



Российская Академия Наук

А АВТОМАТИКА И МЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

10

октябрь

Москва

2020

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Васильев С.Н.

Заместители главного редактора:

Кулешов А.П., Поляк Б.Т., Рубинович Е.Я.

Ответственный секретарь:

Хлебников М.В.

Редакционный совет:

Куржанский А.Б., Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г.,
Попков Ю.С., Рутковский В.Ю., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Васильев В.И., Вишневецкий В.М.,
Воронцов К.В., Галяев А.А., Глузов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В.,
Каравай М.Ф., Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М.,
Крищенко А.П., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,
Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М., Михальский А.И.,
Назин А.В., Немировский А.С. (США), Новиков Д.А., Олейников А.Я.,
Пакшин П.В., Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В.,
Соболевский А.Н., Степанов О.А., Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л.,
Хрусталев М.М., Цыбаков А.Б. (Франция), Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: (495) 334-87-70

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ООО «ИКЦ «АКАДЕМКНИГА»

© 2020 г. Н.И. ВОРОПАЙ, д-р техн. наук (voropai@isem.irk.ru),
И.И. ГОЛУБ, д-р техн. наук (golub@isem.irk.ru),
Д.Н. ЕФИМОВ, канд. техн. наук (efimov@isem.irk.ru)
(Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск),
А.Б. ИСКАКОВ, канд. физ.-мат. наук (isk_alex@mail.ru),
И.Б. ЯДЫКИН, д-р техн. наук (jadikin1@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СПЕКТРАЛЬНЫЙ И МОДАЛЬНЫЙ МЕТОДЫ В ИССЛЕДОВАНИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ И УПРАВЛЕНИИ ИМИ¹

Представлен обзор применения методов спектрального и модально-го анализа в исследованиях устойчивости электроэнергетических систем и управления ими. Рассмотрены теоретические основы этих методов и опыт их использования для выявления неоднородности структуры систем, идентификации когерентности движения генераторов и упрощения математической модели динамики энергосистем, оценки их статической устойчивости (устойчивости “в малом”) и выбора управляющих воздействий для ее обеспечения. Обсуждается анализ субграмианов при исследовании устойчивости электроэнергетических систем и другие новые направления развития модального подхода.

Ключевые слова: электроэнергетические системы, спектральный анализ, модальный анализ, упрощение математических моделей, оценка устойчивости, управление, субграмианы.

DOI: 10.31857/S0005231020100013

1. Введение

Электроэнергетические системы (ЭЭС) — сложнейшие технические объекты, созданные человеком и включающие тысячи генераторов электроэнергии, объединяемых на совместную работу электрической сетью, роторы которых в нормальном режиме вращаются с одинаковой (синхронной) угловой скоростью. Со времени создания первых ЭЭС одной из важнейших проблем было и остается обеспечение их устойчивости при малых и больших возмущениях. Для современных больших ЭЭС эта проблема особенно актуальна в связи с появлением новых факторов, определяемых нестационарностью генерации

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках проекта № 19-19-00673.

возобновляемых источников электроэнергии, активностью потребителей, использованием эффективно управляемых устройств на базе силовой электроники в электрической сети и у потребителей и ряда других, что существенно ухудшает свойства ЭЭС с точки зрения возможностей обеспечения их устойчивости. Кроме того, вследствие неоднородности структуры электрической сети остаются сечения (группы связей одного направления) с ограниченной пропускной способностью (bottlenecks), особенно в ослабленной структуре сети в послеаварийных и ремонтных режимах большой ЭЭС. Неоднородность структуры сети определяется наличием в ней подсистем с сильными внутренними связями и слабых связей и узлов между этими подсистемами (см. раздел 3). Ситуацию усугубляет расширение использования в ЭЭС установок распределенной генерации, в том числе на базе возобновляемых энергоресурсов, с малыми постоянными инерции роторов, а также подключаемых к электрической сети через выпрямительно-инверторные блоки, что существенно снижает инерционность системы и повышает опасность нарушений ее устойчивости. Нарушение устойчивости сложной системы может привести к каскадному развитию аварийного процесса с массовым нарушением питания потребителей и тяжелыми последствиями для системы [1, 2] и др.

Основополагающие исследования в области анализа и обеспечения устойчивости ЭЭС, моделирования элементов и системы в целом в динамических режимах, были выполнены еще в 1930–40-е гг. А.А. Горевым, Р. Парком, П.С. Ждановым, Е.В. Кимбарком, А.С. Лебедевым и рядом других авторов [3–5] и др. Соответствующие результаты для ЭЭС учитывали фундаментальные методы математической теории устойчивости динамических систем, полученные в работах А.А. Ляпунова, Дж. Сильвестра и др. [6, 7] и др. Одним из важных направлений в этой области является проблема устойчивости ЭЭС “в малом”, исторически обозначаемая в электроэнергетике термином “статическая устойчивость”.

Существуют несколько видов статической устойчивости ЭЭС. Применительно к рассматриваемым в данной статье подходам для сложных ЭЭС актуальными являются “устойчивость по углам” — angle stability (имеются в виду взаимные углы роторов синхронных машин) и “устойчивость по напряжениям” в узлах электрической сети — voltage stability [3–5] и др. При исследовании статической устойчивости ЭЭС при малых возмущениях (устойчивости “в малом”) используется классический подход математической теории устойчивости динамических систем, состоящий в линеаризации нелинейной системы в окрестности рассматриваемого положения ее равновесия, что позволяет использовать богатый арсенал строгих методов оценки устойчивости линейных динамических систем. При этом в статье рассматриваются попытки распространения этих методов для анализа нелинейных эффектов.

Первоначально исследования слабо возмущенного движения ЭЭС концентрировались на анализе аperiodической статической устойчивости по критерию смены знака определителя матрицы Якоби, равного свободному члену характеристического полинома. Считалось, что колебательные электромеханические процессы должны демпфироваться автоматическим регулятором возбуждения сильного действия (АРВ-СД) или стабилизаторами энергосистемы (СЭС — power system stabilizers). Однако данные практики показа-

ли многие случаи слабо демпфированных колебаний и самораскачивания из-за возникновения специфических нерасчетных схемно-режимных ситуаций, на которые не была рассчитана настройка коэффициентов регулирования АРВ-СД и СЭС. Это стимулировало развитие более строгих методов анализа статической устойчивости ЭЭС на базе теории устойчивости “в малом” А.А. Ляпунова, чему способствовало также появление эффективных методов определения корней характеристического уравнения высоких порядков (собственных значений матрицы линейной динамической системы) [8] и др., составляющих основу спектрального анализа. Модальный анализ впервые был исследован применительно к ЭЭС в [9, 10].

В широком смысле как спектральный анализ, так и модальный анализ подразумевают изучение свойств динамических систем в терминах частот и связанных с ними величин, таких как энергии, собственные значения и векторы. Хотя термин “спектральный” имеет более общий математический смысл, но применительно к методам оценки статической устойчивости ЭЭС термины “модальный” и “спектральный” очень близки и связаны с анализом расположения собственных значений матрицы линеаризованной системы на комплексной плоскости. Для удобства изложения в этом обзоре к спектральным отнесены более ранние методы, названные измерительными и анализирующие расположение на комплексной плоскости спектра матрицы линеаризованной динамической системы; к модальным — методы, связанные с идентификацией конкретных мод колебаний при использовании так называемых факторов (коэффициентов) участия, позволяющих соотнести эти моды колебаний с конкретными переменными состояниями системы. Методы спектрального анализа и модального анализа активно развиваются и модернизируются. По оценкам специалистов в настоящее время ежегодно в мире по проблемам развития этих методов публикуется до сотни работ, причем большая часть из них связана с задачами устойчивости ЭЭС.

В данной статье приведен обзор наиболее характерных результатов применения методов спектрального и модального анализа для решения различных задач анализа структурных свойств ЭЭС, моделирования динамики этих систем, исследования их устойчивости и управления ими — в основном за последние годы, но с использованием при необходимости более ранних результатов. В разделе 2 кратко даны теоретические основы спектрального и модального методов. Применение этих подходов охватывает практически все стадии исследования устойчивости сложных ЭЭС: изучение объекта исследований, его свойств, прежде всего свойства неоднородности структуры системы (раздел 3); выявление когерентности движения генераторов в электромеханическом переходном процессе в ЭЭС и упрощение (эквивалентирование) математических моделей когерентных групп генераторов (раздел 4); оценка статической устойчивости ЭЭС и выбор управляющих воздействий для ее обеспечения (раздел 5); анализ субграмианов при исследовании устойчивости ЭЭС и другие новые направления развития модального подхода (раздел 6). Раздел 7 (Заключение) подытоживает результаты статьи.

Потенциальные читатели обзора — это преимущественно электроэнергетики, глубоко знакомые со структурой и свойствами больших ЭЭС и проблемами устойчивости этих систем. Тем не менее обзор может быть интере-

сен и полезен специалистам по теории управления, имеющим определенные наработки и понимание проблем устойчивости сложных ЭЭС. Эта двуединая направленность обзора определила его структуру и содержание, которые представляются авторам определенным компромиссом с точки зрения изложения материала для рассматриваемых двух групп специалистов.

Основным объектом рассмотрения в обзоре являются большие сложные ЭЭС, для которых характерна неоднородность структуры электрической сети, проявляющаяся в наличии подсистем с сильными связями внутри них и слабыми связями и узлами между подсистемами (см. подробнее раздел 3), а также такие специфичные для сложных ЭЭС явления, как межрайонные колебания, когерентность возмущенного движения групп генераторов и ряд других, что отражает специфические свойства сложных ЭЭС, важные с точки зрения обеспечения их устойчивости.

2. Теоретические основы

В общем виде математическая модель ЭЭС при исследовании электромеханических переходных процессов может быть представлена системой нелинейных дифференциальных и алгебраических уравнений [11]

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{y} &= f(y, z, v), \\ 0 &= g(y, z, v), \end{aligned}$$

где y – вектор переменных состояния системы размерности n ; z – вектор зависимых переменных размерности m ; v – вектор управлений размерности l ; $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ – нелинейные вектор-функции, вид которых определяется моделями синхронных машин, электрической сети и нагрузок.

Линеаризация системы уравнений (1) в окрестности установившегося положения равновесия (y_0, z_0) приводит к линейным алгебро-дифференциальным уравнениям в приращениях $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = z - z_0$, $\Delta v = v - v_0$:

$$(2) \quad \begin{aligned} \Delta y &= (F_y | F_z) \begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + F_v \Delta v, \\ 0 &= (G_y | G_z) \begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + G_v \Delta v. \end{aligned}$$

Система уравнений (2) при условии обратимости матрицы Якоби преобразуется к форме Коши

$$(3) \quad \dot{x} = Ax + Bu,$$

где $x = \Delta y$ – вектор состояния размерности n ; $u = \Delta v$ – вектор управления размерности l .

Достаточно часто при решении различных задач исследования устойчивости ЭЭС рассматривается так называемая классическая модель динамики системы

$$(4) \quad T_i \ddot{\delta}_i(t) + d_i \dot{\delta}_i(t) = a_i - \sum_{j=0}^N b_{ij} \sin(\delta_i(t) - \delta_j(t)), \quad i = \overline{1, N},$$

где δ_i – угол ротора генератора i относительно синхронной оси; T_i , d_i – постоянная инерции и коэффициент демпфирования i -го ротора; a_i – механическая мощность, вырабатываемая турбиной агрегата; $b_{ij} = E_i E_j s_{ij}$, где E_i , E_j – ЭДС, определяемые потокосцеплениями магнитных полей, создаваемых обмотками возбуждения синхронных машин i и j соответственно, а s_{ij} – проводимости ветвей между генераторами i и j .

Классическая модель динамики ЭЭС обычно используется при решении вспомогательных задач спектрального и модального анализа (см., например, раздел 4 данной статьи в части выявления когерентности движения генераторов и упрощения моделей ЭЭС). Такие вспомогательные задачи решаются для удаленных от исследуемой подсистемы частей большой протяженной ЭЭС, в которых классическая модель динамики системы отражает поведение генераторов с приемлемой точностью. Определение исследуемой подсистемы – самостоятельная задача, зависящая от характера решаемой проблемы. В качестве исследуемой подсистемы может рассматриваться, например, территориально выделенный район ЭЭС. Генераторы исследуемой подсистемы представляются достаточно детальной моделью их динамики с учетом действия основных влияющих факторов, прежде всего регуляторов возбуждения и скорости. Учитывая то, что выбор представительной модели генераторов исследуемой подсистемы – самостоятельная задача, в работах, касающихся методов исследования устойчивости ЭЭС, проблемы обоснования моделей динамики генераторов обычно детально не рассматриваются, часто ограничиваясь общим их представлением вида (1).

Линеаризация системы дифференциальных уравнений (4) в окрестности положения равновесия системы дает линейную модель динамики ЭЭС в пространстве состояний, записываемую в общем виде как

$$(5) \quad \dot{x}(t) = Ax(t),$$

где x – вектор состояния ЭЭС размерности N ; N – число синхронных машин в системе; A – вещественная матрица постоянных коэффициентов размерности $N \times N$.

При решении некоторых задач, связанных с проблемами устойчивости ЭЭС (см., например, раздел 3), методами спектрального анализа рассматриваются собственные значения и собственные векторы матрицы Якоби уравнений установившегося режима (состояния равновесия) системы, которые в общем виде на основе (1) представляются как

$$(6) \quad \begin{aligned} 0 &= f(y, z, v), \\ 0 &= g(y, z, v). \end{aligned}$$

Одним из наиболее популярных методов изучения устойчивости моделей ЭЭС вида (3) и (5) относительно малых возмущений является модальный анализ, основанный на вычислении спектра динамической матрицы A , т.е. множества ее собственных значений λ_i

$$(7) \quad \Lambda(A) = \{ \lambda_i : \det(\lambda_i I_N - A) = 0, i = \overline{1, N} \},$$

где I_N обозначает единичную матрицу размерности $N \times N$. Собственные числа в (7) определяют частоты колебаний и коэффициенты демпфирования мод, характеризующих динамику поведения линейной системы (отсюда и термин “модальный анализ”). В частности, если все собственные значения λ_i , $i = \overline{1, N}$ имеют отрицательные действительные части, т.е.

$$(8) \quad \operatorname{Re} \lambda_i < 0, \quad i = \overline{1, N},$$

то модели ЭЭС (3) или (5) являются статически (асимптотически) устойчивыми. Правый и левый собственные векторы v_i и w_i матрицы A , соответствующие собственному значению λ_i , определяются выражениями

$$(9) \quad Av_i = \lambda_i v_i, \quad w_i^T A = \lambda_i w_i^T, \quad v_i \neq 0, \quad w_i \neq 0.$$

Эти векторы позволяют связать собственные моды системы с соответствующими им переменными состояниями.

На начальном этапе развития спектральный анализ рассматривался в основном как совокупность измерительных методов и вычислительных алгоритмов для быстрого нахождения определенных групп собственных чисел и векторов системы, интересных с точки зрения конкретных приложений. В электроэнергетике прежде всего изучались медленные и плохо демпфируемые колебания, которые могут приводить к потере статической устойчивости. Эти колебания могут возникать между одной или несколькими машинами и остальной частью системы (“локальные колебания” с частотой в диапазоне от 1 до 2 Гц) или же между большими группами генераторов (“межрайонные колебания” с частотой от 0,1 до 0,5 Гц) [12, 13].

Классические измерительные методы спектральных характеристик системы основаны на прямом преобразовании Фурье или на оценке корреляционной функции (периодограммы Шустера, модифицированные периодограммы, методы Бартлетта, Уэлча, Блэкмана–Тьюки). В качестве измеряемой величины могут использоваться амплитуда, энергия, число осцилляций и другие параметры сигнала. Более сложные методы динамических измерений для оценки спектральных характеристик системы включают метод Прони, методы Юла–Уолкера и Берга, модель скользящего среднего, вейвлет-анализ, нейронные сети и генетические алгоритмы [14, 15] и др.

Вычислительные методы модального анализа предполагают, что динамическая матрица системы уже известна, и необходимо предложить эффективные способы вычисления собственных чисел и векторов в заданной части спектра. При этом сама матрица как правило имеет большую размерность, может быть вырожденной или плохо обусловленной, а также иметь разреженную структуру. Среди известных и хорошо зарекомендовавших себя методов выделения критических мод можно назвать QR метод, метод одновременных итераций, метод Ланцоша (Lanczos method), модифицированный метод Арнольди, различные их модификации [16–20] и др. Отметим также более новые методы вычисления спектра доминирующих полюсов [21] и метод матричных сигнум-функций [22].

Собственные числа имеют простую смысловую интерпретацию, однако при анализе собственных векторов существует определенная проблема. Собствен-

ные векторы не позволяют однозначно интерпретировать связь соответствующих мод и переменных состояния, поскольку эти векторы зависят от выбора единиц измерения переменных. В [12, 13] была предложена удачная формализация селективного модального анализа для линейных систем, которая дала возможность установить однозначную связь между модами и переменными состояния на основе так называемых факторов (коэффициентов) участия, которые не зависят от используемых единиц измерения. Это позволило однозначно выделять элементы структуры системы, связанные с собственными модами в динамике ее поведения. Факторы участия (ФУ) и обобщенные участия определяются соответственно как [23]

$$(10) \quad p_{ki} = v_i^k w_i^k \quad \text{и} \quad p_{kil} = v_i^k w_i^l,$$

где v_i^k и w_i^l обозначают k -ю и l -ю компоненты соответственно i -го правого и левого собственных векторов матрицы A в (9). При этом предполагается, что собственные векторы нормированы, т.е.

$$(11) \quad w_i^T v_j = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для линейных систем ФУ определяют относительные вклады собственных мод системы в динамику эволюции переменных состояния, т.е.

$$(12) \quad x_k(t) = \sum_{i=1}^N p_{ki} x_k(0) e^{\lambda_i t} + \sum_{i,l=1; l \neq k}^N p_{kil} x_l(0) e^{\lambda_i t}.$$

С конца XX в. развитие модального анализа происходило в нескольких направлениях. Во-первых, концепция ФУ находила все новые области применения. Сегодня эти показатели широко используются в электроэнергетике и в других областях для анализа устойчивости [12, 13, 24], упрощения моделей [25], размещения средств измерения и управления в сети [26], кластеризации [27] и др. Некоторые из этих применений будут рассмотрены подробнее в последующих разделах обзора.

Во-вторых, расширялась смысловая интерпретация ФУ. Была установлена их связь с чувствительностями собственных чисел [23], модальной управляемостью и наблюдаемостью [28], а также с модальной подвижностью (modal mobility) [29]. Согласно (12) ФУ определяют динамику переменной состояния $x_k(t)$ только в том случае, если $x_l(0) = 0$, $l \neq k$, т.е. при специально выбранном начальном условии. В [30] было показано, что такое предположение может приводить к противоестественным результатам, и был предложен альтернативный метод усреднения по неопределенному множеству начальных условий. В соответствии с этим подходом, исходное определение ФУ (10) было сохранено для анализа участков “мод в состояниях”. А для анализа участия “состояний в модах” было предложено альтернативное определение ФУ (или ФУСМ). Впоследствии подобные концепции ФУСМ были рассмотрены для динамических нелинейных систем [31] и для систем, описываемых алгебраическими уравнениями, такими, например, как уравнения потокораспределения (6) [24].

В-третьих, были предприняты активные усилия распространить модальный анализ на случай нелинейных моделей. Попытки учесть нелинейные эффекты и межмодальные взаимодействия в рамках модального анализа развивались в основном в двух направлениях. Подходы, в которых предполагается известной модель системы, связаны с учетом членов второго и более высоких порядков в разложении ряда Тейлора, аппроксимирующего динамическую систему. В основном это делается с помощью нормальных форм Пуанкаре [31–33]. Исследование [34] показало, что учет таких членов может оказаться важным при изучении межрайонных колебаний в ЭЭС, подвергнутых большим возмущениям. Основная идея метода Пуанкаре состоит в том, чтобы подобрать нелинейную замену переменных в виде полинома так, чтобы для преобразованной системы члены второго порядка (и, возможно, более высоких порядков) в разложении Тейлора исчезли. Основным недостатком такого подхода заключается в том, что он требует решения сильно нелинейной численной задачи и использования затратных вычислительных алгоритмов. Поэтому альтернативные подходы предлагают оценивать ФУ непосредственно на основе измерений. Например, это можно сделать на основе расширенной динамической модальной декомпозиции (extended dynamic mode decomposition) [35] или модальной декомпозиции Купмана (Koopman mode decomposition) [36]. Использование таких методов менее универсально и требует тщательной проверки в практических приложениях.

Наряду с модальным анализом другой концептуальный метод в исследовании устойчивости связан с именами Джеймса Сильвестра и Александра Ляпунова, которые в конце XIX в. открыли и исследовали свойства матричных уравнений Сильвестра и Ляпунова [6, 7]. Эти уравнения играют сегодня важную роль во многих разделах современной теории управления, в том числе при исследовании устойчивости линейных и нелинейных систем, в робастном и оптимальном управлении. Ляпунов показал, что условия асимптотической статической устойчивости (8) линейных систем (3) или (5) эквивалентны тому, что для любой положительно определенной матрицы Q ($Q > 0$) существует положительно определенное решение P ($P > 0$) алгебраического матричного уравнения Ляпунова [7, 37] и др.

$$(13) \quad A^T P + P A = -Q, \quad Q = Q^T > 0,$$

которое называется грамианом. В этом случае для спектра устойчивой матрицы A справедлива оценка [38]:

$$(14) \quad \min_{i=1, \dots, N} |\operatorname{Re} \{\lambda_i\}| \leq -\frac{1}{2 \|P\|}.$$

Таким образом, вычисляя грамиан P как решение уравнения (13), можно оценить степень устойчивости системы без вычисления ее спектра. Кроме того, грамиан P в (13) может быть представлен в виде интеграла с матричными экспонентами матрицы A

$$(15) \quad P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt.$$

Предположим далее, что система (3) наблюдается по выходному сигналу

$$(16) \quad s(t) = Cx(t).$$

Тогда для анализа системы (3) обычно используются грамианы управляемости P_C и наблюдаемости P_O , когда в качестве положительной матрицы в уравнении (13) выбираются $Q = BB^T > 0$ и $Q = C^T C > 0$ соответственно. В целом можно сказать, что грамиан наблюдаемости характеризует устойчивость системы в смысле ограничения энергии ее выходного сигнала, а грамиан управляемости характеризует устойчивость системы в смысле ее асимптотической устойчивости к случайным возмущениям входного сигнала. Для устойчивой линейной динамической системы грамианы тесно связаны с квадратом H_2 -нормы ее передаточной функции или ее импульсной характеристики. Физическая интерпретация этих величин состоит в том, что они определяют усиление энергии сигнала в системе, усредненное по времени или частоте.

В середине XX в. были достигнуты серьезные прорывы в создании эффективных методов решения матричных уравнений и, в частности, уравнений Ляпунова и Сильвестра. Были разработаны методы ортогонализации, среди которых следует упомянуть методы Бартельса–Стюарта и Голуба–Нэша [39]. Первая работа по вычислению решений уравнений Ляпунова и Сильвестра в виде интегралов от их матричной резольвенты в комплексной плоскости была сделана в СССР М.Г. Крейном [40]. Д.К. Фаддеев разработал спектральное разложение резольвенты матрицы в ряд Фаддеева [41]. В [38, 42] были исследованы вопросы разрешимости матричных уравнений Сильвестра–Ляпунова–Крейна, дихотомия и расслоения их спектров, а также вычислительные проблемы их решения. В [43] обсуждаются структурные свойства грамианов. В [44] предложены методы решения непрерывных и дискретных матричных уравнений Ляпунова и Сильвестра, основанные на приведении матрицы динамики к нормальной форме Жордана. За последние 30 лет интенсивно развивались вычислительные методы для решения матричных уравнений более сложных типов, имеющих все большую размерность (см. ссылки в недавнем обзоре [45]).

Развивалась также и смысловая интерпретация метода Ляпунова. В частности, интерпретация грамианов для уравнения (13), основанная на концепции “энергии”, в целом сохраняется и для параметрических линейных систем с заменой матричной экспоненты e^{At} в (15) на фундаментальное решение $\Phi(0, t)$ однородного уравнения $\dot{x} = A(t)x$ [46, 47]. Понятие грамианов в дальнейшем было обобщено и интерпретировано для обобщенных уравнений Ляпунова, описывающих свойства детерминированных билинейных и стохастических линейных систем, и получило название энергетических функционалов [48, 49].

Спектральные свойства грамианов и энергетических функционалов были эффективно использованы в методах уменьшения размерности моделей (model order reduction – MOR). Среди них отметим метод сбалансированного отсечения [50], метод использования кросс-грамианов [51] и различные их модификации (см. обзор [52]). В монографии [53], посвященной аппроксимации

больших динамических систем, были впервые получены сингулярные разложения бесконечных грамианов управляемости и наблюдаемости на основе приведения матрицы динамики к диагональному виду. Более общая форма спектральных разложений функций Ляпунова на компоненты, соответствующие отдельным собственным числам и их парным комбинациям, была предложена в [54–56]. Каждый член в этих спектральных разложениях был назван *суб-грамианом*. Суб-грамианы позволяют оценивать взаимодействия между собственными модами системы. Они также дают возможность объединить идеи модального анализа с методом оценки устойчивости по Ляпунову. Более подробное описание этого метода и его применение к анализу устойчивости электроэнергетических систем будет представлено в разделе 6 обзора.

3. Исследования неоднородностей в электроэнергетических системах

Структура электрической сети сложной ЭЭС всегда неоднородна. Неоднородность структуры — фундаментальное свойство сложных ЭЭС, равно как и других систем со сложной структурой. Важно выявлять эту неоднородность, количественно ее оценивать и использовать при моделировании ЭЭС, их исследовании и управлении их режимами [57–59].

В процессе функционирования ЭЭС подвергается возмущениям и реагирует на них изменением переменных режима системы. Эта реакция определяется как величиной и местом приложения возмущения, так и внутренними свойствами самой системы. Возмущения, локализуемые в разных местах ЭЭС, вызывают более заметную, по сравнению с другими местами, реакцию переменных режима в одних и тех же узлах и связях системы. Такие элементы, переменные режима которых в наибольшей степени реагируют на происходящие в электрической сети возмущения, названы *сенсорами*. Неоднородности, приводящие к наличию сенсоров, определяются топологией и параметрами схемы электрической сети.

Элементы сети, изменение параметров которых приводит к наибольшей реакции сенсоров на возмущения, названы *слабыми местами*. К слабым местам относятся слабые связи и сечения, изменение сопротивлений в которых позволяет изменить значения переменных режима сенсоров, а также слабые узлы, если фиксация напряжений в них приводит к аналогичному эффекту. Переменные режима в слабых узлах при увеличении загрузки электрической сети раньше всего достигают критических значений с точки зрения нарушения устойчивости ЭЭС по напряжению. По слабым связям и сечениям чаще всего происходят нарушения устойчивости по углу и каскадное развитие аварийных процессов [57, 58].

Рассмотрим на основе [60] методы выявления сенсоров и слабых мест в сложных ЭЭС, используя в общем случае линеаризованные уравнения баланса мощностей в узлах, связывающие изменения модулей ΔU и фаз $\Delta \delta$ узловых напряжений с изменениями активных ΔP и реактивных ΔQ нагрузок в виде

$$(17) \quad \begin{pmatrix} \Delta \delta \\ \Delta U \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{pmatrix},$$

где J – квадратная вещественная матрица Якоби

$$(18) \quad J = \begin{pmatrix} \partial P / \partial \delta & \partial P / \partial U \\ \partial Q / \partial \delta & \partial Q / \partial U \end{pmatrix}.$$

Для выявления сенсоров на основе анализа матрицы Якоби может использоваться ее сингулярное разложение [61]

$$(19) \quad J = V \Sigma W^T = \sum_{i=1}^n v_i \sigma_i w_i^T,$$

где $W = (w_1, \dots, w_n)$ и $V = (v_1, \dots, v_n)$ – ортогональные матрицы размера $n \times n$ каждая, i -е столбцы которых являются соответственно i -м левым и i -м правым ортонормированными сингулярными векторами; $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ – диагональная матрица сингулярных значений.

С учетом (19) выражение (17) может быть представлено как

$$(20) \quad \begin{pmatrix} \Delta \delta \\ \Delta U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n v_i w_i^T / \sigma_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{pmatrix}.$$

Если для упорядоченных по возрастанию сингулярных значений $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_n$ первое из них существенно меньше остальных, то при прочих равных условиях наибольший вклад в изменения модулей и фаз напряжений вносит первое слагаемое суммы в (20). Это позволяет представить (20) в виде

$$(21) \quad \begin{pmatrix} \Delta \delta \\ \Delta U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \delta \\ \Delta U \end{pmatrix}^{(1)} + \sum_{i=2}^n \varepsilon_i = (v_1 w_1^T / \sigma_1) \begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{pmatrix} + \sum_{i=2}^n \varepsilon_i,$$

где $\sum_{i=2}^n \varepsilon_i$ – погрешность определения напряжений вследствие отбрасывания в (20) $n - 1$ слагаемых.

Чем больше отличие первого сингулярного значения от остальных, тем меньше погрешность из-за отбрасывания $n - 1$ слагаемых, и тем больше оснований делать выводы о характере поведения переменных режима, используя только первое слагаемое, связанное с σ_1 .

При отмеченных выше условиях очевидно, что максимальные изменения модулей и фаз напряжений при изменениях нагрузок будут происходить в узлах, соответствующих максимальным компонентам первого правого сингулярного вектора,

$$(22) \quad \begin{pmatrix} \Delta \delta \\ \Delta U \end{pmatrix}^{(1)} = v_1 \Delta S^{(1)} = (v_1 w_1^T / \sigma_1) \begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{pmatrix}.$$

Введение скалярной величины $\Delta S^{(1)}$, названной в [57] *первым обобщенным возмущением*, позволяет установить, что максимальные изменения модулей и фаз напряжений будут происходить в сенсорных узлах.

Оценка неоднородности электрической сети связана с определением *слабых мест* сети, от которых в большей степени зависит чувствительность ЭЭС. Слабые узлы и связи при учете инвариантных к режиму факторов могут быть найдены путем исследования следующих производных:

$$(23) \quad \frac{\partial \sigma_1}{\partial \gamma_{si}} = \pm v_{i1}^2,$$

$$(24) \quad \frac{\partial \sigma_1}{\partial \gamma_{ij}} = (v_{i1} + v_{j1})^2,$$

где γ_{ij} и γ_{si} – проводимость линии ij и шунта в узле i . Здесь и далее двойным индексом ij будем обозначать величины, которые относятся к связи между узлами i и j (потери мощности, напряжения и т.д.).

Изменения перетоков активной и реактивной мощности в связи ij $\Delta P_{ij} = (\partial P_{ij}/\partial \delta_{ij}) \Delta \delta_{ij}$ и $\Delta Q_{ij} = (\partial Q_{ij}/\partial U_{ij}) \Delta U_{ij}$ во многом определяются значениями $\Delta \delta_{ij}$ и ΔU_{ij} , которые можно найти по разности компонент первого правого сингулярного вектора $(v_{\delta i1} - v_{\delta j1})$ и $(v_{U i1} - v_{U j1})$, соответствующих фазам и модулям узловых напряжений в i -м и j -м узлах, и могут также использоваться как показатели слабости связи. Чем на большую величину при увеличении перетока по связи изменяются $\Delta \delta_{ij}$ и ΔU_{ij} , тем быстрее будет достигнут в ней предел передаваемой мощности и наступит вырождение матрицы Якоби.

Слабой может быть названа связь ij , изменение проводимости которой приводит к максимальному изменению минимального сингулярного значения σ_1 :

$$(25) \quad \frac{\partial \sigma_1}{\partial \gamma_{ij}} = w_1^T \frac{\partial J}{\partial \gamma_{ij}} v_1 = (w_{1\delta}, w_{1U}) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 P}{\partial \delta \partial \gamma_{ij}} & \frac{\partial^2 P}{\partial U \partial \gamma_{ij}} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial \delta \partial \gamma_{ij}} & \frac{\partial^2 Q}{\partial U \partial \gamma_{ij}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1\delta} \\ v_{1U} \end{pmatrix}.$$

Из выражения (25) следует, что на минимальное сингулярное значение оказывают влияние не только проводимости связей, но и переменные текущего режима. Ослабление связи и, соответственно, ухудшение обусловленности матрицы Якоби, связанные с изменением режима ЭЭС (например, его утяжелением, в результате которого может произойти нарушение статической устойчивости по углу или по напряжению), может быть ликвидировано соответствующими управлениями с использованием устройств FACTS (flexible alternating current transmission system – гибких систем передачи переменного тока), накопителей электроэнергии и других средств.

Таким образом, приведенный подход позволяет обоснованно выявлять слабые связи в структуре электрической сети ЭЭС и определять тем самым сильно связанные подсистемы, объединяемые в общую электросетевую структуру ЭЭС. Как отмечалось выше, нарушения статической устойчивости ЭЭС и каскадное развитие аварий при изменениях режима будут происходить прежде всего по слабым связям и менее вероятно по более сильным связям внутри

сильно связанных подсистем. Поэтому исследования статической устойчивости ЭЭС необходимо производить прежде всего по отношению к слабым связям.

Структурная неоднородность ЭЭС определяет также специфику движения генераторов системы в переходном электромеханическом процессе, а именно когерентное их движение (условие когерентности движения генераторов представлено далее выражением (26)). Когерентность движения генераторов является объективным основанием для упрощения математической модели динамики ЭЭС посредством агрегирования (объединения) генераторов сильно связанных подсистем. Замена группы генераторов одним эквивалентным вносит погрешность в математическую модель динамики ЭЭС, определяемую пренебрежением межмашинными колебаниями. Погрешность тем меньше, чем более когерентным является движение объединяемых генераторов. Поэтому требуется разработка методов выявления когерентности движения генераторов ЭЭС.

Для решения перечисленных задач выявления когерентности движения генераторов в сильно связанных подсистемах и агрегирования когерентных групп генераторов, а также оценки статической устойчивости ЭЭС по отношению к слабым связям и определения управляющих воздействий для обеспечения устойчивости нашли применение методы модального анализа, рассмотренные в последующих разделах 4 и 5 данной статьи.

4. Выявление когерентности движения генераторов и упрощение моделей электроэнергетических систем

При анализе устойчивости сложных многомашинных ЭЭС и обосновании мероприятий по обеспечению их устойчивости исследователь сталкивается с двумя противоречивыми проблемами: с одной стороны, очевидна необходимость достаточно детального моделирования элементов (прежде всего, синхронных генераторов) и структуры системы для того, чтобы обоснованно учесть в модели системы все влияющие на ее устойчивость факторы; с другой стороны, получаемая в результате математическая модель сложной ЭЭС в целом в виде совместной системы нелинейных дифференциальных и алгебраических уравнений вида (1) становится необозримой и часто неподъемной для исследований, особенно в условиях дефицита времени при обосновании управляющих воздействий в цикле оперативного управления ЭЭС, когда в течение 10–15 мин требуется провести десятки расчетов по оценке статической устойчивости сложной ЭЭС при различных условиях и выбору управляющих воздействий для обеспечения устойчивости системы. В результате объективно возникает задача обоснованного упрощения математической модели динамики ЭЭС [25, 59, 62, 63] и др. Ключевым этапом упрощения математической модели является выявление когерентности движения генераторов в переходном процессе и представление (агрегирование) каждой из когерентных групп генераторов одним эквивалентным генератором.

Когерентность движения генераторов i и j (до недавнего времени в русскоязычной литературе использовался эквивалентный термин “синфазность”)

определяется как

$$(26) \quad \delta_i(t) - \delta_j(t) = \text{const},$$

где обозначения соответствуют (4).

Первоначально задача выявления когерентности движения генераторов решалась с использованием приближенных, часто эмпирических признаков и критериев. Новым качественным шагом явилось введение понятий локальной и глобальной когерентности движения генераторов [64]. Локальная когерентность определяется структурными свойствами подсистемы, генераторы которой тестируются на когерентность движения, и возмущениями; глобальная когерентность — лишь структурными свойствами, т.е. она инвариантна к возмущениям. Структурные свойства подсистемы отражают неоднородность структуры ЭЭС — сильные связи в подсистеме, определяющие когерентность движения ее генераторов, и слабые связи этой подсистемы с оставшейся частью системы (см. раздел 3) [58, 59, 65].

Развитие этого направления связано с использованием преобразования координат [3, 66]

$$(27) \quad \{\delta_i, \delta_j\} \longrightarrow \{\delta_{ic}, \delta_{jc}, \delta_c\},$$

где δ_{ic} — угол ротора генератора i по отношению к центру инерции подсистемы δ_c . Показано, что центры инерции когерентных подсистем совершают медленное движение, а координаты δ_{ic} — быстрые движения [62, 67, 68]. На этой основе введено понятие медленной когерентности, оценки которой инвариантны к возмущениям [69, 70].

Рассмотрим, используя [71], метод выявления когерентности движения на основе анализа межсистемных колебаний с помощью селективного модального анализа. При этом межсистемные моды колебаний определяются факторами участия (10), матрицу которых обозначим в соответствии с [72]:

$$(28) \quad PF = [pf_1, pf_2, \dots, pf_n],$$

где

$$(29) \quad pf_i = \begin{bmatrix} v_i^1 w_i^1 \\ v_i^2 w_i^2 \\ \vdots \\ v_i^n w_i^n \end{bmatrix}, \forall i \in [1, \dots, n].$$

Абсолютные величины факторов участия, связанные с углами роторов синхронных генераторов классической модели ЭЭС (4), ранжированные в соответствии с их значениями, обозначены в (30) как PF_δ^{sort} . Окончательно минимальное количество j генераторов, удовлетворяющее требованию, сформулированному в (30), определяется для каждой моды, где g — общее коли-

чество генераторов:

$$(30) \quad \frac{\sum_{i=1}^j PF_{\delta}^{\text{sort}}(i)}{\sum_{i=1}^g PF_{\delta}^{\text{sort}}(i)} > c, \quad \forall j \in [1, g].$$

Значение c экспертно определяется в [71] величиной 0,9. Моды с более высоким значением индекса j являются кандидатами на межсистемные колебания.

После идентификации межсистемных мод производится формирование групп (кластеров) генераторов, которые определяются следующими требованиями:

- когерентность движения генераторов в группе;
- электрическая близость генераторов в группе.

Алгоритм идентификации когерентности работает при заданном количестве кластеров. Кластеры формируются по критерию минимизации суммы квадратов расстояний от центра кластера [73].

В результате формируются два кластера для каждой межсистемной моды. Два кластера необходимы для того, чтобы учесть взаимные колебания мод. При этом с точки зрения принципа формирования кластеров предполагается классическая ситуация в кластерном анализе, когда задается число кластеров (в данном случае два), а алгоритм кластеризации сам выбирает, какой объект куда отнести. Если существуют проблемы кластеризации собственных векторов в два независимых кластера (т.е. группировка нереалистична), формируются меньшие кластеры с комбинированием их по два кластера для каждой межсистемной моды.

Может оказаться, что когерентные генераторы в кластере расположены в разных географических зонах. Для исключения таких ситуаций анализируется электрическая близость генераторов в кластере по соотношению собственных и взаимных проводимостей генераторных узлов классической модели ЭЭС. Если генераторы в кластере располагаются в разных географических зонах, рассматриваемый кластер разбивается на соответствующее количество кластеров.

Динамический эквивалент когерентной группы генераторов (эквивалентный генератор) определяется различными методами, например в [74] — динамическим методом REI.

Рассмотрим еще некоторые характерные подходы к выявлению когерентности движения генераторов и формированию упрощенных моделей подсистем ЭЭС, прежде всего обзор возможных методов построения динамических эквивалентов ЭЭС [75], подготовленный рабочей группой IEEE PES, а также обзор [76].

В [75] при формировании низкочастотных эквивалентов рассматривается использование селективного модального анализа выделенной для упрощения линеаризованной части ЭЭС, в том числе для выявления когерентности движения генераторов. При этом отмечаются особенности подхода при сохране-

нии структуры системы. Эквивалентная модель сокращенной сети должна правильно отражать ее реакцию; для ее настройки используется соответствующая оптимизационная процедура.

В [76] первоначально ЭЭС разбивается на исследуемую и внешнюю подсистемы, эквивалентная модель рассматривается для внешней подсистемы. Для этой подсистемы решается задача выявления когерентности движения генераторов, и среди представленных методов идентификации когерентности рассматривается использование селективного модального анализа в виде, близком описанному выше. Для построения внешнего эквивалента применяются различные подходы, один из них основан на использовании факторов участия, рассматриваемых в селективном модальном анализе, следующим образом [77, 78].

В когерентной группе генераторов выбирается генератор с наибольшим значением фактора участия, причем в качестве допущения принимается, что этот генератор в наибольшей мере отражает динамические характеристики когерентной группы. Остальные составляющие матрицы участия исключаются из рассмотрения. Эквивалентная постоянная инерции ротора эквивалентного генератора определяется формулой

$$(31) \quad T_{eq} = \sum_{j \in G_k} h_j T_j,$$

$$(32) \quad h_j = P_{kj} / \sum_{j \in G_k} P_{kj},$$

где G_k – множество генераторов в группе k ; P_{kj} – мощность генератора j в группе k .

В [79] представлен метод синхронного модального эквивалентирования для динамических эквивалентов, сохраняющих структуру системы. Выделяется исследуемая подсистема и одна или несколько внешних подсистем, для которых идентифицируются когерентные группы генераторов на основе оценки медленной когерентности с использованием селективного модального анализа. Для каждой внешней подсистемы оставляется один генератор, имеющий наибольшее значение фактора участия. Этот генератор описывается исходной моделью. Динамика остальных генераторов внешних подсистем представляется линеаризованной моделью в пространстве состояний.

В [80] предлагается оценка медленной когерентности движения генераторов ЭЭС на основе межсистемных модальных характеристик и иерархической восходящей классификации. Межсистемные модальные характеристики получаются с использованием преобразования Тэйлора–Фурье, которое интегрирует подпространства Тэйлора и Фурье в общее пространство. В результате преобразование Тэйлора–Фурье образует некоторый фильтр, который путем спектрального разложения колебательных мод выделяет моды, наименее восприимчивые к условиям наличия шумов. Иерархическая восходящая классификация использует метод Эльбоу для выделения когерентных групп генераторов.

В [81] представлен метод идентификации когерентных групп генераторов на основе сингулярного разложения (singular value decomposition — SVD)

матрицы ЭЭС. Посредством этого метода вектор углов роторов генераторов высокой размерности проецируется на подпространство низкой размерности. В результате получаются коэффициенты подпространства как ключевые индикаторы когерентности. Затем идентификация когерентности осуществляется запуском кластеризации полученных коэффициентов методом k -средних. Снижение размерности задачи для алгоритма кластеризации методом SVD ускоряет идентификацию когерентности. Поскольку предложенный метод использует данные об углах роторов генераторов в режиме реального времени, он имеет хорошие перспективы для реализации идентификации когерентности в реальном времени.

В [82] рассматривается задача формирования динамической эквивалентной модели участка распределительной сети с использованием метода Прони (Prony analysis) и нелинейной оптимизации методом наименьших квадратов. Метод Прони оперирует линейной суммой экспоненциальных функций от собственных значений системы и используется для начальных оценок параметров модели, представляемой зависимостью Y от X , которая в дальнейшем оптимизируется нелинейным методом наименьших квадратов. В результате оптимизации определяются амплитуда, фаза, частота и демпфирующий коэффициент как параметры искомой модели, которая представляется в виде передаточной функции.

Как видно из изложенных в данном разделе результатов, различные модификации селективного модального анализа, наряду с другими методами, широко используются как для идентификации когерентных групп генераторов, так и при определении параметров упрощенных моделей подсистем, внешних по отношению к исследуемой подсистеме.

5. Исследование устойчивости электроэнергетических систем и управление ими

Как следует из условия (7), оценка статической устойчивости ЭЭС заключается в проверке выполнения этого условия для рассматриваемого состояния системы. При выборе управлений для обеспечения устойчивости ЭЭС задача заключается в том, чтобы за счет управлений обеспечить выполнение условия (7). Одновременно требуется, чтобы выбранное управление обеспечивало хорошее демпфирование колебаний, вызываемых возмущениями. Методы селективного модального анализа оказались эффективным инструментом для решения двух названных задач. Тем не менее математический аппарат модального анализа применительно к решению проблем устойчивости ЭЭС развивается. В данном разделе, не претендуя на полноту, приведем некоторые результаты в этом направлении.

Рассмотрим работы [83–89], характеризующие возрождение интереса к модальному анализу для исследований устойчивости ЭЭС у российских специалистов-электроэнергетиков.

В [83] изучается квадратическая проблема собственных значений с применением к различным задачам электроэнергетических систем. Соотношения (7), (9) представляют так называемую стандартную проблему собственных значений. В отличие от нее в квадратической проблеме собственных значений

(КПСЗ) изучаются свойства $n \times n$ матричных полиномов степени 2 (квадратических пучков матриц)

$$(33) \quad Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K.$$

КПСЗ заключается в определении комплексных скаляров λ и ненулевых комплексных векторов v и w , удовлетворяющих алгебраическим уравнениям

$$(34) \quad Q(\lambda)v = 0, \quad w^T Q(\lambda) = 0.$$

Использование КПСЗ дает определенные преимущества при анализе устойчивости линейных динамических систем по сравнению с решением стандартной проблемы собственных значений.

В [83] приводятся примеры использования КПСЗ в следующих электро-энергетических задачах: исследование устойчивости “в малом” сложной ЭЭС; анализ устойчивости валопроводов мощных турбоагрегатов; анализ сейсмической устойчивости арочных плотин гидроэлектростанций; экстраполяция поведения ЭЭС; оценивание состояния ЭЭС. Рассматриваются проблемы линеаризации и численных методов решения КПСЗ. Обсуждаются понятия спектра и псевдоспектра ЭЭС. Понятие спектра определено в разделе 2 при рассмотрении выражения (7). Теория псевдоспектров числовых матриц изучает изменения в расположении собственных значений, соответствующих исходной матрице, под влиянием возмущений.

Работа [84] посвящена оценке влияния возмущений на устойчивость ЭЭС. Отмечено, что элементы матрицы A в моделях реальных ЭЭС вида (5) определяются на основе физических наблюдений и измерений, а также расчетов по конструктивным параметрам элементов системы, и поэтому они содержат погрешности. Вследствие этого реальная матрица линеаризованной модели ЭЭС выглядит как $A + \Delta$, а сама модель может быть записана в виде

$$(35) \quad \dot{x}(t) = (A + \Delta)x(t).$$

Здесь $\Delta \in R^{n \times n}$ – матрица неизвестных возмущений, содержащая помимо перчисленных факторов также и реальные возмущения.

С помощью псевдоспектров формулируются и решаются две задачи: 1) можно ли определить, каким образом изменятся собственные значения матрицы A , и останется ли ЭЭС, описываемая моделью (35), асимптотически устойчивой при некоторых известных характеристиках матрицы возмущений Δ (например, максимальные значения модулей или норма матрицы Δ); 2) насколько велико может быть возмущение Δ , чтобы ЭЭС, описываемая моделью (35), оставалась асимптотически устойчивой.

