивных процессов “точно в срок”

Рассмотрим систему множественных продуктивных процессов “точно в срок u ” со случайным временем выполнения и некоторым заданным распределением значений u . Формализовать такую систему можно следующим образом. На стохастическом базисе $\mathbf{B}$ зададим множество независимых случайных процессов $\mathcal{X} = \{X^u; u > 0\}$. Пусть при каждом $u > 0$ процесс $X^u = (X_t^u)_{t \geq 0}$ является конечным продуктивным процессом “точно в срок u ” с моментом завершения, определяемым аналогично (1),

$$(8) \quad \varsigma(u) = \inf\{t > 0: X_t^u = 0\}$$

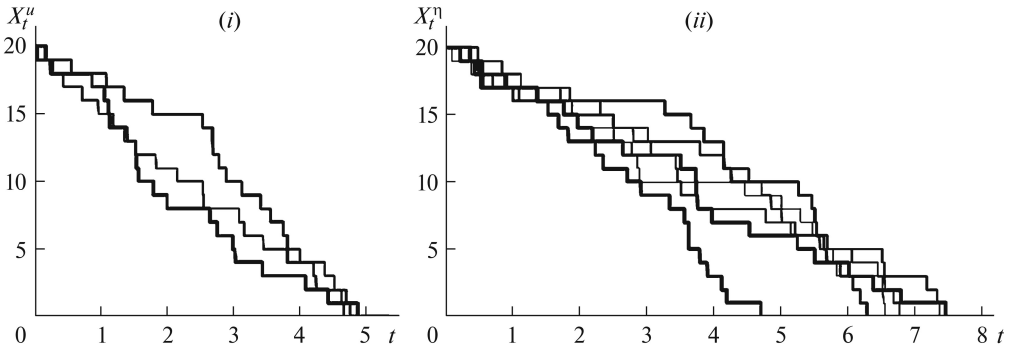


Рис. 2. Продуктивные процессы без возвратов с $K = 20$; i — 3 траектории процесса “точно в срок” $X^u = (X_t^u)_{t \geq 0}$ с $u = 5$; ii — 6 траекторий распределенного процесса $X^\eta = (X_t^\eta)_{t \geq 0}$ с η , равномерно распределенной на $[5, 8]$.

с соответствующей функцией распределения $F_{\varsigma(u)}(t; u)$ и плотностью $\rho_{\varsigma(u)}(t; u)$. Для описания распределения параметра u зададим строго положительную $\mathcal{F}_0$ -измеримую случайную величину $\eta = \eta(\omega)$, $\omega \in \Omega$, с функцией распределения $F_\eta(t)$ и плотностью распределения $\rho_\eta(t)$ (при этом $\mathbf{P}\{\eta < \infty\} = 1$, $\rho_\eta(t) = 0$ при $t < 0$ и $F_\eta(t) = 0$ при $t \leq 0$). Предполагается, что η и семейство $\mathcal{X}$ независимы. Значения случайной величины η рассматриваются в качестве моментов выполнения u для соответствующих элементов семейства $\mathcal{X}$. Тогда распределенный продуктивный процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ определяется как $X = X^\eta = (X_t^\eta)_{t \geq 0}$, $X^{\eta(\omega)} \in \mathcal{X}$, $\omega \in \Omega$.

Очевидно, продуктивный процесс X также является конечным, но необязательно “точно в срок”. Момент его завершения определяется (1) и (8) и равен $\tau = \varsigma(\eta)$. Для момента τ и интенсивности $h(t)$, характеризующейся в соответствии с (7) его распределением, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. При $t \geq 0$

$$(9) \quad h(t) = \frac{1}{1 - F_\tau(t)} \int_t^\infty \rho_{\varsigma(u)}(t; u) \rho_\eta(u) du,$$

где

$$(10) \quad F_\tau(t) = F_\eta(t) + \int_t^\infty F_{\varsigma(u)}(t; u) \rho_\eta(u) du.$$

Простым следствием предложения 2 является следующее утверждение, позволяющее “разделить” классы продуктивных систем на группу с процессами “точно в срок” и группу процессов, траектории которых с положительной вероятностью имеет сколь угодно большой момент завершения.

Утверждение 1. Конечный продуктивный процесс $X = X^\eta = (X_t^\eta)_{t \geq 0}$, $X^{\eta(\omega)} \in \mathcal{X}$, $\omega \in \Omega$, для которого момент выполнения — случайная величина $\eta = \eta(\omega)$, $\omega \in \Omega$, с функцией распределения $F_\eta(t)$, является “точно в

срок” тогда и только тогда, когда плотность распределения $\rho_\eta(t)$ имеет компактный носитель (т.е. существует такое конечное число $T > 0$, что $F_\eta(T) = 1$).

Пример 2. Рассмотрим иллюстративный пример, позволяющий сопоставить продуктивные системы “точно в срок u ” и распределенные системы. На рис. 2 приведены графики продуктивного процесса без возвратов с начальным значением $K = 20$. Рисунок 2, j представляет три траектории продуктивного процесса $X^u = (X_t^u)_{t \geq 0}$ “точно в срок u ” с моментом выполнения $u = 5$ (компенсатор процесса выполнения описан в примере 1). На рис. 2, $j\bar{j}$ показаны шесть траекторий процесса $X^\eta = (X_t^\eta)_{t \geq 0}$, но с моментом выполнения, представляющим собой равномерно распределенную на $[5, 8]$ случайную величину $\eta = \eta(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Для наглядности траектории (полученные в имитационной компьютерной модели) изображены линиями различной толщины.

4. Задачи оценивания для простых распределенных систем “точно в срок”

4.1. Описания однородных процессов без возвратов

Рассматриваются системы простых (или однородных) процессов “точно в срок” без возвращения (т.е. процесс возвратов равен нулю: $A_t = 0$ при всех $t \geq 0$ и $X = X_0 - B = K - B$). Процесс выполнений $B = (B_t)_{t \geq 0}$ представляет собой пуассоновский мост [7, 8]. Таким образом, продуктивный процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ может рассматриваться как пуассоновский процесс в обратном времени (см., например, [9, 10]) при условии его терминального значения, равного $K \in \mathbb{N}$ (в чем, собственно, и заключается “однородность” выполнения операций и соответствующего продуктивного процесса). Как показано в [1] на основе работ [7–10], такой однородный процесс X “точно в срок T ” имеет минимальное семимартингалное представление $X = K + \tilde{X} + m^X$ (где $\tilde{X}$ — компенсатор, а m^X — мартингал) с

$$(11) \quad X_t = K - \int_0^t X_s \cdot \frac{1}{T-s} \mathbb{I}\{s < T\} ds + m_t^X,$$

где параметр T — время выполнения процесса X (т.е. X — “точно в срок T ”). Описания состояний такого процесса достаточно просты. Запись балансовых уравнений для $\mathbb{I}\{X_t = i\}$, $0 \leq i \leq K$, оказывается аналогичной рассмотренным в [15–18]. Из их анализа следует лемма, позволяющая анализировать распределение процесса X .

Лемма 1. Для однородного продуктивного процесса “точно в срок T ” с минимальным представлением (11) при каждом $0 \leq i \leq K$ выполняется

$$(12) \quad \mathbf{P}\{X_t = i\} = C_K^i \left(\frac{T-t}{T} \right)^i \left(\frac{t}{T} \right)^{K-i}, \quad \text{где} \quad C_K^i = \frac{K!}{i!(K-i)!}.$$

4.2. Оценивание времени выполнения

Довольно естественной для рассматриваемых процессов является следующая задача оценивания.

Задача 1. Пусть конечный продуктивный процесс X — однородный продуктивный “точно в срок T ” процесс без возвращений с семимартингальным представлением (11). По наблюдениям $\mathbb{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ с $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s; s \leq t\}$ необходимо построить оценку $\mathbf{E}(\tau | \mathcal{F}_t^X)$.

Развитием этой задачи служит

Задача 2. Найти оценку $\mathbf{E}(\tau | \mathcal{F}_t^X)$ для распределенного процесса $X = X^\eta = (X_t^\eta)_{t \geq 0}$, $X^{\eta(\omega)} \in \mathcal{X}$, $\omega \in \Omega$, где каждый из независимых процессов $X^u = (X_t^u)_{t \geq 0} \in \mathcal{X}$ — однородный продуктивный “точно в срок u ” процесс без возвращений с семимартингальным представлением (11) (естественно, с заменой T на u). Распределение момента выполнения $\eta = \eta(\omega)$, $\omega \in \Omega$, независимого с $\mathcal{X}$, предполагается с функцией распределения $F_\eta(x)$ и плотностью $\rho_\eta(x)$.

Заметим, что момент завершения τ (см. (1)) продуктивного процесса “точно в срок T ” строго меньше, чем время выполнения: $\mathbf{P}\{\tau < T\} = 1$ (это следует из (2) и того, что $\mathbf{P}\{\tau = T\} = 0$ для непрерывной функции распределения $F_\tau(x)$). Поэтому “наблюдения” $\mathbb{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ с $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s; s \leq t\}$ не позволяют установить величину времени выполнения T . В связи с этим возникает следующая

Задача 3. Пусть конечный продуктивный процесс X является распределенным: $X = X^\eta = (X_t^\eta)_{t \geq 0}$, $X^{\eta(\omega)} \in \mathcal{X}$, $\omega \in \Omega$, где каждый из независимых процессов $X^u = (X_t^u)_{t \geq 0} \in \mathcal{X}$ — однородный “точно в срок u ”, без возвращений, с представлением (11) (с заменой T на u). Распределение момента $\eta = \eta(\omega)$, $\omega \in \Omega$, независимого с $\mathcal{X}$, имеет функцию распределения $F_\eta(x)$ и плотность $\rho_\eta(x)$. Необходимо найти функцию распределения $\widehat{F}_\eta(x; t) = \mathbf{P}\{\eta \leq x | X_t\}$ момента η при условии наблюдения X_t или, что эквивалентно, $\widehat{\rho}_\eta(x; t) = d\widehat{F}_\eta(x; t)/dx$. Также необходимо определить $\mathbf{E}(\eta | X_t)$.

Перед решением этих задач приведем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 2. Пусть X — процесс “точно в срок T ” с семимартингальным представлением (11). Момент τ , определенный в (1), имеет функцию распределения и плотность, равные 0 при $t < 0$, а также

$$(13) \quad F_\tau(t) = (t/T)^K \quad \text{при } t \in [0, T], \quad F_\tau(t) = 1 \quad \text{при } t > T,$$

$$(14) \quad \rho_\tau(t) = Kt^{K-1}T^{-K} \quad \text{при } t \in (0, T), \quad \rho_\tau(t) = 0 \quad \text{при } t > T.$$

Следствие 1.

$$(15) \quad \mathbf{E}\tau = \frac{K}{K+1}T.$$

Решением задачи 1 служит

Теорема 1. Для продуктивного процесса “точно в срок T ” последовательная оценка $\widehat{\tau}_t(T) = \mathbf{E}(\tau | \mathcal{F}_t^X)$ равна

$$(16) \quad \widehat{\tau}_t(T) = \tau \mathbb{I}\{\tau \leq t\} + \left(t \frac{1}{X_t + 1} + T \frac{X_t}{X_t + 1} \right) \mathbb{I}\{\tau > t\} \mathbb{I}\{T > t\}.$$

Решение задачи 2 предварим рассмотрением задачи 3. Представим его в виде следующей леммы, имеющей и самостоятельный интерес.

Лемма 3. Плотность распределения $\hat{\rho}_\eta(x; t)$ при условии наблюдения X_t , построенная для случайного момента выполнения η с плотностью $\rho_\eta(x)$, имеет вид

$$(17) \quad \begin{aligned} \hat{\rho}_\eta(x; t) = & \sum_{i=1}^K \frac{(x-t)^i x^{-K} \rho_\eta(x) \mathbb{I}\{t < x\} \mathbb{I}\{X_t = i\}}{\int_t^\infty (s-t)^i s^{-K} \rho_\eta(s) ds} + \\ & + \frac{(\mathbb{I}\{t \geq x\} + t^K x^{-K}) \rho_\eta(x)}{F_\eta(t) + \int_t^\infty t^K s^{-K} \rho_\eta(s) ds} \mathbb{I}\{X_t = 0\}. \end{aligned}$$

На основе этой леммы формулируется простое

Утверждение 2. Для оценки η справедливо: $\mathbf{E}(\eta|X_t) = \int_0^\infty s \hat{\rho}_\eta(s; t) ds$, где $\hat{\rho}_\eta(x; t)$ определяется в лемме 3.

Поскольку процесс X марковский, то $\mathbf{E}(\tau|\mathcal{F}_t^X) = \mathbf{E}(\tau|X_t)$. Следовательно, результат (17) приводит также и к решению задачи 2.

Теорема 2. Оценка времени завершения τ распределенного однородного продуктивного процесса при наблюдении X и известной плотности распределенного момента выполнения $\rho_\eta(x)$ равна

$$(18) \quad \mathbf{E}(\tau|X_t) = \tau \mathbb{I}\{\tau \leq t\} + \int_t^\infty (t + X_t s) \rho_\eta(s; t) ds \frac{\mathbb{I}\{\tau > t\}}{X_t + 1},$$

где $\hat{\rho}_\eta(x; t)$ определена в (17).

5. Заключение

Полученные в работе результаты заключаются не только в описании математической модели и формулировке ряда оценок. Интерес представляют приведенные в Приложении доказательства, выполненные мартингальными методами. Они могут быть легко обобщены, например, при известных описаниях вероятностей состояний процессов $\mathbf{P}\{X_t = i\}$ (здесь указанных для простого однородного случая в лемме 1).

Заметим, что наряду с рассмотренными задачами представляются интересными математические описания и анализ мультивариантных процессов “точно в срок”. Отметим, что не исследованы предельные распределения нормированных процессов. Задачам оптимального управления системами “точно в срок” и “почти точно в срок” посвящена пока только одна работа [1] и только для однородного процесса. Также в настоящее время не исследована система процессов “точно в срок” с разладками.

Поскольку рассматриваемые объекты и предложенные задачи актуальны во многих приложениях, а их математическая формализация находится в начальной стадии выполнения даже для простых схем, то анализ мартингальными методами процессов “точно в срок” (и систем таких процессов) представляется перспективным.

Доказательство свойства 2. Рассмотрим разбиение $\mathcal{D} = \{D_1, D_2\}$, где $D_1 = \{\tau > t\}$ и $D_2 = \{\tau \leq t\}$. Тогда для любых $t \geq 0$ и $\Delta > 0$ вероятность события $A = \{\tau \in (t, t + \Delta]\}$ при условии σ -алгебры $\mathcal{F}_t^N = \sigma\{N_s; s \leq t\}$, определенной для N в (6), совпадает с вероятностью при условии этого разбиения

$$(П.1) \quad \mathbf{P}\{A|\mathcal{F}_t^N\} = \mathbf{P}\{A|\mathcal{D}\}\mathbb{I}\{D_1\}.$$

Однако для правой части (П.1) справедливо равенство

$$(П.2) \quad \mathbf{P}\{A|\mathcal{D}\}\mathbb{I}\{D_1\} = \frac{\mathbf{P}\{A \cap D_1\}}{\mathbf{P}\{D_1\}}\mathbb{I}\{D_1\}.$$

При этом $\mathbf{P}\{D_1\} = 1 - F_\tau(t)$, а $\mathbf{P}\{A \cap D_1\} = \mathbf{E}\{\mathbf{P}(A \cap D_1|\eta)\}$. Поскольку $\mathbf{P}(A \cap D_1|\eta) = \mathbf{P}(A|\eta)\mathbb{I}\{D_1\}$, а $\mathbf{P}(A|\eta)\mathbb{I}\{D_1\} = \{F_{\varsigma(\eta)}(t + \Delta; \eta) - F_{\varsigma(\eta)}(t; \eta)\}\mathbb{I}\{D_1\} = \Delta \rho_{\varsigma(u)}(t; \eta)\mathbb{I}\{D_1\} + o(\Delta)$, то $\mathbf{P}(A \cap D_1) = \Delta \int_0^\infty \rho_{\varsigma(u)}(t; u) \rho_\eta(u) du + o(\Delta)$. С учетом того, что для каждого процесса $X^u \in \mathcal{X}$ “точно в срок u ” выполняется равенство $\rho_{\varsigma(u)}(t; u) = 0$ при всех $u \leq t$, получаем соотношение

$$(П.3) \quad \mathbf{P}(A \cap D_1) = \Delta \int_t^\infty \rho_{\varsigma(u)}(t; u) \rho_\eta(u) du + o(\Delta).$$

Заметим, что $\mathbf{P}\{A|\mathcal{F}_t^N\} = \Delta h(t)\mathbb{I}\{D_1\} + o(\Delta)$. Отсюда, а также из (П.1)–(П.3) следует (9). Равенство (10) следует из того, что $F_\tau(t) = \mathbf{E}\{\mathbf{P}(\varsigma(\eta) \leq t|\eta)\} = \mathbf{E}F_{\varsigma(\eta)}(t)$ и что “точно в срок u ” $F_{\varsigma(u)}(t; u) = 1$ при всех $t \leq u$

$$F_{\varsigma(\eta)}(t) = \int_0^\infty F_{\varsigma(u)}(t; u) \rho_\eta(u) du = \int_0^t 1 \cdot \rho_\eta(u) du + \int_t^\infty F_{\varsigma(u)}(t; u) \rho_\eta(u) du,$$

так как первое слагаемое в правой части равняется $F_\eta(t)$. Предложение 2 доказано.

Доказательство леммы 1. Балансовые уравнений для $\mathbb{I}\{X_t = i\}$, $0 \leq i \leq K$, имеют вид

$$(П.4) \quad \mathbb{I}\{X_t = i\} = \begin{cases} 1 - \int_0^t \mathbb{I}\{X_{s-} = K\} dB_s, & \text{если } i = K, \\ \int_0^t (\mathbb{I}\{X_{s-} = i + 1\} - \mathbb{I}\{X_{s-} = i\}) dB_s, & \text{если } 1 \leq i < K, \\ \int_0^t \mathbb{I}\{X_{s-} = 1\} dB_s, & \text{если } i = 0. \end{cases}$$

Поскольку для компенсатора процесса выполнения B из (11) справедливо $d\widetilde{B}_s = \{X_s/(T-s)\}ds$, то из (П.4) получаем

$$(П.5) \quad \mathbb{I}\{\widetilde{X}_t = i\} = \begin{cases} 1 - \int_0^t \mathbb{I}\{X_{s-} = K\} \frac{K}{T-s} ds, & \text{если } i = K, \\ \int_0^t \left(\mathbb{I}\{X_{s-} = i+1\} \frac{i+1}{T-s} - \mathbb{I}\{X_{s-} = i\} \frac{i}{T-s} \right) ds, & \text{если } 1 \leq i < K, \\ \int_0^t \mathbb{I}\{X_{s-} = 1\} \frac{1}{T-s} ds, & \text{если } i = 0. \end{cases}$$

Обозначим искомые вероятности $p_t(i) = \mathbf{P}\{X_t = i\} = \mathbf{E}\mathbb{I}\{X_t = i\}$. Тогда из (П.5) получаем линейную систему уравнений

$$(П.6) \quad p_t(i) = \begin{cases} 1 - \int_0^t p_s(K) \frac{K}{T-s} ds, & \text{если } i = K, \\ \int_0^t \left(p_s(i+1) \frac{i+1}{T-s} p_s(i) = i \frac{i}{T-s} \right) ds, & \text{если } 1 \leq i < K, \\ \int_0^t p_s(1) \frac{1}{T-s} ds, & \text{если } i = 0. \end{cases}$$

То, что (12) является решением (П.6), проверяется по индукции. Лемма доказана.

Доказательство леммы 2. Момент τ для процесса $(X_t)_{t \geq 0}$ совпадает с моментом первого скачка $\phi = \inf\{v > 0: Y_v = 0\}$ в обратном времени $v = T - t$ процесса $(Y_v)_{0 \leq v \leq T}$ с $Y_v = X_t$ (конструкции соответствующих замен фильтраций и характеристик процесса приведены в [9, 10], а также в [7, 8]). Такой процесс является пуассоновским мостом со следующим представлением при $0 \leq v \leq T$:

$$Y_v = \int_0^v (K - Y_r) \frac{1}{T-r} \mathbb{I}\{r < T\} dr + M_v^Y,$$

где M^Y — соответствующий мартингал. По теореме Деллашери для функции распределения момента первого скачка ϕ выполняется соотношение $dF_\phi(v)/(1 - F_\phi(v)) = K dv/(T - v)$. Следовательно, $F_\phi(v) = 1 - (T - v)^K/T^K$. Из равенства $F_\tau(x) = F_\phi(T - x)$ получаем (13). Его дифференцирование дает (14). Лемма 2 доказана.

Доказательство следствия 1. Поскольку $\mathbf{E}\tau = \int_0^\infty t \rho_\tau(t) dt$, то из леммы 2 следует (15). Следствие 1 доказано.

Доказательство теоремы 1. Заменой начального значения времени на t , величины K на X_t и $\mathcal{F}_0^X$ на $\mathcal{F}_t^X$ при $T > t$ получаем из (15), что $\mathbf{E}\{\tau \mathbb{I}\{\tau > t\} | \mathcal{F}_t^X\} = \left\{ \frac{X_t}{X_t+1}(T-t) + t \right\} \mathbb{I}\{\tau > t\}$. Отсюда вытекает (16). Теорема доказана.

Доказательство леммы 3. Обозначим для $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq K$ и $j = 0, 1, 2, \dots$ вспомогательные множества $B_i = \{X_t = i\}$ и $D_j = D_j(n) = \{\eta = [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n})\}$. Поскольку абсолютно непрерывная (по x) функция $F_\eta(x; t)$ при каждом t монотонна и ограничена, то она равномерно непрерывна. Поэтому для плотности распределения $\hat{\rho}_\eta(x; t)$ выполняется следующее соотношение:

$$(П.7) \quad \hat{\rho}_\eta(x; t) = \lim_{j=[x \cdot n], n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^K \frac{\mathbf{P}\{D_j | B_i\}}{1/n} \mathbb{I}\{X_t = i\}.$$

Условную вероятность в (П.7) представим по формуле Байеса в виде

$$(П.8) \quad \lim_{j=[x \cdot n], n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{D_j | B_i\}}{1/n} = \lim_{j=[x \cdot n], n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{B_i | D_j\} \mathbf{P}\{D_j\} n}{\sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{P}\{B_i | D_r\} \mathbf{P}\{D_r\}} = \\ = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{P}\{B_i | D_r\} \mathbf{P}\{D_r\} \right)^{-1} \lim_{j=[x \cdot n], n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{B_i | D_j\} \lim_{j=[x \cdot n], n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{D_j\} n.$$

Найдем каждый из сомножителей в правой части (П.8). Для последнего, очевидно, выполняется следующее равенство:

$$(П.9) \quad \lim_{j=[x \cdot n], n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{D_j\} n = \rho_\eta(x).$$

Из того, что $\{X_t = 0\}$ при $\eta \leq t$, а также из (12) в лемме 1 получаем:

$$(П.10) \quad \lim_{j=[x \cdot n], n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{B_i | D_j\} = \mathbb{I}\{i = 0\} \mathbb{I}\{t \geq x\} + C_K^i \left(\frac{x-t}{x} \right)^i \left(\frac{t}{x} \right)^{K-i} \mathbb{I}\{t < x\}.$$

Аналогично (П.9) и (П.10) для интегральной суммы имеем равенство

$$(П.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{P}\{B_i | D_r\} \mathbf{P}\{D_r\} = \mathbb{I}\{i = 0\} \int_0^t \rho_\eta(s) ds + \\ + \int_t^\infty C_K^i \left(\frac{s-t}{s} \right)^i \left(\frac{t}{s} \right)^{K-i} \rho_\eta(s) ds.$$

Подставив выражения (П.9)–(П.11) в (П.8) и затем в (П.7), получаем выражение (17). Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 2. Поскольку $\mathbf{E}(\tau | X_t) = \mathbb{I}\{\tau \leq t\} \tau + \mathbb{I}\{\tau > t\} \int_t^\infty \hat{\tau}_t(s) \hat{\rho}_\eta(s; t) ds$, где $\hat{\tau}_t(s)$ определяется в теореме 1, а плотность $\hat{\rho}_\eta(s; t)$ — в лемме 3, очевидно получаем выражение (18). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Butov A.A., Kovalenko A.A.* Stochastic models of simple controlled systems just-in-time // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Серия: Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. № 3. С. 518–531.
2. *Лунцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Теория мартингалов. М.: Наука, 1986.
3. *Sugimori Y., Kusunoki K., Cho F., Uchikawa S.* Toyota production system and kanban system materialization of just-in-time and respect-for-human system // Int. J. Product. Res. 1977. V. 15. No. 6. P. 553–564.
4. *Pan X., Li S.* Optimal control of a stochastic production-inventory system under deteriorating items and environmental constraints // Int. J. Product. Res. 2015. V. 53. No. 2. P. 607–628.
5. *Fazlirad A., Freiheit T.* Application of Model Predictive Control to Control Transient Behavior in Stochastic Manufacturing System Models // J. Manufactur. Sci. Engineer. 2016. V. 138. No. 8. 081007. P. 1–15.
6. *Полянский Ю.В., Бутов А.А., Железнов О.В.* Имитационная дискретно-событийная стохастическая модель процесса разработки и согласования конструкторско-технологической документации на авиационном предприятии // Изв. Самар. науч. центра Росс. акад. наук. 2014. Т. 16. № 1–5. С. 1568–1572.
7. *Privault N., Zambrini J-C.* Markovian bridges and reversible diffusion processes with jumps // Ann. de l'I.H.P. Probab. et statist. 2004. V. 40. No. 5. P. 599–633.
8. *Conforti G., Leonard C., Murr R., Roelly S.* Bridges of Markov counting processes. Reciprocal classes and duality formulas // Electron. Communicat. Probab. 2015. V. 20. No. 18. P. 1–12.
9. *Jacod J., Protter P.* Time Reversal on Levy Processes // Ann. Probab. 1988. V. 16. No. 2. P. 620–641.
10. *Elliott R. J., Tsoi A. H.* Time reversal of non-Markov point processes // Ann. l'I.H.P. Probabilités et statistiques. 1990. V. 26. No. 2. P. 357–373.
11. *Blagosklonny M.V.* Aging is not programmed: genetic pseudo-program is a shadow of developmental growth // Cell Cycle. 2013. V. 12. No. 24. P. 3736–3742.
12. *Kowald A., Kirkwood T.B.L.* Can aging be programmed? A critical literature review // Aging Cell. 2016. V. 15. No. 6. P. 986–998.
13. *Бутов А. А.* Некоторые задачи статистики случайных сред при наблюдаемых процессах размножения и гибели // Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова: Статистика и управление случайными процессами. 1993. Т. 202. С. 25–32.
Butov A.A. Some random environments statistical problems for observable birth-and-death processes // Proc. Steklov Instit. Math.-AMS. Statist. Control Theory Stochast. Proc. 1994. V. 202. P. 19–26.
14. *Dellacherie C.* Capacités et processus stochastiques. Berlin: Springer, 1972. / Пер. Деллашери К. Емкости и случайные процессы. М.: Мир, 1975.
15. *Бутов А.А.* Некоторые оценки для одномерного процесса размножения и гибели в случайной среде // Теория вероятностей и ее применения. 1991. Т. 36. № 3. С. 561–565.
Butov A.A. Some estimates for a one-dimensional birth and death process in a random environment // Theory Probab. Appl. 1991. V. 36. No. 3. P. 578–583.
16. *Бутов А.А.* Мартингалные методы изучения случайных блужданий в одномерной случайной среде // Теория вероятностей и ее применения. 1994. Т. 39. № 4. С. 681–698.
Butov A.A. Martingale methods for random walks in a one-dimensional random environment // Theory Probab. Appl. 1994. V. 39. No. 4. P. 558–572.

17. *Butov A.A.* Random walks in random environments of a general type // Stochast. Stochast. Reports. 1994. V. 48. No. 3-4. P. 145–160.
18. *Butov A.A.* On the problem of optimal instant observations of the linear birth and death processes // Statist. Probability Lett. V. 101. P. 49–53.

Статъя представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 20.06.2019

После доработки 12.08.2019

Принята к публикации 26.09.2019

© 2020 г. А.Ю. ВЕРЕТЕННИКОВ, д-р физ.-мат. наук
(A.Veretennikov@leeds.ac.uk)

(Университет Лидса, Великобритания;
Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики;
Институт проблем передачи информации, Москва)

О СЛАБЫХ РЕШЕНИЯХ СИЛЬНО ВЫРОЖДЕННЫХ СДУ¹

С помощью преобразования Гирсанова установлены существование, единственность по распределению и свойство локального перемешивания слабых решений сильно вырожденных стохастических дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: стохастическое дифференциальное уравнение, слабое решение, слабая единственность, локальное перемешивание, преобразование Гирсанова.

DOI: 10.31857/S0005231020030034

1. Введение

В последние две декады XXI в. возрос интерес к обширному классу вырожденных и сильно вырожденных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) типа Ланжевена – Смолуховского, см., например, [1, 2], как конечномерных, так и бесконечномерных (однако последние в данной работе не будут рассматриваться); среди работ, связанных с приложениями, см., в частности, [3–5]. Причин для этого было, видимо, несколько. Одна из них, наиболее существенная, состоит в том, что все механические, а также электромеханические системы, находящиеся под воздействием случайных сил, являются по необходимости вырожденными, как минимум, с одной степенью вырождения (см. ниже). Сильно вырожденные системы с большей степенью вырождения естественным образом возникают в ансамбле взаимосвязанных частиц или приборов, где лишь на один или на малое их количество действуют случайные силы, которые могут (возможно, приближенно) быть представлены белым шумом (производной винеровского процесса, возможно с диффузионным коэффициентом), а остальным случайные воздействия передаются через связи между частицами, моделируемые “обычными” уравнениями динамических систем, т.е. обыкновенными дифференциальными уравнениями без шума. Поскольку такие системы могут иметь негладкие коэффициенты, — к примеру, так дело обстоит практически всегда в задачах оптимального управления, — представляется весьма желательным иметь достаточно общие результаты о существовании и единственности решений таких уравнений.

¹ Исследование финансировалось в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ и государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации “5-100”; часть работы, относящаяся к теореме 3, поддержана грантом Российского Научного Фонда (проект № 17-11-01098).

This study has been funded by the Russian Academic Excellence Project “5-100”; the part related to the theorem 3 was funded by the Russian Science Foundation (project no. 17-11-01098).

Помимо классического случая с достаточно регулярными коэффициентами (непрерывными, или удовлетворяющими условию Липшица), в котором вырожденность не является проблемой, слабые решения частично вырожденных СДУ были ранее исследованы в [6], а затем сильные решения — в [7], и совсем недавно сильные решения были изучены в [8–10]; см. также ссылки в упомянутых работах.

Тут необходимо отметить эпохальную работу [11], а также статью [12]. Хотя в обоих трудах исследовался невырожденный случай, из дальнейшего будет ясно, что развитые в них методы частично могут быть применены и в вырожденных ситуациях, и техника данной работы с ними тесно связана. Можно сказать, что в [12] выполнена часть программы, намеченной Гирсановым. А именно, условие ограниченности коэффициента сноса, используемое в [11], было заменено в [12] менее ограничительным условием его не более чем линейного роста по фазовой переменной (отметим, что в [12] были решены и другие задачи), и было показано, что такого условия достаточно для применимости преобразования Гирсанова. Подчеркнем еще раз, что в [12] (как и в [11]) коэффициент диффузии предполагается невырожденным. Подход Гирсанова продемонстрировал свою силу во многих работах его последователей. В частности, он применялся и к некоторым вырожденным СДУ, однако, как правило, при условии ограниченного сноса (либо без этого ограничения, но и при отсутствии полной строгости рассмотрения). Цель настоящей работы — дальнейшее развитие этого подхода в применении к некоторому классу сильно вырожденных диффузионных процессов. Двумерный случай с единичной диффузией в невырожденной компоненте изучался в [13], и некоторые обобщения были сформулированы в [14, 15], хотя без подробного обоснования результатов, касающихся вопросов локального перемешивания.

Настоящая работа также связана идейно со статьей [16], в которой исследовалась более общая мартингальная постановка. При этом данная работа отличается от процитированных выше либо постановкой, либо иной применяемой техникой, либо тем и другим. В частности, кроме как в теореме 3, не предполагается, что коэффициент системы “без b ” имеет линейную форму, и не накладывается условие Хёрмандера во всем пространстве. Для теоремы 2 одним из основных примеров — хотя и не единственно возможным — является условие Липшица на коэффициент сноса f по фазовой переменной x , являющееся более ограничительным по сравнению с условиями в [1, 8, 10], но в то же время не требуется никакая добавочная непрерывность по Гельдеру производных $\partial f_i / \partial x_{i+1}$, которая использовалась в данных работах (где нумерация координат обратна к нашей, так что в их обозначениях дополнительная гладкость формулировалась в виде $\partial f_i / \partial x_{i-1} \in H_\alpha$). Также, здесь не доказываются и не используются никакие оценки на переходные плотности процесса X , кроме как в теореме 3, и только лишь для системы “без b ”; применяемый здесь подход можно считать более элементарным. В то же время, стоит сказать, что в большинстве упомянутых работ решены и другие задачи, которые в настоящей работе не рассматриваются. С другой стороны, постановка задачи в настоящей работе включает несимметричные, неквадратные и не положительно определенные матрицы диффузии σ , что является добавочным обобщением по сравнению с упомянутыми работами. Наконец, в большей ча-

сти цитированных работ коэффициенты b и σ (в обозначениях данной статьи) ограничены, в то время, как целью настоящей работы является рассмотреть случай возможного линейного роста сноса b . Будет показано, как для исследования различных свойств сильно вырожденных СДУ, таких как единственность по распределению и локальное перемешивание, может быть напрямую применено преобразование Гирсанова в условиях не более чем линейного роста коэффициента сноса по фазовым переменным (см. ниже условие (2)) без использования дополнительных урезаний. Последнее свойство (локального перемешивания), установленное в теореме 3, служит основой для проверки эргодичности рекуррентных марковских процессов, в частности, при применении метода каплинга.

Итак, пусть n, ℓ, ℓ_1 — произвольные натуральные числа (целые и строго положительные); несколько позже будет предположено, что $\ell_1 \geq \ell$ (это необходимо для невырожденности коэффициента диффузии последней компоненты X^n). Рассмотрим систему СДУ в $\mathbb{R}^{n\ell}$

$$\begin{aligned}
 dX_t^1 &= f_1(t, X_t^1, \dots, X_t^n) dt, \\
 dX_t^2 &= f_2(t, X_t^1, \dots, X_t^n) dt, \\
 (1) \quad &\dots \\
 dX_t^n &= \sigma(t, X_t^1, \dots, X_t^n) b(t, X_t^1, \dots, X_t^n) dt + \sigma(t, X_t^1, \dots, X_t^n) dW_t, \\
 X_0^n &= x^n \in \mathbb{R}^\ell, \quad i = 1, \dots, n,
 \end{aligned}$$

где W — ℓ_1 -мерный стандартный винеровский процесс, коэффициент диффузии σ — измеримая по Борелю матричная функция размера $\ell \times \ell_1$, предполагаемая ограниченной и равномерно невырожденной (т.е. равномерно невырожденной является матричная функция $\sigma\sigma^*$), а b — ℓ_1 -мерная борелевская функция, удовлетворяющая равномерному относительно t условию линейного роста с некоторой постоянной $C > 0$:

$$(2) \quad |b(t, x)| \leq C(1 + |x|), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^{n\ell}.$$

Относительно вектор-функции $f = (f_1, \dots, f_{n-1})$ предполагается условие для всякого $i = 1, \dots, n-1$:

$$(3) \quad |f_i(t, x)| \leq C(1 + |x^i| + \dots + |x^n|),$$

где $x = (x^1, \dots, x^n)$, $|x|^2 = \sum_{i=1}^n (x^i)^2$. (В условии (A3) будет предположено еще больше относительно f .) Типичный случай, когда имеет место условие (3), приведен ниже в (5), хотя для выполнения этого условия зависимость f от всех переменных может иметь и существенно более сложный характер.

Отметим, что случай $\ell_1 > \ell$ может получиться естественным образом если, например, исходное СДУ с квадратной матрицей диффузии “сглажено” с помощью дополнительного независимого винеровского процесса, возможно, с малым, но не равным нулю множителем.

Упрощенный вариант теоремы 2 (с $\sigma = I$) был анонсирован в [17].

2. Основные результаты

В дальнейшем μ_t^x обозначает маргинальное распределение (любого, возможно неединственного) решения (X_t) уравнения (1) с начальным состоянием x .

2.1. Предположения

(A1) Функция b измерима по Борелю; матрица σ ограничена, измерима по Борелю, и $\sigma\sigma^*$ равномерно невырождена; функции $f(t, x) = (f_1, \dots, f_{n-1})(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ непрерывны по $(x^1, \dots, x^{n-1})$ равномерно относительно (t, x^n) ; функции f и b имеют не более чем линейный рост по x равномерно относительно t , т.е. существует постоянная $C > 0$ такая, что при всех x справедливы неравенства (3) и

$$(4) \quad \sup_{t \geq 0} |b(t, x)| \leq C(1 + |x|).$$

(A2) Матричная функция σ измерима по Борелю и ограничена; функции f и σ глобально липшицевы по x равномерно относительно t ; матрица $\sigma\sigma^*$ равномерно невырождена, и выполнены неравенства (3) и (4).

(A3) Имеют место равенства $\ell_1 = \ell$,

$$\sigma = I_{\ell \times \ell},$$

и

$$(5) \quad f_i(t, x) = x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

и выполнено неравенство (4) (в данном случае это ограничение лишь на b).

Отметим, что $(A3) \implies (A2) \implies (A1)$.

2.2. Результаты

Теорема 1. Пусть выполнено предположение (A1). Тогда уравнение (1) имеет слабое решение на всей полупрямой $t \geq 0$.

Замечание 1. Этот результат должен был бы быть давно известен. Однако, автору не удалось найти подходящую ссылку, хотя данное утверждение может считаться вариацией на тему работы [6] в сочетании с теоремой Гирсанова о существовании слабого решения. Доказательства всех теорем даны в Приложении.

Теорема 2. Пусть выполнено предположение (A2) и пусть для уравнения без b (т.е. при $b \equiv 0$) пара (X, W) единственна по распределению в пространстве траекторий. Тогда уравнение (1) имеет слабо единственное решение на $[0, +\infty)$, и это решение является строго марковским процессом. Также при всяком $T > 0$

$$(6) \quad \mathbb{E} \rho_T = 1,$$

где

$$(7) \quad \rho_T := \exp \left(- \int_0^T b(t, X_t) dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T |b(t, X_t)|^2 dt \right),$$

где (X, W) — решение полной системы с b .

Замечание 2. Для слабой единственности пары (X, W) , являющейся решением уравнения без b , достаточно любого условия, гарантирующего сильную (потраекторную) единственность: например, она имеет место, если f и σ равномерно липшицевы по x . Еще одно достаточное условие состоит в слабой единственности лишь компоненты X вместе с равенством $\ell_1 = \ell$, чего хватает для того, чтобы W однозначно определялся по X из уравнения

$$W_t = \int_0^t \sigma(s, X_s^1, \dots, X_s^n)^{-1} dX_s^n - \int_0^t b(s, X_s^1, \dots, X_s^n) ds.$$

При условии равенства $\ell_1 = \ell$ последнее уравнение вытекает из (1) ввиду невырожденности $\sigma\sigma^*$ и, стало быть, обратимости σ .

Теорема 3. Пусть выполнено предположение (A3) в дополнение ко всем условиям теоремы 2. Тогда распределение решения уравнения (1) удовлетворяет локальному условию Маркова — Добрушина: существует такое $T > 0$, что для любого достаточно большого $R > 0$

$$(8) \quad \kappa(R, T) := \inf_{x_0, x_1 \in B_R} \int_{B_R} \left(\frac{\mu_T^{x_0}(dy)}{\mu_T^{x_1}(dy)} \wedge 1 \right) \mu_T^{x_1}(dy) > 0.$$

Замечание 3. Смысл теоремы 3 — в ее применении при исследовании эргодических свойств марковских решений СДУ. Такие свойства требуют дополнительных рекуррентных условий, которые, однако, не являются целью настоящей работы. Следует отметить, что здесь основанием локального перемешивания служит преобразование Гирсанова, а не какие-либо варианты неравенства Харнака, которые для СДУ применяются чаще всего. Представляется весьма правдоподобным, что довольно ограничительные предположения теоремы относительно коэффициентов диффузии и сноса в теореме 3 могут быть заменены на более слабые условия типа используемых в [1]. Этот вопрос отложен до последующих исследований.

2.3. О связи с результатом Бенеша

Как для удобства читателя, так и ради уточнения мотивации данной заметки полезно напомнить результат о существовании слабого решения из [12] для следующего (невырожденного) СДУ в $\mathbb{R}^d$ с d -мерным винеровским процессом (для решения будет использовано новое обозначение Z_t , чтобы отличить от постановки задачи в (1)),

$$(9) \quad dZ_t = b(t, Z_t) dt + dW_t, \quad Z_0 = z.$$

Здесь снос b является d -мерной вектор-функцией, измеримой по Борелю и удовлетворяющей линейному ограничению на рост (2) (без f). Предложение 1 ниже является комбинацией леммы 0 и теоремы 1 из [12], дополненной несколькими фактами из обсуждения в [12], а также леммы 7 из [11] (использованной и в [12]). Более свежее изложение данной классической темы см., например, в [18, следствие 3.5.16 и предложение 5.3.6]. Как обычно (к примеру, аналогично тому как это сделано ниже в лемме 1), чтобы решить уравнение (9), рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{P}})$ с (новым) d -мерным винеровским процессом $\tilde{W}_t$, $t \geq 0$.

Предложение 1 (Бенеш [12]). *При условии (2) для решения уравнения (9) при любом $T > 0$ выполнено равенство*

$$\tilde{\mathbb{E}}\zeta_T = 1, \quad \zeta_T := \exp \left(- \int_0^T b(s, \tilde{W}_s) d\tilde{W}_s - \frac{1}{2} \int_0^T |b(s, \tilde{W}_s)|^2 ds \right),$$

процесс $W_t := \tilde{W}_t - \int_0^t b(s, \tilde{W}_s) ds$, $0 \leq t \leq T$, является d -мерным винеровским относительно новой меры $d\tilde{\mathbb{P}} \equiv d\tilde{\mathbb{P}}^\zeta := \zeta_T d\tilde{\mathbb{P}}$, и уравнение (9) имеет слабое решение, единственное в смысле распределения при любом $T > 0$ и $0 \leq t \leq T$.

До работы [12] (впрочем, как и после нее) преобразование меры Гирсанова широко использовалось с урезанием (неограниченных) коэффициентов, производившимся, чтобы обеспечить мартингалное свойство гирсановской экспоненты. Способ, предложенный Бенешем, позволил избежать этой аппроксимации для определенных классов СДУ (с единичной матрицей диффузии и при условии не более чем линейного роста сноса). Очевидно, этот результат не применим непосредственно к системе (1).

Предположение (2) в доказательстве теоремы использовалось существенно. Интересно отметить, что последнее замечание самого Гирсанова в его работе [11], на самом деле, относилось к более общим процессам с непостоянной диффузией, которое (замечание) в случае постоянной диффузии сводилось в точности к (2). Автор не доказал это утверждение, пообещав сделать это позднее, что, очевидно, никогда уже не было сделано. Возможно, помимо трагической гибели Гирсанова несколькими годами позже, данный факт можно частично объяснить как раз тем, что даже без этого замечания его метод допускал всевозможные применения с подходящими урезаниями (или остановками), как и было предложено в последних комментариях последнего раздела в [11]. По поводу существования *слабого* решения следует отметить, что существование и потраекторная единственность *сильного* решения для уравнения (9), на самом деле, также имеет место и известна со времен работы [19]. Более того, существование слабого решения уравнения (9) (но не (1)) следует и из общего результата о существовании слабых решений в [20]. Это еще один вопрос к непосредственной применимости результата Бенеша к уравнению (1): существование *сильного* решения *без дополнительных предположений* для него, по всей видимости, до сих пор неизвестно (и, скорее всего, неверно), в отличие от случая уравнения (9).

3. Заключение

1. Слабые решения сильно вырожденных СДУ существуют при весьма слабых предположениях, которые могут быть комбинацией условий непрерывности и невырожденности. Первые позволяют использовать технику плотности (компактности) мер и единого вероятностного пространства Скорохода; как альтернатива здесь применим и мартингальный подход. Вторые требуют использования неравенств Крылова. Линейный рост, во всяком случае, коэффициента сноса по фазовым переменным не является существенным ограничением.

При $b \equiv 0$ и для функций f и σ , непрерывных по $(x^1, \dots, x^{n-1})$ равномерно относительно x^n и t , сходимость решений со сглаженными коэффициентами на новом вероятностном пространстве к решению системы (1) “без b ” можно установить, используя априорные оценки этих сглаженных решений и ϵ -сеть в пространстве $C[0, T; \mathbb{R}^{n\ell}]$.

Далее, существование решения полного уравнения (1) вытекает из применения преобразования меры Гирсанова, если принять во внимание лемму 1 (разумеется, доказанную независимо).

В этой части работы никаких специальных требований к структуре коэффициентов не накладывается (помимо сильной вырожденности). Вся теорема 1 является вариацией результатов из [6] (в доказательстве которых, в свою очередь, были использованы и оценки Крылова) в сочетании с методом Гирсанова.

2. Слабая единственность требует несколько больше, чем только существование. В настоящей работе она выводится из мартингального свойства стохастической экспоненты при замене меры Гирсанова, убирающей нерегулярную часть сноса. Данное мартингальное свойство строго доказано. Существуют и другие способы для установления слабой единственности путем анализа аналитических свойств полугрупп, как в некоторых из упомянутых выше работ. И для такой постановки линейный рост коэффициента сноса не является ограничением.

3. Локальное условие Маркова – Добрушина может быть проверено с помощью оценок снизу для переходных плотностей решений уравнения “без b ” в сочетании с преобразованием меры Гирсанова. Предположения, требуемые для этой цели в работе, без сомнения, могут быть значительно ослаблены. При этом, насколько известно автору, при сделанных предположениях нижних оценок для плотностей решений полного уравнения (1) “с b ” в литературе нет. В работах [1, 8–10, 21] такого типа нижние оценки установлены лишь при определенных дополнительных ограничениях.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Для симметричной положительно определенной матрицы диффузии σ с $\ell_1 = \ell$ и при $b \equiv 0$ данный результат является частным случаем [6, теорема 1] или его небольшой модификацией. Ради полноты изложения опишем кратко схему доказательства. Прежде всего, аппроксимируем все коэффициенты некоторыми их сглаженными

версиями $f^\epsilon, b^\epsilon, \sigma^\epsilon$ (с сохранением невырожденности σ^ϵ). Далее используем априорные оценки моментов решений, технику Скорохода единого вероятностного пространства и оценки Крылова для симметричной положительно определенной σ , как в [20]. Тогда можно перейти к пределу по некоторой подпоследовательности ($k \rightarrow \infty$) в интегральной форме уравнения: для выражения $\int f(\dots)ds$ сходимость (к некоторому пределу) следует из предположений о непрерывности и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости. Для стохастического интеграла с σ сходимость переменной X_t^{n, ϵ_k} обеспечивается техникой, основанной на неравенствах Крылова, и другой леммой Скорохода касательно сходимости под знаком стохастического интеграла. Наконец, сходимость компонент $(X^{1, \epsilon_k}, \dots, x^{n-1, \epsilon_k})$ следует из предположения о непрерывности по этим компонентам.

Для полного уравнения со сносом b существование теперь следует из теоремы Гирсанова благодаря лемме 1 (доказанной ниже в условиях теоремы 1, разумеется, независимо). В этой лемме линейный рост коэффициента сноса не является ограничением.

Для несимметричной, не положительно определенной и, возможно, не квадратной матрицы σ прием из [22] (см, также [23]) позволяет свести дело к предыдущему случаю: почему это замечание вообще необходимо, так это потому, что сглаживание несимметричной и неквадратной матричной функции в принципе может легко привести к вырождению матрицы; поэтому тут помогает именно не сглаживание, а сведение к случаю квадратной и симметричной положительно определенной матрицы диффузии, для которой сглаживание “безопасно” в смысле невозможности потери невырожденности. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Шаг 1. Начнем с пары $(X, \tilde{W})$ на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{P}})$, где $\tilde{W}$ — ℓ_1 -мерный винеровский процесс, так что процесс $(X, \tilde{W})$ является решением системы (1) при $b \equiv 0$. Для уравнения в общем случае используем преобразование Гирсанова. Обозначим:

$$\tilde{\rho}_T := \exp \left(+ \int_0^T b(t, X_t) d\tilde{W}_t - \frac{1}{2} \int_0^T |b(t, X_t)|^2 dt \right)$$

и при $0 \leq T_1 < T_2$

$$\tilde{\rho}_{T_1, T_2} := \exp \left(+ \int_{T_1}^{T_2} b(t, X_t) d\tilde{W}_t - \frac{1}{2} \int_{T_1}^{T_2} |b(t, X_t)|^2 dt \right).$$

Требуется показать, что ρ_T является вероятностной плотностью, т.е. $\tilde{\mathbb{E}}\tilde{\rho}_T = 1$, где $\tilde{\mathbb{E}}$ — математическое ожидание относительно вероятности $\tilde{\mathbb{P}}$.

Лемма 1. При условиях (2) и (3) (т.е. в условиях теоремы 1) найдется такое достаточно малое $T_0 > 0$, что для всякого $R > 0$ и любого $T \leq T_0$

$$(П.1) \quad \sup_{x \in B_R} \tilde{\mathbb{E}}_x \tilde{\rho}_T^2 < \infty.$$

Более того, для всякого $x \in B_R$ и любого $T > 0$ (а не только для достаточно малого)

$$(П.2) \quad \tilde{\mathbb{E}}_x \tilde{\rho}_T = 1.$$

Подчеркнем, что значение левой части в (П.1), конечно, может зависеть от R ; однако, как скоро увидим, значение T , для которого левая часть конечна, может быть выбрано не зависящим от $R > 0$.

Доказательство леммы 1. Используя неравенство Коши — Буняковского — Шварца (КБШ) и супермартингальное свойство стохастических экспонент, оцениваем

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{\mathbb{E}}_x \tilde{\rho}_T^2 \right)^2 \leq \\ & \leq \left(\tilde{\mathbb{E}} \exp \left(4 \int_0^T b(t, X_t) d\tilde{W}_t - 8 \int_0^T |b(t, X_t)|^2 dt \right) \right) \tilde{\mathbb{E}} \exp \left(+6 \int_0^T |b(t, X_t)|^2 dt \right) \leq \\ & \leq \tilde{\mathbb{E}} \exp \left(+6 \int_0^T |b(t, X_t)|^2 dt \right) \leq \\ & \leq \tilde{\mathbb{E}} \exp \left(+6C \int_0^T (1 + |X_t|^2) dt \right) \leq \\ (П.3) \quad & \leq \tilde{\mathbb{E}} \exp \left(+6C \int_0^T (1 + |X_t^n|^2 + \dots + |X_t^1|^2) dt \right). \end{aligned}$$

В силу условия (A2) и леммы Гронуэла все компоненты от $|X_t^{n-1}|$ до $|X_t^1|$ могут быть по индукции оценены сверху через повторные интегралы от $|X_t^n|$:

$$\begin{aligned} |X_t^{n-1}| & \leq C + C \int_0^t |X_s^n| ds, \\ |X_t^{n-2}| & \leq C + C \int_0^t |X_s^n| ds + \int_0^t \int_0^s |X_u^n| du ds, \\ |X_t^1| & \leq C + C \int_0^t |X_s^n| ds + \dots + \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-1}} |X_{s_n}^n| ds_n \dots ds_1. \end{aligned}$$

В силу элементарных неравенств аналогичные оценки имеют место и для квадратов, только с константами, зависящими от t (что не отражено в обо-

значениях):

$$\begin{aligned}
|X_t^{n-1}|^2 &\leq C + C \int_0^t |X_s^n|^2 ds, \\
|X_t^{n-2}|^2 &\leq C + C \int_0^t |X_s^n|^2 ds + \int_0^t \int_0^s |X_u^n|^2 dud s, \\
|X_t^1|^2 &\leq C + C \int_0^t |X_s^n|^2 ds + \dots + \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-1}} |X_{s_n}^n|^2 ds_n \dots ds_1.
\end{aligned}$$

(Например, $|X_t^{n-1}|^2 \leq C + C \left(\int_0^t |X_s^n| ds \right)^2 \leq C + Ct \int_0^t |X_s^n|^2 ds$ и т.п.) Что касается компоненты $|X_s^n|$, с помощью случайной замены времени ее можно преобразовать в одномерный винеровский процесс со сносом на положительной полуоси. Этот снос ограничен, когда процесс отделен от нуля (и не ограничен в любой окрестности нуля), откуда следует, что он мажорируется другим одномерным винеровским процессом с ограниченным сносом и мгновенным отражением, например, для определенности, в единице. Данная случайная замена времени имеет ограниченную снизу и сверху производную в силу ограниченности и невырожденности $\sigma\sigma^*$. Таким образом, приходим к оценкам

$$\begin{aligned}
|X_t^{n-1}|^2 &\leq C_t + C \int_0^{Ct} |\bar{W}_s|^2 ds, \\
|X_t^{n-2}|^2 &\leq C_t + C \int_0^{Ct} |\bar{W}_s|^2 ds + \int_0^{Ct} \int_0^s |\bar{W}_{s_2}|^2 ds_2 ds, \\
|X_t^1|^2 &\leq C_t + C \int_0^{Ct} |\bar{W}_s|^2 ds + \dots + \int_0^{Ct} \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-1}} |\bar{W}_{s_n}|^2 ds_n \dots ds_1
\end{aligned}$$

с одномерным винеровским процессом $\bar{W}$ и не более чем линейным ростом постоянной C_t по t (т.е. $C_t \leq C(1+t)$).

Поскольку в силу “принципа отражения Андрэ” для винеровского процесса при всяком $v > 0$ справедливо неравенство

$$\tilde{\mathbb{P}} \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |\bar{W}_t| > v \right) \leq 4\tilde{\mathbb{P}}(\bar{W}_1 > v) \leq \frac{4}{v} \exp(-v^2/2),$$

то отсюда следует, что какая бы ни была в (П.3) константа $6C$, математическое ожидание в (П.3) окажется конечным, если $T > 0$ достаточно мало.

Более того, это значение $T > 0$ не будет зависеть от R (хотя значение математического ожидания в (П.3), конечно, от R зависит).

Далее, неравенство (П.1) обеспечивает равномерную интегрируемость $\tilde{\rho}_T$ относительно меры $\tilde{\mathbb{P}}$ для всякого $x \in B_R$, откуда вытекает (П.2) для всех достаточно малых значений T . Однако уже само последнее равенство распространяется на любое T простой индукцией, основанной на марковском свойстве (напомним, что *малое* T в (П.1) не зависит от начального состояния), см. [12] или [18, следствие 3.5.14]:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{E}}\tilde{\rho}_{nT_0} &= \tilde{\mathbb{E}}\tilde{\rho}_{(n-1)T_0}\tilde{\mathbb{E}}(\tilde{\rho}_{(n-1)T_0:nT_0} \mid \mathcal{F}_{(n-1)T_0}) = \\ &= \tilde{\mathbb{E}}\tilde{\rho}_{(n-1)T_0} \times 1 = \dots = \tilde{\mathbb{E}}\tilde{\rho}_{T_0} = 1.\end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Шаг 2. В дальнейшем понадобится еще одно близкое утверждение. Допустим, что на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ с ℓ_1 -мерным винеровским процессом W существует решение X_t системы (1), и обозначим

$$\rho_T := \exp \left(- \int_0^T b(t, X_t) dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T |b(t, X_t)|^2 dt \right).$$

Лемма 2. В условиях (2) и (3) для всякого $R > 0$ найдется столь малое $T > 0$, что

$$(П.4) \quad \sup_{x \in B_R} \mathbb{E}_x \rho_T^2 < \infty,$$

и для любого $x \in B_R$

$$(П.5) \quad \mathbb{E}_x \rho_T = 1.$$

Доказательство леммы 2. Неравенство (П.4) гарантирует равномерную интегрируемость ρ_T относительно меры $\mathbb{P}$ при любом $x \in B_R$, что немедленно влечет (П.5). Таким образом, вероятностная мера $\mathbb{P}^\rho$ корректно определена. Неравенство (П.4) можно переписать как

$$\sup_{x \in B_R} \mathbb{E}_x \rho_T^2 = \sup_{x \in B_R} \mathbb{E}_x^\rho \rho_T = \sup_{x \in B_R} \tilde{\mathbb{E}}_x(\tilde{\rho}_T)^{-1} < \infty.$$

В этой форме (как и в форме $\mathbb{E}_x \rho_T^2 < \infty$) последнее неравенство следует из выкладки, совершенно аналогичной доказательству леммы 1. Этой выкладкой, проверка которой оставляется читателю, лемма 2 доказана.

Шаг 3. Слабая единственность. Пусть X — слабое решение уравнения (1) на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ с винеровским процессом нужной размерности W . Тогда, применяя “обратное” преобразование Гирсанова с ρ_T , убеждаемся, что тот же процесс X является решением уравнения “без b ” с новым винеровским процессом по новой вероятностной

мере $\tilde{\mathbb{P}} = \mathbb{P}^\rho$. Следовательно, согласно предположениям теоремы, распределение пары $(X, \tilde{W})$ на $[0, T]$ относительно меры $\mathbb{P}^\rho$ однозначно определено. Закон распределения X относительно $\mathbb{P}$ можно получить из закона распределения пары $(X, \tilde{W})$ относительно $\tilde{\mathbb{P}}$ посредством преобразования Гирсанова. В самом деле, для любой ограниченной борелевской функции $g \in C[0, T; \mathbb{R}^{n_\ell}]$ имеем

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}g(X) &= \mathbb{E}^\rho \rho^{-1} g(X) = \mathbb{E}^\rho \rho^{-1} g(X) = \\
 &= \mathbb{E}^\rho g(X) \exp \left(+ \int_0^T b(t, X_t) dW_t + \frac{1}{2} \int_0^T |b(t, X_t)|^2 dt \right) = \\
 (П.6) \quad &= \mathbb{E}^\rho g(X) \exp \left(+ \int_0^T b(t, X_t) d\tilde{W}_t - \frac{1}{2} \int_0^T |b(t, X_t)|^2 dt \right).
 \end{aligned}$$

Поскольку по мере $\mathbb{P}^\rho$ распределение пары $(X, \tilde{W})$ по условию однозначно определено, из (3) следует, что выражение $\mathbb{E}g(X)$ также однозначно. Это показывает слабую единственность решения уравнения (1), что и требовалось. Отметим, что подобный способ применялся Гихманом и Скороходом [24] в невырожденной ситуации.

