

СОДЕРЖАНИЕ

Номер 3, 2022

ТЕОРИЯ СИСТЕМ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

Простые структуры в задачах теории управления: формализация и синтез

В. А. Мозжечков 3

Идентификация дефектов в нелинейных системах на основе скользящих наблюдателей с ослабленными условиями существования

А. Н. Жирабок, А. В. Зуев, В. Ф. Филаретов, А. Е. Шумский 21

Об управлении движением аэродинамического маятника с упруго закрепленной точкой подвеса

Ю. Д. Селюцкий 31

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

Квазиоптимальная стабилизация колебательных систем со многими степенями свободы

П. С. Воеводин, Ю. М. Заболотнов 41

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Об одном подходе к анализу устойчивости “частичных” положений равновесия нелинейных дискретных систем

В. И. Воротников, Ю. Г. Мартышенко 57

Синтез быстрых конечных автоматов на программируемых логических интегральных схемах путем расщепления внутренних состояний

В. В. Соловьев 69

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Неоднородность распределения потоков при предельной загрузке многопользовательской сети

Ю. Е. Малашенко, И. А. Назарова 81

Оптимизация структуры многопроцессорной системы реального времени

М. Г. Фуругян 97

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

Конструирование траекторий встречи в базах знаний бортовых оперативно-советующих экспертных системах этапа полета

С. К. Галиханов, Б. Е. Федунов, М. А. Шигина 104

Интеллектуальная система для определения эмоций на аудиозаписи с помощью мел-спектрограмм

Л. А. Деревягин, В. В. Макаров, В. И. Цурков, А. Н. Яковлев 116

Обновление биометрического шаблона при помощи оценки качества исходных данных

С. Б. Кубентаева, И. А. Матвеев, И. А. Соломатин 122

СЛОЖНЫЕ ТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ И ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩИЕ КОМПЛЕКСЫ

Информационно-измерительная система управления полезной нагрузкой беспилотного летательного аппарата <i>О. В. Ермолин, С. М. Мужичек, В. И. Павлов, Г. Г. Себряков, А. А. Скрынников</i>	130
Комплексная оценка эффективности навигационных спутниковых систем <i>А. И. Болкунов, М. Н. Красильщиков, В. В. Малышев</i>	139
Предотвращение нелинейных колебаний летательных аппаратов с интегральными алгоритмами управления методом нелинейной коррекции <i>Ю. С. Зайцева</i>	157

НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

О подходах к решению задачи определения моментов начала и окончания движения объекта при помощи данных бесплатформенной инерциальной навигационной системы <i>А. А. Авилов, А. В. Брагин, И. А. Пануша</i>	165
--	-----

ТЕОРИЯ СИСТЕМ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 519.714.6+62-50

ПРОСТЫЕ СТРУКТУРЫ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ: ФОРМАЛИЗАЦИЯ И СИНТЕЗ

© 2022 г. В. А. Мозжечков

Тульский государственный ун-т, ЗАО “Инженерно-технический центр “Привод”, Тула, Россия

e-mail: v.a.moz@yandex.ru

Поступила в редакцию 14.05.2021 г.

После доработки 17.11.2021 г.

Принята к публикации 31.01.2022 г.

Рассмотрена проблема исключения избыточности в решениях задач структурного синтеза систем управления. Простыми предложено называть структуры, которые не содержат избыточных элементов, т.е. приемлемые структуры, упрощение которых невозможно, поскольку исключение из них любого элемента делает невозможным выполнение условий их приемлемости. Даны определения понятий, необходимых для постановки задач синтеза простых структур, предложена классификация таких задач, исследованы свойства искоемых решений. Указан набор задач теории управления, сводящихся к задачам синтеза простых структур, предложены методы их решения.

DOI: 10.31857/S0002338822030106

Введение. Структура системы управления обладает избыточностью, если представляется возможным ее упростить без нарушения условий, определяющих ее приемлемость. Упрощение подразумевает получение менее сложной структуры в сравнении с исходной. Таким образом, проблема исключения избыточности при математическом синтезе системы сопряжена с формализацией процедуры сравнения сложности структур.

Для сравнения сложности, как правило, конструируют измерительную шкалу (скалярную функцию), которая варианту структуры ставит в соответствие число, являющееся оценкой сложности. В *линейной* теории управления в качестве такой шкалы используют, например, порядок передаточной функции динамического регулятора [1–16], а также число ненулевых коэффициентов в матрице обратных связей статического регулятора [4, 17–20] синтезируемой системы.

Однако способ выбора предпочтительного варианта на основе минимизации оценки по заданной шкале не редко оказывается чрезмерно грубой формализацией механизма выбора, который реализует интуиция человека. На это обращали внимание авторы работ по теории выбора и принятия решений [21–24]. Например, содержательно менее сложным может быть признан не тот формально оптимальный вариант, в котором минимально число ненулевых элементов матрицы обратных связей, а вариант, выгодно отличающийся сочетанием более просто реализуемых обратных связей. Использование весовых коэффициентов, отражающих сложность реализации отдельных коэффициентов, не решает указанную проблему в полной мере из-за необязательной аддитивности оценочной функции. Оценка сложности по порядку динамического регулятора недостаточно полно учитывает информацию, заключенную в его математическом описании. Регуляторы одинакового порядка могут различаться характеристическим полиномом, набором сигналов обратных связей, а также сложностью операторов, преобразующих эти сигналы. В силу указанных обстоятельств применение шкалы с целью выбора предпочтительного варианта может приводить к нежелательному исключению вариантов, потенциально более предпочтительных при их содержательной оценке в сравнении с вариантами, которые выбраны в качестве формально оптимальных по заданной шкале.

Сравнение сложности может осуществляться без применения измерительной шкалы, что позволяет исключить многие затруднения в адекватной формализации выбора предпочтительного по сложности варианта. Именно такой подход к формализации сравнения сложности структур рассматривается в данной статье.

Для сравнения сложности структур предлагается использовать следующее правило: структура признается более сложной, чем некоторая другая, если она содержит все элементы другой структуры и некоторые дополнительные. При этом упрощением структуры является исключение из нее произвольного элемента.

Простыми структурами предлагается называть такие приемлемые структуры, упрощение которых невозможно, поскольку исключение в них любого элемента делает невозможным выполнение условий их приемлемости. В простой структуре отсутствуют избыточные элементы: каждый элемент необходим, а их совокупность достаточна для обеспечения желаемых характеристик синтезируемой системы.

Именно простые структуры являются целью синтеза и автоматически находятся с использованием вышеуказанного правила сравнения сложности при математическом синтезе системы методами, рассматриваемыми в данной статье. Предлагаемый подход позволяет генерировать и обеспечивает анализ всех возможных альтернативных вариантов структур, получаемых упрощением исходно заданной структуры. Интуитивные попытки найти наиболее простую структуру в таком случае заменяются автоматизированным синтезом, гарантирующим исчерпывающий анализ всех возможных альтернатив.

Выбор простых структур из множества альтернатив соответствует классической аксиоматике рационального выбора и может рассматриваться как разновидность парнодоминантного выбора [21, 22]. Множество простых структур содержит, как правило, несколько вариантов, среди которых окончательный выбор производит человек на основе присущей ему системы предпочтений.

Далее даны определения основных понятий, необходимых для математической постановки задач синтеза простых структур, предложена классификация таких задач, исследованы свойства искомых решений. Указан широкий класс задач теории управления, сводящихся к задачам синтеза простых структур, предложены методы их решения.

1. Определение и формализация основных понятий. Определим и формализуем основные понятия, необходимые для постановки задач синтеза простых структур. Будем рассматривать задачи синтеза систем, результат решения которых можно описать вектором, соответствующим следующему определению.

О п р е д е л е н и е 1. Вектором решения задачи синтеза является конечномерный вектор $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, значения компонент которого определяют количественные свойства синтезируемой системы, причем нулевое значение компоненты x_i указывает на отсутствие i -го элемента в максимальной структуре, заданной при математическом описании задачи.

Под элементом структуры на содержательном уровне будем понимать некоторую компоненту, о которой имеют смысл высказывания о ее наличии и отсутствии в системе.

П р и м е р 1. Вектором решения задачи синтеза линейного регулятора может быть, например, вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_6)$, компоненты которого – действительные числа, определяющие значения коэффициентов передаточной функции регулятора $H(p) = (x_1p^2 + x_2p + x_3)/(x_4p^2 + x_5p + x_6)$, где p – комплексная переменная преобразования Лапласа. Указанная передаточная функция определяет максимальную структуру регулятора, которую можно редуцировать, если некоторые коэффициенты обнулить и рассматривать их как константы, равные нулю. Если принять $x_4 = x_6 \equiv 0$, то вектор $x = (x_1, x_2, x_3, 0, x_5, 0)$ будет определять пропорционально-интегрально-дифференцирующий (ПИД) регулятор с передаточной функцией $(x_1p^2 + x_2p + x_3)/(x_5p)$. Пропорционально-интегрирующий (ПИ) регулятор с передаточной функцией $(x_2p + x_3)/(x_5p)$ описывается вектором решения, в котором $x_1 = x_4 = x_6 \equiv 0$, т.е. $x = (0, x_2, x_3, 0, x_5, 0)$. Регулятор первого порядка с передаточной функцией $(x_2p + x_3)/(x_5p + x_6)$ получается, если принять: $x_1 = x_4 \equiv 0$, т.е. если $x = (0, x_2, x_3, 0, x_5, x_6)$.

П р и м е р 2. Пусть регулятор, реализующий полиномиальную обратную связь по выходу системы управления, описывается уравнением

$$u = \sum_{i=1}^n a_i y_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} y_i y_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ijk} y_i y_j y_k,$$

где u – величина управляющего воздействия, формируемого регулятором, величины y_1, \dots, y_n составляют вектор выхода системы, a_i, a_{ij}, a_{ijk} – постоянные коэффициенты. В качестве вектора решения задачи синтеза данного регулятора выступает вектор x , компонентами которого являются коэффициенты регулятора. Максимальная структура соответствует регулятору, в котором все

компоненты вектора решения отличны от нуля. Обнуление некоторой компоненты вектора решения обеспечивает упрощение структуры регулятора.

Пример 3. Пусть при решении задачи идентификации требуется получить модель в виде линейной комбинации функций из заданного набора $\{f_1(t), \dots, f_n(t)\}$, т.е. искомой функцией будет функция $x_1 f_1(t) + x_2 f_2(t) + \dots + x_n f_n(t)$, которая достаточно близка функции $\varphi(t)$, представляющей результаты наблюдений за объектом моделирования. Набор функций $\{f_1(t), \dots, f_n(t)\}$ может содержать как линейные, так и нелинейные функции для аппроксимации нелинейных зависимостей $\varphi(t)$, например, полиномы, гармонические функции, функцию знака переменной t и т.п. Равенство нулю некоторой компоненты x_i вектора решения $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ означает отсутствие соответствующей ей функции $f_i(t)$ в искомой линейной комбинации и обеспечивает упрощение получаемой модели.

Далее нас будет интересовать главным образом случай, когда максимальная структура имеет избыточность, которую необходимо исключить посредством удаления из нее тех или иных элементов, что эквивалентно обнулению некоторых компонент вектора решения.

Определение 2. Компоненты вектора решения, значение которых отлично от нуля, назовем *активными компонентами*, а компоненты, значение которых равно нулю, — *пассивными компонентами*.

Структура системы получается удалением из максимальной структуры тех элементов, номера которых соответствуют пассивным компонентам вектора решения. В полученной структуре присутствуют только те элементы максимальной структуры, номера которых включены в набор активных компонент.

Таким образом, набор S номеров активных компонент вектора решения однозначно определяют структуру решения. Поэтому будем отождествлять набор S активных компонент вектора решения и структуру решения. Далее термины структура и структура решения будем использовать как синонимы.

Определение 3. Структура есть набор S номеров активных компонент вектора решения.

Пример 4. В задаче примера 1 максимальной структуре соответствует набор $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ номеров активных компонент вектора решения x . Структуре ПИД-регулятора соответствует набор $S_{\text{пид}} = \{1, 2, 3, 5\}$. Структура ПИ-регулятора задается набором $S_{\text{пи}} = \{2, 3, 5\}$, а структура регулятора первого порядка — набором $S_1 = \{2, 3, 5, 6\}$.

Множество Υ всех вариантов структур совпадает с множеством всех подмножеств набора $\overline{\{1, n\}}$, где n — размерность вектора решения, т.е. Υ есть степень (булеан) множества $\overline{\{1, n\}}$. Число элементов (мощность) множества Υ равно 2^n .

Элементом структуры, согласно определению 3, является элемент набора S номеров активных компонент вектора решения.

Пример 5. В примере 4 в качестве элементов структуры ПИД-регулятора выступают номера 1, 2, 3, 5 активных компонент вектора решения x .

Определение 4. Упрощением структуры является исключение из набора S активных компонент вектора решения некоторых его элементов.

Пример 6. Упрощение структуры ПИД-регулятора, указанного в примере 4, выражается в исключении из набора $S_{\text{пид}}$ любого его элемента.

Определение 5. Правило сравнения сложности структур: структура S'' сложнее, чем структура S' , если структура S'' содержит все элементы структуры S' и некоторые дополнительные. Структура S' проще, чем структура S'' , если структура S' является подмножеством структуры S'' . Структуры несравнимы по сложности (ни одна из них не может быть признана проще, либо сложнее другой), если одна из них не входит в другую в качестве подмножества. Рассматриваемое правило математически описывается бинарным отношением

$$S' \text{ проще, чем } S'' \Leftrightarrow S' \subset S''.$$

Далее, указывая, что некоторая структура проще или сложнее, чем другая структура, будем подразумевать, что сравнение сложности соответствует определению 5.

Пример 7. В примере 4 структура ПИД-регулятора $S_{\text{пид}} = \{1, 2, 3, 5\}$ сложнее, чем структура ПИ-регулятора $S_{\text{пи}} = \{2, 3, 5\}$, поскольку $S_{\text{пи}} \subset S_{\text{пид}}$. Структура ПИД-регулятора $S_{\text{пид}}$ и структура регулятора первого порядка $S_1 = \{2, 3, 5, 6\}$ несравнимы по сложности.

О п р е д е л е н и е 6. Структура является *приемлемой*, если удастся выполнить все условия допустимости решения надлежащим выбором значений активных компонент вектора решения, перечисляемых данной структурой.

Множество приемлемых структур обозначим символом ζ .

О п р е д е л е н и е 7. *Простой структурой* будем называть *приемлемую* структуру S , для которой невозможно указать допустимую структуру S' более простую, чем S , т.е.

$$S \in \Omega \Leftrightarrow (S \in \zeta) \& (\exists S' \in \zeta \mid S' \subset S),$$

где Ω – множество простых структур.

Иными словами, простой является приемлемая структура, в которой не может быть исключен ни один из ее элементов при соблюдении условий ее приемлемости. Простая структура определяет набор элементов, необходимых и достаточных для выполнения всех требований, предъявляемых к синтезируемой системе.

П р и м е р 8. Пусть в примере 4 любое упрощение структур $S_{\text{ПИД}}$ и S_1 приводит к невозможности выполнить условия их приемлемости. Тогда структура ПИД-регулятора и структура регулятора первого порядка – простые структуры.

О п р е д е л е н и е 8. *Простым решением* назовем решение, имеющее простую структуру.

П р и м е р 9. Пусть в примере 8 найдено значение вектора решения $x = (x_1, x_2, x_3, 0, x_5, 0)$, соответствующего ПИД-регулятору с передаточной функцией $(x_1 p^2 + x_2 p + x_3)/(x_5 p)$. Такое решение является простым решением, поскольку структура $S_{\text{ПИД}}$ этого решения – простая структура согласно условиям примера 8.

В качестве частного случая простого решения выступает решение, содержащее максимальное число нулевых компонент, называемое максимально разреженным решением (sparsest solution) [25]. В последующих разделах статьи проблема соотношения простых и максимально разреженных решений рассматривается более подробно.

О п р е д е л е н и е 9. *Задача синтеза простых структур* состоит в нахождении всех приемлемых структур, для каждой из которых нельзя указать менее сложную приемлемую структуру, т.е. требуется

$$\text{найти множество } \Omega = \{S \in \zeta \mid \{S' \in \zeta \mid \{S' \subset S\} = \emptyset\}\}. \quad (1.1)$$

В качестве одного из типовых описаний условий допустимости вектора решения будем рассматривать систему линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \quad (1.2)$$

где x – вектор решения, b – вектор, определяющий желаемые свойства синтезируемой системы, A – матрица, связывающая значение вектора решения x с значением вектора b .

Для заданного варианта структуры S , учитывая равенство нулю всех координат x_i вектора x , не включенных в S (т.е. учитывая, что $x_i \equiv 0, \forall i \notin S$), систему (1.2) можно представить в виде

$$A_S x_S = b, \quad (1.3)$$

где матрица A_S и вектор x_S составлены соответственно из столбцов матрицы A и координат вектора x с номерами из S . В таком случае структура S является *приемлемой*, если для нее выполнимо условие (1.3), т.е.

$$S \in \zeta \Leftrightarrow (\exists x_S \mid A_S x_S = b). \quad (1.4)$$

О п р е д е л е н и е 10. Задачу (1.1), (1.4) *синтеза простых структур решений системы линейных уравнений* назовем *строгой линейной задачей синтеза простых структур*.

Требование приближенного выполнения равенства (1.2) опишем условием

$$b^- \leq Ax \leq b^+, \quad (1.5)$$

где b^-, b^+ – векторы, определяющие диапазон допустимых значений вектора b . Тогда с учетом (1.5) приемлемость структуры S задается формулой

$$S \in \zeta \Leftrightarrow (\exists x_S \mid b^- \leq A_S x_S \leq b^+). \quad (1.6)$$

О п р е д е л е н и е 11. Задачу (1.1), (1.6) *синтеза простых структур решений системы линейных неравенств* назовем *приближенной линейной задачей синтеза простых структур*.

Далее нас будет интересовать главным образом случай, когда системы (1.2) и (1.5) имеют единственное решение.

Задачи, представленные в определениях 10, 11, мы назвали линейными, отличая их от задачи (1.1), которую будем называть *задачей общего вида*, поскольку в (1.1) описание условия $S \in \zeta$ может быть произвольным.

Формулы (1.4) и (1.6) определяют множество ζ приемлемых структур посредством указания свойства, отличающего приемлемую структуру $S \in \zeta$ от неприемлемой. Наряду с таким определением приемлемости будем допускать возможность задания списка ψ , явно указывающего некоторые неприемлемые структуры.

Пример 10. В задаче примера 1, формируя список ψ , можно учесть требование, состоящее в том, что порядок числителя передаточной функции регулятора не должен превышать порядок ее знаменателя. Это означает, что недопустимой является структура, указывающая активную компоненту x_1 , но не указывающая активную компоненту x_4 , а также всякая структура, указывающая активную компоненту x_2 , но не указывающая в качестве активной компоненту x_4 или x_3 . С целью учета данного требования все структуры с указанными недопустимыми сочетаниями их элементов включаются в набор ψ .

Линейную задачу (1.1), (1.6) можно доопределить, добавив к условиям (1.6) условие $S \notin \psi$. В таком случае приемлемость структуры S описывается следующей формулой:

$$S \in \zeta \Leftrightarrow (\exists x_s \mid b^- \leq A_s x_s \leq b^+) \& (S \notin \psi). \tag{1.7}$$

Определение 12. Задачу (1.1), (1.7) назовем *линейной задачей* с декларативными ограничениями.

В следующем разделе статьи представлен набор задач теории управления, сводящихся к указанным выше классам задач синтеза простых структур. Свойства решений задач, выделенных при классификации, приведены в разд. 3, а методы их решения – в разд. 4.

2. Задачи теории управления как задачи синтеза простых структур. Рассмотрим задачи синтеза систем управления, формализацию которых целесообразно осуществлять с применением предлагаемого подхода к учету сложности.

2.1. Синтез динамического регулятора. Требуется синтезировать динамический регулятор с простой структурой в составе линейной стационарной системы со скалярным управлением и векторной обратной связью. Объект управления задан операторным уравнением

$$a(p)y(t) = b_u(p)u(t) + b_f(p)f(t), \tag{2.1}$$

где $y(t)$ – вектор выходов, используемых в регуляторе в качестве сигналов обратной связи. Его первая компонента $y_1(t)$ – выход системы, $a(p)$ – характеристический полином объекта управления, $b_u(p)$, $b_f(p)$ – векторы, компонентами которых являются полиномы числителей передаточных функций объекта управления соответственно по управляющему u и возмущающему f воздействиям, порядок полинома $a(p)$ – не меньше порядка любого полинома в векторах $b_u(p)$, $b_f(p)$, $p = d/dt$ – оператор дифференцирования по времени t .

Регулятор опишем уравнением

$$r(p)u(t) = q_g(p)g(t) - \ell^T(p)y(t) + q_f(p)f(t), \tag{2.2}$$

где g – скалярное задающее воздействие (вход синтезируемой системы), $r(p)$, $q_g(p)$, $q_f(p)$ – полиномы, $\ell(p)$ – полиномиальный вектор, $r(p)$ – характеристический полином регулятора, $q_g(p)$, $\ell(p)$, $q_f(p)$ – числители передаточных функций регулятора соответственно по задающему воздействию, по каналам обратных связей и по возмущающему воздействию.

Из уравнений (2.1), (2.2) следует уравнение, отражающее зависимость выхода синтезируемой системы от задающего и возмущающего воздействий:

$$h_s(p)y_1(p) = h_g(p)g(p) + h_f(p)f(p). \tag{2.3}$$

В нем

$$h_s(p) = a(p)r(p) + \ell^T(p)b_u(p), \tag{2.4}$$

$$h_g(p) = b_{u1}(p)q_g(p), \tag{2.5}$$

$$h_f(p) = b_{u1}(p)q_f(p) + b_{f1}(p)r(p) + \ell^T(p)c(p), \tag{2.6}$$

где $h_s(p)$ – характеристический полином синтезируемой системы, $h_g(p)$, $h_f(p)$ – полиномы числителей передаточных функций синтезируемой системы соответственно по задающему и возмущающему воздействиям, $c(p)$ – вектор, i -я компонента которого определяется выражением $c_i(p) = (b_{ui}(p)b_{fi}(p) - b_{fi}(p)b_{ui}(p))/a(p)$, причем $c_i(p)$ – полином, p – комплексная переменная преобразования Лапласа. Считаем заданными желаемые значения коэффициентов полиномов $h_s(p)$, $h_g(p)$, $h_f(p)$, обеспечивающие соответствие характеристик системы назначенным требованиям.

Уравнения (2.4)–(2.6) линейны относительно искомым полиномам регулятора и сводятся к системе линейных уравнений (1.2) в результате приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях оператора p .

Вектор решения рассматриваемой задачи – вектор неизвестных системы (1.2), составленный из искомым коэффициентов полиномов регулятора, т.е. $x = (q_g, q_f, \ell, r)^T$, где q_g, q_f, ℓ, r – векторы коэффициентов полиномов $q_g(p)$, $q_f(p)$, $\ell(p)$, $r(p)$.

Вектор правых частей системы (1.2) в данном случае составлен из желаемых значений коэффициентов полиномов синтезируемой системы $h_s(p)$, $h_g(p)$, $h_f(p)$. Значения элементов матрицы A системы (1.2) определяются значениями коэффициентов полиномов $a(p)$, $b_u(p)$, $b_f(p)$ объекта управления.

Максимальная структура в данном случае – структура регулятора, заданная уравнением (2.2). Обнуление некоторой компоненты вектора решения x соответствует обнулению коэффициента полинома в описании регулятора (2.2) и, таким образом, упрощению регулятора.

Структура регулятора определяется набором номеров ненулевых коэффициентов искомым полиномам регулятора $q_g(p)$, $q_f(p)$, $\ell(p)$, $r(p)$, выступающих в роли активных компонент вектора решения.

Приемлемость структуры регулятора S определяется формулой (1.4) или (1.6), требующей с соответствующей строгостью равенство значений параметров синтезируемой системы их заданным значениям.

Искомыми являются *простые структуры регулятора*.

Таким образом, синтез регулятора сводится к задаче (1.1), (1.4) или (1.1), (1.6), соответственно – к *строгой или приближенной линейной задаче синтеза простых структур*.

При проверке приемлемости структуры можно учесть список ψ запрещенных структур. В него можно внести структуры, например, не соответствующие требованию физической реализуемости регулятора, т.е. структуры, в которых степень знаменателя (порядок $r(p)$) в передаточных функциях регулятора меньше, чем порядок числителя (порядок $q_g(p)$, $q_f(p)$, $\ell(p)$). В таком случае приходим к задаче (1.1), (1.7), т.е. к *линейной задаче синтеза простых структур* с декларативными ограничениями.

П р и м е р 11. Решим задачу синтеза простых регуляторов системы управления электроприводом.

Объект управления включает в себя усилитель мощности, электродвигатель постоянного тока, механический редуктор и инерционную нагрузку. Он описывается системой дифференциальных уравнений [26, с. 10, 11], которую можно эквивалентно представить операторным уравнением (2.1). В нем вектор выходов $y = (y_1, y_2) = (\varphi, I_\alpha)$, где φ – угловое положение выходного вала электропривода (выход синтезируемой системы), I_α – ток в якорной обмотке двигателя. Управляющим u и возмущающим f воздействием являются соответственно напряжение на якорной обмотке и момент сопротивления движению, приведенный к выходному валу двигателя. Знаменатель передаточной функции (характеристический полином) объекта управления $a(p) = (T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)p$, где $T^2 = JL/(C_m C_e)$, $\xi = JR/(2C_m C_e T)$; R, L – сопротивление и индуктивность обмотки двигателя; C_e, C_m – коэффициент противоЭДС и коэффициент момента двигателя; J – момент инерции подвижных частей, приведенный к валу двигателя. Числители $b_u(p)$ и $b_f(p)$ передаточных функций объекта управления по управляющему u и возмущающему f воздействиям представляют собой векторы $b_u(p) = (1/(k_r C_e), J/(C_m C_e p^2))$ и $b_f(p) = (-(R + Lp)/(k_r C_m C_e), p/C_m)$, где k_r – коэффициент передачи редуктора, $\varphi = \varphi_d/k_r$, φ_d – угловое положение вала двигателя.

Назначим максимальный допустимый порядок регулятора равный двум. Будем считать доступными для использования в регуляторе переменные y_1, y_2 и задающее воздействие g . Возмущающее воздействие в рассматриваемом примере считаем недоступным измерению и, как следствие, принимаем $q(p) = 0$. Порядок числителей в передаточных функциях регулятора не должен

превышать порядок их знаменателя. В таком случае *максимальная структура* синтезируемого регулятора, согласно (2.2), описывается уравнением

$$(r_2 p^2 + r_1 p + r_0)u = (q_{g2} p^2 + q_{g1} p + q_{g0})g - (\ell_{12} p^2 + \ell_{11} p + \ell_{10})y_1 - (\ell_{22} p^2 + \ell_{21} p + \ell_{20})y_2.$$

Пусть в синтезируемой системе требуется обеспечить:

1) равенство характеристического полинома синтезируемой системы $h_s(p)$ стандартному полиному Баттерворта [27] пятого порядка, т.е. требуется обеспечить равенство

$$(h_{s0}, h_{s1}, h_{s2}, h_{s3}, h_{s4}, h_{s5}) = (1, 3.24\omega_0^{-1}, 5.24\omega_0^{-2}, 5.24\omega_0^{-3}, 3.24\omega_0^{-4}, \omega_0^{-5}),$$

в котором вектор левой части составлен из коэффициентов полинома $h_s(p)$, номер коэффициента h_{sk} равен показателю степени его сомножителя p^k в полиноме $h_s(p)$, вектор правой части составлен из коэффициентов полинома Баттерворта, $\omega_0 = 10\pi$ рад/с;

2) равенство единице коэффициента передачи системы по задающему воздействию, что эквивалентно условию одинаковости значений младших коэффициентов полиномов числителя и знаменателя передаточной функции системы по задающему воздействию, т.е. условию $h_{g0} = h_{s0}$.

Из уравнения (2.5) и условия $h_{g0} = h_{s0}$ находим $q_{g0} = h_{g0}/b_{u1} = k_r C_e$, $q_{g1} = q_{g2} = 0$. Уравнение (2.6) исключаем из рассмотрения, поскольку не назначены требования к полиному $h_f(p)$. Таким образом, в системе (2.4)–(2.6) не решенным остается только уравнение (2.4).

Следуя известным правилам перехода от полиномиальных уравнений к алгебраическим [28], из (2.4) получим линейную систему алгебраических уравнений (1.2), в которой:

вектор неизвестных

$$x = (\ell_{10} \ell_{11} \ell_{12} \ell_{20} \ell_{21} \ell_{22} r_0 r_1 r_2)^T,$$

где ℓ_{ik} – коэффициент при сомножителе p^k в полиноме $\ell_i(p)$, являющимся i -й компонентой вектора $\ell(p)$ в уравнении регулятора (2.2) (полином $\ell_i(p)$ выступает в качестве коэффициента обратной связи по изображению переменной y_i), r_0, r_1, r_2 – коэффициенты полинома $r(p)$,

вектор правой части

$$b = (1, 3.24\omega_0^{-1}, 5.24\omega_0^{-2}, 5.24\omega_0^{-3}, 3.24\omega_0^{-4}, \omega_0^{-5})^T,$$

матрица системы

$$A = \begin{bmatrix} k_{u1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{u1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{u1} & k_{u2} & 0 & 0 & 2\xi T & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{u2} & 0 & T^2 & 2\xi T & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{u2} & 0 & T^2 & 2\xi T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T^2 \end{bmatrix},$$

где $k_{u1} = 1/(k_r C_e)$, $k_{u2} = J/(C_m C_e)$.

Таким образом, задача синтеза простых регуляторов электропривода сведена к задаче (1.1), (1.4), т.е. к *строгой линейной задаче синтеза простых структур*. В ней *вектором решения* является вектор $(\ell_{10} \ell_{11} \ell_{12} \ell_{20} \ell_{21} \ell_{22} r_0 r_1 r_2)$, составленный из искоемых коэффициентов полинома регулятора в уравнении (2.2), описывающем, с учетом сказанного выше, его максимальную структуру. Вариант *структуры* регулятора определяется набором номеров активных компонент вектора решения. Число всех вариантов структур в данном случае равно $2^9 = 512$, поскольку размерность вектора решения равна 9. Требуется исключить все неприемлемые и избыточные структуры и, таким образом, найти все простые.

Воспользовавшись методом, изложенным в разд. 4.1, находим все простые структуры, обеспечивающие решение рассматриваемой задачи. Они представлены в табл. 1 наборами номеров активных координат вектора решения и в табл. 2 – их характеристическими векторами (характеристический вектор подмножества $S \subseteq \{1, n\}$ состоит из n компонент, его i -я компонента равна 1, если $i \in S$, и равна 0 в противном случае). В табл. 2 цифра 1 (0), стоящая на пересечении i -й строки и j -го столбца, означает, что в структуре регулятора, кодируемой i -й строкой, присутствует

Таблица 1

$S_1 = \{1\ 2\ 3\ 5\ 6\ 9\}$	$S_8 = \{1\ 2\ 4\ 6\ 7\ 9\}$	$S_{15} = \{1\ 3\ 5\ 6\ 7\ 9\}$
$S_2 = \{1\ 2\ 3\ 5\ 8\ 9\}$	$S_9 = \{1\ 2\ 4\ 6\ 8\ 9\}$	$S_{16} = \{1\ 3\ 5\ 7\ 8\ 9\}$
$S_3 = \{1\ 2\ 3\ 6\ 7\ 9\}$	$S_{10} = \{1\ 2\ 4\ 7\ 8\ 9\}$	$S_{17} = \{1\ 3\ 6\ 7\ 8\ 9\}$
$S_4 = \{1\ 2\ 3\ 6\ 8\ 9\}$	$S_{11} = \{1\ 2\ 5\ 6\ 7\ 9\}$	$S_{18} = \{1\ 4\ 5\ 6\ 7\ 9\}$
$S_5 = \{1\ 2\ 3\ 7\ 8\ 9\}$	$S_{12} = \{1\ 2\ 5\ 6\ 8\ 9\}$	$S_{19} = \{1\ 4\ 5\ 7\ 8\ 9\}$
$S_6 = \{1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 9\}$	$S_{13} = \{1\ 2\ 5\ 7\ 8\ 9\}$	$S_{20} = \{1\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9\}$
$S_7 = \{1\ 2\ 4\ 5\ 8\ 9\}$	$S_{14} = \{1\ 2\ 6\ 7\ 8\ 9\}$	$S_{21} = \{1\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\}$

Таблица 2

S	$\ell_{10}\ \ell_{11}\ \ell_{12}\ \ell_{20}\ \ell_{21}\ \ell_{22}\ r_0\ r_1\ r_2$	S	$\ell_{10}\ \ell_{11}\ \ell_{12}\ \ell_{20}\ \ell_{21}\ \ell_{22}\ r_0\ r_1\ r_2$	S	$\ell_{10}\ \ell_{11}\ \ell_{12}\ \ell_{20}\ \ell_{21}\ \ell_{22}\ r_0\ r_1\ r_2$
S_1	1 1 1 0 1 1 0 0 1	S_8	1 1 0 1 0 1 1 0 1	S_{15}	1 0 1 0 1 1 1 0 1
S_2	1 1 1 0 1 0 0 1 1	S_9	1 1 0 1 0 1 0 1 1	S_{16}	1 0 1 0 1 0 1 1 1
S_3	1 1 1 0 0 1 1 0 1	S_{10}	1 1 0 1 0 0 1 1 1	S_{17}	1 0 1 0 0 1 1 1 1
S_4	1 1 1 0 0 1 0 1 1	S_{11}	1 1 0 0 1 1 1 0 1	S_{18}	1 0 0 1 1 1 1 0 1
S_5	1 1 1 0 0 0 1 1 1	S_{12}	1 1 0 0 1 1 0 1 1	S_{19}	1 0 0 1 1 0 1 1 1
S_6	1 1 0 1 1 1 0 0 1	S_{13}	1 1 0 0 1 0 1 1 1	S_{20}	1 0 0 1 0 1 1 1 1
S_7	1 1 0 1 1 0 0 1 1	S_{14}	1 1 0 0 0 1 1 1 1	S_{21}	1 0 0 0 1 1 1 1 1

(отсутствует) коэффициент, стоящий в заголовке j -го столбца. При вычислениях использовались следующие значения: $T = 0.5\text{ с}$, $\xi = 200$, $k_{u1} = 3\text{ рад/В/с}$, $k_{u2} = 430\text{ с} \cdot \text{А} \cdot \text{рад}$.

Выбор единственной структуры из найденного множества выполняется с учетом дополнительных требований, неучтенных при формализации рассматриваемой задачи. Например, если дополнительно учесть желательность упрощения измерительной системы, то привлекательным представляется регулятор, имеющий структуру S_5 . Ей соответствует уравнение регулятора $(r_2 p^2 + r_1 p + r_0)u = q_0 g - (\ell_{12} p^2 + \ell_{11} p + \ell_{10})u_1$. Такой регулятор позволяет решить рассматриваемую задачу на основе измерения и использования в обратной связи только величины u_1 , являющейся выходом системы, поскольку в структуре S_5 коэффициенты ℓ_{20} , ℓ_{21} , ℓ_{22} в обратной связи по выходу u_2 (по току якоря) равны нулю.

Пример 12. Дополним условия примера 11 требованием обеспечить астатизм первого порядка (обеспечить нулевое значение первого коэффициента ошибки) по возмущающему воздействию, что эквивалентно требованию равенства нулю в полиноме $h_f(p)$ младшего коэффициента h_{f0} . Из уравнения (2.6) находим $h_{f0} = b_{u10} q_{f0} + b_{f10} r_0 + \ell_{10} c_{10} + \ell_{20} c_{20}$. Учтем, что в рассматриваемой задаче $b_{u1} = 1/(k_r C_e)$, $b_l = -(R + Lp)/(k_r C_m C_e)$, $q_f = 0$, $c_{10} = 0$; $c_{20} = 1/(k_r C_m C_e)$. Тогда $h_{f0} = -(\ell_{20} + r_0 R)/(k_r C_m C_e)$ и, следовательно, требование $h_{f0} = 0$ эквивалентно условию $\ell_{20} + r_0 R = 0$. Обеспечим точное выполнение полученного равенства. С этой целью добавим в матрицу A системы (1.2) седьмую строку (0 0 0 1 0 0 R 0 0), описывающую левую часть полученного равенства. Правую часть равенства учтем, добавив в вектор b седьмую координату, равную нулю. В результате получаем задачу (1.1), (1.4), т.е. *строгую линейную задачу синтеза простых структур* с найденными для данного примера значением матрицы A и вектора b .

Применив метод, описанный в разд. 2.2, находим все простые структуры. Они представлены в табл. 3 их характеристическими векторами.

Число простых структур, соответствующих условиям задачи, в данном примере существенно меньше, чем в первом примере, что обусловлено расширением перечня учтенных требований. Структура S_5 , которая в примере 11 была выбрана как предпочтительная, в рассматриваемом примере оказывается неприемлемой. Вместе с тем структуры S_1 , S_2 , S_4 , S_{12} , найденные в примере 11, оказались способными выполнить дополнительное условие астатизма системы, назначенное в данном примере, без расширения перечня активных координат, т.е. без усложнения структуры

Таблица 3

S	$\ell_{10} \ell_{11} \ell_{12} \ell_{20} \ell_{21} r_0 r_1 r_2$	S	$\ell_{10} \ell_{11} \ell_{12} \ell_{20} \ell_{21} r_0 r_1 r_2$	S	$\ell_{10} \ell_{11} \ell_{12} \ell_{20} \ell_{21} r_0 r_1 r_2$
S_1	1 1 1 0 1 1 0 0 1	S_{22}	1 1 1 1 0 1 1 0 1	S_{25}	1 0 1 1 1 1 1 0 1
S_2	1 1 1 0 1 0 0 1 1	S_{23}	1 1 1 1 0 0 1 1 1	S_{26}	1 0 1 1 1 0 1 1 1
S_4	1 1 1 0 0 1 0 1 1	S_{24}	1 1 0 1 0 1 1 1 1	S_{27}	1 0 1 1 0 1 1 1 1
S_{12}	1 1 0 0 1 1 0 1 1				

регулятора. Порядок всех регуляторов, представленных в табл. 3, одинаков, но число элементов в найденных структурах различно. Структуры S_1, S_2, S_4, S_{12} , представленные в первом столбце табл. 3, указывают шесть активных координат вектора решения, а остальные – семь. Для структур S_1, S_2, S_4, S_{12} , соответствующих требованиям предыдущего примера, дополнительное требование $\ell_{20} + r_0 R = 0$, введенное в данном примере для обеспечения астатизма, выполняется без использования дополнительных активных координат, поскольку в них координаты $x_4 \equiv \ell_{20}, x_7 \equiv r_0$ пассивны. Поэтому $\ell_{20} = r_0 = 0$, что соответствует тривиальному решению уравнения $\ell_{20} + r_0 R = 0$. В структурах $S_{22} - S_{27}$ требование астатизма обеспечивается путем добавления в некоторую простую структуру примера 11 дополнительной активной координаты $x_4 \equiv \ell_{20}$ согласно условию $\ell_{20} + r_0 R = 0$, расширившего перечень требований примера 11. Например, структура S_{22} – результат добавления в структуру S_3 активной координаты $x_4 \equiv \ell_{20}$.

Неодинаковость числа элементов в найденных структурах не противоречит определению простой структуры. Согласно принятому определению простой структуры, неважно, что в одной структуре элементов больше, а в другой их меньше. Важно, что исключение любого элемента из простой структуры приводит к невозможности выполнить все условия решаемой задачи, а добавление новых элементов в найденные простые структуры необязательно для решения задачи.

Пример 13. Пусть в задаче примера 12 достаточно обеспечить равенство только пяти младших коэффициентов полинома $h_s(p)$ соответствующим коэффициентам заданного полинома Баттерворта. При этом старший коэффициент полинома $h_s(p)$ должен отвечать условию $0 \leq h_{s5} \leq \omega_1^{-5}$. Тогда требования к синтезируемой системе описываются системой неравенств (1.5). В ней вектор неизвестных x и матрица A остаются такими же, как в примере 12. Диапазон допустимых значений коэффициента h_{s5} учтем, назначив шестой координате векторов b^-, b^+ значение, равное соответственно 0 и ω_1^{-5} , значения остальных координат векторов b^-, b^+ совпадают с значениями координат вектора b из примера 12. Таким образом, задача сводится к задаче (1.1), (1.6), т.е. к *приближенной линейной задаче синтеза простых структур*. Воспользовавшись методом, изложенным в разд. 4.2, можно найти все простые решения указанной задачи. Однако у некоторых регуляторов, соответствующих найденным структурам, порядок полиномов $\ell_1(p)$ или $\ell_2(p)$ может превышать порядок полинома $r(p)$, что противоречит условиям задачи. Чтобы исключить указанное противоречие, составим список ψ структур, нарушающих условие согласования порядков полиномов, и учтем наличие такого списка в постановке решаемой задачи. В список ψ включаем все подмножества наборов S , указывающих коэффициент $r_i, i \in \{0, 1, 2\}$, но при этом не указывающих коэффициенты ℓ_{1j}, ℓ_{2k} , такие, что $j \leq i$ или $k \leq i$. Следовательно, рассматриваемая задача сводится к *линейной задаче* с декларативными ограничениями, т.е. к задаче синтеза простых структур (1.1), (1.7). Воспользовавшись методом, изложенным в разд. 4.3, находим все простые структуры. Они представлены в табл. 4 их характеристическими векторами.

Из табл. 4 видно, что ослабление требований примера 12 привело к упрощению структур регуляторов. Приведенные в ней структуры $S_{28}, S_{29}, S_{30}, S_{31}$ есть результат исключения одной компоненты соответственно из структур S_2, S_{22}, S_2, S_{25} .

Пример 14. Пусть в задаче примера 12 требуется найти *максимально разреженные решения* системы (1.2), определяющие структуры регуляторов с минимальным числом настраиваемых коэффициентов. Согласно утверждению 5 (разд. 3), множество простых структур примера 12 содержит структуры всех максимально разреженных решений системы (1.2). Их можно выделить из табл. 3. Максимально разреженным решениям соответствуют структуры S_1, S_2, S_4, S_{12} . Они для

Таблица 4

S	$\ell_{10} \ell_{11} \ell_{12} \ell_{20} \ell_{21} r_0 r_1 r_2$	S	$\ell_{10} \ell_{11} \ell_{12} \ell_{20} \ell_{21} r_0 r_1 r_2$	S	$\ell_{10} \ell_{11} \ell_{12} \ell_{20} \ell_{21} r_0 r_1 r_2$
S_{28}	1 1 1 0 1 0 0 0 1	S_{30}	1 1 1 0 0 0 0 1 1	S_{31}	1 0 1 1 1 0 1 0 1
S_{29}	1 1 1 1 0 0 1 0 1				

настройки регулятора указывают шесть коэффициентов, а остальные структуры табл. 3 – семь коэффициентов.

Более подробно задача синтеза динамических регуляторов с простой структурой рассмотрена в [29, 30].

2.2. Синтез статического регулятора. Решим задачу синтеза статического регулятора с простой структурой в составе линейной динамической системы

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (2.7)$$

$$u(t) = Qr(t) - Kx(t), \quad (2.8)$$

где $x(t)$, $u(t)$ – векторы состояния и управления, $r(t)$ – задающее воздействие; $A(t)$, $B(t)$ – числовые матрицы, Q , K – искомые матрицы коэффициентов регулятора. Желаемое поведение системы определено эталонной траекторией движения $x^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, соответствующей заданному воздействию $r^*(t)$ и начальным условиям $x(t_0) = x_0^*$.

Применив формулу Коши к системе (2.7), (2.8), получим уравнение:

$$x^*(t) = \Phi(t, t_0)x_0^* + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)(Qr^*(\tau) - Kx^*(\tau))d\tau, \quad (2.9)$$

где $\Phi(t, \tau)$ – импульсная переходная матрица (матрица Коши) объекта управления (2.7).

Учитывая линейное вхождение искомых элементов матриц Q , K в уравнение (2.9), после перехода к дискретному времени имеем систему линейных алгебраических уравнений (1.2), в которой вектором неизвестных является вектор, составленный из искомых элементов матриц Q , K . При этом условие (1.2) соответствует требованию точной реализации назначенного движения $x^*(t)$. Таким образом, рассматриваемая задача сводится к задаче (1.1), (1.4) синтеза простых структур решений системы линейных уравнений.

Приняв во внимание заданную погрешность реализации эталонной траектории, переходим от требования (1.2) к требованию (1.5). Следовательно, приемлемость структуры регулятора S определяется формулой (1.6). Структура S представляет собой набор номеров активных компонент вектора решения, составленного из искомых элементов матриц Q , K . Исключение из указанного набора любой компоненты приводит к упрощению структуры регулятора. Искомыми являются простые структуры. В результате рассматриваемая задача сводится к задаче (1.1), (1.6), т.е. к *приближенной линейной задаче синтеза простых структур*. Если указанные требования дополнить списком заведомо неприемлемых структур, то задача сводится к *линейной задаче с декларативными ограничениями*, т.е. к задаче синтеза простых структур (1.1), (1.7).

Пример 15. Решим задачу синтеза статического регулятора с простой структурой, предназначенного для стабилизации направления полета (курса) и угла крена самолета. Движение самолета по крену, рысканию (курсу) и скольжению называют боковым движением. Возмущенное боковое движение самолета относительно установившегося горизонтального полета описывается линейной системой дифференциальных уравнений пятого порядка [31, с. 208], которую можно представить в виде системы (2.7). В ней компонентами вектора состояния (β , ω_x , ω_y , γ , ψ) являются угол скольжения β , угловая скорость крена ω_x , угловая скорость рыскания ω_y , угол крена γ , угол рыскания ψ , компоненты вектора управления (δ_n , δ_δ) – угол отклонения руля направления δ_n и угол отклонения элеронов δ_δ . Для самолета массой 45000 кг, летящего на высоте

9000 м со скоростью 800 км/ч, параметры модели бокового движения [31, с. 208] таковы, что матрицы системы (2.7) имеют значения

$$A = \begin{bmatrix} -0.0297 & 0 & 1 & 0.0438 & 0 \\ -1.2156 & -0.7922 & 0.1306 & 0 & 0 \\ 0.4304 & 0.0210 & -0.0152 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.0404 & 1.5871 \\ 0.3807 & -0.0671 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Эталонной траекторией движения системы (2.7), (2.8) назовем оптимальную траекторию, доставляющую минимум квадратичному функционалу:

$$J = \int_0^{\infty} (\beta^2 + \omega_x^2 + \omega_y^2 + \gamma^2 + \psi^2 + \delta_n^2 + \delta_s^2) dt$$

при движении системы из состояния $(\beta, \omega_x, \omega_y, \gamma, \psi) = (1, 1, 1, 1, 1)$ в состояние равновесия.

В данном примере регулятор решает задачу стабилизации, поэтому в (2.8) $Qr(t) \equiv 0$. Матрица K в (2.8), доставляющая минимум функционалу J и, следовательно, обеспечивающая реализацию оптимальной траектории, принимает значение

$$K^* = \begin{bmatrix} 2.049 & 0.098 & 3.937 & 0.096 & 0.766 \\ -0.110 & 1.100 & -0.168 & 1.031 & -0.642 \end{bmatrix}.$$

Максимальная структура регулятора описывается уравнением (2.8), в котором все элементы матрицы $K = (k_{ij}), i = 1, 2; j = 1, 5$, могут использоваться для настройки регулятора. Вариант структуры S определяется набором номеров активных компонент вектора решения $(k_{11} \dots k_{15}, k_{21} \dots k_{25})$, являющегося конкатенацией строк матрицы K .

Допустим отклонение траектории движения системы от оптимальной в переходном процессе в пределах $\pm 1\%$. Учтем необходимость обязательного наличия в системе обратной связи по углу крена и углу рыскания. С этой целью составим список заведомо неприемлемых структур, в который включим все структуры, соответствующие матрицам K с нулевым четвертым или пятым столбцом, т.е. все структуры, относящие коэффициенты k_{14} и k_{24} или k_{15} и k_{25} к множеству пассивных координат вектора решения. В таком случае задача сводится к линейной задаче синтеза простых структур с декларативными ограничениями, т.е. к задаче (1.1), (1.7). Воспользовавшись методом, изложенным в разд. 4.3, находим решение указанной задачи. Единственной простой структурой, отвечающей требованиям данного примера, оказывается максимальная структура, которой соответствует уравнение регулятора

$$\begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta_s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2.049 & 0.098 & 3.937 & 0.096 & 0.766 \\ -0.110 & 1.100 & -0.168 & 1.031 & -0.642 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \gamma \\ \psi \end{bmatrix}.$$

Пример 16. Пусть в задаче примера 15 допустимо отклонение траектории движения системы от оптимальной в переходном процессе в пределах $\pm 5\%$. Воспользовавшись методом из разд. 4.3, находим множество простых структур. Оно содержит единственную простую структуру $S_1 = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$, которой соответствует уравнение регулятора

$$\begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta_s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2.056 & 0 & 4.005 & 0 & 0.806 \\ 0 & 1.085 & 0 & 1.014 & -0.702 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \gamma \\ \psi \end{bmatrix}.$$

Представленное уравнение регулятора совпадает с уравнением, полученным в результате решения этой задачи методом, изложенным в [17]. Положительным отличием метода, предлагае-

мого в данной статье, от метода работы [17] является сведение процедуры синтеза к решению систем линейных алгебраических уравнений и неравенств. Это позволяет использовать эффективные методы линейной алгебры, которые (по сравнению с алгоритмами нелинейного программирования, на которые опирается работа [17]), дают возможность решать задачи большей размерности в короткое время, гарантируют нахождение точного решения, не требуют задания начальных приближений. Кроме того, в предлагаемом методе выявляются все простые структуры, трудоемкость их поиска существенно снижается в результате учета свойств простых структур, описанных в разд. 3.

Пример 17. Расширим указанный в примере 16 диапазон допустимых отклонений траектории движения системы от эталонной в переходном процессе до $\pm 10\%$. В таком случае множество простых структур, найденное методом из разд. 4.3, содержит две структуры: структуру S_1 , представленную в примере 16, и структуру $S_2 = \{1, 3, 5, 8, 9, 10\}$, которой соответствует уравнение регулятора:

$$\begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta_o \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 4.261 & 0 & 6.896 & 0 & 0.723 \\ 0 & 0 & 1.219 & 0.435 & -0.163 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \gamma \\ \psi \end{bmatrix}.$$

Положительным отличием структуры S_2 от S_1 является отсутствие в ней обратной связи по скорости крена ω_x , что позволяет исключить необходимость измерения значений ω_x . При этом отклонение от эталонной траектории соответствует назначенным пределам.

2.3. Выбор управляющих воздействий. Пусть задан список возможных, но не обязательно необходимых управляющих воздействий. Вариант сочетания управляющих воздействий определяется набором S , который перечисляет номера воздействий, т.е. номера компонент $u_j(t)$ вектора управления u , используемых для управления объектом. Все компоненты вектора u , не вошедшие в набор S , полагаются тождественно равными нулю. Требуется найти простые наборы S , т.е. наборы, указывающие воздействия, использование которых необходимо и достаточно для управления объектом с заданной точностью. Полагаем, что объект управления описывается уравнением (2.7) и назначена эталонная траектория $x^*(t, x_0)$, $t \in [t_0, T]$, которую система управления должна осуществить с заданной точностью. Применяв формулу Коши к уравнению (2.7), находим

$$x^*(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau. \quad (2.10)$$

Учитывая линейное вхождение вектора управления в уравнение (2.10), после перехода к дискретному времени получаем систему линейных алгебраических уравнений (1.2), в которой вектором неизвестных является вектор, составленный из компонент $u_j(t)$ вектора управления. Приняв во внимание заданную погрешность реализации эталонной траектории, переходим от требования (1.2) к (1.5). Следовательно, приемлемость набора S определяется формулой (1.6). В результате рассматриваемая задача сводится к задаче (1.1), (1.6), т.е. к *приближенной линейной задаче синтеза простых структур*.

2.4. Синтез программного управления. Пусть объект управления описывается уравнением (2.7), где x – вектор состояния, u – скалярная импульсная функция управления, допускающая идеализированное представление:

$$u(t) = \sum_{j \in S} \delta(t - t_j)u_j,$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака, u_j – амплитуда управления в j -й момент времени. Набор S указывает номера моментов времени из заданного ряда $\{t_0, t_1, \dots, t_M\}$, в которые управление может быть отлично от нуля, т.е. $S \subseteq \{0, 1, \dots, M\}$. Требуется найти программу управления $u(t)$, обеспечивающую прохождение траектории движения через назначенное множество точек $x^*(t_k)$, $k = \overline{1, N}$. Структура программы управления определяется набором S . Исключение из него любого элемента является упрощением программы управления. Простая структура в данном случае определяет

набор моментов времени, в которые подача управляющих импульсов есть необходимое и достаточное условие прохождения траектории движения через множество назначенных точек. Применительно к рассматриваемой задаче с учетом импульсного характера управляющих воздействий уравнение (2.10) принимает вид

$$x^*(t_k) = \Phi(t_k, t_0) + \sum_{j \in S \cap Q(k)} \Phi(t_k, t_j) B(t_j) u_j \Delta t, \quad k = \overline{1, N}, \quad (2.11)$$

где $Q(k)$ – множество номеров моментов времени $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_j \leq t_k\}$, Δt – шаг по времени.

Система (2.11) является системой линейных алгебраических уравнений (1.2), в которой вектор неизвестных составлен из амплитуд u_j . Она соответствует требованию точного прохождения траектории движения через назначенные точки $x^*(t_k), k = \overline{1, N}$. Задав допустимые отклонения траектории от назначенных точек, переходим от требования (1.2) к (1.5). В таком случае приемлемость набора S определяется формулой (1.6). В результате получаем *приближенную линейную задачу синтеза простых структур* (1.1), (1.6).

2.5. Идентификация. Решим задачу идентификации, в которой требуется получить модель в виде линейной комбинации функций из набора $\{f_1(t), \dots, f_n(t)\}$, которая на заданном множестве значений аргумента t достаточно хорошо воспроизводит результаты наблюдений, представленные набором $\{\varphi(t_1), \varphi(t_2), \dots, \varphi(t_m)\}$. Требование точного соответствия модели результатам наблюдений описывается уравнением

$$x_1 f_1(t_i) + x_2 f_2(t_i) + \dots + x_n f_n(t_i) = \varphi(t_i), \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.12)$$

где x_1, x_2, \dots, x_n – искомые числа, составляющие вектор решения $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ рассматриваемой задачи. Равенство нулю компоненты x_i вектора решения означает отсутствие функции $f_i(t)$ в синтезируемой модели и таким образом приводит к упрощению модели. Структура модели определяется набором S номеров координат вектора решения, отличных от нуля. Система (2.12) в матричной форме записи имеет вид (1.2), в ней элементами a_{ij} матрицы системы A являются числа $f_j(t_i), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, а элементами b_j вектора b правых частей – числа $\varphi(t_i), i = \overline{1, m}$. Для заданного набора S она приобретает вид (1.3). Приемлемость набора S определяется формулой (1.4) или (1.6) соответственно в случае точного или приближенного решения рассматриваемой задачи. Требование получить модель с простой структурой приводит к задаче (1.1), (1.4) или (1.1), (1.6), т.е. к *строгой или приближенной линейной задаче синтеза простых структур*.

2.6. Синтез адаптивной системы. Пусть в процессе функционирования системы управления требуется парировать изменения ее параметров, приближая поведение располагаемой системы управления к поведению эталонной системы. Считаем, что располагаемая и эталонная системы описываются одинаковыми уравнениями, в которых можно выделить обобщенные параметры (постоянные времени, коэффициенты передачи и т.п.) $\Theta_i, i = \overline{1, m}$, являющиеся функциями первичных параметров. Различие в поведении располагаемой и эталонной систем обусловлено различием только их обобщенных параметров. Значения некоторых первичных параметров $\alpha_j, j = \overline{1, n}$, можно корректировать. Набор $S \subseteq \overline{1, n}$ перечисляет корректируемые первичные параметры и тем самым определяет структуру закона адаптации. Требуется найти наборы $S \subseteq \overline{1, n}$, указывающие сочетания таких первичных параметров $\alpha_j, j \in S$, изменение которых является необходимым и достаточным условием для адаптивного приближения располагаемой системы к эталонной с заданной точностью. Эти наборы соответствуют определению простого набора. Условие приемлемости набора S в данном случае описывается формулой

$$S \in \zeta \Leftrightarrow \{\Theta_i(a) = \Theta_i^*, \alpha_j = 0, j \notin S, i = \overline{1, m}\}, \quad (2.13)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – вектор решения рассматриваемой задачи, Θ_i^* – эталонное значение обобщенного параметра Θ_i . Требование получить простую структуру закона адаптации приводит нас к задаче (1.1), (2.13), являющейся в рамках принятой терминологии *задачей синтеза простых структур общего вида*. В некоторых случаях представляется возможным линеаризовать зависимости $\Theta_i(\alpha)$. Например, если обобщенные параметры – степенные комплексы первичных пара-

метров, тогда в результате логарифмирования уравнений $\Theta_i(\alpha) = \Theta_i^*$ приходим к системе линейных уравнений

$$\gamma_{i1} \lg \alpha_1 + \gamma_{i2} \lg \alpha_2 + \dots + \gamma_{in} \lg \alpha_n = \lg \Theta_i^*, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.14)$$

где γ_{ij} , $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ – показатели степеней в степенных комплексах $\Theta_i(\alpha)$. Система (2.14) в матричной форме записи имеет вид (1.2), в ней элементами вектора неизвестных являются искомые значения $\lg \alpha_j$, $j = \overline{1, n}$, элементы матрицы системы A – числа γ_{ij} , $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, а элементы вектора b правых частей – числа $\lg \Theta_i^*$, $i = \overline{1, m}$. Для заданного набора S она приобретает вид (1.3). Приемлемость набора S определяется формулой (1.4) или (1.6) в случае точного или приближенного решения рассматриваемой задачи. В результате приходим к задаче (1.1), (1.4) или (1.1), (1.6), т.е. соответственно к *строгой или приближенной линейной задаче синтеза простых структур*.

3. Свойства простых структур. Синтез простых структур можно сделать более эффективным, если учесть ряд их свойств, описанных ниже. Эти свойства позволяют при поиске простых структур заменить полный перебор сокращенным на основе исключения вариантов, заведомо не принадлежащих искомому множеству, что немаловажно, поскольку число всех возможных вариантов структур может быть весьма велико.

3.1. Строгая линейная задача.

Утверждение 1. Структура S^0 решения системы линейных уравнений (1.2) является простой тогда и только тогда, когда система (1.3) при $S = S^0$ имеет единственное решение, все координаты которого отличны от нуля.

Доказательство. Пусть $x_{S^0}^0 = (x_j^0)$, $j \in S^0$ – решение системы (1.3) при $S = S^0$. Если $x_{S^0}^0$ содержит компоненты равные нулю, т.е. $x_j^0 = 0$, $j \in S'' \subseteq S^0$, тогда вектор (x_j^0) , $j \in S' = S^0 \setminus S''$ является решением системы (1.3) для $S = S'$. Следовательно, набор S' является приемлемым. Тогда $S^0 \notin \Omega$, поскольку $S' \subset S^0$, т.е. структуру S^0 можно упростить без нарушения условий приемлемости (1.3). Если система (1.3) не имеет решения при $S = S^0$, то $S^0 \notin \Omega$, поскольку S^0 недопустимое множество. Если система (1.3) имеет неединственное решение для $S = S^0$, то по крайней мере одна k -я компонента вектора x , $k \in S^0$, может быть обнулена, и условие (1.3) может быть выполнено с помощью подходящего выбора значений компонент вектора x , номера которых принадлежат множеству $S^0 \setminus \{k\}$. Теперь рассуждая, как в начале доказательства, получаем $S^0 \notin \Omega$. Это завершает доказательство необходимости утверждения. Если для S^0 выполнены условия утверждения, то множество $S \subset S^0$ становится недопустимым при исключении набора координат вектора x_S из S^0 . Следовательно, не существует допустимого множества S , являющегося подмножеством множества S^0 . Это доказывает достаточность условий утверждения и завершает доказательство.

Из утверждения 1 следует, что задача поиска простых структур решений системы (1.2) эквивалентна задаче перечисления всех наборов линейно независимых столбцов матрицы A системы (1.2), таких, что вектор правых частей b системы (1.2) принадлежит линейной оболочке каждого такого набора столбцов и не принадлежит линейной оболочке любого подмножества этого набора столбцов. Другими словами, задача поиска простых структур решений системы (1.2) эквивалентна задаче перечисления всех наборов столбцов матрицы A , составляющих базис, по которому осуществимо разложение вектора правых частей b , причем такое, что все координаты вектора b относительно этого базиса отличны от нуля.

Утверждение 2. Если набору S соответствует единственное решение системы (1.3), в котором есть нулевые компоненты с номерами, составляющими множество S'' , тогда набор $S \setminus S''$ является простым.

Доказательство. Присвоив нулевые значения всем компонентам вектора решения системы (1.3) с номерами из S'' , получим набор $S \setminus S''$, для которого существует единственное решение системы (1.3), ни одна из компонент которого не равна нулю, что, согласно утверждению 1, необходимо и достаточно, чтобы набор $S \setminus S''$ был простым.

Утверждение 3. Число элементов, составляющих простой набор S^0 , не превышает ранг матрицы A системы (1.2), т.е. $\text{card}(S^0) \leq \text{rank}(A)$, где $\text{card}(S^0)$ – кардинальное число (число элементов) множества S^0 .

Доказательство. Если набор S^0 является простым, то, согласно утверждению 1, система (1.3) при $S = S^0$ имеет единственное решение и, следовательно, ее матрица A_{S^0} имеет ранг $\text{rank}(A_{S^0})$, равный числу неизвестных, т.е. равный $\text{card}(S^0)$. Поскольку ранг матрицы системы (1.3) не может быть больше, чем $\text{rank}(A)$, приходим к выводу, что $\text{card}(S^0) \leq \text{rank}(A)$.

Утверждение 4. Если набору S соответствует совместная система (1.3), имеющая неединственное решение, тогда среди подмножеств набора S присутствуют простые наборы.

Доказательство. Из условий утверждения следует, что вектор правой части системы (1.3) принадлежит линейной оболочке столбцов $A_j, j \in S$, матрицы A , среди которых присутствуют линейно зависимые. Исключив часть столбцов, можно получить как минимум один линейно независимый набор $A_j, j \in S'$, содержащий вектор правой части системы (1.3) в своей линейной оболочке. В таком случае система (1.3), соответствующая набору S' , будет иметь единственное решение. Исключив из S' номера нулевых компонент вектора решения, согласно утверждению 2, получим простой набор $S^0 \subset S$.

Утверждение 5. Множество простых решений системы линейных уравнений содержит все максимально разреженные решения этой системы. Множество структур максимально разреженных решений

$$\Omega^\# = \{S^\# \in \Omega \mid \text{card}(S^\#) = \min_{S \in \Omega} \text{card}(S)\}$$

является подмножеством множества Ω простых структур.

Доказательство. Максимально разреженным решением (sparsest solution) [25] недоопределенной системы линейных уравнений является решение с максимальным количеством нулевых элементов. Каждое такое решение системы (1.2) удовлетворяет определению решения с простой структурой. Действительно, каждое максимально разреженное решение системы (1.2) имеет структуру, которую нельзя упростить, обнулив в векторе решения некоторую ненулевую (активную) компоненту, поскольку максимально разреженное решение – это решение с максимально возможным числом нулевых компонент. Таким образом, максимально разреженное решение является простым решением. Однако обратное утверждение не верно: в общем случае не каждое простое решение оказывается максимально разреженным. Следовательно, совокупность максимально разреженных решений есть подмножество набора простых решений.

3.2. Приближенная линейная задача. Для заданного варианта структуры S система неравенств (1.5) эквивалентна системе $b^- \leq A_S x_S \leq b^+$, которую запишем в следующем виде:

$$A_S x_S + z^+ = b^+, \quad A_S x_S - z^- = b^-, \tag{3.1}$$

$$z^+ \geq 0, \quad z^- \geq 0, \tag{3.2}$$

где z^+ и z^- – векторы-столбцы дополнительных переменных, условие (3.2) означает что все компоненты векторов z^+ и z^- должны быть неотрицательными.

Пусть множество Ω^* составляют простые наборы S , для которых могут быть выполнены условия (3.1), (3.2), т.е.

$$\Omega^* = \{S \in \zeta^* \mid \{S' \in \zeta^* \mid \{S' \subset S\} = \emptyset\}\}, \tag{3.3}$$

$$S \in \zeta^* \Leftrightarrow (\exists x_S, z^+, z^- \mid A_S x_S + z^+ = b^+, A_S x_S - z^- = b^-, z^+ \geq 0, z^- \geq 0). \tag{3.4}$$

Утверждение 6. Множество простых структур решений системы линейных неравенств (1.5) тождественно множеству Ω^* .

Доказательство. Вектором решения системы (1.5) и эквивалентной ей системы (3.1), (3.2) является вектор x . Поскольку дополнительные переменные z^+, z^- отсутствуют в системе (1.5), они не входят в вектор решения. По этой причине структура S вектора решения x в рамках принятой формализации – структура решения системы (3.1), (3.2). Предположим, что некоторый набор S из Ω^* не является простой структурой решения системы неравенств (1.5). Это может выражаться либо нарушением условий (3.1), (3.2), либо наличием более простого приемлемого набора $S' \in \zeta^*$, такого, что $S' \subset S$. Однако, и то и другое противоречит определению набора Ω^* и, следовательно, условиями утверждения. В случае, если существует простая структура S'' решения системы неравенств (1.5), не включенная в Ω^* , приходим к выводу, что для S'' либо невыполнимы условия (3.1), (3.2), либо существует более простой набор $S' \in \zeta^*$, такой, что $S' \subset S''$. Однако в таком случае, структура S'' не соответствует определению простой структуры.

3.3. Линейная задача с декларативными ограничениями.

Утверждение 7. Множество Ω^{**} решений *линейной задачи с декларативными ограничениями* (1.1), (1.7) тождественно множеству $\Omega^* \setminus \psi$.

Доказательство. Каждый элемент множества $\Omega^* \setminus \psi$ соответствует условиям (1.1), (1.7) и, следовательно, входит в Ω^{**} , поскольку он соответствует требованиям (1.6) и отсутствует в списке ψ . Таким образом, набор $\Omega^* \setminus \psi$ целиком входит в Ω^{**} . Покажем, что в Ω^{**} нет структур, отсутствующих в $\Omega^* \setminus \psi$. Предположим обратное. Пусть существует структура $S_a \in \Omega^{**}$, отсутствующая в $\Omega^* \setminus \psi$. Структуру S_a можно получить добавлением одного элемента к некоторой неприемлемой структуре S_b , поскольку структура S_a является простой. Пусть структура S_b неприемлема только потому, что она не соответствует условию (1.6), т.е. $S_b \notin \psi$. Тогда получаемая добавлением к S_b единственного элемента допустимая структура S_a принадлежит $\Omega^* \setminus \psi$, поскольку в этом случае структуре S_a соответствует простое решение системы (1.5) и S_a , как и S_b , не входит в ψ . Однако факт $S_a \in \Omega^* \setminus \psi$ противоречит предположению об отсутствии S_a в $\Omega^* \setminus \psi$. Пусть структура S_b неприемлема только потому, что она есть в списке ψ , т.е. $S_b \in \Omega^* \cap \psi$. Тогда допустимая структура S_a не является простой, либо потому что, сохранив в ней добавленный элемент, можно исключить один из элементов S_b , получив в результате приемлемую структуру, либо потому что добавленному элементу будет соответствовать нулевое значение координаты в векторе решения. Это формально означает, что S_a остается неприемлемой структурой после такого добавления. Этот вывод противоречит сделанному выше предположению. Теперь допустим, что структура S_b неприемлема потому, что она не соответствует условию (1.6) и присутствует в списке ψ . Тогда допустимая структура S_a принадлежит $\Omega^* \setminus \psi$. Вновь получаем противоречие: факт $S_a \in \Omega^* \setminus \psi$ противоречит предположению об отсутствии S_a в $\Omega^* \setminus \psi$.

3.4. Задача общего вида. При решении данной задачи для сокращения трудоемкости поиска простых структур могут учитываться следующие утверждения.

Утверждение 8. Структура, полученная упрощением неприемлемой структуры, неприемлема.

Доказательство. Согласно определению 4, упрощение структуры приводит к исключению части элементов из набора активных компонент вектора решения. В результате область значений вектора решения, соответствующая упрощенной структуре, является подмножеством области его значений в случае использования исходной структуры. Поскольку в исходной области возможных значений вектора решения не было приемлемых значений, то приемлемых значений нет и в подмножестве этой области.

Утверждение 9. Структура, полученная добавлением элементов в приемлемую структуру, приемлема.

Доказательство. Добавление элементов в приемлемую структуру приводит к добавлению новых элементов в соответствующий ей набор активных компонент вектора решения. В результате новая область значений вектора решения является надмножеством его исходной области значений. Поскольку в исходной области значений были приемлемые значения, то они сохраняются в надмножестве этой области.

4. Методы решения задач синтеза простых структур. Простые структуры синтезируются в следующем порядке. Осуществляется формализация решаемой задачи синтеза с использованием системы понятий, представленных в статье. В соответствии с типом полученной задачи применяется один из предлагаемых ниже методов.

4.1. Решение строгой линейной задачи синтеза простых структур. Метод решения рассматриваемой задачи (1.1), (1.4), т.е. метод поиска простых структур решений системы линейных уравнений (1.2), сводится к следующему.

Шаг 1. Проверяем совместность системы (1.2). Если она несовместна, то приемлемых и, следовательно, искомым простых структур не существует, иначе переходим к шагу 2.

Шаг 2. Анализируем наборы S с числом элементов, равным рангу матрицы A системы (1.2), т.е. наборы, для которых $\text{card}(S) = \text{rank}(A)$. Наборы S с числом элементов, превышающим $\text{rank}(A)$, исключаются из рассмотрения на основе утверждения 3. Если анализируемому набору S соответствует система (1.3), имеющая единственное решение, которое не содержит нулей, то, согласно утверждению 1, набор S включаем в искомое множество Ω простых структур. Если анализируемому набору S соответствует единственное решение системы (1.3), в котором есть нулевые компоненты с номерами, составляющими множество S' , то, согласно утверждению 2, в Ω включаем набор $S \setminus S'$. Если анализируемому набору S соответствует несовместная система (1.3), то на-

бор S запоминаем как неприемлемый. Если анализируемому набору S соответствует система (1.3), имеющая неединственное решение, тогда, согласно утверждению 4, среди подмножеств набора S присутствуют искомые простые наборы. В данном случае по отношению к полученной системе (1.3) рекурсивно применяем приведенный метод поиска простых структур. При выполнении рекурсии систему (1.3) рассматриваем как исходную систему (1.2). Анализируем только те наборы, которые не являются подмножеством либо надмножеством некоторого набора из Ω , либо подмножеством набора, оказавшегося неприемлемым. Если все наборы S , для которых $\text{card}(S) = \text{rank}(A)$ проанализированы, поиск закончен.

В результате выполнения шагов 1 и 2 находим искомое множество Ω простых структур.

Согласно утверждению 5, найденное множество Ω содержит структуры всех максимально разреженных решений системы (1.2). Их можно выделить из Ω в результате упорядочивания наборов $S \in \Omega$ по значению их кардинального числа $\text{card}(S)$. В набор $\Omega^\#$ структур максимально разреженных решений включают все структуры $S^\# \in \Omega$, которым соответствует минимальное значение кардинального числа, т.е. такие $S^\#$, для которых

$$\text{card}(S^\#) = \min_{S \in \Omega} \text{card}(S).$$

4.2. Решение приближенной линейной задачи синтеза простых структур. Рассмотрим метод решения задачи (1.1), (1.6), т.е. метод поиска простых структур решений системы линейных неравенств (1.5).

Согласно утверждению 6, поиск простых структур решений системы линейных неравенств (1.5) сводится к поиску множества Ω^* , определяемого формулами (3.3), (3.4).

Все простые структуры в рассматриваемом случае можно найти следующим образом.

Шаг 1. Находим множество Ω^{**} простых структур решений системы уравнений (3.1). Для этого воспользуемся методом из разд. 4.1. При его реализации в качестве матрицы, вектора неизвестных и вектора правой части системы (1.2) используются матрица, вектор неизвестных и вектор правой части системы (3.1).

Шаг 2. Исключаем из Ω^{**} все множества, для которых система (3.1), (3.2) несовместна. Это можно сделать, исключив из Ω^{**} все наборы, соответствующие решениям системы (3.1) с отрицательным значением хотя бы одной координаты векторов z^+ , z^- .

Шаг 3. Исключаем из Ω^{**} все множества, для которых в Ω^{**} может быть указан более простой набор, если при сравнении сложности наборов $S \in \Omega^{**}$ игнорировать векторы z^+ , z^- .

Остающиеся в Ω^{**} структуры составляют искомый набор Ω^* простых структур. Таким образом, выполнив шаги 1–3, получаем набор Ω^* , являющийся решением задачи (1.1), (1.6).

4.3. Решение линейной задачи с декларативными ограничениями. Решение задачи (1.1), (1.7), т.е. *линейной задачи с декларативными ограничениями*, согласно утверждению 7, сводится к исключению из множества Ω^* решений линейной задачи (1.1), (1.6) всех структур, указанных в списке ψ . С целью снижения трудоемкости поиска решения необходимо совместить формирование множества Ω^* с исключением из него структур, указанных в списке ψ . Это можно сделать при реализации метода из разд. 4.1, используемого при поиске множества Ω^{**} в методе из разд. 4.2. Для этого шаг 2 в методе из разд. 4.1 дополняется условием отсутствия анализируемого набора S в списке ψ . В итоге выполнения метода из разд. 4.2 с учетом указанной его модификации получаем набор структур $\Omega^* \setminus \psi$, являющийся решением задачи (1.1), (1.7).

4.4. Решение задачи общего вида. Рассмотрим метод решения задачи (1.1), применение которого целесообразно в случае, когда описание условий приемлемости структуры S не относится к выделенным нами типовым описаниям (1.4), (1.6), (1.7), (3.4). Предлагаемый метод сводится к следующему.

Шаг 1. Находим множество ζ всех приемлемых структур. С этой целью проверяем приемлемость всех наборов $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, где n – размерность вектора решения. При этом полагаем, что задана процедура $P(S)$ проверки приемлемости. Структуры, оказавшиеся неприемлемыми, запоминаем как элементы множества ϑ , а оказавшиеся приемлемыми, запоминаем как элементы множества ζ . Процедуру $P(S)$ не выполняем в следующих случаях:

если набор S – подмножество некоторого элемента из ϑ и, следовательно, заведомо неприемлем, согласно утверждению 8,

если набор S – надмножество некоторого элемента из ζ и, следовательно, очевидно приемлем, согласно утверждению 9.

Шаг 2. Выделяем из множества приемлемых структур ζ искомое множество Ω простых структур. Для этого каждую структуру S из ζ сравниваем с остальными структурами из ζ . Если в ζ нет структуры более простой, чем S , то S – простая структура. Учитывая это, включаем ее в искомое множество Ω .

В результате получаем множество Ω , являющееся решением задачи (1.1).

Заключение. С целью решения проблемы исключения избыточности в решениях задач структурного синтеза систем различного назначения предложен понятийный аппарат, необходимый для математической постановки задач синтеза структур, не содержащих избыточных элементов. Такие структуры предложено называть простыми структурами. Дана классификация задач синтеза простых структур. Исследованы свойства простых структур, предложены методы их синтеза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Солодовников В.В. Синтез корректирующих устройств следящих систем при типовых воздействиях // *АиТ*. 1951. Т. 12. Вып. 5. С. 352–388.
2. Солодовников В.В., Ленский В.Л. Синтез систем управления минимальной сложности // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*. 1966. № 2. С. 56–68.
3. Солодовников В.В., Бирюков В.Ф., Тумаркин В.И. Принцип сложности в теории управления. М.: Наука, 1977. 344 с.
4. Balestrino A., Celentano G. CAD of Minimal Order Controllers // *IFAC Proceedings Volumes*. 1979. V. 12. № 7. P. 1–8.
5. Balestrino A., Celentano G. Dynamic Controllers in Linear Multivariable Systems // *Automatica*. 1981. V. 17. № 4. P. 631–636.
6. Гайдук А.П. Выбор обратных связей в системе управления минимальной сложности // *АиТ*. 1990. № 5. С. 29–37.
7. Kell L.H., Bhattacharyya S.P. State-space Design of Low-order Stabilizers // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1990. V. 35. № 2. P. 182–186.
8. Gu D.W., Choi B.W., Postlethwaite I. Low-order Stabilizing Controllers // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1993. V. 38. № 11. P. 1713–1717.
9. Домбровский В.В. Понижение порядка линейных многомерных систем при H^∞ ограничениях // *АиТ*. 1994. № 4. С. 123–132.
10. Домбровский В.В. Синтез динамических регуляторов пониженного порядка при H^∞ ограничениях // *АиТ*. 1996. № 11. С. 10–17.
11. Wang Q.G., Lee T.H., He J.B. Low-order Stabilizers for Linear Systems // *Automatica*. 1997. V. 33. № 4. P. 651–654.
12. Киселев О.Н., Поляк Б.Т. Синтез регуляторов низкого порядка по критерию H^∞ и по критерию максимальной робастности // *АиТ*. 1999. № 3. С. 119–130.
13. Wang S., Chow J.H. Low-order Controller Design for SISO Systems Using Coprime Factors and LMI // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2000. V. 45. № 6. P. 1166–1169.
14. Bu J., Sznaier M. A Linear Matrix Inequality Approach to Synthesizing Low-Order Suboptimal Mixed ℓ_1/H_p Controllers // *Automatica*. 2000. V. 36. № 7. P. 957–963.
15. Гончаров В.И., Лиепиньш А.В., Рудницкий В.А. Синтез робастных регуляторов низкого порядка // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2001. № 4. С. 36–43.
16. Грязина Е.Н., Поляк Б.Т., Тремба А.А. Синтез регуляторов низкого порядка по критерию H_∞ : параметрический подход // *АиТ*. 2007. № 3. С. 94–105.
17. Параев Ю.И., Смагина В.И. Задачи упрощения структуры оптимальных регуляторов // *АиТ*. 1975. № 6. С. 180–183.
18. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Разреженная обратная связь в линейных системах управления // *АиТ*. 2014. № 12. С. 13–27.
19. Lin F., Fardad M., Jovanović M. Sparse Feedback Synthesis Via the Alternating Direction Method of Multipliers // *Proc. Amer. Control Conf. Montreal, Canada, 2012*. P. 4765–4770.
20. Lin F., Fardad M., Jovanović M. Augmented Lagrangian Approach to Design of Structured Optimal State Feedback Gains // *IEEE Transaction. Automat. Control*. 2011. V. 56. № 12. P. 2923–2929.
21. Айзерман М.А., Малишевский А.В. Некоторые аспекты общей теории выбора лучших вариантов // *АиТ*. 1981. № 2. С. 65–83.
22. Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т. Выбор вариантов: основы теории. М.: Наука, 1991. 240 с.
23. Айзерман М.А., Вольский В.И., Литваков Б.М. Элементы теории выбора. Псевдокритерии и псевдокритериальный выбор. М.: Наука, 1994. 216 с.
24. Алескеров Ф.Т., Хабина Э.Л., Шварц Д.А. Бинарные отношения, графы и коллективные решения. М.: Физматлит, 2012. 341 с.
25. Bruckstein A.M., Donoho D.L., Elad M. From Sparse Solutions of Systems of Equations to Sparse Modeling of Signals and Images // *SIAM Review*. 2009. V. 51. № 1. С. 34–81.
26. Крутько П.Д. Управление исполнительными системами роботов. М.: Наука, 1991. 336 с.
27. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976. 184 с.
28. Волгин Л.Н. Оптимальное дискретное управление динамическими системами. М.: Наука, 1986. 239 с.
29. Мозжечков В.А. Синтез простых робастных регуляторов линейных стационарных динамических систем // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2021. № 3. С. 9–20.
30. Мозжечков В.А. Синтез линейных регуляторов с простой структурой // *АиТ*. 2003. № 1. С. 27–41.
31. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.

**ТЕОРИЯ СИСТЕМ
И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ**

УДК 519.7

**ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДЕФЕКТОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ
НА ОСНОВЕ СКОЛЬЗЯЩИХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ С ОСЛАБЛЕННЫМИ
УСЛОВИЯМИ СУЩЕСТВОВАНИЯ¹**

© 2022 г. А. Н. Жирабок^{a,*}, А. В. Зуев^b, В. Ф. Филаретов^c, А. Е. Шумский^a

^aДальневосточный федеральный ун-т, Владивосток, Россия

^bИнститут проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток, Россия

^cИнститут автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия

*e-mail: zhirabok@mail.ru

Поступила в редакцию 26.01.2021 г.

После доработки 13.12.2021 г.

Принята к публикации 31.01.2022 г.

Рассматривается задача идентификации дефектов в системах, описываемых нелинейными динамическими уравнениями, в присутствии возмущений. Для решения используются наблюдатели, работающие в скользящем режиме. Предлагаемый подход базируется на идее построения редуцированной (имеющей меньшую размерность) модели исходной системы, обладающей избирательной чувствительностью по отношению к дефектам и возмущению. Основной целью введения такой модели является ослабление условий существования скользящих наблюдателей по сравнению с известными работами, в частности, условий минимальной фазовости и детектируемости системы, а также условия согласования. Эффект ослабления достигается за счет того, что модель пониженной размерности может не иметь тех свойств, которые присутствуют в исходной системе и препятствуют возможности построения для нее скользящего наблюдателя. Изложенная теория иллюстрируется примером.

DOI: 10.31857/S0002338822030167

Введение. Одной из задач функционального диагностирования является задача идентификация дефектов [1]. В последние годы для ее реализации активно применяется подход, основанный на наблюдателях, которые работают в скользящем режиме и используют особенности этого режима [2]. Далее наблюдатель со скользящим режимом работы будем называть скользящим наблюдателем.

Настоящая публикация является логическим продолжением статей [3, 4], посвященных разработке методов построения скользящих наблюдателей для решения задачи идентификации дефектов. Указанные наблюдатели описываются дифференциальным уравнением с разрывной правой частью и обеспечивают возникновение в системе скользящего режима при соблюдении определенных условий.

Скользющие наблюдатели применяются для решения задачи идентификации дефектов в линейных [3, 5–7] и нелинейных [4, 8, 9] системах, для обеспечения отказоустойчивого управления [10], в ряде практических приложений [11–13]. Во всех таких работах на исходную систему накладывается ряд ограничений, в частности, требуется, чтобы выполнялось так называемое условие согласования и система была минимально фазовой.

Для ослабления условия согласования были предложены методы, использующие скользящие наблюдатели высокого порядка [14, 15] и каскадное соединение наблюдателей [16], но при этом система должна быть минимально фазовой. В [17] последнее условие ослаблено ценой того, что в выражение для оценки дефекта входит производная величины дефекта, в [18] для этого вводится предположение об ограниченности ошибки оценивания. В [19, 20] требование минимальной фазовости системы ослаблено до условия детектируемости.

¹ Работа поддержана Российским научным фондом: проект 22-29-01303 (выполнен синтез наблюдателей).

Отметим, что в известных работах скользящие наблюдатели строятся на основе исходной системы и, следовательно, имеют размерность, совпадающую с размерностью этой системы. В настоящей статье предложен метод, позволяющий осуществить дальнейшее ослабление указанных условий. В его основе лежит идея использования редуцированной (имеющей меньшую размерность) модели исходной системы, что и позволяет ослабить эти условия. Кроме того, это дает возможность уменьшить размерность скользящих наблюдателей.

1. Построение редуцированной модели. Рассмотрим стационарную систему, описанную нелинейным уравнением состояния и линейной функцией выхода:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) + C\Psi(x(t), u(t)) + Dd(t) + L\rho(t), \\ y(t) &= Hx(t).\end{aligned}\quad (1.1)$$

Здесь $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^l$ – векторы состояния, управления и выхода; $F \in R^{n \times n}$, $G \in R^{n \times m}$, $D \in R^{n \times q}$, $L \in R^{n \times p}$ и $H \in R^{l \times n}$ – известные постоянные матрицы; $d(t) \in R$ – функция, описывающая дефекты: при их отсутствии $d(t) = 0$, при появлении дефекта $d(t)$ становится неизвестной функцией времени; $\rho(t) \in R^p$ – неизвестная функция времени, описывающая действующие на систему возмущения, $\Psi(x, u)$ – нелинейная составляющая:

$$\Psi(x, u) = \begin{pmatrix} \varphi_1(A_1 x, u) \\ \dots \\ \varphi_s(A_s x, u) \end{pmatrix},$$

A_1, \dots, A_s – матрицы-строки; $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ – нелинейные (возможно, недифференцируемые) функции, удовлетворяющие условию Липшица по аргументу x , откуда следует, что функция $\Psi(x, u)$ также удовлетворяет условию Липшица, т.е.

$$\|\Psi(x, u) - \Psi(x', u)\| \leq N\|x - x'\| \quad (1.2)$$

$N \geq 0$ – некоторая константа. Предполагается, что известны, и ограничены нормы $|d(t)|$ и $\|\rho(t)\|$ функций $d(t)$ и $\rho(t)$.

Для решения задачи идентификации функции $d(t)$ в [8] предполагается, что система (1.1) удовлетворяет следующим условиям: 1) $\text{rank}(H[L, D]) = \text{rank}([L, D])$ (условие согласования), 2) все инвариантные нули тройки $(F, [L, D], H)$ лежат в левой полуплоскости (минимальная фазовость). В [19, 20] эти условия ослаблены – требуется, чтобы линейная часть системы (1.1) была детектируемой, т.е. ненаблюдаемая часть системы устойчива.

Целью работы является дальнейшее ослабление этих условий за счет построения скользящих наблюдателей на основе модели исходной системы пониженной размерности, что дополнительно приводит к понижению размерности наблюдателя. Эффект ослабления условий достигается за счет того, что модель пониженной размерности может не иметь тех свойств, которые присутствуют в исходной системе и препятствуют возможности построения для нее скользящего наблюдателя.

Предполагается, что линейная часть системы (1.1) недетектируема, т.е. $\text{Ker}(V^{(n)}) \neq \emptyset$, где

$$V^{(n)} = \begin{pmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{pmatrix},$$

и ненаблюдаемая подсистема линейной части неустойчива.

Д о п у щ е н и е 1. Линейное подпространство $\text{Im}(D) \not\subset \text{Ker}(V^{(n)})$.

Здесь $\text{Im}(D)$ означает линейное подпространство, индуцированное столбцами матрицы D , $\text{Ker}(V^{(n)})$ – линейное подпространство, такое, что из $z \in \text{Ker}(V^{(n)})$ следует $V^{(n)}z = 0$. Обозначим через r_d минимальную сравнительную степень вектора y по отношению к функции $d(t)$, y_* – компоненту вектора y , соответствующую r_d , и R_* – матрицу-строку, такую, что $R_*y(t) = y_*(t)$. Из допущения 1 следует, что $r_d < \infty$ и матрица R_* существует. Напомним, что сравнительная степень вектора y по отношению к функции $d(t)$ – это минимальное целое k , такое, что $HF^k - 1D \neq 0$.