Работа [85] рассматривает проблемы нелинейного модального взаимодействия в ЭЭС. Показано, что эффективным инструментом анализа нелинейного модального взаимодействия является метод нормальных форм Пуанкаре–Дюлака, дающий возможность в условиях отсутствия сильного резонанса мод колебаний посредством невырожденного нелинейного преобразования выполнять линеаризацию исходной нелинейной модели ЭЭС. Делается вывод, что

полученные таким способом модели ЭЭС в виде нормальных форм могут быть использованы при решении задач анализа устойчивости системы, а также синтеза автоматических регуляторов (например, системных стабилизаторов) модальными методами.

Статья [86] посвящена анализу достоинств модального метода для анализа устойчивости ЭЭС. Отмечается, что возможности модального подхода чрезвычайно широки, и он постоянно активно развивается. С его помощью эффективно идентифицируются критические с точки зрения возможной потери устойчивости колебания в ЭЭС. Модальный подход дает возможность использовать разнообразные методы синтеза законов управления.

Статья [87] в определенном смысле обобщает результаты, полученные в [83–86]. Предложено в качестве обобщенной переходной функции возмущенного движения ЭЭС использовать норму матричной экспоненты. На основе понятий радиуса устойчивости и псевдоспектра матрицы Якоби определены необходимые и достаточные условия существования запасов статической устойчивости. Показаны возможности и преимущества совмещенного модального и линейно-квадратического подходов при синтезе централизованного и децентрализованного управлений, а также перспективы анализа нелинейных колебаний и обеспечения динамической устойчивости ЭЭС.

В [88] рассматривается задача выбора координированного противоаварийного управления устройствами FACTS и традиционными дискретными устройствами аварийного отключения генераторов и нагрузок для обеспечения динамической устойчивости ЭЭС, при этом оптимизация настройки пропорционально-интегрального регулятора FACTS обеспечивает приемлемое демпфирование колебаний в системе, которое контролируется положением собственных значений матрицы линеаризованной модели ЭЭС. В качестве критерия оптимизации рассматривается минимум аварийного недоотпуска электроэнергии потребителям.

Следует обратить внимание также на совместное российско-итальянское исследование медленных межсистемных колебаний в супербольшом энергообъединении, представленном совместно работающими объединенными ЭЭС (ОЭЭС) в составе систем континентальной Европы и ОЭЭС стран бывшего СССР [89]. Особенностью линеаризованной модели этого суперэнергообъединения было представление в ней современных элементов, таких как линии электропередачи и вставки постоянного тока, устройства FACTS, системные стабилизаторы и др. Исследования показали, что внутри ОЭЭС континентальной Европы и бывшего СССР могут возникать слабо-демпфированные низкочастотные моды колебаний, они также возникают между зонами разных ОЭЭС в сценарии совместной работы двух ОЭЭС на переменном токе. Использование устройств FACTS при соответствующих законах их регулирования позволяет демпфировать эти колебания.

В [90] авторы предлагают общее нелинейное модальное представление крупномасштабных ЭЭС. Показаны возможности использования для моделирования нелинейных систем методологии нормальных форм векторного поля. Для корректного представления поведения ЭЭС, ее колебаний и взаимодействия мод используется новый для электроэнергетики так называемый метод

модальных рядов в форме рядов Тэйлора, имеющих полиномиальные нелинейности, которые характеризуют отклики нелинейной системы посредством соотношений в замкнутой форме. Этот метод развивает концепции теории линейных систем для понимания и анализа нелинейных систем, а также для конструирования систем управления ими.

Вследствие нестабильности рынка электроэнергии и растущего спроса на электроэнергию современные ЭЭС вынуждены работать все ближе к пределам своей устойчивости. В свою очередь, это делает систему более уязвимой и увеличивает риски потери устойчивости. Обычная практика оценки устойчивости и противоаварийного управления при планировании режимов и анализе возможных аварийных ситуаций (contingency analysis) включает задачу выявления и оценки критических колебаний и соответствующих им сечений сети, опасных с точки зрения потери устойчивости (слабых сечений – см. раздел 3). При этом критические колебания определяются на основе анализа собственных чисел, а для нахождения критических линий и узлов используются собственные векторы и матрицы чувствительностей токов и напряжений к соответствующим изменениям переменных состояния (sensitivity analysis). Пример методологии анализа чувствительностей для системы противоаварийного управления в случае неожиданного возникновения межрайонных колебаний описан в [91], где также приводятся результаты тестирования этой системы в большой реальной ЭЭС в Китае. Анализ чувствительностей к собственным модам позволяет также выявлять на графе электрической сети центры и “коридоры” критических качаний, опасных для устойчивости системы [92].

Традиционно устойчивость ЭЭС оценивается с помощью численного интегрирования ее модели в режиме офлайн для разных сценариев аварий, режимов функционирования и топологий сети. Существенно ускорить такие расчеты (как в режиме офлайн, так и в режиме реального времени) можно с помощью селективного модального анализа (СМА), который позволяет в итерационном процессе уменьшать размерность модели ЭЭС [12, 13] (см. раздел 4). На каждой итерации отбор генераторов для сокращенной модели происходит на основе величины соответствующих факторов участия. Например, в [93] СМА позволяет настолько уменьшить модель ЭЭС, чтобы к ней можно было применить метод линейных матричных неравенств (ЛМИ) и построить робастный стабилизатор для подавления межрайонных колебаний.

Повышенное использование пропускных способностей линий электропередачи в последние десятилетия делает актуальной проблему неустойчивости по напряжению, которая развивается в лавину напряжения (voltage collapse). Для анализа устойчивости по напряжению факторы участия (ФУ) были определены для системы алгебраических уравнений потокораспределения как показатели, которые измеряют вклад критической моды Якобиана уравнений потокораспределения (power flow Jacobian) в переменную состояния системы [94] (см. (17)).

Кроме того, для задачи потокораспределения были определены как ФУ “мод в состояниях”, так и ФУ “состояний в модах” (ФУСМ) [24]. При этом ФУСМ зависят не только от переменных состояния в узлах сети, но и от вводимых активных и реактивных мощностей на линиях. Поэтому ФУСМ непосредственно показывают, какое необходимо сделать добавление актив-

ной мощности и компенсацию реактивной мощности, чтобы повысить устойчивость системы по напряжению.

Традиционно устойчивость “в малом” обеспечивается оптимальным размещением системных стабилизаторов (PSS) и настройкой их управляющих сигналов. В последние десятилетия контроллеры FACTS также признаны эффективным инструментом демпфирования слабо затухающих низкочастотных электромеханических колебаний, которые обычно имеют место в ЭЭС с длинными линиями передачи в условиях их сильной нагрузки. Тем не менее известно, что демпфирующий эффект контроллеров FACTS сильно зависит от их размещения и от настройки их систем управления. Соответствующие задачи могут эффективно решаться методами модального анализа. По-видимому, впервые метод факторов участия был применен для определения оптимального размещения PSS на графе электрической сети в [95]. В [96] факторы участия для критических мод используются для определения оптимального размещения статических регулируемых компенсаторов (staticvar-compensators — SVCs) с целью стабилизации напряжения. В [97] решается аналогичная задача оптимального расположения SVC и выбора управляющих сигналов в ЭЭС. Обширный обзор литературы на тему применения модального анализа для определения оптимального расположения и настройки управления контроллеров FACTS и PSS приведен в [26, раздел 3.1].

Особый вид управления в ЭЭС связан с разбиением больших взаимосвязанных электрических сетей на слабо связанные зоны, которыми можно было бы легче и эффективнее управлять (см. также раздел 3 данной статьи). Такое разбиение основано на теории графов и логически приводит к методу спектральной кластеризации [98, 99]. Как правило, разделение сети может обеспечить гибкое, распределенное и адаптивное управление системой электроснабжения крупного региона в рамках концепции интеллектуальных ЭЭС. Это позволяет одновременно представлять различные уровни кластеризации и выявлять количественную зависимость параметров получаемых моделей графов. Для организации и визуального представления иерархической структуры электрической сети используют дендрограммы, т.е. графический метод представления результатов иерархической кластеризации, который показывает степень близости отдельных энергетических объектов и кластеров, а также наглядно демонстрирует в графическом виде последовательность их объединения или разделения. Дендрограммы хранят информацию о дальнейших разделениях (или объединениях) электрической сети на более мелкие (более крупные) острова. В методе спектральной кластеризации используются собственные числа и векторы лапласовской матрицы электрической сети, описывающие ее электрическую связность и потокораспределение. Нормализованные координаты дендрограммы позволяют географически привязать вершины и ребра графа к структуре электрической сети. В [99] технологии спектральной кластеризации были продемонстрированы на примерах тестовой модели IEEE со 118 узлами, а также на модели ЭЭС Польши.

В [100] рассматривается задача построения модели ЭЭС пониженного порядка для настройки параметров системных стабилизаторов в крупных ЭЭС. Для решения этой задачи реализуются алгоритмы оптимизации, применяемые для упрощенной модели ЭЭС, в том числе модели с неустойчивыми

полюсами. Метод построения упрощенной модели использует решение матричного уравнения Ляпунова высокой размерности на основе метода расширенных подпространств Крылова, а также разреженные матрицы Якоби линеаризованной модели системы. В [101] рассматривается задача создания глобального демпфирующего регулятора для демпфирования межрайонных колебаний в крупных континентальных ЭЭС. Особенностью подхода является использование систем мониторинга переходных режимов (СМНР) в качестве устройств измерения состояний энергетической системы и интеграция в регулятор существующих систем регулирования частоты в отдельных районах ЭЭС. Центральный регулятор построен по архитектуре LQG (Linear Quadratic Gaussian architecture) многосвязного регулятора, осуществляющего координирующее управление регуляторами частоты отдельных энергорайонов. Для настройки последних используется система оптимизации на принципах систем искусственного интеллекта — оптимизации роя частиц (Particle Swarm Optimization). Следует отметить, что в литературе известны и другие подходы к решению данной задачи, начиная от адаптивного робастного ПИД-регулятора и заканчивая сложными H_2/H_{∞} регуляторами [102].

Работа [103] посвящена анализу устойчивости торсионных субсинхронных колебаний генераторов основной электрической сети, вызванных присоединением к ней ветропарков. Показано, что причиной появления слабодемпфированных и даже неустойчивых торсионных колебаний турбин генераторов является резонансное взаимодействие мод отдельных генераторов основной сети с модами генераторов ветропарков. В работе предложен критерий оценки риска угрозы потери устойчивости колебаний, который основан на вычислении вычетов передаточных функций объединенной ЭЭС.

В [55] метод спектральных разложений грамианов был применен для анализа статической устойчивости ЭЭС. На простом примере двухрайонной ЭЭС с четырьмя электростанциями было показано, что нормы членов спектрального разложения позволяют идентифицировать как локальные электромеханические моды, так и неустойчивости, вызванные межрайонными колебаниями. Работа [104] посвящена анализу устойчивости ЭЭС, основанному на спектральном разложении квадрата H_2 -нормы передаточной функции системы. Поведение отдельных компонентов разложения позволяет на ранней стадии выявить и локализовать угрозу нарушения устойчивости. В тестовом численном эксперименте показано, что слабозатухающие низкочастотные колебания являются результатом взаимодействия между локальной подсистемой острова Русский и материковой энергетической системой. Такие колебания могут представлять наибольшую опасность для развития каскадной аварии и создавать биения с характерной разностной частотой.

6. Метод спектральных разложений функций Ляпунова в исследованиях электроэнергетических систем

В этом разделе рассматривается метод спектральных разложений функций Ляпунова, предложенный в [54, 55], и его применение для исследования динамического поведения ЭЭС. Интерес к этому методу обусловлен тем, что он имеет хорошую перспективу, чтобы стать основой для естественно-

го объединения двух основных методологий при исследовании устойчивости ЭЭС, а именно, модального анализа и методов Ляпунова.

Рассмотрим динамическую систему (3) или (5) и алгебраическое уравнение Ляпунова (13), которое используется для анализа ее стационарного состояния. Для простоты дальнейшего изложения будем считать, что матрица системы A имеет простой спектр $\sigma(A)$. Определим матричные вычеты R_i как коэффициенты в разложении резольвенты матрицы A :

$$(36) \quad (Is - A)^{-1} = \frac{R_1}{s - \lambda_1} + \frac{R_2}{s - \lambda_2} + \dots + \frac{R_n}{s - \lambda_n}.$$

Если $\lambda_i^* + \lambda_j \neq 0$ для всех $\lambda_i, \lambda_j \in \sigma(A)$, то для любой матрицы Q существует единственное решение уравнения Ляпунова (13), которое можно представить в виде [56]

$$(37) \quad P = \sum_{i=1}^n \tilde{P}_i = \sum_{i,j=1}^n P_{ij}, \quad \tilde{P}_i = \sum_{j=1}^n P_{ij},$$

$$(38) \quad \tilde{P}_i = - \left\{ R_i^* Q (\lambda_i^* I + A)^{-1} \right\}_{Herm}, \quad P_{ij} = \left\{ \frac{-1}{\lambda_i^* + \lambda_j} R_i^* Q R_j \right\}_{Herm},$$

где $\{\dots\}_{Herm}$ – эрмитова часть матрицы, а R_i и R_j – матричные вычеты, определенные в (36) и соответствующие собственным числам $\lambda = \lambda_i$ и $\lambda = \lambda_j$. Каждый член \tilde{P}_i или P_{ij} в разложениях (37), (38) называется *субграмианом*. Он характеризует вклад соответствующих собственных мод или их пар в вариацию энергии системы, определяемую соответствующим грамианом на бесконечном интервале времени. В частности, нормы субграмианов увеличиваются, если частоты соответствующих им колебательных мод сближаются. Таким образом, найденные разложения открывают возможность количественной оценки резонансных модальных взаимодействий, происходящих в системе.

Спектральные разложения вида (37) для уравнения (13) были обобщены в [56] на более широкий класс решений матричных уравнений М.Г. Крейна, который в качестве частных случаев включает непрерывные и дискретные уравнения Ляпунова и Сильвестра. В [105] эти разложения были также распространены на случай обобщенных уравнений Ляпунова вида

$$(39) \quad A^T P + PA + \sum_{\gamma=1}^m N_\gamma^T P N_\gamma = -Q, \quad \text{где } Q = Q^T > 0,$$

которые характеризуют свойства управляемости и наблюдаемости вектора состояний детерминированной билинейной системы [48], а матрицы $N_\gamma \in \mathbb{R}^{N \times N}$ учитывают билинейные компоненты. Такие же уравнения (39) возникают при анализе устойчивости и стабилизации стохастических линейных систем [49, 106].

В [104, 107] метод субграмианов был применен для исследования устойчивости модели линейных непрерывных динамических систем, функциони-

рующих вблизи границы устойчивости. Эффективным методом анализа статической устойчивости ЭЭС является выделение доминирующих слабоустойчивых мод и построение асимптотических моделей субграмианов для групп мод. Получены асимптотические выражения субграмианов в случае наличия одной, двух или трех доминирующих слабоустойчивых мод. Разработанный метод был применен для анализа статической устойчивости модели реальной ЭЭС на острове Русский. При этом была подтверждена принципиальная возможность использования субграмианов для идентификации резонансного взаимодействия между слабоустойчивыми собственными осцилляциями в системе, находящейся вблизи границы устойчивости.

В статье [108] были получены спектральные разложения для решения дифференциальных уравнений Ляпунова и Сильвестра с учетом ненулевых начальных условий. Эти решения называются конечными грамианами. В отличие от спектральных разложений бесконечных грамианов в (37) полученные разложения зависят от времени и позволяют анализировать устойчивость нестационарных систем, а также развитие неустойчивости в системе, потерявшей устойчивость. В численном эксперименте с моделью электросистемы острова Русский было показано, что предложенные разложения можно использовать для предсказания промежутка времени, в течение которого медленные переходные процессы приведут систему к нарушению устойчивости. Таким образом, спектральный анализ конечных грамианов позволяет получить прогноз риска на заданном временном отрезке и оценивать устойчивость ЭЭС в случае медленных переходных процессов.

В [109] сформулирована и решена задача разработки принципов построения и алгоритмов иммунной интеллектуальной системы мониторинга статической устойчивости ЭЭС на основе методов ассоциативного поиска, мультиагентного управления и спектральных разложений грамианов. Основная идея данного подхода состоит в формировании текущей дискретной динамической модели на основе методов ассоциативного поиска, основанного на использовании технологических архивов и интеллектуального анализа данных, и формировании оценки риска потери устойчивости ЭЭС с помощью спектральных разложений грамианов для текущей модели. Виртуальный анализатор риска потери устойчивости реализуется на основе использования современных методов идентификации и современных технологий обработки данных.

В статье [110] сформулирована и решена задача спектрального разложения решения дискретных матричных уравнений Ляпунова для дискретных билинейных динамических систем. Для построения решения использована предложенная в [111] итеративная процедура, состоящая в том, что на каждой итерации решается линейное матричное уравнение Ляпунова. Грамиан билинейной системы, являющийся решением обобщенного уравнения Ляпунова, представляет собой матричный ряд Вольтерра. Выведены формулы спектральных разложений итеративного процесса вычисления грамианов управляемости и наблюдаемости дискретных билинейных систем. Полученные спектральные разложения дают возможность реализовать процедуры сбалансированного отсечения в задаче упрощения математической модели билинейной системы с учетом спектральных свойств матрицы динамики ее

линейного приближения, а также вычислять энергетические функционалы с помощью предложенных итеративных процедур.

В [113] впервые субграмианы были соотнесены с переменными состояниями системы и проведено их сравнение с соответствующими факторами участия. В численном эксперименте факторы участия и субграмианы были применены для селективного модального анализа тестовой модели IEEE с 57 узлами. Было отмечено, что наиболее влиятельные моды в смысле факторов участия необязательно важны в смысле их участия в усилении энергии возмущений в системе и наоборот. Это наблюдение открывает возможность создания нового направления в модальном анализе, который бы включал в себя принципы устойчивости Ляпунова на основе метода субграмианов [113]. Рассмотренные первые результаты использования метода субграмианов дают представление о перспективности этого направления применительно к задачам исследования устойчивости ЭЭС.

7. Заключение

Статья содержит обзор общего развития спектральных и модальных методов для оценки устойчивости динамических систем, а также их применения для мониторинга и управления устойчивостью больших сложных ЭЭС. Рассмотрены практические задачи мониторинга ЭЭС, такие как выявление критических межрайонных колебаний, неоднородностей структуры, слабых узлов и линий в сети, исследование когерентности движения генераторов и упрощение моделей ЭЭС. Рассмотрены также основные задачи управления устойчивостью в ЭЭС, такие как синтез и настройка автоматических регуляторов, их оптимальное размещение в сети для подавления межрайонных колебаний, координация противоаварийного управления между разными устройствами, управление устойчивостью по напряжению путем компенсации активной и реактивной мощностей на линиях, оптимальное разбиение сети на острова при авариях. Помимо традиционных подходов, основывающихся на линеаризованной модели системы, в обзоре также приводятся их расширения, позволяющие учитывать разные нелинейные эффекты. Например, рассматривается использование квадратичной проблемы собственных чисел и псевдоспектра матрицы динамики, метод нормальных форм Пуанкаре, использование спектральных разложений функций Ляпунова в модальном анализе. Приведенные в данной статье материалы демонстрируют интенсивное развитие методов модального анализа динамических систем вообще и активное применение и модернизацию этих методов для решения проблем анализа структурных свойств сложных ЭЭС, упрощения моделей динамики рассматриваемых систем, оценки их статической устойчивости и управления такими системами. Представленный обзор новейших разработок в части развития методов модального анализа с распространением его на нелинейные системы показывает потенциальные возможности эффективного решения проблем устойчивости сложных ЭЭС.

В качестве основного объекта приложения спектральных и модальных методов настоящий обзор рассматривает большие ЭЭС. При этом за пределами анализа остаются мини- и микросистемы, формируемые соответ-

ственно на основе распределительных электрических сетей напряжениями 6 – 10 – 20 – 35 кВ и 0,4 кВ. Эти системы, работающие изолированно или совместно с большими ЭЭС, имеют специфические структуру и свойства, порождающие специфику проблем их устойчивости и ее обеспечения [1, 114] и др. Анализ этих проблем и соответствующих методов их преодоления является предметом отдельного исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Milano F., Dörfler F., Hug G., et.al.* Foundations and challenges of low-inertia systems (invited paper) // Proc. 20 Power Systems Computation Conf. (PSCC). Manchester, UK, June 11–15, 2018.
2. *Воропай Н.И., Осак А.Б.* Электроэнергетические системы будущего // Энергетическая политика. 2014. Вып. 5. С. 60–63.
3. *Горев А.А.* Переходные процессы в синхронной машине. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1950.
4. *Жданов П.С.* Вопросы устойчивости электрических систем. М.: Энергия, 1989.
5. *Kimbark E.W.* Power system stability. Books I, II, III. N.Y.: Wiley, 1948.
6. *Sylvester J.* Sur l'équation en matrices $px = xq$ // Comptes Rendus de l'Acad. Sci., 1884.
7. *Ляпунов А.* Probleme general de la stabilite du mouvement / Commun. Soc. Math. Kharkov, 1893.
8. *Saad Y.* Numerical methods for large eigenvalue problems / Society for Industrial and Applied Mathematics. N.Y.: Wiley, 2011.
9. *Porter B., Crossley R.* Modal control. Theory and applications. London: Taylor and Fransis, 1972.
10. *Баринов В.А., Совапов С.А.* Анализ статической устойчивости электроэнергетических систем по собственным значениям матриц // Электричество. 1983. № 2. С. 8–15.
11. *Веников В.А.* Переходные электромеханические процессы в электрических системах. М.: Высш. шк., 1985.
12. *Perez-Arriaga I.J., Verghese G.C., Schweppe F.C.* Selective modal analysis with applications to electric power systems. Part I: Heuristic introduction // IEEE Trans. Power Appar. Syst. 1982. V. 101. No. 9. P. 3117–3125.
13. *Verghese G.C., Perez-Arriaga I.J., Schweppe F.C.* Selective modal analysis with application to electric power systems. Part II: The dynamic stability problem // IEEE Trans. Power Appar. Syst. 1982. V. 101. No. 9. P. 3126–3134.
14. *Pierre J.W., Trudnowski D., Donnelly M., et. al.* Overview of system identification for power systems from measured responses // IFAC Proc. Volumes. July 2012. V. 45. No. 16. P. 989–1000.
15. CIEE Final Project Report. Oscillation detection and analysis. 2010. Available at: [http://www.uc-ciee.org/downloads/ODA Final Report.pdf](http://www.uc-ciee.org/downloads/ODA%20Final%20Report.pdf) [Accessed on 26 February 2018].
16. *Arnoldi W.E.* The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem // Quarterly Appl. Math. 1951. No. 9. P. 17–29.
17. *Wang L., Semlyen A.* Application of sparse eigenvalue techniques to the small signal stability analysis of large power systems // IEEE Trans. Power Syst. 1990. V. 5. No. 2. P. 635–642.

18. *Angelidis G., Semlyen A.* Improved methodologies for the calculation of critical eigenvalues in small signal stability analysis // IEEE Trans. Power Syst. 1996. V. 11. No. 3. P. 1209–1217.
19. *Rommès J.* Arnoldi and Jacobi-Davidson methods for generalized eigenvalue problems $Ax = \lambda Bx$ with singular B // Math. Comput. 2008. V. 77. No. 262. P. 995–1015.
20. *Rommès J., Martins N., Freitas F.* Computing rightmost eigenvalues for small-signal stability assessment of large-scale power systems // IEEE Trans. Power Syst. 2010. V. 25. No. 2. P. 929–938.
21. *Martins N.* The dominant pole spectrum eigen-solver [for power system stability analysis] // IEEE Trans. Power Syst. 1997. V. 12. No. 1. P. 245–254.
22. *Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Матричная сигнум-функция в задачах анализа и синтеза линейных систем // АИТ. 2008. № 2. С. 26–51.
Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Matrix sign function in the problems of analysis and design of the linear systems // Autom. Remote Control. 2008. V. 69. No. 2. P. 198–222.
23. *Pagola F.L., Pérez-Arriaga I.J., Verghese G.C.* On sensitivities, residues and participations: applications to oscillatory stability analysis and control // IEEE Trans. Power Syst. 1989. V. 4. No. 1. P. 278–285.
24. *Song Y., Hill D.J., Liu T.* State-in-mode analysis of the power flow Jacobian for static voltage stability // Int. J. Electric Power Energy Syst. 2019. V. 105. P. 671–678.
25. *Chow J.H.* (Ed.) Power system coherency and model reduction. Heidelberg: Springer, 2013.
26. *Singh B., Sharma N.K., Tiwari A.N.* A Comprehensive Survey of Optimal Placement and Coordinated Control Techniques of FACTS Controllers in Multi-Machine Power System Environments // J. Electric. Engineer. Technol. 2010. V. 5. No. 1. P. 79–102.
27. *Genç I., Schattler H., Zaborszky J.* Clustering the bulk power system with applications towards Hopf bifurcation related oscillatory instability // Electric Power Components Syst. 2005. V. 33. No. 2. P. 181–198.
28. *Hamdan A.M.A., Nayfeh A.H.* Measures of modal controllability and observability for first and second order linear systems // J. Guidance, Control, Dynam. 1989. V. 12. No. 3. P. 421–428.
29. *Tawalbeh N.I., Hamdan A.M.* Participation factors and modal mobility // Engineer. Sci. 2010. V. 37. No. 2. P. 226–232.
30. *Hashlamoun W.A., Hassouneh M.A., Abed E.H.* New results on modal participation factors: Revealing a previously unknown dichotomy // IEEE Trans. Autom. Control. 2009. V. 54. No. 7. P. 1439–1449.
31. *Hamzi B., Abed E.H.* Local modal participation analysis of nonlinear systems using Poincare linearization // Nonlinear Dyn. 2020. V. 99. P. 803–811.
32. *Vittal V., Bhatia N., Fouad A.A.* Analysis of the inter-area mode phenomenon in power systems following large disturbances // IEEE Trans. Power Syst. 1991. V. 6. No. 4. P. 1515–1521.
33. *Tian T., Kestelyn X., Thomas O., et al.* An accurate third-order normal form approximation for power system nonlinear analysis // IEEE Trans. Power Syst. 2018. V. 33. No. 2. P. 2128–2139.
34. *Sanchez-Gasca J.J., Vittal V., Gibbard M.J., et al.* Inclusion of higher order terms for small-signal (modal) analysis: committee report-task force on assessing the need

- to include higher order terms for small-signal (modal) analysis // IEEE Trans. Power Syst. 2005. V. 20. No. 4. P. 1886–1904.
35. *Williams M.O., Kevrekidis I.G., Rowley C.W.* A Data-driven approximation of the Koopman operator: extending dynamic mode decomposition // J. Nonlinear Sci. 2015. V. 25. No. 6. P. 1307–1346.
 36. *Netto M., Susuki Y., Mili L.* Data-driven participation factors for nonlinear systems based on Koopman mode decomposition // IEEE Control Syst. Lett. 2019. DOI: 10.1109/LCSYS.2018.2871887.
 37. *Воронов А.А.* Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1979.
 38. *Годунов С.К.* Лекции по современным аспектам линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 2002.
 39. *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984.
 40. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
 41. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963.
 42. *Демиденко Г.В.* Матричные уравнения. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос.ун-та, 2009.
 43. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
 44. *Зубов Н.Е., Зыбин Е.Ю., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Общие аналитические формы решения уравнений Сильвестра и Ляпунова для непрерывных и дискретных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2017. № 1. С. 50–22.
 45. *Simoncini V.* Computational methods for linear matrix equations // SIAM Rev. 2014. V. 58. No. 3. P. 377–441.
 46. *Shokoohi S., Silverman L.M., Van Dooren P.* Linear time-variable systems: balancing and model reduction // IEEE Trans. Automat. Control. 1983. V. AC-28. No. 8. P. 810–822.
 47. *Verriest E., Kailath T.* On generalized balanced realizations // IEEE Trans. Automat. Control. 1983. Vol. AC-28. No. 8. P. 833–844.
 48. *Gray W.S., Mesko J.* Energy functions and algebraic Gramians for bilinear systems // Preprints 4 IFAC Nonlinear Control Syst. Design Sympos. Enschede. The Netherlands, 1998.
 49. *Benner P., Damm T.* Lyapunov equations, energy functionals, and model order reduction of bilinear and stochastic systems // SIAM J. Control Optim. 2011. V. 49. No. 2. P. 686–711.
 50. *Moore B.C.* Principal component analysis in linear systems: controllability, observability, and model reduction // IEEE Trans. Automat. Control. 1981. V. AC-26. P. 17–32.
 51. *Fernando K.V., Nicholson H.* On a fundamental property of the cross-Gramian matrix // IEEE Trans. Circuits Syst. 1984. V. CAS-31. No. 5. P. 504–505.
 52. *Baur U., Benner P., Feng L.* Model order reduction for linear and nonlinear systems: a system-theoretic perspective // Archiv. Comput. Method. Engineer. 2014. V. 21. No. 4. P. 331–358.
 53. *Antoulas A.C.* Approximation of Large-Scale Dynamical Systems. SIAM, Philadelphia, PA, USA. 2005.

54. *Ядыкин И.Б.* О свойствах грамианов непрерывных систем управления // *АиТ.* 2010. № 6. С. 39–50.
Yadykin I.B. On properties of gramians of continuous control systems // *Autom. Remote Control.* 2010. V. 71. No. 6. P. 1011–1021.
55. *Yadykin I.B., Isakov A.B., Akhmetzyanov A.V.* Stability analysis of large-scale dynamical systems by sub-Gramian approach // *Int. J. Robust Nonlinear Control.* 2014. V. 24. P. 1361–1379.
56. *Yadykin I.B., Isakov A.B.* Spectral decomposition for the solutions of Sylvester, Lyapunov, and Krein equations // *Dokl. Math.* 2017. V. 95. No. 1. P. 103–107.
Yadykin I.B., Isakov A.B. Spectral decompositions for the solutions of Sylvester, Lyapunov, and Krein equations // *Dokl. Math.* 2017. V. 95. P. 103107.
57. *Гамм А.З., Голуб И.И.* Сенсоры и слабые места электроэнергетических систем. Иркутск: СЭИ СО РАН, 1996.
58. *Войтов О.Н., Воронай Н.И., Гамм А.З. и др.* Анализ неоднородностей электроэнергетических систем. Новосибирск: Наука, 1999.
59. *Абраменкова Н.А., Воронай Н.И., Заславская Т.Б.* Структурный анализ электроэнергетических систем: В задачах моделирования и синтеза. Новосибирск: Наука, 1990.
60. *Воронай Н.И., Гамм А.З., Голуб И.И., Ефимов Д.Н.* Предыстория и развитие исследований неоднородностей и слабых мест систем энергетики // *Системные исследования в энергетике: Ретроспектива научных направлений СЭИ-ИСЭМ.* Новосибирск: Наука, 2010.
61. *Малышев А.Н.* Введение в вычислительную линейную алгебру. Новосибирск: Наука, 1991.
62. *Гусейнов Ф.Г.* Упрощение расчетных схем электрических систем. М.: Энергия, 1978.
63. *Воронай Н.И.* Упрощение математических моделей динамики электроэнергетических систем. Новосибирск: Наука, 1981.
64. *Dorsey J., Schlueter R.A.* Global and local dynamic equivalents based on structural archetypes for coherency // *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.* 1983. V. 102. No. 6. P. 1793–1801.
65. *Eremia M., Shahidehpour M.* (Eds.) Handbook of electrical power system dynamics: Modeling, stability and control. Hoboken: Wiley – IEEE Press, 2013.
66. *Stanton K.M.* Dynamic energy balance studies for simulation of power-frequency transient // *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.* 1972. V. 91. No. 1. P. 110–117.
67. *Картвелишвили Н.А., Галактионов Ю.И.* Идеализация сложных динамических систем. М.: Наука, 1976.
68. *Chow J.H.* (Ed.) Time-scale modeling of dynamic networks with application to power systems. N.Y.: Lect. Notes Contr. Inf. Sci., 1982.
69. *Winkelman J.K., Chow J.H., Avramovich B., et. al.* An analysis of interarea dynamics of multimachine systems // *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.* 1981. V. 100. No. 2. P. 754–763.
70. *Peponides G., Kokotovic P.V., Chow J.H.* Singular perturbations and time scales in nonlinear models of power systems // *IEEE Trans. Circuits Syst.* 1982. V. 29. No. 11. P. 758–767.
71. *Stadler J., Renner H., Koeck K.* An inter-area oscillation based approach for coherency identification in power systems // *Proc. 18 Power Syst. Comput. Conf.* Wroclaw. Poland. August 18–22, 2014.

72. *Kundur P.* Power system stability and control. N.Y.: McGraw-Hill, Inc., 1994.
73. *Wu J.* Advances in k-means clustering: A data mining thinking. Heidelberg: Springer, 2012.
74. *Stadler J., Renner H.* Application of dynamic REI reduction // Proc. 4 IEEE PES Innovat. Smart Grid Technol. Europe, Copenhagen, Denmark, October 6–9. 2013.
75. *Annakkage U.D., Nair N.K.C., Liang Yu., et al.* Dynamic system equivalents: A survey of available technique; IEEE PES Task Force on Dynamic Systems Equivalents // IEEE Trans. Power Delivery. 2012. V. 27. No. 1. P. 411–420.
76. *Singh R., Elizondo M., Lu Shuai.* A review of dynamic generator reduction methods for transient stability studies // Proc. 2011 IEEE PES General Meeting. Detroit, Michigan, USA. July 24–28, 2011.
77. *Kim H., Jang G., Song K.* Dynamic reduction of large-scale power systems using relation factor // IEEE Trans. Power Syst. 2004. V. 19. No. 3. P. 1696–1699.
78. *Milano F., Srivastava K.* Dynamic REI equivalents for short circuit and transient stability analyses // Electric Power Syst. Res. 2009. V. 79. No. 2. P. 878–887.
79. *Ramaswamy G.N., Rouco L., Filiatre O., Verghese G.C., et al.* Synchronic modal equivalencing (SME) for structure-preserving dynamic equivalents // IEEE Trans. Power Syst. 1996. V. 11. No. 1. P. 19–29.
80. *Paternina M.R.A., Zamora A., Chow J.H., Ramires J.M.* Power system coherency based on modal characteristics and hierarchical agglomerative clustering // Proc. 2017 IEEE Power Tech. Manchester, UK. June 18–22, 2017.
81. *Zhu Q., Chen J., Duan X., Sun X., Li Y., Shi D.* A method for coherency identification based on singular value decomposition // Proc. IEEE PES General Meeting. Boston, Massachusetts, USA. July 17–21, 2016.
82. *Zali S.M., Milanovic J.V.* Dynamic equivalent model of distribution network cell using Prony analysis and nonlinear least square optimization // Proc. 2009 IEEE Bucharest Power Tech. Bucharest, Romania. June 28–July 2, 2009.
83. *Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Квадратическая проблема собственных значений в электроэнергетических системах // АиТ. 2006. № 5. С. 24–47.
Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. The quadratic eigenvalue problem in electric power systems // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. P. 698–720.
84. *Мисриханов М.Ш., Шаров Ю.В.* Оценка влияния возмущений на устойчивость электроэнергетической системы // Вестн. МЭИ. 2009. № 5. С. 42–48.
85. *Шаров Ю.В.* Нелинейное модальное взаимодействие в электроэнергетических системах // Электричество. 2016. № 12. С. 13–20.
86. *Шаров Ю.В.* О развитии методов анализа статической устойчивости электроэнергетических систем // Электричество. 2017. № 1. С. 12–17.
87. *Шаров Ю.В.* Применение модального подхода для решения проблемы обеспечения статической устойчивости электроэнергетических систем // Изв. РАН. Энергетика. 2017. № 2. С. 13–29.
88. *Etingov P.V., Voropai N.I.* Power system stability enhancement using advanced automatic technology // Proc. Int. Conf. Advanced Power System Automation and Protection. Jeju, Korea. April 24–27, 2007.
89. *Gaglioti E., Iaria A., Panasetsky D., et al.* Inter-area oscillations in the CT/Turkey and IPS/UPS power systems // Proc. CIGRE Sympos. “Electric Power System for the Future – Integrating Supergrids and Microgrids”. Bologna, Italy. September 13–15, 2011.

90. *Shanechi H.M., Pariz N., Vaahedi E.* General nonlinear modal representation of large scale power systems // IEEE Trans. Power Syst. 2003. V. 18. No. 3. P. 1103–1109.
91. *Cao J., Du W., Wang H., et. al.* A novel emergency damping control to suppress power system inter-area oscillations // IEEE Trans. Power Syst. 2013. V. 28. No. 3. P. 3165–3173.
92. *Chompoobutrgool Y., Vanfretti L.* Identification of Power System Dominant Inter-Area Oscillation Paths // IEEE Trans. Power Syst. 2013. V. 28. No. 3. P. 2798–2807.
93. *Pal A., Thorp S.* Co-ordinated control of inter-area oscillations using SMA and LMI // In: 2012 IEEE PES Innovat. Smart Grid Technolog. (ISGT). DOI: 10.1109/ISGT.2012.6175535.
94. *Gao B, Morison G, Kundur P.* Voltage stability evaluation using modal analysis // IEEE Trans. Power Syst. 1992. V. 7. No. 4. P. 1529–1542.
95. *Hsu Yuan-Yih, Chen Chern-Lin.* Identification of optimum location for stabilizers application using participation factors // IEE Proc. 1987. Pt. C. V. 134. No. 3. P. 238–244.
96. *Mansour Y., Xu W., Alvarado F., Rinzin Ch.* SVC placement using critical modes of voltage stability // IEEE Trans. Power Syst. 1994. V. 9. No. 2. P. 757–763.
97. *Farsangi M.M., Nezamabadi-pour H., Song Y.-H., Lee K.Yu.* Placement of SVCs and selection of stabilizing signals in power systems // IEEE Trans. Power Syst. 2007. V. 22. No. 3. P. 1061–1071.
98. *Sánchez-García R.J., Fennelly M., Norris S., Wright N., Niblo G., Brodzki J., Bialek J.W.* Hierarchical spectral clustering of power grids // IEEE Trans. Power Syst. 2014. V. 29. No. 5. P. 2229–2237.
99. *Wang C., Zhang B., Hao Z., Shu J., Li P., Bo Z.* A novel real-time searching method for power system splitting boundary // IEEE Trans. Power Syst. 2010. V. 25. No. 4. P. 1902–1909.
100. *Zhu Z., Geng G., Jiang Q.* Power system dynamic model reduction based on extended Krylov subspace method // IEEE Trans. Power Syst. 2016. V. 31. No. 6. P. 4483–4494.
101. *Dobrowolski J., Korba P., Segundo F.R., Sattinger W.* Centralized wide area damping controller for power system oscillation problems // HAL Id: hal01975194, <https://hal-iogs.archives-ouvertes.fr/hal-01975194> Submitted on 9 Jan 2019.
102. *Беллев А.Н., Ядыкин И.Б., Смоловик С.В., Спиридонов С.В., Григорьев А.А.* Робастный адаптивный регулятор для демпфирования межрайонных колебаний в электроэнергетической системе // Электричество. 2011. № 6. С. 2–10.
103. *Du W., Fu Q., Wang H., Wang Y.* Concept of modal repulsion for examining the subsynchronous oscillations caused by wind farms in power systems // IEEE Trans. Power Syst. 2019. V. 34. No. 1. P. 518–526.
104. *Yadykin I.B., Kataev D.E., Iskakov A.B., Shipilov V.K.* Characterization of power systems near their stability boundary using the sub-Gramian method // Control Eng. Practice. 2016. V. 53. P. 173–183.
105. *Ядыкин И.Б., Искаков А.Б.* Спектральные разложения решений уравнений Ляпунова для билинейных динамических систем // ДАН. 2019. Т. 488. № 6. С. 599–603.
Yadykin I.B., Iskakov A.B. Spectral Decompositions for the Solutions of Lyapunov Equations for Bilinear Dynamical Systems // Dokl. Math. 2019. V. 100. P. 501–504.
106. *Damm T.* Direct methods and ADI-preconditioned Krylov subspace methods for generalized Lyapunov equations // Numer. Linear Algebra Appl. 2008. V. 15. No. 9. P. 853–871.

107. *Ядыкин И.Б., Искаков А.Б.* Энергетический подход к анализу устойчивости линейных стационарных динамических систем // *АиТ.* 2016. № 12. С. 37–58.
Yadykin I.B., Iskakov A.B. Energy approach to stability analysis of the linear stationary dynamic systems // *Autom. Remote Control.* 2016. V. 77. No. 12. P. 2132–2149.
108. *Yadykin I.B., Grobovoy A.A., Iskakov A.B., Kataev D.E., Khmelik M.S.* Stability analysis of electric power systems using finite Gramians // *IFAC-PapersOnLine.* 2015. V. 48. No. 30. P. 548–553.
109. *Моржин Ю.Н., Ядыкин И.Б., Бахтадзе Н.Н.* Мультиагентная интеллектуальная иммунная система ИЭС ААС // *Автоматизация в промышленности.* 2012. № 4. С. 57–60.
110. *Yadykin I., Lototsky V., Bakhtadze N., Maximov Eu., Nikulina I.* Soft sensors of power systems stability based on predictive models of dynamic discrete bilinear systems // *IFAC-PapersOnLine.* 2018. V. 51. No. 11. P. 897–902.
111. *Zhang L., Lam J.* On H_2 model order reduction of bilinear systems // *Automatica.* 2002. V. 38. No. 2. P. 205–216.
112. *Vassilyev S.N., Yadykin I.B., Iskakov A.B., Kataev D.E., Grobovoy A.A., Kiryanova N.G.* Participation factors and sub-Gramians in the selective modal analysis of electric power systems // *IFAC-PapersOnLine.* 2017. V. 50. No. 1. P. 14806–14811.
113. *Iskakov A.B., Yadykin I.B.* Lyapunov modal analysis and participation factors with applications to small-signal stability of power systems, arXiv:1909.02227 [math.OC], 2019.
114. *Huang Po-Hsu, Vorobev P., Al Hosani M., Kirtley J.L., Turitsyn K.* Plug-and play compliant control for inverter-based microgrids // *IEEE Trans. Power Syst.* 2019. V. 34. No. 4. P. 2901–2913.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 02.08.2019

После доработки 28.02.2020

Принята к публикации 25.05.2020

Нелинейные системы

© 2020 г. Б.Р. АНДРИЕВСКИЙ, д-р техн. наук (boris.andrievsky@gmail.com)
(Институт проблем машиноведения РАН,
Санкт-Петербургский государственный университет,
Балтийский государственный технический университет,
Санкт-Петербург),
И.Б. ФУРТАТ, д-р техн. наук (cainenash@mail.ru)
(Институт проблем машиноведения РАН,
Университет ИТМО, Санкт-Петербург)

НАБЛЮДАТЕЛИ ВОЗМУЩЕНИЙ: МЕТОДЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ. ЧАСТЬ 2. ПРИЛОЖЕНИЯ¹

Статья является второй частью обзора, посвященного наблюдателям возмущений, появление которых в теории и практике автоматического управления восходит к середине 60-х гг. XX в. Первая часть обзора посвящена теоретическим результатам. Данная часть обзора посвящена практическому применению наблюдателей возмущений. Рассмотрены такие приложения, как управление судами и подводными аппаратами, управление летательными аппаратами и роботами-манипуляторами, подавление узкополосных вибрационных колебаний, оценивание и подавление возмущений в электротехнических системах, управление автомобилями и их узлами и ряд других приложений.

Ключевые слова: возмущения, оценивание, наблюдатель.

DOI: 10.31857/S0005231020100025

1. Введение

История появления наблюдателей возмущений в теории и практике управления восходит к середине 60-х гг. XX века и связана с расширением алгебраических методов синтеза регуляторов, появлением компьютерно-ориентированных процедур синтеза, усложнением круга решаемых задач и стремлением оптимизировать процесс управления. В первой части обзора, см. [1], внимание сосредоточено на общих теоретических подходах и результатах. В ней представлены методы оценки возмущений с использованием наблюдателей состояния, вспомогательных фильтров в форме передаточных функций, основанные на динамической инверсии модели объекта, наблюдатели входных и выходных возмущений, описывается метод внутренней модели и приведены результаты по наблюдателям гармонических возмущений. Данная часть обзора посвящена практическим применениям представленных результатов. При выборе статей для обзора учитывалась их цитируемость (в системе

¹ Результаты разделов 1–7 получены при финансовой поддержке гранта РФФИ (контракт № 18-38-20037). Результаты раздела 8 получены в ИПМаш РАН в рамках госзадания Минобрнауки РФ (Пер. № НИОКТР АААА-А19-119120290136-9).

Scopus) и наличие аппаратной реализации. Авторы понимают, не все публикации оказались в фокусе данного обзора и заранее приносят свои извинения коллегам, чьи работы в нем не рассмотрены.

Как отмечено в [2], метод управления, основанный на оценивании возмущений, в отличие от многих других современных методов, нашел широкое применение в промышленно выпускаемых устройствах. Большой интерес к этому методу как в академических, так и в промышленных кругах связан с его простотой как альтернативы классическим ПИД-регуляторам.

Обзор недавних экспериментальных исследований и промышленных разработок по активному подавлению возмущений, основанному на оценивании внешних и внутренних воздействий, представлен в [3], где приведены примеры успешного применения в системах управления движением; в реабилитационной робототехнике для помощи пациентам в физических тренировках; в системах электропитания с топливными элементами, использующих электрохимическую реакцию между кислородом и водородом; для управления двухмассовой системой с демпфером; для управления элементами производственных линий (электродвигателями, сервоприводами, температурой для экструзии шлангов, систем регенерации энергии). Некоторые результаты описаны далее в соответствующих разделах.

Применение наблюдателей возмущений к управлению судами и подводными аппаратами рассмотрено в разделе 2. Задачи управления летательными аппаратами рассмотрены в разделе 3. Применению наблюдателей возмущения к управлению роботами-манипуляторами посвящен раздел 4. Подавление узкополосных вибрационных колебаний рассмотрено в разделе 5. Раздел 6 посвящен применению наблюдателей возмущений к электротехническим системам. Управление автомобилями и их подсистемами рассматривается в разделе 7. Прочие применения, не вошедшие в приведенный список, рассмотрены в разделе 8. Заключительные замечания даны в разделе 9.

2. Применение к задачам управления судами и подводными аппаратами

Алгоритм адаптивного управления для подводных аппаратов с манипулятором, служащий для обеспечения программного движения по заданной траектории, представлен в [4]. Алгоритм основан на методе скоростного градиента А.Л. Фрадкова [5–9] и на использовании наблюдателя состояния/возмущения. Рассмотрено кусочно-постоянное изменение массы аппарата в процессе работы манипулятора. Адаптивный закон управления обеспечивает требуемое движение аппарата при неопределенности изменяющейся массы аппарата. Для улучшения качества процесса управления при синтезе регулятора в [4] учтена динамика двигателя. Чтобы использовать обратную динамику двигателя в законе управления, производится оценка состояния и входа двигателей. Для синтеза наблюдателя использованы результаты [10].