Шаг 4. Строго марковское свойство теперь следует из [25]. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Прежде всего, отметим, что

$$(П.7) \quad \frac{\mu_T^x(dy)}{dy} > 0 \quad \text{п.в. (почти всюду)}.$$

В самом деле, обозначим

$$\mu_T^{x,\rho}(dy) := \mathbb{E}_x^\rho 1(X_T \in dy),$$

где ρ_T определено в (7). В силу обобщенной формулы Байеса имеем

$$\frac{\mu_T^x(dy)}{dy} = \frac{\mu_T^{x,\rho}(dy)}{dy} \mathbb{E}_x(\rho_T^{-1} \mid X_T) |_{X_T=y}.$$

Здесь оба множителя $\mu_T^\rho(x; dy)/dy$ и $\mathbb{E}(\rho_T^{-1} \mid X_T) |_{X_T=y}$ положительны: второй почти наверное, поскольку $0 < \rho^{-1} < \infty$, а первый всюду в силу того, что это — невырожденная гауссовская плотность, для которой возможно и явное представление. Таким образом, искомое неравенство (8) может быть переписано в виде

$$(П.8) \quad \inf_{x_0, x_1 \in B_R} \int_{B_R} \left(\frac{\mu_T^{x_0}(dy)}{dy} \wedge \frac{\mu_T^{x_1}(dy)}{dy} \right) dy > 0.$$

Пусть $L > 0$, и рассмотрим плотность

$$\frac{\mu_T^{x_0, L}(dy)}{dy} := \frac{\mathbb{E}_{x_0} 1(X_T \in dy) 1(\rho_T > L)}{dy}.$$

Очевидно, мера $\mu_T^{x_0, L}(dy)$ абсолютно непрерывна относительно лебеговой, поскольку ее мажорирует мера $\mu_T^{x_0}(dy)$. Кроме того, ρ_T является вероятностной плотностью, поэтому оправданы обозначения

$$\begin{aligned} \frac{\mu_T^{x_0}(dy)}{dy} &\equiv \frac{\mathbb{E}_{x_0} \rho^{-1} 1(X_T \in dy)}{dy} =: p_{x_0}(y; T), \\ \frac{\mu_{T; x_0}^\rho(dy)}{dy} &\equiv \frac{\mathbb{E}_{x_0} 1(X_T \in dy)}{dy} =: p_{x_0}^\rho(y; T), \\ \frac{\mu_{T; x_0}^L(dy)}{dy} &= \frac{\mathbb{E}_{x_0} 1(X_T \in dy) 1(\rho_T > L)}{dy} =: p_{x_0}^L(y; T). \end{aligned}$$

Поскольку $\rho_T^{-1} \geq L^{-1}$ на множестве $(\rho_T \leq L)$, то получаем оценки

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{T; x_0}(dy)}{dy} &= \frac{\mathbb{E}_{x_0} \rho_T^{-1} 1(X_T \in dy) 1(\rho_T \leq L)}{dy} + \frac{\mathbb{E}_{x_0} \rho_T^{-1} 1(X_T \in dy) 1(\rho_T > L)}{dy} \geq \\ &\geq \frac{\mathbb{E}_{x_0} \rho_T^{-1} 1(X_T \in dy) 1(\rho_T \leq L)}{dy} = \frac{\mathbb{E}_{x_0} \rho_T^{-1} 1(X_T \in dy) (1 - 1(\rho_T > L))}{dy} \geq \\ &\geq L^{-1} \frac{\mathbb{E}_{x_0} 1(X_T \in dy) (1 - 1(\rho_T > L))}{dy} \geq \\ &\geq L^{-1} \left(\frac{\mathbb{E}_{x_0} 1(X_T \in dy)}{dy} - \frac{\mathbb{E}_{x_0} 1(X_T \in dy) 1(\rho_T > L)}{dy} \right). \end{aligned}$$

Как уже отмечалось, здесь $\rho > 0$ — вероятностная плотность на Ω . Поэтому выражение $\mathbb{E}_{x_0} 1(X_T \in dy)/dy$ (без множителя L^{-1}), на самом деле, является всюду положительной плотностью $n\ell$ -мерного гауссовского случайного вектора с невырожденной ковариационной матрицей относительно вероятностной меры $\mathbb{P}^\rho$; эту ковариационную матрицу C_T можно выписать явно, что, однако, несущественно для данного доказательства. Важно лишь то, что она положительно определена, что можно, например, увидеть, проверив слабое условие Хёрмандера на генератор решения уравнения (1) без b . Таким образом, получаем

$$p_{x_0}^\rho(y; T) = c(T) \exp \left(-\frac{1}{2} (y - \bar{x}) (C_T^{-1}) (y - \bar{x})^* \right)$$

с некоторым $\bar{x}$, не зависящим от L , где $c(T)$ — соответствующая нормировочная константа. Поэтому

$$(II.9) \quad p_{x_0}(y; T) \geq L^{-1} (p_{x_0}^\rho(y; T) - p_{x_0}^L(y; T)).$$

Выражение $p_{x_0}^\rho(y; T)$ в неравенстве (П.9) равномерно ограничено снизу на любом компакте по переменным (x_0, y) . Итак, оцениваем:

$$\begin{aligned}
 & \inf_{x_0 \in B_R} \int_{B_R} \left(\frac{\mu_{T; x_0}(dy)}{\mu_{T; x_1}(dy)} \wedge 1 \right) \mu_{T; x_1}(dy) = \\
 & = \inf_{x_0, x_1 \in B_R} \int_{B_R} \left(\frac{\mu_{T; x_0}(dy)}{dy} \wedge \frac{\mu_{T; x_1}(dy)}{dy} \right) dy \equiv \\
 & \equiv \inf_{x_0, x_1 \in B_R} \int_{B_R} (p_{x_0}(y; T) \wedge p_{x_1}(y; T)) dy \geq \\
 & \geq \inf_{x_0, x_1 \in B_R} \int_{B_R} L^{-1} (p_{x_0}^\rho(y; T) \wedge p_{x_1}^\rho(y; T) - p_{x_0}^L(y; T) - p_{x_1}^L(y; T)) dy \geq \\
 (П.10) \quad & \geq L^{-1} \left(\inf_{x, x' \in B_R} p_x^\rho(x'; T) |B_R| - 2 \sup_{x \in B_R} \mathbb{P}_x^\rho(\rho_T > L) \right).
 \end{aligned}$$

Было использовано (П.9) и элементарное неравенство

$$(a - b) \wedge (c - d) \geq (a \wedge c) - b - d.$$

Далее,

$$\inf_{x, x' \in B_R} p_x^\rho(x'; T) |B_R| > 0,$$

и величина этой нижней грани, в свою очередь, не зависит от L (хотя зависит от T). Второй член в (П.10) допускает оценку в силу неравенства Чебышева — Маркова

$$\sup_{x_0 \in B_R} \mathbb{P}_{x_0}^\rho(\rho_T \geq L) \leq L^{-1} \sup_{x_0 \in B_R} \mathbb{E}_{x_0}^\rho \rho_T.$$

В силу леммы 2 для любого достаточно малого T величина $\sup_{x_0 \in B_R} \mathbb{E}_{x_0}^\rho \rho_T$ конечна. При любом таком T можно сделать выражение в (П.10) строго положительным, выбирая L достаточно большим. Это влечет оценку (П.8), по крайней мере, для достаточно малых $T > 0$, что и завершает доказательство теоремы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Menozzi S.* Parametrix techniques and martingale problems for some degenerate Kolmogorov equations // Electron. Communicat. Probab. 2011. V. 16. P. 234–250.
2. *Priola E.* On Weak Uniqueness for Some Degenerate SDEs by Global L_p Estimates // Potential Anal. 2015. V. 42. No. 1. P. 247–281.

3. *Campillo F.* Optimal ergodic control for a class of nonlinear stochastic systems // Proc. 28 IEEE Conf. Decision Control (CDC), Tampa. 1989. P. 1190–1195.
4. *Campillo F., Le Gland F., Pardoux E.* Approximation of a stochastic ergodic control problem / Descusse, J., Fliess, M., Isidori, A., and Leborgne, D., eds. New trends in Nonlinear Control Theory., CNRS, Nants 1988, Lecture notes in Control and Information Sciences 122. Springer, 1989. P. 379–395.
5. *Campillo F., Pardoux E.* Numerical methods in ergodic optimal stochastic control and application / Karatzas, I. and Ocone, D., eds. Applied Stochastic Analysis. Proceedings of a US-French Workshop, Rutgers University, New Brunswick, NJ, April 29-May 2, 1991. V. 177 of Lecture notes in Control and Information Sciences. Berlin: Springer, 1992. P. 59–73.
6. *Nisio M.* On the existence of solutions of stochastic differential equations // Osaka J. Math. 1973. V. 10. No. 1. P. 185–208.
7. *Веретенников А.Ю.* О стохастических уравнениях с вырождающейся по части переменных диффузией // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1983. Т. 47. № 1. С. 189–196.
8. *Chaudru de Raynal P.-E.* Strong existence and uniqueness for stochastic differential equation with Hölder drift and degenerate noise // Ann. l'Institut. Henri Poincaré. 2017. V. 53. No. 1. P. 259–286.
9. *Chaudru de Raynal P.-E., Menozzi S.* Regularization effects of a noise propagating through a chain of differential equations: an almost sharp result.
<https://arxiv.org/abs/1710.03620>
10. *Delarue F., Menozzi S.* Density estimates for a random noise propagating through a chain of differential equations // J. Function. Anal. 2010. V. 259. No. 6. P. 1577–1630.
11. *Гирсанов И.В.* О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно-непрерывной замены меры // Теория вероятн. и ее примен. 1960. Т. 5. Вып. 3. С. 314–330.
12. *Beneš V.E.* Existence of optimal stochastic control laws // SIAM J. Control. 1971. V. 9. No. 3. P. 446–472.
13. *Abourashchi N., Veretennikov A.Yu.* On stochastic averaging and mixing // Theory Stochast. Proc. 2010. V. 16(32). No. 1. P. 111–130.
14. *Anulova S.V., Veretennikov A.Yu.* On ergodic properties of degenerate hybrid stochastic control systems // Proc. 49 IEEE Conf. Decision Control (CDC), Atlanta. 2010. P. 2292–2297.
15. *Anulova S.V., Veretennikov A.Yu., and Shcherbakov P.S.* Exponential Convergence of Multi-Dimensional Stochastic Mechanical Systems with Switching // Proc. 52 IEEE Conf. Decision Control (CDC), Florence, Italy. 2013. P. 1217–1222.
16. *Клебанер Ф.К., Луццер П.И.* Когда стохастическая экспонента является мартингалом. Развитие метода Бенеша // Теория вероятн. и ее примен. 2013. Т. 58. Вып. 1. С. 53–80.
17. *Veretennikov A.Yu.* On weak solution of an SDE // 10 Vilnius conf. Probab. Theory and Mathematical Statistics 28th June–2nd July 2010. Abstracts of Communicat. Vilnius: TEV. 2010. P. 287.
18. *Karatzas I., Shreve S.E.* Brownian motion and stochastic calculus. N.Y.: Springer, 1991.
19. *Веретенников А.Ю.* О сильных решениях и явных формулах для решений стохастических интегральных уравнений // Матем. сб. 1980. Т. 111(153). № 3. С. 434–452.
20. *Крылов Н.В.* Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1977.

21. *Honoré I., Menozzi S., Chaudru de Raynal P.-E.* Strong regularization by Brownian noise propagating through a weak Hörmander structure.
<https://arxiv.org/abs/1810.12225>
22. *Веретенников А.Ю., Крылов Н.В.* О явных формулах для решений стохастических уравнений // Матем. сб. 1976. Т. 100(142). № 2(6). С. 266–284.
23. *Mishura Yu.S., Veretennikov A. Yu.* Existence and uniqueness theorems for solutions of McKean–Vlasov stochastic equations / arXiv:1603.02212
24. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. Т. 3. М.: Наука, 1975.
25. *Крылов Н.В.* О выделении марковского процесса из марковской системы процессов и построении квазидиффузионных процессов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1973. Т. 37. № 3. С. 691–708.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 20.06.2019

После доработки 14.08.2019

Принята к публикации 26.09.2019

© 2020 г. М.Л. КЛЕПЦЫНА, канд. физ.-мат. наук
(Marina.Kleptsyna@univ-lemans.fr),

Д.А. МАРУШКЕВИЧ, канд. физ.-мат. наук
(Dmytro.Marushkevych.etu@univ-lemans.fr)

(Университет Ле-Мана, Франция),

П.Ю. ЧИГАНСКИЙ, канд. техн. наук (Pavel.Chigansky@mail.huji.ac.il)
(Еврейский университет в Иерусалиме, Израиль)

АСИМПТОТИКА ТОЧНОСТИ ОЦЕНКИ ДРОБНОГО СИГНАЛА В МАЛОМ БЕЛОМ ШУМЕ¹

Рассматривается задача оценки дробного процесса Орнштейна–Уленбека, наблюдаемого в линейном канале с белым шумом малой интенсивности. Получена точная асимптотика ошибки оценок фильтрации и интерполяции. Анализ точности основан на приближениях собственных значений и собственных функций ковариационного оператора сигнала.

Ключевые слова: оптимальная линейная фильтрация, дробный процесс Орнштейна–Уленбека, асимптотический анализ.

DOI: 10.31857/S0005231020030046

1. Введение

Рассмотрим систему стохастических линейных уравнений

$$(1.1) \quad \begin{aligned} X_t &= \beta \int_0^t X_s ds + B_t^H, \\ Y_t &= \mu \int_0^t X_s ds + \sqrt{\varepsilon} B_t, \end{aligned}$$

где $B = (B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ и $B^H = (B_t^H, t \in \mathbb{R}_+)$ — независимые стандартное и дробное броуновские движения, β и μ — постоянные коэффициенты, а ε — положительный малый параметр.

Напомним, что дробное броуновское движение с показателем Хёрста $H \in (0, 1)$ определяется как гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией

$$\mathbb{E} B_t^H B_s^H = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}).$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Израильского Научного Фонда (ISF) (грант № 1383/18).

При $H = 1/2$ процесс B^H совпадает со стандартным броуновским движением. При всех же других значениях показателя H дробное броуновское движение не является ни семимартингалом, ни марковским процессом, а при $H > 1/2$ его приращения обладают долгосрочной зависимостью:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_1^H (B_{n+1}^H - B_n^H) = \infty.$$

Благодаря своим разнообразным свойствам (самоподобие, длинная память), дробное броуновское движение играет важную роль в теории и приложениях случайных процессов, см., например, [1, 2]. В частности, отметим, что дробный процесс Орнштейна–Уленбека, определяемый первым уравнением (1.1), также обладает свойством долгосрочной зависимости, см. [3].

Задача оптимальной оценки сигнала X по наблюдаемой траектории процесса Y заключается в вычислении условного математического ожидания $\hat{X}_{t,T} = \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_T^Y)$ во время $t \in [0, T]$, где $\mathcal{F}_T^Y = \sigma\{Y_t, t \leq T\}$. Такая оценка минимизирует среднеквадратичную ошибку по всем функционалам, измеримым относительно $\mathcal{F}_T^Y$. При $t < T$ оценка $\hat{X}_{t,T}$ называется интерполяционной, а при $t = T$ — фильтрационной.

Так как процесс (X, Y) гауссовский, оптимальный фильтр является линейным функционалом от наблюдений, а точнее, стохастическим интегралом, см. [4],

$$\hat{X}_{t,T} = \frac{1}{\mu} \int_0^t h_T(s, t) dY_s.$$

Весовая функция $h_T(s, t)$ задается единственным решением интегрального уравнения

$$(1.2) \quad \varepsilon h_T(s, t) + \int_0^T \mu^2 K(r, s) h_T(r, t) dr = \mu^2 K(s, t), \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

где ковариационное ядро $K(s, t) = \mathbb{E}X_s X_t$ в случае сигнала из (1.1) имеет вид

$$(1.3) \quad K(s, t) = \int_0^t e^{\beta(t-v)} \frac{d}{dv} \int_0^s H|v - u|^{2H-1} \text{sign}(v - u) e^{\beta(s-u)} du dv.$$

При этом наименьшая среднеквадратичная ошибка $P_{t,T}(\varepsilon) = \mathbb{E}(X_t - \hat{X}_{t,T})^2$ вычисляется по формуле

$$P_{t,T}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\mu^2} h_T(t, t).$$

Явное решение уравнения (1.2) известно только в случае $H = 1/2$, т.е. когда сигнал является классическим процессом Орнштейна–Уленбека. Этот

факт лежит в основе теории оптимального оценивания Калмана–Бьюси [5]. Наилучшая оценка в этом случае может быть вычислена рекурсивно решением дифференциального стохастического уравнения. При этом наименьшая ошибка оценивания удовлетворяет дифференциальному уравнению Риккати, см., например, [6, теорему 12.10], простой анализ которого дает следующую точную асимптотику оценки:

$$P_{t,T}(\varepsilon) \asymp \sqrt{\varepsilon/\mu^2} \begin{cases} 1/2, & t \in (0, T) \\ 1, & t = T \end{cases} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Здесь и далее $f(\varepsilon) \asymp g(\varepsilon)$ означает, что $f(\varepsilon)/g(\varepsilon) \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Эта формула показывает, что ошибки фильтрации и интерполяции асимптотически отличаются только на постоянный фактор и убывают как квадратный корень от интенсивности шума.

2. Основные результаты

В этой работе будет получена более общая асимптотика ошибки, остающейся верной при всех значениях показателя Хёрста.

Теорема 1. Наименьшая среднеквадратичная ошибка оценки сигнала в системе (1.1) допускает следующую асимптотику:

$$(2.1) \quad P_{t,T}(\varepsilon) \asymp (\varepsilon/\mu^2)^{\frac{2H}{1+2H}} \frac{\left(\sin(\pi H)\Gamma(2H+1)\right)^{\frac{1}{1+2H}}}{\sin \frac{\pi}{2H+1}} \begin{cases} \frac{1}{2H+1}, & t \in (0, T) \\ 1, & t = T \end{cases} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Замечание 1. Порядок $\varepsilon^{2H/(1+2H)}$ скорости ошибки в (2.1) совпадает с оптимальным порядком убывания минимаксного риска в задачах оценки детерминированного сигнала с показателем Гёльдера $H \in (0, 1)$ в белом шуме, см. [7, 8].

Вывод асимптотики (2.1) использует приближение решений спектральной задачи

$$K\varphi = \lambda\varphi$$

для ковариационного оператора

$$(K\varphi)(t) = \int_0^T K(s, t)\varphi_s ds$$

дробного процесса Орнштейна–Уленбека с ядром (1.3). Хорошо известно, что такая задача имеет счетное количество нетривиальных решений (λ_n, φ_n) ,

$n \in \mathbb{N}$. Собственные значения λ_n вещественны, положительны и их упорядоченная последовательность сходится к нулю. Собственные функции φ_n составляют полный ортонормальный базис в пространстве $L^2([0, T])$. Добавляя β в обозначение ядра (1.3), заметим, что оно обладает свойством инвариантности

$$(2.2) \quad K_\beta(sT, tT) = T^{2H} K_{\beta T}(s, t), \quad s, t \in [0, 1], \quad T > 0,$$

благодаря которому без ограничения общности можно рассматривать спектральную задачу на единичном отрезке $[0, 1]$.

В случае классического процесса Орнштейна–Уленбека, т.е. при $H = 1/2$, спектральная задача сводится к линейному дифференциальному уравнению с явным решением, которое позволяет найти простые выражения

$$(2.3) \quad \lambda_n = \frac{1}{\nu_n^2 + \beta^2} \quad \text{и} \quad \varphi_n(t) \propto \sqrt{2} \sin(\nu_n t),$$

где $\nu_n = \pi n - \pi/2 + O(n^{-1})$ — возрастающая последовательность корней уравнения

$$\nu/\beta = \tan \nu.$$

Для всех других значений показателя $H \in (0, 1)$ асимптотически точные приближения собственных значений и функций могут быть получены с использованием метода Укаи [9], недавно примененного в [10] к спектральному анализу дробного броуновского движения.

Следующий результат интересен сам по себе и может быть применен в различных других приложениях.

Теорема 2.

1. Собственные значения ковариационного оператора с ядром (1.3) на единичном отрезке $[0, 1]$ допускают представление

$$(2.4) \quad \lambda_n = \sin(\pi H) \Gamma(2H + 1) \frac{\nu_n^{1-2H}}{\nu_n^2 + \beta^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где последовательность ν_n имеет ту же асимптотику, что и в случае дробного броуновского движения, [10, теорема 2.1]:

$$\nu_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi - \frac{(H - \frac{1}{2})^2 \pi}{H + \frac{1}{2}} + O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty.$$

2. Нормированные собственные функции допускают такое же асимптотическое приближение, как и в случае дробного броуновского движения, [10, теорема 2.1]:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \varphi_n(x) = & \sqrt{2} \sin(\nu_n x + \eta_n) - \\ & - \int_0^\infty \left(e^{-x\nu_n u} f_0(u) + (-1)^n e^{-(1-x)\nu_n u} f_1(u) \right) du + O(n^{-1}), \end{aligned}$$

где функции $f_j(\cdot)$ задаются явными формулами (см. лемму 9) и

$$\eta_H = \frac{1}{4} \frac{(H - \frac{1}{2})(H - \frac{3}{2})}{H + \frac{1}{2}}.$$

3. Имеет место следующее асимптотическое равенство:

$$\varphi_n(1) = -(-1)^n \sqrt{2H+1} (1 + O(n^{-1})), \quad n \rightarrow \infty.$$

3. Доказательство теоремы 1

Используя свойство (2.2), перепишем уравнение (1.2) в виде

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon h(u, v) + \int_0^1 \mu^2 T^{2H+1} K_{\beta T}(r, u) h(r, v) dr = \\ = \mu^2 T^{2H} K_{\beta T}(u, v), \quad 0 \leq u \leq v \leq 1, \end{aligned}$$

где $h(u, v) := h_T(uT, vT)$. Очевидно, что

$$P_{uT, T}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\mu^2} h(u, u), \quad u \in [0, 1].$$

Разлагая решение (3.1) в ряд по собственным функциям ядра $K_{\beta T}$, получаем

$$h(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2 T^{2H}}{\varepsilon \lambda_n^{-1} + \mu^2 T^{2H+1}} \varphi_n(u) \varphi_n(v), \quad 0 \leq u \leq v \leq 1,$$

где λ_n — его собственные значения. Этот ряд сходится безусловно при любых $\varepsilon > 0$, и его значение неограниченно возрастает при $\varepsilon \rightarrow 0$. Первый порядок асимптотики этого ряда по ε не изменится, если собственные значения и собственные функции заменить на их приближения из теоремы 2. Обозначим $C := \sin(\pi H) \Gamma(2H+1)$, тогда

$$\begin{aligned} P_{T, T}(\varepsilon) &= \frac{\varepsilon}{\mu^2} h(1, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon T^{2H}}{\varepsilon \lambda_n^{-1} + \mu^2 T^{2H+1}} \varphi_n^2(1) \asymp \\ &\asymp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon T^{2H}}{\frac{\varepsilon}{C} \frac{(\pi n)^2 + (\beta T)^2}{(\pi n)^{1-2H}} + \mu^2 T^{2H+1}} (2H+1) \asymp \\ &\asymp (2H+1) \int_1^{\infty} \frac{\varepsilon T^{2H}}{\frac{\varepsilon}{C} ((\pi x)^{2H+1} + (\beta T)^2 (\pi x)^{2H-1}) + \mu^2 T^{2H+1}} dx \asymp \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \asymp \frac{\varepsilon}{\mu^2 T} \left(\frac{\varepsilon}{C} \frac{1}{T^{2H+1} \mu^2} \right)^{-\frac{1}{2H+1}} \frac{2H+1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{y^{2H+1} + 1} dy = \\
& = \frac{\varepsilon}{\mu^2 T} \left(\frac{\varepsilon}{C} \frac{1}{T^{2H+1} \mu^2} \right)^{-\frac{1}{2H+1}} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2H+1}} = (\varepsilon/\mu^2)^{\frac{2H}{2H+1}} \frac{C^{\frac{1}{2H+1}}}{\sin \frac{\pi}{2H+1}},
\end{aligned}$$

что и дает асимптотическое выражение ошибки фильтрации в (2.1) при $t = T$.

Для вычисления $P_{uT,T}(\varepsilon)$ при $u \in (0, 1)$ воспользуемся приближением собственных функций (2.5), которое внутри интервала принимает вид

$$\varphi_n(u) = \sqrt{2} \sin(\nu_n u + \eta_H) + O(n^{-1}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
P_{uT,T}(\varepsilon) &= \frac{\varepsilon}{\mu^2} h(u, u) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon T^{2H}}{\varepsilon \lambda_n^{-1} + \mu^2 T^{2H+1}} \varphi_n^2(u) = \\
(3.2) \quad &= \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon T^{2H}}{\varepsilon \lambda_n^{-1} + \mu^2 T^{2H+1}} - \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon T^{2H}}{\varepsilon \lambda_n^{-1} + \mu^2 T^{2H+1}} \cos(2\nu_n u + 2\eta_H) := \\
&:= I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Здесь $I_1(\varepsilon)$ отличается от предыдущего случая только на множитель $2H+1$, и для того, чтобы получить асимптотику ошибки интерполяции (2.1) в случае $t \in (0, T)$, остается показать, что $I_2(\varepsilon)$ стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ быстрее, чем $\varepsilon^{2H/(2H+1)}$. Введем последовательность $(S_n)_{n \geq 0}$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \cos(2\nu_k u + 2\eta_H), \quad n \geq 1, S_0 = 0.$$

Для любого $u \in (0, 1)$ последовательность (S_n) ограничена и

$$\begin{aligned}
I_2(\varepsilon) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon T^{2H}}{\varepsilon \lambda_n^{-1} + \mu^2 T^{2H+1}} (S_n - S_{n-1}) = \\
&= \varepsilon^2 T^{2H} \sum_{n=1}^\infty S_n \frac{\lambda_{n+1}^{-1} - \lambda_n^{-1}}{(\varepsilon \lambda_{n+1}^{-1} + \mu^2 T^{2H+1})(\varepsilon \lambda_n^{-1} + \mu^2 T^{2H+1})}.
\end{aligned}$$

По формуле (2.4) для всех достаточно больших n имеем

$$|\lambda_{n+1}^{-1} - \lambda_n^{-1}| \leq C_1 n^{2H} \quad \text{и} \quad \lambda_n^{-1} \geq C_2 n^{2H+1}$$

с некоторыми постоянными C_1 и C_2 . Тогда, поскольку (S_n) ограничена, существует постоянная C_3 , такая что

$$|I_2(\varepsilon)| \leq C_3 \varepsilon^2 \sum_{n=1}^\infty \frac{n^{2H}}{(\varepsilon n^{2H+1} + 1)^2} \asymp C_3 \varepsilon^2 \int_1^\infty \frac{x^{2H}}{(\varepsilon x^{2H+1} + 1)^2} dx \asymp$$

$$\asymp C_3 \varepsilon \int_0^\infty \frac{y^{2H}}{(y^{2H+1} + 1)^2} dy = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Таким образом, второй член в (3.2) асимптотически пренебрежим, что завершает доказательство теоремы.

4. Доказательство теоремы 2

Основная идея доказательства заключается в сведении спектральной задачи к решению некоторой вспомогательной системы интегральных и алгебраических уравнений, которая оказывается более удобной для асимптотического анализа. Подробное описание метода можно найти в [10, секция 4], а используемые понятия и результаты из комплексного анализа — в монографии [11].

4.1. Случай $H > \frac{1}{2}$

В этом случае выражение (1.3) можно упростить, поменяв порядок интегрирования и производной:

$$K(s, t) = \int_0^t \int_0^s e^{\beta(t-v)} e^{\beta(s-u)} c_\alpha |u - v|^{-\alpha} du dv,$$

где введен новый параметр $\alpha := 2 - 2H \in (0, 1)$ и постоянная $c_\alpha = (1 - \frac{\alpha}{2})(1 - \alpha)$. В этих обозначениях спектральная задача имеет вид

$$(4.1) \quad \int_0^1 \left(\int_0^x \int_0^y e^{\beta(x-u)} e^{\beta(y-v)} c_\alpha |u - v|^{-\alpha} dv du \right) \varphi(y) dy = \lambda \varphi(x), \quad x \in [0, 1].$$

4.1.1. Преобразование Лапласа. Рассмотрим преобразование Лапласа от решения уравнения (4.1)

$$(4.2) \quad \widehat{\varphi}(z) = \int_0^1 e^{-zx} \varphi(x) dx, \quad z \in \mathbb{C},$$

которое является аналитической функцией. В следующей лемме, используя особую структуру ядра, получим выражение для $\widehat{\varphi}(z)$, которое играет ключевую роль в реализации метода.

Лемма 1. Пусть (λ, φ) решают спектральную задачу (4.1), тогда преобразование Лапласа (4.2) допускает представление

$$(4.3) \quad \widehat{\varphi}(z) = \widehat{\varphi}(-\beta) - \frac{z + \beta}{\Lambda(z)} \left(\Phi_0(z) + e^{-z} \Phi_1(-z) \right),$$

где

$$(4.4) \quad \Lambda(z) = \frac{\Gamma(\alpha)\lambda}{c_\alpha}(z^2 - \beta^2) + \int_0^\infty \frac{2t^\alpha}{t^2 - z^2} dt,$$

а функции $\Phi_0(z)$ и $\Phi_1(z)$, определенные ниже в (4.17), кусочно-голоморфны на разрезанной плоскости $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

Доказательство леммы 1. Продифференцируем обе части уравнения (4.1). Получим

$$(4.5) \quad \int_0^1 \left(\int_0^y e^{-\beta v} c_\alpha |x - v|^{-\alpha} dv \right) e^{\beta y} \varphi(y) dy + \beta \lambda \varphi(x) = \lambda \varphi'(x), \quad x \in [0, 1].$$

Далее, введем функцию

$$(4.6) \quad \psi(x) := e^{-\beta x} \int_x^1 e^{\beta r} \varphi(r) dr$$

и, интегрируя по частям, получим

$$\int_0^1 \left(\int_0^y e^{-\beta v} c_\alpha |x - v|^{-\alpha} dv \right) e^{\beta y} \varphi(y) dy = \int_0^1 c_\alpha |x - y|^{-\alpha} \psi(y) dy.$$

Теперь уравнение (4.5) эквивалентно обобщенной спектральной задаче

$$(4.7) \quad \int_0^1 c_\alpha |x - y|^{-\alpha} \psi(y) dy = \lambda \left(\beta^2 \psi(x) - \psi''(x) \right), \quad x \in [0, 1],$$

$$\psi(1) = 0, \quad \psi'(0) + \beta \psi(0) = 0,$$

где краевые условия следуют из определения (4.6), так как

$$(4.8) \quad \psi'(x) + \beta \psi(x) = -\varphi(x).$$

Подстановка тождества

$$|x - y|^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t|x-y|} dt, \quad \alpha \in (0, 1),$$

в (4.7) дает

$$(4.9) \quad \int_0^\infty t^{\alpha-1} u(x, t) dt = \frac{\Gamma(\alpha)\lambda}{c_\alpha} \left(\beta^2 \psi(x) - \psi''(x) \right),$$

где была определена функция

$$(4.10) \quad u(x, t) := \int_0^1 \psi(y) e^{-t|x-y|} dy.$$

С другой стороны, дважды интегрируя по частям и используя краевые условия задачи (4.7), имеем

$$(4.11) \quad \widehat{\psi}''(z) = \int_0^1 \psi''(x) e^{-zx} dx = \psi'(1) e^{-z} + (\beta - z) \psi(0) + z^2 \widehat{\psi}(z).$$

Применяя преобразование Лапласа к (4.9) и подставляя (4.11), получим

$$(4.12) \quad \int_0^\infty t^{\alpha-1} \widehat{u}(z, t) dt = \frac{\Gamma(\alpha) \lambda}{c_\alpha} \left((\beta^2 - z^2) \widehat{\psi}(z) - \psi'(1) e^{-z} - (\beta - z) \psi(0) \right).$$

Другое выражение для $\widehat{u}(z, t)$ можно вывести, используя определение (4.10). Продифференцировав два раза, получаем уравнение

$$(4.13) \quad u''(x, t) = t^2 u(x, t) - 2t \psi(x)$$

и граничные условия

$$(4.14) \quad \begin{aligned} u'(0, t) &= tu(0, t), \\ u'(1, t) &= -tu(1, t). \end{aligned}$$

Теперь дважды интегрируя по частям, имеем

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \widehat{u}''(z, t) &= \int_0^1 u''(x, t) e^{-zx} dx = u'(1, t) e^{-z} - u'(0, t) + z \widehat{u}'(z, t) = \\ &= (z - t) e^{-z} u(1, t) - (z + t) u(0, t) + z^2 \widehat{u}(z, t), \end{aligned}$$

где использовано (4.14). Преобразование Лапласа от (4.13) и подстановка выражения (4.15) дают

$$(4.16) \quad \widehat{u}(z, t) = \frac{1}{z - t} u(0, t) - \frac{1}{z + t} u(1, t) e^{-z} - \frac{2t}{z^2 - t^2} \widehat{\psi}(z).$$

Подставляя (4.16) в (4.12) и упрощая, получаем

$$\widehat{\psi}(z) = \frac{1}{\Lambda(z)} \left(\Phi_0(z) + e^{-z} \Phi_1(-z) \right),$$

где функция $\Lambda(z)$ определена в (4.4) и

$$(4.17) \quad \begin{aligned} \Phi_0(z) &:= -\frac{\Gamma(\alpha)\lambda}{c_\alpha}(\beta - z)\psi(0) + \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{t-z}u(0,t)dt, \\ \Phi_1(z) &:= -\frac{\Gamma(\alpha)\lambda}{c_\alpha}\psi'(1) + \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{t-z}u(1,t)dt. \end{aligned}$$

Так как $\widehat{\psi}'(z) = -\psi(0) + z\widehat{\psi}(z)$ и $\widehat{\psi}'(z) + \beta\widehat{\psi}(z) = -\widehat{\varphi}(z)$ (см.(4.8)), получаем

$$\widehat{\varphi}(z) = \psi(0) - (z + \beta)\widehat{\psi}(z),$$

что и дает (4.3).

Следующая лемма описывает структуру функции $\Lambda(z)$ и доказывает ряд ее свойств, которые будут использоваться далее.

Лемма 2.

а. Функция $\Lambda(z)$ допускает явное выражение

$$(4.18) \quad \Lambda(z) = \frac{\Gamma(\alpha)\lambda}{c_\alpha}(z^2 - \beta^2) + z^{\alpha-1} \frac{\pi}{\cos \frac{\pi}{2}\alpha} \begin{cases} e^{\frac{1-\alpha}{2}\pi i}, & \arg(z) \in (0, \pi) \\ e^{-\frac{1-\alpha}{2}\pi i}, & \arg(z) \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

и имеет нули в точках $\pm z_0 = \pm i\nu$, где $\nu > 0$ — вещественный корень уравнения

$$(4.19) \quad \lambda = \frac{c_\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\pi}{\cos \frac{\pi}{2}\alpha} \frac{\nu^{\alpha-1}}{\beta^2 + \nu^2}.$$

б. Пределы $\Lambda^\pm(t) = \lim_{z \rightarrow t^\pm} \Lambda(z)$, когда z стремится к $t \in \mathbb{R}$ в верхней и нижней полуплоскостях, задаются выражениями

$$\Lambda^\pm(t) = \frac{\Gamma(\alpha)\lambda}{c_\alpha}(t^2 - \beta^2) + |t|^{\alpha-1} \frac{\pi}{\cos \frac{\pi}{2}\alpha} \begin{cases} e^{\pm \frac{1-\alpha}{2}\pi i}, & t > 0 \\ e^{\mp \frac{1-\alpha}{2}\pi i}, & t < 0 \end{cases}$$

и удовлетворяют равенствам

$$(4.20) \quad \Lambda^+(t) = \overline{\Lambda^-(t)},$$

$$(4.21) \quad \frac{\Lambda^+(t)}{\Lambda^-(t)} = \frac{\Lambda^-(-t)}{\Lambda^+(-t)},$$

$$(4.22) \quad |\Lambda^+(t)| = |\Lambda^+(-t)|.$$

с. Аргумент $\theta(t) := \arg\{\Lambda^+(t)\} \in (-\pi, \pi]$ — нечетная функция, $\theta(-t) = -\theta(t)$, задаваемая формулой

$$(4.23) \quad \theta(t) = \arctan \frac{\sin \frac{1-\alpha}{2}\pi}{\frac{(t/\nu)^2 - (\beta/\nu)^2}{1 + (\beta/\nu)^2} (t/\nu)^{1-\alpha} + \cos \frac{1-\alpha}{2}\pi}, \quad t > 0,$$

непрерывная на $(0, \infty)$, имеющая пределы

$$\theta(0+) := \frac{1-\alpha}{2}\pi > 0 \quad \text{и} \quad \theta(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = 0.$$

При всех достаточно больших ν функция $\theta(u; \nu) := \theta(u\nu)$ удовлетворяет неравенству

$$(4.24) \quad \left| \theta(u; \nu) - \theta_0(u) \right| \leq g(u)(\beta/\nu)^2,$$

где $g(u)$ не зависит от ν , непрерывна на $[0, \infty)$, растет, как $g(u) \sim u^{1-\alpha}$ при $u \rightarrow 0$ и $g(u) \sim u^{\alpha-3}$ при $u \rightarrow \infty$, а

$$(4.25) \quad \theta_0(u) := \lim_{\nu \rightarrow \infty} \theta(u\nu) = \arctan \frac{\sin \frac{1-\alpha}{2}\pi}{u^{3-\alpha} + \cos \frac{1-\alpha}{2}\pi}.$$

При любом $\beta \in \mathbb{R}$

$$(4.26) \quad b_\alpha(\beta, \nu) := \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \theta(u; \nu) du \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \theta_0(u) du = \frac{\sin(\frac{\pi}{3-\alpha} \frac{1-\alpha}{2})}{\sin \frac{\pi}{3-\alpha}} =: b_\alpha$$

и

$$(4.27) \quad |b_\alpha(\beta, \nu) - b_\alpha| \leq C(\beta/\nu)^2$$

с некоторой постоянной C .

Доказательство леммы 2.

а. Интегрируя по подходящему контуру, легко получить тождество

$$\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{t^2 - z^2} dt = z^{\alpha-1} \frac{1}{2} \frac{\pi}{\cos \frac{\pi}{2}\alpha} \begin{cases} e^{\frac{1-\alpha}{2}\pi i}, & \arg(z) \in (0, \pi) \\ e^{-\frac{1-\alpha}{2}\pi i}, & \arg(z) \in (-\pi, 0), \end{cases}$$

которое и дает выражение (4.18). Для того чтобы найти все нули $\Lambda(z)$ в верхней полуплоскости, положим $z = \nu e^{i\omega}$, где $\nu > 0$ и $\omega \in (0, \pi)$. Тогда уравнение $\Lambda(z) = 0$ принимает вид

$$\kappa(\nu^2 e^{2i\omega} - \beta^2) + \nu^{\alpha-1} e^{i(\omega - \frac{\pi}{2})(\alpha-1)} = 0,$$

где введена постоянная

$$\kappa := \frac{\lambda \Gamma(\alpha) \cos \frac{\pi}{2} \alpha}{c_\alpha \pi}.$$

Мнимая часть этого уравнения дает

$$\kappa \nu^2 \sin 2\omega + \nu^{\alpha-1} \sin(\omega - \frac{\pi}{2})(\alpha - 1) = 0.$$

При всех $\omega \in (0, \frac{\pi}{2})$ и $\omega \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ оба синуса здесь имеют один и тот же знак и поэтому равенство возможно только при $\omega = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, в верхней полуплоскости $\Lambda(z)$ обнуляется только в точке $i\nu$, где ν удовлетворяет уравнению (4.19). По определению (4.4) функция $\Lambda(z)$ имеет только комплексно сопряженные нули и поэтому единственный ноль в нижней полуплоскости — это $-i\nu$.

б. Все утверждения проверяются непосредственно с использованием явного выражения (4.18).

с. Заметим, что функция $f(u) := (u^2 - (\beta/\nu)^2)u^{1-\alpha}$, $u \in \mathbb{R}_+$ обнуляется в $u = 0$ и $u = \beta/\nu$ и имеет единственный минимум $\min_{u \geq 0} f(u) = -(\beta/\nu)^{3-\alpha} \times \times \frac{2}{3-\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{3-\alpha} \right)^{\frac{1-\alpha}{2}}$. Поэтому при фиксированном β и всех достаточно больших ν знаменатель (4.23) отделен от нуля равномерно по u . Это свойство позволяет легко проверить все дальнейшие утверждения (значение β_α получено в [10]).

4.1.2. Устранение особенностей. Согласно п. (а) леммы 2 выражение в (4.3) претерпевает разрыв на вещественной оси и имеет два чисто мнимых полюса. Так как преобразование Лапласа является целой функцией, обе эти особенности должны быть устранимыми, т.е. функции $\Phi_0(z)$ и $\Phi_1(z)$ должны удовлетворять условиям

$$(4.28) \quad \Phi_0(\pm z_0) + e^{\mp z_0} \Phi_1(\mp z_0) = 0$$

и

$$\lim_{z \rightarrow t^+} \frac{1}{\Lambda(z)} (e^{-z} \Phi_1(-z) + \Phi_0(z)) = \lim_{z \rightarrow t^-} \frac{1}{\Lambda(z)} (e^{-z} \Phi_1(-z) + \Phi_0(z)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Последнее условие может быть переписано как

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Lambda^+(t)} \left(\Phi_0^+(t) + e^{-t} \Phi_1(-t) \right) &= \frac{1}{\Lambda^-(t)} \left(\Phi_0^-(t) + e^{-t} \Phi_1(-t) \right), \quad t > 0, \\ \frac{1}{\Lambda^+(t)} \left(\Phi_0(t) + e^{-t} \Phi_1^-(t) \right) &= \frac{1}{\Lambda^-(t)} \left(\Phi_0(t) + e^{-t} \Phi_1^+(t) \right), \quad t < 0 \end{aligned}$$

или (см.(4.21))

$$(4.29) \quad \begin{aligned} \Phi_0^+(t) - \frac{\Lambda^+(t)}{\Lambda^-(t)} \Phi_0^-(t) &= e^{-t} \Phi_1(-t) \left(\frac{\Lambda^+(t)}{\Lambda^-(t)} - 1 \right), \\ \Phi_1^+(t) - \frac{\Lambda^+(t)}{\Lambda^-(t)} \Phi_1^-(t) &= e^{-t} \Phi_0(-t) \left(\frac{\Lambda^+(t)}{\Lambda^-(t)} - 1 \right), \end{aligned} \quad t > 0.$$

Поскольку $\Lambda^-(t) = \overline{\Lambda^+(t)}$ и $\theta(t) = \arg\{\Lambda^+(t)\}$, имеем

$$\frac{\Lambda^+(t)}{\Lambda^-(t)} - 1 = e^{2i\theta(t)} - 1 = 2ie^{i\theta(t)} \sin \theta(t).$$

Значит, (4.29) можно переписать как

$$(4.30) \quad \begin{aligned} \Phi_0^+(t) - e^{2i\theta(t)} \Phi_0^-(t) &= 2ie^{-t} e^{i\theta(t)} \sin \theta(t) \Phi_1(-t), \\ \Phi_1^+(t) - e^{2i\theta(t)} \Phi_1^-(t) &= 2ie^{-t} e^{i\theta(t)} \sin \theta(t) \Phi_0(-t), \end{aligned} \quad t > 0.$$

Из определения (4.10) следует, что $tu(0, t)$ и $tu(1, t)$ ограничены, и поэтому функции, определенные в (4.17), удовлетворяют следующим априорным оценкам:

$$(4.31) \quad \Phi_1(z) \sim z^{\alpha-1} \quad \text{и} \quad \Phi_0(z) \sim z^{\alpha-1} \quad \text{при} \quad z \rightarrow 0,$$

а также

$$(4.32) \quad \Phi_0(z) = 2c_2(\beta - z) + O(z^{-1}) \quad \text{и} \quad \Phi_1(z) = 2c_1 + O(z^{-1}) \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty,$$

где были введены постоянные

$$(4.33) \quad c_1 = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\alpha)\lambda}{c_\alpha} \psi'(1) \quad \text{и} \quad c_2 = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\alpha)\lambda}{c_\alpha} \psi(0).$$

4.1.3. Сведение к эквивалентной задаче. Преобразование Лапласа любого решения спектральной задачи (4.1) задается формулой (4.3), где кусочно-голоморфные функции $\Phi_0(z)$ и $\Phi_1(z)$ удовлетворяют оценкам (4.32) и (4.31), краевым условиям (4.30) и алгебраическим ограничениям (4.28). Установим взаимно однозначное соответствие между всеми такими функциями и решениями некоторой системы интегральных уравнений на вещественной полупрямой. Для этой цели воспользуемся техникой решения краевой задачи Гильберта.

Рассмотрим сначала однородную задачу Гильберта, состоящую в нахождении функции $X(z)$, кусочно-голоморфной на разрезанной плоскости $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ и удовлетворяющей краевым условиям

$$(4.34) \quad X^+(t) - e^{2i\theta(t)} X^-(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Все такие функции могут быть найдены с помощью формулы Сохоцкого–Племеля:

$$(4.35) \quad X(z) = z^k X_c(z) = z^k \exp \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\theta(t)}{t-z} dt \right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+,$$

где k — любое целое число, которое будет выбрано позже. Каноническая часть $X_c(z)$ этого выражения удовлетворяет оценкам

$$(4.36) \quad X_c(z) = 1 - z^{-1} \nu b_\alpha(\beta, \nu) + O(z^{-2}) \quad \text{при } z \rightarrow \infty,$$

где $b_\alpha(\beta, \nu)$ определено в (4.26), и

$$(4.37) \quad X_c(z) \sim z^{\frac{\alpha-1}{2}} \quad \text{при } z \rightarrow 0.$$

Введем функции

$$(4.38) \quad \begin{aligned} S(z) &:= \frac{\Phi_0(z) + \Phi_1(z)}{2X(z)}, \\ D(z) &:= \frac{\Phi_0(z) - \Phi_1(z)}{2X(z)}, \end{aligned}$$

которые, благодаря (4.30) и (4.34), удовлетворяют *независимым* краевым условиям

$$(4.39) \quad \begin{aligned} S^+(t) - S^-(t) &= 2ih(t)e^{-t}S(-t), \\ D^+(t) - D^-(t) &= -2ih(t)e^{-t}D(-t), \end{aligned} \quad t > 0,$$

где

$$h(t) := e^{i\theta(t)} \sin \theta(t) \frac{X(-t)}{X^+(t)}.$$

Вычисления, подобные уравнению (5.37) в [10], показывают, что эта функция допускает представление

$$(4.40) \quad h(t) = \exp \left(-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \theta'(s) \log \left| \frac{t+s}{t-s} \right| ds \right) \sin \theta(t)$$

и поэтому вещественна, удовлетворяет условию Гёльдера на $\mathbb{R}_+$ и имеет предел

$$h(0) := \sin \theta(0+) = \sin \frac{1-\alpha}{2} \pi.$$

Применяя формулу Сохоцкого–Племеля к (4.39), получаем следующее представление для функций из (4.38):

$$(4.41) \quad \begin{aligned} S(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{h(t)e^{-t}}{t-z} S(-t) dt + P_S(z), \\ D(z) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{h(t)e^{-t}}{t-z} D(-t) dt + P_D(z), \end{aligned}$$

где полиномы $P_S(z)$ и $P_D(z)$ выбираются в соответствии с априорной оценкой роста $S(z)$ и $D(z)$ при $z \rightarrow \infty$. Заметим, что интегралы в правой части (4.41) хорошо определены, только если $S(-t)$ и $D(-t)$ интегрируемы в нуле. Ввиду оценок (4.31) и (4.37), это ограничивает выбор целого числа k в выражении (4.35) неравенством $k < (\alpha + 1)/2$. Далее, понадобится, чтобы $S(-t)$ и $D(-t)$ были так же квадратично интегрируемы, что сужает ограничение до $k < \alpha/2$. Удобным выбором, который удовлетворяет всем этим условиям, будет $k = 0$, что соответствует определению $X(z) := X_c(z)$.

Так как для любых вещественных чисел a , b и c верно

$$\frac{az + b + O(z^{-1})}{1 - cz^{-1} + O(z^{-2})} = a(z + c) + b + O(z^{-1}) \quad \text{при } z \rightarrow \infty,$$

априорные оценки (4.32) и (4.36) дают

$$\begin{aligned} S(z) &= c_2(-z + \beta - \nu b_\alpha(\beta, \nu)) + c_1 + O(z^{-1}), \\ D(z) &= c_2(-z + \beta - \nu b_\alpha(\beta, \nu)) - c_1 + O(z^{-1}). \end{aligned}$$

Эта асимптотика определяет выбор полиномов в (4.41):

$$\begin{aligned} P_S(z) &:= c_2(-z + \beta - \nu b_\alpha(\beta, \nu)) + c_1, \\ P_D(z) &:= c_2(-z + \beta - \nu b_\alpha(\beta, \nu)) - c_1, \end{aligned}$$

где постоянные c_1 и c_2 определяются (4.33). Теперь, подставляя $z := -t$ в (4.41), где $t \in \mathbb{R}_+$, получаем интегральные уравнения для сужений $S(-t)$ и $D(-t)$:

$$\begin{aligned} S(-t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{h(s)e^{-s}}{s+t} S(-s) ds + c_2(t + \beta - \nu b_\alpha(\beta, \nu)) + c_1, \\ D(-t) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{h(s)e^{-s}}{s+t} D(-s) ds + c_2(t + \beta - \nu b_\alpha(\beta, \nu)) - c_1. \end{aligned}$$

Рассмотрим вспомогательные интегральные уравнения

$$(4.42) \quad p^\pm_j(t) = \pm \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{h_\beta(s; \nu)e^{-\nu s}}{s+t} p^\pm_j(s) ds + t^j, \quad j \in \{0, 1\},$$

где $h_\beta(u; \nu) := h(u\nu)$, $u > 0$. Ниже покажем, что для всех достаточно больших ν эти уравнения имеют единственные решения в классе функций, таких что $p^\pm_j(t) - t^j$ принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R}_+)$. Продолжим определение решений $p^\pm_j(z)$ на разрезанную плоскость, заменив t в правой части уравнения (4.42) на $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

Так как по построению $S(-t)$ и $D(-t)$ квадратично интегрируемы в нуле, по линейности имеем

$$\begin{aligned} S(z\nu) &= c_2\nu p^+_1(-z) + \left(c_2(\beta - \nu b_\alpha(\beta, \nu)) + c_1\right)p^+_0(-z), \\ D(z\nu) &= c_2\nu p^-_1(-z) + \left(c_2(\beta - \nu b_\alpha(\beta, \nu)) - c_1\right)p^-_0(-z). \end{aligned}$$

Поэтому, положив

$$\begin{aligned} a_\pm(z) &:= p^+_0(z) \pm p^-_0(z), \\ b_\pm(z) &:= p^+_1(z) \pm p^-_1(z) \end{aligned}$$

и используя определение (4.38), получим

$$\begin{aligned} (4.43) \quad \Phi_0(z\nu) &= c_2\nu X(z\nu)(b_+(-z) + (\beta/\nu - b_\alpha(\beta, \nu))a_+(-z)) + c_1X(z\nu)a_-(-z), \\ \Phi_1(z\nu) &= c_2\nu X(z\nu)(b_-(-z) + (\beta/\nu - b_\alpha(\beta, \nu))a_-(-z)) + c_1X(z\nu)a_+(-z). \end{aligned}$$

Теперь, определив $X_\beta(z; \nu) := X(z\nu)$, подставим эти выражения в условие (4.28) и получим

$$(4.44) \quad c_2\nu\xi + c_1\eta = 0,$$

где

$$\begin{aligned} (4.45) \quad \xi &:= e^{i\nu/2}X_\beta(i; \nu)\left(b_+(-i) + (\beta/\nu - b_\alpha(\beta, \nu))a_+(-i)\right) + \\ &\quad + e^{-i\nu/2}X_\beta(-i; \nu)\left(b_-(-i) + (\beta/\nu - b_\alpha(\beta, \nu))a_-(-i)\right), \\ \eta &:= e^{i\nu/2}X_\beta(i; \nu)a_-(-i) + e^{-i\nu/2}X_\beta(-i; \nu)a_+(-i). \end{aligned}$$

Так как постоянные c_1 и c_2 вещественны, нетривиальные решения линейной алгебраической системы (4.44) существуют тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$(4.46) \quad \text{Im}\{\xi\bar{\eta}\} = 0,$$

при этом $c_1 = -c_2\nu\xi/\eta$. Подставляя это равенство в (4.43), получим

$$\begin{aligned} (4.47) \quad \Phi_0(z)/c_2\nu &= X(z)\left(b_+\left(-\frac{z}{\nu}\right) + \left(\frac{\beta}{\nu} - b_\alpha(\beta, \nu)\right)a_+\left(-\frac{z}{\nu}\right)\right) - \frac{\xi}{\eta}X(z)a_-\left(-\frac{z}{\nu}\right), \\ \Phi_1(z)/c_2\nu &= X(z)\left(b_-\left(-\frac{z}{\nu}\right) + \left(\frac{\beta}{\nu} - b_\alpha(\beta, \nu)\right)a_-\left(-\frac{z}{\nu}\right)\right) - \frac{\xi}{\eta}X(z)a_+\left(-\frac{z}{\nu}\right). \end{aligned}$$

Итак, получена задача, эквивалентная уравнению (4.1).

Лемма 3. Пусть $(p^\pm_0, p^\pm_1, \nu)$ — решение системы, состоящей из интегральных уравнений (4.42) и алгебраических условий (4.46). Определим φ преобразованием Лапласа, задающимся выражением (4.3), где $\Phi_0(z)$ и $\Phi_1(z)$ определены формулами (4.47), а число $\lambda \in \mathbb{R}_+$ — формулой (4.19). Тогда пара (λ, φ) решает спектральную задачу (4.1). Верно и обратное: по любому решению (λ, φ) задачи (4.1) можно построить решение вышеупомянутой интегрально-алгебраической системы.

В следующей лемме получена точная асимптотика $X_\beta(i; \nu)$ при $\nu \rightarrow \infty$, которая понадобится в дальнейшем для асимптотического анализа.

Лемма 4.

$$\arg \{X_\beta(i; \nu)\} = \frac{1-\alpha}{8}\pi + O(\nu^{-2}) \quad \text{и} \quad |X_\beta(i; \nu)| = \sqrt{\frac{3-\alpha}{2}} + O(\nu^{-2}) \quad \nu \rightarrow \infty.$$

Доказательство леммы 4. Постоянные в правой части — аргумент и абсолютное значение предела, см. (4.25),

$$X_0(i) := \lim_{\nu \rightarrow \infty} X_\beta(i; \nu) = \exp \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\theta_0(u)}{u-i} du \right),$$

вычисленные в [10, лемма 5.5]. Оценки остатков следуют из неравенств (4.24).

4.1.4. Свойства интегрально-алгебраической системы. Разрешимость системы, введенной в лемме 3, обеспечивается сжатием оператора

$$(Af)(t) := \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{h_\beta(s; \nu) e^{-\nu s}}{s+t} f(s) ds,$$

где $h_\beta(u; \nu) := h(u\nu)$ (см. (4.40)):

$$(4.48) \quad h_\beta(u; \nu) = \exp \left(-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \theta'(v; \nu) \log \left| \frac{u+v}{u-v} \right| dv \right) \sin \theta(u; \nu).$$

Лемма 5. Оператор A является сжимающим на пространстве функций $L^2(\mathbb{R}_+)$ для всех достаточно больших ν , а именно, для каждого $\alpha_0 \in (0, 1]$ существует $\varepsilon > 0$ и постоянная $\nu' > 0$, такие что $\|A\| \leq 1 - \varepsilon$ для всех $\nu \geq \nu'$ и $\alpha \in [\alpha_0, 1]$.

Доказательство леммы 5. Непосредственное вычисление показывает, что для всех достаточно больших ν и всех $\alpha \in [\alpha_0, 1]$ показатель экспоненты в (4.48) ограничен непрерывной функцией $f(u)$, не зависящей от α и ν , пределы которой при $u \rightarrow 0$ и $u \rightarrow \infty$ равны 1. В частности,

$$h_\beta(u, \nu) \leq f(u) \sin \theta(u; \nu) \leq \|f\|_\infty.$$

Далее, так как $\theta_0(0+) = \frac{1-\alpha}{2}\pi$, благодаря оценке (4.24), существует окрестность нуля, где при всех достаточно больших ν справедлива верхняя оценка

$$\sin \theta(u; \nu) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{1-\alpha_0}{2}\pi =: 1 - 3\varepsilon.$$

Так как $f(0) = 1$, это так же гарантирует, что $h_\beta(u, \nu) < 1 - 2\varepsilon$ в некоторой окрестности нуля. Тогда, поскольку $\sup_{\nu > 0} \|h_\beta\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, можно выбрать постоянную ν' такую что $h_\beta(u, \nu) e^{-\nu u} < 1 - \varepsilon$ при всех $u > 0$ и всех $\nu \geq \nu'$. Далее доказательство проводится точно так же, как в [10, лемма 5.6].

