СОДЕРЖАНИЕ

Том 58, номер 1, 2022

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 3–10

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.42

ИЗОХРОННЫЕ И СИЛЬНО ИЗОХРОННЫЕ ФОКУСЫ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛЬЕНАРА

© 2022 г. В. В. Амелькин

Рассматривается вещественная система Льенара $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x + A(x) - B(x)y$, где полиномы $A(x)$, $B(x)$ и производная $A'(x)$ удовлетворяют условиям $A(0) = B(0) = A'(0) = 0$ и $\deg A(x) - 1 \geqslant \deg B(x)$. Используя введённую автором нормальную форму, выводятся в терминах коэффициентов системы необходимые и достаточные условия, при выполнении которых исследуемая во всей фазовой плоскости (т.е. глобально) система имеет в начале координат изохронный фокус. Доказывается, что этот фокус оказывается и сильно изохронным.

DOI: 10.31857/S0374064122010010

Рассмотрим вещественное полиномиальное уравнение Льенара

$$\ddot{x} + B(x)\dot{x} + x + A(x) = 0 \tag{1}$$

в предположении, что полиномы $A(x)$ и $B(x)$ задаются равенствами

$$A(x) = \sum_{k=2}^{n} A_k x^k, \quad B(x) = \sum_{j=1}^{r} B_j x^j, \quad A_n \neq 0, \quad B(x) \not\equiv 0,$$

где $n \geqslant 3$ – нечётное число, $r \leqslant n - 1$.

Уравнение (1) всесторонне изучалось и изучается с самых разных точек зрения. Обычный метод его исследования – переход к эквивалентной двумерной автономной системе. Одной из таких систем является система Льенара в так называемой *первой форме*

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x + A(x) - B(x)y. \tag{2}$$

Другая система – это система Льенара во *второй форме*

$$\dot{x} = -y - \mathcal{B}(x), \quad \dot{y} = x + A(x), \tag{3}$$

где $\mathcal{B}(x) = \int_0^x B(s)\,ds$.

Ещё одна система – система [1, 2]

$$\dot{x} = -y - x\Phi(x), \quad \dot{y} = x - y\Phi(x) + A(x) - x\Phi^2(x), \tag{4}$$

где $\Phi(x) = x^{-2}\int_0^x sB(s)\,ds$.

Каждая из приведённых систем (2)–(4) переводится в другую соответствующей заменой фазовых переменных. В частности, непосредственно проверяется, что система (2) переводится в системы (3) и (4) соответственно заменами

$$u = x, \quad v = y - \mathcal{B}(x)$$

и

$$u = x, \quad v = y - x\Phi(x)$$

с сохранением обозначений исходных фазовых переменных. Система (3) переводится в систему (4) посредством замены координат

$$u = x, \quad v = y + \mathcal{B}(x) - x\Phi(x).$$

Напомним некоторые нужные в дальнейшем определения. Для этого рассмотрим систему вида

$$\dot{x} = \lambda x - y - P(x,y), \quad \dot{y} = x + \lambda y + Q(x,y), \tag{5}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$ – некоторая постоянная, а $P, Q : G \to \mathbb{R}$ – голоморфные в окрестности $G = \{(x,y) : |x| < r,\ \ |y| < r\},\ r \in \mathbb{R},$ начала координат $O(0,0)$ фазовой плоскости функции, которые не содержат в своих разложениях в степенные ряды по степеням x и y свободных и линейных членов.

Пусть OA – луч (с началом в точке $O(0,0)$), составляющий с положительной полуосью оси абсцисс декартовой прямоугольной системы координат xOy угол $\varphi \in [0, 2\pi)$. Тогда [3] центр или фокус $O(0,0)$ системы (5) называют *изохронным*, если все изображающие точки, начиная двигаться по траекториям центра или фокуса системы (5) с некоторого луча OA в момент времени $t = t_0$, совершают полный оборот вокруг начала за одно и то же время $T = 2\pi$. Луч OA из приведённого определения изохронности будем называть *лучом-изохроной.*

Далее, для системы (5) имеет место *общая изохронность*, если особая точка $O(0,0)$ системы (5) является изохронной при любом начальном положении луча-изохроны. Если же особая точка $O(0,0)$ системы (5) оказывается изохронной лишь только при некоторых начальных положениях луча-изохроны, то говорят, что для системы (5) имеет место *частная изохронность.* Очевидно, что в случае изохронного центра $O(0,0)$ (при $\lambda = 0$) для системы (5) имеет место общая изохронность.

Что же касается случая изохронного фокуса $O(0,0)$, то здесь как раз для системы (5) имеет место, вообще говоря, частная изохронность.

Заметим, что в работе [4] доказано следующее утверждение: *для того чтобы для системы (5) в случае грубого или негрубого фокуса имела место общая изохронность, необходимо и достаточно, чтобы для системы (5) имела место совершенная изохронность [5].*

В работе [5] под *совершенной изохронностью* понимается такая изохронность, когда все изображающие точки, находящиеся на любом луче OA с началом в точке $O(0,0)$, двигаются по траекториям центра или фокуса, оставаясь на одном и том же луче.

Отметим, что в работе [6] в случае центра совершенная изохронность названа *равномерной изохронностью.*

Приведём теперь определение изохронного сечения [2], которое обобщает понятие луча-изохроны. Это определение основывается на понятии дуги без контакта (или сечения) [7, с. 71–72] и связанного с ним понятия функции последования (или отображения Пуанкаре) [7, с. 90–91].

Именно, обозначим для каждого $z \equiv (x,y) \in \mathbb{R}^2$ через $\psi(t,z)$ траекторию системы (5) такую, что $\psi(0,z) = z$.

Пусть $O(0,0)$ – центр или фокус системы (5), а $\eta : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ – гладкая кривая такая, что $\lim\limits_{s \to +\infty} \eta(s) = O(0,0)$. Кривую η называют *изохронным сечением* системы (5) в точке $O(0,0)$, если существует $T > 0$ такое, что для любого $z \in \eta$ имеет место включение $\psi(T,z) \in \eta$ и при этом $\psi(t,z) \notin \eta$ для всех $t \in (0,T)$.

Тогда центр или фокус $O(0,0)$ системы (5) называют *изохронным*, если система (5) имеет в особой точке $O(0,0)$ изохронное сечение.

Здесь уместно привести один из примеров работы [8], где показано, что существуют системы вида (5), которые как в случае центра, так и в случае негрубого фокуса не имеют изохронных сечений.

Пример 1. Система

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x - 4\omega xy + 2y^2,$$

где параметр $\omega \in \mathbb{R}$, в особой точке $O(0,0)$ не имеет изохронного сечения, а значит, центр (при $\omega = 0$) или фокус (при $\omega \neq 0$) приведённой системы неизохронен.

Далее отметим, что введение понятия изохронного сечения полезно как с теоретической, так и с практической точек зрения в связи с возможностью построения изохронных сечений, среди которых находятся (или могут находиться) лучи-изохроны.

Не останавливаясь на методах построения изохронных сечений, заметим лишь, что, например, в работе [2] рассматриваются, в частности, изохронные сечения системы Льенара с фокусом, которые строятся на основании преобразования, переводящего исходную систему в ту или иную нормальную форму, и о которых идёт речь в настоящей статье в дальнейшем.

Обратимся теперь к понятию сильной изохронности фокуса $O(0,0)$ системы Льенара (2). Именно, пусть y^+ и y^- – соответственно положительная и отрицательная полуоси оси Oy системы координат xOy. Фокус $O(0,0)$ системы (2) называется *сильно изохронным*, если y^+ – луч-изохрона и если изображающая точка, выходящая из точки полуоси y^+, пересечёт полуось y^- в первый раз через время π.

Ниже рассматривается полиномиальная система (2) в случае фокуса и решается задача, аналогичная задаче, рассмотренной в работе [9] в случае центра $O(0,0)$. Эта задача заключается в выводе необходимых и достаточных условий, при выполнении которых полиномиальная система (2) имеет в особой точке $O(0,0)$ изохронный фокус. Доказывается также, что изохронный фокус $O(0,0)$ системы (2) оказывается и сильно изохронным фокусом. Предварительно отметим, что в работе [2], наряду с другими вопросами, для системы (2) с фокусом $O(0,0)$ и функциями A и B класса C^1 такими, что они определены в окрестности точки $O(0,0)$ и удовлетворяют условию

$$A(x)=x\Phi^2(x), \tag{6}$$

т.е. когда, в частности, система (4) принимает вид

$$\dot{x}=-y-x\Phi(x),\quad \dot{y}=x-y\Phi(x), \tag{7}$$

показано, что среди изохронных сечений системы (2) (как и систем (3) и (7)) находятся лучи-изохроны y^+ и y^-.

Дальнейшие исследования полиномиальной системы (2) основываются на определении изохронности с точки зрения наличия у особой точки $O(0,0)$ лучей-изохрон и на полиномиальном варианте теоремы 3 [10] в голоморфном случае: *существует вещественная замена переменных*

$$u=x+\sum_{k=2}^{\infty}\alpha_k x^k,\quad v=y+\sum_{k=2}^{\infty}\beta_k x^k, \tag{8}$$

переводящая голоморфную в окрестности особой точки $O(0,0)$ *систему Льенара (2) в систему*

$$\dot{u}=-\bigg(v+u\sum_{s=2}^{\infty}\gamma_{s-1}u^{s-1}\bigg)\bigg(1+\sum_{s=2}^{\infty}H_s u^{s-1}\bigg)^{-1},$$

$$\dot{v}=\bigg(u-v\sum_{s=2}^{\infty}\gamma_{s-1}u^{s-1}\bigg)\bigg(1+\sum_{s=2}^{\infty}H_s u^{s-1}\bigg)^{-1}. \tag{9}$$

Покажем, к каким новым результатам приводит последнее утверждение, если вместо голоморфной системы Льенара рассмотреть полиномиальную систему вида (2) с условием (6) (а значит, имеющую единственную особую точку $O(0,0)$) и вместо замены переменных (8) использовать полиномиальную замену

$$u=x+\sum_{k=2}^{n}\alpha_k x^k,\quad v=y+\sum_{k=2}^{n}\beta_k x^k, \tag{10}$$

которая должна быть диффеоморфизмом плоскости $\mathbb{R}^2$ и которая, как будет показано далее, не умаляет общности рассуждений (см. теорему 8).

Для этого продифференцируем каждое из выражений (10) по t в силу системы (2), а затем полученные равенства приведём с учётом соотношений (9) и (10) к системе

$$y\bigg\{\sum_{k=2}^{n}k\alpha_k x^{k-1}+\sum_{s=2}^{\infty}H_s\bigg(x+\sum_{k=2}^{n}\alpha_k x^k\bigg)^{s-1}+\sum_{k=2}^{n}k\alpha_k x^{k-1}\sum_{s=2}^{\infty}H_s\bigg(x+\sum_{k=2}^{n}\alpha_k x^k\bigg)^{s-1}\bigg\}\equiv$$

$$\equiv \sum_{k=2}^{n}\beta_k x^k + \sum_{s=2}^{\infty}\gamma_{s-1}\Bigl(x+\sum_{k=2}^{n}\alpha_k x^k\Bigr)^s,$$

$$\sum_{k=2}^{n}(A_k-\alpha_k)x^k + \Bigl(x+\sum_{k=2}^{n}A_k x^k\Bigr)\sum_{s=2}^{\infty}H_s\Bigl(x+\sum_{k=2}^{n}\alpha_k x^k\Bigr)^{s-1} +$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\beta_k x^k\sum_{s=2}^{\infty}\gamma_{s-1}\Bigl(x+\sum_{k=2}^{n}\alpha_k x^k\Bigr)^{s-1} \equiv y\biggl\{\sum_{k=2}^{n}(B_{k-1}+k\beta_k)x^{k-1}+$$

$$+\sum_{k=2}^{n}(B_{k-1}+k\beta_k)x^{k-1}\sum_{s=2}^{\infty}H_s\Bigl(x+\sum_{k=2}^{n}\alpha_k x^k\Bigr)^{s-1} - \sum_{s=2}^{\infty}\gamma_{s-1}\Bigl(x+\sum_{k=2}^{n}\alpha_k x^k\Bigr)^{s-1}\biggr\}. \qquad (11)$$

Далее, приравнивая к нулю в первом тождестве системы (11) коэффициенты при yx^p, можно показать [9], что выполняются условия

$$\alpha_k = 0, \quad H_s = 0 \quad \text{для всех} \quad k, s \geqslant 2. \qquad (12)$$

Приравнивая к нулю в первом тождестве системы (11) коэффициенты при x^p, с учётом условий (12) получаем соотношения

$$\gamma_s = 0 \quad \text{при всех} \quad s > n \qquad (13)$$

и

$$\gamma_{k-1} = -\beta_k, \quad k = \overline{2, n}. \qquad (14)$$

Если приравнять к нулю во втором тождестве системы (11) коэффициенты при yx^p, с учётом равенств (12)–(14) придём к равенствам

$$\beta_k = -\frac{B_{k-1}}{k+1}, \quad k = \overline{2, n}. \qquad (15)$$

Из соотношений (12)–(15) следует, что диффеоморфизм (10) и система (9) принимают соответственно вид

$$u = x, \quad v = y - x\sum_{k=2}^{n}\frac{B_{k-1}}{k+1}x^{k-1} \qquad (16)$$

и

$$\dot u = -v - u\sum_{s=2}^{n}\frac{B_{s-1}}{s+1}u^{s-1}, \quad \dot v = u - v\sum_{s=2}^{n}\frac{B_{s-1}}{s+1}u^{s-1}. \qquad (17)$$

Приравнивая к нулю во втором тождестве системы (11) коэффициенты при x^p, с учётом равенств (12)–(15) приходим к тождеству

$$\sum_{k=2}^{n}A_k x^{k-1} \equiv \Bigl(\sum_{s=2}^{n}\frac{B_{s-1}}{s+1}x^{s-1}\Bigr)^2,$$

которое означает, что между коэффициентами полиномов $A(x)$ и $B(x)$ имеет место следующая связь: зависимость

$$A_2 = 0, \quad A_k = \sum_{r=1}^{k-2}\frac{B_r}{r+2}\frac{B_{k-r-1}}{k-r+1}, \quad k = \overline{3, n}. \qquad (18)$$

Теорема 1. *Для того чтобы особая точка $O(0,0)$ полиномиальной системы (2) была изохронным фокусом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (18), в которых* *по крайней мере один из коэффициентов* B_{2s}, $s=\overline{1,(n-1)/2}$, *полинома* $B(x)$ *при заданном нечётном* $n\geqslant 5$ *отличен от нуля.*

Доказательство. Необходимость следует из работы [9, теорема 1], поскольку в данном случае соотношения (6) и (18) эквивалентны.

Достаточность вытекает из эквивалентности соотношений (6) и (18) и отмеченного выше факта, что y^+ – луч-изохрона фокуса системы (2). Теорема доказана.

Замечая теперь, что на основании теоремы 1 и того, что диффеоморфизм вида (10) плоскости $\mathbb{R}^2$ представляется в виде (16), а система (9) – в виде (17), приходим в силу работы [11] к следующим утверждениям.

Теорема 2. *Для того чтобы особая точка* $O(0,0)$ *полиномиальной системы (2) была изохронным, а значит, и сильно изохронным фокусом, необходимо и достаточно выполнения условий (18), в которых по крайней мере один из коэффициентов* B_{2s}, $s=\overline{1,(n-1)/2}$, *отличен от нуля.*

Теорема 3. *Для того чтобы особая точка* $O(0,0)$ *полиномиальной системы (2) была изохронным, а значит, и сильно изохронным фокусом, необходимо и достаточно, чтобы диффеоморфизм плоскости* $\mathbb{R}^2$

$$u=x,\quad v=y-x\sum_{k=1}^{(n-1)/2}\frac{B_k}{k+2}x^k, \tag{19}$$

где по крайней мере один из коэффициентов B_{2s}, $s=\overline{1,(n-1)/2}$, *при заданном нечётном* $n\geqslant 5$ *отличен от нуля, переводил систему (2) в систему*

$$\dot u=-v-u\sum_{k=1}^{(n-1)/2}\frac{B_k}{k+2}u^k,\quad \dot v=u-v\sum_{k=1}^{(n-1)/2}\frac{B_k}{k+2}u^k. \tag{20}$$

Замечание 1. Как отмечено выше, диффеоморфизм (19) плоскости $\mathbb{R}^2$ позволяет строить изохронные сечения системы (2) в фокусе $O(0,0)$. Именно, изохронные сечения фокуса $O(0,0)$ системы (2) задаются уравнением

$$y\cos\varphi_0=x\sin\varphi_0+\cos\varphi_0\sum_{k=1}^{(n-1)/2}\frac{B_k}{k+2}x^{k+1}, \tag{21}$$

в котором φ_0 – полярный угол и по крайней мере один из коэффициентов B_{2s}, $s=\overline{1,(n-1)/2}$, при заданном нечётном $n\geqslant 5$ отличен от нуля. Из формулы (21) следует, что система (2) в фокусе $O(0,0)$ имеет бесконечно много изохронных сечений. Среди этих сечений находятся, в частности, лучи-изохроны y^+ и y^-. Таким образом, изохронный фокус $O(0,0)$ полиномиальной системы Льенара (2) и с точки зрения наличия лучей-изохрон y^+ и y^- оказывается сильно изохронным фокусом [2].

Замечание 2. Хотя теоремы 2 и 3 эквивалентны, тем не менее области применения их различны. Так, теорема 2 наиболее эффективна при построении примеров, а также при проверке наличия или отсутствия изохронного фокуса у полиномиальной системы Льенара (2). Теорему же 3 удобнее использовать при рассмотрении теоретических вопросов, связанных с использованием как одной из простейших нормальных форм вида (20), так и изохронных сечений, заданных уравнением (21).

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\dot x=-y,\quad \dot y=x+x^3+2x^6+x^9-(3x+6x^4)y.$$

Для неё выполняются равенства

$$A_3=\left(\frac{B_1}{3}\right)^2,\quad A_6=2\,\frac{B_1}{3}\,\frac{B_4}{4},\quad A_9=\left(\frac{B_4}{6}\right)^2,$$

а значит, согласно теореме 2, её особая точка $O(0,0)$ является сильно изохронным фокусом. Поэтому по теореме 3 диффеоморфизм плоскости $\mathbb{R}^2$

$$u=x,\quad v=y-x^2-x^5\quad (x=u,\quad y=v+u^2+u^5)$$

переводит исходную систему в систему

$$\dot u=-v-u(u+u^4),\quad \dot v=u-v(u+u^4).$$

Пример 3. Система Льенара

$$\dot x=-y,\quad \dot y=x+x^3+2x^4+x^5+2x^7+2x^8+x^{11}-(3x+4x^2+7x^5)y$$

имеет в особой точке $O(0,0)$ сильно изохронный фокус, поскольку по теореме 2

$$A_3=\left(\frac{B_1}{3}\right)^2,\quad A_4=2\,\frac{B_1}{3}\,\frac{B_2}{4},\quad A_5=\left(\frac{B_2}{4}\right)^2,$$

$$A_7=2\,\frac{B_1}{3}\,\frac{B_5}{7},\quad A_8=2\,\frac{B_2}{4}\,\frac{B_5}{7},\quad A_{11}=\left(\frac{B_5}{7}\right)^2.$$

Тогда по теореме 3 диффеоморфизм плоскости $\mathbb{R}^2$

$$u=x,\quad v=y-x^2-x^3-x^6\quad (x=u,\quad y=v+u^2+u^3+u^6)$$

переводит рассматриваемую систему в систему (нормальную форму)

$$\dot u=-v-u(u+u^2+u^5),\quad \dot v=u-v(u+u^2+u^5).$$

Замечание 3. Обратим внимание на следующие обстоятельства. Во-первых, так как для полиномиальной системы Льенара (2) оказывается, что как замена переменных, переводящая изохронную систему (2) в полиномиальную нормальную форму Пуанкаре–Дюлака (7), имеющую единственную особую точку $O(0,0)$, так и обратная замена являются полиномиальными, то этот факт приводит к естественному глобальному исследованию изохронности полиномиальных систем Льенара (2). Во-вторых, локальное, а не глобальное рассмотрение вопросов изохронности с использованием, например, подхода из работы [12] даёт совершенно другие условия изохронности фокуса системы (2), чем условия, полученные в настоящей работе.

Приведём далее результаты, которые следуют из настоящей работы и работы [9] и которые представляют самостоятельный интерес для теории полиномиальных систем Льенара (2) с единственной особой точкой $O(0,0)$.

Теорема 4. *Для того чтобы особая точка $O(0,0)$ полиномиальной системы (2) была изохронной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $A(x)=x\Phi^2(x)$, где $\Phi(x)==x^{-2}\int_0^x sB(s)\,ds$.*

Теорема 5. *Для того чтобы особая точка $O(0,0)$ полиномиальной системы (2) была изохронной, необходимо и достаточно, чтобы она была сильно изохронной.*

Теорема 6. *Для того чтобы особая точка $O(0,0)$ полиномиальной системы (2) была изохронной, а значит, и сильно изохронной, необходимо и достаточно, чтобы имело место тождество*

$$\sum_{k=2}^{n}A_kx^{k-1}\equiv\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{B_{k-1}}{k+1}x^{k-1}\right)^2.$$

Теорема 7. *Для того чтобы особая точка $O(0,0)$ полиномиальной системы (2) была изохронной, а значит, и сильно изохронной, необходимо и достаточно, чтобы диффеоморфизм плоскости $\mathbb{R}^2$*

$$u=x,\quad v=y-x\sum_{k=2}^{n}\frac{B_{k-1}}{k+1}x^{k-1}\quad\left(x=u,\quad y=v+u\sum_{k=2}^{n}\frac{B_{k-1}}{k+1}u^{k-1}\right)$$

переводил систему (2) в систему

$$\dot{u} = -v - u\sum_{k=2}^{n}\frac{B_{k-1}}{k+1}u^{k-1}, \quad \dot{v} = u - v\sum_{k=2}^{n}\frac{B_{k-1}}{k+1}u^{k-1}.$$

В заключение докажем, что справедлива и

Теорема 8. *Все возможные биголоморфизмы плоскости* $\mathbb{R}^2$ *полиномиальной системы (2) с единственной особой точкой* $O(0,0)$, *определяемые соотношениями*

$$u = x + \sum_{k=2}^{\infty}\alpha_k x^k, \quad v = y + \sum_{k=2}^{\infty}\beta_k x^k, \tag{22}$$

имеют вид

$$u = x, \quad v = y + x\sum_{k=2}^{n}\frac{B_{k-1}}{k+1}x^{k-1}.$$

Доказательство. Первое из соотношений (22) определяет биголоморфизм $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Поэтому отображение u и обратное ему отображение u^{-1} являются голоморфными функциями, определяемыми степенными рядами с радиусом сходимости $r = +\infty$. На основании же того факта, что радиусы сходимости вещественного степенного ряда и биективно ему соответствующего комплексного степенного ряда с вещественными коэффициентами одинаковы (формула Коши–Адамара [13, с. 39; 14, с. 114]), приходим к выводу, что голоморфные функции комплексного переменного u_c и u_c^{-1}, соответствующие голоморфным функциям вещественного переменного u и u^{-1}, являются целыми. Но, как показано, например, в [14, с. 145], функция u_c является целой линейной функцией. Следовательно, первая из функций (22) имеет представление $u = x$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Поэтому, заменяя в тождествах (11) α_k, $k = \overline{2,\infty}$, нулями, а суммы $\sum_{k=2}^{n}\beta_k x^k$ и $\sum_{k=2}^{n}k\beta_k x^{k-1}$ на суммы $\sum_{k=2}^{\infty}\beta_k x^k$ и $\sum_{k=2}^{\infty}k\beta_k x^{k-1}$ соответственно, приходим к соотношениям

$$y\sum_{s=2}^{\infty}H_s x^{s-1} \equiv \sum_{k=2}^{\infty}\beta_k x^k + \sum_{s=2}^{\infty}\gamma_{s-1}x^s,$$

$$\sum_{k=2}^{n}A_k x^k + \left(x + \sum_{k=2}^{n}A_k x^k\right)\sum_{s=2}^{\infty}H_s x^{s-1} + \sum_{k=2}^{\infty}\beta_k x^k\sum_{s=2}^{\infty}\gamma_{s-1}x^{s-1} \equiv y\biggl\{\sum_{k=2}^{n}B_{k-1}x^{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty}k\beta_k x^{k-1} +$$
$$+ \left(\sum_{k=2}^{n}B_{k-1}x^{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty}k\beta_k x^{k-1}\right)\sum_{s=2}^{\infty}H_s x^{s-1} - \sum_{s=2}^{\infty}\gamma_{s-1}x^{s-1}\biggr\}. \tag{23}$$

Тождества (23) означают, что справедливы равенства

$$H_s = 0, \quad \beta_k = -\gamma_{k-1}, \quad s,k = \overline{2,\infty},$$

и тождества

$$\sum_{k=2}^{n}A_k x^k - \sum_{k=2}^{\infty}\beta_k x^k\sum_{k=2}^{\infty}\beta_k x^{k-1} \equiv 0, \quad \sum_{k=2}^{n}B_{k-1}x^{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty}(k+1)\beta_k x^{k-1} \equiv 0,$$

т.е. имеют место равенства (12)–(15), что и доказывает теорему 8.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sabatini M.* On the period function of Liénard systems // J. Differ. Equat. 1999. V. 152. P. 467–487.
2. *Sabatini M.* Non-periodic isochronous oscillations in plane differential systems // Ann. di Matem. 2003. V. 182. № 4. P. 487–501.
3. *Абдуллаев Н.* Об изохронности при нелинейных колебаниях // Тр. Тадж. учительского ин-та им. С.С. Айни. 1954. Вып. 2. С. 71–78.
4. *Чемоданов В.И.* Об изохронности в случае фокуса // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 5. С. 964–966.
5. *Куклес И.С., Пискунов Н.С.* Об изохронности колебаний для консервативных и неконсервативных систем // Докл. АН СССР. 1937. Т. 17. № 9. С. 467–470.
6. *Conti R.* Uniform isochronous centers of polynomial systems in $\mathbb{R}^2$ // Lect. Notes Pure Appl. Math. 1994. V. 152. P. 21–31.
7. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. М., 1966.
8. *Giné J., Grau M.* Characterization of isochronous foci for planar analytic differential systems // Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh. 2005. V. 135A. P. 985–998.
9. *Амелькин В.В.* Положительное решение одной гипотезы в теории полиномиальных изохронных центров систем Льенара // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 147–152.
10. *Амелькин В.В.* Об одной гипотезе в теории изохронных систем Льенара // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 10. С. 1283–1289.
11. *Амелькин В.В.* Сильная изохронность систем Льенара // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 5. С. 579–582.
12. *Algaba A., Reyes M.* Characterizing isochronous points and computing isochronous sections // J. Math. Anal. Appl. 2009. V. 355. P. 564–576.
13. *Зверович Э.И.* Вещественный и комплексный анализ. Кн. 3. Ч. 4. Функциональные последовательности и ряды. Интегралы, зависящие от параметра. Ч. 5. Кратные интегралы. Интегралы по многообразиям. Минск, 2006.
14. *Зверович Э.И.* Вещественный и комплексный анализ. Кн. 4. Ч. 6. Теория аналитических функций комплексного переменного. Минск, 2008.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 10.01.2021 г.
После доработки 10.12.2021 г.
Принята к публикации 21.12.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 11–16

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51+519.216.73

АНАЛОГ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, УПРАВЛЯЕМЫХ ДРОБНЫМ БРОУНОВСКИМ ДВИЖЕНИЕМ С ИНДЕКСОМ ХЁРСТА $\boldsymbol{H} \in (0,1)$

© 2022 г. М. М. Васьковский

Получены аналоги уравнений Колмогорова для математических ожиданий и плотностей распределений решений одномерных стохастических дифференциальных уравнений, управляемых дробным броуновским движением с индексом Хёрста $H \in (0,1)$.

DOI: 10.31857/S0374064122010022

Введение. Рассмотрим одномерное стохастическое дифференциальное уравнение

$$dY_t = f(Y_t)\,dB_t^H, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,\infty), \tag{1}$$

где B_t^H – одномерное дробное броуновское движение с индексом Хёрста $H \in (0,1)$, функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ является детерминированной и имеет непрерывные и ограниченные производные любого порядка $m \in \{0,\ldots,[1/H]+1\}$. Дифференциальные уравнения (1), вообще говоря, не могут быть исследованы в рамках как классической теории стохастических дифференциальных уравнений Ито [1], так и теорий Лайонса и Губинелли потраекторного интегрирования по грубым траекториям [2, 3]. В статьях [4, 5] разработан функциональный вариант теории интегрирования по грубым траекториям с произвольным положительным показателем Гёльдера и с его помощью доказаны теоремы существования, единственности и устойчивости решений уравнений (1).

В настоящей работе получены аналоги уравнений Колмогорова для математических ожиданий и плотностей распределений решений одномерных стохастических дифференциальных уравнений (1). Полученные результаты обобщают известные аналогичные результаты для одномерных стохастических дифференциальных уравнений Ито [6, гл. 4], а также для одномерных стохастических дифференциальных уравнений, управляемых дробными броуновскими движениями с показателями Хёрста $H > 1/3$ [7, 8].

Для определения решений уравнения (1) нам понадобится ряд определений и понятий, введённых в статье [4].

Определение грубых траекторий. Зафиксируем какие-либо $T>0$ и $\alpha \in (0,1]$. Пусть V – конечномерное евклидово пространство. Через $C^\alpha([0,T],V)$ и $C_2^\alpha([0,T],V)$ обозначим множества функций $f:[0,T]\to V$ и $g:[0,T]^2\to V$ соответственно, для которых величины

$$\|f\|_\alpha := \sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\ s\neq t}} \frac{|f_t - f_s|}{|t-s|^\alpha} \quad \text{и} \quad \|g\|_{\alpha,2} := \sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\ s\neq t}} \frac{|g_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}$$

конечны. Далее для функции двух переменных $g_{s,t}$ будем писать $\|g\|_\alpha$ вместо $\|g\|_{\alpha,2}$. Для функции одной переменной f_t через $f_{s,t}$ будем обозначать приращение $f_t - f_s$.

Для $k \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $C_b^k(\mathbb{R},\mathbb{R})$ нормированное пространство функций $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, норма в котором задаётся равенством

$$\|h\|_{C_b^k} := \sum_{i=0}^{k} \|D^i h\|_\infty,$$

где $\|D^i h\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |D^i h(x)|$.

Положим $n = [1/\alpha]$. Обозначим через $\mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$ множество α-непрерывных по Гёльдеру грубых траекторий, т.е. множество элементов $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n)$ таких, что $\mathbf{X}^i \in C_2^{i\alpha}([0,T], V^{\bigotimes i})$ для любого $i = \overline{1,n}$, и для всех $s,u,t \in [0,T]$ выполняется тождество Чена $\mathbf{X}_{s,t} = \mathbf{X}_{s,u} \boxplus \mathbf{X}_{u,t}$, в котором $(\mathbf{X}_{s,u} \boxplus \mathbf{X}_{u,t})^i = \sum_{j=0}^{i} \mathbf{X}_{s,u}^j \bigotimes \mathbf{X}_{u,t}^{i-j}$. Отметим, что операция $\boxplus$ задаёт умножение на тензорной алгебре $T^{(n)}(V) = \bigoplus\limits_{i=0}^{n} V^{\bigotimes i}$, где $V^{\bigotimes 0} = \mathbb{R}$. Таким образом, элемент $\mathbf{X} : [0,T]^2 \to T^{(n)}(V)$ однозначно определяется значениями $\mathbf{X}_{0,t}$, $t \in [0,T]$, поскольку $\mathbf{X}_{s,t} = (\mathbf{X}_{0,s})^{-1} \boxplus \mathbf{X}_{0,t}$. Далее будем писать $\mathbf{X}_t$ вместо $\mathbf{X}_{0,t}$.

Грубая траектория $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n)$ называется *геометрической*, если

$$\mathrm{Sym}(\mathbf{X}_{s,t}^i) = \frac{1}{i!}(\mathbf{X}_{s,t}^1)^{\bigotimes i} \quad \text{для всех} \quad i = \overline{1,n}.$$

Множество геометрических грубых траекторий обозначим через $\mathscr{C}_g^\alpha([0,T],V)$.

Будем говорить, что элемент $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$ является *грубой траекторией* над $X \in C^\alpha([0,T],V)$, если $\mathbf{X}_{0,t}^1 = X_t$ для любых $t \in [0,T]$.

Определение слабо управляемых грубых траекторий. Пусть $X \in C^\alpha([0,T],V)$, а $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n)$ – грубая траектория над X. Пусть W – конечномерное евклидово пространство. Будем говорить, что функция $Y_t \in C^\alpha([0,T],W)$ *слабо управляется грубой траекторией* $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$, если существуют функции $Y^{(1)} : [0,T] \to \mathcal{L}(V,W)$, … …, $Y^{(n-1)} : [0,T] \to \mathcal{L}(V^{\bigotimes (n-1)}, W)$ такие, что

$$Y_{s,t} = Y_s^{(1)}\mathbf{X}_{s,t}^1 + \ldots + Y_s^{(n-1)}\mathbf{X}_{s,t}^{n-1} + R_{s,t}^{Y,n}, \quad Y_{s,t}^{(1)} = Y_s^{(2)}\mathbf{X}_{s,t}^1 + \ldots + Y_s^{(n-1)}\mathbf{X}_{s,t}^{n-2} + R_{s,t}^{Y,n-1}, \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad Y_{s,t}^{(n-2)} = Y_s^{(n-1)}\mathbf{X}_{s,t}^1 + R_{s,t}^{Y,2}, \quad Y_{s,t}^{(n-1)} = R_{s,t}^{Y,1};$$

а величина $\|R^{Y,i}\|_{i\alpha}$, $i = \overline{1,n}$, конечна для каждого из остаточных членов $R^{Y,i}$. Функцию $Y^{(i)}$ будем называть *грубой производной* порядка i от Y.

Введём банахово пространство

$$\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T],W) = \left\{(Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)}) : Y \in C^\alpha([0,T],W), \ \sum_{i=1}^{n} \|R^{Y,i}\|_{i\alpha} < \infty\right\},$$

задав сначала в нём полунорму

$$\|(Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha} := \sum_{i=1}^{n} \|R^{Y,i}\|_{i\alpha},$$

а затем определив норму элемента $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T],W)$ равенством

$$\|\mathbf{Y}\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha} := \sum_{i=0}^{n-1} |Y_0^{(i)}| + \|(Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha},$$

где $Y_t^{(0)} = Y_t$.

Определение интеграла по грубым траекториям. Пусть V, W – некоторые конечномерные евклидовы пространства, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$, $Y \in C^\alpha([0,T],\mathcal{L}(V,W))$, $(Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T],\mathcal{L}(V,W))$. Зафиксируем некоторые $s,t \in [0,T]$, $s < t$, через $\mathcal{P}$ обозначим произвольное конечное разбиение отрезка $[s,t]$, а через $|\mathcal{P}|$ его диаметр.

Грубым потраекторным интегралом $\int_s^t Y_r\, d\mathbf{X}_r$ назовём следующий предел интегральных сумм (если этот предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения отрезка $[s,t]$):

$$\int\limits_s^t Y_r\, d\mathbf{X}_r := \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} \sum_{i=0}^{n-1} Y_u^{(i)} \mathbf{X}_{u,v}^{i+1}.$$

Определение грубых траекторий на полуоси. Пусть $\beta \in (1/(n+1), 1/n]$, $X \in C^\beta(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, т.е. при любом $T > 0$ сужение $X|_{[0,T]}$ принадлежит пространству $C^\beta([0,T], \mathbb{R})$. Для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ определим $\mathbf{X}^i_{s,t} = (X_{s,t})^i/i!$, $s, t \in \mathbb{R}_+$.

Элемент $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n) : \mathbb{R}^2_+ \to T^{(n)}(\mathbb{R})$ будем называть *геометрической грубой траекторией* над X. Множество геометрических грубых траекторий $\mathbf{X}$ над X по всем $X \in C^\beta(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ обозначим через $\mathscr{C}^\beta_g(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Если $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^\beta_g(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, то $\mathbf{X}|_{[0,T]^2} \in \mathscr{C}^\beta_g([0,T], \mathbb{R})$ для любого $T > 0$.

Пусть $\alpha, \beta \in (1/(n+1), 1/n]$, $\alpha < \beta$. Будем говорить, что функция $Y \in C^\alpha(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *слабо управляется* геометрической грубой траекторией $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^\beta_g(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, если существуют функции $Y^{(i)} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, такие, что величины $\|R^{Y,i}|_{[0,T]^2}\|_{i\alpha}$ конечны при любом $T > 0$ для каждого остаточного члена $R^{Y,i}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, где

$$R^{Y,i}_{s,t} = Y^{(n-i)}_{s,t} - \sum_{j=1}^{i-1} Y^{(n-i+j)}_s \mathbf{X}^j_{s,t}.$$

Скажем, что вектор-функция $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)})$ принадлежит множеству $\mathcal{D}^\alpha_{\mathbf{X}}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, если при любом $T > 0$ её сужение $\mathbf{Y}|_{[0,T]}$ принадлежит пространству $\mathcal{D}^\alpha_{\mathbf{X}}([0,T], \mathbb{R})$.

Пусть $Y \in C^\alpha([0,T], \mathbb{R})$, $(Y, Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots, Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}^\alpha_{\mathbf{X}}([0,T], \mathbb{R})$; $g \in C^n_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. По аналогии с формулой Фаа-Ди-Бруно положим (см., например, [4])

$$(g(Y))^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} D^j f(Y) B_{k,j}(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(k-j+1)}), \quad k = \overline{1, n-1}, \tag{3}$$

где $B_{k,j}(x_1, \ldots, x_{k-j+1})$ – многочлены Белла [4].

Стохастические дифференциальные уравнения, управляемые грубыми траекториями. Пусть на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ задан $\mathcal{F}_t$-согласованный случайный процесс X_t, $t \in \mathbb{R}_+$, такой, что почти все траектории процесса X_t принадлежат пространству $C^\beta(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $\beta \in (1/(n+1), 1/n]$. Определим процесс $\mathbf{X}_\cdot = (1, \mathbf{X}^1_{0,\cdot}, \ldots, \mathbf{X}^n_{0,\cdot})$ как случайную величину, принимающую значения во множестве $\mathscr{C}^\beta_g(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ п.н., где $\mathbf{X}^i_{s,t} = (X_{s,t})^i/i!$.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dY_t = f(Y_t) dX_t, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{4}$$

Определение. Пусть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ – $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина. *Решением* уравнения (4) с начальным условием $Y_0 = \xi$ назовём $\mathcal{F}$-измеримую случайную величину $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)})$ со значениями в $\mathcal{D}^\alpha_{\mathbf{X}}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ п.н., $1/(n+1) < \alpha < \beta$, такую, что случайный процесс $\mathbf{Y}_t$ является $\mathcal{F}_t$-согласованным и п.н. для всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполняется равенство

$$Y_t = \xi + \int_0^t f(Y_s)\, d\mathbf{X}_s,$$

интеграл в котором является грубым потраекторным интегралом, а грубые производные от $f(Y)$, участвующие в его определении, задаются формулами (3). Решение уравнения (4) с начальным условием $Y_0 = \xi$ будем называть *единственным*, если для любых двух решений $\mathbf{Y}$ и $\bar{\mathbf{Y}}$ уравнения (4) с начальным условием $Y_0 = \xi$ выполняется равенство $P(\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{Y}}) = 1$. В дальнейшем решением уравнения (4) будем также называть и процесс Y_t.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$dZ_t = f(Z_t)\, dt, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Пусть S_t, $t \in \mathbb{R}$, – поток, соответствующий уравнению (2), т.е. $Z_t = S_t Z_0$.

Предложение [4, теорема 3]. *Пусть* $\alpha, \beta \in (1/(n+1), 1/n]$, $\alpha < \beta$, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n) \in \mathscr{C}_g^\beta(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *п.н. Если* $f \in C_b^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *то для любой* $\mathcal{F}_0$*-измеримой случайной величины* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *существует единственное решение* $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)})$ *уравнения (4) с начальным условием* $Y_0 = \xi$ *и п.н. выполняются равенства*

$$Y_t = S_{X_{0,t}}\xi, \quad Y_t^{(i)} = D_f^{i-1} f(Y_t), \quad i \in \{1, \ldots, n-1\}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $(D_f h)(z) := f(z) Dh(z)$.

В дальнейшем полагаем, что $X_t = B_t^H$, где B_t^H – одномерное дробное броуновское движение с индексом Хёрста $H \in (0,1)$, а функция f принадлежит классу $C_b^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, где $(n+1)H > 1$.

Теорема 1. *Пусть* Y_t^x *– решение уравнения (1) с начальным условием* $Y_0 = x \in \mathbb{R}$, *функция* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *вместе со своими частными производными до второго порядка включительно непрерывна и имеет полиномиальный порядок роста. Тогда функция* $u(x,t) = \mathbb{E}(h(Y_t^x))$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = (A_t u(t, \cdot))(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

и начальному условию $u(x, 0) = h(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *где*

$$(A_t \psi)(x) = Ht^{2H-1} f(x)(f(x)\psi''(x) + f'(x)\psi'(x)).$$

Доказательство. Определим функцию $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$G(x, \tau) = h(S_\tau x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Применяя формулу Ито [9] к процессу $G(x, B_t^H)$, $t \in \mathbb{R}_+$, получаем соотношение

$$G(x, B_t^H) = G(x, 0) + \int\limits_0^t \frac{\partial G(x, B_s^H)}{\partial \tau} \diamond dB_s^H + \int\limits_0^t Hs^{2H-1} \frac{\partial^2 G(x, B_s^H)}{\partial \tau^2}\, ds, \tag{5}$$

стохастический интеграл в котором – это интеграл Вика–Ито–Скорохода [10, гл. 2].

Используя соотношение

$$\frac{\partial Z(x,t)}{\partial t} = f(x) \frac{\partial Z(x,t)}{\partial x},$$

где $Z(x,t)$ – решение уравнения (2) с начальным условием $Z_0 = x$, выразим частную производную $\partial^2 G(x,\tau)/\partial \tau^2$ через частные производные $\partial^2 G(x,\tau)/\partial x^2$ и $\partial G(x,\tau)/\partial x$. Получаем

$$\frac{\partial G(x,\tau)}{\partial \tau} = h'(Z(x,\tau)) \frac{\partial Z(x,\tau)}{\partial \tau} = h'(Z(x,\tau)) f(x) \frac{\partial Z(x,\tau)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 G(x,\tau)}{\partial \tau^2} = h''(Z(x,\tau)) \bigg(f(x) \frac{\partial Z(x,\tau)}{\partial x} \bigg)^2 + h'(Z(x,\tau)) f(x) \frac{\partial^2 Z(x,\tau)}{\partial x \partial \tau} =$$

$$= h''(Z(x,\tau)) \bigg(f(x) \frac{\partial Z(x,\tau)}{\partial x} \bigg)^2 + h'(Z(x,\tau)) f(x) \bigg(f'(x) \frac{\partial Z(x,\tau)}{\partial x} + f(x) \frac{\partial^2 Z(x,\tau)}{\partial x^2} \bigg), \tag{6}$$

$$\frac{\partial G(x,\tau)}{\partial x} = h'(Z(x,\tau)) \frac{\partial Z(x,\tau)}{\partial x}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 G(x,\tau)}{\partial x^2} = h''(Z(x,\tau)) \bigg(\frac{\partial Z(x,\tau)}{\partial x} \bigg)^2 + h'(Z(x,\tau)) \frac{\partial^2 Z(x,\tau)}{\partial x^2}. \tag{8}$$

В силу равенств (6)–(8) находим, что

$$\frac{\partial^2 G(x,\tau)}{\partial\tau^2} = f^2(x)\frac{\partial^2 G(x,\tau)}{\partial x^2} + f(x)f'(x)\frac{\partial G(x,\tau)}{\partial x}. \tag{9}$$

Согласно предложению имеем $u(x,t) = \mathbb{E}G(x, B_t^H)$. Тогда из соотношений (5), (9), теоремы Фубини и правила Лейбница вытекает равенство

$$u(x,t) = \psi(x,0) + \int\limits_0^t Hs^{2H-1}(D_f^2 u(\,\cdot\,,s))(x)\,ds,$$

из которого следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Ht^{2H-1}D_f^2 u.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $p(t,x,y)$ *– плотность распределения решения* Y_t^x *уравнения (1) с начальным условием* $Y_0 = x \in \mathbb{R}$. *Тогда функция* $p(t,x,y)$ *удовлетворяет равенству*

$$\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t} = (A_t^* p(t,x,\cdot\,))(y), \quad t>0, \quad x,y\in\mathbb{R},$$

где A_t^* *– оператор, сопряжённый к оператору* A_t.

Доказательство. Существование и гладкость функции $p(t,x,y)$ вытекают из предложения.

Возьмём произвольную функцию $h(y)$ с компактным носителем, имеющую ограниченные и непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Обозначим через A_t оператор, действующий по правилу

$$(A_t h)(y) = Ht^{2H-1}f(y)\Big(f(y)h''(y) + f'(y)h'(y)\Big), \quad t>0, \quad y\in\mathbb{R}.$$

Пусть $u(x,t) = \mathbb{E}h(Y_t^x)$, тогда

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} h(y)p(t,x,y)\,dy.$$

Применяя теорему 1 и правило Лейбница, получаем равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\bigg(h(y)\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t} - p(t,x,y)(A_t h)(y)\bigg)\,dy = 0,$$

из которого вытекает, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\bigg(h(y)\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t} - h(y)(A_t^* p(t,x,\cdot\,))(y)\bigg)\,dy = 0. \tag{10}$$

Теперь из соотношения (10) и плотности в пространстве $L_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ множества функций с компактным носителем, имеющих непрерывные ограниченные производные всех порядков, вытекает требуемое утверждение. Теорема доказана.

Замечание. Если $H = 1/2$, то результаты теорем 1 и 2 совпадают с уравнениями Колмогорова для математических ожиданий и плотностей распределений решений стохастических дифференциальных уравнений Ито $dY_t = f(Y_t)\,dW_t$, где W_t – стандартное броуновское движение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986.
2. *Lyons T.* Differential equations driven by rough signals // Rev. Mat. Iberoamericana. 1998. V. 14. № 2. P. 215–310.
3. *Gubinelli M.* Controlling rough paths // J. of Func. Anal. 2004. V. 216. № 1. P. 86–140.
4. *Васьковский М.М.* Существование и единственность решений дифференциальных уравнений, слабо управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 10. С. 1305–1317.
5. *Васьковский М.М.* Устойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений, слабо управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1443–1449.
6. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Стохастические дифференциальные уравнения и включения. Минс77 юк, 2019.
7. *Baudoin F., Coutin L.* Operators associated with a stochastic differential equation driven by fractional Brownian motions // Stoch. Processes and their Appl. 2007. V. 117. P. 550–574.
8. *Vaskouski M., Kachan I.* Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than 1/3 // Stoch. Anal. and Appl. 2018. V. 36. № 6. P. 909–931.
9. *Cheridito P., Nualart D.* Stochastic integral of divergence type with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter h in (0,1/2) // Ann. Inst. Henri Poincare Probab. Stat. 2005. V. 41. № 6. P. 1049–1081.
10. *Mishura Y.* Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes. Berlin, 2008.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 23.08.2021 г.
После доработки 23.09.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 17–22

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНОЙ ХУКУХАРЫ, СОХРАНЯЮЩИЕ СВОЙСТВО ПОСТОЯНСТВА ШИРИНЫ

© 2022 г. А. С. Войделевич

Получено полное описание линейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары, сохраняющих свойство решений быть множествами постоянной ширины.

DOI: 10.31857/S0374064122010034

1. Введение. Постановка задачи. Решения обыкновенных дифференциальных уравнений с производной Хукухары [1; 2, с. 14] при каждом значении независимой переменной являются компактными выпуклыми множествами. Поэтому исследование свойств решений таких уравнений включает в себя изучение изменения и/или асимптотического поведения как функций независимой переменной геометрических характеристик множеств, являющихся значениями решения. Так, например, в работе [3] вычислены показатели Ляпунова радиусов вписанных и описанных сфер решений линейных стационарных дифференциальных уравнений с производной Хукухары, а в работе [4] дано полное описание линейных стационарных дифференциальных уравнений с производной Хукухары, сохраняющих многогранники, т.е. таких уравнений, что любое их решение, которое при начальном значении независимой переменной является многогранником, остаётся многогранником и для всех последующих значений.

Изучению геометрических характеристик решений линейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары посвящена и настоящая работа, но прежде чем сформулировать полученный результат приведём ряд необходимых определений.

Для произвольного множества $X \subset \mathbb{R}^d$ и любого вектора $v \in \mathbb{R}^d$ единичной длины через $w(X, v)$ обозначим длину ортогональной проекции множества X на прямую, параллельную вектору v, т.е. $w(X, v) = \sup\limits_{x\in X} v^{\mathrm{T}}x - \inf\limits_{x\in X} v^{\mathrm{T}}x$.

Определение 1. Множество $X \subset \mathbb{R}^d$ называется *множеством постоянной ширины*, если длина его ортогональной проекции на произвольную прямую равна одному и тому же числу $w(X)$, которое называется *шириной множества* X.

Определение 2. *Суммой Минковского* $Z = X + Y$ двух множеств $X, Y \subset \mathbb{R}^d$ называется множество $Z \overset{\text{def}}{=} \{x + y\colon x \in X,\ \ y \in Y\}$.

Для матрицы A, имеющей d столбцов, и $X \subset \mathbb{R}^d$ положим $AX = \{Ax : x \in X\}$. Отметим, что для действительных матриц A и B, состоящих из d столбцов, и множества $X \subset \mathbb{R}^d$, вообще говоря, $(A + B)X \neq AX + BX$.

Определение 3 [1]. Множество $Z \subset \mathbb{R}^d$ такое, что $X = Y + Z$, где $X, Y \subset \mathbb{R}^d$, называется *разностью Хукухары* между множествами X и Y и обозначается как $Z = X - Y$.

Через $B \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^d\colon \|x\| \leqslant 1\}$ обозначим замкнутый шар единичного радиуса с центром в начале координат. Через $\Omega(\mathbb{R}^d)$ обозначим семейство всех непустых ограниченных подмножеств пространства $\mathbb{R}^d$.

Определение 4. *Расстоянием Хаусдорфа* $h(\,\cdot\,,\cdot\,)$ на множестве $\Omega(\mathbb{R}^d)$ называется величина

$$h(X,Y) \overset{\text{def}}{=} \inf\{r \geqslant 0 : X \subset Y + rB,\ \ Y \subset X + rB\}, \quad X, Y \in \Omega(\mathbb{R}^d).$$

Совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^d$ обозначим через $K_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$. Согласно теореме Хана пара $(K_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d), h)$ – полное метрическое пространство. Через $I \subset \mathbb{R}$ обозначим какой-либо интервал, вообще говоря, неограниченный.

Определение 5 [1]. Отображение $X\colon I\to K_{\rm c}(\mathbb R^d)$ называется *дифференцируемым по Хукухаре* в точке $t_0\in I,$ если пределы

$$\lim_{\Delta t\to+0}\frac{X(t_0+\Delta t)-X(t_0)}{\Delta t},\quad \lim_{\Delta t\to+0}\frac{X(t_0)-X(t_0-\Delta t)}{\Delta t}$$

существуют и равны между собой. В этом случае общее значение этих пределов, являющееся, очевидно, выпуклым компактом, обозначается через $D_HX(t_0)$ и называется *производной Хукухары* отображения X в точке t_0.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$D_HX=\sum_{i=1}^n A_i(t)X,\quad X(t)\in K_{\rm c}(\mathbb R^d),\quad t\in\mathbb R_+\equiv[0,\infty),\tag{1}$$

с непрерывными $d\times d$-матрицами коэффициентов $A_i(\cdot),$ $1\leqslant i\leqslant n.$ Будем говорить, что уравнение (1) *сохраняет свойство постоянства ширины*, если для произвольного её решения $X(\cdot)$ такого, что $X(0)$ – множество постоянной ширины, верно, что $X(t)$ – множество постоянной ширины при любом $t\geqslant 0.$ Естественно возникает задача получить необходимое и достаточное условие того, что уравнение (1) сохраняет свойство множества иметь постоянную ширину. Полное решение сформулированной задачи даёт теорема, доказанная в данной работе.

2. Основной результат. Докажем сначала ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть* $X\colon[a,b]\to K_{\rm c}(\mathbb R^d)$ *– дифференцируемое отображение. Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *найдётся такая последовательность чисел* $a=t_1<t_2<\ldots<t_{n+1}=b,$ *что верны неравенства*

$$h\biggl(\frac{X(t_{i+1})-X(t_i)}{t_{i+1}-t_i},D_HX(t_i)\biggr)<\varepsilon,\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

Доказательство. Назовём число $c\in(a,b]$ *хорошим*, если для любого $\varepsilon>0$ существует такая последовательность чисел $a=\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_{m+1}=c,$ что

$$h\biggl(\frac{X(\tau_{i+1})-X(\tau_i)}{\tau_{i+1}-\tau_i},D_HX(\tau_i)\biggr)<\varepsilon,\quad 1\leqslant i\leqslant m.$$

Через S обозначим множество всех хороших чисел. Необходимо доказать, что $b\in S.$ Так как отображение X дифференцируемо в точке $a,$ то, очевидно, множество S непустое. Обозначим $\sup S$ через $\xi.$ Покажем, что ξ – хорошее число. Из определения производной следует, что для некоторого $\delta>0$ и любого $t\in[\xi-\delta,\xi)$ выполнено неравенство

$$h\biggl(\frac{X(\xi)-X(t)}{\xi-t},D_HX(\xi)\biggr)<\varepsilon.$$

Так как в полуинтервале $[\xi-\delta,\xi)$ найдётся хотя бы один элемент множества $S,$ то ξ – хорошее число. Аналогичным образом доказывается, что если $\xi<b,$ то найдётся хорошее число $\eta>\xi.$ Последнее неравенство противоречит определению точной верхней грани числового множества. Следовательно, $b\in S.$ Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $X\colon[a,b]\to K_{\rm c}(\mathbb R^d)$ *– непрерывно дифференцируемое отображение. Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *существует такое* $\delta>0,$ *что для любых* $t_0<t_1\in[a,b],$ *для которых* $t_1-t_0\leqslant\delta,$ *верно неравенство*

$$h\biggl(\frac{X(t_1)-X(t_0)}{t_1-t_0},D_HX(t_0)\biggr)<\varepsilon.\tag{2}$$

Доказательство. Выберем такое $\delta>0,$ что для любых $t_0,t_1\in[a,b],$ для которых $|t_1-t_0|\leqslant\delta,$ верно неравенство $h(D_HX(t_0),D_HX(t_1))<\varepsilon/2.$ Существование такого числа

δ вытекает из непрерывности производной $D_HX(\cdot)$. Согласно лемме 1 найдётся такая последовательность $t_0=\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_{m+1}=t_1$, что

$$h(X(\tau_{i+1})-X(\tau_i),\Delta\tau_iD_HX(\tau_i))<\frac{\varepsilon}{2}\Delta\tau_i,\quad 1\leqslant i\leqslant m,$$

где $\Delta\tau_i\overset{\mathrm{def}}{=}\tau_{i+1}-\tau_i$. Следовательно,

$$h\biggl(X(t_1)-X(t_0),\sum_{i=1}^{m}\Delta\tau_iD_HX(\tau_i)\biggr)<\frac{\varepsilon}{2}(t_1-t_0).$$

С другой стороны, в силу выбора числа δ справедливо неравенство

$$h\biggl((t_1-t_0)D_HX(t_0),\sum_{i=1}^{m}\Delta\tau_iD_HX(\tau_i)\biggr)=h\biggl(\sum_{i=1}^{m}\Delta\tau_iD_HX(t_0),\sum_{i=1}^{m}\Delta\tau_iD_HX(\tau_i)\biggr)<\frac{\varepsilon}{2}(t_1-t_0).$$

Поэтому $h(X(t_1)-X(t_0),(t_1-t_0)D_HX(t_0))<\varepsilon(t_1-t_0)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $X\colon[a,b]\to K_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ *– решение уравнения (1) и для каждого натурального числа* m *последовательность* $(X_j^m)_{j=0}^m$ *выпуклых компактных множеств определена равенствами*

$$X_0^m=X(a),\quad X_{j+1}^m=X_j^m+\frac{b-a}{m}\sum_{i=1}^{n}A_i\biggl(a+\frac{b-a}{m}j\biggr)X_j^m,\quad 0\leqslant j\leqslant m-1.$$

Тогда $X_m^m\to X(b)$ *при* $m\to+\infty$.

Доказательство. Обозначим $\max\limits_{t\in[a,b]}\sum_{i=1}^n\|A_j(t)\|$ через M. Выберем произвольно $\varepsilon>0$. Согласно лемме 2 существует такое натуральное число N_ε, что для любых $t_0,t_1\in[a,b]$, для которых $0<t_1-t_0<(b-a)/N_\varepsilon$, верно неравенство (2). Пусть $m\geqslant N_\varepsilon$. Обозначим $\Delta t=(b-a)/m$ и $t_j=a+j(b-a)/m$, $0\leqslant j\leqslant m$. Индукцией по j докажем неравенство

$$h(X(t_j),X_j^m)\leqslant\varepsilon\Delta t\sum_{k=0}^{j}(1+M\Delta t)^k.$$

При $j=0$ неравенство, очевидно, выполнено. Предположим, что неравенство верно для некоторого j от 0 до $m-1$. Тогда

$$\begin{aligned}h(X(t_{j+1}),X_{j+1}^m)&\leqslant h\biggl(X(t_{j+1}),X(t_j)+\Delta t\sum_{i=1}^{n}A_i(t_j)X(t_j)\biggr)+\\&+h\biggl(X(t_j)+\Delta t\sum_{i=1}^{n}A_i(t_j)X(t_j),X_j^m+\Delta t\sum_{i=1}^{n}A_i(t_j)X_j^m\biggr)\leqslant\\&\leqslant\varepsilon\Delta t+h(X(t_j),X_j^m)+\Delta t\sum_{i=1}^{n}h(A_i(t_j)X(t_j),A_i(t_j)X_j^m)\leqslant\\&\leqslant\varepsilon\Delta t+(1+M\Delta t)h(X(t_j),X_j^m)\leqslant\varepsilon\Delta t\sum_{k=0}^{j+1}(1+M\Delta t)^k.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$h(X(b),X_m^m)\leqslant\varepsilon\Delta t\sum_{k=0}^{m}(1+M\Delta t)^k=\varepsilon\Delta t\frac{(1+M\Delta t)^{m+1}-1}{M\Delta t}\leqslant\frac{\varepsilon}{M}e^{M(m+1)\Delta t}.$$

Так как $(m+1)\Delta t\leqslant2(b-a)$, то $X_m^m\to X(b)$ при $m\to+\infty$. Лемма доказана.

Через $\mathbb{O}_d$ обозначим множество всех действительных $d \times d$-матриц A, для каждой из которых найдётся такое действительное число $\alpha \in \mathbb{R}$, что выполнено равенство $A^{\mathrm{T}}A = \alpha^2 I$. Другими словами, множество $\mathbb{O}_d$ состоит из всех $d \times d$-матриц, вектор-столбцы которых попарно ортогональны и равны по длине. Очевидно, что если $A \in \mathbb{O}_d$, то и $A^{\mathrm{T}} \in \mathbb{O}_d$.

Лемма 4. *Семейство множеств постоянной ширины замкнуто относительно сложения и умножения на матрицы из множества* $\mathbb{O}_d$.

Доказательство. Пусть $X, Y \in K_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ – множества постоянной ширины и $A \in \mathbb{O}_d$. Покажем, что $X+Y$ и AX – множества постоянной ширины. Выберем произвольные векторы v_1 и $v_2 \in \mathbb{R}^d$ единичной длины. Так как $A \in \mathbb{O}_d$, то для некоторого $\alpha \geqslant 0$ верно равенство $AA^{\mathrm{T}} = \alpha^2 I$. Поэтому $\|A^{\mathrm{T}}v_1\| = \|A^{\mathrm{T}}v_2\| = \alpha$. Утверждение леммы следует из равенств

$$w(X+Y, v_1) = w(X, v_1) + w(Y, v_1) = w(X, v_2) + w(Y, v_2) = w(X+Y, v_2),$$

$$w(AX, v_1) = \|A^{\mathrm{T}}v_1\| w\biggl(X, \frac{A^{\mathrm{T}}v_1}{\|A^{\mathrm{T}}v_1\|}\biggr) = \|A^{\mathrm{T}}v_2\| w\biggl(X, \frac{A^{\mathrm{T}}v_2}{\|A^{\mathrm{T}}v_2\|}\biggr) = w(AX, v_2).$$

(Отметим, что последняя цепочка равенств имеет смысл, если $\alpha \neq 0$. Если же $\alpha = 0$, то, очевидно, $w(AX, v_1) = 0$ и $w(AX, v_2) = 0$.)

Лемма 5. *Если* $A_i(t) \in \mathbb{O}_d$, $1 \leqslant i \leqslant n$, *при всех* $t \geqslant 0$, *то уравнение (1) сохраняет свойство постоянства ширины.*

Доказательство. Пусть $X(\cdot)$ – какое-либо решение уравнения (1) такое, что $X(0)$ – множество постоянной ширины. Зафиксируем какой-либо момент времени $t > 0$ и докажем, что $X(t)$ – множество постоянной ширины. Для произвольного натурального m рассмотрим последовательность $(X_j^m)_{j=1}^m$, определённую в лемме 3. Индукцией по j доказывается, что X_j^m – множество постоянной ширины. Действительно, база индукции выполнена, так как $X_0^m = X(0)$, а справедливость шага индукции следует из леммы 4.

Так как $X_m^m \to X(t)$ при $m \to +\infty$, то $X(t)$ – множество постоянной ширины. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* a *и* b *– различные неотрицательные действительные числа. Тогда найдётся такое* $\varepsilon > 0$, *что для всех действительных чисел* x *и* y *верно неравенство*

$$\sqrt{ax^2 + by^2} + \sqrt{bx^2 + ay^2} \geqslant (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \varepsilon)\sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3}$$

Доказательство. Для произвольных действительных чисел α_1, β_1, α_2, β_2 справедливо неравенство

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} + \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \geqslant \sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2}, \tag{4}$$

которое следует из неравенства треугольника. При этом неравенство (4) обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы $(\alpha_1, \beta_1)^{\mathrm{T}}$ и $(\alpha_2, \beta_2)^{\mathrm{T}}$ коллинеарны, т.е. $\alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1$.

Рассмотрим функцию $f(x,y) \overset{\mathrm{def}}{=} \sqrt{ax^2 + by^2} + \sqrt{bx^2 + ay^2} - (\sqrt{a} + \sqrt{b})$, заданную на окружности $\mathrm{S}^1 \overset{\mathrm{def}}{=} \{(x,y)\colon x^2 + y^2 = 1\}$ единичного радиуса с центром в начале координат. Согласно неравенству (4) имеем

$$\sqrt{ax^2 + by^2} + \sqrt{bx^2 + ay^2} \geqslant \sqrt{(\sqrt{a}x + \sqrt{b}x)^2 + (\sqrt{a}y + \sqrt{b}y)^2} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Следовательно, $f(x,y) \geqslant 0$. Более того, так как векторы $(ax, by)^{\mathrm{T}}$ и $(bx, ay)^{\mathrm{T}}$ не коллинеарны при $(x,y) \in \mathbb{S}^1$, то $f(x,y) > 0$. Непрерывная функция $f(x,y)$ достигает минимального значения на компактном множестве $\mathbb{S}^1$. Поэтому $\varepsilon \overset{\mathrm{def}}{=} \min\limits_{(x,y) \in \mathbb{S}^1} f(x,y) > 0$. Следовательно, при $(x,y) \in \mathbb{S}^1$ справедливо неравенство

$$\sqrt{ax^2 + by^2} + \sqrt{bx^2 + ay^2} \geqslant (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \varepsilon). \tag{5}$$

Пусть теперь x и y – произвольные действительные числа. Если $x = y = 0$, то неравенство (3), очевидно, верно. Если $x^2 + y^2 \neq 0$, то неравенство (3) вытекает из неравенства (5), в котором вместо x и y следует взять $x/\sqrt{x^2+y^2}$ и $y/\sqrt{x^2+y^2}$ соответственно, а затем умножить левую и правую части на $\sqrt{x^2+y^2}$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть a_i, b_i, c_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ – действительные числа такие, что квадратичные формы $a_ix^2 + 2b_ixy + c_iy^2$ неотрицательно определены и верно тождество*

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_ix^2 + 2b_ixy + c_iy^2} \equiv \sqrt{x^2+y^2}. \tag{6}$$

Тогда $a_i = c_i$ и $b_i = 0$, $q \leqslant i \leqslant n$.

Доказательство. Предположим противное. Без нарушения общности будем считать, что либо $a_1 \neq c_1$, либо $b_1 \neq 0$. Существует ортогональная замена координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

которая приводит квадратичную форму $a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2$ к канонической форме. При этом ортогональная замена координат не меняет коэффициенты у квадратичных форм со скалярной матрицей коэффициентов, т. е. с диагональной матрицей коэффициентов, элементы главной диагонали которой равны. Поэтому далее считаем, что $b_1 = 0$, но $a_1 \neq c_1$.