В [11] рассматривается задача перевалки грузов в открытом море по рампе от крупнотоннажного судна к меньшему промежуточному судну (типа *T-Craft*). Из-за сложности взаимодействия волн и судов эта задача представляет значительные проблемы для разработчиков кораблей и систем управ-

ления. Для уменьшения колебаний соединяющей суда рампы предлагается алгоритм адаптивного подавления колебаний от волнения, управляющий воздушным потоком. Когда корабли ориентированы бок о бок, возмущение *T-Craft* от волн в вертикальной плоскости оценивается и подавляется вентиляторами, управляющими давлением расположенной под судном воздушной подушки. Для конфигурации нос–корма предполагается двухкамерная воздушная подушка, с помощью которой волновое возмущение по тангажу оценивается и устраняется путем создания момента через перепад давления между камерами. При описании динамики судов на волнении используется модель из работы [12]. Для рассматриваемой задачи подавления колебаний от волнения через обратную связь используется моногармоническая модель волны, в которой ее частота, амплитуда и фаза отслеживаются алгоритмом идентификации. Следуя [13, 14], неизвестное гармоническое волнение представляется произведением неизвестного постоянного вектора на известный регрессор. В [11] рассматриваются случаи как известных, так и неизвестных параметров судна, для которых используются соответственно методы [13] или [14].

Задача перевалки грузов в открытом море по рампе от большого среднескоростного судна с накатом/спуском к меньшему соединительному судну рассмотрена и в [15]. Целью управления является уменьшение перемещения рампы между судами, чтобы обеспечить более безопасные условия для перевалки грузов. Как и в [11], здесь принята моногармоническая модель волнения. Разработан регулятор для воздушной подушки, который выполняет оценку и подавление действия волнового возмущения меньшего судна с помощью обратной связи по ускорению вертикальных колебаний для случая, когда гидродинамические и другие параметры судна априори не известны, а динамика давления воздушной подушки содержит нелинейно параметризованные неизвестные слагаемые. Для демонстрации приведены результаты моделирования программой AEGIR.

Нелинейное управление динамическим позиционированием судов при действии неизвестных нестационарных помех и насыщении управляющего воздействия развивается в [16]. Для решения задачи используются наблюдатель возмущения и вспомогательная динамическая система. Применяется метод динамического контроля поверхности (англ. – *dynamic surface control*, DSC) [17]. Наблюдатель служит для оценки неизвестных нестационарных возмущений, вспомогательная динамическая система используется для отработки влияния входного насыщения, а метод динамического контроля поверхности дает возможность разработать простой и легко реализуемый на практике закон динамического позиционирования. Доказано, что разработанный робастный нелинейный закон позиционирования может поддерживать желаемые значения положения и курса судна, гарантируя при этом ограниченность всех сигналов в замкнутой системе управления. Для описания динамики судна используется модель из [18]

$$(2.1) \quad \dot{\eta} = J(\psi)v$$

$$(2.2) \quad M\dot{v} = -Dv + \tau(t) + d(t),$$

где вектор $\eta = [x, y, \psi]^T$ образован координатами центра масс судна: x – продольным перемещением, y – боковым перемещением в земной системе координат, и $\psi \in [0, 2\pi]$ – курсовым углом судна; вектор $\nu = [u, v, r]^T$ состоит из продольной и боковой скоростей судна u, v в связанной системе координат и скорости изменения угла рыскания r ; $J(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ –

матрица перехода от связанной к земной системе координат; M – матрица инерции, учитывающая присоединенные массы; $\tau = [\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T$ – вектор управляющих сил и момента, компоненты которого имеют заданные ограничения; $d = [d_1, d_2, d_3]^T$ – вектор, образованный неизвестными внешними возмущающими силами в продольном и поперечном направлениях и моментом возмущения по рысканию. Для оценивания $d(t)$ предлагается наблюдатель возмущений

$$(2.3) \quad \hat{d}(t) = q(t) + K_0 M \nu,$$

$$(2.4) \quad \dot{q}(t) = -K_0 q(t) - K_0 (-D \nu + \tau + K_0 M \nu),$$

где $\hat{d}(t) \in \mathbb{R}^3$ – оценка $d(t)$, $q(t) \in \mathbb{R}^3$ – вектор состояния наблюдателя, $K_0 = K_0^T > 0$ – определяемая при синтезе квадратная матрица параметров, у которой наименьшее собственное число λ_{\min} должно превосходить $1/2$.

Близкая задача рассматривается в [19], где для динамического позиционирования судов при наличии изменяющихся во времени неизвестных внешних возмущений предложена робастная по отношению к ошибкам позиционирования адаптивная схема управления. Возмущения представляются как выходы линейной экзосистемы с неизвестными параметрами, у которой собственные значения матрицы системы лежат на мнимой оси. Такое представление позволяет построить наблюдатель для оценки неизмеряемого вектора состояния и, следовательно, привести задачу компенсации возмущений при позиционировании судов к задаче адаптивного управления. По результатам моделирования для судна *Northern Clipper* проведен сравнительный анализ с существующим методом позиционирования, показывающий большую эффективность и меньшую консервативность предложенной в [19] схемы управления.

3. Применение к задачам управления летательными аппаратами

Для задачи управления формацией из двух спутников (по схеме ведущий–ведомый) в [20] рассмотрены различные методы применения непрерывного управления на скользящих режимах, в том числе алгоритмы скользящих режимов второго порядка [21], например, – алгоритм супер-твистинга, непрерывное управление на скользящем режиме и с наблюдателем возмущений в скользящем режиме (*sliding mode disturbance observer*, SMDO) [22–25], алгоритмы с интегральной поверхностью скольжения (*integral sliding surface*, ISS) [26]. Широтно-импульсная модуляция (ШИМ) используется для преобразования непрерывных сигналов управления в последовательность импульсов, которые могут быть реализованы с помощью реактивных двигателей спутника. Рассматривается числовой пример, в котором положение ведомого

спутника относительно ведущего описывается в соответствующем масштабе времени уравнениями

$$(3.1) \quad \begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} - 3x = u_x + d_x, \\ \dot{y} + 2\dot{y} - 3x = u_y + d_y, \\ \ddot{z} + z = u_z + d_z, \end{cases}$$

где x, y, z – координаты ведомого спутника относительно ведущего, u_x, u_y, u_z – управляющие силы, действующие на ведомый спутник, d_x, d_y, d_z включают в себя различные возмущения, действующие на двухспутниковую систему, вызванные, например, нецентральностью поля тяготения, солнечным давлением, лунно-солнечными приливами, вращательно-колебательным движением Земли в пространстве, колебаниями земного полюса и неравномерностью вращения Земли, и погрешность линеаризации отклонения по положению. Желаемое взаимное положение спутников задается переменными x_c, y_c, z_c . Формируются соответствующие скользящие переменные, включающие интегральное слагаемое для компенсации постоянных возмущений, см. [23, с. 147–153]:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} e_x &= x_c - x, & e_y &= y_c - y, & e_z &= z_c - z, \\ \sigma_i &= \dot{e}_i + c_{i,0}e_i + c_{i,-1} \int e_i(\tau) d\tau \end{aligned}$$

с некоторыми параметрами желаемого движения в скользящем режиме $c_{i,0}, c_{i,-1}$, где $i \in \{x, y, z\}$. Для численного анализа приняты значения $c_{i,0} = 1,8, c_{i,-1} = 1,0$. Рассматриваются следующие алгоритмы управления формацией:

1. Регулятор со скользящим режимом и наблюдателем возмущений в скользящем режиме

$$(3.3) \quad \begin{aligned} u_i &= 10\sigma_i + \hat{v}_{i \text{ eq}}, & \dot{\hat{v}}_{i \text{ eq}} &= 20(-\hat{v}_{i \text{ eq}} + 2 \text{sign}(s_i)), \\ s_i &= \sigma_i + \int (u_i - 2 \text{sign}(s_i)) d\tau, & i &\in \{x, y, z\}. \end{aligned}$$

Здесь $\hat{v}_{i \text{ eq}}$ – “эквивалентное управление”, результат пропускания сигналов $v_i = (L_i + \rho_i)\sigma(s_i)$, где $\rho_i > 0$, через фильтры нижних частот². Как отмечено в [20], сигналы $\hat{v}_{i \text{ eq}}$ после переходного процесса за конечное время являются точной оценкой согласованных приведенных возмущений $\psi_i^0(\cdot)$ (линейных комбинаций выхода объекта и ошибки слежения e_i , см. детали в [20, 26]).

2. Супер-твистинг алгоритм скользящих режимов второго порядка, обеспечивающий сходимость переменных на поверхности скольжения и их производных к нулю за конечное время, имеет вид

$$(3.4) \quad u_i = 3|\sigma_i|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_i) + \int \text{sign}(\sigma_i) d\tau, \quad i \in \{x, y, z\};$$

² По мнению авторов обзора, $\hat{v}_{i \text{ eq}}$ не является в точности эквивалентным управлением, как оно определено в [22, 23], так как в отличие от указанных работ, в (3.3) фильтрация происходит внутри замкнутого контура управления, а не является внешней по отношению к нему.

3. Непрерывный алгоритм скользящих режимов с интегральной поверхностью скольжения. Этот алгоритм, основанный на методе Ляпунова и реализующий непрерывное управление в скользящем режиме, обеспечивает робастную стабилизацию σ_i по отношению к согласованным возмущениям. В алгоритме используются два вида скользящих переменных: σ_i и дополнительные интегральные скользящие переменные η_i [26]. В общем виде алгоритм записывается как

$$(3.5) \quad \eta_i = \sigma_i + \tilde{k}_{0i} s_i, \quad \dot{s}_i = \text{sign}(\sigma_i),$$

$$(3.6) \quad \tilde{u}_i = \psi_i^0(\cdot) + (\tilde{\rho}_i/2^{a_i}) |\eta_i|^{2a_i-1} \text{sign}(\eta_i),$$

где константы $\tilde{\rho}_i > 0$, $\tilde{k}_{0i} > 0$, $0,5 < a_i < 1,0$, $\tilde{u} = E(x)u$, где $E(x)$ – неособая матрица преобразования к новому базису, в котором исходная система приводится к m независимым подсистемам. После того как \tilde{u} найдено, управление u получается обратным преобразованием $u = E^{-1}(x)\tilde{u}$. Для рассматриваемой задачи управления системой (3.1) алгоритм (3.5), (3.6) принимает вид

$$(3.7) \quad u_i = \frac{\tilde{\rho}_i}{2^{a_i}} \cdot \left| \sigma_i + \tilde{k}_{0i} \int \text{sign}(\sigma_i) d\tau \right|^{2a_i-1} \text{sign} \left(\sigma_i + \tilde{k}_{0i} \int \text{sign}(\sigma_i) d\tau \right),$$

где $a_i = 0,9$, $\tilde{k}_{0i} = 0,5$, $\tilde{\rho}_i = 10$, $i \in \{x, y, z\}$. Сигналы управления u_i в (3.3)–(3.7) непрерывны, так как разрывные высокочастотные компоненты фильтруются или интегрируются. В [20] приводятся сравнительные результаты применения предложенных алгоритмов управления.

Авторы [27] рассматривают задачу управления автономными летательными аппаратами с вертикальным взлетом и посадкой (*Vertical Take-Off and Landing*, VTOL), применение которых вызвало в последнее десятилетие значительный интерес со стороны промышленности, научных кругов и государственных органов. В [27] используются результаты из [20, 26] по управлению со скользящим режимом и наблюдателем возмущений на скользящем режиме, а также представленная в [28] робастная система управления полетом малого квадрокоптера. Этот подход позволяет сформировать непрерывное управление, устойчивое к внешним возмущениям и неопределенности модели, не требующее большого коэффициента усиления или значительного объема вычислений. Робастность предложенного управления продемонстрирована интенсивным моделированием системы с шестью степенями свободы при действии возмущений, включающих порывы ветра, неисправность привода и неопределенность модели.

Для управления ракетой-носителем многоразового использования в [29] представлен подход к управлению на скользящем режиме, с наблюдателями возмущений на скользящем режиме и с адаптивным изменением коэффициента усиления. Кроме повышения качества управления при действии возмущений, по утверждению авторов [29], предлагаемая структура системы управления полетом может снизить затраты на цикл проектирования и предполетный анализ. В качестве примера в [29] представлены результаты моделирования системы управления ракетой-носителем многоразового использования X-33, проект которой был разработан корпорацией *Lockheed*

*Martin*³. Функция наведения *X-33* мало отличается от предложенной для возвращения космического челнока *Space Shuttle*, и система управления подобна системе управления шаттлом. Базовый регулятор имеет три канала: крен, тангаж и рыскание. В каждом из них команды наведения сглажены и приведены к виду, требуемому для формирования команды управления угловой скоростью. Затем для получения виртуальных команд отклонения рулей используется ПИ-закон управления. Полученные таким образом командные сигналы сочетаются с командами триммирования аэродинамических управляющих поверхностей, полученными путем табличной интерполяции, и с командой гашения скорости. Каждый канал имеет перекрестные связи с другими для координированных разворотов по крену. Коэффициенты усиления вычисляются как функции от числа Маха. Для ослабления эффектов упругости корпуса используются режекторные фильтры. Многоконтурная система управления включает в себя наблюдатели возмущения низкого порядка, при синтезе которых используется информация только о границах возмущений. Алгоритм оценивания возмущений включает в себя адаптивную настройку коэффициента усиления наблюдателя, обеспечивающий наименьшее значение усиления, необходимое для наличия скользящего режима. Разработанный алгоритм многоразовой системы управления полетом ракеты-носителя был программно реализован и численно исследован в среде моделирования *X-33 MAVERIC*.

Для продольного движения высокоманевренной ракеты в [30] предлагается улучшенный регулятор со скользящим режимом, основанный на нелинейном наблюдателе возмущений. Цель работы – получить управление, робастное к внешнему возмущению и неопределенности аэродинамических коэффициентов без использования большого коэффициента усиления и значительных вычислительных затрат. Для оптимизации параметров выбранной структуры регулятора используется *генетический алгоритм* [31]⁴. Динамика продольного движения ракеты описывается приведенной в [33] моделью⁵

$$(3.8) \quad \begin{cases} \dot{\alpha} = K_{\alpha} M (C_n(\alpha, M) + d_n \delta_n) \cos \alpha + q, \\ \dot{q} = K_q M^2 (C_m(\alpha, M) + d_m \delta), \\ \dot{\eta} = K_{\eta} M^2 (C_{\eta}(\alpha, M) + d_{\eta} \delta), \end{cases}$$

где α – угол атаки, q – угловая скорость тангажа, η – нормальная перегрузка (управляемая переменная), управляющее воздействие – отклонение хвостового оперения. Автопилот должен обеспечить отслеживание поступающего

³ *Lockheed Martin X-33* проектировался как непилотируемый суборбитальный космический самолет для демонстрации технологий, разработанных в 1990-х гг. в рамках финансируемой правительством США “Инициативы по запуску космического корабля”. *X-33* являлся технологическим демонстратором для орбитального космического самолета *VentureStar*, который планировалось создать как коммерческую многоразовую ракету-носитель следующего поколения.

⁴ Фактически, это разновидность известных алгоритмов случайного поиска с обучением [32].

⁵ Заметим, что используемая в [30, 33] и в других зарубежных публикациях система обозначений международного стандарта по динамике полета ISO 1151 [34] отличается от отечественного ГОСТ 20058-80 [35].

от алгоритма наведения задающего воздействия по перегрузке η_c , M – значение числа Маха, остальные символы обозначают параметры модели, величины K_α , K_α , K_α считаются постоянными. Привод рулей высоты моделируется уравнениями второго порядка. (Заметим, что по уравнениям системы этого не видно; привод представляется безынерционным.) Далее, для получения относительного порядка [25, 36] модели равного двум, и последующего выполнения линеаризации вход–выход, подъемная сила рулей считается несущественной и уравнение для перегрузки в (3.8) записывается в виде $\eta = K_\eta M^2 C_\eta(\alpha, M)$. При синтезе регулятора со скользящим режимом поверхность скольжения задается через переменную

$$(3.9) \quad s = \dot{e} + 2ce + c^2 \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad e = \eta - \eta_c,$$

где $c > 0$ – выбираемый при синтезе параметр, см. [25, § 4.3; 37]. Для снижения колебаний “дребезга” (*chattering*), релейная характеристика в законе управления заменяется насыщением (по мнению авторов обзора, такая замена снижает частоту колебаний, но приводит к увеличению их амплитуды). Авторами [30] отмечено, что робастность по отношению к вариациям параметров объекта и устойчивость системы обеспечиваются, однако это достигается за счет высокого коэффициента регулятора, а также снижения качества переходных процессов. Поэтому в [30] разрабатывается “улучшенный” регулятор со скользящими режимами с использованием нелинейного наблюдателя для оценки неизвестных возмущений. С этой целью модель объекта представляется в виде аффинной по управлению системы

$$(3.10) \quad \dot{x} = f(x) + g(x)u + h(x)d,$$

где

$$x = [\alpha, q]^T, \quad d = [d_\alpha, d_q]^T.$$

Для поиска наилучших значений параметров регулятора и наблюдателя при синтезе алгоритма управления используется генетический алгоритм. Изложение иллюстрируется примером моделирования с 25 % отклонением параметров от номинальных, из которого следует, что вид процесса управления с наблюдателем возмущений лучше, чем у традиционной системы со скользящим режимом. Использование в законах управления (как в исходном, так и в модифицированном) второй производной от задающего воздействия по перегрузке $\ddot{\eta}_c$ может привести к сложности в реализации, если, как принято в задачах слежения, задающее воздействие заранее не известно.

Публикация [38] посвящена задаче робастного управления продольным движением гиперзвуковых транспортных средств с воздушно-реактивным двигателем (*airbreathing hypersonic vehicle*, AHV) при несогласованных возмущениях с помощью метода управления на основе нелинейного наблюдателя возмущений (*nonlinear-disturbance-observer-based control*, NDOBC). По мнению авторов [38], в сравнении с другими робастными методами управления полетом предлагаемому методу свойственны не только многообещающие

характеристики устойчивости и подавления возмущений, но и свойство восстановления номинальных характеристик. Для теоретического анализа используется достаточно общая нелинейная модель аффинного по управлению объекта

$$(3.11) \quad \dot{x} = f(x) + g(x)u + p(x)w, \quad y = h(x),$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $w(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ – векторы состояния, управления, возмущений и выхода соответственно $f(x)$, $g(x)$, $p(x)$, $h(x)$ – гладкие векторные и матричные поля в \mathbb{R}^n .

В [38] используется стандартная модель движения центра масс ЛА в продольной плоскости, см., например [39], с линейной моделью второго порядка двигателя и безынерционной моделью привода руля высоты. Аэродинамические коэффициенты взяты из [37]. Неизвестные возмущения входят аддитивно в каждое из уравнений системы, а параметрическая неопределенность вводится в аэродинамические коэффициенты в процентах от номинального значения (до 25 % по каждому коэффициенту). Полная нелинейная модель седьмого порядка разбивается на две подсистемы вида (3.11), описывающие изменение скорости (третьего порядка) и динамику углового движения ЛА (порядка 4). Отмечается, что возмущения для данной модели несогласованные [40], что приводит к необходимости разработки специальных подходов. Дальнейшее изложение строится на предположении о том, что приведенные к аддитивной форме возмущения дважды дифференцируемы. Используя результаты [41–43], в работе [38] строится нелинейный наблюдатель с конечным временем переходного процесса для оценивания состояния системы и возмущений. Далее полученные оценки используются в законе слежения за задающими воздействиями y_{r1} , y_{r2} по скорости и угловому положению, компенсирующем несогласованные возмущения $w(t)$. Результаты иллюстрируются моделированием.

Подход к адаптивному управлению по выходу классом нелинейных систем с векторными входами и выходами (*Multiple-Input, Multiple-Output*, МИМО) описан и проиллюстрирован на примере квадрокоптера в [44]. Предлагаемый подход основан на принципе высокого коэффициента усиления (англ. – *high-gain principle*) и использует так называемый “метод последовательного компенсатора” [25, 45, 46]. Регулятор строится на основе декомпозиции математической модели объекта управления (ОУ). В применении к квадрокоптеру это соответствует рассмотрению уравнений динамики МИМО системы с шестью степенями свободы для координат центра масс и углов Эйлера и векторным тяговым усилием четырех управляемых пропеллеров⁶. Далее в эти уравнения вводятся так называемые “виртуальные управления”, связанные с управляющими силами через тригонометрические функции от углов Эйлера. Принято, что внешние ветровые возмущения изменяются медленно и поэтому могут рассматриваться (и компенсироваться) как неопределенные параметры. В результате преобразования МИМО система разбивается на шесть независимых подсистем со скалярными входами и выходами (англ. – *Single-Input*,

⁶ В [44] использованы стандартные уравнения динамики квадрокоптера с невысказанными при описании углового движения предположениями о малости углов крена, тангажа, а также угловых скоростей относительно осей связанной системы координат.

Single-Output, SISO), для которых формируются виртуальные управления, которые затем обратным преобразованием пересчитываются в управляющие силы.

Авторы [47] используют наблюдатель возмущений для снижения влияния нагрузок от порывов ветра для упругого высотного самолета большой выносливости (*high-altitude long-endurance aircraft*, HALE aircraft). Используется нелинейная модель динамики аппарата с исходным линейным законом управления, разработанным методом обращения нелинейной динамики. Локальные фильтры оценки возмущений (*disturbance estimating filters*, DEF) предназначены для оценки и смягчения воздействия возмущений с использованием пар датчиков – исполнительных устройств самолета (например, датчик скорости рыскания – руль направления). Отдельные фильтры являются наблюдателями возмущений с одним входом и одним выходом для снижения нагрузки от порывов ветра (*disturbance observers for gust-load alleviation*, DOGLA), и объединяются затем в развязанную многосвязную систему (*decoupled multi-input multi-output*, D-MIMO) DOGLA. D-MIMO DOGLA содержит SISO DOGLA, предназначенные для устранения влияния порывов ветра на скорости углов крена, тангажа и рыскания самолета, а также на упругие колебания крыльев. Результаты моделирования системы с нелинейной упругой моделью самолета *HALE* демонстрируют, что D-MIMO DOGLA успешно снижает влияние на самолет порывов ветра для различных режимов полета. Структура основного контура управления с фильтрами оценки возмущений DEF аналогична описанной в [48, 49]; в качестве $Q(s)$ используется фильтр нижних частот (аперриодическое звено первого порядка) с частотой среза 1000 рад/с, на вход которого поступает сумма сигнала управления и сигнала измерений, пропущенного через инверсную передаточную функцию (ПФ) объекта управления, см. описание в [1, раздел 3]. Как и в [48], фильтр, оценивающий возмущения, содержит нулевой полюс для точной компенсации постоянных возмущений (другими словами – для обеспечения астатизма первого порядка по возмущениям, [50]). Заметим, что столь широкая полоса пропускания фильтра, выходящая за область частот, в которой принята модель может считаться адекватной, вызывает сомнение в практической значимости рассмотренного примера.

Авторами [51] выполнен синтез адаптивного регулятора положением и высотой беспилотного летательного аппарата (БПЛА) типа “квадротор”, который подвергается воздействию ветра. При синтезе регулятора предполагается, что общая масса, тензор инерции, длина плеч квадротора и коэффициенты тяги и сопротивления гребных винтов, прикрепленных к квадротору, неизвестны. Как обычно, ветровые возмущения представляются суммой n синусоидальных функций $v_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, с неизвестными частотами, амплитудами и фазами. Составляющие возмущения представляются выходами линейных экзосистем вида

$$(3.12) \quad \dot{z}(t) = Sz(t), \quad d(t) = v^T z(t), \quad z(0) = z_0,$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^{2n+1}$, матрица S зависит от неизвестных частот ветровых возмущений $d(t)$, а их амплитуды и фазы определяются через неизвестные начальные условия z_0 . Согласно [13] ветровые возмущения параметризуются

следующим образом:

$$(3.13) \quad \dot{\chi}(t) = G\chi(t) + Lv(t),$$

$$(3.14) \quad v(t) = \beta^T \chi(t),$$

где G – гурвицева матрица порядка $(2n - 1)$, матрица L образует с G управляемую пару, а новые переменные χ связаны с z невырожденным преобразованием $\chi = Mz$, где матрицы M порядка $(2n - 1)$ удовлетворяют уравнению Сильвестра $MS - GM = Lh^T$, а $\beta^T = h^T M^{-1} \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Таким образом, как следует из (3.14), неизвестные возмущения $v_i(t)$ получаются произведением неизвестного постоянного вектора β^T и неизвестной вектор-функции $\chi(t)$, для оценки которых в [51] используется наблюдатель, встроенный в закон управления.

4. Применение к задачам управления роботами-манипуляторами

В [52, 53] излагается и экспериментально демонстрируется в применении к манипуляционным роботам метод синтеза сервоприводов, основанный на использовании так называемых *регуляторов с двумя степенями свободы* (*two degrees of freedom*, TDOF). Особенностью таких систем является возможность независимо задавать реакцию на задающее воздействие и характеристики замкнутого контура с помощью двух параметров (двух передаточных функций), принадлежащих к кольцу устойчивых и правильных⁷ рациональных функций. Такой регулятор представляет собой классическую структуру с последовательным корректирующим звеном в цепи главной обратной связи с ПФ $W_1(s)$ и местной обратной связью по выходу объекта с ПФ $W_2(s)$, см. [1, раздел 5; 50, 54]. Сигнал управления u на выходе регулятора формируется в виде

$$(4.1) \quad u = W_1(s)e - W_2(s)v,$$

где $v = y + \zeta$ – сигнал измерений выхода ОУ; $y(t)$ – выход ОУ, подлежащий управлению; $\zeta(t)$ – шум (погрешность) измерения; $e(t) = r(t) - v(t)$ – сигнал рассогласования; $r(t)$ – задающее (командное) воздействие. Если исходить из структуры с оценкой возмущений инверсией ПФ объекта и их последующей компенсацией (см., например, [49, 55, 56], а также [1, раздел 3]), то эквивалентные ПФ в (4.1) получаются в виде

$$(4.2) \quad W_1(s) = \frac{\Phi_r^y(s)}{1 - \Phi_r^y(s)} \frac{1}{P_n(s)(1 - Q(s))},$$

$$W_2(s) = \frac{Q(s)}{P_n(s)(1 - Q(s))},$$

где $\Phi_r^y(s)$ – желаемая ПФ замкнутой системы по задающему воздействию, $Q(s)$ – подлежащая нахождению при синтезе ПФ корректирующего звена

⁷ Proper – “правильная”, что часто неточно переводится как “собственная”.

(фильтра)⁸. Таким образом, синтез регулятора (4.1), согласно [52, 53], состоит в выборе желаемой ПФ $\Phi_r^y(s)$ и определению, исходя из требований устойчивости замкнутой системы, строго-правильной устойчивой ПФ $Q(s)$. В [52, 53] приведены условия разрешимости задачи и процедура синтеза.

В [53] данный метод применен и экспериментально исследован для управления двигателем постоянного тока в электроприводе и пространственными траекториями движения робота-манипулятора с шестью сочленениями.

В [57] управление со скользящим режимом рассмотрено в применении к нелинейным системам управления общего вида. Отмечено, что обычный метод скользящих режимов требует знания верхних границ возмущений и неопределенностей модели системы для обеспечения устойчивости, что не всегда доступно. Предлагается использовать процесс оценки для этих динамических возмущений совместно с использованием скользящих режимов – “управление со скользящим режимом с оценкой возмущения” (*sliding mode control with perturbation estimation*, SMCPPE). Авторы [57] утверждают, что в статье предлагается метод робастного управления с обратной связью, обладающий, при медленно меняющихся возмущениях, гораздо более низкими коэффициентами усиления по сравнению с обычными системами в скользящем режиме. В качестве примера в [57] на результатах моделирования продемонстрировано применение предложенного метода управления для двухзвенного плоского манипулятора.

В [58] предлагается метод оценки силы для управления силовым воздействием при отсутствии датчика силы. С этой целью для каждого сустава манипулятора, имеющего n степеней свободы, вводится наблюдатель возмущения. Это дает возможность использовать простую эквивалентную модель динамики робота (*simple equivalent robot dynamics*, SERD) в виде системы независимых двойных интегралов.

В качестве исходной модели робота-манипулятора в [58] используются стандартные уравнения динамики

$$(4.3) \quad M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}) + q(q) + f(\dot{q}) = \tau,$$

где $M(q)$ – матрица инерции порядка n , $c(q, \dot{q})$, $q(q)$, $f(\dot{q})$ – соответственно n -мерные векторы кориолисовых и центробежных сил, сил тяжести и трения; $\tau = [\tau_1 \dots \tau_n]^T \in \mathbb{R}^n$ – вектор крутящих моментов, приложенных к суставам робота-манипулятора; q , \dot{q} , \ddot{q} – n -мерные векторы угловых положений, скоростей и ускорений соответственно. Уравнения динамики (4.3) записываются в виде

$$(4.4) \quad \bar{M}(q)\ddot{q} + \tau_d(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \tau,$$

где $\bar{M} \equiv \text{diag} \{ \bar{M}_{11} \dots \bar{M}_{nn} \}$ – диагональная матрица порядка n , у которой \bar{M}_{ii} – постоянные номинальные инерционные члены относительно i -й оси, которые могут быть приблизительно оценены в результате активного эксперимента (например, по частотным характеристикам) с фиксацией всех

⁸ ПФ $W_1(s)$ вида (4.2) отличается от приведенной в [1, раздел 3, уравнение (3.2)] наличием в ней множителя $\Phi_r^y(s)/(1 - \Phi_r^y(s))$, который в [1] представлен последовательной ПФ регулятора $R(s)$.

приводов за исключением i -го и в работе предполагаются известными; $\tau_d(q, \dot{q}, \ddot{q}) \equiv [\tau_{1d} \dots \tau_{1d}]^T \in \mathbb{R}^n$ – вектор “эквивалентных возмущений”, определенный через (4.3), (4.4) в виде

$$(4.5) \quad \tau_d(q, \dot{q}, \ddot{q}) = (M(q) - \bar{M}(q)) \ddot{q} + c(q, \dot{q}) + q(q) + f(\dot{q}).$$

Если $\tau_d(q, \dot{q}, \ddot{q})$ получено, то движения по каждой оси можно развязать (рассматривать независимо), устраняя эквивалентное возмущение. Это возмущение можно получить с помощью наблюдателя возмущений, см. [52, 59]. Полученная оценка эквивалентных возмущений по стандартной схеме (см. [1, рис. 1]) подается аддитивно к сигналу управления. Применение этого приема к каждому суставу манипулятора дает возможность рассматривать робот как простую эквивалентную динамическую систему вида

$$(4.6) \quad \bar{M} \ddot{q} = \tau.$$

Для оценки выхода наблюдателя возмущений, вызванных внутренним крутящим моментом, разработан оценщик выхода наблюдателя возмущений (*disturbance observer output estimator*, DOOE), в котором неопределенные параметры робота-манипулятора настраиваются градиентным методом, минимизирующим значение заданного показателя качества в виде квадратичной формы от ошибки между выходом наблюдателя возмущения и DOOE.

В отсутствие внешней силы выход наблюдателя возмущений можно записать в виде

$$(4.7) \quad \tau_d = W(q, \dot{q}, \ddot{q})\varphi + \nu,$$

где $\varphi \in \mathbb{R}^r$ – вектор неизвестных параметров, $W(q, \dot{q}, \ddot{q})$ и ν – соответственно матрица размера $n \times r$ и n -мерный вектор, зависящие от параметров суставов робота [60]. Внешняя сила, если присутствует, оценивается по разности между выходом наблюдателя возмущения и наблюдателя DOOE, так как выход наблюдателя возмущения включает в себя величину внешнего вращающего момента, а также и внутреннего вращающего момента, который оценивается по выходу DOOE.

Выход DOOE может быть представлен как

$$(4.8) \quad \hat{\tau}_d = \left(\hat{M}(q(q)) - \bar{M} \right) \ddot{q} + \hat{c}(q, \dot{q}) + \hat{g}(q) + \hat{f}(q) = W(q, \dot{q}, \ddot{q})\hat{\varphi} + \nu,$$

где $\hat{\varphi}$ – оценка вектора неизвестных параметров. Для их настройки используется сигнал ошибки $\tilde{\tau}_d = \tau_d - \hat{\tau}_d$ между выходами наблюдателя возмущений и наблюдателя DOOE, который используется в локальном целевом функционале $J = 1/2 \|\tilde{\tau}_d\|^2$. Процедура метода скоростного градиента, описанная в [5–8, 25], для такого функционала приводит к алгоритму идентификации

$$(4.9) \quad \dot{\hat{\varphi}} = -\Gamma W(q, \dot{q}, \ddot{q})^T \tilde{\tau}_d$$

с некоторой положительно определенной матрицей коэффициентов усиления $\Gamma = \Gamma^T > 0$ порядка r (в [58] считается, что матрица Γ диагональная; как

следует из метода скоростного градиента [5–8, 25], это требование можно не учитывать).

При контакте манипулятора с окружением выход наблюдателя возмущений включает вектор $\tau_e \in \mathbb{R}^n$ момента внешних воздействий:

$$(4.10) \quad \hat{\tau}_d = \left(\hat{M}(q(q)) - \bar{M} \right) \ddot{q} + \hat{c}(q, \dot{q}) + \hat{g}(q) + \hat{f}(q) + \tau_e.$$

Оценка $\hat{\tau}_e$ внешнего момента получается как разность $\hat{\tau}_e = \tau_d - \hat{\tau}_d$, на основе чего с использованием матрицы Якоби $J(q)$ строится оценка \hat{f}_e внешней силы f_e :

$$(4.11) \quad \hat{f}_e = (J(q)^T)^{-1} \hat{\tau}_e.$$

Эта оценка используется в гибридном регуляторе обратной связи с управлением положением и усилием.

Для демонстрации эффективности предложенного метода в [58] приведены примеры моделирования и результаты экспериментальных исследований на двухступенном роботе-манипуляторе с прямым приводом SCARA.

Модификация наблюдателей возмущений для управления манипуляторами с n степенями свободы рассматривается в [61], где предложен так называемый “наблюдатель возмущения с обратной связью по моменту” (*momentum feedback disturbance observer*, MFDOB). В [61] используется модель последовательного (*serial*) манипулятора, действующего в m -мерном пространстве декартовых координат,

$$(4.12) \quad \tau = H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + \tau_d,$$

где $\tau \in \mathcal{T} \subset \mathbb{R}^m$ – обобщенный вектор моментов в сочленениях, $H(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $H(q) = H(q)^T > 0$ – матрица инерции, слагаемое $C(q, \dot{q})\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ соответствует кориолисовым и центробежным моментам, $g(q) \in \mathbb{R}^n$ – вектор гравитационных моментов, τ_d – обобщенный возмущающий момент, который, кроме собственно возмущений, и моментов сил трения в сочленениях, учитывает и отклонения параметров манипулятора от принятых в расчетной модели (4.12) “номинальных” значений. Этот момент подлежит оцениванию и компенсации. Основываясь на [62] (см. также [1, раздел 2]), вводится модель возмущений

$$(4.13) \quad \dot{w} = Aw, \quad \tau_d = Fw,$$

где $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times d}$ – матрицы, выбираемые при синтезе. Определим новую переменную $p = H(q)\dot{q}$ и вектора состояния расширенной системы $z = \text{col}\{p, w\}$ уравнения (4.12), (4.13) приводятся к виду

$$(4.14) \quad \begin{cases} \dot{z}_1 = -Fz_2 + \tau^*, & p = z_1, \\ \dot{z}_2 = Az_2, \end{cases}$$

где $\tau^* = \tau + C^T(q, \dot{q}) - g(q)$. В [61] принято, что переменные q, \dot{q} измеряются, поэтому сигнал p может быть вычислен и принимается за измеряемый выход

системы (4.14), для которой стандартным образом получается наблюдатель состояния пониженного порядка для оценки возмущения τ_d

$$(4.15) \quad \dot{\nu} = (A - LF)\nu - (A - LF)Lp + L\tau^*, \quad \hat{\tau}_d = F(\nu + Lp),$$

где $\nu \in \mathbb{R}^d$ – вектор состояния, а $L \in \mathbb{R}^{d \times n}$ – матрица коэффициентов усиления наблюдателя.

Работоспособность предлагаемого закона управления экспериментально продемонстрирована в [61] на трехзвенном планарном манипуляторе с прямым приводом. Каждый двигатель манипулятора приводится в действие усилителем, который использует внутреннюю обратную связь по току. Взаимное положение измеряется кодером высокого разрешения, скорость вычисляется путем численного дифференцирования с фильтрацией. В качестве управляющего компьютера использован Pentium MMX-200 MHz PC, частота квантования составила 1 кГц. Эксперименты показали определенное превосходство в качестве процессов управления по сравнению с системой, в которой наблюдатель возмущений не используется.

В [63] предлагается наблюдатель нелинейных возмущений для роботизированных манипуляторов. Гарантируется глобальная экспоненциальная устойчивость наблюдателя возмущения за счет выбора параметров, зависящих от максимальной скорости перемещения и физических характеристик манипулятора. Предлагается применение наблюдателя для различных целей, таких как компенсация трения, независимое управление суставами, контроль вращающего момента в отсутствие датчиков и диагностика неисправностей. Приведена иллюстрация оценки трения и его компенсации в двухзвенном роботизированном манипуляторе.

Для простоты изложения в [63] рассматривается стандартная модель двухзвенного манипулятора

$$(4.16) \quad J(\theta)\ddot{\theta}(t) + G(\theta, \dot{\theta}) = T(t) + d,$$

где $\theta(t) \in \mathbb{R}^2$, $\dot{\theta}(t) \in \mathbb{R}^2$ и $T(t) \in \mathbb{R}^2$ – перемещение, скорость и вектор управления соответственно, $d(t) \in \mathbb{R}^2$ – вектор возмущающих сил или моментов. Ставится задача синтеза наблюдателя, вырабатывающего оценку $\hat{d}(t)$ возмущения $d(t)$, асимптотически стремящуюся к $d(t)$ при всех $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ и $t \in [t_0, \infty)$. Относительно физического смысла переменных в правой части (4.16), в [63] отмечено, что: “Когда в модели рассматривается только динамика звеньев [манипулятора], то управляющим входом T является или момент, или сила, а $d \in \mathbb{R}^2$ есть векторный возмущающий момент или сила... Когда уравнения динамики первого порядка двигателя постоянного тока включены в указанную модель, T является векторным напряжением, приложенным к двигателям, а не вектором моментов. В результате момент возмущений также эквивалентен возмущению напряжений, приложенных к двигателям. Соответственно в этом случае d есть возмущающее напряжение.” Таким образом, физическая природа возмущения d может быть различной, кроме того, это возмущение может считаться следствием влияния “немоделлируемой динамики” (англ. – *unmodeled dynamics*) – невозможности описания поведения ре-

альной системы на основе принятой математической модели с достаточной точностью.

В качестве исходного в [63] предлагается наблюдатель возмущения вида

$$(4.17) \quad \dot{\hat{d}} = -L(\theta, \dot{\theta})\hat{d} + L(\theta, \dot{\theta})(J(\theta)\ddot{\theta} + G(\theta, \dot{\theta}) - T)$$

с некоторой выбираемой при синтезе матрицей $L(\theta, \dot{\theta})$. Далее в [63] указано: “Поскольку нет априорной информации о производной от возмущения d , естественно предположить, что $\dot{d} = 0$.” (С точки зрения авторов обзора, естественность этого предположения сомнительна.) На основе этого в [63] показан очевидный факт, что если взять $L(\theta, \dot{\theta}) = \text{diag} \{c, c\}$, где $c > 0$, то ошибка оценивания $e(t) = \hat{d}(t) - d \in \mathbb{R}^2$ асимптотически затухает. Действительно, при указанных условиях каждая компонента ошибки оценивания $e(t) \in \mathbb{R}^2$ описывается импульсной характеристикой аperiodического звена первого порядка [50]. Далее, в [63] отмечено, что поскольку ускорение $\ddot{\theta}(t)$ в большинстве манипуляционных роботов не измеряется, то практическая реализация наблюдателя (4.17) затруднена, но он используется в работе в качестве исходного для построения нелинейного наблюдателя. С этой целью вводится вспомогательная вектор-функция

$$(4.18) \quad z = \hat{d} - p(\theta, \dot{\theta}),$$

где $p(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2$ подлежит определению при синтезе. Далее принято, что функция $L(\theta, \dot{\theta})$ в (4.17) удовлетворяет нелинейному уравнению

$$(4.19) \quad L(\theta, \dot{\theta})J(\theta)\ddot{\theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p(\theta, \dot{\theta})}{\partial \theta} & \frac{\partial p(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix},$$

откуда с учетом (4.18) следует, что

$$(4.20) \quad \dot{z} = -L(\theta, \dot{\theta})(z + p(\theta, \dot{\theta})) + L(\theta, \dot{\theta})(G(\theta, \dot{\theta}) - T).$$

В итоге, нелинейный наблюдатель возмущений описывается уравнениями (4.19), (4.20) и

$$(4.21) \quad \hat{d} = z + p(\theta, \dot{\theta}).$$

Для затухания ошибки оценивания $e(t)$ требуется выбором $L(\theta, \dot{\theta})$ обеспечить устойчивость уравнения $\dot{e}(t) = -L(\theta, \dot{\theta})e(t)$, что в свою очередь налагает требования к выбору $p(\theta, \dot{\theta})$. Эта, в общем случае сложная, задача может быть решена с учетом специфики уравнений двухзвенных манипуляторов. В [63] доказано, что функция $p(\theta, \dot{\theta})$ вида

$$(4.22) \quad p(\theta, \dot{\theta}) = c \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

при $c > X\dot{\theta}_{2m}$ обеспечивает глобальную асимптотическую устойчивость наблюдателя (4.19)–(4.21). Здесь $\dot{\theta}_{2m}$ – максимальная скорость движения второго звена, X – параметр инерции манипулятора. При таком выборе имеет место равенство

$$(4.23) \quad L(\theta, \dot{\theta}) = c \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} J(\theta)^{-1}.$$

Работа [63] иллюстрируется разнообразными результатами моделирования и экспериментальных исследований, показывающих применимость предложенного подхода.

В [64] представлен алгоритм адаптивного управления с итеративным обучением, основанный на процедуре оценивания возмущений с использованием фильтра Калмана и оптимизации квадратичного критерия. Управление с итеративным обучением (УИО, англ. – *Iterative Learning Control*, ILC) является хорошо разработанным методом управления повторяющимися процессами [65–67]. Отмечено, что цель управления с итеративным обучением состоит в том, чтобы итеративно найти входной сигнал системы, минимизирующий некоторую целевую функцию. В формулировке подавления возмущения $d(t)$ требуется минимизировать модуль вызванной им ошибки. Если система известна и обратима, а возмущение приложено аддитивно к выходу объекта и тоже известно, то очевидным подходом будет фильтрация $d(t)$ через инверсную систему и использование результирующего сигнала в качестве управления $u(t)$. Для описания системы в [64] используется номер итерации $k = 0, 1, \dots$, который обозначается нижним индексом у переменных, а аргументом в круглых скобках указывается (целочисленное) дискретное время $t \in [0, \dots, n]$. Вводится модель ОУ в матричной форме

$$(4.24) \quad z_k = G^0 u_k + d_k, \quad y_k = z_k + n_k,$$

$$(4.25) \quad d_{k+1} = d_k + \Delta_{d_k},$$

где $z_k, u_k, d_k, y_k, n_k, \Delta_{d_k} \in \mathbb{R}^n$, $G^0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Вектор состояния ОУ (с учетом возмущения d_k) определен как $z_k = [z_k(0) \ \dots \ z_k(n-1)]$. Принято, что возмущение d_k и “шум измерений” n_k – случайные процессы с ковариационными матрицами для Δ_{d_k} и n_k , равными $R_{\Delta_{d,k}}$ и $R_{n,k}$ соответственно. Учитывая (4.25) и представив модель ОУ с матрицей системы $G^0 = G(I + \Delta_G)$, где Δ_G – матрица относительной ошибки модели, (4.24) можно записать в виде

$$(4.26) \quad z_{k+1} = z_k + G(u_{k+1} - u_k) + G\Delta_G(u_{k+1} - u_k) + \Delta_{d_k}, \quad y_k = z_k + n_k.$$

Последние два слагаемых в первом уравнении (4.26) можно рассматривать как возмущения, так как они оба неизвестны. Однако видно, что первое слагаемое зависит от разницы между двумя последовательными управляющими сигналами. Если неопределенность модели мала или процесс обновления управляющего сигнала медленный, то это слагаемое будет иметь небольшое влияние на поведение системы.

Для системы (4.26), в предположении отсутствия корреляции между Δ_{d_k} и n_k , стандартным образом строится фильтр Калмана [68]. Далее решается

оптимизационная задача для УИО системы (4.24) с использованием квадратичного критерия $J_k = z_k^T W_z z_k + u_k^T W_u u_k$. После некоторых преобразований и упрощающих предположений в [64] выведен алгоритм управления

$$u_{k+1} = \left(I - (I + W_u^{-1} G^T W_z G)^{-1} K_k \right) u_k - W_u^{-1} G^T W_z (I + G W_u^{-1} G^T W_z)^{-1} K_k y_k.$$

Далее в [64] дается адаптивное расширение алгоритма калмановской фильтрации, при котором значение K_k зависит от меры изменчивости возмущения, полученной через матрицу P_k . Показано, что с учетом возмущений в измерениях результирующие фильтры итеративного управления обучением изменяются в процессе итераций.

В [64] приводятся результаты экспериментов, выполненных на промышленном роботе IRB1400. Робот имеет в шесть степеней свободы, но для трех суставов итеративное обучение не применялось. Каждый из суставов моделируется как оператор передачи от управляющего входа УИО к измеряемому положению двигателя робота, то есть в виде G_0 в (4.24). Отмечено, что G_0 фактически является замкнутой системой благодаря регулятору в обратной связи, который работает параллельно с УИО. Благодаря этому замкнутая система между задающим воздействием и измеренным угловым положением может быть описана с использованием дискретной линейной модели невысокого порядка (в [64] использована модель первого порядка). Точность повторения одной и той же задачи для IRB1400 очень высока, поэтому считается, что исходная ошибка одинакова на каждой итерации. Выполненные эксперименты продемонстрировали успешное применение предложенного алгоритма.

Блочная процедура синтеза обратной связи для управления положением конечной точки манипулятора с электроприводом представлена в [69, 70]. Использована модель жесткого манипулятора

$$(4.27) \quad \ddot{q} = H^{-1}(q)(v - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) + \eta(t)),$$

$$(4.28) \quad \dot{v} = -Av - D\dot{q} + Bu,$$

где $q \in Q \subset \mathbb{R}^N$ – вектор обобщенных координат манипулятора; $H(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица инерции ($\det H \neq 0$ для всех $q \in Q$); $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица центробежных и кориолисовых сил; $G(q) \in \mathbb{R}^n$ – вектор гравитационных сил; $\eta(t) = \text{col} \{ \eta_1(t), \dots, \eta_t(t) \}$ – вектор неизвестных возмущений, которые считаются ограниченными кусочно-гладкими функциями от времени с ограниченными производными; $v \in \mathbb{R}^n$ – вектор моментов, развиваемых исполнительными механизмами. Подсистема (4.28) описывает динамику исполнительных электроприводов постоянного тока, где A, D, B – диагональные матрицы с известными положительными постоянными элементами; $u \in \mathbb{R}^n$ – управляющие напряжения, приложенные к якорным обмоткам двигателей. Измеряются обобщенные координаты $q(t)$ и якорные токи двигателей, преобразованные в моменты $v(t)$. Рассматривается задача синтеза разрывного управления u , обеспечивающего отслеживание задающего воздействия $g(t) \in \mathbb{R}^n$ выходными координатами $y = h(q) \in \mathbb{R}^n$ с заданной точностью с

учетом заданных ограничений на обобщенные моменты $v(t)$ и скорости их изменения. Диффеоморфной заменой локальных переменных выполняется переход к синтезу управления непосредственно относительно переменной $y(t)$ и ее производных. При синтезе используется изложенный в [71, 72] каскадный метод. При формировании управления используются *сигмоидные* функции $\sigma(x) = 2/(1 + e^{-kx}) - 1$, которые при достаточно большом k приближаются к разрывной функции $\text{sign}(x)$. Функции такого вида используются в [69, 70] и в наблюдателе пониженного порядка, служащего для оценки используемых для управления неизмеряемых переменных.