Следующие оценки играют ключевую роль в асимптотическом анализе интегрально-алгебраической системы леммы 3.

Лемма 6. Для любого $\alpha_0 \in (0, 1]$ существуют постоянные ν' и C , такие что при всех $\nu \geq \nu'$ и $\alpha \in [\alpha_0, 1]$

$$\begin{aligned} |a_-(\pm i)| &\leq C\nu^{-1}, & |a_+(\pm i) - 2| &\leq C\nu^{-1}, \\ |b_-(\pm i)| &\leq C\nu^{-2}, & |b_+(\pm i) \mp 2i| &\leq C\nu^{-2}, \end{aligned}$$

а также при любых $\tau > 0$

$$\begin{aligned} |a_-(\tau)| &\leq C\nu^{-1}\tau^{-1}, & |a_+(\tau) - 2| &\leq C\nu^{-1}\tau^{-1}, \\ |b_-(\tau)| &\leq C\nu^{-2}\tau^{-1}, & |b_+(\tau) \mp 2\tau| &\leq C\nu^{-2}\tau^{-1}. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 6. Как показано в доказательстве предыдущей леммы, функция $h_\beta(u; \nu)$ может быть ограничена постоянной, зависящей только от α_0 , при всех достаточно больших ν . Эта оценка позволяет провести доказательство точно так же, как в [10, лемма 5.7].

4.1.5. Обращение преобразования Лапласа. В следующей лемме собственные функции выражаются в терминах решений интегрально-алгебраической системы уравнений леммы 3.

Лемма 7. Пусть (Φ_0, Φ_1, ν) являются решениями интегрально-алгебраической системы леммы 3. Тогда функция φ , определяемая преобразованием Лапласа (4.3), задается равенством

$$\begin{aligned} (4.49) \quad \varphi(x) = & -\nu^{3-\alpha} \frac{\cos \frac{\pi}{2} \alpha}{\pi} 2 \operatorname{Re} \left\{ e^{i\nu x} \Phi_0(i\nu) \frac{1 - i(\beta/\nu)}{\frac{2}{(\beta/\nu)^2 + 1} - \alpha + 1} \right\} + \nu^{3-\alpha} \frac{\cos \frac{\pi}{2} \alpha}{\pi} \frac{1}{\pi} \times \\ & \times \int_0^\infty \frac{\sin \theta_\beta(u; \nu)}{\gamma_\beta(u; \nu)} \left(e^{-(1-x)u\nu} \left(u + \frac{\beta}{\nu} \right) \Phi_1(-u\nu) - e^{-u\nu x} \left(u - \frac{\beta}{\nu} \right) \Phi_0(-u\nu) \right) du, \end{aligned}$$

где $\gamma_\beta(u; \nu)$ определена формулой (4.51) ниже. Также имеют место равенства

$$\begin{aligned} (4.50) \quad \int_0^1 e^{\beta x} \varphi(x) dx &= -\nu^{3-\alpha} \frac{\cos \frac{\pi}{2} \alpha}{\pi} 2c_2 (1 + (\beta/\nu)^2), \\ \varphi(1) &= -\nu^{3-\alpha} \frac{\cos \frac{\pi}{2} \alpha}{\pi} 2c_2 \nu \frac{\xi}{\eta} (1 + (\beta/\nu)^2). \end{aligned}$$

Доказательство леммы 7. Поскольку $\widehat{\varphi}(z)$ — аналитическая функция, обращение преобразования Лапласа (4.3) может производиться интегрированием по мнимой оси:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-iR}^{iR} \left(\frac{z + \beta}{\Lambda(z)} \Phi_0(z) + \frac{z + \beta}{\Lambda(z)} e^{-z} \Phi_1(-z) - \psi(0) \right) e^{zx} dz = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-iR}^{iR} (f_0(z) + f_1(z)) dz, \end{aligned}$$

где были введены функции

$$f_0(z) = e^{zx} \left((z + \beta) \frac{\Phi_0(z)}{\Lambda(z)} - \psi(0) \right) \quad \text{и} \quad f_1(z) = e^{(x-1)z} (z + \beta) \frac{\Phi_1(-z)}{\Lambda(z)}.$$

Интегрируя по подходящему контуру, как в доказательстве леммы 5.8 в [10], получаем

$$\begin{aligned} \int_{-i\infty}^{i\infty} (f_1(z) + f_0(z)) dz &= 2\pi i \left(\text{Res}(f_0, z_0) + \text{Res}(f_0, -z_0) \right) + \\ &+ \int_0^{\infty} (f_1^+(t) - f_1^-(t)) dt + \int_0^{\infty} (f_0^-(-t) - f_0^+(-t)) dt. \end{aligned}$$

Используя симметрии (4.20) и (4.22), а также определение $\theta(t)$, имеем

$$\begin{aligned} f_1^+(t) - f_1^-(t) &= -e^{(x-1)t} (t + \beta) \Phi_1(-t) \frac{2i \sin \theta(t)}{\gamma(t)}, \\ f_0^-(-t) - f_0^+(-t) &= -e^{-tx} (-t + \beta) \Phi_0(-t) \frac{2i \sin \theta(t)}{\gamma(t)}, \end{aligned}$$

где $\gamma(t) = |\Lambda^+(t)|$, а значит и

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\text{Res}(f_0, z_0) - \text{Res}(f_0, -z_0) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \theta(t)}{\gamma(t)} \left(e^{-(1-x)t} (t + \beta) \Phi_1(-t) - e^{-tx} (t - \beta) \Phi_0(-t) \right) dt. \end{aligned}$$

Вычеты здесь легко считаются

$$\begin{aligned} \text{Res}(f_0, z_0) &= e^{i\nu x} (i\nu + \beta) \frac{\Phi_0(i\nu)}{\Lambda'(i\nu)} = e^{i\nu x} \Phi_0(i\nu) \frac{\cos \frac{\pi}{2}\alpha}{\pi} \nu^{3-\alpha} \frac{1 - i(\beta/\nu)}{\frac{2}{(\beta/\nu)^2+1} - \alpha + 1}, \\ \text{Res}(f_0, -z_0) &= e^{-i\nu x} (-i\nu + \beta) \frac{\Phi_0(-i\nu)}{\Lambda'(-i\nu)} = \\ &= e^{-i\nu x} \Phi_0(-i\nu) \frac{\cos \frac{\pi}{2}\alpha}{\pi} \nu^{3-\alpha} \frac{1 + i(\beta/\nu)}{\frac{2}{(\beta/\nu)^2+1} - \alpha + 1} \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$\text{Res}(f_0, z_0) + \text{Res}(f_0, -z_0) = 2\nu^{3-\alpha} \frac{\cos \frac{\pi}{2}\alpha}{\pi} \text{Re} \left\{ e^{i\nu x} \Phi_0(i\nu) \frac{1 - i(\beta/\nu)}{\frac{2}{(\beta/\nu)^2+1} - \alpha + 1} \right\}.$$

Подставляя это выражение, получаем (4.49), где

$$(4.51) \quad \gamma_\beta(u; \nu) = \nu^{1-\alpha} \frac{\cos \frac{\pi}{2}\alpha}{\pi} |\Lambda^+(u\nu)| = \left| \frac{u^2 - (\beta/\nu)^2}{(\beta/\nu)^2 + 1} + u^{\alpha-1} e^{\frac{1-\alpha}{2}\pi i} \right|.$$

Формулы (4.50) следуют из (4.33), (4.19) и (4.44).

4.1.6. *Асимптотический анализ.* По лемме 3 спектральная задача (4.1) сводится к решению интегрально-алгебраической системы уравнений. В следующей лемме получена точная асимптотика его алгебраической части.

Лемма 8. Интегрально-алгебраическая система леммы 3 имеет счетное множество решений, которые могут быть пронумерованы таким образом, что

$$(4.52) \quad \nu_n = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{1-\alpha}{4}\pi + \arcsin \frac{b_\alpha}{\sqrt{1+b_\alpha^2}} + n^{-1}r_n(\alpha), \quad n \rightarrow \infty,$$

где остаток $r_n(\alpha)$ ограничен равномерно по $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in [\alpha_0, 1]$ при всех $\alpha_0 \in (0, 1]$.

Доказательство леммы 8. Доказательство проводится так же, как и в [10, лемма 5.9]. Подставляя оценки, полученные в леммах 6 и 4, а также неравенство (4.27) в определение (4.45), можем записать

$$\xi \bar{\eta} = 4 \frac{3-\alpha}{2} \sqrt{1+b_\alpha^2} \exp \left\{ i \left(\nu + \frac{1-\alpha}{4}\pi - \pi + \arg \{i + b_\alpha\} \right) \right\} (1 + R(\nu)),$$

где функция $R(\nu)$ удовлетворяет неравенству $|R(\nu)| \leq C_1 \nu^{-1}$ для некоторой постоянной C_1 , зависящей только от α_0 . Поэтому уравнение (4.46) принимает вид

$$(4.53) \quad \nu + \frac{1-\alpha}{4}\pi - \pi + \arg \{i + b_\alpha\} - \pi n + \arctan \frac{\operatorname{Im}\{R(\nu)\}}{1 + \operatorname{Re}\{R(\nu)\}} = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Это фиксирует нумерацию всех решений интегрально-алгебраической системы леммы 3. Понятно, что ν положительно для всех n , превосходящих некоторое целое число. Однако на этом этапе существование решения для каждого такого n все еще не очевидно. Оно может быть установлено следующим образом.

Согласно лемме 5 интегральный оператор в правой части уравнений (4.42) является сжимающим на $L_2(\mathbb{R}_+)$ для всех достаточно больших ν . Непосредственное вычисление показывает, что $|R'(\nu)| \leq C_2 \nu^{-1}$ с некоторой постоянной C_2 . Поэтому для всех достаточно больших n система, состоящая из интегральных и алгебраических уравнений (4.42) и (4.53) соответственно, имеет единственное решение, которое может быть получено как неподвижная точка, путем итерирования интегрально-алгебраического оператора. Асимптотика (4.52) следует из (4.53), так как $\arg\{i + b_\alpha\} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{b_\alpha}{\sqrt{1+b_\alpha^2}}$.

Соответствующее асимптотическое приближение собственных функций может быть получено с помощью следующей леммы.

Лемма 9. Собственные функции, пронумерованные как в лемме 8, допускают приближение

$$(4.54) \quad \varphi_n(x) = \sqrt{2} \cos \left(\nu_n x + \frac{1-\alpha}{8}\pi + \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{b_\alpha}{\sqrt{1+b_\alpha^2}} \right) +$$

$$+ \frac{\sqrt{3-\alpha}}{\pi} \int_0^\infty \rho_0(u) \left(-e^{-u\nu_n x} \frac{u-b_\alpha}{\sqrt{1+b_\alpha^2}} - (-1)^n e^{-(1-x)u\nu_n} \right) du + n^{-1} r_n(x),$$

где остаток $r_n(x)$ равномерно ограничен по $n \in \mathbb{N}$ и $x \in [0, 1]$, а

$$\rho_0(u) = \frac{\sin \theta_0(u)}{\gamma_0(u)} X_0(-u).$$

Кроме того,

$$(4.55) \quad \varphi_n(1) \propto -(-1)^n \sqrt{3-\alpha} (1 + O(n^{-1})) \quad u \int_0^1 e^{\beta x} \varphi_n(x) dx \propto -\sqrt{\frac{3-\alpha}{1+b_\alpha^2}} \nu_n^{-1}$$

и

$$(4.56) \quad \int_0^1 \varphi_n(x) dx \propto -\sqrt{\frac{3-\alpha}{1+b_\alpha^2}} \nu_n^{-1}.$$

Доказательство леммы 9.

Положим $\gamma_0(u) := |u + u^{\alpha-2} e^{\frac{1-\alpha}{2}\pi i}|$, тогда согласно (4.51)

$$|\gamma_\beta(u; \nu) - u\gamma_0(u)| \leq 2(\beta/\nu)^2(u^2 + 1).$$

Вместе с (4.24) выражение (4.49) дает

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &\propto -\frac{2}{3-\alpha} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\nu_n x} \Phi_0(i\nu_n) \right\} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \theta_0(u)}{\gamma_0(u)} \left(e^{-(1-x)u\nu_n} \Phi_1(-u\nu_n) - e^{-u\nu_n x} \Phi_0(-u\nu_n) \right) du + n^{-1} r_n(x) \end{aligned}$$

где остаток $r_n(x)$ равномерно ограничен по $n \in \mathbb{N}$ и $x \in [0, 1]$. Приближение (4.54) получается подстановкой оценок из леммы 6 и леммы 4, а также неравенства (4.27) в выражение (4.47) и приведением к единичной $L^2([0, 1])$ норме, так же, как и в (5.52) [10]. Формулы (4.50) дают асимптотики (4.55) с помощью той же нормировки.

Асимптотика (4.56) получается интегрированием (4.49): непосредственное вычисление показывает, что

$$\int_0^1 \varphi_n(x) dx = C\nu_n^{-1} (1 + O(\nu_n^{-1})), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $C\nu_n^{-1}$ совпадает с интегралом выражения (4.54) без остатка. Так как это выражение не зависит от β , постоянный множитель C должен совпадать со значением, которое получается при $\beta = 0$. Другими словами, последовательности интегралов $\int_0^1 \varphi_n(x) dx$ для дробного процесса Орнштейна–Уленбека и дробного броуновского движения имеют одну и ту же асимптотику первого порядка. Поэтому постоянная в (4.56) совпадает с (5.53) в [10].

4.1.7. *Переход к естественной нумерации.* Нумерация, введенная в лемме 8, может не совпадать с *естественной*, при которой последовательность собственных значений убывает. Заметим, что подстановка выражения (4.52) в формулу (4.19) дает последовательность λ_n , убывающую в уже выбранной нумерации. Поэтому начиная с некоторого индекса обе нумерации отличаются только на конечный сдвиг. Для определения этого сдвига можно воспользоваться процедурой калибровки, использующей непрерывность спектра по параметру α и уже известную асимптотику (2.3) для стандартного процесса Орнштейна–Уленбека, соответствующего значению $\alpha = 1$. Калибровка проводится точно так же, как и в случае дробного броуновского движения, см. [10, гл. 5.1.7], которая показывает, что формулы (4.52) и (4.54)–(4.55) сдвигаются на единицу: заменив n на $n - 1$, а α на $2 - 2H$, получим равенство (2.5) из теоремы 2.

4.2. Случай $H < \frac{1}{2}$

В этом случае ковариационная функция задается формулой (1.3) и спектральная задача имеет вид

$$\int_0^1 \left(\int_0^x e^{\beta(x-u)} \frac{d}{du} \int_0^y e^{\beta(y-v)} C_\alpha |u-v|^{1-\alpha} \text{sign}(u-v) dv du \right) \varphi(y) dy = \lambda \varphi(x),$$

где $C_\alpha := 1 - \frac{\alpha}{2}$. Дважды дифференцируя, получаем

$$\int_0^1 \left(\frac{d}{dx} \int_0^y e^{\beta(y-v)} C_\alpha |x-v|^{1-\alpha} \text{sign}(x-v) dv \right) \varphi(y) dy + \beta \lambda \varphi(x) = \lambda \varphi'(x),$$

что может быть переписано как

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \int_0^1 \left(\int_0^y e^{-\beta v} C_\alpha |x-v|^{1-\alpha} \text{sign}(x-v) dv \right) \frac{d}{dy} \int_y^1 e^{\beta r} \varphi(r) dr dy + \beta \lambda \varphi(x) = \\ = \lambda \varphi'(x). \end{aligned}$$

Интегрирование по частям дает

$$\frac{d}{dx} \int_0^1 C_\alpha |x-y|^{1-\alpha} \text{sign}(x-y) \psi(y) dy + \beta \lambda \varphi(x) = \lambda \varphi'(x),$$

где $\psi(x)$ определяется так же, как в (4.6). Используя тождество (4.8) приходим к обобщенной спектральной задаче (см. (4.7)):

$$\frac{d}{dx} \int_0^1 C_\alpha |x-y|^{1-\alpha} \text{sign}(x-y) \psi(y) dy = \lambda \left(\beta^2 \psi(x) - \psi''(x) \right), \quad x \in [0, 1],$$

$$\psi(1) = 0, \quad \psi'(0) + \beta \psi(0) = 0.$$

Далее доказательство проводится так же, как и в предыдущем случае $H > \frac{1}{2}$.

5. Заключение

В этой работе получена точная асимптотика ошибки в задаче оценки дробного процесса Орнштейна–Уленбека, наблюдаемого в белом шуме малой интенсивности $\varepsilon \rightarrow 0$. Благодаря свойству инвариантности (2.2) результат остается верным на произвольном *конечном* интервале времени, и при этом главный член асимптотики не зависит от длины интервала T . Другой интересной задачей является нахождение предела ошибки, когда $T \rightarrow \infty$ при фиксированной интенсивности шума. Такой асимптотический анализ в рамках предложенного метода требует, чтобы спектральные оценки, полученные в теореме 2, были равномерны по T . Из доказательства теоремы подобное свойство равномерности не следует, и изучение асимптотики больших времен, возможно, потребует другого подхода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mishura Y.S.* Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes. Volume 1929 of Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 2008.
2. *Pipiras V., Taqqu M.S.* Long-range dependence and self-similarity. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, [45]. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.
3. *Cheridito P., Kawaguchi H., Maejima M.* Fractional Ornstein — Uhlenbeck processes // Electron. J. Probab. 2003. V. 8. No. 3. P. 14.
4. *Liptser R.S., Shiryaev A.N.* Statistics of random processes I. Volume 5 of Applications of Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 2001.
5. *Kalman R., Bucy R.* New results in linear filtering and prediction theory // J. Basic Engineer. 1961. V. 83. No. 1. P. 95–108.
6. *Liptser R.S., Shiryaev A.N.* Statistics of random processes II. Volume 6 of Applications of Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 2001.
7. *Ibragimov I.A., Has'minskiĭ, R.Z.* Statistical Estimation. Asymptotic Theory. Volume 16 of Applications of Mathematics. Springer, 1981.
8. *Tsybakov A. B.* Introduction to nonparametric estimation. Springer Series in Statistics. N.Y.: Springer, 2009.
9. *Ukai S.* Asymptotic distribution of eigenvalues of the kernel in the Kirkwood-Riseman integral equation. // J. Math. Phys. 1971. V. 12. P. 83–92.
10. *Chigansky P., Kleptsyna M.* Exact asymptotics in eigenproblems for fractional Brownian covariance operators // Stochast. Process. Appl. 2018. V. 128. No. 6. P. 2007–2059.
11. *Gakhov F.D.* Boundary value problems. N.Y.: Dover Publicat., Inc., 1990.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 20.06.2019

После доработки 15.08.2019

Принята к публикации 26.09.2019

© 2020 г. Н.А. КУЗНЕЦОВ, акад. РАН (kuznetsov@cplire.ru)
(Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва;
Московский физико-технический институт),
К.В. СЕМЕНИХИН, д-р физ.-мат. наук (siemenkv@rambler.ru)
(Московский авиационный институт;
Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва)

АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЯЕМОЙ МОДЕЛИ ЗАМКНУТОЙ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Рассматривается замкнутая сеть, состоящая из двух систем массового обслуживания: основная система моделирует очередь на передачу пакетов по ненадежному каналу связи, а вспомогательная многоканальная система содержит потерянные пакеты для повторной отправки. Интенсивность обслуживания в основной системе является управляемой и подлежит оптимизации с целью минимизации времени успешной передачи с учетом цены использования ресурсов сети. Получены условия оптимальности искомого управления в двух вариантах: 1) в модели, основанной на жидкостной аппроксимации при наличии сильной загрузки; 2) в установившемся режиме при использовании стационарных стратегий.

Ключевые слова: замкнутая сеть массового обслуживания, жидкостная аппроксимация, марковский процесс, оптимальное управление.

DOI: 10.31857/S0005231020030058

1. Введение

Данная статья лежит в русле исследований [1–8], посвященных оптимизации управляемых инфокоммуникационных систем и сетей, и во многом основана на статье [9], опубликованной Р.Ш. Липцером с соавторами в связи с задачей о жидкостной и диффузионной аппроксимации замкнутой марковской сети массового обслуживания в загруженном состоянии.

Первые исследования замкнутых сетей массового обслуживания были проведены в [10]. Математические основания теории сетей с очередями изложены в [11]. Базовые результаты в области управления системами массового обслуживания (СМО) представлены в [12, 13]. Диффузионным и жидкостным аппроксимациям СМО и сетей посвящены [14, 15].

Методы оптимизации марковских процессов, описывающих работу СМО в стационарном режиме, изложены в [16]. Методология условной оптимизации дискретных марковских моделей разработана в [17]. В нестационарной постановке задача управления марковским процессом при наличии ограничений изучалась в [18].

В [19] доказана пороговая структура оптимальной децентрализованной стратегии при управлении интенсивностью обслуживания на каждом узле

замкнутой сети по критерию минимума стоимости удержания заявки и ресурсов системы. В [20] тот же результат распространен на более общий случай аффинной функции потерь.

В данной статье исследуется марковская модель замкнутой сети [9], которая моделирует процесс передачи данных по ненадежному каналу связи. Рассматриваемая сеть состоит из двух СМО: основная система моделирует очередь на передачу пакетов, а вспомогательная многоканальная система принимает потерянные пакеты для повторной отправки. Так же, как в [6], скорость передачи является управляемой, но теперь в модели предусмотрен механизм повторной отправки потерянных пакетов. Модели СМО с повторными вызовами востребованы при моделировании работы контакт-центров, в которых допускаются повторения обращений клиентов из-за занятости операторов или из-за завершения времени ожидания [21]. В рассматриваемой модели для оптимизации работы системы выделены два показателя качества: время успешной отправки пакета и объем использованных ресурсов. Для выработки приближенной стратегии управления применена жидкостная аппроксимация, позволяющая изучать управляемую систему в среднем при наличии сильной загрузки.

2. Описание модели и постановка задачи

Рассмотрим сеть массового обслуживания, состоящую из двух систем: основной и вспомогательной. Основная система содержит очередь и описывает последовательную передачу однотипных пакетов по ненадежному каналу связи при наличии постоянного входного трафика. Вспомогательная система является многоканальной и используется для моделирования повторной отправки пакетов в случае их потери.

Будем считать, что в данной сети циркулирует постоянное число пакетов N , которое отражает стабильный уровень загрузки сети передачи данных.

Пусть $\ell(t)$ — вероятность потери пакета, причем $0 \leq \ell(t) < 1$, $\mu(t, x)$ — скорость передачи, выбираемая из диапазона

$$(1) \quad m_{\min} \leq \mu(t, x) \leq m_{\max}, \quad \text{где} \quad 0 < m_{\min} < m_{\max} < \infty,$$

а $\alpha(t)(N - x)$ — скорость отправки пакета из вспомогательной системы в основную для повторной попытки передачи, где x обозначает число пакетов в основной системе в момент времени t . Тем самым $\mu(t, x)$ и $\alpha(t)$ — суть интенсивности обслуживания на серверах основной и вспомогательной системы соответственно. Функция $\alpha(t) > 0$ определяет ресурсы, которые способна выделить сеть для обработки запросов на повторную отправку пакетов на фоне меняющейся во времени загрузки вычислительных мощностей. Переменный характер этой загрузки и нестационарность потока потерь могут быть использованы для описания процесса передачи данных с борта беспилотного летательного аппарата, который в автономном режиме должен обеспечивать устойчивое управление своим движением и пересылку полезной информации в условиях изменяющейся окружающей обстановки.

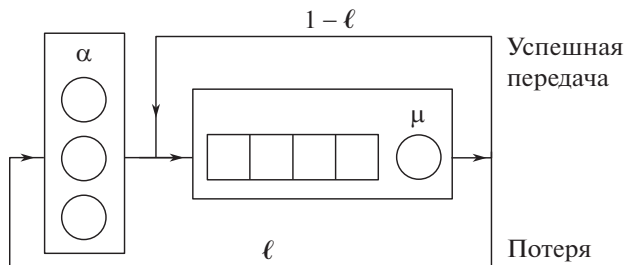


Рис. 1. Модель сети из двух систем: слева — вспомогательная, справа — основная.

На рис. 1 изображена схема рассматриваемой сети передачи данных. Петля соответствует успешной передаче, которая происходит с вероятностью $1 - \ell(t)$. Если пакет успешно отправлен, то он покидает основную систему и в этот же момент к ней присоединяется новый пакет, подлежащий дальнейшей отправке. Тем самым в случае успешной передачи число заявок в основной системе не меняется.

Потери при передаче происходят с интенсивностью $\ell(t)\mu(t, x)$, если $x > 0$. В этом случае число заявок в основной системе уменьшается, а во вспомогательной системе увеличивается на единицу. При этом внешний пакет блокируется, так как для входа в систему он должен дожидаться первой успешной отправки.

При нулевом состоянии основной системы $x = 0$ входящий трафик также блокируется. Но происходит это с целью, чтобы у нового пакета была возможность попасть во вспомогательную систему в случае неудачной передачи без изменения общего числа пакетов, циркулирующих в сети.

Возвращение пакета из вспомогательной системы в основную происходит с интенсивностью $\alpha(t)$ и независимым от состояния сети образом. В этом случае число пакетов в основной системе становится на один больше, а во вспомогательной системе — на один меньше.

Важно отметить, что упоминание входящего трафика используется здесь только для интерпретации замкнутой сети как модели передачи пакетных данных: непосредственного влияния входной поток на состояние систем не оказывает. Поэтому число пакетов N необходимо трактовать не как размер пространства, доступного для размещения пакетов, а как фиксированный уровень загрузки.

На отрезке времени $[0, T]$ работу сети передачи данных будем описывать с помощью неоднородного марковского процесса рождения и гибели $X(t)$ со значениями в множестве $E = \{0, 1, \dots, N\}$. Тогда число пакетов в основной и вспомогательной системах равно $X(t)$ и $N - X(t)$ соответственно. Процесс $X(t)$ имеет генератор $\Lambda(t) = \{\lambda_{x,y}(t)\}_{x,y \in E}$, однозначно определяемый интенсивностями двух переходов $x \rightarrow x \pm 1$: $\lambda_{x,x+1}(t) = \alpha(t)(N - x)$ — интенсивность поступления пакета из вспомогательной системы на повторную отправку, когда в основной системе $x < N$ заявок; $\lambda_{x,x-1}(t) = \ell(t)\mu(t, x)$ — интенсивность пересылки пакета во вспомогательную систему при неудачной попытке его передачи, когда основная система содержит $x > 0$ заявок.

Функции $\ell(t)$ и $\alpha(t)$ считаются далее непрерывными.

Качество работы рассматриваемой сети будем описывать с помощью двух характеристик

$$\mathfrak{S}_T = \frac{1}{T} \int_0^T MS(t) dt \quad \text{и} \quad \mathfrak{R}_T = \frac{1}{T} \int_0^T MR(t) dt,$$

где $S(t)$ — время полной передачи пакета, поступающего в момент t , а $R(t)$ — мгновенная мощность использования сетью своих ресурсов, связанных с передачей информации и обработкой запросов на повторную отправку.

Таким образом, $\mathfrak{S}_T$ определяет среднее время успешной передачи, а $\mathfrak{R}_T$ представляет собой среднюю мощность потребления ресурсов. Оба показателя будут рассматриваться как функционалы $\mathfrak{S}_T[\mu]$, $\mathfrak{R}_T[\mu]$, зависящие от управляемой скорости передачи μ из определенного класса $\mathcal{M}$.

Далее будет рассматриваться задача оптимального управления скоростью передачи μ относительно расширенного функционала

$$(2) \quad \mathfrak{L}_T[\mu, \lambda] = \mathfrak{S}_T[\mu] + \lambda \mathfrak{R}_T[\mu] \rightarrow \min_{\mu}: \mu \in \mathcal{M}$$

при заданном значении множителя $\lambda \geq 0$.

Цель статьи — анализ указанной оптимизационной модели на двух уровнях описания объекта управления: изучение динамики “в среднем” с помощью жидкостной аппроксимации; рассмотрение сети в стационарном режиме для соответствующего однородного марковского процесса.

3. Функционалы качества

Пусть c — неотрицательный параметр, определяющий относительную цену загрузки одного сервера вспомогательной системы из расчета на стоимость загрузки основной системы. Тогда функционал $\mathfrak{R}_T[\mu]$ принимает вид

$$(3) \quad \mathfrak{R}_T[\mu] = \frac{1}{T} \int_0^T M\{\mu(t, X(t)) I\{X(t) > 0\} + c\alpha(t)(N - X(t))\} dt.$$

Для задания функционала $\mathfrak{S}_T[\mu]$ рассмотрим величину $S(t)$, равную полному времени передачи внешнего пакета начиная с момента t . Эта величина имеет представление

$$(4) \quad S(t) = W + B_1 + A_2 + B_2 + \dots + A_\nu + B_\nu,$$

где W — время ожидания входа в систему; A_k и B_k — времена пребывания пакета во вспомогательной и основной системе соответственно при k -й попытке ($k = 1, 2, \dots$ и $A_1 = 0$); ν — номер попытки, при которой пакет будет успешно передан.

Будем рассматривать $S(t)$ как виртуальное время пребывания (включая ожидание входа в систему), поэтому все вероятностные характеристики будут вычисляться из расчета на фиксированный момент t .

Величину W можно представить как

$$W = W_0 \mathbf{I}\{X(t) = 0\} + (\tau_1 + \dots + \tau_{\varkappa}) \mathbf{I}\{X(t) > 0\},$$

где W_0 — время ожидания разблокировки при полной загрузке вспомогательной системы; $\tau_1, \tau_2, \dots$ — времена обслуживания заявок, находящихся в основной системе на момент t ; $\varkappa$ — номер первого успешно переданного пакета; $\mathbf{I}\{\dots\}$ — индикатор случайного события.

При медленном изменении во времени интенсивностей $\alpha(t)$ и $\mu(t, x)$ условные законы распределения $\mathbf{Law}\{W_0 \mid X(t) = 0\}$ и $\mathbf{Law}\{\tau_k \mid X(t) = x\}$ при $x > 0$ можно считать экспоненциальными $E(\alpha(t)N)$ и $E(\mu(t, x))$ соответственно. Кроме того, $X(t), \varkappa, \tau_1, \tau_2, \dots$ взаимно независимы, причем величина $\varkappa$ подчинена геометрическому распределению $G(1 - \ell(t))$. Тогда по формуле полного математического ожидания получаем среднее время ожидания входа в систему

$$\begin{aligned} \overline{W} &= \frac{\mathbf{P}\{X(t) = 0\}}{\alpha(t)N} + \sum_{x=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\mu(t, x)} \mathbf{P}\{\tau = k\} \mathbf{P}\{X(t) = x\} = \\ &= \frac{\mathbf{P}\{X(t) = 0\}}{\alpha(t)N} + \frac{1}{1 - \ell(t)} \mathbf{M}\left\{ \frac{\mathbf{I}\{X(t) > 0\}}{\mu(t, X(t))} \right\}. \end{aligned}$$

Время пребывания в основной системе в течение одной попытки имеет вид

$$B_k = \tau_1 + \dots + \tau_x \quad \text{при} \quad X(t) = x > 0.$$

При этом $B_k = 0$ в случае $x = 0$, так как рассматриваемый пакет уже находится в основной системе. Действуя аналогично, получаем среднее время пребывания пакета в основной системе

$$\overline{B} = \mathbf{M}\left\{ \frac{X(t) \mathbf{I}\{X(t) > 0\}}{\mu(t, X(t))} \right\}.$$

Для среднего времени пребывания во вспомогательной системе имеем

$$\overline{A} = \frac{\mathbf{P}\{X(t) < N\}}{\alpha(t)}$$

в силу того, что $\mathbf{Law}\{A_k \mid X(t) = x\} = E(\alpha(t))$ при $x < N$ и $A_k = 0$ при $x = N$.

Учтем $\nu \sim G(1 - \ell(t))$ и независимость входящих в (4) случайных величин. Применив формулу полного математического ожидания, получим среднее время, необходимое для успешной передачи внешнего пакета, пришедшего в момент t ,

$$\overline{S}(t) = \overline{W} + \overline{B} + (\overline{A} + \overline{B}) \mathbf{M}\{\nu - 1\} = \overline{W} + \frac{\overline{A}\ell(t) + \overline{B}}{1 - \ell(t)}.$$

Теперь функционал $\mathfrak{S}_T[\mu]$ принимает окончательный вид:

$$(5) \quad \mathfrak{S}_T[\mu] = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{M}\left\{ \frac{\mathbf{I}\{X(t) = 0\}}{\alpha(t)N} + \frac{\mathbf{I}\{X(t) < N\}\ell(t)}{(1 - \ell(t))\alpha(t)} + \frac{(X(t) + 1) \mathbf{I}\{X(t) > 0\}}{(1 - \ell(t))\mu(t, X(t))} \right\} dt.$$

4. Жидкостная аппроксимации

Опишем поведение сети в среднем при помощи метода жидкостной аппроксимации. Для этого представим процесс $X(t)$ в виде

$$(6) \quad X(t) = X(0) + A(t) - D(t),$$

где $A(t)$ — число пакетов, поступивших в основную систему из вспомогательной, а $D(t)$ — число пакетов, отправленных в обратном направлении (за время t). В силу независимости этой пары событий скачки процессов $A(t)$, $D(t)$ происходят в разные моменты времени, т.е.

$$(7) \quad \Delta A(t)\Delta D(t) = 0,$$

причем $A(0) = D(0) = 0$.

Считающие процессы $A(t)$, $D(t)$ допускают мартингалное представление [22, гл. 18]

$$dA(t) = \alpha(t)(N - X(t)) dt + dM^A(t) \quad \text{и} \quad dD(t) = \ell(t)\mu(t, X(t)) dt + dM^D(t),$$

где квадратично-интегрируемые мартингалы $M^A(t)$, $M^D(t)$ ортогональны в силу (7) и имеют следующие квадратичные характеристики:

$$\langle M^A \rangle(t) = \int_0^t \alpha(s)(N - X(s)) ds, \quad \langle M^D \rangle(t) = \int_0^t \ell(s)\mu(s, X(s)) ds.$$

В силу (6) процесс $X(t)$ допускает представление

$$(8) \quad dX(t) = \{\alpha(t)(N - X(t)) - \ell(t)\mu(t, X(t))\} dt + dM(t),$$

где $M(t)$ — квадратично-интегрируемый мартингал с квадратичной характеристикой

$$\langle M \rangle(t) = \int_0^t \{\alpha(s)(N - X(s)) + \ell(s)\mu(s, X(s))\} ds.$$

Следуя [9], определим жидкостную аппроксимацию дискретного процесса $X(t)$.

Жидкостная аппроксимация $x(t)$, будучи детерминированным процессом, описывает поведение основной системы в среднем при большом количестве N функционирующих в сети пакетов. Предположим, что $\mu(t, x)$ задана как функция непрерывных аргументов $t \geq 0$ и $x \in [0, N]$. Тогда $x(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(9) \quad \dot{x} = \alpha(t)(N - x) - \ell(t)\mu(t, x),$$

которое получается из (8) удалением мартингальной составляющей.

Согласно теореме 1 из [9] для корректности жидкостной аппроксимации (9) достаточно, чтобы функция $\mu(t, x)$ была липшицевой, а функция $x(t)$ удовлетворяла условию

$$(10) \quad \exists \varepsilon > 0: \quad \varepsilon \leq x(t) \leq N - \varepsilon \quad \forall t \in [0, T].$$

Смысл этого условия очевиден: среднее число пакетов должно находиться в интервале $(0, N)$, исключая режимы бездействия основной или вспомогательной системы.

Лемма. Если найдется $\varepsilon > 0$, такое что

$$(11) \quad \varepsilon/m_{\min} \leq \ell(t)/\alpha(t) \leq (N - \varepsilon)/m_{\max},$$

то условие (10) выполнено при любом выборе липшицевой функции $\mu(t, x)$, удовлетворяющей ограничениям (1).

Доказательства леммы и последующих утверждений приведены в Приложении.

Учитывая аппроксимацию $X(t) \approx x(t)$, получаем представление функционалов (3) и (5):

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_T[\mu] &= \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \frac{\ell(t)}{(1 - \ell(t))\alpha(t)} + \frac{x(t) + 1}{(1 - \ell(t))\mu(t, x(t))} \right\} dt, \\ \mathfrak{R}_T[\mu] &= \frac{1}{T} \int_0^T \{ \mu(t, x(t)) + c\alpha(t)(N - x(t)) \} dt. \end{aligned}$$

Тогда расширенный функционал (2) примет вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_T[\mu, \lambda] &= \frac{1}{T} \int_0^T g(t, x(t), \mu(t, x(t)), \lambda) dt, \\ g(t, x, \mu, \lambda) &= \frac{\ell(t)}{(1 - \ell(t))\alpha(t)} + \frac{x + 1}{(1 - \ell(t))\mu} + \lambda[\mu + c\alpha(t)(N - x)]. \end{aligned}$$

Для синтеза оптимальной скорости передачи данных $\hat{\mu}(t, x)$ по критерию минимума расширенного функционала $\mathfrak{L}_T[\mu, \lambda]$ рассмотрим сначала задачу

$$(12) \quad \mathfrak{L}_T[u, \lambda] = \frac{1}{T} \int_0^T g(t, x(t), u(t), \lambda) dt \rightarrow \min_{u \in \mathcal{U}}$$

на классе $\mathcal{U}$ программных управлений, т.е. кусочно-непрерывных функций $u(t)$, $t \in [0, T]$, со значениями в множестве $U = [m_{\min}, m_{\max}]$. При этом состояние $x(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (9), в котором вместо позиционного управления $\mu(t, x)$ используется программное, а именно:

$$(13) \quad \dot{x} = f(t, x, u(t)), \quad f(t, x, u) = \alpha(t)(N - x) - \ell(t)u.$$

Определим гамильтониан

$$H(t, x, \psi, u, \lambda) = \psi f(t, x, u) - g(t, x, u, \lambda),$$

в котором ψ — сопряженная переменная. Тогда нетрудно получить представление

$$H(t, x, \psi, u, \lambda) = \dots - (au + b/u),$$

где a и b — краткие обозначения для коэффициентов

$$a = \ell(t)\psi + \lambda, \quad b = (x + 1)/(1 - \ell(t)),$$

а многоточие обозначает слагаемые, не зависящие от переменной u . Если известно, что для состояния системы (13) можно гарантировать условие $x \geq 0$, то коэффициент b будет положительным и максимум гамильтониана по переменной $u \in U$ будет достигаться в единственной точке:

$$(14) \quad Q(a, b) = \begin{cases} m_{\max}, & a/b \leq 1/m_{\max}^2, \\ \sqrt{b/a}, & 1/m_{\max}^2 \leq a/b \leq 1/m_{\min}^2, \\ m_{\min}, & a/b \geq 1/m_{\min}^2. \end{cases}$$

Теперь определим уравнение для сопряженной переменной с учетом терминального условия

$$(15) \quad \dot{\psi} = -H_x(t, x, \psi, u(t), \lambda), \quad t \in [0, T], \quad \psi(T) = 0,$$

где правая часть дифференциального уравнения определяется как

$$-H_x(t, x, \psi, u, \lambda) = \alpha(t)\psi + \frac{1}{(1 - \ell(t))u} - \lambda c\alpha(t).$$

Пусть $x(t), \psi(t)$ — решение системы дифференциальных уравнений (13), (15), в которых в качестве $u(t)$ взято управление

$$(16) \quad \hat{u}(t) = Q(\ell(t)\psi(t) + \lambda, (x(t) + 1)/(1 - \ell(t))),$$

где предполагается, что $x(t) \geq 0$ всюду на $[0, T]$.

Сформулируем полученный результат в теореме 1.

Теорема 1. Если для какого-либо $\varepsilon \geq 0$ выполнено правое неравенство в (11), то при любом начальном условии $x(0) \geq 0$ управление (16) представляет собой решение задачи (12). Если к тому же имеет место неравенство

$$(17) \quad \lambda(c/4 + 1) \leq (1/m_{\max} + 1/(4\alpha(t)))/m_{\max}, \quad t \in [0, T],$$

то оптимальное управление совпадает с верхней границей, т.е. $\hat{u}(t) \equiv m_{\max}$.

Теорема 1 позволяет описать схему нахождения оптимального позиционного управления $\hat{\mu}(t, x)$. Для каждого $x_T \in (0, N)$ необходимо проинтегрировать в обратном времени систему (13), (15) с учетом $u(t) = \hat{u}(t)$ и терминальных условий $x(T) = x_T$, $\psi(T) = 0$ вплоть до момента t_0 , при котором будет выполнено одно из условий: $x(t_0) = 0$, $x(t_0) = N$ или $t_0 = 0$. Теперь искомое управление определяется вдоль каждой полученной траектории по правилу $\hat{\mu}(t, x(t)) = \hat{u}(t)$.

Структуру оптимального управления $\hat{u}$ из (16) можно пояснить следующим образом. Выбор между двумя границами $m_{\min}$, $m_{\max}$ определяется отношением $r = (1 - \ell)(\ell\psi + \lambda)/(x + 1)$. Если энергозатраты, выражаемые параметром λ , незначительны по сравнению с уровнем загрузки системы x , то r мало и в этом случае более предпочтительно передавать на максимальной скорости, т.е. $\hat{u} = m_{\max}$. Неравенство (17) описывает достаточное условие, при котором можно сделать такой вывод. Если же, наоборот, сохранение ресурсов весьма критично, что выражается большим значением r , то оптимальная скорость передачи устанавливается на минимальном уровне: $\hat{u} = m_{\min}$.

Замечание. Выражение (16) позволяет предложить постоянную стратегию, которую можно использовать для предварительного решения задачи в модели с постоянными параметрами α и ℓ .

Предположим, что значение двойственной переменной $\psi(t)$ незначительно. Это так, по крайней мере, на конце промежутка, поскольку $\psi(T) = 0$. Если считать, что к этому моменту состояние $x(t)$ устанавливается на некотором равновесном значении $\bar{x}$, то в случае достаточно широкого диапазона $[1/m_{\max}^2, 1/m_{\min}^2]$ в силу (13) и (14) и с учетом $1 \ll \bar{x}$ получаем систему уравнений:

$$\alpha(N - \bar{x}) - \ell\hat{u} = 0, \quad \hat{u} = \sqrt{\bar{x}/(\lambda(1 - \ell))}.$$

Тогда соответствующее решение $\bar{x}$ имеет вид

$$\bar{x} = N - \frac{\varkappa}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4N}{\varkappa}} - 1 \right), \quad \varkappa = \frac{\ell^2}{\lambda(1 - \ell)\alpha^2},$$

причем заведомо $0 < \bar{x} < N$.

5. Стационарный режим

Теперь предположим, что параметры сети ℓ , α являются константами, а искомое управление описывается стационарной стратегией

$$(18) \quad \mu = \{\mu_x : x = 1, \dots, N\} \in U^N, \quad U = [m_{\min}, m_{\max}],$$

где μ_x — скорость отправки из основной системы в случае, когда в ней находится x пакетов. При простое основной системы ее сервер бездействует, поэтому соответствующая скорость отправки равна нулю: $\mu_0 = 0$. Стратегии (18) будем называть *допустимыми*.

В указанных предположениях марковский процесс $X(t)$ будет однородным, а его интенсивности переходов принимают вид $\lambda_{x-1,x} = \alpha(N + 1 - x)$ и

$\lambda_{x,x-1} = \ell\mu_x$ при $x = 1, \dots, N$. Процесс $X(t)$, как конечный процесс рождения и гибели, является эргодическим. Это означает, что вне зависимости от выбора начального распределения $X(0)$ для всякого $x \in E$ определены предельные вероятности $\pi_x = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = x\}$. Для них известно рекуррентное представление:

$$(19) \quad \pi_x = \frac{\alpha(N+1-x)}{\ell\mu_x} \pi_{x-1}, \quad x = 1, \dots, N.$$

Если π_0 найти из условия нормировки, то тем самым будет определено стационарное распределение $\pi = \{\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N\}$.

Укажем выражения для функционалов качества. Среднее время успешной отправки в силу (5) принимает вид

$$\mathfrak{S}[\mu] = \frac{\pi_0}{\alpha N} + \frac{(1 - \pi_N)\ell}{(1 - \ell)\alpha} + \sum_{x=1}^N \frac{(x+1)\pi_x}{(1 - \ell)\mu_x}.$$

Из (3) получаем выражение для функционала, определяющего среднюю мощность потребления ресурсов:

$$\mathfrak{R}[\mu] = \sum_{x=0}^N \{\mu_x + c\alpha(N-x)\}\pi_x.$$

Тогда с учетом равенства $1 - \pi_N = \pi_0 + \dots + \pi_{N-1}$ расширенный функционал (2) равен

$$(20) \quad \mathfrak{L}[\mu, \lambda] = h_0\pi_0 + \sum_{x=1}^N (h_x + b_x/\mu_x + \lambda\mu_x)\pi_x,$$

$$h_x = \frac{1}{\alpha N} I\{x = 0\} + \frac{\ell}{(1 - \ell)\alpha} I\{x < N\} + \lambda c\alpha(N-x), \quad b_x = \frac{x+1}{(1 - \ell)}.$$

Решим задачу минимизации расширенного функционала в стационарном режиме

$$(21) \quad \mathfrak{L}[\mu, \lambda] \rightarrow \min_{\mu}$$

на классе стратегий (18).

Для этого введем функционал

$$\mathfrak{J}[\pi, \mu, \nu] = \mathfrak{L}[\mu, \lambda] - \nu(\pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_N - 1),$$

включив условие нормировки в виде слагаемого с множителем $\nu \in \mathbb{R}$. Последовательность $\pi = \{\pi_x: x = 0, 1, \dots, N\}$ будем рассматривать как траекторию дискретной системы (19) с произвольным начальным условием $\pi_0 \geq 0$ и управлением $\mu = \{\mu_x\}$.

Функционал $\mathfrak{J}$ является сепарабельным, поэтому для его минимизации применим метод динамического программирования. Для этого запишем $\mathfrak{J}$ с учетом (19) и (20):

$$\mathfrak{J}[\pi, \mu, \nu] = \nu + \pi_0(h_0 - \nu) + \sum_{x=1}^N \pi_{x-1} g_x(\mu_x, \nu),$$

$$g_x(u, \nu) = (h_x + b_x/u + \lambda u - \nu) \gamma_x/u, \quad \gamma_x = \alpha(N + 1 - x)/\ell.$$

Определим функцию Беллмана:

$$(22) \quad \mathfrak{B}_n(p, \nu) = \inf_{(\pi, \mu) \in \mathcal{S}_n(p)} \sum_{x=n}^N \pi_{x-1} g_x(\mu_x, \nu), \quad n = N, N-1, \dots, 1,$$

где $\mathcal{S}_n(p)$ — множество пар (π, μ) , таких что $\pi = \{\pi_x: x = n, \dots, N\}$ удовлетворяет рекуррентному уравнению $\pi_x = \pi_{x-1} \gamma_x / \mu_x$ с начальным условием $\pi_{n-1} = p$ и допустимой стратегией $\mu = \{\mu_x: x = n, \dots, N\}$.

Уравнение динамического программирования принимает вид

$$\mathfrak{B}_n(p, \nu) = \inf_{u \in U} \{p g_n(u, \nu) + \mathfrak{B}_{n+1}(p \gamma_n/u, \nu)\}, \quad n = N, N-1, \dots, 1,$$

где $\mathfrak{B}_{N+1} \equiv 0$. При этом

$$(23) \quad \inf_{(\pi, \mu) \in \mathcal{S}_0} \mathfrak{J}[\pi, \mu, \nu] = \inf_{\pi_0 \geq 0} \{\nu + \pi_0(h_0 - \nu) + \mathfrak{B}_1(\pi_0, \nu)\},$$

где $\mathcal{S}_0$ содержит $(\pi, \mu) \in \mathcal{S}_1(\pi_0)$ при произвольном выборе начального условия $\pi_0 \geq 0$.

Нетрудно проверить, что функция Беллмана имеет вид $\mathfrak{B}_n(p, \nu) = p \beta_n(\nu)$, где последовательность $\{\beta_n(\nu)\}$ определяется из рекуррентного соотношения

$$\beta_n(\nu) = \inf_{u \in U} \{g_n(u, \nu) + \gamma_n \beta_{n+1}(\nu)/u\}, \quad n = N, N-1, \dots, 1, \quad \beta_{N+1} \equiv 0.$$

После замены переменной $w = 1/u$ последнее уравнение принимает вид

$$\beta_n(\nu) = \inf_{1/m_{\max} \leq w \leq 1/m_{\min}} \{\lambda + (h_n - \nu + \beta_{n+1}(\nu))w + b_n w^2\} \gamma_n.$$

Если определить точку абсолютного минимума указанной квадратичной функции

$$w_n^* = -\frac{h_n - \nu + \beta_{n+1}(\nu)}{2b_n},$$

то можно утверждать, что стратегия

$$(24) \quad \mu_x^* = \begin{cases} m_{\max}, & w_x^* \leq 1/m_{\max}, \\ 1/w_x^*, & 1/m_{\max} \leq w_x^* \leq 1/m_{\min}, \\ m_{\min}, & w_x^* \geq 1/m_{\min}, \end{cases} \quad x = 1, \dots, N,$$

будет доставлять минимум в (22) при фиксированном $\nu \geq 0$.

Таблица 1. Значения расширенного функционала в зависимости от выбора множителя

i	λ_0^i	λ^i	$\mathfrak{L}[\mu^*, \lambda^i]$	$\mathfrak{L}[\hat{u}, \lambda^i]$	$\mathfrak{L}[m_{\min}, \lambda^i]$	$\mathfrak{L}[m_{\text{med}}, \lambda^i]$	$\mathfrak{L}[m_{\max}, \lambda^i]$
1	0,2	0,324	8,616	8,755	36,215	11,204	8,616
2	0,8	1,298	16,686	16,906	37,676	16,805	18,358
3	1,4	2,271	22,079	22,249	39,137	22,407	28,100
4	2,0	3,244	26,393	26,537	40,599	28,009	37,843
5	2,6	4,217	30,094	30,222	42,060	33,611	47,585
6	3,2	5,191	33,388	33,504	43,521	39,213	57,327
7	3,8	6,164	36,385	36,491	44,983	44,815	67,070
8	4,4	7,137	39,152	39,251	46,444	50,416	76,812
9	5,0	8,110	41,736	41,829	47,905	56,018	86,554

Таблица 2. Время успешной отправки и объем ресурсов на стратегиях μ^* и $\hat{u}$

i	λ_0^i	λ^i	$\mathfrak{S}[\mu^*]$	$\mathfrak{S}[\hat{u}]$	$\mathfrak{R}[\mu^*]$	$\mathfrak{R}[\hat{u}]$
1	0,2	0,324	5,3684	5,6916	10,0099	9,4416
2	0,8	1,298	8,3332	9,7654	6,4365	5,5029
3	1,4	2,271	11,0310	12,4353	4,8649	4,3214
4	2,0	3,244	13,1885	14,5780	4,0701	3,6862
5	2,6	4,217	15,0402	16,4194	3,5695	3,2727
6	3,2	5,191	16,6888	18,0591	3,2171	2,9754
7	3,8	6,164	18,1890	19,5514	2,9519	2,7482
8	4,4	7,137	19,5757	20,9300	2,7429	2,5670
9	5,0	8,110	20,8711	22,2173	2,5726	2,4181

Выберем параметр ν так, чтобы минимизируемое выражение в правой части (23) не зависело от π_0 . В силу $\mathfrak{B}_1(\pi_0, \nu) = \pi_0 \beta_1(\nu)$ это условие равносильно уравнению

$$(25) \quad h_0 - \nu + \beta_1(\nu) = 0.$$

Теперь можно описать способ решения задачи (21).

Теорема 2. Решение ν^* уравнения (25) существует и определено единственным образом, оно положительно и не превосходит значения функционала $\mathfrak{L}[\mu, \lambda]$ на любой допустимой стратегии μ .

Стратегия μ^* , определяемая в (24) при $\nu = \nu^*$, является оптимальным управлением в стационарном режиме по критерию минимума расширенного функционала (21), причем $\mathfrak{L}[\mu^*, \lambda] = \nu^*$.

Как следует из доказательства теоремы 2, функция в правой части уравнения (25) непрерывна и монотонно не возрастает. Поэтому решение ν^* можно искать методом деления отрезка пополам или методом золотого сечения на отрезке $[0, \mathfrak{L}[\mu, \lambda]]$, где μ — любая допустимая стратегия, например $\mu_x = m_{\min}$ или $\mu_x = m_{\max}$.

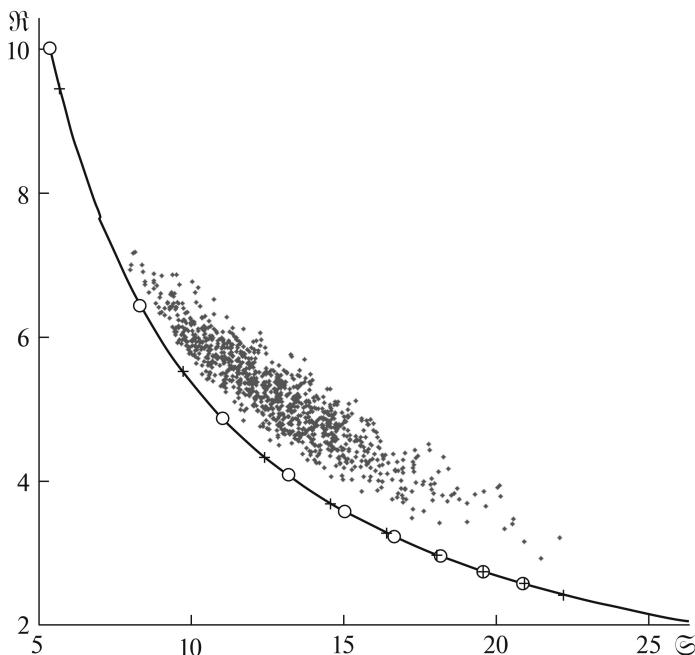


Рис. 2. Граница множества достижимости (сплошная кривая) на плоскости критериев $(\mathfrak{S}, \mathfrak{R})$ при оптимальном управлении μ^* (кружочки), постоянном управлении $\hat{u}$ (крестики) и случайно сгенерированных стратегиях (точки).

Приведем пример численного нахождения оптимального управления замкнутой сетью передачи данных, рассматриваемой в стационарном режиме.

Пример. Сделаем следующие предположения: сеть содержит $N = 50$ пакетов; диапазон допустимых значений скорости передачи задан границами $m_{\min} = 1,5$ и $m_{\max} = 10$; $\alpha = 0,02$ — интенсивность обслуживания во вспомогательной системе; $\ell = 0,05$ — вероятность потери пакета; $c = 0,02$ — относительная цена использования сервера вспомогательной системы.

В табл. 1 приведены значения расширенного функционала в зависимости от выбора множителя λ на нескольких управлениях: μ^* — оптимальное управление, описанное в теореме 2; $\hat{u}$ — постоянное управление, значение которого выбрано согласно замечанию; $m_{\min}$, m_{med} , $m_{\max}$ — постоянные управления, равные соответственно нижней границе, середине и верхней границе диапазона допустимых значений. Для множителя λ , определяющего вес энергетического критерия, взято несколько значений $\lambda^i = \lambda_0^i \mathfrak{S}[m_{\text{med}}] / \mathfrak{R}[m_{\text{med}}]$, где λ_0^i — безразмерные коэффициенты, $i = 1, \dots, 9$.

Как видно из табл. 1, значения расширенного функционала на оптимальном управлении μ^* и постоянной стратегии $\hat{u}$, полученной на основе жидкостной аппроксимации, отличаются мало. Тем не менее сравнение функционалов времени успешной отправки $\mathfrak{S}$ и объема ресурсов $\mathfrak{R}$ позволяют увидеть достаточно серьезные отличия в характеристиках качества указанных управлений (см. табл. 2).

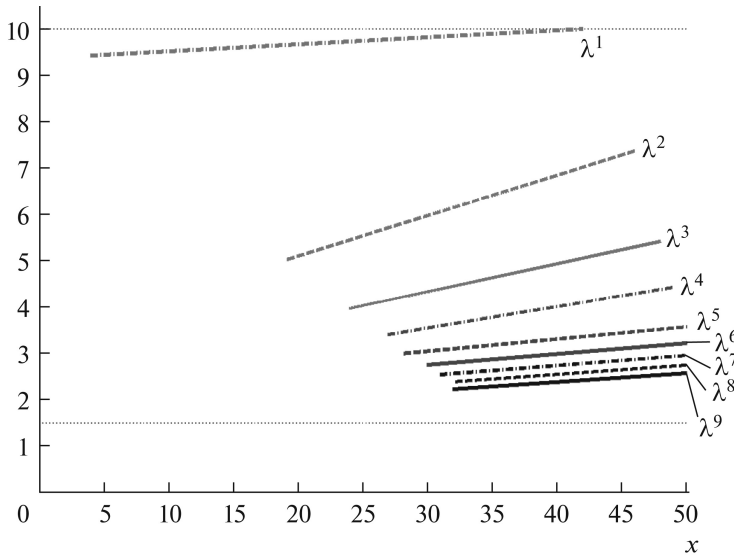


Рис. 3. Оптимальные управления $\{\mu_x^*\}$ как функции состояния $x = 1, 2, \dots, N$ для нескольких значений множителя $\lambda = \lambda^i$.