Подставляя в тождество (6) вместо x и y соответственно числа 1 и 0, находим, что $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} = 1$. Аналогично, $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{c_i} = 1$. Меняя местами x и y в тождестве (6), получаем равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{c_ix^2 + 2b_ixy + a_iy^2} = \sqrt{x^2+y^2}. \tag{7}$$

Сложив тождества (6) и (7), будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{a_ix^2 + 2b_ixy + c_iy^2} + \sqrt{c_ix^2 + 2b_ixy + a_iy^2} \right) = 2\sqrt{x^2+y^2}.$$

Согласно лемме 6 при некотором $\varepsilon > 0$ для всех действительных чисел x и y верно неравенство

$$\sqrt{a_1x^2 + c_1y^2} + \sqrt{c_1x^2 + a_1y^2} \geqslant (\sqrt{a_1} + \sqrt{c_1} + \varepsilon)\sqrt{x^2+y^2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=2}^{n} \left(\sqrt{a_ix^2 + 2b_ixy + c_iy^2} + \sqrt{c_ix^2 + 2b_ixy + a_iy^2} \right) \leqslant (2 - \sqrt{a_1} - \sqrt{c_1} - \varepsilon)\sqrt{x^2+y^2}. \tag{8}$$

Из неравенства (8) при $x = 1$ и $y = 0$ вытекает, что

$$\sum_{i=2}^{n} (\sqrt{a_i} + \sqrt{c_i}) \leqslant 2 - \sqrt{a_1} - \sqrt{c_1} - \varepsilon = \sum_{i=2}^{n} (\sqrt{a_i} + \sqrt{c_i}) - \varepsilon.$$

Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 8. *Пусть A_1, A_2, $\ldots$, A_n – действительные $d \times d$-матрицы и $\alpha \geqslant 0$. Равенство*

$$\|A_1v\| + \|A_2v\| + \ldots + \|A_nv\| = \alpha\|v\| \tag{9}$$

выполнено для произвольного вектора $v \in \mathbb{R}^d$, если и только если найдутся такие неотрицательные действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$, что

$$A_i^{\mathrm{T}} A_i = \alpha_i^2 I, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha. \tag{10}$$

Доказательство. Если для неотрицательных чисел $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ выполнены равенства (10), то для любого вектора $v\in\mathbb{R}^n$ получаем, что

$$\|A_i v\| = \sqrt{v^{\mathrm{T}}A_i^{\mathrm{T}}A_i v} = \alpha_i\sqrt{v^{\mathrm{T}}v} = \alpha_i\|v\|,\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

а значит, $\sum_{i=1}^n\|A_i v\| = \sum_{i=1}^n \alpha_i\|v\| = \alpha\|v\|$.

Предположим теперь, что равенство (9) верно для произвольного вектора $v\in\mathbb{R}^d$. Докажем, что вектор-столбцы матриц A_i, $1\leqslant i\leqslant n$, попарно ортогональны и имеют равные длины. Пусть e_j и e_k – векторы канонического базиса пространства $\mathbb{R}^d$. Тогда A_ie_j и A_ie_k – столбцы матрицы A_i с номерами j и k соответственно. Обозначим $a_i = \|A_ie_j\|^2$, $b_i = (A_ie_j, A_ie_k)$ и $c_i = \|A_ie_k\|^2$. Для произвольных действительных чисел x и y положим $v = xe_j + ye_k$. Так как

$$\|A_i v\| = \sqrt{a_ix^2 + 2b_ixy + c_iy^2}\quad\text{и}\quad \|v\| = \sqrt{x^2+y^2},$$

то из леммы 7 следует, что $a_i = c_i$ и $b_i = 0$.

Обозначим через α_i длину вектор-столбцов матрицы A_i. Тогда $\|A_i^{\mathrm{T}}A_i\| = \alpha_i^2 I$, а значит, $\|A_iv\| = \alpha_i\|v\|$, $v\in\mathbb{R}$. Следовательно, $\sum_{i=1}^n\alpha_i = \alpha$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Если уравнение (1) сохраняет свойство постоянства ширины, то* $A_i(t)\in\mathbb{O}_d$, $1\leqslant i\leqslant n$, *при всех* $t\geqslant 0$.

Доказательство. Пусть $X(\cdot)$ – решение уравнения (1) такое, что $X(0) = B$ (напомним, что через B мы обозначили замкнутый шар единичного радиуса с центром в начале координат). Пусть $w(t)$ – ширина множества $X(t)$ в момент времени $t\geqslant 0$. Выберем произвольный вектор $v\in\mathbb{R}^d$ единичной длины. Так как

$$\dot{w}(t) = \lim_{\Delta t\to+0}\frac{w(X(t+\Delta t),v) - w(X(t),v)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to+0}\frac{w(X(t+\Delta t) - X(t),v)}{\Delta t} =$$

$$= w(\dot{X}(t),v) = \sum_{i=1}^n w(A_i(t)X(t),v) = \sum_{i=1}^n\|A_i^{\mathrm{T}}(t)v\|w\biggl(X(t),\frac{A_i^{\mathrm{T}}(t)v}{\|A_i^{\mathrm{T}}(t)v\|}\biggr) = w(t)\sum_{i=1}^n\|A_i^{\mathrm{T}}(t)v\|$$

и $w(t)>0$, то величина $\sum_{i=1}^n\|A_i^{\mathrm{T}}v\|$ не зависит от выбора вектора v. Из леммы 8 следует, что $A_i(t)\in\mathbb{O}_d$, $1\leqslant i\leqslant n$. Лемма доказана.

Из лемм 5 и 9 вытекает основной результат работы.

Теорема. *Уравнение (1) сохраняет свойство постоянства ширины, если и только если существуют такие непрерывные функции* $\alpha_1(\cdot),\alpha_2(\cdot),\ldots,\alpha_n(\cdot)\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}_+$, *что при всех* $t\geqslant 0$ *верны равенства*

$$A_i(t)^{\mathrm{T}}A_i(t) = \alpha_i(t)E,\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hukuhara M.* Integration des applications measurables dont la valeur est un compact convexe // Funk. Ekv. 1967. V. 10. P. 205–223.
2. *Lakshmikantham V., Gnana Bhaskar T., Vasundhara Devi J.* Theory of Set Differential Equations in Metric Spaces. London, 2006.
3. *Войделевич А.С.* Показатели Ляпунова радиусов вписанных и описанных сфер решений стационарных линейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 4. С. 572–576.
4. *Войделевич А.С.* Стационарные линейные дифференциальные уравнения с производной Хукухары, сохраняющие многогранники // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1695–1698.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию 17.08.2021 г.
После доработки 20.11.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 23–36

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ, ЗАДАЮЩИХ ТЕПЛОВОЙ РЕЖИМ, ПО ВЫХОДНЫМ ДАННЫМ

© 2022 г. Ш. А. Алимов, Н. М. Комилов

Рассматривается математическая модель процесса разогрева цилиндрической области с помощью расположенных в ней источников тепла в предположении, что на боковой поверхности теплообмен с окружающей средой происходит в соответствии с законом Ньютона. Процесс разогрева управляется при помощи введения или выведения охлаждающих элементов. Доказывается, что характер изменения во времени объёма вводимых охлаждающих элементов однозначно восстанавливается по выходной мощности – функции временно́й переменной, представляющей собой среднее взвешенное значение температуры в области.

DOI: 10.31857/S0374064122010046

1. Введение. Постановка задачи и формулировка результатов. В работе рассматривается математическая модель процесса разогрева некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с помощью расположенных в ней источников тепла. Область Ω предполагается имеющей цилиндрическую форму: $\Omega = D \times (0, H)$. Основание $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ представляет собой выпуклую область с гладкой границей, а высота H является положительным числом.

В рассматриваемой области с некоторой плотностью $g(x)$, $x \in \Omega$, распределены постоянные источники тепла. Управление процессом разогрева производится путём опускания сверху или подъёма вверх охлаждающих элементов. При этом изменяется высота h “активной” зоны, свободной от охлаждающих элементов, где $0 \leqslant h \leqslant H$. Управление температурой носителя тепла производится изменением высоты $h(t)$ во времени.

Таким образом, управляющим параметром является непрерывная функция $h(t)$, выбором которой обеспечивается необходимый температурный режим.

Введём обозначение $x = (\widetilde{x}, x_n)$, где $\widetilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in D$ и $0 < x_n < H$.

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u(x,t) + f(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{1}$$

с граничными условиями Робена

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} + \sigma(\tilde{x})u(x,t) = 0, \quad x \in \partial D \times [0, H], \quad t > 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(\widetilde{x},0,t)}{\partial x_n} = \frac{\partial u(\widetilde{x},H,t)}{\partial x_n} = 0, \quad \widetilde{x} \in D, \quad t > 0, \tag{3}$$

и начальным условием

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Мы предполагаем, что свободный член уравнения (1) имеет вид

$$f(x,t) = g(\widetilde{x})\omega(x_n, h(t)), \tag{5}$$

где $h = h(t)$ – неизвестная непрерывная функция, удовлетворяющая при $t \geqslant 0$ условию

$$0 \leqslant h(t) \leqslant H, \tag{6}$$

а кусочно-постоянная функция ω определяется равенством

$$\omega(x_n,h)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad 0\leqslant x_n\leqslant h,\\ 0 & \text{при}\quad x_n>h.\end{cases}\tag{7}$$

Функция g в равенстве (5), представляющая собой плотность распределения источников тепла, предполагается неотрицательной и принадлежащей классу $L_2(D)$. Далее будем предполагать, что функция $g(\tilde{x})$ принадлежит классу $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, совпадающему с замыканием $C_0^\infty(D)$ по норме пространства Соболева $W_2^1(D)$. Это означает, что плотность источников тепла становится пренебрежимо малой при приближении к цилиндрической границе области Ω.

Коэффициент теплообмена $\sigma=\sigma(\widetilde{x})$ – заданная гладкая функция, не зависящая от координаты x_n и не равная тождественно нулю. Условие (2) означает, что на поверхности $\partial D\times\times[0,H]$ теплообмен с окружающей средой происходит в соответствии с законом Ньютона (см. [1, гл. III, § 1, п. 4]).

Пусть $\rho=\rho(\widetilde{x})$ – заданная весовая функция, не зависящая от x_n. Это означает, что

$$\rho(\tilde{x})\geqslant 0,\quad \tilde{x}\in D,\quad \int\limits_D \rho(\tilde{x})\,d\tilde{x}=\frac{1}{H},\tag{8}$$

и, следовательно,

$$\int\limits_\Omega \rho(\tilde{x})\,dx=\int\limits_0^H dx_n\int\limits_D \rho(\tilde{x})\,d\tilde{x}=1.$$

Всюду в дальнейшем предполагаем, что весовая функция $\rho(\tilde{x})$ принадлежит классу $L_2(D)$ и не является ортогональной к плотности $g(\tilde{x})$.

Среднее взвешенное значение $\bar{u}(t)$ температуры по области Ω определяется равенством

$$\bar{u}(t)=\int\limits_\Omega u(x,t)\rho(\tilde{x})\,dx.$$

Как правило, среднее взвешенное значение температуры однозначно определяет выходную мощность рассматриваемого процесса.

В моделируемом процессе возможна критическая ситуация, когда, зная значение $\bar{u}(t)$, мы должны для прояснения указанной ситуации получить информацию о $h(t)$, прямой доступ к которой невозможен. Иначе говоря, можно ли на основе информации о выходе $\bar{u}(t)$ определить, каким образом менялось управление $h(t)$ процессом нагревания, в частности, были ли нарушены установленные требования и ограничения.

Математически задача может быть сформулирована следующим образом: можно ли для заданной функции $\theta(t)$ найти однозначно характеристику процесса $h(t)$ такую, что при этой характеристике среднее взвешенное значение температуры совпадает с функцией $\theta(t)$.

Для того чтобы ввести определение решения задачи (1)–(4), обозначим символом $\widetilde{W}_2^2(\Omega)$ класс функций из пространства Соболева $W_2^2(\Omega)$ с нормой

$$\|v\|^2_{W_2^2(\Omega)}=\|v\|^2+\sum_{j=1}^n\|D_j^2v\|^2,\tag{9}$$

удовлетворяющих условиям

$$\frac{\partial v(x)}{\partial\nu}+\sigma v(x)=0,\quad x\in\partial D\times[0,H],\quad D_nv(\tilde{x},0)=D_nv(\tilde{x},H)=0.\tag{10}$$

В равенстве (9) $D_j=\partial/\partial x_j$, а норма без нижнего индекса означает норму в $L_2(\Omega)$ (см. [2, гл. III, § 9, формула (1)]).

Из полноты пространства Соболева и из теорем вложения о следах (см. [2, гл. V, § 24]) вытекает, что класс $\widetilde{W}_2^2(\Omega)$ является замкнутым подпространством пространства $W_2^2(\Omega)$.

Для любого банахового пространства B и произвольного $T > 0$ через $C([0,T] \to B)$ обозначим банахово пространство всех непрерывных отображений $u : [0,T] \to B$ с нормой

$$\|u\|_T = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(t)\|,$$

а через $C((0,T) \to B)$ – линейное пространство всех отображений $u : (0,T) \to B$, непрерывных на интервале $(0,T)$.

Будем говорить, что функция $u(x,t)$ является *обобщённым решением* задачи (1)–(4), если

$$u \in C([0,T] \to \widetilde{W}_2^2(\Omega)), \tag{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in C((0,T) \to L_2(\Omega)) \tag{12}$$

и выполняются уравнение (1) и начальное условие (4).

Заметим, что, согласно теоремам вложения (см. [2, гл. V, § 20]), градиент решения имеет след на каждой гладкой $(n-1)$-мерной поверхности. Таким образом, условия Робена (2) и Неймана (3) корректно определены.

Далее через $\overline{\mathbb{R}}_+$ обозначим полупрямую неотрицательных чисел, т.е. $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geqslant 0\}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть функция* $\theta : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *дважды непрерывно дифференцируема на полупрямой* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *и удовлетворяет условиям*

$$\theta(0) = \theta'(0) = 0, \quad \theta''(0) > 0. \tag{13}$$

Тогда найдутся такие $T > 0$ *и единственная непрерывно дифференцируемая функция* $h : [0,T] \to [0,H]$, *что решение* $u_h(x,t)$ *задачи (1)–(4) существует и удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{\Omega} u_h(x,t)\rho(\tilde{x})\,dx = \theta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{14}$$

Отметим, что проблеме управления процессом теплообмена посвящена обширная литература (подробную библиографию можно найти в монографиях [3, 4]). В работах последнего времени большее внимание уделяется прикладным аспектам данной проблемы (см., например, [5–7]).

Изложение настоящей работы построено следующим образом. В п. 2 для произвольной функции $h(t)$ находится решение задачи (1)–(4) в виде ряда по собственным функциям оператора Лапласа. Затем в п. 3 задача об отыскании функции $h(t)$ сводится к основному интегральному уравнению Вольтерры первого рода и изучаются свойства ядра соответствующего интегрального оператора. В п. 4 приводится доказательство теоремы и в заключительном п. 5 проводится анализ полученного решения.

2. Решение прямой задачи. Построение решения начально-краевой задачи (1)–(4) опирается на её спектральные свойства.

2.1. Рассмотрим полную ортонормированную в гильбертовом пространстве $L_2[0,H]$ систему, состоящую из функций

$$z_k(\xi) = \begin{cases} 1/\sqrt{H}, & \text{если} \quad k = 0, \\ \sqrt{2/H}\cos(k\pi\xi/H), & \text{если} \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{15}$$

Отметим, что функции (15) являются собственными функциями краевой задачи

$$-\frac{d^2 z_k(\xi)}{d\xi^2} = \nu_k z_k(\xi), \quad 0 < \xi < H, \quad z_k'(0) = z_k'(H) = 0. \tag{16}$$

Её соответствующие собственные значения равны $\nu_k = (k\pi/H)^2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Ряд Фурье по системе (15) функции $\omega(x_n, h)$, определённой равенством (7), имеет вид

$$\omega(x_n, h) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(h) z_k(x_n),$$

в котором коэффициенты Фурье задаются равенством

$$\omega_k(h) = \begin{cases} h/\sqrt{H}, & \text{если} \quad k = 0, \\ k^{-1}\sqrt{2/H}\sin(kh), & \text{если} \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{17}$$

Отсюда для функции $\omega(x_n, h(t))$ получаем следующее представление:

$$\omega(x_n, h(t)) = \frac{1}{H} h(t) + \frac{2}{H} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kh(t))}{k} \cos\frac{k\pi x_n}{H}.$$

Обозначим через $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$ собственные значения, а через $\{v_m\}$ собственные функции следующей спектральной задачи:

$$-\Delta v_m(\tilde{x}) = \mu_m v_m(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in D, \quad \text{и} \quad \frac{\partial v_m(\tilde{x})}{\partial \nu} + \sigma(\tilde{x}) v_m(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x} \in \partial D. \tag{18}$$

Данные собственные функции образуют в $L_2(D)$ полную ортонормированную систему (см. [8, гл. IV, § 1, теорема 3]). Спектральное разложение произвольной функции $g \in L_2(D)$ имеет вид

$$g(\tilde{x}) = \sum_{m=1}^{\infty} (g, v_m) v_m(\tilde{x}),$$

где $(\cdot\,,\cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(D)$; причём ряд сходится в метрике пространства $L_2(D)$.

Положим

$$\psi_{km}(x) = v_m(\tilde{x}) z_k(x_n), \quad x \in \Omega. \tag{19}$$

Функции (19) являются, согласно постановке задач (16) и (18), собственными функциями следующей спектральной задачи:

$$-\Delta\psi(x) = \lambda\psi(x), \quad x \in \Omega,$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial\psi(x)}{\partial\nu} + \sigma\psi(x) = 0, \quad x \in \partial D \times [0, H], \quad \text{и} \quad \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_n}\bigg|_{x_n=0} = \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_n}\bigg|_{x_n=H} = 0, \quad \tilde{x} \in D.$$

Её соответствующие собственные значения λ_{km}, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $m = 1, 2, \ldots$, задаются равенством

$$\lambda_{km} = \nu_k + \mu_m, \tag{20}$$

а ортонормированная система $\{\psi_{km}\}$ является полной в пространстве $L_2(\Omega)$.

Мы ищем решение задачи (1)–(4) в виде следующего ряда:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{km}(t)\psi_{km}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{km}(t) v_m(\tilde{x}) z_k(x_n). \tag{21}$$

Принимая во внимание сказанное выше и подставляя ряд (21) в уравнение (1), приходим к уравнению

$$\frac{dc_{km}(t)}{dt} = -(\nu_k + \mu_m)c_{km}(t) + (g, v_m)\omega_k(h(t)), \tag{22}$$

решение которого с учётом начального условия (4) имеет вид

$$c_{km}(t) = (g, v_m)\int\limits_0^t e^{-(\nu_k+\mu_m)(t-\tau)}\omega_k(h(\tau))\,d\tau. \tag{23}$$

Следовательно,

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(g, v_m)v_m(\tilde{x})z_k(x_n)\int\limits_0^t e^{-(\nu_k+\mu_m)(t-\tau)}\omega_k(h(\tau))\,d\tau. \tag{24}$$

2.2. Нашей ближайшей целью является доказательство того, что функция (24) удовлетворяет включениям (11) и (12), уравнению (1) и начальному условию (4). Предварительно докажем несколько простых вспомогательных утверждений.

Утверждение 1. *Коэффициенты (23) удовлетворяют оценке*

$$|c_{km}(t)| \leqslant \frac{C}{\lambda_{km}}\frac{|(g, v_m)|}{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{25}$$

равномерно на полупрямой $\mathbb{R}_+$, *где числа* λ_{km} *определены равенством (20).*

Здесь и далее C обозначает некоторую положительную постоянную (не обязательно одну и ту же), которая не зависит от переменных и индексов.

Доказательство. 1. Пусть $k \geqslant 1$. Тогда из (23) и (17) получаем

$$|c_{km}| \leqslant |(g, v_m)|\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)\lambda_{km}}|\omega_k(h(\tau))|\,d\tau = |(g, v_m)|\sqrt{\frac{2}{H}}\int\limits_0^t \frac{|\sin(kh(\tau))|}{k}e^{-(t-\tau)\lambda_{km}}\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{H}}\frac{|(g, v_m)|}{k}\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)\lambda_{km}}\,d\tau \leqslant \sqrt{\frac{2}{H}}\frac{|(g, v_m)|}{k\lambda_{km}}.$$

2. Предположим теперь, что $k = 0$. Тогда, учитывая условие $0 \leqslant h(t) \leqslant H$, из (23) и (17) получаем

$$|c_{0m}| = |(g, v_m)|\frac{1}{\sqrt{H}}\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)\lambda_{0m}}h(\tau)\,d\tau \leqslant \sqrt{H}|(g, v_m)|\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)\lambda_{0m}}\,d\tau \leqslant \sqrt{H}\frac{|(g, v_m)|}{\lambda_{0m}}.$$

Утверждение доказано.

Следствие 1. *Для любой функции* $g \in L_2(D)$ *коэффициенты* $c_{km}(t)$, *определённые равенством (23), удовлетворяют оценке*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|c_{km}(t)|^2\lambda_{km}^2 \leqslant C\|g\|^2_{L_2(D)}, \tag{26}$$

причём ряд в левой части сходится равномерно относительно $t \geqslant 0$.

Действительно, воспользовавшись оценкой (25), получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|c_{km}(t)|^2\lambda_{km}^2 \leqslant C\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|(g,v_m)|^2}{(k+1)^2} = C\frac{\pi^2}{6}\|g\|^2_{L_2(D)}.$$

Следствие доказано.

Утверждение 2. *Пусть* $g \in L_2(D)$. *Тогда функция, получающаяся в результате применения в смысле теории распределений оператора Лапласа к функции (24), принадлежит пространству* $L_2(\Omega)$ *и справедливо разложение*

$$\Delta u(x,t) = -\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_{km}c_{km}(t)\psi_{km}(x), \tag{27}$$

причём ряд в правой части (27) сходится в метрике $L_2(\Omega)$ *равномерно относительно* $t \geqslant 0$.

Доказательство. Положим

$$F(x,t) = -\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_{km}c_{km}(t)\psi_{km}(x).$$

Вследствие оценки (26) функция $F(x,t)$ принадлежит пространству $L_2(\Omega)$, а её норма в этом пространстве равномерно ограничена по $t \geqslant 0$. Докажем, что $\Delta u(x,t) = F(x,t)$ в смысле теории распределений.

Для любой функции $v \in C_0^\infty(\Omega)$ коэффициенты Фурье функции $\Delta v(x)$ имеют вид

$$\int\limits_{\Omega}\Delta v(x)\psi_{km}(x)\,dx = \int\limits_{\Omega}v(x)\Delta\psi_{km}(x)\,dx = -\lambda_{km}(v,\psi_{km}).$$

Следовательно, в силу представления (21) получаем

$$\int\limits_{\Omega}u(x,t)\Delta v(x)\,dx = -\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_{km}c_{km}(t)(v,\psi_{km}). \tag{28}$$

С другой стороны, согласно равенству Парсеваля, имеем

$$\int\limits_{\Omega}F(x,t)v(x)\,dx = -\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_{km}c_{km}(t)(v,\psi_{km}). \tag{29}$$

Из равенств (28) и (29), а также из определения распределения $\Delta u(x,t)$ вытекает, что

$$\int\limits_{\Omega}\Delta u(x,t)v(x)\,dx = \int\limits_{\Omega}u(x,t)\Delta v(x)\,dx = \int\limits_{\Omega}F(x,t)v(x)\,dx.$$

Отсюда, так как функция $v \in C_0^\infty(\Omega)$ произвольна, следует требуемое равенство $\Delta u(x,t) = F(x,t)$. Утверждение доказано.

Следствие 2. *Для любой функции* $g \in L_2(D)$ *функция* $u(x,t)$, *определённая равенством (24), удовлетворяет оценке*

$$\int\limits_{\Omega}|\Delta u(x,t)|^2\,dx \leqslant C\|g\|^2_{L_2(D)}, \tag{30}$$

равномерной относительно $t \geqslant 0$.

Действительно, данная оценка вытекает непосредственно из представления (27) и оценки (26).

2.3. Перейдём к проверке выполнения условия (11).

Утверждение 3. *Пусть* $g \in L_2(D)$. *Тогда для функции (24) справедливо включение (11).*

Доказательство. Каждая из функций (19) принадлежит классу $\widetilde{W}_2^2(\Omega)$. Следовательно, этому же классу принадлежит и конечная сумма

$$S_N(x,t) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{m=1}^{N} c_{km}(t)\psi_{km}(x) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{m=1}^{N} c_{km}(t)v_m(\tilde{x})z_k(x_n).$$

Далее воспользуемся тем, что задача Робена (18) для оператора Лапласа в произвольной области D с гладкой границей является коэрцитивной (см. [9, гл. III, § 3, п. 1, теорема 3.3]). Отсюда следует, что выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^{n-1}\int_D |D_j^2 S_N(\tilde{x},x_n,t)|^2 d\tilde{x} \leqslant C(\|\widetilde{\Delta} S_N(\,\cdot\,,x_n,t)\|_{L_2(D)}^2 + \|S_N(\,\cdot\,,x_n,t)\|_{L_2(D)}^2),$$

где $\widetilde{\Delta}$ обозначает оператор Лапласа по переменным $\tilde{x}$.

Интегрирование этого неравенства по x_n по отрезку $[0,H]$ приводит к следующему соотношению:

$$\sum_{j=1}^{n-1}\|D_j^2 S_N(\,\cdot\,,t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leqslant C(\|\widetilde{\Delta} S_N(\,\cdot\,,t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|S_N(\,\cdot\,,t)\|_{L_2(\Omega)}^2).$$

Добавим к обеим частям этого неравенства величину $\|D_n^2 S_N(\,\cdot\,,t)\|_{L_2(\Omega)}^2$. В результате, приняв во внимание определение (9) и увеличив при необходимости постоянную C, получим

$$\|S_N(\,\cdot\,,t)\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \leqslant C(\|\widetilde{\Delta} S_N(\,\cdot\,,t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|D_n^2 S_N(\,\cdot\,,t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + C\|S_N(\,\cdot\,,t)\|_{L_2(\Omega)}^2). \tag{31}$$

Для оценки правой части этого неравенства воспользуемся следующими соотношениями, вытекающими из равенства (24):

$$\|\widetilde{\Delta} S_N(\,\cdot\,,t)\|^2 + \|D_n^2 S_N(\,\cdot\,,t)\|^2 = \sum_{k=0}^{N}\sum_{m=1}^{N}(\nu_k^2+\mu_m^2)|c_{km}(t)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{N}\sum_{m=1}^{N}(\nu_k+\mu_m)^2|c_{km}(t)|^2 = \|\Delta S_N(\,\cdot\,,t)\|^2.$$

Тогда из неравенства (31) следует, что

$$\|S_N(\,\cdot\,,t)\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \leqslant C(\|\Delta S_N(\,\cdot\,,t)\|^2 + \|S_N(\,\cdot\,,t)\|^2). \tag{32}$$

Отсюда, принимая во внимание оценки (26) и (30), получаем

$$\|S_N(\,\cdot\,,t)\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \leqslant C\|g\|^2. \tag{33}$$

Так как последовательность $S_N(x,t)$ сходится в метрике пространства $L_2(\Omega)$ к функции $u(x,t)$, то из теоремы Банаха–Сакса вытекает, что функция (24) принадлежит классу $W_2^2(\Omega)$ (см. [10, часть II, гл. 4, § 4.4, лемма 7]). Более того, оценка (32) означает, что указанная последовательность сходится к функции (24) и в метрике пространства $W_2^2(\Omega)$, причём равномерно по $t \geqslant 0$. Ввиду замкнутости класса $\widetilde{W}_2^2(\Omega)$ как подмножества пространства $W_2^2(\Omega)$ отсюда следует, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет включению (11). Утверждение доказано.

Замечание 1. Из оценки (33) вытекает оценка $\|u(\,\cdot\,,t)\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \leqslant C\|g\|^2$.

2.4. Докажем теперь, что функция (24) удовлетворяет условию (12).

Утверждение 4. *Пусть* $g \in L_2(D)$*. Тогда для функции (24) справедливо включение (12).*

Доказательство. Достаточно убедиться в том, что формально продифференцированный по t ряд (24) сходится в метрике пространства $L_2(\Omega)$ равномерно относительно $t>0$.

Непосредственно из уравнения (22) и формул (17) вытекает оценка

$$|c'_{km}(t)| \leqslant \lambda_{km}|c_{km}(t)| + C\frac{|(g,v_m)|}{k+1}.$$

Применяя эту оценку и используя неравенство (26), получаем

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|c'_{km}(t)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|c_{km}(t)|^2\lambda^2_{km} + 2C^2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|(g,v_m)|^2}{(k+1)^2} \leqslant \operatorname{const}\|g\|^2_{L_2(D)}.$$

Из теоремы Вейерштрасса о мажорантной сходимости следует, что функция (24) удовлетворяет включению (12). Утверждение доказано.

2.5. Проверим теперь, что функция (24) удовлетворяет уравнению (1). Для этого достаточно заметить, что коэффициенты Фурье функций, расположенных в левой и правой частях этого уравнения, согласно (22) совпадают между собой.

Остаётся убедиться в том, что функция (24) удовлетворяет начальному условию (4), т.е. что имеет место соотношение

$$\lim_{t\to 0}\|u(\,\cdot\,,t)\| = 0.$$

Но это следует из того, что ряд (24) сходится в метрике пространства $L_2(\Omega)$ равномерно по $t \geqslant 0$, и из явного вида (23) коэффициентов $c_{km}(t)$.

Таким образом, доказано

Утверждение 5. *Функция (24) является решением начально-краевой задачи (1)–(4).*

Замечание 2. Если $v(x,t)$ – другое решение начально-краевой задачи (1)–(4), то, разлагая его в ряд Фурье по собственным функциям (19), получаем для коэффициентов Фурье представление, совпадающее с (23). Так как система собственных функций (19) является полной, то из совпадения коэффициентов Фурье функций $v(x,t)$ и (24) следует совпадение самих разлагаемых функций, т. е. тождество $v(x,t)\equiv u(x,t)$. Следовательно, функция (24) является единственным решением задачи (1)–(4).

3. Основное интегральное уравнение. Пусть функция $\theta(t)$ удовлетворяет условиям теоремы и пусть функция (24) является решением начально-краевой задачи (1)–(4). В этом случае условие (14) означает, что должно выполняться следующее равенство:

$$\int\limits_{\Omega}\rho(\tilde{x})\,dx\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(g,v_m)v_m(\tilde{x})z_k(x_n)\int\limits_0^t e^{-(\nu_k+\mu_m)(t-\tau)}\omega_k(h(\tau))\,d\tau = \theta(t). \tag{34}$$

Принимая во внимание соотношения (15), получаем, что

$$\int\limits_{\Omega}\rho(\tilde{x})v_m(\tilde{x})z_k(x_n)\,d\tilde{x} = \int\limits_{D}\rho(\tilde{x})v_m(\tilde{x})\,d\tilde{x}\int\limits_0^H z_k(x_n)\,dx_n = \begin{cases}\sqrt{H}(\rho,v_m) & \text{при} \quad k=0,\\ 0 & \text{при} \quad k>0.\end{cases}$$

Тогда, учитывая равенства (17), запишем равенство (34) следующим образом:

$$\int\limits_0^t d\tau\sum_{m=1}^{\infty}(\rho,v_m)(g,v_m)e^{-\mu_m(t-\tau)}h(\tau) = \theta(t). \tag{35}$$

Введём в рассмотрение функцию

$$K(t)=\sum_{m=1}^{\infty}e^{-t\mu_m}(\rho,v_m)(g,v_m). \tag{36}$$

Тогда равенство (35) примет следующий вид:

$$\int\limits_0^t K(t-\tau)h(\tau)\,d\tau=\theta(t). \tag{37}$$

Полученное интегральное уравнение Вольтерры первого рода является основным уравнением для определения функции $h(t)$.

Утверждение 6. *Если весовая функция* $\rho\in L_2(D)$ *не ортогональна плотности источников тепла* $g\in L_2(D)$, *то ядро* $K(t)$ *представляет собой непрерывную на полупрямой* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *функцию, удовлетворяющую условию*

$$K(0)>0. \tag{38}$$

Доказательство. Согласно определению (36) справедлива оценка

$$|K(t)|\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}e^{-t\mu_m}|(\rho,v_m)(g,v_m)|\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}|(\rho,v_m)(g,v_m)|\leqslant\|\rho\|_{L_2(D)}\|g\|_{L_2(D)},$$

из которой, согласно теореме Вейерштрасса о мажорантной сходимости, следует непрерывность ядра $K(t)$. Далее, вследствие определения (36) ввиду неотрицательности функций ρ и g, получаем

$$K(0)=\sum_{m=1}^{\infty}(\rho,v_m)(g,v_m)=\int\limits_D\rho(\tilde{x})g(\tilde{x})d\tilde{x}>0.$$

Утверждение доказано.

Замечание 3. *Ядро* $K(t)$ *бесконечно дифференцируемо на полупрямой* $t>0$, *т.е.* $K\in C^{\infty}(0,\infty)$.

Действительно, применив оценку $\mu_m^l e^{-t\mu_m}\leqslant t^{-l}l!$, получим

$$|K^{(l)}(t)|=\left|\sum_{m=1}^{\infty}\mu_m^l e^{-t\mu_m}(\rho,v_m)(g,v_m)\right|\leqslant\frac{l!}{t^l}\|\rho\|_{L_2(D)}\|g\|_{L_2(D)}.$$

Утверждение 7. *Для произвольной функции* $g\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ *выполняется равенство*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\mu_m|(g,v_m)|^2=\|\nabla g\|^2_{L_2(D)}. \tag{39}$$

Доказательство. Положим

$$S_N(\tilde{x})=\sum_{m=1}^{N}(g,v_m)v_m(\tilde{x}).$$

Согласно задаче (18) получаем

$$-\Delta S_N(\tilde{x})=\sum_{m=1}^{N}\mu_m(g,v_m)v_m(\tilde{x}).$$

Применим формулу Грина:

$$\int_D g(\tilde{x})\Delta v_m(\tilde{x})\,d\tilde{x} = -\int_D \nabla g(\tilde{x})\nabla v_m(\tilde{x})\,d\tilde{x} + \int_{\partial D} g(\tilde{x})\frac{\partial v_m(\tilde{x})}{\partial \nu}\,ds(\tilde{x}).$$

Так как функция g принадлежит классу $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, то поверхностный интеграл обращается в нуль. В результате будем иметь

$$(\nabla S_N, \nabla S_N) = -(\Delta S_N, S_N) = \sum_{m=1}^N \mu_m(g, v_m)(g, v_m).$$

Следовательно,

$$\sum_{m=1}^N \mu_m|(g, v_m)|^2 = \|\nabla S_N\|^2_{L_2(D)}.$$

Принимая во внимание полноту пространства $W_2^1(D)$, отсюда получаем требуемое равенство (39). Утверждение доказано.

Утверждение 8. *Производная $K'(t)$ ядра $K(t)$ удовлетворяет оценке*

$$|K'(t)| \leqslant Mt^{-1/2}, \quad t > 0, \tag{40}$$

где $M = \|\rho\|_{L_2(D)}\|\nabla g\|_{L_2(D)}$.

Доказательство. Согласно определению (36) справедливо равенство

$$K'(t) = -\sum_{m=1}^\infty \mu_m e^{-t\mu_m}(\rho, v_m)(g, v_m).$$

Для оценки этого ряда воспользуемся утверждением 7 и неравенством $e^{-t\mu_m} < 1/\sqrt{t\mu_m}$. Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$|K'(t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{m=1}^\infty \sqrt{\mu_m}|(\rho, v_m)||(g, v_m)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}\biggl(\sum_{m=1}^\infty |(\rho, v_m)|^2\biggr)^{1/2}\biggl(\sum_{m=1}^\infty |\mu_m(g, v_m)|^2\biggr)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}}\|\rho\|_{L_2(D)}\|\nabla g\|_{L_2(D)}.$$

Утверждение доказано.

Утверждение 9. *Для любого $T > 0$ интегральный оператор $A : C[0, T] \to C[0, T]$, определённый равенством*

$$Av(t) = \int_0^t K'(t-\tau)v(\tau)\,d\tau, \quad t \in [0, T],$$

является квазинильпотентным.

Доказательство. Покажем, что из утверждения 8 следует оценка

$$|A^k v(t)| \leqslant (M\sqrt{\pi})^k \frac{t^{k/2}}{\Gamma(1+k/2)}\|v\|_t, \tag{41}$$

где $\|v\|_t = \max\limits_{0\leqslant s\leqslant t}|v(s)|$, которая доказывается по индукции. Действительно, в предположении справедливости оценки (41) в силу неравенства (40) получаем

$$|A^{k+1}v(t)| \leqslant \frac{(M\sqrt{\pi})^k}{\Gamma(1+k/2)}\int_0^t \frac{M}{\sqrt{t-\tau}}\tau^{k/2}\|v\|_\tau\,d\tau \leqslant M(M\sqrt{\pi})^k\frac{t^{(k+1)/2}}{\Gamma(1+k/2)}M\|v\|_t\int_0^1 \frac{s^{k/2}}{\sqrt{1-s}}\,ds.$$

Из этого неравенства следует индуктивный переход, поскольку

$$\int\limits_0^1 \frac{s^{k/2}}{\sqrt{1-s}}\,ds = B\left(\frac{k}{2}+1,\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(1+k/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(k/2+3/2)} = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(1+k/2)}{\Gamma(1+(k+1)/2)}.$$

Далее, из доказанного неравенства (41) получаем требуемую оценку

$$\|A^k\|^{1/k} \leqslant \frac{M\sqrt{T\pi}}{[\Gamma(k/2+1)]^{1/k}} \to 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty.$$

При этом мы воспользовались формулой Стирлинга $\Gamma(k/2+1) \simeq \sqrt{\pi k}(k/(2e))^{k/2}$, из которой вытекает соотношение $[\Gamma(k/2+1)]^{1/k} \simeq \sqrt{k/(2e)} \to \infty$. Утверждение доказано.

Перейдём к исследованию основного интегрального уравнения (37).

Согласно изложенному выше мы можем продифференцировать уравнение (37), в результате получим

$$K(0)h(t) + \int\limits_0^t K'(t-\tau)h(\tau)\,d\tau = \theta'(t). \tag{42}$$

Так как $K(0)>0$ (см. утверждение 6), то уравнение (42) представляет собой интегральное уравнение Вольтерры второго рода. Поэтому в силу утверждения 9 для любой непрерывно дифференцируемой функции $\theta(t)$ уравнение (42) имеет, и притом единственное, решение $h(t)$, непрерывное на полупрямой $t\geqslant 0$.

Интегрируя уравнение (42), нетрудно показать, что в случае непрерывно дифференцируемой функции $\theta(t)$ оно эквивалентно основному уравнению (37). Отсюда вытекает

Утверждение 10. *Если функция $\theta(t)$ непрерывно дифференцируема на полупрямой $\overline{\mathbb{R}}_+$ и удовлетворяет условию $\theta(0)=0$, то интегральное уравнение (37) имеет, и притом единственное, решение $h(t)$, непрерывное на полупрямой $\overline{\mathbb{R}}_+$.*

Замечание 4. В условиях утверждения 10 для решения уравнения (42) выполняется равенство

$$h(0) = \theta'(0)/K(0). \tag{43}$$

Следующее утверждение даёт достаточные условия непрерывной дифференцируемости решений основного уравнения (37).

Утверждение 11. *Если функция $\theta(t)$ имеет непрерывную вторую производную на отрезке $[0,T]$ и удовлетворяет условию $\theta'(0)=0$, то решение уравнения (42) непрерывно дифференцируемо на том же отрезке $[0,T]$.*

Доказательство. Обозначим через $w(t)$ решение следующего интегрального уравнения:

$$K(0)w(t) + \int\limits_0^t K'(\tau)w(t-\tau)\,d\tau = \theta''(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

Введём функцию

$$v(t) = \int\limits_0^t w(s)\,ds.$$

Очевидно, что $v\in C^1[0,T]$ и выполняется равенство

$$K(0)v'(t) + \int\limits_0^t K'(\tau)v'(t-\tau)\,d\tau = \theta''(t), \tag{44}$$

проинтегрировав которое, получим

$$K(0)v(t) + \int_0^t ds \int_0^s K'(\tau)v'(s-\tau)\,d\tau = \theta'(t).$$

Далее воспользуемся равенством

$$\int_0^t ds \int_0^s K'(\tau)v'(s-\tau)\,d\tau = \int_0^t K'(\tau)v(t-\tau)\,d\tau,$$

справедливым при условии $v(0)=0$.

Таким образом, непрерывно дифференцируемая функция $v(t)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$K(0)v(t) + \int_0^t K'(\tau)v(t-\tau)\,d\tau = \theta'(t).$$

Но этому же интегральному уравнению удовлетворяет и функция $h(t)$. В таком случае в силу единственности решения имеет место тождество

$$h(t) \equiv v(t). \tag{45}$$

Утверждение доказано.

Замечание 5. Из уравнения (44) и тождества (45) следует равенство

$$h'(0) = \theta''(0)/K(0). \tag{46}$$

4. Доказательство теоремы.

Утверждение 12. *Пусть функция* $\theta : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *дважды непрерывно дифференцируема на полупрямой* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *и удовлетворяет условиям (13). Тогда найдётся число* $T>0$ *такое, что решение* $h(t)$ *основного уравнения (37), непрерывное на полупрямой* $\overline{\mathbb{R}}_+$, *существует, является единственным и удовлетворяет неравенствам (6) для всех* $t \in [0,T]$.

Доказательство. Согласно утверждению 10 решение основного уравнения (37) существует и является единственным. Необходимо проверить лишь выполнение неравенств (6).

Из условий (13), неравенства (38) и равенств (43) и (46) следует, что

$$h(0) = 0, \quad h'(0) > 0. \tag{47}$$

Это означает, что при малых $t>0$ выполняется соотношение

$$h(t) = h(0) + th'(0) + o(t) = t(h'(0) + o(1)).$$

Отсюда и из (47) вытекает, что найдётся $T>0$ такое, что $0 < h(t) < H$, $0 < t < T$. Утверждение доказано.

Справедливость теоремы следует непосредственно из утверждений 12 и равенства (39).

5. Заключительные замечания.

1°. Из основного интегрального уравнения (37) и неравенств (6) вытекает, что заданная средняя температура $\theta(t)$ должна удовлетворять следующему условию:

$$0 \leqslant \theta(t) \leqslant H \int_0^t K(t-s)\,ds \leqslant H \int_0^\infty K(s)\,ds. \tag{48}$$

Заметим, что, согласно определению (36), выполняется равенство

$$\int\limits_0^\infty K(t)\,dt = \sum_{m=1}^\infty (\rho, v_m)(g, v_m)\int\limits_0^\infty e^{-t\mu_m}\,dt = \sum_{m=1}^\infty \frac{(\rho, v_m)(g, v_m)}{\mu_m}. \tag{49}$$

Рассмотрим следующую вспомогательную краевую задачу:

$$-\Delta V(\tilde{x}) = g(\tilde{x}), \quad \tilde{x}\in D, \quad V(\tilde{s}) = 0, \quad \tilde{s}\in\partial D. \tag{50}$$

Функция $V(\tilde{x})$ имеет физический смысл температуры при максимальном нагреве, когда охлаждающие элементы удалены из области Ω.

Непосредственно из уравнения (50) вытекают равенства

$$(g, v_m) = -(\Delta V, v_m) = -(V, \Delta v_m) = \mu_m(V, v_m),$$

из которых и равенств (49) следует, что

$$\int\limits_0^\infty K(t)\,dt = \sum_{m=1}^\infty (V, v_m)(\rho, v_m) = \int\limits_D V(\tilde{x})\rho(\tilde{x})\,d\tilde{x}.$$

Поэтому в силу правого неравенства в (48) и соотношения (8) получаем

$$\theta(t) \leqslant H\int\limits_D V(\tilde{x})\rho(\tilde{x})\,d\tilde{x} = \int\limits_\Omega V(\tilde{x})\rho(\tilde{x})\,dx. \tag{51}$$

Условие (51) означает, что функция $\theta(t)$ не должна превышать среднюю температуру при максимальном нагреве.

2°. Отметим, что вследствие принципа максимума (см. [11, гл. 3, п. 3.2]) функция Грина задачи (18) положительна внутри области D. Так как соответствующий интегральный оператор положительно определён, то, согласно теореме Ентча, первая собственная функция внутри области D положительна: $v_1(\tilde{x}) > 0$, $\tilde{x}\in D$ (см. [12, гл. IV, § 20, п. 7]). Отсюда вытекает, что первое собственное значение является простым и, значит, $\mu_2 > \mu_1$.

Поэтому ядро $K(t)$, определённое равенством (36), может быть представлено в виде

$$K(t) = e^{-t\mu_1}(\rho, v_1)(g, v_1) + \sum_{m=2}^\infty e^{-t\mu_m}(\rho, v_m)(g, v_m) = e^{-t\mu_1}((\rho, v_1)(g, v_1) + O(1)e^{-t(\mu_2-\mu_1)}).$$

Следовательно, $K(t) \simeq Qe^{-t\mu_1}$, где по условию $Q = (\rho, v_1)(g, v_1) > 0$.

В таком случае основное интегральное уравнение (37) можно заменить следующим его приближением:

$$Q\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)\mu_1}h(\tau)\,d\tau = \theta(t). \tag{52}$$

При условии $\theta(0) = 0$ решение уравнения (52) равно

$$h(t) = \frac{1}{Q}(\theta'(t) + \mu_1\theta(t)). \tag{53}$$

Заметим, что в этом случае необходимым условием существования решения, удовлетворяющего условию (6), является выполнение неравенства $0 \leqslant \theta(t) \leqslant HQ\beta(t)$, где $\beta(t) = (1-e^{-\mu_1 t})/\mu_1$.

Пример. Введём дополнительное ограничение $|h'(t)| \leqslant M$, где M – некоторая положительная постоянная. Обозначим через $T = H/M$ минимальное время, необходимое для полного извлечения охлаждающих элементов. Рассмотрим процесс нагревания, при котором выходная мощность обеспечивается средней температурой, определяемой равенством

$$\theta(t)=\frac{HQ}{T\mu_1}\cdot\begin{cases} t-\beta(t) & \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant T, \\ T-\beta(T)e^{(T-t)\mu_1} & \text{при} \quad t>T, \end{cases} \tag{54}$$

где функция $\beta(t)$ введена для выполнения условий (13).

В этом случае, согласно (53), решением интегрального уравнения (52) будет функция

$$h(t)=H\begin{cases} t/T, & \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant T, \\ 1, & \text{при} \quad t>T. \end{cases} \tag{55}$$

Равенство (55) означает, что для обеспечения средней температуры (54) охлаждающие элементы должны извлекаться с максимальной скоростью, причём после их полного извлечения процесс должен идти с максимальным нагревом.

В рассматриваемом случае функция (54) описывает критический режим, обычно нежелательный в реальном процессе.

Замечание 6. Многие характеристики рассмотренной математической модели определяются значением ведущего собственного значения $\mu_1(D)$, определяемого основанием D рассматриваемой цилиндрической области. Форма областей, для которых $\mu_1(D)$ достигает экстремального значения, подробно рассмотрена в монографии [13, гл. 6, п. 6.5]. В соответствии с изложенным выше выбор формы сечения определяется целями, которые требуется достичь в рассмотренной математической модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1966.
2. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., 1996.
3. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., 1972.
4. *Fursikov A.V.* Optimal Control of Distributed Systems. Theory and Applications, Translations of Math. V. 187. Providence, 2000.
5. *Albeverio S., Alimov Sh.A.* On one time-optimal control problem associated with the heat exchange process // Appl. Math. and Optimization. 2008. V. 47. № 1. P. 58–68.
6. *Altmüller N., Grüne L.* Distributed and boundary model predictive control for the heat equation. Technical report. University of Bayreuth, 2012.
7. *Gavrikov A., Kostin G.* Heat transfer processes in a cylindrical body surrounded by air // Proc. of 59th MIPT Sci. Conf. Moscow, 2016.
8. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1976.
9. *Березанский Ю.М.* Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, 1965.
10. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М., 1966.
11. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М., 1989.
12. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1971.
13. *Полиа Г., Сегё Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М., 1962.

Национальный университет Узбекистана
им. Мирзо Улугбека, г. Ташкент, Узбекистан,
Андижанский государственный университет,
Узбекистан

Поступила в редакцию 20.04.2021 г.
После доработки 26.06.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 37–44

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.953+517.958:624.27

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ НЕИЗВЕСТНОГО КОЭФФИЦИЕНТА В УРАВНЕНИИ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ

© 2022 г. У. Д. Дурдиев

Для уравнения поперечных колебаний однородной балки, свободно опирающейся на концы, рассматривается прямая начально-краевая задача и для неё изучается обратная задача по определению зависящего от времени коэффициента жёсткости балки. С помощью собственных чисел и собственных функций оператора колебания балки задачи сводятся к интегральным уравнениям. К этим уравнениям применяется принцип сжатых отображений Шаудера и доказываются теоремы существования и единственности решений.

DOI: 10.31857/S0374064122010058

Введение. Балки широко используются при строительстве зданий, мостов, путепроводов, эстакад и прочих сооружений. Большинство строящихся в настоящее время мостов являются балочными. Этот тип сооружений является основным при строительстве переправ малой длины. Балки, применяемые в производственных зданиях, в основном работают на статический изгиб, но при установке на них какого-либо оборудования (станков, компрессоров, поршневых двигателей и т.д.) испытывают и динамические нагрузки, которые имеют периодический характер. При таких нагрузках балки также совершают поперечные колебания [1, 2].

Обратные задачи математической физики изучены для многих классов дифференциальных уравнений. Обратные задачи, связанные с простейшим уравнением гиперболического типа, изучались в монографии [3]. Методика доказательств для обратных динамических задач локальных теорем существования и единственности решения, теорем единственности и условной устойчивости, а также численные подходы к нахождению их решения рассмотрены в работах [4–13] и др.

За последние несколько лет к исследованию линейных и нелинейных начально-граничных задач для уравнения колебаний балки наблюдается возрастающий интерес [14–17]. В работе [18] изучена начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольно закреплённой балки. Для неоднородного уравнения колебания балки некоторые начально-краевые задачи и задача Коши изучались в работах [19–21], в которых строились их решения в виде рядов и доказывались теоремы единственности, существования и устойчивости решений этих задач. В [22] найдено аналитическое решение дифференциального уравнения поперечных колебаний кусочно-однородной балки в частотной области для любого вида краевых условий.

Для уравнения колебаний балки обратные задачи по нахождению правой части (источника колебаний) и начальных условий исследовались в работе [23]. В данной статье рассматривается обратная задача по определению зависящего от времени коэффициента в уравнении поперечных колебаний балки, который с физической точки зрения представляет собой её жёсткость.

1. Постановка задачи. Рассмотрим однородную имеющую постоянное поперечное сечение балку длиной l, свободно опирающуюся на концы. Её вынужденные изгибные поперечные колебания под действием внешней силы $G(x,t)$ описываются уравнением четвёртого порядка

$$\rho S u_{tt} + EJu_{xxxx} + Q(t)u = G(x,t),$$

в котором ρ – плотность балки, S – площадь её поперечного сечения, E – модуль упругости материала балки, J – момент инерции поперечного сечения относительно горизонтальной оси, по всей длине балка поддерживается упругим основанием с коэффициентом жёсткости $Q(t)$.

Разделив на ρS, запишем это уравнение в виде

$$u_{tt}+a^2u_{xxxx}+q(t)u=f(x,t), \tag{1}$$

где $a^2=EJ/\rho S$, $q(t)=Q(t)/\rho S$ и $f(x,t)=G(x,t)/\rho S$. Уравнение (1) рассмотрим в прямоугольной области $D=\{(x,t):0<x<l,\ \ 0<t<T\}$, где $[0,T]$ – временно́й интервал, а l, как сказано выше, – длина балки, с начальными

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t|_{t=0}=\psi(x),\quad x\in[0,l], \tag{2}$$

и граничными

$$u(0,t)=u_{xx}(0,t)=u(l,t)=u_{xx}(l,t)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{3}$$

условиями.

В прямой задаче требуется при заданных числах a, l, T и достаточно гладких функциях $q(t)$, $f(x,t)$ и $\varphi(x)$, $\psi(x)$ найти функцию $u(x,t)\in C^{4,2}(D)$, удовлетворяющую уравнению (1) при $(x,t)\in D$ и условиям (2), (3).

Обратная задача: найти коэффициент $q(t)$, если относительно решения прямой задачи (1)–(3) известна следующая дополнительная информация:

$$g(t)=\int\limits_0^l u(x,t)h(x)\,dx,\quad t\in[0,T], \tag{4}$$

где функции $g(t)$ и $h(x)$ заданы и функция $h(x)$ удовлетворяет условиям

$$h(x)\in C^4(0,l),\quad h(0)=h(l)=h''(0)=h''(l)=0. \tag{5}$$

2. Исследование прямой задачи. Перенесём в уравнении (1) слагаемое $q(t)u$ в правую часть и введём обозначение $F(x,t)=f(x,t)-q(t)u$. Тогда для решения этого уравнения с начальными (2) и граничными (3) условиями имеет место следующее соотношение [20]:

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\varphi_n\cos(\omega_nt)+\frac{\psi_n}{\omega_n}\sin(\omega_nt)\Big)\sin(\mu_nx)+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n}\int\limits_0^t F_n(s)\sin(\omega_n(t-s))\,ds\ \sin(\mu_nx), \tag{6}$$

где $\omega_n=a{\mu_n}^2$, $\mu_n=\pi n/l$, $\lambda_n=-{\mu_n}^4=-(\pi n/l)^4$, а

$$\varphi_n=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l\varphi(x)\sin(\mu_nx)\,dx,\quad \psi_n=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l\psi(x)\sin(\mu_nx)\,dx, \tag{7}$$

$$F_n(t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l F(x,t)\sin(\mu_nx)\,dx.$$

Подставив вместо $F(x,t)$ выражение $f(x,t)-q(t)u(x,t)$, запишем представление (6) в виде интегрального уравнения

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\varphi_n\cos(\omega_nt)+\frac{\psi_n}{\omega_n}\sin(\omega_nt)\Big)\sin(\mu_nx)+$$

$$+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n}\int\limits_0^t\int\limits_0^l f(\xi,s)\sin(\omega_n(t-s))\sin(\mu_n\xi)\,d\xi\,ds\,\sin(\mu_n x)-$$

$$-\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n}\int\limits_0^t q(s)\int\limits_0^l u(\xi,s)\sin(\omega_n(t-s))\sin(\mu_n\xi)\,d\xi\,ds\,\sin(\mu_n x). \tag{8}$$

Изучим свойства решения уравнения (8). Для этого воспользуемся методом последовательных приближений, представив его решение в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x,t), \tag{9}$$

здесь

$$u_0(x,t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n\cos(\omega_n t)+\frac{\psi_n}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right)\sin(\mu_n x)+\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n}\int\limits_0^t f_n\sin(\omega_n(t-s))\,ds\,\sin(\mu_n x),$$

$$f_n(t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l f(\xi,t)\sin(\mu_n\xi)\,d\xi, \tag{10}$$

$$u_n(x,t)=-\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n}\int\limits_0^t q(s)\int\limits_0^l u_{n-1}(\xi,s)\sin(\omega_n(t-s))\sin(\mu_n\xi)\,d\xi\,ds\,\sin(\mu_n x),\quad n=1,2,\ldots$$

Оценивая u_n в области D, получаем

$$|u_0|\leqslant\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[|\varphi_n|+\frac{1}{a}\left(\frac{l}{\pi}\right)^2\frac{|\psi_n|}{n^2}\right]+\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a}\left(\frac{l}{\pi}\right)^4\frac{|f_n|t}{n^4}\leqslant C_1^0\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n|+C_2^0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\psi_n|}{n^2}+C_3^0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f_n|t}{n^4},$$

$$|u_1|\leqslant C_1^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_0}{n^4}\left[C_1^0\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n|t+C_2^0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\psi_n|t}{n^2}+C_3^0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f_n|}{n^4}\frac{t^2}{2!}\right],$$

$$\cdots$$

$$|u_k|\leqslant C_1^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_0^k}{n^{4k}}\left[C_1^0\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n|\frac{t^k}{k!}+C_2^0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\psi_n|}{n^2}\frac{t^k}{k!}+C_3^0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f_n|}{n^4}\frac{t^{2k}}{2k!}\right],$$

где $\max\limits_{0<t<T}|q(t)|=q_0$. Тогда для ряда (9) имеет место оценка

$$|u(x,t)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}C_1^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_0^k}{n^{4k}}\left(C_1^0\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n|\frac{t^k}{k!}+C_2^0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\psi_n|}{n^2}\frac{t^k}{k!}+C_3^0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f_n|}{n^4}\frac{t^{2k}}{2k!}\right), \tag{11}$$

здесь и далее C_i^0, C_1^k – положительные постоянные.

Таким образом, справедлива

Лемма 1. *Для любого $(x,t)\in D$ верна оценка (11).*

Формальное почленное дифференцирование интегрального уравнения (8) даёт равенства

$$u_{tt}=-\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}(a\mu_n^4\varphi_n\cos(\omega_n t)+a\mu_n^2\psi_n\sin(\omega_n t))\sin(\mu_n x)-$$

$$-\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2}{a}\int_0^t\int_0^l f(\xi,s)\sin(\omega_n(t-s))\sin(\mu_n\xi)\,d\xi\,ds\,\sin(\mu_n x)+$$

$$+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2}{a}\int_0^t q(s)\int_0^l u(\xi,s)\sin(\omega_n(t-s))\sin(\mu_n\xi)\,d\xi\,ds\,\sin(\mu_n x), \tag{12}$$

$$u_{xxxx}=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^4\biggl(\varphi_n\cos(\omega_n t)+\frac{\psi_n}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\biggr)\sin(\mu_n x)+$$

$$+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2}{a}\int_0^t\int_0^l f(\xi,s)\sin(\omega_n(t-s))\sin(\mu_n\xi)\,d\xi\,ds\,\sin(\mu_n x)-$$

$$-\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2}{a}\int_0^t q(s)\int_0^l u(\xi,s)\sin(\omega_n(t-s))\sin(\mu_n\xi)\,d\xi\,ds\,\sin(\mu_n x). \tag{13}$$

Лемма 2. *Если выполнены условия*

$$\varphi(x)\in C^5[0,l],\quad \varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=\varphi^{(4)}(0)=\varphi^{(4)}(l)=0,$$

$$\psi(x)\in C^3[0,l],\quad \psi(0)=\psi(l)=\psi''(0)=\psi''(l)=0,$$

$$f(x,t)\in C(\overline{D})\bigcap C_x^3(\overline{D}),\quad f(0,t)=f(l,t)=f''_{xx}(0,t)=f''_{xx}(l,t)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

то имеют место равенства

$$\varphi_n=\frac{1}{\mu_n^5}\varphi_n^{(5)},\quad \psi_n=-\frac{1}{\mu_n^3}\psi_n''',\quad f_n(t)=-\frac{1}{\mu_n^3}f_n'''(t), \tag{14}$$

где

$$\varphi_n^{(5)}=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\varphi^{(5)}(x)\cos(\mu_n x)\,dx,\quad \psi_n'''=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\psi'''(x)\cos(\mu_n x)\,dx,$$

$$f_n'''(t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l f_{xxx}(x,t)\cos(\mu_n x)\,dx,$$

со следующими оценками:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n^{(5)}|^2\leqslant\|\varphi^{(5)}\|_{L_2[0,l]},\quad \sum_{n=1}^{\infty}|\psi_n'''|^2\leqslant\|\psi'''\|_{L_2[0,l]}. \tag{15}$$

Интегрируя по частям интегралы в φ_n пять раз, в ψ_n и $f_n(t)$ три раза (см. определения (7) и (10)), с учётом условий леммы 2 получаем равенства (14). Неравенство (15) представляет собой неравенство Бесселя для коэффициентов разложений Фурье функций $\varphi_n^{(5)}$ и ψ_n''' по системе косинусов $\{\sqrt{2/l}\cos(\mu_n x)\}$ на интервале $[0,l]$.

Если функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,t)$ удовлетворяют условиям леммы 2, то в силу представлений (14) и (15) ряды (12) и (13) оцениваются следующими сходящимися рядами:

$$|u(x,t)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}C_1^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_0}{n^{4k}}\biggl(C_1^0\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n|\frac{t^k}{k!}+C_2^0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\psi_n|}{n^2}\frac{t^k}{k!}+C_3^0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f_n|}{n^4}\frac{t^{2k}}{2k!}\biggr), \tag{16}$$

$$|u_{tt}(x,t)| \leqslant C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(|\varphi_n^{(5)}| + |\psi_n'''|) + C_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T}{n}|f_n'''(t)| + C_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T}{n} q_0|u|, \qquad (17)$$

$$|u_{xxxx}(x,t)| \leqslant \tilde{C}_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(|\varphi_n^{(5)}| + |\psi_n'''|) + \tilde{C}_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T}{n}|f_n'''(t)| + \tilde{C}_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T}{n} q_0|u|, \qquad (18)$$

где $\tilde{C}_i$, $i = 1, 2, 3$, – положительные постоянные.

Тогда ряды (16), (17) и (18) сходятся равномерно в прямоугольнике $\overline{D}$ и, следовательно, функция (8) удовлетворяет соотношениям (1)–(3).

3. Основной результат и его доказательство. Умножив обе части уравнения (1) на $h(x)$ и проинтегрировав от 0 до l по x, с учётом условий (4), (5) получим

$$g''(t) + a^2 \int\limits_0^l u(x,t) h^{(4)}(x)\,dx + q(t)g(t) = \int\limits_0^l f(x,t)h(x)\,dx.$$

Разрешая это уравнение относительно $q(t)$, найдём, что

$$q(t) = \frac{1}{g(t)} \int\limits_0^l f(x,t)h(x)\,dx - \frac{g''(t)}{g(t)} - \frac{a^2}{g(t)} \int\limits_0^l u(x,t)h^{(4)}(x)\,dx. \qquad (19)$$

Теперь подставив выражение (19) для $q(t)$ в уравнение (8), придём к следующему интегральному уравнению относительно $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos(\omega_n t) + \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t)\right) \sin(\mu_n x) +$$

$$+ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \int\limits_0^t \int\limits_0^l f(x,s) \sin(\omega_n(t-s)) \sin(\mu_n x)\,dx\,ds -$$

$$- \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \int\limits_0^t \int\limits_0^l \frac{1}{g(s)} \int\limits_0^l f(\xi,s)h(s)u(y,s)h^{(4)}(y) \sin(\omega_n(t-s)) \sin(\mu_n x)\,d\xi\,dy\,ds\ \sin(\mu_n x) -$$

$$- \frac{2a^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \int\limits_0^t \int\limits_0^l \frac{1}{g(s)} \int\limits_0^l u(\xi,s)h^{(4)}(\xi)u(y,s)h^{(4)}(y) \sin(\omega_n(t-s)) \sin\mu_n(y)\,dy\,d\xi\,ds\ \sin(\mu_n x) -$$

$$- \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \int\limits_0^t \int\limits_0^l \frac{g''(s)}{g(s)} u(y,s)h^{(4)}(y) \sin(\omega_n(t-s)) \sin\mu_n(y)\,dy\,ds\ \sin(\mu_n x).$$

Для удобства введём некоторые обозначения:

$$\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos(\omega_n t) + \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t)\right) \sin(\mu_n x) +$$

$$+ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \int\limits_0^t \int\limits_0^l f(x,s) \sin(\omega_n(t-s)) \sin(\mu_n x)\,dx\,ds,$$

$$G_1(x,\xi,y,t,s)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n g(s)}f(\xi,s)h(s)h^{(4)}(y)\sin(\omega_n(t-s))\sin\mu_n(y)\sin(\mu_n x),$$

$$G_2(x,y,t,s)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g''(s)}{\omega_n g(s)}h^{(4)}(y)\sin(\omega_n(t-s))\sin\mu_n(y)\sin(\mu_n x),$$

$$G_3(x,\xi,y,t,s)=\frac{2a^2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n g(s)}h^{(4)}(\xi)h^{(4)}(y)\sin(\omega_n(t-s))\sin\mu_n(y)\sin(\mu_n x),$$

и запишем уравнение (6) в более удобном виде:

$$u(x,t)=\Psi(x,t)-\int_0^t\int_0^l\int_0^l u(y,s)G_1(x,\xi,y,t,s)\,d\xi\,dy\,ds-$$

$$-\int_0^t\int_0^l u(y,s)G_2(x,y,t,s)\,dy\,ds-\int_0^t\int_0^l\int_0^l u(\xi,s)u(y,s)G_3(x,\xi,y,t,s)\,dy\,d\xi\,ds. \qquad (20)$$

Обозначим через A оператор, который ставит в соответствие функции $u(x,t)$ правую часть уравнения (20). Тогда уравнение (20) запишется как операторное уравнение

$$u=Au. \qquad (21)$$

Пусть

$$\Psi_0=\max_{(x,t)\in D}|\Psi(x,t)|,$$

$$\lambda_1=\max_{\substack{(x,t)\in D\\ \xi,y\in[0,l]\\ s\in[0,T]}}|G_1(x,\xi,y,t,s)|,\quad \lambda_2=\max_{\substack{(x,t)\in D\\ y\in[0,l]\\ s\in[0,T]}}|G_2(x,y,t,s)|,\quad \lambda_3=\max_{\substack{(x,t)\in D\\ \xi,y\in[0,l]\\ s\in[0,T]}}|G_3(x,\xi,y,t,s)|, \qquad (22)$$

$S_d(0)=\{u:\|u\|\leqslant d\}$, d – некоторое положительное число.