Предположим вначале, что возмущение $\rho(t)$ отсутствует, и построим модель системы (1.1) минимальной размерности с выходом $y_*(t)$, которая описывается уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= F_*x_*(t) + G_*u(t) + J_*y(t) + C_*\Psi(x_*(t), y(t), u(t)) + D_*d(t), \\ y_*(t) &= H_*x_*(t), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $x_* \in R^k$ – вектор состояния меньшей размерности $k < n$, F_* , G_* , J_* , H_* и D_* – матрицы, подлежащие определению, функция $C_*\Psi(x_*, y, u)$ имеет вид

$$C_*\Psi(x_*, y, u) = \begin{pmatrix} \Phi_{i_1}(A_{*1i_1}x_* + A_{*2i_1}y, u) \\ \dots \\ \Phi_{i_p}(A_{*1i_p}x_* + A_{*2i_p}y, u) \end{pmatrix},$$

C_* , A_{*1i_1} , A_{*2i_1} , ..., A_{*1i_p} , A_{*2i_p} – матрицы, подлежащие определению. Как обычно [3, 7], предполагается, что при отсутствии дефектов и возмущений выполняются равенства

$$x_*(t) = \Phi x(t), \quad y_*(t) = R_*y(t)$$

для некоторых матриц Φ и R_* . Известно [4], что эти матрицы удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \Phi F &= F_*\Phi + J_*H, & R_*H &= H_*\Phi, & G_* &= \Phi G, & D_* &= \Phi D, \\ A_{*i} &= (A_{*1i} \ A_{*2i}) \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}, & i &= \overline{1, i_p}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

C_* – матрица, получаемая из произведения ΦC путем удаления нулевых столбцов, i_1, \dots, i_p – номера ненулевых столбцов в ΦC .

Д о п у щ е н и е 2. Пара (F_*, H_*) наблюдаема.

Из допущения 2 следует, что матрицы F_* и H_* могут быть представлены в каноническом виде:

$$F_* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_* = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1).$$

Такой вид матриц позволяет получить следующие уравнения для строк матриц Φ и J_* :

$$\Phi_k = R_*H, \quad \Phi_i F = \Phi_{i-1} + J_{*i}H, \quad i = \overline{k, 2}, \quad \Phi_1 F = J_{*1}H. \quad (1.5)$$

В [3, 21] показано, что эти уравнения могут быть свернуты в одно:

$$R_*HF^k = J_{*k}HK^{k-1} + J_{*(k-1)}HF^{k-2} + \dots + J_{*1}H.$$

Запишем его в виде

$$(1 - J_{*k} \dots - J_{*1})W^{(k)} = 0, \quad (1.6)$$

где

$$W^{(k)} = \begin{pmatrix} R_*HF^k \\ HF^{k-1} \\ \vdots \\ H \end{pmatrix},$$

и найдем решение уравнения (1.6) при минимальном $k \geq r_d$. Далее из (1.5) определяются строки матрицы Φ , находится матрица C_* и проверяется условие

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ A_i \end{pmatrix}, \quad i = \overline{i_1, i_p}. \quad (1.7)$$

Если оно выполняется, то принимается $G_* = \Phi G$ и $D_* = \Phi D$; матрицы A_{*i_1} и A_{*i_p} , $i = \overline{i_1, i_p}$, определяются из (1.4). При невыполнении условия (1.7) ищется другое решение уравнения (1.6) при прежней или увеличенной размерности k . Предполагается, что $D_* \neq 0$.

2. Преобразование редуцированной модели. Дальнейшие построения осуществляются по аналогии с [20] с тем отличием, что предложенные там действия применяются в настоящей работе не к исходной системе, а модели (1.3) с учетом канонической формы матриц F_* и H_* . Для этого представим описывающие ее матрицы в следующем виде:

$$\begin{aligned} F_* &= \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix}, \quad H_* = (0 \ 0 \ \dots \ 1), \quad G_* = \begin{pmatrix} G_{*1} \\ G_{*2} \end{pmatrix}, \\ J_* &= \begin{pmatrix} J_{*1} \\ J_{*2} \end{pmatrix}, \quad C_* = \begin{pmatrix} C_{*1} \\ C_{*2} \end{pmatrix}, \quad D_* = \begin{pmatrix} D_{*1} \\ D_{*2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in R^{(k-1) \times (k-1)}, \quad F_2 = 0 \in R^{(k-1) \times 1},$$

$$F_3 = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1) \in R^{1 \times (k-1)}, \quad F_4 = 0;$$

остальные матрицы в (2.1) имеют соответствующие размеры.

Введем преобразование координат $z = Tx_*$ с матрицей $T = \begin{pmatrix} I_{k-1} & Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $I_{k-1} \in R^{(k-1) \times (k-1)}$ — единичная матрица, матрица-столбец $Q = (q_1 \ q_2 \ \dots \ q_{k-1})^T \in R^{(k-1)}$ выбирается так, чтобы сделать матрицу $\bar{F}_1 = F_1 + QF_3$ устойчивой. Поскольку пара (F_1, F_3) с очевидностью наблюдаема, такая матрица существует. В результате модель (1.3) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= \bar{F}_1 z_1(t) + \bar{F}_2 y_*(t) + \bar{G}_{*1} u(t) + \bar{J}_{*1} y(t) + \bar{C}_{*1} \Psi(z_1(t), y_*(t), y(t), u(t)) + \bar{D}_{*1} d(t), \\ \dot{z}_2(t) &= \bar{F}_3 z_1(t) + \bar{F}_4 y_*(t) + \bar{G}_{*2} u(t) + \bar{J}_{*2} y(t) + \bar{C}_{*2} \Psi(z_1(t), y_*(t), y(t), u(t)) + \bar{D}_{*2} d(t), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$y_* = z_2,$$

где

$$\bar{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & q_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & q_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & q_{k-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & q_{k-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{F}_2 = - \begin{pmatrix} q_1 q_{k-1} \\ q_2 q_{k-1} + q_1 \\ \vdots \\ q_{k-2} q_{k-1} + q_{k-2} \\ q_{k-1}^2 + q_{k-1} \end{pmatrix},$$

$$\bar{F}_3 = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1) \in R^{1 \times (k-1)}, \quad \bar{F}_4 = -a_{k-1}, \quad \bar{G}_{*1} = G_{*1} + QG_{*2}, \quad \bar{G}_{*2} = G_{*2},$$

$$\bar{J}_{*1} = J_{*1} + QJ_{*2}, \quad \bar{J}_{*2} = J_{*2}, \quad \bar{C}_{*1} = C_{*1} + QC_{*2}, \quad \bar{C}_{*2} = C_{*2}, \quad \bar{D}_{*1} = D_{*1} + QD_{*2}, \quad \bar{D}_{*2} = D_{*2}.$$

Отметим, что ключевую роль в модели (2.2) играет тот факт, что матрица \bar{F}_1 устойчива. В [8] это следует из того, что все инвариантные нули тройки $(F, [L \ D], H)$ лежат в левой полуплоскости, в

[19, 20] – из детектируемости системы (1.1), в нашей работе – из канонического вида матриц F_* и H_* .

3. Построение скользящего наблюдателя. Поскольку матрица \bar{F}_1 устойчива, существуют симметрические положительно-определенные матрицы P и W , такие, что $\bar{F}_1^T P + P \bar{F}_1 = -W$. По аналогии с [20] скользящий наблюдатель строится в виде

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}}_1(t) &= \bar{F}_1 \hat{z}_1(t) + \bar{F}_2 y_*(t) + \bar{G}_{*1} u(t) + \bar{J}_{*1} y(t) + \bar{C}_{*1} \Psi(\hat{z}_1(t), y_*(t), y(t), u(t)) + \bar{K}_1 v(t), \\ \dot{\hat{z}}_2(t) &= \bar{F}_3 \hat{z}_1(t) + \bar{F}_4 y_*(t) + \bar{G}_{*2} u(t) + \bar{J}_{*2} y(t) + \bar{C}_{*2} \Psi(\hat{z}_1(t), y_*(t), y(t), u(t)) + k_2 e_2(t) + k_3 v(t), \\ \hat{y}_* &= \hat{z}_2,\end{aligned}\quad (3.1)$$

где $e_2(t) = y_*(t) - \hat{y}_*(t)$, $v(t) = \text{sign}(e_2(t))$, $\bar{K}_1 = P^{-1} \bar{F}_3^T k_1$, k_1, k_2, k_3 – положительные числа, $e_1(t) = z_1(t) - \hat{z}_1(t)$.

Из (2.2) и (3.1) получаем

$$\begin{aligned}\dot{e}_1(t) &= \bar{F}_1 e_1(t) + \bar{C}_{*1} \Delta \Psi + \bar{D}_{*1} d(t) - \bar{K}_1 v(t), \\ \dot{e}_2(t) &= \bar{F}_3 e_1(t) + \bar{C}_{*2} \Delta \Psi + \bar{D}_{*2} d(t) - k_2 e_2(t) - k_3 v(t),\end{aligned}\quad (3.2)$$

где $\Delta \Psi = \Psi(z_1, y_*, y, u) - \Psi(\hat{z}_1, y_*, y, u)$. Будем полагать, что функция $\Psi(x, u)$ удовлетворяет условию Липшица (1.2), а тогда $\Psi(z_1, y_*, y, u)$ также удовлетворяет этому условию по z_1 :

$$\|\Delta \Psi\| \leq N_* \|e_1(t)\| \quad (3.3)$$

для некоторого $N_* > 0$.

Т е о р е м а. Пусть выполняется условие $\underline{\lambda}(W) \geq 2\|P\bar{C}_{*1}\|N_*$. Тогда если $\bar{D}_{*1} = 0$, то наблюдатель (3.1) оценивает функцию $d(t)$ в виде

$$\hat{d}(t) = k_3 D_{*2}^+ v_{\text{eq}}(t), \quad (3.4)$$

в противном случае как

$$\hat{d}(t) = D_{*1}^+ \bar{K}_1 v_{\text{eq}}(t), \quad (3.5)$$

где $D_{*1}^+ = (\bar{D}_{*1}^T \bar{D}_{*1})^{-1} \bar{D}_{*1}$ и $D_{*2}^+ = (\bar{D}_{*2}^T \bar{D}_{*2})^{-1} \bar{D}_{*2}$, $v_{\text{eq}}(t)$ – сигнал, представляющий разрывную функцию $v(t)$. Согласно [8], в качестве $v_{\text{eq}}(t)$ может быть принята непрерывная функция

$$v_{\text{eq}}(t) = \frac{e_1(t)}{\|e_1(t)\| + \varepsilon}, \quad (3.6)$$

где ε – малое положительное число.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По аналогии с [20] докажем, во-первых, что $\|e_1\| \leq \delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$, где

$$\delta_1 = \frac{2\bar{\lambda}(P)(\beta\|P\bar{D}_{*1}\| + \|P\bar{K}_1\|)}{\underline{\lambda}(P)(\underline{\lambda}(W) - 2\|P\bar{C}_{*1}\|N_*)}, \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{\bar{\lambda}(P)}{\underline{\lambda}(P)}} \|e_1(0)\|,$$

$\beta > \|d(t)\|$, $\underline{\lambda}(P)$ и $\bar{\lambda}(P)$ – минимальное и максимальное собственные числа матрицы P соответственно. Рассмотрим функцию Ляпунова $V_1 = e_1^T P e_1$ и найдем ее производную по времени с учетом (3.2) и (3.3):

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= -e_1^T W e_1 + 2e_1^T P \bar{D}_{*1} d - 2e_1^T P \bar{K}_1 v + 2e_1^T P \bar{C}_{*1} \Delta \Psi \leq \\ &\leq -\|e_1\|^2 (\underline{\lambda}(W) - 2\|P\bar{C}_{*1}\|N_*) + 2\|e_1\|(\beta\|P\bar{D}_{*1}\| + \|P\bar{K}_1\|).\end{aligned}\quad (3.7)$$

Используя известное неравенство

$$\underline{\lambda}(P)\|e_1\|^2 \leq V_1 \leq \bar{\lambda}(P)\|e_1\|^2,$$

получим

$$\dot{V} \leq \frac{\underline{\lambda}(W) - 2\|P\bar{C}_{*1}\|N_*}{\underline{\lambda}(P)} V_1 + \frac{2\sqrt{V_1}}{\underline{\lambda}(P)} (\beta\|P\bar{D}_{*1}\| + \|P\bar{K}_1\|).$$

Остальная часть доказательства с учетом того, что $\underline{\lambda}(W) \geq 2\|P\bar{C}_{*1}\|N_*$, совпадает с [20].

Покажем, во-вторых, что при соответствующем выборе коэффициентов усиления наблюдателя $e_2 = 0$ за конечное время, т.е. достигается скользящий режим. Рассмотрим функцию Ляпунова $V_2 = e_2^2$ и найдем ее производную по времени с учетом (3.2) и (3.3):

$$\dot{V}_2 = 2e_2\dot{e}_2 = 2e_2(\bar{F}_3e_1(t) + \bar{C}_{*2}\Delta\Psi + \bar{D}_{*2}d - k_2e_2 - k_3v).$$

Поскольку $v = \text{sign}(e_2)$, то $2e_2k_3v = 2k_3|e_2|$ и

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -2k_2e_2^2 + 2|e_2|(-k_3 + \|\bar{F}_3\|\|e_1\| + \|\bar{C}_{*2}\|N_*\|e_1\| + \|\bar{D}_{*2}\|\|d\|) \leq \\ &\leq -2k_2e_2^2 + 2|e_2|(-k_3 + \delta + \delta\|\bar{C}_{*2}\|N_* + \beta\|\bar{D}_{*2}\|). \end{aligned}$$

Если k_3 удовлетворяет условию

$$k_3 \geq \delta(1 + \|\bar{C}_{*2}\|N_*) + \beta\|\bar{D}_{*2}\|, \quad (3.8)$$

и $k_2 > 0$, то $\dot{V}_2 \leq 0$. По аналогии с [20] можно показать, что $\dot{V}_2 \leq -c_2\sqrt{V_2}$ для некоторого $c_2 > 0$, т.е. за конечное время возникает скользящий режим с $e_2 = \dot{e}_2 = 0$.

В-третьих, для доказательства того, что при соответствующем выборе коэффициентов усиления наблюдателя $e_1 = 0$ за конечное время, рассмотрим функцию Ляпунова $V_1 = e_1^T P e_1$ и ее производную (3.7). Из второго уравнения в (3.2) и скользящего режима, когда $e_2 = \dot{e}_2 = 0$, следует $\bar{F}_3e_1 = k_3v - \bar{C}_{*2}\Delta\Psi - \bar{D}_{*2}d$. Так как $\bar{K}_1 = P^{-1}\bar{F}_3^T k_1$, из (3.7) вытекает

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -e_1^T W e_1 + 2e_1^T P \bar{D}_{*1} d - 2e_1^T \bar{F}_3^T k_1 v + 2e_1^T P \bar{C}_{*1} \Delta\Psi = \\ &= -e_1^T W e_1 + 2e_1^T P \bar{D}_{*1} d - 2(k_3 v - \bar{C}_{*1} \Delta\Psi - \bar{D}_{*2} d)^T k_1 v + e_1^T P \bar{C}_{*1} \Delta\Psi. \end{aligned}$$

Так как $\|e_1\| \leq \delta$, получаем

$$\dot{V}_1 \leq -e_1^T W e_1 + 2(\beta\delta\|P\bar{D}_{*1}\| - k_1 k_3 + k_1 \delta \|\bar{C}_{*2}\|N_* + k_1 \beta \|\bar{D}_{*2}\| + \|e_1\|^2 \|P\bar{C}_{*1}\|N_*).$$

Если k_3 и k_1 выбрать соответственно как

$$k_3 \geq \beta\|\bar{D}_{*2}\| + \delta\|\bar{C}_{*2}\|N_*, \quad k_1 \geq \frac{\delta\beta\|P\bar{D}_{*1}\| + \delta^2\|P\bar{C}_{*1}\|N_*}{k_3 - \beta\|\bar{D}_{*2}\| - \delta\|\bar{C}_{*2}\|N_*}, \quad (3.9)$$

то $\dot{V}_1 \leq 0$ и по аналогии с [20] можно показать, что $\dot{V}_1 \leq -c_1\sqrt{V_1}$ для некоторого $c_1 > 0$, т.е. за конечное время возникает скользящий режим с $e_1 = \dot{e}_1 = 0$. Исходя из (3.8) и (3.9), коэффициент k_3 следует выбрать из условия

$$k_3 \geq \delta(1 + \|\bar{C}_{*2}\|N_*) + \beta\|\bar{D}_{*2}\|. \quad (3.10)$$

Теорема доказана.

Поскольку в скользящем режиме $e_1 = \dot{e}_1 = 0$ и $e_2 = \dot{e}_2 = 0$, то при $\bar{D}_{*1} = 0$ функция $d(t)$ может быть оценена из второго уравнения в (3.2) в виде (3.4); в противном случае нужно использовать первое уравнение в (3.2), что дает оценку (3.5).

4. Идентификация в присутствии возмущений. Условие $\Phi L = 0$ нечувствительности к возмущению имеет вид $(1 - J_{*k} \dots - J_{*1})L^{(k)} = 0$ [3, 4], где

$$L^{(k)} = \begin{pmatrix} R_*HL & R_*HFL & \dots & R_*HF^{k-1}L \\ 0 & HL & \dots & HF^{k-2}L \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Последнее уравнение и (1.6) дают уравнение

$$(1 - J_{*k} \dots - J_{*1})(W^{(k)}L^{(k)}) = 0, \quad (4.1)$$

решение которого ищется при минимальном $k \geq r_d$; дальнейшие действия аналогичны описанным выше. Если при всех $k < n$ уравнение (4.1) не имеет решения, модель, не чувствительная к возмущению, не существует. В этом случае необходимо обратиться к робастным методам, описанным в [3], которые позволят найти приближенное решение.

5. Пример. Рассмотрим систему управления:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + \sin(x_2(t)) + x_2(t) + u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + x_4(t) + d(t), \\ \dot{x}_3(t) &= x_3(t) + x_4(t) + \rho(t), \\ \dot{x}_4(t) &= |x_3(t)| - x_4(t) + \rho(t), \\ y_1(t) &= x_1(t), \quad y_2(t) = x_4(t). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Приведем матрицы и нелинейности, описывающие систему:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi(x, u) = \begin{pmatrix} \sin(A_1x) \\ |A_2x| \end{pmatrix}, \quad A_1 = (0 \ 1 \ 0 \ 0), \quad A_2 = (0 \ 0 \ 1 \ 0).$$

Так как $\text{rank}(H[L \ D]) = 1 \neq \text{rank}([L \ D]) = 2$, то условие согласования не выполняется. Нетрудно видеть, что

$$V^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда $\text{Ker}(V^{(3)}) = (0 \ 0 \ 1 \ 0)^T$, а так как $F(3, 3) = 1$, ненаблюдаемая часть системы неустойчива, т.е. система недетектируема. Ясно, что $\text{Im}(D) \not\subset \text{Ker}(V^{(3)})$, $r_d = 2$, $y_* = y_1$ и $R_* = (1 \ 0)$. Матрицы $W^{(2)}$ и $L^{(2)}$ принимают вид

$$W^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

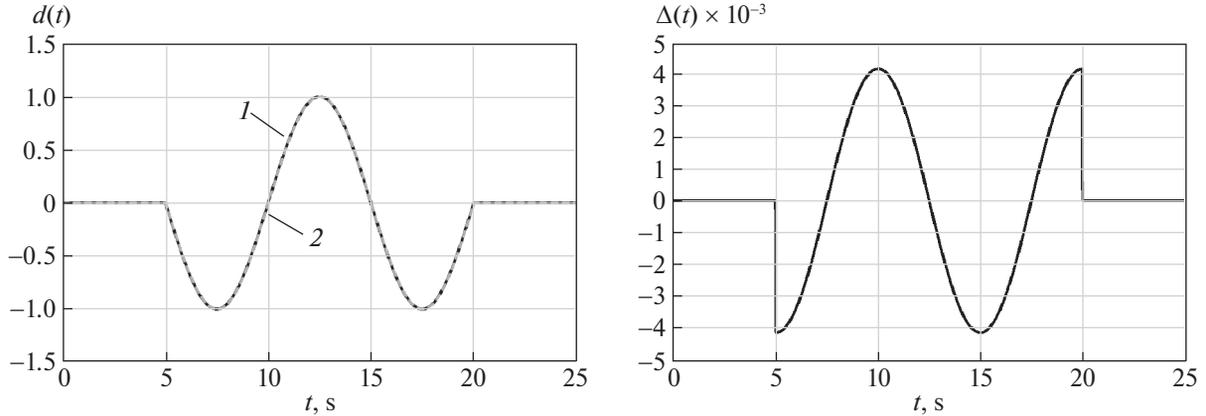


Рис. 1. Поведение синусоидальной функции $d(t)$ (1), ее оценки (2) и ошибки оценивания $\Delta(t)$

Нетрудно видеть, что уравнение (4.1) имеет решение с матрицами $J_{*1} = (-1, 1)$, $J_{*2} = (-2, 0)$, тогда $\Phi_1 = (1 \ 1 \ 0 \ 0)$, $\Phi_2 = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$ и $D_* = (0 \ 1)^T$, $G_* = (1 \ 1)^T$, $C_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C_* \Psi(x_*, y, u) = \sin(x_{*1} - y_1)$. В результате модель (1.3) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{*1}(t) &= -y_1(t) + y_2(t) + \sin(x_{*1}(t) - y_1(t)) + u(t) + d(t), \\ \dot{x}_{*2}(t) &= x_{*1}(t) - 2y_1(t) + \sin(x_{*1}(t) - y_1(t)) + u(t), \\ y_*(t) &= z_{*2}(t), \end{aligned}$$

где $x_{*1} = x_1 + x_2$, $x_{*2} = x_1$. Принимая $Q = -1$ и $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, получаем модель (2.2):

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= -z_1(t) - y_*(t) + y_1(t) + y_2(t) + u(t) + d(t), \\ \dot{z}_2(t) &= z_1(t) + y_*(t) - 2y_1(t) + \sin(z_1(t)) + u(t), \\ y_*(t) &= z_2(t), \end{aligned}$$

где $z_1 = x_{*1} - x_{*2}$, $z_2 = x_{*2}$. Из вида модели следует, что $\bar{F}_3 = 1$, $\bar{D}_{*1} = 1$, $\bar{D}_{*2} = 0$, $\bar{C}_{*1} = 0$, $\bar{C}_{*2} = 1$, $N_* = 1$; так как $\bar{F}_1 = -1$, можно принять $P := 1$, откуда $W = 2$. Ясно, что условие теоремы выполняется.

Скольльзящий наблюдатель описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_1(t) &= -\hat{z}_1(t) - y_*(t) + y_1(t) + y_2(t) + u(t) + \bar{K}_1 v(t), \\ \dot{\hat{z}}_2(t) &= \hat{z}_1(t) + y_*(t) - 2y_1(t) + \sin(\hat{z}_1(t)) + u(t) + k_2 v(t) + k_3 e_2(t), \\ \hat{y}_*(t) &= \hat{z}_2(t), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $e_2(t) = y_*(t) - \hat{y}_*(t)$, $v(t) = \text{sign}(e_2(t))$, $\bar{K}_1 = P^{-1} \bar{F}_3 k_1 = k_1$, $k_2 > 0$, $\beta > \|d(t)\|$, $\delta = \max\{2(\beta + k_1), |e_1(0)|\}$. Коэффициенты k_1 и k_3 определяются условиями (3.9) и (3.10), на основе которых можно принять $k_1 = \beta$, $k_3 = 2\delta$. Так как $\bar{D}_{*1} \neq 0$, функция $d(t)$ может быть оценена в виде

$$\hat{d}(t) = k_1 \hat{D}_{*1}^+ v_{\text{eq}}(t) = 5\beta v_{\text{eq}}(t),$$

где $v_{\text{eq}}(t)$ дается выражением (3.6).

Для моделирования рассмотрим систему (5.1) и наблюдатель (5.2) с $u(t) = \sin(t)$, $\beta = 1.5$, $k_1 = 1.5$, $k_2 = 0.01$, $k_3 = 6$, $|e_1(0)| = 0$. Результаты моделирования приведены на рис. 1 и 2, где показано поведение функции $d(t)$, ее оценки $\hat{d}(t)$ и ошибки оценивания $\Delta(t) = \hat{d}(t) - d(t)$ для двух типов функции $d(t)$ – синусоидальной и ступенчатой соответственно.

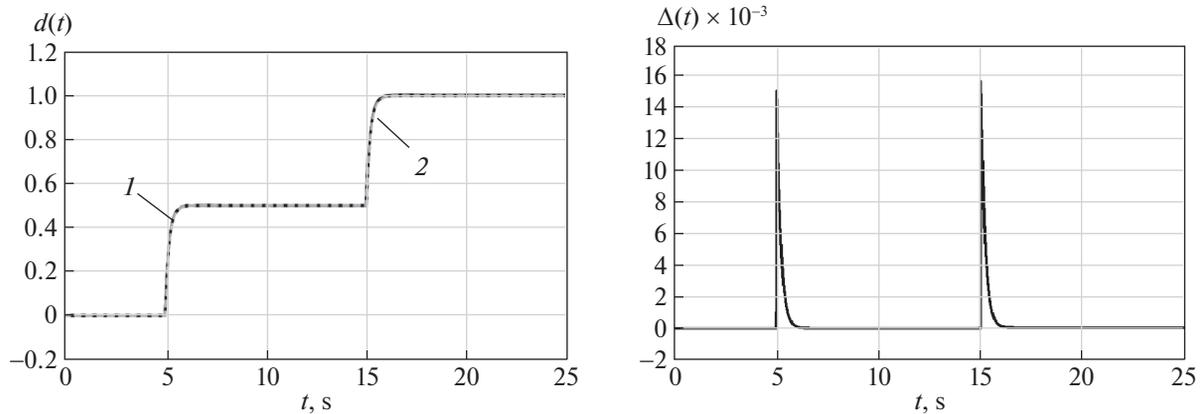


Рис. 2. Поведение ступенчатой функции $d(t)$ (1), ее оценки (2) и ошибки оценивания $\Delta(t)$

Заключение. Рассмотрена задача идентификации дефектов в системах, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями, в присутствии возмущений на основе наблюдателей, работающих в скользящем режиме. Скользящий наблюдатель строится на базе редуцированной (имеющей меньшую размерность) модели исходной системы, обладающей избирательной чувствительностью по отношению к дефектам и возмущению. За счет введения такой модели удалось ослабить условия существования скользящих наблюдателей по сравнению с известными работами. Эффект ослабления указанных условий возник за счет того, что модель пониженной размерности может не иметь тех свойств, которые присутствуют в исходной системе и препятствуют возможности построения для нее скользящего наблюдателя. Результаты моделирования подтвердили работоспособность предложенного метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мироновский Л.А. Функциональное диагностирование динамических систем. М.—СПб.: МГУ-ГРИФ, 1998.
2. Уткин В.И. Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974.
3. Жирабок А.Н., Зуев А.В., Шумский А.Е. Методы идентификации и локализации дефектов в линейных системах на основе скользящих наблюдателей // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 73–89.
4. Жирабок А.Н., Зуев А.В., Шумский А.Е. Метод идентификации дефектов в нелинейных системах на основе скользящих наблюдателей // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 1. С. 11–23.
5. Edwards C., Spurgeon S. On the Development of Discontinuous Observers // Intern. J. Control. 1994. V. 59. P. 1211–1229.
6. Floquet T., Barbot J., Perruquetti W., Djemai M. On the Robust Fault Detection via a Sliding Mode Disturbance Observer // Intern. J. Control. 2004. V. 77. P. 622–629.
7. Жирабок А.Н., Зуев А.В., Шумский А.Е. Диагностирование линейных динамических систем: подход на основе скользящих наблюдателей // АиТ. 2020. № 2. С. 18–35.
8. Yan X., Edwards C. Nonlinear Robust Fault Reconstruction and Estimation Using Sliding Mode Observers // Automatica. 2007. V. 43. P. 1605–1614.
9. He J., Zhang C. Fault Reconstruction Based on Sliding Mode Observer for Nonlinear Systems // Math. Problems in Eng. 2012. V. 2012. ID 451843. P. 1–22.
10. Alwi H., Edwards C. Fault Tolerant Control Using Sliding Modes with On-line Control Allocation // Automatica. 2008. V. 44. P. 1859–1866.
11. Chandra K., Alwi H., Edwards C. Fault Reconstruction for a Quadrotor Using an LPV Sliding Mode Observer // Proc. 9th IFAC Sympos. Safeprocess. Paris, France, 2015. P. 374–379.
12. Zhang K., Jiang B., Yan X., Mao Z. Sliding Mode Observer Based Incipient Sensor Fault Detection with Application to High-Speed Railway Traction Device // ISA Transactions. 2016. V. 63. P. 49–59.
13. Zhirabok A., Zuev A., Filaretov V. Fault Identification in Underwater Vehicle Thrusters via Sliding Mode Observers // Intern. J. Appl. Math. and Comp. Sci. 2020. V. 30. № 4. P. 679–688.
14. Floquet T., Edwards C., Spurgeon S. On Sliding Mode Observers for Systems with Unknown Inputs // Intern. J. Adapt. Contr. and Signal Proc. 2007. V. 21. P. 638–656.

15. *Fridman L., Levant A., Davila J.* Observation of Linear Systems with Unknown Inputs via High-order Sliding-Modes // Intern. J. Syst. Sci. 2007. V. 38. P. 773–791.
16. *Tan C., Edwards C.* Robust Fault Reconstruction Using Multiple Sliding Mode Observers in Cascade: Development and Design // Proc. of American Contr. Conf. St. Louis, USA, 2009. P. 3411–3416.
17. *Alwi H., Edwards C., Tan C.* Sliding Mode Estimation Schemes for Incipient Sensor Faults // Automatica. 2009. V. 45. P. 1679–1685.
18. *Rios H., Efimov D., Davila J., Raissi T., Fridman L., Zolghadri A.* Nonminimum Phase Switched Systems: HOSM Based Fault Detection and Fault Identification via Volterra Integral Equation // Intern. J. Adapt. Contr. and Signal Proc. 2014. V. 28. P. 1372–1397.
19. *Hmidi R., Brahim A., Hmida F., Sellami A.* Robust Fault Tolerant Control Design for Nonlinear Systems not Satisfying Matching and Minimum Phase Conditions // Intern. J. Contr., Autom. and Syst. 2020. V. 18. P. 1–14.
20. *Wang X., Tan C., Zhou D.* A Novel Sliding Mode Observer for State and Fault Estimation in Systems not Satisfying Matching and Minimum Phase Conditions // Automatica. 2017. V. 79. P. 290–295.
21. *Жирабок А.Н., Шумский А.Е., Павлов С.В.* Диагностирование линейных динамических систем непараметрическим методом // АиТ. 2017. № 7. С. 3–21.

**ТЕОРИЯ СИСТЕМ
И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ**

УДК 531.36

**ОБ УПРАВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЕМ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО
МАЯТНИКА С УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА¹**

© 2022 г. Ю. Д. Селюцкий

НИИ механики МГУ, Москва, Россия

e-mail: seliutski@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 09.11.2021 г.

После доработки 06.12.2021 г.

Принята к публикации 31.01.2022 г.

Рассматривается динамика колебательной ветроэнергетической установки, рабочим элементом которой является аэродинамический маятник с упруго закрепленной точкой подвеса. Исследуется устойчивость “флюгерного” положения равновесия и возможность стабилизации/дестабилизации этого положения за счет изменения радиуса инерции маятника и коэффициента, характеризующего демпфирование в системе и нагрузку в электрической цепи. Проведено численное исследование периодических режимов. Проанализировано влияние указанных параметров на область существования этих режимов. Показано, в частности, что при достаточно маленьком радиусе инерции “флюгерное” положение асимптотически устойчиво и является глобально притягивающим. Предложен алгоритм управления радиусом инерции, обеспечивающий гашение колебаний системы в случае, когда скорость потока превышает некоторое заданное значение, а также дестабилизацию флюгерного равновесия и выход на колебательный режим при уменьшении скорости потока до допустимых значений.

DOI: 10.31857/S000233882203012X

Введение. Сложная экологическая ситуация заставляет людей искать различные возобновляемые источники энергии. Кроме того, использование таких источников позволяет обеспечить электропитание в местах, куда невозможно провести стационарные линии электропередачи. В частности, подобные системы могут быть весьма полезны при освоении других планет. Одним из основных источников возобновляемой энергии является ветер. Для преобразования его энергии в электричество, как правило, используют ветротурбины разных типов (с горизонтальной или вертикальной осью вращения). Однако в последние два десятилетия активно изучается возможность создания ветроэнергетических установок (малых и миниатюрных), в которых рабочий элемент не вращается в потоке ветра, а совершает колебания.

Эти колебания могут быть вызваны различными эффектами, такими, как флаттер, галопирование, сход вихрей и т.д. Так, в публикациях [1–4] изучается динамика ветроэнергетических установок, в которых рабочий элемент представляет собой тонкое крыло и совершает колебания типа флаттера. Рассматриваются разные конфигурации таких устройств. Электричество генерируется пьезоэлементами, которые деформируются в процессе колебаний крыла.

Возможность использования галопирования, т.е. поступательных колебаний плохообтекаемого тела, которые совершаются в направлении поперек набегающего потока, анализируется в [5]. В [6] даны оценки влияния электрической нагрузки на мощность, вырабатываемую ветроэнергетической установкой, рабочий элемент которой совершает такие колебания. Ряд публикаций, в частности, [7, 8], посвящены изучению влияния формы тела на эффективность отбора энергии потока за счет галопирования.

В [9] анализируется возможность выработки энергии за счет колебаний кругового цилиндра, индуцированных сходящими вихрями. В [10] исследуется влияние числа Рейнольдса на характеристики подобных колебаний (включая выходную мощность). Автор [11] показывает, что система типа динамического гасителя колебаний при надлежащем подборе параметров позволяет увеличить мощность, вырабатываемую за счет колебаний, индуцированных вихрями.

¹ Работа выполнена при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Фундаментальные и прикладные исследования космоса”.

В [12, 13] рассматриваются вызванные потоком колебания двойного аэродинамического маятника и показано, что этот объект также может применяться в качестве рабочего элемента колебательных ветроэнергетических установок.

Можно выделить два основных способа генерации электроэнергии, которые могут быть реализованы в ветроэнергетических установках колебательного типа. Преимуществом этих способов является отсутствие необходимости преобразования колебательного движения во вращение. Первый – это применение пьезоэлементов, о чем упоминалось выше, второй – использование линейных генераторов на постоянном магните. В [14, 15] показано, что такие генераторы также могут быть достаточно эффективны в ветроустановках рассматриваемого типа.

В целом, задача поиска наиболее эффективной конфигурации ветроэнергетических установок колебательного типа в настоящее время остается открытой.

Необходимо отметить, что отдельной проблемой в динамике ветроэнергетических установок является необходимость их торможения, когда скорость потока становится слишком большой (во избежание поломки), и разгона, когда эта скорость возвращается в допустимые пределы. Поэтому целесообразно предусмотреть возможность управления в этих системах. Одним из способов управления является регулирование нагрузки (для автономных малых ветроэнергетических установок с вертикальной осью вращения такое управление описано, в частности, в [16, 17]). Кроме того, в ряде работ (например, [11, 18]) описывается пассивное управление ветроэнергетическими установками, осуществляемое за счет перемещения внутренних масс и направленное на повышение производительности.

В статье рассматривается электромеханическая система, представляющая собой аэродинамический маятник с упруго закрепленной точкой подвеса, соединенный с линейным электрогенератором. Изучаются области устойчивости “флюгерного” положения равновесия в пространстве параметров. Анализируется возможность его стабилизации/дестабилизации путем изменения радиуса инерции маятника и коэффициента, характеризующего демпфирование и нагрузку в электрической цепи. С помощью численного моделирования исследуются периодические режимы, возникающие в этой системе, и влияние указанных параметров на область существования этих режимов.

1. Описание системы и постановка задачи. Рассмотрим электромеханическую систему, состоящую из аэродинамического маятника, соединенного с линейным электрогенератором (рис. 1). Маятник представляет собой крыло с симметричным профилем, закрепленное на державке O_1V (твердом стержне) таким образом, что хорда AB крыла расположена на этом стержне. Ось вращения маятника O_1 вертикальна и закреплена на ползуне O_1E , который может двигаться вдоль неподвижной горизонтальной оси OY . Таким образом, маятник может совершать колебания в горизонтальной плоскости. Ползун с помощью цилиндрической пружины прикреплен к неподвижной точке O .

В точке E ползуна находится постоянный магнит. Этот магнит представляет собой сердечник линейного электрогенератора. При его возвратно-поступательном движении в обмотке генератора (катушке индуктивности) возникает электродвижущая сила (ЭДС). К обмотке генератора подключена внешняя полезная нагрузка, которая моделируется активным сопротивлением R .

Система помещена в поток среды, скорость которого на бесконечности постоянна, горизонтальна и перпендикулярна оси OY . Будем считать, что поток воздействует только на крыло и воспользуемся для описания этого воздействия квазистатическим подходом. Предположим, что аэродинамические силы (подъемная сила L и сила лобового сопротивления D) приложены в середине хорды C , причем вектор D направлен против воздушной скорости V_C этой точки (т.е. ее скорости относительно набегающего потока), а L – перпендикулярно ему. Кроме того, на маятник действует аэродинамический момент M_z .

Описание аэродинамического воздействия на рабочий элемент ветроэнергетической установки представляет собой достаточно сложную задачу. Следуя [19, 20], воспользуемся квазистатическим подходом. С одной стороны, он позволяет описать поведение объекта с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений. С другой стороны, он во многих случаях обеспечивает достаточно хорошую точность при моделировании. В рамках этого подхода аэродинамические силы и момент имеют следующую структуру:

$$L = \frac{\rho S}{2} V_C^2 C_l(\alpha), \quad D = \frac{\rho S}{2} V_C^2 C_d(\alpha), \quad M_z = \frac{\rho S}{2} V_C^2 b C_m(\alpha). \quad (1.1)$$

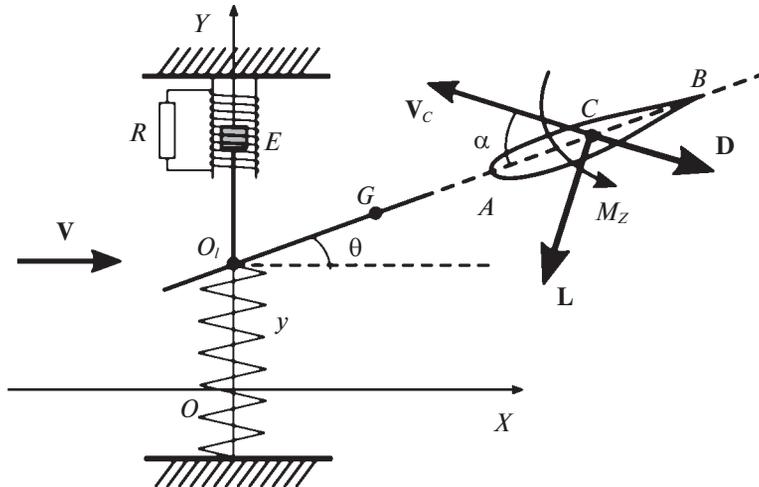


Рис. 1. Аэродинамический маятник в упругом подвесе, соединенный с линейным генератором

Здесь ρ – плотность среды, b – длина хорды крыла, S – площадь крыла, $C_l(\alpha)$, $C_d(\alpha)$, $C_m(\alpha)$ – безразмерные коэффициенты подъемной силы, лобового сопротивления и аэродинамического момента соответственно. Будем считать, что они зависят только от мгновенного угла атаки α , под которым понимается угол между вектором V_c и хордой крыла. Величины V_c и α удовлетворяют следующим кинематическим соотношениям:

$$\begin{aligned} V_c \cos \alpha &= V \cos \theta - \frac{dy}{dt} \sin \theta, \\ V_c \sin \alpha &= V \sin \theta + \frac{dy}{dt} \cos \theta + r \frac{d\theta}{dt}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь V – скорость потока на бесконечности, r – расстояние от точки подвеса до середины C хорды.

Введем неподвижную систему координат OXY и будем использовать в качестве обобщенных координат величины ординату y оси вращения маятника и угол θ между державкой и осью абсцисс. Будем считать без потери общности, что пружина крепления не напряжена, когда $y = 0$. Кроме того, предположим, что пружина имеет нелинейную жесткость: $K = k + k_3 y^2$.

Для описания электромеханического взаимодействия между механической и электрической частями системы воспользуемся подходом, примененным, в частности, в [16]. Составим уравнения динамики:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 y}{dt^2} + m \xi \frac{d^2 \theta}{dt^2} \cos \theta - m \xi \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \theta + h \frac{dy}{dt} + ky + k_3 y^3 &= \\ = -\frac{\rho S}{2} V_c^2 (C_l(\alpha) \cos(\alpha - \theta) + C_d(\alpha) \sin(\alpha - \theta)) - cI, \\ m(r_0^2 + \xi^2) \frac{d^2 \theta}{dt^2} + m \xi \frac{d^2 y}{dt^2} \cos \theta &= \frac{\rho S}{2} V_c^2 (b C_m(\alpha) - r C_l(\alpha) \cos \alpha - r C_d(\alpha) \sin \alpha), \\ L_c \frac{dI}{dt} &= -(R + R_c) I + c \frac{dy}{dt}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь m – масса системы, ξ – расстояние от оси вращения до центра масс G , r_0 – радиус инерции относительно центра масс, h – коэффициент демпфирования пружины, I – ток в обмотках генератора и на внешнем сопротивлении R , L_c и R_c – индуктивность и сопротивление обмоток генератора соответственно, c – коэффициент электро-механического взаимодействия.

Уравнения (1.3) вместе с соотношениями (1.2) образуют замкнутую систему.

Чтобы несколько упростить последующий анализ, обезразмерим нашу систему. Для этого введем безразмерное время $\tau = t\sqrt{k/m}$ и следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \bar{y} = \frac{y}{b}, \quad \bar{I} = \frac{IR_c}{cb} \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad \bar{r} = \frac{r}{b}, \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{b}, \quad \bar{V} = V \frac{1}{b} \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad \bar{V}_C = V_C \frac{1}{b} \sqrt{\frac{m}{k}}, \\ \bar{h} = \frac{h}{\sqrt{km}}, \quad \mu = \frac{\rho Sbh}{2m}, \quad \bar{k}_3 = \frac{k_3 b^2}{k}, \quad \bar{L}_c = \frac{L_c}{R_c} \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \bar{R} = \frac{R}{R_c}, \quad \bar{\zeta} = \frac{c^2}{\sqrt{km}}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Тогда уравнения движения и кинематические соотношения примут вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{y}} + \bar{\xi} \ddot{\theta} \cos \theta - \bar{\xi} \dot{\theta}^2 \sin \theta + \bar{h} \dot{\bar{y}} + \bar{y} + \bar{k}_3 \bar{y}^3 = \\ = -\mu \bar{V}_C^2 (C_l(\alpha) \cos(\alpha - \theta) + C_d(\alpha) \sin(\alpha - \theta)) - \bar{\zeta} \bar{I}, \\ (\bar{r}_0^2 + \bar{\xi}^2) \ddot{\theta} + \bar{\xi} \ddot{\bar{y}} \cos \theta = \mu \bar{V}_C^2 (C_m(\alpha) - \bar{r} C_l(\alpha) \cos \alpha - \bar{r} C_d(\alpha) \sin \alpha), \\ \bar{L}_c \dot{\bar{I}} = -(\bar{R} + 1) \bar{I} + \dot{\bar{y}}, \\ \bar{V}_C \cos \alpha = \bar{V} \cos \theta - \dot{\bar{y}} \sin \theta, \\ \bar{V}_C \sin \alpha = \bar{V} \sin \theta + \dot{\bar{y}} \cos \theta + \bar{r} \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Точка здесь обозначает производную по безразмерному времени. В дальнейшем для сокращения будем опускать черточки над безразмерными переменными.

Считаем, что индуктивность обмоток генератора достаточно мала, так что $\bar{L}_c \ll 1$ – малый параметр. Это означает, что электрические процессы происходят существенно быстрее, чем механические. Нетрудно показать, что условия теоремы Тихонова для системы (1.5) выполнены. Рассмотрим вырожденную систему:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \xi \ddot{\theta} \cos \theta - \xi \dot{\theta}^2 \sin \theta + \chi \dot{y} + y + k_3 y^3 = \\ = -\mu V_C^2 (C_l(\alpha) \cos(\alpha - \theta) + C_d(\alpha) \sin(\alpha - \theta)), \\ (r_0^2 + \xi^2) \ddot{\theta} + \xi \dot{y} \cos \theta = \mu V_C^2 (C_m(\alpha) - r C_l(\alpha) \cos \alpha - r C_d(\alpha) \sin \alpha), \\ I = \frac{\dot{y}}{R + 1}, \\ V_C \cos \alpha = V \cos \theta - \dot{y} \sin \theta, \\ V_C \sin \alpha = V \sin \theta + \dot{y} \cos \theta + r \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь $\chi = h + \zeta(1 + R)^{-1}$. Этот параметр отражает суммарное влияние демпфирования в пружине и нагрузки в электрической цепи.

Исследуем положения равновесия и периодические режимы этой системы и обсудим возможность управления за счет изменения параметров.

2. Положение равновесия “вдоль потока” и его стабилизация. Для симметричного профиля $C_l(\alpha)$ и $C_m(\alpha)$ – нечетные 2π -периодические функции, а $C_d(\alpha)$ – четная π -периодическая функция. При этом $C_l(\pi) = C_m(\pi) = 0$ и $C_d(\alpha) > 0$ для всех α .

Как видно из (1.6), величины угла отклонения державки в неподвижных точках определяются уравнением

$$C_m(\theta) = r(C_l(\theta) \cos \alpha + C_d(\theta) \sin \alpha) = r C_n(\theta). \quad (2.1)$$

Здесь $C_n(\theta)$ – так называемый коэффициент нормальной силы. Известно, что для симметричных профилей функция $C_n(\theta)$ обращается в нуль только при $\theta = \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$), а величина $C_m(\theta)/C_n(\theta)$ ограничена. Поэтому если длина державки достаточно велика, то знак выражения $C_m(\theta) - r C_n(\theta)$ будет при всех значениях угла атаки совпадать со знаком $C_n(\theta)$. Соответственно уравнение (2.1) имеет только решения вида $\theta = \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$), и в нашей электромеханической системе (при условии, что $k_3 > 0$) существует лишь два различных положения равновесия: $\theta = y = I \equiv 0$ и $\theta \equiv \pi, y = I \equiv 0$. Нетрудно показать, что второе равновесие статически неустойчиво, если скорость потока не равна нулю.

Проанализируем подробнее первое равновесие, в котором маятник ориентирован вдоль потока (далее для краткости будем называть это положение “флюгерным”). Напомним, что с точки зрения преобразования энергии потока необходимо, чтобы маятник совершал колебания. Это означает, что рассматриваемое положение равновесия должно быть неустойчивым или, по крайней мере, иметь сравнительно маленькую область притяжения. С другой стороны, когда скорость потока установится относительно большой, необходимо “гасить” колебания, чтобы избежать поломки устройства. Это значит, что положение равновесия должно быть асимптотически устойчивым (или иметь достаточно большую область притяжения).

Эти требования, очевидно, противоречат друг другу. Следовательно, в системе требуется управление. Его можно обеспечить с помощью привода в шарнире, но тогда управляющий момент должен будет “парировать” аэродинамическую нагрузку, которая быстро растет с увеличением скорости потока, и питание привода может оказаться достаточно серьезной проблемой, особенно с учетом того, что установка должна работать в автономном режиме. Поэтому представляется целесообразным исследовать возможность параметрического управления. Ограничимся анализом влияния двух параметров: суммарного коэффициента демпфирования χ и радиуса инерции r_0 . С технической точки зрения, первый из них можно регулировать, изменяя сопротивление во внешней цепи. Второй параметр можно изменять, например, перемещая две точечные массы таким образом, чтобы они все время были расположены симметрично относительно главной центральной оси инерции маятника, перпендикулярной плоскости движения. При этом величины всех остальных параметров системы останутся неизменными.

Запишем характеристический полином системы (1.6), линеаризованной вблизи тривиально-го равновесия:

$$r_0^2 \lambda^4 + ((r_0^2 + \xi^2)\chi + \mu V(C_n^\alpha r_0^2 + (\zeta - C_n^\alpha \xi)(r - \xi)))\lambda^3 + (r_0^2 + \xi^2 + \mu V(r\zeta\chi + V(\zeta - C_l^\alpha \xi)))\lambda^2 + V\mu\zeta(r + V\chi + \mu V^2 C_{d0})\lambda + \mu V^2 \zeta. \quad (2.2)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$C_l^\alpha = \left. \frac{dC_l}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}, \quad C_m^\alpha = \left. \frac{dC_m}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}, \quad C_{d0} = C_d(0), \quad C_n^\alpha = \left. \frac{dC_n}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = C_l^\alpha + C_{d0}, \quad \zeta = C_n^\alpha r - C_m^\alpha.$$

Предположим, что центр масс расположен достаточно близко к точке подвеса маятника, так что

$$r - \xi > 0 \quad \text{и} \quad \zeta - C_n^\alpha \xi > \zeta - C_l^\alpha \xi > 0. \quad (2.3)$$

Тогда все коэффициенты полинома (2.2) положительны, и характер устойчивости определяется третьим минором матрицы Гурвица для этого полинома. Обозначим этот минор через H_3 .

Нетрудно показать, что H_3 представляет собой кубический полином по χ . Коэффициент при старшей степени имеет вид $r\zeta^2 V^3 \mu^2 (r_0^2 + \xi^2) > 0$, следовательно, если значение эффективного коэффициента демпфирования χ будет больше некоторого критического значения, то будет иметь место асимптотическая устойчивость. Это критическое значение, вообще говоря, зависит от скорости потока. Заметим, что, поскольку коэффициент при старшей степени χ не обращается в нуль при $V > 0$, область неустойчивости на плоскости (V, χ) не уходит на бесконечность ни при каких конечных значениях скорости потока.

Легко показать, что H_3 представляет собой биквадратный трехчлен относительно r_0 , причем с учетом неравенств (2.3) свободный член всегда положителен, а коэффициент при старшей степени имеет вид

$$V\mu\zeta(V\mu C_n^\alpha + \chi)(r - \mu V^2 C_l^\alpha).$$

Соответственно при $V \geq V_1 = \sqrt{r/\mu C_l^\alpha}$ уравнение $H_3 = 0$ имеет ровно один положительный корень, причем в одной из полуокрестностей точки $V = V_1$ один из корней стремится к $+\infty$. В области $V \gg 1$ граница области устойчивости принимает следующий вид:

$$r_0 = V \sqrt{\frac{\mu C_{d0}(\zeta - \xi C_n^\alpha)}{C_n^\alpha}} + \chi \frac{\mu r \zeta C_{d0} + C_l^\alpha (\zeta C_l^\alpha - \xi C_n^{\alpha 2})}{2 C_n^\alpha C_l^\alpha \sqrt{\mu C_n^\alpha C_{d0} (\zeta - \xi C_n^\alpha)}} + o(1).$$

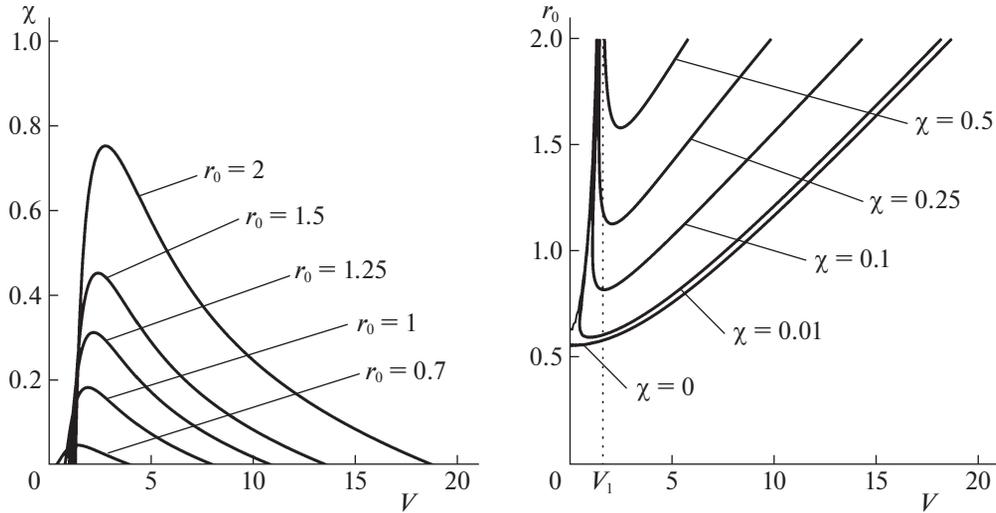


Рис. 2. Границы областей неустойчивости флюгерного равновесия

Рассмотрим случай, когда демпфирование и нагрузка отсутствуют: $\chi = 0$. Тогда уравнение $H_3 = 0$ запишем как

$$V^2 \mu^2 \zeta (r_0^2 C_n^\alpha - (\zeta - \xi C_n^\alpha)(\xi + \mu V^2 C_{d0})) \times \\ \times ((r - \mu V^2 C_l^\alpha) r_0^2 - (r - \xi)(r \xi + \mu V^2 (\zeta - \xi C_l^\alpha))) = 0. \quad (2.4)$$

Из (2.4) следует, что при $0 \leq V < V_1$ уравнение (2.4) имеет два положительных корня, причем один из этих корней стремится к $+\infty$ при $V \rightarrow V_1 - 0$. Учет малого χ не приводит к качественному изменению этой ситуации, по крайней мере вне области $V \ll \chi$.

Рассмотрим случай малой скорости потока: $V \ll \chi \ll 1$. Тогда знак H_3 определяется выражением $\mu \zeta r \chi V (r_0^2 + \xi^2) > 0$. Таким образом, введение даже малого демпфирования обеспечивает стабилизацию равновесия в области малых скоростей потока. Соответственно существует такое значение $V_2 \leq V_1$, что при $V_2 < V \leq V_1$ уравнение $H_3 = 0$ имеет два положительных корня, а при $0 \leq V < V_2$ — ни одного.

Из вышесказанного следует, что существует такое значение $r_{0\min} > 0$, что при $r_0 < r_{0\min}$ равновесие асимптотически устойчиво при всех $V > 0$, а при $r_0 > r_{0\min}$ на луче $V > 0$ существует ровно один интервал, внутри которого имеет место неустойчивость, а вне него — асимптотическая устойчивость.

Отметим также, что в области $V \geq V_1$ можно добиться стабилизации равновесия за счет уменьшения r_0 . В то же время в области $V_2 < V \leq V_1$ уменьшение r_0 в некоторых случаях, напротив, приводит к дестабилизации.

Чтобы проиллюстрировать зависимость области неустойчивости от параметров, построим ее численно. Примем следующие значения для безразмерных параметров:

$$\mu = 0.1, \quad r = 1.6, \quad \xi = 0.3, \quad k_3 = 50. \quad (2.5)$$

Для зависимости аэродинамических коэффициентов от угла атаки воспользуемся экспериментальными данными для стандартного профиля NACA0012, приведенными в работе [21]. На рис. 2 изображены границы области неустойчивости флюгерного равновесия на плоскостях параметров (V, χ) и (V, r_0) .

Области неустойчивости на плоскости (V, χ) расположены ниже соответствующих сплошных кривых, а области неустойчивости на плоскости (V, r_0) — между изображенными ветвями.

3. Периодические режимы и управление ими. Для исследования периодических режимов, возникающих в системе, проведем численное моделирование. Примем для безразмерных параметров значения (2.5).

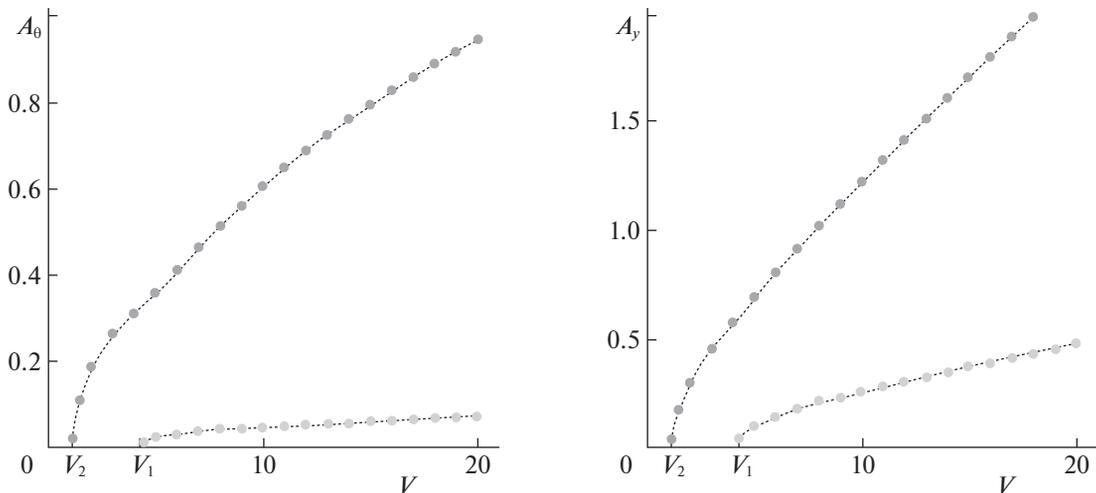


Рис. 3. Зависимость амплитуд циклов по углу (A_θ) и по смещению точки подвеса (A_y) от скорости потока; черные точки – притягивающие циклы, серые – отталкивающие

В случае, когда $\chi = 0.1$ и $r_0 = 1$, флюгерное положение неустойчиво в диапазоне скоростей от $V_2 \approx 1.13$ до $V_1 \approx 4.24$. Амплитуды циклов, существующих в системе при различных значениях скорости потока, представлены на рис. 3, где A_θ – амплитуда по углу θ , а A_y – по перемещению у точки подвеса. Притягивающие циклы отмечены черными кружками, отталкивающие – серыми. Отметим, что бифуркации Андронова–Хопфа, происходящие на границах интервала (V_2, V_1) , имеют различный характер: на левой границе существует суперкритическая бифуркация, на правой – субкритическая. Численное моделирование показывает, что такая картина наблюдается в достаточно широком диапазоне значений параметров системы.

Как было отмечено выше, одной из основных целей управления является приведение маятника в положение, близкое к положению равновесия, при больших скоростях потока. Наличие отталкивающего цикла показывает, что для этого может оказаться недостаточным просто стабилизировать положение равновесия. Чтобы гарантировать гашение колебаний, желательно изменить параметры таким образом, чтобы притягивающий и отталкивающий циклы исчезли.

Изменить положение центра масс и радиус инерции можно, например, за счет перемещения внутренних точечных масс, связанных с маятником. При этом изменение ξ обязательно влечет за собой изменение r_0 (учитывая, что масса неизменяемых частей маятника не равна нулю). Поэтому при анализе динамики маятника с таким управлением необходимо задаться конкретной схемой перемещения внутренних масс. Рассмотрение различных вариантов таких схем остается вне рамок настоящей работы. В то же время, радиус инерции можно изменять независимо от других параметров (например, перемещая две одинаковые точечные массы таким образом, чтобы их центр масс был неподвижен относительно державки).

Рассмотрим влияние параметров χ и r_0 на область существования притягивающего колебательного режима. Построим область существования притягивающего цикла на плоскости (V, χ) , используя метод продолжения по параметру. Значение радиуса инерции примем фиксированным: $r_0 = 1$. Результаты расчетов приведены на рис. 4, а. Штриховкой изображена область, в которой флюгерное равновесие неустойчиво, а сплошной заливкой – область, в которой существует притягивающий колебательный режим.

Видно, что есть область значений параметров, в которой положение равновесия асимптотически устойчиво, но при этом существует притягивающий цикл. Таким образом, для гарантированного гашения колебаний при фиксированной скорости потока V (а не просто обеспечения асимптотической устойчивости равновесия) требуется достаточно сильно увеличить нагрузку: $\chi > \chi_{cr}(V)$. Заметим, что в диапазоне скоростей $V > 2$ критическая величина χ_{cr} почти линейно растет с ростом V . В то же время, возможности изменения величины χ за счет внешнего сопротивления ограничены, поскольку $\chi \leq h + \zeta$ при любых значениях R .

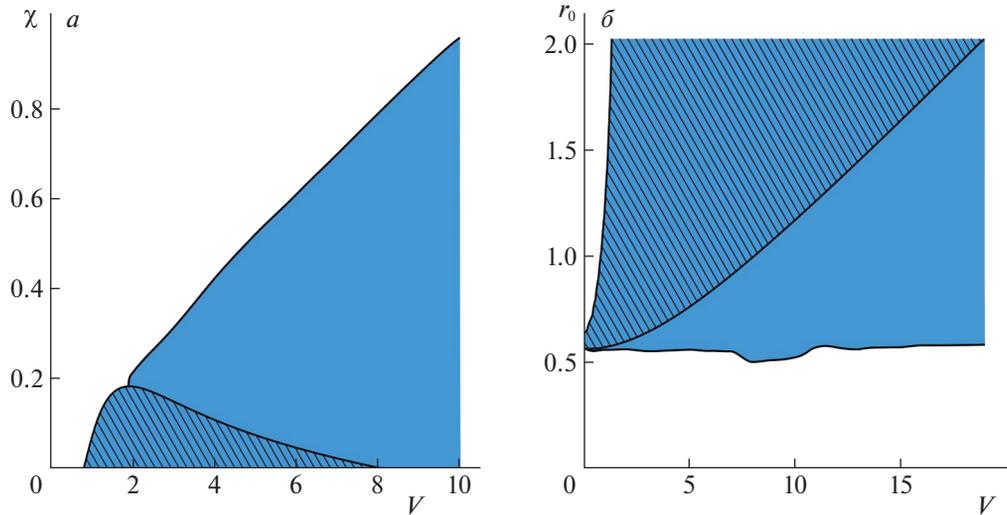


Рис. 4. Области неустойчивости равновесия (выделены штриховкой и заливкой) и существования притягивающего цикла (выделены заливкой) на плоскостях параметров: $a - (V, \chi)$, $b - (V, r_0)$

Теперь рассмотрим влияние радиуса инерции на область существования притягивающего колебательного режима. Расчеты будем проводить при $\chi = 0$, поскольку случай, когда демпфирование в пружине и нагрузки отсутствуют, по-видимому, представляет собой “наихудший” вариант с точки зрения стабилизации положения равновесия.

Результаты численного моделирования проиллюстрированы на рис. 4, б. Область неустойчивости на плоскости (V, r_0) выделена пунктиром, а область существования притягивающего колебательного режима – сплошной заливкой. Видно, что при радиусе инерции $r_0 \leq 0.5$ притягивающий предельный цикл отсутствует при всех рассмотренных значениях скорости потока. Соответственно уменьшение момента инерции не только стабилизирует флюгерное положение равновесия, но и обеспечивает для него достаточно большую область притяжения.

Таким образом, алгоритм управления может выглядеть следующим образом: в случае увеличения скорости ветра сверх критического значения радиус инерции уменьшается до величины порядка 0.5. Притягивающий цикл исчезает, и маятник приходит в асимптотически устойчивое флюгерное положение равновесия. При уменьшении скорости ветра до безопасного значения радиус инерции увеличивается, принимая “рабочее” значение. При этом флюгерное положение дестабилизируется, и маятник выходит на притягивающий колебательный режим.

Вообще говоря, для некоторого ускорения переходных процессов можно регулировать нагрузку: увеличивать ее до максимума ($\chi = h + \zeta$, внешняя электрическая цепь замкнута накоротко) при торможении и уменьшать ее до минимального возможного значения ($\chi = h$, электрическая цепь разомкнута) при разгоне.

Проведем численное моделирование поведения маятника в случае, когда скорость потока представляет собой кусочно-постоянную функцию:

$$V = \begin{cases} V_1, & \tau \leq \tau_1, \\ V_2, & \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2, \\ V_1, & \tau \geq \tau_2. \end{cases}$$

Будем считать, что управление радиусом инерции осуществляется следующим образом:

$$r_0 = \begin{cases} r_{0\max}, & V \leq V^*, \\ r_{0\min}, & V > V^*. \end{cases}$$

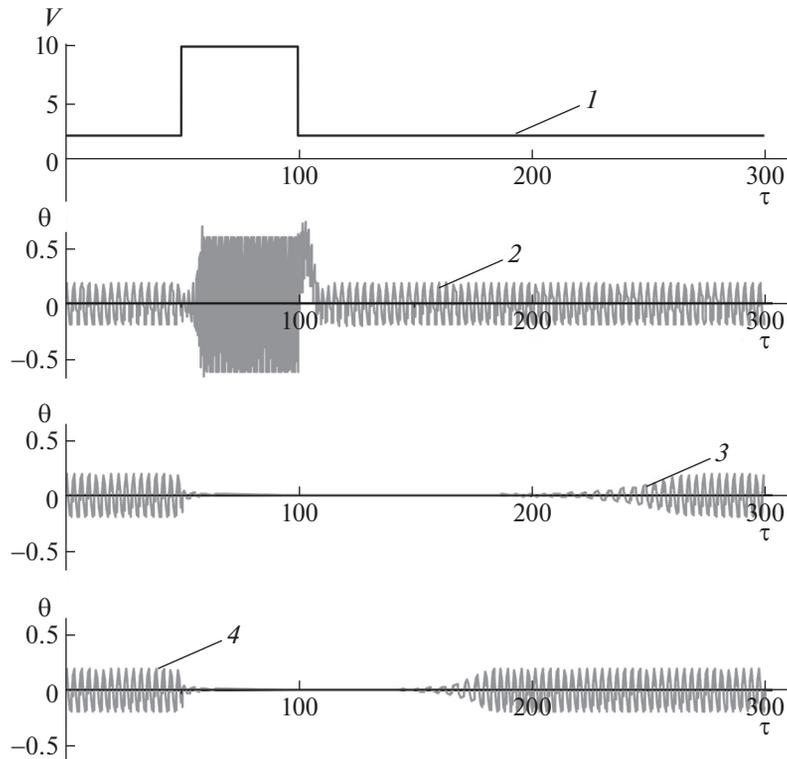


Рис. 5. Угловые колебания системы при кусочно-постоянной скорости ветра: 1 – зависимость скорости ветра от времени; 2 – без управления; 3 – с управлением радиусом инерции; 4 – с управлением радиусом инерции и нагрузкой

Пусть целевая величина нагрузки составляет $\chi = \chi_0 = 0.1$. Рассмотрим два варианта управления нагрузкой: без управления и с управлением в соответствии со следующим алгоритмом:

$$\chi = \begin{cases} \chi_0, & \tau \leq \tau_2, \\ h, & \tau_2 \leq \tau < \tau_2 + T, \\ \chi_0, & \tau \geq \tau_2 + T. \end{cases}$$

Здесь τ_2 – момент, когда скорость потока становится меньше порогового значения V_* , а T – длительность задержки до возврата к целевому значению нагрузки.

Примем следующие значения параметров управления:

$$h = 0.01, \quad T = 100, \quad r_{0\min} = 0.5, \quad r_{0\max} = 1.0.$$

Пусть $V_1 = 2, V_2 = 10, \tau_1 = 50, \tau_2 = 100$. Для остальных параметров будем использовать те же значения, что и ранее. Кроме того, проведем моделирование без управления как радиусом инерции, так и нагрузкой.

Результаты расчетов представлены на рис. 5. Видно, что в случае, когда управление отсутствует, увеличение скорости потока приводит к существенному росту амплитуды и частоты колебаний. В то же время предложенный алгоритм управления обеспечивает торможение установки при увеличении скорости потока. Следует отметить, что выход на режим после возвращения скорости к нормальному значению происходит достаточно медленно. Однако управление нагрузкой позволяет заметно ускорить этот процесс.

Заключение. Рассмотрена динамика ветроэнергетической установки колебательного типа, представляющей собой аэродинамический маятник с упруго закрепленной точкой подвеса, сопряженный с линейным электрическим генератором на постоянном магните. Исследовано влияние параметра, характеризующего нагрузку в электрической цепи, и радиуса инерции маятника на устойчивость флюгерного положения равновесия. Показано, в частности, что уменьшение радиуса инерции маятника обеспечивает стабилизацию этого положения. Проанализировано влияние указанных параметров на область существования притягивающего колебательного режима в системе. Предложена стратегия управления радиусом инерции, обеспечивающая гашение колебаний в случае, когда скорость потока оказывается слишком большой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Li S., Yuan J., Lipson H.* Ambient Wind Energy Harvesting Using Cross-Flow Fluttering // *J. Applied Physics*. 2011. V. 109. № 2. P. 026104.
2. *Zhu Q.* Energy Harvesting by a Purely Passive Flapping Foil from Shear Flows // *J. Fluids and Structures*. 2012. V. 34. P. 157–169.
3. *Wu Y., Li D., Xiang J., Da Ronch A.* A Modified Airfoil-Based Piezoaeroelastic Energy Harvester with Double Plunge Degrees of Freedom // *Theoretical and Applied Mechanics Letters*. 2016. V. 6. № 5. P. 244–247.
4. *Bao C., Dai Y., Wang P., Tang G.* A Piezoelectric Energy Harvesting Scheme Based on Stall Flutter of Airfoil Section // *Europ. J. Mechanics – B/Fluids*. 2019. V. 75. P. 119–132.
5. *Barrero-Gil A., Alonso G., Sanz-Andres A.* Energy Harvesting from Transverse Galloping // *J. Sound and Vibration*. 2010. V. 329. № 14. P. 2873–2883.
6. *Tan T., Yan Z.* Analytical Solution and Optimal Design for Galloping-Based Piezoelectric Energy Harvesters // *Applied Physics Letters*. 2016. V. 109. № 25. P. 253902.
7. *Wang K.F., Wang B.L., Gao Y., Zhou J.Y.* Nonlinear Analysis of Piezoelectric Wind Energy Harvesters with Different Geometrical Shapes // *Arch. Appl. Mech.* 2020. V. 90. P. 721–736.
8. *Zhao D., Hu X., Tan T., Yan Z., Zhang W.* Piezoelectric Galloping Energy Harvesting Enhanced by Topological Equivalent Aerodynamic Design // *Energy Conversion and Management*. 2020. V. 222. P. 113260.
9. *Barrero-Gil A., Pindado S., Avila S.* Extracting Energy from Vortex-Induced Vibrations: A Parametric Study // *Applied Mathematical Modelling*. 2012. V. 36. № 7. P. 3153–3160.
10. *Zhang M., Zhang C., Abdelkefi A., Yu H., Gaidai O., Qin X., Zhu H., Wang J.* Piezoelectric Energy Harvesting from Vortex-Induced Vibration of a Circular Cylinder: Effect of Reynolds Number // *Ocean Engineering*. 2021. V. 235. P. 109378.
11. *Azadi Y.E.* Optimal Control of a Broadband Vortex-Induced Vibration Energy Harvester // *J. Intelligent Material Systems and Structures*. 2020. V. 31. № 1. P. 137–151.
12. *Selyutskiy Y.D., Holub A.P., Dosaev M.Z.* Elastically Mounted Double Aerodynamic Pendulum // *Intern. J. Structural Stability and Dynamics*. 2019. V. 19. № 5. P. 1941007.
13. *Selyutskiy Y.D., Holub A.P., Lin C.-H.* Piezoaeroelastic System on the Basis of a Double Aerodynamic Pendulum // *ZAMM*. 2021. V. 101. P. 202000092.
14. *Dai H.L., Abdelkefi A., Javed U., Wang L.* Modeling and Performance of Electromagnetic Energy Harvesting from Galloping Oscillations // *Smart Materials and Structures*. 2015. V. 24. № 4. P. 045012.
15. *Eriksson S.* Design of Permanent-Magnet Linear Generators with Constant-Torque-Angle Control for Wave Power // *Energies*. 2019. V. 12. № 7. P. 1312.
16. *Климина Л.А.* Метод формирования авторотаций в управляемой механической системе с двумя степенями свободы // *Изв. РАН. ТИСУ*. 2020. № 6. С. 3–14.
17. *Климина Л.А.* Ветрогенератор типа Дарье–Магнуса: динамика и управление // *Изв. РАН. ТИСУ*. 2021. № 5. С. 91–104.
18. *Jin C., Kang H.Y., Kim M.H., Bakti F.P.* Performance Evaluation of Surface Riding Wave Energy Converter with Linear Electric Generator // *Ocean Engineering*. 2020. V. 218. P. 108141.
19. *Зенкин А.Н., Привалов В.А., Самсонов В.А.* О квазистатической модели воздействия среды на авторотирующее тело // *Изв. РАН. МТТ*. 1993. № 4. С. 73–78
20. *Samsonov V.A., Dosaev M.Z., Selyutskiy Y.D.* Methods of Qualitative Analysis in the Problem of Rigid Body Motion in Medium // *Intern. J. Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*. 2011. V. 21. № 10. P. 2955–2961.
21. *Sheldahl R.E., Klimas P.C.* Aerodynamic Characteristics of Seven Symmetrical Airfoil Sections Through 180-Degree Angle of Attack for Use in Aerodynamic Analysis of Vertical Axis Wind Turbines // *Technical Report SAND-80-2114, Sandia National Labs. (USA)*, 1981.
<https://doi.org/10.2172/6548367>

**УПРАВЛЕНИЕ
В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ**

УДК 62–50:534

КВАЗИОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ¹

© 2022 г. П. С. Воеводин^{а,*}, Ю. М. Заболотнов^{а,**}

^а Самарский национальный исследовательский ун-т, Самара, Россия

*e-mail: p.voevodin@inbox.ru

**e-mail: yumz@yandex.ru

Поступила в редакцию 11.02.2021 г.

После доработки 28.06.2021 г.

Принята к публикации 29.11.2021 г.

Рассматривается задача квазиоптимальной стабилизации малых колебаний механических систем со многими степенями свободы с медленно изменяющимися параметрами и малыми возмущениями. Для синтеза приближенно оптимальных регуляторов используется принцип динамического программирования Беллмана в сочетании с методом усреднения. Метод усреднения применяется для получения асимптотического решения уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана. Предлагаемый алгоритм синтеза позволяет существенно упростить задачу конструирования приближенно оптимальных регуляторов, а для рассматриваемых частных случаев получить аналитическое решение. В качестве примера рассматривается задача стабилизации движения малого космического аппарата относительно направления троса при развертывании космической тросовой системы.

DOI: 10.31857/S0002338822020159

Введение. Применение метода усреднения для решения разнообразных задач оптимального управления рассматривалось во многих работах, например [1–5]. Систематическое изложение вопросов, связанных с применением асимптотических методов, в частности метода усреднения, для синтеза управлений представлено в монографиях [2, 4], где особое внимание уделено вопросам стабилизации движений колебательных систем. В этих публикациях разработаны общие алгоритмы применения принципов максимума Понтрягина и динамического программирования Беллмана для синтеза управлений в задачах стабилизации движений колебательных систем. Подробно рассмотрены оптимизация по критериям быстродействия и минимальным затратам на управление [2, 4].

В статье рассматривается задача стабилизации движения колебательной системы со многими степенями свободы при действии малых возмущений. Предлагается процедура расчета оптимального регулятора, основанная на совместном применении принципа динамического программирования Беллмана и метода усреднения. Синтез регулятора осуществляется с помощью квадратичного критерия оптимальности, зависящего от амплитуд колебаний в системе и управления, т.е. используется свертка критериев оптимальности. Метод усреднения применяется для приближенного решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, что позволяет в некоторых случаях получить достаточно простое аналитическое решение задачи. В частности, это относится к случаю медленного изменения параметров системы. Рассматривается пример применения предлагаемой методики для стабилизации угловых колебаний малого космического аппарата (КА) относительно направления троса при развертывании космической тросовой системы. Показано, что, изменяя весовые коэффициенты в критерии оптимальности, характеризующие определенные моды колебаний в системе, можно формировать вид прецессии КА относительно направления троса.

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и ГФЕН Китая в рамках научного проекта № 21-51-53002.

1. Уравнения движения и постановка задачи. Рассматриваются движения колебательной системы с малыми возмущениями и управлением вида

$$\ddot{y} + C(\tau)y = \varepsilon f(y, \dot{y}, \tau) + \varepsilon Nu(t), \quad (1.1)$$

где $y \in \mathbb{R}^n$ – вектор переменных системы, ε – малый положительный параметр, $C(\tau)$ – симметричная положительно-определенная матрица-функция медленного времени $\tau = \varepsilon t$, t – время, $f(y, \dot{y}, \tau)$ – вектор-функция возмущений, $u(t) \in \mathbb{R}^v$ – вектор управлений, N – заданная постоянная матрица, $\dot{y} = dy/dt$, $\ddot{y} = d^2y/dt^2$.

Предполагается, что система (1.1) удовлетворяет условиям управляемости и наблюдаемости [6].

Невозмущенное решение $\varepsilon = 0$ систем (1.1), (1.2) характеризуется частотами $\omega_k(\tau)$ и собственными векторами $\gamma^{(k)}(\tau)$, где $k = \overline{1, n}$, которые определяются из следующих соотношений:

$$|C(\tau) - \omega^2(\tau)E| = 0, \quad (C(\tau) - \omega_k^2(\tau)E)\gamma^{(k)}(\tau) = 0, \quad (1.2)$$

где E – единичная матрица.

Тогда, переходя в системе (1.1) к нормальным координатам $x(t) = \Gamma^{-1}(\varepsilon t)y(t)$, где $\Gamma(\varepsilon t)$ – матрица собственных векторов (далее просто Γ), получим

$$\ddot{x} + \Omega^2(\tau)x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \tau, \varepsilon) + \varepsilon Mu, \quad (1.3)$$

где $\Omega^2(\tau) = \text{diag}(\omega_1^2(\tau), \dots, \omega_n^2(\tau))$, $M = \Gamma^{-1}N$,

$$F(x, \dot{x}, \tau, \varepsilon) = \Gamma^{-1}(f(\Gamma x, \Gamma \dot{x} + \varepsilon \Gamma' x, \tau) - 2\Gamma' \dot{x} - \varepsilon \Gamma'' \ddot{x}), \quad \Gamma' = d\Gamma/d\tau, \quad \Gamma'' = d^2\Gamma/d\tau^2.$$

Невозмущенное решение в нормальных координатах имеет вид

$$x_k = A_k \cos \varphi_k(t), \quad \dot{x}_k = -\omega_k(\tau) A_k \sin \varphi_k(t), \quad k = \overline{1, n}, \quad (1.4)$$

где $\varphi_k(t) = \omega_k(\tau)t + \alpha_k$ – фазы (далее просто φ_k), A_k и α_k – произвольные постоянные.

Основываясь на виде невозмущенного решения (1.4) и имея в виду использование метода усреднения для построения приближенно оптимального управления, применяется стандартная замена переменных вида $(x, \dot{x}) \Rightarrow (A, \varphi)$ в системе (1.3), где A, φ – вектора амплитуд и фаз колебаний. Тогда, применяя метод вариации произвольных постоянных (метод медленно меняющихся амплитуд [7]) и рассматривая соотношения (1.4) как замену переменных, получим

$$\dot{A}_k = -\frac{\varepsilon}{\omega_k(\tau)} [\Phi_k(A, \varphi, \tau, \varepsilon) + U_k] \sin \varphi_k, \quad (1.5)$$

$$\dot{\varphi}_k = \omega_k(\tau) - \frac{\varepsilon}{A_k \omega_k(\tau)} [\Phi_k(A, \varphi, \tau, \varepsilon) + U_k] \cos \varphi_k, \quad (1.6)$$

где $\Phi_k(A, \varphi, \tau, \varepsilon) = F_k(A, \varphi, \tau, \varepsilon) + \omega'_k(\tau) A_k \sin \varphi_k$, $F_k(A, \varphi, \tau, \varepsilon)$ и U_k – k -е компоненты вектор-функций $F(A, \varphi, \varepsilon)$ и $U = Mu$, $\omega'_k(\tau) = d\omega_k(\tau)/d\tau$.

Рассматривается задача о стабилизации движения колебательной системы, обеспечивающая ее динамическую устойчивость (уменьшение амплитуд колебаний) исходя из минимума квадратичного критерия оптимальности:

$$J = \varepsilon \int_0^T W(A, U) dt, \quad (1.7)$$

где

$$W(A, U) = \sum_{k=1}^n (a_k A_k^2 + c U_k^2),$$

$a_k, c > 0$ – весовые коэффициенты, причем обычно полагают

$$c + \sum_{k=1}^n a_k = 1.$$

Движение систем (1.5), (1.6) рассматривается на асимптотически большом интервале времени $T = L/\varepsilon$, где $L < \infty$ – некоторая константа, следовательно, функционал (1.7) изменяется на величину порядка $O(1)$.

2. Определение приближенно оптимального управления. В соответствии с принципом динамического программирования Беллмана оптимальное управление находится из условия

$$\min_U (dV/dt + \varepsilon W(A, U)) = 0, \tag{2.1}$$

где $V(A, \varphi, \tau)$ – функция Беллмана, полная производная которой определяется в силу систем (1.5), (1.6).

Выделяя в условии (2.1) функцию, зависящую от управления, и учитывая выражение для производной функции $V(A, \varphi, \tau)$, получим

$$\min_{U_k} \sum_{k=1}^n \left[cU_k^2 - \frac{U_k}{\omega_k(\tau)} P_k(V, A_k, \varphi_k) \right] = 0, \tag{2.2}$$

где

$$P_k(V, A_k, \varphi_k) = \frac{\partial V}{\partial A_k} \sin \varphi_k + \frac{\partial V}{\partial \varphi_k} \frac{\cos \varphi_k}{A_k}.$$

Тогда из необходимого условия минимума (2.2) нетрудно найти выражение для оптимального управления:

$$U_k^o = \frac{1}{2c\omega_k(\tau)} P_k(V, A_k, \varphi_k). \tag{2.3}$$

Подставляя выражение (2.3) в соотношение (2.1), приходим к уравнению в частных производных Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial V}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^n \left[\varepsilon a_k A_k^2 - \varepsilon \frac{\Phi_k(A, \varphi, \tau, \varepsilon) P_k(V, A_k, \varphi_k)}{\omega_k(\tau)} + \right. \\ \left. + \frac{\partial V}{\partial \varphi_k} \omega_k(\tau) - \varepsilon \frac{P_k(V, A_k, \varphi_k)^2}{4c\omega_k^2(\tau)} \right] = 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Для определения приближенного решения уравнения (2.4) применяется метод усреднения. В этом случае используется почти тождественная замена переменных [3]

$$A = A^o + \varepsilon \nu_1(A^o, \varphi^o, \tau) + \varepsilon^2 \dots, \quad \varphi = \varphi^o + \varepsilon \mu_1(A^o, \varphi^o, \tau) + \varepsilon^2 \dots, \tag{2.5}$$

где A^o, φ^o – новые переменные метода усреднения, $\nu_1(A^o, \varphi^o, \tau), \mu_1(A^o, \varphi^o, \tau)$ – периодические функции по каждой из фаз $\varphi_k, k = \overline{1, n}$, с периодом 2π , удовлетворяющие условиям $\langle \nu_1(A^o, \varphi^o, \tau) \rangle = \langle \mu_1(A^o, \varphi^o, \tau) \rangle = 0$. Здесь $\langle \cdot \rangle$ – стандартный оператор усреднения по фазам φ_k .

Приближенные решения уравнения (2.4) также предлагается определять в виде асимптотического ряда

$$V(A^o, \varphi^o, \tau) = V^o(A^o, \tau) + \varepsilon V_1(A^o, \varphi^o, \tau) + \varepsilon^2 \dots, \tag{2.6}$$

где функция $V^o(A^o, \tau)$ задается в соответствии с первым приближением метода усреднения, при этом $\langle V_1(A^o, \varphi^o, \tau) \rangle = 0$.

Здесь рассматривается нерезонансный случай, т.е. предполагается, что для $\tau \in [0, T]$ поправки к первому приближению метода усреднения $\nu_1(A^o, \varphi^o, \tau), \mu_1(A^o, \varphi^o, \tau)$ ограничены.

Подставляя ряды (2.5), (2.6) в уравнение (2.4), получим в первом приближении

$$\frac{\partial V^o}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^n \left[a_k (A_k^o)^2 - \frac{\Phi_k(A^o, \varphi^o, \tau, 0) P_k^o}{\omega_k(\tau)} + \frac{\partial V_1}{\partial \varphi_k^o} \omega_k(\tau) - \frac{(P_k^o)^2}{4c\omega_k^2(\tau)} \right] = 0. \quad (2.7)$$

Здесь сохранены только члены порядка $O(\varepsilon)$, а члены более высокого порядка по малому параметру ε опущены. При этом функция $P_k(V, A_k, \varphi_k)$ представляется в виде $P_k(V, A_k, \varphi_k) = P_k^o + \varepsilon \dots$, где $P_k^o = \sin \varphi_k^o \partial V^o / \partial A_k^o$.

Проводя процедуру усреднения по фазам уравнения (2.7), получим

$$\frac{\partial V^o}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^n \left[a_k (A_k^o)^2 - \frac{\langle \Phi_k P_k^o \rangle}{\omega_k(\tau)} - \langle (P_k^o)^2 \rangle / 4c\omega_k^2(\tau) \right] = 0, \quad (2.8)$$

где $\langle (P_k^o)^2 \rangle = (\partial V^o / \partial A_k^o)^2 / 2$, при этом учитывается, что $\langle \partial V_1 / \partial \varphi_k^o \rangle = 0$.

Проведение усреднения позволило упростить уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана (2.8), так как в этом случае количество независимых переменных уравнения в частных производных уменьшилось в 2 раза, так как $V^o(A^o, \tau)$. Если из уравнения (2.8) удастся найти положительно определенную функцию $V^o(A^o, \tau) \geq 0$, когда $\tau \in [0, L]$, то приближенно оптимальное управление найдется из выражения

$$\varepsilon U_k^o = \frac{\varepsilon}{2c\omega_k(\tau)} \frac{\partial V^o}{\partial A_k^o} \sin \varphi_k^o + \varepsilon^2 \dots, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.9)$$

Имея в виду соотношение $U = \Gamma^{-1} Nu$, управление в исходных координатах будет иметь вид

$$Nu^o = \Gamma U^o. \quad (2.10)$$

Тогда из условия (2.1) следует

$$dV^o/dt = -\varepsilon W(A^o, U^o). \quad (2.11)$$

В силу вида функции $W(A, U)$ (1.7) ее усредненный аналог $W(A^o, U^o)$ есть знакоопределенная по A_k^o и положительная функция. В этом случае $dV^o/dt \leq 0$ – знакоопределенная и отрицательная функция, что приводит к монотонному убыванию $V^o(A^o, \tau)$. А это в свою очередь ведет к монотонному убыванию нормы вектора амплитуд $\|A^o\|$, когда $t \in [0, L/\varepsilon]$.

Соответствие свойств устойчивости усредненной и исходной систем уравнений подробно рассмотрено, например, в монографии [8] и следует из общих теорем метода усреднения.

В прикладных задачах после определения приближенно оптимального управления (2.9) можно провести усреднение системы (1.5), (1.6) с учетом найденного управления и исследовать движение системы, например, методами качественной теории дифференциальных уравнений в пространстве переменных (A_1^o, \dots, A_n^o) . В частности, когда $n = 2$, можно использовать метод фазовой плоскости [9].

3. Случай отсутствия возмущений в усредненной системе. Если матрица $C(\tau)$ не зависит от времени τ , т.е. $\omega_k'(\tau) = 0$, $\Gamma'(\tau) = 0$ и выполняется условие ортогональности

$$\left\langle \sum_{k=1}^n F_k P_k^o \right\rangle = 0,$$

то усреднение уравнений (1.5), (1.6) дает $\dot{A}_k^o = 0$, $\dot{\varphi}_k^o = \omega_k$.