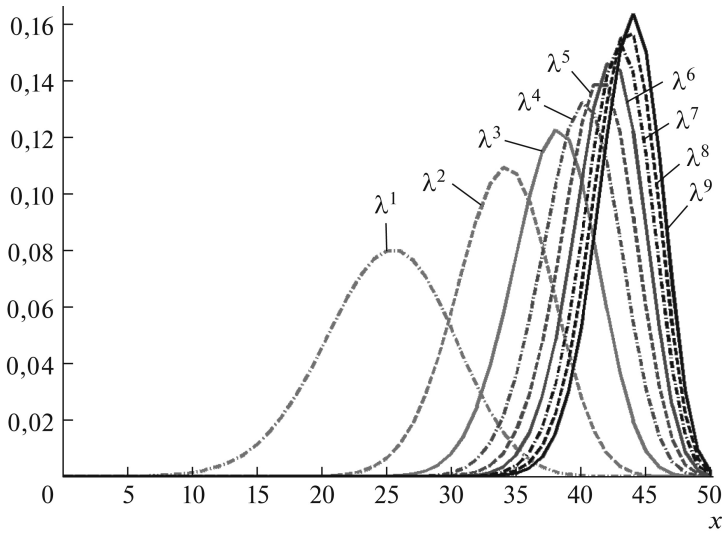


Рис. 4. Вероятности $\{\pi_x^*\}$ состояний $x = 0, 1, \dots, N$ основной системы при использовании нескольких оптимальных управлений μ^* в зависимости от выбора множителя $\lambda = \lambda^i$.

На плоскости критериев $(\mathfrak{S}, \mathfrak{R})$ оптимальное управление μ^* обязано лежать на границе множества достижимости

$$\mathcal{A} = \{(s, r) : \exists \mu \in U^N : s \geq \mathfrak{S}[\mu], r \geq \mathfrak{R}[\mu]\}.$$

Этот факт подтверждается рис. 2, на котором точки $(\mathfrak{S}[\mu^*], \mathfrak{R}[\mu^*])$ изображены кружочками, а граница $\mathcal{A}$ — сплошной кривой.

Для постоянной стратегии $\hat{u}$ в силу $\mathfrak{L}[\hat{u}] \approx \mathfrak{L}[\mu^*]$ точки $(\mathfrak{S}[\hat{u}], \mathfrak{R}[\hat{u}])$, обозначенные крестиками, также визуальнo лежат на границе. Однако точки $(\mathfrak{S}[\mu^*], \mathfrak{R}[\mu^*])$ и $(\mathfrak{S}[\hat{u}], \mathfrak{R}[\hat{u}])$ не совпадают, так как хотя бы по одному из двух критериев различие существенно (см. табл. 2).

Другие стратегии μ (точнее, соответствующим им значения критериев $\mathfrak{S}[\mu], \mathfrak{R}[\mu]$) изображены на рис. 2 точками. Эти стратегии $\mu = \{\mu_x\}$ в количестве 1000 штук получены в результате моделирования набора $\{\mu_1, \dots, \mu_N\}$ как выборки из равномерного распределения $\mathcal{R}(m_{\min}, m_{\max})$.

На рис. 3 изображены оптимальные управления $\{\mu_x^*\}$ для тех же значений множителя λ , что перечислены в табл. 1 и 2. Соответствующие стационарные распределения $\pi^* = \{\pi_x^*\}$ представлены на рис. 4. Для маловероятных состояний x наблюдался эффект неустойчивости при численном нахождении оптимальных стратегий μ_x^* . Поэтому на рис. 3 для каждого управления μ^* изображена только та часть графика, которая оставалась неизменной при повышении точности решения уравнения (25). Соответствующие значения оптимального управления были найдены с приемлемой точностью для промежутка, в который состояние $X \sim \pi^*$ попадает с вероятностью 0,999.

6. Заключение

В статье изучена задача оптимального управления скоростью передачи данных в модели с ненадежным каналом связи и механизмом повторной отправки по критерию минимума полного времени передачи с учетом энергозатрат передатчика. Сеть передачи данных моделировалась замкнутой сетью массового обслуживания с основным узлом-передатчиком (в виде конечной одноканальной системы) и вспомогательным узлом для повторной отправки пакетов (в виде многоканальной СМО). Условия оптимальности искомого управления получены в приближенной модели, основанной на жидкостной аппроксимации, а также в установившемся режиме при использовании стационарных стратегий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы. Если $\mu(t, x)$ — липшицева, то при любом начальном условии $x(0)$ уравнение (9) имеет решение $x(t)$, определенное на всем отрезке $[0, T]$. С учетом обозначения $\beta(t) = N - \ell(t)\mu(t, x(t))/\alpha(t)$ получаем $\dot{x} = -\alpha(t)x + \alpha(t)\beta(t)$, откуда следует представление

$$(П.1) \quad x(t) = \varphi(t)x(0) + \int_0^t \frac{\varphi(t)}{\varphi(s)} \alpha(s)\beta(s) ds, \quad \varphi(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \right\}.$$

В силу (11) имеет место неравенство $\varepsilon \leq \beta(t) \leq N - \varepsilon$. Если в (П.1) вместо β взять $\beta_1 = \varepsilon$ и $\beta_2 = N - \varepsilon$, то соответствующие решения $x_k(t) = \varphi(t)x(0) + (1 - \varphi(t))\beta_k$, $k = 1, 2$, будут удовлетворять неравенствам $x_1(t) \leq x(t) \leq x_2(t)$. Поскольку $0 < \varphi(t) < 1$, получаем, что $x(t)$ — выпуклая комбинация чисел $x(0)$, β_1 и β_2 , каждое из которых принадлежит отрезку $[\varepsilon, N - \varepsilon]$. Это влечет $x(t) \in [\varepsilon, N - \varepsilon]$, что и требовалось. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Сначала установим факт существования оптимального управления в задаче (12). Для этого достаточно проверить условия теоремы III.4.1 из [23], а именно: липшицевость по (x, u) функции $f(t, x, u)$ в правой части дифференциального уравнения (13); непрерывность подынтегральной функции $g(t, x, u, \lambda)$; компактность множества допустимых значений управления U ; выпуклость множеств

$$F(t, x) = \{(p, z): \exists u \in U: p = f(t, x, u), z \geq g(t, x, u, \lambda)\}.$$

Последнее условие выполнено, если $f(t, x, u)$ линейна, а $g(t, x, u, \lambda)$ выпукла по u . Выпуклость второй функции по $u > 0$ вытекает из леммы, благодаря которой можно гарантировать, что $x \geq 0$.

Формулировку необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума можно найти, например, в пп. 2.4.1 и 2.4.2 в [24]. В силу существования оптимального управления и того, что максимум гамильтониана достигается в единственной точке (14), можно утверждать, что управление (16) является решением задачи (12).

Теперь выведем достаточное условие того, что оптимальное управление $\hat{u}(t)$ совпадает с верхней границей $m_{\max}$. Так как $\hat{u}(t)$ однозначно определяется выражениями (14) и (16), выясним, в каком случае имеет место $a/b \leq 1/m_{\max}^2$. Опуская зависимость от времени, это неравенство можно переписать в виде

$$\ell(1 - \ell)\psi + \lambda(1 - \ell) \leq (x + 1)/m_{\max}^2.$$

С учетом $0 \leq \ell < 1$ и $x \geq 0$ указанное неравенство заведомо выполнено при

$$(П.2) \quad \psi/4 + \lambda \leq 1/m_{\max}^2.$$

Оценим сверху значение сопряженной переменной $\psi(t)$. Для этого запишем уравнение (15) в виде $\dot{\psi} = \alpha(t)\psi - \alpha(t)\gamma(t)$, где $\gamma(t) = \lambda c - ((1 - \ell(t))\alpha(t)\hat{u}(t))^{-1}$. Воспользуемся неравенством

$$\gamma(t) \leq \gamma_{\max} = \lambda c - \frac{1}{\alpha_{\max} m_{\max}}, \quad \alpha_{\max} = \max_{t \in [0, T]} \alpha(t),$$

и представлением, аналогичным (II.1). Тогда в силу $\psi(T) = 0$ имеем, что

$$\psi(t) = \int_t^T \frac{\varphi(s)}{\varphi(t)} \alpha(s) \gamma(s) ds = \frac{\gamma_{\max}}{\varphi(t)} (\varphi(t) - \varphi(T)) \leq \gamma_{\max}.$$

Теперь при подстановке $\psi = \gamma_{\max}$ в (П.2) получается требуемое неравенство (17). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Докажем, что решение (25) существует, является единственным и положительным. Согласно определению β_n — минимум по w функции, непрерывно зависящей от w, β_{n+1}, ν , причем w пробегает отрезок. Тогда по теореме о непрерывности маргинальной функции

[25, п. 3.1.23], β_n — непрерывная функция переменных β_{n+1}, ν . Следовательно, $\beta_1(\nu)$ — тоже непрерывная функция. При $\nu = 0$ функция $h_0 - \nu + \beta_1(\nu)$ из правой части уравнения (25) будет положительна. Если можно выбрать такое $\nu_{\max} > 0$, чтобы $h_0 - \nu + \beta_1(\nu) < 0$ при $\nu = \nu_{\max}$, то благодаря непрерывности этой функции можно утверждать, что на интервале $(0, \nu_{\max})$ уравнение (25) будет иметь решение ν^* .

Для нахождения $\nu_{\max}$ заметим, что при любом выборе допустимой стратегии μ справедливо неравенство

$$\nu + \pi_0(h_0 - \nu + \beta_1(\nu)) \leq \mathfrak{J}[\pi, \mu, \nu],$$

в котором правая часть равна $\mathfrak{L}[\mu, \lambda]$, если последовательность $\{\pi_x\}$ удовлетворяет условию нормировки. Следовательно, $h_0 - \nu + \beta_1(\nu) < 0$ для $\nu > \mathfrak{L}[\mu, \lambda]$. Поэтому искомое $\nu_{\max}$ достаточно взять чуть больше $\mathfrak{L}[\mu, \lambda]$.

Для доказательства единственности ν^* заметим, что $\beta_1(\nu)$ — невозрастающая и вогнутая функция, как минимум таковых. Поэтому теми же свойствами обладает функция $h_0 - \nu + \beta_1(\nu)$, для которой ноль является промежуточным значением. Следовательно, это значение функция принимает в единственной точке.

Чтобы установить оптимальность стратегии μ^* в задаче (21), достаточно проверить, что если π^* — стационарное распределение, соответствующее стратегии μ^* , то (π^*, μ^*) и ν^* образуют седловую точку функционала $\mathfrak{J}[\pi, \mu, \nu]$:

$$(П.3) \quad \mathfrak{J}[\pi^*, \mu^*, \nu] \leq \mathfrak{J}[\pi^*, \mu^*, \nu^*] \leq \mathfrak{J}[\pi, \mu, \nu^*] \quad \forall (\pi, \mu) \in \mathcal{S}_0, \quad \forall \nu \in \mathbb{R}.$$

Левое неравенство (П.3) превращается в равенство, так как обе его части равны $\mathfrak{L}[\mu^*, \lambda]$ в силу условия нормировки. Правое неравенство следует из (23) с учетом того, что $\pi_0(h_0 - \nu) + \mathfrak{B}_1(\pi_0, \nu) = \pi_0(h_0 - \nu + \beta_1(\nu)) = 0$ при $\nu = \nu^*$.

При этом $\mathfrak{J}[\pi^*, \mu^*, \nu^*] = \mathfrak{L}[\mu^*, \lambda] = \nu^*$, что и требовалось. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Миллер Б.М., Авраченко К.Е., Степанян К.В., Миллер Г.Б. Задача оптимального стохастического управления потоком данных по неполной информации // Пробл. передачи информации. 2005. Т. 41. № 2. С. 89–110.
Miller B.M., Avrachenkov K.E., Stepanyan K.V., Miller G.B. Flow Control as a Stochastic Optimal Control Problem with Incomplete Information // Probl. Inform. Transmiss. 2005. V. 41. No. 2. P. 150–170.
2. Miller B.M. Optimization of Queuing System via Stochastic Control // Automatica. 2009. V. 45. P. 1423–1430.
3. Rieder U., Winter J. Optimal Control of Markovian Jump Processes with Partial Information and Applications to a Parallel Queueing Model // Math. Meth. Oper. Res. 2009. V. 70. P. 567–596.
4. Солодянников Ю.В. Управление и наблюдение для динамических сетей массового обслуживания. I // АиТ. 2014. № 3. С. 14–45.

Solodyannikov Yu.V. Control and Observation for Dynamical Queueing Networks. I // *Autom. Remote Control*. 2014. V. 75. No. 3. P. 422–446.

5. *Солодянников Ю.В.* Управление и наблюдение для динамических сетей массового обслуживания. II // *АиТ*. 2014. № 5. С. 91–114.

Solodyannikov Yu.V. Control and Observation for Dynamical Queueing Networks. II // *Autom. Remote Control*. 2014. V. 75. No. 5. P. 880–899.

6. *Кузнецов Н.А., Мясников Д.В., Семенikhин К.В.* Оптимизация двухфазной системы массового обслуживания и ее применение к управлению передачей данных между двумя агентами робототехнической системы // *Информационные процессы*. 2017. Т. 17. № 1. С. 19–42.

Kuznetsov N.A., Myasnikov D.V., Semenikhin K.V. Optimization of Two-Phase Queueing System and Its Application to the Control of Data Transmission Between Two Robotic Agents // *J. Communicat. Technol. Electron*. 2017. V. 62. No. 12. P. 1484–1498.

7. *Миллер Г.Б., Борисов А.В., Стефанович А.И.* Управляемые марковские скачкообразные процессы. I. Оптимальная фильтрация по комплексным наблюдениям // *Изв. РАН. Теория и системы управления*. 2018. № 6. С. 64–83.

Borisov A.V., Miller G.B., Stefanovich A.I. Controllable Markov Jump Processes. I. Optimum Filtering Based on Complex Observations // *J. Comput. Syst. Sci*. 2018. V. 57. No. 6. P. 890–906.

8. *Борисов А.В., Миллер Г.Б., Стефанович А.И.* Управляемые марковские скачкообразные процессы. II. Мониторинг и оптимизация функционирования TCP-соединений // *Изв. РАН. Теория и системы управления*. 2019. № 1. С. 13–30.

Borisov A.V., Miller G.B., Stefanovich A.I. Controllable Markov Jump Processes. II. Monitoring and Optimization of TCP Connections // *J. Comput. Syst. Sci*. 2019. V. 58. No. 1. P. 12–28.

9. *Коган Я.А., Липцер Р.Ш., Смородинский А.В.* Гауссовская диффузионная аппроксимация марковских замкнутых моделей сетей связи ЭВМ // *Пробл. передачи информации*. 1986. Т. 22. № 1. С. 49–65.

Kogan A.Ya., Liptser R.Sh., Smorodinskii A.V. Gaussian Diffusion Approximation of Closed Markov Models of Computer Networks // *Probl. Inform. Transmiss*. 1986. V. 22. No. 1. P. 38–51.

10. *Gordon W.J., Newell F.G.* Closed Queueing Systems with Exponential Servers // *Oper. Res*. 1967. V. 15. No. 2. P. 254–265.

11. *Кельберт М.Я., Сухов Ю.М.* Математические вопросы теории сетей с очередями // *Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Матем. статистика. Теоретич. киберн.* М.: ВИНТИ. 1988. Т. 26. С. 3–96.

12. *Kitaev M.Y., Rykov V.V.* Controlled queueing systems. Boca Raton: FL: CRC, 1995.

13. *Sennott L.I.* Stochastic dynamic programming and the control of queueing systems. N.Y.: J. Wiley & Sons, 1999.

14. *Whitt W.* Stochastic-process limits. An introduction to stochastic-process limits and their application to queues. N.Y.: Springer, 2002.

15. *Anisimov V.V.* Switching processes in queueing models. Hoboken: J. Wiley & Sons, 2008.

16. *Stidham S.* Optimal design of queueing systems. N.Y.: Chapman & Hall/CRC, 2009.

17. *Altman E.* Constrained Markov decision processes. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 1999.

18. *Миллер Б.М., Миллер Г.Б., Семенихин К.В.* Методы синтеза оптимального управления марковским процессом с конечным множеством состояний при наличии ограничений // *АиТ.* 2011. № 2. С. 111–130.
Miller B.M., Miller G.B., Semenikhin K.V. Methods to Design Optimal Control of Markov Process with Finite State set in the Presence of Constraints // *Autom. Remote Control.* 2011. V. 72. No. 2. P. 323–341.
19. *Schechner Z., Yao D.* Decentralized Control of Service Rates in a Closed Jackson Network // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1989. V. 34. No. 2. P. 236–240.
20. *Ma D.-J., Cao X.-R.* A Direct Approach to Decentralized Control of Service Rates in a Closed Jackson Network // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1994. V. 39. No. 7. P. 1460–1463.
21. *Степанов С.Н., Степанов М.С.* Построение и анализ обобщенной модели контакт-центра // *АиТ.* 2014. № 11. С. 55–69.
Stepanov S.N., Stepanov M.S. Construction and Analysis of a Generalized Contact Center Model // *Autom. Remote Control.* 2014. V. 75. No. 11. P. 1936–1947.
22. *Liptser R.S., Shiryaev A.N.* Statistics of random processes. 3rd ed. N.Y.: Springer, 2005.
23. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: Мир, 1978.
24. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
25. *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 20.06.2019

После доработки 19.08.2019

Принята к публикации 26.09.2019

© 2020 г. Ю.А. КУТОЯНЦ, д-р физ.-мат. наук (kutoyants@univ-lemans.fr)
(Ле-Ман Университет, Франция;
Томский государственный университет)

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СКРЫТЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Представляется обзор работ по оценке параметров скрытых (hidden) марковских процессов. Рассмотрены две модели наблюдений: частично наблюдаемый двумерный гауссовский процесс и телеграфный процесс, наблюдаемый на фоне белого гауссовского шума. Описываются свойства оценок в асимптотике больших выборок и малого шума. Специальное внимание оказано вопросам вычислительной сложности и асимптотической эффективности предлагаемых оценок.

Ключевые слова: оценка параметров, скрытые процессы, калмановская фильтрация, телеграфный процесс.

DOI: 10.31857/S000523102003006X

1. Введение

Рассматривается несколько задач оценки конечномерного параметра по наблюдениям случайного процесса

$$(1) \quad dX_t = f_t Y_t dt + \sigma_t dW_t, \quad X_0 = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Предполагается, что случайный процесс Y_t , $0 \leq t \leq T$ является марковским и не наблюдаемым (hidden). Это может быть как решение линейного стохастического дифференциального уравнения

$$(2) \quad dY_t = -a_t Y_t dt + b_t dV_t, \quad Y_0 = y_0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

так и стационарный марковский процесс с двумя состояниями (y_1 и y_2) с инфинитезимальной матрицей переходов

$$(3) \quad \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

Уравнение (1) называется уравнением наблюдений, а уравнение (2) — уравнением состояний. Винеровские процессы W_t , $0 \leq t \leq T$ и V_t , $0 \leq t \leq T$ в этих уравнениях всегда в работе предполагаются независимыми. В случае диффузионных процессов (1)–(2) предполагается, что функции f_t , a_t и b_t зависят от неизвестных параметров, которые обозначены как ϑ , а в случае телеграфного процесса, наблюдаемого в белом шуме (1), (3), неизвестный параметр равен $\vartheta = (\lambda, \mu)^\top$. Здесь и далее $a^\top$ обозначает транспонирование вектора $\vec{a}$.

Настоящая работа представляет обзор результатов по оценке параметров, полученных для этих двух моделей наблюдений. Следует сказать, что в связи с большим значением калмановской фильтрации для многих прикладных задач имеется обширная литература по идентификации схожих частично наблюдаемых моделей наблюдений. В основном исследовались системы с дискретным временем. Кроме того, эти модели привлекали внимание и тех, кто работает в математической статистике, см., например, [1–3] и ссылки в этих работах. Результаты, приведенные в этой статье, отражают скорее личные интересы автора и не претендуют на исчерпывающее описание всех известных результатов для этих моделей наблюдений. Заметим, что если возможно статистическое оценивание с малыми ошибками, то это, скорее всего, соответствует одной из моделей с асимптотикой. Например, можно иметь большой объем наблюдений, т.е. большие выборки (large samples), либо большой сигнал или эквивалентно “малый шум” (small noise).

2. Основные результаты

Ниже описываются свойства оценок в асимптотике больших выборок ($T \rightarrow \infty$, модели (1)–(2) и (1), (3)) и в асимптотике малого шума (два предела $\sigma_t \rightarrow 0$, $b_t \rightarrow 0$ и $\sigma_t \rightarrow 0$, модель (1)–(2)). В качестве оценок взяты оценка максимального правдоподобия (ОМП), оценки Байеса (БО) и недавно введенные для этих моделей наблюдений одношаговые оценки-процессы максимального правдоподобия (One-step MLE-processes).

Введем ряд обозначений и определений. Рассмотрим модель (1)–(2), где обозначим $f_t = f(\vartheta, t)$, $a_t = a(\vartheta, t)$ и $b_t = b(\vartheta, t)$. Неизвестный параметр $\vartheta \in \Theta$ одномерный и множество есть $\Theta = (\alpha, \beta)$. Напомним, что в случае $\sigma_t = \sigma(\vartheta, t)$ задача оценки параметра ϑ вырождена, т.е. возможно построение оценки ϑ без ошибки. Например, если $\sigma(\vartheta, t) = \vartheta h(t)$, $\vartheta > 0$, $h(t) > 0$, тогда по формуле Ито для X_t^2 получается стохастический дифференциал $dX_t^2 = 2X_t dX_t + \vartheta^2 h(t)^2 dt$. Следовательно оценка

$$\vartheta_t = \left(\int_0^t h(s)^2 ds \right)^{-1/2} \left(X_t^2 - 2 \int_0^t X_s dX_s \right)^{1/2} = \vartheta$$

для всех $t > 0$.

Для упрощения изложения предполагается, что все функции положительны и ограничены. Меры, отвечающие наблюдениям (1) при разных значениях параметра ϑ , эквивалентны, и функция отношения правдоподобия есть

$$(4) \quad L(\vartheta, X^T) = \exp \left\{ \int_0^T \frac{f(\vartheta, t)m(\vartheta, t)}{\sigma_t^2} dX_t - \int_0^T \frac{f(\vartheta, t)^2 m(\vartheta, t)^2}{2\sigma_t^2} dt \right\}, \quad \vartheta \in \Theta,$$

где $m(\vartheta, t)$ — условное ожидание, $m(\vartheta, t) = \mathbf{E}_\vartheta(Y_t | X_s, 0 \leq s \leq t)$ (см. [4]).

ОМП $\hat{\vartheta}$ определяется как решение уравнения

$$(5) \quad L(\hat{\vartheta}, X^T) = \sup_{\vartheta \in \Theta} L(\vartheta, X^T).$$

Предположим, что ϑ – случайная величина с плотностью распределения $p(\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$, где $p(\cdot)$ – положительная непрерывная функция на Θ . Тогда байесовская оценка $\tilde{\vartheta}$ при квадратической функции потерь имеет вид

$$(6) \quad \tilde{\vartheta} = \frac{\int_{\Theta} \vartheta p(\vartheta) L(\vartheta, X^T) d\vartheta}{\int_{\Theta} p(\vartheta) L(\vartheta, X^T) d\vartheta}.$$

Случайный процесс $m(\vartheta, t)$ является решением уравнений фильтрации (Калмана–Бьюси):

$$(7) \quad dm(\vartheta, t) = -a(\vartheta, t)m(\vartheta, t)dt + \frac{\gamma(\vartheta, t)f(\vartheta, t)}{\sigma_t^2} [dX_t - f(\vartheta, t)m(\vartheta, t)dt],$$

$$(8) \quad \frac{\partial \gamma(\vartheta, t)}{\partial t} = -2a(\vartheta, t)\gamma(\vartheta, t) - \frac{\gamma(\vartheta, t)^2 f(\vartheta, t)^2}{\sigma_t^2} + b(\vartheta, t)^2$$

с начальными условиями $m(\vartheta, 0) = y_0$ и $\gamma(\vartheta, 0) = 0$. Здесь

$$\gamma(\vartheta, t) = \mathbf{E}_{\vartheta} (Y_t - m(\vartheta, t))^2.$$

Описываются асимптотические свойства оценок $\hat{\vartheta}$ и $\tilde{\vartheta}$ при различных условиях регулярности функций $f(\vartheta, t)$, $a(\vartheta, t)$ и $b(\vartheta, t)$.

Третья оценка, которая будет интересна, — это одношаговая оценка-процесс максимального правдоподобия (One-step MLE-process) ϑ_t^* , $0 < \tau < t \leq T$. Она строится в два приема. Сначала по начальной малой выборке $X^T = (X_t, 0 \leq t \leq \tau)$ строится простая состоятельная оценка $\bar{\vartheta}_{\tau}$, а затем эта оценка используется следующим образом

$$(9) \quad \vartheta_t^* = \bar{\vartheta}_{\tau} + \mathbb{I}(\bar{\vartheta}_{\tau})^{-1} \int_{\tau}^t \frac{\dot{\mathcal{M}}(\bar{\vartheta}_{\tau}, s)}{\sigma_s^2} [dX_s - \mathcal{M}(\bar{\vartheta}_{\tau}, s)ds], \quad \tau < t \leq T.$$

Здесь обозначили через $\mathbb{I}(\vartheta)$ информацию Фишера и $\mathcal{M}(\vartheta, s) = f(\vartheta, s)m(\vartheta, t)$. Точка над функцией означает дифференцирование по ϑ .

Далее показывается, что эта оценка асимптотически эквивалентна ОМП, т.е. является асимптотически эффективной.

Сходная двухшаговая процедура оценивания предлагается и в случае наблюдений (1), где Y_t , $0 \leq t \leq T$ — марковский процесс с двумя состояниями и матрицей (3). Неизвестный параметр $\vartheta = (\lambda, \mu)^T$.

Напомним, что одношаговые ОМП (One-step MLE) были введены Фишером в 1925 г. [5] и исследованы Ле Камом в 1956 г. [6]. Впоследствии эти оценки были использованы многими статистиками для широкого класса моделей. Их построение мотивируется следующим образом. Пусть $\dot{V}(\hat{\vartheta}, X^T) = 0$ — уравнение максимального правдоподобия, где $V(\vartheta, X^T) = \ln L(\vartheta, X^T)$. Разложим решение этого уравнения в окрестности истинного значения ϑ_0 и получим $\dot{V}(\vartheta_0, X^T) + (\hat{\vartheta} - \vartheta_0)\ddot{V}(\bar{\vartheta}, X^T) = 0$. Можно написать $\hat{\vartheta} = \vartheta_0 - \dot{V}(\bar{\vartheta}, X^T)^{-1}\dot{V}(\vartheta_0, X^T)$. Напомним, что при правильной нормировке

$\ddot{V}(\vartheta_0, X^T) \rightarrow -\mathbb{I}(\vartheta_0)$. Если в этом уравнении заменить ϑ и $\bar{\vartheta}$ некоторой состоятельной оценкой ϑ° , то получим одношаговую ОМП

$$\vartheta^\star = \vartheta^\circ + \frac{\dot{V}(\vartheta^\circ, X^T)}{\mathbb{I}(\vartheta^\circ)},$$

которая, при определенных условиях является асимптотически эффективной.

Заметим, что скорости сходимости оценок φ_ε в случае малого шума имеют порядки $\sqrt{\varepsilon}$, ε , ε^a , $a \in (1, 2)$, ε^2 и в эргодических случаях (диффузионный и телеграфный процессы) порядок сходимости $\varphi_T = T^{-1/2}$. Эти скорости определяются локальным поведением (в окрестности истинного значения ϑ_0) расстояния Кульбака–Лейблера $R_{K-L}(u)$, которое символически можно записать следующим образом (малый шум):

$$R_{K-L}(u) = \int_0^T \frac{[f(\vartheta_0 + \varphi_\varepsilon u, t)m(\vartheta_0 + \varphi_\varepsilon u, t) - f(\vartheta_0, t)m(\vartheta_0, t)]^2}{2\varepsilon^2 \sigma_t^2} dt \rightarrow \Psi(u),$$

т.е., скорость сходимости $\varphi_\varepsilon \rightarrow 0$ должна быть такой, что этот интеграл имеет невырожденный предел $\Psi(u)$. Здесь $\Psi(u)$ — некоторая положительная функция, которая разная в разных задачах. Например, в гладком случае $\varphi_\varepsilon = \varepsilon$ и $\Psi(u) = \frac{1}{2}u^2\mathbb{I}(\vartheta_0)$. Аналогичное соотношение имеем и в случае эргодических наблюдений с $\varphi_T = T^{-1/2}$.

Получены следующие результаты.

В случае, когда $f_t = f(\vartheta, t)$, $a_t = a(\vartheta, t)$, $\sigma_t = \varepsilon\sigma(t)$, $b_t = \varepsilon b(t)$, где $f(\vartheta, t)$ и $a(\vartheta, t)$ гладкие по ϑ , ОМП и БО при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотически нормальные $\varepsilon^{-1}(\hat{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1})$ и асимптотически эффективные (теорема 1). Те же свойства имеет одношаговая ОМП (теорема 3).

В случае, когда $f_t = f(\vartheta, t)$, $a_t = a(\vartheta, t)$, $\sigma_t = \varepsilon\sigma(t)$, $b_t = b(\vartheta, t)$, где $f(\vartheta, t)$, $a(\vartheta, t)$ и $b(\vartheta, t)$ гладкие по ϑ , ОМП и БО при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотически нормальные $\varepsilon^{-1/2}(\hat{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1})$ и асимптотически эффективные (теорема 4).

В случае, когда $f_t = h(t)\mathbb{I}_{\{t < \vartheta\}} + g(t)\mathbb{I}_{\{t \geq \vartheta\}}$, $\sigma_t = \varepsilon$, $b_t = \varepsilon b(t)$, ОМП и БО при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют разные предельные распределения с нормировкой ε^{-2} и асимптотически эффективны только БО (теорема 6). Если же разладка имеет место в уравнении состояний, то обе оценки асимптотически нормальны с “регулярной” скоростью ε^{-1} (теорема 7).

Далее рассматриваем задачу определения источника по наблюдениям гауссовских сигналов из этого источника, зарегистрированных детекторами на фоне малого белого гауссовского шума. Описано предельное поведение ОМП и БО положения источника при трех разных предположениях о форме фронта регистрируемых сигналов (теоремы 8–10).

Рассматривается также задача оценки параметров частично наблюдаемой линейной гауссовской системы в случае “больших выборок”. Показано, что в гладком случае ОМП и БО при $T \rightarrow \infty$ асимптотически нормальны

$T^{1/2}(\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1})$ и асимптотически эффективны (теорема 11). Те же свойства имеет одношаговая ОМП (теорема 12).

Последняя задача посвящена оценке параметров $\vartheta = (\lambda, \mu)^\top$ в случае наблюдений (1), где $f_t = 1$ и Y_t — марковский процесс с двумя состояниями и матрицей (3). Построена одношаговая ОМП-процесс этого параметра и доказана ее состоятельность и асимптотическая нормальность с нормировкой $T^{1/2}$ (теорема 13).

3. Диффузионные процессы, малый шум, гладкий случай

3.1. Линейные системы

Рассмотрим двумерное линейное стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ)

$$\begin{aligned} dX_t &= f(\vartheta, t) Y_t dt + \varepsilon_1 \sigma(t) dW_t, & X_0 &= 0, & 0 \leq t \leq T, \\ dY_t &= -a(\vartheta, t) Y_t dt + \varepsilon_2 b(\vartheta, t) dV_t, & Y_0 &= y_0, & 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Функции $f(\vartheta, t)$, $a(\vartheta, t)$, $b(\vartheta, t)$ известны и для определенности будем считать их положительными. Рассматривается задача оценки параметра ϑ по наблюдениям X^T в двух разных асимптотиках: **A)** $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon \rightarrow 0$ и **B)** $\varepsilon_1 = \varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon_2 = 1$.

В случае **A)** уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} dX_t &= f(\vartheta, t) Y_t dt + \varepsilon \sigma(t) dW_t, & X_0 &= 0, & 0 \leq t \leq T, \\ dY_t &= -a(\vartheta, t) Y_t dt + \varepsilon b(t) dV_t, & Y_0 &= y_0 > 0, & 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Обозначим через $\vartheta_0 \in \Theta$ истинное значение параметра. Множество $\Theta \subset \mathcal{R}^d$ открытое, выпуклое и ограниченное. При $\varepsilon = 0$ решения этих уравнений $X_t \rightarrow x_t(\vartheta)$, $Y_t \rightarrow y(\vartheta, t)$ можно записать в виде функций

$$x_t(\vartheta_0) = \int_0^t f(\vartheta_0, s) y_s(\vartheta_0) ds, \quad y_t(\vartheta_0) = y_0 \exp \left\{ - \int_0^t a(\vartheta_0, s) ds \right\}.$$

Уравнения фильтрации (7)–(8) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходятся к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(\vartheta, t)}{\partial t} &= - \left[a(\vartheta, t) \gamma_*(\vartheta, t) h_t(\vartheta)^2 \right] y(\vartheta, t) + \gamma_*(\vartheta, t) h_t(\vartheta) h_t(\vartheta_0) y_t(\vartheta_0), \\ \frac{\partial \gamma_*(\vartheta, t)}{\partial t} &= -2a(\vartheta, t) \gamma_*(\vartheta, t) - \gamma_*(\vartheta, t)^2 h(\vartheta, t)^2 + b(t)^2, \quad \gamma_*(\vartheta, 0) = 0, \end{aligned}$$

где обозначено $y(\vartheta, t) = m(\vartheta, t)|_{\varepsilon=0}$, $\gamma_*(\vartheta, t) = \varepsilon^{-2} \gamma(\vartheta, t)$ и $h(\vartheta, t) = \sigma(t)^{-1} f(\vartheta, t)$. Заметим, что $y(\vartheta, t)$ зависит от ϑ_0 , а уравнение для $\gamma_*(\vartheta, t)$ не зависит от ε . Введем функцию $M(\vartheta, t) = f(\vartheta, t)y(\vartheta, t)$, вектор-функцию $\dot{M}(\vartheta, t)$ и информационную матрицу

$$\mathbb{I}(\vartheta_0) = \int_0^T \dot{M}(\vartheta_0, t)^\top \dot{M}(\vartheta_0, t) \sigma(t)^{-2} dt.$$

Условие идентифицируемости для этой модели наблюдений имеет вид: для любого $\nu > 0$ имеем

$$(10) \quad \inf_{\|\vartheta - \vartheta_0\| > \nu} \int_0^T [f(\vartheta, t) y(\vartheta, t) - f(\vartheta_0, t) y_t(\vartheta_0)]^2 dt > 0.$$

Теорема 1. Предположим, что функции $f(\vartheta, t)$ и $a(\vartheta, t)$ имеют две непрерывные ограниченные производные по ϑ , информационная матрица $\mathbb{I}(\vartheta)$ равномерно по ϑ не вырождена и условие идентифицируемости (10) выполнено. Тогда ОМП $\hat{\vartheta}_\varepsilon$ и БО $\tilde{\vartheta}_\varepsilon$ равномерно на компактах состоятельны, асимптотически нормальны,

$$\varepsilon^{-1}(\hat{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0) \Rightarrow \zeta \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1}), \quad \varepsilon^{-1}(\tilde{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0) \Rightarrow \zeta \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1}),$$

имеет место сходимость моментов

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-p} \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left\| \hat{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0 \right\|^p = \mathbf{E}_{\vartheta_0} \|\zeta\|^p, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-p} \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left\| \tilde{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0 \right\|^p = \mathbf{E}_{\vartheta_0} \|\zeta\|^p$$

и обе оценки асимптотически эффективны.

Доказательство см. в [7, теорема 6.2].

При доказательстве используется два общих результата, полученных Ибрагимовым и Хасьминским в [8, теоремы 1.10.1 и 1.10.3]. Напомним основные элементы доказательства. Этот метод изучения применяется при доказательстве свойств ОМП и БО всех остальных результатов, представленных в этой работе. Введем нормированное отношение правдоподобия

$$Z_\varepsilon(u) = \frac{L(\vartheta_0 + \varphi_\varepsilon u, X^T)}{L(\vartheta_0, X^T)}, \quad u \in \mathbb{U}_\varepsilon = \{u : \vartheta_0 + \varphi_\varepsilon u \in \Theta\}.$$

Нормирующая функция в этой задаче $\varphi_\varepsilon = \varepsilon$. Заметим, что в других задачах нормировка будет другой, но метод доказательства тот же. Например в задаче о разладке $\varphi_\varepsilon = \varepsilon^2$. Предположим, что $Z_\varepsilon(u)$ сходится к некоторому предельному процессу $Z(u)$, $u \in \mathcal{R}^d$:

$$Z_\varepsilon(\cdot) \Rightarrow Z(\cdot).$$

Введем два вектора $\hat{\zeta}$ и $\tilde{\zeta}$

$$(11) \quad Z(\hat{\zeta}) = \sup_{u \in \mathcal{R}^d} Z(u), \quad \tilde{\zeta} = \left(\int_{\mathcal{R}^d} Z(u) du \right)^{-1} \int_{\mathcal{R}^d} u Z(u) du.$$

Тогда предельные распределения оценок получают следующим образом. Пусть множество $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}^d$. Для ОМП имеем

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}_{\vartheta_0} \left(\varphi_\varepsilon^{-1} \left(\hat{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0 \right) \in \mathcal{B} \right) = \\
& = \mathbf{P}_{\vartheta_0} \left\{ \sup_{\varphi_\varepsilon^{-1}(\vartheta - \vartheta_0) \in \mathcal{B}} L(\vartheta, X^T) > \sup_{\varphi_\varepsilon^{-1}(\vartheta - \vartheta_0) \in \mathcal{B}^c} L(\vartheta, X^T) \right\} = \\
& = \mathbf{P}_{\vartheta_0} \left\{ \sup_{\varphi_\varepsilon^{-1}(\vartheta - \vartheta_0) \in \mathcal{B}} \frac{L(\vartheta, X^T)}{L(\vartheta_0, X^T)} > \sup_{\varphi_\varepsilon^{-1}(\vartheta - \vartheta_0) \in \mathcal{B}^c} \frac{L(\vartheta, X^T)}{L(\vartheta_0, X^T)} \right\} = \\
& = \mathbf{P}_{\vartheta_0} \left\{ \sup_{u \in \mathcal{B}, u \in \mathbb{U}_\varepsilon} Z_\varepsilon(u) > \sup_{u \in \mathcal{B}^c, u \in \mathbb{U}_\varepsilon} Z_\varepsilon(u) \right\} \longrightarrow \\
& \longrightarrow \mathbf{P}_{\vartheta_0} \left\{ \sup_{u \in \mathcal{B}} Z(u) > \sup_{u \in \mathcal{B}^c} Z(u) \right\} = \mathbf{P}_{\vartheta_0} \left(\hat{\zeta} \in \mathcal{B} \right).
\end{aligned}$$

Здесь была сделана замена переменных $\vartheta = \vartheta_0 + \varphi_\varepsilon u$. Для БО можем написать (ниже $\vartheta_u = \vartheta_0 + \varphi_\varepsilon u$)

$$\tilde{\vartheta}_\varepsilon = \frac{\int_{\Theta} \theta p(\theta) L(\theta, X^T) d\theta}{\int_{\Theta} p(\theta) L(\theta, X^T) d\theta} = \vartheta_0 + \varphi_\varepsilon \frac{\int_{\mathbb{U}_\varepsilon} u p(\theta_u) Z_\varepsilon(u) du}{\int_{\mathbb{U}_\varepsilon} p(\theta_u) Z_\varepsilon(u) du}.$$

Следовательно,

$$\varphi_\varepsilon^{-1} \left(\tilde{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0 \right) = \frac{\int_{\mathbb{U}_\varepsilon} u p(\theta_u) Z_\varepsilon(u) du}{\int_{\mathbb{U}_\varepsilon} p(\theta_u) Z_\varepsilon(u) du} \implies \frac{\int_{\mathcal{R}^d} u Z(u) du}{\int_{\mathcal{R}^d} Z(u) du} = \tilde{\zeta}.$$

В условиях теоремы 1 (гладком случае)

$$\begin{aligned}
Z_\varepsilon(u) &= \exp \left\{ \langle u, \Delta_\varepsilon \rangle - \frac{1}{2} u^\top \mathbb{I}(\vartheta_0) u + r_\varepsilon \right\} \implies \\
&\implies Z(u) = \exp \left\{ \langle u, \Delta(\vartheta_0) \rangle - \frac{1}{2} u^\top \mathbb{I}(\vartheta_0) u \right\},
\end{aligned}$$

где Δ_ε является “score-function” (логарифмическая производная отношения правдоподобия по параметру), $\Delta_\varepsilon \Rightarrow \Delta(\vartheta_0) \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{I}(\vartheta_0))$ и $r_\varepsilon \rightarrow 0$. Кроме того, $\hat{\zeta} = \zeta = \mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1} \Delta(\vartheta_0)$, $\tilde{\zeta} = \zeta$.

Одношаговая оценка. Описанные выше ОМП и БО имеют серьезный недостаток, связанный со сложностью их вычисления. Действительно, чтобы найти ОМП $\hat{\vartheta}_\varepsilon$ или БО $\tilde{\vartheta}_\varepsilon$ (см. (4)–(6)) надо решить уравнения фильтрации (7)–(8) при всех значениях параметра $\vartheta \in \Theta$, что является вычислительно довольно сложной задачей. Ниже предлагается построение оценки, называемой

одношаговой ОМП (One-step MLE), которую вычислять существенно проще (см. (9)) и которая имеет те же асимптотические свойства, что и ОМП или БО. Построение этой оценки осуществляется в два этапа. Сначала строится простая предварительная оценка параметра по небольшой части начальных наблюдений, а затем эта оценка используется для построения одношаговой. Метод построения оценок при одномерном процессе Y_t позволяет построить оценку только в случае одномерного параметра $\vartheta \in \Theta = (\alpha, \beta)$.

Предполагается, что функции $f(\vartheta, t), a(\vartheta, t)$ имеют две непрерывные ограниченные производные по ϑ и по t . Функции $f(\vartheta, 0)$ и $\dot{f}(\vartheta, 0)$ отделены от нуля:

$$\inf_{\vartheta \in \Theta} |f(\vartheta, 0)| > 0, \quad \inf_{\vartheta \in \Theta} |\dot{f}(\vartheta, 0)| > 0.$$

Введем функции

$$x_m(t) = \inf_{\vartheta \in \Theta} x_t(\vartheta) < \sup_{\vartheta \in \Theta} x_t(\vartheta) = x_M(t).$$

Заметим, что в окрестности $t = 0$

$$x_m(t) = x_t(\alpha), \quad x_M(t) = x_t(\beta).$$

Положим $\tau_\varepsilon = \varepsilon^\delta, \delta \in (0, 2)$, и введем множества

$$\mathbb{B}_\varepsilon = \{x_m(\tau_\varepsilon) < X_{\tau_\varepsilon} < x_M(\tau_\varepsilon)\}, \\ \mathbb{B}_\varepsilon^- = \{X_{\tau_\varepsilon} \leq x_m(\tau_\varepsilon)\}, \quad \mathbb{B}_\varepsilon^+ = \{X_{\tau_\varepsilon} \geq x_M(\tau_\varepsilon)\}.$$

Предварительную оценку определим равенством

$$(12) \quad \bar{\vartheta}_{\tau_\varepsilon} = \alpha \mathbb{I}_{\{\mathbb{B}_\varepsilon^-\}} + \mu_\varepsilon \mathbb{I}_{\{\mathbb{B}_\varepsilon\}} + \beta \mathbb{I}_{\{\mathbb{B}_\varepsilon^+\}},$$

где μ_ε является решением уравнения $x_{\tau_\varepsilon}(\mu_\varepsilon) = X_{\tau_\varepsilon}$.

Теорема 2. Оценка $\bar{\vartheta}_{\tau_\varepsilon}$ состоятельна и для любого $p > 0$

$$\sup_{\vartheta_0 \in \Theta} \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\bar{\vartheta}_{\tau_\varepsilon} - \vartheta_0|^p \leq C \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\tau_\varepsilon}} \right)^p \rightarrow 0.$$

Информация Фишера

$$I_\tau(\vartheta, t) = \int_\tau^t \left[\frac{\dot{f}(\vartheta, s) y_s(\vartheta) + f(\vartheta, s) \dot{y}(\vartheta, s)}{\sigma(s)} \right]^2 ds, \quad I(\vartheta, t) = I_0(\vartheta, t).$$

Статистический эксперимент является регулярным с локально асимптотически нормальным семейством мер, поэтому имеем нижнюю границу Гаека-Ле Кама на риск любой оценки $\vartheta_{t,\varepsilon}$, построенной по наблюдениям $X^t = (X_s, 0 \leq s \leq t)$ [8]:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|\vartheta - \vartheta_0| < \nu} \varepsilon^{-2} \mathbf{E}_\vartheta (\vartheta_{t,\varepsilon} - \vartheta)^2 \geq I(\vartheta_0, t)^{-1}.$$

Назовем оценку $\vartheta_{t,\varepsilon}^*$ асимптотически эффективной, если при всех $\vartheta_0 \in \Theta$, имеем равенство

$$(13) \quad \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|\vartheta - \vartheta_0| < \nu} \varepsilon^{-2} \mathbf{E}_{\vartheta} (\vartheta_{t,\varepsilon}^* - \vartheta)^2 = \mathbf{I}(\vartheta_0, t)^{-1}.$$

Введем одношаговую ОМП-процесс

$$(14) \quad \vartheta_{t,\varepsilon}^* = \bar{\vartheta}_{\tau_\varepsilon} + \frac{1}{\mathbf{I}_{\tau_\varepsilon}(\bar{\vartheta}_{\tau_\varepsilon}, t)} \int_{\tau_\varepsilon}^t \frac{\dot{M}(\bar{\vartheta}_{\tau_\varepsilon}, s)}{\sigma(s)^2} [dX_s - f(\bar{\vartheta}_{\tau_\varepsilon}, s) m(\bar{\vartheta}_{\tau_\varepsilon}, t) ds],$$

$$\tau_\varepsilon < t \leq T,$$

где обозначили $\dot{M}(\vartheta, s) = \dot{f}(\vartheta, s) y_s(\vartheta) + f(\vartheta, s) \dot{y}(\vartheta, s)$.

Теорема 3. Положим $\delta \in (0, 1)$, тогда оценка $\vartheta_{t,\varepsilon}^$, $\tau_\varepsilon < t \leq T$ состоятельна, асимптотически нормальная*

$$\varepsilon^{-1} (\vartheta_{t,\varepsilon}^* - \vartheta_0) \implies \zeta_t \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I}(\vartheta_0, t)^{-1}),$$

моменты сходятся: для любого $p > 0$

$$\varepsilon^{-p} \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\vartheta_{t,\varepsilon}^* - \vartheta_0|^p \longrightarrow \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\zeta_t|^p$$

и асимптотически эффективная при всех $t \in (0, T]$.

Доказательство см. [9].

В случае **В**) имеем уравнения

$$\begin{aligned} dX_t &= f(\vartheta, t) Y_t dt + \varepsilon \sigma(t) dW_t, & X_0 &= 0, & 0 \leq t \leq T, \\ dY_t &= -a(\vartheta, t) Y_t dt + b(\vartheta, t) dV_t, & Y_0 &= y_0 > 0, & 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Эта модель наблюдений имеет интересные особенности. Имеют место следующие пределы:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[f(\vartheta, t) \dot{m}(\vartheta, t) + \dot{f}(\vartheta, t) m(\vartheta, t) \right] &= 0, \\ \varepsilon^2 \mathbf{I}_\varepsilon(\vartheta) &= \int_0^T \sigma(t)^{-2} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} [f(\vartheta, t) m(\vartheta, t)] \right)^2 dt \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

и по распределению

$$\varepsilon^{-1/2} \left[f(\vartheta, t) \dot{m}(\vartheta, t) + \dot{f}(\vartheta, t) m(\vartheta, t) \right] \implies n(\vartheta, t) \xi_t,$$

где ξ_t , $t \in (0, T]$ — независимые случайные величины и вид функции $n(\vartheta, t)$ ясен из определения информации Фишера $\mathbf{I}_0(\vartheta)$ ниже. Но

$$\varepsilon \mathbf{I}_\varepsilon(\vartheta) \not\rightarrow \int_0^T n(\vartheta, t)^2 \xi_t^2 dt.$$

Заметим, что этот интеграл не существует, так как предел $\xi_t^2, 0 < t \leq T$ не является сепарабельным процессом. Правильный предел есть

$$\varepsilon I_\varepsilon(\vartheta) \longrightarrow \frac{1}{2} \int_0^T n(\vartheta, t)^2 dt \equiv I_0(\vartheta).$$

Введем обозначения $S(\vartheta, t) = f(\vartheta, t) b(\vartheta, t)$,

$$G(\vartheta, \vartheta_0) = \int_0^T \frac{[S(\vartheta, t) - S(\vartheta_0, t)]^2}{2S(\vartheta, t)\sigma(t)} dt, \quad I_0(\vartheta) = \int_0^T \frac{S(\vartheta, t)}{2\sigma(t)} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln[S(\vartheta, t)] \right)^2 dt,$$

и условия $\mathcal{C}$:

$\mathcal{C}_1$. Функции $f(\vartheta, t)$, $b(\vartheta, t)$, $\vartheta \in \Theta$, $t \in [0, T]$ и $\sigma(t)$, $t \in [0, T]$ ограничены и имеют две непрерывные ограниченные производные по ϑ, t ,

$$\kappa = \inf_{\vartheta \in \Theta} \inf_{0 \leq t \leq T} f(\vartheta, t) > 0, \quad \inf_{0 \leq t \leq T} \sigma(t) > 0, \quad \inf_{\vartheta \in \Theta} \inf_{0 \leq t \leq T} b(\vartheta, t) > 0.$$

$\mathcal{C}_2$. Для любого $\nu > 0$

$$\inf_{\vartheta_0 \in \Theta} \inf_{|\vartheta - \vartheta_0| > \nu} G(\vartheta, \vartheta_0) > 0.$$

$\mathcal{C}_3$. Информация Фишера

$$\inf_{\vartheta \in \Theta} I_0(\vartheta) > 0.$$

Статистический эксперимент является регулярным, и в результате имеем нижнюю границу Гаека-Ле Кама

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|\bar{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta| < \delta} \varepsilon^{-1} \mathbf{E}_\vartheta |\bar{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta|^2 \geq I_0(\vartheta)^{-1}.$$

Как и в случае **A**, асимптотически эффективную оценку ϑ_ε^* определяем с помощью этой границы следующим равенством

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|\vartheta - \vartheta_0| < \delta} \varepsilon^{-1} \mathbf{E}_\vartheta |\vartheta_\varepsilon^* - \vartheta|^2 = I_0(\vartheta)^{-1}.$$

ОМП и БО определяются соотношениями (5), (6).

Теорема 4. Пусть выполнены условия $\mathcal{C}$. Тогда ОМП и БО состоятельны, асимптотически нормальны

$$\frac{\hat{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0}{\sqrt{\varepsilon}} \Longrightarrow \zeta \sim \mathcal{N}(0, I_0(\vartheta_0)^{-1}), \quad \frac{\tilde{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0}{\sqrt{\varepsilon}} \Longrightarrow \zeta,$$

моменты сходятся: для любого $p > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left| \frac{\hat{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0}{\sqrt{\varepsilon}} \right|^p = \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\zeta|^p, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left| \frac{\tilde{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0}{\sqrt{\varepsilon}} \right|^p = \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\zeta|^p$$

и обе оценки асимптотически эффективны.

Доказательство см. в [10].

Заметим, что для этой модели также возможно построение одношаговой ОМП-процесса.

3.2. Нелинейные системы, условно гауссовские процессы

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} dX_t &= f_t(\vartheta, X_t) Y_t dt + \varepsilon dW_t, \quad X_0 = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ dY_t &= -a_t(\vartheta, X_t) Y_t dt + \varepsilon b_t(X_t) dV_t, \quad Y_0 = y_0, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

где, как и раньше, $W_t, V_t, 0 \leq t \leq T$ — независимые винеровские процессы и $Y_t, 0 \leq t \leq T$ — ненаблюдаемый (hidden) процесс. Здесь $Y_t, 0 \leq t \leq T$ — условно гауссовский процесс, и фильтрация таких процессов была описана Р. Липшером [11] (см. также гл. 11 в [4]). Обозначим $m(\vartheta, t) = \mathbf{E}_{\vartheta}(Y_t | X_s, 0 \leq s \leq t)$ и $\gamma(\vartheta, t) = \varepsilon^{-2} \mathbf{E}_{\vartheta}([Y_t - m(\vartheta, t)]^2 | X_s, 0 \leq s \leq t)$. Уравнения фильтрации имеют вид

$$\begin{aligned} dm(\vartheta, t) &= -a_t(\vartheta, X_t) m(\vartheta, t) dt + \\ &+ \gamma(\vartheta, t) f_t(\vartheta, X_t) [dX_t - f_t(\vartheta, X_t) m(\vartheta, t) dt], \\ \frac{\partial \gamma(\vartheta, t)}{\partial t} &= -2a_t(\vartheta, X_t) \gamma(\vartheta, t) - \gamma(\vartheta, t)^2 f_t(\vartheta, X_t)^2 + b_t(X_t)^2 \end{aligned}$$

с начальными условиями $m(\vartheta, 0) = y_0, \gamma(\vartheta, 0) = 0$.

Введем обозначения $S_t(\vartheta, X) = f_t(\vartheta, X_t) m(\vartheta, t)$,

$$\begin{aligned} \dot{S}_t(\vartheta, X) &= \dot{f}_t(\vartheta, X_t) m(\vartheta, t) + f_t(\vartheta, X_t) \dot{m}(\vartheta, t), \\ \dot{S}_t(\vartheta, x) &= \dot{f}_t(\vartheta, X_t) m(\vartheta, t)|_{\varepsilon=0} + f_t(\vartheta, X_t) \dot{m}(\vartheta, t)|_{\varepsilon=0} = \\ &= \dot{f}_t(\vartheta, x_t) y(\vartheta, t) + f_t(\vartheta, x_t) \dot{y}(\vartheta, t), \\ \mathbb{I}(\vartheta) &= \int_0^T \dot{S}_t(\vartheta, x)^\top \dot{S}_t(\vartheta, x) dt. \end{aligned}$$

Здесь $S_t(\vartheta, x) = S_t(\vartheta, x_s, 0 \leq s \leq t)$. Условие идентифицируемости: для любого $\nu > 0$

$$\inf_{\|\vartheta - \vartheta_0\| > \nu} \int_0^T [f_t(\vartheta, x_t) y(\vartheta, t) - f_t(\vartheta_0, x_t) y(\vartheta_0, t)]^2 dt > 0.$$

Теорема 5. *Предположим, что функции $f_t(\vartheta, x), a_t(\vartheta, x)$ имеют две непрерывные ограниченные производные по θ , выполнено условие идентифицируемости и матрица информации Фишера $\mathbb{I}(\vartheta)$ равномерно по ϑ невырождена. Тогда ОМП $\hat{\vartheta}_\varepsilon$ и БО $\tilde{\vartheta}_\varepsilon$ состоятельны, асимптотически нормальные*

$$\frac{\hat{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0}{\varepsilon} \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1}\right), \quad \frac{\tilde{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0}{\varepsilon} \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1}\right),$$

моменты сходятся и обе оценки асимптотически эффективны.

Доказательство см. в [7, теорема 6.4].

Можно также рассмотреть, например, следующую нелинейную модель наблюдений

$$\begin{aligned} dX_t &= f(\vartheta, Y_t) dt + \varepsilon dW_t, & X_0 &= 0, & 0 \leq t \leq T, \\ dY_t &= -a(\vartheta, Y_t) dt + \varepsilon dV_t, & Y_0 &= y_0, & 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Построение условного ожидания $\mathbf{E}_\vartheta(Y_t|X_s, 0 \leq s \leq t)$ является сложной задачей, но построение состоятельной и асимптотически нормальной (но не эффективной) оценки может быть реализовано следующим образом. Заметим, что случайный процесс Y_t допускает разложение

$$\begin{aligned} Y_t &= y_t(\vartheta) + \varepsilon y_t^{(1)}(\vartheta) + O(\varepsilon^2), \\ f(\vartheta, Y_t) &= f(\vartheta, y_t(\vartheta)) + f'_y(\vartheta, y_t(\vartheta))(Y_t - y_t(\vartheta)) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

где $y_t(\vartheta) = Y_t|_{\varepsilon=0}$ и $y_t^{(1)}(\vartheta)$ — решение линейного уравнения

$$dy_t^{(1)}(\vartheta) = -a'_y(\vartheta, y_t(\vartheta)) y_t^{(1)}(\vartheta) dt + dV_t, \quad y_0^{(1)}(\vartheta) = 0.$$

Далее исходная система уравнений заменяется линеаризованной и уже для этой линейной системы выписываются уравнения фильтрации. На основании линейной модели строится псевдо-ОМП, доказывается ее состоятельность и асимптотическая нормальность. Конечно условие идентифицируемости отличается от обычного. Подробности см. в [7, теорема 6.5].

4. Диффузионные процессы, малый шум, задача о разладке

Рассмотрим частично наблюдаемые линейные модели наблюдений с разладками в уравнении наблюдений (А) и в уравнении состояний (В).

А. Первая модель имеет вид

$$\begin{aligned} dX_t &= h_t Y_t \mathbb{I}_{\{t < \vartheta\}} dt + g_t Y_t \mathbb{I}_{\{t \geq \vartheta\}} dt + \varepsilon dW_t, & X_0 &= 0, & 0 \leq t \leq T, \\ dY_t &= -a_t Y_t dt + \varepsilon b_t dV_t, & Y_0 &= y_0 \neq 0, & 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Неизвестный параметр — это момент разладки $\vartheta \in \Theta = (\alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \beta < T$ и его надо оценить по наблюдениям $X^T = (X_t, 0 \leq t \leq T)$. Функции h_t, g_t, a_t, b_t предполагаются ограниченными.