Для доказательства существования решения операторного уравнения (21) воспользуемся принципом Шаудера [24].

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы 2 и* $|g|\geqslant g_0>0$, *где* g_0 *– известное число. Тогда для всех* T *и* $d>\Psi_0$, *удовлетворяющих оценке*

$$0<T\leqslant(d-\Psi_0)/M_*,\quad \text{где}\quad M_*=(\lambda_1+dl\lambda_2+\lambda_3)dl, \qquad (23)$$

оператор A *равномерно ограничен, где числа* λ_i $(i=1,2,3)$ *определены соотношениями (22).*

Доказательство. Вначале установим равномерную ограниченность оператора A. Для этого покажем, что существует $\rho\in(0,d]$ такая, что $\|Au\|\leqslant\rho$, где $\|Au\|=\max_{(x,t)\in\overline{D}}|Au|$. Для $u\in S_d(0)$, $(x,t)\in D$, в силу (22) находим оценку $\|Au\|\leqslant\Psi_0+M_*T\equiv\rho$. При T, удовлетворяющих оценке (23), оператор A равномерно ограничен. Лемма доказана.

Лемма 4. *Оператор* A *является равностепенно непрерывным.*

Доказательство. Напомним определение равностепенно непрерывного оператора. Оператор A называется *равностепенно непрерывным*, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех $u_1,u_2\in S_d(0)$, для которых $\|u_1-u_2\|\leqslant\delta$, выполняется неравенство

$$\|Au_1-Au_2\|\leqslant\varepsilon. \qquad (24)$$

Составим разность

$$Au_1-Au_2=-\int_0^t\int_0^l(u_1(x,s)-u_2(x,s))G_1(x,\xi,t,s)\,ds\,dx-$$

$$-\int_0^t\int_0^l\int_0^l(u_1(\xi,s)u_1(x,s)-u_2(\xi,s)u_2(x,s))G_2\,dx\,d\xi\,ds-\int_0^t\int_0^l(u_1(x,s)-u_2(x,s))G_3(x,t,s)\,dx\,ds$$

и введём обозначение $u_1-u_2=:\tilde u$. Проведя очевидные оценки, получаем

$$\|Au_1-Au_2\|\leqslant(\lambda_1lT+2\lambda_2l^2Td+\lambda_3lT)\|\tilde u\|\equiv M^*\|\tilde u\|,$$

откуда имеем $\|Au_1-Au_2\|\leqslant M^*\|u_1-u_2\|\leqslant M^*\delta$. Следовательно, если взять $\delta_0=\varepsilon/M^*$, то при $\delta\in(0,\delta_0]$ будет выполнено неравенство (24), т.е. оператор A является равностепенно непрерывным. Тогда оператор A вполне непрерывен на S_d, и согласно принципу Шаудера он имеет на S_d по крайней мере одну неподвижную точку [25]. Лемма доказана.

Таким образом, из лемм 3 и 4 следует следующее утверждение о существовании решения операторного уравнения (21).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 2, леммы 3 и соотношения (5). Тогда для* T, *удовлетворяющих оценке (23), уравнение (21) имеет решение* $u(x,t)\in C^{4,2}(D)$.

Докажем единственность этого решения.

Теорема 2. *Для всех* $u\in S_d(0)$, $|g(t)|\geqslant g_0>0$ *при*

$$T<\frac{g_0}{2C_0d(g_0+Ha^2l)},\qquad(25)$$

операторное уравнение (21) имеет единственное решение в классе $C^{4,2}(D)$, *где* $C_0=l^2/3a\pi$, $H=\max\limits_{0<x<l}\|h(x)\|$.

Доказательство. Пусть задача (1)–(4) имеет два решения: u_1, u_2, $u_1\neq u_2$, и q_1, q_2, $q_1\neq q_2$. Их разности обозначим через $\tilde u=u_1-u_2$ и $\tilde q=q_1-q_2$. Для разности $\tilde u$ получаем следующую задачу:

$$\tilde u_{tt}+a^2\tilde u_{xxxx}=-q_1\tilde u-\tilde q u_2,$$

$$\tilde u|_{t=0}=0,\quad \tilde u_t|_{t=0}=0,$$

$$\tilde u(0,t)=\tilde u_{xx}(0,t)=\tilde u(l,t)=\tilde u_{xx}(l,t)=0.$$

Её решение записывается следующим образом:

$$\tilde u(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n}\int_0^t\int_0^l(-q_1\tilde u-\tilde q u_2)\sin(\mu_nx)\sin(\omega(t-s))\,dx\,ds\,\sin\biggl(\frac{\pi n}{l}x\biggr).$$

Для $\tilde q$ из представления (19) следует оценка $\|\tilde q\|\leqslant Ha^2l\|\tilde u\|/g_0$, в силу которой имеем

$$\|\tilde u\|\leqslant 2C_0T\biggl(d+H\frac{a^2}{g_0}ld\biggr)\|\tilde u\|.$$

Отсюда для T, удовлетворяющих оценке (25), получаем $u_1=u_2$, что доказывает теорему.

По найденной функции $u(x,t)\in S_d(0)$ с помощью формулы (19) находится неизвестный коэффициент $q(t)$ – решение обратной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1966.
2. *Крылов А.Н.* Вибрация судов. М., 2012.
3. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М., 1984.
4. *Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения электровязкоупругости // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 3. С. 553–572.

5. *Дурдиев Д.К.* Многомерная обратная задача для уравнения с памятью // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35. № 3. С. 574–582.
6. *Дурдиев Д.К., Рахмонов А.А.* Задача об определении двумерного ядра в системе интегродифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23. № 2. С. 63–80.
7. *Дурдиев Д.К.* Обратные задачи для сред с последействием. Ташкент, 2014.
8. *Карчевский А.Л., Фатьянов А.Г.* Численное решение обратной задачи для системы упругости с последействием для вертикально неоднородной среды // Сиб. журн. вычислит. математики. 2001. Т. 4. № 3. С. 259–268.
9. *Карчевский А.Л.* Определение возможности горного удара в угольном пласте // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20. № 4. С. 35–43.
10. *Дурдиев У.Д.* Численное определение зависимости диэлектрической проницаемости слоистой среды от временно́й частоты // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 179–189.
11. *Durdiev U., Totieva Z.* A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // Math. Meth. Appl. Sci. 2019. P. 1–12.
12. *Durdiev U.D.* A problem of identification of a special 2d memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // Euras. J. of Math. and Comput. Appl. 2019. V. 7. № 2. P. 4–19.
13. *Дурдиев У.Д.* Обратная задача для системы уравнений вязкоупругости в однородных анизотропных средах // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22. № 4. С. 26–32.
14. *Wang Y.-R., Fang Z.-W.* Vibrations in an elastic beam with nonlinear supports at both ends // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2015. V. 56. № 2. P. 337–346.
15. *Li S., Reynders E., Maes K., De Roeck G.* Vibration-based estimation of axial force for a beam member with uncertain boundary conditions // J. Sound Vibrat. 2013. V. 332. № 4. P. 795–806.
16. *Касимов Ш.Г., Мадрахимов У.С.* Начально-граничная задача для уравнения колебаний балки в многомерном случае // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 10. С. 1379–1391.
17. *Сабитов К.Б., Акимов А.А.* Начально-граничная задача для нелинейного уравнения колебаний балки // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 5. С. 632–645.
18. *Сабитов К.Б., Фадеева О.В.* Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2021. Т. 25. № 1. С. 51–66.
19. *Сабитов К.Б.* Начально-краевая задача для уравнения колебаний балки // Математические методы и модели в строительстве, архитектуре и дизайне. Самара, 2015. С. 34–42.
20. *Сабитов К.Б.* К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 1. С. 89–100.
21. *Сабитов К.Б.* Начальная задача для уравнения колебаний балки // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 5. С. 665–671.
22. *Карчевский А.Л.* Аналитические решения дифференциального уравнения поперечных колебаний кусочно-однородной балки в частотной области для краевых условий любого вида // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23. № 4. С. 48–68.
23. *Сабитов К.Б.* Обратные задачи для уравнения колебаний балки по определению правой части и начальных условий // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 773–785.
24. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. Введение в теорию. М., 1975.
25. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 2002.

Бухарский государственный университет,
Узбекистан,
Бухарское отделение Института математики
им. В.И. Романовского, Узбекистан

Поступила в редакцию 07.05.2021 г.
После доработки 08.07.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 45–53

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4+519.213

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЛОКАЛЬНОГО ВЛИЯНИЯ ДВИЖУЩИХСЯ ОБЪЕКТОВ

© 2022 г. В. А. Литовченко

Для псевдодифференциального уравнения супердиффузии выяснена его общая стохастическая природа. Развивая идею Хольцмарка, показано, что функция Грина задачи Коши для этого уравнения является распределением вероятностей силы локального влияния движущихся объектов в системе с взаимодействием, происходящим по степенному закону.

DOI: 10.31857/S037406412201006X

Введение. Рассмотрим классическое уравнение диффузии

$$\partial_t u(t;x) - b\triangle_x u(t;x) = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

в котором $\triangle_x$ – n-мерный оператор Лапласа, действующий по пространственной переменной x, а $b > 0$ – фиксированный числовой параметр. Фундаментальным решением задачи Коши для уравнения (1) является функция

$$G(t;x) = \mathbb{F}[e^{-bt|\xi|^2}](t;x) \equiv (\sqrt{4\pi bt})^{-n} e^{-|x|^2/(4bt)}, \tag{2}$$

где $\mathbb{F}$ – оператор преобразования Фурье, а $|\cdot|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Уравнение (1) сыграло важную роль в создании классической теории параболических уравнений с частными производными, т.е. дифференциальных уравнений, фундаментальное решение задачи Коши для которых имеет относительно переменной x типичные для $G(t;\cdot)$ свойства поведения на бесконечности. Известными представителями таких уравнений являются уравнения, параболические по Петровскому [1], по Шилову [2], по Житомирскому [3, 4] или по Сироте [5] и т.д. Эти уравнения возникают при изучении различных естественных процессов, связанных с диффузией и тепломассообменом.

Уравнение (1) имеет отношение и к теории случайных процессов. Функция $G(t;\cdot)$ является плотностью вероятностного перехода случайного процесса Винера [6] – источника многих диффузионных процессов.

Обобщения классического уравнения диффузии (1) приводят к теории параболических псевдодифференциальных уравнений (ПДУ) с однородными точечно-негладкими символами псевдодифференцирования. Действительно, заменив в конструкции уравнения (1) оператор Лапласа $-\triangle_x$ на оператор Рисса [7] дробного дифференцирования $A_\alpha := (-\triangle_x)^{\alpha/2}$, $\alpha > 0$, получим класс ПДУ

$$\partial_t u(t;x) + bA_\alpha u(t;x) = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

с символом псевдодифференцирования $|\cdot|^\alpha$, содержащий при $\alpha = 2$ исходное уравнение (1). В частности, поэтому (3) при соответствующих α унаследовало название “уравнение изотропной супердиффузии” [8, с. 251].

Функция

$$G_\alpha(t;x) = \mathbb{F}[e^{-bt|\xi|^\alpha}](t;x), \quad 0 < t \leqslant T, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

является фундаментальным решением задачи Коши для уравнения (3). Изучением свойств функции $G_\alpha(t;\cdot)$ занимались многие исследователи. При этом оказалось, что в отличии от классического случая $\alpha = 2\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, эта функция при значениях α, не являющихся чётными, имеет уже не экспоненциальное убывание на бесконечности, а степенное. Первые оценки функции $G_\alpha(t;\cdot)$ и её производных методом преобразования Фурье получены С.Д. Эйдельманом совместно с Я.М. Дринём в [9, 10] при условии, что $\alpha > 1$:

$$|\partial_x^k G_\alpha(t;x)| \leqslant c_1 t(t^{1/\alpha}+|x|)^{-(n+|k|+[\alpha])}, \quad k\in\mathbb{Z}_+^n, \quad t\in(0,T], \quad x\in\mathbb{R}^n$$

(здесь $[\cdot]$ – целая часть числа, а $|k| = k_1 + \ldots + k_n$). Точное асимптотическое поведение функции $G_\alpha(t;\cdot)$ в окрестности бесконечно удалённых точек установлено М.В. Федорюком в [11]:

$$G_\alpha(t;\cdot) \sim |\cdot|^{-n-\alpha}, \quad t>0, \quad \alpha\geqslant 1. \tag{5}$$

Затем В. Шнайдер [12] с помощью преобразования Меллина выразил функцию $G_\alpha(t;\cdot)$ через специальные H-функции Фокса и, как следствие, получил асимптотику (5). Используя элементы теории обобщённых функций в сочетании с гармоническим анализом, А.Н. Кочубей впервые получил точные оценки производных функции $G_\alpha(t;\cdot)$ при $\alpha\geqslant 1$ и $n>1$ [13]:

$$|\partial_x^k G_\alpha(t;x)| \leqslant c_1 t(t^{1/\alpha}+|x|)^{-(n+|k|+\alpha)}, \quad k\in\mathbb{Z}_+^n, \quad t\in(0,T], \quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{6}$$

В работе [14] оценки (6) распространены на случай $\alpha>0$.

При некоторых α уравнение (3) находит важное приложение в теории случайных процессов. Оператор A_α при $\alpha\leqslant 2$ является производящим оператором симметрично устойчивого процесса Леви с переходной функцией G_α [15, 16]. Яркими представителями таких процессов являются случайные процессы Коши ($\alpha=1$), Хольцмарка ($\alpha=3/2$), Гаусса–Винера ($\alpha=2$) и др. В современной литературе приведено много примеров реальных применений распределений Коши, Гаусса, Хольцмарка и Парето в астрономии, ядерной физике, экономике, социологии, в промышленной и военной отраслях [17–22]. Каждое из них характеризует стохастические особенности ПДУ (3) при том или ином значении $\alpha\in(0,2]$.

В настоящей работе установлена общая стохастическая природа уравнения (3) при $\alpha\in\in(0,2)$. Показано, что фундаментальное решение G_α задачи Коши для этого уравнения при некоторых условиях на параметр b является распределением вероятностей силы F локального влияния движущихся объектов в системе, в которой взаимодействие происходит согласно некоторому степенному закону. Отметим, что случаю классической ньютоновской гравитации соответствует уравнение (3) при $\alpha=3/2$ (нестационарная задача Хольцмарка [23, 24]).

1. Задача о локальном влиянии движущихся объектов. В вакуумной евклидовой среде $\mathbb{R}^3$ рассматривается счётная система свободно движущихся изолированных объектов Z_j, в каждом из которых сосредоточен некоторый потенциал p_j, при этом произвольный объект системы с потенциалом P взаимодействует с другим объектом с потенциалом p согласно закону

$$F = G\frac{Pp}{|r|^\beta}r^\circ, \quad \beta>0. \tag{7}$$

Здесь F – сила взаимодействия, G – весовая константа, r – вектор расстояния между объектами, а $r^\circ := r/|r|$ – орт вектора r.

Задача состоит в исследовании силы $F(t)$ воздействия в момент времени t на единицу потенциала произвольного объекта Z_0 этой системы его ближайшим окружением.

Так как $F(t)$ – величина с относительно быстрыми и резкими отклонениями, вызванными мгновенным изменением локального распределения объектов из окружения объекта Z_0, то целесообразно рассматривать $F(t)$ как случайную величину.

Найдём распределение $W_\beta^t(F)$ для силы $F(t)$ при следующих предположениях. Будем считать, что распределение объектов в окружении объекта Z_0 подвергается флуктуациям и что объекты с потенциалом p встречаются в системе с некоторым вполне определённым эмпирически установленным законом. При этом в каждый момент времени t флуктуации плотности объектов подчинены условию постоянства их средней плотности на единицу объёма:

$$n(t;r;p)\equiv n(t).$$

Пусть рассматриваемый объект Z_0 находится в начале координат координатной системы пространства $\mathbb{R}^3$, а его сферическое окружение радиуса R в момент времени t содержит $N(t)$ объектов. Тогда, согласно сказанному,

$$F(t)=G\sum_{j=1}^{N(t)}\frac{p_j}{|r_j|^{\beta+1}}r_j\equiv\sum_{j=1}^{N(t)}F_j$$

и

$$N(t)=\frac{4}{3}\pi R^3n(t). \tag{8}$$

Вначале для фиксированного t рассмотрим распределение $W^t_{\beta,R}(F)$ в центре сферической окрестности радиуса R, охватывающей $N(t)$ объектов системы, и найдём вероятность $W^t_{\beta,R}(F_\circ)dF_\circ$ того, что величина $F(t)$ попадает в куб $[F_\circ(t);F_\circ(t)+dF_\circ(t)]\subset\mathbb{R}^3$. Применив известный метод Маркова [22, с. 152], получим

$$W^t_{\beta,R}(F_\circ(t))=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3}e^{-i(\xi,F_\circ(t))}A_R(\xi)\,d\xi,$$

где

$$A_R(\xi):=\prod_{j=1}^{N(t)}\int\limits_0^{+\infty}\bigg(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)}e^{i(\xi,F_j)}\tau_j(t;r_j;p_j)\,dr_j\bigg)\,dp_j.$$

Здесь $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{K}_R(0)$ – шар радиуса R с центром в начале координат, а $\tau_j(t;r_j;p_j)$ – распределение вероятностей того, что j-й объект с потенциалом p_j в момент времени t находится в положении r_j. Если теперь учесть, что имеют место лишь флуктуации, совместимые с пространственным постоянством средней плотности, то тогда

$$\tau_j(t;r_j;p_j)=\frac{3\tau(t;p)}{4\pi R^3},$$

где $\tau(t;p)$ – частота, с которой встречаются объекты с потенциалом p в момент времени t.

Отсюда приходим к равенству

$$A_R(\xi)=\bigg(\frac{3}{4\pi R^3}\int\limits_0^{+\infty}\bigg(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)}e^{i(\xi,\eta)}\tau(t;p)\,dr\bigg)\,dp\bigg)^{N(t)},$$

в котором

$$\eta:=Gpr/|r|^{\beta+1}. \tag{9}$$

Устремив теперь $R\to+\infty$ и $N(t)\to+\infty$, согласно (8) получим

$$W^t_\beta(F)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3}e^{-i(\xi,F(t))}A(t;\xi)\,d\xi, \tag{10}$$

где

$$A(t;\xi):=\lim_{R\to\infty}\bigg[\frac{3}{4\pi R^3}\int\limits_0^{+\infty}\bigg(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)}e^{i(\xi,\eta)}\tau(t;p)\,dr\bigg)\,dp\bigg]^{4\pi R^3n(t)/3}.$$

Так как для каждого t имеет место равенство

$$\frac{3}{4\pi R^3}\int\limits_0^{+\infty}\bigg(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)}\tau(t;p)\,dr\bigg)\,dp=1,$$

то

$$A(t;\xi)=\lim_{R\to\infty}\left[1-\frac{3}{4\pi R^3}\int\limits_0^{+\infty}\biggl(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)}(1-e^{i(\xi,\eta)})\tau(t;p)\,dr\biggr)\,dp\right]^{4\pi R^3 n(t)/3}. \tag{11}$$

Далее, абсолютная сходимость в (11) интеграла с переменной интегрирования r на всём пространстве $\mathbb{R}^3$ при $\beta>3/2$ позволяет записать соотношение (11) в виде

$$A(t;\xi)=\lim_{R\to\infty}\left[1-\frac{3}{4\pi R^3}\int\limits_0^{+\infty}\biggl(\int\limits_{\mathbb{R}^3}(1-e^{i(\xi,\eta)})\tau(t;p)\,dr\biggr)\,dp\right]^{4\pi R^3 n(t)/3},$$

а затем прийти к изображению

$$A(t;\xi)=e^{-n(t)B_\beta(t;\xi)}, \tag{12}$$

в котором

$$B_\beta(t;\xi):=\int\limits_0^{+\infty}\biggl(\int\limits_{\mathbb{R}^3}(1-e^{i(\xi,\eta)})\tau(t;p)\,dr\biggr)\,dp.$$

Найдём значение интегрального выражения в предыдущем равенстве. Для этого в его внутреннем интеграле перейдём от переменной r к переменной η согласно правилу (9). Учитывая равенство

$$dr=\frac{1}{\beta}(Gp/|\eta|^{1+\beta})^{3/\beta}\,d\eta,$$

получаем

$$B_\beta(t;\xi)=\frac{G^{3/\beta}}{\beta}\biggl(\int\limits_0^{+\infty}p^{3/\beta}\tau(t;p)\,dp\biggr)\int\limits_{\mathbb{R}^3}(1-e^{i(\xi,\eta)})|\eta|^{-3(1+\beta)/\beta}\,d\eta\equiv$$

$$\equiv\frac{G^{3/\beta}\langle p^{3/\beta}\rangle}{\beta}\int\limits_{\mathbb{R}^3}(1-e^{i(\xi,\eta)})|\eta|^{-3(1+\beta)/\beta}\,d\eta.$$

Отсюда с помощью несложных преобразований приходим к равенству

$$B_\beta(t;\xi)=\frac{G^{3/\beta}\langle p^{3/\beta}\rangle}{\beta}\int\limits_{\mathbb{R}^3}(1-\cos(\xi,\eta))|\eta|^{-3(1+\beta)/\beta}\,d\eta.$$

Если теперь перейти к сферической системе координат с осью аппликат, направленной по вектору ξ, то последнее равенство примет вид

$$B_\beta(t;\xi)=\frac{G^{3/\beta}\langle p^{3/\beta}\rangle}{\beta}\int\limits_0^{+\infty}\biggl(\int\limits_{-1}^{1}\biggl(\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos(|\xi||\eta|l))|\eta|^{2-3(1+\beta)/\beta}\,d\varphi\biggr)\,dl\biggr)\,d|\eta|$$

или, что то же самое,

$$B_\beta(t;\xi)=\frac{(G|\xi|)^{3/\beta}\langle p^{3/\beta}\rangle}{\beta}\int\limits_0^{+\infty}\biggl(\int\limits_{-1}^{1}\biggl(\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos(\rho l))\rho^{-1-3/\beta}\,d\varphi\biggr)\,dl\biggr)\,d\rho=$$

$$=\frac{2\pi(G|\xi|)^{3/\beta}\langle p^{3/\beta}\rangle}{\beta}\int\limits_0^{+\infty}\biggl(\int\limits_{-1}^{1}(1-\cos(\rho l))\,dl\biggr)\rho^{-1-3/\beta}\,d\rho.$$

Для внутреннего интеграла получаем

$$B_\beta(t;\xi)=\frac{4\pi(G|\xi|)^{3/\beta}\langle p^{3/\beta}\rangle}{\beta}\int\limits_0^{+\infty}(\rho-\sin\rho)\rho^{-2-3/\beta}\,d\rho.$$

Отметим, что интеграл в последнем равенстве сходится лишь при $\beta>3/2$. Вычислив этот интеграл по частям, придём к изображению

$$B_\beta(t;\xi)=\frac{4\beta\pi\mathrm{I}(\beta)}{3(\beta+3)}(G|\xi|)^{3/\beta}\langle p^{3/\beta}\rangle,\quad t\geqslant 0,\quad \xi\in\mathbb{R}^3,\quad \beta>3/2,\tag{13}$$

в котором

$$\mathrm{I}(\beta):=\begin{cases}\dfrac{\beta}{3-\beta}\Gamma(2-3/\beta)\cos\dfrac{(2-3/\beta)\pi}{2}, & 3/2<\beta<3,\\ \pi/2, & \beta=3,\\ \Gamma(1-3/\beta)\sin\dfrac{(1-3/\beta)\pi}{2}, & \beta>3\end{cases}$$

(здесь $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера).

Объединяя равенства (10), (12) и (13), окончательно находим, что

$$W^t_\beta(F)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3}e^{-i(\xi,F)}e^{-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}}\,d\xi,$$

где

$$a_\beta(t):=\frac{4\beta\pi\mathrm{I}(\beta)}{3(\beta+3)}G^{3/\beta}n(t)\langle p^{3/\beta}\rangle.$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. *При указанных выше предположениях для каждого* $\beta>3/2$ *функция*

$$W^t_\beta(F)=\mathbb{F}^{-1}[e^{-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}}](t;F)\tag{14}$$

является распределением вероятностей силы $F(t)$ *локального влияния движущихся объектов в системе с взаимодействием, происходящим согласно степенному закону (7).*

2. Связь с ПДУ. Сравнивая равенства (4) и (14), видим схожесть структуры распределения вероятностей $W^t_\beta(\cdot)$ и фундаментального решения $G_\alpha(\cdot)$ задачи Коши для ПДУ (3), которая приводит к предположению, что функция $W^t_\beta(\cdot)$ является решением уравнения (3) при $\alpha=3/\beta$ с соответствующим коэффициентом b. Убедимся в этом.

Предположим, что коэффициент $a_\beta(\cdot)$ на промежутке $[0,T]$ непрерывно дифференцируем. Непосредственно из работы [14] следует, что для всех $\beta>3/2$ функция $W^t_\beta(x)$ на множестве $(0,T]\times\mathbb{R}^3$ дифференцируема по t и бесконечно дифференцируема по переменой x, причём для её производных выполняются оценки

$$|\partial^k_x W^t_\beta(x)|\leqslant c_1t(t^{\beta/3}+|x|)^{-(3+|k|+3/\beta)}\quad\text{и}\quad |\partial_t\partial^k_x W^t_\beta(x)|\leqslant c_2t^{\beta-1}(t^{\beta/3}+|x|)^{-(3+|k|+3/\beta)}\tag{15}$$

с некоторыми положительными постоянными c_1 и c_2.

Первая оценка в (15) обеспечивает принадлежность функции $W^t_\beta(\cdot)$ классу $L_1(\mathbb{R}^3)$ при каждом фиксированном $t\in(0,T]$, что в свою очередь гарантирует существование преобразования Фурье функции $W^t_\beta(\cdot)$ и выполнение равенства

$$\mathbb{F}[W^t_\beta(x)](t;\xi)=e^{-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}},\quad t\in(0,T],\quad \xi\in\mathbb{R}^3.\tag{16}$$

Зафиксируем произвольно $t \in (0,T]$ и для $\triangle t \neq 0$ рассмотрим разность

$$W_\beta^{t+\triangle t}(x) - W_\beta^t(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(x,\xi)-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}} (e^{-(a_\beta(t+\triangle t)-a_\beta(t))|\xi|^{3/\beta}} - 1)\, d\xi. \tag{17}$$

Согласно теореме Лагранжа о конечных приращениях, имеем

$$a_\beta(t+\triangle t) - a_\beta(t) = a'_\beta(t+\theta\triangle t)\triangle t, \quad \theta \in (0,1).$$

Отсюда, учитывая непрерывность функции $a'_\beta(\cdot)$, получаем равномерную сходимость

$$(e^{-(a_\beta(t+\triangle t)-a_\beta(t))|\xi|^{3/\beta}} - 1)/\triangle t \underset{\triangle t\to 0}{\overset{\xi\in\mathbb{K}_0(R)}{\rightrightarrows}} -a'_\beta(t)|\xi|^{3/\beta} \quad (\text{для любого } R>0). \tag{18}$$

Кроме этого, воспользовавшись ещё раз теоремой Лагранжа, приходим к оценке

$$|(e^{-(a'_\beta(t+\theta\triangle t)|\xi|^{3/\beta})\triangle t} - 1)/\triangle t| = |a'_\beta(t+\theta\triangle t)||\xi|^{3/\beta} e^{-a'_\beta(t+\theta\triangle t)|\xi|^{3/\beta}(\hat{\theta}\triangle t)} \leqslant$$

$$\leqslant a|\xi|^{3/\beta} e^{a|\triangle t||\xi|^{3/\beta}}, \quad \hat{\theta} \in (0;1), \quad a := \sup_{t\in[0,T]} |a'_\beta(t)|.$$

Тогда для всех $0 < |\triangle t| \leqslant a_\beta(t)/(2a)$ и $\xi \in \mathbb{R}^3$ выполняются оценки

$$e^{-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}} |(e^{-(a_\beta(t+\triangle t)-a_\beta(t))|\xi|^{3/\beta}} - 1)/\triangle t| \leqslant a|\xi|^{3/\beta} e^{-(a_\beta(t)-a|\triangle t|)|\xi|^{3/\beta}} \leqslant$$

$$\leqslant 4a e^{-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}/4} \sup_{\rho>0}\{\rho e^{-\rho}\}. \tag{19}$$

Соотношения (18) и (19) обосновывают равенство

$$\lim_{\triangle t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(x,\xi)-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}} \frac{e^{-(a_\beta(t+\triangle t)-a_\beta(t))|\xi|^{3/\beta}} - 1}{\triangle t}\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(x,\xi)-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}} \lim_{\triangle t\to 0} \left\{ \frac{e^{-(a_\beta(t+\triangle t)-a_\beta(t))|\xi|^{3/\beta}} - 1}{\triangle t} \right\} d\xi,$$

согласно которому будем вследствие (17) иметь

$$\partial_t W_\beta^t(x) = -\frac{a'_\beta(t)}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{3/\beta} e^{-i(x,\xi)-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}}\, d\xi, \quad t \in (0,T], \quad \xi \in \mathbb{R}^3.$$

Учитывая равенство (16), окончательно находим

$$\partial_t W_\beta^t(x) = -a'_\beta(t)\mathbb{F}^{-1}[|\xi|^{3/\beta}\mathbb{F}[W_\beta^t](t;\xi)](t;x), \quad t \in (0,T], \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Таким образом, распределение $W_\beta^t(\cdot)$ при $\beta > 3/2$ является классическим решением уравнения

$$\partial_t u(t;x) + a'_\beta(t)A_\alpha u(t;x) = 0, \quad t \in (0,T], \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{20}$$

дробного порядка $\alpha = 3/\beta$.

Далее выясним вопрос о существовании предельного значения распределения $W^t_\beta(\cdot)$ в точке $t = 0$. Сначала рассмотрим случай $a_\beta(0) \neq 0$. Согласно равенству (16), а также известной формуле преобразования Фурье свёртки элементов из класса Лебега $L_1(\mathbb{R}^3)$ получаем

$$\mathbb{F}[W^t_\beta](t;\xi) = e^{-\int_0^t a'_\beta(\tau)\,d\tau|\xi|^\alpha} \cdot e^{-a_\beta(0)|\xi|^\alpha} = \mathbb{F}[\hat{G}_\alpha](t;\xi)\cdot\mathbb{F}[W^0_\beta](t;\xi) = \mathbb{F}[\hat{G}_\alpha * W^0_\beta](t;\xi)$$

или, что то же самое,

$$W^t_\beta(x) = (\hat{G}_\alpha * W^0_\beta)(t;x), \quad t\in(0,T], \quad x\in\mathbb{R}^3,$$

где

$$\hat{G}_\alpha(t;\cdot) := \mathbb{F}^{-1}[e^{-\int_0^t a'_\beta(\tau)\,d\tau|\xi|^\alpha}](t;\cdot).$$

Покажем теперь, что для каждой непрерывной ограниченной на $\mathbb{R}^3$ функции $\varphi(\cdot)$ выполняется предельное соотношение

$$(\hat{G}_\alpha * \varphi)(t;\cdot) \underset{t\to+0}{\to} \varphi(\cdot). \tag{21}$$

Для этого воспользуемся равенством

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \hat{G}_\alpha(t;x)dx = 1, \quad t\in(0,T],$$

в силу которого

$$|(\hat{G}_\alpha * \varphi)(t;x) - \varphi(x)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^3} |\hat{G}_\alpha(t;\xi)||\varphi(x-\xi)-\varphi(x)|\,d\xi \equiv \mathfrak{I}(t;x).$$

Так как $\varphi(\cdot)$ – непрерывная функция на $\mathbb{R}^3$, то для каждого $x\in\mathbb{R}^3$ и произвольного $\varepsilon>0$ существует $t_\circ$ такое, что $t_\circ^{1/(2\alpha)} < \varepsilon$ и $|\varphi(x-\xi)-\varphi(x)|<\varepsilon$, как только $|\xi| < t_\circ^{1/(2\alpha)}$. Тогда

$$\mathfrak{I}(t;x) < \varepsilon \int\limits_{|\xi|<t_\circ^{1/(2\alpha)}} |\hat{G}_\alpha(t;\xi)|\,d\xi + \int\limits_{|\xi|\geqslant t_\circ^{1/(2\alpha)}} |\hat{G}_\alpha(t;\xi)||\varphi(x-\xi)-\varphi(x)|\,d\xi \leqslant \varepsilon\mathfrak{I}_1(t) + \mathfrak{I}_2(t;x),$$

где

$$\mathfrak{I}_1(t) := \int\limits_{\mathbb{R}^3} |\hat{G}_\alpha(t;\xi)|\,d\xi, \quad \mathfrak{I}_2(t;x) := \int\limits_{|\xi|\geqslant t_\circ^{1/(2\alpha)}} |\hat{G}_\alpha(t;\xi)||\varphi(x-\xi)-\varphi(x)|\,d\xi.$$

Далее, учитывая оценки [14]

$$|\partial^k_x \hat{G}_\alpha(t;x)| \leqslant c_1 t(t^{1/\alpha}+|x|)^{-(3+|k|+\alpha)}, \quad k\in\mathbb{Z}^3_+, \quad t\in(0,T], \quad x\in\mathbb{R}^3, \tag{22}$$

и ограниченность функции $\varphi(\cdot)$ на $\mathbb{R}^3$, для всех $t\in(0,T]$ и $x\in\mathbb{R}^3$ находим

$$\mathfrak{I}_1(t) \leqslant c_1 t \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{d\xi}{(t^{1/\alpha}+|\xi|)^{3+\alpha}} = c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{dz}{(1+|z|)^{3+\alpha}} \equiv c_2;$$

$$\mathfrak{I}_2(t;x) \leqslant c_3 t \int\limits_{|\xi|\geqslant t_\circ^{1/(2\alpha)}} |\xi|^{-(3+\alpha)}\,d\xi = c_3 t \int\limits_{t_\circ^{1/(2\alpha)}}^{+\infty} \rho^{-(1+\alpha)}\,d\rho = c_4 t t_\circ^{-1/2}.$$

Из последнего неравенства следует, что для всех $x \in \mathbb{R}^3$ и $t \leqslant t_\circ$ справедлива оценка

$$\mathfrak{I}_2(t;x) \leqslant c_4 t_\circ^{1/2} < c_4 \varepsilon^\alpha.$$

Следовательно, для любого $x \in \mathbb{R}^3$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует $t_\circ < \varepsilon^{2\alpha}$ такое, что при всех $t \leqslant t_\circ$ выполняется неравенство $\mathfrak{I}(t;x) < c_2\varepsilon + c_4\varepsilon^\alpha$, т.е. имеет место предельное соотношение (21).

Функция $W_\beta^0(\cdot)$ бесконечно дифференцируема и ограничена на $\mathbb{R}^3$, поэтому, согласно (21), для $W_\beta^t(\cdot)$ выполняется соотношение

$$W_\beta^t(\cdot) \underset{t\to+0}{\to} W_\beta^0(\cdot). \tag{23}$$

Таким образом, распределение $W_\beta^t(\cdot)$ является классическим решением задачи Коши (20), (23).

Пусть теперь $a_\beta(0) = 0$, тогда

$$a_\beta(t) = \int\limits_0^t a'_\beta(\tau)\,d\tau, \quad t \in (0,T].$$

Отсюда, согласно (16), получаем равенство

$$W_\beta^t(\cdot) = \hat{G}_\alpha(t;\cdot), \quad t \in (0,T]. \tag{24}$$

Соотношение (21) характеризует свойство “δ-подобия” функции $\hat{G}_\alpha(t;\cdot)$ в пространстве S' распределений Шварца [25]:

$$\hat{G}_\alpha(t;\cdot) \underset{t\to+0}{\to} \delta(\cdot) \tag{25}$$

(здесь $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака). Поэтому при $a_\beta(0) = 0$ распределение $W_\beta^t(\cdot)$ является решением задачи Коши (20), (25), которое в обычном понимании удовлетворяет уравнению (20), а начальному условию (25) – в смысле слабой сходимости в пространстве S'.

Подытожим сказанное выше в виде следующего утверждения.

Теорема 2. *Если $\beta > 3/2$ и $a_\beta(\cdot)$ – непрерывно дифференцируемая функция на промежутке $[0,T]$, то распределение вероятностей $W_\beta^t(\cdot)$ на множестве $(0,T] \times \mathbb{R}^3$ является классическим решением задачи Коши (20), (23) при $a_\beta(0) \neq 0$. В случае $a_\beta(0) = 0$ функция $W_\beta^t(\cdot)$ – фундаментальное решение этой задачи для уравнения (20).*

Замечание 1. Равенство (24) раскрывает следующий смысл фундаментального решения задачи Коши для ПДУ (20): $\hat{G}_\alpha$ – первичное распределение вероятностей локального влияния на рассматриваемый объект со стороны его движущегося окружения, характеризующее этот процесс с самого начала его возникновения, т.е. с того момента, когда в окружении объекта впервые возникли элементы локального воздействия.

Замечание 2. ПДУ (20) превращается в классическое уравнение диффузии при $\beta = 3/2$. Однако значение $\beta = 3/2$ хотя и является предельным для интервала $(3/2, +\infty)$ сходимости случайных процессов локального влияния движущихся объектов, но к этому множеству оно не относится. Это означает, что процесс классической диффузии происходит по законам, которые имеют несколько иную природу, чем законы случайных завихрений локального влияния движущихся объектов, хотя они и являются предельно близкими.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Petrowsky I.* Über das Cauchyche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen // Math. Sb. 1937. V. 2. № 5. P. 815–870.
2. *Шилов Г.Е.* Об условиях корректности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Успехи мат. наук. 1955. Т. 10. Вып. 4. С. 89–100.

3. *Житомирский Я.И.* Задача Коши для некоторых типов параболических по Г.Е. Шилову систем линейных уравнений в частных производных с непрерывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т. 23. С. 925–932.
4. *Литовченко В.А., Довжицкая И.М.* Стабилизация решений параболических систем типа Шилова с неотрицательным родом // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55. № 2. С. 341–349.
5. *Shirota T.* O Cauchy problem for linear partial differential equations with variable coefficients // Osaka Math. J. 1957. V. 8. № 1. P. 43–59.
6. *Wiener N.* Differential space // J. Math. and Phys. 1923. V. 2. P. 131–174.
7. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
8. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. Ульяновск, 2008.
9. *Эйдельман С.Д., Дринь Я.М.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решения задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений // Приближённые методы математического анализа. Киев, 1974. С. 60–69.
10. *Дрінь Я.М.* Вивчення одного класу параболічних псевдодиференціальних операторів у просторах гёльдерових функцій // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1974. № 1. С. 19–21.
11. *Федорюк М.В.* Асимптотика функции Грина псевдодифференциального параболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 7. С. 1296–1301.
12. *Schneider W.R.* Stable distributions: Fox function representation and generalization // Lect. Not. Phus. 1986. V. 262. P. 497–511.
13. *Кочубей А.Н.* Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1988. Т. 52. № 5. С. 909–934.
14. *Litovchenko V.A.* Cauchy problem with Riesz operator of fractional differentiation // Ukr. Math. J. 2005. V. 57. № 12. P. 1936–1957.
15. *Levy P.* Calcul des Probabilities. Paris, 1925.
16. *Золотарев В.М.* Одномерные устойчивые распределения. М., 1983.
17. *Mandelbrot B.* The Pareto-Levy law and the distribution of income // Int. Econ. Rev. 1960. V. 1. P. 79–106.
18. *Собельман И.И.* Введение в теорию атомных спектров. М., 1963.
19. *Кац М.* Вероятность и смежные вопросы в физике. М., 1965.
20. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 2. М., 1984.
21. *Никифоров А.Ф., Новиков В.Г., Уваров В.Б.* Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы и методы расчёта росселандовых пробегов и уравнений состояния. М., 2000.
22. *Агекян Т.А.* Теория вероятностей для астрономов и физиков. М., 1974.
23. *Holtsmark J.* Über die Verbreiterung von Spektrallinier // Ann. der Physik. 1919. Bd. 58. S. 577–630.
24. *Chandrasekhar S.* Stohastic problems in physics and astronomy // Rev. of Modern Phys. 1943. V. 15. № 1. P. 1–89.
25. *Schwartz L.* Theorie des distributions. V. 1. Paris, 1951.

Черновицкий национальный университет
им. Ю. Федьковича, Украина

Поступила в редакцию 11.07.2020 г.
После доработки 11.07.2020 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 54–65

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.223

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КЕЛЬВИНА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

© 2022 г. К. Б. Сабитов

Доказана обобщённая теорема Кельвина и с её помощью, основываясь на фундаментальных решениях эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами, построены функции Грина первой краевой задачи для таких уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064122010071

Введение. Как известно, при построении функции Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круговых областях важную роль играет теорема (или преобразование) Кельвина [1], с помощью которой строится эта функция. В связи с исследованиями Ф. Трикоми [2, с. 69–95] возник интерес к построению функции Грина задачи Дирихле или задачи со смешанными граничными условиями первого и второго рода для вырождающегося уравнения

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m = \mathrm{const} > 0, \tag{1}$$

в области D_0, ограниченной нормальной кривой Γ_0 (по терминологии Ф. Трикоми)

$$x^2 + \left(\frac{2}{m+2} y^{(m+2)/2}\right)^2 = a^2, \quad a > 0,$$

лежащей в полуплоскости $y \geqslant 0$, и отрезком $[-a, a]$ прямой $y = 0$.

Для уравнения (1) в области D_0 Е. Хольмгрен [3], не приводя необходимых обоснований, впервые построил функцию Грина $G(x, y; x_0, y_0)$ задачи с граничными данными

$$u(x,y)|_{\Gamma_0} = \varphi(x), \quad -a \leqslant x \leqslant a, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \nu(x), \quad -a < x < a; \tag{2}$$

она имеет вид

$$G(x, y; x_0, y_0) = \cos(2\beta\pi) z(x, y; x_0, y_0) + \overline{z}(x, y; x_0, y_0) -$$
$$- \left(\frac{a^2}{x_0^2 + 4(m+2)^{-1} y_0^{m+2}}\right)^{\beta} (\cos(2\beta\pi) z(x, y; \overline{x}_0, \overline{y}_0) + \overline{z}(x, y; \overline{x}_0, \overline{y}_0)),$$

где

$$\overline{x}_0 = \frac{a^2 x_0}{x_0^2 + 4(m+2)^{-1} y_0^{m+2}}, \quad \overline{y}_0^{(m+2)/2} = \frac{a^2 y_0^{(m+2)/2}}{x_0^2 + 4(m+2)^{-1} y_0^{m+2}};$$

$$z(x, y; x_0, y_0) = \left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta} \frac{1}{r_1^{2\beta}} \left(F\left(\beta, \beta; 1; \frac{r^2}{r_1^2}\right) \ln \frac{r^2}{r_1^2} + G\left(\beta, \beta; 1; \frac{r^2}{r_1^2}\right)\right),$$

$$\overline{z}(x, y; x_0, y_0) = \left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta} \frac{1}{r^{2\beta}} \left(F\left(\beta, \beta; 1; \frac{r_1^2}{r^2}\right) \ln \frac{r_1^2}{r^2} + G\left(\beta, \beta; 1; \frac{r_1^2}{r^2}\right)\right);$$

$$\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix} = \left\{ (x - x_0)^2 + \left(\frac{2}{m+2}(y^{(m+2)/2} \mp y_0^{(m+2)/2})\right)^2, \right. \quad \beta = \frac{m}{2(m+2)};$$

$F(\beta,\beta;1;x)$ – гипергеометрическая функция, которая является решением уравнения

$$x(1-x)y''+(1-(1+2\beta)x)y'-\beta^2y(x)=0;$$

$$G(\beta,\beta;1;x)=\left[\left(\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial b}+\frac{\partial}{\partial c}\right)F(a,b;c;x)\right]_{\substack{c=1\\ a=b=\beta}},$$

$F(a,b;c;x)$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

С. Геллерстедт в своей знаменитой работе [4, с. 23], ссылаясь на работу [3], привёл в более компактном виде формулу для функции Грина задачи (1), (2):

$$G(x,y;x_0,y_0)=q_1(x,y;x_0,y_0)-\left(\frac{a}{R}\right)^{2\beta}q_1(x,y;\overline{x}_0,\overline{y}_0), \qquad (3)$$

где $R^2=x_0^2+4(m+2)^{-2}y_0^{m+2}$, а функция $q_1(x,y;x_0,y_0)=k_1r_1^{-2\beta}F(\beta,\beta;2\beta;1-r^2/r_1^2)$ является фундаментальным решением уравнения (1), также не обосновывая, почему второе слагаемое из формулы (3) является решением уравнения (1). Эта формула воспроизведена в монографии [5, с. 72, с. 80], в ней же приведена (также без соответствующих обоснований) формула для функции Грина для уравнения (1) в области D_0 задачи Дирихле с данными

$$u(x,y)|_{\Gamma_0}=\varphi(x),\quad u(x,y)|_{y=0}=\tau(x),\quad -a\leqslant x\leqslant a;$$

она имеет вид

$$G(x,y;x_0,y_0)=q_2(x,y;x_0,y_0)-\left(\frac{a}{R}\right)^{2\beta}q_2(x,y;\overline{x}_0,\overline{y}_0),$$

здесь

$$q_2(x,y;x_0,y_0)=k_2\left(\frac{4}{m+2}\right)^{4\beta-2}r_1^{-2\beta}F\left(1-\beta,1-\beta;2-2\beta;1-\frac{r^2}{r_1^2}\right)$$

– второе фундаментальное решение уравнения (1); значения постоянных k_1 и k_2 приведены в [5, с. 44, 49].

В работе [6] в полукруге $\{(x,y):x^2+y^2<1,\quad x>0\}$ для уравнения

$$u_{xx}+u_{yy}+\frac{p}{x}u_x=0,\quad p=\mathrm{const}>0, \qquad (4)$$

изучены задачи Дирихле $(0<p<1)$ и Келдыша [7] $(p\geqslant 1)$. В [6] для построения решения этих задач функция Грина приводится в следующем виде:

$$G(x,y;x_0,y_0)=q_1(x,y;x_0,y_0)-g_1(x,y;x_0,y_0),$$

где $q_1(x,y;x_0,y_0)=k_1\left(\dfrac{x}{r_1}\right)^pF\left(\dfrac{p}{2},\dfrac{p}{2};p;1-\dfrac{r^2}{r_1^2}\right)$ – фундаментальное решение уравнения (4),

$$g_1(x,y;x_0,y_0)=r_0^{-p}\left(\frac{x}{r_1}\right)^pF\left(\frac{p}{2},\frac{p}{2};p;1-\frac{\overline{r}^2}{\overline{r}_1^2}\right),\quad r_0^2=x_0^2+y_0^2,$$

здесь

$$\begin{matrix} r^2\\ r_1^2\end{matrix}=\Big\{(x\mp x_0)^2+(y-y_0)^2,\quad \begin{matrix}\overline{r}^2\\ \overline{r}_1^2\end{matrix}=\Big\{(x\mp\overline{x}_0)^2+(y-\overline{y}_0)^2,\quad \overline{x}_0=\frac{x_0}{r_0^2},\quad \overline{y}_0=\frac{y_0}{r_0^2}. \qquad (5)$$

В этой работе также отсутствует обоснование того, почему функция $g_1(x,y;x_0,y_0)$ является решением уравнения (4).

Отметим, что в работах [8, 9] изучена задача Хольмгрена для уравнения

$$u_{xx}+u_{yy}+\frac{p}{y}u_y+\frac{q}{y}u_x=0,$$

где $0<p<1,$ $q=\mathrm{const},$ и методом потенциалов установлена её фредгольмость, а в работе [10] в шаровой области для уравнения

$$\sum_{i=1}^{n}u_{x_ix_i}+u_{zz}+\frac{k}{z}u_z=0,\quad 0<k<1,$$

найден аналог формулы Пуассона для решения задачи Дирихле с использованием теоремы Кельвина.

В работах [11, 12] для уравнения Келдыша

$$x^n u_{xx}+u_{yy}=0,\quad n=\mathrm{const}>0, \tag{6}$$

в области, ограниченной координатными осями и “нормальной” кривой $y=2|2-n|^{-1}\sqrt{1-x^{2-n}},$ $n\neq 2,$ построены по аналогии с работами [4–6] функции Грина задач Дирихле и Хольмгрена, но без соответствующего обоснования.

В работах [13, 14] для уравнения

$$u_{xx}+u_{yy}+\frac{2\alpha}{x}u_x+\frac{2\beta}{y}u_y-\lambda^2u=0,\quad 0<2\alpha<1,\quad 0<2\beta<1,\quad \lambda>0, \tag{7}$$

по аналогии с работами [4, 5] построены функции Грина задачи Дирихле в четверти круга $x^2+y^2<1,$ $x>0,$ $y>0,$ но без соответствующих обоснований.

Эту цепочку работ, посвящённых построению функции Грина краевых задач, можно продолжить. В большом числе работ для эллиптических уравнений, имеющих сингулярные коэффициенты или вырождающихся на границе области, по аналогии с работами [4, 5] построены функции Грина без соответствующих обоснований. Чтобы указанные выше результаты считались обоснованными, необходимо перенести теорему Кельвина на вырождающиеся эллиптические уравнения или на эллиптические уравнения с сингулярными коэффициентами.

1. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ с заданной в нём декартовой системой координат $Ox_1,\ldots,x_n$ уравнение эллиптического типа с коэффициентами, сингулярными на осях координат,

$$Su\equiv\sum_{i=1}^{n}\left(u_{x_ix_i}(x)+\frac{p_i}{x_i}u_{x_i}\right)=\Delta u+\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{x_i}u_{x_i}=0, \tag{8}$$

где p_i – известные постоянные, $u=u(x)$ – решение уравнения (8), $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n),$ $n\geqslant 2.$

Из курса уравнений математической физики (см., например, [15, с. 283; 16, с. 168; 17, с. 260; 18, с. 41; 19, с. 273] и др.) известно следующее утверждение, называемое *теоремой Кельвина*: если функция $u(x)$ является гармонической в области $D\subset\mathbb{R}^n,$ то функция

$$v(\eta)=\frac{1}{\rho^{n-2}}u\left(\frac{\eta_1}{\rho^2},\frac{\eta_2}{\rho^2},\ldots,\frac{\eta_n}{\rho^2}\right)=\frac{1}{\rho^{n-2}}u\left(\frac{\eta}{\rho^2}\right)$$

при $\rho\neq 0$ является гармонической в области $D',$ сопряжённой с D (т.е. являющейся образом области D) при преобразовании инверсии относительно сферы единичного радиуса с центром в начале координат, где $\rho=|\eta|=\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2+\ldots+\eta_n^2}.$

Доказательство этого утверждения приведено в указанных выше учебниках при $n=2$ и $n=3$, а в учебнике [20, с. 177] – при любом $n\geqslant 2.$

В данной работе, следуя [20, с. 177], установлен аналог теоремы Кельвина для решений уравнения (8) и показаны применения этой теоремы при построении функции Грина первой граничной задачи для частных случаев уравнения (8).

Теорема. *Если функция $u(x)$ является в области D решением уравнения (8), то функция*

$$v(\eta)=\frac{1}{\rho^{n+\alpha-2}}u\biggl(\frac{\eta}{\rho^2}\biggr),\quad \alpha=\sum_{i=1}^n p_i, \tag{9}$$

при $\rho\neq 0$ также является решением уравнения (8) в области D', сопряжённой с D при преобразовании инверсии относительно сферы единичного радиуса с центром в начале координат.

Доказательство. Пусть $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – произвольная точка области D, а $\eta=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$, $\eta_i=x_i/r^2$, $i=\overline{1,n}$, – точка из области D', соответствующая точке x при преобразовании инверсии относительно сферы единичного радиуса с центром в начале координат; $r=|x|$, $\rho=|\eta|$, при этом $r\rho=1$.

Предварительно докажем, что имеет место тождество

$$Sv(\eta)=r^{n+\alpha+2}Su(x), \tag{10}$$

из которого непосредственно вытекает справедливость теоремы. Предварительно вычислим

$$\frac{\partial x_k}{\partial\eta_i}=\begin{cases}\rho^{-2}-2\rho^{-4}\eta_i^2, & k=i,\\ -2\rho^{-4}\eta_k\eta_i, & k\neq i.\end{cases} \tag{11}$$

Тогда вследствие определения (9) с учётом вычислений (11) имеем

$$\frac{\partial v(\eta)}{\partial\eta_i}=(2-n-\alpha)\rho^{1-n-\alpha}\frac{\partial\rho}{\partial\eta_i}u(x)+\rho^{2-n-\alpha}\sum_{k=1}^n\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial\eta_i}=$$

$$=(2-n-\alpha)\rho^{-n-\alpha}\eta_iu(x)-2\rho^{-n-\alpha-2}\eta_i\sum_{k=1}^n\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\eta_k+\rho^{-n-\alpha}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\equiv$$

$$\equiv(2-n-\alpha)J_1-2J_2+J_3. \tag{12}$$

Теперь, учитывая формулы (11), найдём производную по η_i от каждой функции J_k, $k=1,2,3$, из правой части равенства (12):

$$\frac{\partial J_1}{\partial\eta_i}=-(n+\alpha)\rho^{-n-\alpha-2}\eta_i^2u(x)+\rho^{-n-\alpha}u(x)-2\rho^{-n-\alpha-4}\eta_i^2\sum_{k=1}^n\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\eta_k+\rho^{-n-\alpha-2}\eta_i\frac{\partial u(x)}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial\eta_i}=-(n+\alpha+2)\rho^{-n-\alpha-4}\eta_i^2\sum_{k=1}^n\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\eta_k+\rho^{-n-\alpha-2}\sum_{k=1}^n\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\eta_k-$$

$$-2\rho^{-n-\alpha-6}\eta_i^2\sum_{k=1}^n\sum_{m=1}^n\frac{\partial}{\partial x_m}\biggl(\frac{\partial u}{\partial x_k}\biggr)\eta_m\eta_k+\rho^{-n-\alpha-4}\eta_i\sum_{k=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\biggl(\frac{\partial u}{\partial x_k}\biggr)\eta_k+\rho^{-n-\alpha-2}\eta_i\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial\eta_i}=-(n+\alpha)\rho^{-n-\alpha-2}\eta_i\frac{\partial u}{\partial x_i}-2\rho^{-n-\alpha-4}\eta_i\sum_{k=1}^n\frac{\partial}{\partial x_k}\biggl(\frac{\partial u}{\partial x_i}\biggr)\eta_k+\rho^{-n-\alpha-2}\frac{\partial^2x_k}{\partial x_i^2}.$$

Тогда на основании вычисленных производных получаем, что

$$Sv(\eta)=(2-n-\alpha)\sum_{i=1}^n\frac{\partial J_1}{\partial\eta_i}-2\sum_{i=1}^n\frac{\partial J_2}{\partial\eta_i}+\sum_{i=1}^n\frac{\partial J_3}{\partial\eta_i}+$$

$$+\sum_{i=1}^n\frac{p_i}{\eta_i}\biggl[(2-n-\alpha)\rho^{-n-\alpha}\eta_iu(x)-2\rho^{-n-\alpha-2}\eta_i\sum_{k=1}^n\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\eta_k+\rho^{-n-\alpha}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\biggr]=$$

$$= -(2-n-\alpha)(n+\alpha)\rho^{-n-\alpha}u(x) + (2-n-\alpha)n\rho^{-n-\alpha}u(x) -$$

$$-(2-n-\alpha)2\rho^{-n-\alpha-2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}\eta_k + (2-n-\alpha)\rho^{-n-\alpha-2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_i +$$

$$+2(n+\alpha+2)\rho^{-n-\alpha-2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}\eta_k - 2n\rho^{-n-\alpha-2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}\eta_k + 4\rho^{-n-\alpha-4}\sum_{k,m=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_k}\eta_m\eta_k -$$

$$-2\rho^{-n-\alpha-2}\sum_{k,i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\eta_i\eta_k - 2\rho^{-n-\alpha-2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_i -$$

$$-(n+\alpha)\rho^{-n-\alpha-2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_i - 2\rho^{-n-\alpha-4}\sum_{k,i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}\eta_k\eta_i + \rho^{-n-\alpha-2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} +$$

$$+(2-n-\alpha)\rho^{-n-\alpha}u(x)\sum_{i=1}^{n}p_i - 2\rho^{-n-\alpha-2}\sum_{i=1}^{n}p_i\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\eta_k + \rho^{-n-\alpha}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{\eta_i}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = r^{n+\alpha+2}Su(x).$$

Тем самым доказана справедливость тождества (10). Отсюда с очевидностью вытекает, что функция (9), где $\rho \neq 0$, является решением уравнения (8) в области D'. Теорема доказана.

Отметим, что в работе [21] дано обобщение теоремы Кельвина на случай уравнения (8) с помощью перехода к сферической системе координат. Отметим также, что на стадии рецензирования данной статьи выяснилось, что в монографии [22, с. 156] получено обобщение теоремы Кельвина на случай уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{2p}{y}u_y = 0, \quad p = \text{const}.$$

Функция $u(x)$ при преобразовании инверсии относительно сферы S_R радиуса R с центром в начале координат принимает вид

$$v(\eta) = \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+\alpha-2} u\left(\frac{R^2}{\rho^2}\eta\right);$$

при этом функция v является решением уравнения (8).

2. Покажем применение доказанной выше теоремы при построении функции Грина первой граничной задачи для частных случаев уравнения (8) с подробным обоснованием, так как у разных авторов результаты отличаются друг от друга и при этом отсутствуют необходимые выкладки.

Пример 1. Рассмотрим в полукруге $D_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1,\ x > 0\}$ изученное в работе [6] уравнение

$$S_1 u(x,y) \equiv u_{xx} + u_{yy} + \frac{p}{x}u_x = 0, \quad p = \text{const} > 0, \tag{13}$$

и поставим для него задачи Дирихле и Келдыша, отмеченные в п. 1, с указанием пространства функций, в котором ищется решение.

Задача 1 (задача Дирихле). *Пусть* $0 < p < 1$. *Найти функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую следующим четырём условиям:*

$$u(x,y) \in C(\overline{D}_1) \bigcap C^2(D_1); \tag{14}$$

$$S_1 u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D_1; \tag{15}$$

$$u(x,y)|_{\Gamma} = \varphi(y), \quad -1 \leqslant y \leqslant 1; \tag{16}$$

$$u(0,y)=\psi(y),\quad -1\leqslant y\leqslant 1,$$

здесь кривая Γ – *правая полуокружность* $x=\sqrt{1-y^2}$, *непрерывные функции* $\varphi(y)$ *и* $\psi(y)$ *заданы,* $\varphi(-1)=\psi(-1)=\varphi(1)=\psi(1)$.

Задача 2 (задача Келдыша). *Пусть* $p\geqslant 1$. *Найти функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую условиям (14)–(16).*

Решения уравнения (13), следуя [4; 5, с. 40], будем искать в виде произведения

$$u(x,y)=r_1^\alpha v(1-\sigma)=r_1^\alpha v(\xi),\quad \alpha=\mathrm{const},\tag{17}$$

где $\sigma=r^2/r_1^2$ (величины r^2 и r_1^2 определены в (5)). Подставляя функцию (17) в уравнение (13), получаем

$$(\xi_x^2+\xi_y^2)v''(\xi)+\left(\xi_{xx}+\xi_{yy}+\frac{p}{x}\xi_x+\frac{2\alpha}{r_1}(r_{1x}\xi_x+r_{1y}\xi_y)\right)v'(\xi)+$$
$$+\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{r_1^2}(r_{1x}^2+r_{1y}^2)+\frac{\alpha}{r_1}(r_{1xx}+r_{1yy})+\frac{p\alpha}{x}\frac{r_{1x}}{r_1}\right)v(\xi)=0.\tag{18}$$

Предварительно вычислим коэффициенты уравнения (18):

$$\xi_x^2+\xi_y^2=\frac{4x_0}{xr_1^2}\xi(1-\xi),$$

$$\xi_{xx}+\xi_{yy}+\frac{p}{x}\xi_x+\frac{2\alpha}{r_1}(r_{1x}\xi_x+r_{1y}\xi_y)=-\frac{2\xi}{r_1^2}(\alpha+p)+\frac{4x_0}{xr_1^2}\left(p-\left(1+\frac{p}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\xi\right),$$
$$\frac{\alpha(\alpha-1)}{r_1^2}(r_{1x}^2+r_{1y}^2)+\frac{\alpha}{r_1}(r_{1xx}+r_{1yy})+\frac{p\alpha}{x}\frac{r_{1x}}{r_1}=-\frac{p^2}{4}\frac{4x_0}{xr_1^2}.$$

Подставим найденные значения коэффициентов в уравнение (18) и положим $\alpha=-p$. Тогда получим гипергеометрическое уравнение

$$\xi(1-\xi)v''(\xi)+(p-(1+p)\xi)v'(\xi)-\frac{p^2}{4}v(\xi)=0.$$

Его линейно независимыми решениями являются функции

$$\overline{q}_1(x,y;x_0,y_0)=\overline{r}_1^{-p}F(p/2,p/2;p;1-\sigma),\tag{19}$$

$$\overline{q}_2(x,y;x_0,y_0)=\overline{r}_1^{-p}\xi^{1-p}F(1-p/2,1-p/2;2-p;1-\sigma)=$$
$$=(4xx_0)^{1-p}\overline{r}_1^{p-2}F(1-p/2,1-p/2;2-p;1-\sigma),\tag{20}$$

когда p не является целым числом. Отметим, что функции (19) и (20) не удовлетворяют сопряжённому уравнению

$$S_1^*v\equiv v_{xx}+v_{yy}-\left(\frac{p}{x}v\right)_x=0.\tag{21}$$

В связи с этим обстоятельством в работе [6] предложено умножить функции (19) и (20) на x^p, так как произведение $x^pu(x,y)=v(x,y)$ является решением уравнения (21), когда $u(x,y)$ – решение исходного уравнения (13). Тогда получим два фундаментальных решения уравнения (13):

$$q_1(x,y;x_0,y_0)=k_1(x/r_1)^pF(p/2,p/2;p;1-\sigma),\tag{22}$$

$$q_2(x,y;x_0,y_0)=k_2xx_0^{1-p}r_1^{p-2}F(1-p/2,1-p/2;2-p;1-\sigma),\tag{23}$$

где k_1 и k_2 – постоянные, подбирающиеся специальным образом, $F(\cdot)={}_2F_1(\cdot)$ – гипергеометрическая функция Гаусса. Функции (22) и (23) являются решениями сопряжённого уравнения

(21) по переменным (x,y) и решениями самого уравнения (13) по переменным (x_0,y_0) и при $r\to 0$ имеют логарифмическую особенность.

Функцией Грина задач 1 и 2 будем называть функцию

$$G(x,y;x_0,y_0)=q_1(x,y;x_0,y_0)-g_1(x,y;x_0,y_0), \tag{24}$$

здесь функция $g_1(x,y;x_0,y_0)$ должна быть по паре (x,y) решением уравнения (21), а по паре (x_0,y_0) решением уравнения (13) и

$$G(x,y;x_0,y_0)|_\Gamma=0 \quad \text{и} \quad G(x,y;x_0,y_0)|_{x=0}=0 \quad \text{при} \quad 0<p<1. \tag{25}$$

На основании доказанной выше теоремы построим функцию $g_1(x,y;x_0,y_0)$. Используя симметрию относительно окружности $x^2+y^2=1$, из фундаментального решения (22) получаем

$$g_1(x,y;x_0,y_0)=r_0^{-p}q_1(x,y,\overline{x}_0,\overline{y}_0)=r_0^{-p}(x/\overline{r}_1)^pF(p/2,p/2;p;1-\overline{\sigma}), \tag{26}$$

где $r_0^2=x_0^2+y_0^2$, $\overline{\sigma}=\overline{r}^2/\overline{r}_1^2$, а остальные величины определены в (5). Тогда функция (24) с учётом представления (26) является решением уравнения (13) по паре (x_0,y_0) и решением уравнения (21) по паре (x,y), а также удовлетворяет граничным условиям (25), так как при $(x,y)\in\Gamma$, т.е. когда $x=\sqrt{1-y^2}$, справедливо равенство $r_1=r_0\overline{r}_1$. Действительно,

$$r_1^2=(x+x_0)^2+(y-y_0)^2=r_0^2((x+\overline{x}_0)^2+(y-\overline{y}_0)^2),$$

или

$$1+2xx_0-2yy_0+r_0^2=r_0^2(1+2x\overline{x}_0-2y\overline{y}_0+\overline{x}_0^2+\overline{y}_0^2)=r_0^2+2xx_0-2yy_0+1.$$

При $x=0$ функция (24) обращается в нуль за счёт множителя x^p $(p>0)$, когда $r_0\neq 0$.

Теперь, используя функцию Грина (24), решение задач 1 и 2 методом Грина можно построить в явном виде, что сделано в работе [6], но без обоснования того, почему функция (26) является решением уравнения (13) по паре (x_0,y_0).