В этом случае уравнение (2.8) упрощается:

$$\sum_{k=1}^n \left[a_k (A_k^o)^2 - \left(\frac{\partial V^o}{\partial A_k^o} \right)^2 / 8c\omega_k^2 \right] = 0. \quad (3.1)$$

Тогда решение уравнения (2.8) можно искать в виде

$$V^o(A^o) = \sum_{k=1}^n b_k (A_k^o)^2, \tag{3.2}$$

где b_k – определяемые коэффициенты.

Подставляя (3.2) в уравнение (3.1) и приравнявая к нулю множители при $(A_k^o)^2$, получим систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов b_k : $-a_k + b_k^2/2c\omega_k^2 = 0, k = \overline{1, n}$, откуда

$$b_k = \omega_k \sqrt{2ca_k}. \tag{3.3}$$

С учетом (3.3) приближенно оптимальное управление примет вид

$$\varepsilon U_k^o = \varepsilon \sqrt{2a_k/c} A_k^o \sin \varphi_k^o + \varepsilon^2 \dots \tag{3.4}$$

или в нормальных координатах

$$\varepsilon U_k^o = -\frac{\varepsilon}{\omega_k} \dot{x}_k \sqrt{2a_k/c} + \varepsilon^2 \dots, \quad k = \overline{1, n}. \tag{3.5}$$

Для получения управления в исходных координатах необходимо учесть, что $\dot{x} = \Gamma^{-1} \dot{y} + \varepsilon \dots$ и использовать соотношение (2.10).

Подставив управление (3.5) в системы (1.5), (1.6) и проводя стандартную процедуру усреднения, получим уравнения для амплитуд

$$\dot{A}_k^o = -\frac{\varepsilon}{2\omega_k} A_k^o \sqrt{2a_k/c}, \tag{3.6}$$

вид которых подтверждает динамическую устойчивость усредненной системы.

4. Случай медленного изменения частот системы. Если выполняется условие ортогональности

$$\left\langle \sum_{k=1}^n F_k P_k^o \right\rangle = 0$$

(или когда возмущения $f(y, \dot{y}, \tau) = 0$), то усреднение уравнений (1.5), (1.6) при отсутствии управления дает

$$\dot{A}_k^o = -\varepsilon B_k(\tau) A_k^o, \quad \dot{\varphi}_k = \omega_k(\tau), \tag{4.1}$$

где $B_k(\tau) = \omega_k'(\tau)/2\omega_k(\tau) + E_k(\tau)$, $E_k(\tau)$ – k -я диагональная компонента матрицы $\Gamma^{-1}\Gamma'$.

В этом случае уравнение (2.8) принимает вид

$$\frac{\partial V^o}{\partial \tau} = -\sum_{k=1}^n \left[a_k (A_k^o)^2 - B_k(\tau) A_k^o \frac{\partial V^o}{\partial A_k^o} - \left(\frac{\partial V^o}{\partial A_k^o} \right)^2 / 8c\omega_k^2(\tau) \right]. \tag{4.2}$$

Решение уравнения (2.8) ищется как

$$V^o(A^o, \tau) = \sum_{k=1}^n b_k(\tau) (A_k^o)^2. \tag{4.3}$$

Подставляя (4.3) в уравнение (4.2) и приравнявая к нулю коэффициенты при $(A_k^o)^2$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $b_k(\tau)$:

$$db_k/d\tau = -a_k + 2B_k(\tau) b_k + b_k^2/2c\omega_k^2(\tau), \quad k = \overline{1, n}. \tag{4.4}$$

Во многих аналогичных задачах при аналитическом конструировании оптимальных регуляторов (АКОР), например [10, 11], часто используется установившееся или квазистатическое решение матричного уравнения Риккати. Аналогично можно рассмотреть квазистатическое решение системы (4.4). Тогда, приравнявая правые части (4.4) к нулю, получим

$$-a_k + 2B_k(\tau) b_k + b_k^2/2c\omega_k^2(\tau) = 0. \tag{4.5}$$

Положительное решение квадратного уравнения (4.4) имеет вид

$$b_k = c\omega_k(\tau)(-2B_k(\tau)\omega_k(\tau) + \sqrt{4B_k^2(\tau)\omega_k^2(\tau) + 2a_k/c}). \quad (4.6)$$

Тогда приближенно оптимальное управление (2.8), учитывая (4.6), запишем как

$$U_k^o = (-2B_k(\tau)\omega_k(\tau) + \sqrt{4B_k^2(\tau)\omega_k^2(\tau) + 2a_k/c})A_k^o \sin \varphi_k^o + \varepsilon \dots \quad (4.7)$$

Аналогично предыдущему случаю управление (4.7) может быть выражено через исходные координаты системы (1.1), используя $\dot{x} = \Gamma^{-1}\dot{y} + \varepsilon \dots$ и выражения (1.4), (2.10).

Подставляя управление (4.7) в уравнения (1.5) и усредняя по фазам, получим в первом приближении для амплитуд колебаний

$$\dot{A}_k^o = -\varepsilon \frac{A_k^o}{\omega_k(\tau)} \sqrt{B_k^2(\tau)\omega_k^2(\tau) + a_k/2c}. \quad (4.8)$$

Систему (4.4) можно приближенно решить, используя прием обратного интегрирования, предложенный в [10]. В прикладных задачах во многих случаях можно конкретно указать отрезок $\tau \in [0, T]$, на котором рассматривается движение системы. Тогда, задавая граничное условие на коэффициенты в виде $b_k(T) = 0$ и численно интегрируя систему (4.4) с отрицательным шагом от T до нуля, получим зависимость $b_k(\tau)$.

Здесь необходимо отметить, что при интегрировании системы (3.3) в этом случае имеем $b_k(\tau) > 0$, когда $\tau \in [0, T]$. Интегрирование с отрицательным шагом означает формальное изменение знака правых частей уравнений (3.3), которые становятся положительными, так как $a_k > 0$. Тогда функция (3.2) является положительно-определенной для каждого $\tau \in [0, T]$, что приводит к динамической устойчивости колебательной системы.

Данный прием имеет обоснование и в общем случае, так как известно, что решение матричного уравнения Риккати (уравнение (4.4) есть частный случай матричного уравнения) равномерно стремится к положительно-определенной матрице [11] при соответствующем задании начальных условий, если $t_0 = -\infty$, где t_0 – начальное время.

5. Учет линейных возмущений. Рассматриваются линейные возмущения вида

$$f(y, \dot{y}, \tau) = R_1(\tau)y + R_2(\tau)\dot{y}, \quad (5.1)$$

где $R_1(\tau), R_2(\tau)$ – известные квадратные матрицы.

Для простоты возмущения, связанные с медленным изменением частот системы, в этом разделе сначала не будут записываться, так как рассматриваемые оба типа возмущений с точки зрения применения метода усреднения аддитивны и, следовательно, в усредненных уравнениях соответствующие члены просто суммируются.

После перехода к нормальным координатам в уравнении (1.3) имеем

$$F(x, \dot{x}, \tau) = \Gamma^{-1}[R^{(1)}(\tau)\Gamma x + R^{(2)}(\tau)(\Gamma\dot{x} + \varepsilon\Gamma'x)]. \quad (5.2)$$

Тогда в уравнении (2.8) выражения $\langle \Phi_k P_k^o \rangle$, учитывающие возмущения в усредненной системе, примут вид

$$\langle \Phi_k P_k^o \rangle = \frac{\partial V^o}{\partial A_k^o} \langle F_k \sin \varphi_k \rangle, \quad (5.3)$$

где F_k – k -я компонента вектор-функции (5.2).

Учитывая замену переменных (1.4) и свойство ортогональности тригонометрических функций, получим

$$\langle \Phi_k P_k^o \rangle = -\frac{1}{2} A_k^o \omega_k \frac{\partial V^o}{\partial A_k^o} r_k. \quad (5.4)$$

Тогда уравнение (2.8) принимает вид

$$\frac{\partial V^o}{\partial \tau} = -\sum_{k=1}^n \left[a_k (A_k^o)^2 + r_k(\tau) A_k^o \frac{\partial V^o}{\partial A_k^o} / 2 - \left(\frac{\partial V^o}{\partial A_k^o} \right)^2 / 8c\omega_k^2 \right], \quad (5.5)$$

где $r_k(\tau)$ – k -я диагональная компонента матрицы $r(\tau) = \Gamma^{-1} R^{(2)}(\tau) \Gamma$.

Уравнение (5.5) отличается от уравнения для предыдущего случая формальной заменой $B_k(\tau) \Rightarrow -r_k(\tau)/2$. Поэтому, повторяя выкладки предыдущего случая, для решения (4.3) получим

$$db_k/d\tau = -a_k - r_k(\tau) b_k + b_k^2/2c\omega_k^2. \quad (5.6)$$

Для квазистатического решения уравнения (5.6) квазиоптимальное управление принимает вид

$$\varepsilon U_k^o = \varepsilon(r_k(\tau) + \sqrt{r_k(\tau)^2 + 2a_k/c\omega_k^2})\omega_k A_k^o \sin \varphi_k^o + \varepsilon^2 \dots, \quad (5.7)$$

что соответствует усредненной системе

$$\dot{A}_k^o = -\frac{\varepsilon}{2} A_k^o \sqrt{r_k(\tau)^2 + 2a_k/c\omega_k^2}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.8)$$

Так как рассматриваемые возмущения аддитивны, то общее решение для приближенно оптимального управления запишем как

$$\varepsilon U_k^o = \varepsilon(\delta_k(\tau) + \sqrt{\delta_k(\tau)^2 + 2a_k/c\omega_k(\tau)^2})\omega_k(\tau) A_k^o \sin \varphi_k^o + \varepsilon^2 \dots, \quad (5.9)$$

где $k = \overline{1, n}$, $\delta_k(\tau) = r_k(\tau) - 2B_k(\tau)$.

Подставляя управление (5.9) в уравнение и проводя процедуру усреднения, получим для амплитуд колебаний

$$\dot{A}_k^o = -\frac{\varepsilon}{2} A_k^o \sqrt{\delta_k(\tau)^2 + 2a_k/c\omega_k(\tau)^2}. \quad (5.10)$$

Из (5.10) следует монотонное убывание амплитуд колебаний для усредненной системы для рассматриваемых возмущений.

6. Пример определения квазиоптимального управления для системы с двумя степенями свободы.

Для иллюстрации применения описанного подхода к определению приближенно оптимального управления рассматривается колебательная система с двумя степенями свободы ($n = 2$) и с медленными изменяющимися параметрами. Все элементы матриц колебательной системы $C(\tau)$, $R_{1,2}(\tau)$ медленно изменяются. Для оценки “медленности” изменения некоторого параметра p можно использовать величину \dot{p}/p [12] (размерность c^{-1}), которая сравнивается к частотами системы $\omega_{1,2}$, т.е. за характерные величины принимаются безразмерные параметры $\mu_{1,2} = |\dot{p}/p\omega_{1,2}|$. Неустойчивость колебаний в системе в примере обусловлена в основном соответствующим заданием матрицы возмущений $R^{(2)}(\tau)$, для элементов которой максимальное значение $\mu_{1,2}$ приблизительно равно 0.15. Изменение элементов матриц $C(\tau)$, $R^{(2)}(\tau)$ показано на рис. 1. Матрица возмущений $R^{(2)}(\tau)$ взята кососимметричной, что характерно для гироскопических систем. Последнее обстоятельство связано с тем, что (как показали численные расчеты) это приводит к наибольшим колебаниям переменных исходной системы относительно своих средних значений. Изменение нормальных координат для исходной системы в случае отсутствия управления приведено на рис. 2. Там же штриховыми линиями показано изменение амплитудных характеристик, определенных в силу усредненной системы. При введении управления в соответствии с критерием (1.7) с равными весами $a_1 = a_2 = c$ получаем зависимости для амплитуд колебаний с приблизительно равными временами переходных процессов (рис. 3, а, где штриховые линии соответствуют усредненной системе). Изменяя вес c перед управлением, нетрудно обеспечить заданное время переходных процессов в системе естественно с учетом ограничений на управление, если они известны. Изменяя соотношения весов $a_{1,2}$, можно вводить управление с приоритетным гашением колебаний, соответствующим определенной частоте. В качестве примера на рис. 3, б показаны переходные процессы в случае, когда отношение весов $a_1/a_2 = 20$. Во всех

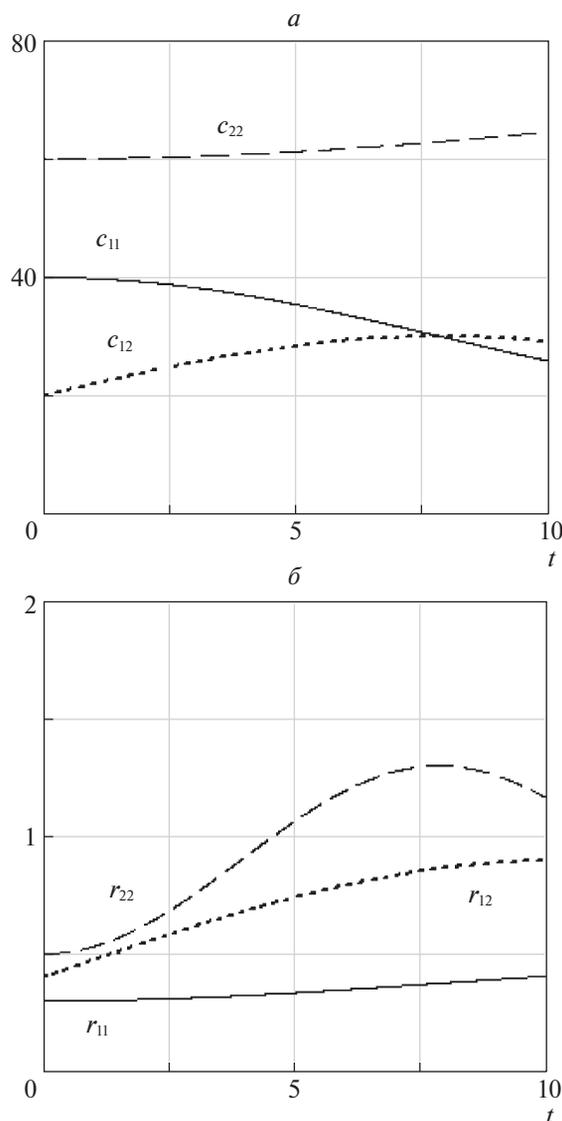


Рис. 1. Изменение элементов матриц $C(\tau)$, $R^{(2)}(\tau)$ в системе с двумя степенями свободы (модельный пример)

случаях, что соответствует аналитическим выражениям для управления, например (5.9), управляемые движения системы определяются только величинами отношений $a_{1,2}/c$ и не зависят от абсолютных величин весовых коэффициентов.

7. Пример определения квазиоптимального управления в одной прикладной задаче. Рассматривается стабилизация углового движения малого КА на тросе при развертывании тросовой системы (ТС) на околоземной орбите. Особенностью данной задачи является то, что слагаемые, характеризующие гироскопические эффекты, включаются в невозмущенную систему, что не ограничивает их величину при определении приближенно оптимального управления. В этом случае система дифференциальных уравнений, описывающая угловое движение КА относительно направления троса, близка к системе уравнений классической задачи движения волчка Лагранжа вокруг неподвижной точки [13].

Стабилизация осуществляется относительно направления троса и характеризуется углом нутации θ . Уравнения для малых углов нутации в этом случае в комплексной форме имеют вид [14]

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - i\bar{J}_x\omega_x \frac{d\xi}{dt} + \omega_p^2\xi = 0, \quad (6.1)$$

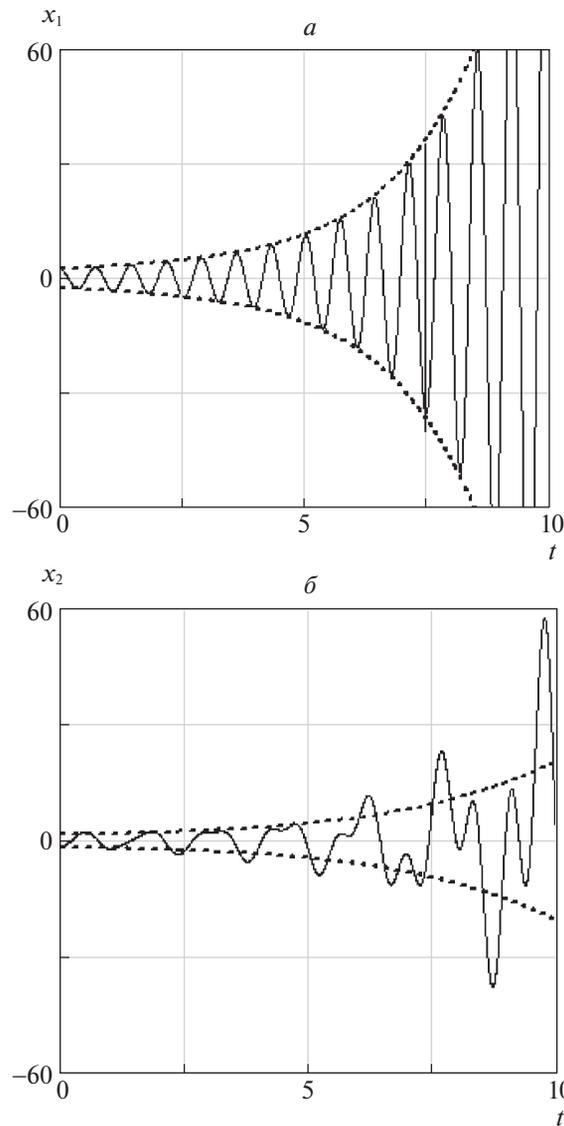


Рис. 2. Изменение нормальных координат в системе с двумя степенями свободы при отсутствии управления (модельный пример)

где $i^2 = -1$, $\xi = \beta + i\alpha$ – комплексный угол нутации, $|\xi| = \theta = \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}$, ω_x – угловая скорость вращения КА относительно своей продольной оси Ox , $\bar{J}_x = J_x/J$, $J = J_y = J_z$, J_x, J_y, J_z – моменты инерции КА в связанной с ним системе координат $Oxyz$, α, β – “самолетные” углы атаки и скольжения, $\omega_p = \sqrt{\Delta x F_t / J}$, Δx – расстояние между точкой крепления троса и центром масс КА, F_t – сила натяжения троса.

Для иллюстрации методики рассматривается простой случай статически и динамически симметричного КА, когда точка крепления троса и центр масс КА лежат на его оси динамической симметрии Ox , а система координат $Oxyz$ является главной и центральной. В этом случае угловая скорость $\omega_x = \text{const}$ и определяется начальными условиями при отделении малого КА от базового КА. Если $\omega_x = 0$, то уравнение (6.1) описывает плоские колебания КА относительно направления троса с частотой ω_p . Если $\omega_x \neq 0$, то имеем пространственное движение твердого тела относительно точки крепления троса, близкое к случаю Лагранжа, при действии момента от силы натяжения троса. В этом случае предполагается, что для исключения кручения троса используются специальные шарниры.

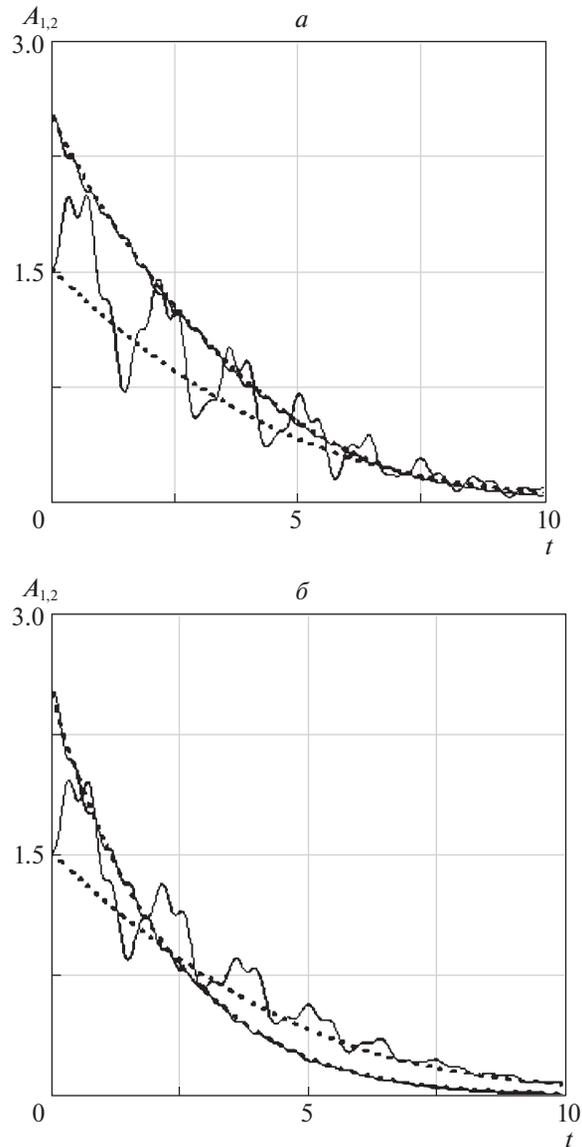


Рис. 3. Переходные процессы в системе с двумя степенями свободы при наличии управления: *a* – равные весовые коэффициенты в критерии оптимальности $a_1 = a_2 = c$; *б* – приоритетное гашение колебаний по нормальной координате x_1 (амплитуда A_1 , $a_1/a_2 = 20$)

Возмущение, действующее на КА, связано с медленным изменением силы натяжения троса F_t , которое изменяется в силу заданной программы разворачивания системы (номинальный закон управления) и является фактически медленно изменяющимся параметром системы.

Тогда, вводя управление в уравнение (6.1), получим

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - i\bar{J}_x\omega_x \frac{d\xi}{dt} + \omega_p^2\xi = \varepsilon u, \quad (6.2)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, характеризующий величину управления. Предполагается, что величина управления соответствует уровню возмущений, которые также считаются малыми. Управление в уравнении (6.2) задается в виде $u = u_\beta + iu_\alpha$, где компоненты u_β , u_α фактически представляют собой моменты сил от управляющих воздействий, отнесенные моменту инерции J . Управляющие моменты действуют во взаимно перпендикулярных плоскостях относительно направления троса.

Невозмущенное уравнение, соответствующее (6.2), имеет вид (6.1) при условии $\omega_p = \text{const}$. Решение невозмущенного уравнения записывается в виде [14]

$$\xi = A_1 \exp(i\varphi_1) + A_2 \exp(i\varphi_2), \quad \dot{\xi} = iA_1\omega_1 \exp(i\varphi_1) + iA_2\omega_2 \exp(i\varphi_2), \quad (6.3)$$

где $\varphi_{1,2} = \omega_{1,2} t + \psi_{1,2}$ – фазы, $A_{1,2}$ и $\psi_{1,2}$ – произвольные постоянные (вещественные величины), $\omega_{1,2} = \bar{J}_x \omega_x / 2 \pm \omega_a$ – частоты, $\omega_a = (\bar{J}_x \omega_x / 2 + \omega_p^2)^{0.5}$.

При определении решения (6.3) частоты системы находятся из уравнения

$$\omega^2 - \bar{J}_x \omega_x \omega - \omega_p^2 = 0. \quad (6.4)$$

Рассматривая соотношения (6.3) как замену переменных $(\xi, \dot{\xi}) \Rightarrow (A_{1,2}, \varphi_{1,2})$ и применяя метод вариации произвольных постоянных для уравнения (6.2), получим дифференциальные уравнения для новых переменных:

$$\dot{A}_{1,2} = \mp [A_{1,2} \dot{\omega}_{1,2} + A_{2,1} \dot{\omega}_{2,1} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + u_\beta \sin \varphi_{1,2} - u_\alpha \cos \varphi_{1,2}] / 2\omega_a, \quad (6.5)$$

$$\dot{\varphi}_{1,2} = \omega_{1,2} + [A_{2,1} \dot{\omega}_{2,1} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \mp u_\beta \cos \varphi_{1,2} \mp u_\alpha \sin \varphi_{1,2}] / 2A_{1,2} \omega_a. \quad (6.6)$$

В этом случае усредненное уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана (4.2) принимает вид

$$\frac{\partial V^o}{\partial \tau} = - \sum_{k=1}^2 \left[a_k (A_k^o)^2 - \omega'_k(\tau) A_k^o \frac{\partial V^o}{\partial A_k^o} / 2\omega_a(\tau) - \left(\frac{\partial V^o}{\partial A_k^o} \right)^2 / 16c\omega_a^2(\tau) \right], \quad (6.7)$$

где $\omega'_{1,2}(\tau) = \pm \omega_p(\tau) \omega'_p(\tau) / \omega_a(\tau)$, $\omega'_p(\tau) = \Delta x F'_i(\tau) / 2J\omega_p(\tau)$. Причем зависимость $F'_i(\tau)$ соответствует номинальной программой развертывания ТС $F_i(\tau)$.

Тогда, определяя решение уравнения (6.7) в виде (4.3), получаем уравнения для коэффициентов $b_k(\tau)$:

$$db_k/d\tau = -a_k + (-1)^k \omega'_k(\tau) b_k / \omega_a(\tau) + b_k^2 / 4c\omega_a(\tau)^2, \quad k = 1, 2. \quad (6.8)$$

Квазистатические решения уравнений (6.8) записывается как

$$b_k = 2c\omega_a(\tau) [(-1)^k \omega'_k(\tau) + \sqrt{\omega'_k(\tau)^2 + a_k/c}], \quad k = 1, 2. \quad (6.9)$$

Решениям (6.9) соответствуют управления

$$u_\beta = (b_1 A_1^o \sin \varphi_1 - b_2 A_2^o \sin \varphi_2) / 2c\omega_a, \quad (6.10)$$

$$u_\alpha = (b_2 A_2^o \cos \varphi_2 - b_1 A_1^o \cos \varphi_1) / 2c\omega_a. \quad (6.11)$$

Управления (6.10), (6.11) в переменных (β, α) примут вид

$$u_\beta = p_\alpha \alpha + p_\beta \beta', \quad u_\alpha = p_\beta \beta + p_\alpha \alpha', \quad (6.12)$$

где $p_{\beta,\alpha} = \mp (b_1 \omega_2 + b_2 \omega_1) / 4c\omega_a^2$, $p_{\beta',\alpha'} = -(b_1 + b_2) / 4c\omega_a^2$.

Усредненные уравнения для амплитуд колебаний $A_{1,2}^o$ с учетом полученных управлений (6.12) запишем как

$$\frac{dA_{1,2}^o}{d\tau} = - \frac{A_{1,2}^o}{2\omega_a} \sqrt{\omega'_{1,2}(\tau)^2 + a_{1,2}/c}. \quad (6.13)$$

В качестве примера стабилизации движения малого КА в составе космической ТС рассматривается процесс формирования ТС, предназначенной для возвращения малогабаритной спускаемой капсулы (СК) на Землю. Используемый при этом закон изменения силы натяжения троса близок к зависимости, которая использовалась в реальном тросовом эксперименте YES2 [15]. Процесс формирования ТС имеет два этапа: “медленное” и “быстрое” развертывание троса. Система состоит из базового КА, на котором расположен механизм для управления развертыванием ТС, и троса с концевой массой (капсулой). На первом этапе используется программа “медленного” развертывания и трос с капсулой по окончании этапа приводится в положение, близкое к местной вертикали (длина троса около 3 км). На втором этапе полная длина троса по

окончанию разворачивания ТС будет около 30 км, причем в конечном положении трос с капсулой составляет с вертикалью некоторый заданный угол. На этом этапе используется близкая к релейной программа, которая состоит из участков разгона и торможения троса с капсулой. Конечное отклоненное положение троса с капсулой позволяет обеспечить дополнительный импульс торможения капсулы при ее отделении от троса вблизи вертикали за счет относительной скорости колебательного движения ТС вокруг своего центра масс.

Номинальная программа разворачивания ТС обеспечивается механизмом управления выпуском троса [15], который работает в соответствии с принципом обратной связи по измерениям длины и скорости выпуска троса. Для вычисления номинальных зависимостей длины и скорости троса используется простая модель разворачивания ТС [16]:

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} = -2\frac{l'}{l}(\psi' + 1) - \frac{3}{2}\sin 2\psi, \quad (6.14)$$

$$\frac{d^2l}{d\tau^2} = l[(\psi' + 1)^2 + 3\cos^2\psi - 1] - F_t/m_c\Omega_o^2, \quad (6.15)$$

где ψ – угол отклонения троса от вертикали, l – длина троса, $\tau = \Omega_o t$ – безразмерное медленное время, Ω_o – угловая скорость центра масс системы по круговой орбите, m_c – масса капсулы, F_t – номинальная сила натяжения троса, $l' = dl/d\tau$, $\psi' = d\psi/d\tau$.

Уравнения (6.14), (6.15) записаны в предположении, что масса базового КА много больше массы капсулы, а трос невесом.

Номинальная зависимость силы натяжения троса от времени задается следующей программой [14]:

$$F_t(\tau, l, \dot{l}) = \begin{cases} m_c\Omega_o^2[\eta_1(l - l_1) + \eta_2l' + 3l_1] & \text{if } 0 \leq \tau \leq \tau_1, \\ F_1 + (F_{\min} - F_1)\sin^2(\tau - \tau_1) & \text{if } \tau_1 < \tau \leq \tau_2, \\ F_{\min} & \text{if } \tau_2 < \tau \leq \tau_3, \\ F_{\min} + (F_{\max} - F_{\min})\sin^2(\tau - \tau_3) & \text{if } \tau_3 < \tau \leq \tau_4, \\ F_{\max} & \text{if } \tau_4 < \tau \leq \tau_k, \end{cases} \quad (6.16)$$

где l_1 и F_1 – длина и сила натяжения троса в конце первого этапа разворачивания ТС, τ_k – время формирования системы, $\tau_{1,2} = \tau_{k1} \mp \pi/4\chi_{1,2}$, $\tau_{3,4} = \tau_r \mp \pi/4\chi_{2,3}$, τ_{k1} – время окончания первого этапа, τ_r – время переключения для релейной программы второго этапа, F_{\min} и F_{\max} – минимальная и максимальная значения силы натяжения на втором этапе, $\eta_{1,2,3}$ – параметры закона управления на первом этапе, $\chi_{1,2}$ – коэффициенты, обеспечивающие гладкое сопряжение участков с различными значениями силы натяжения троса.

Пример изменения номинальной силы натяжения троса от времени приводится на рис. 4. Используются следующие исходные данные: высота круговой орбиты 270 км, $l_1 = 3000$ м, $\eta_1 = 4$, $\eta_2 = 3.5$, $F_1 = 0.224$ Н, $F_{\min} = 0.02$ Н, $F_{\max} = 2.1$ Н, $\tau_k = 9.55$, $\tau_{k1} = 7$, $\tau_r = 9.13$, $\chi_{1,2} = 0.004$. Начальные условия при отделении капсулы от базового КА $\psi = \psi' = 0$, $l = 1$ м, $l'\Omega_o = 2.5$ м/с.

Выбором параметров $\eta_{1,2}$ обеспечивается асимптотическая устойчивость вертикального конечного положения равновесия на первом этапе разворачивания ТС [17] в силу уравнений (6.14), (6.15) для $l = l_1$. А параметры F_{\min} , F_{\max} , τ_k , τ_r подбираются исходя из заданных конечных краевых условий движения ТС: $l' = \psi' = 0$, $l = 3 \times 10^4$ м, $\psi = 56^\circ$.

Капсула здесь представляет собой сферу радиусом 0.2 м массой $m_c = 20$ кг.

Решения уравнений (6.14), (6.15) в данной постановке не зависят от углового движения капсулы относительно направления троса. Поэтому силу натяжения троса в данной задаче можно рассматривать как медленно изменяющийся параметр. Для оценки скорости изменения медленно изменяющегося параметра рассматривается величина F_t'/F_t , которая сравнивается с характерными частотами колебательной системы. В качестве характерной частоты колебаний в данной задаче (при малых угловых скоростях ω_x) можно рассматривать частоту ω_p . Тогда безразмерный параметр $\mu = |F_t'/F_t\omega_p|$ будет характеризовать относительную скорость изменения силы натяжения

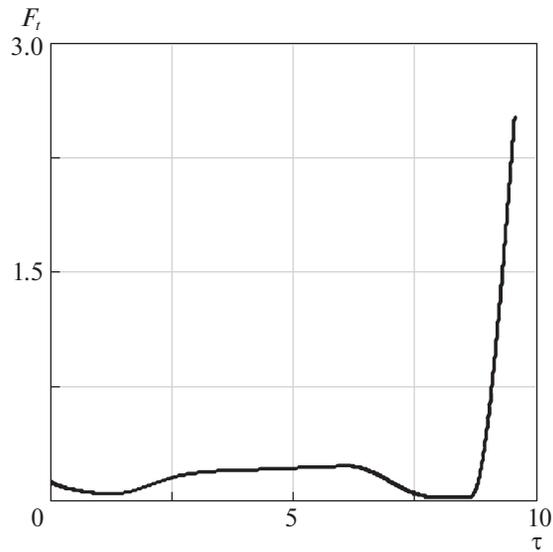


Рис. 4. Изменение силы натяжения троса при разворачивании космической ТС

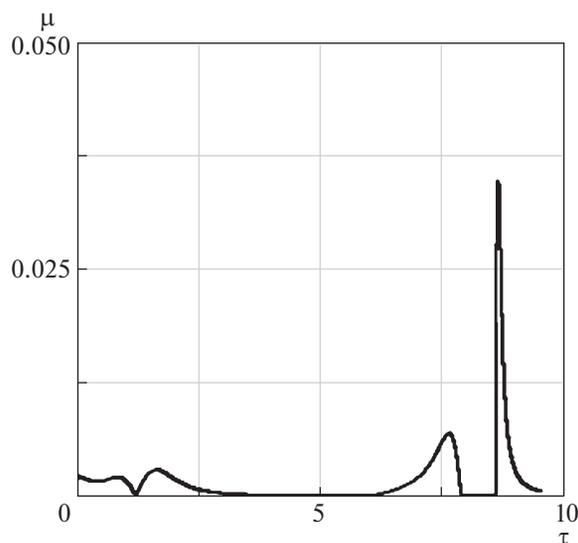


Рис. 5. Изменение параметра μ , характеризующего скорость изменения силы натяжения троса

троса, т.е. будет пропорционален малому параметру задачи ϵ . На рис. 5 приводится зависимость параметра μ от безразмерного времени τ для исходных данных, представленных выше. Наибольшие значения параметр μ принимает при переходе на второй этап разворачивания ТС $\tau_{k1} \approx 7.7$ и в момент $\tau_r \approx 8.7$, когда имеет место переход от участка ускоренного движения троса к участку его торможения.

Отделение СК от базового КА имеет случайный характер. Так, например, угловые скорости капсулы $\omega_{x,y,z}$ в связанной с ней системе координат $Oxuz$ при отделении обычно распределены по нормальному закону [18]. Тогда возможна реализация неблагоприятных случаев движения СК относительно троса, когда угол нутации капсулы будет превышать $\pi/2$. Это может привести к запутыванию и ослаблению троса и, как следствие, к потере управляемости при работе системы регулирования разворачиванием ТС.

На рис. 6 приводится пример, когда угол нутации капсулы на некоторых участках движения превышает $\pi/2$. Вычисления проведены при следующих начальных условиях отделения: $\omega_x = 0.01 \text{ c}^{-1}$, $\omega_y = 0$, $\omega_z = 0.13 \text{ c}^{-1}$, $\theta = \pi/3$.

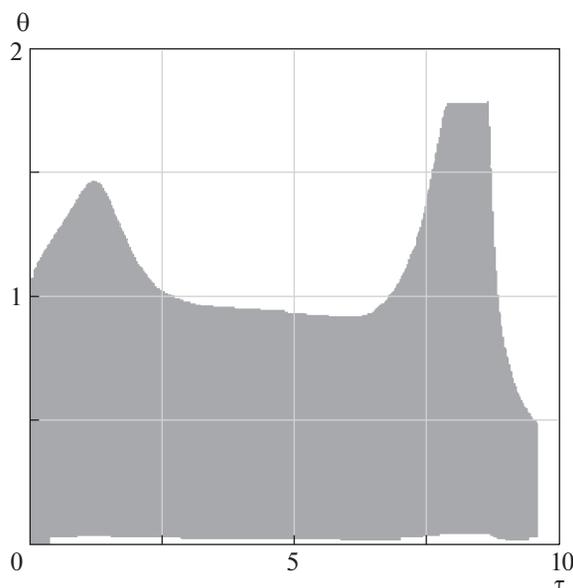


Рис. 6. Изменение угла нутации капсулы, определенного относительно направления троса, при отсутствии управления

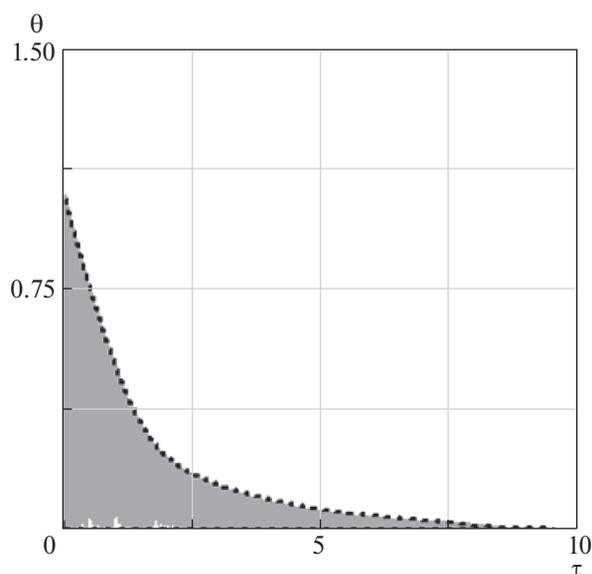


Рис. 7. Переходный процесс по углу нутации капсулы при наличии управления: равные весовые коэффициенты $a_1 = a_2 = c$ в критерии оптимальности

Здесь также необходимо отметить, что в данном примере рассматривается идеальный вариант статически и динамически симметричного твердого тела (капсулы). Влияние малой асимметрии капсулы может привести к возникновению резонансных режимов ее движения [14], что создает еще большие возмущения при движении капсулы вокруг своего центра масс.

На рис. 7 показаны зависимости, которые характеризуют переходный процесс в системе при использовании приближенно оптимального управления (6.12) с критерием оптимальности (1.7) и с весовыми коэффициентами $a_{1,2} = c = 1/3$. На рис. 7 штриховой линией показана огибающая $\theta_{\max}(\tau)$ зависимости $\theta(\tau)$, определенная в соответствии с усредненными уравнениями (6.13): $\theta_{\max}(\tau) = A_1^o(\tau) + A_2^o(\tau)$.

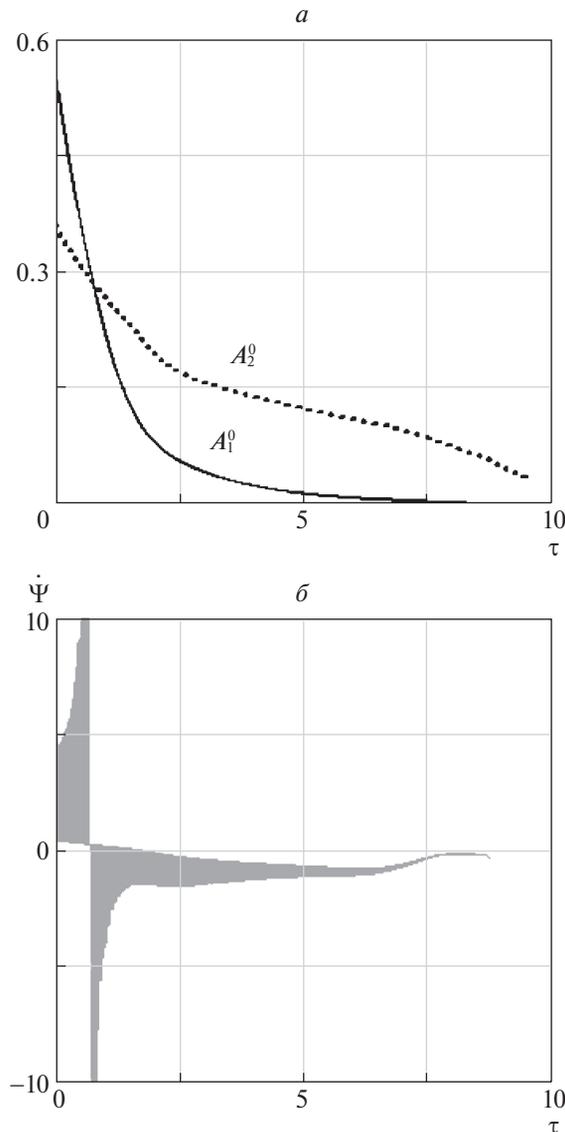


Рис. 8. Пример изменения вида прецессии капсулы относительно направления троса с помощью изменения весовых коэффициентов в критерии оптимальности ($a_1/a_2 = 20$)

Увеличение весового коэффициента c позволяет обеспечить управление с уменьшенными затратами (в данном случае модуль управляющего воздействия не превышает $3.6 \times 10^{-3} \text{ с}^{-2}$), однако, с другой стороны, увеличивает время переходного процесса.

Изменяя соотношение между весовыми коэффициентами $a_{1,2}$, которые определяют уровень ошибок управления по амплитудам A_1^0, A_2^0 , можно сформировать заданный вид прецессии СК относительно направления троса. Формируя заданный вид прецессии, можно избежать реализации длительных резонансных режимов движения, которые могут привести к потере устойчивости углового движения СК при наличии у нее малой асимметрии. Так, например, если известно направление угловой скорости вращения капсулы относительно продольной оси $\omega_x > 0$ после отделения от базового КА, то определяющую роль в возрастании амплитуд колебаний по углу нутации при проходе через резонанс играет амплитуда A_1^0 [19], которая соответствует “прямой” прецессии СК. При реализации “прямой” прецессии направление прецессии тела относительно направления троса совпадает с направлением его вращения вокруг своей продольной оси x .

Поэтому гашение колебаний по этой амплитуде приведет к меньшим возмущениям в угловом движении СК при проходе через резонанс. Возможность смены вида прецессии иллюстрируется рис. 8, где момент изменения вида прецессии соответствует условию $A_1^o = A_2^o$ (рис. 8, *a*, где A_1^o – сплошная линия). На рис. 8, *б* показано, как изменяется производная угла прецессии $\dot{\Psi}$, вычисленная по исходным уравнениям углового движения СК (6.2). В данном случае при отделении от базового КА имеет место “прямая” прецессия $\dot{\Psi} > 0$ СК (рис. 8, *a*), при выполнении условия $A_1^o = A_2^o$ происходит переход на “обратную” прецессию ($\dot{\Psi} < 0$, $\omega_x > 0$). Для изменения вида прецессии в критерии оптимальности (1.7) были использовано отношение весовых коэффициентов $a_1/a_2 = 20$.

Заключение. Разработана методика синтеза приближенно оптимального регулятора для стабилизации движения колебательных систем со многими степенями свободы. Рассматриваемый подход позволяет определить уравнения для регуляторов в аналитическом виде. Методика основана на приближенном методе решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, основанном на представлении функции Беллмана в виде ряда по малому параметру задачи. Ряд представляет собой сумму непериодического слагаемого, зависящего от медленной переменной системы, и поправок, имеющих нулевое среднее. Существование положительно-определенной в силу усредненной системы функции Беллмана–Ляпунова обеспечивает динамическую устойчивость колебательной системы на асимптотически большом интервале времени. Эффективность методики подтверждается двумя примерами: иллюстративным для стандартной системы с двумя степенями свободы и для прикладной задачи стабилизации углового движения малого КА относительно направления троса при разворачивании протяженной космической системы (длина троса 30 км). Использование данного подхода к более сложным случаям нелинейных возмущений требует дополнительных исследований и связано с возможностью определения приближенных решений уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лебедев В.Н.* Расчет движения космического аппарата с малой тягой. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 108 с.
2. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
3. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1986. 378 с.
4. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 368 с.
5. *Салмин В.В., Ишков С.А., Старинова О.Л.* Методы решения вариационных задач механики космического полета с малой тягой. Самара: Изд-во СНЦ РАН, 2006. 162 с.
6. *Калман Р., Фалб П., Арbib М.* Очерки по математической теории систем. М.: Едиториал УРСС, 2004. 400 с.
7. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 410 с.
8. *Хапаев М.М.* Усреднение в теории устойчивости. М.: Наука, 1986. 192 с.
9. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 918 с.
10. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 360 с.
11. *Дмитриевский А.А., Иванов Н.М., Лысенко Л.Н., Богодистов С.С.* Баллистика и навигация ракет. М.: Машиностроение, 1985. 310 с.
12. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1988. 216 с.
13. *Заболотнов Ю.М., Лобанков А.А.* Синтез регулятора для стабилизации движения твердого тела вокруг неподвижной точки // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 3. С. 59–71.
14. *Заболотнов Ю.М., Наумов О.Н.* Движение спускаемой капсулы относительно центра масс при разворачивании орбитальной тросовой системы // Космич. исслед. 2012. Т. 50. № 2. С. 183–193.
15. *Kruiff, M.* Tethers in Space. Oisterwijk: Uitgeverij BOX Press, 2011. 423 p.
16. *Белецкий В.В., Левин Е.М.* Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 336 с.
17. *Заболотнов Ю.М.* Управление разворачиванием орбитальной тросовой системы в вертикальное положение с малым грузом // ПММ. 2015. Т. 79. № 1. С. 37–47.
18. *Заболотнов Ю.М.* Статистический анализ движения относительно центра масс легкой капсулы при входе в атмосферу // Космич. исслед. 2013. Т. 51. № 3. С. 228–239.
19. *Ярошевский В.А.* Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978. 167 с.

**ДИСКРЕТНЫЕ
СИСТЕМЫ**

УДК 62-50

**ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К АНАЛИЗУ УСТОЙЧИВОСТИ
“ЧАСТИЧНЫХ” ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ
ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ**© 2022 г. В. И. Воротников^{a,*}, Ю. Г. Мартышенко^{b,**}^a Сочинский институт РУДН, Сочи, Россия^b Российский государственный университет нефти и газа, Москва, Россия

*e-mail: vorotnikov-vi@rambler.ru

**e-mail: j-mart@mail.ru

Поступила в редакцию 10.09.2021 г.

После доработки 07.01.2022 г.

Принята к публикации 31.01.2022 г.

Рассматривается нелинейная система конечно-разностных уравнений общего вида, допускающая “частичное” (по части переменных) нулевое положение равновесия. Описывается подход к изучению устойчивости этого положения равновесия, основанный на предварительном изучении устойчивости по части определяющих его переменных на базе метода функций Ляпунова, с последующим анализом структурной формы системы. Для расширения возможностей данного подхода предлагается проводить корректировку области, в которой строится функция Ляпунова; это достигается введением второй (векторной, вообще говоря) вспомогательной функции. Приводятся примеры, показывающие особенности данного подхода.

DOI: 10.31857/S0002338822030143

Введение. Дискретные (конечно-разностные) системы широко используются в теории процессов управления, вычислительной математике и ее приложениях, а также при моделировании дискретных во времени процессов. При этом в сравнении с моделями с непрерывной динамикой дискретные модели в ряде случаев могут более точно отражать моделируемые процессы. С другой стороны, дискретные системы являются дискретными приближениями или разностными схемами для систем дифференциальных уравнений с непрерывной динамикой, а также составной частью гибридных (с импульсным эффектом) систем, эволюция которых происходит в непрерывно-дискретном времени. Теории и методам качественного исследования нелинейных дискретных по времени систем, включая исследования устойчивости дискретных по времени процессов, посвящена обширная литература, в том числе ряд монографий [1–6].

Одно из активно развивающихся направлений исследований связано с изучением задач *частичной устойчивости* дискретных процессов. Такие задачи естественным образом возникают в приложениях и часто сводятся к обладающей большой общностью задаче *устойчивости по части переменных* (а не по всем переменным) нулевого положения равновесия нелинейной системы конечно-разностных уравнений при общих допущениях относительно ее правой части [6–11]; рассматривается также устойчивость по заданным функциям фазовых переменных (по выходу) [2]. Приложения связаны, в частности, с задачами: вычислительной математики и оптимизации [2, 10, 11]; балансировки загрузки компьютерных сетей [7]; адаптивного управления [8]; оценки устойчивости фильтров Калмана [9]; моделирования эпидемических ситуаций [10, 11]; построения законов наведения на маневрирующую цель [12]. Отметим, что систематические исследования задач частичной устойчивости в значительной степени инициированы работой [13] (см. также обзор [14]).

В статье рассматривается нелинейная система конечно-разностных уравнений общего вида, для которой существует “частичное” (по некоторой части переменных) нулевое положение равновесия. Сначала устойчивость и асимптотическая устойчивость данного положения равновесия анализируются по отношению не ко всем определяющим его переменным, а только по их части. При этом делается допущение о том, что начальные возмущения переменных, не определяющих “частичное” положение равновесия, могут быть большими (ограниченными по норме

произвольным наперед заданным числом) по одной части и произвольными по оставшейся части этих переменных. Для случая нелинейных систем с непрерывной динамикой такие задачи изучались ранее в [15, 16]. Отметим, что предположение о существовании “полного” (по всем переменным) нулевого положения равновесия у рассматриваемых классов систем часто не является необходимым и даже может противоречить смыслу решаемых задач.

Для анализа поставленных задач частичной устойчивости применяется дискретный вариант метода функций Ляпунова [1] в соответствующей модификации. Получены условия частичной устойчивости указанного вида, обобщающие ряд известных результатов по частичной устойчивости дискретных систем. С целью расширения возможностей используемого метода предлагается проводить корректировку области, в которой строится вспомогательная функция Ляпунова. Это достигается посредством введения дополнительной (векторной, вообще говоря) вспомогательной функции. В результате основная функция Ляпунова, а также ее приращение в силу изучаемой системы, могут быть знакопеременными и не удовлетворять используемым разностным неравенствам в обычно рассматриваемой при изучении частичной устойчивости области фазового пространства системы.

Затем указываются условия на структурную форму нелинейной системы, при которых устойчивость (асимптотическая устойчивость) по отношению к части переменных “частичного” нулевого положения равновесия означает устойчивость (асимптотическую устойчивость) этого положения равновесия по всем определяющим его переменным. При соответствующем уточнении такие условия определяют свойство частичной детектируемости (partial detectability) данной системы [17–21].

Полученные результаты позволяют сформулировать подход к изучению устойчивости “частичного” положения равновесия нелинейной конечно-разностной системы, включающий два этапа: 1) предварительный анализ устойчивости по части определяющих это положение равновесия переменных на основе метода функций Ляпунова; 2) последующий анализ частичной детектируемости системы. Предложенный подход может использоваться также при решении соответствующих задач частичной стабилизации нелинейных дискретных управляемых систем посредством управлений, дискретно формируемых по принципу обратной связи.

Для линейных конечно-разностных систем указаны достаточные условия на коэффициенты, при выполнении которых асимптотическая устойчивость системы по отношению к части переменных означает ее асимптотическую устойчивость по отношению к большей части переменных.

1. Постановка задачи. Рассмотрим линейное конечномерное пространство R^n векторов x с евклидовой нормой $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ (x_i – i -я компонента вектора x). Введем разбиение $x = (y^T, z^T)^T$ (T – транспонирование). Обозначим через $Z_+ = \{k = 0, 1, 2, \dots\}$ множество целых неотрицательных чисел.

Пусть дана нелинейная система конечно-разностных уравнений [1–6]

$$x(k+1) = X(k, x(k)),$$

которую, с учетом разбиения $x = (y^T, z^T)^T$, представим в виде двух групп уравнений:

$$y(k+1) = Y(k, y(k), z(k)), \quad z(k+1) = Z(k, y(k), z(k)). \quad (1.1)$$

В системе (1.1) $k \in Z_+$ – дискретное время, $x = (y^T, z^T)^T$ – фазовый вектор. Вектор-функция $X = (Y^T, Z^T)^T$, определяющая правые части системы (1.1), при каждом $k \in Z_+$ непрерывна по x в области $\|x\| < \infty$. В этом случае для всех k_0, x_0 существует единственное решение $x(k) = x(k; k_0, x_0)$ системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию $x(k_0) = x_0$, которое определено для всех $k \geq k_0$. При выполнении условия $Y(k, 0, z(k)) \equiv 0$ множество $M = \{x(k): y(k) = 0\}$ является “частичным” положением равновесия (инвариантным множеством) системы (1.1).

Далее будет рассматриваться устойчивость по части переменных (разд. 2) и по всем переменным (разд. 3, 4) “частичного” положения равновесия $y(k) = 0$ системы (1.1). При этом помимо самостоятельного интереса задача устойчивости по части переменных используется как вспомогательная на первом этапе анализа устойчивости по всем переменным.

Имея в виду анализ устойчивости “частичного” положения равновесия $y(k) = 0$ по отношению не ко всем определяющим его переменным, а только по их некоторой заданной части, предположим, что $y = (y_1^T, y_2^T)^T$. Вектор y_1 включает те компоненты вектора y , устойчивость по отно-

шению к которым рассматривается. Кроме того, чтобы расширить потенциальные возможности понятий устойчивости, представим также компоненту \mathbf{z} вектора \mathbf{x} в виде $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1^T, \mathbf{z}_2^T)$.

Обозначим через D_δ область значений \mathbf{x}_0 , таких, что $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$, $\|\mathbf{z}_{10}\| \leq L$, $\|\mathbf{z}_{20}\| < \infty$; область D_Δ получается заменой δ на Δ .

О п р е д е л е н и е 1. “Частичное” положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1.1) при больших значениях \mathbf{z}_{10} в целом по \mathbf{z}_{20} (for a large values of \mathbf{z}_{10} and on the whole with respect to \mathbf{z}_{20}):

1) \mathbf{y}_1 -устойчиво, если для каждого $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, а также для произвольного числа $\varepsilon > 0$, как бы мало оно не было, и для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется $\delta(\varepsilon, k_0, L) > 0$, такое, что неравенство $\|\mathbf{y}_1(k, k_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ имеет место для всех $k \geq k_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$;

2) равномерно \mathbf{y}_1 -устойчиво, если $\delta = \delta(\varepsilon, L)$;

3) равномерно асимптотически \mathbf{y}_1 -устойчиво, если оно равномерно \mathbf{y}_1 -устойчиво и существует $\Delta(L) > 0$, такое, что для произвольного решения $\mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0)$ системы (1.1), для которого $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$, предельное соотношение $\|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)\| = 0, k \rightarrow \infty$ выполняется равномерно по k_0, \mathbf{x}_0 из области $k_0 \geq 0, \mathbf{x}_0 \in D_\Delta$ (для любых $\eta > 0, k_0 \in \mathbb{Z}_+$ и любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется целое число $T(\eta, L) > 0$, такое, что $\|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)\| < \eta$ при всех $k \geq k_0 + T(\eta, L), \mathbf{x}_0 \in D_\Delta$).

Соответствующие понятия устойчивости по всем переменным “частичного” положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1.1) при больших значениях \mathbf{z}_{10} в целом по \mathbf{z}_{20} получаются из введенных понятий заменой $\mathbf{y}_1(k, k_0, \mathbf{x}_0)$ на $\mathbf{y}(k, k_0, \mathbf{x}_0)$.

З а м е ч а н и е 1. Определение 1 содержит дискретные аналоги понятий частичной устойчивости, введенных для систем с непрерывной динамикой [16]. Наиболее близкими к ним являются понятия устойчивости по всем переменным “частичного” положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1.1), предполагающие [4], что $\|\mathbf{y}_0\| < \delta, \|\mathbf{z}_0\| < \infty$, где δ может зависеть не только от ε, k_0 , но и от \mathbf{z}_0 (это условие эквивалентно условиям $\|\mathbf{y}_0\| < \delta, \|\mathbf{z}_0\| \leq L$, где $L > 0$ – любое наперед заданное число и δ зависит не только от ε, k_0 , но и от L). В определении 1 имеет место включение $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$ и, кроме того, рассматривается устойчивость по части переменных; поэтому данное понятие устойчивости более общее. Мотивацией к разделению вектора \mathbf{z}_0 на две части является возможность поиска компромисса между содержательным смыслом понятия частичной устойчивости и соответствующими требованиями к функциям Ляпунова. Действительно, введенные определения 1)–3) являются “промежуточными” между обычно используемыми понятиями устойчивости (как по всем, так и по части переменных) при больших значениях \mathbf{z}_0 или в целом по \mathbf{z}_0 “частичного” положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1.1), которые приводят к различным требованиям к функциям Ляпунова.

З а м е ч а н и е 2. В случае $\dim \mathbf{y}_1 = \dim \mathbf{y}_2 = \dim \mathbf{z}_1 = 1$ введенному понятию частичной устойчивости можно дать наглядную геометрическую интерпретацию в трехмерном пространстве $Oy_1y_2z_1$. Для каждого $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ и для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ граница допустимой области $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$ начальных возмущений является цилиндром $\|\mathbf{y}_0\| = \delta$ высоты $2L$, расположенном между двумя плоскостями $y_1 = \pm \varepsilon$ (см. рисунок). Если решения системы (1.1) начинаются при $k = k_0$ внутри этого δ -цилиндра (при произвольном значении z_{20}), то соответствующие этим решениям траектории будут оставаться при всех $k \geq k_0$ между указанными двумя ε -плоскостями.

З а м е ч а н и е 3. Введенные понятия устойчивости возникают, в частности, при переходе (посредством обозначений $\mathbf{x}(r) = \mathbf{x}(k), x_{n+1}(r) = k, r = k - k_0$) от системы (1.1) с начальным условием $\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0$ к стационарной дискретной системе

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(r+1) &= \mathbf{X}(\mathbf{x}(r), x_{n+1}(r)), & x_{n+1}(r+1) &= x_{n+1}(r) + 1, \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, & x_{n+1}(0) &= k_0, \end{aligned}$$

когда требования равномерности (неравномерности) по k_0 в задачах \mathbf{y}_1 -устойчивости при больших значениях \mathbf{z}_0 или в целом по \mathbf{z}_0 “частичного” положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ заменяются требованиями “в целом по $x_{n+1}(0)$ ” (“при больших значениях $x_{n+1}(0)$ ”).

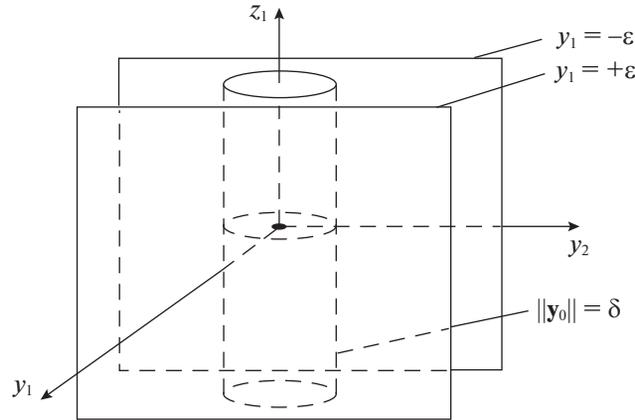


Рис. 1. Области допустимых начальных и текущих отклонений от инвариантного множества $y_1(k) = y_2(k) = 0$.

Для решения поставленных задач частичной устойчивости будут использоваться однозначные непрерывные по \mathbf{x} при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ скалярные функции $V = V(k, \mathbf{x})$, $V(k, \mathbf{0}) \equiv 0$, определенные в области

$$\|y_1\| < h, \quad \|y_2\| + \|z\| < \infty, \quad (1.2)$$

а также соответствующие приращения этих функций в силу системы (1.1), вычисляемые по формуле $\Delta V(k, \mathbf{x}(k)) = V(k+1, \mathbf{X}(k, \mathbf{x}(k))) - V(k, \mathbf{x}(k))$.

Также будут рассматриваться: 1) вспомогательные скалярные функции $V^*(k, \mathbf{y}, z_1)$, $V^*(\mathbf{y}, z_1)$ и вектор-функция $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x})$, $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ непрерывные по \mathbf{x} в области (1.2); 2) непрерывные монотонно возрастающие по $r > 0$ скалярные функции $a_i(r)$, $a_i(0) = 0$ ($i = 1, 2, 3$) (функции типа Хана).

2. Условия частичной устойчивости. Пусть можно указать векторную функцию $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x})$, $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, такую, что при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ в области

$$\|y_1\| + \|\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x})\| < h_1 < h, \quad \|y_2\| + \|z\| < \infty \quad (2.1)$$

вспомогательная V -функция в силу исходной системы (1.1) удовлетворяет разностному неравенству [22]

$$\Delta V \leq \omega(k, V(k, \mathbf{x}(k))); \quad (2.2)$$

$\omega(k, v(k))$ – непрерывная при $k \in \mathbb{Z}_+$, $v(k) \geq 0$ функция, такая, что для уравнения

$$v(k+1) = w(k, v(k)), w(k, 0) \equiv 0 \quad (2.3)$$

выполнены условия существования и единственности решений для всех $k_0, v_0 \geq 0$.

Т е о р е м а 1. Пусть для системы (1.1), наряду с основной скалярной V -функцией, можно указать дополнительную векторную функцию $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x})$, $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, для которых при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ в области (2.1) выполняется условие

$$V(k, \mathbf{x}) \geq a_1(\|y_1\| + \|\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x})\|), \quad (2.4)$$

а также имеет место разностное неравенство (2.2).

Тогда при больших значениях z_{10} в целом по z_{20} “частичное” положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$:

1) y_1 -устойчиво, если выполнены условия

$$V(k, \mathbf{x}) \leq V^*(k, \mathbf{y}, z_1), \quad V^*(k, \mathbf{0}, z_1) \equiv 0, \quad (2.5)$$

и решение $v(k) = 0$ уравнения (2.3) устойчиво;

2) равномерно y_1 -устойчиво (равномерно асимптотически y_1 -устойчиво), если выполнены условия

$$V(k, \mathbf{x}) \leq V^*(\mathbf{y}, z_1), \quad V^*(\mathbf{0}, z_1) \equiv 0 \quad (2.6)$$

и решение $v(k) = 0$ уравнения (2.3) равномерно устойчиво (равномерно асимптотически устойчиво).

Доказательство приведено в Приложении.

Полученные условия частичной устойчивости опираются на дискретный вариант [22] принципа сравнения с функцией Ляпунова [23, 24] для анализа устойчивости нелинейных динамических систем. Однако при этом, в отличие от [22], изучаются более общие свойства системы (1.1), а для расширения возможностей указанного подхода наряду с основной вспомогательной функцией Ляпунова рассматривается дополнительная (векторная, вообще говоря) вспомогательная функция для корректировки области, в которой строится основная функция Ляпунова. В результате V -функция и ее приращение ΔV в силу системы (1.1) в теореме 1 при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ являются, вообще говоря, *знакопеременными* функциями в области

$$\|y_1\| < h_1 < h, \quad \|y_2\| + \|z\| < \infty, \quad (2.7)$$

которая обычно рассматривается при анализе y_1 -устойчивости, и могут не удовлетворять в этой области разностному неравенству (2.2).

В рамках предложенного подхода используемые нелинейные V -функции Ляпунова могут быть построены как знакоопределенные *квадратичные формы* $V(k, x) \equiv V^*(k, y_1, \mu(k, x))$ переменных y_1, μ , что расширяет возможности конструктивного построения таких функций.

З а м е ч а н и е 4. Теорема 1 дополняет результаты по частичной устойчивости дискретных систем: y -устойчивости положения равновесия $x(k) = \mathbf{0}$ (при условии $\|x_0\| < \delta$) [2, 6–11] и устойчивости “частичного” положения равновесия $y(k) = \mathbf{0}$ [4]. Введение дополнительной μ -функции позволяет расширить класс используемых V -функций Ляпунова. Условия (2.5) являются “промежуточными” между менее ограничительным условием $V(k, \mathbf{0}, z) \equiv 0$ и более ограничительными условиями $V(k, x) \leq V^*(k, y), V^*(k, \mathbf{0}) \equiv 0$, при выполнении которых “частичное” положение равновесия $y(k) = \mathbf{0}$ системы (1.1) соответственно y_1 -устойчиво при больших значениях z_0 или y_1 -устойчиво в целом по z_0 . Аналогично условию (2.6) являются “промежуточными” между условиями $V(k, x) \leq V^*(y, z), V^*(\mathbf{0}, z) \equiv 0$ и условием $V(k, x) \leq a_2(\|y\|)$, при выполнении которых “частичное” положение равновесия $y(k) = \mathbf{0}$ системы (1.1) соответственно равномерно y_1 -устойчиво при больших значениях z_0 или равномерно y_1 -устойчиво в целом по z_0 .

З а м е ч а н и е 5. Требования к основной функции Ляпунова в теореме 1 можно ослабить, если вместо нее использовать классическую вектор-функцию Ляпунова [24], область построения которой корректируется посредством вспомогательной вектор-функции $\mu(k, x)$.

П р и м е р 1. Пусть система (1.1) состоит из уравнений

$$\begin{aligned} y_1(k+1) &= [a + ly_2(k)z_1(k)]y_1(k), \\ y_2(k+1) &= [b + dy_1(k)]y_2(k), \\ z_1(k+1) &= [c + ey_1(k)]z_1(k), \quad z_2(k+1) = Z_2(k, x(k)), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где a, b, c, d, e, l – постоянные параметры, а функция Z_2 удовлетворяет только общим требованиям к системе (1.1).

Наряду с основной V -функцией

$$V(x) = y_1^2 + 2y_2^2z_1^2 \quad (2.9)$$

также рассмотрим вспомогательную функцию $\mu_1 = y_2z_1$. Для V -функции (2.9) в области (2.1) выполняются условия (2.4) и (2.6).

Для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ в области (2.1) приращение ΔV выбранной V -функции (2.9) в силу системы (2.8) определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta V &= [a + ly_2(k)z_1(k)]^2 y_1^2(k) + \\ &+ 2y_2^2(k)z_1^2(k) [b + dy_1(k)]^2 [c + ey_1(k)]^2 - y_1^2(k) - 2y_2^2(k)z_1^2(k) = \\ &= a^2 y_1^2(k) + 2aly_1^2(k)y_2(k)z_1(k) + l^2 y_1^2(k)y_2^2(k)z_1^2(k) + 2b^2 c^2 y_2^2(k)z_1^2(k) + \\ &+ r_1 y_1(k)y_2^2(k)z_1^2(k) + r_2 y_1^2(k)y_2^2(k)z_1^2(k) + r_3 y_1^3(k)y_2^2(k)z_1^2(k) + \\ &+ 2d^2 e^2 y_1^4(k)y_2^2(k)z_1^2(k) - y_1^2(k) - 2y_2^2(k)z_1^2(k) = \\ &= (a^2 - 1)y_1^2(k) + 2(b^2 c^2 - 1)\mu_1^2(k) + r_1 y_1(k)\mu_1^2(k) + 2aly_1^2(k)\mu_1(k) + \end{aligned}$$

Таблица 1. Оценки и точные значения переменной $y_1(k)$ системы (2.8)

$y_1(k)$	$k = 0$	$k = 5$	$k = 10$	$k = 15$	$k = 20$	$k = 25$
Оценка	0.1414	0.0844	0.0411	0.0200	0.0098	0.0048
Точное значение	0.1	0.0049	0.00016	5.1×10^{-6}	1.6×10^{-7}	5.04×10^{-9}

$$+ r_2 y_1^2(k) \mu_1^2(k) + r_3 y_1^3(k) \mu_1^2(k) + 2d^2 e^2 y_1^4(k) \mu_1^2(k),$$

$$r_0 = 4(be + cd), \quad r_1 = bcr_0, \quad r_2 = 2(b^2 e^2 + 4bcde + c^2 d^2) + l^2, \quad r_3 = der_0.$$

При выполнении условий

$$a^2 < 1, \quad b^2 c^2 < 1 \quad (2.10)$$

для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ квадратичная часть $(\Delta V)^*$ полученного выражения для ΔV является определено отрицательной по $y_1(k)$, $\mu_1(k)$ функцией:

$$(\Delta V)^* \leq -\gamma^* [y_1^2(k) + \mu_1^2(k)], \quad \gamma^* = \min[(1 - a^2), 2(1 - b^2 c^2)],$$

причем $\gamma^* \in (0, 1)$. Поэтому для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ при достаточно малом $h_1 > 0$ в области (2.1) (но не в области (2.7)) для значений параметров a, b, c , удовлетворяющих условиям (2.10), и при любых значениях параметров d, e, l для функции Ляпунова (2.9) в силу системы (2.8) имеет место неравенство $\Delta V \leq -\gamma V(\mathbf{x}(k))$, в котором $\gamma = \min[(1 - a^2), (1 - b^2 c^2)]$.

На основании второй части теоремы 1 заключаем, что при условиях (2.10) “частичное” положение равновесия $y_1(k) = y_2(k) = 0$ системы (2.8) равномерно асимптотически y_1 -устойчиво при больших значениях z_{10} в целом по z_{20} .

Для численной характеристики рассматриваемой системы и применяемого метода исследования устойчивости допустим, что $a = b = 1/2$, $c = 1$. В этом случае вытекающая из условия $\Delta V \leq -\gamma V(\mathbf{x}(k))$ оценка $y_1^2(k) \leq (1 - \gamma)^k V(\mathbf{x}_0)$ (при $k_0 = 0$, $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$) решений системы (2.8) по переменной y_1 имеет место при $\gamma = 0.25$ и не зависит от значений d, e, l . Для сравнения при начальных данных $y_1(0) = y_2(0) = 0.1$ и $z_1(0) = 1$ в таблице наряду с указанными “оценочными” значениями $y_1(k)$ (верхняя строка) также приводятся точные значения $y_1(k)$ (нижняя строка), вычисленные при $l = -d = 1$, $e = 2$.

3. Условия частичной детектируемости. Выделим структурную форму системы (1.1), для которой y_1 -устойчивость (асимптотическая y_1 -устойчивость) “частичного” положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ означает его устойчивость (асимптотическую устойчивость) по всем переменным.

В соответствии с разбиением $\mathbf{x} = (\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, \mathbf{z}^T)^T$ представим первую группу уравнений системы (1.1) в виде двух групп уравнений:

$$\mathbf{y}_1(k+1) = \mathbf{Y}_1(k, \mathbf{y}_1(k), \mathbf{y}_2(k), \mathbf{z}(k)), \quad \mathbf{y}_2(k+1) = \mathbf{Y}_2(k, \mathbf{y}_1(k), \mathbf{y}_2(k), \mathbf{z}(k)),$$

а вектор-функцию $\mathbf{Y}_2(k, \mathbf{x}(k))$ разделим на две части следующим образом:

$$\mathbf{Y}_2(k, \mathbf{x}(k)) = \mathbf{Y}_2^0(k, \mathbf{y}_2(k)) + \mathbf{R}(k, \mathbf{y}_1(k), \mathbf{y}_2(k), \mathbf{z}(k))$$

$$(\mathbf{R}(k, \mathbf{x}(k)) = \mathbf{Y}_2(k, \mathbf{x}(k)) - \mathbf{Y}_2^0(k, \mathbf{y}_2(k)), \quad \mathbf{R}(k, \mathbf{0}, \mathbf{y}_2(k), \mathbf{0}) \equiv \mathbf{R}(k, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{z}(k)) \equiv \mathbf{0}).$$

Дискретная (конечно-разностная) система уравнений

$$\mathbf{y}_2(k+1) = \mathbf{Y}_2^0(k, \mathbf{y}_2(k)) \quad (3.1)$$

будет “приведенной” (по переменным \mathbf{y}_2) подсистемой системы (1.1).

Допустим, что вектор-функция \mathbf{Y}_2^0 для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ непрерывна по \mathbf{y}_2 в области $\|\mathbf{y}_2\| < \infty$ и равномерно по $k \in \mathbb{Z}_+$ на каждом компактном подмножестве из этой области удовлетворяет условию Коши–Липшица по \mathbf{y}_2 .

Теорема 2. Пусть выполняются условия:

1) найдется непрерывная для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ вектор-функция $\mathbf{Y}_2^*(\mathbf{y}_1(k), \mathbf{y}_2(k))$, $\mathbf{Y}_2^*(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, такая, что для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ в области

$$\|\mathbf{y}\| < h, \quad \|\mathbf{z}\| < \infty \tag{3.2}$$

имеет место неравенство

$$\|\mathbf{R}(k, \mathbf{y}_1(k), \mathbf{y}_2(k), \mathbf{z}(k))\| \leq \|\mathbf{Y}_2^*(\mathbf{y}_1(k), \mathbf{y}_2(k))\|; \tag{3.3}$$

2) положение равновесия $\mathbf{y}_2(k) = \mathbf{0}$ “приведенной” подсистемы (3.1) равномерно асимптотически устойчиво по всем переменным;

3) “частичное” положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1.1) равномерно \mathbf{y}_1 -устойчиво (равномерно асимптотически \mathbf{y}_1 -устойчиво) при больших значениях \mathbf{z}_{10} в целом по \mathbf{z}_{20} .

Тогда “частичное” положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1.1) равномерно устойчиво (равномерно асимптотически устойчиво) по всем переменным при больших значениях \mathbf{z}_{10} в целом по \mathbf{z}_{20} .

Доказательство приведено в Приложении.

Условие 1) теоремы 2 можно ослабить, если учесть то обстоятельство, что \mathbf{y}_1 -устойчивость “частичного” положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1.1) фактически является некоторой “расширенной” $(\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu})$ -устойчивостью, “промежуточной” между \mathbf{y}_1 -устойчивостью и устойчивостью по всем переменным. Наличие такой устойчивости позволяет использовать вместо неравенства (3.2) менее ограничительное неравенство

$$\|\mathbf{R}(k, \mathbf{y}_1(k), \mathbf{y}_2(k), \mathbf{z}(k))\| \leq \|\mathbf{Y}_2^{**}(\mathbf{y}_1(k), \boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}), \mathbf{y}_2(k))\|, \tag{3.4}$$

выполняющееся для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ в области $\|\mathbf{y}\| + \|\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x})\| < h, \|\mathbf{z}\| < \infty$.

Замечание 6. Теорема 2 является развитием соответствующих результатов из [25, 26]. В отличие от [25], где указаны условия, при которых из устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия системы (1.1) следует устойчивость по всем переменным, изучаются более общие задачи частичной устойчивости. Такие задачи рассмотрены ранее в [26] для систем с непрерывной динамикой. Кроме того, в отличие от [26] ограничение на связь “приведенной” подсистемы с другими частями системы анализируется на основе понятий $(\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu})$ -устойчивости.

Замечание 7. При выполнении условия (3.3) динамика системы (1.1) в случае $\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0) \equiv \mathbf{0}$ (нуль-динамика по отношению к “измеримому выходу” \mathbf{y}_1 , следуя терминологии [17]) определяется подсистемой

$$\mathbf{y}_2(k+1) = \mathbf{Y}_2^0(k, \mathbf{y}_2(k)), \quad \mathbf{z}(k+1) = \mathbf{Z}(k, \mathbf{0}, \mathbf{y}_2(k), \mathbf{z}(k)),$$

которая включает “приведенную” подсистему (3.1). При этом “приведенная” подсистема (3.1) определяет частичную нуль-динамику системы (1.1) по отношению к “измеримым” переменным \mathbf{y}_1 : динамику \mathbf{y} -компоненты решений $\mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0)$, для которых $\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0) \equiv \mathbf{0}$.

Поэтому при выполнении условий 1), 2) теоремы 2 система (1.1) обладает следующим свойством частичной детектируемости (zero – partial state – detectability): если $\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0) \equiv \mathbf{0}$, то для каждого $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ и для любого заданного числа $L > 0$ найдется $\delta(\epsilon, L) > 0$, такое, что имеет место предельное соотношение $\|\mathbf{y}(k; k_0, \mathbf{x}_0)\| = 0, k \rightarrow \infty$ при $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$. При этом условие 3) теоремы 2 рассматривается как предположение.

Замечание 8. Предложенный подход может использоваться при решении задачи стабилизации “частичного” положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1.1) при добавлении к этой системе дополнительных управляющих воздействий, дискретно формируемых по принципу обратной связи. В данном случае стабилизация проводится только по части определяющих это положение равновесия переменных (по переменным, входящим в вектор \mathbf{y}_1), а устойчивость по другой части переменных (по переменным, входящим в вектор \mathbf{y}_2) определяется полученными условиями на структуру системы. В рамках данной схемы решения допускается ситуация, когда входящие в вектор \mathbf{y}_2 переменные не измеряются и не входят в управляющие воздействия.

Пример 2. Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned} y_1(k+1) &= [a + l y_2(k) z_1(k)] y_1(k) + u_1, \\ y_2(k+1) &= [b + d y_1(k)] y_2(k) + v_1(k, \mathbf{x}(k)), \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$z_1(k+1) = [c + ey_1(k)]z_1(k), \quad z_2(k+1) = Z_2(k, \mathbf{x}(k)),$$

полученную из системы (2.8) добавлением управляющего воздействия u_1 вида $u_1 = \alpha y_1(k)$ ($\alpha = \text{const}$) и нелинейного возмущающего воздействия $v_1(k, \mathbf{x}(k))$.

1. Допустим сначала, что $v_1(k, \mathbf{x}(k)) \equiv 0$. Используя наряду с функцией Ляпунова (2.9) дополнительную вспомогательную функцию $\mu_1 = y_2 z_1$, аналогично анализу системы (2.8) можно показать, что при выполнении условий

$$(a + \alpha)^2 < 1, \quad b^2 c^2 < 1 \quad (3.6)$$

“частичное” положение равновесия $y_1(k) = y_2(k) = 0$ системы (3.5) равномерно асимптотически y_1 -устойчиво при больших значениях z_{10} в целом по z_{20} .

“Приведенная” подсистема (3.1) в данном случае имеет вид

$$y_2(k+1) = by_2(k), \quad (3.7)$$

и при выполнении условия $b^2 < 1$ ее нулевое положение равновесия $y_2(k) = 0$ равномерно асимптотически устойчиво. Кроме того, верно неравенство типа (3.3), в котором $Y_2^* = dy_1(k)y_2(k)$.

На основании теоремы 2 заключаем, что при условиях (3.6) и условии $b^2 < 1$ “частичное” положение равновесия $y_1(k) = y_2(k) = 0$ системы (3.5) равномерно асимптотически устойчиво для больших значений z_{10} в целом по z_{20} .

2. Допустим теперь, что возмущающее воздействие v_1 удовлетворяет условию $|v_1(k, \mathbf{x}(k))| \leq |Y_2^{**}(\mathbf{y}(k), \mu_1)|$ типа (3.4), не нарушающему “частичное” положение равновесия системы (3.5), причем $v_1(k, y_1(k), 0, z_1(k)) \equiv 0$. В этом случае для проверки выполнимости условий частичной детектируемости важно, что “частичное” положение равновесия $y_1(k) = y_2(k) = 0$ системы (3.5) не только равномерно асимптотически y_1 -устойчиво, но и равномерно асимптотически (y_1, μ_1) -устойчиво при больших значениях z_{10} в целом по z_{20} .

“Приведенная” подсистема (3.1) по-прежнему имеет вид (3.7). Поэтому при выполнении условий (3.6) и условия $b^2 < 1$ “частичное” положение равновесия $y_1(k) = y_2(k) = 0$ системы (3.5) также равномерно асимптотически устойчиво при больших значениях z_{10} в целом по z_{20} на основании теоремы 2.

4. Условия частичной детектируемости линейных стационарных дискретных систем. Рассмотрим линейную конечно-разностную систему

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(k+1) &= A_1 \mathbf{y}_1(k) + B_1 \mathbf{y}_2(k) + C_1 \mathbf{z}(k), \\ \mathbf{y}_2(k+1) &= A_2 \mathbf{y}_1(k) + B_2 \mathbf{y}_2(k) + C_2 \mathbf{z}(k), \\ \mathbf{z}(k+1) &= A_3 \mathbf{y}_1(k) + B_3 \mathbf{y}_2(k) + C_3 \mathbf{z}(k), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $A_i, B_i, C_i, i = 1, 2, 3$, – постоянные матрицы соответствующих размеров.

О п р е д е л е н и е 2. Линейная система (4.1) *частично детектируема* (y_1/y -детектируема), если асимптотическая y_1 -устойчивость этой системы означает асимптотическую y -устойчивость.

Для анализа y_1/y -детектируемости системы (4.1) введем матрицы

$$K_1 = (D^T, G^T D^T, \dots, (G^T)^{r+p-1} D^T), \quad K_2 = (L^T, C_3^T L^T, \dots, (C_3^T)^{p-1} L^T),$$

$$D = (B_1, C_1), \quad G = \begin{pmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

$$r = \dim(\mathbf{y}_2), \quad p = \dim(\mathbf{z}).$$

Т е о р е м а 3. Если выполняется условие

$$\text{rank} K_1 = r + \text{rank} K_2, \quad (4.2)$$

то линейная дискретная система (4.1) y_1/y -детектируема.

Доказательство приведено в Приложении.

Условие (4.2) предполагает анализ только структурной формы (4.1) без анализа ее асимптотической устойчивости по соответствующим группам переменных. Это условие, однако, не охватывает случай нулевых матриц B_1, C_1 , когда первая группа уравнений системы (4.1) имеет вид

$$y_1(k+1) = A_1 y_1(k). \tag{4.3}$$

Если подсистема (4.3) асимптотически устойчива, то y_1/y -детектируемость системы (4.1) зависит от наличия свойства y_2 -устойчивости подсистемы

$$y_2(k+1) = B_2 y_2(k) + C_2 z(k), \quad z(k+1) = B_3 y_2(k) + C_3 z(k). \tag{4.4}$$

З а м е ч а н и е 9. Из условия (4.2), как частный случай, следует условие $\text{rank } K_1 = r + p$ “полной” детектируемости (y_1/x -детектируемости) линейной дискретной системы (4.1).

П р и м е р 3. Пусть система (4.1) состоит из уравнений (a – некоторая постоянная)

$$\begin{aligned} y_1(k+1) &= 1/2 y_1(k) + y_2(k) + z_1(k) - 2z_2(k), \\ y_2(k+1) &= 3/4 y_2(k) - a[z_1(k) - 2z_2(k)], \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$z_1(k+1) = -2y_1(k) + 2y_2(k) + 3/4 z_1(k), \quad z_2(k+1) = -y_1(k) + y_2(k) + 3/4 z_2(k).$$

В данном случае $r = 1, p = 2$ и матрицы K_1 и K_2 определяются следующим образом:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3/4 & 9/16 \\ 1 & -a + 3/4 & -3a/2 + 9/16 \\ -2 & 2a - 3/2 & 3a - 9/8 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 1 & -a & 3/4 & -3a/4 \\ -2 & 2a & -3/2 & 3a/2 \end{pmatrix}.$$

В результате имеем

$$\text{rank } K_1 = r + \text{rank } K_2 = 2 < r + p = 3 \quad \text{при } a \neq 0,$$

$$\text{rank } K_1 = 1 < r + \text{rank } K_2 = 2 < r + p = 3 \quad \text{при } a = 0,$$

и условие (4.2) выполняется при всех $a \neq 0$.

На основании теоремы 3 система (4.5) y_1/y -детектируема при всех $a \neq 0$.

Заключение. Предложен подход к изучению устойчивости “частичного” положения равновесия нелинейной дискретной (конечно-разностной) системы. Подход основан на предварительном анализе устойчивости по части определяющих данное положение равновесия переменных на базе метода функций Ляпунова с последующим анализом структурной формы системы для выявления условий ее частичной детектируемости. Эти условия включают требование равномерной асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия подсистемы, “приведенной” по переменным, устойчивость “частичного” положения равновесия по которым изначально не известна, а также ограничение на связь “приведенной” подсистемы с другими частями системы.

Полученные результаты дополняют ранее выполненные исследования по частичной устойчивости дискретных систем [2, 4, 6–11, 25], устойчивости инвариантных множеств динамических систем с непрерывной и дискретной динамикой [27–32] на основе метода функций Ляпунова, а также исследования задач стабилизации связей динамических систем [33, 34], в которых устойчивость инвариантных множеств является необходимым условием. При этом в рамках разработанного подхода требования к функциям Ляпунова ослабляются за счет сужения области фазового пространства, в которой происходит их построение; фактически можно использовать даже знакопеременные функции Ляпунова, приращения которых в силу изучаемой системы могут быть также знакопеременными. Кроме того, ослабления требований к основной V -функции Ляпунова можно добиться путем согласования постановки рассматриваемой задачи частичной устойчивости с предложенным разбиением на две части “неконтролируемых” фазовых переменных изучаемой дискретной системы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Поскольку V -функция удовлетворяет разностному неравенству (2.2), то из $V(k_0, x_0) \leq v_0$ следует [22]

$$V(k, x(k; k_0, x_0)) \leq v(k; k_0, v_0), \quad k \geq k_0. \tag{П.1}$$

1. Пусть решение $v(k) = 0$ уравнения (2.3) устойчиво. Тогда для $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, $\varepsilon > 0$ существует $\rho(\varepsilon, k_0) > 0$ такое, что из $v_0 < \rho$ вытекает $v(k; k_0, v_0) < a_1(\varepsilon)$ при всех $k \geq k_0$. На основании условий (2.5) для любого заданного числа $L > 0$ найдется $\delta_1(\rho, k_0, L) = \delta(\varepsilon, k_0, L) > 0$, такое, что $V(k_0, \mathbf{x}_0) < \rho$, если $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$. Полагая $v_0 = V(k_0, \mathbf{x}_0)$, в силу условий (2.4), (П.1) заключаем, что при $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$ и всех $k \geq k_0$ справедливы неравенства

$$a_1(\|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)\| + \|\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0))\|) \leq V(k, \mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0)) \leq v(k; k_0, v_0) < a_1(\varepsilon), \quad (\text{П.2})$$

откуда $\|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ для всех $k \geq k_0$, если $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$.

2. Если решение $v = 0$ уравнения (2.3) равномерно устойчиво и выполняются условия (2.6), то $\rho(\varepsilon) > 0$ не зависит от k_0 . Поэтому $\delta = \delta(\varepsilon, L)$.

Допустим, что решение $v = 0$ уравнения (2.3) равномерно асимптотически устойчиво. В этом случае найдется $\rho_0 > 0$, такое, что для любого $\varepsilon > 0$ существует целое число $T(\varepsilon) > 0$, при котором имеет место неравенство

$$v(k; k_0, v_0) < a_1(\varepsilon), \quad (\text{П.3})$$

если только $v_0 < \rho_0$. На основании неравенств (2.6) для каждого $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ и любого заданного числа $L > 0$ можно подобрать $\Delta(L) > 0$ так, чтобы $V(k_0, \mathbf{x}_0) < \rho_0$ при $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$. Тогда в силу (П.2) $\|\mathbf{y}_1(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ при $k \geq k_0 + T(\varepsilon)$, $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$.