Для построения ОМП $\hat{\vartheta}_\varepsilon$ и БО $\tilde{\vartheta}_\varepsilon$ этого параметра понадобится условное ожидание $m(\vartheta, t) = \mathbf{E}_\vartheta(Y_t|X_s, 0 \leq s \leq t)$. Процесс $m(\vartheta, t)$ удовлетворяет уравнениям фильтрации

$$\begin{aligned} dm(\vartheta, t) &= -a_t m(\vartheta, t) dt + \gamma(\vartheta, t) h_t [dX_t - h_t m(\vartheta, t) dt], & m(\vartheta, 0) &= y_0, & 0 \leq t < \vartheta, \\ \frac{\partial \gamma(\vartheta, t)}{\partial t} &= -2a_t \gamma(\vartheta, t) - \gamma(\vartheta, t)^2 h_t^2 + b_t^2, & \gamma(\vartheta, 0) &= 0, & 0 \leq t < \vartheta \end{aligned}$$

и для $t \in [\vartheta, T]$

$$dm(\vartheta, t) = -a_t m(\vartheta, t) dt + \gamma(\vartheta, t) g_t [dX_t - g_t m(\vartheta, t) dt],$$

$$\frac{\partial \gamma(\vartheta, t)}{\partial t} = -2a_t \gamma(\vartheta, t) - \gamma(\vartheta, t)^2 g_t^2 + b_t^2,$$

с начальными значениями $m(\vartheta, \vartheta), \gamma(\vartheta, \vartheta)$. Разумеется, на интервале $[0, \vartheta]$ имеем $m(\vartheta, t) = m(t)$ и $\gamma(\vartheta, t) = \gamma(t)$.

Введем случайные величины $\hat{\zeta}$ и $\tilde{\zeta}$ с помощью уравнений (11), где случайный процесс $Z(u)$ есть

$$Z(u) = \exp \left\{ \rho(\vartheta_0) W(u) - \frac{|u|}{2} \rho(\vartheta_0)^2 \right\}, \quad u \in \mathcal{R}.$$

Ранее через $W(\cdot)$ был обозначен двусторонний винеровский процесс,

$$\rho(\vartheta) = (h_\vartheta - g_\vartheta) y_\vartheta, \quad y_\vartheta = y_0 \exp \left\{ - \int_0^\vartheta a_s ds \right\}.$$

Имеется нижняя граница на среднеквадратический риск любой оценки [8]

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|\vartheta - \vartheta_0| < \delta} \varepsilon^{-4} \mathbf{E}_\vartheta |\bar{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta|^2 \geq \mathbf{E}_{\vartheta_0} \tilde{\zeta}^2.$$

Асимптотически эффективную оценку ϑ_ε^* определяем с помощью этой границы следующим равенством

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|\vartheta - \vartheta_0| < \delta} \varepsilon^{-4} \mathbf{E}_\vartheta |\vartheta_\varepsilon^* - \vartheta|^2 = \mathbf{E}_{\vartheta_0} \tilde{\zeta}^2.$$

Теорема 6. Предположим, что $\inf_{\vartheta \in \Theta} |\rho(\vartheta)| > 0$. Тогда ОМП $\hat{\vartheta}_\varepsilon$ и БО $\tilde{\vartheta}_\varepsilon$ состоятельны, имеют разные предельные распределения

$$\frac{\hat{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0}{\varepsilon^2} \Rightarrow \hat{\zeta}, \quad \frac{\tilde{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0}{\varepsilon^2} \Rightarrow \tilde{\zeta},$$

моменты сходятся: для любого $p > 0$

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0} \left| \frac{\hat{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0}{\varepsilon^2} \right|^p \rightarrow \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\hat{\zeta}|^p, \quad \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left| \frac{\tilde{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0}{\varepsilon^2} \right|^p \rightarrow \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\tilde{\zeta}|^p$$

и БО асимптотически эффективны.

Доказательство см. [7, теорема 6.6] и [12].

В. Рассмотрим теперь частично наблюдаемую систему с разладкой в уравнении состояний

$$\begin{aligned} dX_t &= f_t Y_t dt + \varepsilon dW_t, \quad X_0 = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ dY_t &= h_t Y_t \mathbb{I}_{\{t < \vartheta\}} dt + g_t Y_t \mathbb{I}_{\{t \geq \vartheta\}} dt + \varepsilon b_t dV_t, \quad Y_0 = y_0 \neq 0. \end{aligned}$$

Обозначим $\Theta = (\alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \beta < T$, $\gamma(\vartheta, t) = \varepsilon^{-2} \mathbf{E}_{\vartheta} (Y_t - m(\vartheta, t))^2$, $r_t(\vartheta) = h_t \mathbb{I}_{\{t < \vartheta\}} + g_t \mathbb{I}_{\{t \geq \vartheta\}}$, $\rho(\vartheta) = (h(\vartheta) - g(\vartheta))y_{\vartheta}(\vartheta)$ и положим

$$z_t(\vartheta) = \rho(\vartheta) \exp \left\{ \int_{\vartheta}^t [g_s - f_s^2 \gamma(\vartheta, s)] ds \right\}, \quad \frac{\partial y_t(\vartheta)}{\partial t} = r_t(\vartheta) y_t(\vartheta), \quad y_0(\vartheta) = y_0,$$

$$\frac{\partial \gamma(\vartheta, t)}{\partial t} = 2r_t(\vartheta) \gamma(\vartheta, t) - f_t^2 \gamma(\vartheta, t)^2 + b_t^2, \quad \gamma(\vartheta, 0) = 0, \quad \mathbb{I}(\vartheta) = \int_{\vartheta}^T f_t^2 z_t(\vartheta)^2 dt.$$

Для $m_t(\vartheta) = \mathbf{E}_{\vartheta} (Y_t | X_s, 0 \leq s \leq t)$ имеем

$$dm(\vartheta, t) = r_t(\vartheta) m(\vartheta, t) dt + \gamma(\vartheta, t) f_t [dX_t - f_t m(\vartheta, t) dt], \quad m(\vartheta, 0) = y_0.$$

Статистический эксперимент в этом случае является регулярным и справедлива нижняя граница Гаека-Ле Кама

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|\vartheta - \vartheta_0| < \delta} \varepsilon^{-2} \mathbf{E}_{\vartheta} |\bar{\vartheta}_{\varepsilon} - \vartheta|^2 \geq \mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1}.$$

Как обычно, асимптотически эффективными назовем оценки, для которых здесь имеется равенство при всех $\vartheta_0 \in \Theta$.

Теорема 7. *Предположим, что $\inf_{\vartheta \in \Theta} |\rho(\vartheta)| > 0$. Тогда ОМП $\hat{\vartheta}_{\varepsilon}$ и БО $\tilde{\vartheta}_{\varepsilon}$ состоятельны, асимптотически нормальны,*

$$\frac{\hat{\vartheta}_{\varepsilon} - \vartheta_0}{\varepsilon} \Rightarrow \zeta \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1}), \quad \frac{\tilde{\vartheta}_{\varepsilon} - \vartheta_0}{\varepsilon} \Rightarrow \zeta,$$

имеет место сходимость моментов ($p > 0$)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-p} \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left\| \hat{\vartheta}_{\varepsilon} - \vartheta_0 \right\|^p = \mathbf{E}_{\vartheta_0} \|\zeta\|^p, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-p} \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left\| \tilde{\vartheta}_{\varepsilon} - \vartheta_0 \right\|^p = \mathbf{E}_{\vartheta_0} \|\zeta\|^p$$

и обе оценки асимптотически эффективны.

Доказательство см. [7, теорема 6.7].

5. Диффузионные процессы, малый шум, локализация источника на плоскости

Рассмотрим задачу обнаружения положения $\vartheta_0 = (x_0, y_0)^{\top}$ источника $\mathbb{S}_0$ на плоскости по наблюдениям K детекторов $\mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_K$ (см. рис. 1).

Обозначим через $\vartheta_k = (x_k, y_k)^{\top} \in \mathcal{R}^2$ положение k -го детектора. Источник начинает излучать в момент $t = 0$ и сигнал приходит к k -му детектору через время $\tau_k(\vartheta_0) = \nu^{-1} \|\vartheta_k - \vartheta_0\|$, где $\nu > 0$ — скорость распространения сигнала в среде и $\|\cdot\|$ — норма в $\mathcal{R}^2$. Наблюдения k -го детектора могут быть записаны следующим образом:

$$(15) \quad dX_k(t) = a_k(t) \bar{\psi}(t - \tau_k(\vartheta_0)) Y_k(t) dt + \varepsilon \sigma_k(t) dW_k(t), \quad X_k(0) = 0.$$

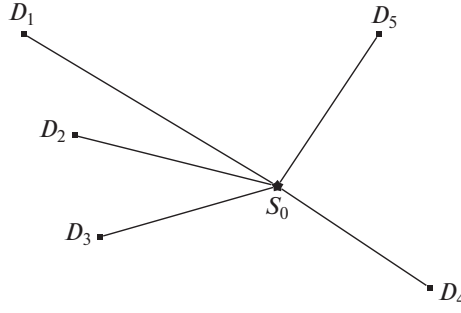


Рис. 1. Модель наблюдений.

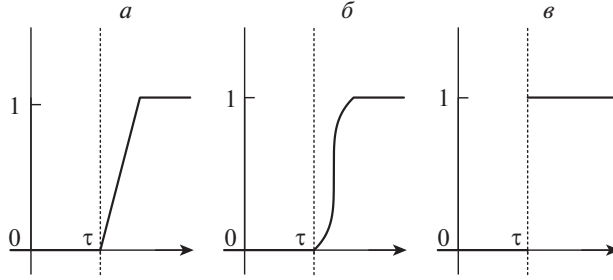


Рис. 2. Пример функций: а — $\psi_\delta(\cdot)$, б — $\psi_{\delta,\kappa}$, в — $\psi(\cdot)$.

Здесь $a_k(\cdot)$, $\sigma_k(\cdot)$, $\bar{\psi}(t - \tau_k(\vartheta_0))$ и $\sigma_k(\cdot)$ — известные ограниченные функции и $W_k(t)$, $k = 1, \dots, K$ — независимые винеровские процессы. Функция $\bar{\psi}(t) = 0$, $t < 0$ и отражает форму сигнала в момент его достижения детектора. Рассмотрим три разных случая: гладкий, сингулярность типа касп (cusptype) и сингулярность типа разладки (change-point type). А именно,

$$\psi_\delta(t) = \frac{t}{\delta} \mathbb{I}_{\{0 \leq t \leq \delta\}} + \mathbb{I}_{\{t > \delta\}}, \quad \psi(t) = \mathbb{I}_{\{t > 0\}},$$

$$\psi_{\delta,\kappa}(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{sgn}(2t - \delta) \left| \frac{2t}{\delta} - 1 \right|^\kappa \right) \mathbb{I}_{\{0 \leq t \leq \delta\}} + \mathbb{I}_{\{t > \delta\}}.$$

Параметр δ известен и принимает малые значения. Примеры таких функций показаны на рис. 2.

Сигналы $Y_k(\cdot)$, $k = 1, \dots, K$ удовлетворяют линейному СДУ

$$(16) \quad dY_k(t) = -f_k(t) Y_k(t) dt + \varepsilon b_k(t) dV_k(t), \quad Y_k(0) = y_k \neq 0.$$

Рассматриваем задачу оценивания положения (параметра) ϑ_0 по наблюдениям $X^T = (X_1, \dots, X_K)$, где $X_k = (X_k(t), 0 \leq t \leq T)$. Процессы $Y_k(\cdot)$ ненаблюдаемы (hidden).

Для определенности предполагается, что функции $a_k(\cdot)$, $\sigma_k(\cdot)$, $f_k(\cdot)$, $b_k(\cdot)$, $k = 1, \dots, K$ ограничены и $\sigma_k(\cdot)$ отделена от нуля. Множество Θ открытое, выпуклое и ограниченное. Как минимум три детектора не лежат на одной прямой.

Функция правдоподобия имеет вид

$$\begin{aligned} \ln L(\vartheta, X^K) = & \sum_{k=1}^K \int_{\tau_k(\vartheta)}^T \frac{a_k(t) M_k(\tau_k(\vartheta), t)}{\varepsilon^2 \sigma_k(t)^2} dX_k(t) - \\ & - \sum_{k=1}^K \int_{\tau_k(\vartheta)}^T \frac{a_k(t)^2 M_k(\tau_k(\vartheta), t)^2}{2\varepsilon^2 \sigma_k(t)^2} dt, \end{aligned}$$

где обозначили $M_k(\tau_k, t) = \bar{\psi}(t - \tau_k) m_k(\tau_k, t)$ и условное ожидание $m_k(\tau_k, t) = \mathbf{E}_{\vartheta}(Y_k(t) | X_k(s), 0 \leq s \leq t)$. ОМП и БО определены по тем же формулам (5), (6). Цель — изучить асимптотические ($\varepsilon \rightarrow 0$) свойства этих оценок в трех ситуациях: гладкой, типа касп и с разладкой.

Введем обозначения $\tau_k(\vartheta_0) = \nu^{-1} \|\vartheta_k - \vartheta_0\|$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_k(\vartheta_0)}{\partial x_0} &= -\frac{x_k - x_0}{\nu \rho_k} = -\frac{\mu_{k,x}}{\nu}, \quad \frac{\partial \tau_k(\vartheta_0)}{\partial y_0} = -\frac{y_k - y_0}{\nu \rho_k} = -\frac{\mu_{k,y}}{\nu}, \\ \rho_k &= \|\vartheta_k - \vartheta_0\|, \quad \mu_k = (\mu_{k,x}, \mu_{k,y})^\top, \quad \|\mu_k\| = 1, \\ h_k(t) &= \frac{a_k(t)}{\sigma_k(t)}, \quad \mathbb{B}_k^+ = (w : \langle \mu_k, w \rangle > 0), \quad \mathbb{B}_k^- = (w : \langle \mu_k, w \rangle < 0). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\tau_k(\vartheta_0 + \nu \varphi_\varepsilon w) = \tau_k(\vartheta_0) - \varphi_\varepsilon \langle \mu_k, w \rangle + O(\varphi_\varepsilon^2), \quad w \in \mathcal{R}^2, \quad \varphi_\varepsilon \rightarrow 0.$$

Случайные процессы $m_k(\tau_k, t)$, $0 \leq t \leq T$, $k = 1, \dots, K$ и функции $\gamma_k(\vartheta, t)$, $0 \leq t \leq T$, $k = 1, \dots, K$ удовлетворяют соответствующим уравнениям фильтрации, которые здесь не приводятся. Они могут быть найдены в [13]. Заметим, что калмановская фильтрация активно используется в задачах GPS-локализации (см., например, [14, 15]).

Гладкий случай. Предположим, что

$$\bar{\psi}(t - \tau_k) = \psi_\delta(t - \tau_k) = \frac{(t - \tau_k)}{\delta} \mathbb{I}_{\{0 \leq t - \tau_k \leq \delta\}} + \mathbb{I}_{\{t \geq \delta + \tau_k\}}.$$

Введем две функции

$$\begin{aligned} \dot{M}_{k,x}^o(\tau_k(\vartheta_0), t) &= \left. \frac{\partial [m_k(\tau_k(\vartheta), t) \psi_\delta(t - \tau_k(\vartheta))]}{\partial \tau_k} \right|_{\vartheta=\vartheta_0, \varepsilon=0} \frac{\partial \tau_k(\vartheta_0)}{\partial x_0}, \\ \dot{M}_{k,y}^o(\tau_k(\vartheta_0), t) &= \left. \frac{\partial [m_k(\tau_k(\vartheta), t) \psi_\delta(t - \tau_k(\vartheta))]}{\partial \tau_k} \right|_{\vartheta=\vartheta_0, \varepsilon=0} \frac{\partial \tau_k(\vartheta_0)}{\partial y_0} \end{aligned}$$

и матрицу $\mathbb{I}(\vartheta_0) = \left(\mathbb{I}(\vartheta_0)_{l,m} \right)$ с компонентами

$$\mathbb{I}_{1,1}(\vartheta_0) = \sum_{k=1}^K \int_{\tau_k(\vartheta_0)}^T h_k(t)^2 \dot{M}_{k,x}^o(\tau_k(\vartheta_0), t)^2 dt,$$

$$\mathbb{I}_{2,2}(\vartheta_0) = \sum_{k=1}^K \int_{\tau_k(\vartheta_0)}^T h_k(t)^2 \dot{M}_{k,y}^o(\tau_k(\vartheta_0), t)^2 dt,$$

$$\mathbb{I}_{1,2}(\vartheta_0) = \mathbb{I}_{2,1}(\vartheta_0) = \sum_{k=1}^K \int_{\tau_k(\vartheta_0)}^T h_k(t)^2 \dot{M}_{k,x}^o(\tau_k(\vartheta_0), t) \dot{M}_{k,y}^o(\tau_k(\vartheta_0), t) dt.$$

Имеем нижнюю границу Гаека-Ле Кама на риски всех оценок

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\|\vartheta - \vartheta_0\| \leq \delta} \varepsilon^{-2} \mathbf{E}_{\vartheta} \left\| \tilde{\vartheta}_{\varepsilon} - \vartheta \right\|^2 \geq \mathbf{E}_{\vartheta_0} \|\zeta\|^2, \quad \zeta \sim \mathcal{N}\left(0, \mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1}\right).$$

Как обычно, определим асимптотически эффективные оценки с помощью этой границы.

Теорема 8. Предположим, что матрица $\mathbb{I}(\vartheta_0)$ равномерно по $\vartheta \in \Theta$ не вырождена. Тогда ОМП и БО состоятельны, асимптотически нормальны

$$\varepsilon^{-1} \left(\hat{\vartheta}_{\varepsilon} - \vartheta_0 \right) \Rightarrow \zeta \sim \mathcal{N}\left(0, \mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1}\right), \quad \varepsilon^{-1} \left(\tilde{\vartheta}_{\varepsilon} - \vartheta_0 \right) \Rightarrow \zeta \sim \mathcal{N}\left(0, \mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1}\right),$$

моменты сходятся: для любого $p > 0$

$$\varepsilon^{-p} \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left\| \hat{\vartheta}_{\varepsilon} - \vartheta_0 \right\|^p \longrightarrow \mathbf{E}_{\vartheta_0} \|\zeta\|^p, \quad \varepsilon^{-p} \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left\| \tilde{\vartheta}_{\varepsilon} - \vartheta_0 \right\|^p \longrightarrow \mathbf{E}_{\vartheta_0} \|\zeta\|^p,$$

и обе оценки асимптотически эффективны.

Доказательство см. в [13].

Случай сингулярности типа касп. Рассмотрим случай возрастания сигнала с помощью непрерывной, но не дифференцируемой функции (информация Фишера равна бесконечности), имеющей вид

$$\psi_{\delta, \kappa}(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{sgn}(2t - \delta) \left| \frac{2t}{\delta} - 1 \right|^{\kappa} \right) \mathbb{I}_{\{0 \leq t \leq \delta\}} + \mathbb{I}_{\{\delta \leq t \leq T\}}.$$

Эта модель наблюдений предлагается, как альтернатива модели разладки. Реальные технические устройства, в которых сигналу соответствует электрический ток, не могут реализовать действительно разрывные функции и модель с каспом может оказаться ближе к реальной.

Введем обозначения

$$\pi_k(\vartheta_0) = h_k(\tau_k(\vartheta_0 + \delta/2)) y_k(\tau_k(\vartheta_0) + \delta/2),$$

$$\pi_k = \pi_k(\vartheta_0), \quad Q(\kappa)^2 = \int_{\mathcal{R}} [\operatorname{sgn}(s-1)|s-1|^\kappa - \operatorname{sgn}(s)|s|^\kappa]^2 ds,$$

$$\varphi_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{1}{H}} Q(\kappa)^{-\frac{1}{H}} 2^{\frac{1-\kappa}{H}} \delta^{\frac{\kappa}{H}}, \quad H = \kappa + \frac{1}{2}.$$

Предельное отношение правдоподобия имеет вид

$$Z(w) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^K \left[\pi_k W_k^{H,+}(\langle \mu_k, w \rangle) - \frac{\pi_k^2}{2} |\langle \mu_k, w \rangle|^{2H} \right] \mathbb{I}_{\{w \in \mathbb{B}_k^+\}} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^K \left[\pi_k W_k^{H,-}(-\langle \mu_k, w \rangle) - \frac{\pi_k^2}{2} |\langle \mu_k, w \rangle|^{2H} \right] \mathbb{I}_{\{w \in \mathbb{B}_k^-\}} \right\}, \quad w \in \mathcal{R}^2.$$

Здесь $W_k^{H,+}(s)$, $s \geq 0$, $k = 1, \dots, K$ и $W_k^{H,-}(s)$, $s \geq 0$, $k = 1, \dots, K$ — независимые фрактальные броуновские процессы с параметром Херста H , т.е. независимые гауссовские процессы со средним $\mathbf{E}W_k^{H,+}(s) = 0$ и ковариацией

$$\mathbf{E}W_k^{H,+}(s_1)W_k^{H,+}(s_2) = \frac{1}{2} \left(|s_1|^{2H} + |s_2|^{2H} - |s_1 - s_2|^{2H} \right).$$

Предельные распределения оценок описываются случайными векторами $\hat{\zeta}$ и $\tilde{\zeta}$, определенными соотношениями (11).

Имеется нижняя граница на риски оценок

$$\lim_{\delta_* \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\|\vartheta - \vartheta_0\| \leq \delta_*} \varphi_\varepsilon^{-2} \mathbf{E}_\vartheta \|\bar{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta\|^2 \geq \mathbf{E}_{\vartheta_0} \|\tilde{\zeta}\|^p.$$

Асимптотически эффективные оценки определяем как оценки, для которых в этом неравенстве достигается равенство при всех $\vartheta_0 \in \Theta$.

Теорема 9. В сделанных предположениях ОМП $\hat{\vartheta}_\varepsilon$ и БО $\tilde{\vartheta}_\varepsilon$ равномерно состоятельны, имеют разные предельные распределения

$$\varphi_\varepsilon^{-1}(\hat{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0) \Rightarrow \hat{\zeta}, \quad \varphi_\varepsilon^{-1}(\tilde{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0) \Rightarrow \tilde{\zeta},$$

имеет место сходимость моментов: для любого $p > 0$

$$\varphi_\varepsilon^{-p} \mathbf{E}_{\vartheta_0} \|\hat{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0\|^p \longrightarrow \mathbf{E}_{\vartheta_0} \|\hat{\zeta}\|^p, \quad \varphi_\varepsilon^{-p} \mathbf{E}_{\vartheta_0} \|\tilde{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0\|^p \longrightarrow \mathbf{E}_{\vartheta_0} \|\tilde{\zeta}\|^p$$

и БО асимптотически эффективны.

Доказательство см. в [13]. Заметим, что в случае независимых одинаково распределенных случайных величин с плотностью, имеющей сингулярность типа касп и параметр сдвига, свойства оценок описаны в [8].

Случай разладки. Рассмотрим ту же задачу оценки положения $\vartheta_0 \in \Theta$ источника сигналов по наблюдениям $X^T = (X_1, \dots, X_K)$ (уравнения (15))

с K детекторов, когда в момент появления сигнала τ_k имеет место скачок в соответствии с функцией

$$\bar{\psi}(t - \tau_k) = \mathbb{I}_{\{t \geq \tau_k\}}.$$

Сами сигналы $Y_k(\cdot)$, $k = 1, \dots, K$ удовлетворяют тем же уравнениям (16). Функция правдоподобия может быть записана следующим образом

$$L(\vartheta, X^K) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^K \int_{\tau_k(\vartheta)}^T \frac{a_k(t) m_k(\tau_k(\vartheta), t)}{\varepsilon^2 \sigma_k(t)^2} dX_k(t) - \sum_{k=1}^K \int_{\tau_k(\vartheta)}^T \frac{a_k(t)^2 m_k(\tau_k(\vartheta), t)^2}{2\varepsilon^2 \sigma_k(t)^2} dt \right\}, \quad \vartheta \in \Theta.$$

Оценки ОМП $\hat{\vartheta}_\varepsilon$ и БО $\tilde{\vartheta}_\varepsilon$ определены соотношениями (5) и (6) соответственно.

Предельное отношение правдоподобия запишем в виде

$$Z(w) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^K \left[\pi_k W_k^+(\langle \mu_k, w \rangle) - \frac{\pi_k^2}{2} |\langle \mu_k, w \rangle| \right] \mathbb{I}_{\{w \in \mathbb{B}_k^+\}} + \sum_{k=1}^K \left[\pi_k W_k^-(\langle \mu_k, w \rangle) - \frac{\pi_k^2}{2} |\langle \mu_k, w \rangle| \right] \mathbb{I}_{\{w \in \mathbb{B}_k^-\}} \right\}, \quad w \in \mathcal{R}^2,$$

где обозначено через $W_k^+(s)$, $s \geq 0$, $k = 1, \dots, K$ и $W_k^-(s)$, $s \geq 0$, $k = 1, \dots, K$ независимые винеровские процессы и $\pi_k(\vartheta_0) = h_k(\tau_k(\vartheta_0)) y_k(\tau_k(\vartheta_0))$, $\pi_k = \pi_k(\vartheta_0)$. Предельные распределения оценок задаются случайными векторами $\hat{\zeta}$ и $\tilde{\zeta}$, определяемыми соотношениями (11).

Нижняя граница в этой задаче имеет вид

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\|\vartheta - \vartheta_0\| \leq \nu} \varepsilon^{-4} \mathbf{E}_\vartheta \|\vartheta_\varepsilon^* - \vartheta\|^2 \geq \mathbf{E}_{\vartheta_0} \|\tilde{\zeta}\|^2$$

с соответствующим определением асимптотически эффективных оценок.

Теорема 10. В сделанных предположениях ОМП $\hat{\vartheta}_\varepsilon$ и БО $\tilde{\vartheta}_\varepsilon$ равномерно состоятельны, имеют разные предельные распределения

$$\varepsilon^{-2} (\hat{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0) \Rightarrow \hat{\zeta}, \quad \varepsilon^{-2} (\tilde{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0) \Rightarrow \tilde{\zeta},$$

имеет место сходимость моментов: для любого $p > 0$

$$\varepsilon^{-2p} \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left\| \hat{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0 \right\|^p \rightarrow \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left\| \hat{\zeta} \right\|^p, \quad \varepsilon^{-2p} \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left\| \tilde{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0 \right\|^p \rightarrow \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left\| \tilde{\zeta} \right\|^p$$

и БО асимптотически эффективны.

Доказательство см. в [13].

Заметим, что в [10] предлагается также упрощенная процедура оценивания положения источника. Она осуществляется в два этапа. Сначала каждый детектор оценивает момент τ_k появления сигнала. Затем значения оценок $\bar{\tau}_\varepsilon = (\bar{\tau}_{1,\varepsilon}, \dots, \bar{\tau}_{K,\varepsilon})$ передаются в центр обработки данных, где на основании $\bar{\tau}_\varepsilon$ положение находится как решение линейного уравнения. Полученные оценки не являются асимптотически эффективными, но предпочтительнее с точки зрения вычислений.

6. Диффузионные процессы, эргодический случай

Рассмотрим однородную частично наблюдаемую линейную систему уравнений

$$(17) \quad dX_t = c(\vartheta) Y_t dt + \sigma dW_t, \quad X_0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$(18) \quad dY_t = -a(\vartheta) Y_t dt + b(\vartheta) dV_t, \quad Y_0,$$

где, как и раньше, X_t , $0 \leq t \leq T$ — наблюдаемый процесс и Y_t , $0 \leq t \leq T$ — скрытый (hidden) процесс, а W_t , $0 \leq t \leq T$ и V_t , $0 \leq t \leq T$ независимые винеровские процессы. X_0 и Y_0 — независимые гауссовские случайные величины. Параметр $\sigma > 0$ и функции $c(\vartheta)$, $a(\vartheta)$, $b(\vartheta)$ предполагаются известными.

Уравнения фильтрации Калмана–Бьюси для $m(\vartheta, t) = \mathbf{E}_\vartheta(Y_t | X_s, 0 \leq s \leq t)$ и $\gamma(\vartheta, t) = \mathbf{E}_\vartheta((Y_t - m(\vartheta, t))^2 | X_s, 0 \leq s \leq t)$ имеют вид

$$(19) \quad dm(\vartheta, t) = -a(\vartheta) m(\vartheta, t) + \frac{c(\vartheta) \gamma(\vartheta, t)}{\sigma^2} [dX_t - c(\vartheta) m(\vartheta, t) dt],$$

$$(20) \quad \frac{\partial \gamma(\vartheta, t)}{\partial t} = -2a(\vartheta) \gamma(\vartheta, t) - \frac{c(\vartheta)^2 \gamma(\vartheta, t)^2}{\sigma^2} + b(\vartheta)^2$$

с начальными условиями $m_0 = \mathbf{E}Y_0$ и $\gamma(\vartheta, 0) = \mathbf{E}(Y_0 - \mathbf{E}Y_0)^2$ соответственно. Функцию правдоподобия в этой модели наблюдений запишем в виде

$$(21) \quad L(\vartheta, X^T) = \exp \left\{ \int_0^T \frac{c(\vartheta) m(\vartheta, t)}{\sigma^2} dX_t - \int_0^T \frac{c(\vartheta)^2 m(\vartheta, t)^2}{2\sigma^2} dt \right\}, \quad \vartheta \in \Theta.$$

Параметр $\vartheta \in \Theta = (\alpha, \beta)$ предполагается неизвестным. Рассматриваем задачу оценки ϑ и описываем свойства оценок при $T \rightarrow \infty$. ОМП $\hat{\vartheta}_T$ и БО $\tilde{\vartheta}_T$ определены соотношениями (5), (6).

Для функций выполняется: $c(\vartheta) \neq 0$, $a(\vartheta) > 0$ и $b(\vartheta) \neq 0$ при всех $\vartheta \in \Theta$. Они также непрерывно дифференцируемы. Случайный процесс $m(\vartheta, t)$, $0 \leq t \leq T$ является эргодическим. Введем обозначения: информация Фишера (см. [16])

$$\mathbb{I}(\vartheta) = \frac{\dot{a}(\vartheta)^2}{2a(\vartheta)} - \frac{2\dot{a}(\vartheta) \dot{r}(\vartheta)}{a(\vartheta) + r(\vartheta)} + \frac{\dot{r}(\vartheta)^2}{2r(\vartheta)}, \quad r(\vartheta) = \sqrt{a(\vartheta)^2 + \frac{b(\vartheta)^2 c(\vartheta)^2}{\sigma^2}}$$

и условия: при всех $\nu > 0$

$$\inf_{|\vartheta - \vartheta_0| > \nu} (|a(\vartheta) - a(\vartheta_0)| + |r(\vartheta) - r(\vartheta_0)|) > 0, \quad \inf_{\vartheta \in \Theta} (|\dot{a}(\vartheta)| + |\dot{r}(\vartheta)|) > 0.$$

Асимптотически эффективные оценки определяются с помощью нижней границы Гаека-Ле Кама

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{|\vartheta - \vartheta_0| \leq \delta} T \mathbf{E}_{\vartheta} |\bar{\vartheta}_T - \vartheta|^2 \geq \mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1}.$$

Теорема 11. В сделанных условиях ОМП $\hat{\vartheta}_T$ и БО $\tilde{\vartheta}_T$ равномерно состоятельны, асимптотически нормальны

$$\sqrt{T} \left(\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0 \right) \Rightarrow \zeta \sim \mathcal{N} \left(0, \mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1} \right), \quad \sqrt{T} \left(\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0 \right) \Rightarrow \zeta,$$

моменты сходятся: при всех $p > 0$

$$T^{\frac{p}{2}} \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left| \hat{\vartheta}_T - \vartheta_0 \right|^p \rightarrow \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\zeta|^p, \quad T^{\frac{p}{2}} \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left| \tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0 \right|^p \rightarrow \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\zeta|^p$$

и обе оценки асимптотически эффективны.

Доказательство см. в [16, 17]. Схожий результат получен в [18].

Оценки минимальных расстояний. При оценивании параметров частично-наблюдаемых линейных систем могут быть использованы и другие методы оценивания. Например, оценки минимальных расстояний (ОМР) неизвестных параметров для модели (17), (18) можно построить следующим образом. Рассмотрим интеграл

$$D_T(\vartheta) = \int_0^T \left[X_t - c(\vartheta) \int_0^t m(\vartheta, s) ds \right]^2 ds$$

и определим ОМР $\check{\vartheta}_T$ как решение уравнения

$$D_T(\check{\vartheta}_T) = \inf_{\vartheta \in \Theta} D_T(\vartheta).$$

Может быть показано, что при определенных условиях эта оценка состоятельна и асимптотически нормальна

$$\sqrt{T} (\check{\vartheta}_T - \vartheta_0) \Rightarrow \xi \sim \mathcal{N}(0, Q(\vartheta_0)).$$

Доказательство см. в [19].

Одношаговые оценки-процессы максимального правдоподобия. Как и в случае малого шума, вычисление ОМП и БО по формулам (5), (6) требует знания решений уравнений (19), (20) при всех $\vartheta \in \Theta$, где $L(\vartheta, X^T)$ вычисляется согласно (21). Понятно, что численная реализация таких процедур оценивания и в этом случае является экстремально трудной. Поэтому

предлагаем двухшаговую процедуру оценивания. Сначала с помощью метода моментов по пренебрежимо малой части начальных наблюдений строится предварительная оценка неизвестного параметра, а затем с помощью этой оценки и лекамовской одношаговой процедуры получается оценка, которая асимптотически эквивалентна ОМП. Таким образом, предложенная оценка является также асимптотически эффективной.

Запишем исходную модель наблюдений в виде

$$\begin{aligned} dX_t &= fY_t dt + \sigma dW_t, & X_0 &= 0, \\ dY_t &= -aY_t dt + b dV_t, & Y_0 &= \xi. \end{aligned}$$

Система полностью определяется параметрами $f \neq 0, \sigma^2 \neq 0, a > 0, b \neq 0$. Напомним, что параметр σ^2 оценивается без ошибки. Рассмотрим задачи оценивания остальных трех параметров. Заметим, что имеет место представление

$$X_t = fb \int_0^t \int_0^s e^{-a(s-r)} dV_r ds + \sigma W_t + o(1).$$

Следовательно, оценить состоятельно одновременно f и b невозможно. Рассмотрим задачи оценки одномерных параметров $\vartheta = f, \vartheta = a$ и $\vartheta = b$, а оценки двумерных параметров $\vartheta = (f, a)$ и $\vartheta = (a, b)$ обсудим после.

Предположим, что неизвестный параметр $\vartheta = a$. Тогда уравнения фильтрации имеют вид

$$\begin{aligned} dm(\vartheta, t) &= - \left[\vartheta + \frac{\gamma(\vartheta, t) f^2}{\sigma^2} \right] m(\vartheta, t) dt + \frac{\gamma(\vartheta, t) f}{\sigma^2} dX_t, \\ \frac{\partial \gamma(\vartheta, t)}{\partial t} &= -2\vartheta \gamma(\vartheta, t) - \frac{\gamma(\vartheta, t)^2 f^2}{\sigma^2} + b^2, \quad \gamma(\vartheta, 0) = d^2. \end{aligned}$$

Предварительную оценку строим следующим образом. Введем статистику

$$\mathbb{S}_Q = \frac{1}{Q} \sum_{k=1}^Q [X_k - X_{k-1}]^2 \longrightarrow \Phi(\vartheta) = \frac{f^2 b^2}{\vartheta^3} [e^{-\vartheta} - 1 + \vartheta] + \sigma^2,$$

где $Q = [T^\delta]$, $\delta \in (1/2, 1)$ и $[A]$ — целая часть A . Предел соответствует $T \rightarrow \infty$. Сразу заметим, что в случаях $\vartheta = b$ и $\vartheta = f$ пределы этой статистики равны

$$\Phi_*(\vartheta) = \frac{f^2 \vartheta^2}{a^3} [e^{-a} - 1 + a] + \sigma^2, \quad \hat{\Phi}(\vartheta) = \frac{\vartheta^2 b^2}{a^3} [e^{-a} - 1 + a] + \sigma^2$$

соответственно.

Функция $\Phi(\vartheta)$, $\alpha < \vartheta < \beta$ строго убывающая. Определим предварительную оценку соотношением

$$\bar{\vartheta}_Q = \vartheta_Q^* \mathbb{I}_{\{\mathcal{A}_Q\}} + \alpha \mathbb{I}_{\{\mathcal{A}_Q^-\}} + \beta \mathbb{I}_{\{\mathcal{A}_Q^+\}}.$$

Здесь ϑ_Q^* является решением уравнения $\Phi(\vartheta_Q^*) = \mathbb{S}_Q$ и множества $\mathcal{A}_Q$, $\mathcal{A}_Q^-$, $\mathcal{A}_Q^+$ определены равенствами

$$\mathcal{A}_Q = \{\omega : \Phi(\beta) < \mathbb{S}_Q < \Phi(\alpha)\}, \quad \mathcal{A}_Q^- = \{\omega : \mathbb{S}_Q \geq \Phi(\alpha)\}, \quad \mathcal{A}_Q^+ = \{\omega : \mathbb{S}_Q \leq \Phi(\beta)\}.$$

Предложение 1. Оценка $\bar{\vartheta}_Q$ равномерно состоятельна и существует константа $C > 0$ такая, что

$$\sup_{\vartheta_0 \in \Theta} \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\bar{\vartheta}_Q - \vartheta_0|^2 \leq \frac{C}{Q}.$$

с некоторой константой $C > 0$.

Доказательство см. в [20].

Введем еще уравнение для производной $\dot{m}(\vartheta, t) = \partial m(\vartheta, t) / \partial \vartheta$

$$d\dot{m}(\vartheta, t) = - \left[\vartheta + \frac{\gamma(\vartheta)f^2}{\sigma^2} \right] \dot{m}(\vartheta, t)dt + \frac{\dot{\gamma}(\vartheta)f}{\sigma^2} dX_t - \left[1 + \frac{\dot{\gamma}(\vartheta)f^2}{\sigma^2} \right] m(\vartheta, t)dt,$$

где $\gamma(\vartheta)$ и $\dot{\gamma}(\vartheta)$ — стационарное решение уравнения Рикатти и его производная равна

$$\gamma(\vartheta) = \frac{\vartheta\sigma^2}{f^2} \left(\sqrt{1 + \frac{b^2 f^2}{\vartheta^2 \sigma^2}} - 1 \right), \quad \dot{\gamma}(\vartheta) = \frac{\partial \gamma(\vartheta)}{\partial \vartheta}.$$

Информация Фишера:

$$\mathbb{I}(\vartheta) = \frac{1}{2\vartheta} - \frac{2\dot{r}(\vartheta)}{r(\vartheta) + \vartheta} + \frac{\dot{r}(\vartheta)^2}{2r(\vartheta)}.$$

Одношаговую оценку-процесс максимального правдоподобия ϑ_t^* , $T^\delta < t \leq \leq T$ определим равенством

$$\vartheta_t^* = \bar{\vartheta}_Q + \frac{f}{\sigma^2 t \mathbb{I}(\bar{\vartheta}_Q)} \int_Q^t \dot{m}(\bar{\vartheta}_Q, s) [dX_s - f m(\bar{\vartheta}_Q, s) ds].$$

Заменяем переменные $t = \tau T$ и обозначим $\vartheta_{\tau T}^* = \vartheta_T^*(\tau)$, $T^{\delta-1} < \tau \leq 1$.

Теорема 12. Одношаговая оценка-процесс максимального правдоподобия $\vartheta_T^(\tau)$, $T^{\delta-1} < \tau \leq 1$ с $\delta \in (1/2, 1)$ состоятельна и асимптотически нормальна: для любого $\tau \in (0, 1]$*

$$\sqrt{\tau T}(\vartheta_T^*(\tau) - \vartheta_0) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \mathbf{I}(\vartheta_0)^{-1}).$$

Доказательство см. в [20].

Заметим, что эта оценка-процесс может быть записана в рекуррентной форме

$$(22) \quad d\vartheta_t^* = -\frac{\vartheta_t^*}{t - T^\delta} dt + \frac{f \dot{m}(\bar{\vartheta}_{T^\delta}, t)}{\sigma^2 t \mathbb{I}(\bar{\vartheta}_{T^\delta})} [dX_t - f m(\bar{\vartheta}_{T^\delta}, t) dt].$$

Вместе с уравнениями

$$(23) \quad dm_t = -\left[\vartheta_t^* + \frac{\gamma(\vartheta_t^*) f^2}{\sigma^2}\right] m_t dt + \frac{\gamma(\vartheta_t^*) f}{\sigma^2} dX_t, \quad T^\delta < t \leq T,$$

$$(24) \quad \gamma(\vartheta_t^*) = \frac{\vartheta_t^* \sigma^2}{f^2} \left(\sqrt{1 + \frac{b^2 f^2}{(\vartheta_t^*)^2 \sigma^2}} - 1 \right)$$

получаем замкнутую систему (22)–(24) адаптированной фильтрации.

Введем случайный процесс

$$\zeta_T(\tau) = \sqrt{T \Gamma(\vartheta_0)} (\vartheta_T^*(\tau) - \vartheta_0), \quad \kappa \leq \tau \leq 1,$$

где $\kappa \in (0, 1)$. Случайный процесс $\zeta_T(\cdot)$ сходится по распределению в пространстве $(\mathcal{C}[\kappa, 1], \mathcal{B})$ к гауссовскому случайному процессу

$$\zeta_T(\cdot) \Rightarrow \zeta(\cdot),$$

где гауссовский процесс $\zeta(\tau), [\kappa, 1]$ имеет моменты

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0} \zeta(\tau) = 0, \quad \mathbf{E}_{\vartheta_0} \zeta(\tau_1) \zeta(\tau_2) = \tau_1 \wedge \tau_2,$$

т.е. $\zeta(\cdot)$ — винеровский процесс на интервале $[\kappa, 1]$.

Рассмотрим случаи $\vartheta = (a, b)$ и $\vartheta = (f, a)$ и две статистики

$$\mathbb{S}_Q = \frac{1}{Q} \sum_{k=1}^Q [X_k - X_{k-1}]^2, \quad \mathbb{R}_Q = \frac{1}{Q} \sum_{k=1}^Q [X_k - X_{k-1}] [X_{k-1} - X_{k-2}].$$

Их пределы при $Q \rightarrow \infty$ равны

$$\mathbb{S}_Q \rightarrow \Phi(\vartheta) = \frac{f^2 b^2}{a^3} [e^{-a} - 1 + a], \quad \mathbb{R}_Q \rightarrow \Xi(\vartheta) = \frac{f^2 b^2}{2a^3} [e^{-a} - 1]^2.$$

Следовательно,

$$\mathbb{Q}_Q = \frac{\mathbb{S}_Q}{\mathbb{R}_Q} \rightarrow \frac{2[e^{-a} - 1 + a]}{[e^{-a} - 1]^2}.$$

Функция

$$\phi(x) = \frac{2[e^{-x} - 1 + x]}{[e^{-x} - 1]^2}, \quad x > 0$$

строго монотонная, $\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = \infty$. Это позволяет оценить параметр a как решение уравнения

$$\mathbb{Q}_Q = \phi(a_Q^*).$$

И второй параметр f или b может быть оценен как решения уравнений

$$\mathbb{S}_Q = \Phi(a_Q^*, f_Q^*), \quad \mathbb{S}_Q = \Phi(a_Q^*, b_Q^*)$$

соответственно.

Одношаговая оценка-процесс, скажем, в случае $\bar{\vartheta}_{T^\delta} = (a_{T^\delta}^*, b_{T^\delta}^*)$ и соответствующей матрице Фишера $\mathbb{I}(\vartheta)$ имеет вид

$$\vartheta_t^* = \bar{\vartheta}_{T^\delta} + \mathbb{I}(\bar{\vartheta}_{T^\delta})^{-1} \int_{T^\delta}^t \frac{f \dot{m}(\bar{\vartheta}_{T^\delta}, s)}{t \sigma^2} [dX_s - f m(\bar{\vartheta}_{T^\delta}, s) ds], \quad T^\delta < t \leq T.$$

Эта оценка также состоятельна, асимптотически нормальна и асимптотически эффективна. Доказательство см. в [20].

Телеграфный процесс. Рассмотрим частично наблюдаемую модель (1)

$$dX_t = Y_t dt + dW_t, \quad X_0 = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где Y_t , $0 \leq t \leq T$ — скрытый (hidden) марковский процесс с двумя состояниями y_1 и y_2 и с инфинитезимальной матрицей переходов (3).

Предполагается, что $\lambda > 0$ и $\mu > 0$ неизвестны и необходимо оценить двухмерный параметр $\vartheta = (\lambda, \mu)^\top \in \Theta$, где $\Theta = (c_0, c_1) \times (c_0, c_1)$, $c_0 > 0$. Напомним, что в случае $\lambda = \mu$ асимптотические свойства ОМП параметра $\vartheta = \lambda$ описаны в [21]. В частности, доказана состоятельность и асимптотическая нормальность ОМП.

Функция отношения правдоподобия имеет вид

$$(25) \quad L(\vartheta, X^T) = \exp \left\{ \int_0^T m(\vartheta, t) dX_t - \frac{1}{2} \int_0^T m(\vartheta, t)^2 dt \right\}, \quad \vartheta \in \Theta.$$

Здесь $m(\vartheta, t)$ — также условное ожидание

$$m(\vartheta, t) = \mathbf{E}_\vartheta(Y_t | X_s, 0 \leq s \leq t) = y_2 + (y_1 - y_2) \pi(t, \vartheta),$$

где $\pi(t, \vartheta) = \mathbf{P}_\vartheta(Y_t = y_1 | X_s, 0 \leq s \leq t)$ удовлетворяет уравнению

$$(26) \quad \begin{aligned} d\pi(t, \vartheta) = & [\mu - (\lambda + \mu) \pi(t, \vartheta) + \\ & + \pi(t, \vartheta) (1 - \pi(t, \vartheta)) (y_2 - y_1) (y_2 + (y_1 - y_2) \pi(t, \vartheta))] dt + \\ & + \pi(t, \vartheta) (1 - \pi(t, \vartheta)) (y_1 - y_2) dX_t. \end{aligned}$$

ОМП $\hat{\vartheta}$ и БО $\tilde{\vartheta}$ параметра $\vartheta = (\lambda, \mu)^\top$ определяются теми же уравнениями (5) и (6) соответственно.

Опишем ниже процедуру построения одношаговой оценки-процесса максимального правдоподобия для этой модели наблюдений. Построение близко к (9), т.е. сначала по пренебрежимой части наблюдений $X^{T^\delta} = (X_t, 0 \leq t \leq T^\delta)$, $\delta < 1$ строится предварительная оценка параметра $\hat{\vartheta}_{T^\delta}$, а затем эта оценка используется для построения ϑ_t^* , $T^\delta < t \leq T$.

Введем обозначения $Q = [T^\delta]$, где $[a]$ — целая часть a ,

$$\Phi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} (1 - e^{-x}), \quad \zeta_Q = \frac{1}{Q} \sum_{i=0}^{Q-1} [X_{i+1} - X_i]^2 - 1,$$

$$\eta_Q = \left(\frac{X_Q}{Q} - y_1 \right) \left(y_2 - \frac{X_Q}{Q} \right).$$

Случайную величину α_Q определим как решение уравнения

$$(27) \quad \zeta_Q = \left(\frac{X_Q}{Q} \right)^2 + 2\eta_Q \Phi(\alpha_Q)$$

и положим

$$\beta_Q = \alpha_Q \mathbb{I}_{\{\mathcal{A}_Q\}} + (c_0 + c_1) \mathbb{I}_{\{\mathcal{A}_Q^c\}}.$$

Здесь $\mathcal{A}_Q$ — случайное событие, заключающееся в том, что уравнение (27) имеет решение.

Оценка метода моментов параметра $\hat{\vartheta}_Q = (\hat{\lambda}_Q, \hat{\mu}_Q)$:

$$\hat{\lambda}_Q = \frac{\frac{X_Q}{Q} - y_1}{y_2 - y_1} \beta_Q; \quad \hat{\mu}_Q = \frac{y_2 - \frac{X_Q}{Q}}{y_2 - y_1} \beta_Q.$$

Предложение 2. Существует константа $C > 0$ такая, что

$$\mathbf{E}_\vartheta \left[\sqrt{Q} \left(\hat{\lambda}_Q - \lambda \right) \right]^2 < C, \quad \mathbf{E}_\vartheta \left[\sqrt{Q} \left(\hat{\mu}_Q - \mu \right) \right]^2 < C.$$

Доказательство см. в [22].

Введем условие

$$(28) \quad \frac{2c_0}{(y_1 - y_2)^2} > 6,5$$

и одношаговую оценку-процесс максимального правдоподобия

$$\vartheta_{t,T}^* = \hat{\vartheta}_{T^\delta} + t^{-1} \mathbb{I}_t(\hat{\vartheta}_{T^\delta})^{-1} \int_{T^\delta}^t \dot{m}(\hat{\vartheta}_{T^\delta}, s) \left[dX_s - m(\hat{\vartheta}_{T^\delta}, s) ds \right], \quad T^\delta < t \leq T.$$

Здесь $\dot{m}(\vartheta, s)$ — вектор производных

$$\dot{m}(\vartheta, s) = (y_1 - y_2) \frac{\partial \pi(s, \vartheta)}{\partial \vartheta} = (y_1 - y_2) \left(\frac{\partial \pi(t, \vartheta)}{\partial \lambda}, \frac{\partial \pi(t, \vartheta)}{\partial \mu} \right)^\top,$$

и эмпирическая матрица информации равна

$$\mathbb{I}_t(\vartheta) = \frac{1}{t} \int_{T^\delta}^t \dot{m}(\vartheta, s) \dot{m}(\vartheta, s)^\top ds \longrightarrow \mathbb{I}(\vartheta),$$

где

$$\mathbb{I}(\vartheta) = (y_1 - y_2)^2 \mathbf{E}_\vartheta \frac{\partial \pi(s, \vartheta)}{\partial \vartheta} \frac{\partial \pi(s, \vartheta)^\top}{\partial \vartheta}.$$

Сделаем замену переменных $\tau = tT^{-1} \in [0, 1]$, положим $\tau_\delta = QT^{-1}$ и введем случайный процесс $\vartheta_T^*(\tau)$, $\tau_\delta \leq \tau \leq 1$.

Теорема 13. Предположим, что условие (28) выполнено и $\delta \in (\frac{1}{2}, 1)$. Тогда оценка-процесс $\vartheta_T^*(\tau)$, $0 < \tau \leq 1$ состоятельна: для любого $\nu > 0$ и любого $\tau \in (0, 1]$

$$\mathbf{P}_{\vartheta_0} \{|\vartheta_T^*(\tau) - \vartheta_0| > \nu\} \rightarrow 0$$

и эта оценка асимптотически нормальная

$$\sqrt{\tau T}(\vartheta_T^*(\tau) - \vartheta_0) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1}).$$

Доказательство см. в [22].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bickel P.J., Ritov Y., Rydén T. Asymptotic normality of the maximum likelihood estimator for general hidden Markov models // Ann. Statist., 1998. V. 26. No. 4. P. 1614–1635.
2. Cappé O., Moulines E., Rydén T. Inference in Hidden Markov Models. N.Y.: Springer, 2005.
3. Elliott R.J., Aggoun L., Moor J.B. Hidden Markov Models. N.Y.: Springer, 1995.
4. Liptser R.S. Shiryaev A.N. Statistics of Random Processes. 2-nd ed. V. 1. N.Y.: Springer, 2001.
5. Fisher R.A. Theory of statistical estimation // Proc. Cambridge Philosoph. Soc. 1925. V. 22. P. 700–725.
6. Le Cam L. On the asymptotic theory of estimation and testing hypotheses // Proc. 3rd Berkeley Sympos. 1956. V. I. P. 355–368.
7. Kutoyants Yu.A. Identification of Dynamical Systems with Small Noise. Dordrecht: Kluwer, 1994.
8. Ibragimov I.A., Khasminskii R.Z. Statistical Estimation — Asymptotic Theory. N.Y.: Springer, 1981.
9. Kutoyants Yu.A., Zhou, L. On parameter estimation of the hidden Gaussian process in perturbed SDE // Submitted. 2019 (arXiv:1904.09750).
10. Kutoyants Yu.A. On parameter estimation of hidden Ornstein-Uhlenbeck process // J. Multivariate Anal. 2019. V. 169. No. 1. P. 248–263.
11. Liptser R.S. On filtration and prediction of components in diffusion Markov processes // Theory Probab. Appl. 1967. V. 12. No. 4. P. 697–698.

12. *Campillo F., Le Gland F., Kutoyants Yu.A.* Small noise asymptotics of the GLR Test for off-line change detection in misspecified diffusion processes // Stochast. Stochast. Report. 2000. V. 70. P. 109–129.
13. *Kutoyants, Yu.A.* On localization of source by hidden Gaussian processes with small noise // Submitted. 2019.
14. *Gustaffson F.* Adaptive Filtering and Change Detection. N.Y.: J. Wiley & Sons, 2000.
15. *Luo X.* GPS Stochastic Modeling. N.Y.: Springer, 2013.
16. *Kutoyants Yu.A.* Statistical Inference for Ergodic Diffusion Processes. London: Springer, 2004.
17. *Kutoyants Yu.A.* Parameter Estimation for Stochastic Processes. Berlin: Heldermann, 1984.
18. *Kallianpur G., Selukar R.S.* Parameter estimation in linear filtering // J. Multivariate Analysis. 1991. V. 39. P. 284–304.
19. *Bertrand P., Kutoyants Yu.A.* A minimum distance estimator for partially observed linear stochastic systems // Statist. Decisions. 1996. V. 14. P. 323–342.
20. *Kutoyants Yu.A.* On parameter estimation of hidden ergodic Ornstein-Uhlenbeck process // Electronic. J. Statist. 2019. No. 13. P. 4508–4526.
21. *Chigansky P.* Maximum likelihood estimation for hidden Markov models in continuous time // Statist. Inference Stoch. Proc. 2009. V. 12. No. 2. P. 139–163.
22. *Khasminskii R.Z., Kutoyants Yu.A.* On parameter estimation of hidden telegraph process // Bernoulli. 2018. V. 24. No. 3. P. 2064–2090.
23. *Kutoyants Yu. A., Pohlmann H.* Parameter estimation for Kalman-Bucy filter with small noise // Statist. 1994. No. 25. P. 307–323.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 20.06.2019

После доработки 02.08.2019

Принята к публикации 26.09.2019

© 2020 г. А.Б. МИЛЛЕР, канд. техн. наук (amiller@iitp.ru)
(Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва;
Казанский федеральный университет),
Б.М. МИЛЛЕР, д-р физ.-мат. наук (bmiller@iitp.ru)
(Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва;
Университет Монаш, Виктория, Австралия;
Казанский федеральный университет),
К.В. СТЕПАНЯН, канд. физ.-мат. наук (KVStepanyan@iitp.ru)
(Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва)

ОДНОВРЕМЕННОЕ ИМПУЛЬСНОЕ И НЕПРЕРЫВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МАРКОВСКОЙ ЦЕПЬЮ В НЕПРЕРЫВНОМ ВРЕМЕНИ¹

Рассматривается непрерывное и импульсное управление марковской цепью (МЦ) с конечным множеством состояний в непрерывном времени. Непрерывное управление определяет интенсивность переходов между состояниями МЦ, при этом времена переходов и их направления случайны. Тем не менее иногда требуется обеспечить переход, который ведет к мгновенному изменению состояния МЦ. Поскольку такие переходы требуют различных воздействий и могут производить различное действие на состояние МЦ, такие управления можно трактовать как импульсные. В статье используется мартингалное представление управляемой МЦ и дается условие оптимальности, которое с использованием принципа динамического программирования приводится к форме квазивариационного неравенства. Решение этого неравенства может быть получено в форме уравнения динамического программирования, которое для МЦ с конечным множеством состояний сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с одной линией переключения. Дано доказательство достаточного условия оптимальности и рассмотрены примеры задач с детерминированным и случайным импульсным воздействием.

Ключевые слова: марковская цепь, импульсные управления, квазивариационное неравенство.

DOI: 10.31857/S0005231020030071

1. Введение

Импульсное управление как воздействие, производящее мгновенные (в действительности очень быстрые) изменения состояния динамической системы, детально исследуется с 70-х гг. XX в. В серии пионерских работ А. Бенсусан и Ж.-Л. Лионс развили теорию стохастического импульсного управления, в которой обобщили принцип динамического программирования

¹ Работа выполнена А.Б. Миллером и Б.М. Миллером частично за счет средств субсидии, выделенной в рамках Государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

и сформулировали условия оптимальности в форме так называемого квази-вариационного неравенства [1]. Их идеи привели к возникновению нового класса дискретно-непрерывных стохастических систем, которые функционируют непрерывно (детерминированно или стохастически) между скачками, которые происходят в моменты применения импульсных воздействий. В стохастическом анализе эти идеи были подхвачены многими исследователями, развившими теорию кусочно-детерминированных марковских моделей (КДММ), поведение которых между случайными моментами скачков, возможно и управляемых, подчиняется непрерывной динамике (см., например, [2–4]). Дальнейшие исследования в области импульсного управления привели к появлению нового класса управляемых динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями с мерой, которые универсальным способом описывают как импульсные, так и непрерывные воздействия. В этом классе систем были получены условия существования оптимальных обобщенных решений и обобщенных управлений-мер и одновременно непрерывных управлений [5, 6] и получены условия оптимальности в форме обобщенного принципа максимума [7, 8]. В последние годы заметно вырос интерес к управлению марковскими цепями (МЦ) и, в частности, к КДММ поскольку эти модели более приспособлены к решению задач оптимизации и значительно более просты для моделирования [9–11]. Более того, возникло целое направление, а именно: марковские процессы принятия решений (Markov Decision Processes (MDP)), которое весьма востребовано во многих прикладных областях. Здесь можно привести в качестве примеров: управление системами водохранилищ [12, 13], где импульсные воздействия проявляются в виде контролируемого сброса воды, например для избежания переполнений; при контроле добычи и использования природных ресурсов [14, 15]; при управлении Интернетом для избежания перегрузок [16, 17]; в непрерывном управлении распределением водных ресурсов с помощью контроля цен потребляемой воды в различных секторах экономики [18, 19]; при распределении потоков газа в системе газоснабжения при необходимости сглаживания сезонных пульсаций потребления [20]. Во всех этих областях импульсные воздействия, так же как и непрерывные, возникают весьма естественно как управления, приводящие к быстрым контролируемым изменениям состояния; в управлении передачей данных — это освобождение памяти при угрозе переполнения [21]; в управлении системой водохранилищ — это контролируемый слив излишков воды [19, 22].