В [73] представлен подход к слежению рабочим органом робота-манипулятора за задающим воздействием. Используется общая модель динамики механической системы

$$(4.29) \quad \ddot{q} = \hat{f}(q, \dot{q}, t) + \hat{B}u(t) + \Delta f(q, \dot{q}, t) + \Delta Bu(t) + d(t),$$

где $q = [q_1, \dots, q_n]^T \in \mathbb{R}^n$ – вектор обобщенных координат; $d(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор ограниченных внешних возмущений; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор управлений; $\hat{f}(q, \dot{q}, t)$, $\Delta f(q, \dot{q}, t)$ – известная и неизвестная вектор-функции, описывающие собственную динамику системы; $\hat{B}(q, t)$, $\Delta B(q, t)$ – известная и неизвестная матричные функции размера $n \times m$, причем считается, что матрица $B(q, t) = \hat{B}(q, t) + \Delta B(q, t)$, соответствующая “точной” динамике системы, – обратимая и ограниченная положительно определенная во всем пространстве состояний нелинейная функция. Аналогичное предположение делается и относительно $\hat{B}(q, t)$. Условия согласованности предполагаются выполненными, поэтому все неопределенные элементы объединяются выражением $\tilde{F} = \Delta f + \Delta Bu(t) + d(t)$ и (4.29) представляется в виде

$$(4.30) \quad \ddot{q} = \hat{f} + \hat{B}u(t) + \tilde{F}.$$

В итоге, модель обратной динамики системы имеет вид

$$(4.31) \quad u(t) = \hat{B}^{-1}\ddot{q} - \hat{B}^{-1}\hat{f} - \hat{B}^{-1}\tilde{F}.$$

В [73] предлагается закон управления

$$(4.32) \quad u(t) = \hat{B}^{-1} \left(\ddot{q} - \hat{f} - KS - \tilde{F}_{\text{est}} \right).$$

Он включает в себя: выход приблизительно известной обратной динамики системы $\ddot{q} - \hat{f}$ в качестве базовой части; оценку неопределенного слагаемого \tilde{F}_{est} , чтобы компенсировать немоделируемую динамику, внешние возмущения и изменяющиеся во времени параметры; ПИД-регулятор $u_{\text{PID}} = -\hat{B}^{-1}KS$, где $S = \dot{e} + 2\Lambda e + \Lambda^2 \int e dt$, используемый в качестве компоненты обратной связи для повышения устойчивости замкнутого контура и учета ошибки оценки неопределенностей. Здесь K – диагональная положительно определенная матрица коэффициентов усиления, выбираемая разработчиком, $e = q - q_d$ – векторная ошибка слежения за задающим воздействием $q_d(t)$. Оценка \tilde{F}_{est} вырабатывается градиентной процедурой идентификации $\dot{\tilde{F}}_{\text{est}} = \Gamma S$, $\Gamma = \Gamma^T > 0$ – параметр алгоритма.

Робастность и возможности предложенного подхода исследуются в [73] моделированием на примере робота с двумя степенями свободы.

В [74] предлагается метод управления со скользящим режимом на основе “множественной модели”, в котором снижение коэффициентов усиления наблюдателя и регулятора достигается уменьшением уровня параметрической неопределенности. Для этого компактный набор неизвестных параметров равномерно разбивается на конечное число меньших компактных подмножеств. Затем синтезируется система-кандидат со скользящим режимом, соответствующая каждому из этих меньших подмножеств. Производная функции Ляпунова-кандидата используется в качестве критерия переустановки для идентификации модели-кандидата, которая в каждый момент времени приближается к модели ОУ. Ключевая идея заключается в том, чтобы дать возможность оценкой параметров традиционной схемы управления с адаптивным скользящим режимом установить модель, которая наилучшим образом оценивает объект среди конечного набора моделей-кандидатов. Предлагаемый метод исследуется моделированием на двухступенном роботеманипуляторе.

В [75] рассматривается задача робастного отслеживания траектории для робота-манипулятора при наличии неопределенности и помехи. Предлагается использовать нейросетевое адаптивное управление со скользящим режимом (*neural network-based sliding mode adaptive control*, NNSMAC), представляющее собой комбинацию метода скользящего режима, аппроксимации нейронной сетью и адаптивного метода. В [75] отмечено, что предположение о доступности модели динамики робота-манипулятора не всегда выполнимо на практике, поэтому в алгоритм управления включается адаптивный нейросетевой наблюдатель, предназначенный для оценки скоростей звеньев.

Используется стандартное описание динамики n -звенного робота-манипулятора

$$(4.33) \quad M(q)\ddot{q} + V_m(q, \dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + f_c(\dot{q}) + G(q) + \tau_d = \tau,$$

в которое входят: $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – симметричная положительно определенная матрица инерции; матрица центробежных и кориолисовых сил $V_m(q, \dot{q})$; коэффициент вязкого трения F ; сухое трение $f_c(\dot{q})$; векторы гравитационных сил $G(q)$, ограниченных неизвестных возмущений τ_d и входного вращающего момента τ (соответственно).

Цель управления траекторией – на основе данных о $q(t)$ и желаемом процессе $q_d(t)$ разработать регулятор для мобильного робота (4.33), такой что для любого $q(0) \in \mathbb{R}^n$ и заданной функции $q_d(t)$ было выполнено $q(t) - q_d(t) \equiv e(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Для этого вводится вспомогательная переменная $\dot{q}_r(t) = \dot{q}_d(t) - \Lambda e$ с некоторой выбранной постоянной матрицей $\Lambda = \Lambda^T > 0$ и определяется скользящая переменная

$$(4.34) \quad s = \dot{q} - \dot{q}_r \equiv \dot{e} + \Lambda e.$$

Видно, что на скользящем режиме, когда $s(t) \equiv 0$, динамика ошибки слежения $e(t)$ определяется однородным уравнением $\dot{e} + \Lambda e = 0$.

Уравнения (4.33), (4.34) можно записать относительно s в виде

$$(4.35) \quad M(q)\dot{s} = -V_m s q + f(X) - \tau_d + \tau,$$

где X – вектор-столбец $X = \text{col} \{\ddot{q}_d, \dot{q}_d, q_d, \dot{q}, q\} \in \mathbb{R}^{5n}$. Функция $f(X)$ в (4.35) заменяется ее оценкой $\hat{f}(X)$, полученной аппроксимацией с помощью нейронной сети (НС): $\hat{f}(X) = \hat{W}^T \varphi(X)$, где \hat{W} – настраиваемая по адаптивному алгоритму весовая матрица НС, $\varphi(\cdot)$ – набор радиальных базисных функций [76].

Поскольку желательно обойтись измерением только положений, а не скоростей звеньев, уравнение (4.33) приводится к виду

$$(4.36) \quad \begin{cases} \dot{q} = p, \\ \dot{p} = H(q, p) - M^{-1}(q)\tau_d + M^{-1}(q)\tau, \end{cases}$$

где

$$H(q, p) = -M^{-1}(q)(V_m(q, p)p + Fp + f_c(p) + G(q)).$$

Функция $H(q, p)$ аппроксимируется настраиваемой НС в виде $\hat{H}(\hat{q}, \hat{p}) = \hat{W}_0^T \varphi_0(\hat{q}, \hat{p})$, и для полученной модели строится наблюдатель полного порядка. Этот наблюдатель входит в состав адаптивного закона управления с обратной связью по выходу со скользящим режимом на основе нейронной сети (*neural network-based sliding mode adaptive output feedback control*, NNSMAOFC). Методом Ляпунова показано, что ошибки отслеживания траектории и ошибки оценивания наблюдателя асимптотически стремятся к нулю. Эффективность разработанного NNSMAC, адаптивного наблюдателя на основе НС и NNSMAOFC иллюстрируется путем моделирования системы управления двухзвенным манипулятором.

Экспериментальному исследованию применимости активного подавления возмущения (*active disturbance rejection control*, ADRC) для управления манипуляционными роботами посвящена работа [77], в которой регулятор указанного типа используется для управления реалистичным устройством тренировок для реабилитации конечностей. Экспериментальные исследования проведены на лабораторной модели манипулятора, поведение которой напоминает реальную робототехническую реабилитационную установку [78]. Механическая часть установки “Манипулятор с изменяемой жесткостью” (*Changeable Stiffness Manipulator*, CSM) – манипулятор с одной степенью свободы, имеющий жесткое звено и гибкое сочленение. Возможность изменения жесткости полезна, например, чтобы лучше адаптировать роботов на ножках к различным и неизвестным условиям местности. В данной конструкции приводной ремень растягивается пружинами и нелинейно соединяет главный вал, имеющий угол поворота q_m , с антагонистической парой шкивов исполнительных механизмов с углами поворота q_1 , q_2 , жестко соединенных с управляемыми двигателями постоянного тока со способностью к восстановлению исходного положения. Пружины на холостых шкивах гарантируют правильное натяжение ремня на холостом ходу.

В [77] принята модель динамики рассматриваемой системы, см. [78],

$$(4.37) \quad \begin{cases} I_R \ddot{q}_1 + \xi_R \dot{q}_1 = \varphi_{1,2} - \varphi_{L,1} + \tau_1, \\ I_R \ddot{q}_2 + \xi_R \dot{q}_2 = \varphi_{2,L} - \varphi_{1,2} + \tau_2, \\ I_L \ddot{q}_L + \xi_L \dot{q}_L = \varphi_{L,1} - \varphi_{2,L} - \tau_{\text{ext}}, \end{cases}$$

где индексы R и L соответствуют элементам, связанным с рулевым приводом и звеном манипулятора соответственно; I_R, I_L – моменты инерции; ξ_R, ξ_L – коэффициенты вязкого трения; τ_{ext} – момент внешних сил, приложенных к установке; $\varphi_{L,1}$ – момент, действующий на шкив, прикрепленный к звену (q_L), вызванный пружиной с коэффициентом жесткости $K_{L,1}$; τ_1, τ_2 – моменты, развиваемые двигателями постоянного тока.

Вводятся переменная $\tau_s = (\tau_1 - \tau_2)/2$, представляющая собой момент, ответственный за изменение жесткости системы, и переменная $\tau_p = (\tau_1 + \tau_2)/2$ – момент, определяющий движение звена манипулятора. Эти моменты определяются по модели динамики двигателей постоянного тока

$$(4.38) \quad \tau_p = k_i(\bar{u}_p - k_e \dot{q}_p)/R, \quad \tau_s = k_i(\bar{u}_s - k_e \dot{q}_s)/R,$$

в которой \bar{u}_p, \bar{u}_s – управляющие напряжения, R, k_i, k_e – параметры двигателей.

С управленческой точки зрения, манипулятор с изменяемой жесткостью может выполнять две следующие задачи: изменение углового положения q_L , полученное одновременным движением обоих двигателей, которое приводит к изменению среднего положения валов двигателей $q_p = (q_1 + q_2)/2$; изменение относительного углового положения между валами для увеличения значения $q_s = (q_1 - q_2)/2$, что приводит к возрастанию жесткости системы.

Для применения метода активного подавления возмущений в [77] выполнена декомпозиция модели (4.37). Уравнения (4.37), (4.38) представляются в виде

$$(4.39) \quad \ddot{q}_s = f_s(\dot{q}_s, \varphi_s) + b_s \bar{u}_s,$$

где

$$f_s(\cdot) = \frac{-(\xi_R R + k_i k_e) q_s + \varphi_s R}{R I_R}, \quad b_i = \frac{k_i}{R I_R}.$$

Далее функция $f_s(\cdot) \in \mathbb{R}$ считается неизвестным результирующим возмущением, подлежащим оцениванию. Как и во многих других работах, это возмущение вводится как третья (“виртуальная”) компонента вектора состояния расширенного объекта, для которого строится наблюдатель состояния. Полученные с его помощью оценки используются при формировании компенсирующих возмущение сигналов управления.

В [77] представлены результаты различных экспериментальных исследований на лабораторном стенде CSM для проведения изометрических и изотонических тренировок.

5. Применение к задачам подавления узкополосных вибрационных колебаний

В [79] предлагается робастный метод управления с “составной нелинейной обратной связью” (*composite nonlinear feedback*, CNF), восходящий к публикации [80], для обеспечения быстрого и точного слежения для линейных систем, подверженных насыщению управляющего сигнала и возмущениям. Основная идея состоит в том, чтобы включить оценку и компенсацию возмущений в структуру исходного управления CNF, чтобы устранить установившуюся ошибку от возмущений и сохранить быстрые переходные характеристики исходного управления CNF. Показано применение метода для разработки закона управления для системы позиционирования серводвигателя постоянного тока. Результаты моделирования и эксперимента показывают, что метод [79] может обеспечить лучшие переходные характеристики и точность в установившемся режиме при отслеживании заданных воздействий и является более устойчивым к изменениям амплитуды возмущения и заданного значения по сравнению с управлением на основе интеграла в контуре управления.

Подавлению резонансных явлений в системах управления движением посвящена публикация [81]. Рассматривается модель, представленная двумя взаимосвязанными инерционными системами, которая часто используется в задачах управления движением для описания взаимодействия между двигателем и нагрузкой. Существенным при описании системы является наличие в пределах ее полосы пропускания неизвестной резонансной частоты. В [81] используется подход, при котором неточность в описании динамики системы рассматривается совместно с внешними возмущениями как некоторое общее возмущение, для оценки которого служит расширенный наблюдатель состояния (*extended state observer*, ESO) [82]. В [81] используется следующая модель двигателя, связанного упругим соединением с инерционной нагрузкой:

$$(5.1) \quad \ddot{y}_m + a_1 \dot{y}_m + a_2 y_m = b_0 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_2 u + w,$$

где y_m – скорость вращения ротора двигателя, u – приложенный к нему управляющий момент, $w(t)$ – общее возмущение, включающее как сигнальную составляющую, так и неточности в описании динамики системы, в том числе ее резонансные свойства с неопределенной частотой собственных колебаний. Путем повторного интегрирования по времени модель (5.1) приводится к уравнению первого порядка $\dot{y}_m = b_0 u + f$, в котором функция $f(\cdot)$ включает как внешние возмущения, так и внутреннюю динамику и предполагается ограниченной. Это “полное возмущение” представляется как компонента x_2 вектора состояния системы второго порядка

$$(5.2) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + b_0 u, & y_m = x_1, \\ \dot{x}_2 = \dot{f}, \end{cases}$$

для которой строится стандартный наблюдатель состояния второго порядка. Со ссылкой на [83, 84] указано, что ошибка оценивания ограничена при ограниченности производной от возмущения \dot{f} и величина ошибки обратно пропорциональна ширине полосы пропускания наблюдателя. Полученная оценка

возмущений используется для введения компенсирующего воздействия в статический закон управления. В качестве достоинства метода отмечается возможность использования простого описания объекта управления без знания его параметров (таких как момент инерции двигателя и резонансная частота). Очевидна недостаточная обоснованность подхода, вытекающая из указанного предположения об ограниченности \dot{f} , поскольку это “возмущение” зависит от переменных состояния системы, на которые, в свою очередь, влияет полученная оценка возмущения.

В [81] рассматривается также управление скоростью движения нагрузки. С этой целью вводится модель (и наблюдатель состояния) третьего порядка с ПД-регулятором в обратной связи. Приводятся многочисленные результаты моделирования и экспериментов по управлению скоростью через обратную связь двигателя на торсионном аппарате *Model 205* от *Education Control Products* (Bell Canyon, CA, USA). Алгоритм управления реализован с использованием пакета реального времени системы MATLAB (*Real-Time toolbox*), см. также [85].

Авторами [86] представлен прямой адаптивный алгоритм для подавления неизвестных нестационарных узкополосных помех, применяемый к установке для тестирования адаптивных регуляторов [87]. Задача состоит в том, чтобы минимизировать остаточную силу путем подачи соответствующего управляющего сигнала на инерционный привод при наличии множественных и/или неизвестных нестационарных возмущений. Алгоритм прямого адаптивного управления основан на принципе внутренней модели [88] и использует параметризацию Юлы–Кучеры (*Youla-Kučera*) [89]. В [86] предложено прямое адаптивное управление с обратной связью, эффективность которого оценена как моделированием, так и экспериментально. Для повышения робастности системы вводятся полосовые фильтры, формирующие функции чувствительности системы.

Как отмечено в [86], параметризация Юлы–Кучеры позволяет ввести в регулятор, реализующий прямое адаптивное управление (см., например [87, 90–94]), настраиваемую внутреннюю модель возмущений. Настройка происходит через изменение коэффициентов фильтра в контуре управления без пересчета параметров регулятора в “основном контуре” (*central controller*). Число настраиваемых параметров приблизительно равно порядку уравнения модели возмущений, следовательно размерность алгоритма адаптации зависит от сложности (порядка) модели возмущений, а не объекта управления. Основные проблемы, которые возникают при таком подходе, связаны с синтезом регулятора основного контура такого, чтобы для всех возможных амплитуд и частот возмущений в рассматриваемом диапазоне обеспечивалась достаточная робастность системы (в терминах запасов устойчивости по усилению и фазе, малости амплитудно-частотной характеристики вне области подавления входного сигнала). Проблема становится еще более сложной, когда есть несколько узкополосных возмущений, которые должны быть компенсированы одновременно, что характерно для используемой тестовой установки. Даже линейная модель установки с постоянными параметрами характеризуется двумя парами слабо-демпфированных нулей, расположенных весьма близко к области частот, в которой должно выполняться подавление

возмущений. В [86] изложена методология разработки регулятора основного контура для указанных условий.

Для установки, описанной в [87], представленной моделью в дискретном времени, в [95] разработан компенсатор подавления вибраций, выход которого имеет вид взвешенной суммы выходных сигналов устойчивых фильтров. Предложена идентификационная процедура для адаптивной настройки коэффициентов при неизвестном возмущении, а также инвариантный по времени компенсатор, обеспечивающий идеальное ослабление возмущения для случая, когда ошибка идентификации модели достаточно мала и частоты возмущения известны. Моделированием и экспериментально показано успешное подавление возмущения, представленного суммой до трех синусоидальных сигналов с неизвестными / изменяющимися во времени частотами.

6. Применение к задачам управления электротехническими и энергетическими системами

Применение наблюдателя возмущений для управления электрическим двигателем постоянного тока рассмотрено в публикации [96], в которой действующий на серводвигатель неизвестный и неизмеряемый момент нагрузки, возникающий, например, благодаря кулоновскому трению или действию силы тяжести, вводится в модель расширенного объекта управления и оценивается наблюдателем состояния. Синтез наблюдателя, как и всего регулятора, выполнен в дискретной области для реализации на 16-ти разрядном микропроцессоре. Приведены результаты численного анализа и экспериментов, выполнено сравнение с поведением системы со стандартным П-регулятором.

В [97] предложен подход к управлению с цифровой обратной связью инвертора с широтно-импульсной модуляцией, в котором достигается управление выходом за конечное число шагов [98] в сочетании с наблюдателем возмущения. В предложенной схеме расположения полюсов наблюдателя состояния и наблюдателя возмущения выбираются отдельно. Замечено, что когда в обоих наблюдателях использовано одинаковое расположение полюсов, экспериментальная установка имела тенденцию становиться неустойчивой из-за ошибки обнаружения. Посредством выбора различных положений полюсов удастся построить наблюдатель возмущения, быстро оценивающий возмущение и обеспечивающий подавление возмущения через прямую связь. Затем наблюдатель состояния оценивает переменные состояния в следующий момент выборки, и к номинальной системе применяется закон управления выходом за конечное число шагов. В [97] с помощью моделирования и экспериментов оцениваются преимущества и недостатки предложенного подхода с точки зрения применения в бесперебойных источниках питания (*uninterruptible power supply*, UPS).

Публикации [99, 100] посвящены синтезу и реализации регулятора следящей системы с дискретным временем для стола точного позиционирования, приводимого в действие двигателями с прямым приводом. Стол используется, например, для упаковки полупроводниковых элементов. Он может перемещаться с ускорением свыше 5g и точностью позиционирования на микронном уровне. В отличие от системы с шариковой винтовой передачей регу-

лятор в системе с прямым приводом должен обеспечивать высокий уровень подавления помех, избегая проблем из-за относительно медленной динамики электрической цепи двигателя и усилителя мощности. Предлагаемый в [99, 100] регулятор использует наблюдатель возмущения и пропорционально-дифференциальный (ПД) регулятор в канале обратной связи, а также регулятор слежения ошибок нулевой фазы и фильтр нижних частот нулевой фазы в прямой связи. В [100] рассматриваются два вида задач управления: слежение за задающим воздействием как некоторой функции времени и *контурное управление* (*contouring control*), задача которого – минимизировать разницу между пространственной траекторией, отслеживаемой задающими воздействиями, и пространственной траекторией, отслеживаемой выходом управляемой установки. Во многих случаях выбор между слежением и контурным управлением продиктован проблемами реализации. В регуляторе общего контура требуется связь в реальном времени между сервоприводами оси и, кроме того, коэффициенты усиления системы изменяются во времени, поскольку они зависят от пространственной траектории. За исключением некоторых высокопроизводительных регуляторов станков и роботов, требуемый уровень вычислительной мощности и связи редко доступен.

Для синтеза регулятора и исследования свойств системы в [100] используется номинальная модель объекта в дискретном времени, заданная передаточной функцией

$$(6.1) \quad G_n(z^{-1}) = \frac{z^{-4}b_0(1+z^{-1})}{1-2z^{-1}+z^{-2}},$$

где $z \in \mathbb{C}$ – аргумент дискретного преобразования Лапласа, во временной области соответствующий оператору упреждения [50], b_0 – параметр модели. При моделировании используется модель более высокого порядка.

Для обеспечения точности системы в [100] используется наблюдатель аддитивных управлению возмущений. При синтезе наблюдателя используется подход [52, 56, 101]. По мнению авторов [100], по сравнению с интегральным законом управления наблюдатели возмущений обеспечивают большую гибкость благодаря выбору порядка, относительной степени и полосы пропускания фильтров нижних частот. Авторы отмечают что, хотя техника введения состояния модели возмущения к традиционному наблюдателю состояния хорошо известна, см. например, [102], использование структуры наблюдателя возмущения из работ [52, 56] позволяет осуществлять простую и интуитивно ясную настройку усиления контура наблюдения возмущения и не зависит от коэффициентов обратной связи по состоянию. Предложенный закон управления экспериментально исследован с помощью процессора цифровой обработки сигналов (DSP-процессор) с частотой квантования 10 кГц при общей массе стола и полезной нагрузки 7,5 кг и ускорениями до 3g.

В [103] представлен синтез расширенного комплексного фильтра Калмана для измерения частоты энергосистемы. Теоретические результаты применены к стандартным тестовым сигналам, представляющим измерения наихудшего случая и условия сети в типичной энергосистеме. Предложенный алгоритм направлен на приложения реального времени, где шум измерений и

другие возмущения высоки. Приводятся результаты сравнения предлагаемого метода с результатами, полученными на реальном расширенном фильтре Калмана.

В [104] предлагается наблюдатель нелинейных возмущений для многопараметрических минимально-фазовых систем с произвольными относительными степенями. Рассматриваются модели вида

$$(6.2) \quad A(p)y(t) = B(p)u(t) + K(p)v(t),$$

где $u(t) = [u_1(t) \dots u_r(t)]^T \in \mathbb{R}^r$, $y(t) = [y_1(t) \dots y_q(t)]^T \in \mathbb{R}^q$ – векторы управлений и выходов ОУ; $v(t) = [v_1(t) \dots v_m(t)]^T \in \mathbb{R}^m$ – вектор неизвестных и неизмеряемых возмущений (включающих также неточность модели и свойственные ОУ нелинейности); $A(p)$, $B(p)$, $K(p)$ – полиномиальные матрицы от оператора дифференцирования $p = d/dt$ соответствующих размеров. Принято, что $m = q$, а также считается, что компоненты $v_i(t)$ – ограничены и кусочно-дифференцируемы, а их первые производные ограничены. Кроме того, считается, что многочлен $k(\lambda) = \det K(\lambda) = k_0\lambda^l + k_1\lambda^{l-1} + \dots + k_l$ – гурвицев ($l = \deg k(\lambda)$, $k_0 \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$). Последнее предположение означает минимально-фазовость ОУ (6.2) по отношению возмущение/выход (см., например, [6, 8]).

Неопределенности модели и нелинейности системы рассматриваются как возмущения. Оценки отдельных возмущений не зависят друг от друга, и производные от возмущений могут оцениваться независимо. Предлагаемая формулировка основана на методе управления с переменной структурой и адаптивных алгоритмах, в которых не требуется априорная информация относительно верхних границ возмущений и их производных. Наблюдатель нелинейных возмущений устойчив к различным типам возмущений. Проведенный в [104] анализ устойчивости показывает, что ошибка оценки экспоненциально уменьшается до установившегося значения, которое определяется выбранными при синтезе параметрами. Для иллюстрации метода, предложенная структура применяется к вертикальному валу системы магнитного подшипника. Дисбаланс в массе ротора вызовет вибрацию во вращающихся машинах. Балансировка ротора очень трудна, и часто возникает остаточный дисбаланс. Проблему дисбаланса можно решить с помощью управления с обратной связью. Одним из методов является компенсация сил дисбаланса путем генерации электромагнитных сил подавления. Парирование сил дисбаланса подразумевает прежде всего, что эти силы должны быть оценены. Однако оценка сил дисбаланса является нетривиальной задачей. В [104] вращательные возмущения и их производные оцениваются на основе линеаризованной модели вращательного движения. Приведенные в [104] результаты моделирования показывают эффективность предложенного способа.

Метод цифрового управления для инверторного каскада источника бесперебойного питания на основе интеллектуального регулятора выходного напряжения и тока индуктора предложен в [105]. Ставится задача обеспечения конечного времени переходного процесса дискретного времени для управляемых переменных (выходное напряжение и ток инвертора). Помимо линейной обратной связи по состоянию, которая обеспечивает расположение полюсов

ПФ замкнутой системы в начале координат (и тем самым конечного времени переходного процесса [24, 50]), используется дискретный наблюдатель Луенбергера [24, 106, 107] для оценки тока нагрузки, а также других возможных возмущений (например, параметров принятой модели и ее несоответствия реальной системе). Предлагаемое решение способно гарантировать быстрый динамический отклик, а также точную компенсацию непредсказуемых возмущений. Алгоритм управления требует только измерения выходного напряжения и тока индуктора. Приведены результаты экспериментов на однофазном 2-кВА прототипе, показывающие эффективность предложенного подхода.

В [69, 108] в качестве иллюстрации применения предложенных там алгоритмов, реализующих процедуру синтеза наблюдателей состояний и возмущений для нелинейных квазиканонических систем на основе декомпозиции, рассмотрена задача управления асинхронным электродвигателем, подверженного действию возмущений при неполноте измерений. Динамика электродвигателя в неподвижной системе координат (α, β) описывается уравнениями [109, 110]

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= d_1(d_2P(x_3)x_2 - d_5x_1 + u), \\ \dot{x}_2 &= -P(x_3)x_2 + d_4x_4, \\ \dot{x}_3 &= J^{-1}(d_2x_2^T S^T x_1 - x_4), \\ \dot{x}_4 &= f(t),\end{aligned}$$

где $x_1 = \text{col}\{x_{1\alpha}, x_{1\beta}\} \in \mathbb{R}^2$ – вектор токов статора, $x_2 = \text{col}\{x_{2\alpha}, x_{2\beta}\} \in \mathbb{R}^2$ – вектор потокосцепления ротора, x_3 – скорость вращения ротора, x_4 – неизвестный (неизмеряемый) момент нагрузки, $u = \text{col}\{u_\alpha, u_\beta\} \in \mathbb{R}^2$ – вектор управляющих воздействий, $P(x_3) = \begin{bmatrix} d_3 & x_3 \\ -x_3 & d_3 \end{bmatrix} > 0$, $S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Измеряемыми величинами считаются только токи статора $x_1(t)$ и скорость вращения ротора $x_3(t)$. Ставится задача отслеживания заданной скорости вращения вала двигателя при некоторой величине потока. Эта задача решается использованием разрывного (релейного) векторного управления. Требуемые для формирования управления потокосцепление ротора и возмущение (момент нагрузки) оцениваются по данным измерений с помощью наблюдателя

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= d_1(d_2P(x_3)z_2 - d_5x_1 + u) + \nu_1, \\ \dot{z}_2 &= -P(x_3)z_2 + d_4x_4 + \nu_2 \\ \dot{z}_3 &= J^{-1}(d_2z_2^T S^T x_1 - z_4) + \nu_3, \\ \dot{z}_4 &= \nu_4\end{aligned}$$

с вектором состояния $z \in \mathbb{R}^4$ и вектором $\nu \in \mathbb{R}^4$ сигналов коррекции. Эти сигналы определяются в виде сигмоидных функций (см. [70] и выше, с. 52) от ошибок оценивания по выходам $\varepsilon_i = x_i - z_i$, $i = 1, 3$. Аналитическое обоснование алгоритма управления дано в основной части статьи [108], см. также [69, 111]. Для рассматриваемого примера при конкретных значениях параметров в [108] приведены результаты моделирования.

В [112] представлена робастная схема управления током синхронного двигателя с постоянным магнитом (*permanent-magnet synchronous motor* (PMSM)) и простым адаптивным наблюдателем возмущений. Робастный регулятор реализуется путем включения адаптивного элемента на этапе генерации опорного напряжения с использованием управления в прямой связи. Из-за изменяющейся во времени динамики и высокочастотной пропускной способности неопределенностей в практических системах PMSM-приводов адаптивный элемент выбирается просто как функция оценки неопределенности, которая адаптивно меняется в зависимости от условий эксплуатации. Затем частотные режимы функции неопределенности вносятся в управляющее воздействие, на основе чего выполняется робастное управление силой тока. В [112] используется модель динамики двигателя в связанных с ротором координатах

$$(6.3) \quad v_q = R_o i_q + L_{qo} \frac{di_q}{dt} + L_{do} \omega_r i_d + \omega_r \psi_{fo} + f_q,$$

$$(6.4) \quad v_d = R_o i_d + L_{do} \frac{di_d}{dt} - L_{qo} \omega_r i_q + f_d,$$

$$(6.5) \quad T_e = \frac{3P}{2} (\psi_{fo} i_q - i_d i_q (L_{qo} - L_{do})) + f T_e,$$

где ω_r – угловая скорость вращения электрического поля; v_d и v_q – напряжения статорной обмотки по d - и q -осям, соответственно; i_d и i_q – токи статорной обмотки по d - и q -осям; L_d и L_q – индуктивности статорной обмотки по d - и q -осям; ψ_{fo} – потокосцепление, вызванное постоянным магнитом; R – сопротивление на фазу; P – число пар полюсов, T_e – электромагнитный момент; индекс “о” означает номинальный режим; f_q , f_d , $f T_e$ представляют набор неопределенностей вызванных соответственно вариациями параметров, побочными гармониками потока и другими неучтенными неопределенностями. При синтезе адаптивного наблюдателя принято во внимание, что гармонические составляющие, которые входят в выход инвертора, не коррелируют с дискретизованными задающими токами, поэтому широтно-импульсно модулированный (ШИМ) инвертор источника напряжения можно рассматривать как экстраполятор нулевого порядка с передаточной функцией $H(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}$, где T – интервал квантования (дискретизации по времени), $s \in \mathbb{C}$ – аргумент преобразования Лапласа [50]. Для синтеза алгоритма управления и наблюдателя возмущений уравнения (6.3), (6.4) представляются в дискретизованном виде, наблюдатель состояния копирует разностные уравнения модели объекта, а входящая в них оценка возмущений рекуррентно идентифицируется с использованием градиентного метода [102, 113] по квадрату отклонения оценок токов статорной обмотки от их измеренных значений $i_q(kT)$, $i_d(kT)$. В [112] проведен анализ сходимости процедуры идентификации и приведены результаты разнообразных экспериментальных исследований на лабораторной установке.

В [114] представлена робастная схема управления током с дискретным временем, обладающая высокой пропускной способностью для преобразователей с широтно-импульсной модуляцией (*voltage-source pulsewidth-modulated* (VS-PWM) converter). Используется модель преобразователя в уравнениях

состояния

$$(6.6) \quad \dot{x} = A_{c0}x + B_{c0}u + G_{c0}f,$$

где

$$x = [i_q \ i_d]^T, \quad u = [v_q - \omega L_0 i_d \ v_d + \omega L_0 i_q]^T, \quad f = [f_q \ f_d]^T;$$

v_d, v_q, i_d, i_q – напряжения и токи преобразователя по d - и q -осям; L – индуктивность нагрузки; R – активное сопротивление нагрузки на фазу; v_{sd}, v_{sq} – компоненты противоэдс по d - и q -осям; матрицы номинальной системы следующие:

$$A_{c0} = -R_0 L_0^{-1} I_2, \quad B_{c0} = L_0^{-1} I_2, \quad G_{c0} = -1/L_0^{-1} I_2.$$

Здесь I_2 – единичная матрица порядка 2. В модели (6.6), u – эквивалентное управляющее воздействие, а вектор f представляет совокупность неопределенностей, вызванных изменениями параметров, возмущением от противоэдс, и других неструктурированных неопределенностей. Далее в [114] рассматривается дискретная по времени модель преобразователя

$$(6.7) \quad x(k+1) = A_0 x(k) + B_0 u(k) + G_0 f(k),$$

в которой номинальные матрицы уравнений состояния рассчитываются аппроксимацией Эйлера с заданным интервалом выборки (дискретизации T). При известном обобщенном возмущении $f(k)$, традиционный предсказывающий закон управления имел бы вид [115]

$$(6.8) \quad u^*(k) = B_0^{-1}(x^*(k+1) - A_0 x(k) - G_0 f(k)),$$

где знаком “*” отмечены задающие сигналы. Закон управления (6.8) не учитывает запаздывания в системе, что допустимо, если период квантования существенно превосходит время вычислений управления по (6.8). Пропускная способность регулятора обычно уменьшается, чтобы учесть имеющееся в системе практическое запаздывание. Это приводит к снижению точности управления и неспособности регулятора отслеживать переходный процесс. Компенсация запаздывания значительно увеличивает текущую пропускную способность регулятора без увеличения частоты переключения инвертора. В [114] для компенсации используется наблюдатель текущего состояния с адаптивной внутренней моделью для неопределенностей системы. Предложенный наблюдатель имеет стандартный вид “расширенного фильтра Калмана” с оцениванием на скользящих режимах и градиентным алгоритмом идентификации (см., например, [22, 25]):

$$(6.9) \quad \dot{\hat{x}} = A_{c0}\hat{x} + B_{c0}u + G_{c0}\hat{f} + K_{sm},$$

$$(6.10) \quad \dot{\hat{f}} = \gamma G_{c0}e,$$

в котором $e = [e_{iq} \ e_{id}]^T \equiv x - \hat{x}$, $K_{sm} = [K_{siq} \ \text{sign}(e_{iq}) \ K_{sid} \ \text{sign}(e_{id})]^T$ – вектор разрывных (“скользящих”) сигналов, $\text{sign}(\cdot) \in [-1, 1]$ – функция знака,

$\gamma > 0$ – выбранный разработчиком коэффициент усиления алгоритма идентификации.

Чтобы продемонстрировать обоснованность и эффективность предложенной схемы управления при различных условиях эксплуатации, в [114] были проведены сравнительные оценочные испытания на подключенном к сети преобразователем с широтно-импульсной модуляцией и к системе привода с синхронным электродвигателем с постоянным магнитом с прямым приводом.

В [116] представлен подход для получения в реальном времени частоты, фазового угла и симметричных составляющих процесса в энергосистеме, что имеет большое значение для многих применений, таких как обеспечение качества электроэнергии и защита. Предлагаемый способ основан на концепции адаптивного режекторного фильтра, который обеспечивает быструю и точную оценку симметричных составляющих при наличии вариаций частоты и амплитуды. Кроме того, система обеспечивает высокую степень невосприимчивости и нечувствительности к помехам энергосистемы, гармоникам и другим типам искажений, которые существуют в сетевом сигнале. В [116] представлены математические выводы для описания принципов работы и результаты экспериментов, подтверждающие обоснованность аналитических исследований.

Принимая во внимание изменение инерции в реальных системах, в [117] предложена адаптивная схема управления для системы регулирования скорости синхронного двигателя с постоянным магнитом поверхностной установки (*surface-mounted permanent-magnet synchronous motors*). Работа ориентируется на распространенный полеориентированный векторный подход к управлению синхронным двигателем с постоянными магнитами (СДПМ) [118, 119]. По этой схеме вызывающие крутящий момент и магнитный поток компоненты тока статора развязаны так, чтобы получить, насколько это возможно в двигателях постоянного тока, независимое управление крутящим моментом и потоком. Обычно задающее значение i_d^* тока по оси d устанавливается нулевым, $i_d^* = 0$, чтобы приблизительно устранить связь между угловой скоростью и токами. Если регуляторы для двух токовых контуров работают хорошо, то можно считать, что $i_d \equiv 0$, на основании чего в [117] используется упрощенная модель СДПМ

$$(6.11) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_q \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{n_p \psi_f}{L} \\ -\frac{K_t}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_q \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{u_q}{L} \\ -\frac{T_L}{J} \end{bmatrix},$$

где i_q – ток статора по оси q , u_q – напряжение статора по оси q , n_p – число пар полюсов, R – активное сопротивление статора, L – индуктивность статора, ψ_f – потокосцепление магнитного потока ротора, K_t – постоянная крутящего момента, ω – угловая скорость, B – коэффициент вязкого трения, J – момент инерции, T_L – нагрузочный момент.

Для обеспечения требований к качеству работы системы с обратной связью используется комбинированный способ управления, основанный на наблюдателе состояния расширенной системы с одновременным оцениванием

как собственно состояния объекта, так и возмущения. Предлагаемый в [117] наблюдатель описывается системой

$$(6.12) \quad \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - 2p(z_1 - \omega) + b_0 i_q^*, \\ \dot{z}_2 = -p^2(z_1 - \omega), \end{cases}$$

где $(-p)$ – желаемое значение корня характеристического многочлена наблюдателя (кратности два), $i^* = \text{sat}_{i_{q\max}}(u)$ – функция насыщения задающей величины тока i_q с ограничением по модулю на уровне $i_{q\max}$. Переменная z_1 является оценкой угловой скорости ротора ω , а z_2 – оценкой приведенных к угловому ускорению $\dot{\omega} = a(t) + b_0 i_q^*$ возмущений $a(t) = (-B\omega - T_L + K_t(i_q - i_q^*) + K_t i_q^*)J^{-1} - b_0 i_q$, где коэффициент $b_0 = K_t J^{-1}$ и зависит от параметров системы, в частности от момента инерции J .

Предлагаемый комбинированный способ управления в контуре скорости имеет вид

$$(6.13) \quad u_0 = k(\omega^* - z_1), \quad i_q^* = \text{sat}_{i_{q\max}} \left(u_0 - \frac{z_2}{b_0} \right),$$

в котором k – коэффициент пропорциональной составляющей управления, ω^* – задающее воздействие по угловой скорости.

Адаптивное управление вызвано целью парировать изменение инерционности нагрузки J . С этой целью в [117] разработана адаптивная схема управления путем анализа взаимосвязи характеристик управления по коэффициенту передачи в прямой связи и инерционностью системы. Идентификация инерции J осуществляется подачей периодического с периодом T командного воздействия по скорости $\omega^*(t+T) = \omega^*(t)s$ с последующим применением градиентного метода идентификации.

В [116] разработана подсистема принятия решений, действующая на основе нечеткого логического вывода, предназначенная для автоматической настройки коэффициента компенсации в прямой связи в соответствии с идентифицированным значением инерции. В [117] приведены результаты моделирования и экспериментальных исследований на специально разработанной лабораторной установке, показывающие высокую скорость реакции предложенного метода управления на изменение инерции.

В [120] разработано семейство наблюдателей со скользящим режимом без датчика скорости для приводов асинхронных двигателей. Три структуры исследуются с целью определения их реализуемости, чувствительности параметров и практической применимости. Наиболее существенной особенностью всех схем является то, что они не требуют адаптации скорости вращения ротора, то есть они по своей природе являются наблюдателями без датчиков. Наиболее универсальным и робастным оказался наблюдатель потока полного порядка с двойной системой отсчета. Две другие схемы были наблюдателями потока, реализованными в раме статора и раме ротора соответственно. Они проще, чем первый, и используют инвариантность скользящего режима в заданном диапазоне неопределенностей и возмущений моделирования. Для каждого наблюдателя в [120] приведены основные теоретические аспекты, результаты анализа чувствительности параметров и детали реализации.

Представлены и обсуждены экспериментальные результаты с наблюдателем с двойной системой отсчета, который считается авторами [120] наиболее подходящими для практического применения. Продемонстрирована работа без датчика с приводом с прямым вращающим моментом в скользящем режиме на очень низких скоростях. Сделан вывод, что предложенные наблюдатели представляют собой реальную альтернативу классическим адаптивным наблюдателям скорости потока.

Статья [121] посвящена высокоточному управлению позиционированием двухступенчатого привода подачи. Конструкция системы управления основана на подходе эквивалентных входных возмущений (*equivalent input-disturbance*, EID) для улучшения характеристик подавления помех. Процедура проектирования иллюстрируется числовым примером. Результаты моделирования показывают, что система управления EID не только парирует возмущения, но также подавляет неопределенности и нелинейности в установке. Для сравнения предложенного метода с методом наблюдателя возмущения в [121] приведены результаты синтеза, моделирования и анализа для числового примера привода подачи.

В [122] рассматривается применение алгоритмов оценки оптимального состояния и оптимальной обратной связи по состоянию для управления активным магнитным подвесом в реальном времени. Реализован линейный квадратичный гауссовский регулятор, состоящий из расширенного фильтра Калмана и оптимального регулятора обратной связи по состоянию. Показано, что этот регулятор обеспечивает улучшенную точность позиционирования ротора, лучшую динамику системы, более высокую жесткость подшипника и пониженное усилие управления по сравнению с обычно используемыми подходами ПИД-управления. Кроме того, представлен способ компенсации вызванных дисбалансом сил и колебаний ротора с магнитным подвесом, основанный на оценке неизвестных сил возмущения. Приведенные в [122] результаты проверены экспериментально на испытательной установке, состоящей из вентилятора, полностью находящегося на магнитном подвесе с массой ротора 250 кг и привода с односторонним магнитным подвесом, имеющего массу ротора 25 кг. Алгоритм фильтрации реализован на плате контроллера *dSpace DS1103 PowerPC* (время расчета для одной оси подшипника составило около 20 мкс).

Публикация [123] развивает подход управления со скользящим режимом для систем с несогласованными (*mismatched*) неопределенностями с помощью нелинейного наблюдателя возмущения. Рассматриваются нелинейные объекты второго порядка

$$(6.14) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + d(t), \\ \dot{x}_2 = a(x) + b(x)u, \\ y = x_1, \end{cases}$$

где $x_1(t)$, $x_2(t)$ – переменные состояния, u – управляющее воздействие, $y(t)$ – выход, $d(t)$ – возмущение, которое ограничено некоторым значением $d^* = \sup_{t>0} |d(t)|$. В векторной форме (6.14) имеет вид

$$(6.15) \quad \dot{x} = f(x) + g_1(x)u + g_2d(t), \quad y = x_1,$$

где

$$x = [x_1, x_2]^T, \quad f(x) = [x_2, a(x)]^T, \quad g_2 = [1, 0]^T.$$

Для системы (6.15) предлагается использовать нелинейный наблюдатель возмущений [40, 124–126]

$$(6.16) \quad \begin{cases} \dot{p} = -lg_2p - l(g_2lx + f(x) + g_1(x)u), \\ \hat{d} = p + lx, \end{cases}$$

где \hat{d} , p и l – оценка возмущения, состояние наблюдателя и вектор коэффициентов усиления наблюдателя (параметр проектирования) соответственно.

При разработке скользящей поверхности на основе оценки возмущения в [123] разработан метод управления в скользящем режиме на основе наблюдателя возмущений для противодействия несогласованному возмущению. Вводится выражение для поверхности скольжения

$$(6.17) \quad \sigma = x_2 + cx_1 + \hat{d},$$

в котором $c > 0$ – параметр проектирования. Для обеспечения скользящего режима по поверхности разрыва $\sigma \equiv 0$ предложен алгоритм управления

$$(6.18) \quad u = -b^{-1}(x) \left(a(x) + c(x_2 + \hat{d}) + k \operatorname{sign}(\sigma) \right),$$

где $k > 0$ – параметр алгоритма (величина “полки реле”). Доказана теорема, согласно которой при выполнении дополнительных (к ограниченности возмущения) предположений, что производная от возмущения $\dot{d}(t)$ ограничена и затухает, $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{d}(t) = 0$, а также что ошибка оценивания возмущений $e_d(t) = d(t) - \hat{d}(t)$ ограничена, $e_d^* = \sup_{t>0} |e_d(t)|$, замкнутая система (6.14), (6.16), (6.17), (6.18) асимптотически устойчива если $k > (c + lg_2)e_d^*$ и $lg_2 > 0$.

Предложенный метод имеет следующие особенности. Во-первых, переключение коэффициента усиления требуется только для того, чтобы преодолеть границы *ошибки оценки* возмущения, а не сами возмущения, что существенно облегчает проблему “дребезга” (*chattering*) в скользящем режиме. Во-вторых, предлагаемый способ сохраняет номинальные характеристики, то есть в отсутствие неопределенностей действует так же, как базовый регулятор со скользящим режимом.

Моделированием в [123] проведен сравнительный анализ предложенного алгоритма с “традиционным” алгоритмом управления со скользящим режимом

$$(6.19) \quad \sigma = x_2 + cx_1, \quad u = -b^{-1}(x) (a(x) + cx_2 + k \operatorname{sign}(\sigma)),$$

и с “интегральным” алгоритмом управления со скользящим режимом [127, 128]

$$(6.20) \quad \begin{aligned} \sigma &= x_2 + c_1x_1 + c_2 \int_0^t x_1(\tau) d\tau, \\ u &= -b^{-1}(x) (a(x) + c_1x_2 + c_2x_1 + k \operatorname{sign}(\sigma)). \end{aligned}$$

В качестве прикладного примера рассмотрена система магнитной левитации (англ. – *magnetic levitation*, MAGLEV) – транспортной системы, в которой транспортное средство подвешено на направляющей рейке по принципу электромагнитной подвески [129]. Результаты моделирования как на числовом, так и на прикладном примерах показывают, что предлагаемый метод демонстрирует гораздо лучшую эффективность управления, чем базовые и интегральные методы управления со скользящим режимом в отношении снижения дребезга и обеспечения номинальных характеристик.