Доказательство теоремы 2. Найдется функция Ляпунова $V(k, \mathbf{y}_2)$, определенная и непрерывная для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ в области $\|\mathbf{y}_2\| < h$ и удовлетворяющая условиям ($l = \text{const} > 0$) [1]:

$$|V(k, \mathbf{y}_2'') - V(k, \mathbf{y}_2')| \leq l \|\mathbf{y}_2'' - \mathbf{y}_2'\|, \quad (\text{П.4})$$

$$a_1(\|\mathbf{y}_2\|) \leq V(k, \mathbf{y}_2) \leq a_2(\|\mathbf{y}_2\|), \quad (\text{П.5})$$

$$\Delta V_{(3.1)} \leq -a_3(\|\mathbf{y}_2(k)\|). \quad (\text{П.6})$$

При выполнении (П.4) приращения V -функции в силу систем (1.1) и (3.1) связаны соотношением

$$\begin{aligned} \Delta V_{(1.1)} &= V(k, \mathbf{Y}_2^0(k, \mathbf{y}_2(k)) + \mathbf{R}(k, \mathbf{x}(k))) - V(k, \mathbf{y}_2(k)) = \\ &= \mathbf{Y}_2^0(k, \mathbf{y}_2(k)) - V(k, \mathbf{y}_2(k)) + V(k, \mathbf{Y}_2^0(k, \mathbf{y}_2(k)) + \mathbf{R}(k, \mathbf{x}(k))) - V(k, \mathbf{Y}_2^0(k, \mathbf{y}_2(k))) = \\ &= \Delta V_{(3.1)} + V(k, \mathbf{Y}_2^0(k, \mathbf{y}_2(k)) + \mathbf{R}(k, \mathbf{x}(k))) - V(k, \mathbf{Y}_2^0(k, \mathbf{y}_2(k))) \leq \\ &\leq \Delta V_{(3.1)} + l \|\mathbf{R}(k, \mathbf{x}(k))\|, \end{aligned}$$

которое в силу неравенств (3.3), (П.5), (П.6) принимает следующий вид:

$$V_{(1.1)} \leq -a_3(a_2^{-1}(V(k, \mathbf{y}_2(k))) + l \|\mathbf{Y}_2^*(\mathbf{y}_1(k), \mathbf{y}_2(k))\|. \quad (\text{П.7})$$

Дальнейшее доказательство разобьем на две части, соответствующие случаям, когда “частичное” положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1.1): 1) равномерно \mathbf{y}_1 -устойчиво; 2) равномерно асимптотически \mathbf{y}_1 -устойчиво.

I. Положим $\delta_1(\varepsilon) = b(\varepsilon)/l$, $b(\varepsilon) = a_3(a_2^{-1}(a_1(\varepsilon)))$. Можно указать $\delta_2(\varepsilon) > 0$, такое, что при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ из $\|\mathbf{y}_1(k)\| < \delta_2$ следует $\|\mathbf{Y}_2^*(\mathbf{y}_1(k), \mathbf{y}_2(k))\| < \delta_1$ для $\|\mathbf{y}_2(k)\| < \varepsilon$. С другой стороны, в силу равномерной \mathbf{y}_1 -устойчивости “частичного” положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1.1) имеем $\|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)\| < \delta_2(\varepsilon)$ при всех $k \geq k_0$, если $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$ и $\delta = \delta[\delta_2(\varepsilon)]$. Поэтому из неравенства (П.7) следует, что

$$\Delta V_{(1.1)} < 0 \quad \text{при} \quad V(k, \mathbf{y}_2(k; k_0, \mathbf{x}_0)) = a_1(\varepsilon). \quad (\text{П.8})$$

Пусть $\delta^*(\varepsilon, L) = \min\{\delta(\varepsilon, L), \delta[\delta_2(\varepsilon)], \delta_3(\varepsilon)\}$, $\delta_3(\varepsilon) = a_2^{-1}(a_1(\varepsilon))$. Рассмотрим произвольное решение системы (1.1) для которого $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$ и $\delta = \delta^*(\varepsilon, L)$. В силу условий (П.5) имеем $V(k_0, \mathbf{y}_{20}) \leq a_2(\delta_3(\varepsilon))$ и, следовательно, $V(k_0, \mathbf{y}_{20}) \leq a_1(\varepsilon)$. Покажем, что имеет место неравенство

$$V(k, \mathbf{y}_2(k; k_0, \mathbf{x}_0)) < a_1(\varepsilon) \quad \text{для всех} \quad k \geq k_0. \quad (\text{П.9})$$

Предположим противное: $V(k, \mathbf{y}_2(k; k_0, \mathbf{x}_0)) < a_1(\varepsilon)$ при $k \in [k_0, k_1)$, но $V(k, \mathbf{y}_2(k; k_0, \mathbf{x}_0)) = a_1(\varepsilon)$ при $k = k_1$. Тогда $\Delta V_{(1.1)} \geq 0$ при $k = k_1$, что противоречит условию (П.8). Значит неравенство (П.9)

справедливо для всех $k \geq k_0$ и на основании условия $V(k, \mathbf{y}_2) \geq a_1(\|\mathbf{y}_2\|)$ заключаем, что $\|\mathbf{y}_2(k; k_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ для всех $k \geq k_0$, если $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$ и $\delta = \delta^*(\varepsilon, L)$.

II. В рассматриваемом случае предельное соотношение

$$\|\mathbf{R}(k, \mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0), \mathbf{y}_2(k), \mathbf{z}(k))\| = 0, \quad k \rightarrow \infty \quad (\text{П.10})$$

выполняется равномерно по $k_0 \geq 0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$ ($\Delta < \delta^*$), если Δ определяет область равномерного \mathbf{y}_1 -притяжения “частичного” положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$.

Положим $\eta \in (0, \Delta)$; в этом случае $\eta < \delta^*(\varepsilon, L) < a_2^{-1}(a_1(\varepsilon)) < \varepsilon$. В силу условий (П.7), (П.10) при $a_2^{-1}(a_1(\eta)) \leq \|\mathbf{y}_2\| < \varepsilon$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$ ($\Delta < \delta^*$) найдется такое целое число $T_1(\eta, L) > 0$, что для всех $k \geq T_1(\eta, L)$ верно неравенство

$$\Delta V_{(1.1)} \leq -1/2b(\eta). \quad (\text{П.11})$$

Следовательно, при $k \geq T_1(\eta, L)$ имеем

$$\Delta V_{(1.1)} < 0 \quad \text{при} \quad V(k, \mathbf{y}_2(k; k_0, \mathbf{x}_0)) = a_1(\eta). \quad (\text{П.12})$$

Положим $k_{0*} = \max[k_0, T_1(\eta, L)]$ и пусть $T_2(\eta) > 0$ есть первое целое число, такое, что

$$T_2(\eta) \geq \frac{2a_2(\eta) - a_1(\eta)}{b(\eta)}.$$

Покажем, что на “целочисленном” отрезке $[k_{0*}, k_{0*} + T_2(\eta, L)]$ существует число k_* , для которого

$$V(k_*, \mathbf{y}_2(k_*; k_0, \mathbf{x}_0)) < a_1(\eta). \quad (\text{П.13})$$

Допустим противное: $V(k, \mathbf{y}_2(k; k_0, \mathbf{x}_0)) \geq a_1(\eta)$ для всех $k \in (k_{0*}, k_{0*} + T_2(\eta, L))$. Тогда на этом интервале $\|\mathbf{y}_2(k; k_0, \mathbf{x}_0)\| \geq a_2^{-1}(a_1(\eta))$ и справедливо соотношение (П.11). В результате получаем противоречивые неравенства

$$\begin{aligned} 0 < a_1(\eta) &\leq V(k_{0*} + T_2(\eta), \mathbf{y}_2(k_{0*} + T_2(\eta); k_0, \mathbf{x}_0)) = \\ &= V(k_{0*}, \mathbf{y}_2(k_{0*}; k_0, \mathbf{x}_0)) + \Delta V_{(1.1)} T_2(\eta) \leq a_1(\eta) - 1/2b(\eta)T_2(\eta) = 1/2a_1(\eta). \end{aligned}$$

Из условий (П.12), (П.13) заключаем, что $V(k, \mathbf{y}_2(k; k_0, \mathbf{x}_0)) < a_1(\eta)$ для всех $k \geq k_*$. Действительно, допустим противное: $V(k, \mathbf{y}_2(k; k_0, \mathbf{x}_0)) < a_1(\eta)$ при $k \in [k_*, k^*)$, но $V(k^*, \mathbf{y}_2(k^*; k_0, \mathbf{x}_0)) = a_1(\eta)$. Тогда $\Delta V_{(1.1)} \geq 0$ при $k = k^*$, что противоречит условию (П.13). Поэтому неравенство $\|\mathbf{y}_2(k; k_0, \mathbf{x}_0)\| < \eta$ выполняется для всех $k \geq k_*$ на основании условия $V(k, \mathbf{y}_2) \geq a_1(\|\mathbf{y}_2\|)$. Следовательно, неравенство $\|\mathbf{y}_2(k; k_0, \mathbf{x}_0)\| < \eta$ имеет место для любого $k \geq k_0 + T(\eta, L)$, где $T = T_1(\eta, L) + T_2(\eta)$, если $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$ ($\Delta < \delta^*$).

Доказательство теоремы 3. Для понимания “механизма” влияния структурной формы системы (4.1) на возникновение свойства \mathbf{y}_1/\mathbf{y} -детектируемости введем вспомогательные линейные системы [35, 36]:

$$\mathbf{w}_1(k+1) = A_1^* \mathbf{w}_1(k), \quad \mathbf{w}_1 = (\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu}_1), \quad (\text{П.14})$$

$$\mathbf{w}_2(k+1) = A_2^* \mathbf{w}_2(k), \quad \mathbf{w}_2 = (\mathbf{y}_2, \boldsymbol{\mu}_2), \quad (\text{П.15})$$

определяющие соответственно динамику переменных \mathbf{y}_1 и \mathbf{y} исходной системы (4.1). В системе (П.14) компоненты вектора $\boldsymbol{\mu}_1$ являются линейными комбинациями компонент векторов \mathbf{y}_2, \mathbf{z} , а в (П.15) компоненты вектора $\boldsymbol{\mu}_2$ – линейные комбинации компонент вектора \mathbf{z} .

Размерность вспомогательной линейной дискретной системы (П.14) равна $l + \text{rank } K_1$, $l = \dim(\mathbf{y}_1)$, а размерность системы (П.15) равна $l + r + \text{rank } K_2$. Поэтому при выполнении условия (4.2) размерности систем (П.14) и (П.15) совпадают. Следовательно, асимптотическая \mathbf{y}_1 -устойчивость системы (4.1) возможна только в случае, когда имеет место асимптотическая \mathbf{y} -устойчивость. Но это значит, что линейная система (4.1) \mathbf{y}_1/\mathbf{y} -детектируема.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971. 309 с.
2. Фурасов В.Д. Устойчивость и стабилизация дискретных процессов. М.: Наука, 1982. 192 с.

3. *Agarwal R.P.* Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Applications. 2 ed. N.Y.: Marcel Dekker, 2000. 971 p.
4. *Haddad W.M., Chellaboina V.* Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-Based Approach. Princeton: Princeton Univ. Press, 2008. 976 p.
5. *Зуев А.Л., Игнатьев А.О., Ковалев А.М.* Устойчивость и стабилизация нелинейных систем. Киев: Наук. думка, 2013. 430 с.
6. *Александров А.Ю., Жабко А.П., Платонов А.В.* Устойчивость движений дискретных динамических систем. СПб.: Изд. Дом Федоровой Г.В., 2015. 154 с.
7. *Michel A.N., Molchanov A.P., Sun Y.* Partial Stability and Boundedness of General Dynamical Systems on Metric Spaces // *Nonlinear Analysis: TMA*. 2003. V. 52. № 4. P. 1295–1316.
8. *Fu S.H.S., Cheng C.C.* On Direct Adaptive Control Design for Nonlinear Discrete-Time Uncertain Systems // *J. Franklin Institute*. 2008. V. 345. № 2. P. 119–135.
9. *Costa E.F., Astolfi A.* Partial Stability for a Class of Nonlinear Systems // *SIAM J. Control Optim.* 2009. V. 47. № 6. P. 3203–3219.
10. *Ramírez-Llanos E., Martínez S.* Distributed and Robust Fair Optimization Applied to Virus Diffusion Control // *IEEE Trans. Network Sci. Engineering*. 2017. V. 4. № 1. P. 41–54.
11. *Ramírez-Llanos E., Martínez S.* Distributed Discrete-Time Optimization Algorithms with Applications to Resource Allocation in Epidemics Control // *Optimal Control Appl. Meth.* 2018. V. 39. № 1. P. 160–180.
12. *Shafiei M.H., Vazirpour N.* The Approach of Partial Stabilization in Design of Discrete-Time Robust Guidance Laws Against Maneuvering Targets // *Aeronautical J.* 2020. V. 124. № 1277. P. 1114–1127.
13. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // *Вестн. МГУ. Сер. Матем., Механика, Физика, Астрономия, Химия*. 1957. № 4. С. 9–16.
14. *Воротников В.И.* Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // *АиТ*. 2005. № 4. С. 3–59.
15. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К теории частичной устойчивости нелинейных динамических систем // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2010. Т. 51. Вып. 5. С. 23–31.
16. *Воротников В.И.* К частичной устойчивости и детектируемости функционально-дифференциальных систем с последействием // *АиТ*. 2020. № 2. С. 3–17.
17. *Byrnes C.I., Isidori A., Willems J.C.* Passivity, Feedback Equivalence, and the Global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1991. V. 36. № 11. P. 1228–1240.
18. *Sontag E.D., Wang Y.* Output-to-State Stability and Detectability of Nonlinear Systems // *Syst. & Control Letters*. 1997. V. 29. № 5. P. 279–290.
19. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000. 549 с.
20. *Ingalls B.P., Sontag E.D., Wang Y.* Measurement to Error Stability: a Notion of Partial Detectability for Nonlinear Systems // *Proc. 41th IEEE Conf. on Decision and Control*. Las Vegas, Nevada, 2002. P. 3946–3951.
21. *Дашковский С.Н., Ефимов Д.В., Сонтаг Э.Д.* Устойчивость от входа к состоянию и смежные свойства систем // *АиТ*. 2011. № 8. С. 3–40.
22. *Heinen J.A.* Difference Inequalities and Comparison Theorems for Stability of Discrete Systems // *Int. J. Syst. Sci.* 1979. V. 10. № 6. С. 711–718.
23. *Corduneanu C.* Применение дифференциальных неравенств к теории устойчивости // *Ann. Stiintifice Univ. A.I. Cusa din Iasi. Ser. I*. 1960. V. 6. № 1. С. 47–58.
24. *Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н.* Метод сравнения в математической теории систем. Новосибирск: Наука, 1980. 480 с.
25. *Halanay A.* Differential Equations: Stability, Oscillations, Time Lags. N.Y.: Acad. Press, 1966. 528 p.
26. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К задаче частичной детектируемости нелинейных динамических систем // *АиТ*. 2009. № 1. С. 25–38.
27. *Зубов В.И.* Проблема устойчивости процессов управления. Л.: Судостроение, 1980. 256 с.
28. *Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. и др.* Построение систем программного движения. М.: Наука, 1971. 352 с.
29. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. М.: Наука, 1987. 304 с.
30. *Teel A.R., Praly L.* A Smooth Lyapunov Function from a Class KL -Estimate Involving Two Positive Semidefinite Functions // *ESAIM: Control, Optim. Calc. Var.* 2000. V. 5. № 2. P. 313–367.
31. *Ефимов Д.В.* Робастное и адаптивное управление нелинейными колебаниями. СПб.: Наука, 2005. 314 с.
32. *Kellett C.M., Teel A.R.* On the Robustness of KL -stability for Difference Inclusions: Smooth Discrete-Time Lyapunov Functions // *SIAM J. Control Optim.* 2005. V. 44. № 3. P. 777–800.
33. *Мухарлямов Р.Г.* Моделирование процессов управления, устойчивость и стабилизация систем с программными связями // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2015. Т. 56. Вып. 1. С. 15–28.
34. *Мухарлямов Р.Г.* Управление динамикой системы с дифференциальными связями // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2019. Т. 60. Вып. 4. С. 16–28.
35. *Воротников В.И.* Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991. 288 с.
36. *Vorotnikov V.I.* Partial Stability and Control. Boston: Birkhauser, 1998. 448 p.

**ДИСКРЕТНЫЕ
СИСТЕМЫ**

УДК 004.312.4

**СИНТЕЗ БЫСТРЫХ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ
НА ПРОГРАММИРУЕМЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СХЕМАХ
ПУТЕМ РАСЩЕПЛЕНИЯ ВНУТРЕННИХ СОСТОЯНИЙ¹**

© 2022 г. В. В. Соловьев

*Белостокский технологический ун-т, Белосток, Польша**email: valsol@mail.ru*

Поступила в редакцию 14.03.2020 г.

После доработки 06.12.2021 г.

Принята к публикации 31.01.2022 г.

Представлен метод синтеза быстрых конечных автоматов на программируемых логических интегральных схемах типа программируемых пользователем вентильных матриц. Метод основан на операции расщепления внутренних состояний, что позволяет снизить ранги функций переходов и уменьшить число уровней функциональных генераторов при реализации функций переходов конечного автомата в случае последовательной и параллельной декомпозиции. Описывается алгоритм расщепления внутренних состояний для синтеза быстрых конечных автоматов. Результаты экспериментальных исследований показали, что предложенный метод позволяет увеличить быстродействие конечных автоматов в среднем от 1.08 до 1.19 раза, а максимально – от 1.52 до 1.73 раза. Выполнено также сравнение представленного метода с университетскими программами JEDI и NOVA.

DOI: 10.31857/S0002338822030131

Введение. Крупные функциональные блоки и узлы цифровой системы, а также сама цифровая система, как правило, включают устройство управления или контроллер. Быстродействие цифровой системы и составляющих ее функциональных блоков непосредственно зависит от быстродействия их устройств управления. Математической моделью большинства устройств управления и контроллеров является конечный автомат. Поэтому для построения высокопроизводительных цифровых систем необходимы методы синтеза быстрых конечных автоматов. При синтезе быстрых конечных автоматов можно пренебречь стоимостью реализации, поскольку площадь на кристалле, занимаемая устройством управления, составляет небольшую часть по сравнению с другими компонентами системы.

В настоящее время в качестве элементной базы для построения цифровых систем широко используются программируемые логические интегральные схемы (ПЛИС). Среди множества архитектур ПЛИС широкое распространение получили два типа архитектур [1]: на основе двух программируемых матриц И и ИЛИ, а также на базе функциональных генераторов типа LUT (look up table). ПЛИС первого типа получили название сложные программируемые устройства (complex programmable logic devices – CPLD), а второго – программируемые пользователем вентильные матрицы (field programmable gate arrays – FPGA). Системы на кристалле (system on chip – SoC) также имеют в своей архитектуре конфигурируемую часть со структурой FPGA.

Архитектуру FPGA можно представить как совокупность большого количества функциональных генераторов LUT, объединяемых межсоединениями. Каждый элемент LUT позволяет реализовать произвольную булеву функцию от небольшого числа аргументов (4–6). Методы синтеза быстрых конечных автоматов на CPLD были рассмотрены в [1]. В данной работе приведен метод синтеза быстрых конечных автоматов на FPGA.

Проблемам проектирования быстрых конечных автоматов на ПЛИС посвящено достаточно много работ. В [2] представлен метод повышения производительности синхронных схем при их

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Белостокского технологического университета (Польша) (грант № WZ/WI-ИТ/4/2020).

реализации на FPGA путем изменения расположения регистров. В [3] описан метод синтеза и оптимизации последовательных схем на FPGA. Метод основан на концепции синтеза, управляемого информацией, общей декомпозиции и теории отношений информационных мер. В [4] предлагается метод оптимизации тактирования сложных конечных автоматов путем добавления в схему избыточного блока. В [5, 6] исследуются стили описания конечных автоматов на языке VHDL, а также известные способы кодирования внутренних состояний для реализации быстрых конечных автоматов. В [7] применяются эволюционные методы для минимизации площади кристалла и задержки выходных сигналов конечного автомата. В [8] рассматривается задача кодирования внутренних состояний и оптимизация комбинационной схемы при реализации на CPLD быстрых конечных автоматов. В [9] представлена новая архитектура программируемой логики, специально предназначенная для реализации конечных автоматов, которая позволяет сократить площадь кристалла, задержки сигналов и потребляемую мощность. В [10] предложена новая модель автомата, названная виртуальным конечным автоматом. Для реализации виртуального конечного автомата применяется архитектура, основанная на блоках памяти. В [11] рассматривается реализация конечных автоматов на FPGA с использованием встроенных блоков памяти, которая позволяет уменьшить площадь кристалла и увеличить быстродействие конечного автомата. В [12, 13] представлены методы минимизации внутренних состояний полностью и неполностью определенных конечных автоматов, которые также способствуют увеличению быстродействия конечного автомата. В [14] описывается архитектура конечного автомата с одним входом на основе бинарного дерева, для реализации которого используется модель виртуального конечного автомата [10]. В [15] рассматривается метод увеличения быстродействия микропрограммных автоматов типа Мура путем введения дополнительных внутренних состояний.

Анализ известных подходов для проектирования быстрых последовательных схем и конечных автоматов показал следующее. Отдельные методы базируются на внесении изменений в схему устройства путем перестановки регистров [2] или добавления избыточных блоков [4], что не всегда допустимо и может привести к усложнению анализа и отладки схемы конечного автомата. Метод [3], основанный на теории отношений информационных мер, видится перспективным, однако нет сообщений о его практическом применении. Работы [5, 6] ничего нового в решение проблемы не вносят, это традиционный подход: выбор из имеющихся возможностей наиболее подходящего стиля описания конечного автомата и способа кодирования внутренних состояний. Генетические и эволюционные методы [7] не годятся для практического использования из-за своей большой вычислительной сложности. Методы синтеза быстрых конечных автоматов на CPLD [1, 8] не применимы при реализации конечного автомата на FPGA. Специальные архитектуры для реализации быстрых конечных автоматов [9, 10] существуют только в теории. Методы [11, 14] имеют существенные ограничения на условия применения. Методы [12, 13] незначительно увеличивают быстродействие конечных автоматов. Метод [15] годится для синтеза только микропрограммных автоматов, поведение которых описывается на языке граф-схем алгоритмов.

Таким образом, проведенный анализ показал, что отсутствуют эффективные методы логического синтеза быстрых конечных автоматов на FPGA. Поэтому открытым остается вопрос: как синтезировать и практически реализовать быстрый конечный автомат на реальных FPGA?

В [16] рассматривалась задача снижения числа аргументов функций переходов путем расщепления внутренних состояний конечного автомата, что способствует как снижению стоимости реализации, так и повышению быстродействия конечных автоматов при их реализации на FPGA. Однако в [16] не исследовалось, на сколько увеличивается быстродействие конечных автоматов.

В работе также используется операция расщепления внутренних состояний, но целью такого расщепления является повышение быстродействия конечных автоматов на FPGA, основанных на функциональных генераторах LUT. Операция расщепления внутренних состояний относится к операциям эквивалентных преобразований конечного автомата, которая не изменяет алгоритм его функционирования. При расщеплении внутренних состояний также сохраняется тип автомата: Мили или Мура.

Суть рассматриваемого метода заключается в уменьшении числа уровней элементов LUT комбинационной схемы, которая реализует функции переходов конечного автомата. В результате снижается задержка сигналов, питающих элементы памяти, и быстродействие конечного автомата увеличивается. Для уменьшения числа уровней элементов LUT используется операция расщепления внутренних состояний конечного автомата. Однако бесконтрольное расщепление состояний может привести к обратному эффекту: увеличению числа уровней LUT. Поэтому в

методе предусмотрено условие, когда процесс расщепления внутренних состояний следует остановить.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 определяются ранги функций переходов и число уровней функциональных генераторов LUT, необходимых для их реализации. В разд. 2 описывается метод синтеза быстрых конечных автоматов. В разд. 3 рассматривается расщепление внутренних состояний для уменьшения числа уровней элементов LUT. В разд. 4 представлены результаты экспериментальных исследований. В заключение обсуждаются результаты экспериментальных исследований и указываются перспективные направления проектирования быстрых конечных автоматов.

1. Определение числа аргументов (рангов) функций переходов и числа уровней элементов LUT для их реализации. Конечный автомат будем характеризовать числом M внутренних состояний множества $A = \{a_1, \dots, a_M\}$, числом L входных переменных множества $X = \{x_1, \dots, x_L\}$, числом N выходных переменных множества $Y = \{y_1, \dots, y_N\}$, а также множеством D функций переходов (функций возбуждения элементов памяти).

Для синтеза быстрых конечных автоматов на FPGA традиционно используется унарное кодирование (one-hot) внутренних состояний, при этом каждому внутреннему состоянию соответствует отдельный триггер памяти автомата, установка которого в значение 1 указывает, что автомат находится в данном состоянии. Вход каждого триггера управляется функцией переходов d_i , $d_i \in D$, $i = \overline{1, M}$, т.е. каждому внутреннему состоянию автомата соответствует своя функция переходов d_i .

Пусть $A(a_i)$ – множество состояний, в которых оканчиваются переходы из состояния a_i ; $B(a_i)$ – множество состояний, переходы из которых оканчиваются в состоянии a_i ; $X(a_m, a_i)$ – множество входных переменных, значения которых инициируют переход из состояния a_m в состояние a_i ; $X(a_i)$ – множество входных переменных, значения которых инициируют переходы в состояние a_i .

$$X(a_i) = \bigcup_{a_m \in B(a_i)} X(a_m, a_i) a_m, \quad a_i \in A.$$

Чтобы реализовать некоторый переход из состояния a_m в состояние a_i необходимо проверить значение выхода триггера активного состояния a_m (один бит) и значения переменных множества $X(a_m, a_i)$, которые инициируют данный переход. Чтобы реализовать функцию перехода d_i в состояние a_i , необходимо проверить значения выходов триггеров всех состояний, переходы из которых оканчиваются в состоянии a_i , т.е. $|B(a_i)|$ значений, где $|A|$ – мощность множества A . Кроме того, необходимо проверить значения всех входных переменных, которые инициируют переходы в состояние a_i , т.е. $|X(a_i)|$ значений.

Определим ранг функции переходов d_i в состоянии a_i как число аргументов этой функции следующим образом:

$$r_i = |B(a_i)| + |X(a_i)|. \tag{1.1}$$

Пусть n – число входов функциональных генераторов LUT. Если ранг r_i некоторой функции переходов d_i , $i = \overline{1, M}$, превысит n входов функционального генератора LUT, то возникает необходимость в декомпозиции функции переходов d_i и ее реализации на нескольких элементах LUT. Отметим, что путем расщепления внутренних состояний нельзя снизить ранг функций переходов ниже величины

$$r^* = \max_{m=1, M, s=1, M} (|X(a_m, a_s)|) + 1. \tag{1.2}$$

Значение величины r^* в предлагаемом методе используется в качестве верхней границы рангов функций переходов при расщеплении внутренних состояний.

Известно два основных подхода при декомпозиции булевых функций: последовательная (линейная) и параллельная [1]. При последовательной декомпозиции все функциональные генераторы LUT последовательно соединяются в цепочку. На вход первого генератора LUT поступает n аргументов реализуемой функции, а на входы всех остальных элементов LUT – на единицу

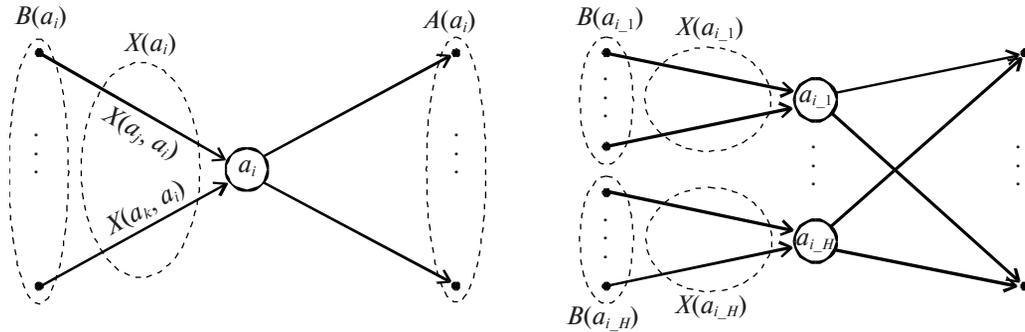


Рис. 1. Расщепление состояния a_i для уменьшения ранга функции переходов d_i

меньше. Число l_i^s уровней функциональных генераторов LUT при реализации функции переходов ранга r_i в случае последовательной декомпозиции определяется из выражения

$$l_i^s = \text{int}\left(\frac{r_i - n}{n - 1}\right) + 1, \quad (1.3)$$

где $\text{int}(A)$ – наименьшее целое, большее или равное A .

В случае параллельной декомпозиции функциональные генераторы LUT соединяются в виде иерархической древовидной структуры. Значения аргументов функции поступают на входы элементов LUT первого уровня. На входы всех последующих уровней элементов LUT поступают значения промежуточных функций. Число l_i^p уровней функциональных генераторов LUT при параллельной декомпозиции функции переходов ранга r_i определяется следующим выражением:

$$l_i^p = \text{int}(\log_n r_i). \quad (1.4)$$

Какую декомпозицию, последовательную или параллельную, использует конкретный синтезатор, предсказать сложно. Предварительные исследования показали, что, например, в пакете Quartus Prime одновременно применяется как последовательная, так и параллельная декомпозиция. Число l_i уровней функциональных генераторов LUT при реализации на FPGA функции переходов d_i с рангом r_i может находиться между значениями l_i^s и l_i^p , $i = \overline{1, M}$.

Введем целочисленный коэффициент k , $k \in [0, 10]$, который позволяет адаптировать предлагаемый алгоритм при определении числа уровней функциональных генераторов LUT к конкретному синтезатору. В этом случае число l_i уровней элементов LUT, необходимых для реализации функции переходов d_i ранга r_i , будет определяться следующим выражением:

$$l_i = \left\lceil \frac{l_i^s - l_i^p}{10} k + l_i^p \right\rceil. \quad (1.5)$$

Из (1.5) следует, что при $k = 0$ имеем $l_i = l_i^p$, т.е. число уровней соответствует самой быстрой параллельной декомпозиции, а при $k = 10$ имеем $l_i = l_i^s$, т.е. число уровней соответствует самой медленной последовательной декомпозиции. Конкретное значение коэффициента k зависит от архитектуры семейства ПЛИС и используемого синтезатора.

2. Метод синтеза быстрых конечных автоматов. Пусть для некоторой функции переходов d_i ранг r_i превышает значение r^* , т.е. $r_i > r^*$. В этом случае предлагается расщепить состояние a_i на H состояний a_{i-1}, \dots, a_{i-H} (рис. 1) таким образом, чтобы выполнялось $r_{i-h} \leq r^*$ для всех $h = \overline{1, H}$.

Однако имеется опасность расхождения (выполнения до бесконечности) процесса расщепления внутренних состояний. Дело в том, что при расщеплении некоторого состояния a_i , $i = \overline{1, M}$, кроме увеличения числа состояний M , также увеличивается число переходов в состояния множества $A(a_i)$. В результате расщепления состояния a_i для состояний множества $A(a_i)$ увеличива-

ются мощности множеств $B(a_m)$, $a_m \in A(a_i)$. Поэтому для состояний множества $A(a_i)$, согласно (1.1), возрастают ранги функций переходов, что может привести к увеличению значений l_i^s , l_i^p и l_i .

В предлагаемом алгоритме процесс расщепления внутренних состояний прекращается при выполнении условия

$$l_{\max} \leq \text{int}(l_{\text{mid}}), \quad (2.1)$$

где l_{\max} – число уровней функциональных генераторов LUT, необходимых для реализации самой “плохой” функции, имеющей максимальный ранг; l_{mid} – среднеарифметическое значение числа уровней функциональных генераторов LUT для всех функций переходов; $\text{int}(A)$ – наименьшее целое, большее или равное A . Процесс расщепления внутренних состояний также прекращается, если $l_{\max} > l^*$, где l^* – значение l_{\max} на предыдущей итерации выполнения алгоритма.

С учетом вышеизложенного алгоритм расщепления внутренних состояний для синтеза быстрых конечных автоматов выглядит следующим образом.

Алгоритм 1.

Шаг 1. Определяется значение коэффициента k , $k \in [0, 10]$, который отражает используемый средством проектирования способ декомпозиции булевых функций.

Шаг 2. Согласно (1.1) определяются ранги r_i , $i = \overline{1, M}$, функций переходов конечного автомата.

Шаг 3. На основании (1.3)–(1.5) для каждой функции переходов d_i определяется число l_i уровней функциональных генераторов LUT, необходимых для ее реализации.

Шаг 4. Определяются значения l_{\max} и l_{mid} . Если выполняются условия (2.1), то идти к шагу 9, иначе – к шагу 5.

Шаг 5. Выбирается состояние a_i , для которого $r_i = \max$, если таких состояний несколько, среди них выбирается состояние, для которого $|A(a_i)| = \min$ (минимизируется увеличение рангов других состояний в результате расщепления состояния a_i).

Шаг 6. Полагается $l^* = l_{\max}$.

Шаг 7. С помощью алгоритма 2 (приведенного в разд. 3) выполняется пробное расщепление состояния a_i , выбранного на шаге 5.

Шаг 8. Вновь вычисляется l_{\max} . Если $l_{\max} > l^*$, то идти к шагу 9; иначе принимается расщепление состояния a_i , тогда идти к шагу 2.

Шаг 9. Конец.

Дальнейший синтез конечного автомата выполняется традиционными методами, например, автоматически с помощью синтезатора используемого средства проектирования. Для этого достаточно описать конечный автомат, полученный после расщепления внутренних состояний, на одном из языков проектирования (Verilog или VHDL).

Значение коэффициента k , вводимого в шаге 1 алгоритма 1, определяется эмпирически путем синтеза тестовых примеров с помощью применяемого средства проектирования.

3. Расщепление внутренних состояний. Для расщепления некоторого состояния a_i , $i = \overline{1, M}$, выполняемого в шаге 6 алгоритма 1, строится булева матрица W следующим образом. Строки матрицы W соответствуют множеству переходов $C(a_i)$, которые оканчиваются в состоянии a_i . Столбцы матрицы W делятся на две части в соответствии с типами аргументов функции переходов d_i . Первая часть столбцов матрицы W соответствует множеству $B(a_i)$ состояний, переходы из которых оканчиваются в состоянии a_i , а вторая часть – множеству $X(a_i)$ входных переменных, значения которых инициируют переходы в состояние a_i . На пересечении строки t , $t = \overline{1, T}$, $T = |C(a_i)|$, и столбца j первой части матрицы W ставится единица, если переход c_t , $c_t \in C(a_i)$, выполняется из состояния a_j , $a_j \in B(a_i)$. На пересечении строки t и столбца j второй части матрицы W ставится единица, если входная переменная x_j , $x_j \in X(a_i)$, принимает значащее значение (0 или 1) на переходе c_t , $c_t \in C(a_i)$.

Теперь задача сводится к разбиению матрицы W на минимальное число H строчных миноров W_1, \dots, W_H таким образом, чтобы число столбцов, содержащих единицы, в каждом миноре W_h , $h = \overline{1, H}$, не превышало величину r^* , вычисляемую, согласно (1.2). Состояние a_i разбивается на H состояний a_{i_1}, \dots, a_{i_H} , причем строки каждого минора W_h определяют переходы в состояние a_{i_h} , $h = \overline{1, H}$.

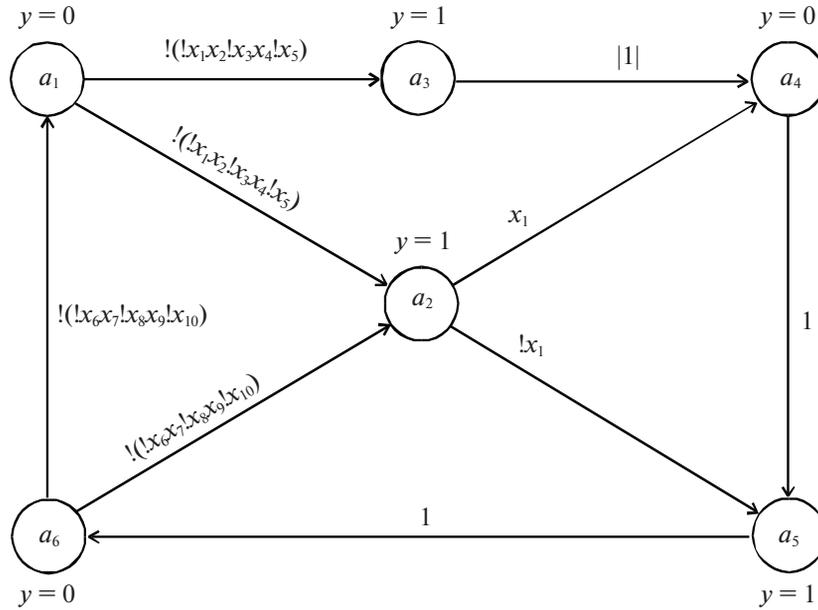


Рис. 2. Граф конечного автомата из примера

Пусть w_i – некоторая строка матрицы W . Для расщепления некоторого состояния $a_i, a_i \in A$, может быть использован следующий алгоритм.

Алгоритм 2.

Шаг 1. Строится булева матрица W для расщепления состояния a_i . Полагается $H := 0$.

Шаг 2. Полагается $H := H + 1$. Начинается формирование минора W_H . В качестве опорной строки в минор W_H выбирается строка w_i с максимальным числом единиц. Строка w_i включается в минор W_H и исключается из дальнейшего рассмотрения, полагается $W_H := \{w_i\}, W := W \setminus \{w_i\}$.

Шаг 3. Добавляются строки в минор W_H . Для этого среди строк матрицы W выбирается строка w_i , для которой выполняется неравенство

$$|W_H \cup \{w_i\}| \leq r^*,$$

где $|W_H \cup \{w_i\}|$ – суммарное число единиц в столбцах минора W_H и строки w_i после объединения их по ИЛИ. Если таких строк может быть выбрано несколько, то среди них выбирается строка w_i , имеющая максимальное число общих единиц с минором W_H , т.е.

$$|W_H \cap \{w_i\}| \rightarrow \max,$$

где $|W_H \cap \{w_i\}|$ – суммарное число единиц в столбцах минора W_H и строки w_i после объединения их по AND. Строка w_i включается в минор W_H и исключается из дальнейшего рассмотрения, полагается $W_H := W_H \cup \{w_i\}, W := W \setminus \{w_i\}$.

Шаг 3 повторяется до тех пор, пока в минор W_H может быть включена хотя бы одна строка.

Шаг 4. Если в матрице W все строки распределены между минорами, то идти к шагу 5, иначе – к шагу 2.

Шаг 5. Состояние a_i разбивается на H состояний a_{i_1}, \dots, a_{i_H} таким образом, что строки каждого минора W_h определяют переходы в состояние $a_{i_h}, h = 1, H$.

Шаг 6. Конец.

Работу предлагаемого метода синтеза продемонстрируем на примере. Пусть необходимо синтезировать быстрый конечный автомат, граф которого показан на рис. 2 (здесь ! обозначает логическое отрицание). Данный автомат представляет собой автомат типа Мура, имеет шесть состояний a_1, \dots, a_6 , десять входных переменных x_1, \dots, x_{10} и одну выходную переменную y , значение которой на рис. 2 показано возле каждого состояния. Переходы из состояний a_3, a_4 и a_5 являются

Таблица 1. Начальные значения величин $B(a_i)$, $X(a_i)$, r_i , l_i^s и l_i^p

Состояние	$B(a_i)$	$X(a_i)$	r_i	l_i^s	l_i^p
a_1	$\{a_6\}$	$\{x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$	6	1	1
a_2	$\{a_1, a_6\}$	$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$	12	3	2
a_3	$\{a_1\}$	$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$	6	1	1
a_4	$\{a_2, a_3\}$	$\{x_1\}$	3	1	1
a_5	$\{a_2, a_4\}$	$\{x_1\}$	3	1	1
a_6	$\{a_5\}$	\emptyset	1	1	1

безусловными, поэтому на этих переходах в качестве условия перехода записано логическое значение 1. Значения множеств $B(a_i)$ и $X(a_i)$, а также ранги r_i функций переходов для данного конечного автомата приведены в табл. 1. Поскольку для нашего примера имеем $\max(|X(a_m, a_s)|) = 5$, то, согласно (1.2), величина $r^* = 6$. Пусть необходимо построить конечный автомат на FPGA, для которой максимальное число входов функциональных генераторов LUT равно 6, т.е. $n = 6$.

Согласно (1.3) и (1.4), определяем значения l_i^s и l_i^p для каждого состояния (приведены в соответствующих столбцах табл. 1). Предположим, что мы не знаем, по какому алгоритму компилятор выполняет декомпозицию булевых функций, поэтому принимаем наихудший вариант: последовательную декомпозицию. Поэтому значение коэффициента k в выражении (1.5) полагаем равным 10. В результате число уровней элементов LUT, необходимых для реализации каждой

	a_1	a_6	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
w_1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
w_2	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

Рис. 3. Матрица W для расщепления состояния a_2

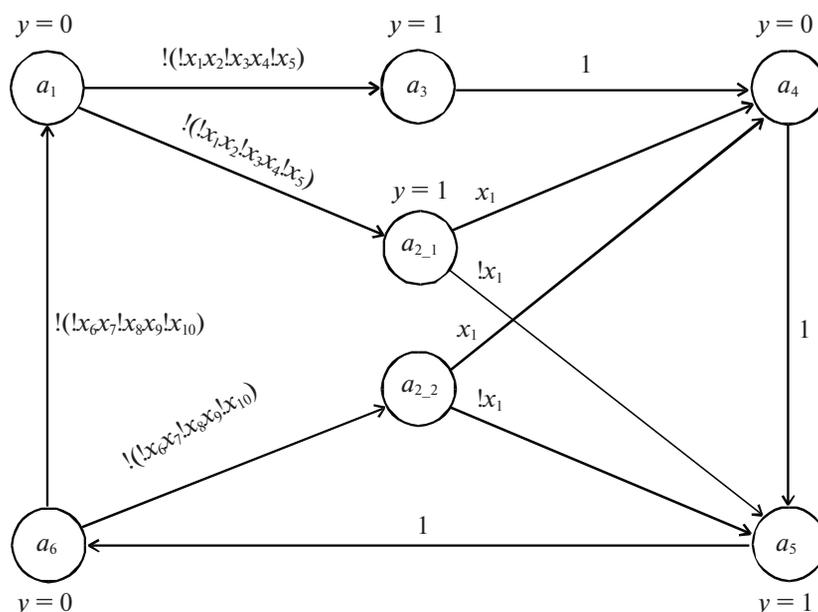


Рис. 4. Граф автомата после расщепления состояния a_2

Таблица 2. Значения величин $B(a_i)$, $X(a_i)$, r_i , l_i^s и l_i^p после расщепления состояния a_2

Состояние	$B(a_i)$	$X(a_i)$	r_i	l_i^s	l_i^p
a_1	$\{a_6\}$	$\{x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$	6	1	1
a_{2_1}	$\{a_1\}$	$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$	6	1	1
a_{2_2}	$\{a_6\}$	$\{x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$	6	1	1
a_3	$\{a_1\}$	$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$	6	1	1
a_4	$\{a_{2_1}, a_3\}$	$\{x_1\}$	3	1	1
a_5	$\{a_{2_2}, a_4\}$	$\{x_1\}$	3	1	1
a_6	$\{a_5\}$	\emptyset	1	1	1

Таблица 3. Результаты экспериментальных исследований метода синтеза быстрых конечных автоматов на эталонных примерах

FSM	N_s	M	M^*	M^*/M	P	P^*	P^*/P	l_{\max}	l_{\max}^*	l_{\max}/l_{\max}^*
BBSSE	11	16	48	3.00	56	188	3.36	7	3	2.33
CSE	1	16	23	1.44	91	154	1.69	8	5	1.60
EX1	1	18	22	1.22	233	379	1.63	8	5	1.60
EX2	1	19	34	1.79	72	72	1.00	6	2	3.00
EX3	1	10	17	1.70	36	36	1.00	3	2	1.50
EX5	1	9	16	1.78	32	32	1.00	3	2	1.50
EX7	1	10	18	1.80	36	36	1.00	4	2	2.00
KEYB	1	19	26	1.37	170	261	1.54	8	4	2.00
PLANET	2	48	51	1.06	115	120	1.04	3	2	1.50
PMA	8	24	39	1.63	73	106	1.45	5	2	2.50
S208	2	18	43	2.39	153	332	2.17	9	5	1.80
S298	1	218	246	1.13	1096	1236	1.13	27	19	1.42
S386	2	13	18	1.38	64	99	1.55	7	3	2.33
S420	2	18	43	2.39	137	296	2.16	9	5	1.80
S820	3	25	36	1.44	232	324	1.40	14	5	2.80
S832	3	25	38	1.52	245	412	1.68	14	5	2.80
S1488	3	48	63	1.31	251	341	1.36	19	3	6.33
S1494	3	48	63	1.31	250	364	1.46	19	3	6.33
SAND	3	32	39	1.22	184	325	1.77	6	5	1.20
SSE	11	16	48	3.00	56	188	3.36	7	3	2.33
STYR	2	30	41	1.37	166	259	1.56	9	5	1.80
mid	3.00			1.68			1.63			2.40
max	11			3			3.36			6.33

функции переходов, определяется величиной $l_i = l_i^s$. Для нашего примера $\text{int}(l_{\text{mid}}) = \text{int}(8/6) = 2$. Другими словами, процесс расщепления внутренних состояний прекращается, как только каждая функция переходов может быть реализована на двух уровнях элементов LUT.

Для рассматриваемого примера, согласно табл. 1, имеем $l_{\max} = l_2^s = 3$ для состояния a_2 , поэтому выполняется расщепление состояния a_2 . Строится матрица W для расщепления состояния a_2 (рис. 3). Матрица W содержит две строки. Строка w_1 соответствует переходу из состояния a_1 в состояние a_2 , а строка w_2 соответствует переходу из состояния a_6 в состояние a_2 . Выполнение

Таблица 4. Результаты реализации эталонных примеров конечных автоматов на FPGA семейств Arria II и Cyclone V

FSM	Arria II						Cyclone V					
	L	L^*	L^*/L	F	F^*	F^*/F	L	L^*	L^*/L	F	F^*	F^*/F
BBSSE	28	33	1.18	845	937	1.11	21	45	2.14	420	458	1.09
CSE	67	71	1.06	240	370	1.54	43	45	1.05	300	289	0.96
EX1	89	97	1.09	397	352	0.89	54	64	1.19	213	369	1.73
EX2	27	43	1.59	627	787	1.26	19	25	1.32	290	335	1.16
EX3	16	23	1.44	649	629	0.97	12	14	1.17	280	347	1.24
EX5	14	21	1.50	921	587	0.64	10	13	1.30	464	298	0.64
EX7	18	23	1.28	791	587	0.74	12	13	1.08	410	333	0.81
KEYVB	50	72	1.44	760	876	1.15	37	50	1.35	360	410	1.14
PLANET	88	93	1.06	1011	1030	1.02	58	63	1.09	475	428	0.90
PMA	86	93	1.08	496	575	1.16	55	59	1.07	209	309	1.48
S208	30	62	2.07	812	806	0.99	19	36	1.89	383	415	1.08
S298	341	360	1.06	556	585	1.05	263	273	1.04	265	258	0.97
S386	33	40	1.21	781	928	1.19	22	29	1.32	414	463	1.12
S420	28	57	2.04	750	810	1.08	18	33	1.83	385	419	1.09
S820	64	80	1.25	636	796	1.25	43	58	1.35	324	371	1.15
S832	65	92	1.42	632	794	1.26	43	61	1.42	306	372	1.22
S1488	153	164	1.07	595	823	1.38	97	111	1.14	296	379	1.28
S1494	145	179	1.23	682	883	1.29	93	119	1.28	309	390	1.26
SAND	127	131	1.03	381	353	0.93	85	90	1.06	255	298	1.17
SSE	28	33	1.18	845	937	1.11	21	45	2.14	420	458	1.09
STYR	117	135	1.15	412	421	1.02	76	87	1.14	288	315	1.09
mid			1.31			1.10			1.35			1.13
max			2.07			1.54			2.14			1.73

алгоритма 2 приводит к разбиению строк матрицы W на два подмножества: $W_1 = \{w_1\}$ и $W_2 = \{w_2\}$. Поэтому состояние a_2 расщепляется на два состояния, как показано на рис. 4. Новые значения величин $B(a_i)$, $X(a_i)$, r_i , l_i^s и l_i^p приведены в табл. 2. Теперь имеем $l_{\max} = l_{\text{mid}} = 1$, поэтому выполнение алгоритма 1 завершается.

Таким образом, для данного примера путем расщепления состояния a_2 удалось снизить максимальное число уровней элементов LUT, необходимых для реализации функций переходов конечного автомата, с 3 до 1 в случае последовательной декомпозиции и с 2 до 1 в случае параллельной декомпозиции.

4. Результаты экспериментальных исследований. Рассмотренный метод синтеза быстрых конечных автоматов исследовался при реализации на FPGA эталонных примеров конечных автоматов, разработанных в центре MCNC [17]. Для этого к каждому эталонному примеру конечного автомата применялся представленный метод синтеза. Оба конечных автомата, исходный и синтезированный, описывались на языке Verilog. Затем выполнялась стандартная реализация на FPGA конечных автоматов с помощью системы Quartus Prime версии 17.1. При этом использовались параметры синтеза системы Quartus, устанавливаемые по умолчанию. В качестве числа входов функциональных генераторов LUT было принято $n = 4$. Предлагаемый метод удалось применить к 21 эталонному примеру из 48, т.е. в 43.75% случаев. Для остальных примеров условия (2.1) не были нарушены и расщепление состояний не выполнялось.

Результаты применения рассмотренного метода синтеза быстрых конечных автоматов приведены в табл. 3, где FSM – имя эталонного примера; N_s – число расщеплений внутренних состояний; M и P – число состояний и число переходов конечного автомата до применения метода; M^* и P^* – число состояний и число переходов конечного автомата после применения метода; l_{\max}

Таблица 5. Результаты реализации эталонных примеров конечных автоматов на FPGA семейств MAX II и Stratix V

FSM	MAX II						Stratix V					
	L	L^*	L^*/L	F	F^*	F^*/F	L	L^*	L^*/L	F	F^*	F^*/F
BBSSE	41	74	1.80	312	338	1.08	21	26	1.24	1151	1364	1.19
CSE	89	101	1.13	212	240	1.13	43	45	1.05	346	396	1.14
EX1	124	142	1.15	199	241	1.21	54	66	1.22	352	388	1.10
EX2	56	68	1.21	289	338	1.17	19	25	1.32	539	635	1.18
EX3	25	36	1.44	309	359	1.16	12	14	1.17	618	603	0.98
EX5	22	31	1.41	350	414	1.18	10	13	1.30	1294	525	0.41
EX7	25	33	1.32	304	402	1.32	12	13	1.08	1176	582	0.49
KEYB	76	95	1.25	279	324	1.16	37	52	1.41	983	1021	1.04
PLANET	142	144	1.01	402	427	1.06	59	62	1.05	1271	1289	1.01
PMA	124	157	1.27	257	305	1.19	56	67	1.20	220	360	1.64
S208	71	99	1.39	248	313	1.26	19	36	1.89	1131	1215	1.07
S298	903	905	1.00	203	207	1.02	261	270	1.03	656	678	1.03
S386	47	69	1.47	320	339	1.06	22	29	1.32	1139	1172	1.03
S420	31	63	2.03	265	310	1.17	18	33	1.83	1024	1238	1.21
S820	95	126	1.33	255	296	1.16	43	55	1.28	912	1034	1.13
S832	96	132	1.38	234	279	1.19	43	61	1.42	836	1025	1.23
S1488	218	247	1.13	217	323	1.49	98	112	1.14	740	965	1.30
S1494	213	245	1.15	214	326	1.52	93	113	1.22	759	959	1.26
SAND	178	196	1.10	219	253	1.16	85	90	1.06	310	317	1.02
SSE	41	74	1.80	312	338	1.08	21	26	1.24	1151	1364	1.19
STYR	155	188	1.21	214	252	1.18	78	87	1.12	353	347	0.98
mid			1.33			1.19			1.27			1.08
max			2.03			1.52			1.89			1.64

и I_{\max}^* – максимальный ранг функций переходов до и после применения метода; M^*/M , P^*/P и I_{\max}/I_{\max}^* – отношения соответствующих параметров; mid – среднее значение параметра; max – максимальное значение параметра.

Анализ табл. 3 показывает, что в синтезированных примерах конечных автоматов среднее число расщеплений составляет 3.00, а максимальное – 11. В результате применения метода число состояний конечных автоматов увеличилось в среднем в 1.68 раза, а максимально – в 3 раза; аналогично число переходов увеличилось в среднем в 1.63 раза, а максимально – в 3.36 раза. Применение данного метода позволило уменьшить максимальный ранг функций переходов в среднем в 2.40 раза, а максимально – в 6.33 раза. Таким образом, несмотря на увеличение числа состояний и числа переходов конечных автоматов, представленный метод позволяет значительно уменьшить максимальный ранг функций переходов. Однако открытым остается вопрос: на сколько увеличилось быстродействие конечных автоматов?

Для ответа на поставленный вопрос была выполнена реализация эталонных примеров на следующих семействах FPGA: Arria II, Cyclone V, MAX II и Stratix V. Результаты исследований приведены в табл. 4 и 5, где L и L^* – число логических элементов FPGA (стоимость реализации), необходимых для реализации исходного и синтезированного конечных автоматов; F и F^* – максимальная частота функционирования исходного и синтезированного конечных автоматов; L^*/L и F^*/F – отношения соответствующих параметров.

Анализ табл. 4 и 5 показывает, что предложенный метод позволяет для различных семейств FPGA увеличить быстродействие конечных автоматов в среднем от 1.08 до 1.19 раза, а максимально – от 1.52 до 1.73 раза (пример EX1 при реализации на FPGA семейства Cyclone V).

Таблица 6. Сравнение предложенного метода с программами JEDI и NOVA при реализации конечных автоматов на FPGA семейств Cyclone V и MAX II

FSM	Cyclone V					MAX II				
	<i>FJ</i>	<i>FN</i>	<i>F*</i>	<i>F*/FJ</i>	<i>F*/FN</i>	<i>FJ</i>	<i>FN</i>	<i>F*</i>	<i>F*/FJ</i>	<i>F*/FN</i>
BBSSE	402	119	937	2.33	7.87	311	163	937	3.01	5.75
CSE	300	221	370	1.23	1.67	222	161	370	1.67	2.30
EX1	267	156	352	1.32	2.26	217	129	352	1.62	2.73
EX2	333	188	787	2.36	4.19	302	175	787	2.61	4.50
EX3	280	294	629	2.25	2.14	348	219	629	1.81	2.87
EX5	422	298	587	1.39	1.97	340	206	587	1.73	2.85
EX7	398	308	587	1.47	1.91	320	193	587	1.83	3.04
KEYB	360	264	876	2.43	3.32	282	152	876	3.11	5.76
PLANET	435	215	1030	2.37	4.79	391	124	1030	2.63	8.31
PMA	224	198	575	2.57	2.90	267	116	575	2.15	4.96
S386	408	285	928	2.27	3.26	336	192	928	2.76	4.83
SSE	402	119	937	2.33	7.87	311	163	937	3.01	5.75
mid				2.03	3.68				2.33	4.47
max				2.57	7.87				3.11	8.31

Применение метода также увеличивает стоимость реализации конечных автоматов в среднем от 1.27 до 1.35 раза.

В табл. 6 приведено сравнение предложенного метода с известными университетскими программами кодирования внутренних состояний конечных автоматов JEDI [18] и NOVA [19], где *FJ*, *FN* и *F** – максимальная частота функционирования конечного автомата при использовании программы JEDI, NOVA и данного метода соответственно.

Анализ табл. 6 показывает, что с помощью предложенного метода быстродействие конечных автоматов увеличивается в среднем в 2.03–2.33 раза по сравнению с программой JEDI и в 3.68–4.47 раза по сравнению с программой NOVA. При этом максимальное увеличение быстродействия составляет 3.11 раза по сравнению с программой JEDI и 8.31 раза по сравнению с программой NOVA. Такое большое преимущество рассмотренного метода с методами, реализованными в программах JEDI и NOVA, объясняется тем, что данный метод нацелен на увеличение быстродействия, а упомянутые методы – на уменьшение стоимости реализации конечных автоматов.

Заключение. Приведенные результаты экспериментальных исследований показали, что использование представленного метода позволяет значительно снизить максимальный ранг функций переходов, однако увеличение быстродействия конечных автоматов наблюдается не во всех случаях. Это объясняется сложностью задачи синтеза быстрых конечных автоматов. Дело в том, что на быстродействие конечного автомата влияют не только результаты логического синтеза, но также результаты размещения и трассировки. Кроме того, на быстродействие конечных автоматов, кроме функций переходов, также влияет сложность выходных функций.

Предлагаемый метод может также применяться и при построении быстрых конечных автоматов на заказных микросхемах (application specific integrated circuit – ASIC). Для этого достаточно определить оценки числа уровней схемы (1.3)–(1.5) для конкретной архитектуры ASIC.

Дальнейшее развитие методов синтеза быстрых конечных автоматов может идти по пути учета сложности выходных функций, использования специальных структурных моделей конечных автоматов, архитектурных свойств FPGA, специального управления синхронизацией конечного автомата и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соловьев В.В., Климович А. Логическое проектирование цифровых систем на основе программируемых логических интегральных схем. М.: Горячая линия – Телеком, 2008.

2. Miyazaki N., Nakada H., Tsutsui A., Yamada K., Ohta N. Performance Improvement Technique for Synchronous Circuits Realized as LUT-Based FPGA's // IEEE Trans. on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems. 1995. V. 3. № 3. P. 455–459.
3. Jozwiak L., Slusarczyk A., Chojnacki A. Fast and Compact Sequential Circuits Through the Information-driven Circuit Synthesis // Proc. Euromicro Symp. on Digital Systems Design. Warsaw. Poland: IEEE, 2001. P. 46–53.
4. Huang S.-Y. On Speeding up Extended Finite State Machines Using Catalyst Circuitry // Proc. of the Asia and South Pacific Design Automation Conf. (ASP-DAC). Yokohama. Japan: IEEE, 2001. P. 583–588.
5. Kuusilinna K., Lahtinen V., Hamalainen T., Saarinen J. Finite State Machine Encoding for VHDL Synthesis // IEE Proc. Computers and Digital Techniques. 2001. V. 148. № 1. P. 23–30.
6. Rafla N.I., Davis B. A Study of Finite State Machine Coding Styles for Implementation in FPGAs // Proc. 49th IEEE Int. Midwest Sympos. on Circuits and Systems. San Juan: IEEE, USA, 2006. V. 1. P. 337–341.
7. Nedjah N., Mourelle L. Evolutionary Synthesis of Synchronous Finite State Machines // Proc. Intern. Conf. on Computer Engineering and Systems (ICCES). Cairo. Egypt: IEEE, 2006. P. 19–24.
8. Czerwiński R., Kania D. Synthesis Method of High Speed Finite State Machines // Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences. 2010. V. 58. № 4. P. 635–644.
9. Glaser J., Damm M., Haase J., and Grimm C. TR-FSM: Transition-based Reconfigurable Finite State Machine // ACM Trans. on Reconfigurable Technology and Systems (TRETS). 2011. V. 4. № 3. P. 23:1–23:14.
10. Senhadji-Navarro R., Garcia-Vargas I. Finite Virtual State Machines // IEICE Trans. on Information and Systems. 2012. V. E95D. № 10. P. 2544–2547.
11. Garcia-Vargas I., Senhadji-Navarro R. Finite State Machines with Input Multiplexing: a Performance Study // IEEE Trans. on CAD. 2015. V. 34. № 5. P. 867–871.
12. Klimowicz A. On Using Speed as the Criteria of State Selection for Minimization of Finite State Machines // Eds K. Saeed, W. Homenda. Computer Information Systems and Industrial Management. CISIM 2016. Lecture Notes in Computer Science, Cham: Springer, 2016. V. 9842. P. 493–503.
13. Klimowicz A. Performance Targeted Minimization of Incompletely Specified Finite State Machines for Implementation in FPGA Devices // Proc. Euromicro Sympos. on Digital Systems Design. Vienna. Austria: IEEE, 2017. P. 145–150.
14. Senhadji-Navarro R., Garcia-Vargas I. High-performance Architecture for Binary-tree-based Finite State Machines // IEEE Trans. on CAD. 2018. V. 37. № 4. P. 796–805.
15. Salauyou V., Bulatowa I. Synthesis of High-speed ASM Controllers with Moore Outputs by Introducing Additional States // Eds K. Saeed, W. Homenda. Computer Information Systems and Industrial Management. CISIM 2018. Lecture Notes in Computer Science. Cham: Springer, 2018. V. 11127. P. 405–416.
16. Solov'ev V.V. Splitting the Internal States in Order to Reduce the Number of Arguments in Functions of Finite Automata // J. Computer and Systems Sciences International. 2005. V. 44. № 5. P. 777–783.
17. Yang S. Logic Synthesis and Optimization Benchmarks user Guide. Version 3.0 // Microelectronics Center of North Carolina (MCNC). North Carolina. USA. MCNC, 1991.
18. Lin B., Newton A.R. Synthesis of Multiple Level Logic from Symbolic High-level Description Languages // Proc. IFIP Intern. Conf. on Very Large Scale Integration. Munich. Germany. North-Holland, 1989. P. 187–196.
19. Villa T., Sangiovanni-Vincentelli A. Nova: State Assignment of Finite State Machines for Optimal Two-level Logic Implementation // IEEE Trans. on CAD. 1990. V. 9. № 9. P. 905–924.

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

УДК 519.85

**НЕОДНОРОДНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКОВ
ПРИ ПРЕДЕЛЬНОЙ ЗАГРУЗКЕ МНОГОПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОЙ СЕТИ**© 2022 г. Ю. Е. Малашенко^a, И. А. Назарова^{a,*}^a ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: irina-nazar@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.06.2021 г.

После доработки 09.11.2021 г.

Принята к публикации 29.11.2021 г.

В рамках многопродуктовой сетевой модели изучаются решения многокритериальных оптимизационных задач поиска недискриминирующих распределений равноправных, невзаимозаменяемых потоков различных видов, передаваемых между всеми узлами одновременно. Для оценки функциональных возможностей системы используется вектор предельных значений совместно допустимых межузловых потоков при максимальной загрузке всех ребер сети. Рассматриваются уравнивательная и равнодолевая стратегии распределения потоков. Анализ результатов вычислительных экспериментов на сетях различной конфигурации показал, что для небольшого числа пар узлов-корреспондентов выделяемые системные ресурсы и результирующие значения межузловых потоков намного превышают соответствующие показатели для остальных.

DOI: 10.31857/S000233882202010X

Введение. В настоящее время для анализа проблем создания, развития и эксплуатации оптоволоконных и беспроводных систем часто используется математическая модель передачи многопродуктового потока, в рамках которой решаются многокритериальные оптимизационные задачи. Например, в [1] проводится анализ сетей управления воздушным сообщением с помощью взаимодействия радаров, компьютеров и телекоммуникационных систем. В [2] многопродуктовые модели применяются для анализа уязвимости и живучести многопользовательских систем связи. В [3, 4] предлагаются алгоритмы проектирования многопродуктовой сетевой системы, позволяющей передавать потоки, согласно требованиям ее пользователей.

В [5] описан детерминированный алгоритм маршрутизации при больших требованиях на передачу многопродуктовых потоков в режиме онлайн. В ряде работ анализируется проблема наличия нескольких маршрутов для передачи каждого вида потока в многопродуктовой сети [6–8]. Для случая передачи заданного многопродуктового потока в [9, 10] исследуется распределение ресурсов, а в [11, 12] – решается задача поиска минимальной стоимости. Разнообразные подходы к решению специальных задач диспетчеризации и выполнения требований пользователей предлагаются в [13]. В [14] рассматриваются стохастические сети с многокритериальной оценкой распределения потоков в многопользовательской многопродуктовой сети.

В рамках методологии исследования операций изучаются справедливые распределения потоков при заданных требованиях [15–17]. Для решения оптимизационных многопродуктовых задач предлагаются различные методы [18–20], в том числе специально разработанные алгоритмы [21]. Для многокритериальных моделей требуется большое число вычислительных экспериментов, с приемлемой погрешностью позволяющих проводить оценку решений [21, 22]. Большая размерность и специальные ограничения порождают приближенные алгоритмы [23]. Обзор “точных” алгоритмов решения многопродуктовых задач с дискретной функцией стоимости изложен в [24].

Данная работа продолжает исследование проблемы распределения ресурсов и межузловых потоков в территориально распределенных многопользовательских системах связи. Как и в нашей предыдущей статье, математическая запись модели передачи многопродуктового потока в явном виде учитывает ресурсы сети. Рассматривается модель, в которой межузловые потоки различных видов передаются между всеми парами узлов-корреспондентов одновременно. Множе-

ства векторов совместно допустимых межузловых потоков предлагается использовать в качестве многокритериальных оценок предельных функциональных возможностей сети. В рамках вычислительных экспериментов сравниваются две многокритериальные стратегии распределения потоков и пропускной способности ребер. Цель управления при уравнивательной стратегии состоит в получении равных значений межузловых потоков между всеми парами узлов-корреспондентов. При равнодолевом распределении предполагается, что каждый конкретный межузловой поток должен быть прямо пропорционален максимально возможному для соответствующей пары вершин источник-приемник. Для вычислительных экспериментов использовалась итерационная процедура решения последовательности однопродуктовых задач поиска максимального потока для выделенной пары узлов при фиксированных нулевых значениях для всех остальных. Разработанный нами в предыдущей статье метод позволяет за конечное число шагов найти финальное распределение совместно допустимых межузловых потоков, такое, что предельная загрузка достигается для всех ребер сети. Указанный вектор значений многопродуктового потока является аппроксимирующим решением при использовании лексикографической процедуры получения справедливого максиминного распределения.

В настоящей работе сравнение равнодолевой и уравнивательной стратегий проводится на основе оценки удельных затрат на передачу единичного потока для каждой пары корреспондентов. Анализ полученных результатов показал, что пары узлов-корреспондентов можно разделить на два непересекающихся подмножества, для которых принципиально отличаются как распределения межузловых потоков, так и доли выделяемой пропускной способности. Распределение в соответствии с заложенными принципами доступно только для части пар источник-сток, для остальных финальные значения не отвечают критериям равноправности. При этом корреспонденты, связанные напрямую одним ребром, находятся в более привилегированном положении, чем использующие транзитные вершины. Для реальной многопользовательской сети результаты, полученные в ходе эксперимента, могут указывать на неэффективное применение пропускных способностей или о несоответствии структуры сети требованиям корреспондентов.

1. Математическая модель. Многопользовательские сетевые системы связи описываются следующей математической моделью передачи многопродуктового потока. Сеть G задается множествами $\langle V, R, U, P \rangle$: узлов (вершин) сети $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots, v_N\}$; неориентированных ребер $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k, \dots, r_E\}$. Ребро r_k соединяет концевые вершины v_{n_k}, v_{j_k} . Предполагается, что в сети отсутствуют петли и сдвоенные ребра. Каждому ребру r_k ставятся в соответствие две ориентированные дуги u_k, u_{k+E} из множества ориентированных дуг $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_{2E}\}$. Дуги $\{u_k, u_{k+E}\}$ определяют прямое и обратное направления передачи потока по ребру r_k между концевыми вершинами v_{n_k}, v_{j_k} . По определению, каждой паре узлов-корреспондентов p_m из множества $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$ отвечают: вершина-источник с номером s_m , из которой входной поток m -го вида поступает в сеть; вершина-приемник с номером t_m , из которой поток m -го вида покидает сеть. В многопользовательской сети G рассматривается $M = N(N - 1)$ независимых, невзаимозаменяемых и равноправных межузловых потоков различных видов.

Обозначим через z_m величину *межузлового* потока m -го вида, поступающего в сеть из узла с номером s_m и покидающего из узла с номером t_m ; $x_{mk}, x_{m(k+E)}$ — величину потока m -го вида, x_{mk} передающегося по дуге u_k и $x_{m(k+E)}$ — по дуге u_{k+E} , согласно направлению передачи, $x_{mk} \geq 0, x_{m(k+E)} \geq 0, m = \overline{1, M}, k = \overline{1, E}$; $S(v_n)$ — множество номеров исходящих дуг, по которым поток покидает узел v_n ; $T(v_n)$ — множество номеров входящих дуг, по которым поток поступает в узел v_n . Состав множеств $S(v_n), T(v_n)$ однозначно определяется в ходе выполнения следующей процедуры. Пусть некоторое ребро $r_k \in R$ соединяет вершины с номерами n и j , такими, что $n < j$. Тогда ориентированная дуга $u_k = (v_n, v_j)$, направленная из вершины v_n в v_j , считается *исходящей* из вершины v_n и ее номер k заносится в множество $S(v_n)$, а дуга u_{k+E} , направленная из v_j в v_n , — *входящей* для v_n и ее номер $k + E$ помещается в список $T(v_n)$. Дуга u_k является *входящей* для v_j и ее номер k попадает в $T(v_j)$, а дуга u_{k+E} — *исходящей* и номер $k + E$ вносится в список исходящих дуг $S(v_j)$.

Во всех узлах сети $v_n \in V$, $n = \overline{1, N}$, для каждого вида потока должны выполняться условия сохранения потоков:

$$\sum_{i \in S(v_n)} x_{mi} - \sum_{i \in T(v_n)} x_{mi} = \begin{cases} z_m, & \text{если } v_n = v_{s_m}, \\ -z_m, & \text{если } v_n = v_{t_m}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$n = \overline{1, N}, \quad m = \overline{1, M}, \quad x_{mi} \geq 0, \quad z_m \geq 0.$$

Величина z_m равна входному межузловому потоку m -го вида от источника к приемнику пары p_m при распределении потоков x_{mi} по дугам сети.

Каждому ребру $r_k \in R$ приписывается неотрицательное число d_k – суммарный предельно допустимый поток, который можно передать по ребру r_k в обоих направлениях. В исходной сети компоненты вектора пропускных способностей $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_k, \dots, d_E)$ – наперед заданные положительные числа $d_k > 0$. Вектором \mathbf{d} определяются следующие ограничения на сумму потоков всех видов, передаваемых по ребру r_k одновременно:

$$\sum_{m=1}^M (x_{mk} + x_{m(k+E)}) \leq d_k, \quad x_{mk} \geq 0, \quad x_{m(k+E)} \geq 0, \quad k = \overline{1, E}. \quad (1.2)$$

В рамках данной модели пропускная способность ребер сети – вектор \mathbf{d} , трактуется как *ресурсное ограничение*, а сумма дуговых потоков рассматривается как показатель использования *ресурсов* сети при передаче межузловых потоков.

Для z_m , x_{mi} , удовлетворяющих условиям (1.1), (1.2), вычисляются суммарные потоки по ребрам сети:

$$y_m = \sum_{i=1}^{2E} x_{mi}, \quad m = \overline{1, M}. \quad (1.3)$$

Суммарный поток y_m характеризует *нагрузку* на сеть при передаче межузлового потока величины z_m из узла-источника s_m в узел-приемник t_m . Величина y_m показывает, какая суммарная пропускная способность сети используется для передачи межузлового потока z_m , а отношение

$$w_m = \frac{y_m}{z_m}, \quad m = \overline{1, M},$$

можно трактовать как удельные затраты ресурсов для передачи единичного потока m -го вида между узлами s_m и t_m при соответствующих дуговых потоках x_{mi} .

Ограничения (1.1)–(1.2) задают множество допустимых значений компонент вектора межузловых потоков $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m, \dots, z_M)$:

$$\mathcal{L}(\mathbf{d}) = \{\mathbf{z} \geq 0 \mid \exists \mathbf{x} \geq 0 : (\mathbf{z}, \mathbf{x}) \text{ удовлетворяют (1.1)–(1.2)}\}. \quad (1.4)$$

Допустимые распределения реберных потоков принадлежат подмножеству

$$Y(\mathbf{d}) = \{\mathbf{y} \geq 0 \mid (\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ удовлетворяют (1.1)–(1.3)}\}. \quad (1.5)$$

2. Монопольный режим передачи потока. В рамках модельного описания по определению монопольным режимом называется способ управления, при котором все ресурсы сети используются для передачи потока одной выделенной пары узлов-корреспондентов $p_a \in P$, а потоки для всех остальных пар при этом полагаются равными нулю. Предельно допустимый поток, проходящий между фиксированной парой узлов-корреспондентов в монопольном режиме, является решением стандартной задачи о максимальном однопродуктовом потоке [25].

Задача 1. Найти $z_a^0(1) = \max_{\mathbf{z}} z_a$

$$\text{при условиях } \mathbf{z} \in \mathcal{L}(\mathbf{d}), \quad z_i = 0, \quad i \neq a, \quad i = \overline{1, M}.$$

Решение задачи 1 $z_a^0(1)$ – поток, передаваемый в сети в *монопольном режиме*, *максимальный* (МРМ-поток) однопродуктовый межузловой для пары p_a . Обозначим через $(x_{ai}^0(1), x_{a(i+E)}^0(1))$, $i =$

$= \overline{1, E}$, потоки по дугам, соответствующие решению $z_a^0(1)$. Вектор $\mathbf{z}_a^0(1) = (0, 0, \dots, z_a^0(1), \dots, 0, 0)$ задает координаты угловой точки множества $\mathcal{L}(\mathbf{d})$, лежащей на пересечении границы $\mathcal{L}(\mathbf{d})$ с координатной осью z_a .

Для пары p_a подсчитываются величина суммарного потока по ребрам сети $y_a^0(1)$ и удельные затраты ресурсов $w_a^0(1)$, требуемые для передачи одной единицы потока $z_a^0(1)$:

$$y_a^0(1) = \sum_{i=1}^E [x_{ai}^0(1) + x_{a(i+E)}^0(1)], \quad w_a^0(1) = \frac{y_a^0(1)}{z_a^0(1)}.$$

Задача 1 решается последовательно для всех $p_m \in P$, вычисляются значения $z_m^0(1)$, $m = \overline{1, M}$, на их основе формируются: вектор межузловых МРМ-потоков $\mathbf{z}^0(1) = (z_1^0(1), z_2^0(1), \dots, z_m^0(1), \dots, z_M^0(1))$; вектор дуговых потоков $\mathbf{x}^0(1) = (x_{mi}^0(1), x_{m(i+E)}^0(1))$, $m = \overline{1, M}$, $i = \overline{1, E}$; вектор $\mathbf{y}^0(1) = (y_1^0(1), y_2^0(1), \dots, y_m^0(1), \dots, y_M^0(1))$ суммарных потоков по ребрам сети для всех пар $p_m \in P$.

В нашей предыдущей статье была предложена итерационная PLD-процедура вычисления межузловых потоков, при одновременной передаче которых полностью используется пропускная способность всех ребер сети. Аббревиатура PLD – от английского peak load distribution – *распределение (потоков) при предельной загрузке (сети)*. Выполнение каждого шага PLD-процедур разбивается на несколько этапов. На предварительном этапе первого шага для всех пар источник–приемник $p_a, a = \overline{1, M}$, с помощью решения задачи 1 определяются МРМ-потоки. Для всех пар вычисляется предельно допустимое совместное распределение межузловых потоков и находятся ребра с полностью использованной пропускной способностью. Для остальных ребер подсчитывается остаточная (неиспользованная) пропускная способность. На последующих итерациях значения МРМ-потоков рассчитываются в сети для значений остаточных пропускных способностей, найденных на предыдущих шагах. Снова находится предельно допустимое совместное распределение потоков, а также ребра с не полностью исчерпанной пропускной способностью. Таким образом, за конечное число итераций, не превосходящее общего числа ребер сети, определяется финальное распределение, при котором сумма реберных потоков всех видов оказывается равна сумме пропускных способностей.

При реализации PLD-процедуры допускается использование различных правил распределения межузловых потоков. В разд. 3, 4 приводится детализированное изложение схемы применения PLD-процедуры для вычисления равнодолевого и уравнивающего распределений потоков при предельной загрузке сети.

3. Равнодолевое распределение при предельной загрузке сети. При использовании равнодолевой стратегии на каждой итерации парам узлов-корреспондентов на передачу потока выделяются различные *квоты*, прямо пропорциональные соответствующим текущим значениям МРМ-потоков.

При реализации PLD-процедуры на первом этапе первого шага ($t = 1$) последовательно для всех $p_m \in P$ решается цепочка задач 1 и определяются МРМ-вектор $\mathbf{z}^0(1) = (z_1^0(1), z_2^0(1), \dots, z_m^0(1), \dots, z_M^0(1))$, а также вектор дуговых потоков $\mathbf{x}^0(1) = (x_{mk}^0(1), x_{m(k+E)}^0(1))$, $m = \overline{1, M}$, $k = \overline{1, E}$. На следующем этапе первого шага найденные значения $\mathbf{z}^0(1)$, $\mathbf{x}^0(1)$ используются при поиске совместно допустимого распределения потоков, при котором достигается предельно возможная загрузка одного или нескольких ребер.

Задача 2. Найти $\theta^{**}(1) = \max_{\theta} \theta$

$$\text{при условиях: } \theta \sum_{m=1}^M [x_{mi}^0(1) + x_{m(i+E)}^0(1)] \leq d_i, \quad \theta \geq 0, \quad i = \overline{1, E}.$$

Решение задачи 2 $\theta^{**}(1)$ – максимальная доля МРМ-потока, равная для всех $p_m \in P$. На основе $\theta^{**}(1)$ вычисляются допустимые значения $z_m^{**}(1) = \theta^{**}(1) z_m^0(1)$, $m = \overline{1, M}$, равнодолевых квот на одновременную передачу потоков для всех пар источник–приемник $p_m \in P$. В рамках рассматриваемой модели отношение $z_m^{**}(1)/z_m^0(1) = \theta^{**}(1)$ показывает, какую долю от МРМ-потока

составляет выделенная квота $z_m^{**}(1)$. Поскольку по построению единственное оптимальное значение $\theta^{**}(1)$ одинаково для всех пар $p_m \in P$, то указанное распределение называется *равнодолевым* распределением квот при одновременной передаче межузловых потоков.

Вычисляются: дуговые потоки $x_{mi}^{**}(1) = \theta^{**}(1)x_{mi}^0(1)$, $x_{m(i+E)}^{**}(1) = \theta^{**}(1)x_{m(i+E)}^0(1)$, $m = \overline{1, M}$, $i = \overline{1, E}$; суммарный поток по ребрам сети для m -й пары:

$$y_m^{**}(1) = \sum_{i=1}^E [x_{mi}^{**}(1) + x_{m(i+E)}^{**}(1)], \quad m = \overline{1, M};$$

удельные затраты ресурсов $w_m^{**}(1)$ для передачи межузлового потока $z_m^{**}(1)$:

$$w_m^{**}(1) = \frac{y_m^{**}(1)}{z_m^{**}(1)}, \quad m = \overline{1, M};$$

и остаточная пропускная способность всех ребер сети:

$$d_i^{**}(1) = d_i - \sum_{m=1}^M [x_{mi}^{**}(1) + x_{m(i+E)}^{**}(1)], \quad i = \overline{1, E}.$$

В множестве P выделяется подмножество $P(R_+)$ смежных узлов-корреспондентов, расположенных в конечных вершинах ребра r_k , $k = \overline{1, E}$. Остальные пары относятся к множеству $P(R_-)$:

$$P = P(R_+) \cup P(R_-), \quad P(R_+) \cap P(R_-) = \emptyset.$$

По завершении первой итерации для проведения постанализа формируются массивы расчетных данных по следующему правилу:

если $p_m \in P(R_+)$, то значения $z_m^{**}(1)$, $y_m^{**}(1)$, $w_m^{**}(1)$ помещаются в массивы $Z_+^{**}(1)$, $Y_+^{**}(1)$, $W_+^{**}(1)$;

если $p_m \in P(R_-)$, то значения $z_m^{**}(1)$, $y_m^{**}(1)$, $w_m^{**}(1)$ попадают в $Z_-^{**}(1)$, $Y_-^{**}(1)$, $W_-^{**}(1)$; производится переход на следующий шаг, $t = 2$.

На первом этапе каждого последующего шага t ($t \geq 2, t \leq E$) для вектора $\mathbf{d}^{**}(t-1)$ последовательно для каждого $p_m \in P$ решается цепочка задач поиска МРМ-потока.

Задача 3. Для некоторой пары узлов p_a найти

$$z_a^0(t) = \max_z z_a$$

при дополнительных условиях $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}(\mathbf{d}^{**}(t-1))$; $z_m = 0, m \neq a, m = \overline{1, M}$.

Оптимальному решению задачи 3 (текущему МРМ-потоку $z_a^0(t)$) соответствует распределение потоков по дугам сети $(x_{ai}^0(t), x_{a(i+E)}^0(t))$, $p_a \in P, i = \overline{1, E}$. Исходя из решения задачи 3 для всех $p_m \in P$ вычисляются коэффициенты

$$\beta_m^0(t) = \begin{cases} \frac{z_m^0(1)}{z_m^0(t)}, & \text{если } z_m^0(t) > 0; \\ 0, & \text{если } z_m^0(t) = 0. \end{cases}$$

На втором этапе текущего шага t для определения максимально допустимого равнодолевого распределения квот формулируется задача поиска “узкого места” в сети с заданными остаточными пропускными способностями $d_i^{**}(t-1), i = \overline{1, E}$.

Задача 4. Найти $\theta^{**}(t) = \max_{\theta} \theta$

$$\text{при условиях: } \theta \sum_{m=1}^M \beta_m^0(t) [x_{mi}^0(t) + x_{m(i+E)}^0(t)] \leq d_i^{**}(t-1), \quad \theta \geq 0, \quad i = \overline{1, E}.$$

На основании решения задачи 4 $\theta^{**}(t)$ определяются результирующие межузловые и дуговые потоки:

$$z_m^{**}(t) = \begin{cases} z_m^{**}(t-1) + \theta^{**}(t)\beta_m^0(t)z_m^0(t), & \text{если } z_m^0(t) > 0; \\ z_m^{**}(t-1), & \text{если } z_m^0(t) = 0; \end{cases}$$

$$x_{mi}^{**}(t) = x_{mi}^{**}(t-1) + \theta^{**}(t)\beta_m^0(t)x_{mi}^0(t),$$

$$x_{m(i+E)}^{**}(t) = x_{m(i+E)}^{**}(t-1) + \theta^{**}(t)\beta_m^0(t)x_{m(i+E)}^0(t), \quad i = \overline{1, E}, \quad m = \overline{1, M};$$

суммарный поток по ребрам сети для m -й пары:

$$y_m^{**}(t) = \sum_{i=1}^E [x_{mi}^{**}(t) + x_{m(i+E)}^{**}(t)], \quad m = \overline{1, M};$$

и удельные затраты ресурсов $w_m^{**}(t)$ для передачи результирующего межузлового потока $z_m^{**}(t)$:

$$w_m^{**}(t) = \frac{y_m^{**}(t)}{z_m^{**}(t)}, \quad m = \overline{1, M}.$$

На заключительном этапе текущего шага t ($t \geq 2$) для всех ребер сети вычисляется остаточная пропускная способность

$$d_i^{**}(t) = d_i^{**}(t-1) - \theta^{**}(t) \sum_{m=1}^M \beta_m^0(t) [x_{mi}^0(t) + x_{m(i+E)}^0(t)], \quad i = \overline{1, E}.$$

После завершения очередного шага t PLD-процедуры осуществляется проверка условий:

1) если окажется, что хотя бы для одного $r_i \in R$ величина остаточной пропускной способности $d_i^{**}(t) > 0$, то:

значения $z_m^{**}(t)$, $y_m^{**}(t)$, $w_m^{**}(t)$ помещаются в $\mathbf{Z}_+^{**}(t)$, $\mathbf{Y}_+^{**}(t)$, $\mathbf{W}_+^{**}(t)$ для $p_m \in P(R_+)$,

значения $z_m^{**}(t)$, $y_m^{**}(t)$, $w_m^{**}(t)$ попадают в $\mathbf{Z}_-^{**}(t)$, $\mathbf{Y}_-^{**}(t)$, $\mathbf{W}_-^{**}(t)$ для $p_m \in P(R_-)$,

выполняется очередная итерация $t + 1$;

2) если же $d_i^{**}(t) = 0$ для всех $i = \overline{1, E}$, то происходит останов, поскольку все пропускные способности всех ребер исчерпаны, и достигнута предельная загрузка сети. Последняя итерация обозначается номером $t := T$.

Финальный вектор распределения межузловых потоков $\mathbf{z}^{**}(T)$, полученный в ходе выполнения PLD-процедуры при равнодолевом распределении квот на каждом шаге, называется PLES-поток (от английского peak load equal share – предельная загрузка (сети) при равнодолевом распределении). Сформированные массивы данных используются при составлении таблиц и диаграмм, представленных в разд. 5.

4. Уравнительное распределение потоков. При уравнительной стратегии распределения с помощью PLD-процедуры на каждой итерации вычисляются равные квоты на предельно допустимые потоки для передачи по сети одновременно для всех пар-корреспондентов $p_m \in P$.

На первом этапе первого шага ($t = 1$) для всех $p_m \in P$ решается цепочка задач 1 и определяются: дуговые потоки $\mathbf{x}^0(1) = (x_{mi}^0(1), x_{m(i+E)}^0(1))$, $m = \overline{1, M}$, $i = \overline{1, E}$; компоненты МРМ-вектора $\mathbf{z}^0(1) = (z_1^0(1), z_2^0(1), \dots, z_m^0(1), \dots, z_M^0(1))$ и коэффициенты для задачи 5 (приведенной ниже):

$$\omega_m^0(1) = \frac{1}{z_m^0(1)}, \quad z_m^0(1) \neq 0, \quad m = \overline{1, M}.$$

На втором этапе первого шага формулируется задача поиска равных предельных квот на передачу потоков между всеми парами $p_m \in P$ и “узкого места” – ребер, пропускная способность которых при соответствующем распределении окажется полностью исчерпана.

З а д а ч а 5. Найти $\alpha^*(1) = \max_{\alpha}$

$$\text{при условиях: } \alpha \sum_{m=1}^M \omega_m^0(1) [x_{mi}^0(1) + x_{m(i+E)}^0(1)] \leq d_i, \quad \alpha \geq 0, \quad i = \overline{1, E}.$$

Обозначим через $z_m^*(1) = \alpha^*(1)$ предельно допустимое значение межузловых потоков для передачи одновременно между всеми парами узлов-корреспондентов $p_m, m = \overline{1, M}$. При этом компоненты вектора дуговых потоков $x^*(1)$ равны $x_{mi}^*(1) = \alpha^*(1)\omega_m^0(1)x_{mi}^0(1), x_{m(i+E)}^*(1) = \alpha^*(1)\omega_m^0(1)x_{m(i+E)}^0(1), m = \overline{1, M}, i = \overline{1, E}$, и определяют допустимое *уравнительное* распределение дуговых потоков по ребрам сети.

Для каждого $z_m^*(1)$ вычисляются суммарный поток по ребрам сети:

$$y_m^*(1) = \sum_{i=1}^E [x_{mi}^*(1) + x_{m(i+E)}^*(1)], \quad m = \overline{1, M};$$

удельные затраты ресурсов $w_m^*(1)$ для передачи межузлового потока $z_m^*(1)$:

$$w_m^*(1) = \frac{y_m^*(1)}{z_m^*(1)}, \quad m = \overline{1, M}.$$

Для всех ребер сети рассчитывается остаточная пропускная способность:

$$d_i^*(1) = d_i - \sum_{m=1}^M (x_{mi}^*(1) + x_{m(i+E)}^*(1)), \quad i = \overline{1, E}.$$

Как и в разд. 3, после завершения первой итерации PLD-процедуры производится разделение данных на массивы по следующему правилу:

если $p_m \in P(R_+)$, то значения $z_m^*(1), y_m^*(1), w_m^*(1)$ помещаются в массивы $Z_+^*(1), Y_+^*(1), W_+^*(1)$;

если $p_m \in P(R_-)$, то значения $z_m^*(1), y_m^*(1), w_m^*(1)$ попадают в $Z_-^*(1), Y_-^*(1), W_-^*(1)$.

На первом этапе шага $t (t \geq 2, t \leq E)$ для полученных значений остаточных пропускных способностей $d_i^*(t-1)$ последовательно решается цепочка следующих задач, аналогичных задаче 1.

З а д а ч а 6. Для некоторой пары узлов p_a найти

$$z_a^0(t) = \max_z z_a$$

$$\text{при условиях: } z \in \mathcal{Z}(d^*(t-1)), \quad z_m = 0, \quad m \neq a, \quad m = \overline{1, M}.$$

Оптимальному решению задачи 6 (МРМ-потоку $z_a^0(t)$) соответствует распределение потоков по дугам сети $(x_{ai}^0(t), x_{a(i+E)}^0(t)), i = \overline{1, E}$.