Другой причиной растущего интереса к MDP является относительная простота и гибкость моделирования непрерывных и дискретных стохастических динамических систем с помощью МЦ с конечным множеством состояний [23], и поскольку точность аппроксимации напрямую зависит от числа состояний, то постоянно возрастающие возможности доступных компьютеров позволяют достичь необходимой точности решения задач оптимального управления без существенных проблем. Кроме того, теория оптимального управления МЦ как в дискретном, так и в непрерывном времени достаточно развита как для обычных задач [24], так и для задач с ограничениями на состояние [25–27], поэтому соответствующие численные процедуры могут быть легко реализованы. Здесь стоит отметить, что для стохастических систем с непрерывным множеством состояний оптимизация импульсного управления ведет к специаль-

ному типу условия оптимальности, а именно: квазивариационному неравенству [1], которое играет роль уравнения динамического программирования. Это неравенство, даже если существование его решения установлено, весьма трудно разрешимо даже численно, поскольку требует гладкого сопряжения решений пары уравнений в частных производных на заранее неизвестной поверхности. Более того, оптимальное управление есть случайная мера, локализованная на этой поверхности, функция распределения которой сингулярна по отношению к мере Лебега, поэтому определить характеристики такого управления можно лишь с помощью моделирования. Однако в случае МЦ с конечным множеством состояний эта проблема отсутствует. Для них импульсное управление есть совокупность разделенных во времени пар времен и интенсивностей приложения импульсных воздействий, а проблема решения соответствующего квазивариационного неравенства сводится в решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений с одной поверхностью переклочения.

Материал статьи имеет следующую структуру: в разделе 2 дано описание модели МЦ с непрерывным и импульсным управлениями, в разделе 3 дан вывод условий оптимальности в форме квазивариационного неравенства и приведен метод его решения. В разделе 3.3 дано доказательство достаточности условия оптимальности. В разделе 4 рассматривается численный пример. Выводы и направления дальнейших исследований приведены в разделе 5.

2. Описание модели и постановка задачи

Используется мартингальное представление управляемой МЦ, следуя описанию, данному в [16, 24, гл. 12] для непрерывного управления, дополненное членами, описывающими импульсные воздействия. Все процессы рассматриваются на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$.

Определение 1. Процесс $\{X_t, t \in [0, T]\}$ — есть управляемый марковский процесс с кусочно-постоянными непрерывными справа траекториями. Пространство состояний этого процесса есть конечное множество единичных векторов $\mathbf{S}$ вида $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$, т.е. e_i состоит из нулевых элементов кроме i -го, который равен единице, символ “т” здесь и далее соответствует транспонированию векторов и матриц. Таким образом, $X_t \in \mathbf{S}$.

2.1. Непрерывное управление МЦ

Предположение 1. Матричная функция $A(t, u)$ с элементами $a_{ij}(t, u)$ есть семейство генераторов МЦ, зависящих от времени $t \in [0, T]$, таких что вектор вероятностей состояния $p_t = (p_t^1, \dots, p_t^n)^T$, где $p_t^i = P(X_t = e_i)$ удовлетворяет прямым уравнениям Колмогорова

$$(2.1) \quad \frac{dp_t}{dt} = A(t, u)p_t.$$

Здесь управление $u \in U$, где U — некоторое компактное подмножество полного метрического пространства и $A(t, u)$ непрерывна на $[0, T] \times U$.

Введем непрерывное справа семейство полных σ -алгебр, порождаемых процессом X_t

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s : s \in [0, t]\}.$$

Предположение 2. Множество $\underline{U}$ допустимых управлений $\{u(\cdot)\}$ есть множество $\mathcal{F}_t^X$ -предсказуемых процессов со значениями в U . Это означает, что если N_t — это количество изменений состояния процесса X , а X_0^t — последовательность состояний начиная с момента времени $t = 0$, до текущего времени $t \in [0, T]$, т.е.

$$X_0^t = \{(X_0, 0), (X_{\tau_1}, \tau_1), \dots, (X_{\tau_{N_t}}, \tau_{N_t})\}$$

— есть совокупность состояний и времен скачков, тогда для $\tau_{N_t} < t \leq \tau_{N_t+1}$ управление $u_t = u(t, X_0^t)$ есть функция от X_0^t и текущего времени t [24, 28].

Для каждого управления $u(\cdot) \in \underline{U}$ процесс $\{X_t\}$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$(2.2) \quad X_t = X_0 + \int_0^t A(s, u_s) X_s ds + W_t,$$

где X_0 — начальное условие, а $W_t := \{W_t^1, \dots, W_t^n\}$ — квадратично интегрируемый $(\mathcal{F}_t^X, P)$ мартингал с квадратичной характеристикой [24, 28, 29]:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \langle W \rangle_t &= \int_0^t \text{diag} (A(s, u_s) X_s) ds + \\ &+ \int_0^t [A(s, u_s)(\text{diag} X_s) + (\text{diag} X_s)A^T(s, u_s)] ds, \end{aligned}$$

где $\text{diag}(X)$ означает диагональную матрицу с элементами $X^1, \dots, X^n$.

Замечание 1. Другими словами, процесс $X(t)$ есть решение *мартингальной проблемы* (2.2), (2.3) для управляемой марковской цепи [24].

2.2. Импульсное управление МЦ

Импульсное управление — это множество $\mathcal{I} = \{(V_i, \tau_i), i = 1, 2, \dots, N\}$, где $\tau_i < \tau_{i+1} \leq T$, $V_i \in \mathcal{V}(X)$ и число импульсов не более чем счетно. Применение импульсного управления в момент времени τ_i приводит к мгновенному случайному изменению состояния X , так что

$$(2.4) \quad \Delta X_{\tau_i} = \psi(\tau_i, V_i, X_{\tau_i-}) = \bar{A}(\tau_i, V_i) X_{\tau_i-} + \Delta W_{\tau_i},$$

где

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{E} [\Delta W_{\tau_i} | \mathcal{F}_{\tau_i-}^X] &= \mathbf{E} [\Delta W_{\tau_i} | X_{\tau_i-}] = 0, \\ \langle \Delta W_{\tau_i} \rangle &= \text{diag}(\bar{A}(\tau_i, V_i) X_{\tau_i-}) - \bar{A}(\tau_i, V_i) \text{diag}(X_{\tau_i-}) \bar{A}^T(\tau_i, V_i). \end{aligned}$$

Здесь и далее $\mathbf{E}[\cdot]$ означает математическое ожидание.

Предположение 3. В (2.4) $\psi(\tau_i, V_i, X_{\tau_i-})$ — случайный оператор, такой что для любых $X_{\tau_i-} \in \mathbf{S}$, $V_i \in \mathcal{V}(X_{\tau_i-})$ и $\tau_i \in [0, T]$

$$(2.6) \quad X_{\tau_i} = \Delta X_{\tau_i-} + X_{\tau_i-} \in \mathbf{S}.$$

Множество $\mathcal{V}(X)$ компактно, функция $\bar{A}(t, V)$ непрерывна по t и $\bar{A}(t, 0) = 0$, и поэтому $\psi(\tau, 0, X) = 0$ для любых $\tau \in [0, T]$ и $X \in \mathbf{S}$.

2.3. Одновременное непрерывное и импульсное управление МЦ

Объединяя уравнения (2.2) и (2.4), получаем уравнение для совместного непрерывного и импульсного управления

$$(2.7) \quad X_t = X_0 + \int_0^t A(s, u(s)) X_s ds + \sum_{\tau_i \leq t} \bar{A}(\tau_i, V_i) X_{\tau_i-} + W_t',$$

где W_t' — квадратично интегрируемый мартингал с квадратичной характеристикой

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \langle W_t \rangle &= \sum_{\tau_i \leq t} \langle \Delta W_{\tau_i} \rangle - \int_0^t (\text{diag } X_{s-}) A^T(s, u(s)) ds - \\ &- \int_0^t A(s, u(s)) (\text{diag } X_{s-}) ds + \text{diag} \int_0^t A(s, u(s)) X_{s-} ds. \end{aligned}$$

Цель управления — минимизация критерия качества (2.9)

$$(2.9) \quad \begin{aligned} J_0[u(\cdot), \mathcal{I}] &= \mathbf{E} \left\{ \langle \phi_0, X_T \rangle + \int_0^T \langle g_0(s, u(s)), X_s \rangle ds + \sum_{\tau_i \leq T} \langle \psi_0(\tau_i, V_i), X_{\tau_i-} \rangle \right\} = \\ &= \mathbf{E} \left\{ \sum_{k=1}^N \phi_0^k I\{X_T = e_k\} + \int_0^T g_0^k(s, u(s)) I\{X_s = e_k\} ds + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\tau_i \leq T} \sum_{k=1}^N \psi_0^k(\tau_i, V_i) I\{X_{\tau_i-} = e_k\} \right\} \end{aligned}$$

по множеству $\mathcal{F}_t^X$ -предсказуемых управлений $u(t) \in \underline{U}$ и импульсных управлений $\mathcal{I}$. В соотношении (2.9) $I\{\cdot\}$ означает индикаторную функцию, т.е. $I\{A\} = 1$, если событие A происходит и $I\{A\} = 0$ в противном случае.

Предположение 4. Вектор-функция g_0 непрерывна по t и u . Вектор-функция $\psi_0(t, V)$ непрерывна по t и V и удовлетворяет неравенству $\psi_0^l(t, V) \geq C > 0$ для всех l и допустимых $V \neq 0$. Множества $\underline{U}$ и $\mathcal{V}$ компактны.

Замечание 2. Компоненты вектора ϕ_0 определяют цену терминального состояния X_T , вектор-функция g_0 — интегральную цену промежуточных состояний, а ψ_0 — цену импульсных управлений.

Замечание 3. В данной статье предполагается наиболее простая формулировка задачи управления и возможны расширения на:

- 1) системы со случайной реакцией на импульсное воздействие;
- 2) задачи с другими типами критериев, например с дисконтированием или усреднением на бесконечном интервале времени [21];
- 3) задачи с ограничениями на состояние по аналогии с [25–27];
- 4) задачи с неполной информацией [24, 30].

3. Уравнение динамического программирования в форме квазивариационного неравенства

3.1. Условие оптимальности одновременного непрерывного и импульсного управления

Функция цены в задаче (2.7)–(2.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \phi(t, X) = \inf_{u(\cdot), \mathcal{I}} \mathbf{E} \left\{ \left\langle \phi_0, X_T \right\rangle + \int_t^T \left\langle g_0(s, u(s)), X_s \right\rangle ds + \right. \\ \left. + \sum_{t < \tau_i \leq T} \left\langle \psi_0(\tau_i, V_i), X_{\tau_i-} \right\rangle \middle| X_{t-} = X \right\} = \left\langle \phi(t), X \right\rangle, \end{aligned}$$

где функция $\phi(t) \in \mathbb{R}^N$ — решение квазивариационного неравенства

$$(3.1) \quad \begin{cases} Q_1(t, \phi(t), X) = \left\langle \frac{d\phi(t)}{dt}, X \right\rangle + \min_{u \in U} \left\langle A^T(t, u) \phi(t) + g_0(t, u), X \right\rangle \geq 0, \\ Q_2(t, \phi(t), X) = \left\langle \phi(t), X \right\rangle - \\ \quad - \min_{V \in \mathcal{V}(X)} \left\langle [E + \bar{A}^T(t, V)] \phi(t) + \psi_0(t, V), X \right\rangle \geq 0, \\ \min \{Q_1(t, \phi(t), X), Q_2(t, \phi(t), X)\} = 0 \end{cases}$$

с граничным условием $\phi(T) = \phi_0$. Здесь и далее под E понимается единичная матрица соответствующей размерности, а $\mathbf{E}[\cdot]$ — по-прежнему означает операцию взятия математического ожидания.

Замечание 4. Отметим, что соотношения (3.1) должны выполняться для всех значений $X \in \mathcal{S}$, т.е. (3.1) представляет собой систему неравенств, задающих значение функции цены для всех возможных начальных условий t, X .

3.2. Метод решения квазивариационного неравенства

Квазивариационное неравенство (3.1) для системы с конечным множеством состояний допускает достаточно простой метод решения в отличие от общего случая системы с непрерывной частью, описываемой диффузионным стохастическим уравнением [1]. Решение, как и в случае простого уравнения динамического программирования, определяется в обратном времени [25–27] с граничным условием $\phi(T) = \phi_0$ для всех компонент вектора ϕ_0 , удовлетворяющих условиям (3.1). Функция $\phi(t)$ определяется из первого уравнения системы (3.1) при решении его от терминальной точки $\phi(T) = \phi_0$ до линии переключения

$$(3.2) \quad \begin{aligned} 0 &= \langle \phi(t), X \rangle - \min_{V \in \mathcal{V}(X)} \{ \langle \phi(t), [E + \bar{A}(t, V)]X \rangle + \langle \psi_0(t, V), X \rangle \} \quad \text{или} \\ G(t, X) &= \min_{V \in \mathcal{V}(X)} \langle \bar{A}^T(t, V)\phi(t) + \psi_0(t, V), X \rangle = 0. \end{aligned}$$

В задачах импульсного управления существование и единственность решения квазивариационного неравенства (3.1) играет принципиальную роль [1]. В случае управления МЦ с конечным множеством состояний система неравенств (3.1) распадается на конечное число дифференциально-разностных уравнений соответственно числу состояний. Для каждого значения $l = 1, \dots, N$ определим функцию переключения $G^l(\phi, t) : \mathbb{R}^N \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ так:

$$(3.3) \quad G^l(\phi, t) = \min_{V \in \mathcal{V}(e_l)} \left\{ \sum_{k=1}^N \phi_k \bar{A}_{l,k}(t, V) + \psi_0^l(t, V) \right\}.$$

В силу непрерывности $\bar{A}$ и ψ_0 по t функция переключения непрерывна по паре (ϕ, t) и определяет для каждого l линию переключения

$$(3.4) \quad Sw^l = \{(\phi, t, l) : G^l(\phi, t) = 0\}.$$

Таким образом, если

$$\phi(t) = \{\phi_1(t), \dots, \phi_N(t)\}^T,$$

то элементы $\phi_l(t), l = 1, \dots, N$, удовлетворяют системе уравнений

$$(3.5) \quad \frac{d\phi_l(t)}{dt} + \min_{u \in U} \left\{ \sum_{k=1}^N \phi_k(t) A_{l,k}(t, u) + g_0^l(t, u) \right\} = 0, \quad \text{если } G^l(\phi(t), t) > 0.$$

При решении первого уравнения системы (3.5) в обратном времени с граничными условиями $\phi(T) = \phi_0$ для каждого $l = 1, \dots, N$, линия переключения достигается в момент времени $\{t^l : G^l(\phi(t^l), t^l) = 0\}$. Вследствие условия (3.2) функция ϕ остается непрерывной при пересечении линии переключения, однако следующее условие на ϕ позволяет определить величину импульсного управления

$$(3.6) \quad 0 = \min_{V \in \mathcal{V}(X)} \left\{ \left\langle \bar{A}^T(t, V)\phi(t), X \right\rangle + \left\langle \psi_0(t, V), X \right\rangle \right\}.$$

Минимизирующее воздействие в соотношении

$$(3.7) \quad V = \operatorname{argmin}_{V \in \mathcal{V}(\mathcal{X})} \left\{ \left\langle \bar{A}^T(t, V)\phi(t), X \right\rangle + \left\langle \psi_0(t, V), X \right\rangle \right\}$$

существует, и далее решение системы (3.5) продолжается в обратном времени до следующего пересечения с линией переключения. Таким образом, в точке T_i используется импульсное управление V_i , определяемое соотношениями (3.6), (3.7), а функции $\phi(t)$ остаются непрерывными. Описанная процедура определяет решения квазивариационного неравенства (3.1).

3.3. Достаточное условие оптимальности одновременного импульсного и непрерывного управления

Предложение 1. Пусть:

- а) функции $\phi(t) \in \mathbb{R}^n$ определены с помощью процедуры, описанной в подразделе 3.2, и удовлетворяют уравнению

$$(3.8) \quad \left\langle \frac{d\phi(t)}{dt}, X \right\rangle + \min_{u \in U(X)} \left\langle A^T(t, u)\phi(t) + g_0(t, u), X \right\rangle = 0$$

на каждом из подынтервалов $[T_i, T_{i+1})$ с терминальным условием $\phi(T) = \phi_0$;

- б) управления $u^*(t)$ на $[T_i, T_{i+1})$ выбраны марковскими $u^*(t) = u^*(t, X_t)$ и составляют минимум правой части соотношения (3.8);
- в) моменты приложения импульсных воздействий $T_i^* = t^*(X)$ выбраны в соответствии с соотношением

$$(3.9) \quad \min_{V \in \mathcal{V}(X)} \left\langle [\bar{A}^T(t^*(X), V)]\phi(t^*(X)) + \psi_0(t^*(X), V), X \right\rangle = 0,$$

а импульсные воздействия V_i^* выбраны в соответствии с соотношением (3.7).

Тогда одновременное непрерывное и импульсное управление $\{u^*(\cdot), T_i^*, V_i^*\}$ оптимально.

Доказательство. Возьмем произвольное непрерывное и импульсное управление $\{u(\cdot), \mathcal{I}\}$, соответствующую траекторию, удовлетворяющую начальному условию $X_t^{u, \mathcal{I}} = X$, и вычислим величину

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \Delta J_t^T &= \left\langle \phi(T), X_T^{u, \mathcal{I}} \right\rangle - \left\langle \phi(t), X \right\rangle + \int_t^T \left\langle g_0(s, u(s)), X_s^{u, \mathcal{I}} \right\rangle ds + \\ &+ \sum_{t \leq T_i \leq T} \left\langle \psi_0(T_i, V_i), X_{T_i}^{u, \mathcal{I}} \right\rangle = \left\langle \phi(T), X_T^{u, \mathcal{I}} \right\rangle - \left\langle \phi(t), X \right\rangle + I_1 + I_2, \end{aligned}$$

где $\phi(t)$ — решение квазивариационного неравенства (3.1), а $X_t^{u,\mathcal{I}}$ — решение уравнения (2.7) с начальным условием $X_t = X$. Тогда, используя формулу Ито для $X_t^{u,\mathcal{I}}$, получим соотношение

$$\Delta J_t^T = \int_t^T \left\langle \frac{d\phi(s)}{ds}, X_s^{u,\mathcal{I}} \right\rangle ds + I_1 + I_2 + \int_t^T \langle \phi(s), dX_s^{u,\mathcal{I}} \rangle.$$

Однако

$$\begin{aligned} & \int_t^T \langle \phi(s), dX_s^{u,\mathcal{I}} \rangle = \\ &= \int_t^T \langle \phi(s), A(s, u(s)) X_s^{u,\mathcal{I}} \rangle ds + \sum_{t \leq T_i \leq T} \langle \phi(T_i), \bar{A}(T_i, V_i) X_{T_i-} \rangle + \int_t^T \phi(s) dW'(s). \end{aligned}$$

Далее, для произвольного управления $u, \mathcal{I}$ в соответствии с соотношениями (3.8), (3.9) получаем, что

$$(3.11) \quad \left\langle \frac{d\phi(t)}{dt}, X^{u,\mathcal{I}} \right\rangle + \left\langle A^T(t, u)\phi(t) + g_0(t, u), X^{u,\mathcal{I}} \right\rangle \geq 0,$$

$$(3.12) \quad \left\langle \phi(T_i), \bar{A}(T_i, V_i) X_{T_i-} + \psi_0(T_i, V_i), X_{T_i-} \right\rangle \geq 0.$$

Поскольку интеграл по мартингалу имеет нулевое математическое ожидание, то, объединяя (3.11) и (3.12), после подстановки в (3.10) для произвольного управления получаем неравенство

$$\begin{aligned} (3.13) \quad \mathbf{E} \left\{ \left\langle \phi(T), X_T^{u,\mathcal{I}} \right\rangle + \int_t^T \left\langle g_0(s, u(s)), X_s^{u,\mathcal{I}} \right\rangle ds + \sum_{t \leq T_i \leq T} \left\langle \psi_0(T_i, V_i), X_{T_i}^{u,\mathcal{I}} \right\rangle \right\} \geq \\ \geq \left\langle \phi(t), X \right\rangle. \end{aligned}$$

Но при использовании управления, удовлетворяющего условиям оптимальности, в неравенстве (3.13) достигается равенство. Предложение доказано.

3.4. Задачи с ограничениями

Конечно, задачи с ограничениями заслуживают отдельной публикации, здесь приводится лишь набросок возможного подхода. Предположим, что задан набор критериев (3.14) и допустимое решение должно удовлетворять ограничениям

$$J_k[u(\cdot), \mathcal{I}] \leq 0 \text{ для всех } k = 1, \dots, M,$$

где

$$(3.14) \quad J_k[u(\cdot), \mathcal{I}] = \mathbf{E} \left\{ \left\langle \phi_k, X_T \right\rangle + \int_0^T \left\langle g_k(s, u(s)), X_s \right\rangle ds + \sum_{\tau_i \leq T} \left\langle \psi_k((\tau_i, V_i), X_{\tau_i-}) \right\rangle \right\}.$$

В предположении непустоты множества допустимых траекторий при допущении расширения множества управлений до множества управлений-мер можно использовать процедуру лагранжевой минимизации, которая применима, если множество допустимых значений критериев $\{J_k\} \in \mathbb{R}^M$ выпукло. Это свойство, как показано в [25–27], справедливо для задач управления с непрерывными управлениями, однако и для задачи одновременного непрерывного и импульсного управления его можно также установить для расширенного класса управлений-мер. Довольно длинное доказательство повторяет в основном рассуждения, приведенные в [25, 26], и будет предметом отдельной публикации.

4. Примеры с импульсными управлениями

4.1. Детерминированное непрерывное управление

В данной статье рассматривается модель системы обслуживания с расширением, допускающим импульсное управление, с $N = 4$ состояниями:

- 1 — “нагрузка ниже нормальной”,
- 2 — “нормальная”,
- 3 — “критически высокая, требующая немедленной очистки буфера”,
- 4 — “переполнение, приводящее к остановке обслуживания или требующее немедленной очистки очереди заявок и снижения нагрузки до нормальной”.

Допустимые переходы, соответствующие непрерывной динамике:

- $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4$, которые происходят с интенсивностью $\lambda(t)$ входного потока заявок;
- $2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 3$, которые происходят с интенсивностью $\mu(t) \in [0, U(X_t)]$ обслуживания заявок;
- переходы, соответствующие импульсному управлению, допустимы в состояниях 3, 4 и переводят систему из состояния $3 \rightarrow 2$ и $4 \rightarrow 2$;
- возможны случайные переходы, например при использовании импульсного управления из состояния $4 \rightarrow 2$ или $4 \rightarrow 3$ с вероятностями p_1 и $1 - p_1$ соответственно.

Состояние 4 является критическим, и время нахождения в нем желательно минимизировать. Цель управления — “поддерживать” систему в состоянии 2, сохраняя при этом время нахождения в состояниях 3, 4 на приемлемом уровне. Вектор состояния $X \in \mathbb{R}^4$, а матрица интенсивностей переходов $A(t, \mu)$, зависящая от “непрерывного” управления μ , имеет вид (для

простоты опускаем зависимости от времени t)

$$A(t, \mu) = \begin{pmatrix} -\lambda & \mu_2 & 0 & 0 \\ \lambda & -(\lambda + \mu_2) & \mu_3 & 0 \\ 0 & \lambda & -(\lambda + \mu_3) & \mu_4 \\ 0 & 0 & \lambda & -\mu_4 \end{pmatrix}.$$

Переменные μ_2, μ_3, μ_4 соответствуют интенсивности обработки требований в состояниях 2–4 соответственно.

Предложенная в статье модель аналогична как задачам управления уровнем воды в водохранилище [19, 31, 32], так и задачам управления потоками данных в интернете [16, 17]. Данная аналогия не столь искусственна, так как в обоих случаях увеличение уровня (воды или загрузки) происходит случайным образом за счет дождей или входного потока требований, а уменьшение уровня — за счет испарения и/или потребления различными потребителями: промышленностью, сельским хозяйством или населенными пунктами, если речь идет о воде, или за счет выполнения заданий, если речь идет о системе обслуживания. В первом случае импульсное управление — это контролируемый слив для избежания переполнения водохранилища, во втором — очистка буфера заданий для избежания перегрузки. Кроме импульсного управления используется и “непрерывное”, которое уменьшает уровень в первом случае за счет снабжения потребителей, а во втором — за счет сокращения числа заданий, ожидающих выполнения. Обе модели имеют определенные особенности, например интенсивность обслуживания может зависеть от длины очереди, но и в случае водохранилищ интенсивность снижения уровня за счет испарения может зависеть от сезонных изменений и текущего уровня.

4.2. Детерминированное импульсное управление

Предполагается возможность использования импульсного управления в состояниях 3 и 4 с переходами $3 \rightarrow 2$ и $4 \rightarrow 2$.

Матрица перехода, соответствующая применению управления V_3 , в состоянии 3 в некоторый момент времени τ_i равна

$$E + \bar{A}(\tau_i, V_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а матрица, соответствующая применению управления V_4 , в состоянии 4 в некоторый момент времени τ_i равна соответственно

$$E + \bar{A}(\tau_i, V_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если плата за импульсное управление выбрана как

$$(4.1) \quad \psi_0(t, V) = (0, 0, 1, 1)^T,$$

то условие применения импульсного управления в точке T_i как функция от $\phi(T_i)$ в соответствии с (3.2) задается соотношением

$$0 \leq \langle \phi(T_i), \bar{A}(T_i, V_i)X \rangle + \langle \psi_0(T_i, V_i), X \rangle,$$

которое дает соотношения для значений ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \phi_3(T_i) &\geq \phi_2(T_i) + 1, \text{ если } X = e_3, \\ \phi_4(T_i) &\geq \phi_2(T_i) + 1, \text{ если } X = e_4. \end{aligned}$$

Текущая плата, характеризующая отклонение от “нормального” состояния 2 и плату за обслуживание, равна

$$(4.3) \quad g_0(t, \mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 + \mu_2^2 \\ 1 + \mu_3^2 \\ 2 + \mu_4^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mu_i \in [0, U(e_i)]$ для $i = 2, 3, 4$, что соответствует ограничениям на управления — интенсивностям обслуживания в соответствующем состоянии.

Таким образом, непрерывная часть системы уравнений (3.1) имеет вид:

$$(4.4) \quad \begin{cases} \frac{d\phi_1}{dt} = -\lambda\phi_1 + \mu_2\phi_2 + 1, \\ \frac{d\phi_2}{dt} = \min_{\mu_2 \in [0, U(e_2)]} [\lambda\phi_1 - (\lambda + \mu_2)\phi_2 + \mu_3\phi_3 + \mu_2^2], \\ \frac{d\phi_3}{dt} = \min_{\mu_3 \in [0, U(e_3)]} [\lambda\phi_2 - (\lambda + \mu_3)\phi_3 + \mu_4\phi_4 + \mu_3^2 + 1], \\ \frac{d\phi_4}{dt} = \min_{\mu_4 \in [0, U(e_4)]} [\lambda\phi_3 - \mu_4\phi_4 + 2 + \mu_4^2]. \end{cases}$$

Система (4.4) решается от терминальной точки T с граничным условием (4.1) и, даже если условие применения импульсного управления выполняется, ее решение остается непрерывным. Далее при реализации решения если система находится в состоянии 3 или 4 и условие (4.2) имеет место, то применяется импульсное управление и система переходит в состояние 2. Поскольку в состоянии 2 импульсное управление недопустимо, то применяется непрерывное управление до тех пор, пока система не перейдет в состояние 3 или 4 и не будет выполнено условие применения импульсного управления. Состояние 1 не является недостижимым. Система может оказаться в нем как из-за начальных условий, так и за счет “естественной” динамики.

4.3. Стохастическое импульсное управление

В этом случае после применения импульсного управления возможны переходы из состояния 4 в состояния 2 и 3 с вероятностями p_1 и $1 - p_1$ соответственно. Предполагаем что остальные параметры не меняются. Тогда

матрица, соответствующая применению импульсного управления, имеет вид

$$E + \bar{A}(\tau_i, V_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 - p_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Условие возможности применения импульсного воздействия имеет вид

$$\phi_4(T_i) \geq p_1 \phi_1(T_i) + (1 - p_1) \phi_3(T_i) + 1.$$

Замечание 5. Следует отметить замечательный факт, что функция $\phi(t)$ остается непрерывной в точках применения импульсного управления. Это, однако, не удивительно, поскольку, как показано в [25–27], компоненты этой функции совпадают с сопряженными переменными в принципе максимума, поэтому они не зависят от управления, как и в случае обычной задачи импульсного управления [6–8].

Схожий пример рассматривался в [33].

4.4. Реализация совместного непрерывного и импульсного управления

Необходимо подчеркнуть разницу между системами с непрерывным и дискретным множествами состояний. В первом случае импульсное управление прилагается, как правило, в начальный момент времени, если система находится выше поверхности переключения. Если затем в результате случайного движения система снова приходит на поверхность разрыва, то импульсное управление действует так, чтобы держать систему ниже поверхности переключения, реализуя так называемое сингулярное управление отталкивания [34]. В этом случае импульсы не разделяются и возникает сингулярное управление типа Канторовой лестницы. Управления такого типа характерны для задач импульсного управления стохастическими процессами диффузионного типа. В случае управления цепью Маркова если условие

$$\mathcal{V}(X_{\tau_i}) = \emptyset$$

имеет место, то после скачка мгновенное применение импульсного управления невозможно и следующее импульсное управление возможно только тогда, когда система снова попадает в состояние, где

$$\mathcal{V}(X_{t-}) \neq \emptyset.$$

Однако если в результате импульсного управления, имеющего случайный или детерминированный характер, система либо остается на поверхности переключения, либо попадает в состояние, где снова возможно импульсное управление, то импульсы могут повторяться до тех пор, пока система не перейдет в состояние, где импульсное воздействие невозможно. Таким образом возникает эффект “множественного” импульса (пачки импульсов) [21]. В рассматриваемом примере при переходе из состояния 4 в 3 такой эффект возможен, если в состоянии 3 снова допустимо применение импульса. В этом случае переход из состояния 4 в 2 происходит в два скачка $4 \rightarrow 3 \rightarrow 2$, но стоимость такого импульсного воздействия равна суммарной стоимости двух переходов, т.е. $1 + 1 = 2$.

4.5. Примеры нахождения “непрерывных” и импульсных управлений

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим систему с детерминированным импульсным управлением, описанную в подразделе 2.3 с параметрами:

- $T = 1$;
- терминальные условия, соответствующие “штрафу” за пребывание в состояниях 1–4 в конечный момент времени равны

$$(4.5) \quad \phi_0 = \phi(T) = (2, 0; 1, 5; 3, 5; 5, 0)^T;$$

- ограничения на управление или скорость обслуживания $\mu_2^{\max} = U(e_2) = 0, 2$, $\mu_3^{\max} = U(e_3) = 0, 4$ задаются только для состояний 2 и 3, а состояние 4 соответствует остановке обслуживания, поэтому состояние 4 предполагается поглощающим.

Таким образом, непрерывная часть системы уравнений (3.1) в этом случае имеет вид:

$$(4.6) \quad \begin{cases} \frac{d\phi_1}{dt} = -\lambda\phi_1 + \mu_2\phi_2 + 1, \\ \frac{d\phi_2}{dt} = \min_{\mu_2 \in [0, \mu_2^{\max}]} [\lambda\phi_1 - (\lambda + \mu_2)\phi_2 + \mu_3\phi_3 + \mu_2^2], \\ \frac{d\phi_3}{dt} = \min_{\mu_3 \in [0, \mu_3^{\max}]} [\lambda\phi_2 - (\lambda + \mu_3)\phi_3 + \mu_4\phi_4 + \mu_3^2 + 1], \\ \frac{d\phi_4}{dt} = \lambda\phi_3 + 2. \end{cases}$$

Решение системы 4.6 в обратном времени для интенсивности потока входных требований, заданной соотношением

$$(4.7) \quad \lambda(t) = 0, 25 \cos(2\pi t) + 0, 5,$$

показано на рис. 1.

Линия переключения (3.2) для допустимого импульсного управления вычисляется как $SW(t) = \phi_3(t) - \phi_2(t) - 1 = 0$ и приведена на рис. 2. Таким образом, если система находится в состоянии 3 и выполнено условие $SW(t) \geq 0$, то должно использоваться импульсное управление, которое переведет систему в состояние 2. Таким образом, область применения импульсного управления — это одновременно состояние 3 и временной интервал $\approx [0, 8; 1, 0]$.

Заметим, что использование импульсного управления позволяет уменьшить значение критерия качества, хотя это зависит от вероятности попадания в состояние 3 на отрезке $[0, 8; 1, 0]$. Если это происходит, например, в момент времени $t = 0, 8$, то значение критерия качества для состояния 3 в момент окончания процесса $t = 1, 0$ равно $\phi_2(1, 0) + 1 \approx 2, 5$, что меньше, чем без применения импульсного управления, т.е. $\phi_3(1, 0) \approx 3, 5$. Однако для вычисления значения критерия качества при использовании одновременно непрерывного и импульсного управлений необходимо вычислять значение цены задачи с учетом случайного характера применения импульсного управления, что

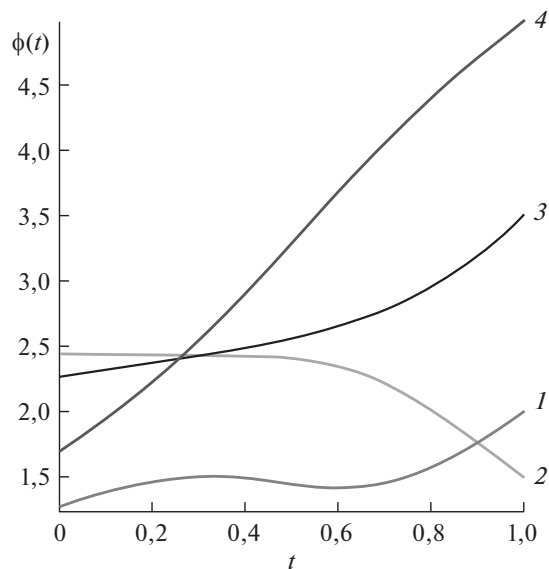


Рис. 1. Решение системы (4.6) в обратном времени с терминальными условиями (4.5). 1 — $\phi_1(t)$, 2 — $\phi_2(t)$, 3 — $\phi_3(t)$, 4 — $\phi_4(t)$.

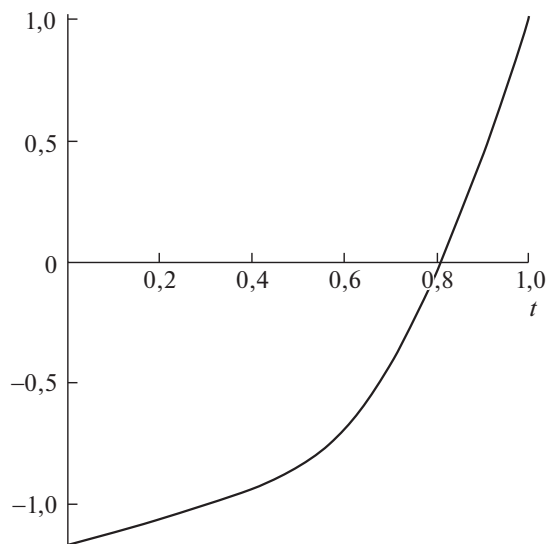


Рис. 2. Линия переключения для импульсного управления в состоянии 3. Область, где $SW(t) \geq 0$, — это область импульсного управления.

должно быть предметом специальной публикации. Другой важный вопрос, требующий отдельного рассмотрения, — это вычисление функции распределения состояний при использовании импульсного управления, что приводит к необходимости решения прямых уравнений Колмогорова, которые в этом случае будут уже не обыкновенными дифференциальными уравнениями, а дискретно-непрерывными со случайными временами переключения.

5. Заключение

В данной статье развит подход к численному решению задачи стохастического управления МЦ с “непрерывными” и импульсными управлениями. Важной особенностью модели МЦ является более простая процедура определения условий оптимальности, чем для стохастических систем с непрерывным множеством состояний. Дальнейшие исследования будут направлены на решение прикладных задач управления природными ресурсами с использованием моделей МЦ, например для управления водоснабжением [19], распределением природного газа [20], управлением передачей данных через телекоммуникационные сети с нестабильными характеристиками и, в частности, для связи и передачи данных с беспилотными летательными аппаратами [30, 35].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бенсусан А., Лионс Ж.-Л. Импульсное управление и квазивариационные неравенства / Пер. с франц. М.: Наука, 1987.
Bensoussan A., Lions J.L. Contrôle Impulsionnel et Inéquations Quasivariationnelles. Bordas. Paris: Dunod, 1982.
2. Yushkevich A.A. Markov Decision Processes with Both Continuous and Impulsive Control // Arkin V.I., Shiraev A., Wets R. (eds). Stochastic Optimization. Lect. Notes in Control and Information Sci. 1986. V. 81. P. 234–246. Berlin. Heidelberg: Springer. DOI 10.1007/BFb0007100
3. Gatarek D. Impulsive Control of Piecewise-Deterministic Processes // Zabczyk J. (eds). Stochastic Systems and Optimization. Lect. Notes in Control and Information Sci. 1989. V. 136. P. 298–308. Berlin, Heidelberg: Springer. DOI 10.1007/BFb0002690
4. Dempster M.A.H., Ye J.J. Impulse Control of Piecewise Deterministic Markov Processes // Ann. Appl. Prob. 1995. V. 5. No. 2. P. 399–423.
DOI 10.1214/aoap/1177004771
5. Dufour F., Miller B.M. Generalized Solutions in Nonlinear Stochastic Control Problems // SIAM J. Control Optim. 2002. V. 40. P. 1724–1745.
DOI 10.1137/S0363012900374221
6. Miller B.M., Rubinovich E.Ya. Impulsive Control in Continuous and Discrete-Continuous Systems. N.Y.: Kluwer Acad./Plenum Publishres, 2003.
DOI 10.1007/978-1-4615-0095-7
7. Миллер Б.М., Рубинович Е.Я. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М.: Наука, 2005.
8. Миллер Б.М., Рубинович Е.Я. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями и ударными воздействиями. М.: ЛЕНАНД/URSS, 2019.
9. Dufour F., Horiguchi M., Piunovskiy A.B. Optimal Impulsive Control of Piecewise Deterministic Markov Processes // Stochastics. 2016. V. 88. No. 7. P. 1073–1098.
DOI 10.1080/17442508.2016.1197925
10. Shujun Wang, Zhen Wu Maximum Principle for Optimal Control Problems of Forward-Backward Regime-Switching Systems Involving Impulse Controls // Math. Probl. Eng. 2015. Article ID 892304. <http://dx.doi.org/10.1155/2015/892304>.
11. Dufour F., Piunovskiy A.B. Impulsive Control for Continuous-Time Markov Decision Processes: A Linear Programming Approach // Appl. Math. Optim. 2016. V. 74. P. 129–161. DOI 10.1007/s00245-015-9310-8

12. *Delebecque F., Quadrat J.-P.* Optimal Control of Markov Chains Admitting Strong and Weak Interactions // *Automatica*. 1981. V. 17. No. 2. P. 281–296.
DOI 10.1016/0005-1098(81)90047-9
13. *Bae J., Kim S., Lee E.Y.* Average Cost under the $p_{\lambda, \tau}^M$ Policy in a Finite Dam with Compound Poisson Inputs // *J. Appl. Probab.* 2003. V. 40. No. 2. P. 519–526.
DOI 10.1239/jap/1053003561
14. *Filar J.A., Vrieze K.* Competitive Markov Decision Processes — Theory, Algorithms and Applications. N.Y.: Springer, 1997. DOI 10.1007/978-1-4612-4054-9
15. *Williams B.K.* Markov Decision Processes in Natural Resources Management: Observability and Uncertainty // *Ecological Modelling*. 2009. V. 220. No. 6. P. 830–840. DOI 10.1016/j.ecolmodel.2008.12.023
16. *Miller A.* Dynamic access control with active users // *J. of Communications Technology and Electronics*. 2010. V. 55. No. 12. P. 1432–1441.
DOI 10.1134/S1064226910120168
17. *Miller A., Miller B.* Control of Connected Markov Chains. Application to Congestion Avoidance in the Internet // *Proc. 50th IEEE Conf. on Decision and Control and European Control Conf. (CDC-ECC) Orlando, FL, USA, 2011, December 12–15, 2011*. P. 7242–7248. DOI 10.1109/CDC.2011.6161029
18. *Miller B., McInnes D.* Optimal Management of a Two Dam System via Stochastic Control: Parallel Computing Approach // *Proc. 50th IEEE Conf. on Decision and Control and European Control Conf. (CDC-ECC) Orlando, FL, USA, December 12–15, 2011*. P. 1417–1423. DOI 10.1109/CDC.2011.6160566
19. *McInnes D., Miller B.* Optimal Control of Large Dam Using Time-Inhomogeneous Markov Chains with an Application to Flood Control // *IFAC-PapersOnLine*. 2017. V. 50. No. 1. P. 3499–3504. DOI 10.1016/j.ifacol.2017.08.936
20. *McInnes D., Miller B., Schreider S.* Optimisation of Gas Flows in South Eastern Australia via Controllable Markov Chains // *Proc. Australian Control Conf. November 3–4, 2016. Newcastle: Engineers Australia*. P. 341–346. DOI 10.1109/AUCC.2016.7868213
21. *Avrachenkov K., Habachi O., Piunovskiy A., Zhang Y.* Infinite Horizon Optimal Impulsive Control with Applications to Internet Congestion Control // *Int. J. Control*. 2015. V. 88. No. 4. P. 703–716. DOI: 10.1080/00207179.2014.971436
22. *McInnes D., Miller B.* Optimal Control of Time-Inhomogeneous Markov Chains with Application to Dam Management // *Proc. Australian Control Conf. 4–5 November, 2013, Perth, Australia*. 2013. P. 230–237. DOI 10.1109/AUCC.2013.6697278
23. *Kushner H.J., Dupuis P.G.* Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time. 2nd ed. N.Y.: Springer Science+Business Media, 2001.
DOI 10.1007/978-1-4613-0007-6
24. *Elliott R.J., Aggoun L., Moore J.B.* Hidden Markov Models. Estimation and Control. N.Y.: Springer Verlag, 2008. DOI 10.1007/978-0-387-84854-9
25. *Miller B., Miller G., Semenikhin K.* Towards the Optimal Control of Markov Chains with Constraints // *Automatica*. 2010. V. 46. P. 1495–1502.
DOI 10.1016/j.automatica.2010.06.003
26. *Миллер Б.М., Миллер Г.Б., Семенихин К.В.* Методы синтеза оптимального управления марковским процессом с конечным множеством состояний при наличии ограничений // *АиТ*. 2011. № 2. С. 111–130.
Miller B.M., Miller G.B., Semenikhin K.V. Methods to Design Optimal Control of Markov Process with Finite State Set in the Presence of Constraints // *Autom. Remote Control*. 2011. V. 72. No. 2. P. 323–341.

27. *Миллер Б.М., Миллер Г.Б., Семенихин К.В.* Регуляризация задачи оптимального управления марковским процессом с конечным числом состояний при наличии ограничений // *АиТ.* 2016. № 9. С. 96–123.
Miller B.M., Miller G.B., Semenikhin K.V. Optimal Control Problem Regularization for the Markov Process with Finite Number of States and Constraints // *Autom. Remote Control.* 2016. V. 77. No. 9. P. 1589–1611. DOI 10.1134/S0005117916090071
28. *Brémaud P.* Point Processes and Queues: Martingale Dynamics. N.Y.: Springer, 1981.
29. *Liptser R.Sh., Shiryaev A.N.* Statistics of Random Processes. N.Y.: Springer, 1979.
30. *Miller B., Miller G., Semenikhin K.* Optimization of the Data Transmission Flow from Moving Object to Nonhomogeneous Network of Base Stations // *IFAC-PapersOnLine.* 2017. V. 50. No. 1. P. 6160–6165. DOI 10.1016/j.ifacol.2017.08.981
31. *Miller A., Miller B., Popov A., Stepanyan K.* Towards the Development of Numerical Procedure for Control of Connected Markov Chains // *Proc. 5th Australian Control Conf. (AUCC).* November 5–6, 2015, Gold Coast, QLD, Australia. 2015. P. 336–341.
32. *Miller B., Stepanyan K., Miller A., Popov A.* Towards One Nonconvex Connected Markov Chain Control Problem. An Approach to Numerical Solution // *2018 Australian New Zealand Control Conf. (ANZCC).* Swinburne University of Technology. Melbourne, Australia, Dec. 7–8, 2018. P. 172–177.
 DOI: 10.1109/ANZCC.2018.8606576
33. *Miller A., Miller B., Stepanyan K.* A numerical Approach to Joint Continuous and Impulsive Control of Markov Chains // *IFAC-PapersOnLine.* 2018. V. 51. No. 32. P. 462–467. DOI:10.1016/j.ifacol.2018.11.428
34. *Karatzas I., Shreve S.E.* Connection Between Optimal Stopping and Singular Stochastic Control I. Monotone Follower Problems // *SIAM J. Control Optim.* 1984. V. 22. No. 6. P. 856–877. DOI 10.1137/0322054
35. *Миллер Б.М., Миллер Г.Б., Семенихин К.В.* Оптимизация выбора каналов связи при передаче потока данных с учетом потерь // *АиТ.* 2018. № 1. С. 84–99.
Miller B.M., Miller G.B., Semenikhin K.V. Optimal Channel Choice for Lossy Data Flow Transmission // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 1. P. 66–77.
 DOI 10.1134/S000511791801006X

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 20.06.2019

После доработки 14.08.2019

Принята к публикации 26.09.2019

© 2020 г. П.В. ПАКШИН, д-р физ.-мат. наук (pakshinpv@gmail.com),
А.С. КОПОСОВ (koposov96@yandex.ru),
Ю.П. ЕМЕЛЬЯНОВА, канд. физ.-мат. наук (emelianovajulia@gmail.com)
(Арзамасский политехнический институт (филиал)
Нижегородского государственного технического
университета им. Р.Е. Алексеева)

УПРАВЛЕНИЕ С ИТЕРАТИВНЫМ ОБУЧЕНИЕМ МУЛЬТИАГЕНТНОЙ СИСТЕМОЙ В УСЛОВИЯХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ¹

Рассматривается мультиагентная система, в которой каждый из агентов описывается дискретной линейной моделью, учитывающей как внешние случайные возмущения, действующие на объект, так и шумы в измерениях. Предлагаются сетевые версии управления с итеративным обучением на основе минимизации отклонений от эталонной модели и на основе теории стохастической устойчивости повторяющихся процессов с применением дивергентного метода векторной функции Ляпунова. Эти версии сравниваются на примере управления группой манипуляторов.

Ключевые слова: мультиагентная система, стохастическая система, сетевое управление, управление с итеративным обучением, эталонная модель, повторяющиеся процессы, векторная функция Ляпунова.

DOI: 10.31857/S0005231020030083

1. Введение

Идея управления с итеративным обучением (УИО) впервые была сформулирована в патенте США [1] с приоритетом от 1967 г., затем концепция такого управления была изложена в журнале [2] на японском языке. В силу ограниченной доступности [1, 2] результаты этих работ не были востребованы, пока не появилась серия статей [3–5], вызвавшая широкий интерес как теоретиков, так и практиков. К настоящему времени по различным вопросам УИО опубликовано большое количество работ, из которых в первую очередь можно рекомендовать обзорные статьи [6–8] и монографию [9]. Управление с итеративным обучением стало важным направлением интеллектуального управления, и оно широко используется во многих практических приложениях, в первую очередь в робототехнике [10–13].

Обзор результатов по стохастическому управлению с итеративным обучением представлен в [14, 15]. Классическая стохастическая модель обычно включает случайные возмущения, действующие на объект, и шумы измерений. Эти факторы снижают точность процесса итеративного обучения.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00528_а).

Несмотря на очевидную важность задачи стохастического УИО в рамках указанной классической модели, ей посвящено небольшое число работ. В обзоре [14] 2014 г. процитировано 104 работы, из которых 17 относятся к классическому направлению, 9 работ связано с исследованием управления с итеративным обучением в условиях случайной потери информационных пакетов в канале связи между измеряемым выходом и входом, остальные цитируемые работы не содержат стохастических постановок и носят вводный характер. В обзоре [15] 2018 г. дополнительно процитировано 25 новых публикаций, из которых стохастические задачи рассматриваются в 19 работах, где в основном исследуются уже упомянутые задачи в условиях потери информационных пакетов (random packet losses, data dropouts).

Анализ этих обзоров и самостоятельный анализ литературы показал, что конструктивные методы синтеза стохастического управления с итеративным обучением в рамках классической постановки предложены в [16–22] для линейных систем с дискретным временем, другие работы учитывают только дополнительные к классической постановке случайные факторы, что никак не заменяет и не исключает развитие классического направления. В [16–21] предложены алгоритмы двух типов. В [16, 17] предложен так называемый алгоритм D-типа, использующий для построения алгоритма управления с итеративным обучением аналог производной ошибки обучения, в [18] дополнительно предложен алгоритм P-типа, непосредственно использующий ошибку обучения, этот алгоритм затем был расширен и усовершенствован в [19], в [20, 21] рассмотрены некоторые специальные вопросы, связанные со сходимостью и оптимизацией этих алгоритмов.

Анализ алгоритмов [16–18], проведенный в [23], показал, что они обладают следующими недостатками:

- алгоритм УИО не использует фильтрацию измеряемого сигнала, что приводит к большим значениям дисперсии ошибки обучения, более того, в алгоритмах D-типа, использующих аналог производной зашумленного сигнала, происходит дополнительное увеличение этой дисперсии, а также другие негативные эффекты;

- при малых значениях дисперсий начального состояния процесс обучения сходится недопустимо медленно;

- алгоритм обладает чрезмерной вычислительной сложностью.

В [23] предложен новый алгоритм УИО, на основе метода векторных функций Ляпунова и теории диссипативности повторяющихся процессов, использующий оценки состояния, получаемые с помощью фильтра Калмана. В этом алгоритме удалось устранить указанные недостатки. В [22] для дискретных линейных систем с постоянными параметрами предложен алгоритм на основе совместного применения метода супервектора [9] и фильтра Калмана. За счет фильтрации в нем частично устранен первый из перечисленных недостатков. Однако метод супервектора существенно повышает размерность вычислительных соотношений относительно размерности системы и поэтому сохраняется последний из перечисленных недостатков.

В классе непрерывных моделей, которыми, как правило, описываются исходные объекты управления, задача стохастического управления с итератив-

ным обучением, как это следует из обзоров [14, 15] и самостоятельного анализа публикаций, в литературе не рассматривалась.

В настоящее время существенное внимание уделяется задачам, в которых УИО группой объектов осуществляется через некоторую информационную сеть [24–30]. Задача стохастического УИО в сетевой постановке рассматривалась лишь с учетом потерь пакетов при информационном обмене. Таких работ относительно немного. Укажем недавние [31–35] и списки литературы в них. Существенно, что шумы, действующие на объект, и шумы измерений при этом не учитывались.

В данной работе рассматривается мультиагентная система, в которой каждый из агентов описывается дискретной линейной моделью, учитывающей как внешние случайные возмущения, действующие на объект, так и шумы в измерениях. Предлагаются сетевые версии УИО на основе подхода, разработанного в [16], и подхода, разработанного в [23, 30]. Эти версии затем сравниваются на примере управления группой манипуляторов.

2. Сетевое управление с итеративным обучением на основе минимизации отклонений от эталонной модели

2.1. Описание сетевой системы и постановка задачи

Рассмотрим группу из N динамических систем (агентов). Каждая система функционирует в повторяющемся режиме с одним и тем же постоянным периодом повторения T , всякий раз возвращаясь в начальное состояние. Динамика i -го агента на k -м повторении описывается следующей дискретной моделью в пространстве состояний:

$$\begin{aligned}
 x_k^{(i)}(t+1) &= Ax_k^{(i)}(t) + Bu_k^{(i)}(t) + w_k^{(i)}(t), \\
 y_k^{(i)}(t) &= Cx_k^{(i)}(t), \\
 y_{v,k}^{(i)}(t) &= y_k^{(i)}(t) + v_k^{(i)}(t), \\
 t &= 0, 1, \dots, T, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad k = 0, 1, 2, \dots,
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

где $x_k^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ — вектор состояния, $u_k^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ — вектор управления, $w_k^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ — вектор возмущений, действующих на объект, $y_k^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ — вектор выходных переменных (вектор профиля повторения), недоступный наблюдению, $y_{v,k}^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ — вектор наблюдаемых (измеряемых) выходных переменных, $v_k^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ — вектор шумов измерений, A, B, C — постоянные матрицы соответствующих размерностей. Граничные условия $x_k^{(i)}(0)$ и $u_0^{(i)}(t)$ будем считать известными для каждого агента.

Предполагается, что возмущения, действующие на объект $w_k^{(i)}(t)$, и шумы измерений $v_k^{(i)}(t)$ представляют собой независимые гауссовские белые шумы с нулевыми математическими ожиданиями, ковариационная матрица $S_w^{(i)} = \mathbb{E} \left[w_k^{(i)}(t) w_k^{(i)}(t)^T \right]$ является неотрицательно определенной, а ковариационная матрица $S_v^{(i)} = \mathbb{E} \left[v_k^{(i)}(t) v_k^{(i)}(t)^T \right]$ — положительно определенной, где

E — оператор математического ожидания, шумы $v_k^{(i)}(t)$ и $w_k^{(i)}(t)$ независимы. Кроме того, для любых двух различных агентов i и j $E[w_k^{(i)}(t)w_k^{(j)}(t)^T] = 0$, $E[v_k^{(i)}(t)v_k^{(j)}(t)^T] = 0$, $E[w_k^{(i)}(t)v_k^{(j)}(t)^T] = 0$ и $E[v_k^{(i)}(t)w_k^{(j)}(t)^T] = 0$. Связи между агентами представим в виде направленного графа $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, где $\mathcal{V} = \{1, \dots, N\}$ — вершины этого графа, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ — его ребра. Возможность получения агентом j информации от i -го агента задается ребром, направленным от вершины i к j и обозначаемым упорядоченной парой $(i, j) \in \mathcal{E}$. Множество соседних вершин i -го агента обозначим как $N_i = \{j \in \mathcal{V} | (j, i) \in \mathcal{E}\}$. Элементы матрицы смежности $D(\mathcal{G}) = [d_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ задаются следующим образом: $d_{ij} > 0$, если $(j, i) \in \mathcal{E}$, $d_{ij} = 0$ в противном случае, $d_{ii} = 0$. Значения ненулевых d_{ij} в общем случае различные и отражают значимость тех или иных связей. В простейшем случае они равны единице. Матрица Лапласа графа $\mathcal{G}$ задается выражением [36]

$$L(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N d_{1j} & -d_{12} & \cdots & -d_{1N} \\ -d_{21} & \sum_{j=1}^N d_{2j} & \cdots & -d_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -d_{N1} & -d_{N2} & \cdots & \sum_{j=1}^N d_{Nj} \end{bmatrix}.$$

Обозначим желаемую траекторию как $y_{ref}(t)$ и введем вектор отклонения измеренного выходного сигнала i -го агента на k -м повторении от желаемой траектории (далее вектор ошибки обучения)

$$e_{v,k}^{(i)}(t) = y_{ref}(t) - y_{v,k}^{(i)}(t).$$

В рамках задачи сетевого управления агента, имеющего доступ к желаемой траектории $y_{ref}(t)$, будем называть лидером, а остальных — ведомыми системами. Возможность получения агентами информации о желаемой траектории задается матрицей

$$G = \text{diag}[g_i], \quad i = 1, \dots, N,$$

где $g_i = 1$, если информация о желаемой траектории доступна i -му агенту, $g_i = 0$ в противном случае. Запишем уравнения (2.1) в компактном виде. Для этого введем расширенные векторы

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \begin{bmatrix} x_k^{(1)}(t)^T & \cdots & x_k^{(N)}(t)^T \end{bmatrix}^T, & u_k(t) &= \begin{bmatrix} u_k^{(1)}(t)^T & \cdots & u_k^{(N)}(t)^T \end{bmatrix}^T, \\ w_k(t) &= \begin{bmatrix} w_k^{(1)}(t)^T & \cdots & w_k^{(N)}(t)^T \end{bmatrix}^T, & y_k(t) &= \begin{bmatrix} y_k^{(1)}(t)^T & \cdots & y_k^{(N)}(t)^T \end{bmatrix}^T, \\ y_{v,k}(t) &= \begin{bmatrix} y_{v,k}^{(1)}(t)^T & \cdots & y_{v,k}^{(N)}(t)^T \end{bmatrix}^T, & v_k(t) &= \begin{bmatrix} v_k^{(1)}(t)^T & \cdots & v_k^{(N)}(t)^T \end{bmatrix}^T, \end{aligned}$$

тогда система (2.1) примет вид

$$\begin{aligned}x_k(t+1) &= A_N x_k(t) + B_N u_k(t) + w_k(t), \\y_k(t) &= C_N x_k(t), \\y_{v,k}(t) &= y_k(t) + v_k(t), \\t &\in [0, T], \quad k = 0, 1, 2, \dots,\end{aligned}$$

где $A_N = I_N \otimes A$, $B_N = I_N \otimes B$, $C_N = I_N \otimes C$. Граничные условия задаются соотношениями

$$x_k(0) = \begin{bmatrix} x_k^{(1)}(0)^T & \dots & x_k^{(N)}(0)^T \end{bmatrix}^T, \quad u_0(t) = \begin{bmatrix} u_0^{(1)}(t)^T & \dots & u_0^{(N)}(t)^T \end{bmatrix}^T.$$

Протокол, следуя [16], будем формировать в виде

$$\begin{aligned}(2.2) \quad u_{k+1}^{(i)}(t) &= u_k^{(i)}(t) + K_{1,k}(t) g_i \left[e_{v,k}^{(i)}(t+1) - e_{v,k}^{(i)}(t) \right] + \\&+ K_{2,k}(t) \sum_{j \in N_i} d_{ij} \left[\left(e_{v,k}^{(i)}(t+1) - e_{v,k}^{(i)}(t) \right) - \left(e_{v,k}^{(j)}(t+1) - e_{v,k}^{(j)}(t) \right) \right],\end{aligned}$$

где $K_{1,k}(t)$ и $K_{2,k}(t)$ — матрицы усиления, g_i — диагональные элементы матрицы G , d_{ij} — элементы матрицы смежности D . Введем расширенный вектор ошибки обучения измеренного выходного сигнала

$$e_{v,k}(t) = \begin{bmatrix} e_{v,k}^{(1)}(t)^T & \dots & e_{v,k}^{(N)}(t)^T \end{bmatrix}^T,$$

тогда протокол (2.2) будет иметь вид

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \bar{K}_k(t) (e_{v,k}(t+1) - e_{v,k}(t)),$$

где $\bar{K}_k(t) = G \otimes K_{1,k}(t) + L \otimes K_{2,k}(t)$. Следуя [16], предположим, что желаемая траектория $y_{ref}(t)$ является выходным сигналом системы вида

$$\begin{aligned}(2.3) \quad x_{ref}(t+1) &= A x_{ref}(t) + B u_{ref}(t), \\y_{ref}(t) &= C x_{ref}(t), \quad t \in [0, T]\end{aligned}$$

и для любой желаемой траектории и соответствующего начального условия $x_{ref}(0)$ существует единственное управление $u_{ref}(t)$, генерирующее эту траекторию, т.е. желаемая траектория однозначно реализуема. При сделанном предположении задача сводится к нахождению управления (2.2), которое минимизирует дисперсии отклонения переменных состояния и управления агентов от переменных x_{ref} и u_{ref} соответственно. Систему (2.3) можно, таким образом, рассматривать как эталонную модель.