В [130] дается обзор методов оценки возмущения, неопределенности модели и путей ослабления их влияния в приводах с синхронным двигателем и постоянными магнитами (СДПМ-приводы). Сначала рассматриваются различные помехи и неопределенности в СДПМ-приводах и в других приводах переменного тока. Результаты показывают, что эти возмущения по-разному и проявляются в разных контурах управления системы. Обсуждаются и обобщаются широко используемые в СДПМ-приводах существующие методы оценки и парирования возмущений, как и другие соответствующие методы управления при обращении с помехами и неопределенностями. Статья заканчивается обсуждением перспективных направлений в этой области.

7. Применение к задачам управления автомобилями и их подсистемами

Публикация [131] посвящена применению стохастических оценок состояния в управлении динамикой автомобиля. Поскольку не все переменные состояния транспортного средства и действующие на него возмущения могут быть измерены, то для их оценки естественно использовать фильтр Калмана. В [131] приведено три примера применения этого подхода к управлению автомобилями. Первый из них – адаптивный круиз-контроль (*Adaptive Cruise Control*, АСС) – включает в себя продольное (дроссельное и тормозное) управление автомобилем. В него входит управление скоростью автомобиля в зависимости от дороги, курса и расстояния до предшествующих транспортных средств и препятствий. Предполагается наличие датчиков для обнаружения объектов в потенциальной возможности столкновения с автомобилем, например радиолокационных или лазерных зондов. Рассматривается следующий пример, в котором продольная динамика окружающих объектов и адаптивный круиз-контроль автомобиля сосредоточены в одном фильтре Калмана. Предполагается наличие одной цели (автомобиля) на расстоянии d_1 и с азимутом φ_1 перед автомобилем. Для описания динамики системы из двух автомобилей используется модель

$$(7.1) \quad \begin{cases} \dot{v}_x^0 = a_x^0 + u, \\ \dot{a}_x^0 = w_1, \\ \dot{d}_x^1 = -v_x^0 + v_x^1, \\ \dot{v}_x^1 = a_x^1, \\ \dot{a}_x^1 = w_2, \end{cases}$$

в которой d_x^1 , v_x^1 , a_x^1 – продольное положение, скорость и ускорение цели по отношению к транспортному средству с круиз-контролем. Переменная u обозначает ускорение (или замедление) транспортного средства с круиз-контролем, которое считается известным. Кроме того, в ускорения автомобилей входят интегралы от белошумовых возмущений w . Считаются известными (измеряемыми) расстояние d_x^1 , скорость v_x^0 и азимут φ_1 . Учитываются погрешности датчиков, которые моделируются аддитивными процессами белого шума. Для дискретизованной модели системы (7.1) строится стандартный фильтр Калмана.

Другим примером является удержание полосы движения (*Lane Keeping*). Для бокового управления транспортным средством важно знать, какие возмущения (например, боковые ветровое и возвышение дорожного полотна) действуют на кузов автомобиля сбоку. Оценка возмущений может быть получена с помощью фильтра Калмана, который включает в себя простую модель транспортного средства и требует разумного набора измерений. Самая простая концепция оценки боковых возмущений заключается в сравнении угла поворота рулевого колеса со скоростью рыскания. Например, при движении по прямой дороге с боковым ветром скорость рыскания будет нулевой, но угол поворота рулевого колеса не будет равен нулю, потому что водитель будет противодействовать возмущению со стороны ветра. Эти данные могут быть полезны для оценки возмущения. Основной фильтра Калмана является модель транспортного средства, которая описывает всю интересующую динамику, но при этом проста, насколько это возможно. Для оценки бокового возмущения достаточно рассмотреть две степени свободы, связанные со скоростью скольжения v и скоростью рыскания r . В [131] излагается следующая модель. При известной скорости рыскания r и угле поворота рулевого колеса δ можно оценить только одно боковое возмущение F_{d1} (боковую силу), действующее на транспортное средство. Точку приложения этого возмущения на кузов автомобиля выбирает инженер-конструктор. Второй датчик в дополнение к скорости рыскания необходим, если должны быть определены как возмущающая сила, так и возмущающий момент рыскания, действующие на автомобиль. Соответствующие уравнения движения для модели с двумя степенями свободы имеют вид

$$(7.2) \quad \begin{cases} m_v (\dot{v} + U\dot{r}) = F_{y1} + F_{d1} + F_{y2}, \\ I_z \dot{r} = (F_{y1} + F_{d1}) \cdot a - F_{y2}b. \end{cases}$$

Неизвестные силы шин F_{y1} и F_{y2} можно смоделировать, используя коэффициент жесткости при установленном режиме разворота транспортного средства. Далее для оценки боковых возмущений предлагается использовать стандартный фильтр Калмана.

С точки зрения авторов [131], большинство фильтров Калмана можно рассматривать как виртуальные датчики, потому что с помощью математической модели и определенных измеряемых сигналов они дают возможность оценить неизмеряемые переменные, которые либо слишком сложно непосредственно измерить (потому что нет доступного датчика для этого), либо необходимые датчики слишком дороги. Затраты можно значительно снизить, ис-

пользуя существующие датчики в комбинации с фильтром Калмана. Например, антиблокировочные тормозные датчики скорости вращения колес подходят, чтобы определить скорость рыскания автомобиля и поперечное ускорение при определенных условиях работы. В качестве примера рассмотрено, как сигнал частоты вращения колеса антиблокировочной системы (*anti lock braking system*, ABS) может использоваться для определения скорости рыскания автомобиля и угла скольжения шины на основе двухколесной модели автомобиля.

В [69] для задачи управления топливоподачей в двигатель внутреннего сгорания (ДВС) применен метод каскадного синтеза. В качестве объекта управления рассматривается ДВС с искровым зажиганием, укомплектованный топливными форсунками с центральной или распределительной (поцилиндровой) системой впрыска и трехкомпонентным нейтрализатором выхлопных газов с λ -зондом непрерывного или релейного типа. Модель топливоподачи включает в себя динамику подачи топлива в цилиндр с учетом выпадения части топлива в виде пленки с последующим его испарением, описываемую уравнениями (модель Акино) [132]

$$T_f \dot{m}_f = -m_f + b_f u_f, \quad m_{fc} = (1 - X)u_f + m_f,$$

где m_f – масса топлива, выпадающая в виде пленки на стенках впускного воздуховода, m_{fc} – масса топлива, подаваемая в цилиндр, u_f – масса впрыскиваемого топлива (входной сигнал), b_f, T_f – числа, характеризующие динамику контура топливоподачи.

Динамика сгорания топливо-воздушной смеси в цилиндре описывается уравнением

$$T_c \dot{\lambda}_{ex} = -\lambda_{ex} + b_c \lambda_{in},$$

где T_c, b_c – числа, характеризующие динамику сгорания.

Предполагается, что кислород и топливо сгорают в стехиометрической пропорции 14,7. Несгоревший кислород

$$x(t) = \dot{m}_c(t) - 14,7\dot{m}_{fc}(t),$$

в случае его наличия, проходит через двигатель, выпускной коллектор и участок выхлопной трубы.

Решена задача управления выработкой задания на впрыск топлива u_f с обеспечением заданного соотношения воздух–топливо, в частности стехиометрического соотношения ($x(t) = 0$) при использовании трехкомпонентных нейтрализаторов. Для синтеза закона управления используются методы каскадного синтеза с использованием наблюдателя состояния [69], см. также [1, раздел 4]. При наличии запаздывания в канале управления дополнительно используется упредитель Смита [133].

В [134] рассмотрено применение наблюдателя и компенсатора синусоидальных возмущений для подавления вибраций в подвеске автомобиля, которые возникают из-за соприкосновения с неровной поверхностью. Динамика движения автомобиля описывается следующей дифференциальных уравне-

ний

$$(7.3) \quad m_b \ddot{z}_b(t) = -c_s(\dot{z}_b(t) - \dot{z}_w(t)) - k_1(z_b(t) - z_w(t)) + u(t),$$

$$(7.4) \quad m_w \ddot{z}_w(t) = -k_2(\dot{z}_w(t) - r(t)) - k_1(z_b(t) - z_w(t)) - u(t),$$

где m_b и m_w – массы корпуса автомобиля и колеса соответственно; k_1 , k_2 – коэффициенты жесткости пружин, c_s – коэффициент демпфирования; $r(t)$ – возмущение, действующее со стороны дорожного полотна; z_b и z_w – вертикальные координаты корпуса и колеса (точнее, их отклонения от равновесных состояний, полученных при $u(t) \equiv 0$, $r(t) \equiv 0$) соответственно, $u(t)$ – управляющая сила.

Рассматривается гармоническое внешнее возмущение $r(t) = \mu \sin(\omega t + \varphi_1)$ с неизвестными амплитудой μ , фазой φ_1 и частотой ω , для описания которого используется стандартное представление вида

$$(7.5) \quad \ddot{r}(t) + \omega^2 r(t) = 0.$$

Считается, что параметры системы известны, и также известна нижняя граница частоты возмущений. На первом шаге выполняется оценка неизвестной частоты возмущений, для чего на основе изложенного в [135, 136] подхода строится адаптивный алгоритм идентификации, использующий, во избежание двукратного дифференцирования входного сигнала, введение фильтра состояния третьего порядка (см. также [137–142], [25, § 4.8.5]). Далее полученная оценки частоты возмущений используется для синтеза регулятора, подавляющего их влияние, [134, теорема 7].

В [143] предлагается адаптивное управление с активным подавлением возмущения (*active disturbance rejection control*, ADRC), основанное на адаптивном расширенном наблюдателе (*adaptive extended state observer*, AESO), для устранения неопределенностей как в установке, так и в датчиках. Усиление расширенного наблюдателя состояния (*extended state observer*, ESO) автоматически настраивается, чтобы уменьшить ошибки оценки обоих состояний и “общего возмущения” по отношению к шуму измерения. Кроме того, удовлетворительная работа системы с обратной связью достигается компенсацией неопределенностей. В [143] показано применение регулятора такой структуры для управления воздушно-топливным отношением (*air-fuel ratio*, AFR) бензинового двигателя, которому свойственны значительные нелинейности характеристик и параметрические неопределенности из-за неизвестного изменения скорости, динамики топливного слоя и др. Кроме того, измерение искажается шумом датчика. Результаты эксперимента показывают, что предлагаемый регулятор может обеспечить высокую точность воздушно-топливного отношения несмотря на неопределенность динамики модели и шум измерений. Кроме того, экспериментальное сравнение подтверждает эффективность введения усиления AESO, с помощью которого можно улучшить работу ADRC по снижению влияния неопределенностей.

Задача синтеза закона управления для подавления вибраций в подвеске автомобиля рассмотрена и в [144]. Возмущение со стороны дорожного полотна моделируется конечной суммой синусоидальных функций с неизвестными

частотами, амплитудами и фазами. Для описания вертикального движения кузова используется следующая модель системы с двумя степенями свободы:

$$(7.6) \quad m_b \ddot{z}_b(t) = -c_b(\dot{z}_b(t) - \dot{z}_u(t)) - k_b(z_b(t) - z_u(t)) + u(t),$$

$$(7.7) \quad \begin{aligned} m_w \ddot{z}_w(t) = & -c_b(\dot{z}_w(t) - \dot{z}_b(t)) - k_b(z_w(t) - z_b(t)) - \\ & - k_t(z_w(t) - r(t)) - c_t(\dot{z}_w(t) - \dot{r}(t)) - u(t), \end{aligned}$$

отличающаяся от (7.3), (7.4) тем, что она учитывает и демпфирование в шине. Принято, что измеряются относительное положение кузова и колеса, $(z_b - z_w)$, смещение колеса относительно поверхности, $(z_w - r)$, а также скорости \dot{z}_b , \dot{z}_w . Считается, что возмущения со стороны дороги можно описать суммой гармонических составляющих

$$r(t) = \sum_{i=1}^q g_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

с неизвестными амплитудами g_i , частотами ω_i и фазами φ_i . Целью управления является обеспечение близости к нулю значения вертикального ускорения $\ddot{z}_b(t)$ кузова автомобиля. Как и в [134], параметры системы (7.7) считаются известными.

В [144] отмечено, что так как $(z_w - r)$ измеряется, основным действующим на систему возмущением является процесс

$$\frac{c_t}{m_w} \dot{r}(t) \equiv \sum_{i=1}^q \frac{c_t}{m_w} \omega_i g_i \cos(\omega_i t + \varphi_i),$$

который, как обычно [1], представляется через выход внешней линейной системы

$$(7.8) \quad \dot{w}(t) = Sw(t), \quad \dot{r}(t) = h^T w(t)$$

с $w(t) \in \mathbb{R}^{2q}$ и матрицей S , зависящей от неизвестных частот возмущений. Далее, аналогично описанной выше публикации [51] с использованием подхода из [13] происходит параметризация источника возмущений и применяется метод бэкстеппинга [145] для синтеза регулятора, стабилизирующего систему.

8. Прочие применения

Согласно [146] робастность систем управления движением можно представить как функцию “жесткости”, которая вводится следующим образом. Предположим, что x – положение управляемого объекта и f – полная приложенная к объекту сила. Из уравнений движения следует что

$$(8.1) \quad f = g(\ddot{x}, \dot{x}, x).$$

Жесткость \varkappa определяется через частную производную:

$$(8.2) \quad \varkappa = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Идеальное управление положением предотвращает любое отклонение положения от заданного при любом отклонении силы. При таком управлении \varkappa будет бесконечно большим. Естественно, интегратор в прямой цепи компенсирует постоянную ошибку и асимптотически δx будет стремиться со временем к нулю. Однако такая функция не отражается в (8.2). С другой стороны, идеальное управление силой предотвращает отклонение силы при любом отклонении положения. Тем самым при идеальном управлении силой $\varkappa = 0$. При согласованном (*compliance*) управлении должно иметься соотношение между положением и силой. Например, виртуальное согласованное управление будет использовать механический импеданс, который вычисляется в регуляторе в соответствии с указанной динамикой. Поэтому жесткость может служить удобным показателем, представляющим цель движения. Робастность системы управления движением всегда требует очень высокой жесткости в регуляторе. В [146] показано, что управление ускорением осуществляет заданное движение одновременно с сохранением очень высокой устойчивости. Ускорение является мостом между робастностью и жесткостью.

Для рассмотрения робастного управления движением с электродвигателем в [146] определяется *эквивалентное возмущение* и рассматривается внешнее неизмеряемое возмущение, действующее аддитивно с сигналом управления. Используется модель линейной SISO системы (с одним входом и одним выходом), в которой уравнения состояния представлены в канонической форме управляемости (каноническая форма фазовой переменной, см., например, [24, 107, 147])

$$(8.3) \quad \dot{x} = A_0 x + b_0 u + e \bar{d}, \quad y = cx,$$

где A_0 , b_0 обозначают “номинальные” матрицы уравнений состояния системы, \bar{d} – эквивалентное возмущение, имеющее размерность силы или момента, в котором учитывается как “сигнальная” составляющая внешнего возмущения $d(t)$, приложенная аддитивно управлению на входе системы, так и отклонения матриц A , b уравнений состояния от их номинальных значений A_0 , b_0 . В соответствии с принятой в [146] канонической формой уравнений состояния $e = [0, \dots, 0, 1]^T$, $b = [0, \dots, 0, K]^T$ и с аддитивным характером внешнего возмущения все перечисленные возмущения можно эквивалентно представить в виде аддитивного к управлению скалярного возмущения $\bar{d}(t)$. Для этого расширенного возмущения делается предположение, что оно является многочленом от времени с известной (заданной разработчиком) степенью $p - 1$, т.е. может быть описано решением однородного дифференциального уравнения $\frac{d^p}{dt^p} \bar{d}(t) = 0$. Далее уравнения исходной системы объединяются с моделью возмущений и стандартным образом для полученной расширенной системы строится наблюдатель состояния (см. [1, раздел 6]). С точки зрения авторов обзора, такая модель возмущений может привести к существенным ошибкам, поскольку вариации матриц уравнений состояния умножаются при пересчете в возмущения на $x(t)$ и на сигнал управления $u(t)$, которые могут меняться весьма разнообразным образом. Можно сделать вывод, что, хотя в [146] об этом прямо не говорится, авторов [146] интересует только установившаяся (например, статическая) ошибка. Как отмечено в и [1, раздел 6], такой подход к подавлению возмущений может быть осуществлен в рамках клас-

сического подхода с введением интегральной составляющей в закон управления для повышения порядка астатизма по возмущению [50, 54]. Заметим, что возможность потери устойчивости замкнутой системы вследствие вариаций параметров в [146] не рассматривается.

Далее в [146] приводится пример применения этого подхода к системе управления скоростью ω электродвигателя, моделируемой уравнением $J\dot{\omega} = K_t I_a^{\text{ef}} - T_l$, в котором T_l – момент нагрузки. Для оценивания эквивалентного возмущения, включающего кроме T_l вариации момента инерции и крутящего момента двигателя, используются измерения угла поворота вала двигателя.

Для практических применений введена методика оценки возмущения, чтобы система управления движением была бы регулятором. Рассмотрено также управление движением упругой структуры и идентификация механических параметров.

Подавление мультигармонических возмущений в маятниковой системе с инерционным маховиком в качестве движителя (*маятник Шмида*, [148–150]), расположенной на подвижной платформе, рассмотрено в [151]. Как и в ряде других работ, в [152] возмущение $\delta(t)$ представляется суммой гармоник с неизвестными параметрами и смещением. Принята линейная модель объекта с известными коэффициентами замкнутого через известную нелинейную функцию от скалярного выходного сигнала, с учетом запаздывания по управлению $u(t)$ на время $\tau = \text{const} > 0$:

$$(8.4) \quad a(p)y(t) = b(p)u(t - \tau) + g(p)f(y(t)) + e(p)\delta(t), \quad p = d/dt.$$

Считается, что измеряется только выход y , относительный порядок ОУ произволен, а коэффициенты операторных многочленов в (8.4) известны. Для идентификации возмущений модель (8.4) приводится к виду

$$(8.5) \quad \bar{y}(t) = \bar{u}(t) + \bar{f}(t) + \bar{\delta}(t)\sigma(t) + \sum_{i=1}^k \bar{\delta}_i(t),$$

где

$$\bar{\delta}(t) = \bar{\sigma}(t) + \sum_{i=1}^k \bar{\delta}_i(t),$$

сигналы $\bar{\delta}_i(t)$, $\bar{u}(t)$, $\bar{f}(t)$ – выходы соответствующих фильтров состояния. Преобразованный процесс возмущений $\bar{\delta}(t)$ подлежит идентификации и последующей компенсации. Для этого он описывается моделью

$$(8.6) \quad p^{2k+1}\bar{\delta}(t) = \bar{\theta}_1 p^{2k-1}\bar{\delta}(t) + \dots + \bar{\theta}_{k-1} p^3\bar{\delta}(t) + \bar{\theta}_k \bar{\delta}(t),$$

в которую входят неизвестные параметры $\bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_k$, соответствующие значениям неизвестных частот составляющих возмущение гармоник. Для оценки этих параметров используется стандартная процедура идентификации градиентного типа с введением фильтров состояния порядка $2k$, чтобы исключить дифференцирование результатов измерений. Теоретические положения

доведены до экспериментальных результатов для маятника с маховичным двигателем, расположенным на тележке. Проведено сравнение с поведением разомкнутой системы (с точки зрения авторов обзора, более показательным было бы сравнение использования предложенного и типового регуляторов).

В [153] описывается фильтр Калмана для оценки ориентации сегментов человеческого тела путем объединения сигналов гироскопа, акселерометра и магнитометра от миниатюрных датчиков. Ферромагнитные материалы или другие магнитные поля вблизи модуля датчика нарушают локальное магнитное поле Земли и, следовательно, оценку ориентации, которая препятствует многим (амбулаторным) применениям. В фильтре оцениваются ошибка смещения гироскопа, ошибка ориентации и ошибка от магнитного возмущения. Приведенные в [153] результаты показывают точные и бездрейфовые оценки ориентации.

Подавление возмущений в микроэлектромеханическом (МЭМС, *Micro-Electro-Mechanical Systems*, MEMS) гироскопе, связанных с влиянием неизвестных перекрестных связей при управлении положением подвешенной массы в двух направлениях, рассмотрено в [154]. Принятый подход основан на стратегии управления с активным подавлением возмущений (*active disturbance rejection control*, ADRC), при которой в реальном времени оцениваются и компенсируются внутренние динамические процессы и внешние возмущения.

В качестве исходной модели движения подвижного груза взяты известные уравнения

$$(8.7) \quad \ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x + \omega_{xy}y - 2\Omega\dot{y} = \frac{k}{m}u_d(t),$$

$$(8.8) \quad \ddot{y} + 2\xi_y\omega_y\dot{y} + \omega_y^2y + \omega_{xy}x + 2\Omega\dot{x} = \frac{k}{m}u_s(t),$$

где x – перемещение груза вдоль оси привода OX ; y – перемещение вдоль оси чувствительности OY ; ω_n , ω_y – парциальные частоты собственных колебаний груза по соответствующим осям; $u_d(t)$, $u_s(t)$ – управляющие сигналы по осям привода и чувствительности; m – масса подвижного груза; параметр k – общий коэффициент передачи чувствительного элемента, исполнительного устройства и усилителя. Слагаемые $2\Omega\dot{x}$ и $2\Omega\dot{y}$ – кориолисовы ускорения, где Ω – неизвестная (и подлежащая определению) изменяющаяся скорость углового вращения основания относительно оси OZ . Перекрестные связи между осями представлены слагаемыми $\omega_{xy}y$ и $\omega_{xy}x$.

Уравнение (8.7) записывается в виде $\ddot{x} = f_d + km^{-1}u_d$, где функция f_d включает как слагаемые, представляющие внутреннюю динамику, так и внешние возмущения w (которые, заметим, в (8.7) не учтены). Далее строится расширенная модель объекта, в которой “обобщенное возмущение” f_d считается постоянным, $\dot{f}_d = 0$. Для полученной модели третьего порядка стандартным образом строится наблюдатель состояния. Закон управления с подавлением возмущения имеет вид $u_d = (u_0 + \hat{f}_d)mk^{-1}$, где \hat{f} – выработанная наблюдателем оценка $f(t)$, u_0 – выход ПД-регулятора с прямой связью по второй производной (ускорению) от задающего воздействия $r(t)$ и оценкам \hat{x} ,

\hat{x} положения и скорости перемещения груза:

$$u_0 = k_p(r - \hat{x}) + k_d(\dot{r} - \dot{\hat{x}}) + \ddot{r}.$$

Сигнал управления по оси чувствительности u_s вырабатывается аналогичным алгоритмом вида $u_s = (u_0 - \hat{f}_s)mk^{-1}$ с выходом u_0 соответствующего ПД-регулятора и оценкой \hat{f}_s возмущения по переменной y , имеющего вид $f_s = -2\xi_y\omega_y\dot{y} - \omega_y^2y - \omega_{xy}x - 2\Omega\dot{x}$. Для нахождения скорости вращения Ω сначала производится калибровка гироскопа в неподвижном состоянии. Полученный при этом калибровочный сигнал управления u_{scal} используется вне интервалов на которых $\dot{x} \approx 0$ для оценки угловой скорости

$$(8.9) \quad \hat{\Omega} = \frac{(u_s - u_{scal})k}{2\dot{x}m}.$$

Результативность предлагаемого метода продемонстрирована путем моделирования.

Стратегия управления с активным подавлением возмущений использована и в [155] для приведения движения по приводной оси МЭМС гироскопа в резонанс и управления выходной амплитудой колебаний вдоль приводной оси до фиксированного уровня. Уравнения наблюдателя и регулятора идентичны приведенным в [154] уравнениям для приводной оси OX . В [155] выполнен анализ устойчивости системы, который показывает, что и ошибка оценивания, и ошибка отслеживания выходного сигнала по оси привода ограничены и что верхние границы ошибок монотонно уменьшаются с увеличением ширины полосы пропускания регулятора. Система управления промоделирована и экспериментально тестирована на вибрационно-лучевом гироскопе с пьезоэлектрическим приводом, который является альтернативой МЭМС гироскопу для экспериментального исследования. Результаты исследования показали, что предлагаемый регулятор не только заставляет ось привода вибрировать вдоль желаемой траектории, но и робастно компенсирует погрешности изготовления, что делает характеристики гироскопа нечувствительными к изменениям параметров и возмущениям.

Практическому применению наблюдателя для совместной оценки состояния объекта и возмущений с целью подавления колебаний прилипания–скольжения в буровых установках посвящена публикация [156]. Синтез системы управления основан на распределенной модели буровой установки, которая преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений совместно с дифференциальными уравнениями в частных производных. Синтезируется наблюдатель, применение которого позволяет использовать только измерения на поверхности. Задача управления формулируется как задача стабилизации линейной системы с постоянными параметрами, на которую действует постоянное неизвестное возмущение, вызванное силами кулоновского трения, с учетом временных задержек в приводе и датчике. Для решения задачи использованы теоретические результаты из [157, 158].

Статья [159] посвящена задаче синтеза наблюдателей для политопных линейных систем с переменными параметрами (*linear-parameter-varying*, LPV)

и с неопределенными измерениями управляемых переменных. Неопределенности в измерениях учитываются через весовые коэффициенты. Система с переменными параметрами и с неопределенными весовыми коэффициентами преобразуется к системе с переменными параметрами с неопределенностью. Чтобы справиться с неопределенностями и неизвестными возмущениями в процессе синтеза наблюдателя, авторы [159] предлагают использовать наблюдатель скользящего режима с изменяемым по программе коэффициентом усиления. Метод расчета наблюдателя на скользящем режиме разработан на основе результатов анализа установленной системы оценки ошибок. Предложенный метод синтеза наблюдателя затем применяется к электрическому наземному транспортному средству (*electric ground vehicle*, EGV), в котором измерение продольной скорости считается неопределенным. Приводятся сравнительные результаты экспериментальных испытаний, показывающие преимущества предложенного метода синтеза системы управления и наблюдателя.

Процесс управления уровнем жидкости в баке рассматривается и исследуется как моделированием, так и экспериментально на лабораторной установке в [160]. Для описания объекта используется типичная для промышленных систем модель апериодического звена первого порядка и транспортного запаздывания

$$(8.10) \quad AR\dot{H}(t) + H(t) = RQ_i(t - \theta) + RH_d(t),$$

где H – уровень жидкости в баке; Q_i – входной поток жидкости в бак (управление); H_d – неизмеряемое возмущение потока жидкости; A – площадь поперечного сечения бака; θ – временное запаздывание. Поскольку действие значительных возмущений и помех обычно приводит к существенному снижению качества системы управления промышленным процессом, в [160] предлагается улучшенное каскадное управление, включающее управление с прогнозирующей моделью, ПИД-управление и оценивание возмущений. Наблюдатель возмущений используется для их компенсации через прямую связь. При синтезе наблюдателя используется инверсия модели объекта с введением дополнительного фильтра нижних частот, имеющего статический коэффициент передачи, равный единице. Более подробно: сигнал управления $u(t)$ имеет вид $u = v - w$, где $v(t)$ – управление, формируемое через главную обратную связь регулятора во внешнем контуре, реализующего управление с прогнозирующей моделью, а вспомогательный сигнал $w(t)$ получается в виде $w = -Q(s)e^{-\theta s}u + Q(s)P(s)^{-1}H$, где $H(t)$ – управляемая величина. Возмущение $d(t)$ считается приложенным аддитивно к выходу, т.е. принято, что $H = P(s)e^{-\theta s}u + d$. Тогда после преобразований нетрудно получить, что $H = P(s)e^{-\theta s}v + (1 - Q(s)e^{-\theta s})d$. В результате видно, что при выборе $Q(0) = 1$ в установившемся режиме происходит полная компенсация постоянного возмущения и величина H получается в виде $H = P(s)e^{-\theta s}v$, т.е. от возмущения не зависит. Передаточная функция фильтра выбирается из условия обеспечения правильной функции $Q(s)P(s)^{-1}$. Для рассматриваемой ПФ объекта (8.10) в [160] принято $Q(s) = (Ts + 1)^{-1}$, $T > 0$. Представленные в [160] результаты исследований показывают, что предлагаемый комбинированный

метод управления значительно улучшает возможность парирования возмущений по сравнению с алгоритмом управления без их оценки.

В работе [161] рассматривается сверхскоростной центробежный компрессор, используемый для подачи сжатого воздуха в топливный элемент. В качестве исходной модели, связывающей массу воздуха m в коллекторе компрессора с давлением p в нем приняты уравнения (см. например, [162, 163])

$$(8.11) \quad \dot{m} = q_{cp} - q_{out},$$

$$(8.12) \quad \dot{p} = \frac{\gamma RT}{M_{air}V}(q_{cp} - q_{out}),$$

где q_{cp} и q_{out} – массовые потоки воздуха, выходящего из компрессора и коллектора соответственно, T – температура газа в коллекторе; M_{air} – молярная масса атмосферного воздуха; γ – показатель адиабаты воздуха, R – универсальная газовая постоянная, V – объем полости коллектора. Значение q_{out} зависит от ряда переменных, в том числе от управляющей величины θ – положения клапана [163]. После преобразований и упрощающих предположений (8.12) приводится к виду

$$(8.13) \quad \dot{p} = f_1 + b_1\theta,$$

где

$$f_1 = \frac{\gamma RT}{M_{air}} q_{cp},$$

а b_1 – нелинейная функция от p .

В центробежных компрессорах зависимость массового расхода q_c от угловой скорости вращения ротора ω и давления p выражается нелинейной функцией $q_c = h(\omega, p)$, вид и параметры которой весьма сложно получить. В [161] используется упрощенная модель

$$(8.14) \quad \dot{q}_{cp} = \frac{\partial h(\omega, p)}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial h(\omega, p)}{\partial \omega} \dot{\omega},$$

а для описания динамики угловой скорости берется апериодическое звено первого порядка

$$(8.15) \quad T_m \dot{\omega} + \omega = \omega^*$$

с некоторой постоянной времени T_m (получаемой экспериментально) и заданным значением угловой скорости ω^* . Поэтому (8.14) записывается в виде

$$(8.16) \quad \dot{q}_{cp} = f_2 + b_2\omega^*,$$

где

$$f_2 = \frac{\partial h(\omega, p)}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial h(\omega, p)}{\partial \omega} \frac{\omega}{T_m},$$

$$b_2 = \frac{1}{T_m} \frac{\partial h(\omega, p)}{\partial \omega}.$$

Для оценивания в реальном времени поведения объекта и внешних возмущений в [161] используется расширенный наблюдатель состояния. С этой целью вводятся переменные $y_1 = p$, $y_2 = q_{cp}$, $u_1 = \theta$, $u_2 = \omega^*$, $x_{1,i} = y_i$, $x_{2,i} = \dot{f}_i$, $h_i = \dot{f}_i$, $i = 1, 2$. С учетом введенных обозначений уравнения (8.13), (8.16) записываются в виде

$$(8.17) \quad \begin{cases} \dot{x}_{1,i} = x_{2,i} + b_i u_i, & y = x_{1,i}, \\ \dot{x}_{2,i} = h_i, & i = 1, 2. \end{cases}$$

Для системы (8.17) строится наблюдатель состояния

$$(8.18) \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}}_{1,i} = x_{2,i} + l_{1,i}(x_{1,i} - \hat{x}_{1,i}) + b_i u_i, \\ \dot{\hat{x}}_{2,i} = l_{2,i}(x_{1,i} - \hat{x}_{1,i}), \end{cases}$$

коэффициенты усиления $l_{i,j}$ которого выбираются стандартным образом на основе желаемого расположения полюсов наблюдателя.

Полученные оценки используются в пропорционально-дифференциальном алгоритме управления

$$(8.19) \quad u_i = b_i^{-1}(k_i(r_i - \hat{x}_{1,i}) - \dot{\hat{x}}_{2,i} + \dot{r}_i),$$

где k_i – коэффициент усиления регулятора, r_i – задающее воздействие по соответствующей переменной. Параметры b_1, b_2 определяются линеаризацией относительно рабочей точки на основе экспериментальных данных.

В [161] приводятся результаты экспериментальной проверки предложенного метода управления на лабораторной установке, включающей центробежный компрессор, коллекторы, клапаны, контроллер реального времени, датчики, воздушный фильтр и т.д., которые показали работоспособность предложенной схемы управления. Выполнено экспериментальное сравнение работы предложенного и стандартного пропорционально-интегрального регуляторов.

Робастный синтез системы управления парогенератора, подверженного внешним возмущениям, опирающийся на теорию систем с разделяемыми движениями с использованием глубоких обратных связей и разрывных управлений [164–166], представлен в [167]. В качестве исходной, принята модель третьего порядка

$$\begin{aligned} C_n \dot{P}_T &= k_s \sqrt{P_D - P_T} - k_\mu P_T q, \\ C_b \dot{P}_D &= k_m D_Q - k_s \sqrt{P_D - P_T}, \\ T_b \dot{D}_Q &= -D_Q + u, \end{aligned}$$

в которой P_T – давление пара перед управляющим клапаном, P_D – давление пара на выходе из котла, D_Q – тепловой поток печи, q – угол открытия клапана подачи пара на турбину, u – управляющее воздействие, меняющее расход топлива в топке, $C_n, k_s, k_\mu, k_m, C_b, T_b$ – постоянные параметры, которые считаются неизвестными. Неизвестной считается также величина q ,

которая рассматривается как неизмеряемое внешнее возмущение. Ставится задача обеспечения, с некоторого момента времени t^* , заданного ограничения на ошибку слежения $e = P_T - P_{T_d}$, где P_{T_d} – требуемая величина давления, причем только рассогласование $e(t)$ может быть измерено.

После ряда преобразований исходная задача слежения сводится к стабилизации системы

$$(8.20) \quad \begin{aligned} \dot{e} &= -k_1 e + \bar{P}_D, \\ \dot{\bar{P}}_D &= -k_2 \bar{P}_D + \bar{D}_Q, \\ \dot{\bar{D}}_Q &= -k_3 \bar{D}_Q + \bar{z}, \\ \dot{\bar{z}} &= v + \eta(t), \end{aligned}$$

где \bar{P}_D , \bar{D}_Q , \bar{z} – новые переменные, введенные при преобразовании, v – (фиктивное) управляющее воздействие, η – неизмеряемое ограниченное возмущение.

Стабилизирующее управление v выбрано в релейной форме $v = -M \operatorname{sign} \bar{z}$, что обеспечивает возникновение скользящего режима на поверхности $\bar{z} \equiv 0$. Поскольку \bar{z} непосредственно не измеряется, используется ее оценка, полученная наблюдателем пониженного (третьего) порядка для системы (8.20).

В [167] выполнено аналитическое исследование системы с предложенным алгоритмом управления и приведены результаты моделирования для конкретных параметров парогенератора и вида возмущений.

9. Заключение

В данной статье представленные в [1] теоретические результаты и методы синтеза наблюдателей возмущений дополняются обзором их применений при решении прикладных задач управления. Рассмотрены такие приложения, как управление судами и подводными аппаратами, управление летательными аппаратами, роботами-манипуляторами, подавление узкополосных вибрационных колебаний, оценивание и подавление возмущений в электротехнических системах, управление автомобилями и их узлами, а также некоторые приложения к промышленным и медицинским системам.

Следует заметить, что многие из представленных в настоящей статье публикаций содержат в себе не только применение известных теоретических результатов к прикладным задачам, но и предлагают новые, достаточно широкие подходы и методы синтеза. Поэтому далеко не всегда удается атрибутировать статью как “теоретическую” или “прикладную”, что, конечно, проявилось при делении обзора на части 1 и 2, которое, в известной степени, условно.

Заметим также большой интерес исследователей к публикациям, имеющим прикладную направленность. Так, статья [82] к моменту написания обзора получила 2396 цитирований в системе Scopus (в среднем – более 200 цитирований в год), статья [146] – 1454 цитирования, статья [63] – 886 цитирований, статья [37] – 760 цитирований, работа [2] – 653 цитирования в течение

четырёх лет с момента выхода, статьи [123] – 606, [117] – 398 цитирований, что выводит публикации по практическому применению наблюдателей возмущений в число наиболее востребованных среди работ по автоматическому управлению. Несомненно, интерес к данной тематике со стороны теоретиков и разработчиков систем управления будет возрастать и в дальнейшем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андриевский Б.Р., Фуртат И.Б.* Наблюдатели возмущений. Методы и приложения. Часть 1. Методы // *АиТ*. 2020. № 9. С. 3–61.
Andrievsky B.R., Furtat I.B. Disturbance Observers: Methods and Applications. I. Methods. 2020. Vol. 81. No. 9. P. 1563–1610.
2. *Chen W.-H., Yang J., Guo L., Li S.* Disturbance-Observer-Based Control and Related Methods – An Overview // *IEEE T. Ind. Electron.* 2016. V. 63. No. 2. P. 1083–1095.
3. *Zheng Q., Gao Z.* Active Disturbance Rejection Control: Some Recent Experimental and Industrial Case Studies // *Control Theory and Technology*. 2018. V. 16. No. 4. P. 301–313.
4. *Jordán M.A., Bustamante J.L.* A Speed-Gradient Adaptive Control with State/Disturbance Observer for Autonomous Subaquatic Vehicles // *Proc. 45th IEEE Conf. on Decision and Control (CDC 2006), San Diego, CA, USA. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2006. 13–15 Dec.* P. 2008–2013.
5. *Фрадков А.Л.* Схема скоростного градиента и ее применения в задачах адаптивного управления // *АиТ*. 1979. № 9. С. 90–101.
Fradkov A.L. A Scheme of Speed Gradient and Its Application in Problems of Adaptive Control // *Autom. Remote Control*. 1979. V. 40. No. 9. P. 1333–1342.
6. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
7. *Андриевский Б.Р., Стоцкий А.А., Фрадков А.Л.* Алгоритмы скоростного градиента в задачах управления и адаптации. Обзор // *АиТ*. 1988. № 12. С. 3–39.
Andrievsky B.R., Stotsky A.A., Fradkov A.L. Velocity Gradient Algorithms in Control and Adaptation. A Survey. // *Autom. Remote Control*. 1988. V. 49. No. 12. P. 1533–1564.
8. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
9. *Andrievsky B.* Speed-Gradient Method in Control Problems for Mobile Mechanical Systems // *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace*. 2019. V. 10. No. 4. P. 617–641.
10. *Jordán M.A., Bustamante J.L., Pinna-Cortinas J.M.* Design of Adaptive Control Systems for ROVs Using Inverse Dynamics and State/Disturbance Observation // *Proc. 6th Argentine Symp. Computing Technology (ASSE 2005) Rosario, Argentina. SADIO, 2005. Aug. 29–31.*
11. *Basturk H.I., Doblack J., Krstic M.* Air Cushion Adaptive Disturbance Cancellation for the Reduction of Wave Induced Motion of Ramp-Connected Ships // *Proc. 11th Int. Conf. Fast Sea Transportation (FAST 2011). Amer. Soc. Naval Engineers, 2011.* P. 114–121.
12. *Sorensen A.J., Egeland O.* Design of Ride Control System for Surface Effect Ships Using Dissipative Control // *Automatica*. 1995. Feb. V. 31. No. 2. P. 183–199.

13. *Никифоров В.О.* Наблюдатели внешних детерминированных возмущений I. Объекты с известными параметрами // *АиТ.* 2004. № 10. С. 13–24. URL: <http://mi.mathnet.ru/at1642>.
Nikiforov V.O. Observers of External Deterministic Disturbances. I. Objects with Known Parameters // *Autom. Remote Control.* 2004. V. 65. No. 10. P. 1531–1541.
14. *Никифоров В.О.* Наблюдатели внешних детерминированных возмущений II. Объекты с неизвестными параметрами // *АиТ.* 2004. № 11. С. 40–48. URL: <http://mi.mathnet.ru/at1658>.
Nikiforov V.O. Observers of External Deterministic Disturbances. II. Objects With Unknown Parameters // *Autom. Remote Control.* 2004. V. 65. No. 11. P. 1724–1732.
15. *Basturk H.I., Krstic M.* Adaptive Wave Cancelation by Acceleration Feedback for Ramp-Connected Air Cushion-Actuated Surface Effect Ships // *Automatica.* 2013. V. 49. P. 2591–2602.
16. *Du J., Hu X., Krstić M., Sun Y.* Robust Dynamic Positioning of Ships with Disturbances Under Input Saturation // *Automatica.* 2016. V. 73. P. 207–214.
17. *Swaroop D., Hedrick J.K., Yip P.P., Gerdes J.C.* Dynamic Surface Control for a Class of Nonlinear Systems // *IEEE T. Automat. Contr.* 2000. V. 45. No. 10. P. 1893–1899.
18. *Fossen T.I., Strand J.P.* Passive Nonlinear Observer Design for Ships Using Lyapunov Methods: Full-Scale Experiments with a Supply Vessel // *Automatica.* 1999. Jan. V. 35. No. 1. P. 3–16.
19. *Hu X., Du J., Sun Y.* Robust Adaptive Control for Dynamic Positioning of Ships // *IEEE J. Oceanic Eng.* 2017. Oct. V. 42. No. 4. P. 826–835.
20. *Massey T., Shtessel Y.* Continuous Traditional and High-Order Sliding Modes for Satellite Formation Control // *J. Guid. Control Dynam.* 2005. July–Aug. V. 28. No. 4. P. 826–831.
21. *Levant A.* Universal SISO Sliding-Mode Controllers with Finite-Time Convergence // *IEEE T. Automat. Contr.* 2001. Sep. V. 49. No. 9. P. 1447–1451.
22. *Уткин В.И.* Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой. Наука: М., 1974.
23. *Utkin V., Guldner J., Shi J.* Sliding Mode Control in Electromechanical Systems. London: Taylor & Francis, 1999.
24. *Андреевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. СПб: Наука, 1999.
25. *Андреевский Б.Р., Бобцов А.А., Фрадков А.Л.* Методы анализа и синтеза нелинейных систем управления. М.–Ижевск: ИКИ, 2018.
26. *Brown M., Shtessel Y.B.* Disturbance Rejection Techniques for Finite Reaching Time Continuous Sliding Mode Control // *Proc. American Control Conf. (ACC 2001), Arlington, Virginia, USA.* V. 6. Piscataway, NJ: IEEE Publications, 2001. June, 24. P. 4998–5003.
27. *Besnard L., Shtessel Y.B., Landrum B.* Quadrotor Vehicle Control Via Sliding Mode Controller Driven By Sliding Mode Disturbance Observer // *J. Franklin I.* 2012. Vol. 349. No. 2. P. 658–684.
28. *Besnard L., Shtessel Y.B., Landrum B.* Control of a Quadrotor Vehicle Using Sliding Mode Disturbance Observer // *Proc. AIAA Conf. Guidance, Navigation and Control.* 2007. Aug. P. Paper AIAA–2007–6316.

29. *Hall C.E., Shtessel Y.B.* Sliding Mode Disturbance Observer-Based Control for a Reusable Launch Vehicle // *J. Guid. Control Dynam.* 2006. Nov.–Dec. V. 29. No. 6. P. 1315–1328.
30. *Lee H., Huang X., Yin H.* Enhanced Sliding Mode Control for Missile Autopilot Based on Nonlinear Disturbance Observer // *Proc. Int. Joint Conf. Computational Sciences and Optimization (CSO 2009)*, Sanya, Hainan, China. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2009. 24–26 Apr. P. 210–213.
31. *Goldberg D.E.* Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. Boston, MA, USA: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1989.
32. *Расстригин Л.А.* Статистические методы поиска. М.: Наука, 1968.
33. *Nichols R.A., Reichert R.T., Rugh W.J.* Gain Scheduling for H-Infinity Controllers: A Flight Control Example // *IEEE T. Contr. Syst. Technol.* 1993. Jun. V. 1. No. 2. P. 69–79.
34. *TC ISO/TC 20/SC 8.* Flight Dynamics – Concepts, Quantities and Symbols – Part 1: Aircraft Motion Relative to the Air. 1988. Apr.
URL: <https://www.iso.org/ru/standard/5699.html>.
35. *ГОСТ 20058-80.* Динамика летательных аппаратов в атмосфере: Термины, определения и обозначения. М.: Изд-во стандартов, 1981.
36. *Халил Х.К.* Нелинейные системы / Под. ред. А.Л. Фрадкова. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика: Ин-т компьютерных исследований, 2009.
37. *Xu H., Mirmirani M.D., Ioannou P.A.* Adaptive Sliding Mode Control Design for a Hypersonic Flight Vehicle // *J. Guid. Control Dynam.* 2004. Sep.–Oct. V. 27. No. 5. P. 829–838.
38. *Yang J., Li S., Sun C., Guo L.* Nonlinear-Disturbance-Observer-Based Robust Flight Control for Airbreathing Hypersonic Vehicles // *IEEE T. Aerosp. Electron. Syst.* 2013. V. 49. No. 2. P. 1263–1275.
39. *Буков В.Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во научной литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006.
40. *Yang J., Chen W.-H., Li S.* Non-Linear Disturbance Observer-Based Robust Control for Systems with Mismatched Disturbances/Uncertainties // *IET Control Theory A.* 2011. V. 5. No. 18. P. 2053–2062.
41. *Levant A.* High-Order Sliding Models, Differentiation and Output-Feedback Control // *Int. J. Control.* 2003. June–July. V. 9. No. 10. P. 924–941.
42. *Levant A.* Quasi-Continuous High-Order Sliding-Mode Controllers // *IEEE T. Automat. Contr.* 2005. Nov. V. 50. No. 11. P. 1812–1816.
43. *Shtessel Y.B., Shkolnikov I.A., Levant A.* Guidance and Control of Missile Interceptor Using Second-Order Sliding Modes // *IEEE T. Aerosp. Electron. Syst.* 2009. V. 45. No. 1. P. 110–124.
44. *Pyrkin A.A., Bobtsov A.A., Kolyubin S.A., et al.* Output Controller for Quadcopters with Wind Disturbance Cancellation // *Proc. 2014 IEEE Conf. on Control Applications (CCA 2014)*, Antibes, France. IEEE, 2014. P. 166–170.
45. *Бобцов А.А.* Робастное управление по выходу линейной системой с неопределенными коэффициентами // *АиТ.* 2002. № 11. С. 108–117.
URL: <http://mi.mathnet.ru/at2180>.
Bobtsov A.A. Robust Output-Control for a Linear System with Uncertain Coefficients // *Autom. Remote Control.* 2002. V. 63. No. 11. P. 1794–1802.