Отметим, что в работе [23, с. 43] формула (23) приведена без вывода.

Пример 2. В четверти круга $D_2=\{(x,y): x^2+y^2<1,\ x>0,\ y>0\}$ рассмотрим уравнение

$$S_2u(x,y)\equiv u_{xx}+u_{yy}+\frac{p}{x}u_x+\frac{p}{y}u_y=0, \quad p>0. \tag{27}$$

Следуя [24], решение этого уравнения будем искать в виде

$$u(x,y)=(r_1r_2)^{-p}v(\xi), \tag{28}$$

здесь

$$\xi=1-\sigma=1-\left(\frac{rr_3}{r_1r_2}\right)^2=\frac{16xx_0yy_0}{(r_1r_2)^2},$$

где величины r^2 и r_1^2 определены в (5), а величины $r_2^2=(x-x_0)^2+(y+y_0)^2$ и $r_3^2=(x+x_0)^2+(y+y_0)^2$. Подставляя функцию (28) в уравнение (27), получаем

$$\begin{gathered}S_2[(r_1r_2)^{-p}v(\xi)]=(r_1r_2)^{-p}\biggl\{v''(\xi)(\xi_x^2+\xi_y^2)+\\
+v'(\xi)\biggl(\xi_{xx}+\xi_{yy}-2p\xi_x\biggl(\frac{r_{1x}}{r_1}+\frac{r_{2x}}{r_2}\biggr)-2p\xi_y\biggl(\frac{r_{1y}}{r_1}+\frac{r_{2y}}{r_2}\biggr)+\frac{p}{x}\xi_x+\frac{p}{y}\xi_y\biggr)+\\
+v(\xi)\biggl(-\frac{p}{r_1}(r_{1xx}+r_{1yy})-\frac{p}{r_2}(r_{2xx}+r_{2yy})+\frac{p(p+1)}{r_1^2}(r_{1x}^2+r_{1y}^2)+\frac{p(p+1)}{r_2^2}(r_{2x}^2+r_{2y}^2)+\\
+\frac{2p^2}{r_1r_2}(r_{1x}r_{2x}+r_{1y}r_{2y})-\frac{p^2}{x}\biggl(\frac{r_{1x}}{r_1}+\frac{r_{2x}}{r_2}\biggr)-\frac{p^2}{y}\biggl(\frac{r_{1y}}{r_1}+\frac{r_{2y}}{r_2}\biggr)\biggr)\biggr\}=0.\end{gathered} \tag{29}$$

Предварительно вычислим следующие величины:

$$\xi_x^2+\xi_y^2=\frac{16x_0y_0(x^2+y^2)}{xy(r_1r_2)^2}\xi(1-\xi),$$

$$\xi_{xx}+\xi_{yy}=-\frac{16x_0y_0(x^2+y^2)}{xy(r_1r_2)^2}\xi,\quad r_{1x}^2+r_{1y}^2=1,\quad r_{2x}^2+r_{2y}^2=1,$$

$$r_{1xx}+r_{1yy}=\frac{1}{r_1},\quad r_{2xx}+r_{2yy}=\frac{1}{r_2},\quad r_{1x}r_{2x}+r_{1y}r_{2y}=\frac{x^2+y^2-x_0^2-y_0^2}{r_1r_2},$$

$$\frac{r_{1x}}{r_1}+\frac{r_{2x}}{r_2}=\frac{r_2^2(x+x_0)+r_1^2(x-x_0)}{(r_1r_2)^2},\quad \frac{r_{1y}}{r_1}+\frac{r_{2y}}{r_2}=\frac{r_2^2(y-y_0)+r_1^2(y+y_0)}{(r_1r_2)^2},$$

$$\frac{\xi_xr_{1x}}{r_1}+\frac{\xi_yr_{1y}}{r_1}=\frac{16x_0y_0}{(r_1r_2)^4}((yx_0-xy_0)r_2^2-2xy(x^2+y^2-x_0^2-y_0^2)),$$

$$\frac{\xi_xr_{2x}}{r_2}+\frac{\xi_yr_{2y}}{r_2}=\frac{16x_0y_0}{(r_1r_2)^2}((xy_0-x_0y)r_1^2-2xy(x^2+y^2-x_0^2-y_0^2)).$$

Подставляя эти значения в уравнение (29), приходим к уравнению

$$S_2[(r_1r_2)^{-p}v]=(r_1r_2)^{-p}\frac{16x_0y_0(x^2+y^2)}{xy(r_1r_2)^2}\bigg(\xi(1-\xi)v''(\xi)+(p-(1+p)\xi)v'(\xi)-\frac{p^2}{4}v(\xi)\bigg)=0.$$

Отсюда для функции $v(\xi)$ получаем гипергеометрическое уравнение

$$\xi(1-\xi)v''(\xi)+(p-(1+p)\xi)v'(\xi)-\frac{p^2}{4}v(\xi)=0,$$

которое при нецелом $p>0$ имеет два линейно независимых решения

$$v_1(\xi)=F(p/2,p/2;p;\xi), \tag{30}$$

$$v_2(\xi)=\xi^{1-p}F(1-p/2,1-p/2;2-p;\xi). \tag{31}$$

На основании решений (30) и (31) получаем два линейно независимых решения уравнения (27):

$$\overline{q}_1(x,y;x_0,y_0)=k_1(r_1r_2)^{-p}F(p/2,p/2;p;1-\sigma), \tag{32}$$

$$\overline{q}_2(x,y;x_0,y_0)=k_2(r_1r_2)^{-p}\xi^{1-p}F(1-p/2,1-p/2;2-p;1-\sigma). \tag{33}$$

Функции (32) и (33) являются решениями уравнения (27) по переменным (x,y) и (x_0,y_0), так как выражение для ξ симметрично относительно этих пар. Однако указанные функции не являются по переменным (x,y) и (x_0,y_0) решениями сопряжённого уравнения

$$S_2^*v\equiv v_{xx}+v_{yy}-\bigg(\frac{p}{x}u\bigg)_x-\bigg(\frac{p}{y}u\bigg)_y=0. \tag{34}$$

Нетрудно заметить, что если функция $u(x,y)$ является решением уравнения (27), то произведение $(xy)^pu(x,y)=v(x,y)$ будет решением сопряжённого уравнения (34). Следовательно, фундаментальными решениями уравнения (27) являются следующие функции:

$$q_1(x,y;x_0,y_0)=k_1\bigg(\frac{xy}{r_1r_2}\bigg)^pF(p/2,p/2;p;\xi), \tag{35}$$

$$q_2(x,y;x_0,y_0)=k_2\bigg(\frac{xy}{r_1r_2}\bigg)^p\xi^{1-p}F(1-p/2,1-p/2;2-p;\xi). \tag{36}$$

Теперь, используя фундаментальное решение (35), на основании установленной теоремы нетрудно построить функцию Грина $G(x,y;x_0,y_0)$ первой граничной задачи для уравнения (27) в четверти круга D_2, именно:

$$G(x,y;x_0,y_0)=q_1(x,y;x_0,y_0)-r_0^{-2p}q_1(x,y;\overline{x}_0,\overline{y}_0)=$$

$$=k_1\left(\left(\frac{xy}{r_1r_2}\right)^pF(p/2,p/2;p;1-\sigma)-\left(\frac{xy}{\overline{r}_1\overline{r}_2}\right)^pr_0^{-2p}F(p/2,p/2;p;1-\overline{\sigma})\right),\qquad(37)$$

где

$$\overline{\sigma}=\left(\frac{\overline{r}\overline{r}_3}{\overline{r}_1\overline{r}_2}\right)^2,\quad \overline{r}_3^2=(x+\overline{x}_0)^2+(y+\overline{y}_0)^2,\quad \overline{r}_2^2=(x-\overline{x}_0)^2+(y+\overline{y}_0)^2.$$

Функция (37) обращается в нуль на осях координат $x=0$ и $y=0$, так как $p>0$, и на дуге $x^2+y^2=1$ в силу того, что $r=r_0\overline{r}$, $r_1=r_0\overline{r}_1$, $r_2=r_0\overline{r}_2$, $r_3=r_0\overline{r}_3$.

Пример 3. Рассмотрим в полушаре $D_3=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2<1,\ x>0\}$ уравнение

$$S_3u(x,y,z)\equiv u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+\frac{p}{x}u_x=0,\quad p=\mathrm{const}>0.\qquad(38)$$

Отметим, что в работах [23, 25] построены фундаментальные решения уравнения (38), однако эти решения различаются между собой. В связи с этим найдём фундаментальные решения независимо от указанных работ.

Как и в случае примера 1, решение уравнения (38) будем строить в виде произведения

$$u(x,y,z)=r_1^\alpha v(\xi),\quad \alpha=\mathrm{const},\qquad(39)$$

где

$$\xi=1-\sigma=1-\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{4xx_0}{r_1^2},$$

$$r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2,\quad r_1^2=(x+x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2.$$

Подставляя функцию (39) в уравнение (38), получаем

$$(\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2)v''(\xi)+\left(\xi_{xx}+\xi_{yy}+\xi_{zz}+\frac{p}{x}\xi_x+\frac{2\alpha}{r_1}(r_{1x}\xi_x+r_{1y}\xi_y+r_{1z}\xi_z)\right)v'(\xi)+$$

$$+\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{r_1^2}(r_{1x}^2+r_{1y}^2+r_{1z}^2)+\frac{\alpha}{r_1}(r_{1xx}+r_{1yy}+r_{1zz})+\frac{p\alpha}{x}\frac{r_{1x}}{r_1}\right)v(\xi)=0.\qquad(40)$$

Вычислим коэффициенты уравнения (40):

$$\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2=\frac{4x_0}{xr_1^2}\xi(1-\xi),\quad \xi_{xx}+\xi_{yy}+\xi_{zz}=-\frac{2\xi}{r_1^2}-\frac{4x_0}{xr_1^2}\xi;$$

$$\frac{1}{r_1}(r_{1x}\xi_x+r_{1y}\xi_y+r_{1z}\xi_z)=\frac{4x_0^2}{r_1^4}-\frac{\xi}{r_1^2};$$

$$\xi_{xx}+\xi_{yy}+\xi_{zz}+\frac{p}{x}\xi_x+\frac{2\alpha}{r_1}(r_{1x}\xi_x+r_{1y}\xi_y+r_{1z}\xi_z)=-\frac{2\xi}{r_1^2}(1+p+\alpha)+\frac{4x_0}{xr_1^2}\left(p-\left(1+\frac{p}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\xi\right),$$

$$\frac{\alpha(\alpha-1)}{r_1^2}(r_{1x}^2+r_{1y}^2+r_{1z}^2)+\frac{\alpha}{r_1}(r_{1xx}+r_{1yy}+r_{1zz})+\frac{p\alpha}{xr_1}r_{1x}=\frac{\alpha(\alpha+1+p)}{r_1^2}+\frac{p\alpha}{4}\frac{4x_0}{xr_1^2}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в (40) и полагая $\alpha=-1-p$, приходим к гипергеометрическому уравнению

$$\xi(1-\xi)v''(\xi)+\left(p-\left(p+\frac{3}{2}\right)\xi\right)v'(\xi)-\frac{p(p+1)}{4}v(\xi)=0,$$

линейно независимыми решениями которого при нецелом $p > 0$ являются функции

$$\overline{q}_1(x,y,z;x_0,y_0,z_0) = r_1^{-p-1}F(p/2+1/2,p/2;p;1-\sigma) = \frac{1}{rr_1^p}F(p/2-1/2,p/2;p;1-\sigma); \qquad (41)$$

$$\overline{q}_2(x,y,z;x_0,y_0,z_0) = r_1^{-p-1}\xi^{1-p}F(1/2-p/2,1-p/2;2-p;1-\sigma) =$$
$$= (4xx_0)^{1-p}r_1^{p-2}r^{-1}F(1/2-p/2,1-p/2;2-p;1-\sigma). \qquad (42)$$

Функции (41) и (42) по переменным (x,y,z) не удовлетворяют сопряжённому уравнению

$$S_3^*u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - \left(\frac{pu}{x}\right)_x = 0, \qquad (43)$$

в связи с чем по той же причине, что и выше, функции (41) и (42) следует умножить на x^p. Тогда получим два фундаментальных решения уравнения (38):

$$q_1(x,y,z;x_0,y_0,z_0) = k_1x^pr_1^{-p}r^{-1}F(p/2-1/2,p/2;p;1-\sigma), \qquad (44)$$

$$q_2(x,y,z;x_0,y_0,z_0) = k_2xx_0^{1-p}r_1^{p-2}r^{-1}F(1/2-p/2,1-p/2;2-p;1-\sigma),$$

которые отличаются от решений из работы [25] на множитель x^p, а решения в [23] имеют другой вид.

Используя доказанную выше теорему, нетрудно построить функцию Грина первой граничной задачи для уравнения (38) в полушаре D_3. Эта функция определяется формулой

$$G(x,y,z;x_0,y_0,z_0) = q_1(x,y,z;x_0,y_0,z_0) - g_1(x,y,z;x_0,y_0,z_0), \qquad (45)$$

здесь функция q_1 задаётся равенством (44), а функция g_1 на основании теоремы имеет вид

$$g_1(x,y,z;x_0,y_0,z_0) = r_0^{-p-1}q_1(x,y,z,\overline{x}_0,\overline{y}_0,\overline{z}_0) = k_1\frac{1}{r_0\overline{r}}\left(\frac{x}{r_0\overline{r}_1}\right)^pF((p-1)/2,p/2;p;1-\overline{r}^2/\overline{r}_1^2),$$

здесь

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \quad \overline{x}_0 = \frac{x_0}{r^2}, \quad \overline{y}_0 = \frac{y_0}{r^2}, \quad \overline{z}_0 = \frac{z_0}{r^2},$$

$$\overline{r}^2 = (x+\overline{x}_0)^2 + (y-\overline{y}_0)^2 + (z-\overline{z}_0)^2, \quad \overline{r}_1^2 = (x+\overline{x}_0)^2 + (y-\overline{y}_0)^2 + (z-\overline{z}_0)^2.$$

Построенная функция (45) является по переменным x_0, y_0, z_0 решением уравнения (38), по переменным x, y, z – решением сопряжённого уравнения (43) и удовлетворяет нулевому граничному условию на границе ∂D_3 полушара D_3. На сфере $x^2+y^2+z^2=1$ функция G равна нулю, так как в этом случае $r_1 = r_0\overline{r}_1$ и $r = r_0\overline{r}$.

Отметим, что, используя построенные функции Грина первой граничной задачи решения этой задачи для уравнений (27) и (38) можно построить в явном виде в указанных соответствующих областях D_2 и D_3. Построенные вторые фундаментальные решения уравнений (13), (27) и (38) можно использовать для построения решения задачи Хольмгрена в областях D_i, $i = \overline{1,3}$, где в отличии от задачи Дирихле на линии или плоскости сингулярности задаётся производная по нормали с весом.

3. Рассмотрим теперь эллиптические уравнения, вырождающиеся на части границы области, в которой они заданы, например уравнения (1), (6) из п. 1 и другие:

$$y^mu_{xx} + x^nu_{yy} = 0, \quad n \geqslant 0, \quad m \geqslant 0, \quad m+n > 0, \quad x > 0, \quad y > 0, \qquad (46)$$

$$u_{xx} + x^n(u_{yy} + u_{zz}) = 0, \quad n > 0, \quad x > 0. \qquad (47)$$

Уравнение (1) заменой переменных

$$x_1 = x, \quad y_1 = \frac{2}{2+m}y^{(2+m)/2} \qquad (48)$$

с последующим переобозначением x_1 через y, а y_1 через x сводится к уравнению (13), где $p = m/(2+m) \in (0,1)$ при всех $m > 0$, для которого построены фундаментальные решения (22) и (23). Они с учётом замены (48) являются фундаментальными решениями уравнения (1), так как уравнение (1) является самосопряжённым.

Заменой

$$x_1 = \frac{2}{|2-n|}y^{(2-n)/2}, \quad y_1 = y \tag{49}$$

уравнение (6) преобразуется в уравнение вида (13), где $p = -n/(2-n) < 0$, если $n < 2$, и $p = n/(n-2)$, если $n > 2$. Согласно примеру 1 фундаментальными решениями уравнения (6) являются функции (22) и (23) с учётом замены (49). С их помощью можно построить функцию Грина задач Дирихле и Хольмгрена, что и сделано в работах [11, 12].

Замена

$$x_1 = \frac{2}{2+n}x^{(2+n)/2}, \quad y_1 = \frac{2}{2+m}y^{(2+m)/2}$$

сводит уравнение (46) к виду

$$u_{x_1x_1} + u_{y_1y_1} + \frac{p}{x_1}u_{x_1} + \frac{q}{y_1}u_{y_1} = 0, \tag{50}$$

здесь $p = n/(2+n)$, $q = m/(2+m)$. Для уравнения (50) при $p = q$ в примере 3 построены фундаментальные решения (35) и (36), которые можно использовать для уравнения (46) при $m = n$ для решения задач Дирихле и Хольмгрена методом Грина.

Уравнение (47) заменой

$$z_1 = \frac{2}{2+m}z^{(2+m)/2}, \quad x_1 = x, \quad y_1 = y$$

преобразуется в уравнение (38), где $p = m/(2+m) \in (0,1)$ при $m > 0$. Функции (41) и (42) являются фундаментальными решениями уравнения (47), их можно использовать для построения функции Грина указанных граничных задач.

В заключение отметим, что результаты работ [3–6, 11, 12] вследствие доказанной теоремы можно считать обоснованными, а результаты работ [13, 14] для уравнения (7) верны только тогда, когда $\lambda = 0$, так как при $\lambda \neq 0$ эта теорема для уравнения (7) неверна. В работах [25, 26] для трёхмерных уравнений эллиптического типа с сингулярными коэффициентами найдены фундаментальные решения, которые использованы для построения решения задачи Дирихле и Хольмгрена в полупространстве. Используя теорему, решения этих задач можно построить в шаровых областях.

Автор благодарит участников семинара, руководимого академиком Е.И. Моисеевым, в Московском университете, на котором им докладывались результаты этой работы, за конструктивное, полезное и доброжелательное её обсуждение, а также выражает признательность профессору С.М. Ситнику за указание на работу [21] и присылку её оттиска.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Thomson W. (Lord Kelvin).* Extrait d'une lettre de M. William Thomson à M. Liouville // J. de Math. Pures et Appl. 1845. V. 10. P. 364–367.
2. *Трикоми Ф.* О линейных уравнениях смешанного типа. М.; Л., 1947.
3. *Holmgren E.* Sur un problème aux limites pour l'équation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$ // Arkiv for Matem., Astron., Fysik. 1926. V. 19B. № 14. P. 1–3.
4. *Gellerstedt S.* Sur un problème aux limites pour une équation linéaire aux dérivées partielles du second order de type mixte: These pour le doctorat. Uppsala, 1935.
5. *Смирнов М.М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М., 1966.
6. *Пулькин С.П.* Некоторые краевые задачи для уравнений $u_{xx} \pm u_{yy} + \frac{p}{x}u_x = 0$ // Учен. зап. Куйбышевского гос. пед. ин-та им. В.В. Куйбышева. 1968. Вып. 21. С. 3–55.

7. *Келдыш М.В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. № 2. С. 181–183.
8. *Евсин В.И.* Задача Хольмгрена для одного уравнения с сингулярными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 1. С. 41–48.
9. *Евсин В.И.* О разрешимости задачи Хольмгрена для одного эллиптического вырождающегося уравнения // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 1. С. 38–46.
10. *Евсин В.И.* Об одном аналоге формулы Пуассона // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 1. С. 41–45.
11. *Сабитов К.Б.* О постановке краевых задач для уравнения смешанного типа с вырождением второго рода на границе бесконечной области // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21. № 4. С. 146–150.
12. *Сабитов К.Б.* Задача типа Трикоми для уравнения смешанного типа с сильным характеристическим вырождением // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 2. С. 333–337.
13. *Salakhitdinov M.S., Hasanov A.* A solution of the Neumann–Dirichlet boundary value problem for generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation // Complex Variables and Elliptic Equations. 2008. V. 53. № 4. P. 355–364.
14. *Salakhitdinov M.S., Hasanov A.* The Dirichlet problem for the generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation // Euras. Math. J. 2012. V. 3. № 4. P. 99–110.
15. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1968.
16. *Соболев С.С.* Уравнения математической физики. М., 1966.
17. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. М., 1970.
18. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М., 1976.
19. *Владимиров В.С., Жаринов В.В.* Уравнения математической физики. М., 2000.
20. *Сабитов К.Б.* Уравнения математической физики. М., 2013.
21. *Weinstein A.* On a singular differential operator // Ann. Mat. Pura Appl. 1960. V. 49. P. 359–365.
22. *Маричев О.И., Килбас А.А., Репин О.А.* Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами. Самара, 2008.
23. *Волкодавов В.Ф., Лернер М.Е., Николаев Н.Я., Носов В.А.* Таблицы некоторых функций Римана, интегралов и рядов. Куйбышев, 1982.
24. *Ежов А.М.* О решении пространственной задачи для уравнения смешанного типа с двумя плоскостями вырождения // Дифференц. уравнения. Тр. пединститутов РСФСР. 1973. Вып. 2. С. 84–102.
25. *Rassias J.M., Hasanov A.* Fundamental solutions of two degenerated elliptic equations and solutions of boundary value problems in infinite area // Int. J of Appl. Math. & Stat. 2007. V. 8. № 7. P. 87–95.
26. *Hasanov A., Karimov E.T.* Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients // Appl. Math. Lett. 2009. V. 22. P. 1828–1832.

Институт стратегических исследований
Республики Башкортостан,
Стерлитамакский филиал
Башкирского государственного университета

Поступила в редакцию 23.06.2020 г.
После доработки 06.12.2021 г.
Принята к публикации 21.12.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 66–81

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОЛСТОГО СТЕРЖНЯ С УЧЁТОМ ПОПЕРЕЧНОЙ ИНЕРЦИИ

© 2022 г. Х. Г. Умаров

Для нелинейного дифференциального уравнения соболевского типа, представляющего собой уравнение продольных колебаний толстого стержня с учётом поперечной инерции, в полуплоскости $(x,t)\in\mathbb{R}^1\times[0,+\infty)$ исследуется разрешимость задачи Коши в классе функций, которые при каждом фиксированном значении временно́й переменной $t\geqslant 0$ непрерывны на всей числовой оси и имеют конечные пределы на бесконечности. Найдены как достаточные условия существования глобального решения задачи Коши, так и достаточные условия его разрушения на конечном временно́м отрезке.

DOI: 10.31857/S0374064122010083

Введение. Нелинейное уравнение соболевского типа [1, гл. 2; 2, часть II], не разрешённое относительно временно́й производной второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}+a\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}+b\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$(x,t)\in\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1_+,\quad \mathbb{R}^1=(-\infty,+\infty),\quad \mathbb{R}^1_+=(0,+\infty), \tag{1}$$

где a, b – заданные числовые параметры, возникает при математическом моделировании различных физических процессов. Например, при $a=b=0$ получается уравнение Буссинеска, описывающее течение несжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости [3]; при $a\neq 0$, $b=0$ – уравнение продольных колебаний толстого стержня с учётом поперечных инерционных эффектов [4, § 4.2.2]; при $a=0$, $b\neq 0$ – уравнение продольных волн в нелинейно-упругом стержне [5, § 9.4.2], которое иногда называют модифицированным уравнением Буссинеска. Правая часть уравнения (1) при ненулевых a и b отражает совместное действие соответственно дисперсионных, поперечных инерционных и нелинейных эффектов.

Предполагаем, что стержень является бесконечным. Указанная идеализация допустима [6], если параметры граничного закрепления таковы, что падающие на него возмущения не отражаются.

Для уравнения (1) поставим задачу Коши:

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t|_{t=0}=\psi(x),\quad x\in\mathbb{R}^1, \tag{2}$$

считая, что начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принадлежат банахову пространству $C[\mathbb{R}^1]$ непрерывных функций $g\colon\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$, для которых существуют конечные пределы при $x\to\pm\infty$ и норма в котором задаётся равенством $\|g\|_C=\sup\{|g(x)|: x\in\mathbb{R}^1\}$ (см., например, [7, гл. VIII, § 1]). Классическое решение $u(x,t)$, $(x,t)\in\mathbb{R}^1\times\overline{\mathbb{R}}^1_+$, $\overline{\mathbb{R}}^1_+=[0,+\infty)$, задачи (1), (2) ищем в классе функций, которые при каждом фиксированном значении переменной $t\geqslant 0$ принадлежат по переменной x пространству $C[\mathbb{R}^1]$. Через $C^{(k)}[\mathbb{R}^1]$ обозначим линейное многообразие пространства $C[\mathbb{R}^1]$, состоящее из функций, первые k производных которых принадлежат пространству $C[\mathbb{R}^1]$, т.е.

$$C^{(k)}[\mathbb{R}^1]=\{g(x)\in C[\mathbb{R}^1]: g'(x),\ldots,g^{(k)}(x)\in C[\mathbb{R}^1]\},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Напомним, что если функция $g(x)$ принадлежит пересечению пространства $C[\mathbb{R}^1]$ с пространством Соболева $W_2^1(\mathbb{R}^1)$, то справедлива [8] оценка

$$\|g\|_C = \sup_{x\in\mathbb{R}^1} |g(x)| \leqslant \|g\|_{W_2^1} = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} ((g(x))^2 + (g'(x))^2)\,dx\right)^{1/2}, \tag{3}$$

причём если $g(x)\in C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$, то предел функций $g(x)$, $g'(x)$ при $x\to\pm\infty$ равен нулю.

Для скалярного произведения и нормы в пространстве $L_2(\mathbb{R}^1)$ будем использовать соответственно обозначения $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|_2$, т.е.

$$(\varphi,\psi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\psi(x)\,dx \quad \text{и} \quad \|\varphi\|_2 = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x)\,dx\right)^{1/2}.$$

1. Вспомогательные результаты из теории сильно непрерывных полугрупп. В пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ [7; 9, § 1.3] дифференциальный оператор d/dx с областью определения $D(d/dx) = C^{(1)}[\mathbb{R}^1]$ является производящим оператором сильно непрерывной группы класса C_0 левых сдвигов:

$$U(t;d/dx)g(x) = g(x+t), \quad t\in\mathbb{R}^1,$$

а оператор d^2/dx^2, $D(d^2/dx^2) = C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$, порождает сильно непрерывную полугруппу класса C_0:

$$U(t;d^2/dx^2)g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2/(4t)}g(x+\xi)\,d\xi, \quad t\in\overline{\mathbb{R}}^1_+.$$

Обе эти операторнозначные функции являются сжимающими:

$$\|U(t;d/dx)\|\leqslant 1, \quad \|U(t;d^2/dx^2)\|\leqslant 1,$$

причём положительная полуось $\lambda>0$ принадлежит резольвентным множествам операторов d/dx и d^2/dx^2 и для соответствующих резольвент справедливы оценки норм

$$\|(\lambda I - d/dx)^{-1}\|\leqslant\lambda^{-1}, \quad \|(\lambda I - d^2/dx^2)^{-1}\| = \|-(\sqrt{\lambda}I - d/dx)^{-1}(-\sqrt{\lambda}I - d/dx)^{-1}\|\leqslant\lambda^{-1},$$

где I – тождественный оператор.

Для функции $g = g(x)\in C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$ справедливо неравенство [9, § 7.1] $\|g'\|_C^2\leqslant 4\|g''\|_C\|g\|_C$, из которого следует, что $\|ag'(x)\|_C\leqslant\|g''(x)\|_C + a^2\|g(x)\|_C$. Последняя оценка означает, что оператор ad/dx подчинён оператору d^2/dx^2 с границей, не превышающей 1, но тогда [9, § 8.1] возмущённый оператор

$$A = \frac{d^2}{dx^2} + a\frac{d}{dx}$$

является производящим оператором сжимающей сильно непрерывной полугруппы $U(t,A)$ класса C_0 ($\|U(t;A)\|\leqslant 1$), причём положительная полуось $\lambda>0$ принадлежит резольвентному множеству оператора A.

Отметим, что для $t>0$ и натурального числа n если $g(x)\in C^{(n)}[\mathbb{R}^1]$, то $U(t;ad/dx)g(x)\in C^{(n)}[\mathbb{R}^1]$, и если $g(x)\in C[\mathbb{R}^1]$, то $U(t;d^2/dx^2)g(x)\in C^{(n)}[\mathbb{R}^1]$, при этом на произвольном элементе $g(x)\in C[\mathbb{R}^1]$ справедливо представление

$$U(t;A)g(x) = U(t;ad/dx)U(t;d^2/dx^2)g(x) = U(t;d^2/dx^2)U(t;ad/dx)g(x) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2/(4t)}g(x+at+\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\eta-x-at)^2/(4t)}g(\eta)\,d\eta,$$

для полугруппы, порождаемой оператором A, а для резольвенты этого оператора – представление

$$(\lambda I - A)^{-1} g(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda} U(s; A) g(x)\, ds =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{a(\eta - x)/2} g(\eta)\, d\eta \int\limits_0^{+\infty} e^{-(\lambda + a^2/4)s - (\eta - x)^2/(4s)} \frac{ds}{\sqrt{s}} =$$

(воспользуемся табличным интегралом [10, § 2.3.16])

$$= \frac{1}{2\sqrt{\lambda + a^2/4}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{a(\eta - x)/2 - \sqrt{\lambda + a^2/4}|\eta - x|} g(\eta)\, d\eta.$$

Далее, оценим норму:

$$\left\| \frac{d}{dx} U\left(t; \frac{d^2}{dx^2}\right) g(x) \right\|_C = \frac{1}{4t\sqrt{\pi t}} \left\| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\eta - x) e^{-(\eta - x)^2/(4t)} g(\eta)\, d\eta \right\|_C \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|g(x)\|_C}{2t\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{+\infty} s e^{-s^2/(4t)} ds \leqslant \frac{\|g(x)\|_C}{\sqrt{\pi t}} \quad \text{для всех} \quad g(x) \in C[\mathbb{R}^1].$$

Тогда, используя полученную мажоранту, имеем

$$\left\| a \frac{d}{dx} \left(\lambda I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} g(x) \right\|_C \leqslant |a| \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda s} \left\| \frac{d}{dx} U\left(s; \frac{d^2}{dx^2}\right) g(x) \right\|_C ds \leqslant$$

$$\leqslant |a| \frac{\|g(x)\|_C}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda s} \frac{ds}{\sqrt{s}} \leqslant \frac{|a|}{\sqrt{\lambda}} \|g(x)\|_C, \quad \lambda \in \mathbb{R}^1_+.$$

Следовательно, если $\lambda = 1$ и $|a| < 1$, то для нормы оператора

$$B = a \frac{d}{dx} \left(I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} = a \left[\left(I - \frac{d}{dx}\right)^{-1} - \left(I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} \right]$$

справедлива оценка $\|B\| \leqslant |a| < 1$. Поэтому оператор $I - B$ обратим и для обратного к нему оператора справедливо разложение в степенной ряд $(I - B)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B^n$ и оценка нормы

$$\|(I - B)^{-1}\| \leqslant 1/(1 - |a|).$$

Таким образом, если выполнено неравенство $|a| < 1$, то для резольвенты $(I - A)^{-1}$ имеет место представление

$$(I - A)^{-1} = \left(I - a\frac{d}{dx} - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} = \left(I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} (I - B)^{-1} = (I - B)^{-1} \left(I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}.$$

2. Задача Коши для линейного однородного уравнения. Рассмотрим линейное однородное уравнение продольных колебаний толстого стержня, записанное в виде

$$(u - au_x - u_{xx})_{tt} = u_{xx}. \tag{4}$$

Пусть $u=u(x,t)$ – решение задачи Коши (4), (2), для которого частные производные u_{xx}, u_{xxt} непрерывны при $t\geqslant 0$. Введём новую неизвестную функцию

$$w=u-au_x-u_{xx}. \tag{5}$$

Используя принадлежность положительной полуоси $\lambda>0$ резольвентному множеству дифференциального оператора A и замену (5), можно единственным образом определить начальные значения функции $w=w(x,t)$:

$$w_0(x)\equiv w|_{t=0}=\varphi(x)-a\varphi'(x)-\varphi''(x) \quad \text{и} \quad w_1(x)\equiv w_t|_{t=0}=\psi(x)-a\psi'(x)-\psi''(x),$$

при условии, что начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ принадлежат классу $C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$, и выразить через новую неизвестную функцию $w(x,t)$ решение $u(x,t)$ задачи Коши (4), (2):

$$u(x,t)=(I-A)^{-1}w(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{1+a^2/4}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{a\eta/2-\sqrt{1+a^2/4}|\eta|}w(x+\eta,t)\,d\eta. \tag{6}$$

В результате подстановки (5) уравнение (4) можно записать в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ в виде абстрактного обыкновенного дифференциального уравнения

$$W_{tt}=KW, \quad t\in\mathbb{R}^1_+, \tag{7}$$

где $W=W(t):t\mapsto w(x,t)$ – искомая вектор-функция, определённая для $t\in\overline{\mathbb{R}}^1_+$, со значениями в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$, а K – линейный ограниченный оператор

$$K=(I-A)^{-1}-(I-B)^{-1}, \quad \|K\|\leqslant 2/(1-|a|)=a_0^2, \quad a_0>0,$$

который представляет собой продолжение на всё пространство $C[\mathbb{R}^1]$ линейного оператора

$$K_0=(I-A)^{-1}\frac{d^2}{dx^2}=\frac{d^2}{dx^2}(I-A)^{-1},$$

определённого на функциях $g(x)\in C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$.

Начальные условия в $C[\mathbb{R}^1]$ для уравнения (7) запишутся в виде

$$W|_{t=0}=\Phi, \quad W_t|_{t=0}=\Psi, \tag{8}$$

где $\Phi=\mathrm{w}_0(x)$, $\Psi=\mathrm{w}_1(x)$ – элементы пространства $C[\mathbb{R}^1]$.

С задачей Коши (7), (8) связана сильно непрерывная косинус оператор-функция $C(t;K)$ класса C_0, для которой на произвольном элементе $g(x)\in C[\mathbb{R}^1]$ справедливо представление [9, § 1.4, § 4.2]

$$C(t;K)g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}K^n g(x), \quad t\in\mathbb{R}^1, \tag{9}$$

причём ряд сходится равномерно по t на каждом конечном отрезке из $\mathbb{R}^1$. Отметим, что операторнозначная функция $C(t;K)$ непрерывна в равномерной операторной топологии и для неё справедлива следующая оценка нормы:

$$\|C(t;K)\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\|K\|^n\leqslant \operatorname{ch}(a_0t), \quad t\in\overline{\mathbb{R}}^1_+. \tag{10}$$

Для косинус оператор-функции $C(t;K)$ можно записать в явном виде её представление [7, с. 664] на элементах $g(x)\in C[\mathbb{R}^1]$. Для этого, используя интегральное представление степеней резольвенты $(\lambda I-\tilde{A})^{-1}$ производящего оператора $\tilde{A}$ полугруппы $U(t;\tilde{A})$ класса C_0, тип которой ω:

$$(\lambda I-\tilde{A})^{-n}g(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda}s^{n-1}U(s;\tilde{A})g(x)\,ds,\quad \operatorname{Re}\lambda>\omega,$$

запишем представления для следующих вспомогательных оператор-функций 1)–5).

1) Группа, порождаемая оператором $a(I-d/dx)^{-1}$:

$$U(t;a(I-d/dx)^{-1})g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(at)^n}{n!}(I-d/dx)^{-n}g(x)=$$

$$=g(x)+\sqrt{|a|t}\int\limits_0^{+\infty}e^{-s}Y(2\sqrt{|a|ts},\operatorname{sgn}a)g(x+s)\frac{ds}{\sqrt{s}},$$

где обозначено

$$Y(2\sqrt{|a|z},\operatorname{sgn}a)=\begin{cases}I_1(2\sqrt{az}), & \text{если}\ \ a>0,\\ -J_1(2\sqrt{|a|z}), & \text{если}\ \ a<0,\end{cases}$$

здесь

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm1)^n z^{n+1/2}}{n!(n+1)!}=\left\{\begin{array}{c}I_1(2\sqrt{z})\\ J_1(2\sqrt{z})\end{array}\right\}$$

– функции Бесселя [10, § 5.2.10].

2) Группа, порождаемая оператором $-a(I-d^2/dx^2)^{-1}$:

$$U(t;-a(I-d^2/dx^2)^{-1})g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(at)^n}{n!}(I-d^2/dx^2)^{-n}g(x)=$$

$$=g(x)+\sqrt{\frac{|a|t}{4\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Z(t,\xi^2)g(x+\xi)\,d\xi,$$

где обозначено

$$Z(t,\xi^2)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-s-\xi^2/(4s)}Y^*(2\sqrt{|a|ts},\operatorname{sgn}a)\frac{ds}{s}$$

и

$$Y^*(2\sqrt{|a|z},\operatorname{sgn}a)=\begin{cases}-J_1(2\sqrt{az}), & \text{если}\ \ a>0,\\ I_1(2\sqrt{|a|z}), & \text{если}\ \ a<0.\end{cases}$$

3) Группа, порождаемая оператором B:

$$U(t;B)g(x)=U(at;(I-d/dx)^{-1})U(-at;(I-d^2/dx^2)^{-1})g(x)=$$

$$=g(x)+\sqrt{|a|t}\int\limits_0^{+\infty}e^{-s}Y(2\sqrt{|a|ts},\operatorname{sgn}a)g(x+s)\frac{ds}{\sqrt{s}}+$$

$$+\sqrt{\frac{|a|t}{4\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Z(t,\xi^2)g(x+\xi)\,d\xi+\frac{|a|t}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-s}Y(2\sqrt{|a|ts},\operatorname{sgn}a)\frac{ds}{\sqrt{s}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Z(t,\xi^2)g(x+s+\xi)\,d\xi.$$

4) Косинус оператор-функция, порождаемая оператором $-(I-B)^{-1}$:

$$C(t;-(I-B)^{-1})g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}(I-B)^{-n}g(x)=$$

$$=g(x)+\frac{t^2}{2}\int\limits_0^{+\infty}e^{-s}{}_0F_2(;3/2,2;st^2/4)U(s;B)g(x)\,ds,$$

где

$${}_0F_2(;3/2,2;z/4)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!(2n+2)!}$$

– обобщённая гипергеометрическая функция [11, § 7.2.3].

5) Косинус оператор-функция, порождаемая оператором $(I-A)^{-1}$:

$$C(t;(I-A)^{-1})g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}(I-A)^{-n}g(x)=g(x)+\frac{t^2}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Q(t^2,\xi^2)g(x+at+\xi)\,d\xi,$$

где обозначено

$$Q(t^2,\xi^2)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-s-\xi^2/(4s)}{}_0F_2(;3/2,2;st^2/4)\frac{ds}{\sqrt{s}}.$$

Производящий оператор K косинус оператор-функции $C(t;K)$, $t\in\mathbb{R}^1$, можно рассматривать как результат возмущения производящего оператора $(I-A)^{-1}$ косинус оператор-функции $C(t;(I-A)^{-1})$ линейным ограниченным оператором $-(I-B)^{-1}$, который в свою очередь порождает косинус оператор-функцию $C(t;-(I-B)^{-1})$, а поэтому [9, § 8.2] для произвольного элемента $g(x)$ из пространства $C[\mathbb{R}^1]$ имеем

$$C(t;K)g(x)=C(t;(I-A)^{-1})g(x)+\frac{t^2}{2}\int\limits_0^1 j_1(t\sqrt{1-s^2},(I-A)^{-1})C(ts;(I-B)^{-1})g(x)\,ds,$$

где

$$j_1(t,(I-A)^{-1})g(x)=\frac{4}{\pi}\int\limits_0^1\sqrt{1-s^2}C(ts;(I-A)^{-1})g(x)\,ds.$$

С косинус оператор-функцией (9) ассоциируют [9, § 1.4] синус оператор-функцию

$$S(t;K)g(x)=\int\limits_0^t C(s;K)g(x)\,ds,\quad g(x)\in C[\mathbb{R}^1],\tag{11}$$

и линейное многообразие

$$C_1[\mathbb{R}^1]=\{g(x)\in C[\mathbb{R}^1]:C(t;K)g(x)\in C^{(1)}(\mathbb{R}^1,C[\mathbb{R}^1])\},$$

т.е. подмножество $C_1[\mathbb{R}^1]\subseteq C[\mathbb{R}^1]$ состоит из тех функций из $C[\mathbb{R}^1]$, для которых функция $C(t;K)g(x):\mathbb{R}^1\to C[\mathbb{R}^1]$ является непрерывно дифференцируемой функцией переменной t. Очевидно, что в рассматриваемом случае $C_1[\mathbb{R}^1]=C[\mathbb{R}^1]$.

Вследствие оценки (10) из определения (11) вытекает, что

$$\|S(t;K)\| \leqslant a_0^{-1}\mathrm{sh}(a_0t), \quad t\in\overline{\mathbb{R}}^1_+. \tag{12}$$

Для того чтобы задача Коши (7), (8) была равномерно корректной на $\overline{\mathbb{R}}^1_+$, необходимо и достаточно, чтобы оператор K являлся производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции $C(t;K)$ класса C_0, при этом классическое решение абстрактной задачи Коши (7), (8) даётся формулой [9, § 1.4]

$$W(t) = C(t;K)\Phi + S(t;K)\Psi, \quad t\in\mathbb{R}^1,$$

для любых $\Phi\in D(K)$ и $\Psi\in C_1[\mathbb{R}^1]$ (в рассматриваемом случае – для любых Φ и $\Psi\in C[\mathbb{R}^1]$).

Теперь, проводя обратную замену (6) и используя перестановочность между собой резольвенты $(I-A)^{-1}$ и косинус оператор-функции, порождаемой оператором K, находим решение задачи Коши для уравнения (4):

$$u(x,t) = (I-A)^{-1}W(t) = C(t;K)\varphi(x) + S(t;K)\psi(x). \tag{13}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 1. *Пусть параметр a в уравнении (1) удовлетворяет условию $|a|<1$ и начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принадлежат подклассу $C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$ пространства $C[\mathbb{R}^1]$. Тогда задача Коши (2) для линейного однородного уравнения (4) равномерно корректна, классическое решение даётся формулой (13) и для него справедлива оценка*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|u(x,t)| \leqslant \mathrm{ch}(a_0t)\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|\varphi(x)| + a_0^{-1}\mathrm{sh}(a_0t)\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|\psi(x)|, \quad t\in\overline{\mathbb{R}}^1_+.$$

Замечание 1. Классическое решение $u(x,t)$ задачи Коши (4), (2) принадлежит классу $C(\mathbb{R}^1,\overline{\mathbb{R}}^1_+)\bigcap C^{0,1}(\mathbb{R}^1,\overline{\mathbb{R}}^1_+)\bigcap C^{2,2}(\mathbb{R}^1,\mathbb{R}^1_+)$. Классическое решение абстрактной задачи Коши (7), (8) – функция $W(t)$ из класса $C^{(2)}(\overline{\mathbb{R}}^1_+, C[\mathbb{R}^1])$, следовательно, $w(x,t)\in C^{0,2}(\mathbb{R}^1,\overline{\mathbb{R}}^1_+)$. В силу формулы (13) найденное решение $u(x,t)$ принадлежит классу $C^{2,2}(\mathbb{R}^1,\overline{\mathbb{R}}^1_+)$, поэтому, учитывая ограниченность оператора K, заключаем, что это решение бесконечно дифференцируемо по временно́й переменной t, т.е. $u(x,t)\in C^{2,\infty}(\mathbb{R}^1,\overline{\mathbb{R}}^1_+)$.

3. Локальное решение задачи Коши для уравнения продольных колебаний толстого стержня. Рассмотрим уравнение, получающееся дифференцированием по x обеих частей уравнения (1) и последующей подстановкой $u_x=v$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial t^2} - \frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{b}{2}\frac{\partial^2 v^2}{\partial x^2}. \tag{14}$$

Подействуем на обе части уравнения (14) линейным ограниченным оператором $(I-A)^{-1}$, тогда получим эквивалентное (14) уравнение, которое в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ можно записать в виде абстрактного полулинейного уравнения

$$V_{tt} = KV + F(V), \tag{15}$$

где $V=V(t): t\mapsto v(x,t)$ – искомая вектор-функция, оператор K – тот же, что и в уравнении (7), а F – заданный нелинейный оператор:

$$F(g) = [(I-A)^{-1} - (I-B)^{-1}]f(g),$$

здесь $f(g)$ – оператор суперпозиции:

$$f(g) = bg^2(x)/2, \quad g(x)\in C[\mathbb{R}^1].$$

Из непрерывной дифференцируемости оператора суперпозиции $f(\cdot)$ в пространстве непрерывных функций и ограниченности операторов $(I-A)^{-1}$ и $(I-B)^{-1}$ следует непрерывная дифференцируемость по Фреше оператора $F(\cdot)$ в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$, а значит, $F(\cdot)$ удовлетворяет локальному условию Липшица. Следовательно, существует промежуток $[0,t_0)$, в котором абстрактная задача Коши (15), (8) для любых $\Phi\in D(K)$ и $\Psi\in C_1[\mathbb{R}^1]$ (в рассматриваемом случае для любых Φ и $\Psi\in C[\mathbb{R}^1]$) имеет [12, § 3] единственное обобщённое решение $V=V(t)$, $t\in[0,t_0)$, т.е. единственное непрерывно дифференцируемое решение интегрального уравнения

$$V(t)=C(t;K)\Phi+S(t;K)\Psi+\int\limits_0^t S(t-\tau;K)F(V(\tau))\,d\tau. \tag{16}$$

Из интегрального уравнения (16) в силу оценок (10), (12) вытекает интегральное неравенство

$$\|V(t)\|_C\leqslant h(t)+\frac{a_0|b|}{2}\int\limits_0^t \operatorname{sh}(a_0(t-\tau))\|V(\tau)\|_C^2\,d\tau, \tag{17}$$

в котором $h(t)=\|\Phi\|_C\operatorname{ch}(a_0t)+a_0^{-1}\|\Psi\|_C\operatorname{sh}(a_0t)$.

Используя элементарные соотношения $\operatorname{sh}(t-\tau)\leqslant\operatorname{ch}(t-\tau)\leqslant\operatorname{ch}(t)\operatorname{ch}(\tau)$, $t,\tau\in\overline{\mathbb{R}}^1_+$, запишем интегральное неравенство (17) в виде

$$\|V(t)\|_C\leqslant h(t)+\frac{a_0|b|}{2}\operatorname{ch}(a_0t)\int\limits_0^t \operatorname{ch}(a_0\tau)\|V(\tau)\|_C^2\,d\tau.$$

Отсюда выводим [13, § 1.3] оценку для нормы обобщённого решения

$$\|V(t)\|_C\leqslant h(t)\biggl(1-\frac{a_0|b|}{2}\int\limits_0^t \operatorname{ch}^2(a_0\tau)h(\tau)\,d\tau\biggr)^{-1},$$

или в подробной записи

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|v(x,t)|\leqslant 6\frac{a_0\|\Phi\|_C\operatorname{ch}(a_0t)+\|\Psi\|_C\operatorname{sh}(a_0t)}{6a_0-|b|\{a_0\|\Phi\|_C\operatorname{sh}(a_0t)(\operatorname{sh}^2(a_0t)+3)+\|\Psi\|_C(\operatorname{ch}^3(a_0t)-1)\}}, \tag{18}$$

в которой время t изменяется на отрезке $[0,t_1]$, где

$$t_1=\sup_\tau\Bigl\{a_0\|\Phi\|_C\operatorname{sh}(a_0\tau)[\operatorname{sh}^2(a_0\tau)+3]+\|\Psi\|_C\operatorname{ch}^3(a_0\tau)<6a_0/|b|+\|\Psi\|_C\Bigr\}.$$

Обобщённое решение $V(t)$, $t\in[0,t_1]$, интегрального уравнения (16) будет классическим решением абстрактной задачи Коши (15), (8), если оно дважды непрерывно дифференцируемо, что является следствием [12] непрерывной дифференцируемости по Фреше нелинейного оператора F, при условии принадлежности начальных данных Φ и Ψ соответственно множествам $D(K)$ и $C_1[\mathbb{R}^1]$ и, значит, в рассматриваемом случае, для любых Φ и Ψ из $C[\mathbb{R}^1]$.

Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Пусть параметр a в уравнении (1) удовлетворяет условию $|a|<1$ и начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принадлежат пространству $C[\mathbb{R}^1]$ вместе со своими производными до второго порядка включительно. Тогда на временно́м отрезке $[0,t_1]$ существует единственное классическое решение $v=v(x,t)$ задачи Коши (14), (2) в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$, для которого справедлива оценка (18).*

Замечание 2. Из существования в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ локального классического решения уравнения (14)

$$v(x,t) = u_x(x,t) \in C[\mathbb{R}^1] \bigcap W_2^1(\mathbb{R}^1) \tag{19}$$

следует существование на том же временно́м отрезке $[0, t_1]$ соответствующего классического решения $u(x,t) = \int_{-\infty}^{x} v(\xi,t)\,d\xi$, уравнения (1) при выполнении требования принадлежности его пространству $W_2^1(\mathbb{R}^1)$.

4. Существование глобального решения и разрушение решения уравнения продольных колебаний толстого стержня. Рассмотрим для уравнения (1) так называемый интеграл энергии

$$y(t) \equiv (u,u) + (u_x,u_x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + u_x^2)\,dx, \quad t \in [0, t_1]. \tag{20}$$

Применяя к значениям производной $y'(t)$ интеграла энергии и её квадрата $[y'(t)]^2$ неравенство Коши–Буняковского $|(\varphi,\psi)| \leqslant \|\varphi\|_2\|\psi\|_2$, выводим вспомогательные оценки

$$y(t) \leqslant y(0) + \int\limits_0^t y(s)\,ds + \int\limits_0^t z(s)\,ds, \tag{21}$$

где $y(0) = (\varphi,\varphi) + (\varphi',\varphi') = \|\varphi\|^2_{W_2^1}$, и

$$(y'(t))^2 \leqslant 4y(t)z(t), \tag{22}$$

в которых обозначено

$$z(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u_t^2 + u_{xt}^2)\,dx \equiv \|u_t\|^2_{W_2^1}.$$

Умножая обе части уравнения (1) на u, интегрируя полученное равенство по $x \in \mathbb{R}^1$, применяя формулу интегрирования по частям и учитывая равенство нулю при $x \to \pm\infty$ вне интегральных слагаемых, приходим к равенству

$$(u + au_x - u_{xx}, u_{tt}) + \|u_x\|_2^2 + \frac{b}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x^3\,dx = 0. \tag{23}$$

Аналогично, умножая обе части уравнения (1) на u_t, получаем

$$\frac{d}{dt}\left[z(t) + \|u_x\|_2^2 + \frac{b}{3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x^3\,dx\right] = -2a(u_{xt}, u_{tt}),$$

откуда, интегрируя по отрезку $[0,t]$, находим, что

$$z(t) + \|u_x\|_2^2 + \frac{b}{3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x^3\,dx = Z_0 - 2a\int\limits_0^t (u_{x\tau}, u_{\tau\tau})\,d\tau, \tag{24}$$

где

$$Z_0 = \|\psi\|^2_{W_2^1} + \|\varphi'\|_2^2 + \frac{b}{3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\varphi'(x))^3\,dx.$$

Далее, умножим обе части уравнения (1) на u_{tt} и проинтегрируем полученное равенство по переменной x от $-\infty$ до $+\infty$, получим

$$\|u_{tt}\|_2^2 + \|u_{xtt}\|_2^2 = (u_{tt}, u_{xx}) + b(u_{tt}, u_x u_{xx}). \tag{25}$$

Оценим квадрат нормы u_{tt}, записав уравнение (1) в виде

$$u_{tt} = Ku + \frac{b}{2}K_1 u_x^2, \tag{26}$$

где оператор

$$K_1 = (I-A)^{-1}\frac{d}{dx} = (I-B)^{-1}\left(I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}\frac{d}{dx} =$$

$$= (I-B)^{-1}\left[\left(I - \frac{d}{dx}\right)^{-1} - \left(I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}\right] = \frac{1}{a}[(I-B)^{-1} - I],$$

$$\|K_1\| \leqslant \frac{1}{|a|}\left(1 + \frac{1}{1-|a|}\right).$$

Обозначим

$$k_0 = \max\left\{\|K\|; \frac{|b|}{2}\|K_1\|\right\} = \max\left\{\frac{2}{1-|a|}; \frac{|b|}{2|a|}\left(1 + \frac{1}{1-|a|}\right)\right\}.$$

Тогда, используя уравнение (26), условие (19) и оценку (3), приходим к цепочке неравенств

$$\|u_{tt}\|_2^2 \leqslant \left(\|K\|\|u\|_2 + \frac{|b|}{2}\|K_1\|\|u_x^2\|_2\right)^2 \leqslant 2k_0^2(\|u\|_2^2 + \|u_x^2\|_2^2) \leqslant$$

$$\leqslant 2k_0^2\left(y(t) + \sup_{x\in\mathbb{R}^1} u_x^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x^2\,dx\right) \leqslant 2k_0^2\left(y(t) + (\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|u_x|)^2 y(t)\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2k_0^2\left(y(t) + \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x^2\,dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2\,dx\right)y(t)\right) \leqslant 2k_0^2\left(y(t) + \left(y(t) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2\,dx\right)y(t)\right).$$

Таким образом,

$$\|u_{tt}\|_2^2 \leqslant 2k_0^2((1 + \|u_{xx}\|_2^2)y(t) + y^2(t)). \tag{27}$$

Получим ещё одну оценку квадрата нормы u_{tt}, используя представление уравнения (1) в виде

$$u_{tt} = Ku + b(I-A)^{-1}u_x u_{xx}. \tag{28}$$

Обозначим

$$k_1 = \max\{\|K\|; |b|\|(I-A)^{-1}\|\} = \max\left\{\frac{2}{1-|a|}; \frac{|b|}{1-|a|}\right\}.$$

Используя уравнение (28), приходим к цепочке неравенств

$$\|u_{tt}\|_2^2 \leqslant (\|K\|\|u\|_2 + |b|\|(I-A)^{-1}\|\|u_x u_{xx}\|_2)^2 \leqslant 2k_1^2(\|u\|_2^2 + \|u_x u_{xx}\|_2^2) \leqslant$$

$$\leqslant 2k_1^2\left(y(t) + \sup_{x\in\mathbb{R}^1} u_x^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2\,dx\right) \leqslant 2k_1^2\left[y(t) + \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x^2\,dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2\,dx\right)\|u_{xx}\|_2^2\right] \leqslant$$

$$\leqslant 2k_1^2(y(t) + (y(t) + \|u_{xx}\|_2^2)\|u_{xx}\|_2^2).$$

Итак,

$$\|u_{tt}\|_2^2 \leqslant 2k_1^2((1+\|u_{xx}\|_2^2)y(t)+\|u_{xx}\|_2^4). \tag{29}$$

Вернёмся к равенству (25), из него очевидно следует неравенство

$$\|u_{tt}\|_2^2 \leqslant (u_{tt}, u_{xx}) + b(u_{tt}, u_x u_{xx}),$$

применяя к слагаемым правой части которого оценку Коши–Буняковского, получим следующую цепочку неравенств:

$$\|u_{tt}\|_2^2 \leqslant \|u_{tt}\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2 + |b|(\|u_{tt}\|_2^2 + \|u_x u_{xx}\|_2^2) \leqslant$$

$$\leqslant (1+|b|)\|u_{tt}\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2 + |b|\sup_{x\in\mathbb{R}^1} u_x^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant (1+|b|)\|u_{tt}\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2 + |b|\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x^2\,dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2\,dx\Bigg)\|u_{xx}\|_2^2 \leqslant$$

$$\leqslant (1+|b|)\|u_{tt}\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2 + y^2(t)) + |b|(y(t)+\|u_{xx}\|_2^2)\|u_{xx}\|_2^2.$$

Отсюда, используя оценку (27) и обозначая для удобства записи $\|u_{xx}\|_2^2 = N,$ приходим к неравенству

$$2|b|k_0^2y^2(t) + |b|(2k_0^2 + (2k_0^2+1)N)y(t) + (1+|b|N)N \geqslant 0, \tag{30}$$

которое справедливо для всех значений интеграла энергии $y(t),$ но тогда дискриминант квадратного относительно $y(t)$ трёхчлена из левой части неравенства (30) должен быть неположителен, т.е.

$$b^2(2k_0^2-1)^2N^2 + 4k_0^2|b|(|b|(2k_0^2+1)-2)N + 4b^2k_0^4 \leqslant 0, \tag{31}$$

причём $2k_0^2-1>0$ по определению постоянной $k_0.$

Для того чтобы дискриминант квадратного относительно N трёхчлена из левой части неравенства (31) был неотрицателен, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий:

$$|b| \leqslant \frac{1}{2k_0^2} \quad \text{или} \quad |b| \geqslant 1. \tag{32}$$

При выполнении условий (32) оба корня квадратного трёхчлена в (31) положительны, если и только если имеет место условие

$$|b|(2k_0^2+1)-2<0. \tag{33}$$

Из совместного рассмотрения условий (32) и (33) вытекает, что квадратный трёхчлен из неравенства (31) имеет положительные корни $N_{1,2}$ тогда и только тогда, когда

$$|b| \leqslant \frac{1}{2k_0^2}, \tag{34}$$

при этом

$$N_{1,2} = 2k_0^2\frac{2-|b|(2k_0^2+1)\pm 2\sqrt{(2|b|k_0^2-1)(|b|-1)}}{|b|(2k_0^2-1)^2},$$

причём неравенство (31) будет выполняться при $N_1 \leqslant N \leqslant N_2,$ откуда следует оценка сверху для квадрата нормы функции $u_{xx}:$

$$\|u_{xx}\|_2^2 \leqslant N_2. \tag{35}$$

Теперь неравенство (29) можно записать в виде

$$\|u_{tt}\|_2^2 \leqslant 2k_1^2((1+N_2)y(t)+N_2^2). \tag{36}$$

Из равенств (23) и (24), исключая слагаемое, содержащее параметр b, получаем

$$z(t)+\frac{1}{3}\|u_x\|_2^2=Z_0+\frac{2}{3}(u+au_x-u_{xx},u_{tt})-2a\int\limits_0^t(u_{x\tau},u_{\tau\tau})\,d\tau,$$

откуда в силу соотношений

$$2\biggl|\int\limits_0^t(u_{x\tau},u_{\tau\tau})\,d\tau\biggr|\leqslant\int\limits_0^t(\|u_{x\tau}\|_2^2+\|u_{\tau\tau}\|_2^2)\,d\tau\leqslant\int\limits_0^t z(\tau)\,d\tau+\int\limits_0^t\|u_{\tau\tau}\|_2^2\,d\tau$$

с учётом неравенств $|a|<1$ и

$$\frac{2}{3}|(u+au_x-u_{xx},u_{tt})|\leqslant\frac{1}{3}(y(t)+\|u_{xx}\|_2^2)+\|u_{tt}\|_2^2,$$

вытекает, что

$$z(t)\leqslant Z_0+\frac{1}{3}(y(t)+\|u_{xx}\|_2^2)+\|u_{tt}\|_2^2+|a|\int\limits_0^t\|u_{\tau\tau}\|_2^2\,d\tau+|a|\int\limits_0^t z(\tau)\,d\tau. \tag{37}$$

Используя неравенства (35) и (36), запишем оценку (37) в виде

$$z(t)\leqslant q(t)+|a|\int\limits_0^t z(\tau)\,d\tau, \tag{38}$$

где

$$q(t)=Z_0+N_2\frac{1+2k_1^2N_2}{3}+2|a|k_1^2N_2^2t+\frac{1+2k_1^2(1+N_2)}{3}y(t)+2|a|k_1^2(1+N_2)\int\limits_0^t y(\tau)\,d\tau.$$

Пусть $Z_0\geqslant 0$, т.е.

$$b\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\varphi'(x))^3\,dx\geqslant-3(\|\psi\|_{W_2^1}^2+\|\varphi'\|_2^2), \tag{39}$$

тогда $q(t)\geqslant 0$, и, значит, применяя к неравенству (38) лемму Гронуолла, будем иметь

$$z(t)\leqslant q(t)+|a|\int\limits_0^t q(s)e^{|a|(t-s)}\,ds. \tag{40}$$

Используя следующую оценку второго слагаемого в правой части неравенства (40):

$$|a|\int\limits_0^t q(s)e^{|a|(t-s)}\,ds\leqslant M_1e^{|a|t}+M_2\int\limits_0^t y(\tau)e^{|a|(t-\tau)}\,d\tau,$$

где обозначено

$$M_1=Z_0+\frac{1}{3}N_2+\frac{8}{3}k_1^2N_2^2\quad\text{и}\quad M_2=\frac{1}{3}|a|+\frac{8}{3}|a|k_1^2(1+N_2),$$

запишем неравенство (40) в виде

$$z(t) \leqslant q(t) + M_1 e^{|a|t} + M_2 \int\limits_0^t y(\tau) e^{|a|(t-\tau)}\, d\tau. \tag{41}$$

Учитывая неравенство (41), получаем оценку

$$\int\limits_0^t z(s)\, ds \leqslant q_1(t) + q_2(t) \int\limits_0^t y(s)\, ds, \tag{42}$$

где обозначено

$$q_1(t) = \biggl(Z_0 + N_2 \frac{1 + 2k_1^2 N_2}{3}\biggr) t + |a| k_1^2 N_2^2 t^2 + \frac{M_1}{|a|} e^{|a|t}$$

и

$$q_2(t) = \biggl(\frac{1 + 2k_1^2(1 + N_2)}{3} + 2|a| k_1^2 (1 + N_2) t + M_2 t e^{|a|t}\biggr).$$

Воспользовавшись неравенством (42), запишем оценку (21) в виде интегрального неравенства

$$y(t) \leqslant (y(0) + q_1(t)) + (1 + q_2(t)) \int\limits_0^t y(s)\, ds,$$

откуда [13, § 1.2] для интеграла энергии (20) выводим оценку

$$y(t) \leqslant M(t) = (y(0) + q_1(t)) + (1 + q_2(t)) \int\limits_0^t (y(0) + q_1(s)) \exp\biggl(\int\limits_s^t (1 + q_2(\xi))\, d\xi\biggr)\, ds. \tag{43}$$

Из неравенств (43) и (3) вытекает следующая оценка нормы решения $u = u(x,t)$ уравнения (1) в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^1} |u| \leqslant \sqrt{M(t)}, \tag{44}$$

обеспечивающая существование глобального решения задачи Коши (1), (2).