2.2. Решение задачи

Введем векторы ошибок состояния и управления i -го агента на k -й итерации относительно эталонной модели (2.3):

$$(2.4) \quad \delta x_k^{(i)}(t) = x_{ref}(t) - x_k^{(i)}(t), \quad \delta u_k^{(i)}(t) = u_{ref}(t) - u_k^{(i)}(t).$$

Ковариационные матрицы векторов ошибок состояния и управления i -го и j -го агентов запишутся в виде

$$(2.5) \quad P_{x,k}^{(i,j)}(t) = E \left[\delta x_k^{(i)}(t) \delta x_k^{(j)}(t)^T \right], \quad P_{u,k}^{(i,j)}(t) = E \left[\delta u_k^{(i)}(t) \delta u_k^{(j)}(t)^T \right].$$

Соотношение (2.4) также запишем в компактном виде с использованием расширенных векторов ошибок состояния и управления:

$$\delta x_k(t) = x_{ref,N}(t) - x_k(t), \quad \delta u_k(t) = u_{ref,N}(t) - u_k(t),$$

где

$$\begin{aligned} \delta x_k(t) &= \begin{bmatrix} \delta x_k^{(1)}(t)^T & \dots & \delta x_k^{(N)}(t)^T \end{bmatrix}^T, \\ \delta u_k(t) &= \begin{bmatrix} \delta u_k^{(1)}(t)^T & \dots & \delta u_k^{(N)}(t)^T \end{bmatrix}^T, \\ x_{ref,N}(t) &= J_{N,1} \otimes x_{ref}(t), \quad u_{ref,N}(t) = J_{N,1} \otimes u_{ref}(t), \end{aligned}$$

где $J_{N,1}$ — вектор столбец из единиц. Начальные ошибки даются выражениями

$$\begin{aligned} \delta x_k(0) &= \begin{bmatrix} \delta x_k^{(1)}(0)^T & \dots & \delta x_k^{(N)}(0)^T \end{bmatrix}^T, \\ \delta u_0(t) &= \begin{bmatrix} \delta u_0^{(1)}(t)^T & \dots & \delta u_0^{(N)}(t)^T \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Представим ковариационные матрицы (2.5) в блочной форме:

$$\begin{aligned} P_{x,k}(t) &= \begin{bmatrix} P_{x,k}^{(1,1)}(t) & \dots & P_{x,k}^{(1,N)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{x,k}^{(N,1)}(t) & \dots & P_{x,k}^{(N,N)}(t) \end{bmatrix}, \\ P_{u,k}(t) &= \begin{bmatrix} P_{u,k}^{(1,1)}(t) & \dots & P_{u,k}^{(1,N)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{u,k}^{(N,1)}(t) & \dots & P_{u,k}^{(N,N)}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Поскольку в силу принятых допущений начальная ошибка состояния $\delta x_k^{(i)}(0)$ и начальная ошибка управления $\delta u_0^{(i)}(t)$ являются гауссовскими белыми шумами с нулевыми математическими ожиданиями, причем ковариационная

матрица $S_w^{(i)} = E \left[w_k^{(i)}(t) w_k^{(i)}(t)^T \right]$ является неотрицательно определенной, а ковариационная матрица $S_v^{(i)} = E \left[v_k^{(i)}(t) v_k^{(i)}(t)^T \right]$ — положительно определенной, то $P_{x,k}^{(i,i)}(0) = E_k \left[\delta x_k^{(i)}(0) \delta x_k^{(i)}(0)^T \right]$ — неотрицательно определенная матрица, а $P_{u,0}^{(i,i)}(t) = E \left[\delta u_0^{(i)}(t) \delta u_0^{(i)}(t)^T \right]$ — положительно определенная матрица. Кроме того, $\delta x_k^{(i)}(0)$ не коррелирована с $\delta u_0^{(i)}(t)$, $w_k^{(i)}(0)$ и $v_k^{(i)}(0)$. Для двух различных агентов i и j $\delta x_k^{(i)}(0)$ и $\delta u_0^{(i)}(t)$ не коррелированы с $\delta x_k^{(j)}(0)$, $\delta u_0^{(j)}(t)$, $w_k^{(j)}(0)$ и $v_k^{(j)}(0)$. В соответствии с этим ковариационные матрицы расширенных векторов запишутся в виде

$$S_w = E \left[w_k(t) w_k(t)^T \right] = \begin{bmatrix} S_w^{(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & S_w^{(N)} \end{bmatrix},$$

$$S_v = E \left[v_k(t) v_k(t)^T \right] = \begin{bmatrix} S_v^{(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & S_v^{(N)} \end{bmatrix},$$

$$P_{x,k}(0) = E_k \left[\delta x_k(0) \delta x_k(0)^T \right] = \begin{bmatrix} P_{x,k}^{(1,1)}(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & P_{x,k}^{(N,N)}(0) \end{bmatrix},$$

$$P_{u,0}(t) = E \left[\delta u_0(t) \delta u_0(t)^T \right] = \begin{bmatrix} P_{u,0}^{(1,1)}(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & P_{u,0}^{(N,N)}(t) \end{bmatrix}.$$

Отметим также, что $\delta x_k(0)$ не коррелирована с $\delta u_0(t)$, $w_k(0)$ и $v_k(0)$. Ошибка вектора состояния в момент $t + 1$ и ошибка управления на шаге $k + 1$ соответственно определяются соотношениями

$$(2.6) \quad \delta x_k(t+1) = A_N \delta x_k(t) + B_N \delta u_k(t) - w_k(t),$$

$$(2.7) \quad \delta u_{k+1}(t) = (I - \bar{K}_k(t) C_N B_N) \delta u_k + \bar{K}_k(t) (C_N - C_N A_N) \delta x_k(t) + \bar{K}_k(t) (C_N w_k(t) + v_k(t+1) - v_k(t)).$$

Соотношения (2.6) и (2.7) можно объединить в виде двумерной модели Рессера [37]

$$(2.8) \quad \begin{bmatrix} \delta u_{k+1}(t) \\ \delta x_k(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - \bar{K}_k(t) C_N B_N & \bar{K}_k(t) (C_N - C_N A_N) \\ B_N & A_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_k(t) \\ \delta x_k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{K}_k(t) C_N & \bar{K}_k(t) \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_k(t) \\ v_k(t+1) - v_k(t) \end{bmatrix}.$$

Обозначим:

$$X^+ = \begin{bmatrix} \delta u_{k+1}(t) \\ \delta x_k(t+1) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \delta u_k(t) \\ \delta x_k(t) \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} w_k(t) \\ v_k(t+1) - v_k(t) \end{bmatrix},$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - \bar{K}_k(t) C_N B_N & \bar{K}_k(t) (C_N - C_N A_N) \\ B_N & A_N \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \bar{K}_k(t) C_N & \bar{K}_k(t) \\ -I & 0 \end{bmatrix}.$$

Запишем (2.8) в компактном виде

$$X^+ = \Phi X + \Gamma Z.$$

Ковариационная матрица ошибки отклонения от эталонной модели $P^+ = E[X^+ X^{+T}]$ запишется в виде

$$(2.9) \quad \begin{aligned} P^+ &= E[(\Phi X + \Gamma Z)(\Phi X + \Gamma Z)^T] = \\ &= \Phi E[XX^T] \Phi^T + \Phi E[XZ^T] \Gamma^T + \Gamma E[ZX^T] \Phi^T + \Gamma E[ZZ^T] \Gamma^T. \end{aligned}$$

Дисперсия ошибки отклонения от эталонной модели представляет собой след P^+ . Поэтому матрицы усиления $K_{1,k}(t)$ и $K_{2,k}(t)$ будем искать из условия минимизации следа матрицы P^+ . Поскольку начальное состояние ошибки $\delta x_k(0)$ не коррелировано с возмущениями $w_k(t)$ и $v_k(t)$, то $E[\delta u_k(t) w_k(t)^T] = 0$ и $E[\delta x_k(t) (v_k(t+1) - v_k(t))^T] = 0$. Таким образом, $E[XZ^T] = E[ZX^T] = 0$. Тогда

$$(2.10) \quad P^+ = \Phi E[XX^T] \Phi^T + \Gamma E[ZZ^T] \Gamma^T,$$

где

$$E[XX^T] = \begin{bmatrix} P_{u,k}(t) & P_{ux,k}(t) \\ P_{ux,k}(t)^T & P_{x,k}(t) \end{bmatrix} = P, \quad E[ZZ^T] = \begin{bmatrix} S_w & 0 \\ 0 & 2S_v \end{bmatrix}.$$

В [16] для случая одного агента было доказано, что $P_{ux,k}(t) = 0$. Это свойство остается справедливым в рассматриваемом случае и доказывается по аналогии с [16]. Выразим слагаемые в правой части (2.10) в виде

$$\begin{aligned} &\Phi E[XX^T] \Phi^T = \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_{11} P_{u,k}(t) \Phi_{11}^T + \Phi_{12} P_{x,k}(t) \Phi_{12}^T & \Phi_{11} P_{u,k}(t) \Phi_{21}^T + \Phi_{12} P_{x,k}(t) \Phi_{22}^T \\ \Phi_{21} P_{u,k}(t) \Phi_{11}^T + \Phi_{22} P_{x,k}(t) \Phi_{12}^T & \Phi_{21} P_{u,k}(t) \Phi_{21}^T + \Phi_{22} P_{x,k}(t) \Phi_{22}^T \end{bmatrix}, \\ &\Gamma E[ZZ^T] \Gamma^T = \begin{bmatrix} \bar{K}_k(t) (C_N S_w C_N^T + 2S_v) \bar{K}_k(t)^T & -\bar{K}_k(t) C_N S_w \\ -S_w C_N^T \bar{K}_k(t)^T & S_w \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

С учетом этих соотношений след матрицы P^+ можно записать как

$$\begin{aligned}
 \text{tr}[P^+] &= \text{tr} \left[\Phi_{11} P_{u,k}(t) \Phi_{11}^T + \Phi_{12} P_{x,k}(t) \Phi_{12}^T + \Phi_{21} P_{u,k}(t) \Phi_{21}^T + \right. \\
 &+ \Phi_{22} P_{x,k}(t) \Phi_{22}^T + \bar{K}_k(t) C_N S_w C_N^T \bar{K}_k(t)^T + 2\bar{K}_k(t) S_v \bar{K}_k(t)^T + S_w \Big] = \\
 (2.11) \quad &= \text{tr} \left[(I - \bar{K}_k(t) C_N B_N) P_{u,k}(t) (I - \bar{K}_k(t) C_N B_N)^T + \right. \\
 &+ \bar{K}_k(t) (C_N - C_N A_N) P_{x,k}(t) (C_N - C_N A_N)^T \bar{K}_k(t)^T + \\
 &+ \bar{K}_k(t) (C_N S_w C_N^T + 2S_v) \bar{K}_k(t) + B_N P_{u,k} B_N^T + A_N P_{x,k} A_N^T + S_w \Big].
 \end{aligned}$$

Матрицы усиления $K_{1,k}(t)$ и $K_{2,k}(t)$, минимизирующие след P^+ , определяются соотношением

$$(2.12) \quad K_k(t) = \begin{bmatrix} K_{1,k}(t) & K_{2,k}(t) \end{bmatrix} = H_k(t) M_k(t)^{-1},$$

где

$$\begin{aligned}
 M_k(t) &= \begin{bmatrix} M_{11,k}(t) & M_{12,k}(t) \\ M_{12,k}^T(t) & M_{22,k}(t) \end{bmatrix}, \quad H_k(t) = \begin{bmatrix} H_{1,k}(t) & H_{2,k}(t) \end{bmatrix}, \\
 M_{11,k}(t) &= \sum_{i=1}^N g_i^2 C B P_{u,k}^{(i,i)}(t) B^T C^T + \\
 &+ \sum_{i=1}^N g_i^2 (C - C A) P_{x,k}^{(i,i)}(t) (C - C A)^T + \sum_{i=1}^N g_i^2 \left(C S_w^{(i)} C^T + 2S_v^{(i)} \right), \\
 M_{12,k}(t) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i l_{ij} C B P_{u,k}^{(i,j)}(t) B^T C^T + \\
 &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i l_{ij} (C - C A) P_{x,k}^{(i,j)}(t) (C - C A)^T + \sum_{i=1}^N g_i l_{ii} \left(C S_w^{(i)} C^T + 2S_v^{(i)} \right), \\
 (2.13) \quad M_{21,k}(t) &= M_{12,k}^T(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i l_{ij} C B P_{u,k}^{(j,i)}(t) B^T C^T + \\
 &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i l_{ij} (C - C A) P_{x,k}^{(j,i)}(t) (C - C A)^T + \sum_{i=1}^N g_i l_{ii} \left(C S_w^{(i)} C^T + 2S_v^{(i)} \right), \\
 M_{22}(t) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N l_{ij} l_{im} C B P_{u,k}^{(m,j)}(t) B^T C^T + \\
 &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N l_{ij} l_{im} (C - C A) P_{x,k}^{(m,j)}(t) (C - C A)^T + \\
 &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N l_{ij}^2 \left(C S_w^{(j)} C^T + 2S_v^{(j)} \right),
 \end{aligned}$$

$$H_{1,k}(t) = \sum_{i=1}^N g_i P_{u,k}^{(i,i)}(t) B^T C^T, \quad H_{2,k}(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N l_{ij} P_{u,k}^{(i,j)}(t) B^T C^T.$$

Детали вычислений даны в Приложении.

Ковариационные матрицы ошибок вектора состояния и вектора входных переменных определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} P_{x,k}(t+1) &= E \left[\delta x_k(t+1) \delta x_k(t+1)^T \right] = \\ &= A_N P_{x,k}(t) A_N^T + B_N P_{u,k}(t) B_N^T + S_w, \\ P_{u,k+1}(t) &= E \left[\delta u_{k+1}(t) \delta u_{k+1}(t)^T \right] = \\ &= (I - \bar{K}_k(t) C_N B_N) P_{u,k}(t) (I - \bar{K}_k(t) C_N B_N)^T + \\ &+ \bar{K}_k(t) \left((C_N - C_N A_N) P_{x,k}(t) (C_N - C_N A_N)^T + C_N S_w C_N^T + 2S_v \right) \bar{K}_k(t)^T. \end{aligned}$$

Таким образом, если $y_{ref}(t)$, $u_0(t)$, $x_k(0)$, $P_{u,0}(t)$, $P_{x,k}(0)$, S_w и S_v известны и задано время функционирования системы, определяемое продолжительностью одного повторения T и числом повторений k_{fin} , сетевой алгоритм на основе минимизации отклонений от эталонной модели можно представить в следующем виде.

Алгоритм 1.

1. Задать $k = 0$.
2. Для $t \in [0, T]$ вычислить:

$$\begin{aligned} x_k(t+1) &= A_N x_k(t) + B_N u_k(t) + w_k(t), \\ y_{v,k}(t) &= C_N x_k(t) + v_k(t), \\ e_{v,k}(t) &= y_{ref,N}(t) - y_{v,k}(t), \\ P_{x,k}(t+1) &= A_N P_{x,k}(t) A_N^T + B_N P_{u,k}(t) B_N^T + S_w, \\ K_k(t) &= H_k(t) M_k(t)^{-1}, \\ y_{v,k}(t+1) &= C_N x_k(t+1) + v_k(t+1), \\ e_{v,k}(t+1) &= y_{ref,N}(t+1) - y_{v,k}(t+1), \\ u_{k+1}(t) &= u_k(t) + \bar{K}_k(t) (e_{v,k}(t+1) - e_{v,k}(t)), \\ P_{u,k+1}(t) &= (I - \bar{K}_k(t) C_N B_N) P_{u,k}(t) (I - \bar{K}_k(t) C_N B_N)^T + \\ &+ \bar{K}_k(t) \left((C_N - C_N A_N) P_{x,k}(t) (C_N - C_N A_N)^T + C_N S_w C_N^T + 2S_v \right) \bar{K}_k(t)^T. \end{aligned}$$

3. Увеличить k на единицу.

4. Если $k < k_{fin}$, то вернуться к шагу 2, иначе вычисления закончить.

Сходимость алгоритма доказывается по аналогии с [16] и в данной работе в силу ограниченного объема не приводится.

3. Сетевое управление с итеративным обучением на основе дивергентного метода векторной функции Ляпунова

Как можно было заметить, сетевой алгоритм полученный в предыдущем разделе, обладает следующими недостатками. Во-первых, в данном алгоритме в вычислениях непосредственно используются сигналы, измеряемые с шумами без применения фильтра, во-вторых, в протоколе (2.2) используется дискретный аналог производной от ошибки обучения, что, как известно, приводит к эффекту усиления возмущений. В данном разделе приведем подход к УИО стохастическими сетевыми системами, основанный на дивергентном методе векторной функции Ляпунова, в котором попытаемся устранить указанные недостатки.

3.1. Постановка задачи

Постановка задачи предполагает непосредственное использование желаемой траектории без рассмотрения вспомогательной системы (2.3). Введем в рассмотрение ошибку обучения i -го агента относительно желаемой траектории:

$$e_k^{(i)}(t) = y_{ref}(t) - y_k^{(i)}(t).$$

Задача заключается в нахождении управления (протокола) $u_k^{(i)}(t)$, обеспечивающего для всех значений $t \in T$ сходимость ошибки обучения:

$$(3.1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} E \|e_{k+1}^{(i)}(t)\| = e_\infty,$$

при этом величина под знаком предела в левой части (3.1) должна убывать при $k \rightarrow \infty$ не медленнее некоторой убывающей геометрической прогрессии и, кроме того, $\lim_{k \rightarrow \infty} E \|u_k^{(i)}(t) - u_\infty(t)\| = 0$, а $\lim_{k \rightarrow \infty} E [\|e_k^{(i)}(t)\|^2]$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} E [\|u_k^{(i)}(t) - u_\infty(t)\|^2]$ ограничены. Здесь $u_\infty(t)$ — ограниченная переменная, часто называемая обученным управлением, e_∞ — ограниченная величина, характеризующая предельное среднее значение ошибки обучения. Протокол для системы (2.1) будем формировать в виде

$$(3.2) \quad u_{k+1}^{(i)}(t) = u_k^{(i)}(t) + \Delta u_{k+1}^{(i)}(t),$$

где $\Delta u_{k+1}^{(i)}(t)$ — корректирующая добавка к управлению i -й системы на k -й итерации, которую зададим соотношением

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \Delta u_{k+1}^{(i)}(t) = & K_1 \left[\hat{x}_{k+1}^{(i)}(t) - \hat{x}_k^{(i)}(t) \right] + \\ & + K_2 \left[\sum_{j \in N_i} d_{ij} \left(\hat{y}_k^{(j)}(t+1) - \hat{y}_k^{(i)}(t+1) \right) + g_i \left(y_{ref}(t+1) - \hat{y}_k^{(i)}(t+1) \right) \right], \end{aligned}$$

где K_1 и K_2 — матрицы протокола, а $\hat{x}_k^{(i)}(t)$ и $\hat{y}_k^{(i)}(t)$ — соответственно оценка вектора состояния и оценка выходного сигнала i -го агента, полученные с помощью фильтра Калмана

$$\begin{aligned}\hat{x}_k^{(i)}(t+1) &= A\hat{x}_k^{(i)}(t) + Bu_k^{(i)}(t) + F^{(i)} \left[y_{v,k}^{(i)}(t) - C\hat{x}_k^{(i)}(t) \right], \\ \hat{y}_k^{(i)}(t) &= C\hat{x}_k^{(i)}(t), \quad \hat{x}_k(0) = Fy_{v,k}^{(i)}(0),\end{aligned}$$

где $F^{(i)} = AS^{(i)}C^T \left[CS^{(i)}C^T + S_v^{(i)} \right]^{-1}$, а $S^{(i)}$ является решением алгебраического уравнения Риккати

$$S^{(i)} = AS^{(i)}A^T - AS^{(i)}C^T \left[CS^{(i)}C^T + S_v^{(i)} \right]^{-1} CS^{(i)}A^T + S_w^{(i)}.$$

Ошибка оценивания определяется выражением

$$\tilde{x}_k^{(i)}(t) = x_k^{(i)}(t) - \hat{x}_k^{(i)}(t).$$

Замечание 1. В отличие от управления с обратной связью для управления с итеративным обучением синтезу подлежит корректирующая поправка $\Delta u_{k+1}(t)$, которая может синтезироваться как обычное управление с обратной связью для вводимой в рассмотрение вспомогательной 2D-системы относительно приращений переменных. Этот подход будет использован далее. В связи с этим возникает естественный вопрос о непосредственном построении управления с обратной связью, решающего поставленную задачу, который обсуждался в [6] и более детально в [38–40]. Управления, формируемые по протоколам (3.2), (3.3), и (2.2) относятся к так называемым непричинным управлениям, характерным признаком которых является то, что $u_{k+1}(p)$ зависит от $e_k(h)$ или $\hat{e}_k(h)$, где $h > p$. Непричинные законы управления с упреждением реагируют на повторяющиеся помехи. За исключением особых случаев, не существует эквивалентного регулятора с обратной связью, который может обеспечить такое же качество управления, как и непричинное управление с итеративным обучением, поскольку управление с обратной связью реагирует на текущие ошибки и не обладает свойством упреждения. Очевидным недостатком управления, формируемого по протоколу (2.2), является то, что в нем используются приращения выходного сигнала с шумом измерения. Это приводит к дополнительному увеличению дисперсии ошибки обучения, что убедительно подтверждает приводимый далее пример.

3.2. Построение 2D-модели

Введем вспомогательные переменные, имеющие смысл приращений оценки и ошибки оценивания за один шаг по переменной k ,

$$(3.4) \quad \hat{\eta}_{k+1}^{(i)}(t+1) = \hat{x}_{k+1}^{(i)}(t) - \hat{x}_k^{(i)}(t), \quad \tilde{\eta}_{k+1}^{(i)}(t+1) = \tilde{x}_{k+1}^{(i)}(t) - \tilde{x}_k^{(i)}(t)$$

и ошибку обучения относительно оценки выходного сигнала

$$(3.5) \quad \hat{e}_k^{(i)}(t) = y_{ref}(t) - \hat{y}_k^{(i)}(t).$$

Перепишем (3.4) и (3.5) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\eta}_{k+1}^{(i)}(t+1) &= (A - F^{(i)}C)\tilde{\eta}_{k+1}^{(i)}(t) + \Delta w_{k+1}^{(i)}(t-1) - F^{(i)}\Delta v_{k+1}^{(i)}(t-1), \\
 \hat{\eta}_{k+1}^{(i)}(t+1) &= F^{(i)}C\tilde{\eta}_{k+1}^{(i)}(t) + A\hat{\eta}_{k+1}^{(i)}(t) + B\Delta u_{k+1}^{(i)}(t-1) + \\
 (3.6) \quad &+ F^{(i)}\Delta v_{k+1}^{(i)}(t-1), \\
 \hat{e}_{k+1}^{(i)}(t) &= -CF^{(i)}C\tilde{\eta}_{k+1}^{(i)}(t) - CA\hat{\eta}_{k+1}^{(i)}(t) + \hat{e}_k^{(i)}(t) - \\
 &- CB\Delta u_{k+1}^{(i)}(t-1) - CF^{(i)}\Delta v_{k+1}^{(i)}(t-1),
 \end{aligned}$$

где

$$\Delta w_{k+1}^{(i)}(t-1) = w_{k+1}^{(i)}(t-1) - w_k^{(i)}(t-1), \quad \Delta v_{k+1}^{(i)}(t-1) = v_{k+1}^{(i)}(t-1) - v_k^{(i)}(t-1).$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
 \bar{\eta}_{k+1}^{(i)}(t) &= \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_{k+1}^{(i)}(t)^T & \hat{\eta}_{k+1}^{(i)}(t)^T \end{bmatrix}^T, \quad \bar{u}_{k+1}^{(i)}(t) = \Delta u_{k+1}^{(i)}(t-1), \\
 \bar{w}_{k+1}^{(i)}(t) &= \begin{bmatrix} \Delta w_{k+1}^{(i)}(t-1)^T & \Delta v_{k+1}^{(i)}(t-1)^T \end{bmatrix}^T,
 \end{aligned}$$

и запишем (3.6) в стандартной форме дискретного повторяющегося процесса, представляющего собой одну из разновидностей 2D-моделей [37]:

$$\begin{aligned}
 (3.7) \quad \bar{\eta}_{k+1}^{(i)}(t+1) &= A_{11}^{(i)}\bar{\eta}_{k+1}^{(i)}(t) + A_{12}\hat{e}_k^{(i)}(t) + B_1\bar{u}_{k+1}^{(i)}(t) + D_1^{(i)}\bar{w}_{k+1}^{(i)}(t), \\
 \hat{e}_{k+1}^{(i)}(t) &= A_{21}^{(i)}\bar{\eta}_{k+1}^{(i)}(t) + A_{22}\hat{e}_k^{(i)}(t) + B_2\bar{u}_{k+1}^{(i)}(t) + D_2^{(i)}\bar{w}_{k+1}^{(i)}(t),
 \end{aligned}$$

где $A_{11}^{(i)} = \begin{bmatrix} A - F^{(i)}C & 0 \\ F^{(i)}C & A \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}$, $D_1^{(i)} = \begin{bmatrix} I & -F^{(i)} \\ 0 & F^{(i)} \end{bmatrix}$, $A_{12} = 0$, $A_{22} = I$, $A_{21}^{(i)} = [-CF^{(i)}C \quad -CA]$, $B_2 = -CB$, $D_2^{(i)} = [0 \quad -CF^{(i)}]$.

Выразим корректирующую поправку (3.3) в момент $t-1$ в терминах переменных $\hat{\eta}_{k+1}^{(i)}(t)$ и $\hat{e}_k^{(i)}(t)$:

$$(3.8) \quad \Delta u_{k+1}^{(i)}(t-1) = K_1\hat{\eta}_{k+1}^{(i)}(t) + K_2 \left[\sum_{j \in N_i} d_{ij} \left(\hat{e}_k^{(i)}(t) - \hat{e}_k^{(j)}(t) \right) + g_i \hat{e}_k^{(i)}(t) \right].$$

Тогда, вводя расширенные векторы

$$\begin{aligned}
 \bar{\eta}_k(t) &= \begin{bmatrix} \bar{\eta}_k^{(1)}(t)^T & \dots & \bar{\eta}_k^{(N)}(t)^T \end{bmatrix}^T, \\
 \hat{e}_k(t) &= \begin{bmatrix} \hat{e}_k^{(1)}(t)^T & \dots & \hat{e}_k^{(N)}(t)^T \end{bmatrix}^T, \\
 \bar{w}_k(t) &= \begin{bmatrix} \bar{w}_k^{(1)}(t)^T & \dots & \bar{w}_k^{(N)}(t)^T \end{bmatrix}^T,
 \end{aligned}$$

окончательно запишем сетевую 2D-модель в виде

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \bar{\eta}_{k+1}(t+1) &= \Phi_{11}\bar{\eta}_{k+1}(t) + \Phi_{12}\hat{e}_k(t) + D_1\bar{w}_{k+1}(t), \\ \hat{e}_{k+1}(t) &= \Phi_{21}\bar{\eta}_{k+1}(t) + \Phi_{22}\hat{e}_k(t) + D_2\bar{w}_{k+1}(t), \end{aligned}$$

где $\Phi_{11} = \text{diag}[(A_{11}^{(1)} + B_1K_1H) \dots (A_{11}^{(N)} + B_1K_1H)]$, $\Phi_{12} = (L + G) \otimes BK_2$, $\Phi_{21} = \text{diag}[(A_{21}^{(1)} + B_2K_1H) \dots (A_{21}^{(N)} + B_2K_1H)]$, $\Phi_{22} = I_N \otimes I_r - (L + G) \otimes CBK_2$, $D_1 = \text{diag}[D_1^{(1)} \dots D_1^{(N)}]$, $D_2 = \text{diag}[D_2^{(1)} \dots D_2^{(N)}]$, $H = [0 \ I]$.

3.3. Решение задачи

Для решения воспользуемся дивергентным методом векторных функций Ляпунова [23]. Введем следующее определение устойчивости.

Определение 1. Дискретный повторяющийся процесс (3.9) называется устойчивым по второму моменту вдоль повторений, если для всех $t \in [0, T]$

$$(3.10) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} E[|\bar{\eta}_k(t)|^2 + |\hat{e}_k(t)|^2] \leq \Lambda < \infty,$$

где Λ не зависит от T .

Введем в рассмотрение векторную функцию Ляпунова

$$(3.11) \quad V(\xi, \epsilon) = \begin{bmatrix} V_1(\xi) \\ V_2(\epsilon) \end{bmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}^{2n_x}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}^{n_y},$$

где $V_1(\xi) > 0$, $\xi \neq 0$, $V_2(\epsilon) > 0$, $\epsilon \neq 0$, $V_1(0) = 0$, $V_2(0) = 0$.

Стохастический аналог дивергенции этой функции вдоль траекторий системы (3.9) запишется в виде

$$\begin{aligned} DV(\xi, \epsilon) &= E[V_1(\bar{\eta}_{k+1}(t+1)) | \bar{\eta}_{k+1}(t) = \xi, \hat{e}_k(t) = \epsilon] - V_1(\xi) \\ &\quad + E[V_2(\hat{e}_{k+1}(t)) | \bar{\eta}_{k+1}(t) = \xi, \hat{e}_k(t) = \epsilon] - V_2(\epsilon). \end{aligned}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 [23]. Предположим что существуют функция $V(\xi, \epsilon)$ вида (3.11) и положительные постоянные c_1, c_2, c_3 и λ , удовлетворяющие следующим неравенствам вдоль траекторий системы (3.9):

$$\begin{aligned} c_1\|\xi\|^2 &\leq V_1(\xi) \leq c_2\|\xi\|^2, \\ c_1\|\epsilon\|^2 &\leq V_2(\epsilon) \leq c_2\|\epsilon\|^2, \\ DV(\xi, \epsilon) &\leq \lambda - c_3(\|\xi\|^2 + \|\epsilon\|^2). \end{aligned}$$

Тогда повторяющийся процесс (3.9) является устойчивым по второму моменту вдоль повторений. При этом величина под знаком предела в левой части (3.10) убывает при $k \rightarrow \infty$ не медленнее некоторой убывающей геометрической прогрессии.

В силу очевидного соотношения $(E[||\hat{e}_k(t)||])^2 \leq E[||\hat{e}_k(t)||^2]$ и того факта, что по определению $e_k^{(i)}(t) = \hat{e}_k^{(i)}(t) + C\tilde{x}_k^{(i)}(t)$, при условиях теоремы 1 будет выполнено условие сходимости ошибки обучения (3.1), и задача сводится к построению векторной функции Ляпунова (3.11). Поскольку система (3.9) линейна, подходящим может служить выбор компонент этой функции в виде квадратичных форм

$$(3.12) \quad V_1(\bar{\eta}_{k+1}(t)) = \bar{\eta}_{k+1}^T(t) \bar{P}_1 \bar{\eta}_{k+1}(t), \quad V_2(\hat{e}_k(t)) = \hat{e}_k^T(t) \bar{P}_2 \hat{e}_k(t),$$

где $\bar{P}_1 = I_N \otimes P_1$, $\bar{P}_2 = I_N \otimes P_2$. Вычисляя дивергенцию функции (3.11) с учетом (3.12), получим

$$(3.13) \quad DV(\xi, \epsilon) = \begin{bmatrix} \xi \\ \epsilon \end{bmatrix}^T (\Phi^T P \Phi - P) \begin{bmatrix} \xi \\ \epsilon \end{bmatrix} + 2(\text{tr}[\bar{P}_1 S_1] + \text{tr}[\bar{P}_2 S_2]),$$

где

$$P = \text{diag} \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & \bar{P}_2 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix},$$

$$S_1 = \text{diag}[S_1^{(1)} \dots S_1^{(N)}], \quad S_2 = \text{diag}[S_2^{(1)} \dots S_2^{(N)}],$$

$$S_1^{(i)} = \begin{bmatrix} S_w^{(i)} & F^{(i)} S_v^{(i)} F^{(i)T} \\ 0 & F^{(i)} S_v^{(i)} F^{(i)T} \end{bmatrix}, \quad S_2^{(i)} = C F^{(i)} S_v^{(i)} F^{(i)T} C^T.$$

В соответствии с (3.13) условия теоремы 1 будут заведомо выполнены, если потребовать выполнение следующих матричных неравенств:

$$(3.14) \quad \Phi^T P \Phi - P + Q + K^T \bar{R} K \preceq 0, \quad P \succ 0,$$

где $Q = \text{diag} \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 & \bar{Q}_2 \end{bmatrix}$, $\bar{R} = I_N \otimes R$, $K = \begin{bmatrix} \bar{K}_1 & \bar{K}_2 \end{bmatrix}$, $\bar{K}_1 = I_N \otimes K_1 H$, $\bar{K}_2 = I_N \otimes K_2$. Матрицы Q и R здесь являются аналогами весовых матриц в задаче о линейно-квадратичном регуляторе. Соответствующим выбором этих матриц можно изменять скорость сходимости процесса обучения. Относительно переменных P и K неравенства (3.14) являются нелинейными. Сведем их к линейным с помощью эквивалентных преобразований и введения вспомогательных переменных. С этой целью перепишем (3.14) в виде

$$(3.15) \quad \begin{bmatrix} P & \Phi^T & I & K^T \\ \Phi & P^{-1} & 0 & 0 \\ I & 0 & Q^{-1} & 0 \\ K & 0 & 0 & \bar{R}^{-1} \end{bmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Обозначим $X = \text{diag} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 & \bar{X}_2 \end{bmatrix} = P^{-1}$, $\bar{X}_1 = I_N \otimes X_1$, $\bar{X}_2 = I_N \otimes X_2$ и введем переменные $Y_1 = K_1 Z$, $Y_2 = K_2 X_2$ и переменную Z как решение линейного матричного уравнения $H X_1 = Z H$. Тогда, умножая (3.15) слева и справа на матрицу $\text{diag}[X \ I \ I \ I]$, после несложных дополнительных преобразований

получим следующую систему линейных матричных неравенств относительно X , Y и Z :

$$(3.16) \quad \begin{bmatrix} X & (\bar{\Phi}_1 X + \bar{\Phi}_2 Y \bar{H} \bar{\Phi}_3)^T & X & \bar{H}^T Y^T \\ \bar{\Phi}_1 X + \bar{\Phi}_2 Y \bar{H} \bar{\Phi}_3 & X & 0 & 0 \\ X & 0 & Q^{-1} & 0 \\ Y \bar{H} & 0 & 0 & \bar{R}^{-1} \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \\ X_1 \succ 0, \quad X_2 \succ 0, \quad H X_1 = Z H,$$

где

$$Y = \begin{bmatrix} \bar{Y}_1 & \bar{Y}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{Y}_1 = I_N \otimes Y_1, \quad \bar{Y}_2 = I_N \otimes Y_2, \\ \bar{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \text{diag}[A_{11}^{(1)} \dots A_{11}^{(N)}] & 0 \\ \text{diag}[A_{21}^{(1)} \dots A_{21}^{(N)}] & I_N \otimes I_r \end{bmatrix}, \quad \bar{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} I_N \otimes B_1 \\ I_N \otimes B_2 \end{bmatrix}, \\ \bar{\Phi}_3 = \begin{bmatrix} I_N \otimes I_{2n} & 0 \\ 0 & (L + G) \otimes I_r \end{bmatrix}, \quad \bar{H} = \begin{bmatrix} I_N \otimes H & 0 \\ 0 & I_N \otimes I_r \end{bmatrix}.$$

Матрицы K_1 и K_2 определяются из выражений

$$(3.17) \quad K_1 = Y_1 Z^{-1}, \quad K_2 = Y_2 X_2^{-1}.$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 2. Протокол (3.2), (3.3) обеспечивает сходимость ошибки обучения в сетевой системе (2.1) в смысле условия (3.1), если система линейных матричных неравенств (3.16) разрешима. Матрицы протокола K_1 и K_2 определяются выражениями (3.17).

4. Пример

Рассмотрим группу из трех одинаковых манипуляторов с гибким поворотным звеном (агентов), перемещающимся в горизонтальной плоскости с постоянным периодом повторения. Динамика каждого агента в пространстве состояний описывается уравнениями [41]:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c [u(t) + w_c(t)], \\ y(t) &= C x(t) + v_c(t), \end{aligned}$$

где $x = [\theta \quad \alpha \quad \dot{\theta} \quad \dot{\alpha}]^T$, θ — угол поворота сервопривода, α — угол отклонения гибкого звена манипулятора,

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_s}{J_{eq}} & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & -\frac{K_s (J_l + J_{eq})}{J_{eq} J_l} & \frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \\ -\frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

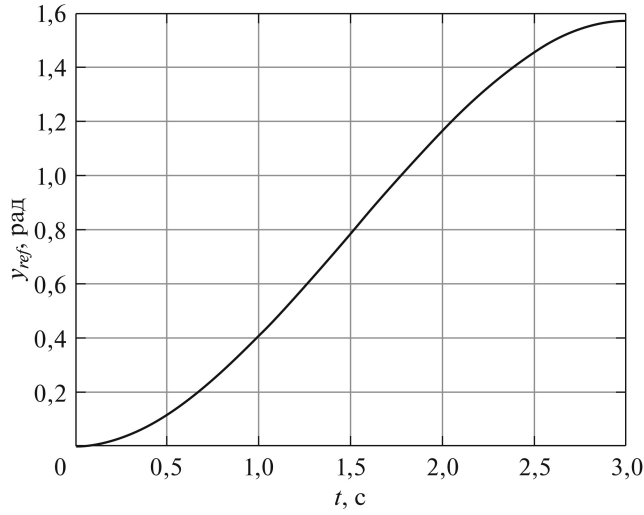


Рис. 1. Желаемая траектория.

B_{eq} — коэффициент вязкого трения сервопривода, K_s — жесткость гибкого звена, J_l — момент инерции гибкого звена относительно центра масс, J_{eq} — момент инерции сервопривода, $w_c(t)$ и $v_c(t)$ — гауссовские белые шумы с интенсивностями W_c и V_c . Предполагая, что управление формируется компьютером с периодом дискретности T_s , перейдем к эквивалентной дискретной модели, в которой учтем, что система функционирует в повторяющемся режиме:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} x_k[(p+1)T_s] &= Ax_k[pT_s] + Bu_k[pT_s] + w_k[pT_s], \\ y_k[pT_s] &= Cx_k[pT_s] + v_k[pT_s], \quad k = 0, 1, \dots, \quad p = 0, 1, \dots, T, \end{aligned}$$

где $A = \exp(A_c T_s)$, $B = \int_0^{T_s} \exp(A_c \tau) B_c d\tau$, $w(pT_s)$ — дискретный гауссовский белый шум с ковариационной матрицей $S_w = \int_0^{T_s} \exp(A_c \tau) B_c W_c B_c^T \exp(A_c^T \tau) d\tau$, $v(pT_s)$ — дискретный гауссовский белый шум с дисперсией $S_v = V_c / T_s$. Модель (4.2) соответствует (2.1) для $t = pT_s$. Для расчетов и моделирования были приняты следующие значения параметров:

$$\begin{aligned} B_{eq} &= 0,004 \text{ Н} \cdot \text{м}/(\text{рад}/\text{с}), \quad K_s = 1,3 \text{ Н} \cdot \text{м}/\text{рад}, \\ J_l &= 0,0038 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad J_{eq} = 2,08 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad T_s = 0,01 \text{ с}. \end{aligned}$$

Продолжительность цикла повторения 3 с, что при выбранном периоде дискретности соответствует $T = 300$, и число повторений $k_{fin} = 100$. Желаемая траектория движения звена описывается уравнением

$$y_{ref}(t) = \frac{\pi t^2}{6} - \frac{\pi t^3}{27}, \quad t \in [0, T],$$

график этой траектории представлен на рис. 1. Рассмотрим случай, когда информация об этой траектории доступна лишь одному из агентов (лидеру), остальные последовательно получают информацию один от другого (ведомые). Ограничимся анализом скорости сходимости процессов обучения, для

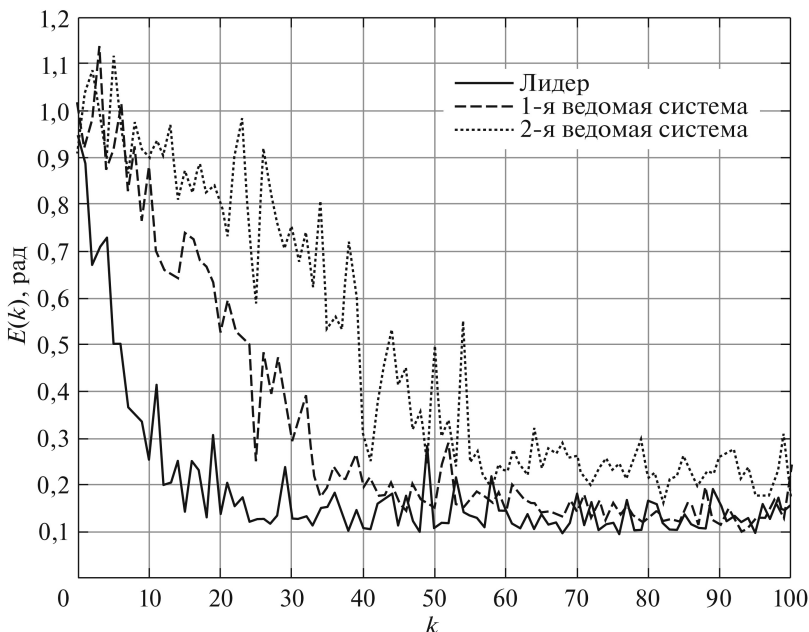


Рис. 2. Выборочные среднеквадратичные отклонения ошибки обучения для алгоритма 1.

этого введем выборочное среднеквадратическое отклонение ошибки обучения

$$(4.3) \quad E(k) = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{p=0}^T \|\hat{e}_k(p)\|^2}.$$

В этом случае для простоты будем считать, что интенсивности шумов, действующих на агентов, и шумов измерений одинаковы, т.е. $W_c^{(i)} = W_c = 10^{-6}$, $V_c^{(i)} = V_c = 10^{-4}$. Применим алгоритм 1. В этом алгоритме нет параметров, кроме начальных условий, за счет которых можно изменять скорость сходимости процессов обучения. Случайной выборкой в классе диагональных матриц было получено, что наилучшую скорость сходимости обеспечивает выбор $P_{u,0}(t) = 10^{-1}$, $P_{x,k}(0) = 10^{-1}I_n$. Траектории изменения выборочных среднеквадратических отклонений ошибки обучения представлены на рис. 2.

Результаты применения алгоритма на основе дивергентного метода векторных функций Ляпунова при выборе весовых матриц в виде

$$Q_1 = \text{diag}[10^{-4} \ 10^3 \ 10^2 \ 10^{-4} \ 10^{-4} \ 10^3 \ 10^2 \ 10^{-4}], \quad Q_2 = 10^6, \quad R = 10$$

представлены на рис. 3. При этом

$$K_1 = [-28,1215 \ -1,2892 \ -0,3488 \ -0,0063], \quad K_2 = 14,2217.$$

Выбор весовых матриц основан на анализе физического смысла переменных состояния: величина отклонения от желаемой траектории, угол отклонения гибкого звена и угловая скорость сервомотора должны оказывать наибольшее влияние на скорость процесса обучения. На рис. 4-6 траектории изменения

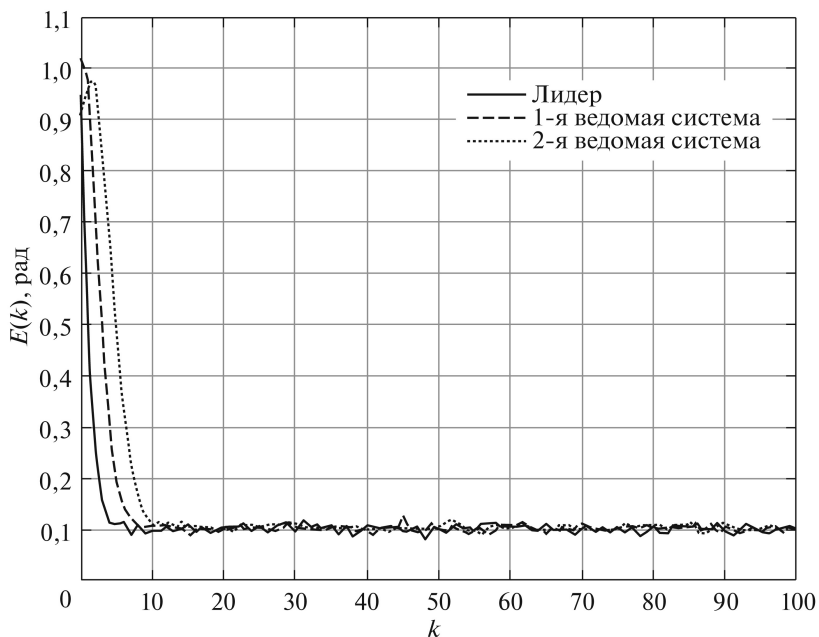


Рис. 3. Выборочные среднеквадратичные отклонения ошибки обучения для дивергентного метода ВФЛ.

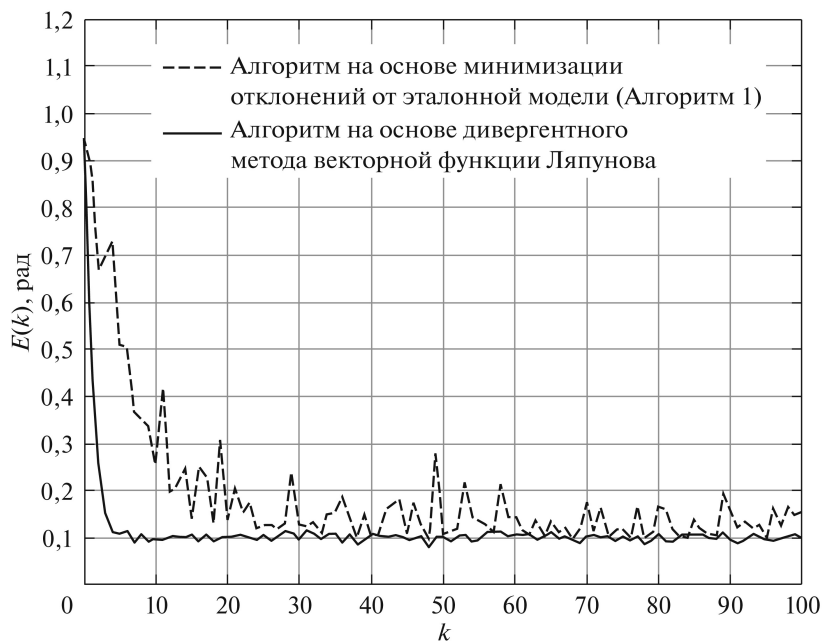


Рис. 4. Выборочные среднеквадратичные отклонения ошибки обучения лидера для двух методов.

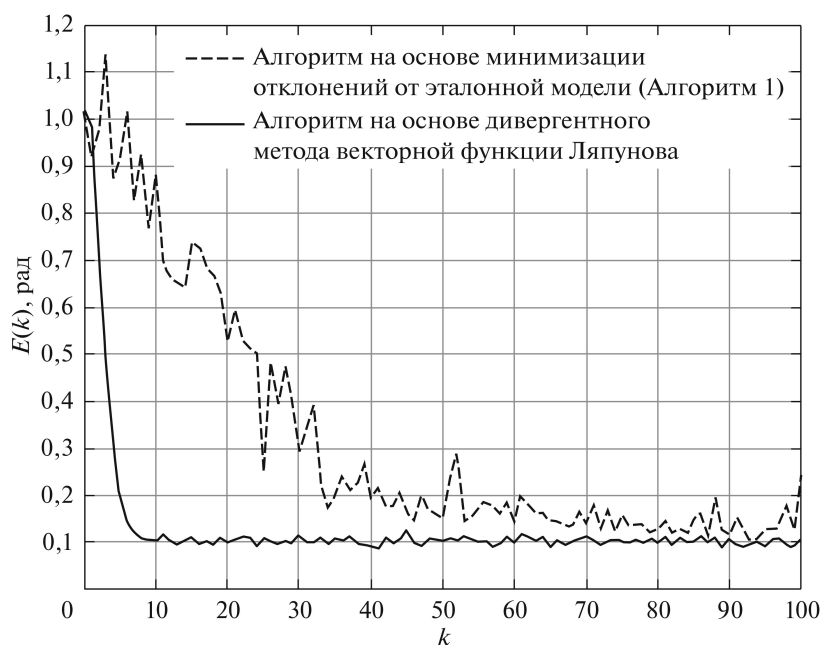


Рис. 5. Выборочные среднеквадратичные отклонения ошибки обучения первого ведомого агента для двух методов.



Рис. 6. Выборочные среднеквадратичные отклонения ошибки обучения второго ведомого агента для двух методов.

выборочных среднеквадратических отклонений ошибки обучения для двух методов представлены в сравнении.

Приведенный пример подтверждает недостатки алгоритма УИО на основе минимизации отклонений от эталонной модели. При использовании этого алгоритма ошибка обучения лидера сходится в среднем в 5–6 раз медленнее, а для последнего ведомого агента более чем в 10 раз медленнее, чем при использовании алгоритма на основе дивергентного метода векторных функций Ляпунова. Кроме того, поскольку в первом случае не используется фильтрация, выборочные траектории среднеквадратической ошибки обучения существенно отличаются от монотонных, особенно для последнего ведомого агента, что является весьма нежелательным эффектом в процессе обучения.

5. Заключение

Алгоритмы Р-типа, предложенные в [18, 19], как и алгоритм [16] не используют фильтрацию и, очевидно, не могут существенно улучшить свойства процесса обучения относительно алгоритма из [16]. Кроме того, в алгоритмах, предложенных в [16, 18, 19], скорость сходимости процессов обучения можно изменять лишь изменением начальных значений ковариационных матриц, что приводит к дополнительному разбросу значений выборочных траекторий ошибки обучения. С другой стороны, при использовании фильтра, очевидно существуют ограничения на продолжительность отдельного повторения, определяемого величиной T . При малых T на ошибку обучения будет существенно влиять ошибка оценивания. Этот вопрос является предметом отдельного дальнейшего исследования.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Чтобы найти матрицы усиления $K_{1,k}(t)$ и $K_{2,k}(t)$ минимизирующие след P^+ , вычислим частные производные (2.11) относительно $K_{1,k}(t)$ и $K_{2,k}(t)$ и приравняем их нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{tr} [P^+]}{\partial K_{1,k}(t)} = & -2 \sum_{i=1}^N g_i P_{u,k}^{(i,i)}(t) B^T C^T + 2K_{1,k}(t) \sum_{i=1}^N g_i^2 C B P_{u,k}^{(i,i)}(t) B^T C^T + \\ & + 2K_{2,k}(t) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i l_{ij} C B P_{u,k}^{(j,i)}(t) B^T C^T + \\ & + 2K_{1,k}(t) \sum_{i=1}^N g_i^2 (C - CA) P_{x,k}^{(i,i)}(t) (C - CA)^T + \\ & + 2K_{2,k}(t) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i l_{ij} (C - CA) P_{x,k}^{(j,i)}(t) (C - CA)^T + \\ & + 2K_{1,k}(t) \sum_{i=1}^N g_i^2 (CS_w^{(i)} C^T + 2S_v^{(i)}) + 2K_{2,k}(t) \sum_{i=1}^N g_i l_{ii} (CS_w^{(i)} C^T + 2S_v^{(i)}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \text{tr} [P^+]}{\partial K_{2,k}(t)} = & -2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N l_{ij} P_{u,k}^{(i,j)}(t) B^T C^T + \\
& + 2K_{1,k}(t) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i l_{ij} C B P_{u,k}^{(i,j)}(t) B^T C^T + \\
& + 2K_{2,k}(t) \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N l_{ij} l_{im} C B P_{u,k}^{(m,j)}(t) B^T C^T + \\
& + 2K_{1,k}(t) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i l_{ij} (C - CA) P_{x,k}^{(i,j)}(t) (C - CA)^T + \\
& + 2K_{2,k}(t) \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N l_{ij} l_{im} (C - CA) P_{x,k}^{(m,j)}(t) (C - CA)^T + \\
& + 2K_{1,k}(t) \sum_{i=1}^N g_i l_{ii} \left(C S_w^{(i)} C^T + 2S_v^{(i)} \right) + 2K_{2,k}(t) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N l_{ij}^2 \left(C S_w^{(j)} C^T + 2S_v^{(j)} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые в правых частях следующим образом:

$$\begin{aligned}
(\text{II.1}) \quad K_{1,k}(t) & \left(\sum_{i=1}^N g_i^2 C B P_{u,k}^{(i,i)}(t) B^T C^T + \sum_{i=1}^N g_i^2 (C - CA) P_{x,k}^{(i,i)}(t) (C - CA)^T + \right. \\
& + \sum_{i=1}^N g_i^2 \left(C S_w^{(i)} C^T + 2S_v^{(i)} \right) \Big) + K_{2,k}(t) \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i l_{ij} C B P_{u,k}^{(j,i)}(t) B^T C^T + \right. \\
& + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i l_{ij} (C - CA) P_{x,k}^{(j,i)}(t) (C - CA)^T + \\
& + \sum_{i=1}^N g_i l_{ii} \left(C S_w^{(i)} C^T + 2S_v^{(i)} \right) \Big) = \sum_{i=1}^N g_i P_{u,k}^{(i,i)}(t) B^T C^T, \\
& K_{1,k}(t) \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i l_{ij} C B P_{u,k}^{(i,j)}(t) B^T C^T + \right. \\
& + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i l_{ij} (C - CA) P_{x,k}^{(i,j)}(t) (C - CA)^T + \sum_{i=1}^N g_i l_{ii} \left(C S_w^{(i)} C^T + 2S_v^{(i)} \right) \Big) + \\
& + K_{2,k}(t) \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N l_{ij} l_{im} C B P_{u,k}^{(m,j)}(t) B^T C^T + \right. \\
& + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N l_{ij} l_{im} (C - CA) P_{x,k}^{(m,j)}(t) (C - CA)^T +
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N l_{ij}^2 \left(C S_w^{(j)} C^T + 2 S_v^{(j)} \right) \Bigg) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N l_{ij} P_{u,k}^{(i,j)}(t) B^T C^T.$$

С учетом этих соотношений и обозначений (2.13) перепишем систему (П.1) в виде

$$K_k(t) M_k(t) = H_k(t),$$

где

$$K_k(t) = \begin{bmatrix} K_{1,k}(t) & K_{2,k}(t) \end{bmatrix},$$

откуда следует (2.12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Garden M.* Learning Control of Actuators in Control Systems. U.S. Patent 3555252, 1971.
2. *Uchiyama M.* Formulation of High-Speed Motion Pattern of a Mechanical Arm by Trial // Trans. SICE (Soc. Instrum. Contr. Eng.) 1978. V. 14. No. 6. P. 706–712 (in Japanese).
3. *Arimoto S., Kawamura S., Miyazaki F.* Bettering Operation of Dynamic Systems by Learning: A New Control Theory for Servomechanism or Mechatronic Systems // Proc. 23rd Conf. Decicion Contr. Las Vegas. NV. 1984. P. 1064–1069.
4. *Arimoto S., Kawamura S., Miyazaki F.* Bettering Operation of Robots by Learning // J. Robot. Syst. 1984. V. 1. P. 123–140.
5. *Craig J.J.* Adaptive Control of Manipulators through Repeated Trials // Proc. Amer. Contr. Conf. 1984. P. 1566–1573.
6. *Bristow D.A., Tharayil M., Alleyne A.G.* A Survey of Iterative Learning Control: A Learning-Based Method for High-Performance Tracking Control // IEEE Control Syst. Magaz. 2006. V. 26. No. 3. P. 96–114.
7. *Ahn H-S., Chen Y.Q., Moore K.L.* Iterative Learning Control: Survey and Categorization // IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Part C: Appl. Rev. 2007. V. 37. No. 6. P. 1099–1121.
8. *Wang Y., Gao F., Doyle F.J. III* Survey on Iterative Learning Control, Repetitive Control and Run-to-Run Control // J. Process Control. 2009. V. 19. No. 10. P. 1589–1600.
9. *Ahn H-S., Moore K.L., Chen Y.Q.* Iterative Learning Control. Robustness and Monotonic Convergence for Interval Systems. London: Springer-Verlag, 2007.
10. *Hoelzle D.J., Alleyne A.G., Johnson A.J.W.* Iterative Learning Control for Robotic Deposition using Machine Vision // Amer. Control Conf., Washington, USA, 2008. P. 4541–4547.
11. *Hladowski L., Galkowski K., Cai Z., Rogers E., Freeman C., Lewin P.* Experimentally Supported 2D Systems Based Iterative Learning Control Law Design for Error Convergence and Performance // Control Engineer. Practice. 2010. V. 18. P. 339–348.
12. *Freeman C.T., Rogers E., Hughes A-M., Burrridge J.H., Meadmore K.L.* Iterative Learning Control in Health Care. Electrical Stimulation and Robotic-Assisted Upper-Limb Stroke Rehabilitation // IEEE Control Syst. Magaz. 2012. V. 32. No. 2. P. 18–43.