46. *Бобцов А.А., Капитонов А.А., Николаев Н.А.* Управление по выходу нелинейными системами с неучтенной динамикой // *АиТ.* 2010. № 12. С. 3–10.
Bobtsov A.A., Kapitonov A.A., Nikolaev N.A. Control Over the Output of Nonlinear Systems with Unaccounted-Dynamics // *Autom. Remote Control.* 2010. V. 71. No. 12. P. 2497–2504.
47. *Caverly R., Forbes J.R., Danowsky B., Suh P.M.* Gust-Load Alleviation of a Flexible Aircraft using a Disturbance Observer // *Proc. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conf., AIAA SciTech Forum, (AIAA 2017-1718).* Grapevine, Texas, USA: AIAA, 2017. P. 1–15.
48. *Schrijver E., van Dijk J.* Disturbance Observers for Rigid Mechanical Systems: Equivalence, Stability, and Design // *J. Dyn. Sys., Meas., Control.* 2002. Dec. Vol. 124. No. 4. P. 539–548.
49. *Sun J., Wang C., Xin R.* Anti-Disturbance Study of Position Servo System Based on Disturbance Observer // *IFAC-PapersOnLine.* 2018. V. 51. No. 4. P. 202–207.
50. *Бесекеерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического регулирования. Изд. 4-е, перераб. и дополн. СПб: “Профессия”, 2003. 752 С.
51. *Demircioglu H., Basturk H.I.* Adaptive Attitude and Altitude Control of a Quadrotor Despite Unknown Wind Disturbances // *Proc. 56th Annual Conf. Decision and Control (CDC 2017), Melbourne, Australia.* V. 2018-January. 2018. P. 274–279.
52. *Umeno T., Hori Y.* Robust Speed Control of DC Servomotors Using Modern Two Degrees-of-Freedom Controller Design // *IEEE T. Ind. Electron.* 1991. Oct. V. 38. No. 5. P. 363–368.
53. *Umeno T., Kaneko T., Hori Y.* Robust Servosystem Design with Two Degrees of Freedom and Its Application to Novel Motion Control of Robot Manipulators // *IEEE T. Ind. Electron.* 1993. Oct. V. 40. No. 5. P. 473–485.
54. *Попов Е.П.* Теория линейных систем автоматического регулирования и управления: Учебное пособие для вузов. – Второе издание, переработанное и дополненное. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1989.
55. *Ohishi K., Ohnishi K., Miyachi K.* Torque-Speed Regulation of DC Motor Based on Load Torque Estimation Method // *Proc. Int. Power Electronics Conf. (IPEC-Tokyo '83) Tokyo, Japan / Ed. by D. Gakkai. Inst. Electrical Engineers of Japan,* 1983. March 27–31. V. 2. P. 1209–1218.
56. *Ohnishi K.* New Development of Servo Technology in Mechatronics // *IEEE T. Ind. Applicat.* 1987. Vol. 107. No. 1. P. 83–86.
57. *Elmali H., Olgac N.* Sliding Mode Control With Perturbation Estimation (SMCPE): A New Approach // *Int. J. Control.* 1992. V. 56. No. 4. P. 923–941.
58. *Eom K., Suh I., Chung W., Oh S.-R.* Disturbance Observer Based Force Control of Robot Manipulator Without Force Sensor // *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation.* V. 4. 1998. P. 3012–3017.
59. *Hacksel P., Salcudean S.* Estimation Of Environment Forces and Rigid-Body Velocities Using Observers // *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation.* V. 2. 1994. P. 931–936.
60. *Lewis F., Abdallah C., Dawson D.* Control of Robot Manipulators. Macmillan Publishing Company, 1993.
61. *Oh H., Chung W.* Disturbance-Observer-Based Motion Control of Redundant Manipulators Using Inertially Decoupled Dynamics // *IEEE/ASME T. Mechatronics.* 1999. V. 4. No. 2. P. 133–146.

62. *Johnson C.* Accommodation Of Disturbances in Optimal Control Problems // Int. J. Control. 1972. V. 15. No. 2. P. 209–231.
63. *Chen W.-H., Ballance D.J., Gawthrop P.J., O'Reilly J.* A Nonlinear Disturbance Observer for Robotic Manipulators // IEEE T. Ind. Electron. 2000. Aug. V. 47. No. 4. P. 932–938.
64. *Norrlof M.* An Adaptive Iterative Learning Control Algorithm with Experiments on An Industrial Robot // IEEE T. Robot. Automat. 2002. V. 18. No. 2. P. 245–251.
65. *Moore K.* Iterative Learning Control – An Expository Overview // Applied and Computational Controls, Signal Processing and Circuits. 1998. V. 1.
66. *Bien Z., Xu J.-X.* Iterative Learning Control: Analysis, Design, Integration and Application. Kluwer Academic Publishers, 1998.
67. *Emelianova J., Pakshin P., Galkowski K., Rogers E.* Stability of Nonlinear Discrete Repetitive Processes with Markovian Switching // Syst. Control Lett. 2015. V. 75. P. 108–116.
68. *Квакернак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1986.
69. *Краснова С.А., Уткин В.А.* Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. М.: Наука, 2006.
70. *Kochetkov S.A., Krasnova S.A., Utkin V.A.* Block Design of Robust Electromechanical Systems // Proc. IEEE Int. Workshop on Variable Structure Systems. V. 2016-July. 2016. P. 86–91.
71. *Краснова С.А.* Каскадный синтез системы управления манипулятором с учетом динамики электроприводов // АиТ. 2001. № 11. С. 51–72.
Krasnova S.A. Cascade Design of a Manipulator Control System with Consideration for Dynamics of Electric Drives // Autom. Remote Control. 2001. V. 62. No. 11. P. 1803–1824.
72. *Krasnova S.A., Utkin V.A., Utkin A.V.* Direct Method of Manipulator Endpoint Control Synthesis // IFAC Proc. Volumes. 2008. V. 41. No. 2. P. 2388–2393.
73. *Zeinali M., Notash L.* Adaptive Sliding Mode Control With Uncertainty Estimator for Robot Manipulators // Mech. Mach. Theory. 2010. V. 45. No. 1. P. 80–90.
74. *Islam S., Liu X.* Robust Sliding Mode Control for Robot Manipulators // IEEE Trans. Ind. Electron. 2011. V. 58. No. 6. P. 2444–2453.
75. *Sun T., Pei H., Pan Y., et al.* Neural Network-Based Sliding Mode Adaptive Control for Robot Manipulators // Neurocomputing. 2011. V. 74. No. 14–15. P. 2377–2384.
76. *Broomhead D.H., Lowe D.* Multivariable Functional Interpolation and Adaptive Networks // Complex Systems. 1988. V. 2. P. 321–355.
77. *Madoński R., Kordasz M., Sauer P.* Application Of a Disturbance-Rejection Controller for Robotic-Enhanced Limb Rehabilitation Trainings // ISA Trans. 2014. V. 53. No. 4. P. 899–908.
78. *Toniatti G., Schiavi R., Bicchi A.* Design and Control of a Variable Stiffness Actuator for Safe and Fast Physical Human/Robot Interaction // Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation (ICRA 2005), Barcelona, Spain. V. 2005. 2005. P. 526–531.
79. *Cheng G., Peng K.* Robust Composite Nonlinear Feedback Control with Application to a Servo Positioning System // IEEE Trans. Ind. Electron. 2007. V. 54. No. 2. P. 1132–1140.

80. *Lin Z., Pachter M., Banda S.* Toward Improvement of Tracking Performance-Nonlinear Feedback for Linear System // *Int. J. Control.* 1998. May. V. 70. No. 1. P. 1–11.
81. *Zhao S., Gao Z.* An Active Disturbance Rejection Based Approach to Vibration Suppression in Two-Inertia Systems // *Asian J. Control.* 2013. V. 15. No. 2. P. 350–362.
82. *Han J.* From PID to Active Disturbance Rejection Control // *IEEE Trans. Ind. Electron.* 2009. V. 56. No. 3. P. 900–906.
83. *Zheng Q., Chen Z., Gao Z.* A Practical Approach to Disturbance Decoupling Control // *Control Eng. Pract.* 2009. V. 17. No. 9. P. 1016–1025.
84. *Zheng Q., Gao L.Q., Gao Z.* On Validation of Extended State Observer Through Analysis and Experimentation // *J. Dyn. Syst., Meas., Control.* 2012. Jan. Vol. 134. No. 2.
85. *Miklosovic R., Radke A., Gao Z.* Discrete Implementation and Generalization of the Extended State Observer // *Proc. American Control Conf. (ACC 2006).* V. 2006. 2006. P. 2209–2214.
86. *Silva A.C., Landau I.D., Airimioaie T.-B.* Direct Adaptive Rejection of Unknown Time-Varying Narrow Band Disturbances Applied to a Benchmark Problem // *Europ. J. Control.* 2013. July. V. 19. No. 4. P. 326–336.
87. *Landau I.D., Silva A.C., Airimioaie T.-B., et al.* Benchmark on Adaptive Regulation–Rejection of Unknown/Time-Varying Multiple Narrow Band Disturbances // *Europ. J. Control.* 2013. July. V. 19. No. 4. P. 237–252.
88. *Francis B.A., Wonham W.M.* The Internal Model Principle of Control Theory // *Automatica.* 1976. V. 12. No. 5. P. 457–465.
89. *Anderson B.D.O.* From Youla–Kucera to Identification, Adaptive and Nonlinear Control // *Automatica.* 1998. Dec. V. 34. No. 12. P. 1485–1506.
90. *Landau I.D., Alma M., Constantinescu A., et al.* Adaptive Regulation – Rejection Of Unknown Multiple Narrow Band Disturbances (A Review on Algorithms and Applications) // *Control Eng. Pract.* 2011. V. 19. No. 10. P. 1168–1181.
91. *Landau I.D., Alma M., Martinez J.J., Buche G.* Adaptive Suppression of Multiple Time-Varying Unknown Vibrations Using an Inertial Actuator // *IEEE Trans. Control Syst. Technol.* 2010. Nov. V. 19. No. 6. P. 1327–1338.
92. *Landau I.D., Constantinescu A., Rey D.* Adaptive Narrow Band Disturbance Rejection Applied to an Active Suspension – An Internal Model Principle Approach // *Automatica.* 2005. Apr. V. 41. No. 4. P. 563–574.
93. *Landau I.D., Constantinescu A., Alma M.* Adaptive Regulation – Rejection of Unknown Multiple Narrow Band Disturbances // *Proc. 17th Mediterran. Conf. Control and Automation (MED'09), Thessaloniki, Greece.* IEEE, 2009. 24–26 June. P. 1056–1065.
94. *Airimioaie T.-B., Landau I.D.* Robust and Adaptive Active Vibration Control Using an Inertial Actuator // *IEEE Trans. Ind. Electron.* 2016. Oct. V. 63. No. 10. P. 6482–6489.
95. *Aranovskiy S., Freidovich L.B.* Adaptive Compensation of Disturbances Formed As Sums of Sinusoidal Signals with Application to an Active Vibration Control Benchmark // *Europ. J. Control.* 2013. July. V. 19. No. 4. P. 253–265.
96. *Ohishi K., Nakao M., Ohnishi K., Miyachi K.* Microprocessor-Controlled DC Motor for Load-Insensitive Position Servo System // *IEEE Trans. Ind. Electron.* 1987. Vol. IE-34. No. 1. P. 44–49.

97. *Yokoyama T., Kawamura A.* Disturbance Observer Based Fully Digital Controlled PWM Inverter for CVCF Operation // IEEE Trans. Power Electron. 1994. V. 9. No. 5. P. 473–480.
98. *Gokhale K., Kawamura A., Hoft R.* Dead Beat Microprocessor Control of PWM Inverter for Sinusoidal Output Waveform Synthesis // IEEE Trans. Ind. Appl. 1987. Vol. IA-23. No. 5. P. 901–910.
99. *Kempf C.J., Kobayashi S.* Discrete-Time Disturbance Observer Design for Systems with Time Delay // Proc. 4th Int. Workshop on Advanced Motion Control (AMC'96-MIE), Tsu, Mie, Japan. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 1996. 18–21 March. P. 332–337.
100. *Kempf C.J., Kobayashi S.* Disturbance Observer and Feedforward Design for a High-Speed Direct-Drive Positioning Table // IEEE Trans. Control Syst. Technol. 1999. Sep. V. 7. No. 5. P. 513–526.
101. *Lee H.S., Tomizuka M.* Robust Motion Controller Design for High-Accuracy Positioning Systems // IEEE Trans. Ind. Electron. 1996. V. 43. No. 1. P. 48–55.
102. *Goodwin G.C., Sin K.S.* Adaptive Filtering Prediction and Control. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1984.
103. *Dash P., Jena R., Panda G., Routray A.* An Extended Complex Kalman Filter for Frequency Measurement of Distorted Signals // IEEE Trans. Instrum. Meas. 2000. V. 49. No. 4. P. 746–753.
104. *Chen X., Su C.-Y., Fukuda T.* A Nonlinear Disturbance Observer For Multivariable Systems and Its Application to Magnetic Bearing Systems // IEEE Trans. Control Syst. Technol. 2004. V. 12. No. 4. P. 569–577.
105. *Mattavelli P.* An Improved Deadbeat Control for UPS Using Disturbance Observers // IEEE Trans. Ind. Electron. 2005. Feb. V. 52. No. 1. P. 206–212.
106. *Luenberger D.G.* An Introduction to Observers // IEEE Trans. Automat. Control. 1971. Dec. V. 16. P. 596–602.
107. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
108. *Krasnova S.A., Utkin V.A.* Prelimit Implementation of States and Disturbances Observer on Sliding Modes // Proc. 2015 Int. Workshop on Recent Advances in Sliding Modes, RASM 2015. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2015. 9–11 Apr.
109. *Чиликин М.Г., Ключев В.И., Сандлер А.С.* Теория автоматизированного электропривода. М.: Энергия, 1979.
110. *Уткин В.А.* Задачи управления асинхронным электроприводом // АиТ. 1993. № 12. С. 53–65.
Utkin V.A. Problems of the Control of Asynchronous Electric Drive // Autom. Remote Control. 1993. V. 54. No. 12. P. 1769–1779.
111. *Краснова С.А., Мысик Н.С.* Каскадный синтез наблюдателя состояния с нелинейными корректирующими воздействиями // АиТ. 2014. № 2. С. 106–128.
Krasnova S.A., Mysik N.S. Cascade Synthesis of a State Observer with Nonlinear Correcting Influences // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 2. P. 263–280.
112. *Mohamed Y.A.-R.I.* Design and Implementation of a Robust Current-Control Scheme for a PMSM Vector Drive With a Simple Adaptive Disturbance Observer // IEEE Trans. Ind. Electron. 2007. Aug. V. 54. No. 4. P. 1981–1988.
113. *Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л.* Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления. М.: Наука, 1981.

114. *Mohamed Y.-R., El-Saadany E.* Robust High Bandwidth Discrete-Time Predictive Current Control with Predictive Internal Model – A Unified Approach For Voltage-Source PWM Converters // IEEE Trans. Power Electron. 2008. V. 23. No. 1. P. 126–136.
115. *Habetler T.G.* A Space Vector-Based Rectifier Regulator for AC/DC/AC Converters // IEEE Trans. Power Electron. 1993. V. 8. No. 1. P. 30–36.
116. *Yazdani D., Mojiri M., Bakhshai A., Joós G.* A Fast and Accurate Synchronization Technique for Extraction of Symmetrical Components // IEEE Trans. Power Electron. 2009. V. 24. No. 3. P. 674–684.
117. *Li S., Liu Z.* Adaptive Speed Control for Permanent-Magnet Synchronous Motor System with Variations of Load Inertia // IEEE Trans. Ind. Electron. 2009. V. 56. No. 8. P. 3050–3059.
118. *Blaschke F.* Principle Of Field Orientation as Used in the New Transvektor Control System for Induction Machines, (Das Prinzip der Feldorientierung, die Grundlage fuer die TRANSVEKTOR- Regelung von Drehfeldmaschinen) // Siemens-Z. 1971. V. 45. No. 10. P. 757–760.
119. *Волков Н.И., Миловзоров В.П.* Электромашинные устройства автоматики: Учебник для вузов. М.: Высш. шк., 1986.
120. *Lasca C., Boldea I., Blaabjerg F.* A Class of Speed-Sensorless Sliding-Mode Observers for High-Performance Induction Motor Drives // IEEE Trans. Ind. Electron. 2009. V. 56. No. 9. P. 3394–3403.
121. *She J.-H., Xin X., Pan Y.* Equivalent-Input-Disturbance Approach analysis and Application to Disturbance Rejection in Dual-Stage Feed Drive Control System // IEEE/ASME Trans. Mechatron. 2011. V. 16. No. 2. P. 330–340.
122. *Schuhmann T., Hofmann W., Werner R.* Improving Operational Performance Of Active Magnetic Bearings Using Kalman Filter and State Feedback Control // IEEE Trans. Ind. Electron. 2012. V. 59. No. 2. P. 821–829.
123. *Yang J., Li S., Yu X.* Sliding-Mode Control for Systems with Mismatched Uncertainties via a Disturbance Observer // IEEE Trans. Ind. Electron. 2013. V. 60. No. 1. P. 160–169.
124. *Chen W.-H.* Nonlinear Disturbance Observer Based Control for Nonlinear Systems with Harmonic Disturbances // IFAC Proc. Volumes. 2001. V. 34. No. 6. P. 329–334. (Proc. 5th IFAC Sympos. on Nonlinear Control Systems 2001, St. Petersburg, Russia, 4–6 July 2001).
125. *Chen W.-H.* Disturbance Observer Based Control for Nonlinear Systems // IEEE/ASME Trans. Mechatron. 2004. Dec. V. 9. No. 4. P. 706–710.
126. *Chen W.-H., Yang J., Guo L., Li S.* Disturbance-Observer-Based Control and Related Methods – An Overview // IEEE Trans. Ind. Electron. 2016. Feb. V. 63. No. 2. P. 1083–1095.
127. *Matthews G., DeCarlo R.* Decentralized Tracking for a Class of Interconnected Nonlinear Systems Using Variable Structure Control // Automatica. 1988. V. 24. No. 2. P. 187–193.
128. *Utkin V., Shi J.* Integral Sliding Mode in Systems Operating Under Uncertainty Condition // Proc. Conf. Decision Control (CDC'96) Koba, Japan. 1996. Dec. P. 4591–4596.
129. *Michail K., Zolotas A., Goodall R.* Optimised Sensor Selection for Control and Fault Tolerance Of Electromagnetic Suspension Systems: A Robust Loop Shaping Approach // ISA Trans. 2014. V. 53. No. 1. P. 97–109.

130. *Yang J., Chen W.-H., Li S. et al.* Disturbance/Uncertainty Estimation and Attenuation Techniques in PMSM Drives – A Survey // *IEEE Trans. Ind. Electron.* 2017. V. 64. No. 4. P. 3273–3285.
131. *Venhovens P., Naab K.* Vehicle Dynamics Estimation Using Kalman Filters // *Vehicle Syst. Dyn.* 1999. V. 32. No. 2. P. 171–184.
132. *Dobner D.J.* Dynamic Engine Models for Control Development. Part 1: Nonlinear and Linear Model Formulation // *Application of Control Theory in the Automotive Industry* / Ed. by M. A. Dorgham. 1983. V. SP4 of Proc. Int. Association for Vehicle Design. P. 54–74.
133. *Smith J.M.* Closer Control of Loops with Dead Time // *Chem. Eng. Prog.* 1957. V. 53. No. 5. P. 217–219.
134. *Titov A.V., Pyrkin A.A., Bobtsov A.A., et al.* Output Adaptive Control for Active Suspension Rejecting Road Disturbance // *Proc. Int. Conf. Control Applications (CCA 2011)*, Denver, CO, USA. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2011. Sept. 28–30. P. 527–531.
135. *Бобцов А.А., Пыркин А.А.* Компенсация гармонического возмущения в условиях запаздывания по управлению // *Изв. РАН. Теория и системы управления.* 2008. № 4. С. 19–23.
136. *Бобцов А.А., Пыркин А.А.* Компенсация неизвестного синусоидального возмущения для линейного объекта любой относительной степени // *АиТ.* 2009. № 3. С. 114–122. URL: <http://mi.mathnet.ru/at436>.
Bobtsov A.A., Pyrkin A.A. Compensation of Unknown Sinusoidal Disturbances in Linear Plants of Arbitrary Relative Degree // *Autom. Remote Control.* 2009. V. 70. No. 3. P. 449–456.
137. *Lion P.M.* Rapid Identification of Linear and Nonlinear Systems // *AIAA J.* 1967. V. 18. No. 5. P. 1835–1842.
138. *Lindorff D.P., Carrol R.L.* Survey of Adaptive Control Using Lyapunov Design // *Int. J. Contr.* 1973. V. 18. No. 5. P. 897–914.
139. *Narendra K.S., Kudva P.* Stable Adaptive Schemes for System Identification and Control. Part I, II, // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1974. Vol. SMS-4. No. 6. P. 542–560.
140. *Gawthrop P.J.* *Continuous-Time Self-Tuning Control.* Letchworth, U.K.: Research Studies Press, 1987.
141. *Demircioglu H., Karasu E.* Generalized Predictive Control: A Practical Application and Comparison of Discrete and Continuous-Time Versions // *IEEE Contr. Syst. Mag.* 2000. V. 20. No. 5. P. 36–47.
142. *Fradkov A.L., Andrievsky B.* Combined Adaptive Controller for UAV Guidance // *Europ. J. Contr.* 2005. V. 11. No. 1. P. 71–79.
143. *Xue W., Bai W., Yang S., et al.* ADRC With Adaptive Extended State Observer and Its Application to Air-Fuel Ratio Control in Gasoline Engines // *IEEE Trans. Ind. Electron.* 2015. V. 62. No. 9. P. 5847–5857.
144. *Basturk H.I.* A Backstepping Approach for an Active Suspension System // *Proc. American Control Conf. (ACC 2016)*, Boston, MA, USA. AACC, 2016. July 6–8. P. 7579–7583.
145. *Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.* *Nonlinear and Adaptive Control Design.* Wiley, 1995.
146. *Ohnishi K., Shibata M., Murakami T.* Motion Control for Advanced Mechatronics // *IEEE/ASME Trans. Mechatron.* 1996. V. 1. No. 1. P. 56–67.

147. *Luenberger D.G.* Canonical Forms for Linear Multivariable Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1967. June. V. 12. No. 3. P. 290–293.
148. *Spong M.W., Corke P., Lozano R.* Nonlinear Control of the Reaction Wheel Pendulum // Automatica. 2001. V. 37. P. 1845–1851.
149. *Безнос А.В., Гришин А.А., Ленский А.В., Охоцимский Д.Е., Формальский А.М.* Управление при помощи маховика маятником с неподвижной точкой подвеса // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. № 1. С. 27–38.
150. *Андреевский Б.Р.* Глобальная стабилизация неустойчивого маятника с маховичным управлением // Сб. Управление большими системами. 2009. Т. Вып. 24. С. 258–280.
151. *Pyrkin A.A., Bobtsov A.A., Kapitanyuk Y.A., et al.* Adaptive Cancellation of Unknown Multiharmonic Disturbance For Nonlinear Plant With Input Delay // Proc. 19th Mediterranean Conf. Control Automation (MED 2011), Corfu, Greece. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2011. 20–23 June.
152. *Pyrkin A.A., Smyshlyaev A., Bekiaris-Liberis N., Krstic M.* Rejection of Sinusoidal Disturbance of Unknown Frequency for Linear System with Input Delay // Proc. American Control Conf. (ACC 2010), Baltimore, USA. IEEE, 2010. 30 June–2 July. P. 5688–5693.
153. *Roetenberg D., Luïnge H., Baten C., Veltink P.* Compensation of Magnetic Disturbances Improves Inertial and Magnetic Sensing of Human Body Segment Orientation // IEEE Trans. Neural Syst. Rehab. Eng. 2005. V. 13. No. 3. P. 395–405.
154. *Fast B., Miklosovic R., Radke A.* Active Disturbance Rejection Control of a MEMS Gyroscope // Proc. American Control Conf. (ACC 2008). 2008. P. 3746–3750.
155. *Zheng Q., Dong L., Lee D., Gao Z.* Active Disturbance Rejection Control for MEMS Gyroscopes // IEEE Trans. Control Syst. Technol. 2009. V. 17. No. 6. P. 1432–1438.
156. *Basturk H.I.* Observer-Based Boundary Control Design for the Suppression of Stick-Slip Oscillations in Drilling Systems With Only Surface Measurements // J. Dynamic Systems, Measurement, and Control. 2017. Oct. Vol. 139. P. 104501–7.
157. *Krstic M.* Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive and PDE Systems. Basel, Switzerland: Birkhäuser, 2012.
158. *Krstic M., Smyshlyaev A.* Backstepping Boundary Control for First-Order Hyperbolic PDEs and Application to Systems With Actuator and Sensor Delays // Syst. Control Lett. 2008. V. 57. No. 9. P. 750–758.
159. *Zhang H., Zhang G., Wang J. H.* H_∞ Observer Design for LPV Systems with Uncertain Measurements on Scheduling Variables: Application to an Electric Ground Vehicle // IEEE/ASME Trans. Mechatron. 2016. V. 21. No. 3. P. 1659–1670.
160. *Chen X., Li J., Yang J., Li S.* A Disturbance Observer Enhanced Composite Cascade Control with Experimental Studies // Int. J. Control, Automation and Systems. 2013. V. 11. No. 3. P. 555–562.
161. *Zhao D., Zheng Q., Gao F., et al.* Disturbance Decoupling Control of an Ultra-High Speed Centrifugal Compressor for the Air Management of Fuel Cell Systems // Int. J. Hydrogen Energ. 2014. V. 39. No. 4. P. 1788–1798.
162. *Vahidi A., Kolmanovskiy I., Stefanopoulou A.* Constraint Management in Fuel Cells: A Fast Reference Governor Approach // Proc. 2005, American Control Conf. (ACC 2005), Portland, OR, USA. 2005. V. 6. P. 3865–3870.
163. *Zhao D., Dou M., Blunier B., Miraoui A.* Control of an Ultra High Speed Centrifugal Compressor for the Air Management of Fuel Cell Systems // Conf. Record – IAS Annual Meeting (IEEE Industry Applications Society). 2012.

164. *Уткин В.А.* Метод разделения движений в задачах наблюдения // *АиТ.* 1990. № 3. С. 27–37.
Utkin V.A. Method of Separation of Motions in Observation Problems // *Autom. Remote Control.* 1990. V. 51. No. 3. P. 300–308.
165. *Уткин В.А.* Инвариантность и автономность в системах с разделяемыми движениями // *АиТ.* 2001. № 11. С. 73–94.
Utkin V.A. Invariance and Independence in Systems with Separable Motion // *Autom. Remote Control.* 2001. V. 62. No. 11. P. 1825–1843.
166. *Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В.* Блочный подход к анализу и синтезу инвариантных нелинейных систем слежения // *АиТ.* 2017. № 12. С. 26–53.
Krasnova S.A., Utkin V.A., Utkin A.V. Block Approach to Analysis and Design of the Invariant Nonlinear Tracking Systems // *Autom Remote Control.* 2017. V. 78. No. 12. P. 2120–2140.
167. *Уткин А.В., Уткин В.А.* Робастный синтез системы управления парогенератором при воздействии внешних возмущений // Сб. тр. XIV Междунар. науч. конф. “Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (Конференция Пятницкого)”, 30 мая–01 июня 2018 г. Изд.-во: ИПУ РАН, Москва. С. 445–448.
Utkin A.V., Utkin V.A. Robust Synthesis of the Control System of a Steam Generator Under the Action of External Disturbances // *Proc. 2018 14th Int. Conf. Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiys Conf.), STAB 2018.* 2018. P. 1–4.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 22.10.2019

После доработки 16.03.2020

Принята к публикации 25.05.2020

Стохастические системы

© 2020 г. В.М. АЗАНОВ, канд. физ.-мат. наук (azanov59@gmail.com),
А.Н. ТАРАСОВ (tarrapid@gmail.com)
(Московский авиационный институт)

ДВУСТОРОННЯЯ ОЦЕНКА ФУНКЦИИ БЕЛЛМАНА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УДЕРЖАНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ДИСКРЕТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ТРУБКЕ ПО КРИТЕРИЮ ВЕРОЯТНОСТИ¹

Исследуется задача оптимального управления дискретной стохастической системой с критерием вероятности удержания траекторий системы на заранее заданных множествах. С помощью метода динамического программирования и поверхностей уровня 1 и 0 функции Беллмана находятся двусторонние оценки функции правой части соотношения динамического программирования, двусторонние оценки функции Беллмана и функции оптимального значения вероятностного критерия. С помощью этих результатов выводятся выражения для приближенного определения оптимального управления. В качестве примера рассматривается задача удержания перевернутого маятника в окрестности неустойчивого положения равновесия.

Ключевые слова: дискретные системы, стохастическое оптимальное управление, вероятностный критерий, метод динамического программирования, функция Беллмана, перевернутый маятник.

DOI: 10.31857/S0005231020100037

1. Введение

Задачи оптимального управления дискретными стохастическими системами с вероятностным критерием представляют интерес в аэрокосмических [1–3], экономических [4–6] и робототехнических [7–9] приложениях. К настоящему моменту качественная теория этих задач проработана в плоскости вопросов существования оптимальных стратегий [1, 10]. В этих работах для случая, когда критерий представляет собой вероятность попадания терминального состояния на некоторое множество, получены достаточные условия оптимальности в форме метода динамического программирования. В [11] подобные условия получены для случая, когда критерий задан в виде вероятности пребывания траекторий стохастической системы в трубке. В [11] также показано, что указанные случаи являются взаимно приводимыми.

¹ Работа, за исключением раздела 4, выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-00062). Результаты раздела 4 получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-00595).

Менее проработанной является методологическая и алгоритмическая сторона вопроса. Метод динамического программирования [1, 10] вычислительно связан с “проклятием размерности”, а в случае его аналитического применения даже для относительно “простых” малоразмерных задач известны результаты в основном для одношаговых [12, 13] и двухшаговых постановок [2, 5, 14]. Впоследствии данное направление получило развитие в [15, 16], где были найдены двусторонние границы функции Беллмана, на основе которых был предложен алгоритм поиска субоптимального управления. В [7–9] для широкого класса систем, точностных функционалов и случайных возмущений предложен численный метод поиска оптимального управления в классе полиномов. Данный результат не связан с методом динамического программирования и основан на сведении исходной задачи к задаче стохастического программирования большой размерности. В [17] этот метод был применен для решения задачи оптимального управления полиномиальной дискретной стохастической системой с критерием вероятности пребывания вектора состояния на заданных множествах, имеющих выпуклую структуру, в каждый момент времени.

В настоящей статье исследуется задача оптимального управления дискретной стохастической системой с критерием вероятности пребывания ее траекторий в трубке. С помощью метода динамического программирования находятся соотношения для поверхностей уровня 1 и 0 функции Беллмана, двусторонние границы функции правой части уравнения динамического программирования, двусторонние границы функции Беллмана и функции оптимального значения вероятностного критерия. С помощью нижней границы функции Беллмана находятся выражения для поиска субоптимального управления. Предлагается оценка точности субоптимального управления, исследуются его свойства. В качестве примера рассматривается задача управления простейшей маятниковой системой.

2. Постановка задачи

Рассмотрим стохастическую управляемую систему с дискретным временем

$$(1) \quad \begin{cases} x_{k+1} = f_k(x_k, u_k, \xi_k), \\ x_0 = X, \end{cases} \quad k = \overline{0, N},$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u_k \in U_k \subset \mathbb{R}^m$ – вектор управления, U_k – множество ограничений на управление, ξ_k – вектор случайных возмущений с значениями на \mathbb{R}^s и известным распределением \mathbf{P}_k , $f_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^n$ – функция перехода (функция системы), $N \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ – горизонт управления.

В отношении системы (1) введем предположения:

- 1) известна полная информация о векторе состояния x_k (данный факт позволяет строить управление в классе функций $u_k = \gamma_k(x_k)$, где $\gamma_k(\cdot)$ – некоторая измеримая функция. В данном случае говорят, что “управление ищется в классе полной обратной связи по состоянию”;
- 2) начальное состояние $x_0 = X$ является в общем случае случайным вектором с значениями в \mathbb{R}^n и с известным распределением \mathbf{P}_X ;

- 3) функция системы $f_k(x_k, u_k, \xi_k)$ непрерывна для всех k ;
- 4) вектор управления u_k формируется следующим образом: $u_k = \gamma_k(x_k)$, где $\gamma_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – измеримая функция с ограниченными значениями $u_k \in U_k$, причем U_k – компактное множество;
- 5) вектор состояния x_{k+1} формируется следующим образом: на шаге k реализуется вектор x_k , далее формируется вектор управления $u_k = \gamma_k(x_k)$ и в последнюю очередь реализуется случайное возмущение ξ_k ;
- 6) управлением называется набор функций $u(\cdot) = (\gamma_0(\cdot), \dots, \gamma_N(\cdot)) \in \mathcal{U}$, классом допустимых управлений называется множество $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \times \dots \times \mathcal{U}_N$, где \mathcal{U}_k – множество борелевских функций $\gamma_k(\cdot)$ с ограниченными на U_k значениями;
- 7) случайный вектор ξ_k является непрерывным с значениями в \mathbb{R}^s и известным распределением \mathbf{P}_k , причем компоненты вектора $\zeta = (X, \xi_0, \dots, \xi_N)$ независимы.

Заметим, что система (1) является марковской, т.е. ее поведение в будущем не зависит от прошлого и полностью определяется текущим состоянием.

На траекториях системы (1) определим функционал вероятности

$$P_\varphi(u(\cdot)) = \mathbf{P} \left(\bigcap_{k=0}^N \{x_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\} \right),$$

множества \mathcal{F}_k имеют вид

$$\begin{cases} \mathcal{F}_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi_k(x) \leq \varphi\}, & k = \overline{1, N+1}, \\ \mathcal{F}_0 = \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$ – известный скаляр, $\Phi_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывные функции, $k = 1, \dots, N+1$, причем $\Phi_{N+1}(x)$ ограничена снизу.

Рассматривается задача

$$(2) \quad P_\varphi(u(\cdot)) \rightarrow \max_{u(\cdot) \in \mathcal{U}},$$

где $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \times \dots \times \mathcal{U}_N$.

Сформулируем достаточные условия оптимальности для задачи (2), доказанные в [11], имеющие форму метода динамического программирования.

3. Условия оптимальности в форме уравнения Беллмана

Определим функцию Беллмана $V_k : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ в задаче (2) как

$$V_k(x) = \sup_{\gamma_k(\cdot) \in \mathcal{U}_k, \dots, \gamma_N(\cdot) \in \mathcal{U}_N} \mathbf{P} \left(\max_{i=k, N} \Phi_{i+1}(x_{i+1}(x_k, \gamma_k(\cdot), \dots, \gamma_i(\cdot), \xi_k, \dots, \xi_i)) \leq \varphi \mid x_k = x \right).$$

Принимая во внимание сделанные в разделе 2 предположения, сформулируем теорему об уравнении Беллмана для задачи (2) в пространстве состояний размерности n .

Теорема 1 [11]. Пусть выполнены условия:

- 1) функции $f_k(x_k, u_k, \xi_k)$ непрерывны для всех $k = \overline{0, N}$;
- 2) функции $\Phi_k(x_k)$ непрерывны для всех $k = \overline{1, N+1}$;
- 3) функция $\Phi_{N+1}(x_{N+1})$ ограничена снизу;
- 4) случайные векторы X, ξ_0, \dots, ξ_N независимы в совокупности;
- 5) множества U_0, \dots, U_N компактны.

Тогда оптимальная стратегия в задаче (2) существует в классе измеримых функций $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}$ и определяется в результате решения следующей задач:

$$(3) \quad u_k^* = \arg \max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}_k \left[\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x_k) \mathbf{B}_{k+1}(f_k(x_k, u_k, \xi_k)) \mid x_k \right],$$

$$(4) \quad \mathbf{B}_k(x) = \max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}_k \left[\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x_k) \mathbf{B}_{k+1}(f_k(x_k, u_k, \xi_k)) \mid x_k = x \right], \quad k = \overline{0, N},$$

$$(5) \quad \mathbf{B}_{N+1}(x) = \mathbf{I}_{\mathcal{F}_{N+1}}(x).$$

В формулах (3), (4) $\mathbf{M}_k[\cdot]$ означает оператор математического ожидания по распределению \mathbf{P}_k . Отличием уравнений (3)–(5) от уравнения Беллмана для задачи с вероятностным терминальным критерием является наличие в правой части сомножителя в виде индикаторной функции $\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x_k)$ множества \mathcal{F}_k .

Отметим, что поиск оптимальной стратегии в соответствии с методом динамического программирования (3)–(5) даже для относительно простых примеров, например для задачи оптимальной импульсной коррекции траектории движения искусственного спутника Земли [18], затруднен. Причем трудности вычисления функции Беллмана распространяются как на численный, так и на аналитический пути решения задач. Как правило, удается найти управление, оптимальное лишь на последнем $k = N$ шаге по времени [2, 12, 13], и в более редких случаях так называемое двухшаговое управление $k = \overline{N-1, N}$ [4, 5, 14]. В [15, 16] для задачи оптимального управления дискретной системой с вероятностным терминальным критерием общего вида с помощью поверхностей уровня 1 и 0 функции Беллмана найдены двусторонние оценки функции правой части уравнения метода динамического программирования, функции Беллмана и функции оптимального значения вероятностного критерия. На этом фундаменте предложен алгоритм приближенного поиска оптимального управления, который при определенных условиях дает точное решение. В следующем разделе аналогичные результаты распространяются на настоящую задачу (2).

4. Двусторонние оценки функции Беллмана

Введем в рассмотрение поверхности уровней 1 и 0 функции Беллмана

$$\mathcal{I}_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{B}_k(x) = 1\}, \quad \mathcal{O}_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{B}_k(x) = 0\}$$

и множество $\mathcal{B}_k = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathcal{I}_k \cup \mathcal{O}_k\}$. Для удобства введем обозначение $\overline{\mathcal{F}}_k = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{F}_k$. Нетрудно видеть, что из определения введенных множеств вы-

текает, что

$$\mathcal{I}_k \cup \mathcal{B}_k \cup \mathcal{O}_k = \mathbb{R}^n, \quad \begin{cases} \mathbf{B}_k(x) = 1, & x \in \mathcal{I}_k, \\ \mathbf{B}_k(x) \in (0, 1), & x \in \mathcal{B}_k, \\ \mathbf{B}_k(x) = 0, & x \in \mathcal{O}_k. \end{cases}$$

Теорема 2. Справедливы утверждения:

1. Множества \mathcal{I}_k , $k = \overline{0, N}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям в обратном времени

$$\mathcal{I}_k = \mathcal{F}_k \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists u \in U_k : \mathbf{P}_k(f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) = 1 \right\}, \quad k = \overline{0, N},$$

$$\mathcal{I}_{N+1} = \mathcal{F}_{N+1};$$

2. Множества \mathcal{O}_k , $k = \overline{0, N}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям в обратном времени

$$\mathcal{O}_k = \overline{\mathcal{F}_k} \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \forall u \in U_k : \mathbf{P}_k(f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}) = 1 \right\}, \quad k = \overline{0, N},$$

$$\mathcal{O}_{N+1} = \overline{\mathcal{F}_{N+1}};$$

3. Для $x_k \in \mathcal{I}_k$ оптимальным управлением на шаге k является любой элемент из множества $U_k^{\mathcal{I}}(x_k)$

$$(6) \quad U_k^{\mathcal{I}}(x_k) = \left\{ u \in U_k : \mathbf{P}_k(f_k(x_k, u, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) = 1 \right\};$$

4. Для $x_k \in \mathcal{O}_k$ оптимальным управлением на шаге k является любой элемент из множества U_k ;

5. Уравнение Беллмана в области $x \in \mathcal{B}_k$ допускает представление

$$(7) \quad \mathbf{B}_k(x) = \max_{u_k \in U_k} \left\{ \mathbf{P}_k(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) + \right.$$

$$\left. + \mathbf{P}_k(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}) \mathbf{M}_k \left[\mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k)) \mid f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1} \right] \right\};$$

6. Для $x \in \mathcal{B}_k$ и $u_k \in U_k$ справедлива система неравенств

$$(8) \quad \begin{cases} \mathbf{M}_k[\mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k))] \geq \mathbf{P}_k(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}), \\ \mathbf{M}_k[\mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k))] \leq \mathbf{P}_k(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{F}_{k+1}), \\ \mathbf{M}_k[\mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k))] \leq 1 - \mathbf{P}_k(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}), \end{cases}$$

причем

$$(9) \quad 1 - \mathbf{P}_k(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}) \leq \mathbf{P}_k(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{F}_{k+1});$$

7. Для $x \in \mathcal{B}_k$ функция Беллмана удовлетворяет двустороннему неравенству

$$(10) \quad \underline{\mathbf{B}}_k(x) \leq \mathbf{B}_k(x) \leq \overline{\mathbf{B}}_k(x) \leq F_k(x),$$

где

$$(11) \quad F_k(x) = \sup_{u_k \in U_k} \mathbf{P}_k(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{F}_{k+1}),$$

$\underline{B}_k(x)$ – нижняя, а $\overline{B}_k(x)$ – верхняя оценки функции Беллмана:

$$\begin{aligned} \underline{B}_k(x) &= \sup_{u_k \in U_k} \mathbf{P}_k(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}), \\ \overline{B}_k(x) &= \sup_{u_k \in U_k} \{1 - \mathbf{P}_k(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1})\}, \end{aligned}$$

причем $\underline{B}_N(x) = B_N(x) = \overline{B}_N(x)$.

Доказательство теоремы 2 вынесено в Приложение.

Отличием правой части соотношений п. 1 теоремы 2 от соотношений для поверхности уровня 1 функции Беллмана в задаче с терминальным вероятностным критерием [15] является наличие операции пересечения с множеством \mathcal{F}_k . Для поверхности уровня 0 функции Беллмана отличие заключается в наличии операции объединения с множеством $\overline{\mathcal{F}}_k$. Пп. 3 и 4 устанавливают простейшие (относительно (3)) выражения для определения оптимального управления при $x_k \in \mathcal{I}_k \cup \mathcal{O}_k$, которые с точностью до конструкций множеств \mathcal{I}_k совпадают с аналогичными в задаче с терминальным вероятностным критерием. Пп. 6 и 7 теоремы 2 устанавливают двусторонние оценки функции правой части уравнения динамического программирования и функции Беллмана соответственно. При этом выражения для нижних и верхних границ с точностью до конструкций множеств \mathcal{I}_k и \mathcal{O}_k совпадают с аналогичными в задаче с терминальным критерием [15, 16]. Отличием же является наличие дополнительного неравенства (9) и, как следствие, неравенства $\overline{B}_k(x) \leq F_k(x)$, которые усиливают верхние границы функции правой части уравнения метода динамического программирования и функции Беллмана. Отметим также, что из теоремы 1 и пп. 1 и 2 теоремы 2 следует важное геометрическое свойство множеств \mathcal{I}_k , \mathcal{B}_k и \mathcal{F}_k , сформулированное в виде следствия.

Следствие. Для всех $k = \overline{0, N}$ выполнено включение $\mathcal{I}_k \cup \mathcal{B}_k \subseteq \mathcal{F}_k$.

В [15, 16, 18] предложена идея поиска управления, которое максимизирует нижнюю границу функции правой части уравнения динамического программирования. В [18] получены условия, при которых такое управление является оптимальным, однако данные условия достаточно трудно проверить. В случае, когда такие условия не выполняются, ставится вопрос о том, насколько “хороша” предлагаемая стратегия и какое значение критерия она обеспечивает. В следующем разделе разъясняются некоторые из этих вопросов.

5. Субоптимальная стратегия и оценка точности

Рассмотрим стратегию $\underline{u}(\cdot) = (\underline{\gamma}_0(\cdot), \dots, \underline{\gamma}_N(\cdot))$, где $\underline{u}_k = \underline{\gamma}_k(x_k)$, которая на каждом шаге k максимизирует нижнюю оценку функции правой части

уравнения динамического программирования

$$(12) \quad \underline{u}_k = \underline{\gamma}_k(x_k) = \arg \max_{u \in U_k} \mathbf{P}_k(f_k(x_k, u, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}), \quad k = \overline{0, N}.$$

Ввиду громоздкости выкладок и отсутствия общности опустим важнейшие вопросы существования такой стратегии и далее будем предполагать, что она существует в классе измеримых функций. Отметим, что необходимым условием существования, дополняющим условия 1–5 теоремы 1, является непустота множеств \mathcal{I}_k , $k = \overline{0, N}$. Исследования вопросов существования решения задач стохастического программирования с вероятностным критерием можно найти в монографии [19]. Получение таких условий является предметом дальнейших исследований.

Заметим, что из теоремы 1 и пп. 3 и 4 теоремы 2 следует, что такая стратегия является оптимальной при $x_k \in \mathcal{I}_k \cup \mathcal{O}_k$, $k = \overline{0, N}$ и оптимальной для любых $x_k \in \mathbb{R}^n$ при $k = N$. В случае $x_k \in \mathcal{B}_k$, $k = \overline{0, N}$, как было сказано ранее, эта стратегия максимизирует нижнюю границу функции правой части уравнения динамического программирования. В настоящем разделе исследуются вопросы нижней границы значений вероятностного критерия на субоптимальной стратегии $P_\varphi(\underline{u}(\cdot))$.

Теорема 3. Пусть стратегия $\underline{u}(\cdot)$, определяющаяся в результате решений задач (12), существует в классе \mathcal{U} . Тогда справедливы утверждения:

1. *Справедливо представление*

$$(13) \quad \begin{aligned} & P_\varphi(\underline{u}(\cdot)) = \underline{F}(\varphi, N) + \\ & + \sum_{l=1}^{N-1} \mathbf{P} \left(\bigcup_{k=0}^l \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\} \right) \mathbf{P} \left(\bigcap_{k=0}^l \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{I}_{k+1}\} \middle| \bigcup_{k=0}^l \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\} \right) + \\ & + \mathbf{P} \left(\bigcup_{k=0}^N \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\} \right) \mathbf{P} \left(\bigcap_{k=0}^N \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\} \middle| \bigcup_{k=0}^N \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\} \right), \end{aligned}$$

где \underline{x}_k – вектор состояния системы (1), замкнутой управлением (12),

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = f_k(\underline{x}_k, \underline{u}_k, \xi_k), & k = \overline{0, N}; \\ \underline{x}_0 = X, \end{cases}$$

2. *Справедливо представление*

$$(14) \quad \begin{aligned} & F(\varphi, N) = \underline{F}(\varphi, N) + \\ & + \sum_{l=1}^{N-1} \mathbf{P} \left(\bigcup_{k=0}^l \{x_k^* \notin \mathcal{I}_k\} \right) \mathbf{P} \left(\bigcap_{k=0}^l \{x_{k+1}^* \in \mathcal{I}_{k+1}\} \middle| \bigcup_{k=0}^l \{x_k^* \notin \mathcal{I}_k\} \right) + \\ & + \mathbf{P} \left(\bigcup_{k=0}^N \{x_k^* \notin \mathcal{I}_k\} \right) \mathbf{P} \left(\bigcap_{k=0}^N \{x_{k+1}^* \in \mathcal{F}_{k+1}\} \middle| \bigcup_{k=0}^N \{x_k^* \notin \mathcal{I}_k\} \right), \end{aligned}$$

где x_k^* – вектор состояния системы (1), замкнутой оптимальным управлением,

$$\begin{cases} x_{k+1}^* = f_k(x_k^*, u_k^*, \xi_k), & k = \overline{0, N}; \\ x_0^* = X, \end{cases}$$

3. Выполнена система неравенств

$$(15) \quad \underline{F}(\varphi, N) \leq P_\varphi(\underline{u}(\cdot)) \leq F(\varphi, N) \leq \overline{F}(\varphi, N) \leq \mathbf{M}_X[F_0(X)],$$

где $F_0: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ определяется в соответствии с (11) и

$$F(\varphi, N) = \sup_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} P_\varphi(u(\cdot)), \quad \underline{F}(\varphi, N) = \mathbf{M}_X[\underline{B}_0(X)], \quad \overline{F}(\varphi, N) = \mathbf{M}_X[\overline{B}_0(X)].$$

Выше $\mathbf{M}_X[\cdot]$ – оператор математического ожидания по распределению \mathbf{P}_X .