Таким образом, имеет место

Теорема 3. *Пусть в уравнении (1) продольных колебаний толстого стержня параметр* a *удовлетворяет неравенству* $|a| < 1$, *а параметр* b *и начальные функции задачи Коши* $\varphi(x) \in W_2^1(\mathbb{R}^1)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi'(x))^3\, dx \leqslant \infty$, $\psi(x) \in W_2^1(\mathbb{R}^1)$ *– условиям (34) и (39). Тогда существует единственное глобальное классическое решение* $u = u(x,t)$ *задачи Коши (1), (2) такое, что* $u(x,t)$, $u_x(x,t) \in C[\mathbb{R}^1] \bigcap W_2^1(\mathbb{R}^1)$, *и для него справедлива оценка (44).*

Далее исследуем вопрос о разрушении решения уравнения (1) на некотором конечном временно́м отрезке $[0,T]$, т.е. получим достаточные условия возникновения разрыва второго рода для интеграла энергии $y(t)$. Отрезок $[0,T]$ выбираем таким, чтобы на нём выполнялось неравенство $y(t) > 0$, которое в силу гладкости интеграла энергии следует из начального условия

$$y(0) = \|\varphi\|_{W_2^1}^2 > 0. \tag{45}$$

Вычисляя производную второго порядка интеграла энергии (20), используя уравнение (1) и интегрируя по частям, выводим энергетическое равенство

$$y''(t) - 2z(t) + 2\|u_x\|_2^2 = -b \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x^3\, dx - 2a(u_x, u_{tt}). \tag{46}$$

Исключая из равенств (46) и (24) слагаемое с параметром b, будем иметь

$$y''(t) - 5z(t) + 3Z_0 + 2a(u_x, u_{tt}) + 6a\int\limits_0^t (u_{x\tau}, u_{\tau\tau})\,d\tau = \|u_x\|_2^2,$$

откуда следует неравенство

$$y''(t) + 3Z_0 + 2a(u_x, u_{tt}) + 6a\int\limits_0^t (u_{x\tau}, u_{\tau})\,d\tau \geqslant 5z(t).$$

Это неравенство сохранится, если мы, воспользовавшись оценками $\|u_x\|_2^2 \leqslant y(t)$, $\|u_{x\tau}\|_2^2 \leqslant z(\tau)$ и (36), (42), увеличим его левую часть:

$$2a(u_x, u_{tt}) \leqslant |a|(\|u_x\|_2^2 + \|u_{tt}\|_2^2) \leqslant |a|(1 + 2k_1^2(1 + N_2))y(t) + 2|a|k_1^2N_2^2$$

и

$$6a\int\limits_0^t (u_{x\tau}, u_{\tau\tau})\,d\tau \leqslant 3|a|\int\limits_0^t (\|u_{x\tau}\|_2^2 + \|u_{\tau\tau}\|_2^2)\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 3|a|(q_1(t) + 2k_1^2N_2^2t) + 3|a|(q_2(t) + 2k_1^2(1 + N_2))\int\limits_0^t y(\tau)\,d\tau,$$

а также, применяя оценку (22), уменьшим правую часть:

$$y''(t) - \frac{5}{4}\frac{(y'(t))^2}{y(t)} + 3Z_0 + 2|a|k_1^2N_2^2 + 3|a|(q_1(t) + 2k_1^2N_2^2t) +$$

$$+ |a|(1 + 2k_1^2(1 + N_2))y(t) + 3|a|(q_2(t) + 2k_1^2(1 + N_2))\int\limits_0^t y(\tau)\,d\tau \geqslant 0.$$

Обозначая

$$\alpha(t) = 3Z_0 + 2|a|k_1^2N_2^2 + 3|a|(q_1(t) + 2k_1^2N_2^2t),$$

$$\beta = |a|(1 + 2k_1^2(1 + N_2)), \quad \gamma(t) = 3|a|(q_2(t) + 2k_1^2(1 + N_2)),$$

запишем последнее неравенство в виде

$$y''(t) - \frac{5}{4}\frac{(y'(t))^2}{y(t)} + \alpha(t) + \beta y(t) + \gamma(t)\int\limits_0^t y(\tau)\,d\tau \geqslant 0,$$

откуда, учитывая равенства

$$\max_{t\in[0,T]}\alpha(t) = \alpha(T) \quad \text{и} \quad \max_{t\in[0,T]}\gamma(t) = \gamma(T),$$

получаем, что

$$y(t)y''(t) - \frac{5}{4}(y'(t))^2 + \alpha(T)y(t) + \beta y^2(t) + \gamma(T)\int\limits_0^t y(\tau)\,d\tau y(t) \geqslant 0. \qquad (47)$$

Из непрерывной дифференцируемости интеграла энергии $y(t)$ следует, что при выполнении начального условия

$$y'(0) = 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x)\psi(x) + \varphi'(x)\psi'(x))\,dx > 0 \tag{48}$$

найдётся такой временно́й отрезок $[0, T_1] \subseteq [0, T]$, на котором производная интеграла энергии будет неотрицательна: $y'(t) \geqslant 0$, но тогда справедлива цепочка соотношений

$$\int\limits_0^t y(\tau)\,d\tau = \tau y(\tau)\Big|_0^t - \int\limits_0^t \tau y'(\tau)\,d\tau \leqslant ty(t) \leqslant T_1 y(t). \tag{49}$$

С учётом (49) из неравенства (47) следует, что на отрезке $[0, T_1]$ выполняется неравенство

$$y(t)y''(t) - \frac{5}{4}(y'(t))^2 + (\beta + T_1\gamma(T))y^2(t) + \alpha(T)y(t) \geqslant 0, \tag{50}$$

сравнивая которое с одним из основных обыкновенных дифференциальных неравенств для интеграла энергии [14, Приложение, § 5], заключаем, что имеет место

Теорема 4. *Пусть параметры* a $(|a| < 1)$, b *в уравнении (1) продольных колебаний толстого стержня и начальные функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *задачи Коши обеспечивают, в дополнение к условиям (45), (48), выполнение требования*

$$(y'(0))^2 > 4(\beta + T_1\gamma(T))y^2(0) + \frac{4}{3}\alpha(T)y(0).$$

Тогда временно́й отрезок $[0, T_1] \subseteq [0, T]$ *не может быть сколь угодно большим, а именно, справедлива следующая оценка сверху времени существования классического решения задачи Коши (1), (2):*

$$T_1 \leqslant T_\infty \leqslant \frac{1}{\sqrt[4]{y(0)}\,\Omega},$$

где постоянная $\Omega > 0$ *определяется равенством*

$$\Omega^2 = \frac{1}{16}y^{-5/2}(0)(y'(0))^2 - \frac{\beta + T_1\gamma(T)}{4}y^{-1/2}(0) - \frac{\alpha(T)}{12}y^{-3/2}(0),$$

причём имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t\uparrow T_\infty} \sup y(t) = +\infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демиденко Г.В. Успенский С.В.* Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной. Новосибирск, 1998.
2. *Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М., 2007.
3. *Габов С.А., Оразов Б.Б.* Об уравнении $\partial^2/\partial t^2[u_{xx} - u] + u_{xx} = 0$ и некоторых связанных с ним задачах // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1986. Т. 26. № 1. С. 92–102.
4. *Beards C.F.* Structural Vibration: Analysis and Damping. Oxford, 2003.
5. *Островский Л.А., Потапов А.И.* Введение в теорию модулированных волн. М., 2003.
6. *Ерофеев И.В.* Изгибно-крутильные, продольно-изгибные и продольно-крутильные волны в стержнях // Вестн. науч.-техн. развития. 2012. № 5 (57). С. 3–18.

7. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.
8. *Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J.* Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Philos. Trans. R. Soc. London. 1972. V. 272. P. 47–78.
9. *Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И.* Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. Т. 58. М., 1990. С. 87–202.
10. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1981.
11. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М., 1986.
12. *Travis C.C., Webb G.F.* Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations // Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae. 1978. V. 32. P. 75–96.
13. *Dragomir S.S.* Some Gronwall Type Inequalities and Applications. Melbourne, 2002.
14. *Корпусов М.О.* Разрушение в нелинейных волновых уравнениях с положительной энергией. М., 2012.

Отдел физико-математических и химических наук
Академия наук Чеченской Республики, г. Грозный,
Чеченский государственный педагогический университет,
г. Грозный

Поступила в редакцию 14.12.2020 г.
После доработки 14.12.2020 г.
Принята к публикации 21.12.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 82–92

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

О РАЗРЕШИМОСТИ СПЕЦИАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

© 2022 г. С. С. Харибегашвили, Б. Г. Мидодашвили

Для одного класса нелинейных систем дифференциальных уравнений с частными производными рассматривается специальная краевая задача в цилиндрической области. Исследованы вопросы существования, единственности и отсутствия решений этой задачи.

DOI: 10.31857/S0374064122010095

1. Введение. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных $x=(x_1,\ldots,x_n)$ и t рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений с частными производными вида

$$L_f := \frac{\partial^{4k}u}{\partial t^{4k}} - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j} + f(u) = F(x,t), \tag{1.1}$$

где вектор-функции $f=(f_1,\ldots,f_N)^{\text{т}}$, $F=(F_1,\ldots,F_N)^{\text{т}}$ заданы (условия, которым они удовлетворяют, приводятся ниже), а $u=(u_1,\ldots,u_N)^{\text{т}}$ – искомая вектор-функция, $N\geqslant 2$; A_{ij} – заданные постоянные квадратные матрицы порядка N, причём $A_{ij}=A_{ji}$, $i,j=\overline{1,n}$, $n\geqslant 2$, k – натуральное число.

Для системы (1.1) рассмотрим краевую задачу в следующей постановке: в цилиндрической области $D_T := \Omega\times(0,T)$, где Ω – открытая липшицева область в $\mathbb{R}^n$, найти решение $u = u(x,t)$ системы (1.1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_\Gamma = 0, \tag{1.2}$$

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right|_{\Omega_0\bigcup\Omega_T} = 0, \quad i=\overline{0,2k-1}, \tag{1.3}$$

где $\Gamma := \partial\Omega\times(0,T)$ – боковая часть границы цилиндрической области D_T, а $\Omega_0=\Omega\times\{0\}$ и $\Omega_T=\Omega\times\{T\}$ – нижнее и верхнее основания этого цилиндра соответственно.

В скалярном случае, т.е. когда $N=1$, эта задача изучена в работе [1]. Исследованию начальных и смешанных задач для полулинейных дифференциальных уравнений с частными производными высокого порядка, имеющих структуру, отличную от (1.1), посвящена многочисленная литература (см., например, работы [2–12] и приведённую в них библиографию).

Обозначим через $C^{2,4k}(\overline{D}_T)$ линейное пространство непрерывных в $\overline{D}_T$ вектор-функций $u=(u_1,\ldots,u_N)^{\text{т}}$, имеющих непрерывные в $\overline{D}_T$ частные производные $\partial u/\partial x_i$, $\partial^2 u/\partial x_i\partial x_j$, $\partial^l u/\partial t^l$, $i,j=\overline{1,n}$; $l=\overline{1,4k}$. Положим

$$C_0^{2,4k}(\overline{D}_T,\partial D_T) := \left\{u\in C^{2,4k}(\overline{D}_T) : u|_\Gamma = 0,\ \left.\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right|_{\Omega_0\bigcup\Omega_T} = 0,\ i=\overline{0,2k-1}\right\}.$$

Введём гильбертово пространство $W_0^{1,2k}(D_T)$, которое получается пополнением по норме

$$\|u\|^2_{W_0^{1,2k}(D_T)} = \int\limits_{D_T}\left[|u|^2 + \sum_{i=1}^{2k}\left|\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right|^2 + \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\right]dx\,dt \tag{1.4}$$

классического пространства $C_0^{2,4k}(\overline{D}_T,\partial D_T)$, здесь и в дальнейшем $|u|^2=\sum_{i=1}^N u_i^2$.

Замечание 1.1. Из определения (1.4) следует, что если $u \in W_0^{1,2k}\;(D_T)$, то тогда $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_T)$ и $\partial^i u/\partial t^i \in L_2(D_T)$, $i = \overline{1,2k}$. Здесь $W_2^1(D_T)$ – хорошо известное пространство Соболева, состоящее из элементов пространства $L_2(D_T)$, имеющих обобщённые частные производные первого порядка из $L_2(D_T)$, и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_T) = \{u \in W_2^1(D_T) : u|_{\partial D_T} = 0\}$, где равенство $u|_{\partial D_T} = 0$ понимается в смысле теории следа [13, с. 70].

Будем предполагать, что в системе (1.1) нелинейная вектор-функция $f = (f_1, \ldots, f_N)^{\text{т}}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$f \in C(\mathbb{R}^N), \quad |f(u)| \leqslant M_1 + M_2|u|^\alpha, \quad u \in \mathbb{R}^N, \tag{1.5}$$

где $M_i = \text{const} \geqslant 0$, $i = 1, 2$, и

$$0 \leqslant \alpha = \text{const} < (n+1)/(n-1). \tag{1.6}$$

Замечание 1.2. Оператор вложения $I : W_2^1(\overline{D}_T) \to L_q(D_T)$ является линейным непрерывным компактным оператором, если $1 < q < 2(n+1)/(n-1)$, $n > 1$ [13, с. 81]. В то же время оператор Немыцкого $K : L_q(D_T) \to L_2(D_T)$, действующий по формуле $Ku = f(u)$, где $u = (u_1, \ldots, u_N)^{\text{т}} \in L_q(D_T)$ и вектор-функция $f = (f_1, \ldots, f_N)^{\text{т}}$ удовлетворяет условию (1.5), является непрерывным и ограниченным при $q \geqslant 2\alpha$ [14, с. 66, 67]. Поэтому если $\alpha < (n+1)/(n-1)$, то существует число q такое, что $1 < q < 2(n+1)/(n-1)$ и $q \geqslant 2\alpha$. Следовательно, в этом случае оператор

$$K_0 = KI : W_2^1(D_T) \to L_2(D_T) \tag{1.7}$$

является непрерывным и компактным. Поэтому из включения $u \in W_2^1(D_T)$ следует включение $f(u) \in L_2(D_T)$, а из сходимости $u^m \to u$ при $m \to \infty$ в пространстве $W_2^1(D_T)$ – сходимость $f(u^m) \to f(u)$ при $m \to \infty$ в пространстве $L_2(D_T)$.

Здесь и ниже принадлежность вектор-функции $v = (v_1, \ldots, v_N)^{\text{т}}$ некоторому пространству X означает, что каждая её компонента v_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, принадлежит пространству X.

Замечание 1.3. Пусть $u \in C_0^{2,4k}(\overline{D}_T, \partial D_T)$ – классическое решение задачи (1.1)–(1.3). Умножив скалярно на произвольную вектор-функцию $\varphi \in C_0^{2,4k}(\overline{D}_T, \partial D_T)$ обе части системы (1.1) и проинтегрировав полученное равенство по частям по области D_T, получим

$$\int\limits_{D_T} \left[\frac{\partial^{2k}u}{\partial t^{2k}}\frac{\partial^{2k}\varphi}{\partial t^{2k}} + \sum_{i,j=1}^n A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right] dx\,dt + \int\limits_{D_T} f(u)\varphi\,dx\,dt = \int\limits_{D_T} F\varphi\,dx\,dt. \tag{1.8}$$

Примем равенство (1.8) за основу определения слабого обобщённого решения задачи (1.1)–(1.3).

Определение. Пусть вектор-функция f удовлетворяет условиям (1.5), (1.6), а вектор-функция F принадлежит пространству $L_2(D_T)$. Вектор-функция $u \in W_0^{1,2k}(D_T)$ называется *слабым обобщённым решением задачи (1.1)–(1.3)*, если интегральное равенство (1.8) справедливо для любой вектор-функции $\varphi \in W_0^{1,2k}(D_T)$, т.е.

$$\int\limits_{D_T} \left[\frac{\partial^{2k}u}{\partial t^{2k}}\frac{\partial^{2k}\varphi}{\partial t^{2k}} + \sum_{i,j=1}^n A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right] dx\,dt + \int\limits_{D_T} f(u)\varphi\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{D_T} F\varphi\,dx\,dt \quad \text{для любой} \quad \varphi \in W_0^{1,2k}(D_T). \tag{1.9}$$

Отметим, что интеграл $\int_{D_T} f(u)\varphi\,dx\,dt$ в равенстве (1.9) определён корректно, поскольку в силу замечания 1.2 из $u \in W_0^{1,2k}(D_T)$ следует, что $f(u) \in L_2(D_T)$ и, значит, имеет место включение $f(u)\varphi \in L_1(D_T)$.

Нетрудно проверить, что если решение u задачи (1.1)–(1.3) в смысле определения принадлежит классу $C_0^{2,4k}(\overline{D}_T, \partial D_T)$, то оно будет и классическим решением этой задачи.

2. Разрешимость задачи (1.1)–(1.3). Ниже предполагаем, что оператор

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \tag{2.1}$$

является сильно эллиптическим, т.е. что матрица $Q(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\xi_i\xi_j$ при каждом ненулевом $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^n$ является положительно определённой [13, с. 243]:

$$(Q(\xi)\eta, \eta)_{\mathbb{R}^N} > 0 \ \text{ для любого } \ \eta \in \mathbb{R}^N \backslash \{(0, \ldots, 0)^{\text{т}}\} \ \text{ при каждом } \ \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{(0, \ldots, 0)^{\text{т}}\}, \tag{2.2}$$

где $(\,\cdot\,,\cdot\,)_{\mathbb{R}^N}$ – стандартное скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$. Как показано в [13, с. 244] неравенство (2.2) накладывает ограничение только на симметрическую часть матриц A_{ij}.

Отметим, что в скалярном случае оператор (2.1) является обычным эллиптическим оператором и в этом случае линейная часть оператора L_f из (1.1), т.е. оператор L_0, является семиэллиптической [15, с. 142].

При выполнении условия (2.2) в пространстве $C_0^{2,4k}(\overline{D}_T, \partial D_T)$ наряду со скалярным произведением

$$(u, v)_0 = \int\limits_{D_T} \left[(u, v)_{\mathbb{R}^N} + \sum_{i=1}^{2k} \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \frac{\partial^i v}{\partial t^i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] dx\, dt \tag{2.3}$$

с нормой $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{W_0^{1,2k}(D_T)}$, определённой правой частью равенства (1.4), введём скалярное произведение

$$(u, v)_1 = \int\limits_{D_T} \left[\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} \frac{\partial^{2k} v}{\partial t^{2k}} + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right] dx\, dt \tag{2.4}$$

и соответствующую норму

$$\|u\|_1^2 = \int\limits_{D_T} \left[\left| \frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} \right|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] dx\, dt, \tag{2.5}$$

где $u, v \in C_0^{2,4k}(\overline{D}_T, \partial D_T)$.

Лемма 2.1. *Имеет место двойная оценка*

$$c_1\|u\|_0 \leqslant \|u\|_1 \leqslant c_2\|u\|_0 \quad \text{для всех} \quad u \in C_0^{2,4k}(\overline{D}_T, \partial D_T) \tag{2.6}$$

с положительными постоянными c_1 *и* c_2, *не зависящими от* u.

Доказательство. Если $u \in C_0^{2,4k}(\overline{D}_T, \partial D_T)$, то при фиксированном $t \in [0, T]$ вектор-функция $u(\,\cdot\,, t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ удовлетворяет неравенству [13, с. 62]

$$\|u(\,\cdot\,, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leqslant c_0 \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) \right|^2 dx \tag{2.7}$$

с положительной постоянной $c_0 = c_0(\Omega)$, не зависящей от u и t.

Как известно, из неравенства (2.2) следует, что [13, с. 244]

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx \geqslant k_0 \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \quad \text{для любой} \quad v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \tag{2.8}$$

с положительной постоянной k_0, не зависящей от v.

В силу оценок (2.7) и (2.8) имеем

$$\|u(\cdot\,,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{c_0}{k_0}\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t)\,dx \quad \text{для всех} \quad u\in C_0^{2,4k}(\overline{D}_T,\partial D_T). \tag{2.9}$$

Так как матрицы A_{ij} постоянны, то наряду с (2.8) выполняется неравенство

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx \leqslant k_1\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 dx \quad \text{для любой} \quad v\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega) \tag{2.10}$$

с положительной постоянной k_1, не зависящей от v.

Интегрируя неравенства (2.7)–(2.10) по $t\in[0,T]$, получаем оценки

$$\|u\|^2_{L_2(D_T)} \leqslant c_0\int\limits_{D_T}\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2(x,t)\,dx\,dt, \tag{2.11}$$

$$\|u\|^2_{L_2(D_T)} \leqslant \frac{c_0}{k_0}\int\limits_{D_T}\sum_{i,j=1}^n A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t)\,dx\,dt, \tag{2.12}$$

$$k_0\int\limits_{D_T}\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx\,dt \leqslant \int\limits_{D_T}\sum_{i,j=1}^n A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx\,dt \leqslant k_1\int\limits_{D_T}\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx\,dt \tag{2.13}$$

для любой $u\in C_0^{2,4k}(\overline{D}_T,\partial D_T)$.

Так как вектор-функция $u=(u_1,\ldots,u_N)^{\text{т}}\in C_0^{2,4k}(\overline{D}_T,\partial D_T)$ удовлетворяет равенствам (1.3), то несложно видеть, что справедливы соотношения

$$\frac{\partial^i u(\cdot\,,t)}{\partial t^i} = \frac{1}{(2k-i-1)!}\int\limits_0^t (t-\tau)^{2k-i-1}\frac{\partial^{2k}u(\cdot\,,\tau)}{\partial t^{2k}}\,d\tau, \quad i=\overline{1,2k-1},$$

откуда, используя неравенство Коши, будем иметь

$$\left|\frac{\partial^i u(\cdot\,,t)}{\partial t^i}\right|^2 \leqslant \frac{1}{((2k-i-1)!)^2}\int\limits_0^t (t-\tau)^{2(2k-i-1)}\,d\tau\int\limits_0^t\left|\frac{\partial^{2k}u(\cdot\,,t)}{\partial t^{2k}}\right|^2 d\tau =$$

$$= \frac{t^{4k-2i-1}}{((2k-i-1)!)^2(4k-2i-1)}\int\limits_0^t\left|\frac{\partial^{2k}u(\cdot\,,t)}{\partial t^{2k}}\right|^2 d\tau \leqslant T^{4k-2i-1}\int\limits_0^T\left|\frac{\partial^{2k}u(\cdot\,,\tau)}{\partial t^{2k}}v\right|^2 d\tau. \tag{2.14}$$

Из неравенства (2.14) следует, что

$$\int\limits_0^t\left|\frac{\partial^i u(\cdot\,,t)}{\partial t^i}\right|^2 d\tau \leqslant T^{4k-2i}\int\limits_0^T\left|\frac{\partial^{2k}u(\cdot\,,\tau)}{\partial t^{2k}}\right|^2 d\tau, \quad i=\overline{1,2k-1}.$$

Интегрируя полученное неравенство по Ω, получаем

$$\int\limits_{D_T}\left|\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right|^2 dx\,dt \leqslant T^{4k-2i}\int\limits_{D_T}\left|\frac{\partial^{2k}u}{\partial t^{2k}}\right|^2 dx\,dt, \quad i=\overline{1,2k-1}. \tag{2.15}$$

Наконец, из (1.4), (2.3), (2.5), (2.11)–(2.13) и (2.15) легко следует (2.6). Лемма доказана.

Замечание 2.1. Согласно лемме 2.1 если пополнить пространство $C_0^{2,4k}(\overline{D}_T, \partial D_T)$ по норме (2.5), то вследствие определения (2.3) получится то же самое гильбертово пространство $W_0^{1,2k}(D_T)$ с эквивалентными скалярными произведениями (2.3) и (2.4).

Введём следующее условие:

$$\lim_{|u|\to\infty} \inf \frac{uf(u)}{|u|^2} \geqslant 0. \tag{2.16}$$

Лемма 2.2. *Пусть* $F \in L_2(D_T)$ *и выполнены условия (1.5), (1.6) и (2.16). Тогда для любого слабого обобщённого решения* $u \in W_0^{1,2k}(D_T)$ *задачи (1.1)–(1.3) имеет место априорная оценка*

$$\|u\|_0 = \|u\|_{W_0^{1,2k}(D_T)} \leqslant c_3\|F\|_{L_2(D_T)} + c_4 \tag{2.17}$$

с постоянными $c_3 > 0$ *и* $c_4 \geqslant 0$, *не зависящими от* u *и* F.

Доказательство. Так как $f \in C(\mathbb{R}^N)$, то из условия (2.16) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M_\varepsilon \geqslant 0$, при котором

$$uf(u) \geqslant -M_\varepsilon - \varepsilon|u|^2 \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{R}^N. \tag{2.18}$$

Полагая $\varphi = u \in W_0^{1,2k}(D_T)$ в равенстве (1.9) и принимая во внимание неравенство (2.18) и определение (2.5), для любого $\varepsilon > 0$ будем иметь

$$\|u\|_1^2 = -\int\limits_{D_T} uf(u)\,dx\,dt + \int\limits_{D_T} Fu\,dx\,dt \leqslant M_\varepsilon \operatorname{mes} D_T + \varepsilon\int\limits_{D_T} u^2\,dx\,dt + \int\limits_{D_T}\left(\frac{1}{4\varepsilon}F^2 + \varepsilon|u|^2\right)dx\,dt =$$

$$= \frac{1}{4\varepsilon}\|F\|^2_{L_2(D_T)} + M_\varepsilon \operatorname{mes} D_T + 2\varepsilon\|u\|^2_{L_2(D_T)} \leqslant \frac{1}{4\varepsilon}\|F\|^2_{L_2(D_T)} + M_\varepsilon \operatorname{mes} D_T + 2\varepsilon\|u\|_0^2. \tag{2.19}$$

Из (2.6) и (2.19) следует двойное неравенство

$$c_1^2\|u\|_0^2 \leqslant \|u\|_1^2 \leqslant \frac{1}{4\varepsilon}\|F\|^2_{L_2(D_T)} + M_\varepsilon \operatorname{mes} D_T + 2\varepsilon\|u\|_0^2,$$

положив в котором $\varepsilon = c_1^2/4$, получим

$$\|u\|_0^2 \leqslant 2c_1^{-4}\|F\|^2_{L_2(D_T)} + 2c_1^{-2}M_\varepsilon \operatorname{mes} D_T.$$

Из последнего неравенства вытекает оценка (2.17), где ${c_3}^2 = 2c_1^{-4}$ и ${c_4}^2 = 2c_1^{-2}M_\varepsilon \operatorname{mes} D_T$ при $\varepsilon = c_1^2/4$. Лемма доказана.

Замечание 2.2. Прежде чем рассмотреть вопрос о разрешимости задачи (1.1)–(1.3) в нелинейном случае, рассмотрим соответствующую (1.1)–(1.3) линейную задачу, т.е. когда $f = 0$. В этом случае при $F \in L_2(D_T)$ аналогичным образом вводится определение слабого обобщённого решения $u \in W_0^{1,2k}(D_T)$ этой задачи: для него должно выполняться интегральное равенство

$$(u,\varphi)_1 = \int\limits_{D_T}\left[\frac{\partial^{2k}u}{\partial t^{2k}}\frac{\partial^{2k}\varphi}{\partial t^{2k}} + \sum_{i,j=1}^n A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right]dx\,dt = \int\limits_{D_T} F\varphi\,dx\,dt \quad \text{для любой} \quad \varphi \in W_0^{1,2k}(D_T). \tag{2.20}$$

С учётом левой оценки в (2.6) имеем

$$\left|\int\limits_{D_T} F\varphi\,dx\,dt\right| \leqslant \|F\|_{L_2(D_T)}\|\varphi\|_{L_2(D_T)} \leqslant \|F\|_{L_2(D_T)}\|\varphi\|_0 \leqslant c_1^{-1}\|F\|_{L_2(D_T)}\|\varphi\|_1. \tag{2.21}$$

В силу замечания 2.1 и соотношений (2.20) и (2.21) из теоремы Рисса следует существование единственной вектор-функции $u \in W_0^{1,2k}(D_T)$, для которой выполняется равенство (2.20) и для нормы которой справедлива оценка

$$\|u\|_1 \leqslant c_1^{-1}\|F\|_{L_2(D_T)}. \tag{2.22}$$

В силу левой оценки в (2.6) из (2.22) следует, что

$$\|u\|_0 = \|u\|_{W_0^{1,2k}(D_T)} \leqslant c_1^{-2}\|F\|_{L_2(D_T)}. \tag{2.23}$$

Таким образом, вводя обозначение $u = L_0^{-1}F$, находим, что линейной задаче, соответствующей задаче (1.1)–(1.3), т.е. когда $f = 0$, отвечает линейный ограниченный оператор

$$L_0^{-1} : L_2(D_T) \to W_0^{1,2k}(D_T),$$

для нормы которого в силу (2.23) имеет место оценка

$$\|L_0^{-1}\|_{L_2(D_T)\to W_0^{1,2k}(D_T)} \leqslant c_1^{-2}. \tag{2.24}$$

Принимая во внимание определение и замечание 2.2, запишем интегральное тождество (1.9), эквивалентное задаче (1.1)–(1.3), в виде функционального уравнения

$$u = L_0^{-1}[-f(u) + F] \tag{2.25}$$

в гильбертовом пространстве $W_0^{1,2k}(D_T)$.

Замечание 2.3. Так как в силу определения (1.4) и замечания 1.1 пространство $W_0^{1,2k}(D_T)$ непрерывно вложено в пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_T)$, то при выполнении условий (1.5), (1.6) оператор

$$K_1 = KII_1 : W_0^{1,2k}(D_T) \to L_2(D_T),$$

где KI – оператор, определённый в замечании 1.2 (см. (1.7)), $I_1 : W_0^{1,2k}(D_T) \to \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_T)$ – оператор вложения, также является непрерывным и компактным.

Запишем уравнение (2.25) в виде

$$u = Au := L_0^{-1}(K_1u + F). \tag{2.26}$$

Принимая во внимание уравнение (2.25) и замечание 2.3, заключаем, что оператор $A : W_0^{1,2k}(D_T) \to W_0^{1,2k}(D_T)$ из (2.26) является непрерывным и компактным. В то же время вследствие схемы доказательства априорной оценки (2.17) из леммы 2.2, в которой $c_3^2 = 2c_1^{-4}$ и $c_4^2 = 2c_1^{-2}M_\varepsilon \operatorname{mes} D_T$, $\varepsilon = c_1^2/4$, нетрудно видеть, что для любого значения параметра $\tau \in \in [0,1]$ и любого решения $u \in W_0^{1,2k}(D_T)$ уравнения $u = \tau Au$ справедлива та же априорная оценка (2.17) с теми же постоянными $c_3 > 0$ и $c_4 \geqslant 0$, не зависящими от u, F и τ. Поэтому, согласно теореме Лере–Шаудера о неподвижной точке [16, с. 375], уравнение (2.26), а следовательно, и задача (1.1)–(1.3) имеет хотя бы одно слабое обобщённое решение u в пространстве $W_0^{1,2k}(D_T)$. Таким образом, справедлива

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия (1.5), (1.6) и (2.16). Тогда для любой вектор-функции $F \in L_2(D_T)$ задача (1.1)–(1.3) имеет хотя бы одно слабое обобщённое решение u в пространстве $W_0^{1,2k}(D_T)$.*

3. Единственность решения задачи (1.1)–(1.3). Введём условие

$$(f(u) - f(v))(u - v) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad u, v \in \mathbb{R}^N. \tag{3.1}$$

Замечание 3.1. Несложно проверить, что условие (3.1) будет выполнено, если вектор-функция $f=(f_1,\ldots,f_N)^{\text{т}}$ принадлежит пространству $C^1(\mathbb{R}^N)$ и матрица $(\partial f_i/\partial u_j)_{i,j=1}^N$ является неотрицательно определённой, т.е.

$$\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(u)\xi_i\xi_j \geqslant 0 \quad \text{для всех } \xi=(\xi_1,\ldots,\xi_N)^{\text{т}}\in\mathbb{R}^N \text{ при каждом } u=(u_1,\ldots,u_N)^{\text{т}}\in\mathbb{R}^N.$$

Теорема 3.1. *Пусть вектор-функция f удовлетворяет условиям (1.5), (1.6), (3.1). Тогда для любой вектор-функции $F\in L_2(D_T)$ задача (1.1)–(1.3) не может иметь более одного слабого обобщённого решения в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{1,2k}_0(D_T)$.*

Доказательство. Пусть $F\in L_2(D_T)$ и $u_1,$ u_2 – два слабых обобщённых решения задачи (1.1)–(1.3) в пространстве $W_0^{1,2k}(D_T),$ т.е., согласно (1.9), имеют место равенства

$$\int\limits_{D_T}\left[\frac{\partial^{2k}u_l}{\partial t^{2k}}\frac{\partial^{2k}\varphi}{\partial t^{2k}}+\sum_{i,j=1}^n A_{ij}\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right]dx\,dt+\int\limits_{D_T}f(u_l)\varphi\,dx\,dt=$$

$$=\int\limits_{D_T}F\varphi\,dx\,dt \quad \text{для любой} \quad \varphi\in W_0^{1,2k}(D_T), \quad l=1,2. \tag{3.2}$$

Из (3.2) вытекает, что для разности $v=u_2-u_1$ выполняется соотношение

$$\int\limits_{D_T}\left[\frac{\partial^{2k}v}{\partial t^{2k}}\frac{\partial^{2k}\varphi}{\partial t^{2k}}+\sum_{i,j=1}^n A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right]dx\,dt=$$

$$=-\int\limits_{D_T}(f(u_2)-f(u_1))\varphi\,dx\,dt \quad \text{для любой} \quad \varphi\in W_0^{1,2k}(D_T), \tag{3.3}$$

полагая в котором $\varphi=v\in W_0^{1,2k}(D_T),$ в силу определения (2.5) получаем

$$\|v\|_1=-\int\limits_{D_T}(f(u_2)-f(u_1))(u_2-u_1)\,dx\,dt. \tag{3.4}$$

Из равенства (3.4) и условия (3.1) с учётом левой оценки (2.6) следует, что

$$c_1\|v\|_0\leqslant\|v\|_1\leqslant 0,$$

поэтому $v=0,$ т.е. $u_2=u_1.$ Теорема доказана.

Из теорем 2.1 и 3.1 вытекает

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия (1.5), (1.6), (2.16) и (3.1). Тогда для любой вектор-функции $F\in L_2(D_T)$ задача (1.1)–(1.3) имеет единственное слабое обобщённое решение u в пространстве $W_0^{1,2k}(D_T)$.*

4. Случаи отсутствия решения задачи (1.1)–(1.3). Ниже рассмотрим частный случай системы (1.1), когда она расщеплена в главной части, т.е. $A_{ij}=a_{ij}I_N,$ где I_N – единичная матрица порядка N, а числа a_{ij} такие, что оператор $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial^2/\partial x_i\partial x_j$ является скалярным эллиптическим оператором.

Наложим на вектор-функцию f следующее условие: существуют числа $l_1,$ $\ldots,$ $l_N,$ не все из которых нулевые, такие, что

$$\sum_{i=1}^N l_if_i(u)\leqslant-\left|\sum_{i=1}^N l_iu_i\right|^\beta \quad \text{для любого} \quad u=(u_1,\ldots,u_N)^{\text{т}}\in\mathbb{R}^N, \quad 1<\beta=\text{const}<\frac{n+1}{n-1}. \tag{4.1}$$

Для упрощения изложения рассмотрим случай, когда область Ω – единичный шар $|x| < 1$.

Теорема 4.1. *Пусть вектор-функция* f *удовлетворяет условиям (1.5), (1.6) и (4.1). Пусть* $F^0 = (F_1^0, \ldots, F_N^0)^{\text{т}} \in L_2(D_T)$, $G = \sum_{i=1}^N l_i F_i^0 \geqslant 0$ *и* $\|G\|_{L_2(D_T)} \neq 0$. *Тогда существует число* $\mu_0 = \mu_0(G, \beta) > 0$ *такое, что при* $\mu > \mu_0$ *задача (1.1)–(1.3) не имеет слабого обобщённого решения в пространстве* $W_0^{1,2k}(D_T)$ *для* $F = \mu F_0$.

Доказательство. Предположим, что условия теоремы выполнены и слабое обобщённое решение $u = (u_1, \ldots, u_N)^{\text{т}} \in W_0^{1,2k}(D_T)$ задачи (1.1)–(1.3) существует для любого фиксированного $\mu > 0$. Предположим также, что $\varphi = (l_1\varphi_0, \ldots, l_N\varphi_0)^{\text{т}}$ в равенстве (1.9), где φ_0 – скалярная функция, удовлетворяющая условиям

$$\varphi_0 \geqslant 0, \quad \varphi_0 \in C_0^{2,4k}(\overline{D}_T, \partial D_T), \tag{4.2}$$

где пространство $C_0^{2,4k}(\overline{D}_T, \partial D_T) \subset W_0^{1,2k}(D_T)$ введено во введении.

Тогда, обозначая $v = \sum_{i=1}^N l_i u_i$ и принимая во внимание расщеплённость системы (1.1) в главной части, а также условия (4.1) и (4.2), из равенства (1.9) получаем

$$\int\limits_{D_T} \left[\frac{\partial^{2k} v}{\partial t^{2k}} \frac{\partial^{2k} \varphi_0}{\partial t^{2k}} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j}\right] dx\, dt = \int\limits_{D_T} \biggl(-\sum_{i=1}^N l_i f_i(u)\biggr) \varphi_0\, dx\, dt + \mu \int\limits_{D_T} G\varphi_0\, dx\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{D_T} |v|^\beta \varphi_0\, dx\, dt + \mu \int\limits_{D_T} G\varphi_0\, dx\, dt. \tag{4.3}$$

Так как $v \in W_0^{1,2k}(D_T)$ и $\varphi_0 \in C_0^{2,4k}(\overline{D}_T, \partial D_T)$, то интегрирование по частям даёт

$$\int\limits_{D_T} \left[\frac{\partial^{2k} v}{\partial t^{2k}} \frac{\partial^{2k} \varphi_0}{\partial t^{2k}} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j}\right] dx\, dt = \int\limits_{D_T} v L_0 \varphi_0\, dx\, dt, \tag{4.4}$$

где L_0 – скалярный оператор, соответствующий оператору из (1.1) при $f = 0$. Из (4.3) и (4.4) вытекает неравенство

$$\int\limits_{D_T} |v|^\beta \varphi_0\, dx\, dt \leqslant \int\limits_{D_T} v L_0 \varphi_0\, dx\, dt - \mu \int\limits_{D_T} G\varphi_0\, dx\, dt. \tag{4.5}$$

Ниже воспользуемся методом пробных функций [17, с. 10–12]. В качестве пробной функции возьмём $\varphi_0 \in C_0^{2,4k}(\overline{D}_T, \partial D_T)$ такую, что $\varphi_0|_{D_T} > 0$. Если в неравенстве Юнга с параметром $\varepsilon > 0$, т.е. в неравенстве

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon}{\beta} a^\beta + \frac{1}{\beta' \varepsilon^{\beta'-1}} b^{\beta'}, \quad \text{где} \quad a, b \geqslant 0, \quad \beta' = \frac{\beta}{\beta - 1},$$

положим $a = |u|\varphi_0^{1/\beta}$, $b = |L_0\varphi_0|/\varphi_0^{1/\beta}$, то, учитывая равенство $\beta'/\beta = \beta' - 1$, будем иметь

$$|vL_0\varphi_0| = |v|\varphi_0^{1/\beta} \frac{|L_0\varphi_0|}{\varphi_0^{1/\beta}} \leqslant \frac{\varepsilon}{\beta} |v|^\beta \varphi_0 + \frac{1}{\beta' \varepsilon^{\beta'-1}} \frac{|L_0\varphi_0|^{\beta'}}{\varphi_0^{\beta'-1}}. \tag{4.6}$$

Из неравенств (4.5) и (4.6) следует, что

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{\beta}\right) \int\limits_{D_T} |v|^\beta \varphi_0\, dx\, dt = \frac{1}{\beta' \varepsilon^{\beta'-1}} \int\limits_{D_T} \frac{|L_0\varphi_0|^{\beta'}}{\varphi_0^{\beta'-1}}\, dx\, dt - \mu \int\limits_{D_T} G\varphi_0\, dx\, dt,$$

откуда при $\varepsilon < \beta$ получаем

$$\int\limits_{D_T} |v|^{\beta}\varphi_0\,dx\,dt \leqslant \frac{\beta}{(\beta-\varepsilon_0)\beta'\varepsilon_0^{\beta'-1}}\int\limits_{D_T}\frac{|L_0\varphi_0|^{\beta'}}{\varphi_0^{\beta'-1}}\,dx\,dt - \frac{\beta\mu}{\beta-\varepsilon}\int\limits_{D_T} G\varphi_0\,dx\,dt. \tag{4.7}$$

Принимая во внимание, что $\beta' = \beta/(\beta-1)$, $\beta = \beta'/(\beta'-1)$ и равенство

$$\min_{0<\varepsilon<\beta}\frac{\beta}{(\beta-\varepsilon)\beta'\varepsilon^{\beta'-1}} = 1,$$

которое достигается при $\varepsilon = 1$, в силу (4.7) приходим к неравенству

$$\int\limits_{D_T} |v|^{\beta}\varphi_0\,dx\,dt \leqslant \int\limits_{D_T}\frac{|L_0\varphi_0|^{\beta'}}{\varphi_0^{\beta'-1}}\,dx\,dt - \beta'\mu\int\limits_{D_T} G\varphi_0\,dx\,dt. \tag{4.8}$$

Нетрудно проверить, что пробная функция

$$\varphi_0(x,t) = ((1-|x|^2)t(T-t))^m \tag{4.9}$$

при достаточно большом положительном m удовлетворяет условиям

$$\varphi_0 \in C_0^{2,4k}(\overline{D}_T, \partial D_T), \quad \varphi_0|_{D_T} > 0, \quad \kappa_0 = \int\limits_{D_T}\frac{|L_0\varphi_0|^{\beta'}}{\varphi_0^{\beta'-1}}\,dx\,dt < \infty. \tag{4.10}$$

Так как, согласно предположениям теоремы, $G \in L_2(D_T)$, $\|G\|_{L_2(D_T)} \neq 0$, $G \geqslant 0$ и $\operatorname{mes} D_T < +\infty$, то, поскольку $\varphi_0|_{D_T} > 0$, имеем

$$0 < \kappa_1 = \int\limits_{D_T} G\varphi_0\,dx\,dt < +\infty. \tag{4.11}$$

Обозначим через $g(\mu)$ правую часть неравенства (4.8), которая является линейной функцией относительно μ. Тогда в силу (4.10) и (4.11) справедливы неравенства

$$g(\mu) < 0 \quad \text{при} \quad \mu > \mu_0 \quad \text{и} \quad g(\mu) > 0 \quad \text{при} \quad \mu < \mu_0, \tag{4.12}$$

где $g(\mu) = \kappa_0 - \beta'\mu\kappa_1$, $\mu_0 = \kappa_0/(\beta'\kappa_1) > 0$.

Согласно (4.12) при $\mu > \mu_0$ правая часть неравенства (4.8) отрицательна, в то время как его левая часть неотрицательна. Полученное противоречие доказывает теорему.

Отметим, что если условие (4.1) выполнено, то условие (2.16) нарушается. Действительно, чтобы убедиться в этом, достаточно взять $u = \lambda(l_1,\ldots,l_N)^{\mathrm{т}}$ при $\lambda \to +\infty$.

Замечание 4.1. Напомним, что в теореме 4.1 для упрощения доказательства мы предположили, что область Ω является единичным шаром $|x| < 1$. Однако эта теорема остаётся справедливой и в более общем случае – когда Ω представляет собой область с достаточно гладкой границей. Указанное предположение было обусловлено конструкцией пробной функции φ_0, удовлетворяющей условиям (4.10) и определяемой формулой (4.9) для достаточно большого положительного m. Если граница $\partial\Omega$ области Ω задана уравнением $\omega(x) = 0$, где $\nabla_x\omega|_{\partial\Omega} \neq 0$, $\omega|_{\Omega} > 0$, $\nabla_x = (\partial/\partial x_1,\ldots,\partial/\partial x_n)$ и $\omega \in C^2(\mathbb{R}^n)$, то тогда вместо пробной функции (4.9) следует взять функцию

$$\varphi_0(x,t) = (\omega(x)t(T-t))^m,$$

где m – достаточно большое положительное число, и в этом случае теорема 4.1 остаётся справедливой.

Замечание 4.2. Теорема 4.1 останется справедливой, если условие (4.1) заменить более общим условием

$$\sum_{i=1}^{N} l_i f_i(u) \leqslant -d_0 \left| \sum_{i=1}^{N} l_i u_i \right|^{\beta} \quad \text{для любого} \quad u = (u_1, \ldots, u_N)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^N, \quad 1 < \beta = \mathrm{const} < \frac{n+1}{n-1}, \qquad (4.13)$$

где $d_0 = \mathrm{const} > 0$. Действительно, неравенство (4.13) сводится к неравенству (4.1). Для этого нужно в неравенстве (4.13) сделать замену $l_i = \lambda \tilde{l}_i$, где $\lambda = d_0^{1/(1-\beta)}$, и разделить обе части полученного неравенства на λ. В результате этого получим неравенство (4.1), в котором вместо l_i будет написано $\tilde{l}_i$.

Приведём один класс вектор-функций f, которые удовлетворяют условию (4.13):

$$f_i(u_1, \ldots, u_N) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} |u_j|^{\beta_{ij}} + b_i, \quad i = \overline{1, N}, \qquad (4.14)$$

где для чисел a_{ij}, β_{ij} и b_i выполняются неравенства

$$a_{ij} > 0, \quad 1 < \beta_{ij} < \frac{n+1}{n-1}, \quad \sum_{i=1}^{N} b_i > 0, \quad i, j = \overline{1, N}. \qquad (4.15)$$

В этом случае в (4.13) следует взять $l_1 = \ldots = l_N = -1$. Действительно, в силу (4.15) выберем числа α_0 и β такими, чтобы

$$0 < a_0 \leqslant \min_{i,j} a_{ij}, \quad \sum_{i=1}^{N} b_i - a_0 N^2 \geqslant 0, \quad 1 < \beta < \beta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, N}. \qquad (4.16)$$

Несложно проверить, что $|s|^{\beta_{ij}} \geqslant |s|^{\beta} - 1$ для всех $s \in \mathbb{R}$. Используя известное неравенство [18, с. 302]

$$\sum_{i=1}^{N} |y_i|^{\beta} > N^{1-\beta} \left| \sum_{i=1}^{N} y_i \right|^{\beta} \quad \text{для любого} \quad y = (y_1, \ldots, y_N)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^N, \quad \beta = \mathrm{const} > 1,$$

вследствие (4.14) и (4.15) будем иметь

$$\sum_{i=1}^{N} f_i(u_1, \ldots, u_N) \geqslant a_0 \sum_{i,j=1}^{N} |u_j|^{\beta_{ij}} + \sum_{i=1}^{N} b_i \geqslant a_0 \sum_{i,j=1}^{N} (|u_j|^{\beta} - 1) + \sum_{i=1}^{N} b_i \geqslant$$

$$\geqslant a_0 N \sum_{j=1}^{N} |u_j|^{\beta} - a_0 N^2 + \sum_{i=1}^{N} b_i \geqslant a_0 N^{2-\beta} \left| \sum_{j=1}^{N} u_j \right|^{\beta} + \sum_{i=1}^{N} b_i - a_0 N^2 \geqslant a_0 N^{2-\beta} \left| \sum_{j=1}^{N} u_j \right|^{\beta}. \qquad (4.17)$$

В силу (4.17) заключаем, что если выполнены условия (4.14) и (4.15), то имеет место неравенство (4.13), в котором $l_1 = \ldots = l_N = -1$ и $d_0 = a_0 N^{2-\beta}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kharibegashvili S., Midodashvili B.* A boundary value problem for higher-order semilinear partial differential equations // Complex Variables and Elliptic Equat. 2019. V. 64. № 5. P. 766–776.
2. *Харибегашвили С.С., Мидодашвили Б.Г.* О существовании, единственности и отсутствии решений одной краевой задачи для квазилинейного гиперболического уравнения // Укр. мат. журн. 2019. Т. 71. № 8. С. 1123–1132.

3. *Kharibegashvili S., Midodashvili B.* Solvability of characteristic boundary-value problems for nonlinear equations with iterated wave operator in the principal part // Electr. J. Differ. Equat. 2008. № 72. P. 1–12.
4. *Kharibegashvili S., Midodashvili B.* On one boundary value problem for a nonlinear equation with iterated wave operator in the principal part // Georgian Math. J. 2008. T. 15. № 3. P. 541–554.
5. *Kharibegashvili S.* Boundary value problems for some classes of nonlinear wave equations // Mem. Differ. Equat. Math. Phys. 2009. V. 46. P. 1–114.
6. *Xiangying C.* Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear evolution equation of fourth order // Appl. Math. J. Chinese Univ. 2001. Ser. B. V. 16. № 3. P. 251–258.
7. *Budd C.J., Galaktionov V.A., Williams J.F.* Self-similar blow-up in higher-order semilinear parabolic equations // Siam J. Appl. Math. 2004. V. 64. № 5. P. 1775–1809.
8. *Aliev A.B., Lichaei B.H.* Existence and nonexistence of global solutions of the Cauchy problem for higher order semilinear pseudohyperbolic equations // J. Nonlin. Anal.: Theory, Methods & Appl. 2010. V. 72. № 7–8. P. 3275–3288.
9. *Wang Y.Z., Wang Y.X.* Existence and nonexistence of global solutions for a class of nonlinear wave equations of higher order // J. Nonlin. Anal.: Theory, Methods & Appl. 2010. V. 72. № 12. P. 4500–4507.
10. *Galaktionov V.A., Mitidieri E.L., Pohozhaev S.I.* Blow-up for Higher-Order Parabolic, Hyperbolic, Dispersion and Schrodinger Equations. New York, 2014.
11. *Ma T., Gu J., Li L.* Asymptotic behaviour of solutions to a class of fourth-order nonlinear evolution equations with dispersive and dissipative terms // J. Inequal. Appl. 2016. V. 2016. Art. 318.
12. *Lin G., Gao Y., Sun Y.* On local existence and blow-up solutions for nonlinear wave equations of higher-order Kirchhoff type with strong dissipation // Int. J. Modern Nonlinear Theory and Appl. 2017. V. 6. № 1. P. 11–25.
13. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М., 1973.
14. *Куфнер Ф., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. М., 1988.
15. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., 1965.
16. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1993.
17. *Митидиери Э., Похожаев С.И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных// Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 2001. Т. 134. С. 3–383.
18. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I. М., 1969.

Грузинский технический университет,
г. Тбилиси,
Тбилисский государственный университет
им. И.А. Джавахишвили, Грузия

Поступила в редакцию 20.10.2021 г.
После доработки 23.11.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 93–104

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.4+515.124.2:517.988.63

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ МНОЖЕСТВО НАКРЫВАНИЯ ОПЕРАТОРА НЕМЫЦКОГО В ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

© 2022 г. Е. С. Жуковский, В. Мерчела

Найдены достаточные условия существования в пространстве измеримых функций решений x скалярных интегральных уравнений

$$f\left(t, \int\limits_0^1 \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds, x(t)\right) = z(t) \quad \text{и} \quad f\left(t, \int\limits_0^t \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds, x(t)\right) = z(t), \quad t \in [0,1],$$

где функции $\mathcal{K}$, z и f заданы; ядро $\mathcal{K}\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ измеримо и интеграл по второму аргументу от его модуля существенно ограничен, свободный член $z\colon [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ измерим, а функция $f\colon [0,1]\times\overline{\mathbb{R}}\times\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима по первому аргументу и непрерывна по совокупности второго и третьего аргументов ($\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\bigcup\{\infty\}$ – вещественная прямая, дополненная одной бесконечно удалённой точкой, с “обычной” метрикой: $\rho_{\overline{\mathbb{R}}}(u,v) = |u-v|$ и $\rho_{\overline{\mathbb{R}}}(\infty, v) = \rho_{\overline{\mathbb{R}}}(u,\infty) = +\infty$, $\rho_{\overline{\mathbb{R}}}(\infty,\infty) = 0$, где $u, v \in \mathbb{R}$). Условия получены на основании обобщения понятий и результатов теории накрывающих отображений на пространства более общие, чем метрические.

DOI: 10.31857/S0374064122010101

Введение. Исследование нелинейных интегральных уравнений вида

$$f\left(t, \int\limits_0^1 \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds, x(t)\right) = 0, \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

(называемых не разрешёнными относительно неизвестной функции $x : [0,1] \to \mathbb{R}^n$) методами теории накрывающих отображений метрических пространств начато в работе [1]. В этой работе рассматривалось вольтеррово интегральное уравнение (т.е. уравнение вида (1) в случае $\mathcal{K}(t,s) = 0$ при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$), доказаны утверждения о его разрешимости в пространстве измеримых существенно ограниченных функций, об оценках решений и устойчивости решений по отношению к изменениям функций f и $\mathcal{K}$. Близкими методами в [2] рассмотрены вопросы продолжаемости решений вольтерровых уравнений.

Результаты о накрывающих отображениях метрических пространств оказались удобным инструментом исследования некоторых других классов функциональных уравнений, к которым не удавалось применить классические теоремы о неподвижной точке. В [3] этот подход был применён к обыкновенным дифференциальным уравнениям, не разрешённым относительно производной. В дальнейших исследованиях (см. работы [4, 5] и другие работы тех же авторов) рассмотрены вопросы существования, получены оценки и установлена зависимость от параметров решений задачи Коши, краевых задач и задач управления для таких уравнений. Результаты о накрывающих отображениях имеют также перспективы в применении их к исследованию задач оптимизации для анормальных процессов управления (см. [6]).

В работах [7–10] результаты о накрывающих отображениях метрических пространств были уточнены и распространены на пространства с обобщёнными метриками. Данная статья продолжает эти исследования. Здесь рассматривается абстрактное уравнение (1), которое порождается отображением f, действующим из метрического пространства в пространство с обобщённым расстоянием, удовлетворяющим только аксиоме тождества (остальные аксиомы метрики: симметричность и неравенство треугольника не предполагаются выполненными). В терминах множества накрывания этого отображения доказывается теорема о существовании и оценках решений. Полученное утверждение позволяет исследовать различные функциональные уравнения в широких классах не обязательно метрических функциональных пространств, например, возникающих при изучении некоторых сингулярных уравнений с несуммируемыми особенностями. В данной работе это утверждение применяется к скалярному интегральному уравнению вида (1) в пространстве измеримых функций, суммируемость которых не предполагается. Отметим, что для интегральных уравнений наиболее известные результаты получены в банаховых пространствах непрерывных функций или суммируемых функций (см. монографию [11], обзоры [12, 13], статью [14] и библиографию в них). Несмотря на то, что здесь интегральное уравнение рассматривается в пространстве измеримых функций (наделённом не нормой, а обобщённым расстоянием), полученные оценки решений позволяют, в том числе, проверять, является ли решение функцией, суммируемой с некоторой степенью.

1. Основные понятия. Обозначим $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R}\bigcup\{\infty\}$ и определим разность двух элементов, среди которых есть ∞, соотношениями

$$\infty-\infty=0 \text{ и } x-\infty=\infty-x=\infty \text{ для любого } x\in\mathbb{R}.$$

Также обозначим $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+\bigcup\{+\infty\}=[0,+\infty]$ и определим операцию вычисления модуля $|\cdot|:\overline{\mathbb{R}}\to\overline{\mathbb{R}}_+$, причём будем полагать, что $|\infty|=+\infty$. Будем считать, что в $\overline{\mathbb{R}}$ задана "обычная" метрика $\rho_{\overline{\mathbb{R}}}(u_1,u_2)=|u_1-u_2|$, $u_1,u_2\in\overline{\mathbb{R}}$, и такая же "обычная" метрика $\rho_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ задана в $\overline{\mathbb{R}}_+$ (т.е. для $v_1,v_2\in\overline{\mathbb{R}}_+$ имеем: $\rho_{\overline{\mathbb{R}}_+}(v_1,v_2)=\rho_{\overline{\mathbb{R}}}(u_1,u_2)$, где $u_i:=v_i$, если $v_i\neq+\infty$, и $u_i=\infty$, если $v_i=+\infty$, $i=1,2$).

Пусть $X=(X,\rho)$ – метрическое пространство с метрикой $\rho: X\times X\to\overline{\mathbb{R}}_+$. Обозначим $B_X(x_0,r)=\{x\in X: \rho(x,x_0)\leqslant r\}$ – замкнутый шар в X с центром в точке $x_0\in X$ радиуса $r\in\overline{\mathbb{R}}_+$ (при $r=+\infty$ и любом x_0 полагаем $B_X(x_0,+\infty)=X$).

Пусть на непустом множестве Y определено *обобщённое расстояние* – отображение $d: Y\times Y\to\overline{\mathbb{R}}_+$, удовлетворяющее условию:

$$d(y_1,y_2)=0, \text{ если и только если } y_1=y_2 \tag{2}$$

(важно, что другими свойствами метрик отображение d может не обладать). Для $\{y_i\}\subset Y$, $y\in Y$ имеет место сходимость $y_i\to y$ при $i\to+\infty$, если $d(y_i,y)\to 0$ при $i\to+\infty$. Очевидно, что из так определённой сходимости $y_i\to y$ не следуют ни единственность предела y, ни сходимость к нулю последовательности $d(y,y_i)$.

В работах [10, 15] на отображения $(X,\rho)\to(Y,d)$ перенесены "обычные" определения анализа: отображение $f: X\to Y$ называется *непрерывным в точке* $x\in X$, если для любой последовательности $\{x_i\}\subset X$ такой, что $\rho(x_i,x)\to 0$, имеет место сходимость $d(f(x_i),f(x))\to 0$, и *замкнутым* в точке $x\in X$, если для любых последовательности $\{x_i\}\subset X$ и элемента $y\in Y$ таких, что $\rho(x_i,x)\to 0$ и $d(f(x_i),y)\to 0$, справедливо равенство $f(x)=y$. Отображение, являющееся непрерывным (замкнутым) во всех точках, называется *непрерывным* (*замкнутым*).

Отметим следующее свойство отображений, действующих в пространство с обобщённым расстоянием: если для точки x существует такая сходящаяся к ней последовательность $\{x_i\}$, что предел последовательности $\{f(x_i)\}$ не единственный, то отображение f не является замкнутым в точке x (при этом f может быть непрерывным в этой точке). В [9, 15] предложено понятие *множества замкнутости отображения* f *относительно множества* $U\subset X$, в котором единственность предела последовательности $\{f(x_i)\}$ перестаёт быть необходимой. Это множество определяется соотношением

$$\begin{gathered}\operatorname{Cl}[f;U] := \{(x,y)\in X\times Y\colon \text{для любой последовательности } \{x_i\}\subset U \text{ такой, что}\\ x_i\to x \text{ и } f(x_i)\to y, \text{ верно равенство } f(x)=y\}.\end{gathered}$$

Очевидно, что если для любой сходящейся к x последовательности $\{x_i\}\subset U$ последовательность $\{f(x_i)\}\subset Y$ либо расходится, либо сходится и в множестве её пределов содержится элемент $f(x)$, то $(x,f(x))\in \mathrm{Cl}\,[f;U]$. В то же время в рассматриваемой ситуации если предел не единственный, то отображение f не будет замкнутым в точке x.

Пусть заданы $\alpha>0$, $\beta\geqslant 0$. В полученных далее утверждениях существенно используются следующие множества, определённые в [9]: *множество α-накрывания отображения f относительно множества $U\subset X$*:

$$\mathrm{Cov}_\alpha[f;U]:=\{(x,y)\in X\times Y \text{ существует } u\in U \text{ такой, что } \\ f(u)=y,\ \ \rho(x,u)\leqslant \alpha^{-1}d(f(x),y),\ \ \rho(x,u)<+\infty\};$$

и *множество β-липшицевости отображения f относительно множества $U\subset X$*

$$\mathrm{Lip}_\beta[f;U]:=\{(x,y)\in X\times Y\colon \text{для любого } u\in U \text{ такого, что} \\ f(u)=y, \text{ верно неравенство } d(f(x),y)\leqslant \beta\rho(x,u)\}.$$

В частном случае, когда значения метрики ρ и обобщённого расстояния d конечны и $U=X$, множества $\mathrm{Cl}\,[f;U]$, $\mathrm{Cov}_\alpha[f;U]$, $\mathrm{Lip}_\beta[f;U]$ определены в работе [15].

Отметим, что равенство $\mathrm{Cov}_\alpha[f;X]=X\times Y$ равносильно свойству α-накрывания отображения f, а равенство $\mathrm{Lip}_\beta[f;X]=X\times Y$ – свойству β-липшицевости этого отображения.

Определённые здесь множества замкнутости, накрывания и липшицевости отображения f обладают следующим свойством монотонности относительно $U\subset X$:

$$\text{если } U\subset\overline{U}\subset X, \text{ то } \mathrm{Cl}\,[f;U]\supset\mathrm{Cl}\,[f;\overline{U}],\ \ \mathrm{Cov}_\alpha[f;U]\subset\mathrm{Cov}_\alpha[f;\overline{U}],\ \ \mathrm{Lip}_\beta[f;U]\supset\mathrm{Lip}_\beta[f;\overline{U}]. \tag{3}$$

Теорема о точках совпадения накрывающего и липшицева отображений метрических пространств получена А.В. Арутюновым в [16]. На отображения пространств с обобщёнными метриками эта теорема распространена в [7, 8], а на отображения, действующие из метрического пространства в пространство с обобщённым расстоянием – в [10]. Здесь мы докажем утверждение об уравнении другого вида с отображением из метрического пространства в пространство с обобщённым расстоянием, к которому сводится рассматриваемое далее интегральное уравнение (о связи этого операторного уравнения с уравнением для точки совпадения см. [15]).

Пусть задано отображение $F:X\times X\to Y$ и элемент $\tilde y\in Y$. Рассмотрим уравнение

$$G(x):=F(x,x)=\tilde y \tag{4}$$

относительно неизвестного $x\in X$. Следующая теорема о разрешимости уравнения (4) сформулирована в работе [9, теорема 2] без доказательства. Аналогичное утверждение при несколько более ограничительных условиях (метрика ρ и расстояние d не могут принимать бесконечные значения и $U=X$) получено в [15].

Теорема 1. *Пусть X – полное метрическое пространство и заданы элемент $x_0\in X$ такой, что $d(F(x_0,x_0),\tilde y)<+\infty$, и числа $\alpha>\beta\geqslant 0$. Пусть также для любого $x\in U:= B_X(x_0,R)$, где $R:=d(F(x_0,x_0),\tilde y)/(\alpha-\beta)$, выполнены включения*

$$(x,\tilde y)\in\mathrm{Cov}_\alpha[F(\,\cdot\,,x);X],\quad (x,\tilde y)\in\mathrm{Lip}_\beta[F(x,\cdot\,);U],\quad (x,\tilde y)\in\mathrm{Cl}\,[G;U].$$

Тогда в шаре U существует решение уравнения (4).

Доказательство. Без ограничения общности будем предполагать, что x_0 не является решением уравнения (4). Покажем по индукции, что существует последовательность $\{x_i\}$, члены которой удовлетворяют при всех $i=1,2,\ldots$ соотношениям

$$F(x_i,x_{i-1})=\tilde y,\quad \rho(x_i,x_0)\leqslant\frac{\alpha^i-\beta^i}{\alpha^i(\alpha-\beta)}d(F(x_0,x_0),\tilde y),\quad d(F(x_i,x_i),\tilde y)\leqslant\beta\rho(x_i,x_{i-1}). \tag{5}$$

В силу предположений доказываемой теоремы верно включение $(x_0,\tilde y)\in\mathrm{Cov}_\alpha[F(\,\cdot\,,x_0);U]$. Поэтому существует $x_1\in X$, для которого справедливы соотношения

$$F(x_1,x_0)=\tilde y\quad\text{и}\quad \rho(x_1,x_0)\leqslant\frac{1}{\alpha}d(F(x_0,x_0),\tilde y)<R.$$

Из последнего неравенства следует включение $x_1 \in U,$ и согласно предположениям доказываемой теоремы $(x_1, \tilde{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x_1, \cdot\,); U],$ поэтому $d(F(x_1, x_1), \tilde{y}) \leqslant \beta\rho(x_1, x_0).$ Для $i = 1$ соотношения (5) установлены.

Пусть соотношения (5) выполнены при всех натуральных $i \leqslant k.$ Докажем их справедливость при $i = k + 1.$

Для любого $j \leqslant k$ из неравенств

$$\rho(x_j, x_0) \leqslant \frac{\alpha^j - \beta^j}{\alpha^j(\alpha - \beta)} d(F(x_0, x_0), \tilde{y}) < R$$

следуют включения

$$(x_j, \tilde{y}) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\,\cdot\,, x_j); X] \quad \text{и} \quad (x_j, \tilde{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x_j, \cdot\,); U].$$

Согласно первому из этих включений существует $x_{j+1},$ для которого

$$F(x_{j+1}, x_j) = \tilde{y}, \tag{6}$$

$$\rho(x_{j+1}, x_j) \leqslant \frac{1}{\alpha} d(F(x_j, x_j), \tilde{y}) = \frac{1}{\alpha} d(F(x_j, x_j), F(x_j, x_{j-1})),$$

а согласно второму включению имеем

$$d(F(x_j, x_j), F(x_j, x_{j-1})) \leqslant \beta\rho(x_j, x_{j-1}).$$

Таким образом,

$$\rho(x_{j+1}, x_j) \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\rho(x_j, x_{j-1}) \leqslant \ldots \leqslant \frac{\beta^j}{\alpha^j}\rho(x_1, x_0). \tag{7}$$

Для $i = k + 1$ первое соотношение в (5) непосредственно следует из (6), если положить $j = k.$ А из (7) при $j = k$ вытекают неравенства

$$\rho(x_{k+1}, x_k) \leqslant \frac{\beta^k}{\alpha^k}\rho(x_1, x_0) \leqslant \frac{\beta^k}{\alpha^{k+1}} d(F(x_0, x_0), \tilde{y}).$$

Используя эту оценку расстояния $\rho(x_{k+1}, x_k),$ получаем

$$\rho(x_0, x_{k+1}) \leqslant \rho(x_0, x_k) + \rho(x_k, x_{k+1}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha^k(\alpha - \beta)} d(F(x_0, x_0), \tilde{y}) + \frac{\beta^k}{\alpha^{k+1}} d(F(x_0, x_0), \tilde{y}) = \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha^{k+1}(\alpha - \beta)} d(F(x_0, x_0), \tilde{y}).$$

Итак, второе соотношение в (5) для $i = k+1$ выполнено, откуда следует, что $\rho(x_0, x_{k+1}) \leqslant R,$ $x_{k+1} \in U,$ и так как $(x_{k+1}, \tilde{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x_{k+1}, \cdot\,); U],$ имеем $d(F(x_{k+1}, x_{k+1}), \tilde{y}) \leqslant \beta\rho(x_{k+1}, x_k).$ Поэтому третье соотношение в (5) для $i = k + 1$ также выполнено.

Покажем, что последовательность $\{x_i\}$ является фундаментальной. При любых натуральных $n, m,$ $m > n,$ в силу второго соотношения в (5) имеем неравенства

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \rho(x_{m-1}, x_m) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha}\sum_{i=n}^{m-1}\frac{\beta^i}{\alpha^i} d(F(x_0, x_0), \tilde{y}) \leqslant \frac{\beta^n}{\alpha^n}\frac{1}{\alpha - \beta} d(F(x_0, x_0), \tilde{y}).$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ при всех натуральных n, m таких, что $m > n > N = \log_{\beta/\alpha}(\varepsilon(\alpha - \beta)/d(F(x_0, x_0), \tilde{y})),$ верно неравенство $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$

Фундаментальная последовательность $\{x_i\} \subset U$ сходится при $i \to \infty$ в полном метрическом пространстве X к некоторому $\tilde{x} \in U.$ Из третьего соотношения в (5) следует сходимость $d(F(x_i, x_i), \tilde{y}) \to 0,$ т.е. $G(x_i) \to \tilde{y}.$ А так как имеет место включение $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathrm{Cl}\,[G; U],$ окончательно получаем $G(\tilde{x}) = \tilde{y}.$ Теорема доказана.