13. *Sammons P.M., Gegel M.L., Bristow D.A., Landers R.G.* Repetitive Process Control of Additive Manufacturing with Application to Laser Metal Deposition // IEEE Transact. Control Syst. Technol. 2019. V. 27. No. 2. P. 566–575.
14. *Shen D., Wang Y.* Survey on Stochastic Iterative Learning Control // J. Proc. Control. 2014. V. 24. P. 64–77.
15. *Shen D.* A Technical Overview of Recent Progresses on Stochastic Iterative Learning Control // Unmanned Syst. 2018. V. 6. No. 3. P. 147–164.
16. *Saab S.S.* A Discrete-Time Stochastic Learning Control Algorithm // IEEE Trans. Autom. Control. 2001. V. 46. No. 6. P. 877–887.
17. *Saab S.S.* On a Discrete-Time Stochastic Learning Control Algorithm // IEEE Trans. Autom. Control. 2001. V. 46. No. 8. P. 1333–1336.
18. *Saab S.S.* Stochastic P-type/D-type Iterative Learning Control Algorithms // Int. J. Control. 2003. V. 76. No. 2. P. 139–148.
19. *Saab S.S.* A Stochastic Iterative Learning Control Algorithm with Application to an Induction Motor // Int. J. Control. 2004. V. 77. No. 2. P. 144–163.
20. *Saab S.S.* Optimal Selection of the Forgetting Matrix into an Iterative Learning Control Algorithm // IEEE Trans. Autom. Control. 2005. V. 50. No. 12. P. 2039–2043.
21. *Saab S.S.* Optimality of First-Order ILC among Higher Order ILC // IEEE Trans. Autom. Control. 2006. V. 51. No. 8. P. 1332–1336.
22. *Oh S-K, Lee J.M.* Stochastic Iterative Learning Control for Discrete Linear Time-Invariant System with Batch-Varying Reference Trajectories // J. Proc. Control. 2015. V. 36. P. 64–78.
23. *Pakshin P., Emelianova J., Galkowski K., Rogers E.* Iterative Learning Control Design for Discrete Stochastic Linear Systems // Proc. 2019 Eur. Control Conf. June 25–28, 2019, Napoli, Italy, 2019. P. 3776–3771.
24. *Ahn Hyo-Sung, Chen YangQuan.* Iterative Learning Control for Multi-Agent Formation // Proc. ICROS–SICE Int. Joint Conf. Fukuoka Int. Congr. Center. Japan. 2009. P. 3111–3116.
25. *Liu Qing, Bristow D.A.* An Iteration-Domain Filter for Controlling Transient Growth in Iterative Learning Control // Proc. 2010 Amer. Control Conf. Baltimore, MD. 2010. P. 2039–2044.
26. *Liu Yang, Jia Yingmin.* An Iterative Learning Approach to Formation Control of Multi-agent Systems // Syst. Control Lett. 2012. V. 61. P. 148–154.
27. *Yang Shiping, Xu Jian-Xin, Huang Deqing.* Iterative Learning Control for Multi-Agent Systems Consensus Tracking // Proc. 51st IEEE Conf. Decision Control. Maui, Hawaii. 2012. P. 4672–4677.
28. *Yang Shiping, Xu Jian-Xin, Miao Yu.* An Iterative Learning Control Approach for Synchronization of Multi-agent Systems under Iteration-varying Graph // Proc. 52nd IEEE Conf. Decision Control. Florence, Italy. 2013. P. 6682–6687.
29. *Meng Deyuan, Jia Yingmin, Du Junping, Zhang Jun.* On Iterative Learning Algorithms for the Formation Control of Nonlinear Multi-agent Systems // Automatica. 2014. V. 50. P. 291–295.
30. *Пакишин П.В., Емельянова Ю.П., Емельянов М.А.* Синтез управления с итеративным обучением мультиагентными системами на основе 2D-моделей // АиТ. 2018. № 6. С. 99–118.
Pakshin P.V., Emelianova J.P., Emelianov M.A. Iterative Learning Control Design for Multiagent Systems Based on 2D Models // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 6. P. 1040–1056.

31. *Shen D., Wang Y.* ILC for Networked Nonlinear Systems with Unknown Control Direction through Random Lossy Channel // *Syst. Control Lett.* 2015. V. 77. P. 30–39.
32. *Shen D., Wang Y.* Iterative Learning Control for Networked Stochastic Systems with Random Packet Losses // *Int. J. Control.* 2015. V. 88. No. 5. P. 959–968.
33. *Xuhui B., Zhongsheng H., Shangtai J., Ronghu C.* An Iterative Learning Control Design Approach for Networked Control Systems with Data Dropouts // *Int. J. Robust Nonlinear Control.* 2016. V. 26. No. 1. P. 91–109.
34. *Liu J., Ruan X.* Networked Iterative Learning Control Design for Discrete-Time Systems with Stochastic Communication delay in Input and Output Channels // *Int. J. Syst. Sci.* 2017. V. 48. No. 9. P. 1844–1855.
35. *Liu J., Ruan X.* Networked Iterative Learning Control Design for Nonlinear Systems with Stochastic Output Packet Dropouts // *Asian J. Control.* 2018. V. 20. No. 3. P. 1077–1087.
36. *Mesbahi M., Egerstedt M.* Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks. Princeton and Oxford: Princeton Univer. Press, 2010. 402 p.
37. *Rogers E., Galkowski K., Owens D.H.* Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes. V. 349 / *Lect. Notes Control Inform. Sci.* Berlin: Springer-Verlag, 2007.
38. *Goldsmith P.B.* On the Equivalence of Causal LTI Iterative Learning Control and Feedback Control // *Automatica.* 2002. V. 38. No. 4. P. 703–708.
39. *Goldsmith P.B.* Author’s reply to “On the Equivalence of Causal LTI Iterative Learning Control and Feedback Control” // *Automatica.* 2004. V. 40. No. 5. P. 899–900.
40. *Owens D.H., Rogers E.* Comments on “On the Equivalence of Causal LTI Iterative Learning Control and Feedback Control” // *Automatica.* 2004. V. 40. No. 5. P. 895–898.
41. *Apkarian J., Karam P., Levis M.* Workbook on Flexible Link Experiment for Matlab/Simulink Users. Quanser, 2011.

Статъя представена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 20.06.2019

После доработки 12.08.2019

Принята к публикации 26.09.2019

© 2020 г. Е.Я. РУБИНОВИЧ, д-р техн. наук (rubinvch@ipu.rssi.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

О ПРОГРАММНОСТИ ТРАЕКТОРНОГО УПРАВЛЕНИЯ НАБЛЮДЕНИЯМИ ЗА ПОДВИЖНОЙ ЦЕЛЬЮ¹

В непрерывном времени рассматривается гауссовская линейно-квадратичная задача управления по неполным данным стохастическим объектом (целью) со стороны подвижного наблюдателя с нелинейной динамикой. Специфика постановки состоит в том, что уравнение стохастической динамики объекта наблюдения и собственно уравнения наблюдений зависят от вектора текущего состояния наблюдателя. Цель управления наблюдателем — выбор рациональной траектории его движения в смысле минимизации математического ожидания некоторого платежного функционала (платы). В подобного рода задачах оптимальное управление наблюдениями (в рассматриваемом случае — траекторией наблюдателя) обычно ищут в классе программных управлений, т.е. как функцию времени и начальных условий. Возникает естественный вопрос: что даст расширение класса программных управлений наблюдателем до класса позиционных, т.е. до класса управлений, зависящих не только от времени и начальных условий, но и от реализаций наблюдений и траектории наблюдателя к данному моменту времени. Рассматриваются два содержательных частных случая общей постановки задачи, при которых подобное расширение не улучшает качества управления. Приводятся примеры и доказательство теоремы.

Ключевые слова: гауссовская линейно-квадратичная задача управления по неполным данным, подвижный наблюдатель, управление наблюдениями.

DOI: 10.31857/S0005231020030095

1. Введение

Под управлением наблюдениями понимается управление процессом сбора информации. Как правило, получаемая информация извлекается из показаний разного рода датчиков, сенсоров, приемных устройств и каналов связи. Эти данные кроме полезного сигнала почти всегда содержат и шумовые составляющие, т.е. разного рода помехи. Выделение полезных сигналов из зашумленных называется фильтрацией, а оптимизация этого процесса — оптимальной фильтрацией. Для лучшей работы оптимальных фильтров, т.е. для более точного оценивания полезного сигнала или его функций, и применяют управление наблюдениями. Кроме того, собственно наблюдения могут иметь некоторую стоимость, связанную, например, с расходом энергоресурса. Оптимизация процесса наблюдения дает возможность, с одной стороны, собрать

¹ Опубликовать данные результаты в непрерывном времени автору рекомендовал Р.Ш. Липцер.

более “качественную” информацию, т.е. получить для последующей обработки более информативные данные, а с другой стороны — минимизировать стоимость наблюдений. Первые публикации по управлению наблюдениями появились в конце 60-х гг. XX в. [1–6]. Управление дискретно-непрерывными наблюдениями за процессами диффузионного типа впервые рассмотрено в [7], где была, в частности, показана возможность применения принципа максимума Л.С. Понтрягина в таких задачах и исследована его достаточность.

В [8] предложен метод решения задачи управления наблюдениями с обобщенными управлениями, позволяющий преобразовать такую задачу к задаче оптимизации с обычными ограниченными управлениями. Подобная ситуация может возникать, если точностные характеристики наблюдаемого процесса зависят от управлений и координат управляемого процесса, как, например, в задачах с подвижным наблюдателем [9].

Еще одно направление в управлении наблюдениями связано с задачами планирования эксперимента. Так, в [10] изучаются оптимальные стратегии размещения приемников и синхронизации движения для мобильных сенсорных сетей в приложении к задачам отслеживания целей с помощью датчиков дальности. Исследуются определители информационной матрицы Фишера в 2D и 3D случаях. Предлагаются алгоритмы координации движения, которые формируют сеть мобильных датчиков.

Численное моделирование иллюстрирует, как предлагаемые алгоритмы приводят к улучшению производительности расширенного фильтра Калмана в сценарии отслеживания целей.

Доступное для инженеров изложение теории управления наблюдениями с обширной библиографией представлено, например, в [11, 12].

Отличие рассматриваемой гауссовской линейно-квадратичной задачи (Linear Quadratic Gaussian — LQG problem) управления по неполным данным стохастическим объектом от классической постановки состоит в том, что уравнение стохастической динамики объекта наблюдения (ОН) и собственно уравнения наблюдений зависят от вектора текущего состояния подвижного наблюдателя.

Цель управления наблюдателем — выбор рациональной траектории его движения в смысле минимизации математического ожидания некоторого платежного функционала (платы).

В качестве платежного функционала рассматривается интегрально-терминальный функционал типа Больца с квадратичным интеграндом по управлению и фазовым координатам ОН и аддитивной терминальной частью, зависящей от точности оценки вектора состояния ОН, а также от состояний наблюдателя и ОН в заданный терминальный момент T .

В момент T допускается выполнение некоторых гладких терминальных условий, функционально связывающих состояние наблюдателя и точность оценивания вектора состояния ОН.

Традиционно оптимальное управление наблюдениями ищут как функцию времени и начальных условий, т.е. в классе программных управлений [1–6, 11, 12]. При этом вопрос о целесообразности расширения этого класса

до класса позиционных управлений, зависящих от вектора текущего состояния ОН, остается открытым.

В статье исследуются два содержательных частных случая общей постановки задачи в непрерывном времени, при которых расширение класса программных управлений наблюдателем до класса позиционных не улучшает качества управления. Приводятся примеры и доказательство соответствующих теорем. В дискретном времени подобная постановка исследовалась в [9].

Статью предлагается рассматривать как дополнительный параграф к [11], поскольку рассмотрению вопроса программности управления наблюдениями в [11] посвящено несколько разделов. В частности, в [11] доказана программность управления составом измерений в классических LQG задачах как в дискретном, так и в непрерывном времени. Наиболее полная, известная автору, постановка подобной задачи в дискретно-непрерывном времени анонсирована в [14], однако приводимые там формулировки и доказательства рассчитаны больше на специалистов-математиков, а не на инженеров.

Актуальность и практическая значимость траекторного управления наблюдениями продемонстрирована, например, в [15, 16], где показано, что за счет выбора рациональных траекторий движения беспилотных летательных аппаратов или автономных необитаемых подводных аппаратов ошибка оценки элементов движения цели (ЭДЦ) может быть уменьшена на порядок. Физически такое значительное улучшение точности оценок ЭДЦ связано с проблемой наблюдаемости цели [17]. Оказывается, что за счет “правильного” маневра наблюдателя можно резко улучшить наблюдаемость мобильной или стационарной цели.

2. Постановка задачи

Пусть эволюция вектора состояния управляемого объекта наблюдения описывается стохастическим дифференциальным уравнением в форме Ито [11, 13]

$$(2.1) \quad d\theta_t = [a_0(t, x_t)v_t + a_1(t, x_t)\theta_t]dt + b(t, x_t)dw_1(t).$$

Наблюдению доступен вектор ξ_t , допускающий стохастический дифференциал

$$(2.2) \quad d\xi_t = [A_0(t, x_t) + A_1(t, x_t)\theta_t]dt + B(t, x_t)dw_2(t), \quad \xi_0 = 0,$$

а вектор x_t состояния наблюдателя подчинен уравнению

$$(2.3) \quad \dot{x}_t = f(t, x_t, u_t).$$

Здесь и далее $t \in [0, T]$, T и x_0 заданы, а каждый из векторов θ_t , v_t , u_t , ξ_t , x_t , $w_1(t)$, $w_2(t)$ имеет произвольный конечный размер. Размеры матриц-коэффициентов в (2.1) и (2.2) соответствуют данным векторам. Входящие в (2.1) и (2.2) независимые стандартные винеровские процессы $w_1(t)$ и $w_2(t)$ не зависят от гауссовского вектора θ_0 с заданными $\mathbf{E}\theta_0 = m_0$ и $\text{cov}(\theta_0, \theta_0) = \gamma_0$,

где $\mathbf{E}$ — символ математического ожидания. Управление u_t наблюдателя стеснено ограничением

$$(2.4) \quad u_t \in U \subset \mathbf{R}^r,$$

где U — некоторый r -мерный компакт. Предполагается, что функция $f(\cdot)$ непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по x_t и u_t . Требуется так выбрать управление $v_t = v(t, x_0^t, \xi_0^t)$ объектом и управление $u_t = u(t, x_0^t, \xi_0^t)$ наблюдателем, чтобы минимизировать критерий (плату)

$$(2.5) \quad J = \mathbf{E} \left\{ g_{1T}(\theta_T, x_T, \gamma_T) + \int_0^T g_t(\theta_t, v_t) dt \right\},$$

где

$$\begin{aligned} g_{1T}(\theta_T, x_T, \gamma_T) &= G(T, x_T, \gamma_T) + \theta_T^* h \theta_T, \\ g_t(\theta_t, v_t) &= \theta_t^* H(t) \theta_t + v_t^* R(t) v_t. \end{aligned}$$

Здесь $*$ — символ транспонирования. Заданные матрица h и борелевские по t матричные функции $H(t)$ и $R(t)$ предполагаются симметрическими и неотрицательно определенными соответствующих размеров, причем элементы матрицы $R^{-1}(t)$ равномерно ограничены. В момент T допустимо выполнение терминального условия

$$(2.6) \quad \Phi(T, x_T, \gamma_T) = 0,$$

где

$$\gamma_T = \mathbf{E} \{ [\theta_T - \mathbf{E}(\theta_T/x_0^T, \xi_0^T)] [\theta_T - \mathbf{E}(\theta_T/x_0^T, \xi_0^T)]^* / x_0^T, \xi_0^T \}.$$

Здесь через $\mathbf{E}(\cdot/x_0^T, \xi_0^T)$ обозначено условное математическое ожидание при условии $\mathcal{F}_T^{x\xi}$, где $\mathcal{F}_T^{x\xi} = \sigma\{\omega : x_s, \xi_s, s \leq T\}$ — σ -алгебра, порожденная траекториями $x_0^T = \{x_s, s \leq T\}$ и $\xi_0^T = \{\xi_s, s \leq T\}$. Функции $G(\cdot)$ и $\Phi(\cdot)$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми по совокупности аргументов. Запись $v(t, x_0^t, \xi_0^t)$ и $u(t, x_0^t, \xi_0^t)$ свидетельствует о том, что компоненты управлений являются функционалами времени t , реализации наблюдений $\xi_0^t = \{\xi_s, s \leq t\}$ и реализовавшейся траектории наблюдателя $x_0^t = \{x_s, s \leq t\}$.

3. Вспомогательные предложения

Решению задачи предположим вспомогательные предложения, доказательства которых можно найти в [13].

1°. Пусть $S(t, x_t)$ — любая из матриц-коэффициентов в (2.1), (2.2), тогда достаточными условиями для существования

$$m_t = \mathbf{E}(\theta_t/x_0^t, \xi_0^t), \quad \gamma_t = \mathbf{E}\{(\theta_t - m_t)(\theta_t - m_t)^*/x_0^t, \xi_0^t\}$$

будут поэлементное выполнение неравенства

$$(3.1) \quad \mathbf{E}[S(t, x_t)S^*(t, x_t)] < \infty$$

и требование равномерной по t ограниченности матриц $S(t, x_t)$, т.е. поэлементно

$$(3.2) \quad |S_{ij}(t, x_t)| < \text{const},$$

где x_t — любое из множества t -достижимости траектории x_0^t .

Определение. $\mathcal{F}_t^{x\xi}$ -измеримые функционалы $v(t, x_0^t, \xi_0^t)$ и $u(t, x_0^t, \xi_0^t)$ будем называть допустимыми управлениями, если $u(t, x_0^t, \xi_0^t)$ удовлетворяет ограничению (2.4), компоненты $v_j(\cdot)$ вектора $v(t, x_0^t, \xi_0^t)$ удовлетворяют неравенству

$$\mathbf{E} \int_0^T \sum_j [v_j(t, x_0^t, \xi_0^t)]^4 dt < \infty$$

и подстановка $v(t, x_0^t, \xi_0^t)$ и $u(t, x_0^t, \xi_0^t)$ в (2.1), (2.2) не нарушает условий (3.1), (3.2).

В дальнейшем будем рассматривать только допустимые управления.

2°. Имеет место следующее равенство условных математических ожиданий

$$(3.3) \quad \mathbf{E}(\cdot/x_0^t, \xi_0^t) = \mathbf{E}(\cdot/x_t, \xi_0^t) = \mathbf{E}(\cdot/\xi_0^t).$$

Равенство (3.3) следует из измеримости при любом t случайной величины x_t относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_t^{x\xi}$, другими словами $\mathcal{F}_t^{x\xi} = \mathcal{F}_t^\xi$.

3°. Поскольку управления $v(t, x_0^t, \xi_0^t)$ и $u(t, x_0^t, \xi_0^t)$ являются $\mathcal{F}_t^{x\xi}$ -измеримыми функционалами, то система (2.1), (2.2) находится в рамках условно-гауссовской схемы [11, 13], а именно: условные распределения вероятностей

$$(3.4) \quad \begin{aligned} P(\theta_t \leq \alpha, \xi_t \leq \beta, x_t \leq \delta/x_0^t, \xi_0^t) &= P(\cdot/\xi_0^t), \\ P(\theta_t \leq \alpha/x_0^t, \xi_0^t) &= P(\theta_t \leq \alpha/\xi_0^t) \end{aligned}$$

являются гауссовскими, причем параметры

$$m_t = \mathbf{E}(\theta_t/\xi_0^t), \quad \gamma_t = \mathbf{E}\{(\theta_t - m_t)(\theta_t - m_t)^*/\xi_0^t\}$$

распределения (3.4) подчинены стохастическим дифференциальным уравнениям условно-гауссовской фильтрации [11, 13] (здесь и далее аргументы в матричных коэффициентах опущены)

$$(3.5) \quad dm_t = [a_0 v_t + a_1 m_t]dt + \gamma_t A_1^* [BB^*]^{-1} [d\xi_t - (A_0 + A_1 m_t)dt],$$

$$(3.6) \quad \dot{\gamma}_t = a_1 \gamma_t + \gamma_t a_1^* + b b^* - \gamma_t A_1^* [BB^*]^{-1} A_1 \gamma_t,$$

где $m_0 = \mathbf{E}\theta_0$, $\gamma_0 = \text{cov}(\theta_0, \theta_0)$ — заданы.

4°. Следствием п. 3° является выполнение равенства

$$\mathbf{E} \left\{ g_t(\theta_t, \xi_t, x_t, v(t, x_0^t, \xi_0^t), u(t, x_0^t, \xi_0^t)) / \xi_0^t \right\} = \bar{g}_t(m_t, \gamma_t, \xi_t, v_t, u_t),$$

где $g_t(\cdot)$ и $\bar{g}_t(\cdot)$ — борелевские функции по совокупности переменных.

5°. В предположении п. 1°, случайный процесс

$$(3.7) \quad \bar{w}_t = \int_0^t B^{-1} [d\xi_s - (A_0 + A_1 m_s) ds]$$

— винеровский. В связи с этим процессы ξ_t и m_t допускают представление

$$(3.8) \quad d\xi_t = [A_0 + A_1 m_t] dt + B d\bar{w}_t,$$

$$(3.9) \quad dm_t = [a_0 v_t + a_1 m_t] dt + \gamma_t A_1^* [B^*]^{-1} d\bar{w}_t.$$

4. Основные результаты

Как и в дискретном времени, рассмотрим два случая [9].

Случай I. Коэффициенты a_0 и a_1 в уравнении (2.1) не зависят от x_t , т.е.

$$(4.1) \quad d\theta_t = [a_0(t)v_t + a_1(t)\theta_t]dt + b(t, x_t)dw_1(t).$$

Случай II. В уравнении (2.1) отсутствует управление v_t , т.е.

$$(4.2) \quad d\theta_t = [a_0(t, x_t) + a_1(t, x_t)\theta_t]dt + b(t, x_t)dw_1(t),$$

а критерий (2.5) имеет терминальный вид

$$(4.3) \quad J = \mathbf{E}G(T, x_T, \gamma_T).$$

Решение задачи в случае I. Воспользовавшись свойством условных математических ожиданий [11, 13], перепишем критерий (2.5) в виде

$$\begin{aligned} J &= \mathbf{E} \left\{ \mathbf{E}[G(T, x_T, \gamma_T) + \theta_T^* h \theta_T / \xi_0^t] \right\} + \mathbf{E} \int_0^T \left\{ \mathbf{E}[\theta_t^* H(t) \theta_t / \xi_0^t] + v_t^* R(t) v_t \right\} dt = \\ &= \mathbf{E} \left\{ G(T, x_T, \gamma_T) + m_T^* h m_T + \text{tr } h^{1/2} \gamma_T h^{1/2} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T [m_t^* H(t) m_t + \text{tr } H^{1/2}(t) \gamma_t H^{1/2}(t) + v_t^* R(t) v_t] dt \right\} \end{aligned}$$

(здесь $\mathbf{tr}$ — оператор следа матрицы) или

$$(4.4) \quad J = \mathbf{E} \left\{ \bar{g}_{1T}(m_T, \gamma_T, x_T) + \int_0^T \bar{g}_t(m_t, \gamma_t, v_t) dt \right\},$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \bar{g}_{1T}(m_T, \gamma_T, x_T) &= G(T, x_T, \gamma_T) + m_T^* h m_T + \mathbf{tr} h^{1/2} \gamma_T h^{1/2}, \\ \bar{g}_t(m_t, \gamma_t, v_t) &= m_t^* H(t) m_t + \mathbf{tr} H^{1/2}(t) \gamma_t H^{1/2}(t) + v_t^* R(t) v_t. \end{aligned}$$

Задачу минимизации критерия (4.4) разобьем на два этапа. На первом этапе проведем минимизацию критерия (4.4) по управлению $v_t = v(t, x_0^t, \xi_0^t)$ объекта при произвольном программном управлении $u_t = u(t)$ наблюдателя. На втором этапе покажем, что оптимальное управление наблюдателем, по сути, программно, т.е. расширение класса управлений наблюдателем до класса функционалов $u(t, x_0^t, \xi_0^t)$ не улучшает качества управления. Далее сформулируем задачу оптимального управления, из решения которой находится управление наблюдателем.

Итак, начнем с первого этапа. Зафиксируем произвольное программное управление $\hat{u}_t = \hat{u}(t)$ наблюдателем. При этом траектория x_0^t наблюдателя будет также программной, т.е. матричные коэффициенты в уравнениях (4.1) и (2.3) будут детерминированными. Условная ковариация γ_t (см. (3.6)) тоже будет детерминированной функцией времени. Критерий (4.4), рассматриваемый как функционал $J(u, v)$ от управлений, при фиксированном программном управлении $\hat{u}_t = \hat{u}(t)$ превращается в функционал

$$(4.5) \quad J(\hat{u}, v) = \hat{J}(v).$$

Решение задачи минимизации критерия (4.5) известно [11, 13] и имеет вид

$$(4.6) \quad \tilde{v}(t, \xi_0^t) = -L(t) \tilde{m}_t,$$

где

$$L(t) = R^{-1} a_0^*(t) q(t).$$

Знак тильда над m_t в (4.6) означает, что условное математическое ожидание m_t вычисляется при воздействии управления (4.6), т.е. $\tilde{m}_t$ удовлетворяет уравнению (см. (3.7)–(3.9))

$$(4.7) \quad d\tilde{m}_t = [a_1(t) - a_0(t)L(t)]\tilde{m}_t dt + \gamma_t A_1^* [B^*]^{-1} d\tilde{w}_t,$$

где

$$(4.8) \quad \tilde{w}_t = \int_0^t B^{-1} [d\tilde{\xi}_s - (A_0 + A_1 \tilde{m}_s)] ds,$$

$$(4.9) \quad d\tilde{\xi}_t = [A_0 + A_1 \tilde{m}_t]dt + Bd\tilde{w}_t.$$

Здесь $\tilde{\xi}_t$ — отвечающий управлению (4.6) процесс наблюдений. Симметрическая, неотрицательно определенная матрица $q(t)$ в (4.6) удовлетворяет уравнению Риккати

$$(4.10) \quad -\dot{q}(t) = a_1^*(t)q(t) + q(t)a_1(t) + H(t)v - q(t)a_0(t)R^{-1}(t)a_0^*(t)q(t), \quad q(T) = h.$$

Приведем доказательство этого результата. Для задачи с фиксированным $\hat{u}_t = \hat{u}(t)$ определим функцию Беллмана $V_t(m)$. Уравнение Беллмана для $V_t(m)$ имеет вид

$$(4.11) \quad \min_{v_t} \{ \mathcal{L}^v V_t(m) + \bar{g}_t(m, \gamma_t, v_t) \} = 0$$

с граничным условием

$$(4.12) \quad V_T(m) = \bar{g}_{1T}(m, \gamma_T, x_T),$$

где оператор

$$\mathcal{L}^v = \frac{\partial}{\partial t} + [a_0 v_t + a_1 m]^* \frac{\partial}{\partial m} + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \gamma_t A_1^* [BB^*]^{-1} A_1 \gamma_t \frac{\partial^2}{\partial m^2} \right\}.$$

Решение уравнений (4.11), (4.12) будем искать в виде

$$(4.13) \quad V_t(m) = m^* q(t) m + Q_t,$$

где $q(t)$ — симметрическая, неотрицательно определенная матрица, непрерывная и дифференцируемая по t . Функция Q_t также непрерывная и дифференцируемая по t .

Подстановка (4.13) в (4.11) дает (аргумент t в $q(t)$ опущен)

$$\begin{aligned} \min_{v_t} \left\{ m^* \dot{q} m + \frac{\partial Q_t}{\partial t} + [a_0 v_t + a_1 m]^* q m + m^* q [a_0 v_t + a_1 m] + \right. \\ \left. + \text{tr} \gamma_t A_1^* [BB^*]^{-1} A_1 \gamma_t q + m^* H(t) m + \text{tr} H^{1/2}(t) \gamma_t H^{1/2}(t) + v_t^* R(t) v_t \right\} = 0 \end{aligned}$$

или, группируя члены, получаем

$$\begin{aligned} m^* [\dot{q} + a_1^* q + q a_1 + H] m + \frac{\partial Q_t}{\partial t} + \text{tr} \left\{ \gamma_t A_1^* [BB^*]^{-1} A_1 \gamma_t q + H^{1/2} \gamma_t H^{1/2} \right\} + \\ (4.14) \quad + \min_{v_t} \{ v_t^* a_0^* q m + m^* q a_0 v_t + v_t^* R v_t \} = 0. \end{aligned}$$

В (4.14) минимум квадратичной по v_t формы достигается при

$$(4.15) \quad \tilde{v}_t = -L(t)m,$$

где обозначено

$$(4.16) \quad L(t) = R^{-1}(t)a_0^*(t)q(t).$$

Подставляя (4.15), (4.16) в (4.14), находим

$$m^*[\dot{q} + a_1^*q + qa_1 + H]m + \frac{\partial Q_t}{\partial t} + \mathbf{tr}\left\{\gamma_t A_1^*[BB^*]^{-1}A_1\gamma_t q + H^{1/2}\gamma_t H^{1/2}\right\} - \\ - 2m^*qa_0[R^{-1}]^*a_0^*qm + m^*qa_0[R^{-1}]^*RR^{-1}a_0^*qm$$

или (в силу $[R^{-1}]^* = R^{-1}$)

$$(4.17) \quad m^*[\dot{q} + a_1^*q + qa_1 + H - qa_0R^{-1}a_0^*q]m + \frac{\partial Q_t}{\partial t} + \\ + \mathbf{tr}\left\{\gamma_t A_1^*[BB^*]^{-1}A_1\gamma_t q + H^{1/2}\gamma_t H^{1/2}\right\} = 0.$$

Для обеспечения равенства (4.17) и граничного условия (4.12) выберем $q(t)$ и Q_t следующим образом. Потребуем, чтобы $q(t)$ удовлетворяло уравнению (4.10), а Q_t равнялось

$$(4.18) \quad Q_t = G(T, x_T, \gamma_T) + \mathbf{tr} h^{1/2}\gamma_T h^{1/2} + \\ + \int_t^T \mathbf{tr}\left\{H^{1/2}(s)\gamma_s H^{1/2}(s) + \gamma_s A_1^*[BB^*]^{-1}A_1\gamma_s q(s)\right\} ds.$$

Подставляя теперь управление $\tilde{v}_t$ из (4.15) в уравнения (3.7)–(3.9), отмечая знаком $\sim$ (тильда) переменные, отвечающие закону управления (4.15), получим уравнения (4.7)–(4.9). Для доказательства оптимальности управления $\tilde{v}_t$ вычислим $\mathbf{E}V_0(m_0)$. Для этого продифференцируем по Ито функцию

$$(4.19) \quad V_t(\tilde{m}_t) = \tilde{m}_t^* q(t) \tilde{m}_t + Q_t$$

в силу системы (4.7). Получаем

$$V_T(\tilde{m}_T) = V_0(m_0) + \int_0^T \frac{\partial V_t}{\partial t} dt + \int_0^T \frac{\partial V_t}{\partial m_t} d\tilde{m}_t + \\ + \frac{1}{2} \int_0^T \mathbf{tr} \left\{ [\gamma_t A_1^*[BB^*]^{-1}A_1\gamma_t] \frac{\partial^2 V_t}{\partial m_t^2} \right\} dt.$$

Беря в последнем выражении математическое ожидание от обеих частей, находим

$$(4.20) \quad \mathbf{E}V_0(m_0) = \mathbf{E} \left\{ V_T(\tilde{m}_T) - \int_0^T \mathcal{L}^{\tilde{v}} V_t(\tilde{m}_t) dt \right\},$$

где

$$\mathcal{L}^{\tilde{v}} = \frac{\partial}{\partial t} + 2[(a_1(t) - a_0(t)L(t))\tilde{m}_t]^* \frac{\partial}{\partial m_t} + \frac{1}{2} \mathbf{tr} \left\{ [\gamma_t A_1^*[BB^*]^{-1}A_1\gamma_t] \frac{\partial^2}{\partial m_t^2} \right\}.$$

Далее, согласно (4.11)

$$(4.21) \quad \mathcal{L}^{\tilde{v}} V_t(\tilde{m}_t) + \bar{g}_t(\tilde{m}_t, \gamma_t, \tilde{v}_t) = 0,$$

т.е.

$$-\mathcal{L}^{\tilde{v}} V_t(\tilde{m}_t) = \tilde{m}_t^* H(t) \tilde{m}_t + \mathbf{tr} H^{1/2} \gamma_t H^{1/2} + \tilde{v}_t^* R(t) \tilde{v}_t.$$

Заметим попутно, что в равенстве (4.21) можно убедиться и непосредственно, вычисляя $\mathcal{L}^{\tilde{v}} V_t(\tilde{m}_t)$, где $V_t(\tilde{m}_t)$ из (4.19). Следовательно (4.20) запишется в виде

$$\mathbf{E} V_0(m_0) = \mathbf{E} \left\{ V_T(\tilde{m}_T) + \int_0^T [\tilde{m}_t^* H(t) \tilde{m}_t + \mathbf{tr} H^{1/2}(t) \gamma_t H^{1/2}(t) + \tilde{v}_t^* R(t) \tilde{v}_t] dt \right\},$$

где

$$V_T(\tilde{m}_T) = \bar{g}_{1T}(\tilde{m}_T, \gamma_T, x_T) = G(T, x_T, \gamma_T) + \tilde{m}_T^* h \tilde{m}_T + \mathbf{tr} h^{1/2} \gamma_T h^{1/2}.$$

Итак, получили, что

$$(4.22) \quad \mathbf{E} V_0(m_0) = \mathbf{E} \left\{ \bar{g}_{1T}(\tilde{m}_T, \gamma_T, x_T) + \int_0^T \bar{g}_t(\tilde{m}_t, \gamma_t, x_t) dx_t \right\} = J(\hat{u}(t), \tilde{v}_t).$$

Покажем, что если при фиксированном $\hat{u}_t = \hat{u}(t)$ взять произвольное допустимое управление $v_t = v(t, \xi_0^t)$, то значение платежного функционала (критерия) будет не меньше $J(\hat{u}(t), \tilde{v}_t)$, т.е. что

$$J(\hat{u}(t), \tilde{v}_t) \leq J(\hat{u}(t), v(t, \xi_0^t))$$

или

$$\hat{J}(\tilde{v}_t) \leq \hat{J}(v(t, \xi_0^t)).$$

Действительно, при произвольном $v_t = v(t, \xi_0^t)$ согласно (4.11) имеем

$$(4.23) \quad \mathcal{L}^v V_t(m_t) + \bar{g}_t(m_t, \gamma_t, v_t) \geq 0,$$

где m_t удовлетворяет уравнениям (3.9) и (3.5), $v_t = v(t, \xi_0^t)$. Применение формулы Ито к функции $V_t(m_t)$ в силу (3.9) дает

$$\begin{aligned} V_T(m_T) &= V_0(m_0) + \int_0^T \frac{\partial V_t}{\partial t} dt + \int_0^T \frac{\partial V_t}{\partial m_t} dm_t + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \mathbf{tr} \left\{ [\gamma_t A_1^* [B B^*]^{-1} A_1 \gamma_t] \frac{\partial^2 V_t}{\partial m_t^2} \right\} dt. \end{aligned}$$

Беря математическое ожидание от обеих частей последнего равенства, с учетом (4.23) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} V_0(m_0) &= \mathbf{E} \left\{ V_T(m_T) - \int_0^T \mathcal{L}^v V_t(m_t) dt \right\} \leq \\ &\leq \mathbf{E} \left\{ V_T(m_T) + \int_0^T \bar{g}_t(m_t, \gamma_t, v_t) dt \right\} = \\ &= J(\hat{u}(t), v(t, \xi_0^T)) = \hat{J}(v(t, \xi_0^t)), \end{aligned}$$

но в силу (4.22) $\mathbf{E} V_0(m_0) = J(\hat{u}(t), \tilde{v}_t)$, значит,

$$J(\hat{u}(t), \tilde{v}_t) \leq J(\hat{u}(t), v(t, \xi_0^t)),$$

что и завершает доказательство.

Итак, при программном управлении $u_t = u(t)$ управление $\tilde{v}_t$ объектом оптимально. Пусть теперь $\hat{u}_t = \hat{u}(t)$ — оптимальное программное управление наблюдениями, отвечающее управлению $\tilde{v}_t$ объекта. Далее покажем, что всегда справедливо неравенство

$$(4.24) \quad J(\tilde{u}(t), \tilde{v}_t) \leq J(u(t, \xi_0^t, x_0^t), v(t, \xi_0^t, x_0^t)).$$

Для этого прежде всего заметим, что согласно (4.22)

$$\begin{aligned} J(u(t), \tilde{v}_t) &= \mathbf{E} V_0(m_0) = \mathbf{E} \{ m_0^* q(0) m_0 + Q_0 \} = \\ (4.25) \quad &= \mathbf{E} \left\{ m_0^* q(0) m_0 + G(T, x_T, \gamma_T) + \mathbf{tr} h^{1/2} \gamma_T h^{1/2} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \mathbf{tr} [H^{1/2}(s) \gamma_s H^{1/2}(s) + \gamma_s A_1^* [BB^*]^{-1} A_1 \gamma_s q(s)] ds \right\}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим вспомогательную задачу минимизации критерия

$$\begin{aligned} (4.26) \quad I(u(t)) &= m_0^* q(0) m_0 + G(T, x_T, \gamma_T) + \mathbf{tr} h^{1/2} \gamma_T h^{1/2} + \\ &+ \int_0^T \mathbf{tr} [H^{1/2}(s) \gamma_s H^{1/2}(s) + \gamma_s A_1^* [BB^*]^{-1} A_1 \gamma_s q(s)] ds \end{aligned}$$

при связях (2.3), (3.6) и ограничениях (2.4), (2.6). Критерий (4.26) отличается от (4.25) отсутствием знака математического ожидания. Имеет место теорема.

Теорема. Если среди допустимых управлений $u(t, \xi_0^t, x_0^t)$ существует детерминированное $\tilde{u}(t)$, удовлетворяющее неравенству

$$I(\tilde{u}(t)) \leq I(u(t, \xi_0^t, x_0^t)),$$

то неравенство (4.24) оказывается справедливым, причем $\tilde{u}(t) = \hat{u}(t)$.

Доказательство. Зафиксируем некоторые допустимые произвольные управления $u(t, \xi_0^t, x_0^t)$ и $v(t, \xi_0^t, x_0^t)$ и пусть $\xi = (\xi_0^t)_{t \geq 0}$ и $x = (x_0^t)_{t \geq 0}$ — отвечающие этим управлениям наблюдения и траектория наблюдателя. При фиксированных функциональных зависимостях $u(t, \xi_0^t, x_0^t)$ и $v(t, \xi_0^t, x_0^t)$ определим функционал $I(u(t, \xi_0^t, x_0^t))$ по формуле (4.26), где γ_t — решение уравнения (3.6), в котором коэффициенты b, B и A_1 зависят как от t , так и от x_t , отвечающее, в свою очередь, управлению $u(t, \xi_0^t, x_0^t)$, т.е. $\gamma_t = \gamma(t, \xi_0^t)$. В силу предположения теоремы

$$I(\tilde{u}(t)) \leq I(u(t, \xi_0^t, x_0^t)),$$

поэтому

$$\mathbf{E}I(\tilde{u}(t)) = I(\tilde{u}(t)) \leq \mathbf{E}I(u(t, \xi_0^t, x_0^t)).$$

Но согласно (4.25) в силу детерминированности $\tilde{u}(t)$

$$J(\tilde{u}(t), \tilde{v}_t) = I(\tilde{u}(t)) = \mathbf{E}I(\tilde{u}(t)).$$

Значит, для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$(4.27) \quad \mathbf{E}I(u(t, \xi_0^t, x_0^t)) \leq J(u(t, \xi_0^t, x_0^t), v(t, \xi_0^t, x_0^t)).$$

С этой целью рассмотрим функцию Беллмана $V_t(m, \xi_0^T, x_0^T)$. Уравнение Беллмана будет аналогично (4.11), с той лишь разницей, что γ_t и v_t в (4.11), (4.12) будут функционалами от ξ_0^t и x_0^t , т.е. $\gamma_t = \gamma(t, \xi_0^t, x_0^t)$, $v_t = v(t, \xi_0^t, x_0^t)$. При этом в силу зависимости $u_t = u(t, \xi_0^t, x_0^t)$ коэффициенты b, B и A_1 также оказываются функционалами от ξ_0^t и x_0^t . Уравнение Беллмана имеет вид

$$(4.28) \quad \min_v \{ \mathcal{L}^v V_t(m, \xi_0^T, x_0^T) + \bar{g}(m, \gamma(t, \xi_0^t, x_0^t), v(t, \xi_0^t, x_0^t)) \} = 0.$$

Решение уравнения (4.28) будем искать в виде

$$V_t(m, \xi_0^T, x_0^T) = m^* q(t) m + Q_t(\xi_0^T, x_0^T),$$

где $q(t)$ удовлетворяет (4.10), а $Q_t(\xi_0^T, x_0^T)$ удовлетворяет (4.18) при $\gamma_t = \gamma(t, \xi_0^t, x_0^t)$. Минимум в (4.28) достигается на управлении (4.15), а именно: $\tilde{v}_t = -L(t)m$. Теперь продифференцируем по Ито функцию $V_t(m_t, \xi_0^T, x_0^T)$ в силу системы (3.9), где m_t отвечает некоторым управлениям $u(t, \xi_0^t, x_0^t)$ и $v(t, \xi_0^t, x_0^t)$. Получаем

$$(4.29) \quad \mathbf{E}V_0(m_0, \xi_0^T, x_0^T) = \mathbf{E} \left\{ V_T(m_T, \xi_0^T, x_0^T) - \int_0^T \mathcal{L}^v V_t(m_t, \xi_0^T, x_0^T) dt \right\}.$$

Если $v(t, \xi_0^t, x_0^t) \neq -L(t)m$, то согласно (4.28)

$$(4.30) \quad \mathcal{L}^v V_t(m, \xi_0^T, x_0^T) + \bar{g}_t(m, \gamma(t, \xi_0^t, x_0^t), v(t, \xi_0^t, x_0^t)) \geq 0.$$

В частности, (4.30) верно и для $m = m_t$, отвечающему $u(t, \xi_0^t, x_0^t)$ и $v(t, \xi_0^t, x_0^t)$. Значит, из (4.29) и (4.30) вытекает, что

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{E}V_0(m_0, \xi_0^T, x_0^T) \leq \\
 (4.31) \quad & \leq \mathbf{E} \left\{ V_T(m_T, \xi_0^T, x_0^T) + \int_0^T \bar{g}_t(m_t, \gamma(t, \xi_0^t, x_0^t), v(t, \xi_0^t, x_0^t)) dt \right\} = \\
 & = \mathbf{E} \left\{ \bar{g}_{1T}(m_T, \gamma(T, \xi_0^T, x_0^T), x(T, \xi_0^T, x_0^T)) + \int_0^T \bar{g}_t(m_t, \gamma(t, \xi_0^t, x_0^t), v(t, \xi_0^t, x_0^t)) dt \right\}.
 \end{aligned}$$

Но в неравенстве (4.31) левая часть равна

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{E}V_0(m_0, \xi_0^T, x_0^T) = \mathbf{E}\{m_0^*q(0)m_0 + Q_0(\xi_0^T, x_0^T)\} = \\
 & = \mathbf{E} \left\{ m_0^*q(0)m_0 + G(T, x(T, \xi_0^T, x_0^T), \gamma(T, \xi_0^T, x_0^T)) + \mathbf{tr} h^{1/2} \gamma(T, \xi_0^T, x_0^T) h^{1/2} + \right. \\
 & \quad \left. + \int_0^T \mathbf{tr} [H^{1/2} \gamma_s H^{1/2} + \gamma_s A_1^* [BB^*]^{-1} A_1 \gamma_s q(s)] ds \right\} = \mathbf{E}I(u(t, \xi_0^t, x_0^t)),
 \end{aligned}$$

где $\gamma_s = \gamma(s, \xi_0^s, x_0^s)$. В свою очередь правая часть в (4.31) равна $J(u(t, \xi_0^t, x_0^t), v(t, \xi_0^t, x_0^t))$. Итак, имеет место неравенство

$$\mathbf{E}I(u(t, \xi_0^t, x_0^t)) \leq J(u(t, \xi_0^t, x_0^t), v(t, \xi_0^t, x_0^t)),$$

т.е. выполнено (4.27). Наконец, по условию теоремы $I(\tilde{u}) \leq I(\tilde{u})$, а из определения $\tilde{u}$ следует обратное неравенство $I(\tilde{u}) \leq I(\tilde{u})$. Откуда $\tilde{u}(t) = \tilde{u}(t)$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим случай II, где динамика объекта описывается уравнением (4.2), а критерий имеет вид (4.3). Отметим прежде всего, что критерий (4.3) зависит лишь от переменных x_t и γ_t (при $t = T$), подчиненных уравнениям (2.3), (3.6). Далее, как и в случае I, рассмотрим вспомогательную детерминированную задачу оптимального управления системой (2.3), (3.6) с ограничением (2.4), терминальным условием (2.6) и критерием

$$I(u(t)) = G(T, x_T, \gamma_T),$$

отличающимся от (4.3) отсутствием знака математического ожидания. Решение вспомогательной задачи определит оптимальное программное управление $\tilde{u}_t = \tilde{u}(t)$, на котором

$$\tilde{I} = \inf_u I(u(t)) = I(\tilde{u}(t)) \leq I(u(t)).$$

Теперь рассмотрим произвольное допустимое управление $u(t, \xi_0^t, x_0^t)$. На этом управлении будет, очевидно, выполняться неравенство

$$(4.32) \quad \tilde{I} = I(\tilde{u}(t)) \leq I(u(t, \xi_0^t, x_0^t)).$$

Беря в (4.32) математическое ожидание от обеих частей, получаем

$$\tilde{I} = I(\tilde{u}(t)) = \mathbf{E}\tilde{I} \leq \mathbf{E}I(u(t, \xi_0^t, x_0^t)) = J(u(t, \xi_0^t, x_0^t)).$$

Из последнего неравенства видно, что нижняя грань $\tilde{I}$ функционала $J(u(t, \xi_0^t, x_0^t))$ исходной задачи достигается, например, при программном управлении $\tilde{u}(t)$.

5. Пример

В качестве примера приведем задачу преследования, аналогичную рассмотренной в [9] в дискретном времени. Пусть преследователь P и цель E движутся по прямой в одном направлении, причем E движется равномерно со своей максимально возможной скоростью. Уравнение движения цели E (ненаблюдаемый процесс)

$$(5.1) \quad d\theta(t) = a_1\theta(t)dt, \quad t \in [0, T], \quad T - \text{задано.}$$

Здесь $\theta(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t))$ — двумерный вектор-столбец состояния цели, где $\theta_1(t)$ — координата, $\theta_2(t)$ — скорость. Матрица a_1 имеет вид

$$(5.2) \quad a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Начальное условие $\theta(0)$ — гауссовский вектор с заданными средним значением $\theta_0 > 0$ (неравенство покомпонентное) и ковариационной матрицей $\gamma = \text{diag}\{\alpha, \beta\}$, где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ — известные числа.

Динамика преследователя (мобильного наблюдателя) описывается уравнениями

$$(5.3) \quad \begin{cases} \dot{X}_1(t) = X_2(t), & X_1(0) = 0, \\ \dot{X}_2(t) = u(t) - \mu X_2(t), & X_2(0) = 0. \end{cases}$$

Здесь $u(t)$ — управление преследователя, подчиненное ограничению

$$(5.4) \quad 0 \leq u(t) \leq \bar{u},$$

μ — заданная константа.

Наблюдению доступна текущая дистанция до цели с некоторой аддитивной помехой

$$(5.5) \quad d\xi(t) = \theta_2(t)dt - X_2(t)dt + B_t dW_t,$$

где W_t — стандартный винеровский процесс, играющий роль генератора помехи в наблюдениях, а

$$(5.6) \quad B_t = b_0 - b_1 X_1(t) + b_2 X_2(t)$$

Таблица 1. Параметры моделирования

$\bar{u}$	μ	b_0	b_1	b_2	α_0	β_0	κ_0
0,7	18	0,2	0,12	0,2	1,0	0,2	0

Таблица 2. Результаты моделирования

ν	1,0	1,5	2,0
J_*	0,6817	-8,7716	-18,2359
J_0	1,8750	1,8750	1,8750
J_1	1,8229	1,6243	1,4257
u_{opt}	1100000000	1110000000	1111000000

— “интенсивность” помехи, линейно зависящая от скорости преследователя $X_2(t)$ и его текущей координаты $X_1(t)$, $b_i > 0$, $i = 0, 1, 2$. Другими словами, с ростом скорости преследования помеха в наблюдениях растет, а с уменьшением расстояния до цели — убывает. Преследователю необходимо, с одной стороны, максимально сблизиться с целью за время преследования T , а с другой — реализовать процесс сближения так, чтобы к моменту T поточнее определить элементы движения цели. По этой причине в качестве критерия рассмотрим функционал [9]

$$(5.7) \quad J = -\nu X_1(T) + \text{tr} \gamma_T \rightarrow \min_u,$$

где $\nu > 0$ — заданная константа, а γ_T — терминальное значение ковариационной матрицы ошибок оценивания γ_t .

Система (5.1)–(5.6) находится в рамках условно-гауссовской схемы фильтрации [11, 13], поэтому элементы $\gamma_{ij}(t)$, $i, j = \{1, 2\}$, ковариационной матрицы γ_t подчинены следующим уравнениям (для упрощения обозначений положим далее $\alpha_t = \gamma_{11}(t)$, $\beta_t = \gamma_{22}(t)$, $\kappa_t = \gamma_{12}(t) = \gamma_{21}(t)$):

$$(5.8) \quad \begin{cases} \dot{\alpha}_t = -\kappa_t^2 B_t^{-2} + 2\kappa_t, \\ \dot{\kappa}_t = -\kappa_t \beta_t B_t^{-2} + \beta_t, \\ \dot{\beta}_t = -\beta_t^2 B_t^{-2}. \end{cases}$$

Соотношения (5.3)–(5.8) задают терминальную задачу оптимального управления, которая удовлетворяет принципу максимума Л.С. Понтрягина.

Решение данной задачи при $T = 10$ и исходных параметрах из табл. 1 приведено в табл. 2.

В табл. 2 строки J_* , J_0 и J_1 отвечают значениям критериев соответственно при оптимальном управлении, управлениях $u \equiv 0$ и $u \equiv \bar{u}$. Реализации оптимального управления как функции времени символически изображены последовательностями нулей и единиц с одинаковыми временными интервалами между символами, где единица соответствует $u(t) \equiv \bar{u}$, а ноль — $u(t) \equiv 0$.

6. Заключение

В непрерывном времени в LQG задаче стохастического управления по неполным данным для двух содержательных случаев приведено доказатель-

ство программности траекторного управления наблюдениями со стороны подвижного наблюдателя, динамика которого описывается нелинейным дифференциальным уравнением. Идеологически статья примыкает к исследованиям [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Athans M., Shweppe F. Optimal Waveform Design via Control Theoretical concepts // Inform. and Control. 1967. V. 10. No. 4. P. 335–337.
2. Яшин А.И. Фильтрация нестационарных процессов с учетом стоимости наблюдений // АиТ. 1969. № 2. С. 40–42.
Yashin A.I. Filtration of Non-Stationary Processes with Taking into Account Observation Cost // Autom. Remote Control. 1969. V. 30. No. 2. P. 195–197.
3. Яшин А.И. О выборе оптимального процесса наблюдения // Изв. АН СССР. ТК. 1969. № 2. С. 121–123.
4. Черноусько Ф.Л. Об оптимизации процесса наблюдения // ПММ. 1969. Т. 33. С. 101–111.
5. Соляник А.И., Черноусько Ф.Л. Оптимизация процесса наблюдения при случайных возмущениях // ПММ. 1969. Т. 33. С. 720–729.
6. Кац И.Я., Куржанский А.Б. О некоторых задачах наблюдения и управления в случайных обстоятельствах // АиТ. 1970. № 12. С. 15–25.
Kats I.Ya., Kurzhansky A.B. Concerning Certain Problems of Observation and Control under Random Circumstances // Autom. Remote Control. 1970. P. 1913–1923.
7. Миллер Б.М. Оптимальное управление наблюдениями при фильтрации процессов диффузионного типа. I, II // АиТ. 1985. Т. 46. № 2. С. 79–86; 1985. № 6. С. 77–87.
Miller B.M. Optimal Control of Observations in Filtering Diffusional Processes. I, II // Autom. Remote Control. 1985. V. 46. No. 2. 207–214; No. 6. P. 745–754;
8. Миллер Б.М. Обобщенная оптимизация в задачах управления наблюдениями // АиТ. 1991. Т. 52. № 10. С. 83–92.
Miller B.M. Generalized Optimization in Problems of Observation Control // Autom. Remote Control. 1991. V. 52. No. 10. P. 83–92.
9. Рубинович Е.Я. Траекторное управление наблюдениями в дискретных стохастических задачах оптимизации // АиТ. 1980. № 3. С. 93–102.
Rubinovich E.Ya. Trajectory-Wise Control of Observations in Digital Stochastic Problems // Autom. Remote Control. 1980. V. 41. No. 3. P. 365–372.
10. Martinez S., Bullob F. Optimal Sensor Placement and Motion Coordination for Target Tracking // Automatica. 2006. V. 42. P. 661–668.
11. Григорьев Ф.Н., Кузнецов Н.А., Серебровский А.П. Управление наблюдениями в автоматических системах. М.: Наука, 1986.
12. Малышев В.В., Красильщиков М.Н., Карлов В.И. Оптимизация наблюдения и управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1989.
13. Лунцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
14. Butov A.A., Kuznetsov N.A., et al. Generalized Observation Control in Problems of Stochastic Optimization // Proc. 8th IFAC World Congr. Kyoto, Japan. 1981.

15. *Андреев К.В., Рубинович Е.Я.* Траекторное управление наблюдателем за мобильной целью по угломерной информации // *АиТ.* 2015. № 1. С. 134–162.
Andreev K.V., Rubinovich E.Ya. Moving observer trajectory control by angular measurements in tracking problem // *Autom. Remote Control.* 2016. V. 77. No. 1. P. 106–129.
16. *Андреев К.В., Рубинович Е.Я.* Управление БПЛА с учетом карты рельефа местности при угловых наблюдениях за подвижной целью // *Изв. ЮФУ. Техн. науки.* 2015. № 1. С. 185–195.
17. *Nardone S.C., Aidala V.J.* Observability Criteria for Bearings-Only Target Motion Analysis // *IEEE Trans. Aerospace Electron. Syst.* 1981. V. AES-17. No. 2. P. 162–166.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 20.06.20190

После доработки 06.08.2019

Принята к публикации 26.09.2019

СОДЕРЖАНИЕ

Абрамов В.М., Миллер Б.М., Рубинович Е.Я., Чиганский П.Ю. Развитие теории стохастического управления и фильтрации в работах Р.Ш. Липцера . . .	3
Бутов А.А. Оценивание параметров распределенных продуктивных систем, работающих по принципу «точно в срок»	14
Веретенников А.Ю. О слабых решениях сильно вырожденных СДУ	28
Клепцына М.Л., Марушкевич Д.А., Чиганский П.Ю. Асимптотика точности оценки дробного сигнала в малом белом шуме	44
Кузнецов Н.А., Семенихин К.В. Анализ и оптимизация управляемой модели замкнутой сети массового обслуживания	67
Кутоянц Ю.А. Оценка параметров скрытых марковских процессов с непрерывным временем	86
Миллер А.Б., Миллер Б.М., Степанян К.В. Одновременное импульсное и непрерывное управление марковской цепью в непрерывном времени	114
Пакшин П.В., Копосов А.С., Емельянова Ю.П. Управление с итеративным обучением мультиагентной системой в условиях случайных возмущений . . .	132
Рубинович Е.Я. О программности траекторного управления наблюдениями за подвижной целью	157

CONTENTS

Abramov V.M., Miller B.M., Rubinovich E.Ya., Chiganskii P.Yu. Further development of stochastic control and filtering in works of R. Liptser	3
Butov A.A. Estimating the Parameters of Distributed Productive Just-in-Time Systems	14
Veretennikov A.Yu. On Weak Solutions of Highly Degenerate SDEs	28
Kleptsyna M.L., Marushkevych D.A., Chigansky P.Yu. Asymptotic Accuracy in Estimation of a Fractional Signal in a Small White Noise	44
Kuznetsov N.A., Semenikhin K.V. Analysis and Optimization of a Controlled Model for a closed Queueing Network	67
Kutoyants Yu.A. Estimating the Parameters of Continuous-Time Hidden Markov Processes	86
Miller A.B., Miller B.M., Stepanyan K.V. Simultaneous Impulse and Continuous Control of a Markov Chain in Continuous Time	114
Pakshin P.V., Koposov A.S., Emelianova J.P. Iterative Learning Control of a Multiagent System under Random Perturbations	132
Rubinovich E.Ya. On the Program Character of Trajectory Control over Observations of a Moving Target	157