После решения цепочки задач 6 для всех $p_m, m = \overline{1, M}$, вычисляются коэффициенты

$$\omega_m^0(t) = \begin{cases} \frac{1}{z_m^0(t)}, & \text{если } z_m^0(t) > 0; \\ 0, & \text{если } z_m^0(t) = 0. \end{cases}$$

На втором этапе текущего шага $t (t \geq 2)$ формулируется задача поиска “узкого места” в сети с заданными остаточными пропускными способностями $d_i^*(t-1)$: определение максимальных равных квот на совместную одновременную передачу предельно допустимых потоков между всеми парами узлов-корреспондентов.

З а д а ч а 7. Найти $\alpha^*(t) = \max_{\alpha}$

$$\text{при условиях: } \alpha \sum_{m=1}^M \omega_m^0(t) [x_{mi}^0(t) + x_{m(i+E)}^0(t)] \leq d_i^*(t-1), \quad \alpha \geq 0, \quad i = \overline{1, E}.$$

На основании решения задачи 7 на шаге t ($t \geq 2$) подсчитываются результирующие межузловые потоки для всех пар $p_m \in P$:

$$z_m^*(t) = \begin{cases} z_m^*(t-1) + \alpha^*(t), & \text{если } z_m^0(t) > 0; \\ z_m^*(t-1), & \text{если } z_m^0(t) = 0; \end{cases}$$

дуговые потоки для $i = \overline{1, E}$, $m = \overline{1, M}$:

$$x_{mi}^*(t) = x_{mi}^*(t-1) + \alpha^*(t)\omega_m^0(t)x_{mi}^0(t),$$

$$x_{m(i+E)}^*(t) = x_{m(i+E)}^*(t-1) + \alpha^*(t)\omega_m^0(t)x_{m(i+E)}^0(t);$$

суммарный поток по ребрам сети для m -й пары:

$$y_m^*(t) = \sum_{i=1}^E [x_{mi}^*(t) + x_{m(i+E)}^*(t)], \quad m = \overline{1, M};$$

и удельные затраты ресурсов $w_m^*(t)$ для передачи межузлового потока $z_m^*(t)$:

$$w_m^*(t) = \frac{y_m^*(t)}{z_m^*(t)}, \quad m = \overline{1, M}.$$

На заключительном этапе текущего шага t ($t \geq 2$) для всех ребер сети вычисляется остаточная пропускная способность

$$d_i^*(t) = d_i^*(t-1) - \alpha^*(t) \sum_{m=1}^M \omega_m^0(t) [x_{mi}^0(t) + x_{m(i+E)}^0(t)], \quad i = \overline{1, E},$$

и осуществляется проверка условий, аналогичная изложенной в разд. 3:

если после завершения очередного шага t окажется, что хотя бы для одного ребра $r_i \in R$ величина остаточной пропускной способности $d_i^*(t) > 0$, то производится переход к следующему $t := t + 1$ и разделение полученных значений $z_m^*(t)$, $y_m^*(t)$, $w_m^*(t)$ на массивы $\mathbf{Z}_+^*(t)$, $\mathbf{Y}_+^*(t)$, $\mathbf{W}_+^*(t)$, $\mathbf{Z}_-^*(t)$, $\mathbf{Y}_-^*(t)$, $\mathbf{W}_-^*(t)$;

если же $d_i^*(t) = 0$ для всех $i = \overline{1, E}$, то происходит останов, поскольку все пропускные способности ребер исчерпаны и сеть полностью загружена. Финальная итерация обозначается $t := T$ и формируются массивы $\mathbf{Z}_+^*(T)$, $\mathbf{Y}_+^*(T)$, $\mathbf{W}_+^*(T)$, $\mathbf{Z}_-^*(T)$, $\mathbf{Y}_-^*(T)$, $\mathbf{W}_-^*(T)$, которые характеризуют финальное распределение потоков при предельной нагрузке сети.

Указанное распределение называется PLED-поток (от английского peak load equalitarian distribution – *предельная нагрузка (сети) при уравнительном распределении*).

5. Вычислительный эксперимент. Описанные ниже результаты вычислительных экспериментов являются продолжением исследований нашей предыдущей статьи. Эксперименты с использованием PLD-процедуры проводились на моделях сетевых систем, представленных на рис. 1 (слева – базовая сеть, справа – кольцевая). В каждой сети 69 узлов. Пропускные способности ребер d_k выбирались случайным образом из отрезка [900, 999] и совпадают для ребер, присутствующих в обеих сетях. В кольцевой сети пропускная способность каждого из добавленных ребер равна 900.

На рис. 2–5 и в табл. 1, 2 приведены данные о распределении потоков в базовой и кольцевой сетях, полученные в ходе выполнения PLD-процедуры. На диаграммах рис. 2–5 слева указаны суммарные значения межузловых потоков в сети на каждой итерации, а справа – соответствующие реберные потоки. По горизонтальной оси откладываются суммарные значения межузловых потоков между смежными парами узлов, а по вертикальной – для корреспондентов из множества $P(R_-)$. Точки на графике относятся к очередной итерации и следуют снизу вверх и слева направо, согласно порядку их выполнения. Финальным значениям отвечает крайняя точка в северо-восточной части графика. На диаграммах справа указан ход изменения суммарных реберных потоков для пар из множеств $P(R_-)$ и $P(R_+)$. Из табл. 1, 2 и рис. 2–5 следует, что за несколько

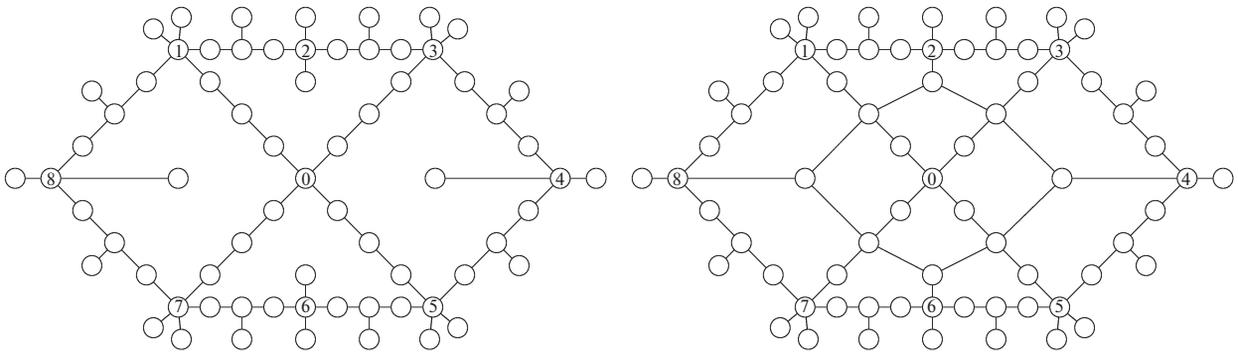


Рис. 1. Базовая и кольцевая сети

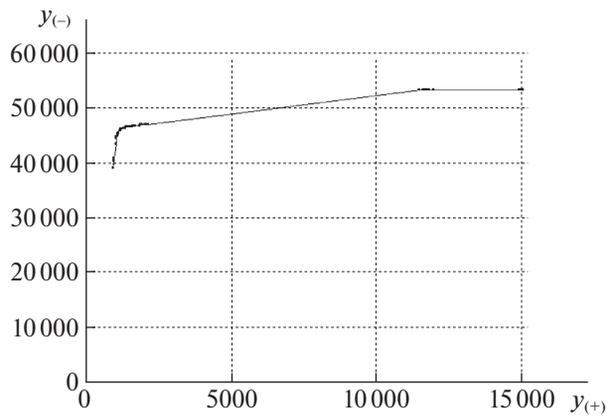
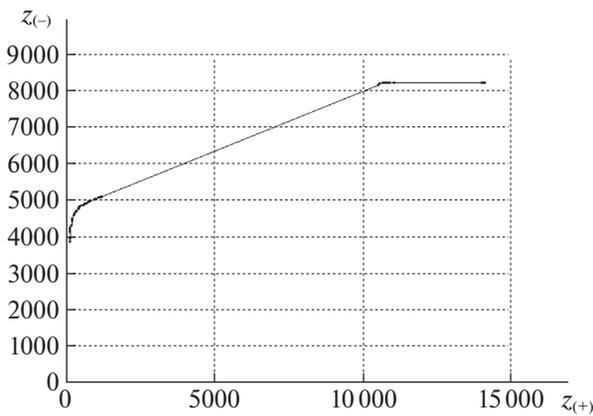


Рис. 2. Межузловые и суммарные потоки при равнодолевом распределении в базовой сети

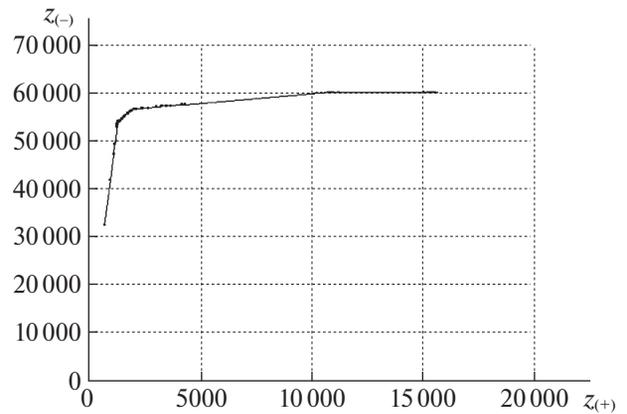
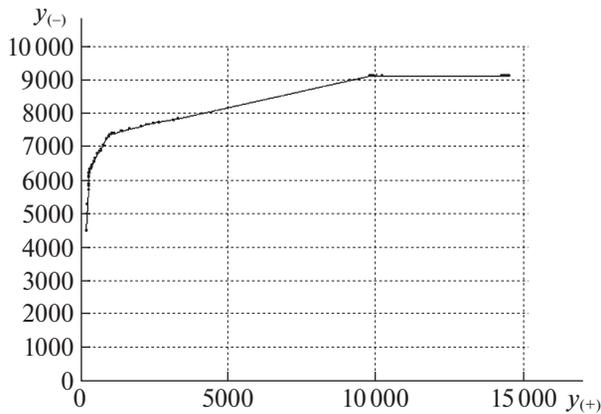


Рис. 3. Межузловые и суммарные потоки при уравнительном распределении в базовой сети

промежуточных итераций резко меняются доли суммарных потоков, которые распределяются между корреспондентами из групп $P(R_-)$ и $P(R_+)$.

На начальных итерациях суммарные потоки согласовываются как с числом корреспондентов в каждой группе, так и с правилом распределения на каждом шаге: график поднимается почти вертикально. После 40-й итерации сеть начинает *распадаться* на отдельные фрагменты, поскольку остаточная пропускная способность некоторых ребер становится равной нулю.

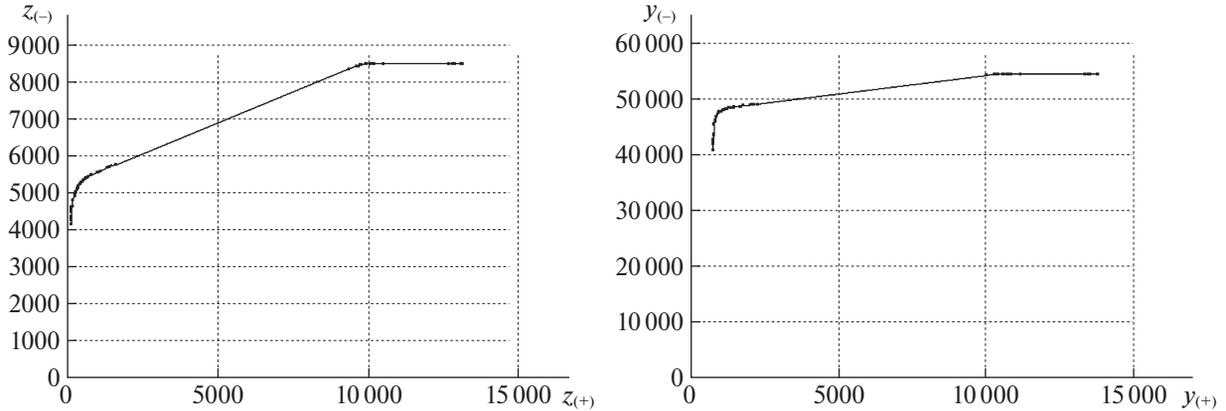


Рис. 4. Межузловые и суммарные потоки при равнодолевом распределении в кольцевой сети

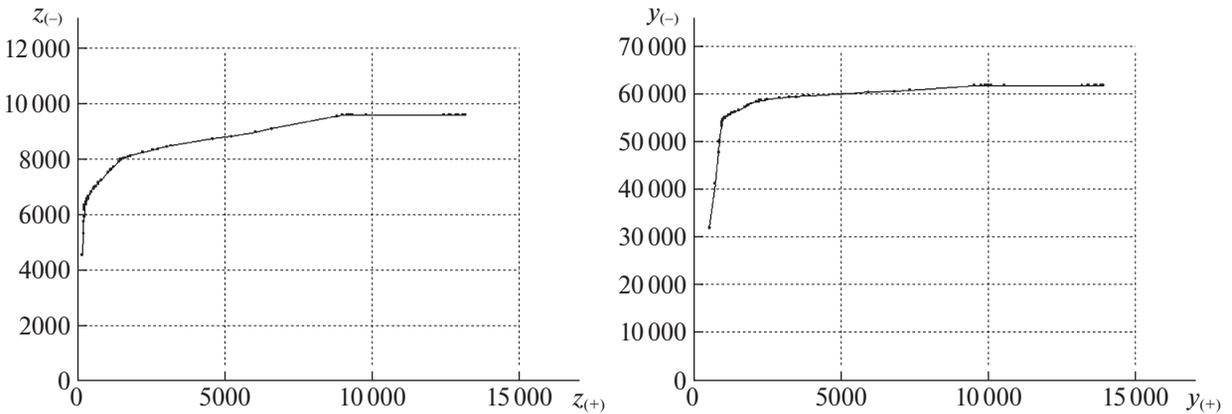


Рис. 5. Межузловые и суммарные потоки при уравнительном распределении в кольцевой сети

В результате для многих пар-корреспондентов не существует путей соединения, и потоки фиксируются на достигнутом уровне. После 50-й итерации около 20–25% остаточной суммарной пропускной способности распределяется только между смежными узлами по инцидентным ребрам.

Для примера рассмотрим табл. 1 и диаграмму на рис. 3, относящиеся к базовой сети при уравнительном распределении на каждом этапе выполнения PLD-процедуры. В ней суммарная пропускная способность

$$D^* = \sum_{k=1}^E d_k = 68250,$$

а соотношение числа пар, входящих в подмножества $P(R_-)$ и $P(R_+)$,

$$|P(R_-)| : |P(R_+)| = 30 : 1.$$

На диаграмме рис. 3 слева по вертикальной и горизонтальной осям откладываются соответственно суммарные значения межузловых потоков из массивов расчетных данных $Z_-^*(t)$ и $Z_+^*(t)$:

$$Z_-(t) = \sum_{p_m \in P(R_-)} z_m^*(t), \quad Z_+(t) = \sum_{p_m \in P(R_+)} z_m^*(t),$$

на диаграмме рис. 3 справа – суммарные значения потоков из массивов расчетных данных $Y_-^*(t)$ и $Y_+^*(t)$:

$$y_-(t) = \sum_{p_m \in P(R_-)} y_m^*(t), \quad y_+(t) = \sum_{p_m \in P(R_+)} y_m^*(t).$$

Таблица 1. Базовая сеть

Распределение потоков		Равнодолевое	Уравнительное
Подмножества пар		$P(R_-) : P(R_+)$	$P(R_-) : P(R_+)$
Пары—корреспонденты	Общее число	4500: 150	4500: 150
	Соотношение	30 : 1	30 : 1
	В процентах	97 : 3%	97 : 3%
Межузловые потоки между 40-й и 50-й итерациями	Суммарные $z_{(j)}(t^*)$	5100: 1200	5760: 1600
	Соотношение	4.25 : 1	3.6 : 1
Межузловые потоки при предельной нагрузке	Суммарные $z_{(j)}(T)$	8200 : 14 100	8500 : 13 100
	Соотношение	1 : 1.7	1: 1.5
Реберные потоки между 40-й и 50-й итерациями	Суммарные $y_{(j)}(t^*)$	47000 : 2100	49000 :2300
	Соотношение	22.4 : 1	21.5: 1
	В процентах	70 : 3%	72 : 3%
Реберные потоки при предельной нагрузке	Суммарные $y_{(j)}(T)$	53 250 : 15 000	54 500: 13 750
	Соотношение	3.55 : 1	4 : 1
	В процентах	78 : 22%	80 : 20%
Усредненные удельные затраты между 40-й и 50-й итерациями $w_{(j)}(t^*)$		9.04 : 1.75	8.5 : 1.44
Усредненные удельные затраты при предельной нагрузке $w_{(j)}(T)$		6.5 : 1.06	6.4 : 1.05
Суммарная пропускная способность сети D^*		68 250	68 250

Таблица 2. Кольцевая сеть

Распределение потоков		Равнодолевое	Уравнительное
Подмножества пар		$P(R_-) : P(R_+)$	$P(R_-) : P(R_+)$
Пары—корреспонденты	Общее число	4500: 150	4500: 150
	Соотношение	30 : 1	30 : 1
	В процентах	97 : 3%	97 : 3%
Межузловые потоки между 40-й и 50-й итерациями	Суммарные $z_{(j)}(t^*)$	7050 : 760	7000 : 600
	Соотношение	9.3 : 1	11.7 : 1
Межузловые потоки при предельной нагрузке	Суммарные $z_{(j)}(T)$	9100 : 14 500	9540 : 13 140
	Соотношение	1 : 1.6	1: 1.4
Реберные потоки между 40-й и 50-й итерациями	Суммарные $y_{(j)}(t^*)$	55 600 : 1760	60 000 :1310
	Соотношение	31.5 : 1	45: 1
	В процентах	74 : 2.5%	80 : 1.7%
Реберные потоки при предельной нагрузке	Суммарные $y_{(j)}(T)$	59 700 : 15 750	61 600: 13 850
	Соотношение	3.8 : 1	4.5 : 1
	В процентах	79 : 21%	82 : 18%
Усредненные удельные затраты между 40-й и 50-й итерациями $w_{(j)}(t^*)$		7.9 : 2.32	8.6 : 2.18
Усредненные удельные затраты при предельной нагрузке $w_{(j)}(T)$		6.6 : 1.09	6.5 : 1.05
Суммарная пропускная способность сети D^*		75 455	75 455

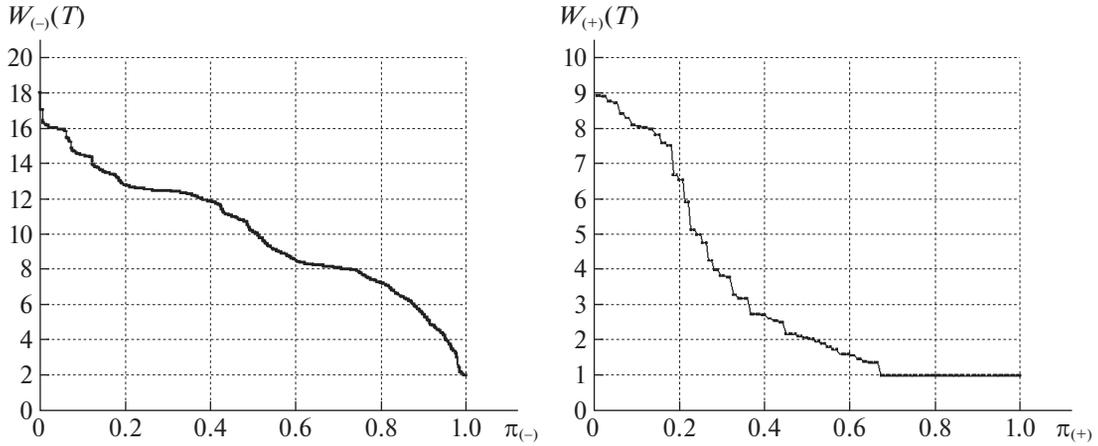


Рис. 6. Финальное равнодолевое распределение для базовой сети

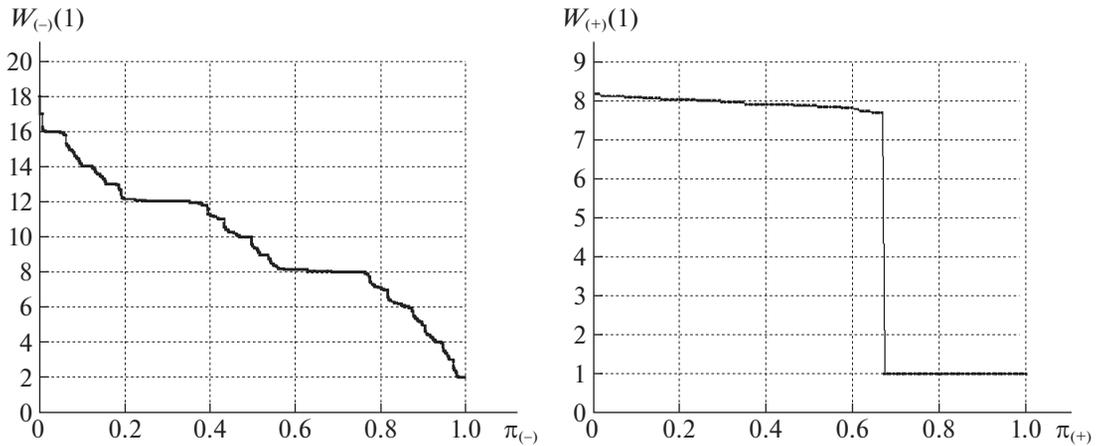


Рис. 7. Равнодолевое распределение для базовой сети

Излом графика на диаграмме происходит между 40-й и 50-й итерациями, и верны следующие соотношения для суммарных потоков и долей реберных потоков:

$$Z_-(t) : Z_+(t) = 3.6 : 1, \quad y_-(t) : y_+(t) = 21.5 : 1.$$

При этом используется почти 75% суммарной пропускной способности всех ребер сети. Однако для финальных суммарных значений верно $Z_-(T) : Z_+(T) = 1 : 1.5$. Таким образом для 150 смежных пар узлов финальные межузловые потоки превышают в 1.5 раза суммарный поток для 4500 оставшихся корреспондентов. Финальные реберные потоки – использование ресурсов сети, для 3% смежных пар-корреспондентов составляет 20% от пропускной способности D^* .

Значения усредненных удельных затрат $\bar{w}_+(T)$ для смежных корреспондентов при предельной загрузке сети равны

$$\bar{w}_+(T) = \frac{y_+(T)}{Z_+(T)} = 1.05.$$

Таким образом на последних итерациях при распределении остаточной пропускной способности парам узлов из множества $P(R_+)$ выделяются большие квоты на поток по инцидентным ребрам, что приводит к уменьшению удельных затрат. Усредненные значения удельных затрат указаны в табл. 1, 2:

$$\bar{w}_{(-)}(t^*) = \frac{y_{(-)}(t^*)}{Z_{(-)}(t^*)}, \quad \bar{w}_{(-)}(T) = \frac{y_{(-)}(T)}{Z_{(-)}(T)}.$$

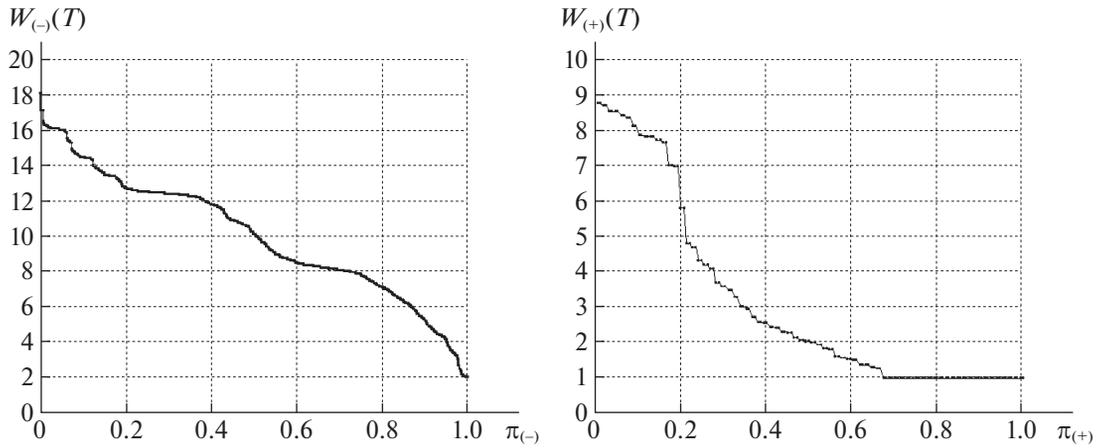


Рис. 8. Финальное уравнильное распределение для базовой сети

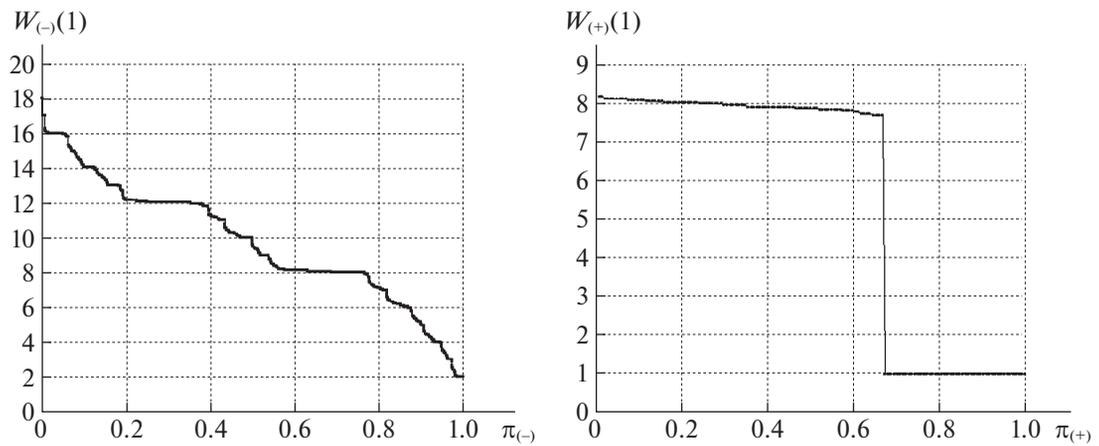


Рис. 9. Уравнильное распределение для базовой сети

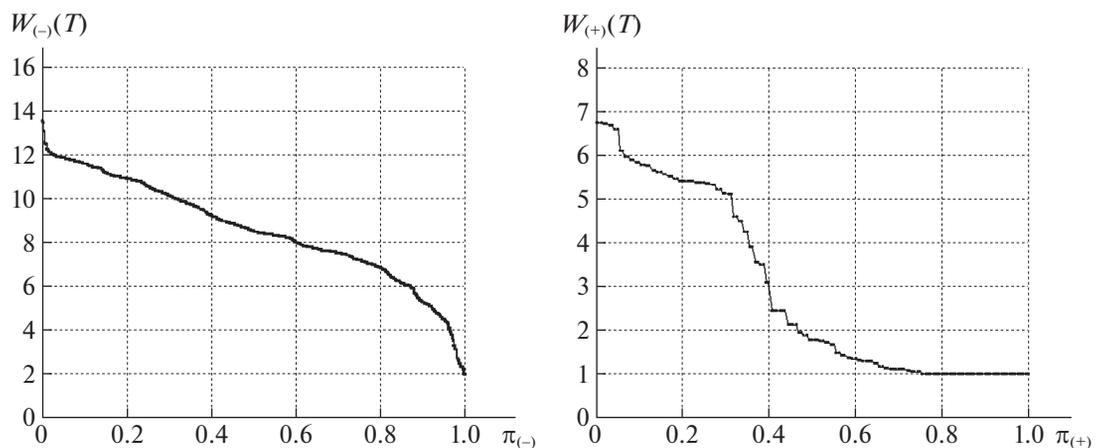


Рис. 10. Финальное равнодолевое распределение для кольцевой сети

На рис. 6–13 представлены диаграммы удельных затрат при передаче межузловых потоков. На всех диаграммах слева указаны удельные затраты для пар узлов из $P(R_-)$, справа – для смежных пар $p_k \in P(R_+)$. Все полученные значения $w_m(\cdot)$ из массивов $W_{(-)}(\cdot)$, $W_{(+)}(\cdot)$ упорядочиваются по

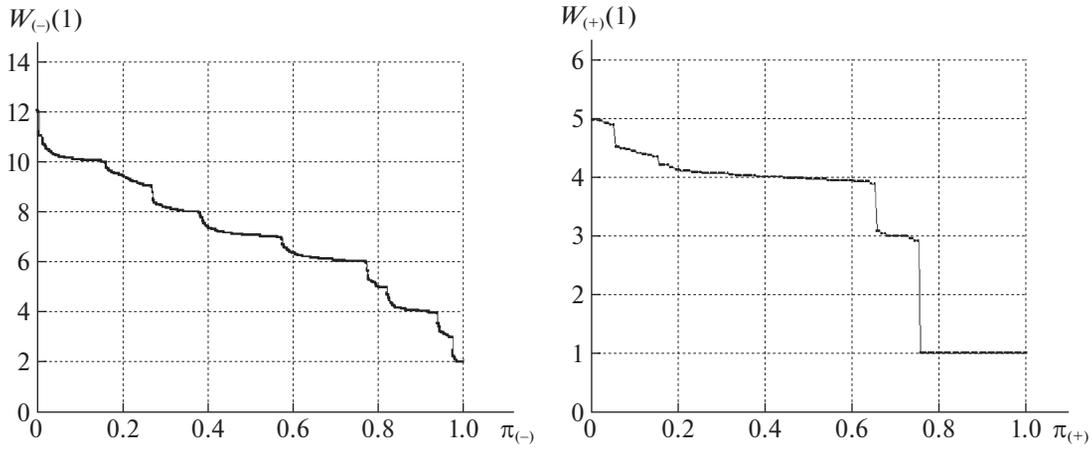


Рис. 11. Равнодолевое распределение для кольцевой сети

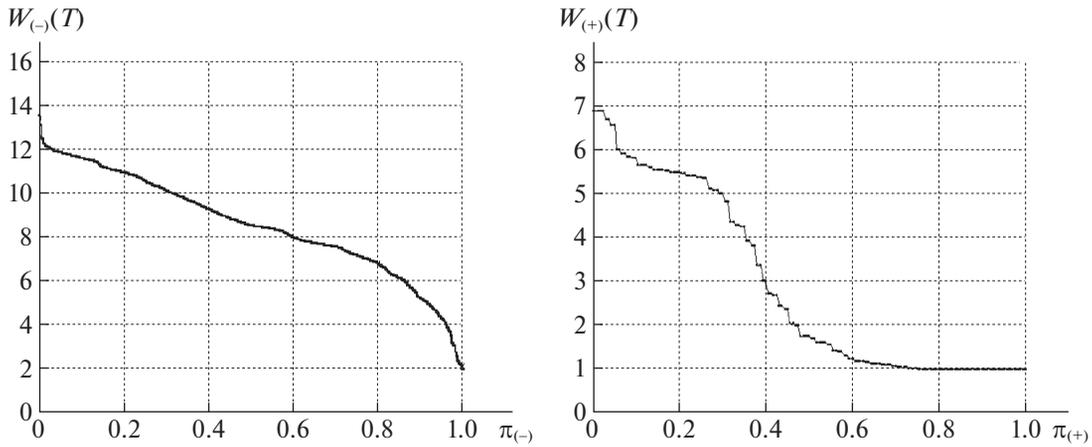


Рис. 12. Финальное уравнительное распределение для кольцевой сети

величине от большего к меньшему (по невозрастанию). По горизонтальной оси указываются относительные порядковые номера корреспондентов в упорядоченных последовательностях:

$$\pi_{-}(m) = \frac{m}{M_{-}} \text{ для всех } p_m \in P(R_{-}), \quad \pi_{+}(k) = \frac{k}{M_{+}} \text{ для всех } p_k \in P(R_{+}),$$

где $M_{-} = |P(R_{-})|$, $M_{+} = |P(R_{+})|$ – число элементов в подмножествах $P(R_{-})$ и $P(R_{+})$ соответственно.

Для базовой сети на рис. 6, 7 представлены диаграммы расчетных значений затрат из массивов данных $W_{-}^{*}(T)$, $W_{+}^{*}(T)$, $W_{-}^{*}(1)$, $W_{+}^{*}(1)$, полученные при выполнении PLD-процедуры. На рис. 7 указаны значения $w_m^{*}(1)$ после завершения первой итерации PLD-процедуры, на рис. 6 – финальные значения $w_m^{*}(T)$ при достижении предельной загрузки сети. Кривая $w_m^{*}(T)$, $p_m \in P(R_{-})$, расположена строго выше кривой $w_m^{*}(1)$. Таким образом, удельные затраты на передачу межузловых потоков для $p_m \in P(R_{-})$ увеличиваются, поскольку используются маршруты с большим числом ребер.

Диаграммы на рис. 6, 7 справа относятся к смежным парам $p_k \in P(R_{+})$. На диаграмме рис. 7 справа представлены удельные затраты после выполнения первой итерации. Значения из $W_{+}^{*}(1)$ и $W_{+}^{*}(T)$ равны 1 более чем для 30% смежных пар. Последнее означает, что более 30% смежных узлов имеют единственный маршрут соединения – по инцидентному ребру. Для остальных пар $p_k \in P(R_{+})$ в исходной сети существует несколько маршрутов передачи потока, проходящих

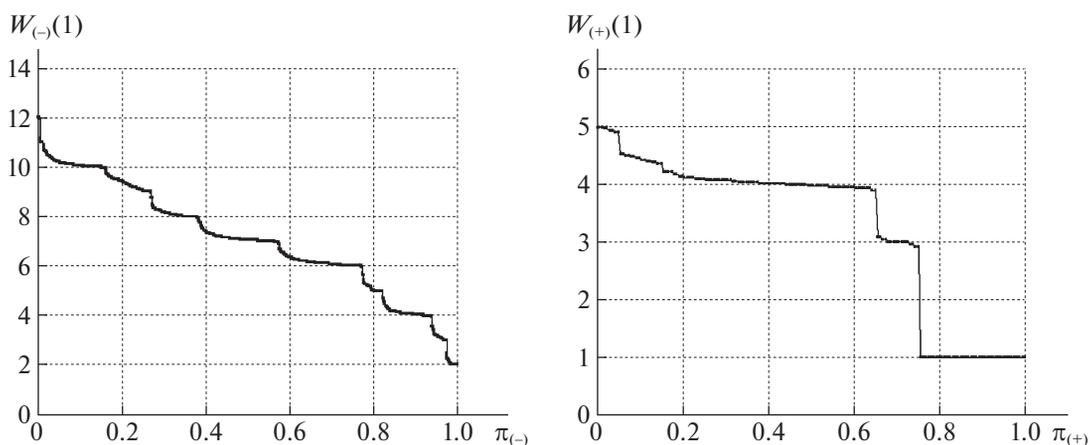


Рис. 13. Уравнительное распределение для кольцевой сети

через минимальные разрезы. Для 20% смежных пар узлов удельные финальные затраты больше исходных значений, т.е. $w_+^*(T) \geq w_+^*(1)$, что свидетельствует об увеличении числа ребер в обходных путях для таких пар. Однако более чем для 40% смежных пар финальные удельные затраты меньше значений на первой итерации ($w_+^*(1) \geq w_+^*(T)$). Дело в том, что в ходе выполнения PLD-процедуры при увеличении числа ребер с нулевой остаточной пропускной способностью для смежных пар чаще остается единственный путь по инцидентному ребру. На последних итерациях суммарная остаточная пропускная способность составляет 20–25% от исходной и распределяется в основном между смежными парами, связанными ребром в оставшихся фрагментах сети. Финальным значениям $z_k^*(T)$ из массива $Z_+^*(T)$ для 40% $p_k \in P(R_+)$ соответствует поток $y_k^*(T)$ по инцидентному ребру r_k , что приводит к значительному уменьшению удельных затрат и резкому росту $z_k^*(T)$. Указанная особенность распределения при предельной нагрузке наблюдается в случае использования обеих стратегий. Из табл. 1, 2 следует, что усредненные значения удельных затрат для смежных пар узлов отличаются незначительно и лежат в диапазоне $1.09 \geq w_+^*(T) \geq 1.05$ для обеих сетей.

На рис. 8, 9 для базовой сети представлены диаграммы удельных затрат при уравнительном способе распределения потоков. Для кольцевой сети на рис. 10, 11 размещены диаграммы при равнодолевом, а на рис. 12, 13 – при уравнительном способе распределения на каждой итерации PLD-процедуры. Суммарная пропускная способность в кольцевой сети на 11% больше, чем в базовой. Численные значения на всех приведенных диаграммах различаются на 5–10%, однако все графики наглядно демонстрируют указанные выше закономерности и основные особенности распределения потоков при предельной нагрузке всех ребер сети.

Заключение. Описанные в разд. 5 вычислительные эксперименты проводились для оценки предельных возможностей многопользовательской сети и сравнения различных принципов распределения межузловых потоков. Для исследования модели требовалось многократное решение оптимизационных задач с векторным функционалом. При разработке вычислительной процедуры для определения угловых и граничных точек множества допустимых потоков использовался метод последовательного поиска лексикографического максимина. Предложенная алгоритмическая процедура и способ представления результатов эксперимента позволили выявить особенности в распределении межузловых потоков при предельной нагрузке сети.

При реализации итерационной схемы на каждом шаге применялись *недискриминирующие* правила распределения *невзаимозаменяемых* межузловых потоков различных видов. Таким образом соблюдались требования *равноправности* корреспондентов – условие, формализованное в рамках исходной многокритериальной модели многопользовательской сети. Однако в ходе анализа решений с содержательной точки зрения возник целый ряд вопросов.

Прежде всего только для 80% корреспондентов удается поддерживать распределение в соответствии с заложенными принципами, а для 20% финальные значения межузловых потоков не отвечают критериям и могут отличаться на два порядка для пар узлов из разных подмножеств.

Из результатов следует, что корреспонденты, расположенные в смежных узлах, имеют привилегированный доступ к ресурсам сети: около 4% таких корреспондентов получают от 20 до 25% всех ресурсов сети. Весьма существенно отличаются функциональные показатели: для 5% смежных корреспондентов сумма финальных значений межузловых потоков больше, чем для 95% оставшихся пар узлов.

Для реальной сетевой многопользовательской системы указанные особенности финальных распределений могут свидетельствовать, например, о неэффективном использовании ресурсов, об ошибках проектирования и/или указывать на необходимость введения нормативных ограничений на рабочие режимы диспетчеризации при предельной загрузке сети.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ahmed W., Hasan O., Pervez U. et al.* Reliability Modeling and Analysis of Communication Networks // *J. Netw. Comput. Applications*. 2017. V. 78. P. 191–215.
2. *Kabadurmus O., Smith A.E.* Multicommodity k-Splittable Survivable Network Design Problems with Relays // *Telecommun. Syst.* 2016. V. 62. Iss. 1. P. 123–133.
3. *Agarwal Y.K.* Design of Capacitated Multicommodity Networks with Multiple Facilities // *Oper. Res.* 2002. V. 50. Iss. 2. P. 333–344.
4. *Balakrishnan A., Li G., Mirchandani P.* Optimal Network Design with End-to-End Service Requirements // *Oper. Res.* 2017. V. 65. Iss. 3. P. 729–750.
5. *Even G., Medina M.* Online Multicommodity Flow with High Demands // *Int. Workshop on Approximation and Online Algorithms*. Berlin: Springer, 2012. P. 16–29.
6. *Baier G., Kohler E., Skutella M.* The k-Splittable Flow Problem // *Algorithmica*. 2005. V. 42. Iss. 3–4. P. 231–248.
7. *Brandt S., Foerster K.-T., Wattenhofer R.* Augmenting Flows for the Consistent Migration of Multicommodity Single-destination Flows in SDNS // *Pervasive Mobile Comput.* 2017. V. 36. P. 134–150.
8. *Bialon P.* A Randomized Rounding Approach to a k-Splittable Multicommodity Flow Problem with Lower Path Flow Bounds Affording Solution Quality Guarantees // *Telecommun. Syst.* 2017. V. 64. Iss. 3. P. 525–542.
9. *Liu L., Cao X., Cheng Y.* Energy-Aware Optimal Resource Allocation in MR-MC Wireless Networks // *IEEE Global Communications Conf. (GLOBECOM-2013)*. Atlanta: IEEE-Press, 2013. P. 4865–4870.
10. *Liu L., Cao X., Cheng Y. et al.* Energy-Efficient Capacity Optimization in Wireless Networks // *IEEE Conf. on Computer Communications*. Toronto: IEEE-Press, 2013. P. 1384–1392.
11. *Ding S.* Uncertain Minimum Cost Multicommodity Flow Problem // *Soft Comput.* 2017. V. 21. Iss. 1. P. 223–231.
12. *Fortz B., Gouveia L., Joyce-Moniz M.* Models for the Piecewise Linear Unsplittable Multicommodity Flow Problems // *Eur. J. Oper. Res.* 2017. V. 261. Iss. 1. P. 30–42.
13. *Chekuri C., Khanna S., Shepherd F.B.* The All-or-Nothing Multicommodity Flow Problem // *SIAM J. Comput.* 2013. V. 42. Iss. 4. P. 1467–1493.
14. *Robinson A.R., Chan Y., Dietz D.C.* Detecting a Security Disturbance in Multicommodity Stochastic Networks // *Telecommun. Syst.* 2006. V. 31. Iss. 1. P. 11–27.
15. *Nace D., Doan L.N., Klopfenstein O. et al.* Max-min Fairness in Multicommodity Flows // *Comput. Oper. Res.* 2008. V. 35. Iss. 2. P. 557–573.
16. *Radunovic B., Le Boudec J.-Y.* A Unified Framework for Max-Min and Min-Max Fairness With Applications // *IEEE/ACM Transactions on Networking*. 2007. V. 15. Iss. 5. P. 1073–1083.
17. *Georgiadis L., Georgatsos P., Floros K. et al.* Lexicographically Optimal Balanced Networks // *Proc. IEEE INFOCOM 2001 Conf. on Comput. Communications*. Anchorage: IEEE-Press, 2001. P. 689–698.
18. *Velichko A., Gribova V., Fedori L.* Simulation Software for Multicommodity Flows Model of Interregional Trade // *3rd Russian-Pacific conf. on Computer Technology and Applications (RPC)*. Vladivostok: IEEE-Press, 2018. P. 1–5.
19. *Ouorou A., Mahey P., Vial J.-P.* A Survey of Algorithms for Convex Multicommodity Flow Problems // *Manag. Sci.* 1997. V. 46. Iss. 1. P. 126–147.
20. *Ogryczak W., Luss H., Pioro M. et al.* Fair Optimization and Networks: A Survey // *J. Appl. Math.* 2014. V. 3. P. 1–25.
21. *Masri H., Krichen S., Guitouni A.* Metaheuristics for Solving the Bi-objective Single-Path Multicommodity Communication Flow Problem // *Int. Trans. Oper. Res.* 2019. V. 26. Iss. 2. P. 589–614.
22. *Masri H., Krichen S., Guitouni A.* A Multi-start Variable Neighborhood Search for Solving the Single Path Multicommodity Flow Problem // *Appl. Math. Comput.* 2015. V. 251. P. 132–142.
23. *Leighton T., Makedon F., Plotkin S. et al.* Fast Approximation Algorithms for Multicommodity Flow Problems // *J. Comput. Syst. Sci.* 1995. V. 50. Iss. 2. P. 228–243.
24. *Minoux M.* Discrete Cost Multicommodity Network Optimization Problems and Exact Solution Methods // *Ann. Oper. Res.* 2001. V. 106. Iss. 1–4. P. 19–46.
25. *Йенсен П., Барнес Д.* Потокное программирование. М.: Радио и связь, 1984.

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

УДК 519.86

**ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ
СИСТЕМЫ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ**

© 2022 г. М. Г. Фуругян

*Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН, Москва, Россия**e-mail: rtsccas@yandex.ru*

Поступила в редакцию 29.11.2021 г.

После доработки 13.12.2021 г.

Принята к публикации 31.01.2022 г.

Рассматривается задача оптимизации структуры многопроцессорной вычислительной системы реального времени, где под структурой понимается набор связей между процессорами, который может изменяться во времени при определенных условиях. Эти условия, во-первых, связаны с физической возможностью или невозможностью установления связи между каждой парой процессоров в определенные моменты времени и, во-вторых, должны гарантировать существование допустимого расписания для заданного множества заданий с известными характеристиками (директивные интервалы, объемы работ, привязка к определенным процессорам и требуемые объемы памяти). Установление подобных связей дает возможность переклать выполнение работ с одного процессора на другой и требует некоторых затрат. Ставится задача определения структуры с минимальными затратами. Она сведена к многопродуктовой потоковой задаче в сети специального вида, для которой получены необходимые и достаточные условия существования решения в виде системы линейных булевых соотношений для исходных параметров.

DOI: 10.31857/S0002338822030064

Введение. В настоящее время вычислительные системы реального времени востребованы во многих отраслях производства. Они применяются в гражданском и военном строительстве, при разработке газовых и нефтяных месторождений, при испытаниях самолетов, ракет и других технических объектов, в конвейерных производствах, транспортных системах, при разработке систем противовоздушной и противоракетной обороны, обработке больших массивов информации технического, экономического и экологического характера в реальном масштабе времени. Так, при проведении летных испытаний данные, поступающие с борта самолета с высокой частотой, должны успевать обрабатываться в темпе поступления с тем, чтобы передавать на борт корректирующие команды. С использованием вычислительных сетей, многопроцессорной и многоядерной техники возникли новые математические и прикладные задачи, как, например, оптимизация структуры вычислительной системы реального времени. В [1–3] такая задача для многоядерной вычислительной системы реального времени решается с использованием обобщенных конечных автоматов и построенной на их основе имитационной модели. С помощью этой модели строится временная диаграмма, описывающая функционирование системы и позволяющая осуществить непосредственную проверку того, что каждая работа выполняется в заданном директивном интервале. Публикации [4–6] посвящены исследованию изменений работоспособности многопользовательской информационной сети в результате повреждений. Данный анализ проводится с использованием теории потоков в сетях. Для оценки ущерба строится двухкритериальная модель, с помощью которой определяется влияние различных повреждений на функционирование информационных направлений. Проводится анализ устойчивости характеристик многопродуктовой потоковой сети к различным разрушениям. В [7] рассматривается аппаратно-программный комплекс вычислительной системы реального времени и решается задача минимизации затрат при его проектировании с заданными требованиями на производительность и надежность функционирования. Разработана методика сведения указанной задачи к задаче однокритериальной условной оптимизации, для решения которой используются эволюционные алгоритмы. В ряде случаев задачи сетевой оптимизации и составления графиков выполнения работ сводятся к поиску минимакса [8–11]. В [12] определяются производительности

процессоров, при которых многопроцессорная система реального времени способна выполнять требуемые вычисления в заданном темпе. Исследованы постановки с фиксированными и нефиксированными параметрами, с возобновляемыми и невозобновляемыми ресурсами. Показано, что исходная задача сводится к нахождению допустимых решений в системе линейных неравенств. Разработан алгоритм нахождения парето-оптимальных решений. В [13] рассмотрена задача оптимизации выполнения комплекса работ с нефиксированными длительностями, для решения которой применяется метод ветвей и границ.

В статье приводится задача оптимизации структуры многопроцессорной вычислительной системы реального времени. Устанавливаются допустимые и минимальные по стоимости связи между процессорами, которые при определенных условиях и ограничениях в разные моменты времени можно переопределять. Эти ограничения указывают физическую возможность (или невозможность) установления связи между каждой парой процессоров в фиксированный момент времени и, кроме того, требуют существования допустимого расписания для множества заданий с известными характеристиками (директивные интервалы, объемы требуемой работы, привязка к определенным процессорам и необходимые объемы памяти). Установление подобных связей дает возможность в определенные моменты времени переключать выполнение заданий с одного процессора на другой, но требует определенных затрат. Необходимо найти структуру связей между процессорами с минимальными затратами. Эта задача сводится к сетевой многопродуктовой потоковой задаче и для ее решения получены необходимые и достаточные условия существования решения в виде системы линейных булевых соотношений. В отличие от [14] в настоящей работе помимо поиска допустимого расписания решается задача построения допустимой структуры вычислительной системы и минимизации ее стоимости, а также рассматриваются дополнительные ограничения на выполнение заданий (ограничения по памяти, привязке к процессорам и др.).

1. Постановка задачи. Имеется m процессоров, занумерованных от 1 до m , из которых требуется спроектировать вычислительную систему реального времени, и комплекс работ (заданий) $N = \{1, n\}$, занумерованных от 1 до n , который необходимо выполнить с помощью этой системы. Горизонтом планирования является отрезок $[0, T]$, который разделен на T временных отрезков единичной длины $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k]$ $k = \overline{1, T}$ $t_0 = 0, t_T = T$. Каждая работа не может одновременно выполняться несколькими процессорами, а один процессор не может одновременно исполнять несколько работ. Производительность j -го процессора (или произведенный в единицу времени объем работы) составляет p_j , а объем его оперативной памяти, доступной в интервале Δ_k , равен V_{jk} . Каждое задание $i \in N$ характеризуется директивным временным интервалом $[b_i, f_i]$ (внутри которого допускается его реализация; $b_i, f_i \in \{t_0, t_1, \dots, t_T\}$), объемом требуемой работы процессоров w_i и необходимым объемом оперативной памяти c_i . Внутри каждого интервала $\Delta_k \subseteq [b_i, f_i]$, $k = \overline{1, T}$, не допускаются прерывания и переключения задания $i \in N$ с одного процессора на другой. Если в этом случае исполнителем является процессор j , то объем сделанной им работы составляет p_j .

Имеются следующие ограничения, связанные с исполнением работ.

Ограничения на использование процессоров: в интервале Δ_k задание i может выполняться только одним из процессоров из заданного множества $M(i, k) \subseteq \{1, m\}$.

Ограничения на переключения между процессорами: задан четырехмерный массив I , каждый элемент $I(j_1, k_1, j_2, k_2)$ которого равен 1, если можно установить связь между процессорами j_1 и j_2 , позволяющую после выполнения задания в интервале Δ_{k_1} процессором j_1 переключить его на процессор j_2 в интервале Δ_{k_2} , и равен 0, если указанная связь невозможна, $j_1 \in M(i, k_1), j_2 \in M(i, k_2), i \in N, k_1, k_2 = \overline{1, T}, k_1 < k_2$. Суммарный объем работы процессоров j_1 и j_2 , необходимый для такого переключения, составляет $q(j_1, k_1, j_2, k_2)$.

Ограничения по памяти: объем памяти, требуемой для выполнения работы, не должен превосходить доступного в соответствующем интервале объема оперативной памяти процессора, исполняющего ее.

Массив I определяет возможность или невозможность установления связи между процессорами в различные моменты времени. Так, если $I(j_1, k_1, j_2, k_2) = 1$, то при проектировании вычислительной системы возможно установление связи, обеспечивающей переключение задания с процессора j_1 в момент времени t_{k_1} на процессор j_2 в момент времени t_{k_2-1} . При этом стоимость

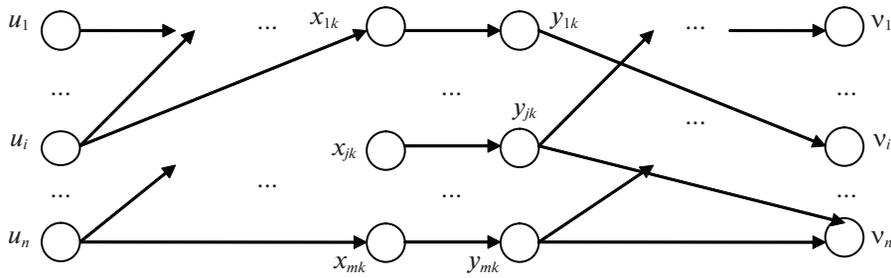


Рис. 1. Сеть $G_1, k = \overline{1, K}$

установления такой связи составляет $s(j_1, k_1, j_2, k_2)$. Допустимая структура Σ вычислительной системы задается установлением указанных связей между процессорами, не противоречащих масшиву I . Иными словами, $\Sigma = \{(j_1, k_1, j_2, k_2) : I(j_1, k_1, j_2, k_2) = 1\}$. Таким образом, связь между процессорами может быть непостоянной во времени, что имеет место, например, в транспьютерных системах. Стоимость $S(\Sigma)$ допустимой структуры Σ – это суммарная стоимость по каждой установленной связи, т.е.

$$S(\Sigma) = \sum_{(j_1, k_1, j_2, k_2) \in \Sigma} s(j_1, k_1, j_2, k_2).$$

Допустимым расписанием $R(\Sigma)$ для комплекса N при выбранной допустимой структуре Σ является такое расписание, при котором каждое задание $i \in N$ начинает выполняться не ранее момента времени b_i и завершается не позднее момента времени f_i , суммарный объем работы процессоров при его исполнении равен w_i . Все переключения с одного процессора на другой осуществляются в соответствии со структурой Σ . Кроме того, выполнены ограничения, накладываемые на объем памяти процессоров и их привязке к заданиям. Допустимым решением задачи будем называть пару $(\Sigma, R(\Sigma))$, где Σ – допустимая структура вычислительной системы, $R(\Sigma)$ – допустимое расписание при структуре Σ , а стоимостью этого решения будет стоимость структуры Σ .

Требуется определить, существует ли в поставленной задаче допустимое решение $(\Sigma, R(\Sigma))$, и в случае положительного ответа найти допустимое решение минимальной стоимости.

Данная задача является NP-трудной. Действительно, используя схему доказательства, аналогичную той, которая применена в [14], можно показать, что известная NP-трудная задача о разбиении [15] полиномиально сводится к рассматриваемой задаче.

2. Решение задачи с помощью сетевого моделирования. Будем рассматривать n -продуктовую потоковую сеть $G_1 = (V_1, A_1)$, где $V_1 = \{u_i, v_i, x_{jk}, y_{jk}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, T}\}$ – множество узлов (u_i и v_i – источник и сток i -го продукта соответственно), $A_1 = \{(u_i, x_{jk}), i = \overline{1, n}, k \in [b_i, f_i], j \in M(i, k); (y_{jk}, v_i), i = \overline{1, n}, k \in [b_i, f_i], j \in M(i, k); (x_{jk}, y_{jk}), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, T}; (y_{j_1 k_1}, y_{j_2 k_2}), j_1, j_2 = \overline{1, m}, k_1, k_2 = \overline{1, T}, k_1 < k_2, I(j_1, k_1, j_2, k_2) = 1\}$ – множество дуг. Узлы x_{jk} и y_{jk} обозначают процессор j и соответственно начало временного отрезка Δ_k и его окончание. Фрагмент сети G_1 изображен на рис. 1.

В сети G_1 будем искать n -продуктовый поток $g_i(a, b), i = \overline{1, n}, (a, b) \in A_1$, принимающий значения 0 или 1, такой, что ровно одна единица потока i -го продукта доставляется из источника u_i в сток v_i . Смысловое значение единицы потока g_i по дугам сети G_1 указано в таблице.

Если по дуге (x_{jk}, y_{jk}) проходит единица потока g_i , то это означает, что в интервале Δ_k задание i выполняется процессором j , объем работы которого составляет p_j , и эту величину следует прибавить к суммарному объему работы процессоров по исполнению задания i . Если единица потока g_i проходит по дуге $(y_{j_1 k_1}, x_{j_2 k_2})$, то это означает, что, во-первых, данная дуга должна быть включена в структуру вычислительной системы и, во-вторых, из суммарного объема работы процессоров по выполнению задания i следует вычесть величину $q(j_1, k_1, j_2, k_2)$. Таким образом, каждому n -продуктовому потоку $g_i(a, b)$ в сети G_1 соответствует некоторая допустимая структура Σ вычислительной системы и некоторое расписание $R(\Sigma)$ выполнения множества заданий N . Будем искать такой n -продуктовый поток, для которого стоимость структуры Σ минимальна, а соответствующее расписание $R(\Sigma)$ является допустимым.

Таблица 1. Смысловое значение единицы потока g_i по дугам сети G_1

Дуга $(a, b) \in A_1$	Смысловое значение единицы потока $g_i(a, b)$
(u_i, x_{jk})	Начало выполнения работы i процессором j в момент времени t_{k-1}
(x_{jk}, y_{jk})	Выполнение работы i процессором j в интервале Δ_k
$(y_{j_1k_1}, x_{j_2k_2})$	Переключение работы i с процессора j_1 в момент времени t_{k_1} на процессор j_2 в момент времени t_{k_2-1}
(y_{jk}, v_i)	Завершение выполнения работы i процессором j в момент времени t_k

3. Необходимые и достаточные условия существования допустимого решения. Задачу построения допустимой структуры минимальной стоимости и поиска допустимого расписания сведем к задаче булева линейного программирования. Запишем условия, накладываемые на поток $g_i(a, b)$ и сформулированные в разд. 2, в виде минимизации линейного функционала и линейных ограничений с булевыми переменными $g_i(a, b)$, $i = \overline{1, n}$, $(a, b) \in A_1$:

$$\min_{g_i} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j_1 \in M(i, k_1), j_2 \in M(i, k_2), \\ I(j_1, k_1, j_2, k_2)=1}} g_i(y_{j_1k_1}, x_{j_2k_2}) s(y_{j_1k_1}, x_{j_2k_2}), \quad (3.1)$$

$$\sum_{k=b_i}^{f_i} \sum_{j \in M(i, k)} g_i(u_i, x_{jk}) = 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.2)$$

$$\sum_{k=b_i}^{f_i} \sum_{j \in M(i, k)} g_i(y_{jk}, v_i) = 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.3)$$

$$\sum_{i=1}^n g_i(x_{jk}, y_{jk}) \leq 1, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, T}, \quad (3.4)$$

$$g_i(u_i, x_{j_1k_1}) + \sum_{\substack{j_2, k_2: I(j_2, k_2, j_1, k_1)=1, \\ j_2 \in M(i, k_2), k_2 \in [b_i, f_i]}} g_i(y_{j_2k_2}, x_{j_1k_1}) = g_i(x_{j_1k_1}, y_{j_1k_1}), \quad (3.5)$$

$$i = \overline{1, n}, \quad k_1 \in [b_i, f_i], \quad j_1 \in M(i, k_1),$$

$$g_i(x_{j_1k_1}, y_{j_1k_1}) = g_i(y_{j_1k_1}, v_i) + \sum_{\substack{j_2, k_2: I(j_1, k_1, j_2, k_2)=1, \\ j_2 \in M(i, k_2), k_2 \in [b_i, f_i]}} g_i(y_{j_2k_2}, x_{j_1k_1}), \quad (3.6)$$

$$i = \overline{1, n}, \quad k_1 \in [b_i, f_i], \quad j_1 \in M(i, k_1),$$

$$\sum_{k=b_i}^{f_i} \sum_{j \in M(i, k)} g_i(x_{jk}, y_{jk}) p_j - \sum_{\substack{k_1, k_2 \in [b_i, f_i], j_1 \in M(i, k_1), \\ j_2 \in M(i, k_2), I(j_1, k_1, j_2, k_2)=1}} g_i(y_{j_1k_1}, x_{j_2k_2}) q(j_1, k_1, j_2, k_2) \geq w_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.7)$$

$$\sum_{i=1}^n g_i(x_{jk}, y_{jk}) c_i \leq B_{jk}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, T}, \quad (3.8)$$

$$g_i(a, b) \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (a, b) \in A. \quad (3.9)$$

Данная система содержит $O(n(mT)^2)$ булевых переменных и $O(nmT)$ линейных ограничений.

Поясним физический смысл выражений (3.1)–(3.9). Равенства (3.2), (3.3) означают, что суммарная величина i -го продукта, исходящего из источника u_i и соответственно входящего в сток v_i , $i = \overline{1, n}$, равна единице. В силу (3.4) суммарная величина потока по каждой дуге (x_{jk}, y_{jk}) , $j = \overline{1, m}$,

$k = \overline{1, T}$, не превосходит единицы. Равенства (3.5), (3.6) гарантируют сохранение потока i -го продукта во внутренних узлах x_{jk} и y_{jk} соответственно, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, T}$. Согласно неравенства (3.7), суммарный объем работы процессоров при выполнении задания i не меньше w_i , $i = \overline{1, n}$. Величина, стоящая в левой части соотношения (3.8), равна объему памяти, требуемой для работы, выполняемой j -м процессором в интервале Δ_k , $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, T}$. Это значение не должно превосходить доступного объема оперативной памяти j -го процессора в интервале Δ_k , т.е. величины B_{jk} . Согласно (3.9), в сети G_1 будут найдены такие n непересекающихся путей, что величина потока i -го продукта по i -му пути равна единице. Минимизация выражения (3.1) обеспечивает построение структуры вычислительной системы минимальной стоимости.

Л е м м а 1. Для существования допустимого решения $(\Sigma, R(\Sigma))$ минимальной стоимости в исходной задаче необходимо и достаточно наличия решения в задаче булева линейного программирования (3.1)–(3.9).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Необходимость. Если в исходной задаче существует допустимое решение $(\Sigma, R(\Sigma))$, то при структуре Σ для каждого $i = \overline{1, n}$ расписание исполнения i -й работы описывает путь из u_i в v_i в сети G_1 , по которому можно пропустить единицу потока i -го продукта, причем все эти n путей не пересекаются. Все работы полностью завершаются в своих директивных интервалах и, кроме того, не нарушаются ограничения по требуемой памяти. Это обеспечивает выполнение условий (3.2)–(3.9). Поскольку структура Σ имеет минимальную стоимость, то верно условие (3.1).

2. Достаточность. В силу соотношений (3.2)–(3.6), (3.9) в сети G_1 существуют n непересекающихся путей из u_i в v_i , $i = \overline{1, n}$, таких, что вдоль i -го из них протекает единица i -го продукта, благодаря чему существует некоторое расписание для комплекса заданий N , согласно которому каждая работа выполняется в своем директивном интервале. Согласно (3.7), каждое задание исполняется полностью, а из (3.8) следует, что не нарушаются ограничения по памяти. Таким образом, это расписание является допустимым. Дуги (y_{jk}, x_{jk}) , по которым поток равен единице, образуют искомую структуру Σ . Поскольку верно условие (3.1), то стоимость этой структуры минимальна. Лемма доказана.

При выполнении условий (3.1)–(3.9) решение $(\Sigma, R(\Sigma))$ исходной задачи строится следующим образом. Если $g_i(y_{j_1 k_1}, x_{j_2 k_2}) = 1$ при некотором $i = \overline{1, n}$, то в проектируемую структуру Σ системы необходимо включить связь, обеспечивающую возможность переключения задания i с процессора j_1 в момент времени t_{k_1} на процессор j_2 в момент времени t_{k_2-1} . Равенство $g_i(x_{j_1 k}, y_{j_2 k}) = 1$ означает, что, согласно допустимому расписанию $R(\Sigma)$, в интервале Δ_k работа i выполняется процессором j .

4. Упрощенный вид необходимых условий существования допустимого решения. В этом разделе предполагается, что память, требуемая для выполнения каждого задания, не превосходит объема памяти любого процессора. В таком случае неравенства (3.8) верны и их можно опустить. Для данного частного случая сформулируем упрощенный вид необходимых условий существования допустимого решения. Для этого построим однопродуктовую потоковую сеть $G_2 = (V_2, A_2)$ следующим образом. Добавим к сети G_1 два узла (источник u и сток v) и дуги (u, u_i) и (v_i, v) , $i = \overline{1, n}$. Таким образом, $V_2 = V_1 \cup \{u, v\}$, $A_2 = A_1 \cup \{(u, u_i), (v_i, v), i = \overline{1, n}\}$. Фрагмент сети G_2 изображен на рис. 2. Дуги $(a, b) \in A_2$ сети G_2 имеют три параметра: нижнюю и верхнюю границы потока (соответственно $L(a, b)$ и $U(a, b)$), а также стоимость $C(a, b)$ единицы потока. Значения этих параметров определим следующим образом: $L(a, b) = 0$, $U(a, b) = 1$ при всех $(a, b) \in A_2$; $C(x_{j_1 k_1}, y_{j_2 k_2}) = p_j$, $C(y_{j_1 k_1}, x_{j_2 k_2}) = -q(j_1, k_1, j_2, k_2)$, $C(a, b) = 0$ для всех остальных дуг $(a, b) \in A_2$. Пусть $h(a, b)$, $(a, b) \in A_2$ – некоторый однопродуктовый поток в сети G_2 , а величина

$$C(h) = \sum_{(a,b) \in A_2} C(a, b)$$

– его стоимость.

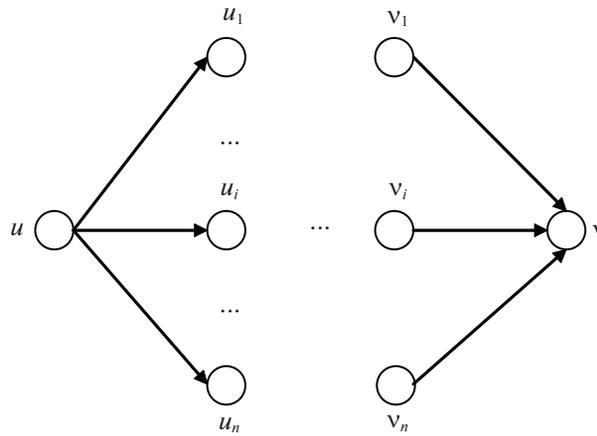


Рис. 2. Сеть G_2

Л е м м а 2. Для существования допустимого решения $(\Sigma, R(\Sigma))$ в рассматриваемом частном случае исходной задачи необходимо наличие однопродуктового потока h в сети G_2 , для которого справедливо неравенство

$$C(h) \leq \sum_{i=1}^n w_i. \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если существует допустимое решение $(\Sigma, R(\Sigma))$, то в силу леммы 1 для некоторого n -продуктового потока g в сети G_1 верны соотношения (3.2)–(3.7), (3.9). Определим однопродуктовый поток h в сети G_2 следующим образом:

$$h(u, u_i) = \sum_{k \in [b_i, f_i]} \sum_{j \in M(i, k)} g_i(u_i, x_{jk}), \quad i = \overline{1, n},$$

$$h(v_i, v) = \sum_{k \in [b_i, f_i]} \sum_{j \in M(i, k)} g_i(y_{jk}, v_i), \quad i = \overline{1, n},$$

$$h(x_{jk}, y_{jk}) = \sum_{i=1}^n g_i(x_{jk}, y_{jk}), \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, T},$$

$$h(y_{j_1 k_1}, x_{j_2 k_2}) = \sum_{i=1}^n g_i(y_{j_1 k_1}, x_{j_2 k_2}), \quad j_1, j_2, k_1, k_2 : I(j_1, j_2, k_1, k_2) = 1.$$

Из (3.2)–(3.6) и (3.9) следует, что h является потоком в сети G_2 , т.е. удовлетворяет ограничениям сверху и снизу по каждой дуге, а также условию сохранения в каждом внутреннем узле сети G_2 . Кроме того, из (3.7) следует (4.1). Лемма доказана.

Для проверки выполнения условия леммы 2 можно воспользоваться известным алгоритмом нахождения потока минимальной стоимости в сети следующим образом [15]. Заменим знаки определенных выше стоимостей потоков по дугам на противоположные. В сети G_2 найдем однопродуктовый поток \bar{h} минимальной стоимости и пусть $C(\bar{h})$ – его стоимость. Тогда если

$$C(\bar{h}) \leq -\sum_{i=1}^n w_i,$$

то условие леммы 2 и необходимые условия существования допустимого решения верны. В противном случае условие леммы 2 и необходимые условия существования допустимого решения не выполнены.

Поскольку поиск однопродуктового потока минимальной стоимости в сети G_2 существенно проще решения задачи булева линейного программирования (3.1)–(3.9), то решение исходной

задачи можно проводить по следующей схеме. Сначала проверить выполнение условия леммы 2. И только в случае положительного результата перейти к проверке условий леммы 1.

Заключение. Решена задача оптимизации структуры многопроцессорной вычислительной системы реального времени и построения допустимого расписания комплекса работ для найденной структуры. Предполагается, что заданы ограничения на связи между процессорами, на их привязку к заданиям, на объемы оперативной памяти, а также на временные ограничения, определяемые директивными интервалами. Получены необходимые и достаточные условия существования допустимой структуры минимальной стоимости и допустимого расписания работ в виде системы булевых линейных соотношений. Методика решения основана на сведении исходной задачи к многопродуктовой потоковой задаче в сети.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Глонина А.Б., Балашов В.В.* О корректности моделирования модульных вычислительных систем реального времени с помощью сетей временных автоматов // Моделирование и анализ информационных систем. 2018. Т. 25. № 2. С. 174–192.
2. *Глонина А.Б.* Обобщенная модель функционирования модульных вычислительных систем реального времени для проверки допустимости конфигураций таких систем // Вестник ЮУрГУ. Сер. Вычисл. математика и информатика. 2017. Т. 6. № 4. С. 43–59.
3. *Глонина А.Б.* Инструментальная система проверки выполнения ограничений реального времени для конфигураций модульных вычислительных систем // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 2020. № 3. С. 16–29.
4. *Малашенко Ю.Е., Назарова И.А., Новикова Н.М.* Один подход к анализу возможных структурных повреждений в многопродуктовых сетевых системах // ЖВМ и МФ. 2019. Т. 59. № 9. С. 1626–1638.
5. *Малашенко Ю.Е., Назарова И.А., Новикова Н.М.* Анализ кластерных повреждений в сетевых системах // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. Т. 60. № 2. С. 338–348.
6. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности // Изв. РАН. ТиСУ. 1998. № 2. С. 134–146.
7. *Ефимов С.Н., Терсков В.А., Ярков К.В., Серикова О.Ю.* Оптимизация затрат при проектировании аппаратно-программного комплекса системы реального времени // Научно-технический вестник Поволжья. 2021. № 4. С. 35–37.
8. *Mironov A.A., Tsurkov V.I.* Network Models with Fixed Parameters at the Communication Nodes. 1 // J. Computer and Systems Sciences International. 1994. V. 32. № 6. P. 1–11.
9. *Mironov A.A., Tsurkov V.I.* Network Models with Fixed Parameters at the Communication Nodes. 2 // J. Computer and Systems Sciences International. 1995. V. 33. № 3. P. 107–116.
10. *Mironov A.A., Levkina T.A., Tsurkov V.I.* Minimax Estimations of Arc Weights in Integer Networks with Fixed Node Degrees // Applied and Computational Mathematics. 2009. V. 8. № 2. P. 216–226.
11. *Mironov A.A., Tsurkov V.I.* Class of Distribution Problems with Minimax Criterion // Doklady Akademii Nauk. 1994. V. 336. № 1. P. 35–38.
12. *Фуругян М.Г.* Некоторые алгоритмы анализа и синтеза многопроцессорных вычислительных систем реального времени // Программирование. 2014. № 1. С. 36–44.
13. *Мищенко А.В., Кошелев П.С.* Оптимизация управления работами логистического проекта в условиях неопределенности // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 4. С. 86–101.
14. *Фуругян М.Г.* Планирование вычислений в многопроцессорных АСУ реального времени с дополнительным ресурсом // АиТ. 2015. № 3. С. 144–150.
15. *Корте Б., Фиген Й.* Комбинаторная оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: МЦНМО, 2015.

КОНСТРУИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ВСТРЕЧИ В БАЗАХ ЗНАНИЙ БОРТОВЫХ ОПЕРАТИВНО-СОВЕТУЮЩИХ ЭКСПЕРТНЫХ СИСТЕМАХ ЭТАПА ПОЛЕТА

© 2022 г. С. К. Галиханов^{а,*}, Б. Е. Федунов^{а, б,**}, М. А. Шигина^{а,***}

^а МАИ (Национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

^б ГНЦ ФГУП ГосНИИАС, Москва, Россия

*e-mail: galikbwat@gmail.com

**e-mail: boris_fed@gosniias.ru

***e-mail: shiginamarina@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.10.2021 г.

После доработки 16.11.2021 г.

Принята к публикации 31.01.2022 г.

Предлагается новый алгоритм конструирования траектории встречи самолета с другим летательным аппаратом, летящим по прямолинейной траектории с меньшей скоростью. Траектория формируется для профиля полета “набор высоты—полет на заданной высоте (полка)—снижение на точку встречи”. Необходимые характеристики этапов “набор высоты”, “полка” и “снижение” для конструирования траектории до момента встречи определяются в результате обработки летного эксперимента.

DOI: 10.31857/S0002338822030076

Введение. В базе знаний некоторых бортовых оперативно-советующих экспертных систем (БОСЭС) — этапа полета требуется сконструировать траекторию встречи истребителя (ИС) с ударным самолетом (УС), летящим на постоянной высоте с постоянным вектором скорости [1].

Траекторию встречи следует определять в классе траекторий со следующими характеристиками: траектория имеет профиль — “набор заданной высоты (высота “полки”)—полет на “полке”—снижение на высоту полета УС”;

начальная и конечная высота ИС равна высоте УС;

проекция траектории ИС на горизонтальную плоскость является прямой линией.

Приводятся процедуры конструирования названных типов траекторий и результаты математического моделирования имитационного моделирования работы фрагмента базы знаний БОСЭС, который реализован в программно-математическом комплексе (ПМК).

1. Постановка задачи конструирования траекторий встречи. Введем прямоугольную систему координат на горизонтальной плоскости полета УС (рис. 1). Вертикальная ось OZ направлена параллельно траектории УС, горизонтальная ось OX — от ИС, находящегося слева от УС, в сторону УС. Начало координат выбрано слева от ИС и ниже его. Отметим начальное расположение ИС (находится в точке A) и УС (находится в точке B).

Спроектируем на горизонтальную плоскость траекторию ИС (отрезок AC) и отметим:

в начале этой проекции проекцию участка траектории набора ИС высоты “полки”, обозначив его S_1 , и зафиксируем для него время набора высоты Δt_1 ;

в конце этой проекции проекцию участка траектории снижения ИС с высоты “полки” на высоту УС, обозначив его S_2 , и зафиксируем для этого участка полета время снижения Δt_2 .

Найдем соответствующие длины траекторий УС: $S_{12} = V_{УС}\Delta t_1$ и $S_{22} = V_{УС}\Delta t_2$, отложив в начале траектории УС отрезок S_{12} (на рис. 1 отрезок BB_1) и в конце траектории УС в окрестности точки встречи — отрезок S_{22} (отрезок C_1C).

Определение длины проекции на горизонтальную плоскость участка траектории полета ИС на “полке” (искомое время полета ИС на “полке” обозначим через τ) и длины соответствующего

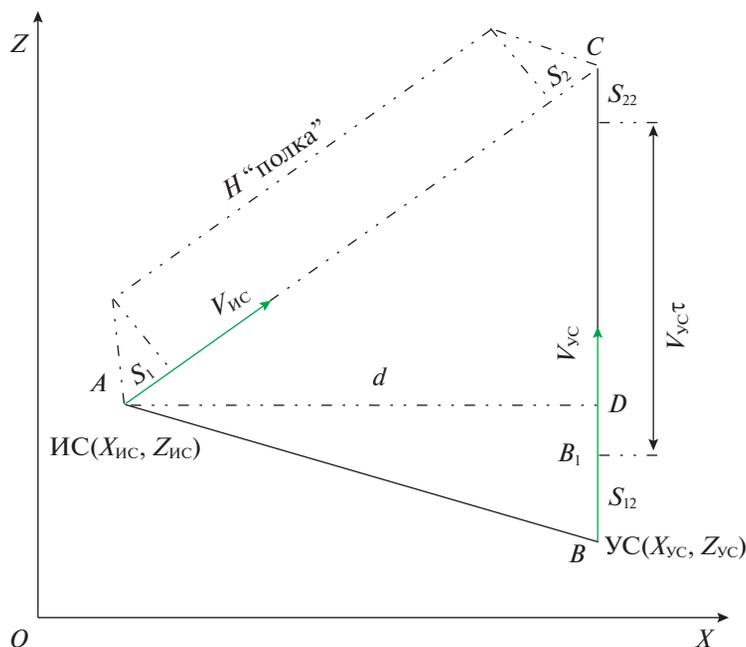


Рис. 1. Расположение ИС и УС и их траекторий встречи

ему участка B_1C_1 траектории УС проведем, используя прямоугольный треугольник ACD , полученный при проектировании точки A на траекторию УС.

Использование прямоугольного треугольника (“треугольника τ ”) для определения длин упомянутых отрезков зависит от взаимного начального расположения ИС и УС и расположения точек B_1 и D .

Из прямоугольного треугольника ACD , учитывая $AC^2 = AD^2 + DC^2$, находим:

$$\begin{aligned} AC &= (S_1 + S_2) + V_{ИС}\tau, \\ AD &= X_{УС} - X_{ИС} = d, \\ DC &= S_{22} + V_{УС}\tau + B_1D. \end{aligned} \tag{1.1}$$

В таком случае время полета ИС на “полке” τ определим из решения соответствующего квадратного уравнения $a\tau^2 + b\tau + c = 0$ полученного из $AC^2 = AD^2 + DC^2$ и с учетом системы (1.1). Далее вычисляются корни квадратного уравнения $\tau_{1,2}$ и выбирается наименьший положительный.

Причем координаты точки встречи ИС с УС соответственно равны:

$$\begin{aligned} X_{т.в} &= X_{УС}; \\ Z_{т.в} &= Z_{УС} + S_{12} + V_{УС}\tau + S_{22}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Время полета ИС до встречи с УС соответствует сумме времени выхода ИС на заданную “полку” Δt_1 , времени полета на “полке” τ , времени Δt_2 снижения ИС на высоту УС. Заметим, что в описанных вычислениях не используется математическая модель ИС на этапах “набор высоты” и “спуск”. Необходимые для расчетов проекции длины участков S_1 , S_2 и минимального времени ИС для прохождения этих этапов Δt_1 могут быть получены на основании результатов летных испытаний.

2. Формирование исходных данных для конструирования траекторий ИС. Пусть заданы экспериментальные зависимости траектории ИС типа “набор заданной высоты – полет на заданной высоте – снижение”: изменение высоты полета по времени полета и изменение скорости полета по этой траектории по времени полета (зависимости взяты из [2]).

На рис. 2 представлены графики зависимости скорости и высоты полета от времени для траектории самолета, проекция которой на горизонтальную плоскость X, Z – прямая линия, а

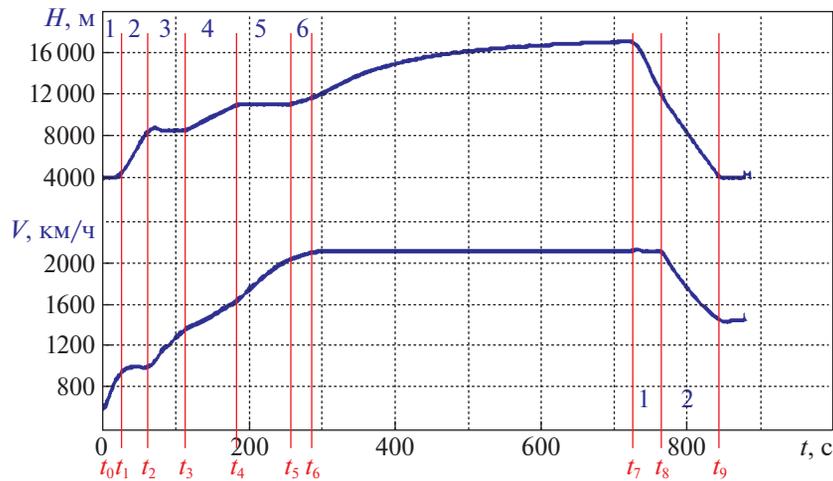


Рис. 2. Зависимости скорости и высоты от времени для траектории встречи ИС с УС (зависимости взяты из [2])

проекция траектории на вертикальную плоскость состоит из участков: полет на начальной высоте H_0 , набор заданной высоты (высота “полки”), полет на заданной высоте с постоянной скоростью (полет на “полке”), спуск на начальную высоту H_0 .

Для конструирования в базах знаний БОСЭС-этапов полета таких траекторий удобно аппроксимировать экспериментальные траектории следующим образом: участки набора и спуска представлять временем выполнения участков и проекцией их длины на горизонтальную плоскость, участок полета на “полке” считать выполняемым с постоянной вертикальной скоростью, время участка снижения совпадает с экспериментальным.

Разобьем временную ось экспериментальных зависимостей на отрезки, на которых вертикальная скорость самолета V_y не изменяется (нулевая или постоянная с любым знаком), а скорость по траектории V или не изменяется, или изменяется по линейному закону.

На каждом таком временном участке определим проекцию скорости самолета V_{xz} на горизонтальную плоскость и рассчитаем: (1) длину горизонтальной проекции траектории самолета, соответствующей этому временному участку, и (2) время прохождения самолетом этого участка.

Суммируя длины и продолжительности всех временных участков на наборе высоты, получим необходимые в базе знаний бортовой интеллектуальной системы (БИС) полетного задания длину проекции траектории набора высоты на горизонтальную плоскость и время набора. Аналогично определим эти величины и для траектории спуска.

Этап “Набор высоты” состоит из нескольких участков.

Участок 1, $t \in [t_1, t_2]$:

$$V_{y2} = \frac{H_2 - H_1}{t_2 - t_1} = \frac{8000 - 4000}{60 - 20} = 100 \text{ м/с},$$

$$V_{xz2} = \sqrt{V_2^2 - V_{y2}^2} = \sqrt{(1000 \cdot 0.2778)^2 - 100^2} = 259 \text{ м/с},$$

$$\Delta t_2 = t_2 - t_1 = 60 - 20 = 40 \text{ с},$$

$$\Delta S_2 = V_{xz} \Delta t_2 = 259 \cdot 40 = 10360 \text{ м}.$$

Участок 2, $t \in [t_2, t_3]$:

$$V_{y3} = \frac{H_3 - H_2}{t_3 - t_2} = 0 \text{ м/с},$$

$$V_{xz3} = \sqrt{V_3^2 - V_{y3}^2} = \sqrt{(1400 \cdot 0.2778)^2 - 0} = 388.92 \text{ м/с},$$

$$\Delta t_3 = t_3 - t_2 = 110 - 60 = 50 \text{ с},$$

$$\Delta S_3 = \frac{(V_{xz3} + V_{xz2})}{2} \Delta t_3 = \frac{388.92 + 259}{2} 50 = 16198 \text{ м.}$$

Участок 3, $t \in [t_{3,2}, t_4]$:

$$V_{y4} = \frac{H_4 - H_3}{t_4 - t_3} = \frac{11000 - 8000}{180 - 110} = 42.85 \text{ м/с,}$$

$$V_{xz4} = \sqrt{V_4^2 - V_{y4}^2} = \sqrt{(1600 \cdot 0.2778)^2 - 42.85^2} = 442.4 \text{ м/с,}$$

$$V_{xz3} = \sqrt{V_3^2 - V_{y4}^2} = \sqrt{(1400 \cdot 0.2778)^2 - (42.85)^2} = 386.55 \text{ м/с,}$$

$$\Delta t_4 = t_4 - t_3 = 180 - 110 = 70 \text{ с,}$$

$$\Delta S_4 = \frac{(V_{xz3} + V_{xz4})}{2} \Delta t_4 = \frac{442.2 + 386.55}{2} 70 = 29006.3 \text{ м.}$$

Участок 4, $t \in [t_4, t_5]$:

$$V_{y5} = \frac{H_5 - H_4}{t_5 - t_4} = 0 \text{ м/с,}$$

$$V_{xz5} = \sqrt{V_5^2 - V_{y5}^2} = \sqrt{(2000 \cdot 0.2778)^2 - 0} = 555.56 \text{ м/с,}$$

$$\Delta t_5 = t_5 - t_4 = 250 - 180 = 70 \text{ с,}$$

$$\Delta S_5 = \frac{(V_{xz5} + V_{xz4})}{2} \Delta t_5 = \frac{555.56 + 442.4}{2} 70 = 34928.6 \text{ м.}$$

Участок 5, $t \in [t_5, t_6]$:

$$V_{y6} = \frac{H_6 - H_5}{t_6 - t_5} = \frac{12000 - 11000}{290 - 250} = 25 \text{ м/с,}$$

$$V_{xz6} = \sqrt{V_6^2 - V_{y6}^2} = \sqrt{(2100 \cdot 0.2778)^2 - 25^2} = 582.84 \text{ м/с,}$$

$$V_{xz5} = \sqrt{V_5^2 - V_{y6}^2} = \sqrt{(2000 \cdot 0.2778)^2 - (25)^2} = 555.03 \text{ м/с,}$$

$$\Delta t_6 = t_6 - t_5 = 290 - 250 = 25 \text{ с,}$$

$$\Delta S_6 = \frac{V_{xz6} + V_{xz5}}{2} \Delta t_6 = \frac{582.84 + 555.03}{2} 25 = 14223.5 \text{ м.}$$

Итог по этапу “Набор высоты”:

$$\Delta t_{\text{наб}} = \sum_{i=1}^6 \Delta t_i = 255 \text{ с,}$$

$$S_{\text{наб}} = \sum_{j=1}^6 \Delta S_j = 104716.4 \text{ м.}$$

Этап “Полка”, $t \in [t_6, t_7]$:

$$V_{y6} = \frac{H_6 - H_5}{t_6 - t_5} = \frac{12000 - 11000}{290 - 250} = 25 \text{ м/с,}$$

$$V_{xz6} = \sqrt{V_6^2 - V_{y6}^2} = \sqrt{(2100 \cdot 0.2778)^2 - 25^2} = 582.84 \text{ м/с,}$$

$$V_{y7} = \frac{H_7 - H_8}{t_8 - t_7} = \frac{16100 - 12000}{780 - 720} = 68.3 \text{ м/с,}$$

$$V_{xz7} = \sqrt{V_8^2 - V_{y7}^2} = \sqrt{(2100 \cdot 0.2778)^2 - 68.3^2} = 579.37 \text{ м/с,}$$

$$\Delta t_7 = 720 - 290 = 430 \text{ с},$$

$$\Delta S = \frac{V_{xz6} + V_{xz7}}{2} \Delta t_7 = \frac{582.84 + 579.37}{2} \cdot 430 = 249875.15 \text{ м.}$$

Этап “Снижение” состоит из двух участков.

Участок 1:

$$V_{y1} = \frac{H_7 - H_8}{t_8 - t_7} = \frac{16100 - 12000}{780 - 720} = 68.3 \text{ м/с},$$

$$V_{xz1} = \sqrt{V_8^2 - V_{y1}^2} = \sqrt{(2100 \cdot 0.2778)^2 - 68.3^2} = 579.37 \text{ м/с},$$

$$\Delta t_1 = t_5 - t_4 = 780 - 720 = 60 \text{ с},$$

$$\Delta S_1 = V_{xz1} \Delta t_1 = 579.37 \cdot 70 = 40555.76 \text{ м.}$$

Участок 2:

$$V_{y2} = \frac{H_8 - H_9}{t_9 - t_8} = \frac{12000 - 4000}{850 - 780} = 114.3 \text{ м/с},$$

$$V_{xz2} = \sqrt{V_9^2 - V_{y2}^2} = \sqrt{(1500 \cdot 0.2778)^2 - 114.3^2} = 400.72 \text{ м/с},$$

$$\Delta t_2 = t_9 - t_8 = 850 - 780 = 70 \text{ с},$$

$$\Delta S_2 = V_{xz2} \Delta t_2 = 400.72 \cdot 70 = 28050.4 \text{ м.}$$

Итог по этапу “Снижение”:

$$\Delta t_{\text{сн}} = \sum_{i=1}^2 \Delta t_i = 130 \text{ с},$$

$$\Delta S_{\text{сн}} = \sum_{j=1}^2 \Delta S_j = 68606 \text{ м.}$$

Таким образом на этапе “Набор высоты” истребитель за 255 с преодолевает 107025.6 м, при этом его высота полета меняется с 4000 до 16000 м. В то время как на этапе “Снижение” за 130 с преодолевает 68606 м, при этом его высота полета меняется с 16100 до 4000 м.