Доказательство теоремы 3 вынесено в Приложение.

Из теоремы 3 видно, для субоптимальной стратегии $\underline{u}(\cdot)$ справедлива оценка точности

$$(16) \quad F(\varphi, N) - P_\varphi(\underline{u}(\cdot)) \leq \Delta(\varphi, N),$$

где

$$(17) \quad \begin{aligned} \Delta(\varphi, N) = & \overline{F}(\varphi, N) - \underline{F}(\varphi, N) - \\ & - \sum_{l=1}^{N-1} \mathbf{P} \left(\bigcup_{k=0}^l \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\} \right) \mathbf{P} \left(\bigcap_{k=0}^l \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{I}_{k+1}\} \middle| \bigcup_{k=0}^l \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\} \right) - \\ & - \mathbf{P} \left(\bigcup_{k=0}^N \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\} \right) \mathbf{P} \left(\bigcap_{k=0}^N \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\} \middle| \bigcup_{k=0}^N \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\} \right), \end{aligned}$$

причем $\Delta(\varphi, N) \in [0, 1]$. Следует отметить вычислительную простоту получения оценки точности (17) субоптимальной стратегии. А именно, если найдена стратегия $\underline{u}(\cdot)$ и найдены нижняя $\underline{F}(\varphi, N)$ и верхняя $\overline{F}(\varphi, N)$ границы функции оптимальных значений вероятностного критерия, то достаточно воспользоваться методом Монте-Карло для оценки неизвестных вероятностей в правой части (17).

Применим полученные результаты в задаче оптимального управления перевернутым маятником.

6. Пример

Рассмотрим простейшую модель управления математическим маятником в окрестности неустойчивого положения равновесия. Динамика системы описывается разностным уравнением

$$(18) \quad \begin{cases} \theta_{k+1} = \theta_k + \Delta t_k \dot{\theta}_k, \\ \dot{\theta}_{k+1} = \dot{\theta}_k + (-\gamma \Delta t_k \theta_k + u_k) \xi_k, \\ \theta_0 = \Theta, \\ \dot{\theta}_0 = \dot{\Theta}, \end{cases} \quad k = \overline{0, N},$$

где θ_k – угол отклонения маятника, $\dot{\theta}_k$ – угловая скорость отклонения маятника, u_k – управляющее воздействие, ξ_k – непрерывная случайная величина, распределение которой конкретизируется ниже, Δt_k – параметр дискретизации непрерывной системы, γ – детерминированный параметр системы, $(\Theta, \dot{\Theta})$ – начальные условия.

Пусть на траекториях системы (18) задан функционал вероятности.

$$(19) \quad P_\varphi(u(\cdot)) = \mathbf{P} \left(\max_{k=0, N} \max \left\{ \omega |\theta_{k+1}|, \dot{\omega} |\dot{\theta}_{k+1}| \right\} \leq \varphi \right),$$

где $\omega, \dot{\omega}, \varphi > 0$ – известные параметры. Ставится задача (2). Ее физический смысл в том, чтобы найти управление, которое удерживает маятник в окрестности неустойчивого положения равновесия, являющейся прямоугольником $\mathcal{F}_k = [-\varphi\omega^{-1}, \varphi\omega^{-1}] \times [-\varphi\dot{\omega}^{-1}, \varphi\dot{\omega}^{-1}]$ в пространстве состояний, с максимальной вероятностью. Введем обозначения

$$x_k = \begin{pmatrix} \theta_k \\ \dot{\theta}_k \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_k^\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\gamma \Delta t_k & 0 \end{pmatrix}, \\ B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \dot{\omega} \end{pmatrix}$$

и запишем систему (18) и функционал вероятности (19) в векторном виде

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + (A_k^\xi x_k + B_k u_k) \xi_k, & k = \overline{0, N}, \\ x_0 = X, \end{cases}$$

$$P_\varphi(u(\cdot)) = \mathbf{P} \left(\max_{k=0, N} \|\Omega x_{k+1}\|_\infty \leq \varphi \right).$$

Во введенных в статье обозначениях имеем $n = 2, m = 1, s = 1, f_k(x_k, u_k, \xi_k) = A_k x_k + (A_k^\xi x_k + B_k u_k) \xi_k, U_k = \mathbb{R}, \mathcal{F}_k = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|\Omega x\|_\infty \leq \varphi\}, \Phi_k(x) = \|\Omega x\|_\infty$, где $\|x\|_\infty = \max_{i=1, n} |x^i|$ – Гельдерова норма вектора. Заметим также, что несмотря на то, что U_k не является компактом (что является одним из условий теоремы 1), теорема 1 не будет использована непосредственно в данном примере и, более того, условия теоремы 1 являются достаточными. Последнее означает, что если все-таки удастся найти стратегию $u^*(\cdot)$ используя соотношения динамического программирования (3)–(5), то она является оптимальной [1].

Воспользуемся теоремой 2 и найдем поверхности уровней 1 и 0 функции Беллмана и оптимальное управление при $x_k \in \mathcal{I}_k$.

Пусть

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_k = \left(\prod_{j=k}^N A_j^\top \right) e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sum_{j=k}^N \Delta t_j \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. Справедливы утверждения:

1. Поверхность уровня 1 функции Беллмана имеет вид

$$\mathcal{I}_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \max \left\{ \|\Omega x\|_\infty, \max_{l=\bar{k}, \bar{N}} \omega |\beta_l^\top x| \right\} \leq \varphi \right\}, \quad k = \overline{0, \bar{N}};$$

2. Поверхность уровня 0 функции Беллмана имеет вид

$$\mathcal{O}_k = \overline{\mathcal{F}}_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \|\Omega x\|_\infty > \varphi \right\}, \quad k = \overline{0, \bar{N}};$$

3. Оптимальное управление при $x_k \in \mathcal{I}_k$ единственно и имеет вид

$$u_k^* = -B_k^\top A_k^\xi x_k = \gamma \Delta t_k \theta_k, \quad x_k \in \mathcal{I}_k, \quad k = \overline{0, \bar{N}}.$$

Доказательство леммы 1 вынесено в Приложение.

Из леммы 1 видно, что поверхность уровня 0 не меняется со временем, в то время как поверхность уровня 1 “уменьшается” с уменьшением k , т.е. $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}_1 \subset \dots \subset \mathcal{I}_N$. Следует также отметить, что в данном примере выполнено $\mathcal{I}_k \cup \mathcal{B}_k = \mathcal{F}_k$.

Выпишем выражения для нижней и верхней границ функции Беллмана при $x \in \mathcal{B}_k$, $k = \overline{0, N-1}$

$$(20) \quad \underline{B}_k(x) = \max_u \mathbf{P} \left(\max \left\{ \dot{\omega} \left| e_2^\top \left(A_k x + \left(A_k^\xi x + B_k u \right) \xi_k \right) \right|, \right. \right. \\ \left. \left. \max_{l=\bar{k}, \bar{N}} \omega \left| \beta_{l+1}^\top \left(A_k x + \left(A_k^\xi x + B_k u \right) \xi_k \right) \right| \right\} \leq \varphi \right),$$

$$(21) \quad \overline{B}_k(x) = F_k(x) = \max_u \mathbf{P} \left(\dot{\omega} \left| e_2^\top \left(A_k x + \left(A_k^\xi x + B_k u \right) \xi_k \right) \right| \leq \varphi \right).$$

Поскольку поиск решений задач (20) и (21) при любом распределении случайного возмущения ξ_k затруднен, рассмотрим случай гауссовского распределения.

Лемма 2. Пусть $\xi_k \sim \mathcal{N}(m_\xi, \sigma_\xi^2)$, где $m_\xi > 0$. Тогда справедливы утверждения:

1. Решения задач стохастического программирования (20) при $x_k \in \mathcal{B}_k$, $k = \overline{0, N-1}$ имеют вид

$$(22) \quad \underline{u}_k = -2c_k(x_k) \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\sigma_\xi^2}{m_\xi^2} \ln \left(\frac{|c_k(x_k)| + r_k(x_k)}{|c_k(x_k)| - r_k(x_k)} \right)} \right)^{-1} - B_k^\top A_k^\xi x_k,$$

где функции $\underline{\varphi}_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\overline{\varphi}_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $c_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $r_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ имеют вид

$$\underline{\varphi}_k(x) = \max \left\{ \frac{-\varphi \dot{\omega}^{-1} - e_2^\top A_k x}{m_\xi}, \max_{l=\bar{k}, \bar{N}} \frac{-\varphi \dot{\omega}^{-1} - \beta_{l+1}^\top A_k x}{m_\xi e_2^\top \beta_{l+1}} \right\},$$

$$\bar{\varphi}_k(x) = \min \left\{ \frac{\varphi\dot{\omega}^{-1} - e_2^T A_k x}{m_\xi}, \min_{l=k, N} \frac{\varphi\dot{\omega}^{-1} - \beta_{l+1}^T A_k x}{m_\xi e_2^T \beta_{l+1}} \right\},$$

$$c_k(x) = -\frac{1}{2} \left(\underline{\varphi}_k(x) + \bar{\varphi}_k(x) \right), \quad r_k(x) = \frac{1}{2} \left(\bar{\varphi}_k(x) - \underline{\varphi}_k(x) \right);$$

2. Нижняя граница функции Беллмана при $x \in \mathcal{B}_k$ имеет вид

$$(23) \quad \underline{\mathcal{B}}_k(x) = \Phi \left(\frac{r_k(x) + |c_k(x)|}{\sigma_\xi m_\xi^{-1} \left| e_2^T (A_k^\xi x + B_k \underline{u}_k) \right|} - \frac{m_\xi}{\sigma_\xi} \right) -$$

$$- \Phi \left(\frac{-r_k(x) + |c_k(x)|}{\sigma_\xi m_\xi^{-1} \left| e_2^T (A_k^\xi x + B_k \underline{u}_k) \right|} - \frac{m_\xi}{\sigma_\xi} \right);$$

3. Решения задач стохастического программирования (21) при $x_k \in \mathcal{B}_k$, $k = \bar{0}, N-1$ имеют вид

$$(24) \quad \bar{u}_k = \begin{cases} -B_k^T A_k^\xi x_k, & |e_2^T A_k x_k| \leq \varphi\dot{\omega}^{-1}, \\ -\frac{2e_2^T A_k x_k}{m_\xi} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\sigma_\xi^2}{m_\xi^2} \ln \left(\frac{|e_2^T A_k x_k| + \varphi\dot{\omega}^{-1}}{|e_2^T A_k x_k| - \varphi\dot{\omega}^{-1}} \right)} \right)^{-1} - B_k^T A_k^\xi x_k, & |e_2^T A_k x_k| > \varphi\dot{\omega}^{-1}; \end{cases}$$

4. Верхняя граница функции Беллмана при $x \in \mathcal{B}_k$ имеет вид

$$(25) \quad \bar{\mathcal{B}}_k(x) =$$

$$= \begin{cases} 1, & |e_2^T A_k x| \leq \varphi\dot{\omega}^{-1}, \\ \Phi \left(\frac{\varphi\dot{\omega}^{-1} + |e_2^T A_k x|}{\sigma_\xi \left| e_2^T (A_k^\xi x + B_k \bar{u}_k) \right|} - \frac{m_\xi}{\sigma_\xi} \right) - \Phi \left(\frac{-\varphi\dot{\omega}^{-1} + |e_2^T A_k x|}{\sigma_\xi \left| e_2^T (A_k^\xi x + B_k \bar{u}_k) \right|} - \frac{m_\xi}{\sigma_\xi} \right), & |e_2^T A_k x| > \varphi\dot{\omega}^{-1}. \end{cases}$$

Доказательство леммы 2 вынесено в Приложение.

В лемме 2 введено обозначение $\Phi(x)$ – функция Лапласа

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{t^2/2} dt.$$

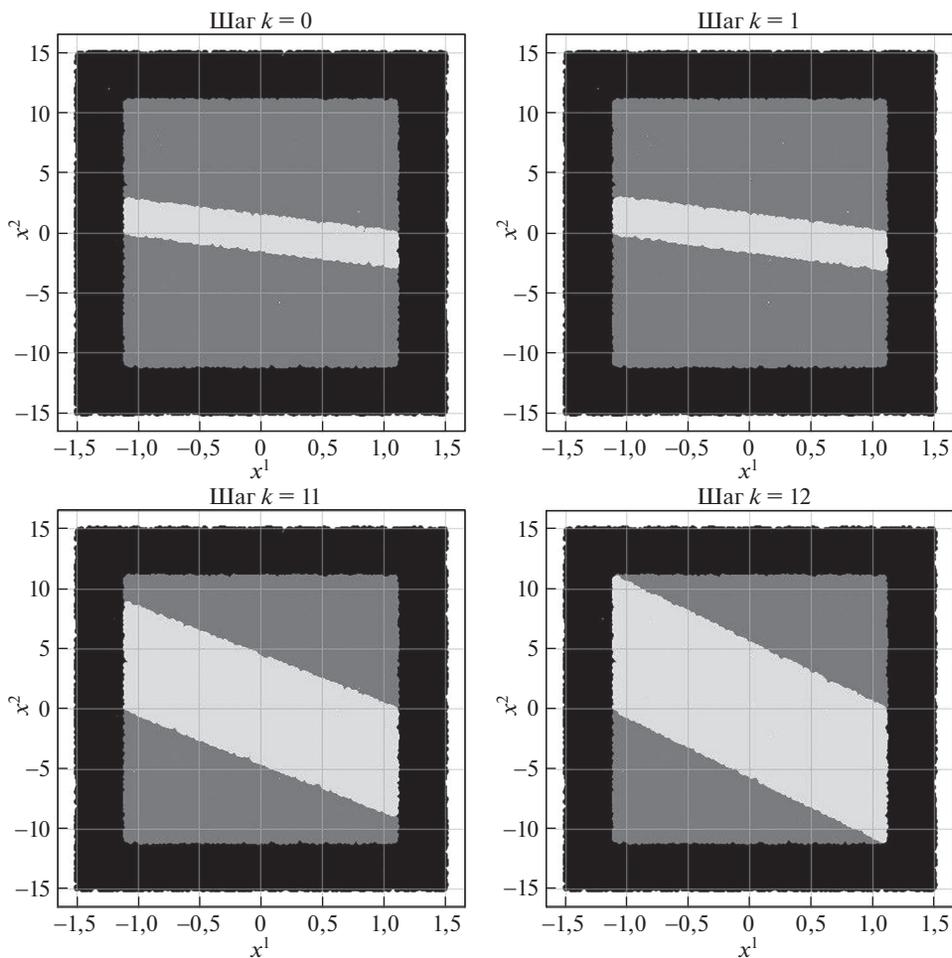


Рис. 1. Множества \mathcal{O}_k (черная область), \mathcal{B}_k (темно-серая область), \mathcal{I}_k (светло-серая область), $k = 0, 1, 11, 12$.

Итого получаем следующее выражение субоптимального управления для всех $k = 0, N$.

$$(26) \quad \underline{u}_k = \begin{cases} -B_k^T A_k^\xi x_k, & x_k \in \mathcal{I}_k, \\ -2c_k(x_k) \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\sigma_\xi^2}{m_\xi^2} \ln \left(\frac{|c_k(x_k)| + r_k(x_k)}{|c_k(x_k)| - r_k(x_k)} \right)} \right)^{-1} - B_k^T A_k^\xi x_k, & x_k \in \mathcal{B}_k, \\ \text{любое,} & x_k \in \mathcal{O}_k, \end{cases}$$

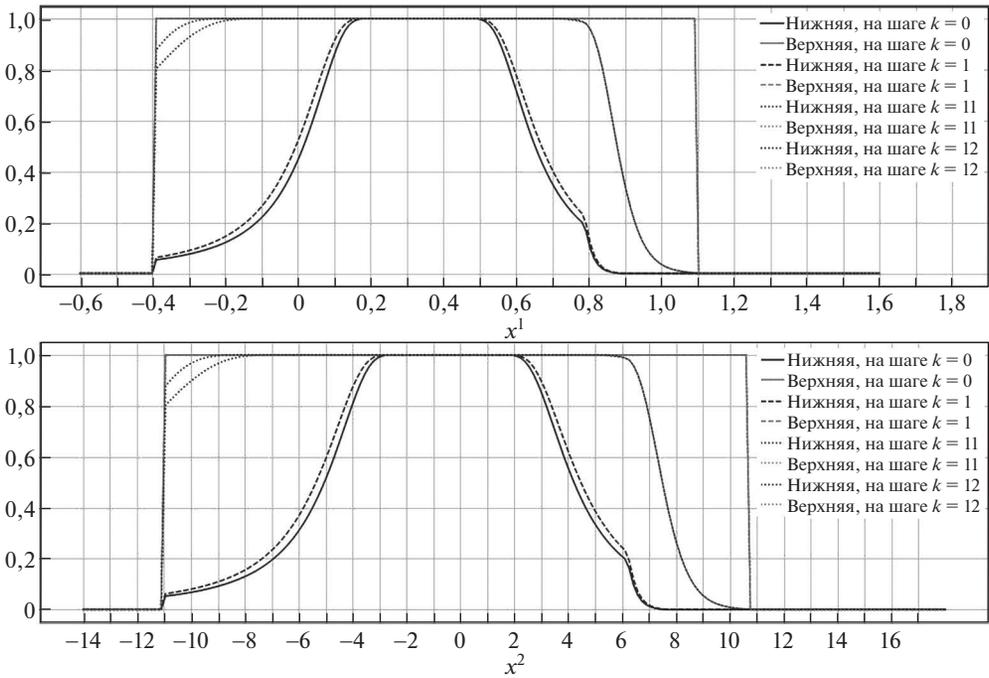


Рис. 2. Нижняя $\underline{B}_k(x)$ и верхняя $\overline{B}_k(x)$ границы функции Беллмана при $k = 0, 1, 11, 12$.

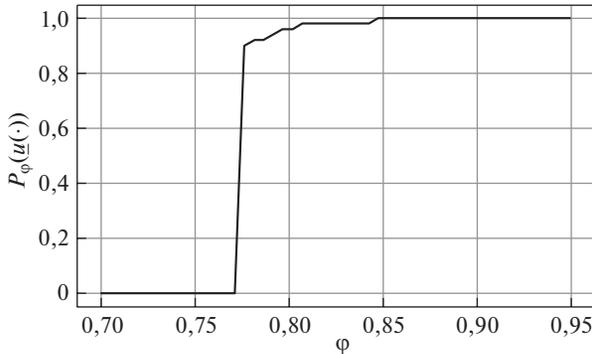


Рис. 3. Значение критериальной функции в зависимости от φ .

а замкнутая система принимает вид

$$x_{k+1} = \begin{cases} A_k x_k, & x_k \in \mathcal{I}_k, \\ A_k x_k + (A_k^\xi x_k + B_k \underline{u}_k) \xi_k, & x_k \in \mathcal{B}_k \cup \mathcal{O}_k. \end{cases}$$

Отметим интересное свойство найденного управления. При $x_k \in \mathcal{I}_k$ в силу включения $\mathcal{I}_k \subseteq \mathcal{F}_k$ (см. следствие к теореме 2) система уже находится в окрестности неустойчивого положения равновесия \mathcal{F}_k . Причем режим управления, соответствующий первой ветви (26), “заныляет” стохастическое сла-

Значения параметров системы

N	t_k	φ	γ	ω	$\dot{\omega}$	m_ξ	d_ξ	x_0
15	0,05	1,1	0,8	1	0,1	0,9	0.1	[0,65, 2,5]

гаемое в системе, и она таким образом становится детерминированной при $x_k \in \mathcal{I}_k$.

Проведем численный эксперимент для системы (18), замкнутой управлением (26). Значения параметров системы занесены в таблицу.

На рис. 1 изображены поверхности уровней 1 и 0 функции Беллмана в пространстве состояний на разных шагах дискретного времени. На рис. 2 изображены нижняя и верхняя границы функции Беллмана. На рис. 3 приведен график значений вероятностного критерия при субоптимальном управлении. Оценка точности (17) субоптимального управления равна 0,059, что демонстрирует его близость к оптимальному и обоснованность предлагаемого в статье подхода.

7. Заключение

В статье рассмотрена задача оптимального управления дискретной стохастической системой с критерием вероятности пребывания вектора состояния в каждый момент времени на заданных множествах. С помощью поверхностей уровня 1 и 0 функции Беллмана получены двусторонние оценки функции правой части уравнения динамического программирования, двусторонние оценки функции Беллмана и функции оптимального значения вероятностного критерия. Найдены выражения для приближенного поиска оптимального управления. В качестве примера рассмотрена модельная задача удержания перевернутого маятника в неустойчивом положении равновесия. Для данной модели субоптимальное управление найдено в явном виде.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 2. Из определения множеств \mathcal{I}_k и \mathcal{O}_k и соотношений динамического программирования (3)–(5) имеем:

$$(П.1) \quad \mathcal{I}_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}_k [\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x_k) \mathbf{B}_{k+1}(f_k(x_k, u_k, \xi_k)) | x_k = x] = 1 \right\},$$

$$(П.2) \quad \mathcal{O}_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}_k [\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x_k) \mathbf{B}_{k+1}(f_k(x_k, u_k, \xi_k)) | x_k = x] = 0 \right\}.$$

Рассмотрим некоторый шаг k алгоритма динамического программирования (3)–(5). С учетом базовых свойств множеств \mathcal{I}_k , \mathcal{B}_k , \mathcal{O}_k выполнено тождество

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{k+1}(x) &= \mathbf{I}_{\mathcal{I}_k}(x) \mathbf{B}_{k+1}(x) + \mathbf{I}_{\mathcal{B}_k}(x) \mathbf{B}_{k+1}(x) + \mathbf{I}_{\mathcal{O}_k}(x) \mathbf{B}_{k+1}(x) = \\ &= \mathbf{I}_{\mathcal{I}_k}(x) \mathbf{B}_{k+1}(x) + \mathbf{I}_{\mathcal{B}_k}(x) \mathbf{B}_{k+1}(x). \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение систему гипотез, образующих полную группу несовместных событий,

$$\{f_k(x_k, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}\}, \quad \{f_k(x_k, u_k, \xi_k) \notin \mathcal{I}_{k+1}\}.$$

Преобразуем выражение (4) с использованием формулы полного математического ожидания

$$\begin{aligned}
 (\text{П.3}) \quad \mathbf{B}_k(x) &= \max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}_k \left[\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x_k) \mathbf{B}_{k+1}(f_k(x_k, u_k, \xi_k)) \mid x_k = x \right] = \\
 &= \max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}_k \left[\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x) \mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k)) \right] = \\
 &= \max_{u_k \in U_k} \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x) \mathbf{M}_k \left[\mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k)) \right] = \\
 &= \max_{u_k \in U_k} \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x) \left(\mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) \times \right. \\
 &\quad \times \mathbf{M}_k \left[\mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k)) \mid f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1} \right] + \\
 &\quad \left. + \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \notin \mathcal{I}_{k+1}) \mathbf{M}_k \left[\mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k)) \mid f_k(x, u_k, \xi_k) \notin \mathcal{I}_{k+1} \right] \right).
 \end{aligned}$$

С учетом равенства

$$\mathbf{M}_k \left[\mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k)) \mid f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1} \right] = 1$$

выражение (П.3) принимает вид

$$\begin{aligned}
 (\text{П.4}) \quad \mathbf{B}_k(x) &= \max_{u_k \in U_k} \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x) \left(\mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) + \right. \\
 &\quad \left. + \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \notin \mathcal{I}_{k+1}) \mathbf{M}_k \left[\mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k)) \mid f_k(x, u_k, \xi_k) \notin \mathcal{I}_{k+1} \right] \right) = \\
 &= \max_{u_k \in U_k} \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x) \left(\mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) + (1 - \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1})) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \mathbf{M}_k \left[\mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k)) \mid f_k(x, u_k, \xi_k) \notin \mathcal{I}_{k+1} \right] \right).
 \end{aligned}$$

Поскольку выполнено

$$\mathbf{M}_k \left[\mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k)) \mid f_k(x, u_k, \xi_k) \notin \mathcal{I}_{k+1} \right] \in [0, 1),$$

то правая часть (П.4) принимает значение 1 тогда и только тогда, когда

$$\max_{u_k \in U_k} \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x) \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) = 1.$$

Отсюда видно, что (П.1) принимает вид

$$\begin{aligned}
 (\text{П.5}) \quad \mathcal{I}_k &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}_k \left[\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x_k) \mathbf{B}_{k+1}(f_k(x_k, u_k, \xi_k)) \mid x_k = x \right] = 1 \right\} = \\
 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \max_{u_k \in U_k} \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x) \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) = 1 \right\} = \\
 &= \mathcal{F}_k \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \max_{u_k \in U_k} \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) = 1 \right\} = \\
 &= \mathcal{F}_k \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists u_k \in U_k : \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) = 1 \right\}.
 \end{aligned}$$

Из (П.5) получаем, что при $x_k \in \mathcal{I}_k$ оптимальным управлением является любой элемент из множества

$$(П.6) \quad U_k^{\mathcal{I}}(x_k) = \{u \in U_k : \mathbf{P}(f_k(x_k, u, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) = 1\}.$$

Пп. 1, 3 и 5 теоремы 2 доказаны.

Введем в рассмотрение систему гипотез, образующих полную группу несовместных событий,

$$\{f_k(x_k, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}\}, \quad \{f_k(x_k, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}\}, \quad \{f_k(x_k, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}\}.$$

Преобразуем выражение (4) с использованием формулы полного математического ожидания

$$(П.7) \quad \begin{aligned} \mathbf{B}_k(x) &= \max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}_k [\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x_k) \mathbf{B}_{k+1}(f_k(x_k, u_k, \xi_k)) | x_k = x] = \\ &= \max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}_k [\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x) \mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k))] = \\ &= \max_{u_k \in U_k} \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x) \mathbf{M}_k [\mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k))] = \\ &= \max_{u_k \in U_k} \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x) \left(\mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) \times \right. \\ &\quad \times \mathbf{M}_k [\mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k)) | f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}] + \\ &\quad + \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}) \mathbf{M}_k [\mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k)) | f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}] + \\ &\quad \left. + \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}) \mathbf{M}_k [\mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k)) | f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}] \right). \end{aligned}$$

С учетом справедливости равенств

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_k [\mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k)) | f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}] &= 1, \\ \mathbf{M}_k [\mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k)) | f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}] &= 0 \end{aligned}$$

выражение (П.1) принимает вид

$$(П.8) \quad \mathbf{B}_k(x) = \max_{u_k \in U_k} \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x) \left(\mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) + \right. \\ \left. + \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}) \mathbf{M}_k [\mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k)) | f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}] \right).$$

Поскольку выполнено

$$\mathbf{M}_k [\mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k)) | f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}] \in (0, 1),$$

то правая часть выражения (П.8) равна 0, если

$$\begin{cases} \max_{u_k \in U_k} \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x) \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) = 0, \\ \max_{u_k \in U_k} \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x) \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}) = 0 \end{cases}$$

или, что то же самое,

$$\forall u_k \in U_k: \begin{cases} \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x) \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) = 0, \\ \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x) (1 - \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) - \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1})) = 0. \end{cases}$$

Отсюда с учетом (П.2) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_k &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}_k [\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x_k) \mathbf{B}_{k+1}(f_k(x_k, u_k, \xi_k)) | x_k = x] = 0 \right\} = \\ (\text{П.9}) \quad &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \max_{u_k \in U_k} \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x) \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}) = 1 \right\} = \\ &= \overline{\mathcal{F}}_k \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \max_{u_k \in U_k} (x) \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}) = 1 \right\} = \\ &= \overline{\mathcal{F}}_k \cup \{ x \in \mathbb{R}^n : \forall u_k \in U_k : (x) \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}) = 1 \}. \end{aligned}$$

Из (П.9) видно, что при $x_k \in \mathcal{O}_k$ любое допустимое управление $u_k \in U_k$ является оптимальным.

Пп. 2 и 4 теоремы 2 доказаны.

Рассмотрим уравнение Беллмана в форме (П.8). Пусть $x \in \mathcal{B}_k$, тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_k(x) &= \max_{u_k \in U_k} \left\{ \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) + \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}) \times \right. \\ &\quad \left. \times \mathbf{M}_k [\mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k)) | f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}] \right\} = \\ &= \max_{u_k \in U_k} \left\{ \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) + \right. \\ (\text{П.10}) \quad &+ \left(1 - \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) - \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}) \right) \times \\ &\quad \left. \times \mathbf{M}_k [\mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k)) | f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}] \right\} = \\ &= \max_{u_k \in U_k} \left\{ \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) \times \right. \\ &\quad \times \left(1 - \mathbf{M}_k [\mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k)) | f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}] \right) + \\ &\quad + (1 - \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1})) \times \\ &\quad \left. \times \mathbf{M}_k [\mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k)) | f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}] \right\}. \end{aligned}$$

Воспользуемся известным неравенством

$$\min_{i=1, n} z_i \leq \sum_{i=1}^n a_i z_i \leq \max_{i=1, n} z_i, \quad a_1, \dots, a_n \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n a_i = 1.$$

Если формально принять, что

$$\begin{aligned} a_1 &= \mathbf{M}_k \left[\mathbf{B}_{k+1} (f_k(x, u_k, \xi_k)) \mid f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1} \right], \\ a_2 &= 1 - \mathbf{M}_k \left[\mathbf{B}_{k+1} (f_k(x, u_k, \xi_k)) \mid f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1} \right], \\ z_1 &= \mathbf{P} (f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}), \quad z_2 = 1 - \mathbf{P} (f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}), \end{aligned}$$

то справедлива двусторонняя оценка для функции правой части уравнения Беллмана при $x \in \mathcal{B}_k$

$$\min_{i=1,2} z_i \leq \mathbf{M}_k [\mathbf{B}_{k+1} (f_k(x, u_k, \xi_k))] \leq \max_{i=1,2} z_i.$$

В силу равенства

$$\mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) + \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}) + \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}) = 1$$

для z_2 справедливо другое представление

$$z_2 = \mathbf{P} (f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) + \mathbf{P} (f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}).$$

Следовательно $z_2 \geq z_1$ и выполнено

$$z_1 \leq \mathbf{M}_k [\mathbf{B}_{k+1} (f_k(x, u_k, \xi_k))] \leq z_2.$$

Из пп. 1 и 2 теоремы 2 видно, что для всех $k = \overline{0, N}$ выполнено $\mathcal{I}_k \subseteq \mathcal{F}_k$ и $\overline{\mathcal{F}_k} \subseteq \mathcal{O}_k$, откуда получаем $\mathcal{I}_k \cup \mathcal{B}_k \subseteq \mathcal{F}_k$. Следовательно, справедливо неравенство

$$\mathbf{P} (f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) + \mathbf{P} (f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}) \leq \mathbf{P} (f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{F}_{k+1}),$$

и, следовательно,

$$\mathbf{M}_k [\mathbf{B}_{k+1} (f_k(x, u_k, \xi_k))] \leq \mathbf{P} (f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{F}_{k+1}).$$

Таким образом, справедлива система неравенств (8). Если взять супремум по $u_k \in U_k$ во всех частях неравенств, то получаем (10). Пп. 6 и 7 теоремы 2 доказаны.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Введем систему гипотез, образующих полную группу несовместных событий:

$$\left\{ \bigcap_{k=0}^N \{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\} \right\}, \quad \left\{ \bigcup_{k=0}^N \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\} \right\}.$$

Тогда с учетом формулы полной вероятности справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} P_\varphi(\underline{u}(\cdot)) &= \mathbf{P} \left(\bigcap_{k=0}^N \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\} \right) = \\ \text{(II.11)} \quad &= \mathbf{P} \left(\bigcap_{k=0}^N \{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\} \right) \mathbf{P} \left(\bigcap_{k=0}^N \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\} \mid \bigcap_{k=0}^N \{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\} \right) + \\ &+ \mathbf{P} \left(\bigcup_{k=0}^N \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\} \right) \mathbf{P} \left(\bigcap_{k=0}^N \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\} \mid \bigcup_{k=0}^N \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что из определения стратегии $\underline{u}(\cdot)$, а также из свойств множества \mathcal{I}_k (п. 1 теоремы 2) следует, что

$$(II.12) \quad \mathbf{P}(\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{I}_{k+1}) = 1 \quad \text{при} \quad \underline{x}_k \in \mathcal{I}_k, \quad k = \overline{0, N}.$$

Тогда с учетом включения $\mathcal{I}_k \subseteq \mathcal{F}_k$ для всех $k = \overline{1, N+1}$ выполнено равенство

$$\mathbf{P}(\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}) = 1 \quad \text{при} \quad \underline{x}_k \in \mathcal{I}_k, \quad k = \overline{0, N},$$

и, следовательно,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^N \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\} \mid \bigcap_{k=0}^N \{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\}\right) = 1.$$

С учетом последнего равенства выражение (II.11) принимает вид

$$(II.13) \quad P_\varphi(\underline{u}(\cdot)) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^N \{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\}\right) + \\ + \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^N \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^N \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\} \mid \bigcup_{k=0}^N \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right).$$

Введем в рассмотрение систему гипотез, образующих полную группу несовместных событий:

$$\left\{ \bigcap_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\} \right\}, \quad \left\{ \bigcup_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\} \right\}.$$

Воспользуемся формулой полной вероятности для первого слагаемого в правой части (II.13)

$$(II.14) \quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^N \{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\}\right) = \\ = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{I}_{k+1}\} \mid \bigcap_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\}\right) + \\ + \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{I}_{k+1}\} \mid \bigcup_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right).$$

С учетом (II.12) преобразуем правую часть (II.14), откуда получим

$$(II.15) \quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^N \{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\}\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\}\right) + \\ + \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{I}_{k+1}\} \mid \bigcup_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right).$$

Выполним подстановку (П.15) в (П.13)

$$(П.16) \quad P_\varphi(\underline{u}(\cdot)) = \mathbf{P} \left(\bigcap_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\} \right) + \\ + \mathbf{P} \left(\bigcup_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\} \right) \mathbf{P} \left(\bigcap_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{I}_{k+1}\} \middle| \bigcup_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\} \right) + \\ + \mathbf{P} \left(\bigcup_{k=0}^N \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\} \right) \mathbf{P} \left(\bigcap_{k=0}^N \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\} \middle| \bigcup_{k=0}^N \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\} \right).$$

Проводя аналогичные преобразования в отношении первого слагаемого в (П.16), вводя системы гипотез

$$\left\{ \bigcap_{k=0}^l \{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\} \right\}, \quad \left\{ \bigcup_{k=0}^l \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\} \right\}, \quad l = \overline{1, \dots, N-2},$$

получаем следующее выражение для значения вероятностного критерия на стратегии $\underline{u}(\cdot)$:

$$(П.17) \quad P_\varphi(\underline{u}(\cdot)) = \mathbf{P}(\underline{x}_1 \in \mathcal{I}_1) + \\ + \sum_{l=1}^{N-1} \mathbf{P} \left(\bigcup_{k=0}^l \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\} \right) \mathbf{P} \left(\bigcap_{k=0}^l \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{I}_{k+1}\} \middle| \bigcup_{k=0}^l \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\} \right) + \\ + \mathbf{P} \left(\bigcup_{k=0}^N \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\} \right) \mathbf{P} \left(\bigcap_{k=0}^N \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\} \middle| \bigcup_{k=0}^N \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\} \right).$$

Заметим теперь, что для первого слагаемого (П.17) справедлива цепочка равенств

$$\mathbf{P}(\underline{x}_1 \in \mathcal{I}_1) = \mathbf{P}(f_0(X, \underline{u}_0, \xi_0) \in \mathcal{I}_1) = \underline{\mathbf{B}}_0(X),$$

откуда следует выражение (14).

Первый пункт теоремы 3 доказан.

Для доказательства второго пункта теоремы 3 достаточно заметить, что при $x_k \in \mathcal{I}_k$ выполнено $u_k^* = \underline{u}_k$ для всех $k = \overline{0, N}$, откуда аналогичным способом можно получить выражение (14) для функции оптимального значения вероятностного критерия на траекториях системы $\{x_k^*\}_{k=1}^{N+1}$, замкнутой оптимальным управлением $u^*(\cdot)$.

Второй пункт теоремы 3 доказан.

Третий пункт теоремы 3 непосредственно следует из п. 7 теоремы 2 и п. 1 теоремы 3.

Теорема доказана.

Доказательство леммы 1. Воспользуемся п. 1 теоремы 2 и запишем выражение для поверхности уровня 1 функции Беллмана при $k = N$

$$\mathcal{I}_N = \mathcal{F}_N \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \exists u \in U_N : \mathbf{P} \left(\left\| \Omega \left(A_N x + \left(A_N^\xi x + B_N u \right) \xi_N \right) \right\|_\infty \leq \varphi \right) = 1 \right\}.$$

С учетом того, что случайная величина ξ_N имеет неограниченный носитель, оптимальное управление при $k = N$ и $x_{N-1} \in \mathcal{I}_N$ единственно и имеет вид $u_N^* = -B_N^T A_N^\xi x_{N-1}$, а поверхность уровня 1 функции Беллмана имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_N &= \mathcal{F}_N \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \|\Omega A_N x\|_\infty \leq \varphi \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \max \{ \|\Omega x\|_\infty, |\beta_N^T x| \} \leq \varphi \right\}.\end{aligned}$$

Из п. 2 теоремы 2 получаем поверхность уровня 0 функции Беллмана при $k = N$

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_N &= \overline{\mathcal{F}}_N \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \forall u \in U_N : \mathbf{P} \left(\left\| \Omega \left(A_N x + \left(A_N^\xi x + B_N u \right) \xi_N \right) \right\|_\infty > \varphi \right) = 1 \right\} = \\ &= \overline{\mathcal{F}}_N \cup \emptyset = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \|\Omega x\|_\infty > \varphi \right\}.\end{aligned}$$

Аналогично шагу $k = N$ при $k = N - 1$ получаем поверхность уровня 1

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{N-1} &= \mathcal{F}_{N-1} \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \exists u \in U_{N-1} : \right. \\ &\quad \mathbf{P} \left(\max \left\{ \left\| \Omega \left(A_{N-1} x + \left(A_{N-1}^\xi x + B_{N-1} u \right) \xi_{N-1} \right) \right\|_\infty, \right. \\ &\quad \left. \left\| \Omega A_N \left(A_{N-1} x + \left(A_{N-1}^\xi x + B_{N-1} u \right) \xi_{N-1} \right) \right\|_\infty \right\} \leq \varphi \right) = 1 \left. \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \max \left\{ \|\Omega x\|_\infty, \max_{j=N-1, N} |\beta_j^T x| \right\} \leq \varphi \right\},\end{aligned}$$

причем, как и при $k = N$, если $x_{N-1} \in \mathcal{I}_{N-1}$, то выполнено

$$u_{N-1}^* = -B_{N-1}^T A_{N-1}^\xi x_{N-1},$$

и поверхность уровня 0 функции Беллмана равна

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{N-1} &= \overline{\mathcal{F}}_{N-1} \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \forall u \in U_{N-1} : \right. \\ &\quad \mathbf{P} \left(\left\| \Omega \left(A_{N-1} x + \left(A_{N-1}^\xi x + B_{N-1} u \right) \xi_{N-1} \right) \right\|_\infty > \varphi \right) = 1 \left. \right\} = \\ &= \overline{\mathcal{F}}_{N-1} \cup \emptyset = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \|\Omega x\|_\infty > \varphi \right\}.\end{aligned}$$

Продолжая аналогичные размышления по индукции, завершаем доказательство леммы 1.

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Проведем серию преобразований правой части выражения (20):

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbb{B}}_k(x) &= \max_u \mathbf{P} \left(\max \left\{ \dot{\omega} \left| e_2^T \left(A_k x + \left(A_k^\xi x + B_k u_k \right) \xi_k \right) \right|, \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \max_{l=k, N} \omega \left| \beta_{l+1}^T \left(A_k x + \left(A_k^\xi x + B_k u_k \right) \xi_k \right) \right| \leq \varphi \right\} \leq \varphi \right) = \\
&= \mathbf{P} \left(\bigcap_{l=k}^N \left\{ \omega \left| \beta_{l+1}^T \left(A_k x + \left(A_k^\xi x + B_k u_k \right) \xi_k \right) \right| \leq \varphi \right\} \cap \right. \\
&\quad \left. \cap \left\{ \dot{\omega} \left| e_2^T \left(A_k x + \left(A_k^\xi x + B_k u_k \right) \xi_k \right) \right| \leq \varphi \right\} \right) = \\
&= \mathbf{P} \left(\bigcap_{l=k}^N \left\{ \frac{-\varphi \omega^{-1} - \beta_{l+1}^T A_k x}{e_2^T \beta_{l+1}} \leq e_2^T \left(A_k^\xi x + B_k u_k \right) \xi_k \leq \frac{-\varphi \omega^{-1} - \beta_{l+1}^T A_k x}{e_2^T \beta_{l+1}} \right\} \cap \right. \\
&\quad \left. \cap \left\{ -\varphi \dot{\omega}^{-1} - e_2^T A_k x \leq e_2^T \left(A_k^\xi x + B_k u_k \right) \xi_k \leq \varphi \dot{\omega}^{-1} - e_2^T A_k x \right\} \right).
\end{aligned}$$

Введем замену переменных для управления $\tilde{u}_k = e_2^T \left(A_k^\xi x + B_k u_k \right)$ и обозначение для центрированной случайной величины $\overset{\circ}{\xi}_k = \xi_k - m_\xi$. Продолжим преобразования функции правой части выражения (20):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P} \left(\bigcap_{l=k}^N \left\{ \frac{-\varphi \omega^{-1} - \beta_{l+1}^T A_k x}{e_2^T \beta_{l+1}} \leq \tilde{u}_k \xi_k \leq \frac{-\varphi \omega^{-1} - \beta_{l+1}^T A_k x}{e_2^T \beta_{l+1}} \right\} \cap \right. \\
&\quad \left. \cap \left\{ -\varphi \dot{\omega}^{-1} - e_2^T A_k x \leq \tilde{u}_k \xi_k \leq \varphi \dot{\omega}^{-1} - e_2^T A_k x \right\} \right) = \\
&= \mathbf{P} \left(\bigcap_{l=k}^N \left\{ \frac{-\varphi \omega^{-1} - \beta_{l+1}^T A_k x}{e_2^T \beta_{l+1}} \leq \tilde{u}_k \left(\overset{\circ}{\xi}_k + m_\xi \right) \leq \frac{-\varphi \omega^{-1} - \beta_{l+1}^T A_k x}{e_2^T \beta_{l+1}} \right\} \cap \right. \\
&\quad \left. \cap \left\{ -\varphi \dot{\omega}^{-1} - e_2^T A_k x \leq \tilde{u}_k \left(\overset{\circ}{\xi}_k + m_\xi \right) \leq \varphi \dot{\omega}^{-1} - e_2^T A_k x \right\} \right) = \\
&= \mathbf{P} \left(\bigcap_{l=k}^N \left\{ \frac{-\varphi \omega^{-1} - \beta_{l+1}^T A_k x}{m_\xi e_2^T \beta_{l+1}} \leq \tilde{u}_k \left(m_\xi^{-1} \overset{\circ}{\xi}_k + 1 \right) \leq \frac{-\varphi \omega^{-1} - \beta_{l+1}^T A_k x}{m_\xi e_2^T \beta_{l+1}} \right\} \cap \right. \\
&\quad \left. \cap \left\{ \frac{-\varphi \dot{\omega}^{-1} - e_2^T A_k x}{m_\xi} \leq \tilde{u}_k \left(m_\xi^{-1} \overset{\circ}{\xi}_k + 1 \right) \leq \frac{\varphi \dot{\omega}^{-1} - e_2^T A_k x}{m_\xi} \right\} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{P} \left(\max \left\{ \frac{-\varphi\dot{\omega}^{-1} - e_2^{\mathbf{T}} A_k x}{m_\xi}, \max_{l=k, N} \frac{-\varphi\omega^{-1} - \beta_{l+1}^{\mathbf{T}} A_k x}{m_\xi e_2^{\mathbf{T}} \beta_{l+1}} \right\} \leq \tilde{u}_k \left(m_\xi^{-1} \overset{\circ}{\xi}_k + 1 \right) \leq \right. \\
&\quad \left. \leq \min \left\{ \frac{\varphi\dot{\omega}^{-1} - e_2^{\mathbf{T}} A_k x}{m_\xi}, \min_{l=k, N} \frac{\varphi\omega^{-1} - \beta_{l+1}^{\mathbf{T}} A_k x}{m_\xi e_2^{\mathbf{T}} \beta_{l+1}} \right\} \right) = \\
&= \mathbf{P} \left(\underline{\varphi}_k(x) \leq \tilde{u}_k \left(m_\xi^{-1} \overset{\circ}{\xi}_k + 1 \right) \leq \overline{\varphi}_k(x) \right) = \\
&= \mathbf{P} \left(-\frac{\overline{\varphi}_k(x) - \underline{\varphi}_k(x)}{2} + \frac{\overline{\varphi}_k(x) + \underline{\varphi}_k(x)}{2} \leq \tilde{u}_k \left(m_\xi^{-1} \overset{\circ}{\xi}_k + 1 \right) \leq \right. \\
&\quad \left. \leq \frac{\overline{\varphi}_k(x) - \underline{\varphi}_k(x)}{2} + \frac{\overline{\varphi}_k(x) + \underline{\varphi}_k(x)}{2} \right) = \\
&= \mathbf{P} \left(-r_k(x) - c_k(x) \leq \tilde{u}_k \left(m_\xi^{-1} \overset{\circ}{\xi}_k + 1 \right) \leq r_k(x) - c_k(x) \right).
\end{aligned}$$

Для удобства обозначим: $\eta_k = m_\xi^{-1} \overset{\circ}{\xi}_k$, $\eta_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\eta^2)$, $\sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 m_\xi^{-2}$. Нетрудно видеть, что выражение (20) с учетом сделанных преобразований и введенных функций можно представить в следующем виде

$$(П.18) \quad \underline{\mathbf{B}}_k(x) = \max_{\tilde{u}_k} \mathbf{P} \left(|c_k(x) + \tilde{u}_k(1 + \eta_k)| \leq r_k(x) \right).$$

Решение задачи стохастического программирования в правой части (П.18) с точностью до параметров $c_k(x)$, $r_k(x)$ известно [2, 15]. При условии $x \in \mathcal{B}_k$ это решение имеет вид

$$(П.19) \quad \tilde{u}_k^* = -2c_k(x) \left(1 + \sqrt{1 + 2\sigma_\eta^2 \ln \left(\frac{|c_k(x)| + r_k(x)}{|c_k(x)| - r_k(x)} \right)} \right)^{-1},$$

откуда с учетом замены переменных для \underline{u} окончательно получаем (22).

Пп. 1 и 2 леммы 2 доказаны.