2. Множества накрывания и липшицевости отображений в пространствах измеримых функций. Пусть $\tau > 0$ Напомним, что функция $u : [0,\tau] \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *измеримой*, если множества $\{t \in [0,\tau] : u(t) \leqslant z\}$, $z \in \mathbb{R}$, и $\{t \in [0,\tau] : u(t) = \infty\}$ измеримы (по Лебегу). Очевидно, для измеримости функции $u : [0,\tau] \to \overline{\mathbb{R}}$ необходимо и достаточно, чтобы измеримым было её эффективное множество $\{t \in [0,\tau] : u(t) \neq \infty\}$ и чтобы сужение функции u на эффективное множество было измеримым (в "обычном" смысле). Обозначим через $\overline{\mathbb{S}}_\tau$ линейное пространство (классов) измеримых по Лебегу функций $u : [0,\tau] \to \overline{\mathbb{R}}$, а через $\mathbb{S}_\tau$ его подпространство, состоящее из функций $u : [0,\tau] \to \mathbb{R}$. В пространстве $\overline{\mathbb{S}}_\tau$ определим обобщённое расстояние следующим образом.

Пусть задана функция $\theta : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ такая, что при любом фиксированном $z \in \overline{\mathbb{R}}$ функция $\theta(\,\cdot\,,z) : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ непрерывна в точке z, выполняются равенство $\theta(z,z) = 0$ и условие:

$$\begin{gathered}\text{для любого } \delta > 0 \text{ существует } \gamma = \gamma(z,\delta) > 0, \text{ для которого при всех } z' \in \overline{\mathbb{R}} \\ \text{таких, что } |z' - z| \geqslant \delta, \text{ справедливо неравенство } \theta(z',z) \geqslant \gamma. \end{gathered} \tag{8}$$

Функция θ удовлетворяет условию (2), т.е. является обобщённым расстоянием в $\overline{\mathbb{R}}$; соответствующее пространство будем обозначать через $\overline{\mathbb{R}}^\theta := (\overline{\mathbb{R}}, \theta)$. Будем также предполагать, что функция θ суперпозиционно измерима, т.е. $\theta(z_1(\cdot), z_2(\cdot)) \in \overline{\mathbb{S}}_\tau$ для любых функций $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{S}}_\tau$.

Замечание 1. Для суперпозиционной измеримости функции θ достаточно, чтобы по каждому аргументу эта функция была непрерывной. Более общие условия суперпозиционной измеримости получены в [17] (см. также в [18]) для функций с аргументами из $\mathbb{R}$. Эти результаты остаются верными, если аргументы принимают значения из "расширенного" пространства $\overline{\mathbb{R}}$. Например, функция θ суперпозиционно измерима, если по каждому аргументу она односторонне непрерывна (т.е. каждая из функций $\theta(z,\cdot)$, $\theta(\,\cdot\,,z)$ непрерывна справа на всём $\overline{\mathbb{R}}$ или непрерывна слева на всём $\overline{\mathbb{R}}$).

Свойство суперпозиционной измеримости функции θ позволяет определить отображение $d^\theta : \overline{\mathbb{S}}_\tau \times \overline{\mathbb{S}}_\tau \to \overline{\mathbb{R}}_+$ соотношением

$$d^\theta(z_1,z_2) = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \theta(z_1(t), z_2(t)), \quad z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{S}}_\tau.$$

Так как равенства $\theta(z_1,z_2) = 0$ и $z_1 = z_2$ равносильны, то для отображения d^θ выполнено условие (2), т.е. d^θ – обобщённое расстояние в $\overline{\mathbb{S}}_\tau$. Пространство измеримых функций с таким расстоянием обозначим символом $\overline{\mathbb{S}}_\tau^\theta := (\overline{\mathbb{S}}_\tau, d^\theta)$. Подпространство $\mathbb{S}_\tau \subset \overline{\mathbb{S}}_\tau$ с индуцированным расстоянием обозначим $\mathbb{S}_\tau^\theta := (\mathbb{S}_\tau, d^\theta)$. Аналогичное определение обобщённого расстояния в пространстве $\mathbb{S}_\tau$ введено в работе [9]. В этом определении из [9] предполагалось, что функция θ задана на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, непрерывна по каждому аргументу, а в условии (8) величина положительного γ не зависит от точки z.

Простейшая функция, удовлетворяющая перечисленным выше условиям, – это функция $\theta_0 : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, заданная равенством

$$\theta_0(z_1,z_2) = |z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{R}},$$

определяющая "стандартную" метрику в $\overline{\mathbb{R}}$. Такое "обычное" метрическое пространство будем обозначать $\overline{\mathbb{R}}^{\theta_0} := (\overline{\mathbb{R}}, \theta_0)$. Отметим, что сходимости в $\overline{\mathbb{R}}$ относительно расстояния θ и "стандартной" метрики θ_0 совпадают. Действительно, если для некоторых $z \in \overline{\mathbb{R}}$, $\{z_i\} \subset \overline{\mathbb{R}}$, выполнено $\theta(z_i,z) \to 0$, и тем не менее $\theta_0(z_i,z) := |z_i - z| \not\to 0$, то существуют $\delta > 0$ и подпоследовательность $\{z_{i_j}\}$ такие, что $|z_{i_j} - z| \geqslant \delta$. Из условия (8) следует, что найдётся $\gamma > 0$, для которого $\theta(z_{i_j}, z) \geqslant \gamma$, что противоречит соотношению $\theta(z_i,z) \to 0$. Обратно, в силу непрерывности функции $\theta(\,\cdot\,,z)$ в точке z получаем, что из сходимости $|z_i - z| \to 0$ следует $\theta(z_i,z) \to \theta(z,z) = 0$.

Так как сходимости в $\overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ и $\overline{\mathbb{R}}^{\theta_0}$ совпадают, то для действующих в $\overline{\mathbb{R}}$ функций свойства непрерывности не зависят от того, какое из расстояний θ или θ_0 задано в $\overline{\mathbb{R}}$. Также следствием доказанной эквивалентности сходимостей относительно расстояния θ и метрики θ_0 является совпадение замкнутых множеств пространств $\overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ и $\overline{\mathbb{R}}^{\theta_0}$ (соответственно, и совпадение открытых множеств этих пространств). Поэтому мы будем говорить о непрерывности функций, замкнутости (или открытости) множеств в $\overline{\mathbb{R}}$, не упоминая конкретное расстояние в этом пространстве.

Используя функцию θ_0, определим отображение $d^{\theta_0} : \overline{\mathbb{S}}_\tau \times \overline{\mathbb{S}}_\tau \to \overline{\mathbb{R}}_+$ равенством

$$d^{\theta_0}(z_1, z_2) = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} |z_1(t) - z_2(t)|, \quad z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{S}}_\tau.$$

Очевидно d^{θ_0} – метрика в $\overline{\mathbb{S}}_\tau$. Обозначим $\rho := d^{\theta_0}$, $\overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta_0} := (\overline{\mathbb{S}}_\tau, \rho)$. Подпространство $\mathbb{S}_\tau \subset \overline{\mathbb{S}}_\tau$ с индуцированной метрикой обозначим $\mathbb{S}_\tau^{\theta_0} := (\mathbb{S}_\tau, \rho)$. Отметим, что метрическое пространство $\overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta_0}$ является полным, шар $B_{\overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta_0}}(z_0, r) = \{z \in \overline{\mathbb{S}}_\tau : \rho(z, z_0) \leqslant r\}$ в этом пространстве – это множество измеримых функций $z : [0, \tau] \to \overline{\mathbb{R}}$ со значениями, удовлетворяющими включению $z(t) \in [z_0(t) - r, z_0(t) + r]$ при п.в. $t \in [0, \tau]$.

Теперь рассмотрим отображения, действующие в определённых здесь пространствах измеримых функций, которые будут использованы в исследовании интегральных уравнений.

Пусть задана удовлетворяющая условиям Каратеодори функция $g : [0, \tau] \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ (т.е. для любых $x \in \mathbb{R}$ и п.в. $t \in [0, \tau]$ функция $g(\,\cdot\,, x) : [0, \tau] \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима, а функция $g(t, \cdot\,) : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ непрерывна). Отметим, что для такой функции при любом фиксированном $t \in [0, \tau]$ выполнена импликация:

если существует $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, при котором $g(t, \tilde{x}) \neq \infty$, то $g(t, x) \neq \infty$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Это непосредственно следует из замкнутости двух множеств: множества $\{x \in \mathbb{R} : g(t, x) \neq \infty\}$ и его дополнения $\{x \in \mathbb{R} : g(t, x) = \infty\}$ (замкнутость этих множеств очевидна: если $x_i \to x$, то $g(t, x_i) \to g(t, x)$, при этом в случае $g(t, x_i) \in \mathbb{R}$ получаем $g(t, x) \in \mathbb{R}$, а в случае $g(t, x_i) = \infty$ получаем $g(t, x) = \infty$).

Определим оператор Немыцкого $N_g : \mathbb{S}_\tau^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta}$ соотношением

$$(N_g u)(t) = g(t, u(t)) \quad \text{для всех } \ u \in \mathbb{S}_\tau^{\theta_0}, \quad \text{где } \ t \in [0, \tau]. \tag{9}$$

Приведём два утверждения об операторе $N_g : \mathbb{S}_\tau^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta}$, которые распространяют соответствующие результаты [9, предложения 1, 2] на введённые здесь пространства измеримых функций.

Предложение 1. *Определённый соотношением (9) оператор* $N_g : \mathbb{S}_\tau^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta}$ *является замкнутым.*

Несмотря на то, что функция θ здесь удовлетворяет менее ограничительным условиям, чем в [9], доказательство сформулированного предложения не отличается от доказательства предложения 1 цитируемой работы, поэтому мы его опускаем.

Пусть задано измеримое многозначное отображение $\Phi : [0, \tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$, значения которого $\Phi(t) \neq \varnothing$, $t \in [0, \tau]$, являются замкнутыми в $\mathbb{R}$ множествами. Определим множество *измеримых сечений* этого отображения

$$\operatorname{Sel}(\Phi) := \{u \in \mathbb{S}_\tau : u(t) \in \Phi(t) \ \text{ при п.в. } \ t \in [0, \tau]\}.$$

Имеем $\operatorname{Sel}(\Phi) \neq \varnothing$ (используемые здесь и далее результаты многозначного анализа см. в [19, п. 8.1.2; 20, § 2.5; 21, § 1.5]).

Следующее предложение устанавливает связь между множеством накрывания оператора Немыцкого $N_g : \mathbb{S}_\tau^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta}$ относительно $\operatorname{Sel}(\Phi) \subset \mathbb{S}_\tau^{\theta_0}$ и множеством накрывания функции $g(t, \cdot\,) : \mathbb{R}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ относительно $\Phi(t) \subset \mathbb{R}^{\theta_0}$ при п.в. $t \in [0, \tau]$.

Предложение 2. *Пусть для заданных* $x \in \mathbb{S}_\tau$, $z \in \overline{\mathbb{S}}_\tau$ *и* $\alpha > 0$ *при п.в.* $t \in [0,\tau]$ *выполнено включение* $(x(t), z(t)) \in \operatorname{Cov}_\alpha[g(t,\cdot);\Phi(t)]$, *т.е. для некоторого* $u \in \Phi(t)$ *имеют место соотношения*

$$g(t,u) = z(t) \ \text{ и } \ |x(t)-u| \leqslant \theta(g(t,x(t)),z(t))/\alpha.$$

Тогда $(x,z) \in \operatorname{Cov}_\alpha[N_g;\operatorname{Sel}(\Phi)]$. *В частности, если* $(x(t),z(t)) \in \operatorname{Cov}_\alpha[g(t,\cdot);\mathbb{R}^{\theta_0}]$, *то* $(x,z) \in \operatorname{Cov}_\alpha[N_g;\mathbb{S}_\tau^{\theta_0}]$.

Сформулированное утверждение аналогично полученному в [9] при более ограничительных требованиях на функцию θ результату о множестве накрывания оператора Немыцкого, действующего из $\mathbb{S}_\tau^{\theta_0}$ в $\mathbb{S}_\tau^{\theta}$. Тем не менее доказательство [9, предложение 2] сохраняется практически без изменений и поэтому здесь не приводится.

Теперь рассмотрим оператор следующего вида. Пусть задана удовлетворяющая условиям Каратеодори функция $\overline{g} : [0,\tau] \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ и измеримая функция $\mathcal{K} : [0,\tau] \times [0,\tau] \to \mathbb{R}$. Определим отображение $\Upsilon : \mathbb{S}_\tau^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta}$ отношением

$$(\Upsilon u)(t) = \overline{g}\biggl(t, \int\limits_0^\tau \mathcal{K}(t,s)u(s)\,ds\biggr) \quad \text{для всех } \ u \in \mathbb{S}_\tau^{\theta_0}, \quad \text{где } \ t \in [0,\tau]. \tag{10}$$

Если при некотором t интеграл не существует, то при этом t полагаем значение интеграла равным ∞. Оператор (10) можно представить в виде композиции $\Upsilon = N_{\overline{g}}K$ интегрального оператора $K : \mathbb{S}_\tau^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta_0}$, заданного равенством

$$(Ku)(t) = \int\limits_0^\tau \mathcal{K}(t,s)u(s)\,ds \quad \text{для всех } \ u \in \mathbb{S}_\tau^{\theta_0}, \quad \text{где } \ t \in [0,\tau],$$

и оператора Немыцкого $N_{\overline{g}} : \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta}$, порождённого функцией $\overline{g}$, т.е.

$$(N_{\overline{g}}y)(t) = \overline{g}(t,y(t)) \quad \text{для всех } \ y \in \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta_0}, \quad \text{где } \ t \in [0,\tau].$$

Исследование композиции $\Upsilon = N_{\overline{g}}K$ начнём с рассмотрения множества липшицевости оператора $N_{\overline{g}} : \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta}$. Установим связь между этим множеством и множеством липшицевости функции $\overline{g} : [0,\tau] \times \overline{\mathbb{R}}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$.

Пусть задано многозначное отображение $\Omega : [0,\tau] \rightrightarrows \overline{\mathbb{R}}$ такое, что $\Omega(t) \neq \varnothing$, $t \in [0,\tau]$. Будем предполагать, что это отображение имеет измеримое сечение, т.е.

$$\operatorname{Sel}(\Omega) := \{u \in \overline{\mathbb{S}}_\tau : u(t) \in \Omega(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [0,\tau]\} \neq \varnothing.$$

Предложение 3. *Пусть для заданных* $v, z \in \overline{\mathbb{S}}_\tau$ *и* $\beta \geqslant 0$ *при п.в.* $t \in [0,\tau]$ *выполнено включение* $(v(t),z(t)) \in \operatorname{Lip}_\beta[\overline{g}(t,\cdot);\Omega(t)]$, *т.е. имеет место соотношение:*

$$\begin{gathered} \textit{для произвольного } u \in \Omega(t) \textit{ такого, что } \overline{g}(t,u) = z(t), \\ \textit{справедливо неравенство } \theta(\overline{g}(t,v(t)),z(t)) \leqslant \beta|v(t)-u|. \end{gathered} \tag{11}$$

Тогда $(v,z) \in \operatorname{Lip}_\beta[N_{\overline{g}};\operatorname{Sel}(\Omega)]$.

Доказательство этого предложения с очевидностью следует из определения множества липшицевости. Аналогичное утверждение для оператора Немыцкого в пространстве $\mathbb{S}_\tau$, порождённого функцией $g : [0,\tau] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, в случае измеримого замкнутозначного отображения $\Omega : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$ и непрерывной по каждому аргументу вещественной функции $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ получено в [9].

Предложение 4. *Пусть*

$$k_0 := \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \int\limits_0^\tau |\mathcal{K}(t,s)|\,ds < +\infty, \tag{12}$$

заданы $x \in \mathbb{S}_\tau$, $z \in \overline{\mathbb{S}}_\tau$, $\beta \geqslant 0$ *и многозначное отображение* $\Phi : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$ *со значениями* $\Phi(t) \neq \varnothing$, $t \in [0,\tau]$, *такое, что* $\operatorname{Sel}(\Phi) \neq \varnothing$. *Пусть также для пары функций* $v = Kx \in \overline{\mathbb{S}}_\tau$, $z \in \overline{\mathbb{S}}_\tau$ *и многозначного отображения*

$$\Omega : [0,\tau] \rightrightarrows \overline{\mathbb{R}}, \quad \Omega(t) = (K\Phi)(t) := \left\{ \int\limits_0^\tau \mathcal{K}(t,s)u(s)\,ds, \quad u \in \operatorname{Sel}(\Phi) \right\}, \quad t \in [0,\tau],$$

при п.в. $t \in [0,\tau]$ *выполнено соотношение (11). Тогда* $(x,z) \in \operatorname{Lip}_{k_0\beta}[\Upsilon; \operatorname{Sel}(\Phi)]$.

Доказательство. Для любого $u \in \operatorname{Sel}(\Phi)$ функция $Ku \in \overline{\mathbb{S}}_\tau$ является измеримым сечением многозначного отображения Ω, поэтому множество $\operatorname{Sel}(\Omega) \subset \overline{\mathbb{S}}_\tau$ не пусто.

Пусть для некоторой функции $\widehat{u} \in \operatorname{Sel}(\Phi)$ выполнено равенство $N_{\overline{g}}K\widehat{u} = z$. Определим функцию $u := K\widehat{u}$. Очевидно, что $u \in \operatorname{Sel}(\Omega)$ и $N_{\overline{g}}u = z$. Так как справедливо соотношение (11), то, согласно предложению 3, имеем $(v,z) \in \operatorname{Lip}_\beta[N_{\overline{g}}; \operatorname{Sel}(\Omega)]$. Поэтому в силу определения множества $\operatorname{Lip}_\beta[N_{\overline{g}}; \operatorname{Sel}(\Omega)]$ получаем $d^\theta(N_{\overline{g}}Kx, z) = d^\theta(N_{\overline{g}}v, z) \leqslant \beta\rho(v,u) = \beta\rho(Kx, K\widehat{u})$. Следовательно,

$$d^\theta(N_{\overline{g}}Kx, z) \leqslant \beta \operatorname*{vrai\,sup}_{s\in[0,\tau]} |x(s) - \widehat{u}(s)| \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \int\limits_0^\tau |\mathcal{K}(t,s)|\,ds = k_0\beta\rho(x,\widehat{u}).$$

Итак, $(x,z) \in \operatorname{Lip}_{k_0\beta}[N_{\overline{g}}K; \operatorname{Sel}(\Phi)]$. Предложение доказано.

Замечание 2. Условие (12) выполнено, например, в случае, когда ядро $\mathcal{K}(t,s)$ интегрального оператора $K : \mathbb{S}_\tau^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta_0}$ мажорируется суммируемой функцией, т.е. выполнено соотношение

$$\begin{gathered}\text{существует } M \in \mathbb{S}_\tau, \text{ для которой } |\mathcal{K}(t,s)| \leqslant M(s) \\ \text{при п.в. } (t,s) \in [0,\tau]\times[0,\tau] \text{ и } \textstyle\int_0^\tau M(s)\,ds < +\infty.\end{gathered} \tag{13}$$

3. Интегральное уравнение. Применим полученные утверждения к исследованию разрешимости интегрального уравнения. Как и выше предполагаем, что задана измеримая функция $\mathcal{K} : [0,\tau]\times[0,\tau] \to \mathbb{R}$, которая удовлетворяет условию (12). Пусть также заданы $\tilde{z} \in \overline{\mathbb{S}}_\tau$ и функция $f : [0,\tau]\times\overline{\mathbb{R}}\times\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, измеримая по первому аргументу и непрерывная по совокупности второго и третьего аргументов. Рассмотрим уравнение

$$f\left(t, \int\limits_0^\tau \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds, x(t)\right) = \tilde{z}(t), \quad t \in [0,\tau], \tag{14}$$

относительной неизвестной функции $x \in \mathbb{S}_\tau$.

Для произвольной функции $x \in \mathbb{S}_\tau$ определим функцию $\overline{g}^{[x]} : [0,\tau]\times\overline{\mathbb{R}}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ равенством

$$\overline{g}^{[x]}(t,u) = f(t,u,x(t)) \text{ для всех } (t,u) \in [0,\tau]\times\overline{\mathbb{R}}, \tag{15}$$

и функцию $g^{[x]} : [0,\tau]\times\mathbb{R}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ соотношением

$$g^{[x]}(t,u) = f\left(t, \int\limits_0^\tau \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds, u\right) \text{ для всех } (t,u) \in [0,\tau]\times\mathbb{R}.$$

Функции $g^{[x]}$, $\overline{g}^{[x]}$, очевидно, удовлетворяют условиям Каратеодори.

Теорема 2. *Пусть задана функция* $x_0 \in \mathbb{S}_\tau$ *такая, что*

$$R_0 := \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,1]} \theta(f(t, v_0(t), x_0(t)), \tilde{z}(t)) < +\infty, \quad \text{где} \quad v_0(t) := (Kx_0)(t) = \int\limits_0^\tau \mathcal{K}(t,s)x_0(s)\,ds.$$

Пусть $\alpha > 0,$ $\sigma \in (0, \alpha)$ *и* $R := R_0/\sigma,$ *а многозначное отображение* $\overline{\Omega} : [0, \tau] \rightrightarrows \overline{\mathbb{R}}$ *определено соотношением* $\overline{\Omega}(t) := [v_0(t) - k_0 R, v_0(t) + k_0 R]$ *для любого* $t \in [0, \tau]$. *Пусть, кроме того, при любом* $x \in B_{\mathbb{S}_\tau^{\theta_0}}(x_0, R)$ *при п.в.* $t \in [0, 1]$ *имеют место включения*

$$(x(t), \tilde{z}(t)) \in \operatorname{Cov}_\alpha[g^{[x]}(t, \cdot\,); \mathbb{R}^{\theta_0}], \quad ((Kx)(t), \tilde{z}(t)) \in \operatorname{Lip}_\beta[\overline{g}^{[x]}(t, \cdot\,); \overline{\Omega}(t)],$$

где $\beta := (\alpha - \sigma)/k_0$. *Тогда в шаре* $B_{\mathbb{S}_\tau^{\theta_0}}(x_0, R)$ *существует решение уравнения (14).*

Доказательство. Определим отображение $F : \mathbb{S}_\tau^{\theta_0} \times \mathbb{S}_\tau^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_\tau^\theta$ равенством

$$(F(x, u))(t) = f(t, (Ku)(t), x(t)) \quad \text{для всех} \;\; x, u \in \mathbb{S}_\tau^{\theta_0}, \quad \text{где} \;\; t \in [0, \tau],$$

и отображение $G : \mathbb{S}_\tau^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_\tau^\theta$, положив $G(x) = F(x, x)$. Уравнение (14), таким образом, записывается в виде (4). Проверим для такого уравнения выполнимость условий теоремы 1.

Прежде всего отметим, что пространство $\mathbb{S}_\tau^{\theta_0}$ является полным.

Покажем, что отображения F и G замкнуты. Пусть для произвольных последовательностей $\{x_i\}, \{u_i\} \subset \mathbb{S}_\tau^{\theta_0}$, элементов $x, u \in \mathbb{S}_\tau^{\theta_0}$ и $z \in \overline{\mathbb{S}}_\tau^\theta$ при $i \to \infty$ имеют место сходимости

$$\rho(x_i, x) \to 0, \quad \rho(u_i, u) \to 0, \quad d^\theta(F(x_i, u_i), z) \to 0.$$

Так как $\rho(Ku_i, Ku) \leqslant k_0\rho(u_i, u)$, то в силу второго из перечисленных соотношений получаем, что $\rho(Ku_i, Ku) \to 0$. Согласно определению расстояний ρ и d^θ при п.в. $t \in [0, \tau]$ имеют место сходимости

$$\theta_0(x_i(t), x(t)) \to 0, \quad \theta_0((Ku_i)(t), (Ku)(t)) \to 0, \quad \theta((F(x_i, u_i))(t), z(t)) \to 0.$$

А так как сходимости в пространствах $\overline{\mathbb{R}}^\theta$ и $\overline{\mathbb{R}}^{\theta_0}$ совпадают, получаем, что

$$x_i(t) \to x(t), \quad (Ku_i)(t) \to (Ku)(t), \quad (F(x_i, u_i))(t) \to z(t).$$

Отсюда в силу непрерывности при п.в. $t \in [0, \tau]$ функции $f(t, \cdot\,, \cdot\,)$ (по совокупности двух аргументов) следует, что справедлива эквивалентность

$$f(t, (Ku_i)(t), x_i(t)) \to f(t, (Ku)(t), x(t)) \;\Leftrightarrow\; (F(x_i, u_i))(t) \to (F(x, u))(t).$$

В то же время $(F(x_i, u_i))(t) \to z(t)$, поэтому $(F(x, u))(t) = z(t)$, $t \in [0, \tau]$. Таким образом, отображение F является замкнутым, а значит, отображение G также замкнуто.

Для каждого $x \in B_{\mathbb{S}_\tau^{\theta_0}}(x_0, R)$ оператор $F(x, \cdot\,)$ – это оператор $\Upsilon : \mathbb{S}_\tau^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_\tau^\theta$, определяемый формулой (10), в которой $\overline{g} := \overline{g}^{[x]}$. Определим многозначное отображение $\Phi : [0, \tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$ соотношением

$$\Phi(t) := [x_0(t) - R, x_0(t) + R] \quad \text{для любого} \quad t \in [0, \tau].$$

Очевидно, что $\Omega(t) := (K\Phi)(t) \subset \overline{\Omega}(t)$. Следовательно (см. (3)),

$$((Kx)(t), \tilde{z}(t)) \in \operatorname{Lip}_\beta[\overline{g}^{[x]}(t, \cdot\,); \Omega(t)].$$

Согласно предложению 4 выполнено включение $(x, \tilde{z}) \in \operatorname{Lip}_{k_0\beta}[F(x, \cdot\,); \operatorname{Sel}(\Phi)]$. Учитывая, что $\operatorname{Sel}(\Phi) = B_{\mathbb{S}_\tau^{\theta_0}}(x_0, R)$, получаем

$$(x, \tilde{z}) \in \operatorname{Lip}_{k_0\beta}[F(x, \cdot\,); B_{\mathbb{S}_\tau^{\theta_0}}(x_0, R)].$$

Отметим, что здесь коэффициент липшицевости $k_0\beta = \alpha - \sigma$.

Для произвольного $x \in B_{\mathbb{S}_\tau^{\theta_0}}(x_0, R)$ оператор $F(\,\cdot\,, x)$ является оператором Немыцкого $N_{g^{[x]}} : \mathbb{S}_\tau^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta}$, порождённым функцией $g^{[x]} : [0,\tau] \times \mathbb{R}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$. Согласно предложению 2 имеет место включение $(x, \tilde{z}) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\,\cdot\,, x); \mathbb{S}_\tau^{\theta_0}]$.

Итак, для уравнения (14) выполнены все условия теоремы 1, и, согласно этой теореме, в шаре $B_{\mathbb{S}_\tau^{\theta_0}}(x_0, R)$ существует решение уравнения (14). Теорема доказана.

4. Интегральное уравнение Вольтерры. Теперь рассмотрим интегральное уравнение Вольтерры

$$f\biggl(t, \int\limits_0^t \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds, x(t)\biggr) = \tilde{z}(t), \quad t \in [0,1]. \tag{16}$$

Здесь функция $\mathcal{K}$, заданная на множестве $\{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1\}$, является измеримой, $\tilde{z} \in \overline{\mathbb{S}}_1$, функция $f : [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима по первому аргументу и непрерывна по совокупности второго и третьего аргументов.

Конечно, уравнение (16) является частным случаем рассмотренного выше уравнения (14) и записывается в виде (14), если доопределить функцию $\mathcal{K}$, положив $\mathcal{K}(t,s) = 0$ при п.в. (t,s) из треугольника $0 \leqslant t < s \leqslant 1$. Таким образом, теорема 2 позволяет устанавливать существование решения $x(t)$, $t \in [0,1]$, уравнения (16). Но для уравнения Вольтерры естественно рассматривать решения, определённые не только на всём “временно́м” отрезке $[0,1]$, но и на его подотрезках.

Определение. Пусть $\tau \in (0,1]$. *Решением уравнения (16), определённым на* $[0,\tau]$, называют функцию $x \in \mathbb{S}_\tau$, удовлетворяющую этому уравнению при п.в. $t \in [0,\tau]$.

Очевидно, сужение на $[0,\tilde{\tau}]$ решения $x \in \mathbb{S}_\tau$ уравнение (16) при любом $\tilde{\tau} \in (0,\tau)$ является решением этого уравнения на отрезке $[0,\tilde{\tau}]$.

Теории интегральных и более общих операторных уравнений Вольтерры посвящены многочисленные исследования. Сведения о существовании и свойствах решений можно найти, например, в [1; 12; 22] и в библиографии этих работ.

Введём необходимые обозначения, аналогичные обозначениям, использовавшимся в предыдущем параграфе.

Определим оператор $K_0 : \mathbb{S}_1^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_1^{\theta_0}$ следующим соотношением:

$$(K_0 u)(t) = \int\limits_0^t \mathcal{K}(t,s)u(s)\,ds \quad \text{для всех} \;\; u \in \mathbb{S}_1^{\theta_0}, \quad \text{где} \;\; t \in [0,1].$$

Положим

$$\kappa(t) := \int\limits_0^t |\mathcal{K}(t,s)|\,ds, \quad t \in [0,1].$$

Функция κ является измеримой. Будем предполагать, что для этой функции выполнено следующее условие:

$$\text{для любого} \;\; \varepsilon > 0 \;\; \text{существует} \;\; \delta \in (0,1] \;\; \text{такое, что} \;\; \kappa(t) \leqslant \varepsilon \;\; \text{при п.в.} \;\; t \in [0,\delta]. \tag{17}$$

Это условие выполнено, если для некоторого $\tau \in (0,1]$ функция $\mathcal{K}$ мажорируется на множестве $\{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \tau\}$ суммируемой функцией, т.е. справедливо соотношение (13).

Для произвольных $x \in \mathbb{S}_1$ и $\tau \in (0,1]$ определим функции $\overline{g}^{[x]} : [0,\tau] \times \overline{\mathbb{R}}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ соотношением (15) и функцию $g^{[x]} : [0,\tau] \times \mathbb{R}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ соотношением

$$g^{[x]}(t,u) = f(t, \int\limits_0^t \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds, u) \quad \text{для всех} \quad (t,u) \in [0,\tau] \times \mathbb{R}.$$

Функции $g^{[x]}$, $\overline{g}^{[x]}$ удовлетворяют условиям Каратеодори.

Теорема 3. *Пусть заданы функция* $x_0 \in \mathbb{S}_1$ *такая, что*

$$R_0 := \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,1]} \theta(f(t, v_0(t), x_0(t)), \tilde{y}(t)) < +\infty, \quad \textit{где} \quad v_0(t) := (K_0 x_0)(t) = \int\limits_0^t \mathcal{K}(t,s) x_0(s)\, ds,$$

и числа $\sigma > 0$, $\varsigma > 0$. *Пусть* $R = \sigma^{-1} R_0$, *а многозначное отображение* $\widehat{\Omega} : [0,1] \rightrightarrows \overline{\mathbb{R}}$ *определено соотношением*

$$\widehat{\Omega}(t) := [v_0(t) - \varsigma R, v_0(t) + \varsigma R] \quad \textit{для любого} \ \ t \in [0,1].$$

Пусть, кроме того, выполнено условие (17) и существуют $\alpha > \sigma$, $\beta \geqslant 0$, *для которых при любом* $x \in B_{\mathbb{S}_1^{\theta_0}}(x_0, R)$ *при п.в.* $t \in [0,1]$ *имеют место включения*

$$(x(t), \tilde{z}(t)) \in \mathrm{Cov}_\alpha[g^{[x]}(t,\cdot); \mathbb{R}^{\theta_0}], \quad ((Kx)(t), \tilde{z}(t)) \in \mathrm{Lip}_\beta[\overline{g}^{[x]}(t,\cdot); \widehat{\Omega}(t)].$$

Тогда найдётся такое $\tau \in (0,1]$, *что в шаре* $B_{\mathbb{S}_\tau^{\theta_0}}(x_0, R)$ *существует определённое на* $[0,\tau]$ *решение уравнения (16).*

Доказательство. Достаточно показать, что при некотором $\tau \in (0,1]$ для уравнения (16), рассматриваемого при $t \in [0,\tau]$, выполнены все условия теоремы 2.

В силу условия (17) существует такое $\delta_1 \in (0,1]$, что $\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\delta_1]} \kappa(t) \leqslant \varsigma$, и существует такое $\delta_2 \in (0,1]$, что $\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\delta_2]} \kappa(t) \leqslant \beta^{-1}(\alpha - \sigma)$. Положим

$$\tau := \min\{\delta_1, \delta_2\} \tag{18}$$

и рассмотрим уравнение (16) при $t \in [0,\tau]$. Тогда $k_0 := \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \kappa(t)$ и справедливы соотношения

$$\overline{\Omega}(t) = [v_0(t) - k_0 R, v_0(t) + k_0 R] \subset \widehat{\Omega}(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [0,\tau], \quad \beta \leqslant {k_0}^{-1}(\alpha - \sigma).$$

Таким образом, при определении τ равенством (18) условия теоремы 2 выполнены. Теорема доказана.

Замечание 3. В условиях теоремы 2 и теоремы 3 утверждается существование решения x интегрального уравнения (14) и, соответственно, уравнения (16), принадлежащего шару $B_{\mathbb{S}_\tau^{\theta_0}}(x_0, R)$ в пространстве измеримых на $[0,\tau]$ функций. Это включение означает, что для решения при п.в. $t \in [0,\tau]$ выполнено неравенство $x_0(t) - R \leqslant x(t) \leqslant x_0(t) + R$. Из полученной оценки следует, что если функция x_0 суммируема с некоторой p-й степенью на $[0,\tau]$, то решение x также суммируемо с p-й степенью на $[0,\tau]$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-04-60524). Результаты п. 2 получены Жуковским Е.С. при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20131).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlin. Anal.: Theory, Methods and Appl. 2012. V. 75. № 3. P. 1026–1044.
2. *Жуковская Т.В.* О продолжении решений нелинейного уравнения Volterra // Вестн. Тамбовского ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. 2012. Т. 17. № 3. С. 857–866.
3. *Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.

4. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523–1537.
5. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 439–455.
6. *Arutyunov A., Jacimovic V., Pereira F.* Second order necessary conditions for optimal impulsive control problems // J. Dynam. and Contr. Systems. 2003. V. 9. № 1. P. 131–153
7. *Арутюнов А.В., Грешнов А.В.* Теория (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и точки совпадения // Докл. РАН. 2016. Т. 469. № 5. С. 527–531.
8. *Арутюнов А.В., Грешнов А.В.* (q_1, q_2)-квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения // Изв. РАН. Сер. мат. 2018. Т. 82. № 2. С. 3–32.
9. *Жуковский Е.С., Мерчела В.* О накрывающих отображениях в обобщенных метрических пространствах в исследовании неявных дифференциальных уравнений // Уфимский мат. журн. 2020. Т. 12. № 4. С. 42–55.
10. *Мерчела В.* К теореме Арутюнова о точках совпадения двух отображений метрических пространств // Вестн. Тамбовского ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. 2018. Т. 23. № 121. С. 65–73.
11. *Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковщик Л.С., Стеценко В.Я.* Интегральные уравнения. М., 1968.
12. *Цалюк З.Б.* Интегральные уравнения Вольтерры // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. М., 1977. Т. 15. С. 131–198.
13. *Прёсдорф З.* Линейные интегральные уравнения // Итоги науки и техники. Сер. Совр. проблемы математики. Фундам. направления. М., 1988. Т. 27. С. 5–130.
14. *Diogo T., Pedas A., Vainikko G.* Integral equations of the third kind in L^p spaces // J. Integral Equat. Appl. 2020. V. 32. № 4. P. 417–427.
15. *Бенараб С., Жуковский Е.С., Мерчела В.* Теоремы о возмущениях накрывающих отображений в пространствах с расстоянием и в пространствах с бинарным отношением // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 4. С. 52–63.
16. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. РАН. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.
17. *Шрагин И.В.* Суперпозиционная измеримость при обобщенных условиях Каратеодори // Вестн. Тамбовского ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. 2014. Т. 19. № 2. С. 476–478.
18. *Жуковский Е.С.* Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30. № 1. С. 96–127.
19. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М., 1974.
20. *Арутюнов А.В.* Лекции по выпуклому и многозначному анализу. М., 2014.
21. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М., 2011.
22. *Жуковский Е.С.* Неравенства Вольтерра в функциональных пространствах // Мат. сб. 2004. Т. 195. № 9. С. 3–18.

Тамбовский государственный университет
им. Г.Р. Державина,
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 11.02.2021 г.
После доработки 06.09.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 105–119

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.55+517.929

ФИНИТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

© 2022 г. А. В. Метельский, В. В. Карпук

Для спектрально управляемой линейной автономной системы с несоизмеримыми запаздываниями строится динамическая обратная связь по состоянию в виде дифференциально-разностного регулятора, обеспечивающая замкнутой системе финитную стабилизацию (полное успокоение исходной системы за конечное время). Результаты проиллюстрированы примерами.

DOI: 10.31857/S0374064122010113

Введение. Пусть объект управления описывается линейной автономной дифференциально-разностной системой

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \sum_{i=1}^{m} A_ix(t-d_i) + bu(t), \quad t > 0, \quad x(t) = \eta(t), \quad t \in [-d_m, 0]. \tag{1}$$

Здесь x – n-вектор-столбец решения системы (1) $(n \geqslant 2)$; $0 < d_1 < \ldots < d_m$ – постоянные запаздывания; A_i – постоянные $n \times n$-матрицы $(i = \overline{0,m})$; b – постоянный n-столбец; η – начальная кусочно-непрерывная функция; u – скалярное управление. Далее векторные величины полагаем записанными в столбец, штрих $'$ обозначает операцию транспонирования.

Не ограничивая общности, считаем, что $b = e_n = [0;\ldots;0;1]'$. Этого всегда можно достичь невырожденным линейным преобразованием переменных $\breve{x} = Tx$ с постоянной матрицей T. Кроме того, выбрав управление $u(t) = -e_n'(A_0x(t) + \sum_{i=1}^m A_ix(t-d_i)) + \widetilde{u}(t)$ $(\widetilde{u}(t)$ – новое управление), получим, что последняя строка матриц A_i $(i = \overline{0,m})$ – нулевая. Тот же результат будем иметь, введя вспомогательную переменную $\dot{u}(t) = u_1(t)$. В этом случае вход системы (1) может содержать запаздывания: $\sum_{i=1}^m b_iu(t-d_i)$, b_i – постоянные n-столбцы $(i = \overline{0,m})$.

Пусть E_n – единичная матрица n-го порядка; $W(p) = pE_n - (A_0 + A_1e^{-pd_1} + \ldots$ $\ldots + A_me^{-pd_m})$ – характеристическая матрица, $p \in \mathbb{C}$; $w(p) = |W(p)|$ – характеристический квазиполином однородной $(b = 0)$ системы (1). Здесь и далее $|\cdot|$ – определитель квадратной матрицы. Набор $\sigma = \{p \in \mathbb{C} : w(p) = 0\}$ корней характеристического квазиполинома (с учётом их кратностей) называют *спектром* системы (1). Так как коэффициенты характеристического квазиполинома $w(p)$ действительны, то недействительные числа, входящие в σ, разбиваются на пары взаимно сопряжённых.

Считаем, что в уравнении (1) запаздывания имеют вид

$$d_i = \sum_{j=1}^{\mu} k_{ij}h_j, \quad i = \overline{1,m}, \tag{2}$$

где $\mu \leqslant m$ – натуральное, а k_{ij} – целые числа, $h_1 < \ldots < h_\mu$ – положительные действительные числа, которые могут быть произвольными, в частности, рационально независимыми. Обозначим

$$\theta_i = e^{-pd_i} = \prod_{j=1}^{\mu} \lambda_j^{k_{ij}}, \quad \lambda_j = e^{-ph_j}, \quad i = \overline{1,m}, \quad p \in \mathbb{C}.$$

В операторной записи уравнений полагаем: $\theta_i = e^{-pd_i}$ $(\lambda_j = e^{-ph_j})$ – оператор сдвига, p – оператор дифференцирования:

$$p^s\theta_i f(t) = p^s e^{-pd_i} f(t) = f^{(s)}(t - d_i)$$

или

$$p^s\theta_i f(t) = p^s \prod_{j=1}^{\mu} \lambda_j^{k_{ij}} f(t) = p^s \prod_{j=1}^{\mu} e^{-pk_{ij}h_j} f(t) = f^{(s)}\Big(t - \sum_{j=1}^{\mu} k_{ij}h_j\Big),$$

$f(t)$ – функция; $s \geqslant 0$, $i = \overline{1,m}$, k_{ij} – целые числа.

Задача полного успокоения системы (1) заключается [1, с. 358] в обеспечении за счёт выбора управления $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, тождеств

$$x(t) \equiv 0, \quad u(t) \equiv 0, \quad t \geqslant t_1, \tag{3}$$

где $t_1 > 0$ – некоторый фиксированный момент времени, не зависящий от начальной функции η. В работе [2] установлено, что для разрешимости задачи полного успокоения системы (1) необходимо и достаточно, чтобы система (1) была спектрально управляема:

$$\operatorname{rank}[pE_n - (A_0 + A_1e^{-pd_1} + \ldots + A_me^{-pd_m}), b] = n \quad \text{для всех} \quad p \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Следуя [3], обеспечение полного успокоения исходной системы (1) посредством обратной связи будем называть *финитной стабилизацией*. В работах [4–7] задача финитной стабилизации решается посредством назначения замкнутой системе конечного спектра (*спектральное приведение* [8]). В работе [8] обосновано необходимое условие спектральной приводимости системы (1) в классе динамических дифференциально-разностных регуляторов: равенство (4) может нарушаться только в конечном числе точек

$$\widetilde{P}_0 = \{p_i \in \mathbb{C}, \quad i = \overline{1,\nu_0} : \operatorname{rank}[W(p_i), b] < n\}. \tag{5}$$

Там же установлено, что для системы (1) с соизмеримыми запаздываниями условие (5) обеспечивает существование дифференциально-разностного регулятора, приводящего систему (1) к системе с конечным спектром. В настоящей статье показано (пример 3), что для системы (1) с несоизмеримыми запаздываниями условие (4) не является достаточным для спектральной приводимости.

Достаточно полный обзор публикаций, посвящённых различным задачам стабилизации и назначения спектра для линейных автономных систем с запаздыванием, представлен в [9]. Бо́льшая часть известных работ относится к системам с одним или с соизмеримыми запаздываниями. Из последних исследований по данной тематике для объектов с несоизмеримыми запаздываниями отметим работу [10], в которой рассматривается задача модального управления для линейной системы, заданной автономным дифференциальным уравнением n-го порядка с несколькими несоизмеримыми сосредоточенными и распределёнными запаздываниями в состоянии. Для такой системы получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи произвольного назначения коэффициентов характеристической функции посредством статической обратной связи по выходу.

В настоящей работе для системы (1) с несоизмеримыми запаздываниями решается задача финитной стабилизации. Именно, предлагается схема построения динамического дифференциально-разностного регулятора по типу обратной связи по состоянию, доставляющего полное успокоение системы (1). Решение этой задачи, как и в названных выше работах [4–7], выполняется в два этапа: внутренний контур регулятора обеспечивает приведение исходной системы к системе с конечным спектром, а внешний контур обеспечивает точечную вырожденность [11, 12] замкнутой системы в направлениях, выделяющих её первые n фазовых переменных.

Развиваемый ниже подход к построению регулятора финитной стабилизации является по своей сути алгебраическим, а для его реализации используются стандартные операции над полиномами и полиномиальными матрицами.

1. Спектральное приведение системы с несоизмеримыми запаздываниями. Построим двухконтурный дифференциально-разностный регулятор, обеспечивающий замкнутой системе (1) финитную стабилизацию (см. тождества (3)). Внутренний контур обеспечит приведение исходной системы к системе с конечным спектром, а внешний – обнуление первых n фазовых переменных.

Рассмотрим вопросы, связанные со спектральным приведением системы (1).

Пусть $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)$, $A(\Lambda) = A_0 + \sum_{i=1}^m A_i \prod_{j=1}^\mu \lambda_j^{k_{ij}}$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Обозначим

$$M(p, \Lambda) = [M_1(p, \Lambda), \ldots, M_n(p, \Lambda)]', \tag{6}$$

где $M_i(p, \Lambda)$– алгебраическое дополнение к i-му элементу (начиная с первого) последней строки матрицы

$$F_\varphi(p, \Lambda) = \begin{bmatrix} p - a_{11}(\Lambda) & \ldots & -a_{1,n-1}(\Lambda) & -a_{1,n}(\Lambda) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ -a_{n-1,1}(\Lambda) & \ldots & -a_{n-1,n-1}(\Lambda) & -a_{n-1,n}(\Lambda) \\ -\varphi_1(\Lambda) & \ldots & -\varphi_{n-1}(\Lambda) & p^r - \sum_{i=1}^r \bar{\varphi}_i(\Lambda) p^{r-i} \end{bmatrix}.$$

Здесь $a_{ij}(\Lambda)$ – элементы матрицы $A(\Lambda)$; $\varphi_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, n-1}$, и $\bar{\varphi}_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, r}$, – полиномы с действительными коэффициентами, которые подбираем такими, чтобы выполнялось равенство

$$|F_\varphi(p, \Lambda)| = d_0(p),$$

где $d_0(p)$ – некоторый полином степени $\nu = \deg d_0(p) \geqslant n$. Если такой выбор возможен, то систему назовём *спектрально приводимой*.

Лемма 1. *Система (1) спектрально приводима, если и только если редуцированный базис Грёбнера (в словарном порядке вида* $\lambda_{i_1} > \ldots > \lambda_{i_\mu} > p$) *для системы полиномов (6) содержит некоторый полином* $\widetilde{d}_0(p)$.

Доказательство. Достаточность. Пусть редуцированный базис Грёбнера (в словарном порядке вида $\lambda_{i_1} > \ldots > \lambda_{i_\mu} > p$) для системы полиномов (6) содержит некоторый полином $\widetilde{d}_0(p)$, множество корней которого обозначим через $\widetilde{P}_0$. В частности, возможно, что $\widetilde{d}_0(p) = 1$, и тогда $\widetilde{P}_0 = \varnothing$. По свойству базиса Грёбнера найдётся векторный полином $\widetilde{\varphi}'(p, \Lambda) = (\widetilde{\varphi}_1(p, \Lambda), \ldots, \widetilde{\varphi}_n(p, \Lambda))$ такой, что справедливо разложение

$$\widetilde{\varphi}'(p, \Lambda) M(p, \Lambda) = \widetilde{d}_0(p). \tag{7}$$

Если степень полинома $\widetilde{\nu} = \deg \widetilde{d}_0(p)$ меньше, чем n, то обе части равенства (7) домножим на полином $d_1(p)$ с действительными коэффициентами степени $n - \widetilde{\nu}$. Обозначим $d_0(p) = d_1(p) \widetilde{d}_0(p)$. Если $\deg \widetilde{d}_0(p) \geqslant n$, то полагаем $d_1(p) = 1$. Таким образом, $\nu = \deg d_0(p) \geqslant n$.

Согласно [13, следствие 1], равенство (7) можно преобразовать к виду

$$\left[-\varphi_1(\Lambda), \ldots, -\varphi_{n-1}(\Lambda), p^r - \sum_{i=1}^r \bar{\varphi}_i(\Lambda) p^{r-i} \right] M(p, \Lambda) = d_0(p), \tag{8}$$

где $\varphi_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, n-1}$, и $\bar{\varphi}_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, r}$ $(r = \nu - n + 1 \geqslant 1)$, – некоторые полиномы. Полиномы $\varphi_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, n-1}$, и $\bar{\varphi}_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, r}$, можно найти методом неопределённых коэффициентов, используя (8). Равенство (8) означает, что замкнутая система с характеристической матрицей $F\varphi(p, \Lambda)$ имеет конечный спектр.

Необходимость. Если система (1) спектрально приводима, то имеет место равенство (8). В таком случае по свойству базиса Грёбнера редуцированный базис для системы полиномов (6), построенный в словарном порядке вида $\lambda_{i_1} > \ldots > \lambda_{i_\mu} > p$ для системы полиномов (6), необходимо содержит некоторый полином $\widetilde{d}_0(p)$ такой, что $d_0(p) = d_1(p) \widetilde{d}_0(p)$. Лемма доказана.

Считаем, что старший коэффициент полинома $d_0(p)$ равен 1. Множество различных корней полинома $d_0(p)$ обозначим $P_0=\{p_i\in\mathbb{C}\colon\ i=\overline{1,\mu_0}\}$.

Замечание 1. В силу равенства (8) значения $p_k\in\widetilde{P}_0$ войдут в состав корней полинома $d_0(p)$ при любом выборе полиномов $\varphi_i(\Lambda)$, $i=\overline{1,n}$, и $\bar\varphi_i(\Lambda)$, $i=\overline{1,r}$, обеспечивающих выполнение этого равенства. Поэтому $d_0(p)=d_1(p)\widetilde{d}_0(p)$ и $\widetilde{P}_0\subseteq P_0$. Значения $p_k\in\widetilde{P}_0$ будем называть *инвариантными спектральными значениями*, а полином $\widetilde{d}_0(p)$ – *инвариантным полиномом.*

Если система

$$M(p,\Lambda)=0$$

несовместна (редуцированный базис Грёбнера имеет вид $\{1\}$), то $\widetilde{P}_0=\varnothing$, и множество корней полинома $d_0(p)=d_1(p)$ при спектральном приведении может быть произвольным при условии, что недействительные корни разбиваются на пары взаимно сопряжённых. Однако для построения второго контура регулятора финитной стабилизации при выборе полинома $d_1(p)$ имеются некоторые ограничения, описанные ниже в шаге 2) п. 4.

Замечание 2. Набор величин $h_1<\ldots<h_\mu$, порождающий переменные $\lambda_i=e^{-ph_i}$, $i=\overline{1,\mu}$, назовём *базисным.* Этот набор для заданных запаздываний $0<d_1<\ldots<d_m$ (см. представление (2)), очевидно, можно сформировать по-разному. Следующий пример показывает, что для одного базисного набора спектрально управляемая система (1) с несоизмеримыми запаздываниями будет спектрально приводимой, а для другого – нет. В этом для систем вида (1) состоит принципиальное отличие запаздываний, среди которых имеются несоизмеримые, от запаздываний, кратных одному и тому же числу. Для последних (т.е. попарно соизмеримых запаздываний) система (1) в случае спектральной управляемости спектрально приводима [8, 14].

Поясним замечание 2 следующими примерами, содержащими подходы к решению задачи спектрального приведения.

Пример 1. Пусть система (1) задана своей характеристической матрицей ($\Theta=(\theta_1,\theta_2)$, $\theta_i=e^{-pd_i}$, $i=\overline{1,2}$)

$$pE_2-\widetilde{A}(\Theta)=\begin{bmatrix}p-\theta_2 & -\theta_1\\ 0 & p\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad d_1=\ln 2,\quad d_2=\ln 3. \tag{9}$$

Система (1), (9) имеет характеристический квазиполином $w(p)=p(p-3^{-p})$ и бесконечный спектр. Для алгебраических дополнений $\widetilde{M}(p,\Theta)=[\widetilde{M}_1(p,\Theta),\widetilde{M}_2(p,\Theta)]'$ к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы $F_\varphi(p,\Theta)$ очевидны равенства $\widetilde{M}_1(p,\Theta)=\theta_1$, $\widetilde{M}_2(p,\Theta)=p-\theta_2$.

Очевидно также, что при любых запаздываниях d_1, d_2 данная система полностью управляема, поскольку $\theta_1=e^{-pd_1}\neq 0$ для всех $p\in\mathbb{C}$. В то же время система

$$\widetilde{M}(p,\Theta)=0$$

относительно p имеет бесконечно много решений, поэтому для набора $d_1=\ln 2$, $d_2=\ln 3$ спектральное приведение невозможно. Действительно, полагая $\theta_1=0$, получаем

$$\begin{vmatrix}p-\theta_2 & 0\\ -\varphi_1(\Theta) & p^r-\sum_{i=1}^r\bar\varphi_i(\Theta)p^{r-i}\end{vmatrix}=(p-\theta_2)\biggl(p^r-\sum_{i=1}^r\bar\varphi_i(\Theta)p^{r-i}\biggr),\quad \theta_2=e^{-pd_2}, \tag{10}$$

т.е. система (1), (9) не приводится к системе с конечным спектром.

Преобразуем запаздывания так, чтобы $\theta_1\neq 0$. Запишем d_2 в виде $d_2=(\ln 3-\ln 2)+\ln 2$ и возьмём $h_1=\ln 2$, $h_2=\ln 3-\ln 2$. Тогда $\theta_2=e^{-pd_2}=e^{-ph_1}e^{-ph_2}=\lambda_1\lambda_2$ ($\lambda_i=e^{-ph_i}$, $i=\overline{1,2}$); $\lambda_2=\theta_2/\theta_1$ и $\theta_1\neq 0$.

Имеем ($\Lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$)

$$pE_2-A(\Lambda)=\begin{bmatrix}p-\lambda_1\lambda_2 & -\lambda_1\\ 0 & p\end{bmatrix}.$$

Отсюда $M_1(p,\Lambda)=\lambda_1$, $M_2(p,\Lambda)=p-\lambda_1\lambda_2$. Находим базис Грёбнера: $\{p,\lambda_1\}$ для системы полиномов $M(p,\Lambda)$; значит, в разложении (7) $\widetilde{d_0}(p)=p$. Возьмём $d_1(p)=p+1$, тогда $d_0(p)=p(p+1)$, $P_0=\{0,-1\}$. Равенство (8) примет вид

$$[\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^2, p+1+\lambda_1\lambda_2]M(p,\Lambda)=p(p+1), \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} p-\lambda_1\lambda_2 & -\lambda_1 \\ \lambda_2+\lambda_1\lambda_2^2 & p+1+\lambda_1\lambda_2 \end{vmatrix}=p(p+1).$$

С учётом того, что $\lambda_1=\theta_1$, $\lambda_2=\theta_2/\theta_1$, получаем

$$\begin{vmatrix} p-\theta_2 & -\theta_1 \\ \theta_2/\theta_1+\theta_2^2/\vartheta_1 & p+1+\theta_2 \end{vmatrix}=p(p+1).$$

Таким образом, второе уравнение замкнутой системы следующее:

$$\dot{x}_2(t)=-x_1(t-(d_2-d_1))-x_1(t-(2d_2-d_1))-x_2(t)-x_2(t-d_2).$$

Заметим, что везде аргумент запаздывающего типа: $d_2-d_1>0$, $2d_2-d_1>0$.

Следующий пример показывает, что при построении контура спектрального приведения можно использовать только операторную запись системы управления, т.е. её характеристическую матрицу.

Пример 2. Пусть система (1) задана своей характеристической матрицей

$$pE_2-\widetilde{A}(\Theta)=\begin{bmatrix} p-\theta_1 & -\theta_2 \\ 0 & p \end{bmatrix}, \quad b=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d_1=\ln 2, \quad d_2=\ln 3.$$

При любых запаздываниях d_1, d_2 данная система полностью управляема, так как $\theta_2=e^{-pd_2}\neq 0$ для всех $p\in\mathbb{C}$.

Как и в примере 1, положив $\theta_2=0$, получим равенство, аналогичное (10), поэтому для набора $d_1=\ln 2$, $d_2=\ln 3$ спектральное приведение невозможно. Преобразуем запаздывания так, чтобы $\theta_2\neq 0$.

По предположению $d_1<d_2$. Пусть $2d_1>d_2$, тогда первую строку характеристической матрицы представим следующим образом: $(p-(\theta_1^2/\theta_2)(\theta_2/\theta_1), -(\theta_2/\theta_1)^2(\theta_1^2/\theta_2))$. Это равносильно преобразованию запаздываний

$$d_1=(2d_1-d_2)+(d_2-d_1), \quad d_2=2(d_2-d_1)+(2d_1-d_2).$$

Введя величины $h_1=2d_1-d_2>0$, $h_2=d_2-d_1>0$, первую строку характеристической матрицы получим в виде

$$(p-\lambda_1\lambda_2, -\lambda_2^2\lambda_1), \quad \text{где} \quad \lambda_1=\theta_1^2/\theta_2, \quad \lambda_2=\theta_2/\theta_1.$$

Теперь базис Грёбнера для полиномов $\{p-\lambda_1\lambda_2, -\lambda_2^2\lambda_1\}$ содержит полином p^2: $\{p^2, p\lambda_2, p-\lambda_1\lambda_2\}$. Решая полиномиальное уравнение (8), где $d_0(p)=p^2$, $M(p,\Lambda)=(\lambda_2^2\lambda_1, p-\lambda_1\lambda_2)$, находим вторую строку спектрально приведённой системы $(\lambda_1, p+\lambda_1\lambda_2)$:

$$\begin{vmatrix} p-\theta_1 & -\theta_2 \\ \theta_1^2/\theta_2 & p+\theta_1 \end{vmatrix}=p^2, \quad \theta_i=e^{-pd_i}, \quad i=\overline{1,2}.$$

Если $2d_1<d_2$, а $3d_1>d_2$, то полагаем $(p-(\theta_1^3/\theta_2)(\theta_2/\theta_1^2), -(\theta_2/\theta_1^2)^3(\theta_1^3/\theta_2)^2)$ и

$$h_1=3d_1-d_2>0, \quad h_2=d_2-2d_1>0.$$

Тогда спектрально приведённая система имеет вид

$$\begin{vmatrix} p-\theta_1 & -\theta_2 \\ \theta_1^3/\theta_2 & p^2+p\theta_1+\theta_1^2 \end{vmatrix}=p^3,$$

или в нормальной форме

$$\begin{vmatrix} p-\theta_1 & -\theta_2 & 0 \\ 0 & p & -1 \\ \theta_1^3/\theta_2 & \theta_1^2 & p+\theta_1 \end{vmatrix} = p^3.$$

В случае спектральной управляемости система вида (1) с соизмеримыми запаздываниями спектрально приводима [8, 14]. Для систем того же вида с несоизмеримыми запаздываниями это не так. Приведём простой пример спектрально управляемой системы с несоизмеримыми запаздываниями, которая не является спектрально приводимой ни при каком базисном наборе запаздываний (см. (2)).

Пример 3. Рассмотрим систему (1) с характеристической матрицей

$$pE_2 - \widetilde{A}(\Theta) = \begin{bmatrix} p-\theta_2 & 1-\theta_1 \\ 0 & p \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d_1 = \ln 2, \quad d_2 = \ln 3.$$

Несложно убедиться, что при любых несоизмеримых запаздываниях $d_1,\ d_2$ данная система спектрально управляема, так как система уравнений $p - e^{-pd_2} = 0,\ \ 1 - e^{-pd_1} = 0$ относительно p несовместна.

При любом представлении запаздываний можно положить $\theta_1 = 1$ (даже если переменная θ_1 окажется в знаменателе), и тогда получаем равенство (10). Таким образом, данная система дифференциально-разностным регулятором к конечному спектру не приводится.

2. Предварительные результаты. Покажем, что найдутся скалярный полином $\lambda = \lambda(\Lambda) = \lambda(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)$ и векторный полином $\Psi'(\Lambda) = (\psi_1(\Lambda), \ldots, \psi_n(\Lambda))$ такие, что

$$\lambda(\Lambda) = \Psi'(\Lambda) M(p, \Lambda). \tag{11}$$

Лемма 2. *Если система (1) спектрально управляема, то найдётся редуцированный базис Грёбнера (в словарном порядке вида $p > \lambda_{i_1} > \ldots > \lambda_{i_\mu}$) для системы полиномов (6), содержащий полином вида $\lambda = \lambda(\Lambda)$, отличный от тождественного нуля.*

Доказательство. Пусть $\Lambda_p = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)_p : p \in \widetilde{P}_0\}$ – множество наборов $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)_p$ таких, что (p, Λ_p) – решение системы

$$M(p, \Lambda_p) = 0. \tag{12}$$

Напомним, что $\widetilde{P}_0$ – множество различных корней полинома $\widetilde{d}_0(p)$. Равенство (12) означает, что выполняется неравенство $\operatorname{rank}[pE_n - A(\Lambda_p), b] < n,\ \ p \in \widetilde{P}_0$, а для этого необходимо [15, с. 351], чтобы

$$\operatorname{rank}[b, A(\Lambda_p)b, \ldots, A^{n-1}(\Lambda_p)b] < n.$$

Таким образом, множество Λ_p образовано [5] нулями полинома

$$\delta(\Lambda) = |b, A(\Lambda)b, \ldots, A^{n-1}(\Lambda)b|,$$

отличного от тождественного нуля [2]. Зная Λ_p, из системы (12) для каждого $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)_p \in \Lambda_p$ можно найти соответствующие значения $p \in \widetilde{P}_0$.

Так как все решения системы (12) являются нулями полинома $\delta(\Lambda)$, то согласно теореме Гильберта о нулях найдётся векторный полином $\widetilde{\Psi}'(p, \Lambda) = (\widetilde{\psi}_1(p, \Lambda), \ldots, \widetilde{\psi}_n(p, \Lambda))$ и натуральное число k такие, что $\widetilde{\Psi}'(p, \Lambda) M(p, \Lambda) = \delta^k(\Lambda)$. Отсюда следует [13, 14] существование векторного полинома $\Psi'(\Lambda) = (\psi_1(\Lambda), \ldots, \psi_n(\Lambda))$, для которого имеет место равенство (11), или в подробной записи

$$\lambda(\Lambda) = \begin{vmatrix} p - a_{11}(\Lambda) & \ldots & -a_{1,n-1}(\Lambda) & -a_{1,n}(\Lambda) \\ \hdotsfor{4} \\ -a_{n-1,1}(\Lambda) & \ldots & p - a_{n-1,n-1}(\Lambda) & -a_{n-1,n}(\Lambda) \\ \psi_1(\Lambda) & \ldots & \psi_{n-1}(\Lambda) & 0 \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Очевидно равенство $\psi_n(\Lambda)=0,$ поскольку в противном случае определитель (13) содержал бы член с $p^{n-1}.$ Лемма доказана.

Предлагаемая конструкция регулятора финитной стабилизации основана на двух предположениях. Первое: система спектрально приводима, т.е. при некотором полиноме $d_0(p)$ и при некоторых полиномах $\varphi_i(\Lambda),\ i=\overline{1,n-1},$ и $\bar\varphi_i(\Lambda),\ i=\overline{1,r},$ имеет место равенство (8). Второе: полином $\lambda=\lambda(\Lambda),$ существование которого обосновано предыдущей леммой 2, обладает свойством

$$\widetilde\lambda(p)=\lambda(e^{-ph_1},\ldots,e^{-ph_\mu})\neq 0 \quad \text{для всех} \quad p\in\widetilde P_0. \tag{14}$$

Замечание 3. Предположение (14) не является "жёстким", так как в равенстве (11) векторный полином $M(p,e^{-ph_1},\ldots,e^{-ph_\mu})$ отличен от нуля при любом $p\in\widetilde P_0$ ввиду условия (4) спектральной управляемости.

Обозначим $\bar\lambda(p)=\chi(e^{-ph_0})\widetilde\lambda(p),$ где $\chi(\lambda_0)$ – некоторый полином с действительными коэффициентами.

Лемма 3. *Пусть выполнено свойство (14). Тогда за счёт выбора полинома* $\chi(\lambda_0)$ *и числа* $h_0>0$ *можно обеспечить выполнение следующих соотношений:*

$$\bar\lambda(p_i)\neq\bar\lambda(p_k), \quad \textit{если} \ \ p_i\neq p_k, \quad p_i,p_k\in\widetilde P_0; \tag{15}$$

$$\frac{d\bar\lambda(p)}{dp}=\frac{d}{dp}(\chi(e^{-ph_0})\widetilde\lambda(p))\neq 0 \quad \textit{для всех} \quad p\in\widetilde P_0. \tag{16}$$

Доказательство. Если соотношения (15), (16) для полинома $\widetilde\lambda(p)$ нарушаются, то вместо полинома $\lambda(\Lambda)$ возьмём полином $\hat\lambda(\hat\Lambda)=\chi(\lambda_0)\lambda(\Lambda),\ \hat\Lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_\mu).$ Для этого домножим последнюю строку определителя (13) на некоторый полином $\chi(\lambda_0)$ с действительными коэффициентами. Выберем число $h_0>0,$ при котором значения $e^{-p_kh_0}$ будут различными для разных $p_k\in\widetilde P_0.$ Чтобы не расширять список переменных $\lambda_i,\ i=\overline{1,\mu},$ возьмём $h_0=h_i,$ $i\in\{1,\ldots,\mu\},$ если это условие для некоторого $h_i,\ i\in\{1,\ldots,\mu\},$ выполняется; тогда $\hat\Lambda=\Lambda.$

Значения полинома $\chi(\lambda_0)$ при $\lambda_0=e^{-p_kh_0},\ p_k\in\widetilde P_0,$ зададим такими, чтобы числа $\chi(e^{-p_kh_0})\widetilde\lambda(p_k)$ были различными для разных $p_k\in\widetilde P_0.$ Это возможно, так как выполнено свойство (14). В частности, можно положить $\chi(e^{-p_kh_0})\widetilde\lambda(p_k)=p_k$ для $p_k\neq 0,\ p_k\in\widetilde P_0.$ Тогда $(\lambda_0=e^{-ph_0})$

$$\frac{d\bar\lambda(p)}{dp}=\frac{d\chi(\lambda_0)}{d\lambda_0}\lambda_0(-h_0)\widetilde\lambda(p)+\chi(\lambda_0)\frac{d\widetilde\lambda(p)}{dp}.$$

Из свойства (14) вытекает, что значения производных $d\chi(\lambda_0)/d\lambda_0$ при $\lambda_0=e^{-p_kh_0},\ p_k\in$ $\in\widetilde P_0,$ можно выбрать такими, чтобы обеспечить выполнение соотношений (16). Подходящий полином $\chi(\lambda_0)$ получим как интерполяционный полином Лагранжа–Сильвестра.