3. Решение конструирования траекторий ИС типа “набор высоты—полет на заданной высоте (высота “полки”)—снижение”, обеспечивающих встречу ИС с УС.

3.1. Определение “треугольника τ ” при начальной $Z_{\text{ИС}}$ больше начальной $Z_{\text{УС}}$. Здесь возможны три случая использования прямоугольного треугольника для определения времени полета ИС на “полке”.

Случай I. Точка B_1 находится выше точки D (рис. 3).

Получим следующие начальные положения: $Z_{\text{ИС}} > Z_{\text{УС}}$ и $(Z_{\text{УС}} + S_{12}) > Z_{\text{ИС}}$.

Из прямоугольного треугольника ACD , учитывая $AC^2 = AD^2 + DC^2$, находим:

$$\begin{aligned} AC &= (S_1 + S_2) + V_{\text{ИС}} \tau, \\ AD &= X_{\text{УС}} - X_{\text{ИС}} = d, \\ DC &= S_{22} + V_{\text{УС}} \tau + B_1 D = S_{22} + V_{\text{УС}} \tau + Z_{\text{УС}} + S_{12} - Z_{\text{ИС}} = \Sigma_2 + V_{\text{УС}} \tau, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\Sigma_2 = S_{22} + Z_{\text{УС}} + S_{12} - Z_{\text{ИС}}$.

Случай II. Точка B_1 находится ниже точки D (рис. 4).

Получим следующие начальные положения: $Z_{\text{ИС}} > Z_{\text{УС}}$ и $(Z_{\text{УС}} + S_{12}) < Z_{\text{ИС}}$.

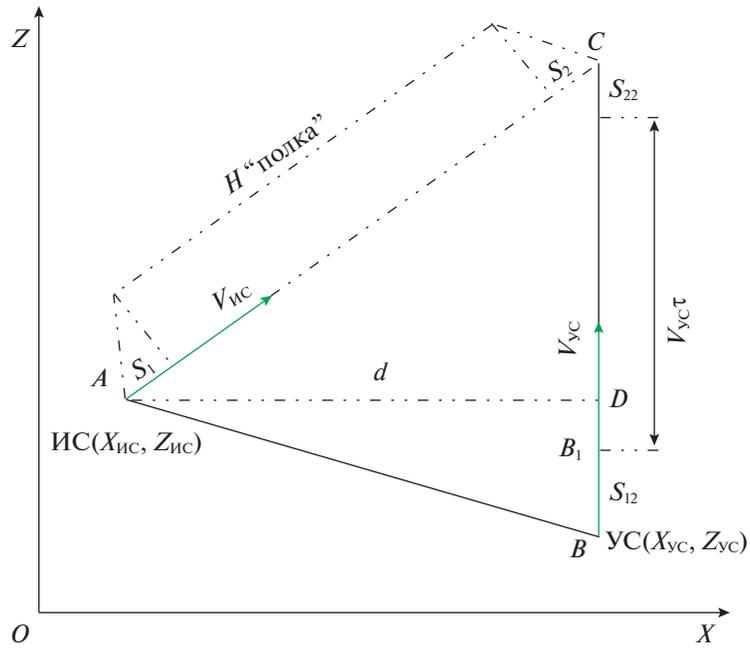


Рис. 3. Точка выхода ИС на траекторию УС (точка B_1 выше точки D)

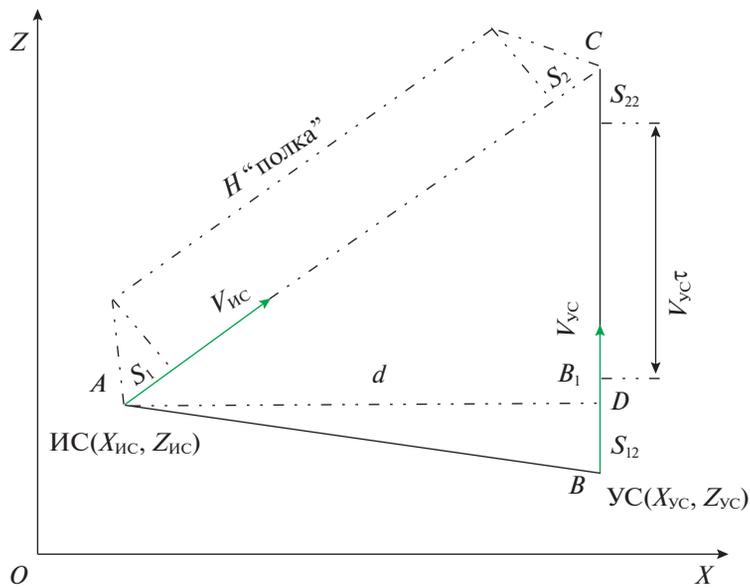


Рис. 4. Точка выхода ИС на траекторию УС (точка B_1 ниже точки D)

Из прямоугольного треугольника ACD , учитывая $AC^2 = AD^2 + DC^2$, находим:

$$\begin{aligned}
 AC &= (S_1 + S_2) + V_{ИС}\tau, \\
 AD &= X_{УС} - X_{ИС} = d, \\
 DC &= S_{22} + V_{УС}\tau - B_1D = S_{22} + V_{УС}\tau - [Z_{ИС} - S_{12} - Z_{УС}].
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Случай III. Точка B_1 совпадает с точкой D .

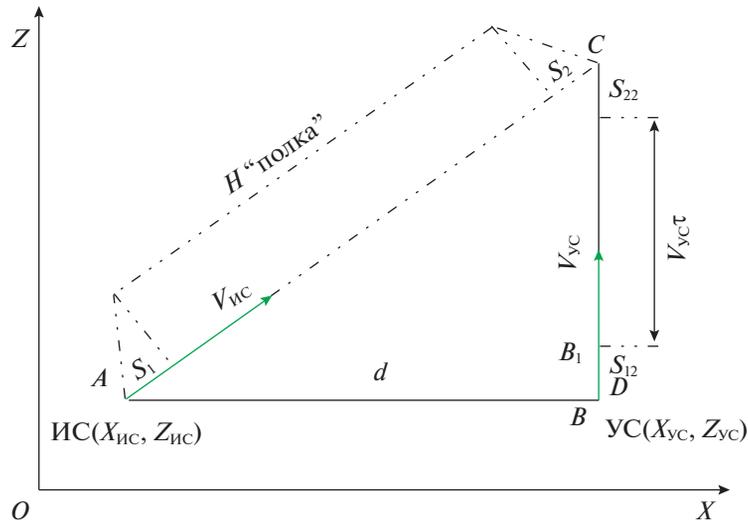


Рис. 5. Точка выхода ИС на траекторию УС (точка B совпадает с точкой D)

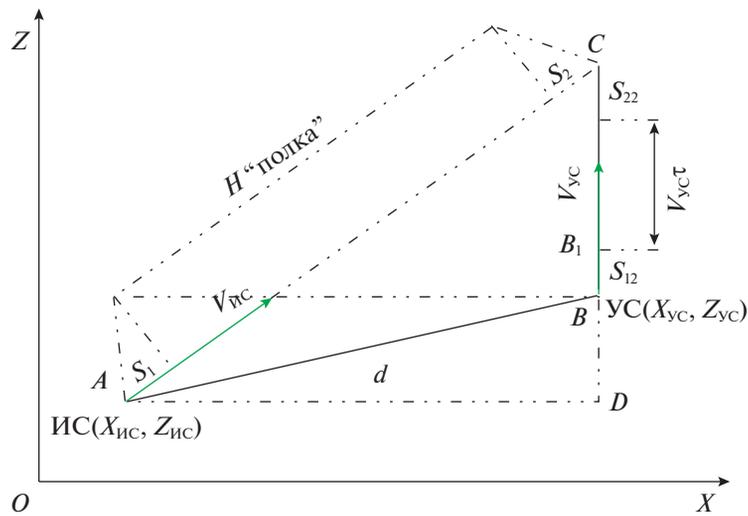


Рис. 6. Точка выхода ИС на траекторию УС при начальной Z(ИС) меньше начальной Z(УС)

Из прямоугольного треугольника ACD , учитывая $AC^2 = AD^2 + DC^2$, находим:

$$\begin{aligned} AC &= (S_1 + S_2) + V_{ИС}\tau, \\ AD &= X_{УС} - X_{ИС} = d, \\ DC &= S_{22} + V_{УС}\tau. \end{aligned}$$

3.2. Определение “треугольника τ ” при начальной $Z_{ИС}$, равной начальной $Z_{УС}$. Геометрическое представление задачи показано на рис. 5.

Из прямоугольного треугольника ACD , учитывая $AC^2 = AD^2 + DC^2$, находим:

$$\begin{aligned} AC &= (S_1 + S_2) + V_{ИС}\tau, \\ AD &= X_{УС} - X_{ИС} = d, \\ DC &= S_{12} + V_{УС}\tau + S_{22}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.3. Определение “треугольника τ ” при начальной $Z_{ИС}$, меньшей начальной $Z_{УС}$. Геометрическое представление задачи показано на рис. 6.

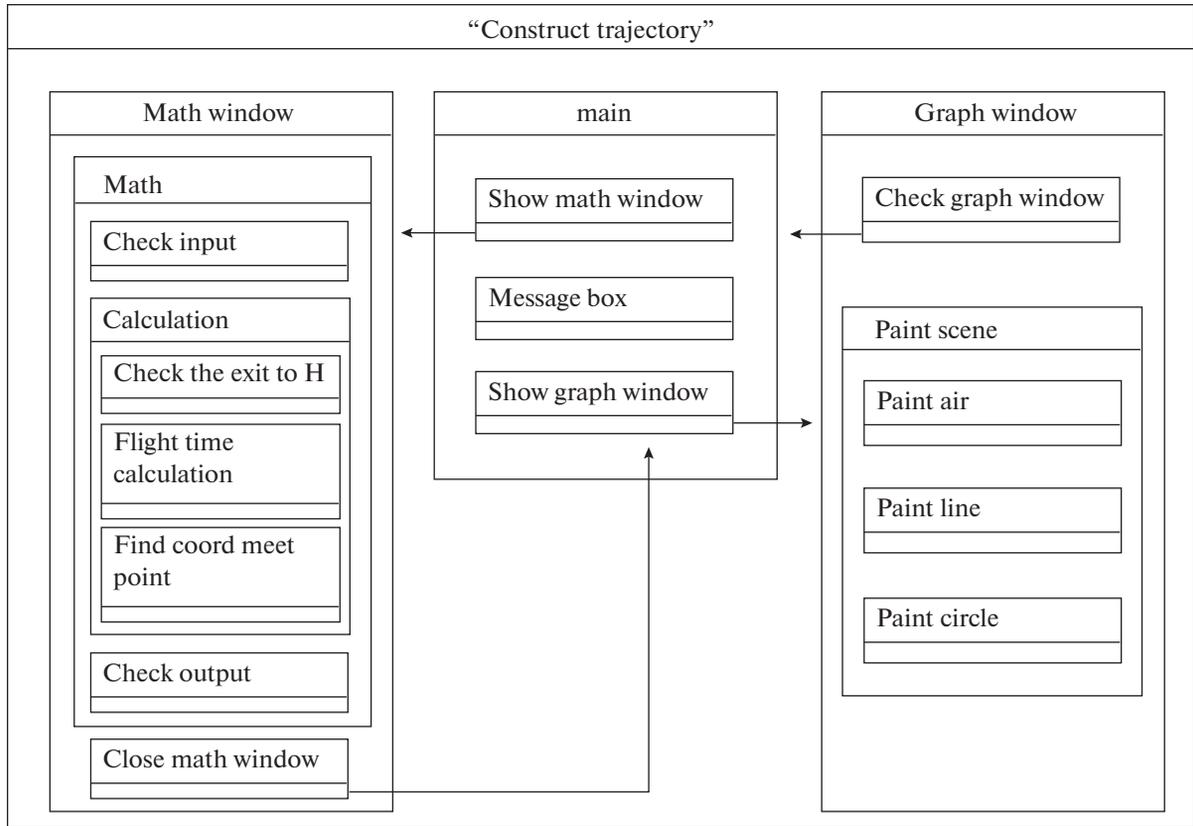


Рис. 7. Диаграмма взаимодействия объектов десктопного приложения

Из прямоугольного треугольника ACD , учитывая $AC^2 = AD^2 + DC^2$, находим:

$$\begin{aligned} AC &= (S_1 + S_2) + V_{ис}\tau, \\ AD &= X_{ус} - X_{ис} = d, \\ DC &= S_{12} + V_{ус}\tau + S_{22} + Z_{ус} - Z_{ис}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.4. Определение времени полета ИС на заданной “полке”. Для всех вариантов “треугольника τ ” справедливы единые формулы расчета коэффициентов соответствующего квадратного уравнения $a\tau^2 + b\tau + c = 0$:

коэффициент при τ^2 : $[V_{ис}^2 - V_{ус}^2]$,
 коэффициент при τ : $[2(S_1 + S_2)V_{ис} - 2[S_{11} + S_{12} + Z_{ус} - Z_{ис}]V_{ус}]$,
 коэффициент при τ^0 : $[(S_1 + S_2)^2 - [S_{11} + S_{12} + Z_{ус} - Z_{ис}]^2 - [X_{ус} - X_{ис}]^2]$.

Напомним, что в зависимостях (3.1)–(3.4), $V_{ис}$ – скорость полета ИС на заданной “полке”, а наименьший положительный корень квадратного уравнения τ_0 определяет время полета ИС на “полке”.

Тогда время полета ИС до встречи с УС

$$T_{встречи} = \Delta t_1 + \tau_0 + \Delta t_2, \tag{3.5}$$

координаты точки встречи ИС с УС

$$\begin{aligned} X_{т.в} &= X_{ус}, \\ Z_{т.в} &= Z_{ус} + V_{ус}T_{встречи}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

длина проекции траектории ИС на горизонтальную плоскость

$$L_{встречи\ ИС,УС} = S_1 + V_{“полки”\ ИС}\tau_0 + S_2. \tag{3.7}$$

Таблица 1. Характеристики набора ИС высоты “полки” $H = 12$ км и снижения (данные п. 1)

Этап полета ИС	S , м	Δt , с
Набор высоты с $H = H_{yc}$	$S_1 = 104716$	$\Delta t_1 = 255$
Расстояние, преодолеваемое УС за время набора ИС высоты $H = H_{yc}$	$S_{21} = V_{yc}\Delta t_1$	Δt_1
Снижение на высоту $H = H_{yc}$	$S_2 = 68606$	$\Delta t_2 = 130$
Расстояние, преодолеваемое УС за время снижения ИС на высоту $H = H_{yc}$	$S_{21} = V_{yc}\Delta t_2$	Δt_2

Таблица 2. Варианты различного расположения начального положения УС относительно одного и того же начального положения ИС (различные “треугольники τ ”)

Вариант	Самолет	X	Z	V	V
		м		м/с	
I	ИС	1000	4000	583	–
I	УС	400000	2000	–	200
II	ИС	1000	4000	583	–
II	УС	400000	4000	–	200
III	ИС	1000	4000	583	–
III	УС	400000	7000	–	200

4. Результаты имитационного моделирования решения задачи конструирования траектории встречи для базы знаний БОСЭС – “Возврат в строй”. В качестве основного инструмента обработки предложенного алгоритма было выбрано имитационное моделирование [3]. В рамках этого подхода был разработан ПМК, где ключевое место в решении задачи конструирования траектории отводится фрагменту десктопного приложения “Конструирование траектории встречи” для базы знаний БОСЭС – “Возврат в строй τ ”.

Десктопное приложение¹ реализовано на языке программирования C++ (стандарт 2014 г.) с использованием кроссплатформенной библиотеки Qt. На рис. 6 приведена диаграмма взаимодействия основных объектов десктопного приложения. На рис. 7 “Math window” – компонент интерфейса, обеспечивающий работу с входными данными и расчет выходных параметров, “Graph window” – компонент интерфейса, обеспечивающий построение “Профиля полета” и “Маршрута полета”, согласно полученным в “Math window” параметрам, “main” – компонент, связывающий работу “Math window” и “Graph window” в параллели и независимо друг от друга, “Calculation” – класс, отвечающий за выполнение расчетов по приведенному в разд. 1–3 алгоритму; “Check the exit to H” – блок проверки возможности выхода ИС на “полку”; “Flight time calculation” – блок расчета времени полета ИС на “полке”; “Find coord meet point” – блок расчета координат точки встречи; “Check input” – блок проверки возможности выхода ИС на “полку”; “Check output” – блок проверки возможности выхода ИС на “полку”; “Paint scene” – класс-компоновщик объектов, входящих в графики “Профиля полета” и “Маршрута полета”; “Paint air” – блок, формирующий объект сцены “самолет” с заданными координатами и передающий сформированный объект на компоновку; “Paint line” – блок, формирующий объект сцены и передающий сформированный объект на компоновку; прямая, соединяющая две точки с заданными координатами; “Paint circle” – блок, формирующий объект сцены “точка” с заданными координатами и передающий сформированный объект на компоновку; “Message box” – класс, формирующий информационное послание пользователю о выполнении выбранного действия.

Исходя из построенной диаграммы взаимодействий выделено три основных блока математики фрагмента “Конструирование траектории встречи”:

- 1) “Проверка возможности выхода на заданную $H_{\text{“полки” ИС}}$ ”;
- 2) “Расчет времени полета ИС на заданной “полке””;

¹ *Десктопные приложения* – это полнофункциональные программы, которые работают вне зависимости от других приложений и требуют наличие оператора. Для их работы необходимы достаточные аппаратные ресурсы компьютера, само приложение и набор функций для работы с приложением.

Таблица 3. Результаты расчета вариантов начального расположения ИС и УС, указанных в табл. 2

Вариант	Время полета ИС до встречи с УС $T_{встречи}, c$	Координаты точки встречи $x_{т.в.}, M, z_{т.в.}, M$	Длина проекции траектории ИС на горизонтальную плоскость $L_{встречи}$ ИС, УС, М	Время расчета, мс
I	860.067	$x = 400000,$ $z = 174013$	450869	~0.84
II	861.852	$x = 400000,$ $z = 176370$	451910	~0.68
III	864.547	$x = 400000,$ $z = 179909$	453481	~0.16

3) “Расчет координат точки встречи и длина проекции траектории ИС на горизонтальную плоскость”.

В блоке 1 конструируется траектория встречи ИС с УС без выхода ИС на “полку”: полет ИС на высоте УС со скоростью на заданной “полке” $V_{\text{“полки” ИС}}$. Определяется длина траектории истребителя сопровождения $L_{\text{без “полки” ИС}}$:

в формулах разд. 3.4 обнуляются $S_1 + S_2 = 0, S_{21} + S_{22} = 0$,
из квадратного уравнения определяется время τ_0 полета ИС,
находится длина $L_{\text{без “полки” ИС}} = V_{\text{“полки” ИС}} \tau_0$.

Строить траекторию ИС с заданной полкой возможно, если $L_{\text{без “полки” ИС}} > (S_1 + S_2)$. В этом случае переходим на следующий блок программы. В противном же случае выдается сообщение, сигнализирующее о невозможности выхода на “полку”.

В блоках 2 и 3 реализованы расчеты по приведенным в разд. 3.4 зависимостям.

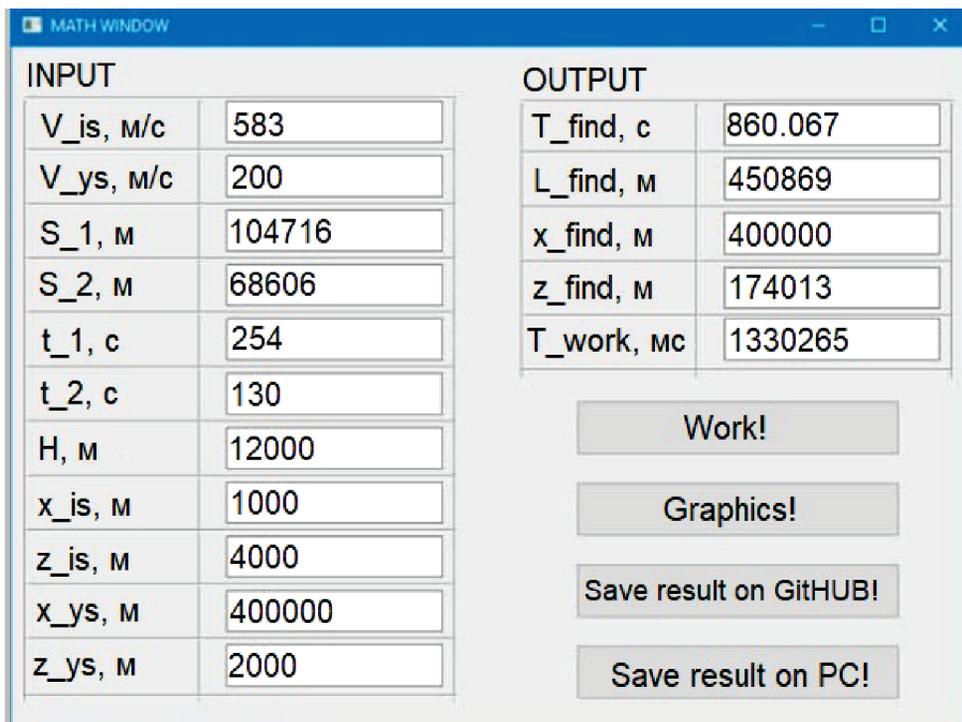


Рис. 8. Таблица исходных данных

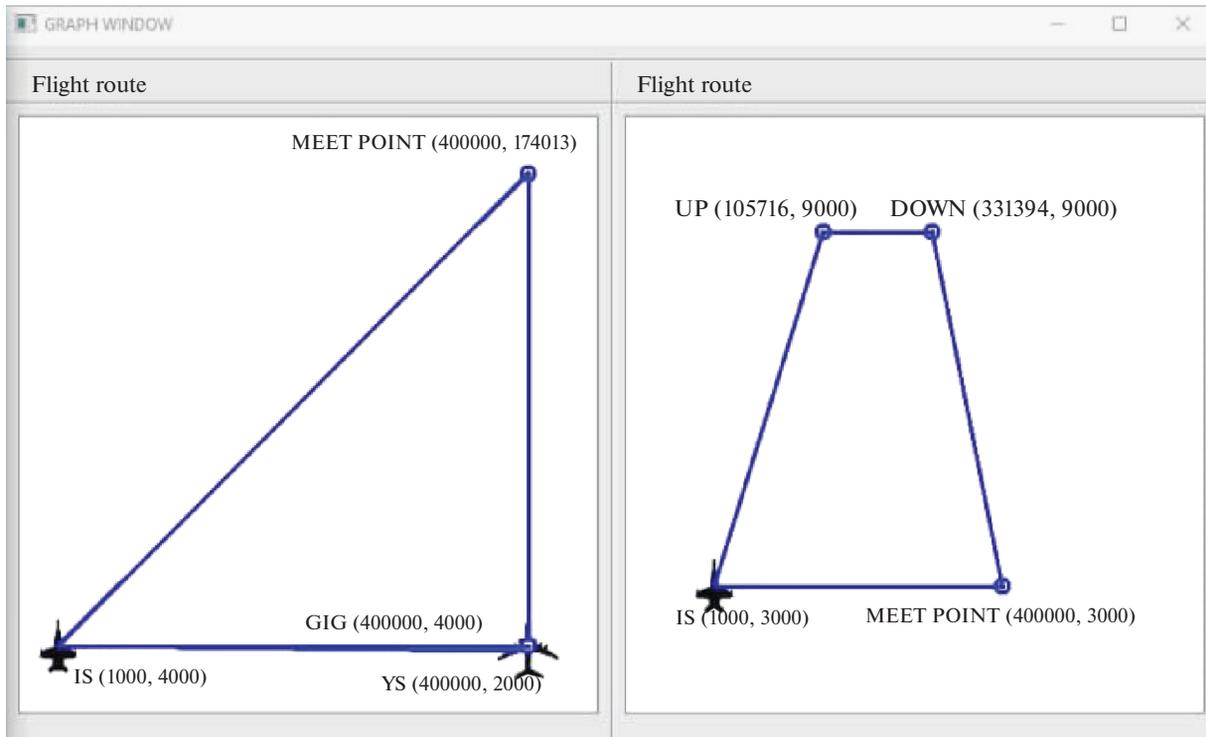


Рис. 9. Траектория встречи ИС с УС (слева) и профиль полета ИС (справа)

Для конструирования траектории требуются следующие исходные данные:

расположение ИС и УС: координаты $X_{ИС}$, $Z_{ИС}$, $X_{УС}$, $Z_{УС}$ в описанной выше системе координат, высота ИС и высота УС и его скорость $V_{УС}$,

заданная высота “полки” $H_{\text{“полки” ИС}}$ и скорость $V_{\text{“полки” ИС}}$,

полученная с летного эксперимента характеристика этапа набора ИС высоты $H_{\text{“полки” ИС}}$: S_1 , Δt_1 ,

найденная с летного эксперимента характеристика этапа снижения ИС с высоты $H_{\text{“полки” ИС}}$ до высоты полета УС: S_2 , Δt_2 .

Результатами работы десктопного приложения являются:

время полета ИС до встречи с УС $T_{\text{встречи}}$,

координаты точки встречи $X_{\text{т.в.}}$, $Z_{\text{т.в.}}$,

длина проекции траектории ИС на горизонтальную плоскость $L_{\text{встречи ИС, УС}}$.

Эксперимент проводился на персональном компьютере с техническими характеристиками: оперативное запоминающее устройство: 12 Гб; центральный процессор: *Intel® Core™ i5-7200U CPU @ 2.50GHz* × 4; графический процессор: *Mesa Intel® HD Graphics 620 (KBL GT2)*.

Пример конструирования траектории встречи ИС с УС с “полкой” на $H = 12$ км приведен в табл. 1 и 2.

Результаты расчета вариантов начального расположения ИС и УС с помощью сформированного десктоп приложения представлены в табл. 3.

На рис. 8 представлены исходные данные для расчета траектории встречи (рис. 9). Заметим, что изображенные на рис. 9 траектории встречи и профили полета сохраняют горизонтальный и вертикальный масштабы независимо друг от друга.

Заключение. Разработан новый алгоритм “Конструирования траектории встречи” в базе знаний бортовой оперативно-советующей экспертной системы этапа полета, обеспечивающий расчет траектории до момента встречи носителя БОСЭС с прямолинейно летящим самолетом, скорость которого меньше скорости полета носителя БОСЭС. Данный алгоритм отличается от су-

ществующих отсутствием итерационной процедуры определения момента “схода с “полки”” и не содержит аналитической модели носителя БОСЭС на этапах “подъем” и “спуск”, что значительно упрощает его реализацию. Вместо аналитической модели носителя в базу знаний БОСЭС включается специальная база данных ($S, \Delta t$) конкретного носителя этой БОСЭС, определенные для характерных для него значений $H_{\text{“полки”}}$, $V_{\text{“полки”}}$ и различных наборов условий начала участка набора (V, H) и условий окончания участка спуска (V, H).

Создан ПМК моделирования, на котором получены характеристики траекторий встречи (время полета до момента встречи, координаты точки встречи; длина проекции траектории на горизонтальную плоскость), подтверждающие работоспособность во всех возможных вариантах расположения УС и ИС и обосновывающие возможность применения предложенного алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Федунов Б.Е.* Бортовые интеллектуальные системы тактического уровня для антропоцентрических объектов (примеры для пилотируемых летательных аппаратов). М.: ДеЛибри, 2018. 246 с.
2. *Грецов Н.М., Перциц С.Н., Федунов Б.Е., Юневич Н.Д.* Интеллектуальная поддержка командира группы истребителей сопровождения при решении им задачи возврата части группы, отразившей атаку истребителей противника // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 4. С. 139–152.
3. ГОСТ Р 58048-2017 “Трансфер технологий. Методические указания по оценке уровня зрелости технологий”. Введ. 2018-06-01. М.: Стандартиформ, 2018. 42 с.

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНАЯ СИСТЕМА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭМОЦИЙ
НА АУДИОЗАПИСИ С ПОМОЩЬЮ МЕЛ-СПЕКТРОГРАММ© 2022 г. Л. А. Деревягин^а, В. В. Макаров^{а,*}, В. И. Цурков^б, А. Н. Яковлев^а^аМФТИ (НИУ), Москва, Россия^бФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: viktor.makarov@phystech.edu

Поступила в редакцию 11.12.2021 г.

После доработки 20.12.2021 г.

Принята к публикации 31.01.2022 г.

Предлагается архитектура нейронной сети для решения задачи определения эмоции человека на аудиозаписи. Под эмоциями понимаются страх, радость, грусть, гнев, спокойствие и нейтральность. Для обучения используются библиотечные данные. С помощью конвертации аудиофайла в изображение спектрограмм с мел-шкалой (эмпирически выбранная логарифмическая зависимость воспринимаемой органами слуха человека громкости звуковых колебаний от их частоты) сохраняются психофизические свойства аудиозаписи и применяются методы для классификации графических файлов, в том числе слои свертки (пофрагментное умножение матриц значений пикселей на заданные матрицы с возможным уменьшением размерности картинки)

DOI: 10.31857/S0002338822030040

Введение. Распознавание эмоций человека по аудиозаписи произносимого текста является важной научно-исследовательской проблемой, которая затрагивает множество дисциплин и областей [1–3]. Эта тематика актуальна в таких сферах, как медицина, психология [4] и безопасность. В работе рассматриваются подходы к распознаванию эмоций человека на монофоническом аудиоматериале. Анализ преобразованных из аудиофайлов так называемых мел-спектрограмм осуществляется при помощи сверточных нейронных сетей. Поскольку эти специфические спектрограммы представлены в виде картинки, то используется опыт в области классификации изображений [5].

Идея данного исследования была сформирована при анализе алгоритма CREPE, представленного в [6] и являющегося продолжением работ над алгоритмами YIN [7] и rYIN [8]. Упомянутые публикации являются инновационным для задач определения частоты основного тона (также называемой ЧОТ, F0 или Fundamental Frequency) в монофоническом аудиоматериале. В центральном месте алгоритма CREPE находится сверточная нейронная сеть, производящая обучение на непосредственно аудиосигнале во временной области. Базовый подход удалось реализовать в рамках этой статьи.

1. Краткий обзор существующих подходов и постановка задачи. Рассматривая задачу распознавания эмоций человека по аудиозаписи произносимого текста, остановимся на существующих на настоящий момент решениях в этой области [9]. Несмотря на определенную субъективность при оценке такой характеристики, как проявление эмоционального состояния на голосовой фонограмме, некоторые наборы данных отвечают всем необходимым признакам.

Чаще всего для оценки эмоций выделяют просодические (характеризующие речевую мелодию, темпоральные и тембральные особенности голоса) и спектральные характеристики аудиофайла с последующей классификацией полученных данных.

Близкими к данному исследованию выступают архитектуры, разработанные в университетах Пассау в Германии [10], Калифорнии [11] и Техасса [12]. Сравнительный анализ вышеуказанных алгоритмов, основанных на CREPE, привел к выявлению следующих недостатков.

1. Использование частичного обучением учителя в [10] приводит к нестабильным промежуточным результатам и потере точности.

2. Применение генеративно-состязательных сетей в [11] подразумевает повышение качественных требований к набору данных, а также усложненному процессу обучения и генерации результатов.

3. Сложный алгоритм, описанный в [12], имеет в основе адаптацию алгоритмов обучения с помощью метода опорных векторов, примененного к синтетическим данным (автоматически сгенерированных алгоритмом), для дальнейшего использования с реальными данными (доменная адаптация). Помимо сложности имплементации такая система имеет увеличенную вычислительную стоимость и базируется на условных правилах (так называемая “rule-based система”). При наличии образцов данных на момент прогнозирования, выходящих за установленный набор, точность такой системы окажется ниже расчетной.

У всех представленных алгоритмов имеется следующий недостаток: отсутствие непосредственного анализа информации сигнала, так как обучение производится при помощи данных, либо полученных от внутренних преобразований сети, либо от препроцессирующих алгоритмов.

Учитывая описанные выше недостатки, при проектировании системы, базирующейся на CREPE, необходимо рассмотреть принцип работы трекера частоты основного тона. Данная система имеет следующие входные и выходные данные.

В качестве входных данных взяты 1024 выдержки из аудиосигнала во временной области с частотой дискретизации 22 кГц. Они обрабатываются при помощи шести сверточных слоев.

Выходными данными является тензор размерностью 2048, который затем передается на полносвязный выходной слой классификации с активирующей функцией сигмоидой размерностью в 360 нейронов. Каждый из 360 элементов выходного вектора соответствует конкретному значению высоты звука, выражаемой в центах.

Цент — единица частотного интервала, равная сотой части полутона или 1/1200 части октавы (поскольку в октаве 12 полутонов), что дает шкалу высот звука, в которой 100 центов равняется одному полутону. Таким образом данная шкала покрывает диапазон звуков с интервалами в 20 центов в диапазоне частот от 32.70 до 1975.5 Гц.

Ключевой характеристикой голосового сигнала является частота основного тона. С музыкальной точки зрения — это образующая для всех остальных звуков натурального звукоряда, а для человеческой речи — частота колебаний голосовых связок. Она присуща непосредственно их обладателю, а ее повышение воспринимается слушателем как повышение высоты звука. Таким образом, возможно следующее предположение: решение задачи определения эмоций по монофоническому аудиоматериалу можно осуществить, используя набор инструментов, схожий с задачей определения частоты основного тона алгоритма CREPE.

Постановка задачи на распознавание выглядит следующим образом. Определяются эмоции: страх, печаль, радость, грусть, нейтральность, спокойствие. Каждой из них вводятся неотрицательные коэффициенты (вероятности), сумма которых равна единице. Цель распознавания — нахождение максимального коэффициента. Он и определяет искомую эмоцию, т.е. решает поставленную задачу.

2. Выбор архитектуры нейронной сети. В соответствии с основной идеей работы алгоритма CREPE (непосредственная работа над характеризующей сигнал графической информацией) были рассмотрены несколько вариантов сверточных нейронных сетей с некоторыми различиями во внутренней архитектуре. Данные различия включают в себя: кардинальные отличия архитектур, отличное от CREPE количество слоев свертки, разное количество групп слоев, применение дополнительных техник предотвращения эффекта переобучения (over-fitting, dropout, regularization).

Нейронная сеть, как известно, носит такое название в силу того, что состоит из некоторого количества вычислительных единиц — нейронов. Эти единицы способны получать, обрабатывать и отправлять любую информацию дальше. Делятся нейроны на три основных вида (входной, выходной, скрытый) и два вспомогательных (нейроны смещения, контекстный). Чтобы улучшить обработку информации при наличии большого количества нейронов, их совмещают в слой. Они также разделяются на входной, выходной и скрытый слой. Общий принцип работы основан на том, что каждый нейрон имеет два параметра: входные и выходные данные. Дальнейшие действия сводятся к простому циклу: входной нейрон или слой получает введенную информацию, после чего обрабатывает ее и отдает на скрытый нейрон или слой. Во всех последующих скрытых нейронах или слоях информация обрабатывается, и каждая последующая передача сопровождается собранной информацией каждого нейрона или слоя. В конце функция активации нормализует все полученное и отдает на выходной нейрон или слой, который выводит результат.

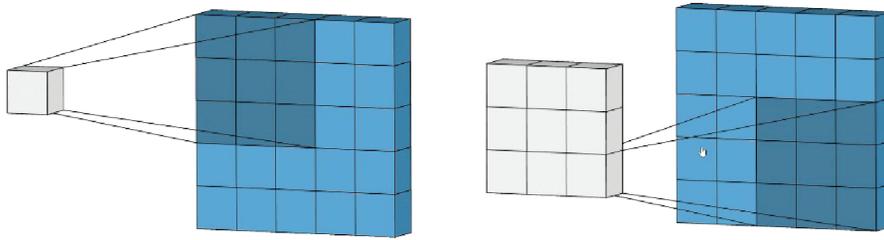


Рис. 1. Демонстрация принципа работы свертки

Чтобы решить более значительную задачу, например задачу классификации, нейроны собирают в общую систему – искусственную нейронную сеть. Как известно, при наличии в нейронной сети более одного скрытого слоя такую сеть принято называть глубокой. В большом многообразии различных архитектур были выделены и рассмотрены лишь подходящие для цели исследования. В качестве оптимальных для данной задачи изначально рассматривались: полносвязная нейронная сеть, когнитрон, перцептрон и сверточная нейронная сеть.

В полносвязной нейронной сети присутствует множество простых процессоров, которые сами по себе могут только совершать тривиальные операции. Каждому такому процессору (т.е. нейрону) назначается одна из задач: входные принимают набор данных, обрабатывающие совершают простые математические операции над набором, выходные используются для дальнейшей передачи. В итоговом счете каждому пикселю изображения ставится в отношение один нейрон. Это имеет место в большинстве вариантов таких архитектур. Такой подход в машинном обучении прост в использовании. Однако расчеты занимают большое количество времени и задействованных нейронов, а качественная оценка результатов может различаться из-за плохого качества изображения или наличия шума, не видного человеческому глазу. Упомянутые причины снимают приоритет с данного выбора.

Как известно, когнитрон и перцептрон являются двумя сходными архитектурами. Оба варианта в основе имеют принцип обработки изображения человеческим мозгом зрительной корой, но есть различия во внутренней архитектуре. В перцептроне клетки одного слоя не связаны между собой, но соседние слои полностью связаны. При обработке объекта нейроны реагируют на него и дают сигнал (по аналогии с реакцией зрительной коры мозга на попадание света на сетчатку глаза). В когнитроне имеется иерархическая многослойная организация, в которой нейроны между слоями связаны только локально. Несомненно, достоинством, общим для двух архитектур является то, что когнитрон и перцептрон дают более точные результаты, по сравнению с полносвязными нейронными сетями. Но стоит отметить, что даже малейшие изменения изображения могут восприниматься ими как совершенно новый объект изучения (что требует постоянного дополнения набора данных для более полного охвата предметной области задачи).

Как известно, в сверточной нейронной сети имеются слои, выполняющие операцию свертки. Каждый фрагмент изображения умножается на матрицу (ядро) свертки поэлементно, а результат суммируется и записывается в аналогичную позицию выходного изображения (рис. 1). Информация проходит распределение определенных свойств изображения, в которых выделяются более абстрактные детали. Структуру и распределение этих абстрактных признаков и ядро свертки нейронная сеть определяет самостоятельно в процессе обучения, обретая способность фильтрации деталей и выделения существенных признаков.

По причине того, что сверточная нейронная сеть нацелена на высокую точность распознавания образов и лучшую из предложенных работу по классификации изображения, данный вариант рассматривался как наиболее приоритетный, что выделяет эту архитектуру как самую эффективную для дальнейшей работы.

3. Выбор модели голосового аудиоматериала. Для работы с аудиофайлами и их последующей обработки предварительно необходимо рассмотреть модель создания звуковых волн в речевом тракте. Несмотря на то, что при исследовании нет возможности создать трехмерную модель траектории движения звуковой волны, достаточно описать общие характеристики данных акустических процессов с учетом аэродинамических свойств. Теория речеобразования достаточно полно описывает приведенную модель.

Как известно, речевым сигналом называется функция возбуждения с откликами линейных фильтров. В этом случае в качестве функции возбуждения выступает шум. В пределах 90–300 Гц

колеблется основной тон человеческой речи, который является уникальным для каждого отдельно взятого индивида. В пределах 90–180 Гц располагается частота мужских голосов и в пределах 185–300 Гц – частота женских и детских голосов. Набор гармоник, кратных основному тону, представляет щелчок голосовой щели. Падение уровня энергии гармоник напрямую зависит от увеличения частоты, 18 кГц – это максимальная граничная частота речевого сигнала, но для тракта достаточно частоты до 3500 Гц. При таком частотном ряде часть фонем не воспринимается человеческим ухом.

Резонансные полости речевого тракта напрямую используются щелчком голосовой щели. В этот момент часть гармоник, кратных основному тону, резонируют и созданные в спектре локальные максимумы образуют области концентрации энергии, которые называются формантами. Четыре форманты служат для создания гласных фонем, а любые другие изменения образуют согласные звуки. Все вышеперечисленное называют фонемами. Однако форманта также может служить для составления метрик на аудиоматериале речи человека, так как принадлежит к статическим характеристикам речи.

Если рассматривать образование речи как создание легкими, бронхами и трахеей акустической волны, которая образует речь посредством изменения траектории в голосовом тракте, то голосовой тракт (совокупность вышеназванных органов) можно представить как резонатор с несколькими пиками амплитудной частотной характеристики, частоты которых определяют вид произносимой фонемы и соответственно состояние человека.

Реализованный на начальном этапе исследований простой алгоритм производит перевод итогового аудиосигнала в соответствующий набор параметров в рамках описанного теоретического материала и в последствии – в графический вид. Благодаря своей информативности в сравнении с остальными вариантами была выбрана спектрограмма – двумерная диаграмма с прямой зависимостью, где по вертикальной оси показана частота, по горизонтальной оси – время, а амплитуда на определенной частоте в каждый конкретный момент времени представлена цветом.

Однако, несмотря на большую меру информативности спектрограмм, на этапе первичного обучения сверточной нейронной сети не было получено должной ориентировочной точности классификации эмоций, что привело к выдвигению гипотезы о применении психофизической шкалы.

Известно, что человеческое ухо более чувствительно к изменениям звука на низких частотах, чем на высоких. Это значит, что если частота звука изменится со 100 на 120 Гц, то человек с очень высокой вероятностью распознает это изменение. Однако изменение частоты с 10000 на 10020 Гц сложнее для восприятия человеческим ухом.

Такая особенность слуха учтена в одной из единиц измерения высоты звука – мел. Она основана на психофизиологическом восприятии звука человеком и логарифмически зависит от частоты, что непосредственно приводит к использованию мел-спектрограмм:

$$m = 1127 \ln \left(1 + \frac{f}{700} \right), \quad (3.1)$$

где m – высота звука в мелах, f – частота звука в Гц.

Мел-спектрограмма – это вариант спектрограммы, где частота выражена не в Гц (рис. 2), а в мелах (рис. 3). Переход к мелах происходит с помощью применения шкалирования исходной спектрограммы.

4. Анализ мел-спектрограмм. Для обучения был выбран набор данных Ravdess [13], представляющий из себя 4-секундные аудиозаписи, на которых актеры произносят два предложения на английском языке по 2 раза каждое (обычное произношение и нараспев). Предложения произносятся 2 раза для записи сильного и слабого проявления. Каждая запись длится в среднем 4 с, в первой и последней секундах присутствует лидирующий и заключительный отрезок без звука. Аудиоматериал записан в стереоформате, частота семплирования равна 48 кГц. Каждый аудиофайл имеет метку с эмоцией (нейтральность, радость, спокойствие, грусть, злость, страх, отвращение, удивление), которую испытывал актер при записи. При помощи вспомогательных библиотеки функций `librosa` и `matplotlib` производится первичная обработка файлов: приведение материалов к моноформату, децимация аудиофайлов до частоты 22 кГц, подготовка изображения с мел-спектрограммой аудиозаписи с разрешением 640 на 480 пикселей (рис. 3). Именно на этом этапе все аудиозаписи были преобразованы в изображения, в которых по горизонтальной оси приведено время, по вертикальной оси – частота. Третье измерение с указанием амплитуды на определенной частоте в конкретный момент времени представлено интенсивностью желтого цвета каждой точки изображения.

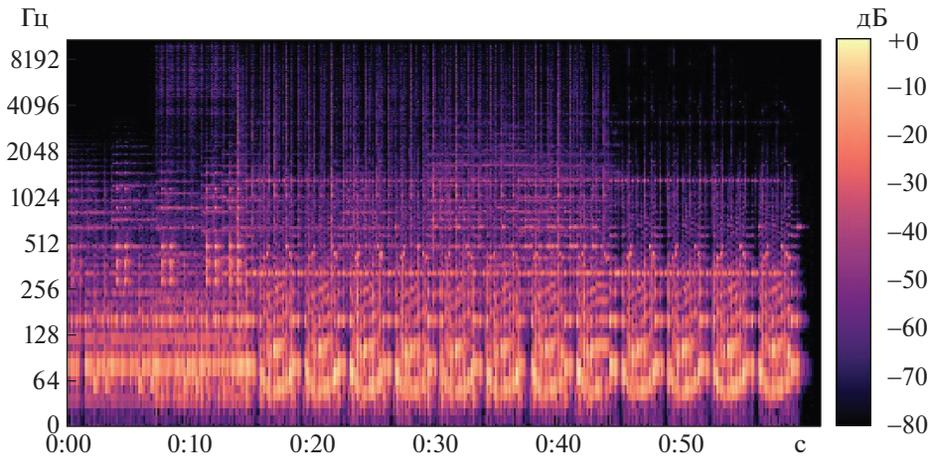


Рис. 2. Пример изображения со спектрограммой аудиофайла

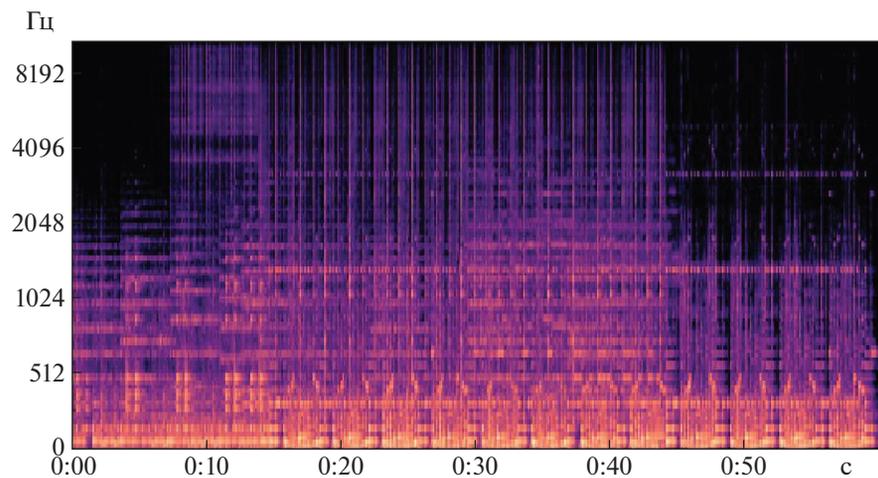


Рис. 3. Пример изображения с мел-спектрограммой аудиофайла

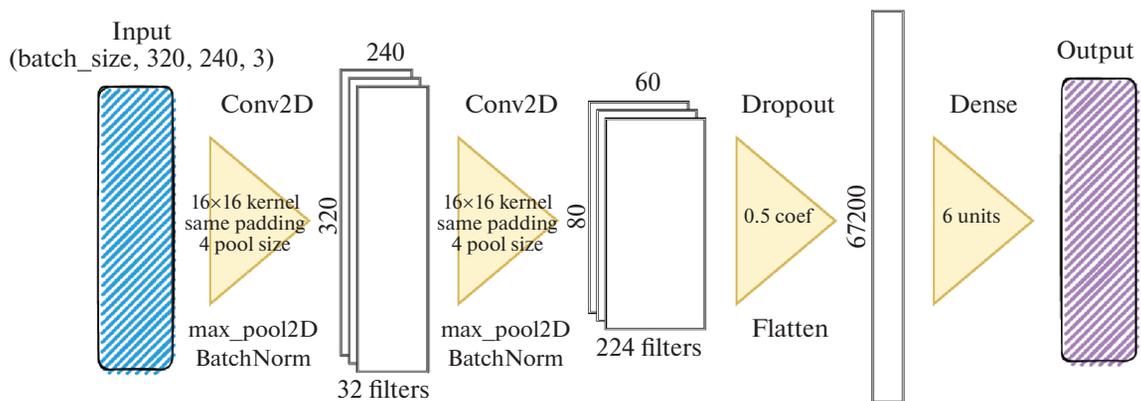


Рис. 4. Архитектура нейронной сети

Посредством библиотеки Keras производится загрузка, нормализация, разделение на обучающую и тестовую выборки, обучение и выбор наилучших моделей, составление матрицы ошибок и классификационного отчета по распознаванию эмоций. В результате тестирований архитектур для обучения нейронной сети с применением методов оптимизации гиперпараметров были получены следующие значения точности валидации (количество правильно распознанных эмоций в валидационной выборке в процентах):

1conv_2blocks – 80.2,
 2conv_blocks – 78.29,
 1conv_3blocks – 72.56,
 2conv_3blocks – 78.81.

По результатам обучения отмечено следующее: сверточные сети, имеющие в своей архитектуре один сверточный слой, показали менее подверженный отклонениям результат по сравнению с сетями, имеющими два сверточных слоя;

Наивысший показатель валидационной точности имеет сеть с архитектурой, представленной на рис. 4:

входной слой (Input),
 два блока, каждый из которых состоит из сверточного слоя, слоя нормализации пакетов (Batch Normalization) и функции активации ReLU,
 слой выброса (Dropout),
 выравнивающий слой (Flatten),
 полносвязный слой (Dense) с функцией активации softmax.

Заключение. К сожалению, на сегодняшний день отсутствуют русскоязычные наборы данных для оценки эффективности представленной системы. Исследование может быть дополнено по факту подготовки таких материалов. В дальнейших исследованиях планируется оценить возможность повышения точности классификации при обогащении аудиосигналов информацией об уровне стресса исследуемых лиц.

В настоящее время проводятся работы с русскоязычными текстами, и по предварительным оценкам точность распознавания эмоций будет более высокой. Рассматривается возможность повышения точности распознавания с добавлением к текущим данным информации об уровне стресса говорящего, которые можно получить при помощи полиграфа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.А., Кирпичников А.П., Ляшева С.А., Шлеймович М.П. Анализ эмоционального состояния человека на изображении // Вестн. технологического ун-та. 2019. Т. 22. № 8. С. 120–123.
2. Заболева-Зотова А.В. Развитие системы автоматизированного определения эмоций и возможные сферы применения // Открытое образование. 2011. № 2. С. 59–62.
3. Люсин Д.В. Современные представления об эмоциональном интеллекте // Социальный интеллект: теория, измерение, исследования / Под ред. Д.В. Люсина, Д.В. Ушакова. М.: Изд-во Ин-та психологии РАН, 2004. С. 29–36.
4. Гранская Ю.В. Распознавание эмоций по выражению лица: Автореф. дис. ... канд. психологических наук по специальности 09.00.01. СПб., 1998.
5. Bhatnagar S., Ghosal D., Kolekar M.H. Classification of Aashion Article Images Using Convolutional Neural Networks // Fourth Intern. Conf. on Image Information Processing (ICIIP). Wagnaghat 2017. P. 1–6. <https://doi.org/10.1109/ICIIP.2017.8313740>.
6. Kim J.W., Salamon J., Li P., Bello J.P. CREPE: A Convolutional Representation for Pitch Estimation // Music and Audio Research Laboratory. N. Y.: Center for Urban Science and Progress, New York University, 2018. URL: <https://arxiv.org/pdf/1802.06182.pdf>
7. Cheveigne A., Kawahara H. YIN, A Fundamental Frequency Estimator for Speech and Music // Ircam-CNRS. Wakayama University, 2002. URL: http://recherche.ircam.fr/equipements/pcm/cheveign/ps/2002_JASA_YIN_proof.pdf
8. Mauch M., Dixon S. PYIN: A Fundamental Frequency Estimator Using Probabilistic Threshold Distributions. London: Queen Mary University of London, Centre for Digital Music, 2014. URL: http://matthias-mauch.de/_pdf/mauch_pyin_2014.pdf
9. Sonmez Y.Ü., Varol A. New Trends in Speech Emotion Recognition // 7th Intern. Sympos. on Digital Forensics and Security (ISDFS). Barcelos 2019. P. 1–7. <https://doi.org/10.1109/ISDFS.2019.8757528>
10. Deng J., Xu X., Zhang Z., Frühholz S., Schuller B. Semisupervised Autoencoders for Speech Emotion Recognition // IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing. V. 26. № 1. P. 31–43. 2018. <https://doi.org/10.1109/TASLP.2017.2759338>
11. Chang J., Scherer S. Learning Representations of Emotional Speech with Deep Convolutional Generative Adversarial Networks // IEEE Intern. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). Toronto. 2017. P. 2746–2750. <https://doi.org/10.1109/ICASSP.2017.7952656>
12. Abdelwahab M., Busso C. Incremental Adaptation Using Active Learning for Acoustic Emotion Recognition // IEEE Intern. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). Toronto. 2017. P. 5160–5164. <https://doi.org/10.1109/ICASSP.2017.7953140>
13. Livingstone S.R., Russo F.A. The Ryerson Audio-Visual Database of Emotional Speech and Song (RAVD ESS): A Dynamic, Multimodal Set of Facial and Vocal Expressions in North American English // PLoS ONE. 2018. V. 13. № 5. С. 1–35.

ОБНОВЛЕНИЕ БИОМЕТРИЧЕСКОГО ШАБЛОНА ПРИ ПОМОЩИ
ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ИСХОДНЫХ ДАННЫХ¹© 2022 г. С. Б. Кубентаева^{a,b}, И. А. Матвеев^{c,*}, И. А. Соломатин^{a,b,**}^aМФТИ, Долгопрудный, МО, Россия^bSamsung R&D Institute Russia, Москва, Россия^cФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: matveev@ccas.ru

**e-mail: ivan.solomatin@phystech.edu

Поступила в редакцию 10.12.2021 г.

После доработки 18.12.2021 г.

Принята к публикации 31.01.2022 г.

Биометрические признаки, используемые в системах распознавания, подвержены старению. Кроме того, возможны вариации условий работы, не учтенные при регистрации пользователя. Поэтому одна из задач, которые необходимо решать при построении универсальной и длительно функционирующей биометрической системы, — обновление биометрического шаблона. Предлагается алгоритм обновления биометрического шаблона, использующий оценку расстояния от предъявленных биометрических признаков до признаков пользователя, зарегистрированных в идеальных условиях. Такая оценка рассчитывается нейросетью, обученной на базе данных с большой вариабельностью условий регистрации. Алгоритм протестирован на системе распознавания по лицу.

DOI: 10.31857/S0002338822030088

Введение. Биометрическое распознавание человека все шире используется в современном мире. Существует множество *биометрических модальностей* — характерных особенностей человека, по которым можно проводить распознавание, например, форма лица, рисунок радужной оболочки глаза, отпечатки пальцев, динамика походки, тембр голоса и т.д. [1]. *Биометрический шаблон* — совокупность числовых признаков, определяемых биометрической системой по данным в одной или нескольких модальностях. Получение данных биометрической системой называется *регистрацией биометрии*. Внесение шаблона и идентификатора пользователя в базу данных называется *регистрацией пользователя*. В дальнейшем при идентификации человека производится регистрация биометрии, создается шаблон и сравнивается с записанным в базе данных. Однако из-за различия условий регистрации, а также, возможно, изменений биометрических характеристик человека распознавание может быть нестабильным [2]. Это в той или иной степени присуще любой биометрической модальности: лицу [3], радужке [4], отпечатку пальца [5] и т.д. Таким образом, одна из задач, которые необходимо решать при построении биометрической системы, — обновление шаблона [6]. Общая схема действий, производимых биометрической системой распознавания, показана на рис. 1. Это позволяет системе подстраиваться под особенности регистрации в различных условиях, а также отслеживать возможные изменения в характеристиках пользователя, что в итоге улучшает точность распознавания [7].

1. Алгоритмы обновления шаблонов. Существует множество различных алгоритмов обновления биометрического шаблона [8]. Простейший вариант — добавлять признаки всех новых регистраций, принятых системой. Однако размер шаблона ограничен объемом используемой памяти и временем, отводимым для сравнения. Предпринимались попытки создавать комбинированные шаблоны путем усреднения [9]. Однако они не получили большого развития, поскольку пространство биометрических признаков не является линейным и даже может не быть замкнутым относительно операции сложения или усреднения. В общем случае в пространстве биометрических признаков доступна только операция определения расстояния $\rho(\vec{a}, \vec{b})$ между его

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 19-31-90171, 20-01-00609).

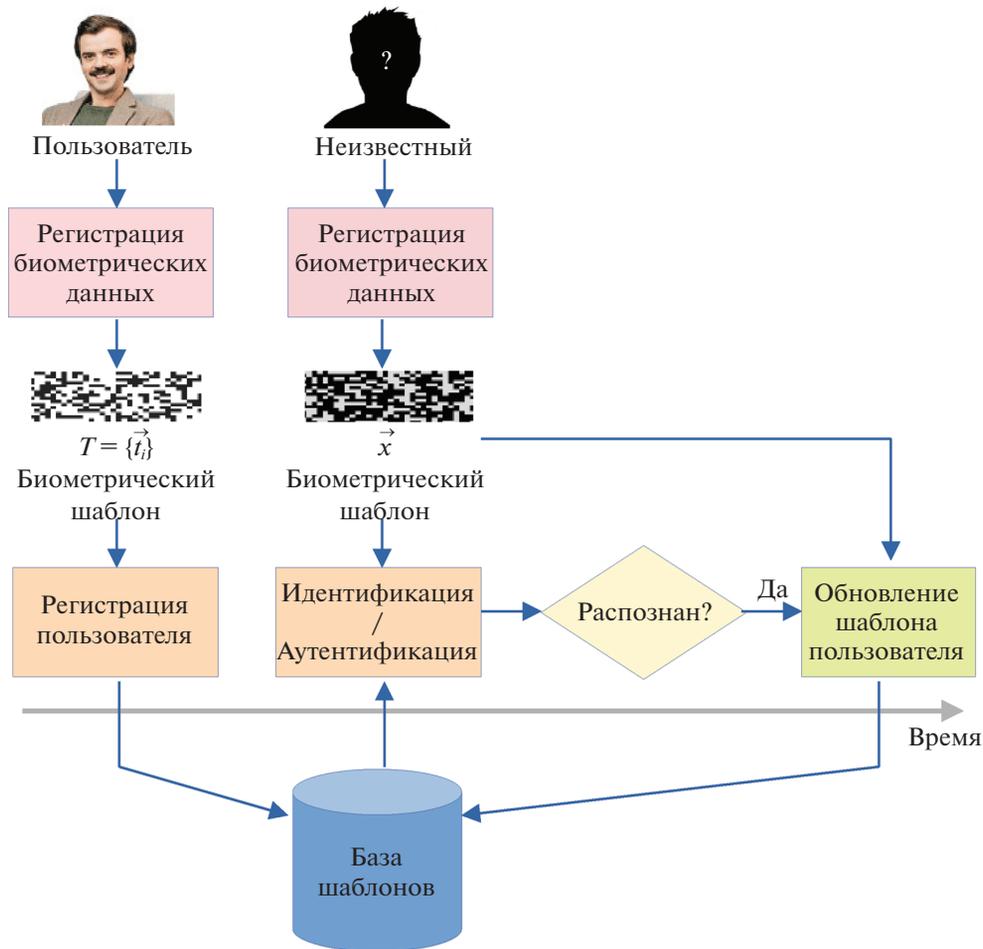


Рис. 1. Схема действий биометрической системы

элементами \vec{a} и \vec{b} . Далее, в соответствии с установившейся терминологией, будем называть наборы биометрических признаков (элементы пространства биометрических признаков) *векторами*, хотя они не образуют векторного пространства.

Обновление шаблонов обычно происходит с помощью замены старых векторов на полученные в последующих регистрациях. Выбор заменяемого вектора может осуществляться различными способами [10]: Random, Naive, FIFO, LFU. Эти алгоритмы обладают значимым недостатком: они неустойчивы к так называемому “отравлению шаблона” [11] – процедуре, с помощью которой злоумышленник может испортить шаблон таким образом, чтобы система принимала его вместо настоящего пользователя. Данная процедура воспроизводима только в случае, если у злоумышленника есть большое число попыток доступа и информация о внутреннем устройстве системы. Однако даже такая угроза компрометации считается недопустимой.

Существуют методы, которые выбирают для добавления наиболее подходящие векторы по некоторому критерию, и по этому же критерию выбирают удаляемые [12]. Примером такого алгоритма является MDIST. Изначально MDIST был описан как алгоритм генерации шаблона, т.е. выбора подмножества векторов, полученных при регистрации, которые включаются в шаблон [13]. В пространстве биометрических признаков векторы, соответствующие одному человеку, лежат в области относительно небольшого диаметра. Векторы, полученные системой при регистрации, составляют кластер внутри этой области. Предполагается, что центр области образуют признаки, полученные при хороших условиях регистрации, а центроид кластера при достаточно большом числе элементов близок к центру области. Метод MDIST выбирает N век-

торов из общего числа M таким образом, чтобы минимизировать среднее взаимное расстояние между ними:

$$(n_1, \dots, n_N) = \arg \min_{i_1, \dots, i_N \in \{1, \dots, M\}} \sum_{j \in (i_1, \dots, i_N)} \rho(\vec{t}_i, \vec{t}_j), \quad (1.1)$$

где \vec{t}_i – вектор признаков, входящий в шаблон. Если изначальный набор обладает большой вариабельностью, выбранное подмножество будет находиться в окрестности центра кластера, соответствующего пользователю.

В [10] предложено использовать MDIST как алгоритм обновления шаблона. Выказано предположение о том, что в длительной перспективе (при большом количестве полученных системой признаков) шаблон сведется к множеству векторов, которое имеет малый диаметр и расположено в окрестности центра кластера, соответствующего пользователю. Однако если признаки, полученные при начальной регистрации, недостаточно вариабельны и находятся в удалении от центра области, такой процесс займет длительное время. Возможно даже, что шаблон сойдется в удалении от истинного центра кластера, что приведет к снижению точности распознавания.

Другим алгоритмом, выбирающим элементы шаблона, является DEND [13], который проводит кластеризацию всех имеющихся векторов признаков и внутри каждого кластера выбирает центроид с помощью алгоритма MDIST. Данный метод также подвержен опасности “отравления шаблона”.

Существуют графовые методы отбора признаков. Например, в [14] предлагается строить по шаблону взвешенный граф, в котором вес ребра равен расстоянию между векторами \vec{t}_i . Для выбора элементов, которые будут добавлены в шаблон, производится разделение графа на две части минимальным разрезом.

В данной работе предлагается алгоритм, который аналогично MDIST [10] при регистрации нового вектора и выполнении некоторых условий заменяет им один из старых векторов шаблона. Однако решение о замене и выбор заменяемого вектора осуществляется не процедурой (1.1), а при помощи оценки качества исходных данных. При сделанных предположениях качество исходных данных может служить оценкой расстояния до центра области пространства признаков, принадлежащей пользователю. Алгоритм протестирован в применении к распознаванию по лицу.

2. Постановка задачи. Будем описывать алгоритм применительно к аутентификации по лицу. Допустим, что у системы имеется один *Пользователь*. Задача системы – на каждом предъявленном изображении проверять, представлен на нем Пользователь или другой человек. Имеется фиксированный алгоритм извлечения признаков (FE – feature extraction), который переводит изображение в вектор признаков таким образом, что расстояние ρ между векторами, соответствующими одному человеку, мало, а разным людям – велико. При регистрации Пользователя создается его шаблон T – набор векторов признаков, полученных при регистрации биометрии:

$$T = \{\vec{t}_i\}_{i=1}^N. \quad (2.1)$$

Расстоянием от вектора признаков \vec{x} до шаблона считается расстояние от вектора до ближайшего элемента шаблона:

$$\rho(\vec{x}, T) = \min_i \rho(\vec{x}, \vec{t}_i). \quad (2.2)$$

При верификации входное изображение I сначала переводится в вектор признаков: $\vec{x} = FE(I)$. Решение о том, Пользователь на изображении или другой человек, выносится на основании расстояния от \vec{x} до шаблона в сравнении с некоторым порогом θ :

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x}, T) \leq \theta &\rightarrow \text{на изображении Пользователь,} \\ \rho(\vec{x}, T) > \theta &\rightarrow \text{на изображении другой человек.} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Точность распознавания системы обычно оценивается варьированием порога θ и оценкой долей ложноположительных (FPR) и ложноотрицательных (FNR) результатов на наборе данных при различных значениях порога. В работе используются следующие меры качества алгоритма:

1) E_{-4} – величина FNR при $FPR = 10^{-4}$, т.е. доля ложноотрицательных результатов при фиксированном пороге, обеспечивающем долю ложноположительных результатов, равную 10^{-4} . В литературе распространено обозначение $FNR@FPR = 10^{-4}$;

- 2) $E_{-5} = FNR@FPR = 10^{-5}$;
- 3) $E_{-6} = FNR@FPR = 10^{-6}$;
- 4) $E_{-7} = FNR@FPR = 10^{-7}$.

Обновление шаблона методом типа MDIST заключается в добавлении нового вектора признаков \vec{x} вместо одного из старых (\vec{t}_j), если выполняется некоторое условие U :

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \sum_{i,j=1}^N \rho(\vec{t}_i, \vec{t}_j), \\
 P_k &= \sum_{i,j=1}^N \rho(\vec{t}_i^{(k)}, \vec{t}_j^{(k)}), \\
 \vec{t}_i^{(k)} &= \begin{cases} \vec{x}, & \text{если } k = i, \\ \vec{t}_i & \text{иначе,} \end{cases} \\
 q &= \arg \max_k P_k, \\
 T' &= \begin{cases} \{\vec{x}\} \cup T \setminus \{\vec{t}_q\}, & U - \text{истинно,} \\ T & \text{иначе.} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

В качестве U в работе используется условие $\rho(\vec{x}, T) < \theta_{update}$, где порог соответствует распознаванию с ошибкой E_{-7} . Таким образом, один из старых векторов шаблона заменяется на новый, только если тот дает распознавание Пользователя с высокой уверенностью.

3. Предлагаемый метод. Расстояние $d = \rho(FE(I), \vec{c})$ от вектора признаков лица на изображении до центра кластера не может быть рассчитано непосредственно, но при этом является функцией изображения I . В данной работе предлагается обучить нейронную сеть, преобразующую это расстояние по изображению. Используется предположение, что алгоритмы FE переводят в центроид кластера изображения высокого качества, которые лучше всего поддаются распознаванию. Для лиц – это центрированные изображения с хорошим освещением. По краям кластера располагаются низкокачественные изображения – в экстремальных позах, с плохим освещением, неточно сегментированные. Данное предположение подтверждается при анализе набора данных [15] (*Extended Yale Face Database B*). Таким образом можно воспринимать расстояние d как показатель качества исходных данных, значение ноль соответствует наивысшему качеству (некоторому идеальному изображению Пользователя). Примеры изображений из данного набора с различными d приведены на рис. 2.

3.1. Алгоритм обновления шаблона. Рассчитав для каждого полученного системой изображения расстояние d , его можно хранить вместе с соответствующим шаблоном, формально записав как $d(\vec{t}_i)$. Обновление шаблона предлагается проводить так, чтобы минимизировать суммарное d в шаблоне:

$$\sum_{i \in T} d(\vec{t}_i) \rightarrow \min. \tag{3.1}$$

Процедура (2.4) становится формально более простой:

$$\begin{aligned}
 q &= \arg \max_k d_k, \\
 T' &= \begin{cases} \{\vec{x}\} \cup T \setminus \{\vec{t}_q\}, & U - \text{истинно,} \\ T & \text{иначе.} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Таким образом, проблема сводится к построению наилучшего метода оценки d по изображению. Предлагается использовать для этого нейросеть, обученную на корпусе данных.

3.2. Подготовка данных для обучения нейронной сети. В качестве архитектуры применяется модификация популярной сети LeNet [16]. Архитектура приведена в табл. 1. На вход сети подаются те же изображения, что подаются на вход алгоритму FE. Результат последнего полносвязного слоя после функции активации – предсказание искомого параметра d .

Для обучения и тестирования взята база изображений [15]. Эта база выбрана, поскольку она предоставляет большое количество изображений (до 585) на каждого пользователя, а изображения имеют высокую вариабельность условий освещения и углов поворота лиц.

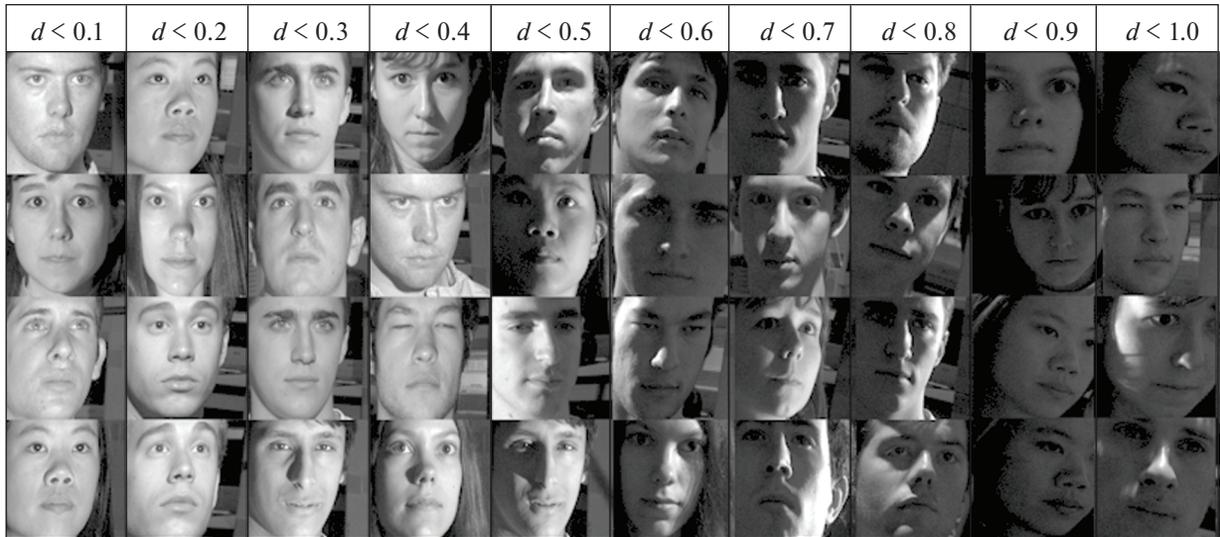


Рис. 2. Примеры изображений с различными d из базы данных

Для подготовки данных необходим набор изображений $J = \{I_i\}$, подающихся на вход алгоритму FE, а также идентификатор пользователя для каждого изображения $\{v_i\}_{i=1}^{|J|}$. По всему набору изображений J рассчитываются векторы признаков:

$$X = \{\bar{x}_i\}_{i=1}^{|J|}, \quad \bar{x}_i = \text{FE}(I_i). \quad (3.3)$$

Далее признаки группируются по идентификаторам пользователей на соответствующих изображениях; для пользователя с номером k

$$X_k = \{\bar{x}_i \mid v_i = k\}. \quad (3.4)$$

Таблица 1. Архитектура нейронной сети для оценки расстояния d

Слой	Параметр	Размер выхода
Input		$1 \times 142 \times 142$
Conv 3×3	Stride = 2	$4 \times 70 \times 70$
ReLU		$4 \times 70 \times 70$
Conv 3×3	Stride = 2	$8 \times 34 \times 34$
ReLU		$8 \times 34 \times 34$
Conv 3×3	Stride = 2	$16 \times 7 \times 7$
ReLU		$16 \times 7 \times 7$
Conv 3×3	Stride = 2	$16 \times 3 \times 3$
ReLU		$16 \times 3 \times 3$
Conv 3×3	Stride = 2	$16 \times 1 \times 1$
ReLU		$16 \times 1 \times 1$
DropOut	Rate = 0.7	$16 \times 1 \times 1$
FullyConnected		$32 \times 1 \times 1$
ReLU		$32 \times 1 \times 1$
DropOut	Rate = 0.7	$32 \times 1 \times 1$
FullyConnected		$1 \times 1 \times 1$
Sigmoid		$1 \times 1 \times 1$

Таблица 2. Результаты тестирования сети на тестовом и валидационном наборе данных

Мера	Выборка	
	валидационная	тестовая
MAE (mean average error)	0.09	0.08
Доля изображений, на которых d предсказано с ошибкой ≤ 0.1	0.68	0.70
Доля изображений, на которых d предсказано с ошибкой ≤ 0.2	0.98	0.96
Доля изображений, на которых d предсказано с ошибкой ≤ 0.4	0.999	0.998

Таблица 3. Ошибка алгоритма распознавания по лицу с использованием различных алгоритмов обновления шаблона

Мера	Без обновления	MDIST [13]	Предлагаемый
E_{-4}	0.017	0.020	0.015
E_{-5}	0.076	0.025	0.018
E_{-6}	0.260	0.029	0.019
E_{-7}	0.300	0.033	0.019

Затем для каждого пользователя определяется центроид кластера:

$$\bar{c}_k = \arg \min_{\bar{c} \in X_k} \sum_{\bar{x} \in X_k, \bar{x} \neq \bar{c}} \rho(\bar{c}, \bar{x}). \tag{3.5}$$

С помощью центроида можно оценить целевое значение d для каждого изображения. Для того, чтобы исключить возможную разницу в размерах кластеров для разных пользователей, полученное d нормируется на максимальное значение для каждого кластера:

$$d_i = \frac{\rho(x_i, c_{v_i})}{\max_{x \in X_{v_i}} \rho(x, c_{v_i})}. \tag{3.6}$$

4. Численные эксперименты. В качестве алгоритма FE для оценки предлагаемого алгоритма применена реализация [17], находящаяся в открытом доступе [18] (модель “buffalo_s”). Набор данных взят из открытой базы [15].

Обучающий, валидационный и тестовый наборы данных содержат соответственно 5017, 3281 и 8433 изображений. Изображения каждого пользователя входят лишь в один из наборов, чтобы исключить возможность переобучения на конкретные лица. Обучение проводилось с помощью алгоритма градиентного спуска Adam [19] в течение 20 эпох.

Меры качества на тестовом и валидационном наборах по результатам обучения приведены в табл. 2.

4.1. Алгоритм обновления шаблона. Для тестирования работы алгоритма обновления шаблона на тестовом наборе данных рассчитана точность работы системы распознавания при различных алгоритмах обновления шаблона. Так как используемый алгоритм FE обладает крайне высокой точностью на данных [15], для регистрации каждого пользователя не задействованы вектора, которые лежат в окрестности центра кластера:

$$d_i < 0.4. \tag{4.1}$$

Таким образом имитируется ситуация, в которой на этапе регистрации изображение лица может быть недостаточно качественным.

Из изображений, не удовлетворяющих условию (4.1), для каждого пользователя u случайным образом выбиралось 10 изображений, которые составляли изначальный шаблон для распознавания. Далее системе на вход подавались остальные изображения пользователя u , затем – все

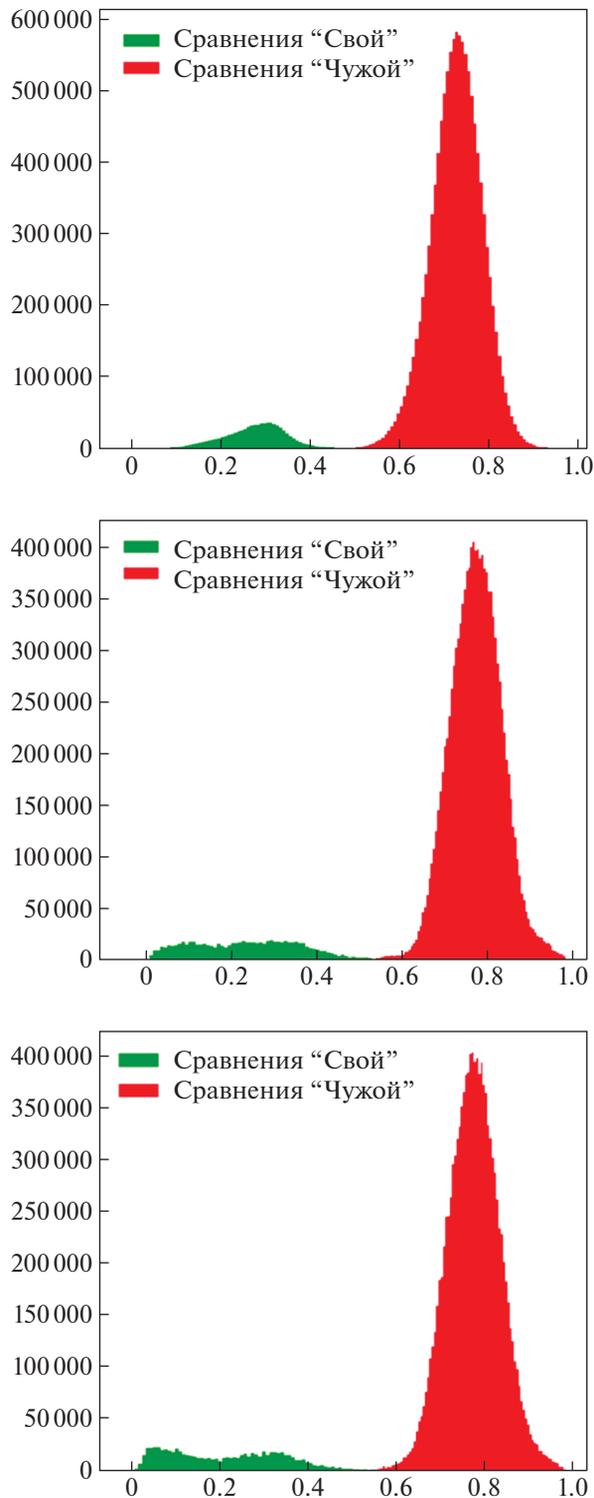


Рис. 3. Распределения попарных расстояний при распознавании шаблона, полученного: *a* – без обновления, *б* – алгоритмом MDIST [13], *е* – предлагаемым алгоритмом

изображения других пользователей. Для каждого изображения, поданного на вход, также выполнялась процедура (3.2). Эта процедура выполнялась 100 раз для каждого пользователя, чтобы оценить работу алгоритма при различных выборах начального шаблона. По распределению полученных в результате процедуры попарных расстояний оценивались FNR при различных FPR в соответствии с мерами 1–4.

В табл. 3 приведены значения мер качества, полученных с помощью вышеописанной процедуры на основе модели “buffalo_s” реализации [18] алгоритма [17] для трех случаев: без обновления шаблона, с обновлением алгоритмом MDIST и с обновлением предлагаемым методом. На рис. 3 приведены соответствующие гистограммы распределений попарных расстояний, полученных в ходе тестов. Расстояния, нормированные на диапазон [0; 1], задают ось абсцисс. По оси ординат отложены количества сравнений с таким расстоянием.

Заключение. Предложен алгоритм обновления биометрического шаблона, развивающий идею MDIST. Однако для определения заменяемого элемента шаблона используется метрика – расстояние до признаков, полученных в идеальных условиях, которая вычисляется с помощью нейронной сети. Этот подход показал высокое качество на валидационном множестве, применение данного алгоритма в системе распознавания по лицу дало снижение ошибки распознавания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jain A.K., Ross A.* Introduction to Biometrics / Eds A.K. Jain, P. Flynn, A. Ross. Handbook of Biometrics. Springer, 2008. P. 1–22. ISBN 978-0-387-71040-2.
2. *Lantinis A.* A Survey of the Effects of Aging on Biometric Identity Verification // Intern. J. Biometrics. 2010. V. 2. № 1. P. 34–52.
3. *Ramanathan N., Chellappa R.* Face Verification Across Age Progression // IEEE Trans. Image Processing. 2006. V. 15. № 11. P. 3349–3361.
4. *Czajka A.* Template Ageing in Iris Recognition // Proc. Intern. Conf. Bio-inspired Systems and Signal Processing. Barcelona, Spain, 2013. P. 70–78.
5. *Kirchgasser S., Uhl A.* Template Ageing in Non-minutiae Fingerprint Recognition // Proc. 5th Intern. Workshop Biometrics and Forensics. Coventry, UK, 2017. P. 1–5.
6. *Hasse G., Wolf A.* Data Quality, Interoperability, Biometrics Fusion, and Template Ageing: Challenges for ePassports // Proc. Biometric Consortium Conf. Arlington, VA, USA, 2005.
7. *Carls J., Raines R., Grimaila M., Rogers S.* Biometric Security Enhancements Through Template Aging Matching Score Analysis // Proc. 3rd Intern. Conf. Information Warfare and Security. Omaha, NE, USA, 2008.
8. *Гнеушев А.Н., Ковков Д.В., Мамвеев И.А., Новик В.П.* Оптимизация выбора биометрического эталона из последовательности // Изв. РАН. ТИСУ. 2015. № 3. С. 72–78.
9. *Hollingsworth K., Bowyer K., Flynn P.* Image Averaging for Improved Iris Recognition / Eds M. Tistarelli, M. Nixon. Lecture Notes in Computer Science. Advances in Biometrics. V. 5558. P. 1112–1121. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. P. 1112–1121.
10. *Freni B., Marcialis G.L., Roli F.* Replacement Algorithms for Fingerprint Template Update // Intern. Conf. Image Analysis and Recognition. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. P. 884–893.
11. *Lovisotto G., Eberz S., Martinovic I.* Biometric Backdoors: A Poisoning Attack Against Unsupervised Template Updating // Proc. IEEE European Sympos. Security and Privacy. Genova, Italy, 2020. P. 184–197.
12. *Marcialis G.L., Rattani A., Roli F.* Biometric Template Update: An Experimental Investigation on the Relationship between Update Errors and Performance Degradation in Face Verification / Eds N. da Vitoria Lobo, T. Kasparis, F. Roli et al. Structural, Syntactic, and Statistical Pattern Recognition. Lecture Notes in Computer Science. V. 5342. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008.
13. *Uludag U., Ross A., Jain A.* Biometric Template Selection and Update: a Case Study in Fingerprints // Pattern Recognition. 2004. V. 37. № 7. P. 1533–1542.
14. *Rattani A., Marcialis G.L., Roli F.* Biometric Template Update Using the Graph Mincut Algorithm: A Case Study in Face Verification // Proc. IEEE Biometrics Sympos. Tampa, FL, USA, 2008. P. 23–28.
15. *Georgiades A.S., Belhumeur P.N., Kriegman D.J.* From Few to Many: Illumination Cone Models for Face Recognition under Variable Lighting and Pose // IEEE TPAMI. 2001. V. 23. № 6. P. 643–660.
16. *LeCun Y., Boser B., Denker J.S. et al.* Handwritten Digit Recognition with a Back-propagation Network // Advances in Neural Information Processing Systems. 1989. V. 2.
17. *Chen S., Liu Y., Gao X., Han Zh.* Mobilefacenets: Efficient CNNs for Accurate Real-time Face Verification on Mobile Devices // Proc. Chinese Conf. Biometric Recognition. Cham: Springer, 2018. P. 428–438.
18. InsightFace: 2D and 3D Face Analysis Project. URL: <https://github.com/deepinsight/insightface> (дата обращения: 08.11.2021).
19. *Kingma D.P., Ba J.* Adam A Method for Stochastic Optimization // arXiv preprint arXiv:1412.6980. 2014.

**СЛОЖНЫЕ ТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ
И ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩИЕ КОМПЛЕКСЫ**

УДК 681.746.3

**ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА
УПРАВЛЕНИЯ ПОЛЕЗНОЙ НАГРУЗКОЙ БЕСПИЛОТНОГО
ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА¹****© 2022 г. О. В. Ермолин^а, С. М. Мужичек^а, В. И. Павлов^{б,*},
Г. Г. Себряков^а, А. А. Скрынников^{а,с}**^аГосударственный научно-исследовательский ин-т авиационных систем, Москва, Россия^бТамбовский государственный технический ун-т, Тамбов, Россия^сЦНИИ ВВС Минобороны России, Москва, Россия^сМАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

*e-mail: vpavl@mail.ru

Поступила в редакцию 29.12.2021 г.

После доработки 19.01.2022 г.

Принята к публикации 31.01.2022 г.

Указаны особенности управления полезной нагрузкой на примере беспилотного летательного аппарата, оборудованного бортовой радиолокационной станцией, при его непосредственном сближении с малоразмерным высокоскоростным и маневрирующим воздушным объектом. Разработаны алгоритмы, используемые при управлении полезной нагрузкой, применение которых позволяет определить положение воздушного объекта и его ракурс, а также величину промаха беспилотного летательного аппарата. Приведен алгоритм определения величины времени задержки на срабатывание полезной нагрузки беспилотного летательного аппарата.

DOI: 10.31857/S0002338822030052

Введение. Важной частью практических задач, решаемых современными беспилотными летательными аппаратами (БПЛА), является своевременная доставка полезной нагрузки (элементов полезной нагрузки) на воздушные (ВО) и иные объекты. В зависимости от метода управления и решаемых задач современные БПЛА оснащаются для этого различными типами информационно-измерительных систем (ИИС) – телевизионными, радиолокационными, инфракрасными и др. [1]. При этом для ряда ВО доставка полезной нагрузки в настоящее время затруднительна из-за их малых размеров, высокой скорости движения, маневрирования на траектории.

Для эффективной доставки полезной нагрузки на малоразмерные и высокоскоростные ВО ИИС БПЛА должна обеспечивать возможность определения на траектории его движения, наряду с традиционными, ряд дополнительных параметров, а именно:

положение выбранного объекта по отношению к БПЛА, в том числе при минимальных расстояниях между ними, а также в момент ослепления ИИС БПЛА;

величину промаха БПЛА относительно ВО на траектории, а также в момент ослепления ИИС БПЛА;

величину ракурса ВО на траектории, а также в момент ослепления ИИС БПЛА.

Знание вышеуказанных параметров позволяет определять величину параметра управления полезной нагрузкой БПЛА – времени задержки на срабатывание.

Далее рассмотрим, каким образом ИИС БПЛА может определять положение выбранного объекта по отношению к БПЛА, величину промаха БПЛА относительно ВО, а также величину ракурса ВО.

1. Постановка задачи. Пусть БПЛА представляет собой летательный аппарат, ИИС которого состоит из: навигационной системы; измерителей положения БПЛА относительно центра

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 20-08-00091 а; 19-08-00487 а; 19-08-00502 а; 19-29-06077 мк).

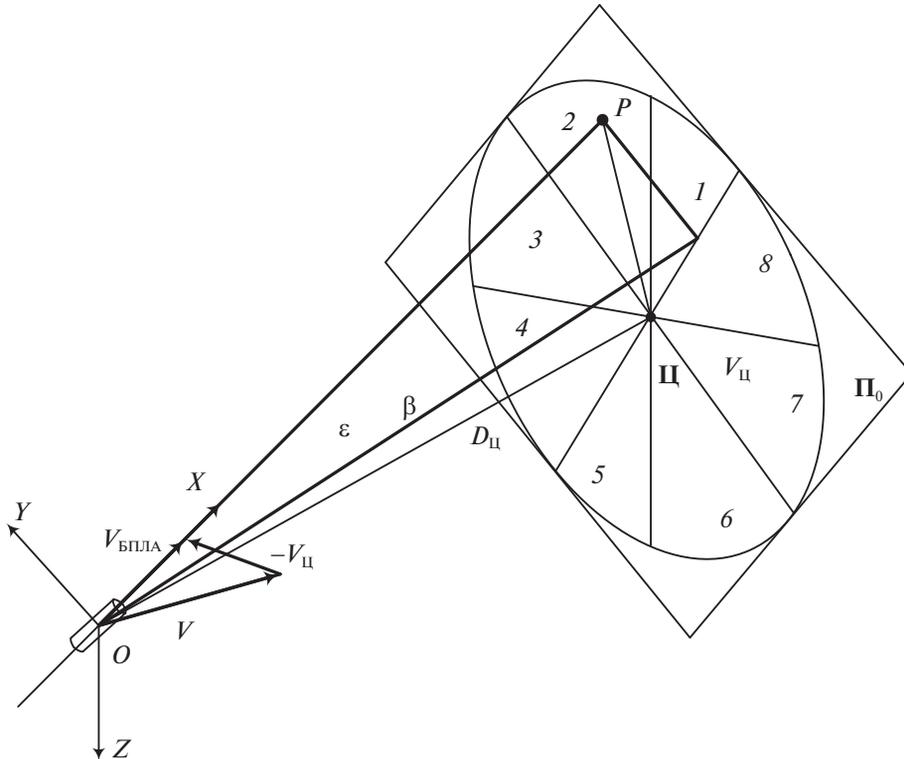


Рис. 1. Схема относительного положения БПЛА и ВО в момент t_0 ослепления БРЛС

массы; бортовой радиолокационной станции (БРЛС), реализующей активный вид радиолокации с пассивным ответом; бортовой цифровой электронно-вычислительной машины (БЦВМ) [1]. БПЛА в процессе самонаведения сближается с маневрирующим ВО по методу пропорциональной навигации. В БЦВМ формируются оценки фазовых координат, необходимых для реализации самонаведения БПЛА. Схема относительного положения БПЛА и ВО (цели) в момент t_0 ослепления БРЛС показана на рис. 1 [2]. На рисунке обозначено: O , Π – соответственно центры масс БПЛА и ВО; $OXYZ$ – связанная система координат БПЛА; $V_{\text{БПЛА}}$, $V_{\text{Ц}}$, V – скорости соответственно БПЛА, ВО и взаимного сближения; $D_{\text{Ц}}$ – дальность до ВО; β , ε – соответственно азимут и угол места ВО; Π_0 – картинная плоскость ВО; P – точка промаха; $1-8$ – номера секторов.

Пусть в момент времени t_0 БПЛА и ВО движутся со скоростями $V_{\text{БПЛА}}$ и $V_{\text{Ц}}$ соответственно, V – взаимная скорость сближения, $D_{\text{Ц}}$ – дальность до объекта. БРЛС в составе ИИС БПЛА реализует измерения вектора фазовых координат относительного положения объекта до момента t_0 по варианту $X = [\beta \ \varepsilon \ \omega \ D_{\text{Ц}} \ V \ \gamma \ \psi \ \theta]^T$, где β , ε – азимут и угол места цели; ω – угловая скорость линии визирования; $D_{\text{Ц}}$, V – дальность и скорость сближения с ВО; γ , ψ , θ – углы крена, рыскания и тангажа. БПЛА стабилизирован по крену.

В связи с тем, что определение промаха выполняется в интересах полезной нагрузки, которая, как правило, конструктивно ориентирована по продольной оси БПЛА, картинная плоскость ВО Π_0 (см. рис. 1) принята перпендикулярной оси OX , их пересечение обозначено через P . В плоскости Π_0 формируется круг с центром в точке Π – пересечение картинной плоскости линией визирования ВО БРЛС. Радиус круга принят равным максимально допустимому промаху БПЛА мимо объекта наведения (на рис. 1 не обозначен). Круг разбит на L одинаковых секторов, количество которых является удовлетворительным для определения радиального направления на ВО. На борту БПЛА требуется найти радиальное направление на объект, величину промаха в текущий момент времени, величину ракурса объекта в текущий момент времени.

2. Алгоритм определения радиального направления на ВО. В [2] предложен метод нахождения радиального направления на ВО, сущность которого заключается в вычислении вероятностей нахождения точки промаха P в текущий момент времени в каждом из секторов картинной плос-

кости объекта. Данные вероятности вычисляются на основании измерений вектора фазовых координат БПЛА, а также относительного положения ВО и БПЛА. Соответствующий предложенному методу алгоритм вычисления вероятностей нахождения точки промаха P в каждом из секторов картинной плоскости объекта имеет следующий вид:

$$\hat{p}_k(l) = \frac{\tilde{p}_k(l) \exp[-0.5h_k(\hat{x}_i)]}{\sum_{l=1}^L \tilde{p}_k(l) \exp[-0.5h_k(\hat{x}_i)]}, \quad i = \overline{1, I}, \quad (2.1)$$

$$\tilde{p}_k(l) = \sum_{l_{k-1}=1}^L q(l_k | l_{k-1}) \hat{p}_{k-1}(l_{k-1}), \quad k = \overline{1, K}, \quad (2.2)$$

$$h_k(\hat{x}_i) = \sum_{l=1}^L h_i^{(l)}(\hat{x}_i), \quad (2.3)$$

$$h_i^{(l)}(\hat{x}_i) = \frac{(\hat{x}_i - m_i(l))^2}{\hat{D}_{xi}}, \quad i = \overline{1, I}. \quad (2.4)$$

Здесь $\hat{p}_k(l)$, $\tilde{p}_k(l)$ – соответственно апостериорная и прогнозируемая вероятности нахождения точки промаха в l -м секторе в k -й момент времени; $q(l_k | l_{k-1})$ – коэффициент прогнозирования изменения положения точки промаха при наличии дополнительной информации о последовательности смены секторов; \hat{x}_i – оценка измеренного значения i -й фазовой координаты относительного положения БПЛА и ВО в текущий момент времени; $m_i(l)$ – математическое ожидание (“центр тяжести”) l -го сектора по i -й фазовой координате; \hat{D}_{xi} – оценка дисперсии измерений i -й фазовой координаты; I – количество измеряемых фазовых координат, используемых при определении радиального направления на ВО; функции $h_i^{(l)}(\hat{x}_i)$, $h_k(\hat{x}_i)$ характеризуют соответственно величину отклонения оценки i -й фазовой координаты и общее отклонение линии визирования БРЛС по показаниям применяемых измерителей от центра тяжести l -го сектора.

Номер сектора, где в текущий момент времени находится точка промаха P , задается по критерию максимума апостериорной вероятности

$$\hat{l}_k = \arg \max_{l=1, L} \hat{p}_k(l). \quad (2.5)$$

В [3] приведен вариант детализации картинной плоскости ВО при реализации разработанного метода определения радиального направления на объект, найдены взаимосвязи фазовых координат, используемых в алгоритме вычисления вероятностей нахождения точки промаха в каждом из секторов картинной плоскости объекта. Посредством имитационного моделирования показана пригодность разработанного алгоритма (2.1)–(2.5) для оперативного определения направления на объект в интересах полезной нагрузки БПЛА.

3. Алгоритм определение величины промаха. За основу процедуры определения величины промаха – отрезка ЦР на рис. 1 примем метод, описанный в [4]:

$$pr = \frac{D_{\Pi}^2}{V} \omega, \quad (3.1)$$

где pr – величина промаха; $V = -\dot{D}_{\Pi}$, а угловая скорость ω линии визирования определяется из решения векторного уравнения $\vec{\omega} = \vec{\beta} + \vec{\varepsilon}$; $\omega = |\vec{\omega}|$ ($\vec{\omega}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\varepsilon}$ – векторы угловой скорости линии визирования, азимута и угла места цели).

Текущий, т.е. определяемый в текущий момент времени, промах является случайной величиной, так как зависит от случайных возмущений, действующих на БПЛА и его систему управления в процессе полета к ВО. Учитывая то, что БПЛА стабилизирован по крену и рассеивание в картинной плоскости ВО можно считать круговым, оценку текущего промаха достаточно получить для одного канала. Определение величины промаха в БЦВМ БПЛА можно рассматривать на примере одной плоскости – азимутальной. Полученные результаты легко обобщаются на пространственный случай путем векторного сложения с результатами для угломестной плоскости.

В БЦВМ современных БПЛА, наводимых по методу пропорциональной навигации, оценки фазовых координат, входящих в формулу (3.1), формируются на выходах соответствующих фильтров, синтезированных для ожидаемых усредненных условий применения. Данные оценки принципиально могут быть использованы для определения величины промаха по формуле (3.1).

Несоответствие моделей состояния и измерения реальным условиям, складывающимся при сближении БПЛА с объектом, приводит к понижению точности оценивания фазовых координат и соответственно к понижению точности определения величины промаха. При этом на борту БПЛА в интересах полезной нагрузки необходимо учитывать ряд особенностей при сближении БПЛА и ВО на малые дальности. В [4, 5] получены приближенные аналитические формулы и подробно исследована точность пропорционального наведения БПЛА в различных тактических ситуациях. Показано, что точность самонаведения сильно зависит от условий применения, маневренных характеристик объектов и помех. В [6, 7] разработаны методики для приближенного анализа динамической и флуктуационной составляющих промаха БПЛА с радиолокационной головкой самонаведения. Формулы соответственно для динамической pr_d и флуктуационной pr_ϕ составляющих промаха в момент окончания самонаведения имеют вид

$$pr_d = \frac{j_{\text{ц}} D_{\text{ц}}^2}{V^2 (K_{\text{ИВС}} K_{\text{СР}} - 2)}, \quad (3.2)$$

$$D_{pr} = \frac{G_{\omega} K_1^2 N_0^2 K_V^2 K_{\text{СР}}^4 D_{\text{ц}}^4 \Delta F_{\phi}}{V^2 (K_1 N_0 K_V K_{\omega} K_{\text{СР}} - 2)^2}, \quad (3.3)$$

где D_{pr} – дисперсия промаха pr_ϕ ; $j_{\text{ц}}$ – ускорение ВО; $K_{\text{ИВС}}$, $K_{\text{СР}}$, K_1 , K_V , K_{ω} – соответственно коэффициенты передачи информационно-вычислительной системы (ИВС) БПЛА, системы “система управления БПЛА – БПЛА”, системы формирования сигнала рассогласования в соответствии с методом наведения, измерителя скорости сближения, угломера при оценивании угловой скорости линии визирования. Здесь также G_{ω} – спектральная плотность шума оценки угловой скорости линии визирования; ΔF_{ϕ} – эффективная полоса пропускания системы самонаведения по угловому шуму; N_0 – навигационный параметр метода наведения. Формулы (3.2) и (3.3) демонстрируют весьма сложную зависимость характеристик промаха БПЛА как от параметров системы самонаведения, так и от условий применения. В случае если БЦВМ БПЛА обладает достаточным ресурсом, то может быть реализован один из возможных вариантов повышения точности определения величины промаха.

Повышение точности определения величины промаха БПЛА. Вариант. Особенностью функционирования БРЛС БПЛА является ее “ослепление” при сближении с ВО на некоторую относительно малую дальность D_k и неспособность выполнять свои функции по назначению в процессе дальнейшего сближения. Основная причина “ослепления” БРЛС с моноимпульсным угломером – так называемый угловой шум [8]. При малых расстояниях, когда угловые размеры ВО соизмеримы с шириной диаграммы направленности антенны БРЛС, угловой шум может привести к ошибкам пеленгации и достаточно большим ошибкам оценивания угловой скорости линии визирования. Также к значительным ошибкам оценивания угловой скорости линии визирования по мере уменьшения дальности до ВО приводит преломление волн в обтекателе антенны БРЛС. При изменении угловой скорости антенны относительно продольной оси БПЛА возникает так называемая скоростная ошибка обтекателя, увеличивающаяся по мере увеличения угловой скорости антенны.

В [7] приведены алгоритмы фильтрации для получения оценок фазовых координат относительно положения БПЛА и ВО, используемых при реализации метода самонаведения. Указаны особенности получения оценок, в том числе тех фазовых координат, которые могут быть применены в БЦВМ БПЛА для определения величины промаха по формуле (3.1). Оценки дальности и скорости сближения с целью в [7] предлагается находить посредством фильтрации по алгоритмам стохастической теории оптимального управления (СТОУ) [9, 10] выходных сигналов многоконтурного измерителя дальности и ее производных с независимым оцениванием скорости сближения. Оценку угловой скорости линии визирования ВО предложено формировать по алгоритмам СТОУ на основании выходных сигналов квазиоптимального угломера интенсивно маневрирующих объектов. Точность оценок дальности, скорости сближения и угловой скорости линии визирования ВО в большой степени зависит от соответствия моделей состояния реально складывающейся тактической ситуации.

Таблица 1

Тип цели	Поперечная перегрузка цели j , ед.	Ожидаемые выходные сигналы измерителей $m_i(s)$ в s -й ситуации				Номер ситуации
		β	ω	...	D	
М	$j = 1$	β_{M1}	ω_{M1}	...	D_{M1}	1
	$j = 2$	β_{M2}	ω_{M2}	...	D_{M2}	2

	$j = 10$	β_{M10}	ω_{M10}	...	D_{M10}	...
С
Б	S

Учитывая особенности функционирования БРЛС БПЛА на малых дальностях по мере сближения с ВО, а также неизбежные методические ошибки при оценивании фазовых координат, используемых в формуле (3.1), можно сделать вывод о нецелесообразности точечной оценки величины промаха, т.е. оценки текущего промаха в интересах полезной нагрузки в конечный момент самонаведения БПЛА. Альтернативой может быть интегральная оценка величины промаха, определяемая в БЦВМ БПЛА на основании имеющихся оценок фазовых координат, используемых при реализации метода самонаведения. Предлагаемая процедура интегральной оценки величины промаха состоит из трех этапов и заключается в следующем. На первом этапе осуществляется распознавание тактической ситуации, т.е. идентификация моделей состояния для повышения точности оценок фазовых координат, применяемых в формуле (3.1). На втором этапе формируется выборка из значений текущих промахов по формуле (3.1). На третьем этапе на основании выборки формируются оценки математического ожидания и дисперсии величины промаха БПЛА, в том числе с учетом прогнозируемых оценок фазовых координат. Ориентировочные усредненные значения дальностей до цели $D_{ЦЭ}$ и длительности $t_{Э}$ указанных этапов, когда в качестве БПЛА выступает ракета класса “воздух-воздух” с активной БРЛС, находятся в следующих диапазонах: этап 1 – $D_{ЦЭ1} = 3000-1500$ м, $t_{Э1} = 4.5-2$ с; этап 2 – $D_{ЦЭ2} = 1500-500$ м, $t_{Э2} = 2-0.7$ с; этап 3 – $D_{ЦЭ3} = 500-0$ м, $t_{Э3} = 0.7$ с. Очевидно, что длительность этапов будет зависеть от назначаемых дальностей $D_{ЦЭ}$ и скорости сближения БПЛА с целью, т.е. от собственных скоростей БПЛА и ВО и ракурса ВО. Назначаемые дальности $D_{ЦЭ}$ в свою очередь будут зависеть от типа ВО. На этапе 3, который может являться этапом после “ослепления” БРЛС и который целесообразно “назначать” при достижении определенной дальности в зависимости от типа ВО или определять, например, по заранее установленному пороговому значению при изменении величины сигнала в суммарном канале БРЛС, формирование оценки промаха осуществляется по результатам прогноза фазовых координат. Именно этап 3 предлагаемой процедуры подлежит дальнейшему тщательному исследованию.

Распознавание тактической ситуации. Распознавание тактической ситуации на этапе 1 процедуры определения величины промаха на борту БПЛА целесообразно как с точки зрения повышения точности оценивания фазовых координат за счет коррекции моделей состояния и наблюдения, так и при обосновании значений $D_{ЦЭ2}$ и $D_{ЦЭ3}$. Под тактической ситуацией в наиболее простом случае рассматривается конкретное сочетание типа ВО и выполняемого ВО маневра (поперечной перегрузке ВО). Возможный вариант распознаваемых тактических ситуаций показан в виде таблицы, в которой обозначены: М, С, Б – соответственно малый, средний и большой ВО; ... – условный знак “по аналогии”; S – количество распознаваемых тактических ситуаций.

Каждой ситуации ставятся в соответствие заранее определенные модели состояния и наблюдения с заданными интенсивностями шумов состояния и наблюдения (в данной статье не рассматриваются), а также значения $D_{ЦЭ2}$ и $D_{ЦЭ3}$. Алгоритм распознавания тактической ситуации на основании байесовского подхода по аналогии с (2.1)–(2.5) для данного случая будет:

$$\hat{p}_k(s) = \frac{\tilde{p}_k(s) \exp[-0.5h_k(z_i)]}{\sum_{s=1}^S \tilde{p}_k(s) \exp[-0.5h_k(z_i)]}, \quad i = \overline{1, I}, \quad (3.4)$$

$$\tilde{p}_k(s) = \hat{p}_{k-1}(s_{k-1}), \quad k = \overline{1, K}, \quad (3.5)$$

$$h_k(z_i) = \sum_{s=1}^S h_i^{(s)}(z_i), \quad (3.6)$$

$$h_i^{(s)}(z_i) = \frac{(z_i - m_i(s))^2}{\hat{D}_i}, \quad i = \overline{1, I}, \quad (3.7)$$

$$\hat{s}_k = \arg \max_{s=1, S} \hat{p}_k(s). \quad (3.8)$$

Здесь z_i, \hat{D}_i – соответственно сигнал и оценка его дисперсии на выходе i -го измерителя; $m_i(s)$ – математическое ожидание сигнала i -го измерителя в s -й тактической ситуации; I – количество измерителей, задействованных в распознавании s -й ситуации; K – длительность серии, которая может ограничиваться из-за действия организованных помех.

Алгоритм (3.4)-(3.8) обладает высоким быстродействием. Так, время распознавания ситуации аналогично [3] составляет сотые доли секунды.

Формирование выборки из значений текущих промахов. При формировании выборки из значений текущих промахов в формуле (3.1) используются оценки соответствующих фазовых координат. При этом в моделях состояния и измерения для алгоритмов фильтрации $\omega, D_{Ц}, V$ в зависимости от текущего значения s используются заранее определенные значения спектральных плотностей шумов. Ожидается, что данная процедура за счет высокого быстродействия распознавания тактической ситуации будет способствовать повышению точности оценивания именно данных фазовых координат без влияния на основные алгоритмы фильтрации всех фазовых координат, связанных многочисленными перекрестными связями, которые используются при управлении БПЛА.

Выборку из значений промахов целесообразно формировать как простую случайную выборку с тем расчетом, чтобы к моменту применения полезной нагрузки БПЛА статистическая ошибка оценивания промаха не превышала 5% с доверительной вероятностью 0.95. Это достигается назначением дальности $D_{ЦЭ2}$ начала этапа 2 и назначением такого интервала съема данных, который обеспечивает выборку объемом более 400 единиц. На этапе 3 при достижении $D_{ЦЭ3}$ в алгоритмах фильтрации $\omega, D_{Ц}, V$ измеряемые значения фазовых координат заменяются прогнозируемыми по правилам, описанным в [6], с продолжением формирования выборки. Оценки математического ожидания и среднеквадратического отклонения промаха формируются по мере получения выборочных значений по широко известным правилам [11].

4. Алгоритм определения ракурса ВО. Для корректного определения величины времени срабатывания полезной нагрузки БПЛА нужно знать величину ракурса ВО [12]. Поэтому необходимо разработать алгоритм определения ракурса ВО, реализуемый в ИИС БПЛА с радиолокационной головкой самонаведения (РГС) на основании информации только от имеющихся в составе ИИС измерителей и имеющейся в составе ИИС базы данных (т.е. без привлечения какой-либо дополнительной информации из вне). Рассмотрим возможный алгоритм определения ракурса при сближении БПЛА с ВО в задней и передней полусферах.

Задняя полусфера. Исходные данные и допущения.

1. БПЛА наводится на ВО по методу пропорционального наведения.

2. В качестве сигнала подсвета объекта (СПЦ) применяется квазинепрерывный сигнал. Радиотехнические измерители ИИС БПЛА позволяют измерять: φ – бортовой пеленг объекта (угол между продольной осью БПЛА и равносигнальным направлением следящего пеленгатора); ω – угловую скорость линии визирования; D – дальность до ВО; $V_{сб}$ – скорость сближения БПЛА с ВО.

3. Из нерадиотехнических измерителей в процедуре используются акселерометры как в плоскостях управления БПЛА, так и по продольной оси БПЛА, которые измеряют: $j_{1,2}$ – поперечное ускорение БПЛА в соответствующих плоскостях; $j_{пр}$ – продольное ускорение БПЛА.

4. В алгоритме применяются оценки измерений по п. 2 и 3, определяемые в ИИС БПЛА. Методика оценивания и фильтры описаны в [1] для формирования параметров управления.

5. В алгоритме используется собственная скорость БПЛА. Можно считать, что особенности той части атмосферы, в которой происходит сближение БПЛА с ВО, одинаковы для БПЛА и ВО.

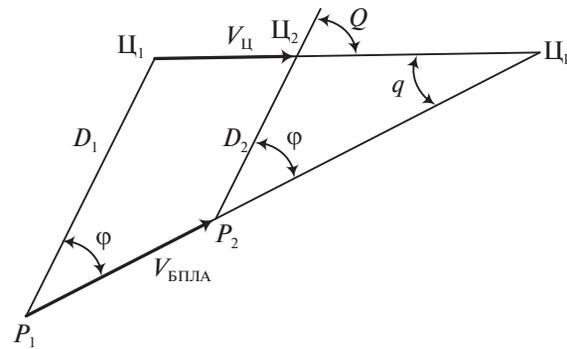


Рис. 2

Возможны два варианта для оценки собственной скорости БПЛА. Первый – по информации от производителя БПЛА. В базу данных ИИС БПЛА должны быть занесены следующие характеристики: разгонные, скоростные с учетом условий пуска, высоты полета, углы наклона траекторий. Второй – по информации в момент пуска из самолетной информационно-вычислительной системы и данным $j_{пр}$ – продольного ускорения БПЛА.

Схема сближения БПЛА (P) с ВО (Ψ) в горизонтальной плоскости при пуске в заднюю полу-сферу (условно “догон”) показана на рис. 2.

Рисунок 2 соответствует случаю, когда переходные процессы после пуска БПЛА завершены, ВО летит прямолинейно и равномерно (правомерность данного допущения будет далее обоснована с помощью особенностей решения главной задачи (определения ракурса) и особенностей разрабатываемой процедуры), БПЛА наводится по методу пропорционального наведения и его траектория практически прямолинейна [1]. На рис. 2 обозначено: P_1, Ψ_1 – положение БПЛА и ВО в произвольный (первый) момент времени; P_2, Ψ_2 – положение БПЛА и объекта в произвольный (второй) момент времени; Ψ_k – точка “встречи”; D_1, D_2 – дальности до объекта в первый и второй моменты времени соответственно; φ – бортовой пеленг ВО (принимается неизменным в соответствии с последующим обоснованием); q – угол между вектором скорости БПЛА и вектором скорости ВО, что практически совпадает с углом между продольной осью БПЛА и продольной осью ВО; Q – курсовой угол визирования объекта (его синус – это ракурс объекта в координаторе БПЛА).

Алгоритм определения угла q включает в себя операции.

1. В произвольный момент времени, например первый, по имеющимся значениям D_1 и $V_{сб1}$ определяем время до “встречи” t_{k1}

$$t_{k1} = \frac{D_1}{V_{сб1}}. \quad (4.1)$$

2. На основании скорости $V_{БПЛА}$ именно для данного (он условно назван первым) момента времени и t_{k1} определяем длину отрезка $P_1\Psi_k$:

$$P_1\Psi_k = V_{БПЛА}t_{k1}. \quad (4.2)$$

3. Решаем произвольный треугольник $P_1\Psi_1\Psi_k$, в котором известны две стороны $P_1\Psi_1 = D_1$, $P_1\Psi_k = V_{БПЛА}t_{k1}$ и угол между ними φ . По теореме косинусов находим длину отрезка $\Psi_1\Psi_k$:

$$\Psi_1\Psi_k = \sqrt{D_1^2 + (V_{БПЛА}t_{k1})^2 - 2D_1V_{БПЛА}t_{k1} \cos \varphi}. \quad (4.3)$$

Далее по теореме синусов находим синусы (и соответственно сами углы) углов q и угла $P_1\Psi_1\Psi_k$. Ракурс объекта будет

$$\sin q = \frac{D_1 \sin \varphi}{\Psi_1\Psi_k}. \quad (4.4)$$

Решение треугольника $P_1\Psi_1\Psi_k$ позволяет дополнительно оценить на борту БПЛА.

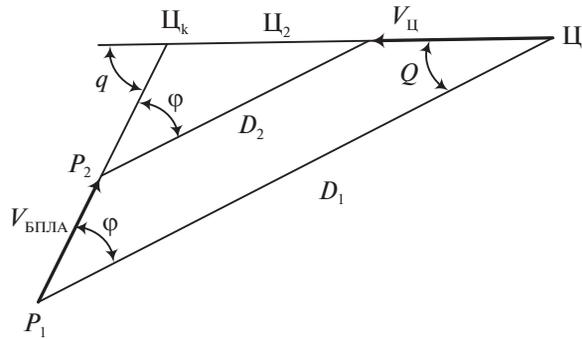


Рис. 3

4. Модуль скорости ВО

$$V_{\text{ВО}} = \frac{\Pi_1 \Pi_k}{t_{k1}}. \quad (4.5)$$

5. Ракурс ВО в координаторе БПЛА

$$\sin Q = \sin \varphi \cos q + \cos \varphi \sin q. \quad (4.6)$$

Передняя полусфера. Схема сближения БПЛА с ВО в горизонтальной плоскости при пуске в переднюю полусферу (условно “перехват”) показана на рис. 3 (обозначения такие же, как и на рис. 2).

Далее все формулы алгоритма “работают” аналогично случаю задней полусферы. Ракурс ВО по отношению к вектору скорости БПЛА (или его продольной оси) так же, как и ранее, вычисляется по формуле (4.4). Это следует из формулы для синуса разности двух углов, так как $q = \pi - \angle P_1 \Pi_k \Pi_1$.

Аналогично случаю с промахом выборку из значений ракурсов ВО формируем как простую случайную выборку с тем расчетом, чтобы к моменту применения полезной нагрузки БПЛА статистическая ошибка оценивания ракурса не превышала 5% с доверительной вероятностью 0.95. Оценки математического ожидания и среднеквадратического отклонения ракурса также формируем по мере получения выборочных значений [11].

5. Алгоритм определения величины времени задержки на срабатывание полезной нагрузки БПЛА.

Величина времени задержки T_3 , обеспечивающая оптимальное для условий сближения БПЛА с объектом ($pr, V_{\text{сб}}$) положение точки срабатывания полезной нагрузки БПЛА определяется в соответствии с выражением:

$$T_3 = pr \left(\frac{\text{ctg} \varphi_0 - \text{ctg} \bar{\varphi}'}{V_{\text{сб}}} - \frac{1}{V_0 \sin \bar{\varphi}} \right) + \frac{L \sin \varphi}{2V_{\text{сб}}}, \quad (5.1)$$

где pr – величина промаха БПЛА относительно объекта, $\bar{\varphi}'$ – среднее направление разлета элементов полезной нагрузки в динамике, φ_0 – угол наклона диаграммы направленности радиолокационной головки самонаведения БПЛА, V_0 – начальная скорость разлета элементов, $V_{\text{сб}}$ – относительная скорость сближения БПЛА с ВО, L – продольный размер ВО.

Среднее направление разлета элементов в динамике определяется в соответствии с выражением:

$$\bar{\varphi}' = \arctg \frac{\sin \bar{\varphi}}{(V_{\text{сб}}/V_0) + \cos \bar{\varphi}}, \quad (5.2)$$

где $\bar{\varphi}$ – среднее направление разлета элементов в статике.

Величина времени задержки на срабатывание, которое должна отработать ИИС БПЛА, определяется как

$$T_{3.с} = T_3 - t_{\text{и}}, \quad (5.3)$$

где $t_{\text{и}}$ – средняя величина времени инерционности иницирующих элементов полезной нагрузки.

Заключение. Предложены алгоритмы функционирования ИИС управления полезной нагрузкой БПЛА, а именно: определение радиального направления на ВО, определение величины промаха, определение ракурса ВО, определение величины времени задержки на срабатывание полезной нагрузки БПЛА. Способы, реализующие предложенные в статье алгоритмы, защищены патентами Российской Федерации на изобретения. Использование предложенных алгоритмов позволит обеспечить своевременную доставку элементов полезной нагрузки БПЛА на малоразмерные, высокоскоростные и маневрирующие ВО.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Себряков Г.Г., Красильщиков М.Н.* Современные информационные технологии в задачах навигации и наведения беспилотных маневренных летательных аппаратов. М.: Физматлит, 2009. 556 с.
2. *Себряков Г.Г., Мужичек С.М., Скрынников А.А., Павлов В.И., Ермолин О.В.* Определение радиального направления на объект в системе наведения беспилотного летательного аппарата // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2016. № 12. С. 24–28.
3. *Себряков Г.Г., Мужичек С.М., Скрынников А.А., Павлов В.И., Ермолин О.В.* Определение мгновенного положения точки промаха беспилотного летательного аппарата по информации угломерного канала // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2017. № 5. С. 23–27.
4. *Казаков И.Е., Гладков Д.И., Криксунов Л.З., Харитонов А.П.* Системы управления и динамика наведения ракет / Под ред. И.Е. Казакова. М.: ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1973. 498 с.
5. *Бухалёв В.А.* Обработка информации и управление ракетами в условиях противодействия. – М.: ВВИА им. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, 2009. 146 с.
6. *Авиационные системы радиоуправления. Т. 1. Принципы построения систем управления. Основы синтеза и анализа / Под ред. А.И. Канащенкова и В.И. Меркулова. М.: Радиотехника, 2003. 192 с.*
7. *Авиационные системы радиоуправления. Т. 2. Радиоэлектронные системы самонаведения / Под ред. А.И. Канащенкова и В.И. Меркулова. М.: Радиотехника, 2003. 390 с.*
8. *Леонов А.И., Фомичев К.И.* Моноимпульсная радиолокация. М.: Радио и связь, 1984. 312 с.
9. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.В., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003. 615 с.
10. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991. 608 с.
11. *Вероятность и математическая статистика: энциклопедия. М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. 911 с.*
12. *Мужичек С.М., Обросов К.В., Ким В.Я., Лисицын В.М.* Определение направления полета по сигналам оптико-электронной системы переднего обзора. Вестник компьютерных и информационных технологий. 2013. № 5 (107). С. 8–13.

СЛОЖНЫЕ ТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ И ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩИЕ КОМПЛЕКСЫ

УДК 629.783

КОМПЛЕКСНАЯ ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ НАВИГАЦИОННЫХ СПУТНИКОВЫХ СИСТЕМ

© 2022 г. А. И. Болкунов*, М. Н. Красильщиков^б, В. В. Малышев^б^аАО «ЦНИИмаш», Королёв, Россия^бМАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

* e-mail: alexei.bolkunov@glonass-iac.ru

Поступила в редакцию 13.01.2022 г.

После доработки 16.01.2022 г.

Принята к публикации 31.01.2022 г.

Приведен общий подход к комплексной оценке эффективности навигационных спутниковых систем с обоснованным ограничением областей проведения оценки до трех — оценки функциональной эффективности, эффективности системы нормативного регулирования и оценки экономической эффективности. Для оценки функциональной эффективности применен подход с использованием эксплуатационных характеристик, для оценки системы нормативного регулирования — с помощью разработанного гармонизированного терминологического базиса и логико-информационной модели системы, для оценки экономической эффективности — с использованием адаптированных эконометрических моделей и системы описания экономики навигационных систем. Проиллюстрировано применение разработанных методик для решения реальных практических задач.

DOI: 10.31857/S0002338822030039

Введение. Спутниковые навигационные системы в настоящее время являются основой национальной критической инфраструктуры и представляют собой средства, системы, комплексы, предоставляющие потребителю возможность решения задачи навигации как задачи управления.

Существует большое количество задач, связанных с созданием, развитием, функционированием и использованием навигационных систем, для различных этапов их жизненного цикла, для решения которых требуется получение разных оценок эффективности.

Проведение таких оценок требует наличия научно-методологических основ, обеспечивающих возможность формализации определенного набора критериев, методик их расчета и получения необходимого набора исходных данных для их расчета [1].

В настоящее время применяется большое количество подходов, средств и методов, обеспечивающих повышение эффективности навигационных систем, в том числе системы ГЛОНАСС, в части повышения точности системы, повышения качества эфемеридно-временного обеспечения [2], повышения автономности [3] и др., которые могут быть использованы в качестве элементов научно-методологических основ оценки эффективности [4].

Однако имеющиеся элементы обладают отдельными недостатками, ограничивающими их применение при решении задач, связанных с нетехническими областями проведения оценки или с оценкой потребительских характеристик.

1. Общая методология. Общая методология комплексной оценки эффективности навигационных спутниковых систем включает в себя два основных элемента.

1. Проведение классификации возможных задач, требующих проведения оценки эффективности, определение их принадлежности к областям проведения оценки.

2. Формирование по каждой области проведения оценки характеристик методик их расчета, требований к исходным данным или механизмов их формирования с учетом необходимости:

учета проблемных вопросов в областях проведения оценки;

обеспечения достоверности, прослеживаемости и повторяемости результатов;

проверки на реальных задачах.

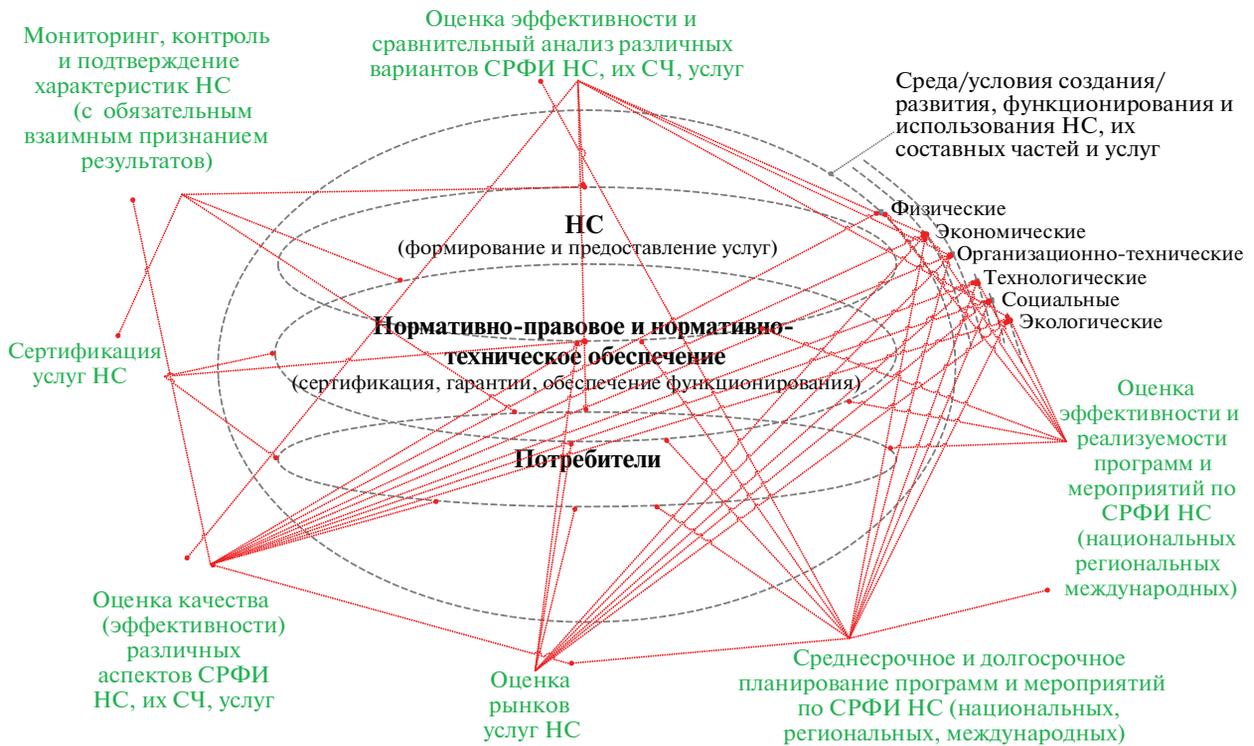


Рис. 1. Классификатор задач в сфере навигационной деятельности, требующих проведения комплексной оценки эффективности

Для формализации и составления классификатора задач в сфере навигационной деятельности, требующих комплексной оценки эффективности, необходимо описать условия, в которых создаются, развиваются, функционируют и используются навигационные системы, участники и элементы процесса навигационной деятельности и логические, информационные и организационные связи между ними. Схема, реализующая такое описание, представлена на рис. 1.

Она включает в себя четыре основных составляющих: навигационные системы (НС), потребители, нормативное обеспечение, а также среду и условия для этапов жизненных циклов (создания, развития, функционирования и использования – СРФИ) навигационных систем, их составных частей (СЧ) и услуг. Основные классы задач в соответствии с общей схемой логического, информационного и организационного взаимодействия участников и элементов процесса навигационной деятельности отмечены на рисунке зеленым.

Исследования показывают, что для решения стоящих задач все области проведения оценок можно свести к трем. Соответственно формируются три основные группы характеристик по количеству областей проведения оценки (рис. 2): функциональная эффективность и связанная с ней эффективность повышения национальной безопасности; экономическая эффективность; эффективность системы нормативного регулирования и связанная с ней эффективность международного сотрудничества. На рисунке использованы обозначения: СНР – система нормативного регулирования, ТТХ – тактико-технические характеристики, ТТТ – тактико-технические требования, ТЗ – техническое задание, ИКД – интерфейсный контрольный документ, ТЭО – технико-экономическое обоснование, НИОКР – научно-исследовательские и опытно-конструкторские работы.

Оценку функциональной эффективности предлагается проводить с помощью эксплуатационных характеристик; оценку системы нормативного регулирования – с использованием экспертных характеристик; оценку экономической эффективности – с помощью адаптированных экономических моделей и системы описания экономики навигационных систем с применением ряда потоковых и капитальных величин.



Рис. 2. Области проведения оценок и соответствующие им группы характеристик

2. Функциональная эффективность. Если рассмотреть множество функциональных характеристик ГЛОНАСС, позволяющих оценить выполнение основной целевой задачи, то оно может быть разделено на ТТХ и эксплуатационные характеристики (ЭХ) (рис. 3).

ТТХ формируются заказчиками, разработчиками и провайдерами услуг и определяются в таких документах, как тактико-технические требования к системе, техническое задание на систему, федеральной целевой программе “Поддержание, развитие и использование системы ГЛОНАСС на период 2012–2020 гг.” (ФЦП ГЛОНАСС) и текущей подпрограмме государственной программы “Космическая деятельность России”. Набор ТТХ определяет системные характеристики. В качестве значений ТТХ выбираются наилучшие, максимально возможные (или минимально возможные, в зависимости от характеристик) значения. Они по сути являются отражением аппаратно-программных и технических возможностей системы.

Эксплуатационные характеристики формируются потребителями (и международными организациями, представляющими интересы определенных категорий потребителей), и выступают отражением их требований к услугам. В качестве значений эксплуатационных характеристик используются гарантированные пределы характеристик, которые проверяются на длительных интервалах функционирования системы.

Переход к оценке функциональной эффективности с помощью эксплуатационных характеристик – основное требование современных потребителей, заинтересованных в предоставлении гарантий качества получаемых услуг навигационных систем, провайдеров услуг навигационных систем, обязанных предоставлять такие гарантии качества, и различных национальных и международных организаций, занимающихся оценкой и подтверждением характеристик услуг навигационных систем. Такой переход дает возможность потребителям гарантированно рассчитывать на определенный уровень характеристик.

В статье рассматривается подход применительно к системе ГЛОНАСС и к услуге абсолютной навигации, ей предоставляемой [5].

Для решения задачи оценки функциональной эффективности предлагается модифицировать систему описания характеристик ГЛОНАСС, используя эксплуатационные характеристики, добавив к существующим характеристикам ряд характеристик, отсутствующих ранее (в том числе, скорость и ускорение изменения мгновенной погрешности псевдодалности (эквивалентной погрешности псевдодалности – ЭПД), непрерывность сигнала в пространстве, основной отказ в навигационном обслуживании, надежность). Общая структурная схема получившейся системы описания приведена на рис. 4. Она включает в себя пять основных групп характеристик для

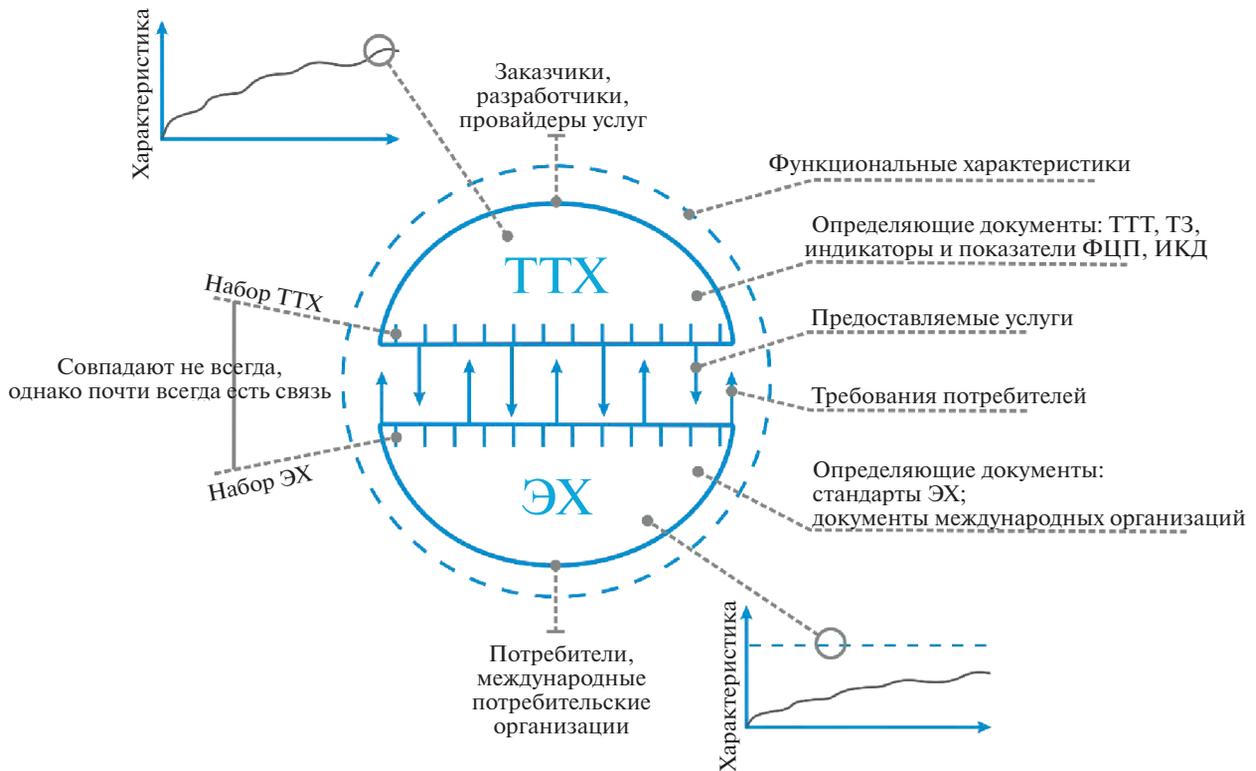


Рис. 3. Общая функциональная схема тактико-технических и эксплуатационных характеристик

канала стандартной точности для сигнала в пространстве: точность; вероятность основного отказа обслуживания; непрерывность; доступность; характеристики местоопределения и определения времени (в том числе связанные с системной шкалой времени (ШВС)).

Данная система учитывает все отдельные характеристики из документов по системе ГЛО-НАСС; описывает все необходимые потребителю аспекты функционирования системы. Разработаны методики расчета всех характеристик.

Надо подчеркнуть, что используемые характеристики являются интервальными (оцениваются их мгновенные значения, далее определяются их значения, соответствующие 95%, 99.55% и другим видам распределений на 30-суточном эргодическом интервале, далее — на скользящем годовом эргодическом интервале или более в зависимости от количества накопленных измерительных данных) и оцениваются на значительных интервалах функционирования системы (5–10 лет), что позволяет с их применением установить гарантированные значения соответствующих характеристик.

Предложенная методика оценки функциональной эффективности с помощью эксплуатационных характеристик содержит два основных этапа: непосредственно расчет набора характеристик и проведение оценки соответствия полученных значений заданным. Для отдельных характеристик разработано несколько методик расчета, например, для точности определения дальности: на основе перебора потребителей в зоне действия навигационного космического аппарата (НКА); на базе погрешностей эфемеридно-временной информации (ЭВИ); характеристики пороговой точности определения дальности; характеристики надежность точности определения дальности.

В качестве примера рассмотрим методику расчета характеристики “точность определения дальности на основе погрешностей ЭВИ” (т.е. погрешность псевдодальности за счет космического сегмента). Методика включает пять основных шагов.

1. На каждый момент времени t с постоянным шагом (≤ 10 мин) для каждого пригодного по признакам в навигационном сообщении НКА SV_h определяется разность апостериорных и штатных эфемерид (по радиусу ΔR , по бинормали ΔB , по нормали ΔN) и часов ΔT [6]:

$$\Delta R(SV_h, t), \Delta B(SV_h, t), \Delta N(SV_h, t), \Delta T(SV_h, t). \quad (2.1)$$



Рис. 4. Общая структурная схема системы описания эксплуатационных характеристик ГЛОНАСС

2. На каждый момент времени t для каждого пригодного по признакам в навигационном сообщении НКА SV_h определяется средняя (среднеквадратическая) по его зоне действия мгновенная погрешность псевдодальности $URE_{GlobalAverage}$ (глобальная средняя) [6]:

$$URE_{GlobalAverage}(SV_h, t) = \sqrt{(0.98\Delta R(SV_h, t) - c\Delta T(SV_h, t))^2 + 0.19^2(\Delta N(SV_h, t)^2 + \Delta B(SV_h, t)^2)}, \quad (2.2)$$

где c – скорость света в вакууме.

3. На каждый момент времени t для каждого пригодного по признакам в навигационном сообщении НКА SV_h определяется максимальная в его зоне действия мгновенная ошибка псевдодальности $URE_{WorstCase}$ (в наихудшей точке) [6]:

$$URE_{WorstCase}(SV_h, t) = \max_{-\beta \leq \alpha \leq \beta} [\Delta R(SV_h, t) \cos \alpha - c\Delta T(SV_h, t) + \sin \alpha \sqrt{\Delta N^2(SV_h, t) + \Delta B^2(SV_h, t)}], \quad (2.3)$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\sin(90^\circ + mask)6731}{25508.2}\right),$$

$$mask = 5^\circ,$$

где $mask$ – маскирующий угол; α – угол между радиус-вектором НКА и вектором дальности от НКА до потребителя.

4. Для каждого пригодного НКА определяется значение, соответствующее 95%-ному уровню распределения по времени на эргодическом интервале (30 сут). При этом для подтверждения характеристик целесообразно представить значения, полученные на “скользящем” эргодическом интервале в течение года.

5. Определяется значение, соответствующее 95%-ному уровню распределения по времени и всей орбитальной группировки (ОГ) на суточном интервале. При этом для подтверждения характеристик целесообразно представить значения, полученные на “скользящем” эргодическом интервале в течение года.

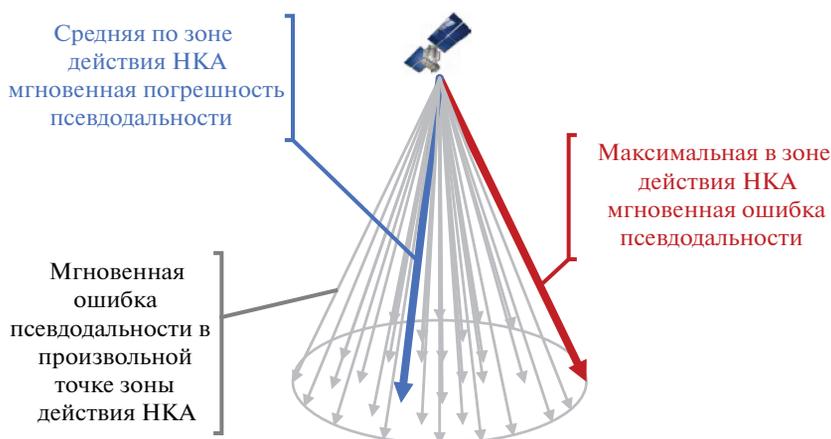


Рис. 5. Варианты определения характеристики “точность определения дальности на основе погрешностей ЭВИ”

Рисунок 5 иллюстрирует различные варианты определения данной характеристики (средне-квадратическая по зоне действия НКА мгновенная погрешность псевдодальности и максимальная в зоне действия НКА мгновенная ошибка псевдодальности).

Методика оценки функциональной эффективности с помощью эксплуатационных характеристик может использоваться при решении ряда задач:

1. Сертификация услуг системы ГЛОНАСС в интересах международных потребителей (на примере сертификации базовой услуги).
2. Проведение мониторинга, контроля и подтверждения характеристик глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) в международных организациях с обязательным взаимным признанием результатов.
3. Сравнительный анализ различных ГНСС с взаимным признанием, прослеживаемостью и повторяемостью результатов (на примере ГЛОНАСС и GPS).

Первая задача – сертификация услуг системы ГЛОНАСС в интересах международных потребителей [7]. Под сертификацией в данном случае понимается сложный организационно-технический и нормативно-методический процесс и механизм оформления и предоставления гарантий от провайдера услуг ГЛОНАСС потребителям данных услуг.

Основными элементами процесса являются: формализация проблем сертификации; определение объекта и разработка подхода к сертификации; разработка предложений по созданию системы сертификации; разработка методики сертификации (ключевым моментом тут служит разработанная система описания эксплуатационных характеристик, способная выступить в качестве сертификационного базиса).

Следующие две задачи – это проведение мониторинга, контроля и подтверждения характеристик ГНСС в международных организациях и проведение сравнительного анализа различных ГНСС с взаимным признанием, прослеживаемостью и повторяемостью результатов.

Обеспечение прослеживаемости, повторяемости, достоверности и, как следствие, взаимного признания результатов сейчас является основным требованием при проведении мониторинга, контроля и подтверждения характеристик. Единственный способ это реализовать – применение верифицированных исходных данных, исчерпывающего перечня характеристик и прозрачных методик их расчета, т.е. с помощью единого методического базиса.

Предложенная система описания характеристик ГЛОНАСС, опирающаяся на эксплуатационные характеристики, используется в качестве одного из основных элементов для создания шаблона всех мировых стандартов эксплуатационных характеристик, разрабатываемого в рамках Международного комитета по ГНСС при Организации Объединенных Наций.

Программно-математический комплекс, реализующий методики расчета системы описания характеристик, применяется при обеспечении участия Российской Федерации в Тестовом проекте по международному мониторингу, контролю и подтверждению характеристик ГНСС. Примеры результатов расчетов (для оценки точности передаваемых эфемерид) для систем ГЛОНАСС,

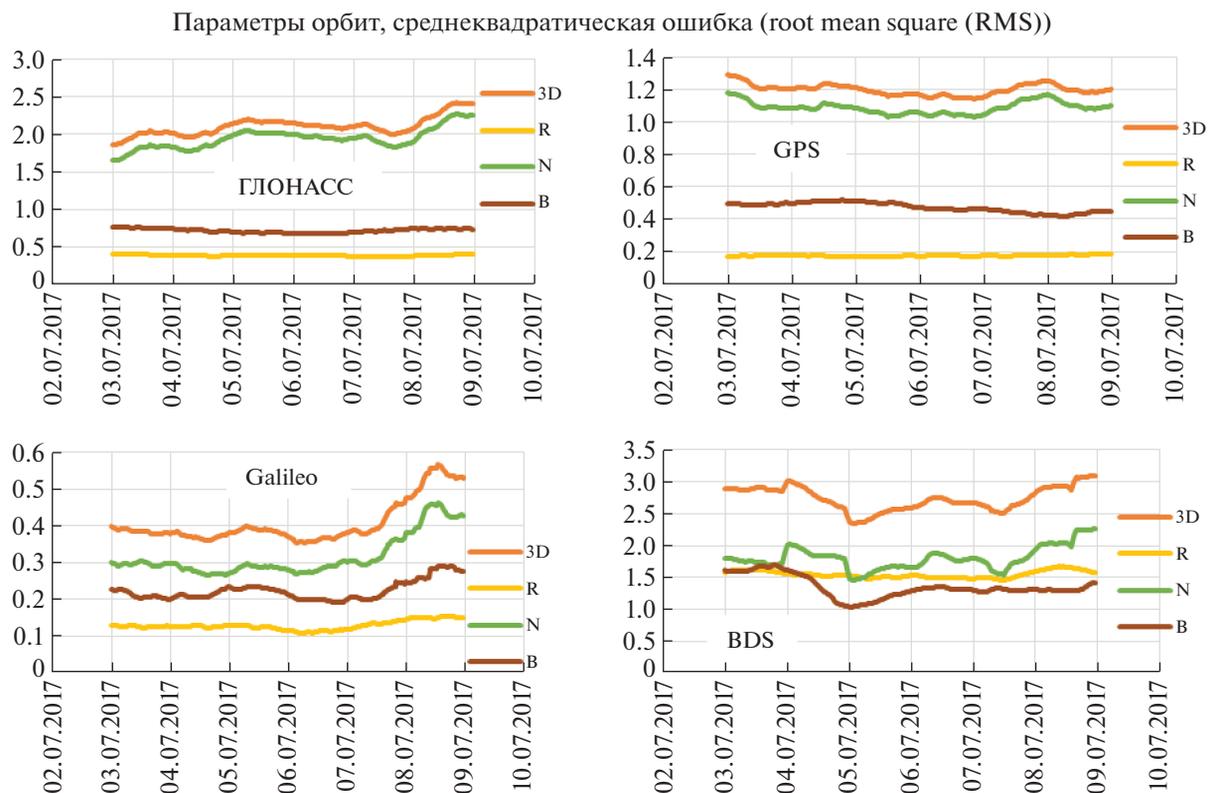
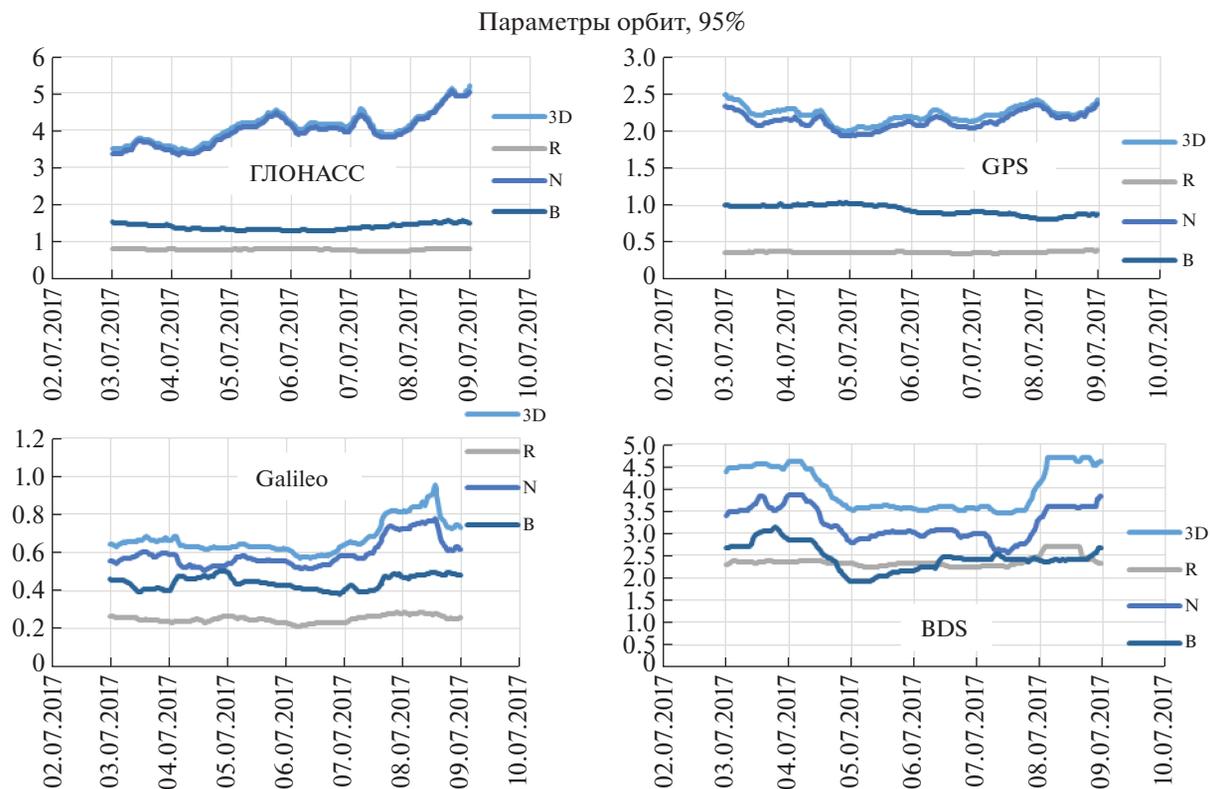


Рис. 6. Оценка точности передаваемых эфемерид для систем ГЛОНАСС, GPS, Galileo и BDS

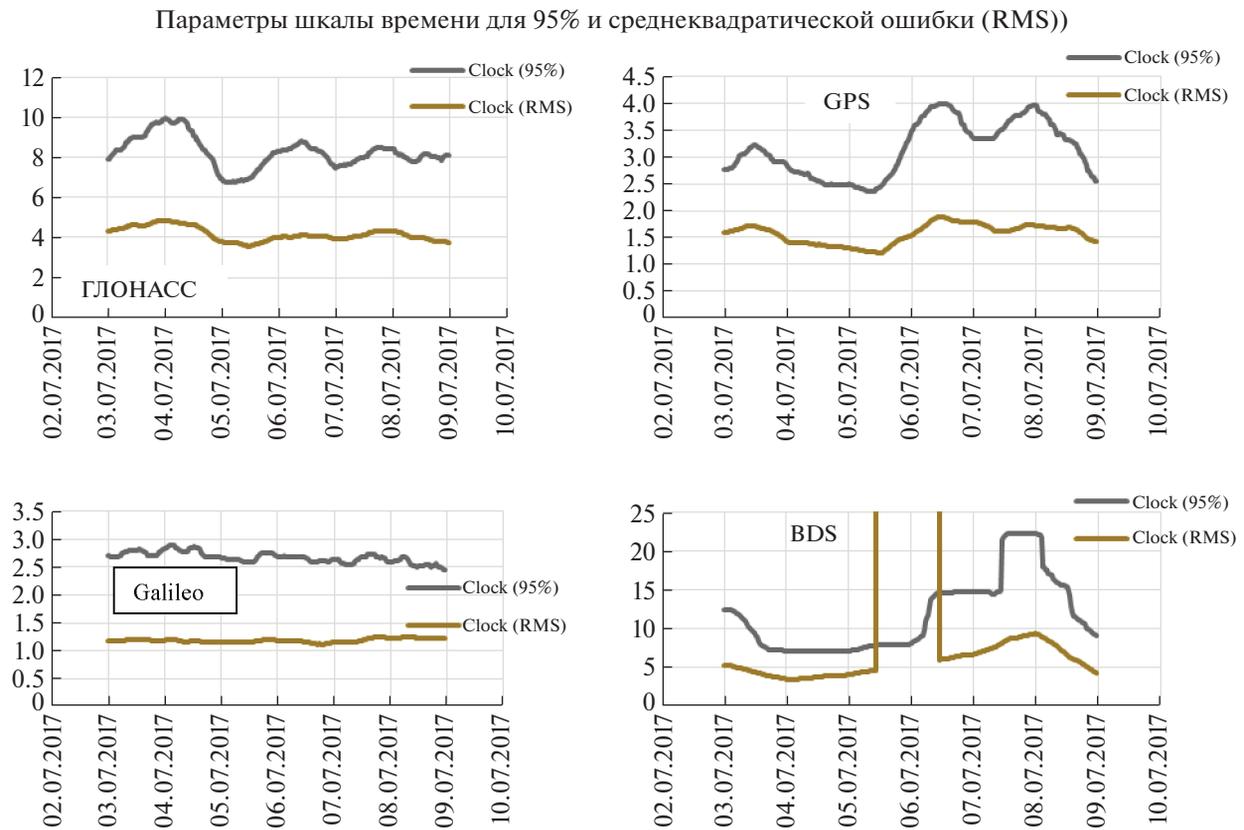


Рис. 6. Окончание

GPS, Galileo и BDS приведены на рис. 6 и позволяют говорить о возможности проведения сравнительной оценки различных ГНСС, полученных на едином методическом базисе.

Также данный комплекс используется для подтверждения характеристик ГЛОНАСС в международных потребительских организациях, например, в Международной организации гражданской авиации (ИКАО), поскольку ИКАО требует обоснования и подтверждения перечня оцениваемых характеристик ГНСС и их гарантированных значений.

3. Система нормативно-правового и нормативно-технического регулирования навигационной деятельности. В отличие от функциональной эффективности данная область более имеет дело не с физическими законами, закономерностями и правилами, а с организационно-техническими и социально-техническими, что в отдельных случаях приводит к возможности получения только лишь качественных оценок.

Проблемы в этой области можно подразделить на две группы – общеправовые и общепромышленные.

Для решения задачи оценки эффективности системы нормативного регулирования был проведен анализ вариантов построения систем нормативного регулирования и сформирована модель системы нормативного регулирования навигационной деятельности, включающая пять основных составляющих, отмеченных на рис. 7. Нормативная подсистема является основным элементом, оценка эффективности которого определяет фактически оценку системы нормативного регулирования в целом.

Учитывая разнородную природу элементов модели системы нормативного регулирования – нормативных актов, для ее формализации необходимо было определить их внутренние и внешние признаки и свойства. Для этого был разработан терминологический базис (т.е. базовый набор терминов и определений, относительно которого проводился дальнейший анализ внутренней структуры акта и фактически определялась норма, в нем заложенная) и логико-информационные связи между различными актами (т.е. организационно-иерархическая структура).

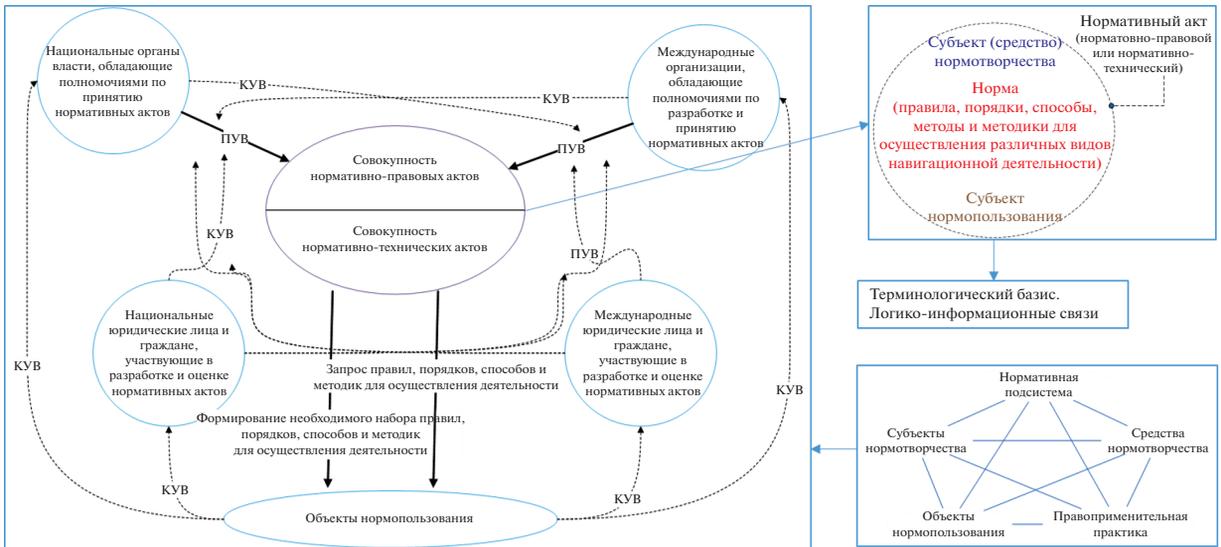


Рис. 7. Общий подход к оценке эффективности системы нормативного регулирования навигационной деятельности. На рисунке использованы обозначения: ПУВ – прямые управляющие воздействия, КУВ – косвенные управляющие воздействия.

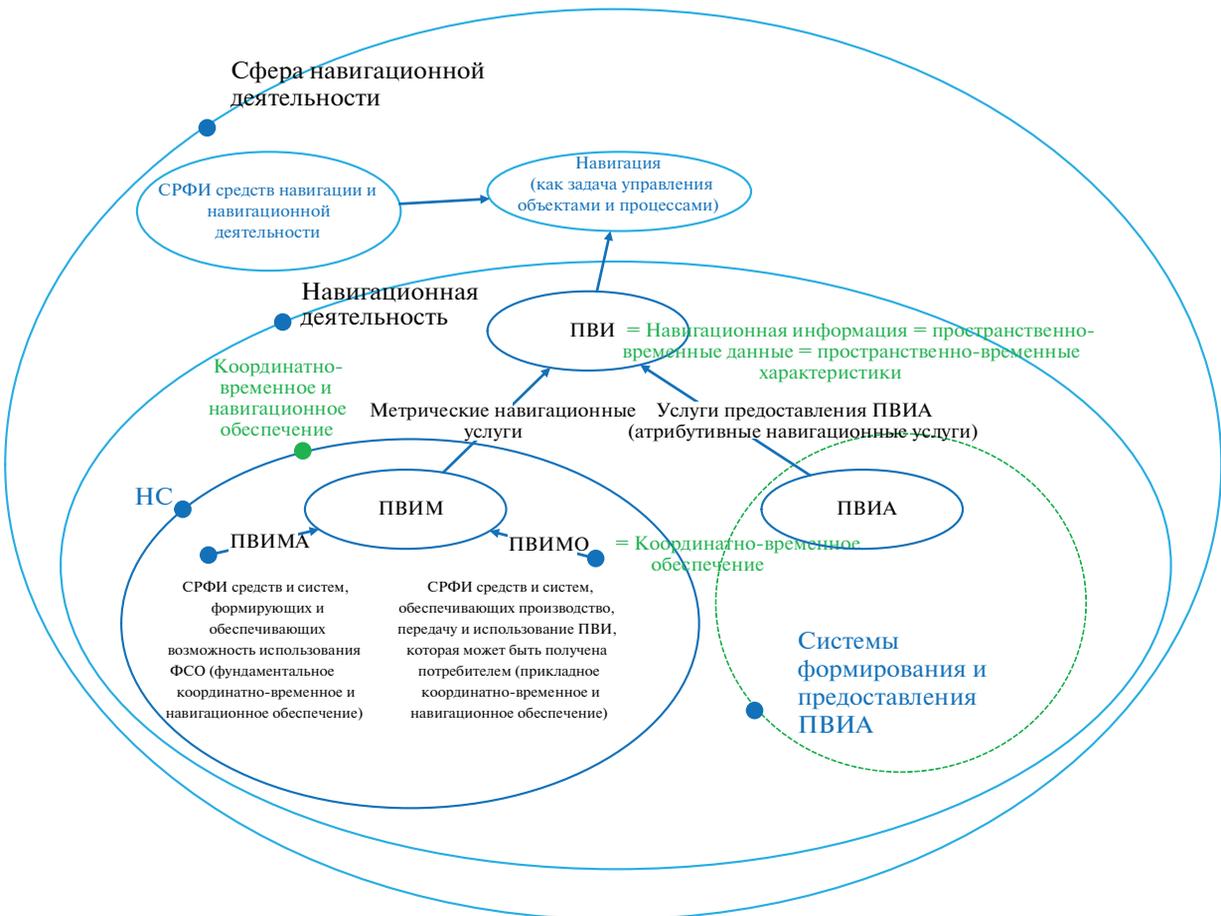


Рис. 8. Терминологический базис в сфере навигационной деятельности. На рисунке использованы обозначения: ПВИ – пространственно-временная информация, ПВИМ – метрическая ПВИ (позиционирования), ПВИА – атрибутивная ПВИ (функциональная), ПВИМА – абсолютная ПВИМ, ПВИМО – относительная ПВИМ, ФСО – фундаментальная система отсчета.



Рис. 9. Классификатор нормативных актов в сфере навигационной деятельности

Терминологический базис был создан с учетом требований и замечаний основных участников навигационной деятельности (включая Роскосмос, Минтранс и Минобороны).

На основании терминологического базиса (рис. 8) и формализованных логико-информационных связей между актами, формализованных в виде классификатора актов (рис. 9), был разработан программный комплекс, обеспечивший возможность оценки характеристик для мониторинга и позволивший перейти непосредственно к методике оценки эффективности с помощью экспертных характеристик, которая на текущий момент выглядит следующим образом.

1. Определяются все возможные комбинации “Объект – основные субъекты нормотворчества – вид деятельности – область применения – сфера деятельности – решаемая целевая задача – используемые в качестве средства или объекта навигационные системы – условия применения”.

2. Для всех возможных комбинаций формируются наборы нормативных актов, обеспечивающих условия, устанавливающих правила для осуществления различных видов деятельности объектов нормопользования. Система нормативного регулирования формирует один или несколько наборов нормативных актов для любой комбинации из числа сформированных.

3. Проводится анализ актов данных наборов.

4. Определяются минимально необходимые для решения целевых задач объектов нормопользования наборы актов.

5. Определяются реально применяемые и неприменяемые акты.

6. Оцениваются: полнота и используемость нормативных актов; наличие проблемных вопросов в нормативных актах; избыточность числа нормативных актов.

7. Проводится оценка удовлетворенности объекта нормопользования полученным и примененным для решения целевой задачи набором актов (как степень решения его целевой задачи или, в частном случае, как оценка соответствия данного набора решаемой задаче).

На текущем этапе исследований методика требует привлечения экспертов, в дальнейшем их участие будет снижено в том числе с помощью алгоритмов машинного обучения.

Применение методики оценки эффективности системы нормативного регулирования позволило решить ряд задач:

- 1) мониторинг текущего состояния системы нормативного регулирования,
- 2) сравнительный анализ различных систем нормативного регулирования,
- 3) совершенствование национальной системы нормативного регулирования.

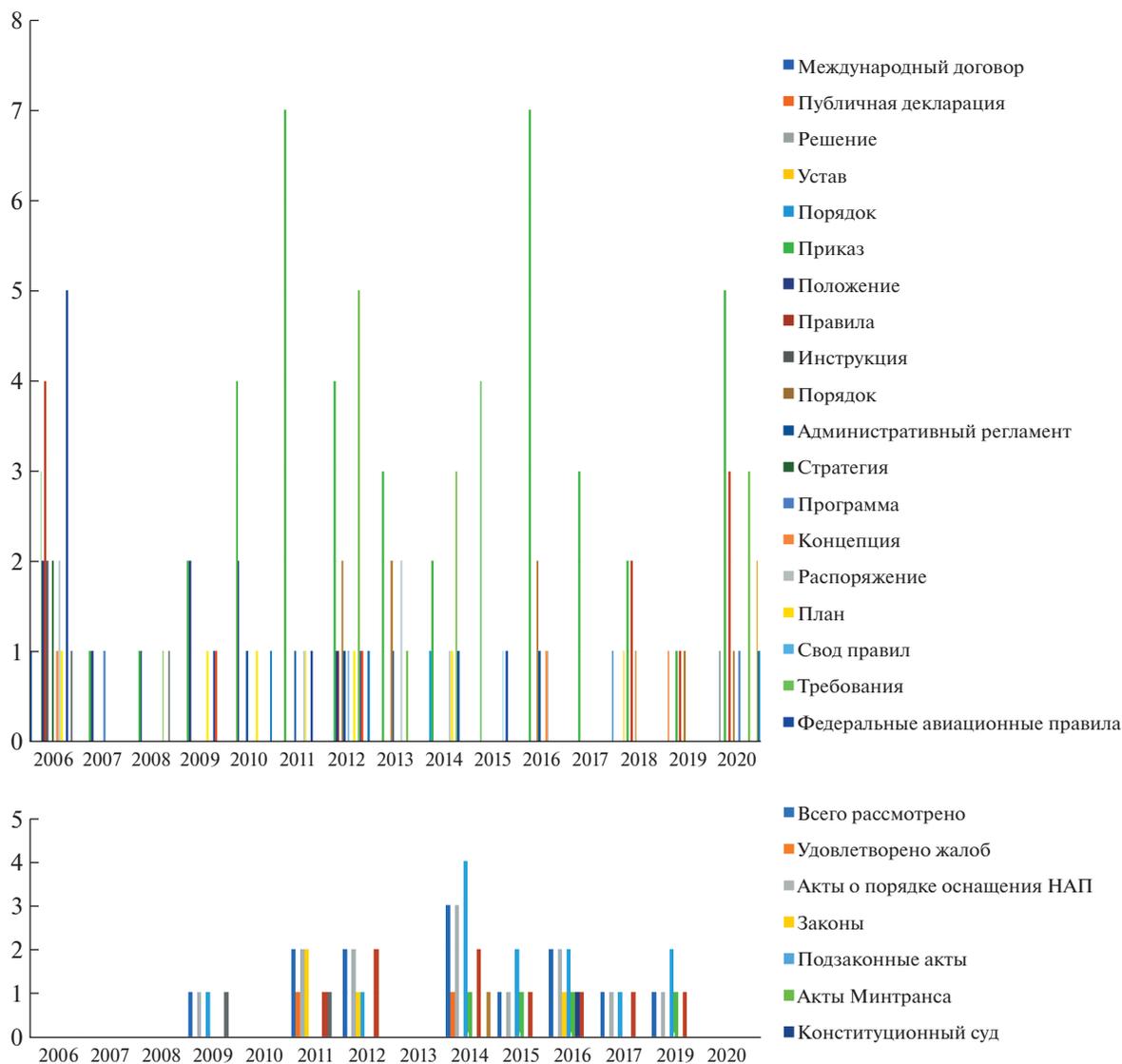


Рис. 10. Оценка зависимости количества рассмотренных судебных и административных дел в отношении актов Минтранса России в сравнении с общим количеством принятых ведомством актов

Приведем пример решения второй задачи на основе материалов Минтранса России. На рис. 10 представлена зависимость количества рассмотренных судебных и административных дел в отношении актов данного федерального органа исполнительной власти (ФОИВ) в сравнении с общим количеством принятых ведомством актов.

Это позволяет сделать вывод о том, что Минтранс обладает высокой оперативностью нормотворческой деятельности, т.е. полномочия по нормативному регулированию реализуются с хорошей скоростью. Однако в целом принимается избыточное число нормативных актов, к качеству которых возникает немало вопросов. “Инфляционная” составляющая нормотворчества данного ведомства при этом может создавать существенные неудобства для адресатов установленных им норм в практике их применения.

4. Экономическая эффективность. Анализ логического, информационного и организационно-взаимодействия участников навигационной деятельности исключительно для экономической составляющей, с привязкой к основным типам задач, требующих проведения оценок экономической эффективности, представлен в виде схемы, приведенной на рис. 11 (на рисунке использованы обозначения: ЭЭ – экономическая эффективность, ФЭ – функциональная эффективность, НАП – навигационная аппаратура потребителя, ИД – исходные данные).

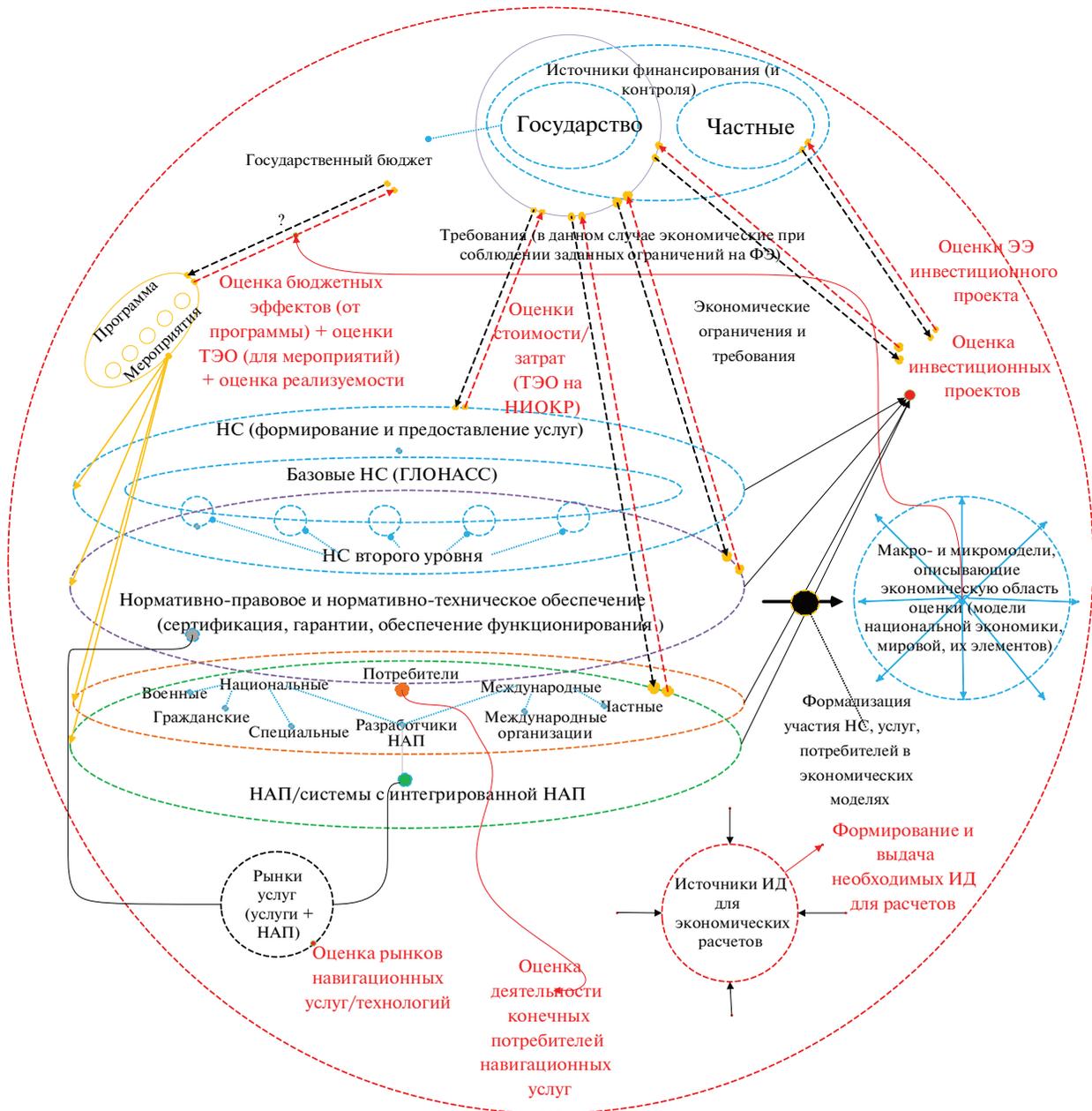


Рис. 11. Схема логического, информационного и организационного взаимодействия участников навигационной деятельности для экономической составляющей

В настоящее время существует значительное количество подходов, средств и методов, которые могут быть использованы для решения различных задач, требующих оценки экономической эффективности, однако все они обладают целым рядом недостатков.

В первую очередь это связано с наличием значительной разницы между физическим и экономическим представлением процессов, происходящих в контуре навигационных систем как области народного хозяйства, и вследствие разницы в составе анализируемой информации.

Экономические системы и методы их описания значительно отличаются от физических. Невозможность проведения воспроизводимых экспериментов, полностью прозрачного мониторинга процессов, влияние человеческого фактора можно отнести к основным типам проблемных вопросов. Существующие подходы, средства и методы противоречивы из-за разных теоретических и информационных базисов и могут давать различные результаты, т.е. они обладают низкой прослеживаемостью и повторяемостью.

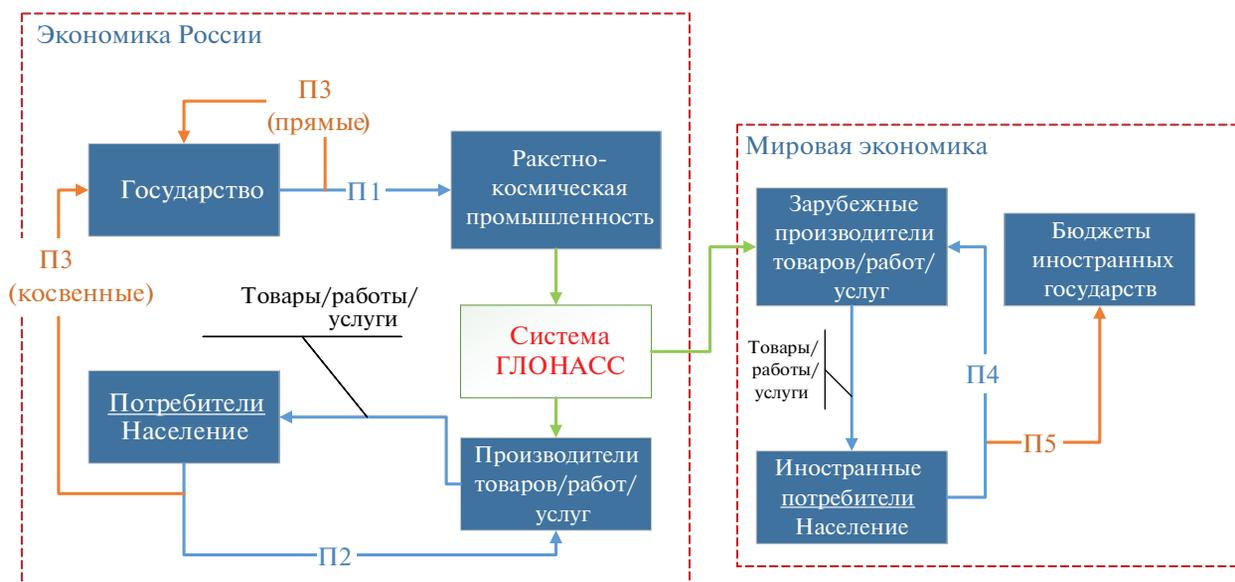


Рис. 12. Система описания экономики навигационных систем с использованием потоковых и капитальных величин

Для решения данных вопросов был проведен анализ имеющихся экономико-математических моделей, были выбраны наиболее подходящие для навигационной деятельности и адаптированы для использования в сфере навигационной деятельности. На их основе сформирована единая система характеристик для оценки экономической эффективности, опирающаяся на систему описания экономики навигационных систем с помощью ряда потоковых и капитальных величин.

В отличие от существующих систем она применяет наиболее актуальные эконометрические модели и позволяет выделять и проводить оценку влияния характеристик, относящихся к навигационным системам, на различные экономические и макроэкономические показатели, а также оценивать бюджетную и коммерческую эффективность и отраслевое влияние навигационных систем.

Методика оценки бюджетной и коммерческой эффективности заключается в построении системы описания экономики навигационных систем (рис. 12) с помощью потоковых и капитальных величин (первое показывает, сколько ресурсов было проведено через систему за определенную единицу времени не только в качестве затрат, но и в виде выгод; второе – куда были потрачены деньги).

Используемыми потоковыми величинами являются: затраты государства на реализацию (П1); плата потребителей навигационных товаров/работ/услуг их производителям (П2); налоговый поток (П3); плата за услуги иностранных потребителей навигационных услуг иностранным производителям (П4); поток налогов от иностранных потребителей к иностранным государствам (П5).

Применяемыми капитальными величинами выступают: физический, человеческий, интеллектуальный и цифровой капитал (индексы соответственно с К1 по К4).

Для оценки потоковых величин П1-П4 и капитальных величин К1-К2 используются специально адаптированные экономико-математические модели: динамическая стохастическая модель общего равновесия и динамическая факторная модель в форме пространства состояний (табл. 1).

На основе приведенной системы описания экономики системы ГЛОНАСС появляется возможность построить систему оценки экономической эффективности: бюджетная эффективность BE (4.1), внутристрановая эффективность EE (4.2) и полная экономическая эффективность FEE (4.3).

$$BE = \frac{П3}{П1}, \quad (4.1)$$

Таблица 1. Методы оценки и конечные показатели для используемых потоковых и капитальных величин

Показатель	Метод оценки	Используемый конечный показатель
П1	Прямая оценка на основе величины затрат соответствующей ФЦП	Размер затрат на реализацию ФЦП
П2	Динамическая стохастическая модель общего равновесия (DSGE); динамическая факторная модель в форме пространства состояний (DFM-SSM)	Вклад ФЦП во внутренний валовой продукт (ВВП) в постоянных ценах, млрд руб.; вклад ФЦП в ВВП в текущих ценах, млрд руб.; вклад в выпуск отрасли, млрд руб.
П3	Модель оценки налогового потока; DFM-SSM	Налоговые поступления от реализации мер, всего, млрд руб.; налоговые поступления в федеральный бюджет, млрд руб.; налоговые поступления в региональные и местные бюджеты, млрд руб.; налоговые поступления в фонды, млрд руб.
П4	Метод вектора Шепли	Вклад системы ГЛОНАСС в мировой ВВП, млрд долл.
К1	Прямая оценка на основе данных ФЦП; DSGE; DFM-SSM	Вклад ФЦП в индекс промышленного производства, в процентных пунктах (п.п.); вклад ФЦП в совокупный размер инвестиций в экономику, млрд руб.; вклад в основные фонды отрасли, млрд руб.
К2	DFM-SSM; вспомогательные эконометрические модели	Вклад ФЦП в снижение безработицы, п.п.; вклад в численность занятых по отрасли, чел.
К3	Не разработан	—
К4	Общая методология не до конца разработана	—

$$EE = \frac{П2 + П3}{П1}, \quad (4.2)$$

$$FEE = \frac{П2 + П3 + П4}{П1}. \quad (4.3)$$

Предлагаемый подход позволяет строить множество оценок эффективности в зависимости от решаемой задачи. Например, оценка коммерческой эффективности использует только поток П2 в числителе и представляется в виде отношения П2/П1.

В рамках системы возможно “протяжение” оценок эффективности во времени. Например, оценка внутристрановой экономической эффективности $EE_{0:T}$ для дисконтированного денежного потока, который предпочитают использовать при анализе инвестиционных проектов, имеет вид (4.4)

$$EE_{0:T} = \frac{\sum_{t=0}^T \frac{П2_t + П3_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=0}^T \frac{П1_t}{(1+r)^t}}, \quad (4.4)$$

где r – ставка дисконтирования.

Применение методики оценки экономической эффективности позволило решить ряд задач:

- 1) среднесрочное и долгосрочное стратегическое планирование государственных программ;
- 2) оценка эффективности и реализуемости с максимально достоверными и подтверждаемыми результатами.

Таблица 2. Итоговая оценка экономической эффективности системы ГЛОНАСС

Показатель	Сценарий финансирования ФЦП ГЛОНАСС 2030		
	базовый (актуальный)	инерционный	форсированный
Величина П1: совокупные затраты, млрд руб.	1038.50	623.69	1134.60
Величина П3 для федерального бюджета: совокупный налоговый поток в федеральный бюджет, млрд руб.	2056.72	1972.72	2076.18
Соотношение ВЕ для федерального бюджета	1.980	3.163	1.830
Величина П3: совокупный налоговый поток в бюджетную систему, млрд руб.	3366.31	3228.87	3398.15
Соотношение ВЕ	3.241	5.177	2.995
Величина П2: потенциальный вклад в выпуск отраслей, млрд руб.*	9255.28	9255.28	9255.28
Потенциальный вклад для инвестиций в отрасли, млрд руб.	1418.03	1418.03	1418.03
Совокупный вклад, млрд руб.	10673.31	10673.31	10673.31
Соотношение ЕЕ	10.28	17.11	9.41
Потенциальный вклад в ВВП страны, млрд руб.	11539.13	8828.78	12282.14
Соотношение величины П1 и потенциального вклада в ВВП	11.11	14.16	10.83

*В столбцах данного показателя приведены одинаковые значения для усредненного сценария (соответствующего базовому), поскольку DFM-SSM-модели не поддерживают сценарные прогнозы.

Решение задачи среднесрочного и долгосрочного стратегического планирования государственных программ с помощью разработанного подхода можно показать на примере выбора сценария финансирования новой подпрограммы для системы ГЛОНАСС. Рассматривались три сценария: базовый, инерционный и форсированный (табл. 2).