Итак, для полинома $\hat\lambda(\hat\Lambda)=\chi(\lambda_0)\lambda(\Lambda),\ \hat\Lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_\mu)$ будут выполнены соотношения (15), (16).

Если же соотношения (15), (16) для полинома $\widetilde\lambda(p)$ выполняются, то полагаем $\chi(\lambda_0)=1$ и $\hat\lambda(\hat\Lambda)=\lambda(\Lambda).$ Лемма доказана.

Регулятор финитной стабилизации будем строить в виде

$$x_n^{(r)}(t)=\sum_{i=1}^{n-1}\varphi_i(\Lambda)x_i(t)+\sum_{i=1}^{r}\bar\varphi_i(\Lambda)x_n^{(r-i)}(t)+f_1(p,\lambda)x_{n+1}(t)+q_1(\lambda)a_1(\lambda)x_{n+2}(t),$$

$$x_{n+1}^{(s)}(t)=\sum_{i=1}^{n-1}\psi_i(\Lambda)x_i(t)+f_2(p,\lambda)x_{n+1}(t)+q_2(\lambda)a_1(\lambda)x_{n+2}(t),$$

$$\dot x_{n+2}(t)=x_{n+1}(t)+a_2(\lambda)x_{n+2}(t), \quad t>0. \tag{17}$$

Здесь $a_i(\lambda)$, $i=\overline{1,2}$, $q'(\lambda)=[q_1(\lambda),q_2(\lambda)]$; $f_1(p,\lambda)=\sum_{i=0}^{r_1}\hat f_i(\lambda)p^{r_1-i}$, $\hat f_i(\lambda)$, $i=\overline{0,r_1}$, $f_2(p,\lambda)=\sum_{i=0}^{s}\bar f_i(\lambda)p^{s-i}$, $\bar f_i(\lambda)$, $i=\overline{0,s}$, – некоторые полиномы, $r_1\geqslant 0$, $s\geqslant 1$.

Характеристическая матрица замкнутой системы (1), (17) имеет следующий вид ($\Lambda = (e^{-ph_1},\ldots,e^{-ph_\mu})$, $\lambda=\lambda(e^{-ph_1},\ldots,e^{-ph_\mu})$):

$$\widetilde A(p,\Lambda)=$$

$$=\begin{bmatrix} p-a_{11}(\Lambda) & \ldots & -a_{1,n-1}(\Lambda) & -a_{1,n}(\Lambda) & 0 & 0\\ \hdotsfor{6}\\ -a_{n-1,1}(\Lambda) & \ldots & p-a_{n-1,n-1}(\Lambda) & -a_{n-1,n}(\Lambda) & 0 & 0\\ -\varphi_1(\Lambda) & \ldots & -\varphi_{n-1}(\Lambda) & p^r-\sum_{i=1}^{r}\bar\varphi_i(\Lambda)p^{r-i} & -f_1(p,\lambda) & -q_1(\lambda)a_1(\lambda)\\ -\psi_1(\Lambda) & \ldots & -\psi_{n-1}(\Lambda) & 0 & p^s-f_2(p,\lambda) & -q_2(\lambda)a_1(\lambda)\\ 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 & p-a_2(\lambda) \end{bmatrix}. \qquad (18)$$

Замкнутую систему (1), (17) с характеристической матрицей (18) будем называть *системой (18)*. Коэффициенты регулятора (17) подберём такими, чтобы имело место равенство

$$|\widetilde A(p,\Lambda)|=d(p),$$

где $d(p)=d_2(p)d_0(p)$ – характеристический полином степени $N=\deg d(p)\geqslant n+2$, $d_2(p)$ – некоторый полином с действительными коэффициентами.

3. Приведение замкнутой системы (18) к нормальной форме. Введём обозначение $G(p,\lambda)=(\lambda,d_0(p))'$ и положим

$$k(p,\lambda)=(a_1(\lambda)q'(\lambda)G(p,\lambda)+d(p))/(a_2(\lambda)-p),\quad K(p,\lambda)=k(p,\lambda)+p^sd_0(p). \qquad (19)$$

Докажем, что справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнено условие (4) спектральной управляемости. Для того чтобы система (18) имела характеристический полином $d(p)$ степени $N=n+r+s$ достаточно:*

а) выбрать векторный полином $q'(\lambda)$ таким, чтобы функция $k(p,\lambda)$ была полиномом;

б) векторный полином $f'(p,\lambda)=(f_1(p,\lambda),f_2(p,\lambda))$ взять таким, чтобы выполнялись равенства

$$f'(p,\lambda)G(p,\lambda)=K(p,\lambda),\quad G(p,\lambda)=(\lambda,d_0(p))', \qquad (20)$$

где функция $K(p,\lambda)$ определена в (19).

Доказательство. Пусть выполнены условия 1) и 2). Разлагая определитель матрицы (18) по последней строке, получаем

$$|\widetilde A(p,\lambda)|=(p-a_2(\lambda))(p^s-f_2(p,\lambda))d_0(p)-f_1(p,\lambda)\lambda-a_1(\lambda)(q_1(\lambda)\lambda+q_2(\lambda)d_0(p))=$$

$$=(p-a_2(\lambda))(p^sd_0(p)-f'(p,\lambda)G(p,\lambda))-a_1(\lambda)q'(\lambda)G(p,\lambda). \qquad (21)$$

Так как $f'(p,\lambda)G(p,\lambda)=K(p,\lambda)$, то из равенств (19), (21) вытекает, что $|\widetilde A(p,\lambda)|=d(p)$. Теорема доказана.

Покажем, что если $N\geqslant 2n+r-1$, то система (18) приводится к нормальной форме и имеет запаздывающий тип. Неравенство $N\geqslant 2n+r-1$ всегда можно обеспечить за счёт степени полинома $d_2(p)$, именно, при $\deg d_2(p)=s+1$.

В силу равенств (20) имеем

$$K(p,\lambda)=f_1(p,\lambda)\lambda+f_2(p,\lambda)d_0(p). \qquad (22)$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 4. *При $N\geqslant 2n+r-1$ для степеней полиномов f_1 и f_2 в равенстве (22) можно обеспечить выполнение неравенств*

$$r_1=\deg_p f_1(p,\lambda)\leqslant n+r-2,\quad r_2=\deg_p f_2(p,\lambda)\leqslant s-1. \qquad (23)$$

Доказательство. Если по переменной p степень $\deg_p f_1(p,\lambda)$ не меньше, чем $n+r-1$, то представим полином $f_1(p,\lambda)$ в виде $f_1(p,\lambda)=\xi_0(p,\lambda)d_0(p)+\xi_1(p,\lambda)$, где $\xi_i(p,\lambda)$, $i=0,1$, – полиномы, причём $\deg_p\xi_1(p,\lambda)\leqslant n+r-2$. Это возможно, так как полином $d_0(p)$ имеет старший член p^{n+r-1}. В результате получим

$$K(p,\lambda)=\xi_1(p,\lambda)\lambda+(f_2(p,\lambda)+\xi_0(p,\lambda)\lambda)d_0(p). \tag{24}$$

Покажем, что $\deg_p(f_2(p,\lambda)+\xi_0(p,\lambda)\lambda)\leqslant s-1$. Если допустить противоположное неравенство, то

$$\deg_p(f_2(p,\lambda)+\xi_0(p,\lambda)\lambda)d_0(p)\geqslant n+r+s-1. \tag{25}$$

Так как $\deg_p(\xi_1(p,\lambda)\lambda)\leqslant n+r-2$, то $\deg_p K(p,\lambda)\geqslant n+r+s-1$ в силу (24), (25), что противоречит равенству (19), согласно которому $\deg_p K(p,\lambda)\leqslant n+r+s-2$. Лемма доказана.

Покажем, что если $N\geqslant 2n+r-1$ и выполнены неравенства (23), то система (18) может быть записана в нормальной форме. Для упрощения будем оперировать элементами характеристической матрицы (18).

Шаг 1. Если $r\geqslant 2$, то введя вспомогательные переменные

$$\dot{x}_{n+1}(t)=\widetilde{x}_1(t),\quad \dot{\widetilde{x}}_1(t)=\widetilde{x}_2(t),\quad \ldots,\quad \dot{\widetilde{x}}_{r-2}(t)=\widetilde{x}_{r-1}(t),$$

из системы (18) получим систему с характеристической матрицей, в которой после n-й строки и n-го столбца добавятся $r-1$ строк и столбцов. Поскольку эта процедура общеизвестна, то запишем только фрагмент полученной матрицы, начиная с элемента, расположенного в позиции $(n,n+1)$:

$$\begin{bmatrix} -a_{n-1,n}(\Lambda) & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ p & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & p & -1 & 0 \\ -\bar{\varphi}_r(\lambda) & -\bar{\varphi}_{r-1}(\lambda) & \ldots & -\bar{\varphi}_2(\lambda) & p-\bar{\varphi}_1(\lambda) & -f_1(p,\lambda) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & p^s-\sum_{i=1}^s\bar{f}_i(\lambda)p^{s-i} \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Если $m_1=r_1-(r-1)\geqslant 0$, то, выполняя элементарные преобразования над столбцами этой матрицы (см. [16, п. 3.4]), её последний столбец приведём к виду

$$\left[0,-\widetilde{f}_1(p,\lambda),\ldots,-\widetilde{f}_{r-1}(\lambda),-\widetilde{f}_r(\lambda),p^s-\sum_{i=1}^s\bar{f}_i(\lambda)p^{s-i}\right]'.$$

Здесь $\widetilde{f}_1(p,\lambda)$ – некоторый полином со старшим членом $\hat{f}_1(\lambda)p^{r_1-(r-1)}$ относительно p; $\widetilde{f}_i(\lambda)$, $i=\overline{1,r-1}$, – некоторые полиномы.

Так как $N\geqslant 2n+r-1$, то $s=N-n-r\geqslant n-1$. Если $s\geqslant 2$, то в полученной характеристической матрице после $(n+r)$-й строки и $(n+r)$-го столбца аналогично (26) добавим $s-1$ строку и $s-1$ столбец, что опять-таки равносильно введению $s-1$ вспомогательных переменных.

Шаг 2. Согласно (23) получаем, что $m_1\leqslant n-1$, а так как $n-1\leqslant s$, то $m_1\leqslant s$. Если $m_1>0$, то, используя строки с номерами с $n+r$ по $n+r+s-1$, посредством элементарных преобразований элементы n-й строки $[0,\ldots,p,-1,0,\ldots,0,-\widetilde{f}_1(p,\lambda),0,\ldots,0]$, начиная с $(n+r)$-го, последовательно заменим полиномами, зависящими только от λ. В результате получим регулятор финитной стабилизации в виде

$$u(t)=\psi_1(\Lambda)f(\lambda)x_1(t)+\ldots+\psi_{n-1}(\Lambda)f(\lambda)x_{n-1}(t)+x_{n+1}(t)+\ldots+\breve{f}_1(\lambda)x_{N-s}(t)+\ldots$$

$$\ldots+\breve{f}_s(\lambda)x_{N-1}(t)+f(\lambda)q_2(\lambda)a_1(\lambda)x_N(t),$$

$$\dot{x}_{n+1}(t)=x_{n+2}(t)+\widetilde{f}_2(\lambda)x_{N-s}(t),\quad \ldots,\quad \dot{x}_{N-s-2}(t)=x_{N-s-1}(t)+\widetilde{f}_{r-1}(\lambda)x_{N-s}(t),$$

$$\begin{gathered}
\dot x_{N-s-1}(t) = \varphi_1(\Lambda)x_1(t) + \ldots + \varphi_{n-1}(\Lambda)x_{n-1}(t) + \bar\varphi_r(\Lambda)x_n(t) + \ldots \\
\ldots + \bar\varphi_1(\Lambda)x_{N-s-1}(t) + \widetilde{f}_r(\lambda)x_{N-s}(t) + \ldots + q_1(\lambda)a_1(\lambda)x_N(t), \\
\dot x_{N-s}(t) = x_{N-s+1}(t), \quad \ldots, \quad \dot x_{N-2}(t) = x_{N-1}(t), \\
\dot x_{N-1}(t) = \psi_1(\Lambda)x_1(t) + \ldots + \psi_{n-1}(\Lambda)x_{n-1}(t) + \ldots + \bar f_s(\lambda)x_{N-s}(t) + \ldots \\
\ldots + \bar f_1(\lambda)x_{N-1}(t) + q_2(\lambda)a_1(\lambda)x_N(t), \quad \dot x_N(t) = x_{N-s}(t) + a_2(\lambda)x_N(t), \quad t > 0. \qquad (27)
\end{gathered}$$

Здесь $\breve f_i(\lambda)$, $i = \overline{1, s}$, – некоторые полиномы; $f(\lambda) = \hat f_0(\lambda)$ – коэффициент полинома $f_1(p, \lambda)$ при p^{r_1}, если $m_1 = s$, и $f(\lambda) = 0$, если $m_1 < s$.

Если $r = 1$, то преобразования шага 1 отменяются и после шага 2 первое уравнение регулятора (27) будет таким:

$$\begin{gathered}
u(t) = (\varphi_1(\Lambda) + \psi_1(\Lambda)f(\lambda))x_1(t) + \ldots + (\varphi_{n-1}(\Lambda) + \psi_{n-1}(\Lambda)f(\lambda))x_{n-1}(t) + \bar\varphi_1(\Lambda)x_n(t) + \ldots \\
\ldots + \breve f_1(\lambda)x_{N-s}(t) + \ldots + \breve f_s(\lambda)x_{N-1}(t) + (q_1(\lambda) + f(\lambda)q_2(\lambda))a_1(\lambda)x_N(t).
\end{gathered}$$

Здесь, как и в (27), $\breve f_i(\lambda)$, $i = \overline{1, s}$, – некоторые полиномы; $f(\lambda) = \hat f_0(\lambda)$ – коэффициент полинома $f_1(p, \lambda)$ при p^{r_1}, если $m_1 = s$, и $f(\lambda) = 0$, если $m_1 < s$.

Напомним, что $\widetilde\lambda(p) = \lambda(e^{-ph_1}, \ldots, e^{-ph_\mu})$, полином $\lambda = \lambda(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)$ задан выше равенством (13).

Теорема 2. *Пусть выполнено условие спектральной управляемости (4). Для финитной стабилизации системы (1) регулятором (27) достаточно:*

a) обеспечить замкнутой системе (1), (27) конечный спектр с некоторым характеристическим полиномом $d(p)$ *степени* $N \geqslant 2n + r - 1$;

b) выбрать полиномы $a_1(\lambda)$ *и* $a_2(\lambda)$ *такими, чтобы функции*

$$a_1(\widetilde\lambda(p))/d(p) \quad \text{и} \quad (a_2(\widetilde\lambda(p)) - p)/d(p)$$

были целыми.

Доказательство. Так как характеристическая матрица замкнутой системы (1), (27) (обозначим её $\hat A(p, \widetilde\lambda(p)))$ получена из матрицы (18) элементарными преобразованиями строк и столбцов, то её определитель также равен $d(p)$. Замкнутая система (1), (27) – линейная автономная система запаздывающего типа, поэтому к ней применимо преобразование Лапласа. Согласно теореме Винера–Пэли для выполнения тождеств (3) достаточно [11], чтобы элементы первых n строк матрицы $(\hat A(p, \widetilde\lambda(p)))^{-1}$ были целыми функциями экспоненциального типа, т.е., другими словами, достаточно, чтобы дополнительные миноры к элементам первых n столбцов характеристической матрицы $\hat A(p, \widetilde\lambda(p))$ были целыми функциями. Для того чтобы убедиться в справедливости последнего свойства достаточно разложить указанные миноры по последнему столбцу матрицы $\hat A(p, \widetilde\lambda(p))$ и воспользоваться условием b) доказываемой теоремы. Таким образом, регулятор (27) обеспечивает финитную стабилизацию системы (1). Теорема доказана.

4. Вычисление коэффициентов регулятора (17). Построение регулятора (27) равносильно построению регулятора (17), поскольку регулятор (27) получен элементарными преобразованиями характеристической матрицы (18). Приведём схему вычисления коэффициентов регулятора (17), гарантирующих выполнение условий теорем 1 и 2.

Далее считаем, что выполняются следующие предположения: i) система (1) спектрально управляема; ii) система (1) спектрально приводима, т.е. при некотором полиноме $d_0(p)$ и при некоторых полиномах $\varphi_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, n-1}$, и $\bar\varphi_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, r}$, имеет место равенство (8); iii) существует векторный полином $\Psi'(\Lambda) = (\psi_1(\Lambda), \ldots, \psi_n(\Lambda))$ такой, что полином $\lambda = \lambda(\Lambda)$ (см. (13)) удовлетворяет условиям (14)–(16).

1) Полином $\lambda = \lambda(\Lambda)$ находится с помощью вычисления базиса Грёбнера для системы полиномов (6) (см. лемму 2) с возможной заменой набора переменных $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)$ набором $\hat\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)$ и полинома $\lambda = \lambda(\Lambda)$ полиномом $\hat\lambda(\hat\Lambda) = \chi(\lambda_0)\lambda(\Lambda)$ согласно лемме 3.

Чтобы не усложнять обозначения, далее считаем, что $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)$ и что полином $\lambda = \lambda(\Lambda)$ удовлетворяет условиям (14)–(16). Полиномы $\psi_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, n-1}$, можно найти (см. (13)) методом неопределённых коэффициентов.

2) Полином $d_0(p) = d_1(p)\widetilde{d}_0(p)$ (см. п. 1), где $\widetilde{d}_0(p)$ также находится с помощью вычисления базиса Грёбнера для системы полиномов (6). Полином $d_1(p)$, если $\deg d_1(p) \geqslant 1$, выбираем таким, чтобы $\widetilde{\lambda}(p) \neq 0$ на его корнях p. Таким образом, неравенства (14)–(16) считаем выполненными для всех $p \in P_0$. Полиномы $\varphi_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, n}$; $\bar{\varphi}_j(\Lambda)$, $j = \overline{0, r-1}$, связанные с полиномом $d_0(p)$ равенством (8), можно найти или как указано в [13, следствие 1], или методом неопределённых коэффициентов. Шаги 1 и 2 подробно описаны в п. 2.

Согласно 2) система уравнений

$$\widetilde{\lambda}(p) = 0, \quad d_0(p) = 0$$

несовместна. Другими словами, полиномы λ и $d_0(a_2(\lambda))$, $\lambda \in \mathbb{C}$, – взаимно просты, что существенно для построения регулятора (17), а именно, – для построения векторных полиномов $q'(\lambda) = (q_1(\lambda), q_2(\lambda))$, $f'(p, \lambda) = (f_1(p, \lambda),\ f_2(p, \lambda))$.

3) Выбор полинома $d(p)$ и полиномов $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$. Согласно п. 1 получаем разложение (7) и полином $d_0(p)$, удовлетворяющий равенству (8). Характеристический полином $d(p)$ замкнутой системы (18) возьмём в виде $d(p) = d_2(p)d_0(p)$, где $d_2(p)$ – полином с действительными коэффициентами. Для приведения замкнутой системы (18) к нормальной форме понадобится неравенство $N = \deg d(p) \geqslant 2n + r - 1$, которое всегда можно обеспечить за счёт степени полинома $d_2(p)$.

Замечание 4. При выборе полинома $d_2(p)$ также учитываем следующее требование: различным корням p_i полинома $d_2(p)$ должны соответствовать разные значения $\widetilde{\lambda}(p_i)$.

Пусть характеристический полином $d(p)$ замкнутой системы имеет вид

$$d(p) = \prod_{i=1}^{s_1} (p - p_i)^{r_i}, \quad p_i \in \widetilde{P}, \tag{28}$$

где $\widetilde{P} = \{p_i \in \mathbb{C} \colon\ i = \overline{1, s_1}\}$ – его различные действительные или комплексно сопряжённые корни с алгебраическими кратностями r_i. Обозначим $\widetilde{\Lambda} = \{\widetilde{\lambda}(p_i) : p_i \in \widetilde{P},\ i = \overline{1, s_1}\}$.

Для обеспечения условия б) теоремы 1 необходимо и достаточно, чтобы корни полинома $d(p)$ (см. (28)) являлись нулями функций $a_1(\widetilde{\lambda}(p))$, $a_2(\widetilde{\lambda}(p)) - p$ не меньшей кратности. Поэтому возьмём [4]

$$a_1(\lambda) = \prod_{i=1}^{s_1} (\lambda - \widetilde{\lambda}(p_i))^{r_i}, \quad \widetilde{\lambda}(p_i) \in \widetilde{\Lambda}. \tag{29}$$

Чтобы функция $(a_2(\widetilde{\lambda}(p)) - p)/d(p)$ была целой необходимо и достаточно, чтобы для всех $p_i \in \widetilde{P}$ числитель дроби и его производные по переменной p обращались в нуль, т.е. чтобы

$$\left.(a_2(\widetilde{\lambda}(p)) - p)^{(k)}\right|_{p=p_i} = 0, \quad i = \overline{1, s_1}, \quad k = \overline{0, r_i - 1}.$$

Из этих равенств находим значения для $a_2^{(k)}(\widetilde{\lambda}(p_i))$, $\quad i = \overline{1, s_1}$, $\quad k = \overline{0, r_i - 1}$:

$$a_2(\widetilde{\lambda}(p_i)) = p_i, \quad a_2^{(1)}(\widetilde{\lambda}(p_i)) = 1/\widetilde{\lambda}^{(1)}(p_i), \quad a_2^{(2)}(\widetilde{\lambda}(p_i)) = -\widetilde{\lambda}^{(2)}(p_i)/(\widetilde{\lambda}^{(1)}(p_i))^3, \quad \ldots,$$
$$p_i \in \widetilde{P}, \quad i = \overline{1, s_1}. \tag{30}$$

Система значений (30) полинома $a_2(\widetilde{\lambda}_i)$, $\widetilde{\lambda}_i = \widetilde{\lambda}(p_i)$, $p_i \in \widetilde{P}$, корректна, поскольку, согласно лемме 3, полином $\widetilde{\lambda}(p) = \lambda(e^{-ph_1}, \ldots, e^{-ph_\mu})$ имеет разные значения для различных корней p_i полинома $d_0(p)$ и $\widetilde{\lambda}^{(1)}(p_i) \neq 0$, $i = \overline{1, s_1}$.

Напомним, что $G(p,\lambda)=(\lambda,d_0(p))'$. Потребуем, чтобы одновременно с равенствами (30) выполнялось соотношение $G(a_2(\lambda),\lambda)\neq 0$, т.е. соотношение

$$|\lambda|+|d_0(a_2(\lambda))|\neq 0,\quad \lambda\in\mathbb{C},\tag{31}$$

которое очевидно равносильно тому, что $a_2(0)\notin P_0$. Это соотношение понадобится при построении векторного полинома $q'(\lambda)$.

Если для интерполяционного полинома $a_2(\lambda)$, построенного согласно (30), при $\lambda=0$ неравенство (31) не выполняется, то к интерполяционным условиям (30) добавим равенство

$$a_2(0)=p_0\quad (p_0\in\mathbb{R}\ \text{ такое, что }\ p_0\notin P_0).\tag{32}$$

Напомним, что P_0 – множество различных корней полинома $d_0(p)$. Полином $a_2(\lambda)$ найдём как решение известной в теории полиномов интерполяционной задачи (30), (32), т.е. как полином Лагранжа–Сильвестра [17, с. 104].

4) Вычисление полинома $q'(\lambda)=(q_1(\lambda),q_2(\lambda))$. Чтобы функция $k(p,\lambda)$ была полиномом должно, согласно теореме Безу, выполняться тождество

$$a_1(\lambda)q'(\lambda)G(a_2(\lambda),\lambda)+d(a_2(\lambda))=0,\quad \lambda\in\mathbb{C}.\tag{33}$$

Укажем векторный полином $q'(\lambda)$, обеспечивающий выполнение этого тождества. Полином $d_0(a_2(\lambda))$ представим в виде $d_0(a_2(\lambda))=\lambda\delta(\lambda)+\delta_0$, где $\delta(\lambda)$ – подходящий полином, δ_0 – число, отличное от нуля в силу условия (31). Векторный полином $\widetilde{q}'(\lambda)=(-\delta(\lambda)/\delta_0,1/\delta_0)$ даёт тождество

$$\widetilde{q}'(\lambda)G(a_2(\lambda),\lambda)=1,\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Согласно [16] полином $d(a_2(\lambda))$ делится на полином $a_1(\lambda)$, а значит, рациональная функция $d(a_2(\lambda))/a_1(\lambda)$ является полиномом. Таким образом, при векторном полиноме

$$q'(\lambda)=-\widetilde{q}'(\lambda)d(a_2(\lambda))/a_1(\lambda)\tag{34}$$

тождество (33) имеет место.

5) Нахождение векторного полинома $f'(p,\lambda)$. Полином $k(p,\lambda)$ запишем следующим образом:

$$k(p,\lambda)=((d(p)-d(p)\widetilde{q}'(\lambda)G(p,\lambda))+(d(p)\widetilde{q}'(\lambda)G(p,\lambda)+a_1(\lambda)q'(\lambda)G(p,\lambda)))/(a_2(\lambda)-p).$$

Заменяя $d(p)$ в первой скобке на $d_2(p)d_0(p)=[0,d_2(p)]G(p,\lambda)$ и во второй скобке $q'(\lambda)$ согласно (34), получаем

$$k(p,\lambda)=\left(\frac{1-\widetilde{q}'(\lambda)G(p,\lambda)}{a_2(\lambda)-p}[0,d_2(p)]+\frac{d(p)-d(a_2(\lambda))}{a_2(\lambda)-p}\widetilde{q}'(\lambda)\right)G(p,\lambda).\tag{35}$$

Здесь в силу теоремы Безу $(1-\widetilde{q}'(\lambda)G(p,\lambda))/(a_2(\lambda)-p)$ и $(d(p)-d(a_2(\lambda)))/(a_2(\lambda)-p)$ – полиномы.

Взяв полином

$$f'(p,\lambda)=\frac{1-\widetilde{q}'(\lambda)G(p,\lambda)}{a_2(\lambda)-p}[0,d_2(p)]+\frac{d(p)-d(a_2(\lambda))}{a_2(\lambda)-p}\widetilde{q}'(\lambda)+[0,1]p^s,$$

вследствие (35) приходим к равенству (20), т.е. выполнено условие б) теоремы 1.

Замечание 5. Полиномы $q'(\lambda)$ и $f'(p,\lambda)$, существование которых обосновано в шагах 4), 5), можно находить методом неопределённых коэффициентов как решение полиномиального уравнения

$$(a_1(\lambda)q'(\lambda)G(p,\lambda)+d(p))-(a_2(\lambda)-p)(f_1(p,\lambda),f_2(p,\lambda)-p^s)G(p,\lambda)=0.\tag{36}$$

Итак, все условия теорем 1 и 2 реализованы, следовательно, регулятор (17) построен. Регулятор (27) получается элементарными преобразованиями характеристической матрицы (18) замкнутой системы (1), (17).

Замечание 6. Если исходная система (1), где последняя строка матриц A_i $(i=\overline{0,m})$ не обязательно нулевая, имеет конечный спектр, т.е. $w(p)=|W(p)|$ – полином, то равенство (8) реализовано. В таком случае полагаем $r=1$, $d_0(p)=w(p)$ и регулятор финитной стабилизации строим в виде

$$\begin{gathered} u(t)=f_1(p,\lambda)x_{n+1}(t)+q_1(\lambda)a_1(\lambda)x_{n+2}(t), \\ x_{n+1}^{(s)}(t)=\sum_{i=1}^{n-1}\psi_i(\Lambda)x_i(t)+f_2(p,\lambda)x_{n+1}(t)+q_2(\lambda)a_1(\lambda)x_{n+2}(t), \\ \dot{x}_{n+2}(t)=x_{n+1}(t)+a_2(\lambda)x_{n+2}(t), \quad t>0. \end{gathered} \tag{37}$$

Здесь, как и раньше, $a_i(\lambda)$, $i=\overline{1,2}$, $q'(\lambda)=(q_1(\lambda),q_2(\lambda))$; $\psi_i(\Lambda)$, $i=\overline{1,n-1}$, – некоторые полиномы; $f_1(p,\lambda)=\sum_{i=0}^{r_1}\hat{f}_i(\lambda)p^{r_1-i}$, $\hat{f}_i(\lambda)$, $i=\overline{0,r_1}$, $f_2(p,\lambda)=\sum_{i=0}^{s}\bar{f}_i(\lambda)p^{s-i}$, $\bar{f}_i(\lambda)$, $i==\overline{0,s}$, – некоторые полиномы, $r_1\geqslant 0$, $s\geqslant 1$.

При $N\geqslant 2n$ замкнутая система (1), (37) приводится к нормальному виду. Для этого при $s\geqslant 2$ в полученной характеристической матрице после $(n+1)$-й строки и $(n+1)$-го столбца аналогично (26) добавим $s-1$ строку и $s-1$ столбец, что равносильно введению $s-1$ вспомогательных переменных. Если $r_1>0$, то, используя строки с номерами с $n+1$ по $n+s$, посредством элементарных преобразований замкнутую систему (1), (37) приведём к нормальному виду.

5. Примеры. Предложенную процедуру построения регулятора финитной стабилизации вида (27) проиллюстрируем примером.

Пример 4. Пусть объект управления описывается системой (1), (9). В примере 1, введя новые запаздывания $h_1=\ln 2$, $h_2=\ln 3-\ln 2$, мы привели данную систему к системе с конечным спектром:

$$\begin{vmatrix} p-\lambda_1\lambda_2 & -\lambda_1 \\ \lambda_2+\lambda_1\lambda_2^2 & p+1+\lambda_1\lambda_2 \end{vmatrix}=p(p+1), \quad \lambda_i=e^{-ph_i}, \quad i=\overline{1,2}.$$

При любых запаздываниях h_1, h_2 данная система полностью управляема, так как, очевидно, выполняется условие (4): $\lambda_1=e^{-ph_1}\neq 0$ для всех $p\in\mathbb{C}$. Значит, регулятор финитной стабилизации существует.

Базис Грёбнера для системы полиномов $M(p,\Lambda)$, $\Lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$, имеет вид $\{p,\lambda_1\}$. Полином $\lambda=\lambda(\Lambda)=\lambda_1$ (см. (13)) удовлетворяет условиям (14)–(16) на множестве $p\in P_0=\{0,-1\}$. Поэтому, согласно (13), полагаем $(\psi_1(\lambda),\ \psi_2(\lambda))=(1,0)$. Итак,

$$\lambda=\lambda_1, \quad d_0(p)=p^2+p.$$

В данном случае $r=1$, поэтому порядок замкнутой системы равен $N=2n+r-1=4$, $s=N-(n+r)=1$. Следовательно, регулятор финитной стабилизации ищем в виде (см. (17))

$$\begin{gathered} u(t)=-(\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^2)x_1(t)-(1+\lambda_1\lambda_2)x_2(t)+f_1(p,\lambda)x_3(t)+q_1(\lambda)a_1(\lambda)x_4(t), \\ \dot{x}_3=x_1(t)+f_2(p,\lambda)x_3(t)+q_2(\lambda)a_1(\lambda)x_4(t), \\ \dot{x}_4(t)=x_3(t)+a_2(\lambda)x_4(t), \quad t>t_0\geqslant 0. \end{gathered} \tag{38}$$

Замкнутая система имеет следующую характеристическую матрицу:

$$pE_4-\bar{A}(\lambda)=\begin{bmatrix} p-\lambda_1\lambda_2 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_2+\lambda_1\lambda_2^2 & p+1+\lambda_1\lambda_2 & -f_1(p,\lambda) & -q_1(\lambda)a_1(\lambda) \\ -1 & 0 & p-f_2(p,\lambda) & -q_2(\lambda)a_1(\lambda) \\ 0 & 0 & -1 & p-a_2(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Полиномы $a_i(\lambda)$, $q_i(\lambda)$, $f_i(p,\lambda)$, $i=\overline{1,2}$, получим, выполнив рекомендации п. 4 (шаги 3)–5)).

Полином $d(p)$, учитывая замечание 4, возьмём в виде $d(p) = p(p + 1)(p + 2)(p + 3)$. Следовательно, $\widetilde{P} = \{-3, -2, -1, 0\}$, $\widetilde{\Lambda} = \{8, 4, 2, 1\}$.

Согласно (29), (30) строим полиномы

$$a_1(\lambda) = (\lambda - 8)(\lambda - 4)(\lambda - 2)(\lambda - 1), \quad a_2(\lambda) = (1 - \lambda)(248 - 46\lambda + 3\lambda^2)/168$$

такие, чтобы функции $a_1(\widetilde{\lambda}(p))/d(p)$, $(a_2(\widetilde{\lambda}(p)) - p)/d(p)$ $(\widetilde{\lambda}(p) = e^{-ph_1})$ были целыми. Проверяем условие (31), оно выполняется: $a_2(0) \notin P_0$.

Методом неопределённых коэффициентов, как решение уравнения (36), находим компоненты векторных полиномов $q'(\lambda) = (q_1(\lambda), q_2(\lambda))$ и $f'(p, \lambda) = (f_1(p, \lambda), f_2(p, \lambda))$, существование которых обосновано в п. 4 (там же приведены и необходимые формулы):

$$q_1(\lambda) = \frac{(17\lambda - 41)(248 - 46\lambda + 3\lambda^2)(208 - 43\lambda + 3\lambda^2)}{2370816}, \quad q_2(\lambda) = \frac{-6862 + 159\lambda - 9\lambda^2}{28224},$$

$$f_1(p, \lambda) = \frac{(\lambda - 8)(\lambda - 4)(17\lambda - 41)(416 + 168p - 294\lambda + 49\lambda^2 - 3\lambda^3)}{14112},$$

$$f_2(p, \lambda) = \frac{1}{168}(-1088 + 294\lambda - 49\lambda^2 + 3\lambda^3).$$

Все параметры замкнутой системы (39) указаны, т.е. регулятор финитной стабилизации вида (38) построен. Приведём замкнутую систему (39) к нормальной форме.

Умножая третью строку характеристической матрицы на $(\lambda - 8)(\lambda - 4)(17\lambda - 41)/84$ и прибавляя ко второй строке, получаем

$$\biggl\{\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^2 - \frac{(\lambda - 8)(\lambda - 4)(17\lambda - 41)}{84}, p + 1 + \lambda_1\lambda_2, \frac{(\lambda - 8)(\lambda - 4)(17\lambda - 41)}{21},$$

$$\frac{(\lambda - 8)(\lambda - 4)(17\lambda - 41)(\lambda - 2)(\lambda - 1)(500 - 200\lambda + 17\lambda^2)}{7056}\biggr\}, \quad \lambda = \lambda_1.$$

Окончательно система (1), (9), замкнутая регулятором финитной стабилизации, имеет вид $(\lambda_i = e^{-ph_i},\ i = \overline{1, 2},\ h_1 = \ln 2,\ h_2 = \ln 3 - \ln 2)$

$$pE_4 - \hat{A}(\Lambda) =$$

$$= \begin{bmatrix} p - \lambda_1\lambda_2 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ -\varphi_1(\Lambda) - \psi_1(\Lambda) f(\lambda_1) & p - \bar{\varphi}_1(\Lambda) & -\hat{f}_1(\lambda_1) - \bar{f}_1(\lambda_1)\hat{f}_0(\lambda_1) & -(q_1(\lambda_1) + \hat{f}_0(\lambda_1) q_2(\lambda_1)) a_1(\lambda_1) \\ -1 & 0 & p - f_2(p, \lambda_1) & -q_2(\lambda_1) a_1(\lambda_1) \\ 0 & 0 & -1 & p - a_2(\lambda_1) \end{bmatrix}. \tag{40}$$

В подробной записи вторая строка приведена выше.

Так как функции $a_1(e^{-ph_1})/d(p)$ и $(a_2(e^{-ph_1}) - p)/d(p)$ – целые, то первые три строки обратной матрицы $(pE_4 - \hat{A}(e^{-ph_1}, e^{-ph_2}))^{-1}$ образованы целыми функциями экспоненциального типа. Запишем старшие степени переменной e^{-p} в первых трёх строках матрицы, присоединённой к характеристической матрице $pE_4 - \hat{A}(e^{-ph_1}, e^{-ph_2})$ замкнутой системы (40):

$$(11 \ln 2, 10 \ln 2 + \ln 3, 10 \ln 2), \quad h_1 = \ln 2, \quad h_2 = \ln 3.$$

Отсюда заключаем, что первые две строки обратной матрицы $(pE_4 - \hat{A}(e^{-ph_1}, e^{-ph_2}))^{-1}$ образованы целыми функциями экспоненциального типа, который не выше $10 \ln 2 + \ln 3$. Согласно теореме Винера–Пэли в замкнутой системе (39) переменные $x_i(t)$, $i = \overline{1, 2}$, обратятся в нуль, по крайней мере, начиная с момента $t_0 + 10 \ln 2 + \ln 3$ $(u(t) = 0,\ t \leqslant t_0,\ t_0 \geqslant 0$ – момент включения регулятора), независимо от начальных кусочно-непрерывных функций системы (1), (9) и построенного регулятора. Переменная $x_3(t)$ также обратится в нуль, начиная с момента $t_0+10\ln 2$.

Таким образом, построенный регулятор обеспечивает конечный спектр (с характеристическим полиномом $d(p)=p(p+1)(p+2)(p+3)$) и точечную вырожденность замкнутой системы (40) в направлениях, выделяющих переменные $x_i(t)$, $i=\overline{1,2}$, и тем самым – финитную стабилизацию (см. тождества (3), где $t_1=t_0+10\ln 2+\ln 3$) системы (1), (9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М., 1968.
2. *Марченко В.М.* К теории управляемости и наблюдаемости линейных систем с запаздывающим аргументом // Проблемы оптимального управления. Минск, 1981. С. 124–147.
3. *Фомичев В.В.* Достаточные условия стабилизации линейных динамических систем // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 11. С. 1516–1521.
4. *Карпук В.В., Метельский А.В.* Полное успокоение и стабилизация линейных автономных систем с запаздыванием // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 6. С. 19–28.
5. *Метельский А.В.* Полное успокоение линейной автономной дифференциально-разностной системы регулятором того же типа // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. №9. С. 1240–1255.
6. *Метельский А.В., Хартовский В.Е., Урбан О.И.* Регуляторы успокоения решения линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 391–403.
7. *Метельский А.В., Хартовский В.Е.* Синтез регуляторов успокоения решения вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 547–558.
8. *Булатов В.И.* Спектральная приводимость систем с запаздываниями // Вестн. Бел. гос. ун-та. Сер. 1. 1979. № 3. С. 78–80.
9. *Pekar L., Gao Q.* Spectrum analysis of LTI continuous-time systems with constant delays: a literature overview of some recent results // IEEE Access. 2018. № 6. P. 35457–35491.
10. *Zaitsev V., Kim I.* Arbitrary coefficient assignment by static output feedback for linear differential equations with non-commensurate lumped and distributed delays // Mathematics. 2021. № 9. P. 2158.
11. *Kappel F.* On degeneracy of functional-differential equations // J. Differ. Equat. 1976. V. 22. № 2. P. 250–267.
12. *Метельский А.В.* Проблема точечной полноты в теории управления дифференциально-разностными системами // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49. Вып. 2 (296). С. 103–141.
13. *Метельский А.В.* Построение наблюдателей для дифференциальной системы запаздывающего типа с одномерным выходом // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 396–408.
14. *Метельский А.В.* Алгебраический подход к стабилизации дифференциальной системы запаздывающего типа // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 8. С. 1119–1131.
15. *Попов В.М.* Гиперустойчивость автоматических систем. М., 1970.
16. *Метельский А.В.* Полная и финитная стабилизация дифференциальной системы с запаздыванием обратной связью по неполному выходу // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1665–1682.
17. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1988.

Белорусский национальный технический университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 26.10.2021 г.
После доработки 26.10.2021 г.
Принята к публикации 21.12.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 120–138

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.633

КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА

© 2022 г. П. П. Матус, Хоанг Тхи Киеу Ань

Для многомерного уравнения Клейна–Гордона как с постоянными, так и с переменными коэффициентами рассматриваются и изучаются на стандартных шаблонах устойчивые компактные разностные схемы 4+2 и 4+4 порядков аппроксимации. Полученные результаты обобщаются на начально-краевые задачи для квазилинейных уравнений гиперболического типа второго порядка. Доказывается, что компактные разностные схемы повышенного порядка аппроксимации приводятся к трёхслойным схемам с постоянными или переменными весами, что позволяет привлечь для их анализа разработанную ранее теорию устойчивости операторно-разностных схем с операторами, действующими в конечномерных евклидовых пространствах. Получены априорные оценки устойчивости и сходимости разностного решения в сеточных аналогах пространств Соболева. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

DOI: 10.31857/S0374064122010125

Введение. Под *компактными* разностными схемами мы понимаем разностные схемы повышенных порядков аппроксимации и/или точности, записывающиеся на стандартных для данного уравнения шаблонах. Основополагающей работой в этом направлении для параболических уравнений с переменными коэффициентами является работа А.А. Самарского [1], в которой построены и изучены схемы с $4+2$ порядком аппроксимации, т.е. схемы с погрешностью аппроксимации $\Psi = O(|h|^4 + \tau^2)$, где $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_p^2$, а p – размерность задачи.

Экономичные компактные разностные схемы $4+2$ и $4+4$ порядков аппроксимации достаточно полно исследованы в работах В.Н. Валиулина и В.И. Паасонена [2, 3] ещё 50 лет назад. При этом только в этих работах правильно решена проблема аппроксимации с соответствующим порядком второго начального условия. Например, в работе [4], чтобы избежать возникающих осложнений, предполагалась однородность второго начального условия.

В настоящее время резко возрос интерес к построению компактных разностных схем для гиперболических уравнений второго порядка. Так, в работах [5, 6] получены первые результаты для квазилинейных уравнений, а в [7–10] построены компактные схемы для многомерного волнового уравнения с несамосопряжённым эллиптическим оператором как на равномерных, так и на неравномерных сетках. Отметим также работы [11–13], посвящённые построению точных разностных схем. Компактные разностные схемы на неравномерных сетках со странными условиями устойчивости рассматривались в работах [14–16] более 20 лет назад.

Настоящая работа посвящена построению и исследованию компактных разностных схем $4+2$ и $4+4$ порядков точности для многомерного уравнения Клейна–Гордона. Работа организована следующим образом.

В п. 1 приводятся необходимые сведения из теории устойчивости трёхслойных операторно-разностных схем. Вводится важное понятие аддитивной трёхслойной схемы с весами, которое затем будет использовано при приведении к канонической форме компактных разностных схем. Даются достаточные условия её устойчивости.

В п. 2 показывается, что компактные разностные схемы многих типов могут быть записаны в виде обычных схем с постоянными и/или переменными весами, что позволяет использовать для их анализа разработанную ранее теорию устойчивости операторно-разностных схем [14, 17].

В пп. 3, 4 исследуются компактные разностные схемы $4+2$ и $4+4$ порядков аппроксимации. Получены априорные оценки устойчивости и точности рассматриваемых разностных схем. Отмечается, что при повышении аппроксимации до 4-го порядка по всем переменным устойчивость может быть доказана лишь при соотношениях типа Куранта на шаги сетки.

В пп. 5, 6 полученные результаты обобщаются на квазилинейные уравнения и приводятся результаты тестовых расчётов, подтверждающих повышенный порядок точности разностных схем на стандартных шаблонах.

1. Достаточные условия устойчивости трёхслойных операторно-разностных схем. При исследовании устойчивости компактных разностных схем, аппроксимирующих многомерное уравнение Клейна–Гордона, естественно воспользоваться общей теорией Самарского [17, гл. VI, § 3] операторно-разностных схем.

Пусть заданы вещественное конечномерное евклидово пространство $H = H_h,$ скалярное произведение и норму в котором обозначим через $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ соответственно, а также сетка по времени

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, \quad n = \overline{0, N_0}, \quad \tau N_0 = T\} = \omega_\tau \bigcup T. \tag{1}$$

Пусть, кроме того, в пространстве H задан самосопряжённый положительно определённый оператор $A = A_h$. Через H_A обозначим евклидово пространство, состоящее из элементов пространства H и снабжённое скалярным произведением $(y,v)_A = (Ay,v)$ и нормой $\|y\|_A = \sqrt{(y,y)_A}$. Далее используем следующие безындексные обозначения теории разностных схем [17, гл. VI, § 3]:

$$y = y^n = y(t_n), \quad \hat{y} = y^{n+1} = y(t_{n+1}), \quad \check{y} = y^{n-1} = y(t_{n-1}), \quad y(t_n) \in H,$$

$$y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}, \quad y_{\overline{t}} = \frac{y - \check{y}}{\tau}, \quad y_{\overset{\circ}{t}} = \frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau} = \frac{y_t + y_{\overline{t}}}{2}, \quad y_{\overline{t}t} = \frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{\tau^2} = \frac{y_t - y_{\overline{t}}}{\tau}.$$

Будем рассматривать трёхслойные операторно-разностные схемы вида

$$Dy_{\overline{t}t} + By_{\overset{\circ}{t}} + Ay = \varphi, \quad 0 < t \in \omega_\tau, \tag{2}$$

$$y(0) = y_0, \quad y_t(0) = \overline{y}_0, \tag{3}$$

с постоянными операторами $A, B, D : H \to H,$ где $\varphi = \varphi^n = \varphi(t_n) \in H$ – задано, $y(t_n)$ – искомая функция. Имеют место следующие результаты.

Лемма 1 [17, с. 358]. *Пусть постоянные операторы в уравнении (2) удовлетворяют условиям* $A^* = A > 0, \ \ D = D^* > 0, \ \ B \geqslant 0$ *и*

$$D \geqslant \frac{\tau^2}{4}A. \tag{4}$$

Тогда трёхслойная разностная схема (2), (3) устойчива по начальным данным и при любом $t_n \in \omega_\tau$ *справедливо энергетическое неравенство*

$$E(t_n) \leqslant E(0), \quad t_n \in \omega_\tau,$$

где

$$E(t_n) = E_{h\tau}(t_n) = (\|y_t(t_n)\|^2_{D-(\tau^2/4)A} + \|y^{(0.5)}\|^2_A)^{1/2}, \quad y^{(0.5)} = 0.5(y^{n+1} + y^n).$$

Лемма 2 [14, с. 261]. *Если выполнены условия*

$$A^* = A > 0, \quad D^* = D \geqslant \frac{(1+\varepsilon)\tau^2}{4}A, \quad B \geqslant 0, \quad \varepsilon > 0, \tag{5}$$

то для решения разностной схемы (2), (3) имеет место априорная оценка

$$\|y^{n+1}\|_A \leqslant \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}(\|y(0)\|_A + \|y_t(0)\|_D + \max_{0 \leqslant k \leqslant n}(\|\varphi^k\|_{A^{-1}} + \|\varphi^k_t\|_{A^{-1}})). \tag{6}$$

Лемма 3 [14, с. 138]. *Пусть справедливо неравенство* $D \geqslant \delta_0 E,\ \ \delta_0 > 0,$ *и выполнены условия (5). Тогда для решения разностной схемы (2), (3) имеет место априорная оценка*

$$\|y^{n+1}\|_A \leqslant \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\bigg(\|y(0)\|_A + \|y_t(0)\|_D + \frac{1}{\delta_0}\sum_{k=1}^{n}\tau\|\varphi^k\|\bigg).$$

В классе трёхслойных операторно-разностных схем (2), (3) выделим важный для приложений класс *схем с весами*

$$y_{\bar{t}t} + Ay^{(\sigma,\sigma)} = \varphi, \quad y(0) = y_0, \quad y_t(0) = \overline{y}_0, \quad \sigma = \mathrm{const} \geqslant 0, \tag{7}$$

здесь и далее принято обозначение

$$y^{(\sigma,\sigma)} = \sigma\hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma\check{y}.$$

Применяя лемму 1, получаем достаточное условие устойчивости по начальным данным

$$\sigma \geqslant \frac{1}{4} - \frac{1}{\tau^2\|A\|}.$$

В работе будем рассматривать новый класс схем с весами, который вводит следующее

Определение. Если в схеме с весами (7) оператор A представи́м в виде

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha,$$

то такую операторно-разностную схему, т.е. схему

$$y_{\bar{t}t} + \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha y^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)} = \varphi, \quad y(0) = y_0, \quad y_t(0) = \overline{y}_0, \tag{8}$$

назовём *аддитивной схемой с весами.*

Теорема 1. *Пусть постоянные операторы* A_α *являются положительными и самосопряжёнными, т.е.* $A_\alpha = A_\alpha^* > 0,\ \ \alpha = \overline{1,p}.$ *Тогда при выполнении условий*

$$\sigma_\alpha \geqslant \frac{1+\varepsilon}{4} - \frac{1}{\tau^2\|A\|}, \quad \alpha = \overline{1,p}, \tag{9}$$

для решения разностной схемы (8) справедлива априорная оценка (6).

Доказательство. Записывая разностную схему (8) в каноническом виде (2), находим, что для неё

$$D = I + \tau^2\sum_{\alpha=1}^{p}\sigma_\alpha A_\alpha, \quad B = 0.$$

В частности, $D = D^*$. Так как для положительного самосопряжённого и ограниченного оператора имеет место соотношение

$$I \geqslant \frac{A}{\|A\|} = \frac{1}{\|A\|}\sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha,$$

то второе неравенство в (5)

$$D - \frac{(1+\varepsilon)\tau^2}{4}A = I + \tau^2\sum_{\alpha=1}^{p}\bigg(\sigma_\alpha - \frac{1+\varepsilon}{4}\bigg)A_\alpha \geqslant \sum_{\alpha=1}^{p}\bigg[\frac{1}{\|A\|} + \tau^2\bigg(\sigma_\alpha - \frac{1+\varepsilon}{4}\bigg)\bigg]A_\alpha \geqslant 0$$

выполнено в силу предположения (9). Теорема доказана.

2. Компактные схемы с весами для одномерного волнового уравнения. В прямоугольнике $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l,\ \ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ для однородного одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{10}$$

рассмотрим начально-краевую задачу с однородными краевыми условиями

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \nu_0(x), \quad 0 < x < l, \tag{11}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 < t \leqslant T. \tag{12}$$

На равномерной сетке узлов $\overline{\omega} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \{(x_i, t_n) \in \overline{Q}_T\}$, где

$$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ \ i = \overline{0, N},\ \ h = l/N\} = \omega_h \bigcup \gamma_h,$$

а сетка $\overline{\omega}_\tau$ определена соотношением (1), дифференциальную задачу заменим разностной:

$$y_{\bar{t}t} + Ay^{(\sigma_1,\sigma_2)} = 0, \quad (x,t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \tag{13}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad y_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \omega_h, \tag{14}$$

$$y(0,t) = y(l,t) = 0, \quad t \in \omega_\tau, \tag{15}$$

здесь и далее принято обозначение

$$y^{(\sigma_1,\sigma_2)} = \sigma_1 \hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) y + \sigma_2 \check{y}.$$

В равенстве (13) сеточный оператор A определяется в соответствии с формулами

$$(Ay)_i = -y_{\bar{x}x,i}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad y_0 = y_N = 0.$$

Свойства оператора A хорошо изучены [11]. В частности, он постоянный, положительный и самосопряжённый, $A = A^* > 0$, и

$$\|A\| = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2l} < \frac{4}{h^2}.$$

Говоря об аппроксимации начально-краевой задачи, необходимо помнить об аппроксимации с соответствующим порядком второго начального условия в (11). Определим основные классы используемых в вычислительной практике разностных схем и укажем некоторые их свойства.

2.1. Схема $\mathbf{2+2}$. Наиболее часто используется схема второго порядка точности по обеим переменным

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma, \quad \sigma \geqslant \frac{1}{4} - \frac{h^2}{4\tau^2}, \quad u_1(x) = \nu_0(x) + \frac{\tau}{2} u_0''(x), \quad \Psi = O(h^2 + \tau^2), \tag{16}$$

которая является абсолютно устойчивой при любом $\sigma \geqslant 1/4$. Приведённая схема легко обобщается на многомерные уравнения с переменными коэффициентами.

2.2. Схема $\mathbf{4+2}$. При заданных параметрах (16) необходимо положить

$$\sigma = \overline{\sigma} - \frac{h^2}{12\tau^2}, \quad \overline{\sigma} \geqslant \frac{1}{4} - \frac{h^2}{6\tau^2}, \quad \Psi = O(h^4 + \tau^2).$$

Эта разностная схема также абсолютно устойчива при произвольном $\overline{\sigma} \geqslant 1/4$.

2.3. Схема $\mathbf{4+4}$. Для её задания необходимо положить

$$\sigma = \frac{1}{12}\left(1 - \frac{h^2}{\tau^2}\right), \quad u_1(x) = \nu_0(x) + \frac{\tau}{2} u_0''(x) + \frac{\tau^2}{6} \nu_0''(x) + \frac{\tau^3}{24} u_0^{(4)}(x), \quad \Psi = O(h^4 + \tau^4).$$

Как правило, при повышении порядка аппроксимации редко удаётся сохранить свойство безусловной устойчивости. Для выполнения достаточного условия (4) устойчивости по начальным данным необходимо потребовать выполнения критерия Куранта $\tau \leqslant h$.

Схемы четвёртого порядка, по-видимому, впервые рассматривались в работах [2–4].

2.4. Точная разностная схема. Описание этой схемы для неоднородного волнового уравнения с неоднородными краевыми условиями второго и третьего рода можно найти в монографии [12, с. 67]. Схема с весами (13)–(15) является точной $(\Psi = 0)$ и устойчивой, если

$$\sigma = 0, \quad \tau = h, \quad u_1(x) = \frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h} \nu_0(\xi)\,d\xi + \frac{\tau}{2}u_{0\overline{x}x}, \quad x \in \omega_h.$$

К сожалению, она не обобщается на многомерные задачи. В [12, с. 80; 13] приводится её обобщение на случай квазилинейного волнового уравнения.

Отметим ещё несколько интересных примеров компактных разностных схем, относящихся уже к классу схем с переменными весовыми множителями [14].

2.5. Трёхточечная схема $2+2$ на произвольной неравномерной сетке по пространству. Пусть задана произвольная неравномерная сетка по пространству

$$\hat{\overline{\omega}}_h = \{x_i = x_{i-1} + h_i, \ \ i = \overline{1, N}, \ \ x_0 = 0, \ \ x_N = l\} = \hat{\omega}_h \bigcup \{x_0 = 0, \ \ x_N = l\}.$$

Сеточный оператор A в этом случае определяется следующим образом:

$$(Ay)_i = -y_{\overline{x}\hat{x},i} = \frac{1}{\hbar_i}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad y_0 = y_N = 0,$$

где $\hbar_i = 0.5(h_i + h_{i+1})$. Оператор A является [18, с. 39] положительным и самосопряжённым, $A = A^* > 0$, и

$$\|A\| < 4\underline{h}^{-2}, \quad \underline{h} = \min_{1 \leqslant i \leqslant N} h_i.$$

Хорошо известно, что при переходе от равномерной сетки к неравномерной порядок локальной аппроксимации обычно понижается. Тем не менее существует такая нерасчётная точка $\overline{x}_i = x_i + (h_{i+1} - h_i)/3$, относительной которой сохраняется второй порядок локальной аппроксимации второй производной.

Соответствующая разностная схема имеет вид

$$y_{\overline{t}t} = (y_{\overline{x}}^{(\sigma_1,\sigma_1)})_{\hat{x}},$$

$$\sigma_1 = \sigma_{1i} = \sigma - \frac{h_i^2}{6\tau^2}, \quad \sigma \geqslant \frac{1}{4} + \frac{h_i^2}{6\tau^2}, \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$u_1(x) = \nu_0(x) + \frac{\tau}{2}u_0''(x), \quad x \in \hat{\omega}_h, \quad \Psi(\overline{x}_i, t_n) = O(\hbar_i^2 + \tau^2).$$

Так как вес σ обычно выбирается в пределах от 0 до 1, то при $\sigma = 1$ мы получаем странное условие устойчивости схемы по начальным данным

$$\tau \geqslant \frac{\sqrt{2}h_i}{3},$$

полученное в работе [14] более 20 лет назад.

2.6. Трёхслойная и трёхточечная схема $2+2$ на произвольной неравномерной сетке по времени. На сетке $\hat{\overline{\omega}} = \overline{\omega}_h \times \hat{\overline{\omega}}_\tau$, $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih, \ i = \overline{0, N}, \ h = l/N\} = \omega_h \bigcup \gamma_h$, $\hat{\overline{\omega}}_\tau = \{t_n = t_{n-1} + \tau_n, \ t_0 = 0, \ t_{N_0} = T\} = \hat{\omega}_\tau \bigcup \{T\}$ для численного решения задачи (10)–(12) будем использовать следующую трёхслойную разностную схему с переменными по времени весами:

$$y_{\overline{t}\hat{t}} = y_{\overline{x}x}^{(\sigma_1,\sigma_2)}, \quad (x,t) \in \omega_h \times \hat{\omega}_\tau,$$

с начальными и граничными условиями (14), (15), где

$$y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau_+}, \quad y_{\overline{t}\hat{t}} = \frac{y_t - y_{\overline{t}}}{\tau^*}, \quad \tau^* = \frac{\tau_+ + \tau}{2},$$

$$\tau = \tau_n, \quad \tau_+ = \tau_{n+1}, \quad u_1(x) = \nu_0(x) + \frac{\tau_1}{2}u_0''(x), \quad x \in \omega_h.$$

В работах [15, 16] приводятся условия

$$\sigma_1\tau_{n+1}-\sigma_2\tau_n=\frac{\tau_{n+1}-\tau_n}{3}$$

для второго порядка $\Psi=O(h^2+\tau^{*2})$ локальной аппроксимации этой схемы.

Достаточные условия устойчивости по начальным данным $\sigma_1\geqslant\sigma_2$, $\sigma_1+\sigma_2=0.5$ и условия второго порядка локальной аппроксимации будут выполнены, если положить

$$\sigma_1=\frac{2\tau_{n+1}+\tau_n}{6(\tau_{n+1}+\tau_n)},\quad \sigma_2=\frac{\tau_{n+1}+2\tau_n}{6(\tau_{n+1}+\tau_n)},\quad \tau_{n+1}\geqslant\tau_n.$$

В работе [16] строится и исследуется компактная консервативная трёхслойная схема второго порядка $\Psi=O(\hbar_i^2+\tau^{*2})$ локальной аппроксимации на произвольных неравномерных сетках по пространству и времени.

2.7. Компактная схема $4+2$ для волнового уравнения с переменными коэффициентами. В прямоугольнике $\overline{Q}_T$ рассмотрим начально-краевую задачу для волнового уравнения с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg),\quad 0<k_1\leqslant k(x,t)\leqslant k_2. \tag{17}$$

Для аппроксимации дифференциального уравнения (17) будем использовать схему с весами (8), в которой

$$Ay=-(a(x,t_n)y_{\overline{x}})_x,\quad a=6[p(x-h,t)+4p(x-h/2,t)+p(x,t)]^{-1},$$

$$p(x,t)=\frac{1}{k(x,t)},\quad \sigma=\frac{1}{2}-\frac{h^2}{12\tau^2}p.$$

Данная схема с переменными весами имеет $4+2$ порядок аппроксимации, т.е. $\Psi=O(h^4+\tau^2)$, и устойчива при $\tau\geqslant\max\{1,\sqrt{2/(3k_1)}h\}$ [6, 19].

3. Разностные схемы для многомерного уравнения Клейна–Гордона с постоянными коэффициентами. Пусть $\overline{G}=\{x=(x_1,\ldots,x_p),\ 0\leqslant x_\alpha\leqslant l_\alpha,\ \alpha=\overline{1,p}\}$ является p-мерным прямоугольным параллелепипедом, Γ – его граница, так что $\overline{G}=G\bigcup\Gamma$. В цилиндре $\overline{Q}_T=\overline{G}\times[0\leqslant t\leqslant T]$ для многомерного уравнения Клейна–Гордона

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha u-mu+f(x,t),\quad m>0,\quad (x,t)\in Q_T=G\times[0<t\leqslant T], \tag{18}$$

рассмотрим начально-краевую задачу

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{G},\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\nu_0(x),\quad x\in G, \tag{19}$$

$$u(x,t)=\mu(x,t),\quad x\in\Gamma,\quad 0<t\leqslant T, \tag{20}$$

где $L_\alpha u=\partial^2u/\partial x_\alpha^2$, $\alpha=\overline{1,p}$.

Здесь и далее относительно решения дифференциальной задачи будем предполагать, что оно существует, единственно и обладает всеми непрерывными в $\overline{Q}_T$ производными, необходимыми для справедливости проводимых рассуждений.

В параллелепипеде $\overline{G}$ построим разностную сетку $\overline{\omega}_h=\{x_i=(i_1h_1,\ldots,i_ph_p),\ i_\alpha=\overline{0,N_\alpha},\ h_\alpha=l_\alpha/N_\alpha,\ \alpha=\overline{1,p}\}=\omega_h\bigcup\gamma_h$ и равномерную сетку $\overline{\omega}_\tau$, определённую соотношением (1). Сетка $\overline{\omega}_h$ равномерна по каждой из пространственных переменных. Здесь $\gamma_h=\{x_i\in\Gamma\}$ –

множество узлов сетки $\overline{\omega}_h$, которые принадлежат границе Γ. На построенной сетке узлов $\overline{\omega} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$ напишем для исходной задачи (18)–(20) следующую разностную схему:

$$y_{\bar{t}t} = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha y^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)} + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p} \frac{h_\beta^2}{12}\Lambda_\alpha\Lambda_\beta y^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)} - m y^{(\sigma_{p+1},\sigma_{p+1})} - m\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha y^{(\sigma_{p+1},\sigma_{p+1})} + \varphi,$$

$$(x,t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \tag{21}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad y_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \omega_h, \tag{22}$$

$$y(x,t) = \mu(x,t), \quad x \in \gamma_h, \quad t \in \omega_\tau, \tag{23}$$

где

$$\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \sigma_\alpha = \sigma - \frac{h_\alpha^2}{12\tau^2}, \quad \alpha = \overline{1,p}, \quad \varphi = f^*,$$

$$u_1(x) = \nu_0(x) + \frac{\tau}{2}\left[\sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u(x,0) - mu(x,0) + f(x,0)\right], \quad x \in \omega_h;$$

здесь и в дальнейшем для функции v через v^* обозначаем функцию, определяемую равенством

$$v^* := v + \sum_{\alpha=1}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha v.$$

3.1. Погрешность аппроксимации. Покажем, что разностная схема (21)–(23) аппроксимирует исходную задачу (18)–(20) с четвёртым порядком относительно пространственной переменной и со вторым относительно временно́й. Так как

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha u = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u + \sum_{\alpha=1}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}L_\alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + mu - f - \sum_{\alpha\neq\beta=1}^{p} L_\beta u\right) + O(|h|^4),$$

то разностное уравнение (21) доставляет невязку

$$\Psi = -u_{\bar{t}t} + \sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha u^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)} + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p}\frac{h_\beta^2}{12}\Lambda_\alpha\Lambda_\beta u^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)} - mu^{(\sigma_{p+1},\sigma_{p+1})} - m\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha u^{(\sigma_{p+1},\sigma_{p+1})} + \varphi,$$

которую запишем в виде

$$\Psi = -\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}L_\alpha L_\beta u + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p}\frac{h_\beta^2}{12}L_\alpha L_\beta u + O(|h|^4 + \tau^2).$$

Очевидны равенства (см. [1, с. 817])

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}L_\alpha L_\beta u = \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha<\beta}}^{p}\frac{h_\alpha^2 + h_\beta^2}{12}L_\alpha L_\beta u = \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha>\beta}}^{p}\frac{h_\alpha^2 + h_\beta^2}{12}L_\alpha L_\beta u.$$

Отсюда получаем, что

$$2\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}L_\alpha L_\beta u = \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}L_\alpha L_\beta u + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p}\frac{h_\beta^2}{12}L_\alpha L_\beta u,$$

и, следовательно,

$$\|\Psi\| \leqslant M_1(|h|^4+\tau^2), \quad M_1 = \mathrm{const} > 0. \tag{24}$$

Для погрешности аппроксимации $\overset{\circ}{\Psi} = u_1 - u_t^0$ второго начального условия (22) имеет место оценка

$$\|\overset{\circ}{\Psi}\| \leqslant M_2\tau^2, \quad M_2 = \mathrm{const} > 0. \tag{25}$$

3.2. Устойчивость. Для упрощения дальнейших исследований ограничимся рассмотрением двумерного случая $p=2$. При получении априорных оценок устойчивости по начальным данным и правой части предполагают, как правило, однородность краевых условий [14, с. 237; 17, с. 310]. Однако, как мы подчёркивали в наших работах [5, 6], в этом нет необходимости. Действительно, возмущая в разностной схеме начальные условия и правую часть и вычитая из возмущённой задачи соответствующие уравнения (21)–(23), получаем для возмущения $\overline{y} = \tilde{y} - y$ задачу уже с однородными граничными условиями:

$$\overline{y}_{\bar{t}t} = \sum_{\alpha=1}^{2}\Lambda_\alpha\overline{y}^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)} + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{2}\frac{h_\beta^2}{12}\Lambda_\alpha\Lambda_\beta\overline{y}^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)} - m\overline{y}^{(\sigma_3,\sigma_3)} - m\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha\overline{y}^{(\sigma_3,\sigma_3)} + \overline{\varphi},$$

$$(x,t)\in\omega_h\times\omega_\tau, \tag{26}$$

$$\overline{y}(x,0) = \overline{u}_0(x), \quad x\in\overline{\omega}_h, \quad \overline{y}_t(x,0) = \overline{u}_1(x), \quad x\in\omega_h, \tag{27}$$

$$\overline{y}(x,t) = 0, \quad x\in\gamma_h, \quad t\in\omega_\tau. \tag{28}$$

Покажем, что разностная схема (26)–(28) может быть записана как аддитивная схема с весами. Пусть на равномерной сетке ω_h с постоянным шагом задана сеточная функция $v(x)$, $x\in\omega_h$. Введём для неё весовые множители:

$$v_{(\beta_1,\beta_2)} = \beta_1 v(x+h) + (1-\beta_1-\beta_2)v(x) + \beta_2 v(x-h), \tag{29}$$

что соответствует интерполяции этой функции по трём узлам $x-h$, x, $x+h$. Заметим, что при $\beta_1=\beta_2=1/12$ из определения (29) следуют равенства

$$v_{(1/12,1/12)} = v + \frac{h^2}{12}v_{\bar{x}x} = \frac{1}{12}v(x-h) + \frac{5}{6}v(x) + \frac{1}{12}v(x-h),$$

где, как обычно, $v_{\bar{x}x} = (v(x+h) - 2v(x) + v(x-h))/h^2$.

Введём весовые множители по пространству:

$$\overline{A}_1\overline{y} = A_1\overline{y}_{(\beta_2,\beta_2)}, \quad \overline{A}_2\overline{y} = A_2\overline{y}_{(\beta_1,\beta_1)}, \quad \overline{A}_3\overline{y} = \frac{m}{2}(\overline{y}_{(\varkappa_1,\varkappa_1)} + \overline{y}_{(\varkappa_2,\varkappa_2)}). \tag{30}$$

Здесь $A_\alpha\overline{y} = -\overline{y}_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$, $A_\alpha\overline{y}_{(\varkappa_\alpha,\varkappa_\alpha)} = \overline{y} + \varkappa_\alpha h_\alpha^2\overline{y}_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$, $\alpha=1,2$,

$$\overline{y}_{(\beta_1,\beta_1)} = \beta_1\overline{y}(x_1+h,x_2) + (1-2\beta_1)\overline{y}(x_1,x_2) + \beta_1\overline{y}(x_1-h,x_2) = \overline{y} + \beta_1 h_1^2\overline{y}_{\bar{x}_1x_1},$$

$$\overline{y}_{(\beta_2,\beta_2)} = \beta_2\overline{y}(x_1,x_2-h) + (1-2\beta_2)\overline{y}(x_1,x_2) + \beta_2\overline{y}(x_1,x_2+h) = \overline{y} + \beta_2 h_2^2\overline{y}_{\bar{x}_2x_2}.$$

При $\beta_1=\beta_2=1/12$, $\varkappa_1=\varkappa_2=1/6$ из (30) вытекает, что

$$\overline{A}_1\overline{y} = -\overline{y}_{\bar{x}_1x_1} - \frac{h_2^2}{12}\overline{y}_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}, \quad \overline{A}_2\overline{y} = -\overline{y}_{\bar{x}_2x_2} - \frac{h_1^2}{12}\overline{y}_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}, \quad \overline{A}_3\overline{y} = m\left(\overline{y} + \frac{h_1^2}{12}\overline{y}_{\bar{x}_1x_1} + \frac{h_2^2}{12}\overline{y}_{\bar{x}_2x_2}\right)$$

и, следовательно, схему (26) можно записать в канонической форме (8):

$$\overline{y}_{\bar{t}t} + \sum_{\alpha=1}^{3}\overline{A}_\alpha\overline{y}^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)} = \overline{\varphi}, \quad \overline{y}(0) = \overline{u}_0, \quad \overline{y}_t(0) = \overline{u}_1, \tag{31}$$

в которой $\sigma_\alpha = \sigma - h_\alpha^2/(12\tau^2)$, $\alpha=1,2$, $0\leqslant\sigma_3\leqslant1$.

Так как имеют место неравенства

$$\|\overline{y}_{\overline{x}_1\overline{x}_2}]|^2 < \frac{4}{h_\alpha^2}\|\overline{y}_{\overline{x}_{3-\alpha}}]|^2, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$(\overline{A}_\alpha\overline{y}, \overline{y}) = \|\overline{y}_{\overline{x}_\alpha}]|^2 - \frac{h_{3-\alpha}^2}{12}\|\overline{y}_{\overline{x}_1\overline{x}_2}]|^2 > \frac{2}{3}\|\overline{y}_{\overline{x}_\alpha}]|^2, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$(\overline{A}_3\overline{y}, \overline{y}) = m\|\overline{y}\|^2 - \frac{mh_1^2}{12}\|\overline{y}_{\overline{x}_1}]|^2 - \frac{mh_2^2}{12}\|\overline{y}_{\overline{x}_2}]|^2 > \frac{m}{3}\|\overline{y}\|^2,$$

то самосопряжённые операторы $\overline{A}_\alpha$ положительны, т.е. $\overline{A}_\alpha = \overline{A}_\alpha^* > 0$, $\alpha = \overline{1, 3}$.

Обозначим

$$\delta = \frac{4}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2} + m, \quad D = I + \tau^2\sum_{\alpha=1}^{3}\sigma_\alpha\overline{A}_\alpha, \quad A = \sum_{\alpha=1}^{3}\overline{A}_\alpha. \tag{32}$$

Имеет место

Теорема 2. *Пусть выполнены условия*

$$\sigma \geqslant \frac{1+\varepsilon}{4} + \frac{\delta|h|^2 - 12}{12\delta\tau^2}, \quad \sigma_3 \geqslant \frac{1+\varepsilon}{4} - \frac{1}{\delta\tau^2}. \tag{33}$$

Тогда разностная схема (31) устойчива и для её решения имеет место априорная оценка

$$\|\overline{y}^{n+1}\|_A \leqslant \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\Big(\|\overline{y}(0)\|_A + \|\overline{y}_t(0)\|_D + \max_{0\leqslant k\leqslant n}(\|\overline{\varphi}^k\|_{A^{-1}} + \|\overline{\varphi}_t^k\|_{A^{-1}})\Big),$$

справедливая для любого $n = \overline{0, N_0 - 1}$.

Доказательство. Для исследования устойчивости схемы (31) применим теорему 1. Заметим, что

$$(A\overline{y}, \overline{y}) = \left(1 - \frac{mh_1^2}{12}\right)\|\overline{y}_{\overline{x}_1}]|^2 + \left(1 - \frac{mh_2^2}{12}\right)\|\overline{y}_{\overline{x}_2}]|^2 - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12}\|\overline{y}_{\overline{x}_1\overline{x}_2}]|^2 + m\|\overline{y}\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|\overline{y}_{\overline{x}_1}]|^2 + \|\overline{y}_{\overline{x}_2}]|^2 + m\|\overline{y}\|^2 < \left(\frac{4}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2} + m\right)\|\overline{y}\|^2.$$

Следовательно,

$$\|A\| \leqslant \delta = 4(h_1^{-2} + h_2^{-2}) + m.$$

Тогда условия (9) выполнены, если

$$\sigma_\alpha \geqslant \frac{1+\varepsilon}{4} - \frac{1}{\delta\tau^2}, \quad \alpha = \overline{1, 3},$$

т.е. если

$$\sigma \geqslant \frac{1+\varepsilon}{4} - \frac{1}{\delta\tau^2} + \frac{\max\{h_1^2, h_2^2\}}{12\tau^2}, \quad \sigma_3 \geqslant \frac{1+\varepsilon}{4} - \frac{1}{\delta\tau^2}.$$

Отсюда следует, что при выполнении условий (33) имеет место требуемая оценка. Теорема доказана.

Замечание 1. Имеют место неравенства

$$\frac{2}{3}\|\overline{y}_{\overline{x}_\alpha}]|^2 < (\overline{A}_\alpha\overline{y}, \overline{y}) \leqslant \|\overline{y}_{\overline{x}_\alpha}\|^2 < \frac{4}{h_\alpha^2}\|y\|^2, \quad \alpha = 1, 2, \quad \text{и} \quad \frac{m}{3}\|\overline{y}\|^2 < (\overline{A}_3\overline{y}, \overline{y}).$$

Тогда

$$(D\overline{y},\overline{y}) = \|\overline{y}\|^2 + \sigma\tau^2(\overline{A}_1\overline{y},\overline{y}) + \sigma\tau^2(\overline{A}_2\overline{y},\overline{y}) + \sigma_3\tau^2(\overline{A}_3\overline{y},\overline{y}) - \frac{h_1^2}{12}(\overline{A}_1\overline{y},\overline{y}) - \frac{h_2^2}{12}(\overline{A}_2\overline{y},\overline{y}) >$$

$$> \left(\frac{1}{3} + \frac{m\sigma_3\tau^2}{3}\right)\|\overline{y}\|^2 + \frac{2\sigma\tau^2}{3}(\|\overline{y}_{\overline{x}_1}]|^2 + \|\overline{y}_{\overline{x}_2}]|^2) > \frac{1}{3}\|\overline{y}\|^2,$$

т.е. $D > \delta_0 I$, $\delta_0 = 1/3$. Поэтому в силу леммы 3 для решения разностной схемы (31) имеет место априорная оценка

$$\|\overline{y}^{n+1}\|_A \leqslant \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\|\overline{y}(0)\|_A + \|\overline{y}_t(0)\|_D + \frac{1}{\delta_0}\sum_{k=1}^{n}\tau\|\overline{\varphi}^k\|\right), \tag{34}$$

справедливая для любого $n = \overline{0, N_0 - 1}$.

3.3. Теорема о сходимости. Пусть $z = y - u$ – погрешность метода, где u – решение задачи (18)–(20) при $p = 2$. Подставляя $z + u$ вместо y в разностные уравнения (26)–(28), получаем для z следующую задачу:

$$z_{\overline{t}t} = \sum_{\alpha=1}^{2}\Lambda_\alpha z^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)} + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{2}\frac{h_\beta^2}{12}\Lambda_\alpha\Lambda_\beta z^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)} - mz^{(\sigma_3,\sigma_3)} - m\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha z^{(\sigma_3,\sigma_3)} + \Psi,$$

$$(x,t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \tag{35}$$

$$z(x,0) = 0, \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad z_t(x,0) = \overset{\circ}{\Psi}, \quad x \in \omega_h, \tag{36}$$

$$z(x,t) = 0, \quad x \in \gamma_h, \quad t \in \omega_\tau. \tag{37}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда решение разностной задачи (26)–(28) сходится к точному решению дифференциальной задачи (18)–(20) и имеют место оценки*

$$\max_{t_n\in\omega_\tau}\|y^n - u^n\|_A \leqslant M(|h|^4 + \tau^2), \quad M = \mathrm{const} > 0,$$

$$\max_{t_n\in\omega_\tau}\|y^n - u^n\|_C \leqslant M_0|\ln|h|^{-1}|^{1/2}(|h|^4 + \tau^2), \quad M_0 = \mathrm{const} > 0,$$

где $n = \overline{0, N_0}$.

Доказательство. Задачи (26)–(28) и (35)–(37) идентичны, поэтому для оценки погрешности метода применим теорему 2. Из априорных оценок (24) для невязки, второго начального условия (25) и решения разностной схемы (34) вытекает оценка

$$\|y^n - u^n\|_A \leqslant \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\|\overset{\circ}{\Psi}\|_D + \frac{1}{\delta_0}\sum_{k=1}^{n}\tau\|\Psi(t_k)\|\right) \leqslant M(|h|^4 + \tau^2).$$

В силу теоремы вложения [20, гл. II, § 2; 21, гл. II, § 2] имеем

$$\|z\|_C \leqslant c_0|\ln|h|^{-1}|^{1/2}\|z\|_A, \quad c_0 = \mathrm{const} > 0, \tag{38}$$

что приводит к требуемой оценке в сеточной норме $C(\overline{\omega}_h)$. Теорема доказана.

3.4. Компактные разностные схемы 4-го порядка точности. Рассмотрим теперь разностную схему (21)–(23) при

$$\sigma = \sigma_3 = \frac{1}{12}, \quad \varphi = f^{(\sigma,\sigma)} + \frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{p}h_\alpha^2\Lambda_\alpha f^{(\sigma,\sigma)},$$

$$u_1(x) = \nu_0(x) + \left(\frac{\tau}{2} + \frac{\tau^3}{24}\sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha - m\frac{\tau^3}{24}\right)\left[\sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u_0(x) - mu_0(x) + f(x,0)\right] +$$

$$+ \frac{\tau^2}{6}\left[\sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha \nu_0(x) - m\nu_0(x) + \frac{\partial f}{\partial t}(x,0)\right] + \frac{\tau^3}{24}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,0).$$

Данная схема аппроксимирует исходную задачу (18)–(20) с четвёртым порядком. Действительно, в этом случае невязку разностного уравнения (31)

$$\Psi = -u_{\bar t t} + \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha u^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)} + \frac{1}{12}\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p} h_\beta^2 \Lambda_\alpha \Lambda_\beta u^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)} - mu^{(\sigma,\sigma)} -$$

$$- m\sum_{\alpha=1}^{p} \frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha u^{(\sigma,\sigma)} + f^{(\sigma,\sigma)} + \frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2 \Lambda_\alpha f^{(\sigma,\sigma)}$$

можно записать в виде

$$\Psi = \frac{\tau^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u - mu + f\right] + O(|h|^4 + \tau^4).$$

Следовательно,

$$\|\Psi\| \leqslant M_1(|h|^4 + \tau^4), \quad M_1 = \mathrm{const} > 0.$$

Для погрешности аппроксимации $\overset{\circ}{\Psi} = u_1 - u_t^0$ второго начального условия имеет место соотношение

$$\overset{\circ}{\Psi} = \nu_0(x) + \left(\frac{\tau}{2} + \frac{\tau^3}{24}\sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha - m\frac{\tau^3}{24}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,0) + \frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x,0) + \frac{\tau^3}{24}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,0) - u_t^0,$$

т.е.

$$\overset{\circ}{\Psi} = \frac{\tau^3}{24}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u(x,0) - mu(x,0) + f(x,0) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,0)\right] + O(\tau^4).$$

Другими словами, выполняется оценка

$$\|\overset{\circ}{\Psi}\| \leqslant M_2\tau^4, \quad M_2 = \mathrm{const} > 0.$$

Пусть $p = 2,\ h_1 = h_2 = h \leqslant h_0,\ h_0 \leqslant 1/\sqrt{m}$. Тогда для нормы определяемого последним равенством в (32) оператора $A = \sum_{\alpha=1}^{3} \overline{A}_\alpha$ $(A = A^* > 0)$ справедливо неравенство

$$\|A\| < \frac{8}{h^2} + m \leqslant \frac{9}{h^2}.$$

В этом случае условие

$$\frac{1}{12}\left(1 - \frac{h^2}{\tau^2}\right) \geqslant \frac{1}{4} - \frac{1}{\tau^2\|A\|}$$

устойчивости по начальным данным выполнено, если имеет место неравенство

$$\tau \leqslant \frac{h}{\sqrt{6}}. \tag{39}$$

4. Разностные схемы для многомерного уравнения Клейна–Гордона с переменными коэффициентами. В цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leqslant t \leqslant T]$ для многомерного уравнения Клейна–Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u - mu + f(x,t), \quad m > 0, \quad (x,t) \in Q_T = G \times [0 < t \leqslant T], \tag{40}$$

рассмотрим начально-краевую задачу

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \nu_0(x), \quad x \in G, \tag{41}$$

$$u(x,t) = \mu(x,t), \quad x \in \Gamma, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{42}$$

где

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x_\alpha,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \quad 0 < k_{1\alpha} \leqslant k_\alpha(x_\alpha,t) \leqslant k_{2\alpha}, \quad \alpha = \overline{1,p}.$$

На равномерной сетке узлов $\overline{\omega} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$ дифференциальную задачу (40)–(42) аппроксимируем следующей разностной схемой:

$$y_{\bar{t}t} = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha y^{(\sigma,\sigma)} - \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha(q_\alpha y_{\bar{t}t}) + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p} \frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha(q_\alpha \Lambda_\beta y^{(\sigma,\sigma)}) - my^{(\sigma,\sigma)} -$$

$$- m\sum_{\alpha=1}^{p} \frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha(q_\alpha y) + \varphi, \quad (x,t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \tag{43}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad y_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \omega_h, \tag{44}$$

$$y(x,t) = \mu(x,t), \quad x \in \gamma_h, \quad t \in \omega_\tau, \tag{45}$$

где

$$\Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \quad q_\alpha(x_\alpha,t) = \frac{1}{k_\alpha(x_\alpha,t)}, \quad \varphi = f + \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha(q_\alpha f),$$

$$a_\alpha = a_\alpha(x_\alpha,t) = 6\left[q_\alpha(x_\alpha - h_\alpha,t) + 4q_\alpha\left(x_\alpha - \frac{h_\alpha}{2},t\right) + q_\alpha(x_\alpha,t)\right]^{-1}, \quad \alpha = \overline{1,p},$$

$$u_1(x) = \nu_0(x) + \frac{\tau}{2}\left[\sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u(x,0) - mu(x,0) + f(x,0)\right], \quad x \in \omega_h;$$

обозначение v^* для функции v определено в постановке задачи (21)–(23).

4.1. Погрешность аппроксимации. Несложно показать, что разностная схема (43)–(45) аппроксимирует исходную задачу (40)–(42) с четвёртым порядком по пространству и вторым по времени. Действительно, используя разложения

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha u = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u + \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{h_\alpha^2}{12} L_\alpha\left[q_\alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + mu - f - \sum_{\alpha\neq\beta=1}^{p} L_\beta u\right)\right] + O(|h|^4),$$

$$u_{\bar{t}t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\tau^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + O(\tau^4),$$

запишем невязку разностного уравнения (43)

$$\Psi = -u_{\bar{t}t}+\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha u^{(\sigma,\sigma)}-\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha(q_\alpha u_{\bar{t}t})+\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha(q_\alpha\Lambda_\beta u^{(\sigma,\sigma)})-mu^{(\sigma,\sigma)}-m\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha(q_\alpha u)+\varphi$$

в виде $\Psi = O(|h|^4+\tau^2)$, т.е.

$$\|\Psi\| \leqslant M_1(|h|^4+\tau^2), \quad M_1 = \text{const} > 0. \tag{46}$$

Для второго начального условия (44) имеет место априорная оценка

$$\|\overset{\circ}{\Psi}\| \leqslant M_2\tau^2, \quad M_2 = \text{const} > 0. \tag{47}$$

Замечание 2. В частности, при $\sigma = 1/12$, $\varphi = f^{(\sigma,\sigma)} + 12^{-1}\sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2\Lambda_\alpha f$,

$$u_1(x) = \nu_0(x) + \left(\frac{\tau}{2}+\frac{\tau^3}{24}\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha - m\frac{\tau^3}{24}\right)\left[\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha u_0(x) - mu_0(x) + f(x,0)\right] +$$

$$+\frac{\tau^2}{6}\left[\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha\nu_0(x) - m\nu_0(x) + \frac{\partial f}{\partial t}(x,0)\right] + \frac{\tau^3}{24}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,0)$$

разностная схема (43)–(45) имеет четвёртый порядок аппроксимации на решении

$$\Psi = O(|h^4|+\tau^4), \quad \overset{\circ}{\Psi} = O(\tau^4).$$

4.2. Устойчивость. Чтобы избежать громоздких выкладок, ограничимся рассмотрением двумерного случая и зависимостью коэффициентов $k_\alpha = k_\alpha(x_\alpha)$ только от x_α, $\alpha = 1, 2$.

Предположим также, что $\sigma = 0.5$ и $\mu(x,t) = 0$, $x \in \Gamma$. Тогда разностная задача примет вид

$$y_{\bar{t}t} = \sum_{\alpha=1}^{2}\Lambda_\alpha y^{(\sigma,\sigma)} - \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha(q_\alpha y_{\bar{t}t}) + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{2}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha(q_\alpha\Lambda_\beta y^{(\sigma,\sigma)}) - my^{(\sigma,\sigma)} -$$

$$-m\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha(q_\alpha y) + \varphi, \quad (x,t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \tag{48}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad y_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \omega_h, \tag{49}$$

$$y(x,t) = 0, \quad x \in \gamma_h, \quad t \in \omega_\tau, \tag{50}$$

где

$$\Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \quad \varphi = f + \sum_{\alpha=1}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha(q_\alpha f).$$

Далее будем использовать следующие обозначения:

$$(u,v) = \sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}h_1h_2u_{i_1i_2}v_{i_1i_2}, \quad (u,v] = \sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2}h_1h_2u_{i_1i_2}v_{i_1i_2},$$

$$(u,v]_\alpha = \sum_{x\in\omega_{h_\alpha}^+}h_1h_2uv, \quad \omega_{h_\alpha}^+ = \omega_h\bigcup\{x_{N_\alpha} = l_\alpha\},$$

$$\|y\|^2_{A_\alpha} = (A_\alpha y, y) = -((a_\alpha y_{\overline{x}_\alpha})_{x_\alpha}, y) = (a_\alpha, y^2_{\overline{x}_\alpha}]_\alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$\overline{A}_1 = \sum_{\alpha=1}^{2} \overline{A}_{1\alpha}, \quad \overline{A}_{1\alpha} y = \frac{h^2_\alpha}{12}(a_\alpha q_{\alpha(-)}, y_{\overline{x}_\alpha}]_\alpha, \quad v_{\alpha(-)} = v_\alpha(x_\alpha - h_\alpha),$$

$$b_1 = a_1 a_2 \frac{q_{1(-)}h_1^2 + q_{2(-)}h_2^2}{12}, \quad \|y_{\overline{t}}\|^2_{\overline{A}_1} = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{h^2_\alpha}{12}(a_\alpha q_{\alpha(-)}, y^2_{\overline{t}\overline{x}_\alpha}]_\alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$

Для исследования устойчивости построенных разностных схем нам понадобится

Лемма 4. *При* $h_\alpha \leqslant h_0$, $\alpha = 1, 2$, h_0 *– достаточно малое число, выражение*

$$Q^n = \|y_{\overline{t}}\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\|y\|^2_{A_\alpha} + \|\check{y}\|^2_{A_\alpha}}{2} + m\frac{\|y\|^2 + \|\check{y}\|^2}{2} - \|y_{\overline{t}}\|^2_{\overline{A}_1} - \left(b_1, \frac{y^2_{\overline{x}_1\overline{x}_2} + \check{y}^2_{\overline{x}_1\overline{x}_2}}{2}\right]_{12} \tag{51}$$

неотрицательно.

Доказательство. Здесь и далее через $c > 0$ обозначается константа, зависящая от m, ε, $k_{1\alpha}$, – в каждом конкретном случае своя.

Очевидно, что

$$a_\alpha q_{\alpha(-)} = \frac{6q_{\alpha(-)}}{6q_{\alpha(-)} + O(h_\alpha)} = 1 + O(h_\alpha), \quad \alpha = \overline{1, p}.$$

Тогда при достаточно малом $|h| \leqslant h_0$, $h_0 = 1/c$, для двух последних членов в формуле (51) имеют место неравенства

$$-\|y_{\overline{t}}\|^2_{\overline{A}_1} = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{h^2_\alpha}{12}(a_\alpha q_{\alpha(-)}, y^2_{\overline{t}\overline{x}_\alpha}]_\alpha \geqslant -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\|y_{\overline{t}}\|^2}{3}(1 + ch_\alpha) \geqslant -\frac{2}{3}\sum_{\alpha=1}^{2} \|y_{\overline{t}}\|^2,$$

$$-\left(b_1, \frac{y^2_{\overline{x}_1\overline{x}_2} + \check{y}^2_{\overline{x}_1\overline{x}_2}}{2}\right]_{12} \geqslant -\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{2} (1 + ch_\beta)\left\{\left(\frac{a_\alpha h^2_\beta}{24}, y^2_{\overline{x}_\alpha\overline{x}_\beta}\right]_{\alpha\beta} + \left(\frac{a_\alpha h^2_\beta}{24}, \check{y}^2_{\overline{x}_\alpha\overline{x}_\beta}\right]_{\alpha\beta}\right\} \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1}{3}\sum_{\beta=1}^{2}\{(a_\alpha, y^2_{\overline{x}_\alpha}]_\alpha + (a_\alpha, \check{y}^2_{\overline{x}_\alpha}]_\alpha\} = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\|y\|^2_{A_\alpha} + \|\check{y}\|^2_{A_\alpha}}{3}.$$

Отсюда следует, что $Q^n \geqslant 0$. Лемма доказана.

Умножая разностное уравнение (48) скалярно на $2\tau y_{\overset{\circ}{t}}$ и применяя первую разностную формулу Грина, получаем энергетическое соотношение

$$Q^{n+1} = Q^n + \sum_{\alpha=1}^{2} h^2_\alpha(d_\alpha(y_{t\overline{x}_\alpha} + y_{\overline{t}\overline{x}_\alpha}), y_t - y_{\overline{t}}]_\alpha + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{2} \frac{h^2_\beta}{2}(a_\alpha d_\beta(\hat{y}_{\overline{x}_\alpha} + \check{y}_{\overline{x}_\alpha}), \hat{y}_{\overline{x}_\alpha\overline{x}_\beta} - \check{y}_{\overline{x}_\alpha\overline{x}_\beta}]_{\alpha\beta} +$$

$$+ m\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{h^2_\alpha}{12}(a_\alpha(p_\alpha y)_{\overline{x}_\alpha}, \hat{y}_{\overline{x}_\alpha} - \check{y}_{x_\alpha}]_\alpha + 2\tau(y_{\overset{\circ}{t}}, \varphi), \quad d_\alpha = \frac{a_\alpha p_{\alpha\overline{x}_\alpha}}{12}.$$

Нетрудно показать, что для слагаемых, отличных от Q^n и Q^{n+1}, справедливы оценки

$$\sum_{\alpha=1}^{2} h^2_\alpha(d_\alpha(y_{t\overline{x}_\alpha} + y_{\overline{t}\overline{x}_\alpha}), y_t - y_{\overline{t}}]_\alpha \leqslant c|h|(\|y_t\|^2 + \|y_{\overline{t}}\|^2),$$

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{2}\frac{h_\beta^2}{2}(a_\alpha d_\beta(\hat{y}_{\overline{x}_\alpha}+\check{y}_{\overline{x}_\alpha}),\hat{y}_{\overline{x}_\alpha\overline{x}_\beta}-\check{y}_{\overline{x}_\alpha\overline{x}_\beta}]_{\alpha\beta}\leqslant c|h|\sum_{\alpha=1}^{2}(\|\hat{y}_{\overline{x}_\alpha}]|_\alpha^2+\|\check{y}_{\overline{x}_\alpha}]|_\alpha^2),$$

$$m\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{h_\alpha^2}{12}(a_\alpha(p_\alpha y)_{\overline{x}_\alpha},\hat{y}_{\overline{x}_\alpha}-\check{y}_{x_\alpha}]_\alpha\leqslant c|h|^2\sum_{\alpha=1}^{2}[(\|\hat{y}_{\overline{x}_\alpha}]|_\alpha^2+\|y_{\overline{x}_\alpha}]|_\alpha^2)+(\|\check{y}_{\overline{x}_\alpha}]|_\alpha^2+\|y_{\overline{x}_\alpha}]|_\alpha^2)],$$

$$2\tau(y_{\overset{\circ}{t}},\varphi)\leqslant\varepsilon\tau\|\varphi\|^2+\frac{\tau}{2\varepsilon}(\|y_t\|^2+\|y_{\overline{t}}\|^2).$$

Отсюда с учётом условия $|h|\leqslant\tau$ получаем неравенство

$$(1-c\tau)Q^{n+1}\leqslant(1+c\tau)Q^n+c\tau\|\varphi^n\|^2. \tag{52}$$

Итак, имеет место

Теорема 4. *Пусть выполнены условия*

$$|h|\leqslant h_0,\quad \tau\geqslant|h|,\quad h_0=\frac{1}{c}. \tag{53}$$

Тогда разностная схема (48)–(50) ρ-устойчива по начальным данным и правой части и имеет место оценка

$$\|y^{n+1}\|_A^2\leqslant M_3\biggl(R_0+c\sum_{s=1}^{n}\tau\|\varphi^s\|^2\biggr),\quad n=\overline{0,N_0-1},$$

в которой

$$R_0=\frac{3}{2}m\|y^0\|^2+(1+m\tau^2)\|y_t^0\|^2+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}k_{2\alpha}(3\|y^0_{\overline{x}_\alpha}]|_\alpha^2+2\tau^2\|y^0_{t\overline{x}_\alpha}]|_\alpha^2),$$

$$Ay=-y_{\overline{x}_1x_1}-y_{\overline{x}_2x_2},\quad M_3=\frac{6}{\min\{k_{11},k_{12}\}}e^{cT}.$$

Доказательство. Так как $Q^n\geqslant0$ при выполнении условий (53), то из неравенства (52) легко приходим к рекуррентному соотношению

$$Q^{n+1}\leqslant(1+c\tau)Q^n+c\tau\|\varphi^n\|^2\leqslant e^{c\tau}Q^n+c\tau\|\varphi^n\|^2.$$

В силу леммы Гронуолла [18, с. 159] имеет место неравенство

$$Q^{n+1}\leqslant e^{ct_n}\biggl(Q^1+c\sum_{s=1}^{n}\tau\|\varphi^s\|^2\biggr),\quad n=\overline{0,N_0-1}.$$

Отсюда следует требуемая оценка. Теорема доказана.

4.3. Сходимость разностной схемы. Пусть u – решение задачи (40)–(42) при $p=2$, $z=y-u$ – погрешность метода. Подставляя в разностную схему (48)–(50) $z+u$ вместо y, получаем для z следующую задачу:

$$z_{\overline{t}t}=\sum_{\alpha=1}^{2}\Lambda_\alpha z^{(\sigma,\sigma)}-\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha(q_\alpha z_{\overline{t}t})+\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{2}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha(q_\alpha\Lambda_\beta z^{(\sigma,\sigma)})-mz^{(\sigma,\sigma)}-$$

$$-m\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha(q_\alpha z)+\Psi,\quad (x,t)\in\omega_h\times\omega_\tau, \tag{54}$$

$$z(x,0)=0,\quad x\in\overline{\omega}_h,\quad z_t(x,0)=\overset{\circ}{\Psi},\quad x\in\omega_h, \tag{55}$$

$$z(x,t)=0,\quad x\in\gamma_h,\quad t\in\omega_\tau. \tag{56}$$

Имеет место

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда решение разностной схемы (48)–(50) сходится к точному решению дифференциальной задачи (40)–(42) и имеют место оценки*

$$\max_{t_n\in\omega_\tau}\|y^n-u^n\|_A\leqslant M(|h|^4+\tau^2),$$

$$\max_{t_n\in\omega_\tau}\|y^n-u^n\|_C\leqslant M_0|\ln|h|^{-1}|^{1/2}(|h|^4+\tau^2),\quad n=\overline{0,N_0},$$

где M, M_0 *– положительные константы.*

Доказательство. При выполнении условий (53) теоремы 4 для решения $z=y-u$ задачи (54)–(56) справедлива оценка

$$\|y^n-u^n\|_A^2\leqslant M_3(R_0+cT\max_{t\in\omega_\tau}\|\Psi(t)\|^2),$$

где

$$R_0=\left(1+\frac{2}{3}m\tau^2\right)\|\overset{\circ}{\Psi}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{2}k_{2\alpha}\tau^2\|\overset{\circ}{\Psi}_{\overline{x}_\alpha}]|_\alpha^2.$$

Отсюда в силу априорных оценок (46), (47) приходим к следующему неравенству:

$$\|y^n-u^n\|_A\leqslant M(|h|^4+\tau^2).$$

Вторая требуемая оценка теоремы следует из вложения (38). Теорема доказана.

5. Квазилинейное уравнение Клейна–Гордона. В цилиндре $\overline{Q}_T=\overline{G}\times[0\leqslant t\leqslant T]$ для многомерного квазилинейного уравнения Клейна–Гордона

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha\phi_\alpha(u)-mf_1(u)+f(x,t),\quad m>0,\quad (x,t)\in Q_T=G\times[0<t\leqslant T],\tag{57}$$

рассмотрим начально-краевую задачу

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{G},\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\nu_0(x),\quad x\in G,\tag{58}$$

$$u(x,t)=\mu(x,t),\quad x\in\Gamma,\quad 0<t\leqslant T,\tag{59}$$

с условиями $(\phi_\alpha)'_u=k_\alpha(u)\geqslant k_\alpha>0$, $\alpha=\overline{1,p}$. Здесь, как в случае с постоянными коэффициентами, оператор L_α определяется равенством $L_\alpha v=\partial^2v/\partial x_\alpha^2$, $\alpha=\overline{1,p}$.

На стандартном шаблоне сетки $\overline{\omega}=\overline{\omega}_h\times\overline{\omega}_\tau$ исходную задачу (57)–(59) заменим разностной задачей:

$$y_{\overline{t}t}=\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha[\phi(y)]^{(\sigma,\sigma)}+\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p}\frac{h_\beta^2}{12}\Lambda_\alpha\Lambda_\beta[\phi(y)]^{(\sigma,\sigma)}-\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha y_{\overline{t}t}-m[f_1^*(y)]^{(\sigma,\sigma)}+f^*,$$

$$(x,t)\in\omega_h\times\omega_\tau,\tag{60}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{\omega}_h,\quad y_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\omega_h,\tag{61}$$

$$y(x,t)=\mu(x,t),\quad x\in\gamma_h,\quad t\in\omega_\tau,\tag{62}$$

где

$$\Lambda_\alpha y=y_{\overline{x}_\alpha x_\alpha},\quad u_1(x)=\nu_0(x)+\frac{\tau}{2}\left[\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha\phi_\alpha(u_0(x))-mf_1(u_0(x))+f(x,0)\right],\quad x\in\omega_h.$$

Аналогично рассмотренным выше случаям легко показывается, что для погрешности аппроксимации разностной схемы (60)–(62) имеют место оценки

$$\|\Psi\| \leqslant M_1(|h|^4+\tau^2), \quad M_1=\mathrm{const}>0, \quad \|\overset{\circ}{\Psi}\| \leqslant M_2\tau^2, \quad M_2=\mathrm{const}>0.$$

Для реализации построенной схемы необходимо использовать итерационный метод Ньютона с выбором начальной итерации $\overset{\circ}{y}=2y^n-y^{n-1}$.

6. Тестовые расчёты. В этом пункте приводятся результаты численных расчётов при решении начально-краевой задачи (18)–(20) в двумерном случае $p=2$. Её параметры выбираются следующими: $m=1$, $T=1$, $0\leqslant l_1\leqslant 1$, $0\leqslant l_2\leqslant 1$. Начальные и краевые условия и свободный член (неоднородность) определяются из точного решения

$$u(x_1,x_2,t)=e^t(\cos x_1+\sin x_1)(\cos(2x_2)+\sin(2x_2)).$$

Сначала рассматриваются разностные схемы порядка $O(|h|^4+\tau^2)$, т.е. при $\sigma\neq 1/12$. Для нахождения порядка скорости сходимости по пространству $p^h_{L_\infty}$ в норме $L_\infty=C$ и $p^h_{L_2}$ в норме L_2 используются формулы

$$p^h_{L_\infty}=\log_2(\|\Delta_h\|_{L_\infty}/\|\Delta_{h/2}\|_{L_\infty}), \quad p^h_{L_2}=\log_2(\|\Delta_h\|_{L_2}/\|\Delta_{h/2}\|_{L_2}),$$

где $\Delta_{h/2}=y_{h_1/2,h_2/2,\tau/4}-y_{h_1,h_2,\tau}$.

В таблицах приведены значения скорости сходимости приближённого решения (к точному решению) при $\sigma=\sigma_3=1/2$.

Табл. 1 показывает, что при выполнении условий устойчивости построенная разностная схема имеет четвёртый порядок точности по пространственной переменной.

Таблица 1. Порядок сходимости по пространству

$h_1=0.1$	$h_2=0.1$	$\tau=0.5$	$\|\Delta_{h/2}\|_{L_\infty}$	$p^h_{L\infty}$	$\|\Delta_{h/2}\|_{L_2}$	p^h_{L2}
h_1	h_2	τ	–	–	–	–
$h_1/2$	$h_2/2$	$\tau/4$	1.39E-01	–	8.04E-02	–
$h_1/2^2$	$h_2/2^2$	$\tau/4^2$	8.59E-03	4.02067	4.74E-03	4.08629
$h_1/2^3$	$h_2/2^3$	$\tau/4^3$	4.50E-04	4.25287	2.57E-04	4.20524
$h_1/2^4$	$h_2/2^4$	$\tau/4^4$	2.75E-05	4.03137	1.56E-05	4.0379
$h_1/2^5$	$h_2/2^5$	$\tau/4^5$	1.71E-06	4.00895	9.72E-07	4.008

Аналогично для нахождения порядка скорости сходимости по временно́й переменной $p^\tau_{L_\infty}$ в норме $L_\infty=C$ и $p^\tau_{L_2}$ в норме L_2 используются формулы

$$p^\tau_{L_\infty}=\log_2(\|\Delta_\tau\|_{L_\infty}/\|\Delta_{\tau/2}\|_{L_\infty}), \quad p^\tau_{L_2}=\log_2(\|\Delta_\tau\|_{L_2}/\|\Delta_{\tau/2}\|_{L_2}),$$

где разность приближённых значений определяется равенством $\Delta_{\tau/2}=y_{h_1,h_2,\tau/2}-y_{h_1,h_2,\tau}$.

Из результатов, представленных в табл. 2, видно, что указанная разностная схема имеет второй порядок погрешности аппроксимации по времени.

Таблица 2. Порядок сходимости по времени ($h_1=0.005$, $h_2=0.005$)

$\tau=0.125$	$\|\Delta_{\tau/2}\|_{L_\infty}$	$p^\tau_{L\infty}$	$\|\Delta_{\tau/2}\|_{L_2}$	p^τ_{L2}
τ	–	–	–	–
$\tau/2$	7.21E-03	–	3.87E-03	–
$\tau/2^2$	1.42E-03	2.33982	8.65E-04	2.16162
$\tau/2^3$	3.62E-04	1.97618	2.06E-04	2.06904
$\tau/2^4$	8.90E-05	2.02392	5.05E-05	2.02945
$\tau/2^5$	2.21E-05	2.01296	1.25E-05	2.01312

Далее с учётом условий устойчивости (39) рассматриваются разностные схемы (21)–(23) при $\sigma = 1/12$, т.е. схемы порядка $O(|h|^4 + \tau^4)$. Для определения порядка скорости сходимости приближённого решения к точному используются формулы

$$p_{L_\infty} = \log_2(\|\Delta\|_{L_\infty}/\|\Delta_{1/2}\|_{L_\infty}), \quad p_{L_2} = \log_2(\|\Delta\|_{L_2}/\|\Delta_{1/2}\|_{L_2}),$$

$$\Delta = y_{h_1,h_2,\tau} - y_{2h_1,2h_2,2\tau}, \quad \Delta_{1/2} = y_{h_1/2,h_2/2,\tau/2} - y_{h_1,h_2,\tau}.$$

Полученные результаты расчётов представлены в табл. 3.

Таблица 3. Порядок сходимости по пространству и времени

h_1	h_2	τ	$\|\Delta_{1/2}\|_{L_\infty}$	$p_{L\infty}$	$\|\Delta_{1/2}\|_{L_2}$	p_{L2}
h_1	h_2	1/10	–	–	–	–
$h_1/2$	$h_2/2$	1/20	2.71E-05	–	1.52E-05	–
$h_1/2^2$	$h_2/2^2$	1/40	1.61E-06	4.06842	9.22E-07	4.04777
$h_1/2^3$	$h_2/2^3$	1/80	9.87E-08	4.03029	5.65E-08	4.02725
$h_1/2^4$	$h_2/2^4$	1/160	6.12E-09	4.01209	3.50E-09	4.01363
h_1	h_2	1/100	–	–	–	–
$h_1/2$	$h_2/2$	1/200	2.56E-05	–	1.46E-05	–
$h_1/2^2$	$h_2/2^2$	1/400	1.59E-06	4.00925	9.10E-07	3.9987
$h_1/2^3$	$h_2/2^3$	1/800	9.92E-08	4.0046	5.68E-08	4.00178
$h_1/2^4$	$h_2/2^4$	1/1600	6.03E-09	4.04138	3.46E-09	4.03966

Таким образом, проведённые тестовые расчёты согласуются с нашими теоретическими выводами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А.* Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1963. Т. 3. № 5. С. 812–840.
2. *Валиулин В.Н., Паасонен В.И.* Экономичные разностные схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения колебаний // Числ. методы механики сплошной среды. 1970. Т. 1. № 1. С. 17–30.
3. *Валиулин В.Н.* Схемы повышенной точности для задач математической физики. Новосибирск, 1973.
4. *Москальков М.Н.* Об одном свойстве схемы повышенного порядка точности для одномерного волнового уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1975. Т. 15. № 1. С. 254–260.
5. *Матус П.П., Хоанг Тхи Киеу Ань.* Компактные разностные схемы для уравнения Клейна–Гордона // Докл. НАН Беларуси. 2020. Т. 64. № 5. С. 526–533.
6. *Матус П.П., Хоанг Тхи Киеу Ань.* Компактные разностные схемы на трёхточечном шаблоне для гиперболических уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 7. С. 963–975.
7. *Zlotnik A., Kireeva O.* On compact 4th order finite-difference schemes for the wave equation // Math. Model. Anal. 2021. V. 26. № 3. P. 479–502.
8. *Zlotnik A., Ciegis R.* On higher-order compact ADI schemes for the variable coefficient wave equation // Appl. Math. and Comp. 2022. V. 412. Art. 126565. https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126565.
9. *Britt S., Turkel E., Tsynkov S.* A high order compact time/space finite difference scheme for the wave qquation with variable apeed of sound // J. Sci. Comput. 2018. V. 76. P. 777–811.
10. *Hou B., Liang D., Zhu H.* The conservative time high-order AVF compact finite difference schemes for two-dimensional variable coefficient acoustic wave equations // J. Sci. Comput. 2019. V. 80. P. 1279–1309.
11. *Матус П.П., Ирхин В.А., Лапиньска-Хшонович М., Лемешевский С.В.* О точных разностных схемах для гиперболических и параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 1. С. 978–986.
12. *Lemeshevsky S., Matus P., Poliakov D.* Exact Finite-Difference Schemes. De Gruyter, 2016.
13. *Matus P., Kolodynska A.* Exact difference schemes for hyperbolic equations // Comp. Meth. Appl. Math. 2007. V. 7. № 4. P. 341–364.
14. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Матус П.П.* Разностные схемы с операторными множителями. Минск, 1998.

15. *Matus P.P., Zyuzina E.L.* Three-level difference schemes on non-uniform in time grids // Comp. Meth. Appl. Math. 2001. V. 1. № 3. P. 265–284.
16. *Зюзина Е.Л., Матус П.П.* Консервативные разностные схемы на неравномерных сетках для волнового уравнения // Докл. НАН Беларуси. 2004. Т. 48. № 5. С. 25–30.
17. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М., 1989.
18. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М., 1973.
19. *Матус П.П., Хоанг Тхи Киеу Ань.* Компактные разностные схемы для уравнения Клейна–Гордона с переменными коэффициентами // Докл. НАН Беларуси. 2021. Т. 65. № 1. С. 25–32.
20. *Карчевский М.М., Ляшко А.Д.* Разностные схемы для нелинейных задач математической физики. Казань, 1976.
21. *Оганесян Л.А., Руховец Л.А.* Вариационно-разностные методы для решения эллиптических уравнений. Ереван, 1979.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск,
Католический университет им. Иоанна-Павла II,
г. Люблин, Польша,
Белорусский государственный университет,
г. Минск,
Университет природных ресурсов и окружающей среды,
г. Хошимин, Вьетнам

Поступила в редакцию 21.10.2021 г.
После доработки 21.10.2021 г.
Принята к публикации 21.12.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 139–141

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.954

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ p-ЛАПЛАСИАНА НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ С МОДЕЛЬНЫМ КОНЦОМ

© 2022 г. В. В. Бровкин

Получен критерий существования решений второй краевой задачи для p-лапласиана на римановых гиперболических многообразиях с модельным концом.

DOI: 10.31857/S0374064122010137

Пусть M – связное n-мерное ориентированное полное риманово многообразие с краем (возможно пустым). Рассмотрим задачу

$$\Delta_p u = f \quad \text{на} \quad M, \tag{1}$$

$$|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial M} = h, \tag{2}$$

где $\Delta_p u = \nabla_i(g^{ij}|\nabla u|^{p-2}\nabla_j u)$, $p > 1$, – оператор p-Лапласа, ν – вектор внешней нормали к ∂M, а f и h – обобщённые функции из $\mathcal{D}'(M)$ такие, что $\operatorname{supp} h \subset \partial M$.

Если $\partial M = \varnothing$, то условие Неймана (2) предполагается выполненным автоматически. В этом случае, очевидно, $h = 0$, так как только у нулевой функции носитель $\operatorname{supp} h$ является пустым множеством.

Через g_{ij} обозначаем метрический тензор, согласованный с римановой связностью, а через g^{ij} – тензор, дуальный к метрическому, т.е. $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$. При этом $|\nabla u| = (g^{ij}\nabla_i u \nabla_j u)^{1/2}$. Через $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\omega)$, где ω – открытое подмножество в M, обозначается линейное пространство функций, принадлежащих классу $W^1_p(\omega' \bigcap \omega)$ для любого открытого множества $\omega' \subset M$ с компактным замыканием. Пространство $L_{p,\mathrm{loc}}(\omega)$ определяется аналогично.

Будем говорить, что функция $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(M)$ является *решением* задачи (1), (2), если равенство

$$-\int\limits_M g^{ij}|\nabla u|^{p-2}\nabla_j u \nabla_i \varphi \, dV = (f - h, \varphi)$$

выполняется для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(M)$, где dV – элемент объёма многообразия M.

В дальнейшем предполагаем, что решения задачи (1), (2) удовлетворяют следующему условию на бесконечности:

$$\int\limits_M |\nabla u|^p \, dV < \infty. \tag{3}$$

Краевые задачи в неограниченных областях и на гладких многообразиях исследовались в работах [1–10].

Определение 1. *Ёмкость* $\operatorname{cap}_p(B, \Omega)$ компакта $B \subset \Omega$ относительно открытого множества $\Omega \subset M$ определяется соотношением

$$\operatorname{cap}_p(B, \Omega) = \inf_{\varphi} \int\limits_\Omega |\nabla \varphi|^p \, dV,$$

где $\inf$ берётся по всем функциям $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, тождественно равным единице в окрестности этого компакта.

Если $\Omega = M,$ то вместо $\operatorname{cap}_p(B, M)$ пишем $\operatorname{cap}_p(B).$ Для произвольного замкнутого множества $H \subset M$ полагаем

$$\operatorname{cap}_p(H) = \sup_B \operatorname{cap}_p(B),$$

где sup берётся по всем компактам $B \subset H.$ Ёмкость пустого множества считается равной нулю.

Определение 2. Многообразие M называется *p-гиперболическим*, если его ёмкость положительна, т.е. $\operatorname{cap}_p(M) > 0.$ В противном случае многообразие M называется *p-параболическим.*

Через $L_p^1(\omega),$ где ω – открытое подмножество в $M,$ обозначаем линейное пространство обобщённых функций $u \in \mathcal{D}'(\omega)$ таких, что $\nabla u \in L_p(\omega)$ [11, с. 12]. Полунорма в $L_p^1(\omega)$ определяется равенством

$$\|u\|_{L_p^1(\omega)} = \left(\int\limits_\omega |\nabla u|^p \, dV\right)^{1/p}.$$

Через $\overset{\circ}{L}{}_p^1(\omega)$ обозначим замыкание пространства $C_0^\infty(\omega)$ в $L_p^1(\omega),$ а через $\overset{\circ}{L}{}_p^1(\omega)^*$ – пространство, дуальное к $\overset{\circ}{L}{}_p^1(\omega)$ или, другими словами, пространство линейных непрерывных функционалов на $\overset{\circ}{L}{}_p^1(\omega).$ Норма функционала $l \in \overset{\circ}{L}{}_p^1(\omega)^*$ определяется равенством

$$\|l\|_{\overset{\circ}{L}{}_p^1(\omega)^*} = \sup_{\substack{\varphi \in C_0^\infty(\omega) \\ \|\varphi\|_{L_p^1(\omega)} = 1}} |(l, \varphi)|.$$

Теорема 1. *Пусть M – p-гиперболическое многообразие, $\Omega \subset M$ – липшицева область с компактным замыканием и $0 < \mathcal{E} \leqslant 1$ – гладкая функция такая, что*

$$\Delta_p \mathcal{E} = 0 \quad \text{на} \quad M \setminus \overline{\Omega}, \quad \mathcal{E}|_{\partial\Omega} = 1, \quad |\nabla \mathcal{E}|^{p-2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu}\bigg|_{\partial M \setminus \overline{\Omega}} = 0.$$

Тогда для разрешимости задачи (1)–(3) необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^\infty \|f - h\|^{p/(p-1)}_{\overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega_k)^*} < \infty,$$

где $\Omega_1 = \Omega \bigcup \{x \in M \setminus \Omega : \mathcal{E}(x) > 1/4\}$ и $\Omega_k = \{x \in M \setminus \Omega : 2^{-1-k} < \mathcal{E}(x) < 2^{1-k}\},$ $k = 2, 3, \ldots$

Предположим, что многообразие M представимо в виде

$$M = \omega \bigcup D \times [r_0, \infty), \quad \omega \bigcap D \times [r_0, \infty) = \varnothing, \tag{4}$$

где ω – липшицева область с компактным замыканием, D – компактное риманово многообразие с краем, а $r_0 > 0$ – некоторое вещественное число. Пусть также на множестве $D \times [r_0, \infty)$ задана метрика

$$ds^2 = a^2(r)\, dr^2 + b^2(r) \tilde{g}_{ij}(\theta)\, d\theta^i \, d\theta^j,$$

где a и b – положительные бесконечно гладкие функции на $[r_0, \infty),$ $\tilde{g}_{ij}$ – метрический тензор на $D,$ θ^i – локальные координаты на $D.$ Назовём множество $D \times [r_0, \infty)$ *модельным концом* многообразия M по отношению к области ω [2].

Тривиальным примером многообразия с модельным концом является пространство $\mathbb{R}^n.$ В качестве другого примера можно привести поверхность, полученную вращением графика функции $v(r)$ вокруг луча Or в $\mathbb{R}^n.$ В этом случае, очевидно, $a(r) = \sqrt{1 + (v'(r))^2},$ $b(r) = v(r)$ и $\tilde{g}_{ij}$ – метрический тензор на единичной сфере.

Многообразие M с модельным концом является p-гиперболическим в том и только в том случае, когда

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{a(r)}{b^{(n-1)/(p-1)}(r)}\,dr < \infty.$$

Обозначим

$$M_{r_0} = \omega, \quad M_r = \omega \bigcup D \times [r_0, r), \quad r > r_0.$$

Теорема 2. *Пусть M – p-гиперболическое многообразие с модельным концом (4). Тогда для разрешимости задачи (1)–(3) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\|f-h\|^{p/(p-1)}_{\overset{\circ}{L}{}^1_p(M_{r_1})^*} < \infty \quad \textit{и} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \|f-h\|^{p/(p-1)}_{\overset{\circ}{L}{}^1_p(M_{r_{k+1}}\setminus \overline{M}_{r_{k-2}})^*} < \infty,$$

где числа $r_k > r_0$, $k \in \mathbb{N}$, определяются из соотношений

$$\int\limits_{r_{k+1}}^{\infty} \frac{a(s)}{b^{(n-1)/(p-1)}(s)}\,ds = \frac{1}{2}\int\limits_{r_k}^{\infty} \frac{a(s)}{b^{(n-1)/(p-1)}(s)}\,ds.$$

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору А.А. Конькову за постановку задачи и внимание, проявленное к автору при её решении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cheng S.Y., Yau S.T.* Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications // Comm. Pure Appl. Math. 1975. V. 28. № 3. P. 333–354.
2. *Korolkov S.A., Losev A.G.* Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends // Math. Zeitschr. 2012. Bd. 272. Hf. 1–2. S. 459–472.
3. *Losev A.G., Mazepa E.A.* On solvability of the boundary value problems for harmonic function on noncompact Riemannian manifolds // Пробл. анал. Issues Anal. 2019. V. 8 (26). № 3. P. 73–82.
4. *Бровкин В.В., Коньков А.А.* О существовании решений второй краевой задачи для p-лапласиана на римановых многообразиях // Мат. заметки. 2021. Т. 109. Вып. 2. С. 180–195.
5. *Гадыльшин Р.Р., Чечкин Г.А.* Краевая задача для лапласиана с быстро меняющимся типом граничных условий в многомерной области // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40. № 2. С. 271–287.
6. *Григорьян А.А.* О размерности пространств гармонических функций // Мат. заметки. 1990. Т. 48. Вып. 5. С. 55–61.
7. *Кондратьев В.А., Олейник О.А.* О параболических по времени решениях параболических уравнений второго порядка во внешних областях // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 1985. Т. 39. № 4. С. 38–47.
8. *Коньков А.А.* О размерности пространства решений эллиптических систем в неограниченных областях // Мат. сб. 1993. Т. 184. № 12. С. 23–52.
9. *Коньков А.А.* О пространстве решений эллиптических уравнений на римановых многообразиях // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 5. С. 805–813.
10. *Кудрявцев Л.Д.* Решение первой краевой задачи для самосопряжённых эллиптических уравнений в случае неограниченных областей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. № 5. С. 1179–1199.
11. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева. Л., 1985.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 14.07.2021 г.
После доработки 14.07.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 142–144

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.925.42

БАЗИС ГРЁБНЕРА ИДЕАЛА ФОКУСНЫХ ВЕЛИЧИН КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И.С. КУКЛЕСА

© 2022 г. А. П. Садовский

Для кубической системы И.С. Куклеса впервые найдены первые одиннадцать фокусных величин. Для них выполнен тест принадлежности идеалу: каждая из них делится без остатка на произвольный многочлен базиса Грёбнера идеала этих фокусных величин.

DOI: 10.31857/S0374064122010149

Из результатов работы [1] следует, что для классической аналитической системы

$$\dot{x} = y + X(x,y), \quad \dot{y} = -x + Y(x,y) \tag{1}$$

справедлива следующая

Теорема 1. *Существует единственное формальное преобразование*

$$x = u + \sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{i} f_{j,i-j}u^j v^{i-j}, \quad y = v + \sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{i} g_{j,i-j}u^j v^{i-j},$$

приводящее систему (1) к системе

$$\dot{u} = \left(v + \sum_{k=2}^{\infty} c_k u^k\right)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k u^k\right), \quad \dot{v} = -u\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k u^k\right),$$

при этом точка $O(0,0)$ является для системы (1) центром тогда и только тогда, когда

$$c_{2k-1} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Будем рассматривать множество $\mathfrak{R}$ пар формальных степенных рядов над полем $\mathbb{R}$ вида

$$u = u(x,y) = x + xf(x,y), \quad v = v(x,y) = y + xg(x,y), \tag{2}$$

где f и g – формальные степенные ряды без свободных членов. На множестве $\mathfrak{R}$ рассматривается операция “ $\circ$ ” композиции: для $(u,v),(u_1,v_1) \in \mathfrak{R}$ по определению

$$(u,v)\circ(u_1,v_1) = (u(u_1(x,y),v_1(x,y)), v(u_1(x,y),v_1(x,y))).$$

Несложно показывается, что множество $\mathfrak{R}$ формальных степенных рядов с образует относительно операции композиции $\circ$ группу.

Очевидно, что для аналитической системы

$$\dot{x} = y + \sum_{i=1}^{\infty} e_{2i}x^{2i}, \quad \dot{y} = -x$$

начало координат $O(0,0)$ является центром. Если

$$\frac{\partial x}{\partial u}(v + X(u,v))\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k u^k\right) + \frac{\partial x}{\partial v}(-u + Y(u,v))\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k u^k\right) = y + \sum_{i=1}^{\infty} e_{2i}x^{2i},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(v + X(u,v))\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k u^k\right) + \frac{\partial y}{\partial v}(-u + Y(u,v))\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k u^k\right) = -x, \tag{3}$$

где $X,\ Y$ – аналитические функции из системы (1), а $u,\ v$ – новые переменные при замене (2), то точка $O(0,0)$ является для системы (1) центром. В случае произвольных $X,\ Y$ из тождеств (3) получаем необходимые и достаточные условия центра для системы (1).

В дальнейшем будем рассматривать кубическую систему нелинейных колебаний И.С. Куклеса, т.е. будем предполагать, что

$$X(u,v)=0,\quad Y(u,v)=Au^2+3Buv+Cv^2+Ku^3+3Lu^2v+Muv^2+Nv^3.$$

Для системы И.С. Куклеса, применяя ранее разработанный автором статьи метод, удалось получить первые 11 фокусных величин $f_k,\ k=\overline{1,11}$, где $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ f_5,\ f_6,\ f_7,\ f_8,\ f_9,\ f_{10}$ и f_{11} содержат соответственно 4, 19, 60, 149, 321, 623, 1122, 1903, 3079, 4789 и 7209 слагаемых.

Таким образом, имеем идеал

$$J=\langle f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7,f_8,f_9,f_{10},f_{11}\rangle.$$

Введём идеал

$$I=\langle i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6,i_7,i_8,i_9,i_{10},i_{11},i_{12}\rangle,$$

где

$$\begin{gathered}
i_1=-B^2(41A^3+78A^2C+51AC^2+11C^3+6B^2(5A+4C))(C(A+C)-K)+\\
+B(-41A^4-148A^3C-22C^4+AC(88B^2-113C^2-22K)+\\
+4A^2(10B^2-49C^2-3K)+11C^2K+23K^2+4B^2(13C^2+9K))N-\\
-(29A^3+67A^2C+11C(-12B^2+C^2-K)+A(-120B^2+51C^2+11K))N^2+56BN^3,\\
i_2=-12A^5(BC+N)+A^4(B(-14C^2+12K+M)-14CN)+\\
+A^3(2BC(4B^2-C^2-12K+M)-(14B^2+2C^2+37K)N)+A^2(8B^3(2C^2-K)+\\
+27BK(-C^2+K)+22B^2CN-27CKN+6BN^2)+2A(-4B^3C(C^2+K)+12B^4N-\\
-9K^2N-B^2(9C^2+35K)N-12BCN^2-7N^3)+4(4B^3C^2(-C^2+K)+\\
+B^2C(12B^2-9C^2+4K)N+3B(4B^2-2C^2+K)N^2-CN^3),\\
i_3=4B^3(C^3-CK)+6B^2(C^2-K)N-2A^4(BC+N)+A^3(B(-10C^2+2K+M)-10CN)+\\
+A^2(4BC(B^2-3C^2+2K+M)-(6B^2+12C^2+K)N)-2N(K^2+N^2)+\\
+A(B(-4C^4+B^2(8C^2-4K)+K^2+C^2(5K+4M))-C(6B^2+4C^2+3K)N-6BN^2),\\
i_4=6B^3C(-C^2+K)+12B^2(-2C^2+K)N+3A^4(BC+N)+A^3(B(10C^2-3K-M)+\\
+10CN)+A^2(-BC(6B^2-3C^2+4K+3M)+(6B^2+3C^2+5K)N)+\\
+4N(-C^4+K^2+N^2)-2BC(2C^4+K^2-2C^2(2K+M)+3N^2)+\\
+A(6B^3(-2C^2+K)-6B^2CN-8C^3N+9CKN+B(-8C^4+9C^2K-4K^2+6N^2)),\\
i_5=-133A^4B(BC+N)+A^3(B^2(-211C^2+133K+23M)-263BCN-52N^2)-\\
-A^2(B^2C(30B^2+60C^2-101K-46M)+B(98B^2+104C^2+35K)N+\\
+44CN^2)-12(B^2C(2B^2-C^2)(C^2-K)+B(-2C^4+B^2(11C^2-3K)+C^2K)N+\\
+C(12B^2-C^2+K)N^2+3BN^3)-6A(B^4(9C^2-5K)+16B^3CN-\\
-4BC(2C^2+K)N-(3C^2+2K)N^2+B^2(-5C^4+3C^2K+3N^2)),\\
i_6=-(A+C)(B^2(5A^2C+3C^3+A(8C^2-5K-M)-2C(2K+M))+\\
+B(5A^2+10AC+4(B^2+C^2)+K)N+(2A+C)N^2),
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
i_7 = B^3C(-17C^2+20K+6M)-12B^4N+3B^2(-8C^2+3K)N-3BCN^2+\\
+2A^4(BC+N)+2A^3(B(C^2-K)+CN)+A^2(-19B^3C+6BCK-15B^2N+8KN)+\\
+4N(K^2+N^2)+A(6B(C^2-K)K+B^3(-36C^2+19K+3M)-42B^2CN+6CKN-6BN^2),\\
i_8 = 3BC^3+AB(8C^2-5K-M)-2BC(2K+M)+\\
+6B^2N+8ACN+(3(C^2+K)+M)N+5A^2(BC+N),\\
i_9 = 2A^4(BC+N)+A^3(B(2C^2-2K+M)+2CN)+A^2(-12B^3C+4BCK-6B^2N+7KN)+\\
+A(12B^3(-2C^2+K)+BK(5C^2-3K+4M)-30B^2CN+5CKN-6BN^2)+\\
+6(2B^3C(-C^2+K)+3B^2(-C^2+K)N+N(K^2+N^2)),\\
i_{10} = 6B^3(C^3-CK)+6B^2(C^2-3K)N-4C^2KN-3A^4(BC+N)+\\
+A^3(-4BC^2+3BK-4CN)+A(6B^3(2C^2-K)+BK(-14C^2+9K)+12B^2CN-14CKN)+\\
+A^2(BC(6B^2-C^2-8K+M)-(C^2+12K)N)+BC(-4C^2K+6K^2+4KM-6N^2)-6N(K^2+N^2),\\
i_{11} = 118B^3(C^3-CK)+96B^4N+12B^2(7C^2+12K)N+113A^4(BC+N)+\\
+A^3(B(218C^2-113K+3M)+218CN)+\\
+A^2(182B^3C+3BC(43C^2+20K+M)+102B^2N+(129C^2+281K)N)+\\
+6BC(16C^2K-17K^2+4M^2+N^2)+A(2B^3(150C^2-91K)+3B(8C^4+79C^2K-54K^2+4M^2)+\\
+3C(46B^2+8C^2+123K)N-114BN^2)+40(K(3C^2+K)N+N^3),\\
i_{12} = B(A+C)+L+N.
\end{gathered}$$

Знание базиса Грёбнера идеала I даёт решение проблемы центра и фокуса системы И.С. Куклеса, которое представлено в работе [2].

Теорема 2. *Для идеала I базис Грёбнера состоит из пятидесяти семи многочленов v_i, $i=\overline{1,57}$; в частности, $I=\langle v_1,v_2,\ldots,v_{57}\rangle$.*

Вопрос о базисе Грёбнера идеала J фокусных величин кубической системы И.С. Куклеса полностью решает

Теорема 3. *Каждая из одиннадцати порождающих идеал J фокусных величин f_k, $k=\overline{1,11}$, при делении на произвольный многочлен базиса Грёбнера идеала I даёт в остатке нуль.*

Определения понятий, использующихся в формулировках теорем 2 и 3, и их свойства можно найти, например, в монографиях [3, 4].

Автор благодарит доцента Белорусского государственного университета Д.Н. Чергинца за подготовку статьи к печати и Кирилла Атрохова за компьютерную поддержку при работе над статьёй.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Садовский А.П.* Проблема центра и фокуса для аналитической системы с ненулевой линейной частью // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 10. С. 1413–1417.
2. *Садовский А.П.* Семикратные фокусы кубических систем Куклеса // Весн. Гродзенск. дзярж. ун-та. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2011. Т. 11. С. 42–56.
3. *Кокс Д., Литтл Дж., О' Ши Д.* Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. М., 2000.
4. *Садовский А.П.* Полиномиальные идеалы и многообразия. Минск, 2008.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 17.08.2021 г.
После доработки 17.08.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.