Во-первых, все приведенные сценарии финансирования имеют положительные соотношения эффективности (*ВЕ*, *ЕЕ*, соотношение затрат и вклада в ВВП). Таким образом, в любом из сценариев финансирования ожидаемый положительный экономический эффект будет выше, чем затраты, понесенные на реализацию мероприятий по поддержанию и развитию системы ГЛОНАСС.

Во-вторых, при возрастании общей суммы финансирования наблюдается снижение эффективности, что может на первый взгляд показаться алогичным. Ошибки нет, и у наблюдаемого эффекта есть несколько обоснованных причин. Прежде всего, наиболее инновационные (и наиболее затратные) в технической составляющей сценарии являются наиболее неопределенными для оценки экономических эффектов. Вероятность того, что разработка и внедрение новой технологии обернется неудачей всегда достаточно высока. И даже в случае успеха ее внедрение в экономические процессы может занять значительное время до получения значимого экономического эффекта. В связи с подобной неопределенностью используемые модели не учитывают подобные эффекты. Следовательно, оценка положительных потоков (П2 и П3) не несет в себе всех потенциально возможных эффектов от внедрения инноваций, и данное допущение представляется обоснованным.

Из-за наличия подобных эффектов при выборе альтернатив развития следует применять комплексный подход к оценке эффективности, включающий как экономическую, так и техническую составляющие.

Решение задачи оценки эффективности государственных программ и их реализуемости с максимально достоверными и подтверждаемыми результатами можно показать на примере системы ГЛОНАСС и завершенной федеральной программы по системе ГЛОНАСС.

Рассчитанные результаты оценки влияния вложений в развитие системы ГЛОНАСС на основные макроэкономические показатели за период 2014–2020 гг. представлены в табл. 3.

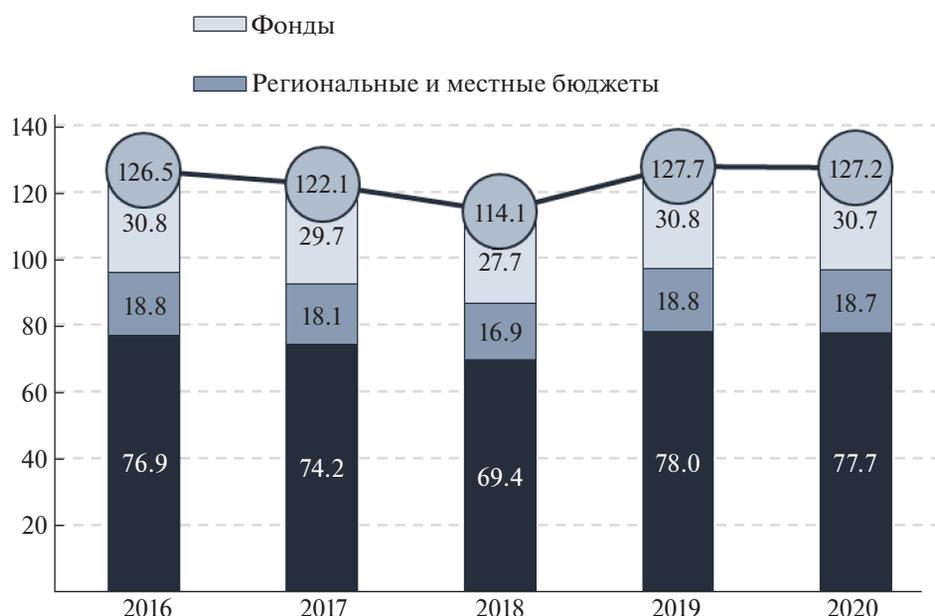
Таблица 3. Вклад системы ГЛОНАСС в динамику основных макроэкономических переменных

Макроэкономический индикатор в базовых пунктах (б.п.)	Период							Среднее значение за период реализации ФЦП ГЛОНАСС
	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	
Темпы роста ВВП	1.74	3.13	3.60	2.77	2.39	2.33	2.5	2.70
Темпы роста инвестиционной активности	0.97	0.65	1.20	3.52	6.18	8.63	10.18	4.42
Темпы роста промышленного производства	2.84	4.77	5.72	4.83	4.23	3.98	4.06	4.43
Уровень занятости	5.03	8.59	10.52	9.15	8.09	7.45	7.32	8.16
Уровень инфляции	0.11	0.21	0.26	0.21	0.19	0.01	0.03	0.16

*Прогнозное значение, рассчитанное на основе DSGE-модели.

Увеличение объемов промышленного производства вследствие реализации ФЦП ГЛОНАСС ведет к росту налогооблагаемой базы налога на прибыль и налога на добавленную стоимость (НДС), а более высокий уровень занятости обеспечивает более высокий уровень социальных отчислений. Таким образом, ФЦП ГЛОНАСС генерирует доходный поток для бюджетов различных уровней. Наиболее существенный объем сборов приходится на долю федерального бюджета – около 61.12% от общего налогового эффекта реализации ФЦП ГЛОНАСС. Взносы на социальное страхование, направляемые в соответствующие фонды, занимают в структуре генерируемого программой налогового потока 24.1%, а отчисления в региональные бюджеты – 14.7%. Оценка генерируемых системой ГЛОНАСС налоговых поступлений в бюджеты различных уровней приведена на рис. 13.

Общий объем налоговых поступлений от реализации ФЦП ГЛОНАСС (включая налоговые поступления от отраслей экономики, на развитие которых оказывает влияние развитие системы ГЛОНАСС) в 2020 г. оценивается в 127.2 млрд руб. Из них в федеральный бюджет зачисляется 77.7 млрд руб., в региональные бюджеты – 18.7 млрд руб., взносы на социальное страхование составляют 30.7 млрд руб.

**Рис. 13.** Оценка генерируемых системой ГЛОНАСС налоговых поступлений в бюджеты различных уровней

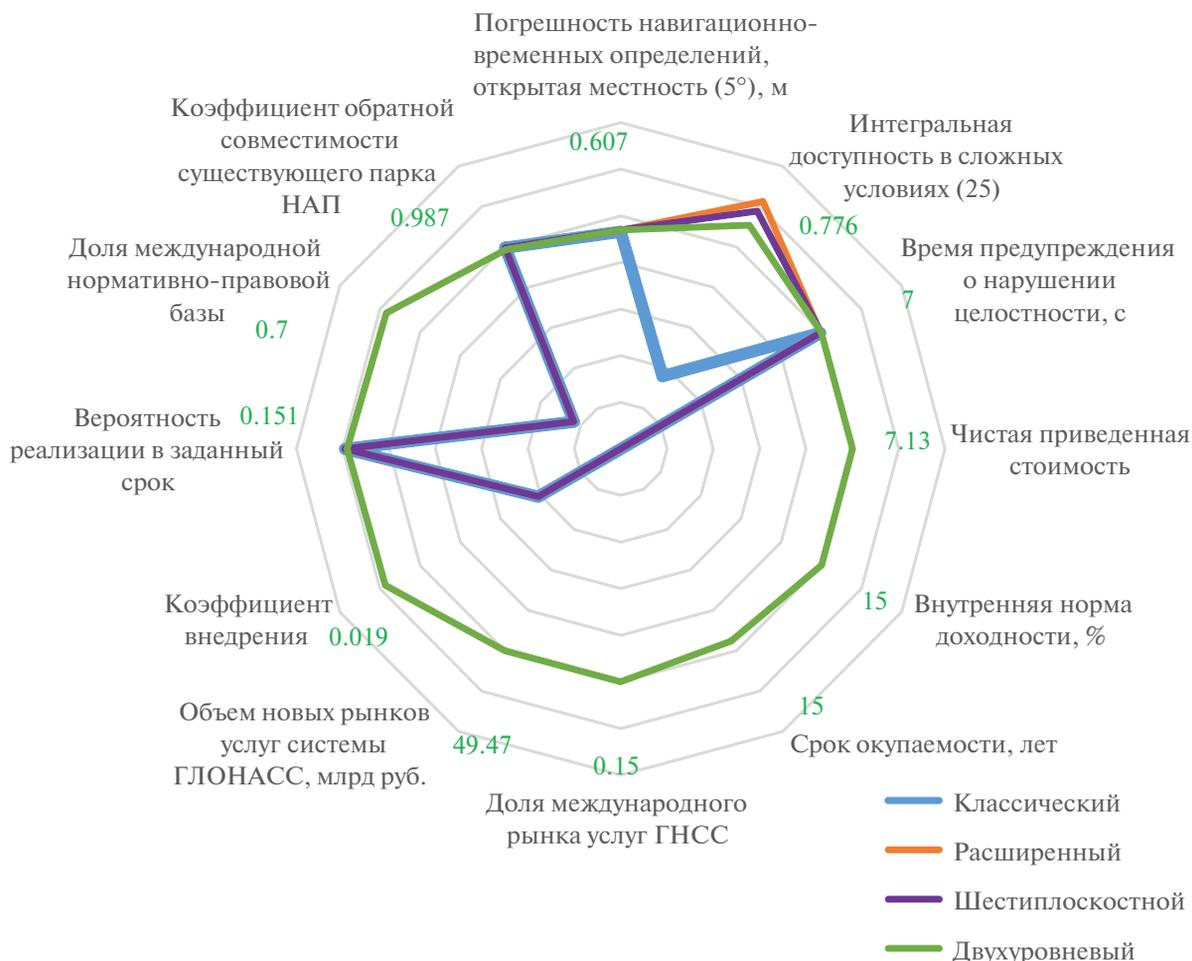


Рис. 14. Сравнительный анализ сценариев развития системы ГЛОНАСС

Таким образом, реализация ФЦП ГЛОНАСС оказывает стимулирующее воздействие на темпы экономического роста, динамику промышленного производства и инвестиционную активность, а также позволяет добиться устойчивого увеличения уровня занятости. Рост экономики и улучшение показателей рынка труда в свою очередь ведут к формированию устойчивого доходного потока в бюджеты различного уровня и фонды социального страхования.

5. Применение комплексной методологии. Общая применимость комплексной методологии оценки эффективности навигационных систем иллюстрируется ее использованием при решении задачи выбора сценариев развития системы ГЛОНАСС [8]. Рассматривались четыре основных сценария развития: классический (с неизменной ОГ); расширенный (с двумя дополнительными космическими аппаратами (КА) в каждой плоскости, образующими антиподную пару); шестиплоскостной (с шестью дополнительными КА в трех дополнительных плоскостях); двухуровневый (с дополнительным комплексом из шести КА в трех плоскостях на высоких орбитах с возможным предоставлением новых услуг).

С учетом необходимости проведения комплексной оценки, а также применения только достоверных верифицированных исходных данных использовались характеристики, сгруппированные в три основные области проведения оценки: функциональная эффективность; экономическая эффективность; эффективность системы нормативного регулирования.

Графические результаты сравнительного анализа представлены на рис. 14 в виде паутинной диаграммы.

Классический, расширенный и шестиплоскостной сценарии в целом сходны, за исключением разницы в характеристике доступность в сложных условиях (за счет повышения количества КА и плоскостей). Доступность максимальна для расширенного сценария, далее идут шестиплоскостной и двухуровневый.

В части характеристики двухуровневого сценария можно отметить следующее:

в отличие от первых трех сценариев он может быть оценен как классический инвестиционный проект (в показателях – внутренняя норма доходности, срок окупаемости) и является единственным окупаемым сценарием;

за счет возможности предоставления дополнительных услуг он также выигрывает в экономических характеристиках за счет роста доли международного рынка услуг ГНСС, роста объема новых рынков услуг системы ГЛОНАСС и в характеристиках эффективности международной деятельности.

Лицо, принимающее решение, в данном случае может использовать различные подходы к решению. Поскольку это классическая задача многокритериальной оптимизации, в данном случае применима парето-оптимизация с фиксированием в виде ограничения критерия эффективности системы нормативного регулирования и решением плоской задачи.

Таким образом, двухуровневый сценарий является наиболее экономически и коммерчески привлекательным при сопоставимом уровне характеристик функциональной эффективности, если сравнивать с расширенным и шестиплоскостным сценариями.

Заключение. В настоящее время критически важными при оценке эффективности становятся прослеживаемость, повторяемость, достоверность, взаимное признание результатов оценки. В подходе, предложенном в данной статье, это обеспечивается достоверными (верифицированными) исходными данными; созданием и применением систем описания характеристик, исчерпывающе рассматривающих предметную область; разработкой и использованием формализованных методик расчета.

Решена проблема исследования научно-методологических основ комплексной оценки эффективности, для этого:

разработан набор классификаторов, позволивший сократить области проведения оценок до трех основных и сформировать набор подходов, средств и методов по различным областям оценки для каждой конкретной классифицированной задачи, который дает возможность проводить комплексную оценку эффективности;

созданы методы и методики по трем областям проведения оценок: функциональной эффективности; эффективности системы нормативного регулирования; экономической эффективности.

Показано применение научно-методологических основ при решении ряда практических задач (в том числе сертификация услуг системы ГЛОНАСС в интересах международных потребителей; мониторинг, контроль и подтверждение характеристик ГНСС в международных организациях; сравнительный анализ различных систем нормативного регулирования (и вариантов их построения); совершенствование национальной системы нормативного регулирования в целом и различных вариантов ее возможного построения, среднесрочного и долгосрочного стратегического планирования государственных программ; оценка их эффективности и реализуемости; выбор сценария развития системы ГЛОНАСС).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карутин С.Н., Малышев В.В., Болкунов А.И., Лысенко В.В., Рейтор К.И. Разработка научно-методологических основ комплексной оценки эффективности навигационных систем // Полет. 2021. Вып. 8. С. 8–24.
2. Красильщиков М.Н., Кружков Д.М., Пасынков В.В. Современные задачи совершенствования координатно-временного обеспечения ГЛОНАСС и перспективные методы их решения. I. Совмещение систем координат, используемых различными информационными технологиями в интересах уточнения положения геоцентра // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 4. С. 156–165.
3. Krasil'shchikov M.N., Kruzchkov D.M., Grechkoseev A.K., Mararescul T.A. Refining the Earth Orientation Parameters Onboard Spacecraft: Concept and Information Technologies // J. of Computer and Systems Sciences International. 2020. V. 59. № 4. P. 598–608.
4. Малышев В.В., Пивянский С.А. Расширенный метод уверенных суждений ЛПР // Системный анализ, управление и навигация. Тез. докл. М.: Изд. МАИ, 2019. С. 98–99.
5. Карутин С.Н., Болкунов А.И., Каплев С.А., Панов С.А., Тнкозян В.Л. Способ оценки эксплуатационных характеристик услуги абсолютной навигации системы ГЛОНАСС // Патент на изобретение № 2722092 (RU), 2020.
6. Болкунов А.И., Каплев С.А. Стандарт эксплуатационных характеристик открытого сервиса (СТЭХОС). Приложение А. Методики расчета эксплуатационных характеристик. Редакция 2.2, 2019. [Электронный ресурс]. URL: https://www.glonass-iac.ru/GLONASS/stehos/stehos_app_A.pdf.
7. Карутин С.Н., Болкунов А.И., Абраменков Г.В., Донченко С.И., Кондрашин М.А., Ревнивых И.С., Корчагин В.А., Царёв В.М. Концепция сертификации услуг системы ГЛОНАСС // Полет. 2019. Вып. 7. С. 28–38.
8. Карутин С.Н., Панов С.А., Болкунов А.И., Можаров И.В., Каплев С.А., Игнатович Е.И., Яремчук В.И. Стратегия развития системы ГЛОНАСС // Полет. 2019. Вып. 10. С. 7–20.

**СЛОЖНЫЕ ТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ
И ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩИЕ КОМПЛЕКСЫ**

УДК 681.51

**ПРЕДОТВРАЩЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ
ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ АЛГОРИТМАМИ
УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ НЕЛИНЕЙНОЙ КОРРЕКЦИИ¹**© 2022 г. Ю. С. Зайцева^{a,b}^aИПМаш РАН, СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия^bЛУТ, Финляндия, Ланпеевранта

e-mail: juliazaytsev@gmail.com

Поступила в редакцию 20.02.2021 г.

После доработки 20.01.2022 г.

Принята к публикации 31.01.2022 г.

Инженерные системы содержат исполнительные приводы, которые имеют ограничение на тяговые усилия, поэтому наличие нелинейностей в виде насыщения их скорости и уровня сигнала часто встречаются в системах управления. Широко применяют пропорционально-интегрально-дифференциальный регулятор, в котором возможен так называемый эффект возбуждения интегратора, или виндап, возникающий при выходе регулятора на неустойчивые состояния. Предотвращение возбуждения интегратора осуществляют путем синтеза регулятора с обратной связью, полученной с помощью вычитания входного и выходного сигналов нелинейности. Однако конструктивно такой алгоритм возможно реализовать не на всех объектах, также при синтезе существуют вычислительные трудности. Предлагается применить метод нелинейной коррекции систем. Введение в контур управления нелинейного корректирующего устройства позволяет формировать амплитудную и фазовую частотные характеристики гармонически линеаризованной системы независимо друг от друга. Работа полученной скорректированной системы проиллюстрирована на примере системы управления летательным аппаратом в боковом угловом направлении. Изложен сравнительный анализ статического антивиндап-регулятора и нелинейной коррекции в частотно-временной области. Вычислены обобщенные функции чувствительности для линейной и нелинейной систем для различных законов управления. Нелинейная коррекция при интегральном законе управления допускает более широкий диапазон амплитуд входных сигналов.

DOI: 10.31857/S0002338822030155

Введение. Несмотря на то, что в инженерной практике системы нелинейные, линейные модели описывают их поведение с достаточной точностью для анализа в окрестности рабочей точки. Физические исполнительные приводы по своей природе имеют ограничения на величину амплитуды, скорости сигнала или мощности. Из-за внезапных внешних возмущений или изменения режима работы, например, при пуске ошибка управления может значительно увеличиться. Тогда выходной сигнал регулятора становится больше, чем сигнал, приводящий систему в действие, т.е. происходит насыщение исполнительного механизма [1, 2]. При интегральных алгоритмах управления с насыщением по входу переходные процессы могут протекать дольше и со значительным перерегулированием. Поскольку при насыщении изменения входного сигнала системы не влияют на вход, обратная связь прерывается и в регуляторе могут развиваться как устойчивые, так и неустойчивые режимы. В результате в системе могут появиться нежелательные колебательные процессы, вплоть до потери устойчивости [3–5]. Это явление называют возбуждением интегратора или виндапом (от англ. wind up) [6, 7]. Возбуждение интегратора можно избежать путем увеличения мощности исполнительных приводов, но это решение всегда связано с компромиссом между стоимостью и технологическими требованиями и подходит не для всех систем. Например, в аэрокосмической технике налагаются ограничения на массу и размеры исполнительных механизмов, при этом они зачастую работают на максимальном уровне своей

¹ Данная работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2021-573).

мощности. Для решения данной проблемы разработаны алгоритмические средства подавления возбуждения интегратора на основе теории автоматического регулирования. Распространенным подходом является введение обратной связи по разности сигналов между входом и выходом нелинейности с коэффициентом усиления, который может представлять собой либо статический, либо динамический фильтр [7, 8]. Основным методом синтеза – решение линейно-матричных неравенств с накладываемыми ограничениями на область устойчивости. Известны работы, в которых синтез реализуется при условии обладания системой свойства конвергенции [9–11].

Однако технически реализовать антивиндап-регулятор достаточно сложно и возможно не на всех системах, при этом при синтезе динамического антивиндап-регулятора существуют вычислительные трудности, связанные с нелинейной зависимостью выхода регулятора от его вектора состояния. В связи с чем в настоящей статье предлагается предотвратить возбуждение интегратора с помощью метода последовательной нелинейной коррекции, которая хорошо себя зарекомендовала при решении близкой задачи – предотвращении колебаний, вызванных летчиком, показанной в работах [1, 4, 12–14].

1. Метод нелинейной коррекции. Как известно, наличие нелинейностей в системе может существенно ухудшить качество регулирования, поэтому при проектировании таких систем для улучшения показателей качества их работы широко применяют линейные и нелинейные корректирующие устройства [15, 16]. Включение корректирующих устройств в контур системы управления позволяет сформировать заданные динамические качества системы, в том числе скомпенсировать влияние нелинейной статической характеристики, подавить автоколебания, уменьшить инерционность системы и обеспечить в ней необходимые запасы устойчивости.

В современных системах управления чаще применяют нелинейные корректирующие устройства (НКУ), так как линейные корректирующие устройства имеют ограниченные возможности для получения высоких показателей качества, а также меньшую помехозащищенность и надежность действия систем [4, 12, 15]. Среди НКУ выделяют класс псевдолинейных корректирующих устройств, которые позволяют формировать эквивалентные амплитудные и фазовые характеристики независимо друг от друга, что важно для нелинейных систем, в которых динамика зависит не только от частоты, но и амплитуды входного сигнала.

Свойством независимости фазовой характеристики от амплитудной обладает нелинейный фильтр с фазовым опережением, описываемый следующими уравнениями [15, 16]:

$$\begin{aligned} y(t) &= |ku(t)| \operatorname{sign} x(t), \\ X(s) &= W_p(s)U(s), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где t – время, u, y – вход и выход фильтра, k – постоянный коэффициент, $X(s), U(s)$ – изображения по Лапласу функций $x(t), u(t)$, s – комплексная переменная, x – сигнал на выходе фазоопережающего фильтра $W_p(s)$, имеющего передаточную функцию:

$$W_p(s) = \frac{T_2 s + 1}{T_1 s + 1}, \quad (1.2)$$

где $0 < T_1 < T_2$ – постоянные времена фильтра. Этот фильтр позволяет получить фазовое опережение без изменения амплитуды. В случае если помимо изменения фазы требуется изменить амплитуду, то в амплитудную ветвь фильтра (1.1) вводят фильтр низких частот с передаточной функцией:

$$W_a(s) = \frac{1}{T_s + 1}, \quad (1.3)$$

где T – постоянная времени.

С помощью метода гармонической линеаризации из уравнений (1.1) получают эквивалентную частотную характеристику в виде коэффициентов, зависящих только от частоты, которые имеют следующий вид [15, 17, 18]:

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{k}{\pi} (\pi - 2\phi + \sin 2\phi), \\ b(\omega) &= \frac{k}{\pi} (1 - \cos 2\phi), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\phi(\omega)$ – фазовый сдвиг, $\phi(\omega) = \arctan(\omega T_2) - \arctan(\omega T_1) > 0$ для $\forall \omega > 0$, величина которого регулируется параметрами T_1, T_2 . Тогда для (1.1) с учетом (1.4) эквивалентная амплитудная характеристика будет описываться как $q = a(\omega)^2 + b(\omega)^2$, а эквивалентная фазовая характеристика выражается как $\mu = \arctan(b(\omega)/a(\omega))$. Для корректирующего устройства, содержащего фильтр $W_a(s)$, выражения (1.4) имеют более громоздкий вид и приведены в [19].

Положительный эффект введения НКУ в пилотируемые системы управления полетом описан в следующих работах. В [4] показано, что колебания, вызванные пилотом по причине ограничения управляющей поверхности самолета, подавляются путем введения в контур управления нелинейного фильтра с фазовым опережением (1.1). Наличие скрытых колебаний и предельных циклов в асимптотически устойчивой линейной системе управления самолетом в продольном направлении показано в [13, 20]. Появление этих нежелательных колебательных процессов также предотвращают с помощью фильтра (1.1). В [12, 21] нелинейные колебания углового движения дистанционно управляемого беспилотного летательного аппарата (ЛА) подавляют с помощью фильтра с отдельными каналами для амплитуды и фазы, содержащего (1.2), (1.3).

2. Применение нелинейной коррекции для подавления эффекта возбуждения интегратора для случая управления углом рыскания ЛА. Рассмотрим линеаризованную модель бокового углового движения ЛА, описываемого следующими уравнениями [22, 23]:

$$\begin{cases} \dot{\beta}(t) = \alpha_z^\beta \beta(t) + \cos \alpha^* \omega_y(t) + \alpha_z^{\delta_r} \delta_r(t), \\ \dot{\omega}_y(t) = \alpha_{m_y}^\beta \omega_y(t) + \alpha_{m_y}^{\omega_y} \omega_y(t) + \alpha_{m_y}^{\delta_r} \delta_r(t), \\ \dot{\psi}(t) = \omega_y(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

где $\beta(t)$ – угол скольжения ЛА, $\psi(t), \omega_y(t)$ – угол и угловая скорость рыскания, α^* – угол атаки, $\alpha_z^\beta, \alpha_z^{\delta_r}, \alpha_{m_y}^\beta, \alpha_{m_y}^{\omega_y}, \alpha_{m_y}^{\delta_r}$ – коэффициенты линеаризованной модели ЛА. Численные значения коэффициентов модели (2.1): $\alpha_z^\beta = -0.152, \alpha_z^{\delta_r} = -0.032, \alpha_{m_y}^{\omega_y} = -0.136, \alpha_{m_y}^{\delta_r} = -1.46, \alpha = 0.4363$ рад.

Сервопривод руля направления описывается следующими уравнениями второго порядка [4, 14]:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_r(t) = \omega_r(t), \\ \dot{\omega}_r(t) = k_\sigma (\sigma_r(t) - \delta_r(t)) - k_2 \omega_r(t), \end{cases}$$

где $\delta_r(t), \omega_r(t)$ – угол и угловая скорость отклонения руля, k_σ, k_2 – коэффициенты передачи, $k_\sigma = 67.2 \text{ с}^{-2}, k_2 = 11.5 \text{ с}^{-1}$. Таким образом, передаточная функция от сигнала управления $\sigma_r(t)$ к углу рыскания $\psi(t)$ имеет вид [10]

$$W_\psi^{\sigma_r}(s) = \frac{-98.2(s + 0.113)}{s(s^2 + 0.288s + 1.61)(s^2 + 11.5s + 67.2)}. \quad (2.2)$$

Для системы (2.2) без учета насыщения проведен синтез пропорционально-интегрально-дифференцирующего (ПИД) регулятора с параметрами $k_p = 0.37, k_i = 0.46 \text{ с}^{-1}, k_D = 1.8 \text{ с}$ [10].

Положим, что характеристика функции насыщения описывается следующими уравнениями [24]:

$$\text{sat}_{\bar{\delta}} = \begin{cases} \bar{\delta}_e & \text{при } |\delta_e| \leq \bar{\delta}_e, \\ \delta \cdot \text{sign}(\delta_e), & \text{иначе} \end{cases}$$

где $\bar{\delta}$ – усредненная величина насыщения скорости привода.

Учтем влияние насыщения скорости привода входного сигнала, лежащее в пределах от -20 до 20 град/с, ограничение уровня сигнала составляет от -25 до 25° . Как отмечено выше, при некоторых видах входного воздействия наличие насыщения может привести к ухудшению качества управления и нежелательным колебательным процессам. Проиллюстрируем этот факт на рис. 1, где изображены переходные процессы при гармоническом входном воздействии с амплитудами $5^\circ; 15^\circ$, частотой 0.025 с^{-1} .

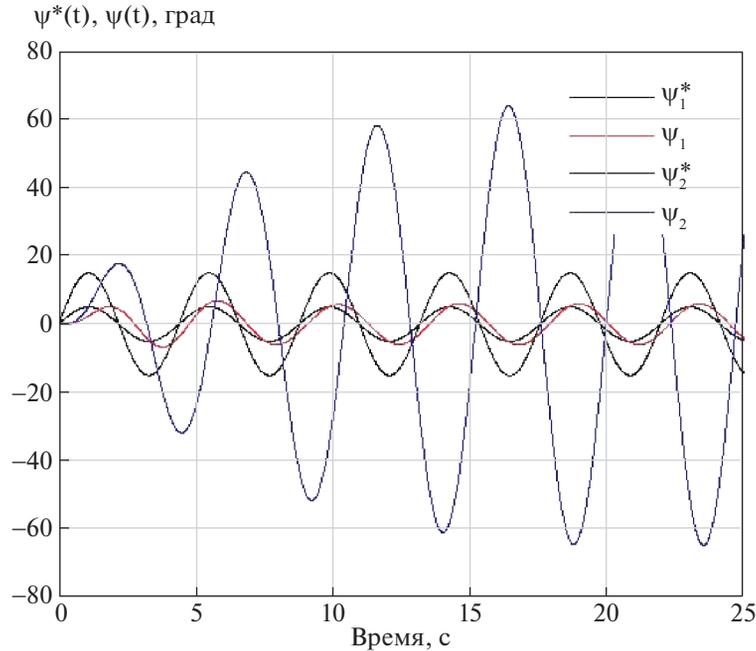


Рис. 1. Временные процессы по углу рыскания

Из рис. 1 видно, что при амплитуде входного сигнала $\psi_1^*(t) = 5$ град, выходной сигнал $\psi_1(t)$ устойчив, при увеличении амплитуды $\psi_2^*(t) = 15$ град наблюдается выходной сигнал $\psi_2(t)$ с амплитудой, превышающий входную амплитуду в 4 раза.

Введем в контур управления НКУ, описываемое (1.1) с параметрами фильтром $T_1 = 0.001$ с, $T_2 = 10$ с так, что его вход соединяется с выходом ПИД-регулятора. В результате моделирования переходный процесс по углу рыскания имеет вид, представленный на рис. 2, где $\psi^*(t) = 15\sin(0.025t)$ — входной сигнал, $\psi(t)$ — выход системы. Из рисунка видно, что переходный процесс устойчивый.

В подавляющем большинстве работ под проблемой антивиндап-коррекции понимается обеспечение глобальной асимптотической устойчивости состояния равновесия автономной системы с насыщением и ограничение траекторий неавтономной системы малым коэффициентом передачи \mathcal{L}_2 [7, 8, 25]. Недостаточность требования глобальной асимптотической устойчивости показана в работах [26, 27] и привела к использованию другого подхода, основанного на свойстве конвергенции системы [11, 28], позволяющего проводить синтез регулятора независимо от начальных условий и вида входного сигнала.

Выполним теперь сравнительный анализ системы с нелинейной коррекцией, описанной выше, и статическим антивиндап-регулятором, представленным в [10], на основе свойства конвергенции системы для всего диапазона рабочих амплитуд и частот с помощью вычисления обобщенной функции чувствительности. Для неавтономной равномерно конвергентной системы в форме Лурье

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= f(\mathbf{x}, r), \\ \mathbf{y}(t) &= h(\mathbf{x}, r), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^m$ — вектор пространства состояния, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}$ — выход системы, $r(t)$ — входной сигнал, $r(t) = a \cdot \sin(\omega t)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ — рассогласование, такое, что $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = r(t) - \mathbf{y}(t)$, существует периодическое решение $\bar{\mathbf{x}}(t)$ с соответствующим выходом $\bar{\mathbf{y}}(t)$ и $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = r(t) - \bar{\mathbf{y}}(t)$.

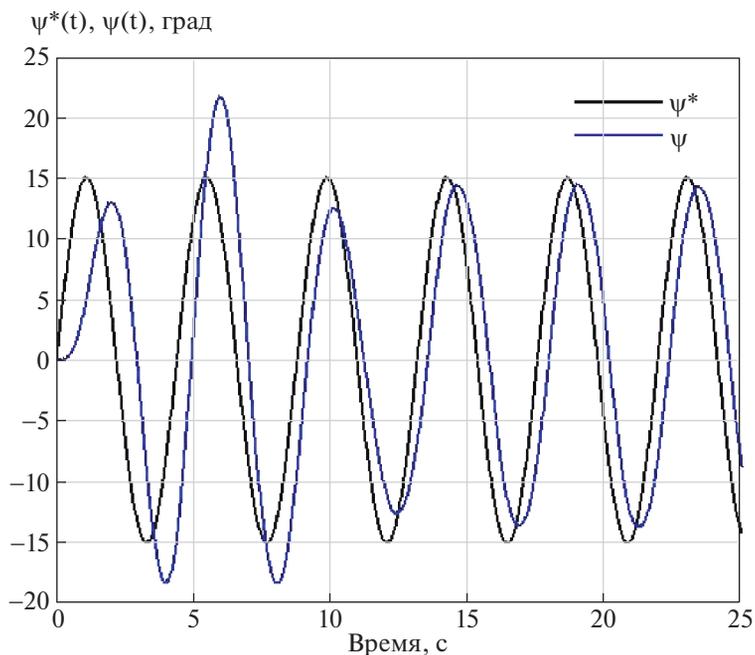


Рис. 2. Временные процессы по углу рыскания скорректированной системы

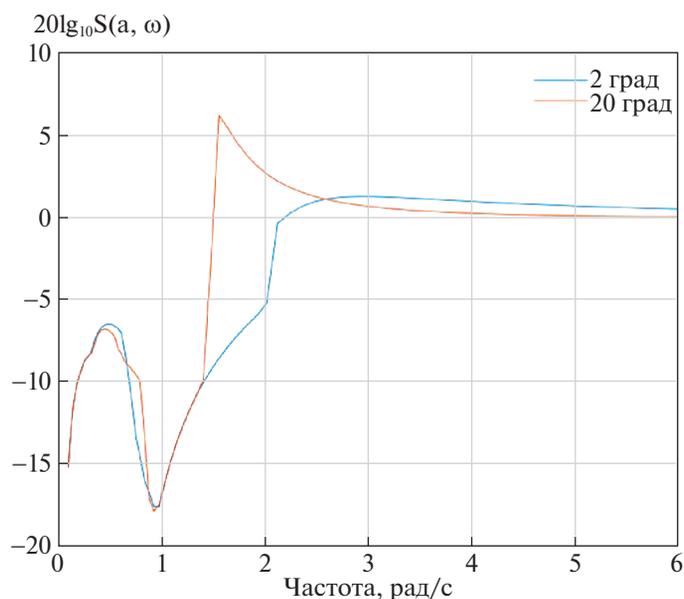


Рис. 3. Функция чувствительности для скорректированной системы

Тогда, обобщенная функция чувствительности для системы (2.3) имеет следующий вид [18, 29, 30]:

$$S(a, \omega) = \frac{\|\bar{\epsilon}\|_2}{\|r\|_2}, \tag{2.4}$$

где

$$\|z\|_2 = \left(\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} z^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}.$$

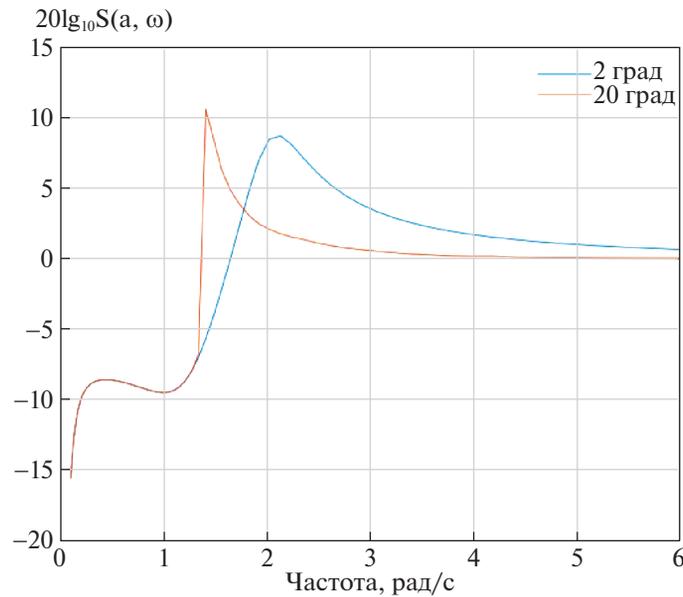


Рис. 4. Функция чувствительности для системы с антивиндап-регулятором

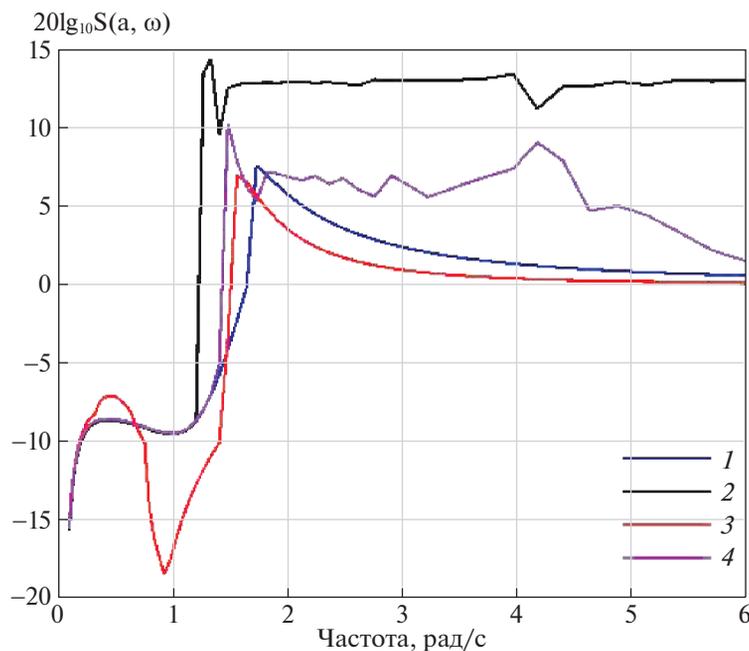


Рис. 5. Функция чувствительности для системы с различными законами управления

Согласно (2.4), на рис. 3 изображены функции чувствительности для системы с НКУ для малой и большой амплитуд входного сигнала. Аналогичная иллюстрация представлена на рис. 4 для системы с антивиндап-регулятором.

Сравнительный анализ рис. 3, 4 показывает, что величина функции чувствительности в диапазоне 1.5–3 рад/с для системы с антивиндап-регулятором приблизительно в 2 раза выше при больших амплитудах, чем для системы с НКУ. Для малых амплитуд величина функции чувствительности стремится к нулю для системы с НКУ, тогда как для системы с антивиндап-регулятором она составляет около восьми. Заметим, что при уменьшении k_A величина функции чувствительности резко возрастает.

На рис. 5 изображены обобщенные функции чувствительности, вычисленные для исследуемой системы при амплитуде входного сигнала 15° , с различными законами управления: 1 – линейная система с ПИД-регулятором, 2 – система с ПИД-регулятором и ограничением скорости привода, 3 – система с ПИД-регулятором и НКУ, 4 – система с антивиндап-коррекцией.

Из рис. 5 видно негативное влияние нелинейности при интегральном законе управления, а также наименьшее влияние на ошибку управления в области частот 1–3 рад/с при законе управления, содержащем ПИД-регулятор и НКУ.

Заключение. Проведена нелинейная коррекция системы с интегральным законом управления. В качестве объекта управления представлена модель ЛА, описывающая его боковое угловое движение. При ограничении скорости привода руля направления и больших амплитудах входного сигнала ошибка управления не парируется регулятором, что приводит к нежелательным колебательным процессам. Для решения этой проблемы в контур управления введено нелинейное корректирующее устройство. В результате моделирования было показано, что диапазон амплитуд входного сигнала достигает 20° при насыщении сигнала, равным 20 град/с. По сравнению с работой статического антивиндап-регулятора нелинейная коррекция позволяет расширить диапазон рабочих сигналов. Помимо этого, конструктивно нелинейную коррекцию проще реализовать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андриевский Б.Р., Кузнецов Н.В., Леонов Г.А. Методы подавления нелинейных колебаний в астатических системах автопилотирования летательных аппаратов // Изв. РАН. ТИСУ. 2017. № 3. С. 118–134. <https://doi.org/10.7868/S0002338817030040>
2. Andrievsky B., Arseniev D., Kuznetsov N., Zaitceva I. Pilot-Induced Oscillations and Their Prevention // Cyber-Physical Systems and Control. Lecture Notes in Networks and Systems. Cham: Springer, 2020. V. 95. P. 108–123. https://doi.org/10.1007/978-3-030-34983-7_11
3. Андриевский Б.Р., Кузнецов Н.В., Кузнецова О.А., Леонов Г.А., Мокаев Т.Н. Локализация скрытых колебаний в системах управления полетом // Тр. СПИИРАН. 2016. Т. 6. № 49. С. 5–31. <https://doi.org/10.15622/sp.49.1>
4. Andrievsky B., Kravchuk K., Kuznetsov N.V., Kuznetsova O.A., Leonov G.A. Hidden Oscillations in the Closed-loop Aircraft-pilot System and Their Prevention // Proc. 6th IFAC Workshop on Periodic Control Systems. 2016. V. 49. P. 30–35. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.07.970>
5. Andrievsky B., Kudryashova E., Kuznetsov N., Kuznetsova O.A., Mokaev T.N. Hidden Oscillations in an Active Flutter Suppression System and Flight of a Manned Aircraft // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace. 2019. V. 10. P. 357–371. Available at: <http://nonlinearstudies.com/index.php/mesa/article/view/2002>.
6. Hippe P. Windup in Control: Its Effects and Their Prevention. N. Y.: Springer-Verlag, 2006. 315 p.
7. Hussain M., Rehan M., Ahmed S., Abbas T., Tufail M. A Novel Approach for Static Anti-Windup Compensation of One-sided Lipschitz Systems Under Input Saturation // Applied Mathematics and Computation. 2020. V. 380. P. 125229. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125229>
8. Tarbouriech S., Queinnec I., Priour C. Nonstandard Use of Anti-Windup Loop for Systems with Input Backlash // IFAC J. of Systems and Control. 2018. V. 6. P. 33–42. <https://doi.org/10.1016/j.ifacsc.2018.10.003>
9. Andrievsky B., Kuznetsov N., Leonov G. Convergence-based Analysis of Robustness to Delay in Anti-windup Loop of Aircraft Autopilot // Proc. IFAC Workshop on Advanced Control and Navigation for Autonomous Aerospace Vehicles. IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). Seville, Spain: IFAC, 2015. V. 48. № 9. P. 144–149. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2015.08.074>
10. Леонов Г.А., Андриевский Б.Р., Кузнецов Н.В., Погромский А.Ю. Управление летательными аппаратами АУ-коррекцией // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2012. № 3. 36 с. Available at: <https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2012.3/article.1.1.html>
11. Turner M. C., Sofrony J., Prempain E. Anti-windup for Model-reference Adaptive Control Schemes with Rate-limits // Systems and Control Letters. 2020. V. 137. P. 1–9. [104630]. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2020.104630>
12. Zaitceva I. Nonlinear Oscillations Prevention in Unmanned Aerial Vehicle // Proc. of 11 Majorov Intern. Conf. on Software Engineering and Computer Systems. V. 2590. St-Petersburg, Russia, 2019. 8 p. Available at: <http://ceur-ws.org/Vol-2590/short3.pdf>

13. *Andrievsky B., Kuznetsov N., Kuznetsova O., Leonov G., Seledzhi S.* Nonlinear Phase Shift Compensator for Pilot-induced Oscillations Prevention // Proc. IEEE Europ. Modelling Sympos. on Computer Modelling and Simulation. Madrid, Spain, 2016. P. 225–231. <https://doi.org/10.1109/EMS.2015.43>.
14. *Андреевский Б.Р., Зайцева Ю.С., Кудряшова Е.В., Кузнецов Н.В., Кузнецова О.А.* Обзор методов предотвращения раскачки самолета летчиком // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2020. № 2. С. 131–172. <https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2020.2/article.1.8.html>.
15. *Очиров В.В., Скороспешкин М.В.* Псевдолинейный ПИД-регулятор для системы второго порядка // Сб. тр. 13-й Междунар. научно-практической конф. студентов, аспирантов и молодых ученых. Т. 1. Томск, 2016. С. 181–182. <http://earchive.tpu.ru/handle/11683/17128>.
16. *Зельченко В.Я., Шаров С.Н.* Нелинейная коррекция автоматических систем. Л.: Судостроение, 1981. 167 с.
17. *Chechurin L., Chechurin S.* Physical fundamentals of oscillations. Frequency Analysis of Periodic Motion Stability. Springer, 2019. 264 p.
18. *Андреевский Б.Р., Фрадков А.Л., Бобцов А.А.* Методы анализа и синтеза нелинейных систем управления. СПб.: Институт компьютерных исследований, 2018. 336 с.
19. Нелинейные корректирующие устройства в системах автоматического управления / Под ред. Е.П. Попова. М.: Машиностроение, 1971. 466 с.
20. *Кузнецов Н.В.* Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 5. С. 5–27. <https://doi.org/10.31857/S0002338820050091>
21. *Зайцева Ю.С.* Подавление автоколебаний при дистанционном управлении БПЛА // Тр. 11-й общероссийской молодежной научно-практической конф. “Молодежь. Техника. Космос”. Т. 1. СПб.: 2019. С. 245–249. https://www.voennmeh.ru/images/docs/science/MTK_2019_trudi_tom1.pdf.
22. *Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В.* Аэродинамика самолета: динамика продольного и бокового движения. М.: Машиностроение, 1979. 352 с.
23. *Stengel R.* Lecture Notes in Aircraft Flight Dynamics. Princeton, USA. Princeton University, 2018. <http://www.stengel.mycpanel.princeton.edu/MAE331Lecture15.pdf>.
24. *Zaitceva I., Chechurin L.* The Estimation of Aircraft Control System Stability Boundaries by the Describing Function Method // Cybernetics and Physics. 2020. V. 9. № 2. P. 117–122. <https://doi.org/10.35470/2226-4116-2020-9-2-117-122>
25. *Buratti N., Invernizzi D., Lovera M.* Experimental Validation of LMI-based Anti-Windup Compensators for Attitude Control in Multirotor UAVs // Proc. 21st IFAC Sympos. on Automatic Control in Aerospace. Cranfield, UK, 2019. V. 52. № 12. P. 164–169. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2019.11.191>.
26. *Pogromsky A., Van den Berg R.* Frequency Domain Performance Analysis of Lur’e Systems // IEEE Transaction on Control Systems Technology. 2014. V. 22. № 5. P. 1949–1955. <https://doi.org/10.1109/TCST.2013.2296097>
27. *Van den Berg R., Pogromsky A.Y., Leonov G.A., Rooda J.E.* Design of Convergent Switched Systems // Group Coordination and Cooperative Control. Lecture Notes in Control and Information Sciences. V. 336. Springer, 2006. P. 291–311. https://doi.org/10.1007/11505532_17
28. *Pavlov A., Van den Wouw N.* Convergent Systems: Nonlinear Simplicity // Nonlinear Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences. V. 470. Springer, 2017. P. 51–77. https://doi.org/10.1007/978-3-319-30357-4_3
29. *Andrievsky B., Pogromsky A.Y., Rooda J.* Observer-based Production Control of Manufacturing Machines // Proc. 13th IFAC Sympos. on Information Control Problems in Manufacturing. Moscow, 2009. P. 264–269. <https://doi.org/10.3182/20090603-3-RU-2001.0088>.
30. *Andrievsky B., Kudryashova E., Kuznetsov N., Kuznetsova O.* Aircraft Wing Rock Oscillations Suppression by Simple Adaptive Control // Aerospace Science and Technology. 2020. V. 105. P. 106049. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2020.106049>

**НАВИГАЦИОННЫЕ
СИСТЕМЫ**

УДК 629.7.05

**О ПОДХОДАХ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТОВ
НАЧАЛА И ОКОНЧАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТА ПРИ ПОМОЩИ
ДАННЫХ БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ
НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ¹**© 2022 г. А. А. Авиев^а, А. В. Брагин^{б,*}, И. А. Папуша^б^аООО “НПК “Электрооптика”, Москва, Россия^бМГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*e-mail: avb9676@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.09.2021 г.

После доработки 27.10.2021 г.

Принята к публикации 29.11.2021 г.

Рассматривается задача автономного определения при помощи первичных и/или вторичных данных бесплатформенной инерциальной навигационной системы двух событий: начала движения объекта и его остановки, и, как следствие, определения интервалов неподвижности объекта. Задача имеет смысл для объектов аэродромного базирования, когда иные датчики движения отсутствуют, а также когда при рулежке объекта по полосам аэродрома он может останавливаться на неопределенное время. Детектирование интервалов неподвижности позволяет применить коррекцию бесплатформенной инерциальной навигационной системы по нулевой скорости или ZURP-коррекцию (Zero velocity UPdaTe), что важно для последующего функционирования бесплатформенной инерциальной навигационной системы.

Описаны два подхода к построению алгоритмов детектирования старта и остановки объекта. Первый основан на использовании первичной информации бесплатформенной инерциальной навигационной системы – показаний инерциальных датчиков (акселерометров, датчиков угловой скорости), второй – на применении вторичной информации (позиционных, скоростных, угловых данных автономного инерциального счисления). Оба подхода базируются на эвристических критериях, полученных опытным путем при обработке данных бесплатформенных инерциальных навигационных систем и с учетом специфики задачи.

Приводятся результаты тестирования разработанных алгоритмов на экспериментальных данных для бесплатформенных инерциальных навигационных систем навигационного класса точности.

DOI: 10.31857/S0002338822020032

Введение. Рассматривается задача автономного определения при помощи первичных и/или вторичных данных бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС), установленной на объекте, двух событий: начала движения объекта и его остановки. Задача имеет смысл для объектов аэродромного базирования, когда иные датчики движения отсутствуют, а также когда при рулежке объекта по полосам аэродрома он может останавливаться на неопределенное время. Детектирование интервалов неподвижности позволяет применить коррекцию БИНС по нулевой скорости или ZURP-коррекцию (zero velocity UPdaTe), что важно для последующего функционирования БИНС [1, 2].

Предполагается, что для решения задачи доступны только измерения инерциальных датчиков – акселерометров, датчиков угловой скорости, и/или выходная позиционная, скоростная, угловая информация БИНС. Требуется в текущем времени, по возможности с минимальным запаздыванием, сформировать в вычислителе БИНС бинарный признак (флаг) движения/остановки объекта. Далее соответствующие алгоритмические решения задачи для краткости будем называть датчиком движения (и остановки).

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00179).

В литературе встречается много подходов к построению датчика движения для целей пешеходной навигации [3]. Исследуются как традиционные варианты, основанные на выборе пороговых значений, с которыми сравниваются различные тестовые статистики [4–6], так и подходы, в которых используются методы машинного обучения [7–9]. Последние не рассматривались нами, поскольку требуют значительного объема вычислений и наличия обучающей выборки. Способ, описанный в [6], был опробован в условиях рассматриваемой задачи. Однако предложенные в [6] алгоритмические решения оказались неработоспособными для БИНС навигационного класса точности.

Предполагается, что носителем БИНС является летательный аппарат (ЛА). Корпус ЛА в процессе предполетной подготовки подвержен воздействию различных возмущающих факторов, не связанных с началом движения: ветровые возмущения, регламентная работа обслуживающего персонала, запуск и работа двигателей. Эти возмущения могут составить заметную часть полезного сигнала инерциальных датчиков БИНС. Естественно потребовать, чтобы датчик движения не срабатывал при воздействии этих возмущений. Выделим еще одну особенность построения датчика движения при определении именно момента остановки объекта. Особенность заключается в том, что к моменту остановки накопленные позиционные и скоростные ошибки инерциального счисления могут быть значимыми по уровню. Непосредственная проверка, например, условия близости к нулю значений компонент вектора скорости здесь не проходит в качестве индикаторной характеристики остановки.

Ниже предложены два варианта применения информации БИНС в алгоритмах датчика движения. Первый предполагает использование первичной информации БИНС (показаний акселерометров и датчиков угловой скорости (ДУС)), а второй – вторичной информации (навигационного решения БИНС). Оба алгоритма хорошо показали себя при тестировании на реальных данных, в том числе при объединении определяемых ими логических признаков движения или остановки.

1. Постановка задачи. Для БИНС авиационного применения и навигационного класса точности при помощи ее первичной и/или вторичной информации требуется в реальном времени с приемлемой задержкой сформировать бинарный признак движения (1 – наблюдается движение объекта, 0 – остановка).

Под БИНС навигационного класса точности далее будем понимать систему, позволяющую осуществлять ее автономную начальную выставку на неподвижном основании без привлечения информации о курсе.

В работе при отработке алгоритмов использовались экспериментальные данные БИНС навигационного класса точности, построенной на лазерных гироскопах и кварцевых акселерометрах.

Априорные технические условия решения задачи.

Объект по условиям активации навигационного режима БИНС неподвижен в течение первых нескольких минут. Это делается для реализации режима начальной выставки БИНС на неподвижном основании, когда определяются начальные значения параметров ориентации приборного трехгранника БИНС – углы истинного курса, крена, тангажа.

Предполагается, что доминантным направлением движения объекта при рулежке по аэродрому является направление вдоль его продольной оси.

Приемлемой задержкой формирования признака движения служит задержка в пределах первых единиц секунд.

Датчик движения не должен быть чувствителен к возмущениям, не связанным с началом движения: воздействие ветра; толчки, вызванные работой обслуживающего персонала объекта; включение двигателей и т.п.

2. Существующие подходы. Задача детектирования интервалов неподвижности объекта востребована в ряде специфических приложений. Однако в российских доступных публикациях, известных авторам, данная тема не обсуждалась (за исключением уже упомянутых работ по пешеходной навигации).

Опишем в общих чертах один из известных нам подходов к решению подобной задачи. Он заключается в анализе средней путевой скорости и ее приращения на секундном интервале, а также приращений углов ориентации на десятисекундном интервале. При непревышении указанными параметрами подобранных пороговых значений считается, что объект остановился.

В пешеходной навигации [4–9] датчик движения используется для обнаружения фаз опоры стопы при ходьбе. В остальных фазах шага движение неравномерно и сопровождается большими возмущениями (особенно при ударе о землю) в показаниях акселерометров и ДУС. Поэтому для

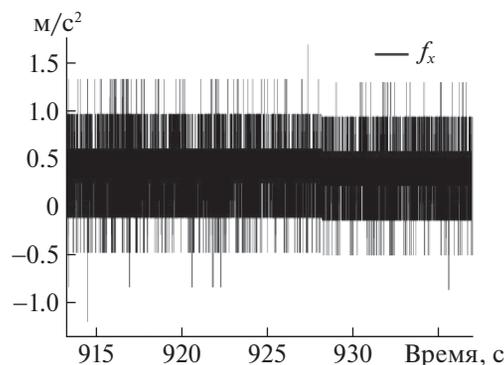


Рис. 1. Фрагмент записи “сырых” показаний продольного акселерометра неподвижного объекта при некотором возмущающем воздействии

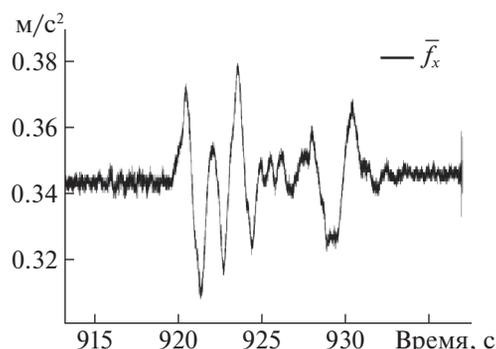


Рис. 2. Фрагмент показаний этого же акселерометра, сглаженных скользящим прямоугольным окном

обнаружения фазы опоры оказалось достаточно фиксировать значительное уменьшение уровня показаний датчиков на небольшом интервале. Еще одной особенностью датчиков движения в пешеходной навигации является их приспособленность к работе с данными низкочастотных инерциальных датчиков. Это также ограничивает возможности адаптации разработанных в [4–9] методов к рассматриваемой задаче.

3. Использование первичной информации БИНС. В условиях достаточно высокого уровня шумовых составляющих измерений инерциальных датчиков естественно применять их предварительную фильтрацию, что позволяет существенно уменьшить амплитуду этой составляющей. Последнее дает возможность получить качественные числовые характеристики, соответствующие интервалам стоянки, движения объекта и возмущающих воздействий. Для примера приведем графики на рис. 1, 2.

Здесь следует отметить, что выбор алгоритма фильтрации не является однозначным. Последовательно поступающие входные данные (“сырые” измерения инерциальных датчиков и/или навигационных параметров счисления) для задач реального времени следует обрабатывать в скользящем окне [10]. В общем случае алгоритм фильтрации определяется двумя характеристиками: весовой функцией окна или ядром и шириной окна. Первоначальной идеей было применение окна Ханна [10], поскольку оно по сравнению с прямоугольным окном при одинаковой их ширине дает на выходе более гладкую кривую (рис. 3, 4). Однако рекуррентная реализация окна Ханна в реальном времени в бортовом вычислителе БИНС является затруднительной ввиду большого числа операций на частоте решения навигационной задачи (400 Гц в рассматриваемом случае). Поэтому в предлагаемом алгоритме было решено обрабатывать данные прямоугольным окном, которое легко реализуется с помощью рекуррентного алгоритма.

Достаточно очевидно, что выбор ширины окна является компромиссом между возможностью ошибочно принять внешнее возмущение за действительное начало движения и минимизацией времени реакции на начало движения. Чем больше ширина окна, тем лучше “сглажены”

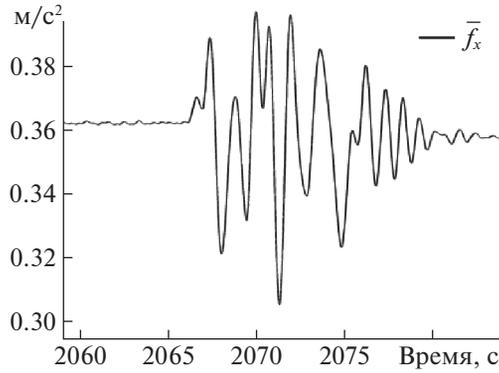


Рис. 3. Показания акселерометра при возмущающем воздействии, обработанные окном Ханна шириной 1 с

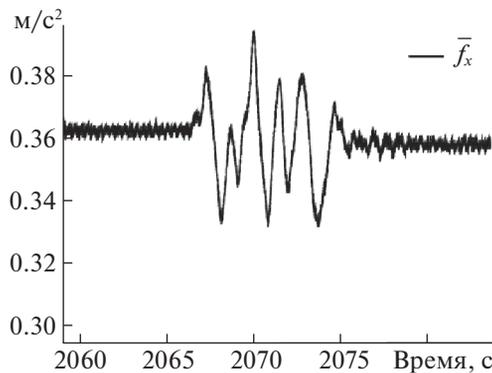


Рис. 4. Показания акселерометра при возмущающем воздействии, обработанные прямоугольным окном шириной 1 с

внешние воздействия, не связанные с движением, но в то же время увеличивается время запаздывания принятия решения о событии: объект движется или неподвижен. В разработанных алгоритмах на основе обработки экспериментальных записей БИНС исследуемого объекта ширина окна осреднения была выбрана равной 1 с.

Введем обозначения: $\{f_x(t_n), f_y(t_n), f_z(t_n), \omega_x(t_n), \omega_y(t_n), \omega_z(t_n)\}$ – показания блока инерциальных датчиков в текущий момент t_n , измеренные в приборной системе координат $Mxuz$, связанной с БИНС. Точка M – приведенный центр блока акселерометров. Оси приборной системы координат с точностью до погрешности установки совпадают с продольной, вертикальной и направленной вдоль “правого крыла” осями объекта. Будем следовать терминологии классиков инерциальной навигации – А.Ю. Ишлинского [11], В.Д. Андреева [12]: f_x, f_y, f_z – проекции внешней удельной силы, действующей на приведенную чувствительную массу блока акселерометров, измеряемой акселерометрами БИНС; $\{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}$ – соответствующие проекции абсолютной угловой скорости объекта (приборного трехгранника), измеряемые ДУС.

Средние значения измеряемых величин на секундном интервале $[t_{n-N}, t_n]$, $n \geq N$, вычисляются стандартным способом:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_m(t_n) &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=n-N}^n \omega_m(t_k), \quad m = x, y, z, \\ \bar{f}_l(t_n) &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=n-N}^n f_l(t_k), \quad l = x, z, \end{aligned} \quad (3.1)$$

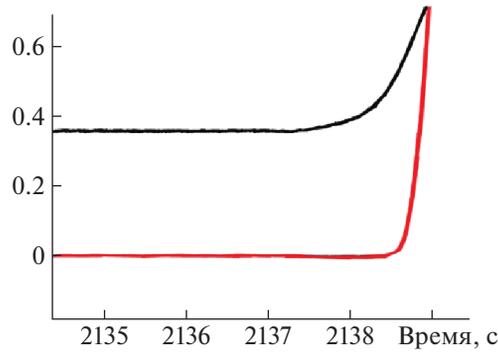


Рис. 5. Поведение \bar{f}_x , м/с² (черный) и $\bar{\omega}_y$, град/с (красный) на участке начала движения

где $N + 1$ – число отсчетов (измерений) на ширине секундного окна. Для частоты съема сигнала датчиков, равной 400 Гц, $N = 400$. Таким образом, в реальном времени в момент t_n доступны сглаженные значения $\{\bar{f}_x, \bar{f}_z\}$ показаний акселерометров и $\{\bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_z\}$ ДУС, относящиеся к моменту времени $(t_n - 0.5)$ с (середине скользящего окна осреднения).

Далее введем дополнительные индикаторные параметры: $\bar{f}^2(t_n) = \bar{f}_x^2(t_n) + \bar{f}_z^2(t_n)$ – квадрат модуля горизонтальной составляющей удельной силы, вычисленный по осредненным значениям из (3.1); $\bar{\omega}^2(t_n) = \bar{\omega}_x^2(t_n) + \bar{\omega}_y^2(t_n) + \bar{\omega}_z^2(t_n)$ – квадрат абсолютной угловой скорости, найденный по осредненным показаниям ДУС из (3.1).

Рассмотрим временной интервал $[t_0, t_n]$, где t_0 – начальное время решения задачи. Определим величины

$$\bar{F}_x(t_n) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \bar{f}_x(t_k), \quad \bar{F}_z(t_n) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \bar{f}_z(t_k). \tag{3.2}$$

Здесь $\bar{F}_x(t_n), \bar{F}_z(t_n)$ – средние на интервале $[t_0, t_n]$ значения “горизонтальных” компонент \bar{f}_x, \bar{f}_z удельной силы, вычисленные при помощи осредненных измерений акселерометров в моменты времени t_0, t_1, \dots, t_n ; $\bar{F}^2(t_n) = \bar{F}_x^2(t_n) + \bar{F}_z^2(t_n)$ – среднее на интервале $[t_0, t_n]$ значение квадрата модуля горизонтальной составляющей удельной силы.

В предложенном алгоритме критерий (логическое правило) для формирования признака начала движения основан на данных акселерометров, поскольку было замечено, что их реакция на движение объекта менее инерционна и опережает реакцию ДУС. Соответствующая иллюстрация сказанного отражена на рис. 5, 6.

Обработка экспериментальных данных показала, что начало движения характеризуется резким вертикальным скачком профиля кривой, построенной по сглаженным показаниям акселерометров, и возросшей на порядки амплитудой этих сигналов. Формализация наблюдаемых визуально из графиков индикаторных параметров позволила предложить эвристические критерии, при помощи которых предлагается определять момент начала движения объекта, а именно контролировать следующие параметры:

заметные превышения (скачки) сглаженных показаний продольного акселерометра \bar{f}_x относительно среднего значения \bar{F}_x (рис. 7):

$$|\bar{f}_x(t_n) - \bar{F}_x(t_n)| > \delta f_x^{start}, \tag{3.3}$$

вычисленную на интервале $[t_{n-L}, t_n]$ меру отклонения величины $\bar{f}^2(t_n)$ от ее среднего значения \bar{F}^2 во время стоянки (рис. 8):

$$\left| \frac{1}{L} \sum_{k=n-L}^n (\bar{f}^2(t_k) - \bar{F}^2)^2 \right| > \delta f^{2start}. \tag{3.4}$$

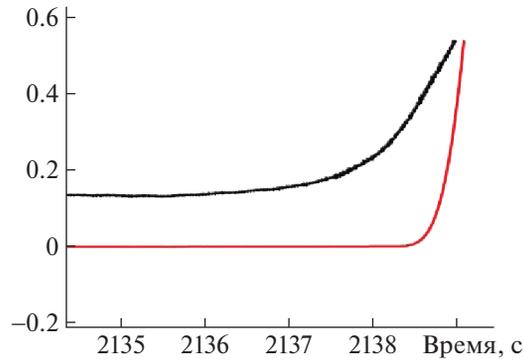


Рис. 6. Поведение \bar{f}^2 (черный) и \bar{w}^2 (красный) на участке начала движения

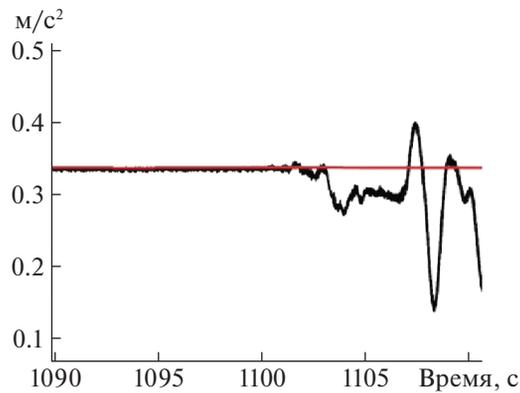


Рис. 7. Скачки показаний продольного акселерометра \bar{f}_x , м/с² (черный) относительно среднего значения \bar{F}_x , м/с² (красный)

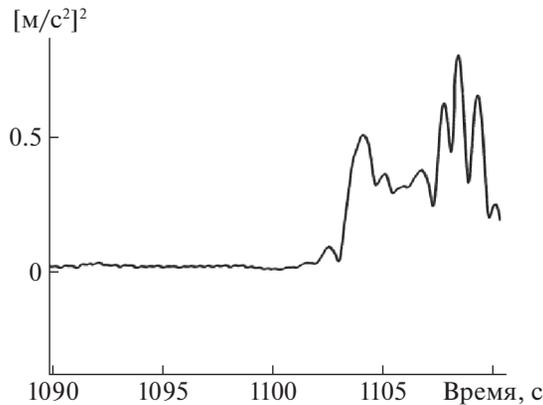


Рис. 8. Отклонение квадрата модуля горизонтальной составляющей удельной силы

Параметр L , задающий ширину интервала, выбран равным $L = N/2$, что соответствует ширине окна 0.5 с. Начало движения определяется по одновременному превышению контролируемыми величинами пороговых значений δf_x^{start} , δf^2^{start} в неравенствах (3.3), (3.4). На рис. 7, 8 приведены соответствующие иллюстративные графики.

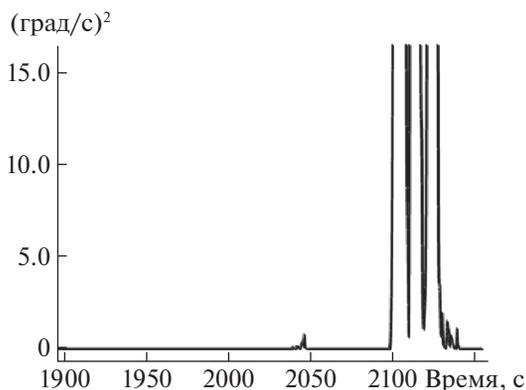


Рис. 9. Пример отклонения квадрата угловой скорости объекта от квадрата угловой скорости вращения Земли $\sigma(\bar{\omega}^2)$ на участках остановки при возмущающем воздействии и при движении

Для определения момента остановки объекта предложено рассматривать следующие параметры:

меру отклонения квадрата модуля сглаженной абсолютной угловой скорости $\bar{\omega}^2(t_k)$ от квадрата модуля угловой скорости u вращения Земли на интервале $[t_{n-L}, t_n]$:

$$\left| \frac{1}{L} \sum_{k=n-L}^n (\bar{\omega}^2(t_k) - u^2)^2 \right| < \delta\omega^{2\text{stop}}, \quad (3.5)$$

меру отклонения значений $\bar{f}^2(t_k)$ от средней величины \bar{F}^2 на интервале $[t_{n-L}, t_n]$:

$$\left| \frac{1}{L} \sum_{k=n-L}^n (\bar{f}^2(t_k) - \bar{F}^2)^2 \right| < \delta f^{2\text{stop}}. \quad (3.6)$$

Поскольку предполагается, что объект находится в движении, в формуле (3.6) среднее значение \bar{F}^2 определяется не на интервале $[t_0, t_n]$, как показано в формуле (3.2), а в скользящем секундном окне $[t_{n-N}, t_n]$.

Признак окончания движения формируется при одновременном непревышении контролируемыми величинами пороговых значений $\delta f^{2\text{stop}}, \delta\omega^{2\text{stop}}$ в соотношениях (3.5), (3.6). Пороговые значения $\delta f_x^{\text{start}}, \delta f_x^{2\text{start}}, \delta f^{2\text{stop}}, \delta\omega^{2\text{stop}}$ подобраны экспериментально и протестированы на всех представленных реализациях.

Отметим, что на наш взгляд критерий, основанный на анализе отклонения квадрата угловой скорости, обладает несколькими преимуществами. Для объекта, неподвижного относительно Земли, с высокой точностью известно эталонное значение этого параметра — квадрат модуля угловой скорости вращения Земли. Отклонение имеет различный характер поведения на остановках, при внешнем воздействии на систему и на интервалах движения (рис. 9). На участках равномерного поступательного движения объекта с небольшой по величине продольной относительной скоростью (рис. 10) данный сигнал является наиболее контрастным показателем для формирования признака движения.

4. Применение вторичной информации. Датчик движения, использующий параметры навигационного решения БИНС, строится в зависимости от инерционно-массовых свойств объекта, которые сказываются на величинах его характерных линейных и угловых движений. Представленный ниже алгоритм обусловлен предположением о том, что доминантным направлением движения объекта является направление вдоль его продольной оси.

Использовались следующие параметры навигационного решения: V_N, V_E — северная и восточная составляющие относительной скорости в географической системе координат; ψ — истинный курс. По этим параметрам вычислялась продольная горизонтальная скорость $V_x = V_E \sin \psi + V_N \cos \psi$, которая и была исходным сигналом для формирования признака движения.

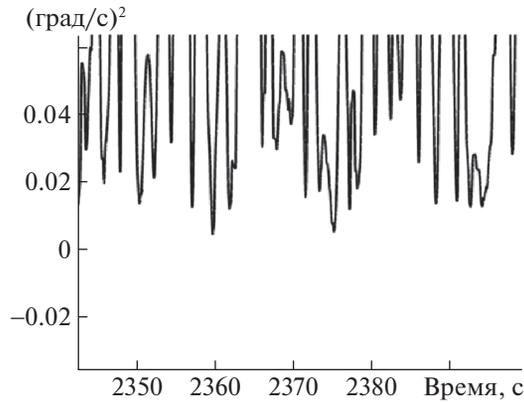


Рис. 10. Пример отклонения квадрата угловой скорости объекта от квадрата угловой скорости вращения Земли $\sigma(\bar{\omega}^2)$ при движении объекта (фрагмент рис. 9 в увеличенном масштабе)

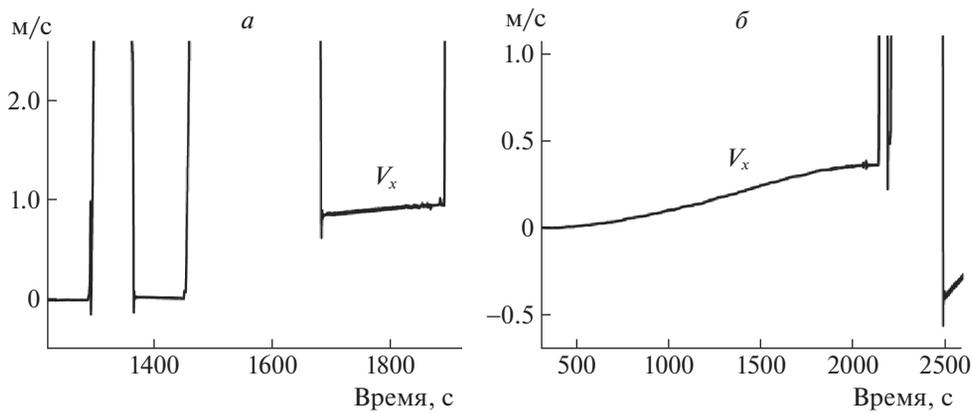


Рис. 11. Продольная скорость объекта; а и б – разные записи

Для определения моментов начала движения и остановки анализ текущего значения продольной скорости как отклонения от нулевой скорости не дает нужного результата, поскольку накопленные скоростные ошибки инерциального счисления потенциально могут быть значительными по уровню (рис. 11). Поэтому воспользуемся дополнительными характеристиками, которые, как показал опыт обработки экспериментальных данных, дают более точное представление о том, движется объект или нет.

На рис. 11, а видно, что после участка с движением (1500–1700 с) объект стоит, но скорость значительно отличается от нуля. Первая характеристика – оценка производной продольной скорости a_x , которую мы для краткости будем называть продольным ускорением. Оценка продольного ускорения получена путем предложенного нами специфического дифференцирования продольной скорости в скользящем окне.

Определим скользящее окно на интервале $[t_{n-N}, t_n]$. Здесь t_n – текущий момент времени, N – количество точек в окне. Для простоты будем считать N четным. Каждому моменту времени соответствует значение продольной скорости $V_x(t_j)$. Обозначим оконную производную V_x через a_x . Будем относить a_x к середине скользящего окна:

$$a_x|_{t^*=t_n-\frac{T}{2}} = \sum_{j=n-N}^n V_x(t_j)K(t_j), \quad K(t_j) = \begin{cases} -\frac{4}{TN}, & t_j < t_n - \frac{T}{2}, \\ \frac{4}{TN}, & t_j > t_n - \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (4.1)$$

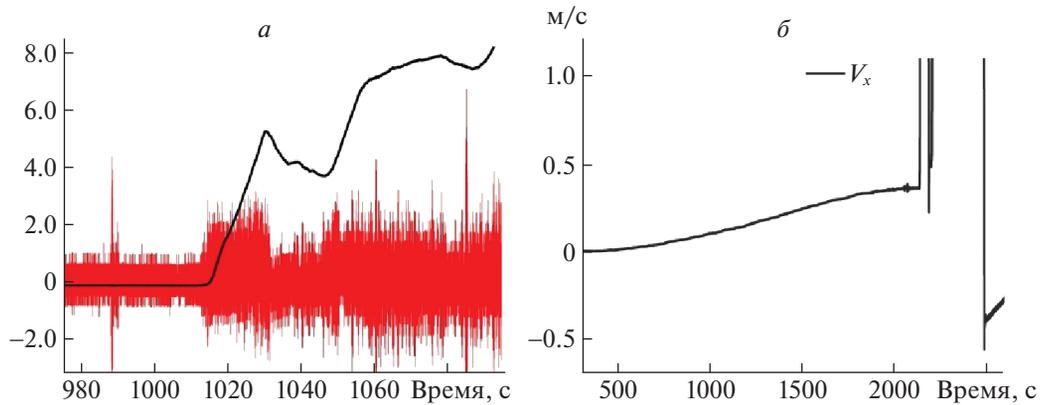


Рис. 12. Черная линия ($V_x, \text{м/с}$) – продольная скорость объекта, красная линия ($a_x, \text{м/с}^2$): *a* – производная продольной скорости, взятая с частотой 400 Гц, *б* – результат оконного дифференцирования продольной скорости в секундном скользящем окне по формуле (4.1)

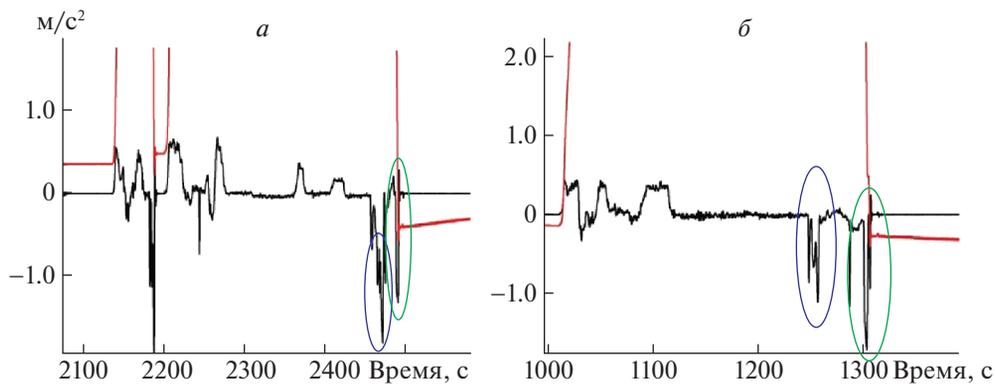


Рис. 13. Черная линия ($a_x, \text{м/с}^2$) – продольное ускорение. Красная линия ($V_x, \text{м/с}$) – продольная скорость; *a* и *б* – разные записи

Здесь T – ширина окна. Приведенная формула означает, что используется разделенная разность средних значений обрабатываемого параметра в левой и правой частях окна. Оконное дифференцирование было выбрано потому, что непосредственное дифференцирование на частоте поступления данных (400 Гц) давало очень “шумный” сигнал (рис. 12).

Структура ядра дифференцирования $K(t_j)$ была выбрана простой для уменьшения вычислительной сложности алгоритма.

При визуальном анализе графиков a_x (см., например, рис. 13) замечено, что заметный пик амплитуды может означать либо внешнее воздействие, либо начало движения. На рис. 13, *a* видно, что пик, выделенный голубым овалом, не означает остановки, но по амплитуде сравним с пиком, соответствующим моменту остановки (выделен зеленым овалом). На 13, *б* изображен тот же эффект для другой записи. Эти случаи отделялись друг от друга посредством экспериментального выбора пороговых значений. Оказалось, что значения ускорений при старте больше, чем при возмущениях, не связанных с началом движения.

Однако для определения момента остановки величина продольного ускорения a_x оказалась неинформативной. Как можно видеть из рис. 13, пики сигнала a_x при маневрах и при остановке сравнимы по амплитуде. Поэтому критерий определения остановки основан на сравнительном анализе других характеристик.

Вторая характеристика – среднее квадратическое отклонение (СКО) $\sigma(V_x)$ продольной скорости. На рис. 14 видно, что моментам движения соответствует контрастное увеличение значений

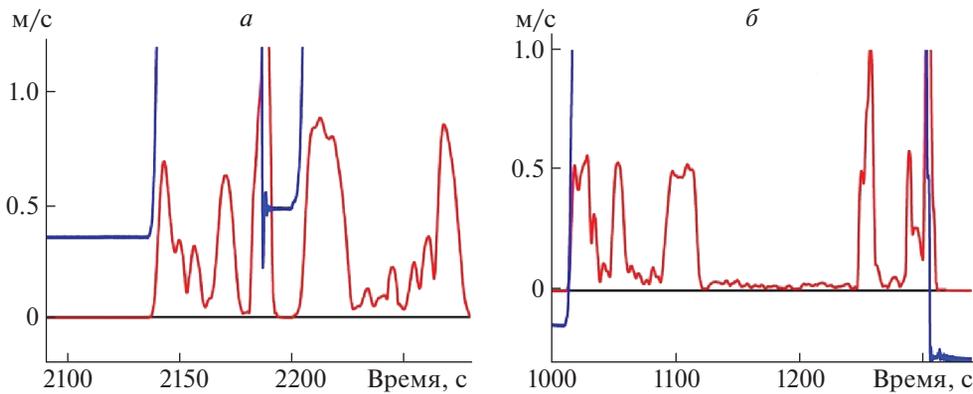


Рис. 14. Синяя линия (V_x) – продольная скорость, красная линия ($\sigma(V_x)$) – СКО продольной скорости, черная линия ($\delta\sigma^{start}$) – порог, который СКО переходит только во время движения

этого сигнала. На рис. 14, *а* и *б* изображены разные записи. Указанная характеристика также вычислялась в скользящем окне по следующей формуле:

$$\sigma(V_x) = \sqrt{\frac{\sum_{j=n-N+1}^n V_x(t_j)^2 - N\bar{V}_x}{N-1}}, \quad \bar{V}_x = \frac{1}{N} \sum_{j=n-N+1}^n V_x(t_j). \quad (4.2)$$

Для формирования признака движения используются обе характеристики из выражений (4.1), (4.2). При определении момента старта текущее значение продольного ускорения сравнивается с пороговым значением δa_x^{start} , а СКО продольной скорости – с пороговым значением $\delta\sigma^{start}$. В случае одновременного превышения величинами из (4.1), (4.2) пороговых значений считается, что объект начал движение. Если при движении объекта значения величин a_x , $\sigma(V_x)$ одновременно становятся меньше порогов δa_x^{stop} , $\delta\sigma^{stop}$, считается, что объект остановился.

Принцип работы датчика такой же, как у датчика, работающего по первичным данным. Изначально флаг движения имеет значение 0. По критерию начала движения определяется момент старта, флаг движения принимает значение 1. По критерию окончания движения определяется момент остановки, флаг полагается равным 0.

Особенностью алгоритмической реализации описанного подхода является обработка исходного сигнала, т.е. продольной скорости V_x , в скользящих окнах. Следствием использования оконного сглаживания стало запаздывание в получении текущего значения сигнала a_x . Максимальное значение допустимого запаздывания определяется желаемым быстродействием датчика движения. В приведенном алгоритме ширина окна осреднения a_x равна 1 с, а ширина окна, в котором вычисляется СКО, равна 5 с.

5. Проверка алгоритма при помощи экспериментальных данных. Алгоритмы тестировались на телеметрических записях БИНС, установленных на ЛА. Настройка параметров проводилась на серии из девяти экспериментов, так чтобы оба алгоритма не выдавали ложных срабатываний. Под ложными срабатываниями понимается либо определение старта при фактической неподвижности объекта, либо определение остановки при фактическом движении объекта. Среднее время реакции детектора при установке флага движения составило приблизительно 0.7 с, флага остановки – 5 с. На рис. 15 представлены графики, иллюстрирующие работу детекторов, основанных на обработке первичных и вторичных данных. На рис. 15, *а* изображен фрагмент записи, а на рис. 15, *б* – крупным планом участок с двумя остановками, на котором видны различия во времени срабатывания.

Время реакции двух вариантов датчика отличается незначительно. В частности, различия в определении старта составляют десятые доли секунды. Различия в определении остановки больше – детектор, работающий с первичными данными БИНС, может срабатывать на 5 с быстрее. Это связано с тем, что окно для определения СКО продольной скорости шире, чем окна, используемые в детекторе по первичной информации.

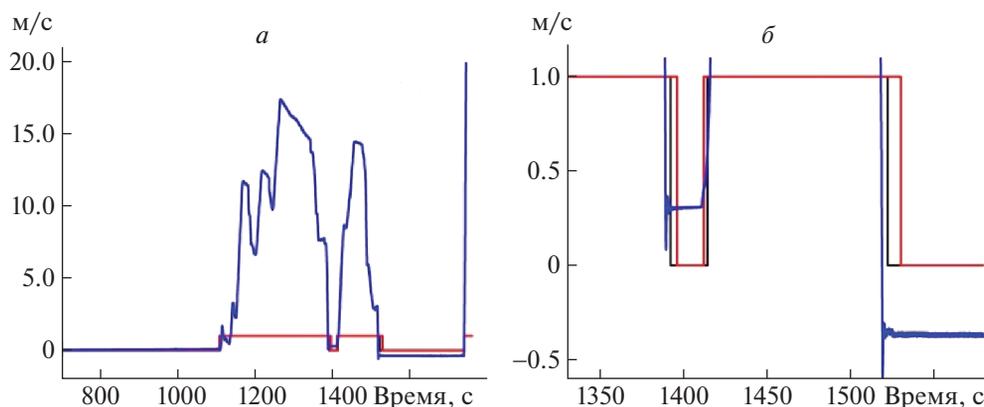


Рис. 15. Результаты работы детектора, использующего первичную информацию БИНС (черная линия) и вторичную информацию БИНС (красная линия); продольная скорость (V_x) – синяя линия

Подбор пороговых значений критериев, а также размеров окон осреднения остается самой неформализованной частью алгоритма. Пороги выбирались исходя из необходимости разделить возмущения, связанные и не связанные с началом движения. Размеры окон определялись уровнем шумов выходных данных БИНС и допустимым временем реакции датчика движения. Очевидно, что выбранные значения параметров являются универсальными только для конкретного объекта. Так, для ЛА нужно исключать срабатывание детектора движения при запуске двигателей. Для объектов другого типа возможно наличие возмущений иной природы, что потребует отдельной настройки алгоритма. Таким образом, задача автоматизации выбора параметров алгоритма при разработке датчика движения не рассматривалась.

Заключение. Предложены подходы к построению алгоритмов датчика движения объекта. Во многом построенные алгоритмы носят эвристический характер. Опыт обработки экспериментальных данных показал, что моменты движения и неподвижности объекта при помощи первичной и/или вторичной информации БИНС определяются достаточно надежно. Предложено два варианта алгоритма, предполагающих использование первичных или вторичных данных БИНС. Показано, что оба варианта могут применяться как совместно, так и по отдельности. Формирование признаков старта и остановки объекта основано на технике обработки информации в скользящих окнах.

При использовании первичных данных обрабатывались показания акселерометров, направленных вдоль продольной оси и правого крыла, а также модуль показаний ДУС. Данные акселерометров оказались более информативны для определения старта, а модуль показаний ДУС – для определения остановки. При анализе вторичных данных БИНС обрабатывалась продольная скорость объекта. В скользящих окнах вычислялись продольное ускорение, а также СКО продольной скорости. Первый сигнал оказался более информативен для детектирования старта, второй – остановки.

Для повышения надежности старт и остановка определялись из совместного анализа описанных сигналов. Работа датчика проверена на экспериментальных данных.

Вопросы строгого математического обоснования предлагаемых решений в датчике движения не рассматривались, полагая, что это составит предмет отдельного исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зорина О.А., Измайлов Е.А., Кухтевич С.Е. и др. О расширении возможностей интеграции инерциальных и спутниковых навигационных систем в авиационных приложениях // Гироскопия и навигация. 2017. Т. 25. № 2 (97). С. 18–34.
2. Вавилова Н.Б., Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Математические модели инерциальной навигации. М.: Изд-во МГУ, 2020. 162 с.
3. Ван Ю., Цзяо Ч.-Ш., Шкель А.М. Пешеходная инерциальная навигация с коррекцией по нулевой скорости и комплексированием датчиков // Гироскопия и навигация. 2021. Т. 29. № 1 (112). С. 3–31. <https://doi.org/10.17285/0869-7035.0054>

4. *Wahlstrom J., Skog I., Gustafsson F., Markham A., Trigoni N.* Zero-Velocity Detection – A Bayesian Approach to Adaptive Thresholding // *IEEE Sensors Letters*. 2019. V. 3. № 6. P. 1–4.
5. *Krach B., Robertson P.* Integration of Foot-mounted Inertial Sensors Into a Bayesian Location Estimation Framework // *IEEE Workshop on Positioning, Navigation and Communication*. Hannover, Germany, 2008.
6. *Skog I., Handel P., Nilsson J.-O. et al.* Zero-velocity Detection – an Algorithm Evaluation // *IEEE Trans. Bio-Med. Eng.* 2010. V. 57. № 11. P. 2657–2666.
7. *Wagstaff B., Peretroukhin V., Kelly J.* Improving Foot-mounted Inertial Navigation Through Real-time Motion Classification // *IEEE Intern. Conf. on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN)*. Sapporo, Japan, 2017.
8. *Кроненветт Н., Рунпельт Я., Троммер Г.Ф.* Прецизионное позиционирование пешехода в помещении на основе контроля за стадиями его походки // *Гироскопия и навигация*. 2017. № 1 (96). С. 33–48.
9. *Zhang R., Yang H., Hoflinger F., Reindl L.M.* Adaptive Zero-velocity Update Based on Velocity Classification for Pedestrian Tracking // *IEEE Sensors J.* 2017. V. 17. № 7. P. 2137–2145.
10. *Hamming R.W.* *Digital Filters*. Prentice-Hall, inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1977. 224 p.
11. *Ишлинский А.Ю.* *Механика относительного движения и силы инерции*. М.: Наука, 1981. 191 с.
12. *Андреев В.Д.* *Теория инерциальной навигации. Автономные системы*. М.: Наука, 1966. 580 с.