Для доказательства пп. 3 и 4 леммы 2 достаточно заметить, что по аналогии со сделанными преобразованиями при доказательстве пп. 1 и 2 настоящей леммы можно получить следующее выражение для верхней оценки функции Беллмана (21):

$$\begin{aligned}
(П.20) \quad &\overline{\mathbf{B}}_k(x) = \max_{u_k} \mathbf{P} \left(\dot{\omega} \left| e_2^{\mathbf{T}} \left(A_k x + \left(A_k^\xi x + B_k u_k \right) \xi_k \right) \right| \leq \varphi \right) = \\
&= \max_{\tilde{u}_k} \mathbf{P} \left(\left| e_2^{\mathbf{T}} A_k m_\xi^{-1} x + \tilde{u}_k \left(m_\xi^{-1} \overset{\circ}{\xi}_k + 1 \right) \right| \leq \varphi \dot{\omega}^{-1} m_\xi^{-1} \right) = \\
&= \max_{\tilde{u}_k} \mathbf{P} \left(\left| e_2^{\mathbf{T}} A_k m_\xi^{-1} x + \tilde{u}_k (1 + \eta_k) \right| \leq \varphi \dot{\omega}^{-1} m_\xi^{-1} \right).
\end{aligned}$$

Задача стохастического программирования в правой части (П.20) с точностью до параметров совпадает с задачей стохастического программирования в правой части (П.18), откуда по аналогии с доказательствами пп. 1 и 2 леммы 2 получаем (24) и (25).

Лемма 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мальшев В.В., Кибзун А.И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987.
2. *Кан Ю.С.* Оптимизация управления по квантильному критерию // *АиТ.* 2001. № 5. С. 77–88.
Kan Yu.S. Control Optimization by the Quantile Criterion // *Autom. Remote Control.* 2001. V. 62. No. 5. P. 746–757.
3. *Охоцимский Д.Е., Рясин В.А., Ченцов Н.Н.* Оптимальная стратегия при корректировании // *Докл. АН СССР.* 1967. Т. 175. № 1. С. 47–50.
4. *Григорьев П.В., Кан Ю.С.* Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг // *АиТ.* 2004. № 2. С. 179–197.
Grigor'ev P. V., Kan Yu.S. Optimal Control of the Investment Portfolio with Respect to the Quantile Criterion // *Autom. Remote Control.* 2004. V. 65. No. 2. P. 319–336.
5. *Бунто Т.В., Кан Ю.С.* Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг с ненулевой вероятностью разорения // *АиТ.* 2013. № 5. С. 114–136.
Bunto T.V., Kan Yu.S. Quantile Criterion-based control of the Securities Portfolio with a nonzero ruin Probability // *Autom. Remote Control.* 2013. V. 74. No. 5. P. 811–828.
6. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* Двухшаговая задача формирования портфеля ценных бумаг из двух рискованных активов по вероятностному критерию // *АиТ.* 2015. № 7. С. 78–100.
Kibzun A.I., Ignatov A.N. The Two-Step Problem of Investment Portfolio Selection from two Risk Assets via the Probability Criterion // *Autom. Remote Control.* 2015. V. 76. No. 7. P. 1201–1220.
7. *Jasour A.M., Aybat N.S., Lagoa C.M.* Semidefinite Programming For Chance Constrained Optimization Over Semialgebraic Sets // *SIAM J. Optim.* 2015. No. 25 (3). P. 1411–1440.
8. *Jasour A.M., Lagoa C.M.* Convex Chance Constrained Model Predictive Control // 2016. arXiv preprint arXiv:1603.07413.
9. *Jasour A.M., Lagoa C.M.* Convex Relaxations of a Probabilistically Robust Control Design Problem // 52nd IEEE Conf. on Decision and Control. 2013. P. 1892–1897.
10. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* О существовании оптимальных стратегий в задаче управления стохастической системой с дискретным временем по вероятностному критерию // *АиТ.* 2017. № 10. С. 139–154.
Kibzun A.I., Ignatov A.N. On the Existence of Optimal Strategies in the Control Problem for a Stochastic Discrete Time System with Respect to the Probability Criterion // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 10. P. 1845–1856.
11. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Об оптимальном удержании траектории дискретной стохастической системы в трубке // *АиТ.* 2019. № 1. С. 38–53.
Azanov V.M., Kan Yu.S. On Optimal Retention of the Trajectory of Discrete Stochastic System in Tube // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 1. P. 30–42.

12. *Кибзун А.И., Кузнецов Е.А.* Оптимальное управление портфелем ценных бумаг // *АиТ.* 2001. № 9. С. 101–113.
Kibzun A.I., Kuznetsov E.A. Optimal Control of the Portfolio // *Autom. Remote Control.* 2001. V. 62. No. 9. P. 1489–1501.
13. *Кибзун А.И., Кузнецов Е.А.* Позиционная стратегия формирования портфеля ценных бумаг // *АиТ.* 2003. № 1. С. 151–166.
Kibzun A.I., Kuznetsov E.A. Positional Strategy of Forming the Investment Portfolio // *Autom. Remote Control.* 2003. V. 64. No. 1. P. 138–152.
14. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Оптимизация коррекции околокруговой орбиты искусственного спутника Земли по вероятностному критерию // *Тр. ИСА РАН.* 2015. № 2. С. 18–26.
15. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Синтез оптимальных стратегий в задачах управления стохастическими дискретными системами по критерию вероятности // *АиТ.* 2017. № 6. С. 57–83.
Azanov V.M., Kan Yu.S. Design of Optimal Strategies in the Problems of Discrete System Control by the Probabilistic Criterion // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 6. P. 1006–1027.
16. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Двухсторонняя оценка функции Беллмана в задачах стохастического оптимального управления дискретными системами по вероятностному критерию качества // *АиТ.* 2018. № 2. С. 3–18.
Azanov V.M., Kan Yu.S. Bilateral Estimation of the Bellman Function in the Problems of Optimal Stochastic Control of Discrete Systems by the Probabilistic Performance Criterion // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 2. P. 203–215.
17. *Jasour A.M., Lagoa C.M.* Convex constrained semialgebraic volume optimization: Application in systems and control, arXiv:1701.08910, 2017.
18. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Однопараметрическая задача оптимальной коррекции траектории летательного аппарата по критерию вероятности // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2016. № 2. С. 1–13.
19. *Кан Ю.С., Кибзун А.И.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В.Назиным.

Поступила в редакцию 24.12.2019

После доработки 20.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020

© 2020 г. М.М. ХРУСТАЛЕВ, д-р физ.-мат. наук (mmkhrustalev@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ТЕРМИНАЛЬНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФУЗИОННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ, НЕЛИНЕЙНЫХ ПО УПРАВЛЕНИЮ¹

Полученные ранее условия терминальной инвариантности стохастических систем диффузионного типа конкретизируются для квазилинейных систем нелинейных по управлению и даются рекомендации по синтезу управлений, обеспечивающих терминальную инвариантность.

Ключевые слова: стохастическая система, управление, терминальная инвариантность.

DOI: 10.31857/S0005231020100049

1. Введение

Важной задачей теории управления динамическими системами является задача синтеза стратегии управления, обеспечивающей постоянное значение терминального критерия (в общем случае векторного) независимо от действующих на систему детерминированных, но заранее не известных, переменных во времени возмущений. Эту задачу Л.И. Розоноэр назвал задачей слабой инвариантности и получил для нее локальные необходимые условия [1]. Однако более естественен для этого вида инвариантности термин — «терминальная инвариантность», соответствующий термину «терминальное управление» в работах по управлению конечным состоянием объекта. В этой задаче автором были получены необходимые и одновременно достаточные условия, а в ее обобщении — задаче абсолютной инвариантности — достаточные условия [2].

В [3, 4] была поставлена новая задача теории инвариантности — задача о терминальной инвариантности управляемых стохастических динамических систем диффузионного типа. Для этой задачи были получены общие достаточные условия инвариантности [3, 4]. В [5] эти условия исследованы для простого случая линейных стохастических систем. Данная работа является непосредственным продолжением работ [3, 4]. В ней условия работ [3, 4] конкретизируются для квазилинейных стохастических систем диффузионного типа, нелинейных по управлению. Для этого класса систем они доводятся до достаточно конструктивных алгоритмов синтеза стратегий управления, обеспечивающих инвариантность. Так как будет изучаться только терминальная инвариантность, слово «терминальная» далее будем опускать.

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-08-00400).

2. Формулировка задач терминальной инвариантности

Будем предполагать, что управляемая динамическая система описывается векторным дифференциальным уравнением Ито:

$$(1) \quad dx(t) = f(t, x(t), u(t))dt + g(t, x(t), u(t))dw(t),$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$, где $t \in [t_0, t_1]$ — время ($t_{\min} \leq t_0 < t_1$); $x := (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n$ — состояние системы; $w(t) := (w_1(t), \dots, w_q(t))^T \in R^q$, $w(t) = \tilde{w}(t - t_0)$, где $\tilde{w}(\cdot)$ — q -мерный стандартный винеровский процесс; $(\cdot)^T$ — операция транспонирования. Управление $u(t) \in R^m$ представляет собой сужение на интервал $[t_0, t_1]$ фиксированной, непрерывной на полуоткрытом интервале $[t_{\min}, t_1]$ функции $t \rightarrow \tilde{u}(t) : [t_{\min}, t_1] \rightarrow R^m$. Далее, что не вызовет недоразумений, функцию $\tilde{u}(t)$ также будем называть управлением и использовать для нее обозначение $u(t)$. Начальная точка (t_0, x_0) и момент t_1 заданы. Моменты времени t_{\min}, t_1 фиксированы в отличие от момента t_0 , который может принимать различные значения.

Здесь будет рассматриваться частный случай системы (1), в которой функция $f(t, x, u)$ имеет вид $f(t, x, u) = A_0(t, u)x + B_0(t, u)$, а столбцы матрицы $g(t, x, u)$ задаются равенствами $g_k(t, x, u) = A_k(t, u)x + B_k(t, u)$, $k = \overline{1, q}$. Матрицы $A_k(t, u)$, $B_k(t, u)$, $k = \overline{0, q}$, имеют соответствующие размеры, их элементы — заданные на $[t_{\min}, t_1] \times R^m$ непрерывные функции. В результате рассматриваемая система (1) имеет вид

$$dx(t) = A_0(t, u(t))x(t) + B_0(t, u(t)) + \sum_{k=1}^q (A_k(t, u(t))x(t) + B_k(t, u(t)))dw_k(t).$$

Более общий вид системы в форме (1) приведен здесь для того, чтобы удобно было привести формулировки соответствующих теорем из [4], конкретизированные для рассматриваемого здесь случая, необходимые для получения результатов данной работы.

Частным случаем системы является система с афинной по состоянию стратегией управления:

$$(2) \quad \begin{aligned} dx(t) &= (\alpha_0(t)x(t) + \beta_0(t)v(t, x(t)) + \gamma_0(t))dt + \\ &+ \sum_{k=1}^q (\alpha_k(t)x(t) + \beta_k(t)v(t, x(t)) + \gamma_k(t))dw_k(t), \end{aligned}$$

где

$$(3) \quad v(t, x) = -L(t)x + L^0(t) \in R^{m_v}$$

— афинная стратегия управления.

Если через $u(t)$ обозначить совокупность компонент матриц $L(t)$ и $L^0(t)$ и положить $A_k(t, u) = \alpha_k(t) - \beta_k(t)L$, $B_k(t, u) = \beta_k(t)L^0 + \gamma_k(t)$ при $k = \overline{0, q}$, то система (2) примет вид системы (1).

Этот частный случай приведен, чтобы подчеркнуть, что для достижения инвариантности системы исследуемого здесь типа иногда можно использовать и афинную по состоянию обратную связь.

При сделанных выше предположениях в случае, когда управление $u(t)$ непрерывно на замкнутом интервале $[t_{\min}, t_1]$, уравнение (1) для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in B^0$, где $B^0 = [t_{\min}, t_1] \times R^n$, имеет сильное решение [6, с. 484, теорема 1]. Действительно, условия указанной теоремы заведомо выполнены, так как функции $f(t, x, u)$ и $g(t, x, u)$ в системе (1) непрерывны и линейны по x . Если же управление $u(t)$ непрерывно лишь на полуоткрытом интервале $[t_0, t_1)$, то факт существования решения уравнения (1) (сильного или слабого) на интервале $[t_0, t_1]$, как и в общих теоремах из [4], приходится постулировать. Детальный комментарий по этому вопросу будет приведен в разделе 3 после формулировки теорем из [4].

Далее всюду в теоретических построениях будем предполагать, что управление $u(t)$ в системе (1) фиксировано. Для фиксированной начальной точки через $D(t_0, x_0)$ обозначим множество реализаций $x(\cdot)$ случайного процесса, описываемого уравнением (1). Пусть также $D_\Sigma = \bigcup D(t_0, x_0)$, $(t_0, x_0) \in B^0$.

На множестве D_Σ определим функционал (терминальный критерий):

$$(4) \quad J(x(\cdot)) = F(x(t_1)), \quad F(x) = \frac{1}{2}x^T Gx + Q^T x,$$

где G, Q — заданные постоянные матрицы соответствующих размеров (в [4] считается, что $F(x)$ — произвольная функция из $C^2(R^n)$).

Определение 1. Динамическую систему (1) при фиксированном управлении $u(t)$ будем называть инвариантной по возмущениям, если для любой фиксированной начальной точки $(t_0, x_0) \in B^0$ критерий (4) принимает постоянное значение $J_c(t_0, x_0)$ с вероятностью 1 на множестве $D(t_0, x_0)$.

Определение 2. Динамическую систему (1) при фиксированном управлении $u(t)$ будем называть абсолютно инвариантной, если критерий (4) принимает одно и то же постоянное значение J_c^a на множестве D_Σ с вероятностью 1 для каждой начальной точки $(t_0, x_0) \in B^0$.

Целью выбора управления $u(t)$ является обеспечение инвариантности системы (1) в смысле определения 1 или 2.

3. Достаточные условия терминальной инвариантности

Следуя [4], введем в рассмотрение множество Φ функций $(t, x) \rightarrow \varphi(t, x) : [t_{\min}, t_1] \times R^n \rightarrow R^1$, имеющих непрерывные производные $\varphi_t, \varphi_x = (\varphi_{x_1}, \dots, \varphi_{x_n})^T \in R^n, \varphi_{xx} = \{\varphi_{x_i x_j}\}, i, j = \overline{1, n}$, множество M непрерывных функций $t \rightarrow \mu(t) : [t_{\min}, t_1] \rightarrow R^1$ и обозначим:

$$K(t, x, u) = \varphi_t(t, x) + \varphi_x^T(t, x)f(t, x, u) + \frac{1}{2}\text{tr}[\sigma(t, x, u)\varphi_{xx}(t, x)],$$

$$S(t, x, u) = \varphi_x^T(t, x)g(t, x, u),$$

где

$$\sigma(t, x, u) = g(t, x, u)g^T(t, x, u).$$

В [4] получены достаточные условия инвариантности (по возмущениям и абсолютной) для управляемых стохастических систем диффузионного типа с позиционными стратегиями управления и дополнительным детерминированным возмущением, которые без изменений справедливы и в случае программного управления при отсутствии детерминированных возмущений. Приведенные ниже теоремы 1, 2 являются формальной конкретизацией теорем из [4] на изучаемый здесь случай. Следствие из теоремы 2 и замечания 1–3 также перенесены из [4].

Теорема 1. 1. Для того чтобы система (1) была инвариантна по возмущениям, достаточно существования функций $\varphi \in \Phi$, $\mu \in M$, таких что

$$1) \varphi(t_1, x) = F(x), \quad x \in R^n,$$

для всех $x \in R^n$, $t \in [t_{\min}, t_1]$ выполнены условия:

$$2) K(t, x, u(t)) = \mu(t),$$

$$3) S(t, x, u(t)) = 0.$$

2. Если условия п. 1 теоремы выполнены, то для любой фиксированной начальной точки $(t_0, x_0) \in B^0$ критерий (4) принимает постоянное значение

$$J_c(t_0, x_0) = \varphi(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t_1} \mu(t) dt$$

с вероятностью 1 на множестве $D(t_0, x_0)$.

Теорема 2. 1. Для того чтобы система (1) была абсолютно инвариантна, достаточно существования функции $\varphi \in \Phi$, функции $\mu \in M$ и постоянной $A > 0$, таких что

$$1) \varphi(t_1, x) = F(x), \quad x \in R^n,$$

для всех $x \in R^n$, $t \in [t_{\min}, t_1]$ выполнены условия:

$$2) K(t, x, u(t)) = (\mu(t) - A\varphi(t, x))(t_1 - t)^{-1},$$

$$3) S(t, x, u(t)) = 0.$$

2. Если условия п. 1 теоремы выполнены, то для всех $(t_0, x_0) \in B^0$ с вероятностью 1 на множестве $D(t_0, x_0)$ справедливо равенство:

$$J(x(\cdot)) = F(x(t_1)) = J_c^a, \quad J_c^a = \frac{\mu(t_1)}{A}.$$

В [4, с. 85, следствие 3], кроме теорем 1, 2, имеется следующий результат.

Следствие. Если в теореме 2 $A > 1$ и $\mu(t) \equiv 0$, то для каждой точки $(t_0, x_0) \in B^0$ с вероятностью 1 для реализаций $x(\cdot) \in D(t_0, x_0)$ при почти всех $t \in [t_0, t_1]$ справедливо равенство:

$$K(t, x(t), u(t)) = -A\varphi(t_0, x_0)(t_1 - t_0)^{-A}(t_1 - t)^{A-1},$$

или, что то же самое,

$$(5) \quad \varphi(t, x(t)) = C(t_0, x_0)(t_1 - t)^A, \quad C(t_0, x_0) = A\varphi(t_0, x_0)(t_1 - t_0)^{-A}.$$

Этот результат понадобится при анализе примеров в разделе 5.

Замечание 1. Если терминальных условий несколько, можно считать, что критерий (4) векторный, и записать условия теоремы 1 или 2 для каждой компоненты критерия.

Замечание 2. В [4, с. 85, замечание 4] отмечается, что при достаточно слабых предположениях без уменьшения общности можно считать, что $\mu(t) \equiv 0$.

Замечание 3. Из самого определения абсолютной инвариантности следует, что для наличия этого свойства у системы (1) достаточно, чтобы условия теоремы 2 выполнялись для почти всех реализаций случайного процесса лишь в моменты времени малого интервала $[t_1 - \varepsilon, t_1)$. Величина числа $\varepsilon > 0$ может быть различной для каждой реализации.

Замечание 4. Как указывалось в разделе 2, в случае, когда управление $u(t)$ непрерывно лишь на полуоткрытом интервале $[t_{\min}, t_1)$, возникает проблема с доказательством существования решения (сильного или слабого) системы (1).

Общая рекомендация следующая. В каждой прикладной задаче или модельном примере следует пытаться провести такое доказательство. Особенно плохая ситуация возникает в случае теоремы 2 об абсолютной инвариантности в связи с тем, что условие 2) теоремы содержит сингулярность в точке $t = t_1$, которая приведет к сингулярности управления. Однако здесь может помочь тот факт, что существование решения нужно доказать при фиксированной начальной точке (t_0, x_0) . В этом случае использование равенства (5) позволяет при $A > 1$ ликвидировать сингулярность в условии 2) теоремы 2. Во всех приведенных в разделе 6 примерах соответствующее обоснование выполнено.

Если такое обоснование существования решения в сложных прикладных задачах провести не удастся, то условия теорем можно использовать, как эвристическое средство синтеза инвариантной системы и проверять ее работоспособность численным моделированием.

Замечания 3, 4 справедливы и в отношении ниже следующих теорем 2а, 2б, 2в, конкретизирующих теорему 2.

Конкретизируем теоремы 1, 2 для рассматриваемой здесь задачи с квазилинейным уравнением системы (1). Функцию $\varphi(t, x)$ возьмем в виде

$$(6) \quad \varphi(t, x) = \psi^T(t)x + \frac{1}{2}x^T \Lambda(t)x + \xi(t),$$

где векторная функция $\psi(t) \in R^n$, матричная функция $\Lambda(t)$ и скалярная функция $\xi(t)$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми на интервале $[t_{\min}, t_1]$. Тогда условие 1) теорем 1, 2 приобретает форму $\psi(t_1) = Q$, $\Lambda(t_1) = G$, $\xi(t_1) = 0$; а функции $K(t, x, u)$ и $S(t, x, u)$ в условиях 2), 3) этих

теорем имеют вид

$$K = \frac{d\xi}{dt} + \psi^T B_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q B_k^T \Lambda B_k + \left(\frac{d\psi^T}{dt} + \psi^T A_0 + B_0^T \Lambda + \sum_{k=1}^q B_k^T \Lambda A_k \right) x + \\ + \frac{1}{2} x^T \left(\frac{d\Lambda}{dt} + \Lambda A_0 + A_0^T \Lambda + \sum_{k=1}^q A_k^T \Lambda A_k \right) x, \\ S = (S_1, S_2, \dots, S_q), \\ S_k = \psi^T B_k + (\psi^T A_k + B_k^T \Lambda)x + \frac{1}{2} x^T (\Lambda A_k + A_k^T \Lambda)x, \quad k = \overline{1, q}.$$

В результате теоремы 1 и 2 принимают следующий вид.

Теорема 1а. Пусть система (1), функция φ вида (6) и функция $\mu \in M$ таковы, что:

1. а) $\psi(t_1) = Q$,
- б) $\Lambda(t_1) = G$,
- в) $\xi(t_1) = 0$;

при всех $t \in [t_{\min}, t_1)$ выполнены условия:

2. а) $\frac{d\xi(t)}{dt} + B_0^T(t, u(t))\psi(t) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q B_k^T(t, u(t))\Lambda(t)B_k(t, u(t)) = \mu(t)$,
- б) $\frac{d\psi(t)}{dt} + A_0^T(t, u(t))\psi(t) + \Lambda(t)B_0(t, u(t)) + \\ + \sum_{k=1}^q A_k^T(t, u(t))\Lambda(t)B_k(t, u(t)) = 0$,
- в) $\frac{d\Lambda(t)}{dt} + \Lambda(t)A_0(t, u(t)) + A_0^T(t, u(t))\Lambda(t) + \\ + \sum_{k=1}^q A_k^T(t, u(t))\Lambda(t)A_k(t, u(t)) = 0$;

при всех $k = \overline{1, q}$ справедливы равенства:

3. а) $B_k^T(t, u(t))\psi(t) = 0$,
- б) $A_k^T(t, u(t))\psi(t) + \Lambda(t)B_k(t, u(t)) = 0$,
- в) $\Lambda(t)A_k(t, u(t)) + A_k^T(t, u(t))\Lambda(t) = 0$.

Тогда система (1) инвариантна по возмущениям, при этом

$$(7) \quad J_c(t_0, x_0) = \psi^T(t_0)x_0 + \frac{1}{2}x_0^T \Lambda(t_0)x_0 + \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \mu(t)dt.$$

Теорема 2а. Пусть система (1), функция φ вида (6), функция $\mu \in M$ и постоянная $A > 0$ таковы, что выполнены условия 1, 3 теоремы 1а и при всех $t \in [t_{\min}, t_1)$ условия:

$$\begin{aligned}
2. \text{ а) } \frac{d\xi(t)}{dt} + B_0^T(t, u(t))\psi(t) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q B_k^T(t, u(t))\Lambda(t)B_k(t, u(t)) &= \frac{\mu(t) - A\xi(t)}{t_1 - t}, \\
\text{б) } \frac{d\psi(t)}{dt} + A_0^T(t, u(t))\psi(t) + \Lambda(t)B_0(t, u(t)) + \sum_{k=1}^q A_k^T(t, u(t))\Lambda(t)B_k(t, u(t)) &= \\
&= -\frac{A}{t_1 - t}\psi(t), \\
\text{в) } \frac{d\Lambda(t)}{dt} + \Lambda(t)A_0(t, u(t)) + A_0^T(t, u(t))\Lambda(t) + \sum_{k=1}^q A_k^T(t, u(t))\Lambda(t)A_k(t, u(t)) &= \\
&= -\frac{A}{t_1 - t}\Lambda(t).
\end{aligned}$$

Тогда система (1) абсолютно инвариантна, при этом

$$(8) \quad J_c^a = \frac{\mu(t_1)}{A}.$$

4. Частные случаи — линейный критерий, линейная система

Рассмотрим частный случай, когда критерий инвариантности линеен по состоянию:

$$(9) \quad J(x(\cdot)) = Q^T x.$$

Он получается, если в (4) положить $G = 0$. В этом случае функцию φ также можно взять линейной:

$$(10) \quad \varphi(t, x) = \psi^T(t)x + \xi(t),$$

положив в (6) $\Lambda(t) \equiv 0$. В результате условия инвариантности сильно упрощаются. Эти условия содержатся в нижеследующих теоремах 1б, 2б, непосредственно вытекающих из теорем 1а, 2а.

Теорема 1б. Пусть система (1), функция φ вида (10) и функция $\mu \in M$ таковы, что:

$$\begin{aligned}
1. \text{ а) } \psi(t_1) &= Q, \\
\text{б) } \xi(t_1) &= 0;
\end{aligned}$$

при всех $t \in [t_{\min}, t_1)$ выполнены условия:

$$\begin{aligned}
2. \text{ а) } \frac{d\xi(t)}{dt} + B_0^T(t, u(t))\psi(t) &= \mu(t), \\
\text{б) } \frac{d\psi(t)}{dt} + A_0^T(t, u(t))\psi(t) &= 0;
\end{aligned}$$

при всех $k = \overline{1, q}$ справедливы равенства:

$$\begin{aligned}
3. \text{ а) } B_k^T(t, u(t))\psi(t) &= 0, \\
\text{б) } A_k^T(t, u(t))\psi(t) &= 0.
\end{aligned}$$

Тогда система (1) инвариантна по возмущениям, при этом

$$(11) \quad J_c(t_0, x_0) = \psi^T(t_0)x_0 + \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \mu(t)dt.$$

Теорема 2б. Пусть система (1), функция φ вида (10), функция $\mu \in M$ и постоянная $A > 0$ таковы, что выполнены условия 1, 3 теоремы 1б и при всех $t \in [t_{\min}, t_1]$ условия:

$$2. \text{ а) } \frac{d\xi(t)}{dt} + B_0^T(t, u(t))\psi(t) = \frac{\mu(t) - A\xi(t)}{t_1 - t},$$

$$\text{б) } \frac{d\psi(t)}{dt} + A_0^T(t, u(t))\psi(t) = -\frac{A}{t_1 - t}\psi(t).$$

Тогда система (1) абсолютно инвариантна, при этом $J_c^a = \frac{\mu(t_1)}{A}$.

Рассмотрим еще более частный случай, когда система (1) не содержит мультипликативных возмущений – линейна по состоянию и винеровскому процессу, но в общем случае нелинейна по управлению. Такая система получается, если положить $A_k(t, u) = 0$, $k = \overline{1, q}$. Критерий инвариантности также линеен вида (9). Результат представлен в теоремах 1в, 2в.

Теорема 1в. Пусть система (1), функция φ вида (10) и функция $\mu \in M$ таковы, что:

$$1. \text{ а) } \psi(t_1) = Q,$$

$$\text{б) } \xi(t_1) = 0;$$

при всех $t \in [t_{\min}, t_1]$ выполнены условия:

$$2. \text{ а) } \frac{d\xi(t)}{dt} + B_0^T(t, u(t))\psi(t) = \mu(t),$$

$$\text{б) } \frac{d\psi(t)}{dt} + A_0^T(t, u(t))\psi(t) = 0;$$

при всех $k = \overline{1, q}$ справедливы равенства:

$$3. B_k^T(t, u(t))\psi(t) = 0.$$

Тогда система (1) инвариантна по возмущениям, при этом

$$J_c(t_0, x_0) = \psi^T(t_0)x_0 + \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \mu(t)dt.$$

Теорема 2в. Пусть система (1), функция φ вида (10), функция $\mu \in M$ и постоянная $A > 0$ таковы, что выполнены условия 1, 3 теоремы 1в и при всех $t \in [t_{\min}, t_1]$ условия:

$$2. \text{ а) } \frac{d\xi(t)}{dt} + B_0^T(t, u(t))\psi(t) = \frac{\mu(t) - A\xi(t)}{t_1 - t},$$

$$\text{б) } \frac{d\psi(t)}{dt} + A_0^T(t, u(t))\psi(t) = -\frac{A}{t_1 - t}\psi(t).$$

Тогда система (1) абсолютно инвариантна, при этом $J_c^a = \frac{\mu(t_1)}{A}$.

Доказательства теорем 1а, 2а, 1б, 2б, 1в, 2в состоят в записи условий теорем 1, 2 для соответствующих частных случаев. При этом видно, что при сужении общности задачи количество условий теорем сокращается.

5. Рекомендации по конструированию алгоритмов синтеза инвариантных систем

Сначала рассмотрим случай инвариантности по возмущениям (теорема 1а).

Если компоненты управления $u(t)$, входящие в условия 2 теоремы 1а, и функция $\mu(t)$ заданы, то условия 2 совместно с граничными условиями 1 однозначно определяют функции $\xi(t)$, $\psi(t)$ и $\Lambda(t)$. Остается выполнить условия 3 теоремы. Их можно выполнить за счет выбора компонент управления $u(t)$, входящих в условия 3.

В частности, когда система (1) линейна ($A_k(t, u) = 0$, $k = \overline{1, q}$), критерий инвариантности имеет вид (9) (линеен) и матрицы $B_k(t, u)$, $k = \overline{1, q}$, линейны по u , условия 3 теорем 1в, 2в имеют вид системы линейных уравнений относительно u . В этом случае нетрудно записать условия разрешимости этой системы уравнений [5] и тем самым условия выполнимости условия 3 в теоремах 1в, 2в.

Однако, если указанных компонент управления $u(t)$ не достаточно для выполнения условий 3, то задача усложняется. В этом случае приходится использовать компоненты матрицы $\Lambda(t)$ и вектора $\psi(t)$, и тогда связи, наложенные на функции $\Lambda(t)$, $\psi(t)$ в условиях 2, приходится компенсировать за счет компонент вектора управления $u(t)$, входящих в функцию $f(t, x, u)$. Такая схема применяется в примере 2, приведенном в разделе 6.

Особенно сложен для синтеза инвариантной системы случай линейно-квадратичного критерия инвариантности вида (6) ($G \neq 0$). В этом случае условие 3 теорем 1а, 2а содержит $1 + n(n + 3)/2$ условий и создается впечатление, что единственный случай, когда условия 3 можно выполнить, — это случай, когда за счет управления $u(t)$ можно обнулить диффузионный член уравнения (1), $g(t, x, u(t)) = 0$. Однако удалось привести нетривиальные примеры, рассеивающие это опасение (примеры 4, 4.1–4.5, 5 в разделе 6).

Выполнение условий теоремы 2а можно обеспечивать по описанной выше схеме для теоремы 1а. Однако, здесь все намного сложнее в связи с тем, что условия 2 теоремы 2а содержат сингулярности, которые приходится компенсировать соответствующими сингулярностями в компонентах управления $u(t)$, входящих в функцию сноса $f(t, x, u)$ (примеры 3, 5 в разделе 6).

6. Примеры

Пример 1.

$$\begin{aligned}
 dx_1 &= u_4^2(x_2 - x_3)dt + x_2dw, \\
 dx_2 &= (x_1 - x_3)dt - x_1dw, \\
 dx_3 &= (-x_2 + u_4x_1)dt + vdw.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Здесь

$$(13) \quad v(t, x) = u_1(t)x_1 + u_2(t)x_2 + u_3(t)x_3, \quad u_4 = u_4(t), \quad t \in [t_{\min}, 0], \quad t_{\min} < 0,$$

— стратегии управления. Критерий инвариантности по возмущениям имеет вид

$$(14) \quad J = x_3(0).$$

Заметим, что в соответствии с общей постановкой задачи в этом примере и всех последующих начальная точка (t_0, x_0) выбирается произвольно из множества $B^0 = [t_{\min}, t_1) \times R^n$ и система должна быть инвариантна для всех таких начальных точек. В этом примере $t_1 = 0$, $n = 3$.

Применим теорему 16. Функцию $\mu(t)$ положим тождественно равной нулю, $\mu(t) \equiv 0$. Так как в этом примере $B_0(t, u) \equiv 0$, то из условий 1, 2 теоремы следует, что $\xi(t) \equiv 0$.

Стратегии управления

$$(15) \quad v(t, x) = \frac{1}{\psi_3(t)}(\psi_2(t)x_1 - \psi_1(t)x_2), \quad u_4(t) = 1$$

и функции

$$(16) \quad \psi_1(t) = 1 - e^t, \quad \psi_2(t) = -1 + e^t, \quad \psi_3(t) = 1$$

обеспечивают выполнение всех условий теоремы 16. Подставляя выражения (16) в (15), получим окончательные выражения для стратегий $v(t, x)$ и $u_4(t)$:

$$(17) \quad v(t, x) = (e^t - 1)(x_1 + x_2), \quad u_4(t) = 1.$$

Терминальное значение критерия вычисляется по формуле (11): $J_c = (1 - e^{t_0})(x_{10} - x_{20})$.

Пример 2. Рассмотрим ту же управляемую систему (12), (13), что и в примере 1, с тем же критерием инвариантности по возмущениям (14). Решение задачи терминальной инвариантности как правило не единственно, и это можно использовать для выполнения дополнительных условий на стратегии управления. В примере 1 стратегия управления $v(t, x)$ зависит от переменных состояния x_1 и x_2 . Оказывается можно дать другое решение задачи с зависимостью $v(t, x)$ только от переменной x_1 .

Функции $\mu(t) \equiv 0$, $\xi(t) \equiv 0$, $\psi_1(t) = 0$, $\psi_2(t) = \text{sh}(t)$, $\psi_3(t) = \text{ch}(t)$ и стратегии $v(t, x) = \frac{\psi_2(t)}{\psi_3(t)}x_1 = x_1 \text{th}(t)$, $u_4(t) = -\frac{\psi_2(t)}{\psi_3(t)} = -\text{th}(t)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 16.

Инвариантное значение критерия вычисляется по формуле (11):

$$J_c(t_0, x_0) = x_{20} \text{sh}(t_0) + x_{30} \text{ch}(t_0).$$

Пример 3 (абсолютная инвариантность).

$$(18) \quad \begin{aligned} dx_1 &= (x_2 - x_3 + v_2)dt + x_2dw, \\ dx_2 &= (x_1 - x_3)dt - x_1dw, \\ dx_3 &= (x_1 - x_2)dt + v_1dw. \end{aligned}$$

Здесь

$$v_1(t, x) = u_1(t)x_1 + u_2(t)x_2 + u_3(t)x_3, \quad v_2(t, x) = u_4(t)x_1 + u_5(t)x_2 + u_6(t)x_3$$

— стратегии управления. Критерий терминальной инвариантности имеет тот же вид, что и в примерах 1, 2, но здесь требуется обеспечить абсолютную инвариантность.

Для решения задачи применим теорему 2б. Здесь, как и в предыдущих примерах, положим $\mu(t) \equiv 0$, и тогда, как и в примерах 1, 2, $\xi(t) \equiv 0$. Компоненты вектор-функции $\psi(t)$ возьмем такими же, как в примере 1 (равенства (16)), так что функция $\varphi(t, x)$ имеет вид (10):

$$(19) \quad \varphi(t, x) = \psi_1(t)x_1 + \psi_2(t)x_2 + \psi_3(t)x_3 = (1 - e^t)(x_1 - x_2) + x_3.$$

В этом случае условие 3 будет выполнено, если стратегию $v_1(t, x)$ выбрать совпадающей со стратегией $v(t, x)$ в примере 1 (равенства (15), (17)):

$$(20) \quad v_1(t, x) = (e^t - 1)(x_1 + x_2).$$

Для выполнения векторного дифференциального уравнения 2б) теоремы 2б следует выбрать стратегию $v_2(t, x)$ в виде

$$(21) \quad v_2(t, x) = \frac{A}{t\psi_1(t)}(\psi_1(t)x_1 + \psi_2(t)x_2 + \psi_3(t)x_3).$$

Если в (21) подставить выражения (16) для $\psi_i(t)$, $i = \overline{1, 3}$, то стратегия $v_2(t, x)$ приобретает следующий конкретный вид:

$$(22) \quad v_2(t, x) = \frac{A}{t}x_1 - \frac{A}{t}x_2 + \frac{A}{t(1 - e^t)}x_3.$$

Нетрудно видеть, что стратегия $v_2(t, x)$ имеет сингулярность в окрестности конечной точки движения $t_1 = 0$. Однако, если использовать следствие из теоремы 2, конкретизацией которой является теорема 2б, то можно установить, что почти для всех реализаций случайного процесса $x(\cdot)$, исходящих из начальной точки (t_0, x_0) , функция $v_2(t, x(t))$ одна и та же:

$$(23) \quad v_2(t, x(t)) = \bar{v}(t; t_0, x_0)$$

и эта функция при $A \geq 2$ ограничена, а при $A > 2$

$$(24) \quad \lim_{t \rightarrow -0} \bar{v}(t; t_0, x_0) = 0.$$

Действительно, учитывая (19), (21), стратегию $v_2(t, x)$ можно представить в виде

$$v_2(t, x) = \frac{A}{t\psi_1(t)}\varphi(t, x).$$

А тогда, учитывая равенство (5) и вид функции $\psi_1(t)$ (равенства (16)), будем иметь:

$$(25) \quad v_2(t, x(t)) = \frac{A}{t(1 - e^t)}C(t_0, x_0)(-t)^A.$$

Из равенства (25) следует справедливость равенства (23), ограниченность функции $\bar{v}(t; t_0, x_0)$ при $A \geq 2$ и выполнение равенства (24) при $A > 2$.

В результате сильное решение системы (18) при фиксированном начальном условии $x(t_0) = x_0$ существует [6, стр. 484] и полученные стратегии управления (20), (22) обеспечивают абсолютную инвариантность относительно критерия (14). Терминальное значение критерия для всех начальных точек $(t_0, x_0) \in (-\infty, 0) \times R^3$ одно и то же и равно нулю (с вероятностью 1).

Пример 4.

$$(26) \quad \begin{aligned} dx_1 &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)dt + (b_{11}x_1 + b_{12}x_2)dw, \\ dx_2 &= (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)dt + (b_{21}x_1 + b_{22}x_2)dw. \end{aligned}$$

Система (26) не содержит управлений в явном виде. Считается, что векторное управление $u(t)$ уже подставлено в систему. Используя соответствующие теоремы из разделов 3, 4, запишем условия на коэффициенты системы, которые обеспечат инвариантность. Имеющиеся в этих коэффициентах управления должны обеспечить выполнение этих условий. Коэффициенты системы (26) в общем случае могут быть функциями переменной t .

Критерий инвариантности (по возмущениям или абсолютной) имеет вид

$$(27) \quad J = \frac{1}{2}x_1^2(0) + \frac{1}{2}x_2^2(0), \quad t \in [t_{\min}, 0], \quad t_{\min} < 0.$$

Критерий (27) квадратичен. В связи с этим будем использовать теоремы 1а и 2а. Сначала исследуем более простой случай инвариантности по возмущениям (теорема 1а).

Выпишем условия теоремы 1а для системы (26), положив $\mu(t) \equiv 0$. Условие 1 примет вид: 1. а) $\psi_1(0) = 0$, $\psi_2(0) = 0$, б) $\Lambda_{11}(0) = 1$, $\Lambda_{12}(0) = 0$, $\Lambda_{22}(0) = 1$, в) $\xi(0) = 0$. Нетрудно установить, что из этих условий и условий 2а), 2б) следует, что $\xi(t) \equiv 0$, $\psi(t) \equiv 0$ и условия 3а), 3б) выполняются тривиально.

В результате остаются следующие условия:

$$(28) \quad \begin{aligned} \Lambda_{11}(0) &= 1, \quad \Lambda_{12}(0) = 0, \quad \Lambda_{22}(0) = 1; \\ \frac{d\Lambda_{11}}{dt} + 2a_{11}\Lambda_{11} + 2a_{21}\Lambda_{12} + b_{21}^2\Lambda_{22} &= 0, \end{aligned}$$

$$(29) \quad \frac{d\Lambda_{12}}{dt} + a_{12}\Lambda_{11} + (a_{11} + a_{22} + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})\Lambda_{12} + a_{21}\Lambda_{22} = 0,$$

$$\frac{d\Lambda_{22}}{dt} + b_{12}^2\Lambda_{11} + 2a_{12}\Lambda_{12} + 2a_{22}\Lambda_{22} = 0;$$

$$b_{11}\Lambda_{11} + b_{21}\Lambda_{12} = 0,$$

$$(30) \quad b_{12}\Lambda_{11} + (b_{11} + b_{22})\Lambda_{12} + b_{21}\Lambda_{22} = 0,$$

$$b_{12}\Lambda_{12} + b_{22}\Lambda_{22} = 0.$$

Пример 4.1. Пусть в задаче примера 4

$$(31) \quad b_{11} = 0, \quad b_{22} = 0, \quad \Lambda_{12}(t) \equiv 0.$$

Тогда для инвариантности по возмущениям должны быть выполнены условия:

$$\frac{d\Lambda_{11}}{dt} + 2a_{11}\Lambda_{11} + b_{21}^2\Lambda_{22} = 0, \quad \frac{d\Lambda_{22}}{dt} + b_{12}^2\Lambda_{11} + 2a_{22}\Lambda_{22} = 0;$$

$$a_{12}\Lambda_{11} + a_{21}\Lambda_{22} = 0, \quad b_{12}\Lambda_{11} + b_{21}\Lambda_{22} = 0.$$

Пример 4.2. Пусть дополнительно к условиям (31) примера 4.1 выполнены условия: $a_{12} = -a_{21}$, $a_{11} = a_{22}$, $b_{12} = -b_{21}$. Тогда можно положить $\Lambda_{11} = \Lambda_{22} = \Lambda$, и для инвариантности по возмущениям должно быть выполнено единственное условие:

$$\frac{d\Lambda}{dt} + (2a_{11} + b_{12}^2)\Lambda = 0, \quad \Lambda(0) = 1.$$

Пример 4.3. Наложим на коэффициенты системы (26) следующие условия: $b_{11} = -\alpha\Lambda_{12}$, $b_{12} = -\alpha\Lambda_{22}$, $b_{21} = \alpha\Lambda_{11}$, $b_{22} = \alpha\Lambda_{12}$, где α — постоянная или заданная функция переменной t .

В этом случае условия (30) будут выполнены, и для инвариантности по возмущениям достаточно, чтобы функции $\Lambda_{11}(t)$, $\Lambda_{12}(t)$, $\Lambda_{22}(t)$ удовлетворяли системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d\Lambda_{11}}{dt} + 2a_{11}\Lambda_{11} + 2a_{21}\Lambda_{12} - \alpha^2\Lambda_{11}\Lambda_{12}^2 + \alpha^2\Lambda_{11}^2\Lambda_{22} = 0,$$

$$(32) \quad \frac{d\Lambda_{12}}{dt} + a_{12}\Lambda_{11} + (a_{11} + a_{22})\Lambda_{12} + a_{21}\Lambda_{22} - \alpha^2\Lambda_{12}^3 + \alpha^2\Lambda_{11}\Lambda_{12}\Lambda_{22} = 0,$$

$$\frac{d\Lambda_{22}}{dt} + 2a_{22}\Lambda_{22} + 2a_{12}\Lambda_{12} - \alpha^2\Lambda_{22}\Lambda_{12}^2 + \alpha^2\Lambda_{11}\Lambda_{22}^2 = 0$$

с граничными условиями

$$(33) \quad \Lambda_{11}(0) = 1, \quad \Lambda_{12}(0) = 0, \quad \Lambda_{22}(0) = 1.$$

Сложность в этом примере состоит в том, что уравнения (32) нелинейны и их решение может существовать не для любого интервала $[t_{\min}, 0]$, $t_{\min} < 0$. Тем не менее для достаточно близкого к нулю t_{\min} оно обязательно существует.

Пример 4.4. Дополнительно к условиям примера 4.3 потребуем, чтобы $\Lambda_{12}(t) \equiv 0$, тогда нужно считать, что $b_{11} = b_{22} = 0$. В этом случае условия (32), (33), гарантирующие инвариантность, примут более простой вид:

$$(34) \quad \begin{aligned} \frac{d\Lambda_{11}}{dt} + 2a_{11}\Lambda_{11} + \alpha^2\Lambda_{11}^2\Lambda_{22} &= 0, \\ a_{12}\Lambda_{11} + a_{21}\Lambda_{22} &= 0, \end{aligned}$$

$$(35) \quad \begin{aligned} \frac{d\Lambda_{22}}{dt} + 2a_{22}\Lambda_{22} + \alpha^2\Lambda_{11}\Lambda_{22}^2 &= 0; \\ \Lambda_{11}(0) = 1, \quad \Lambda_{22}(0) &= 1. \end{aligned}$$

Пример 4.5. Условия (34), (35) можно упростить еще больше, потребовав в дополнение к условиям примера 4.4 выполнение следующих условий: $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = -a_{21}$. В этом случае $\Lambda_{11}(t) = \Lambda_{22}(t) = \Lambda(t)$, $b_{12} = -\alpha\Lambda$, $b_{21} = \alpha\Lambda$ и функция $\Lambda(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$(36) \quad \frac{d\Lambda}{dt} + 2a_{11}\Lambda + \alpha^2\Lambda^3 = 0, \quad \Lambda(0) = 1.$$

Если $a_{11} < 0$ и $d = -\frac{2a_{11}}{\alpha^2} \geq 1$, то решение уравнения (36) существует, определено на интервале $(-\infty, 0]$ и имеет вид:

$$\Lambda(t) = \sqrt{\frac{d}{1 + (d-1)e^{4a_{11}t}}}.$$

При $a_{11} < 0$ и $d < 1$ решение определено на интервале $(t^*, 0]$, где $t^* = -\frac{1}{4a_{11}} \ln(1-d)$. При $a_{11} < 0$ и $d = 1$ $\Lambda(t) \equiv 1$. Терминальное значение критерия определяется равенством (7): $J_c(t_0, x_0) = \Lambda(t_0)(x_{10}^2 + x_{20}^2)$.

Пример 4.6 (абсолютная инвариантность).

Пусть в системе (26) $b_{11} = b_{22} = 0$, $b_{12} = -b_{21}$, $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = a_{21}$.

Модифицируем полученную систему, добавив в первое и второе уравнения управления $v_1(t, x)$, $v_2(t, x)$. В результате получим систему

$$(37) \quad \begin{aligned} dx_1 &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + v_1)dt + b_{12}x_2dw, \\ dx_2 &= (-a_{12}x_1 + a_{11}x_2 + v_2)dt - b_{12}x_1dw. \end{aligned}$$

Критерий абсолютной инвариантности по-прежнему имеет вид (27).

Функцию $\varphi(t, x)$ возьмем в виде $\varphi(t, x_1, x_2) = \frac{1}{2}\Lambda(t)(x_1^2 + x_2^2)$, где $\Lambda(t)$ удовлетворяет уравнению: $\frac{d\Lambda}{dt} + (2a_{11} + b_{12}^2)\Lambda = 0$, $\Lambda(0) = 1$. Если положить

$$(38) \quad v_1 = \frac{1}{2} \frac{A}{t} x_1, \quad v_2 = \frac{1}{2} \frac{A}{t} x_2, \quad A > 2,$$

то все условия теоремы 2а будут выполнены.

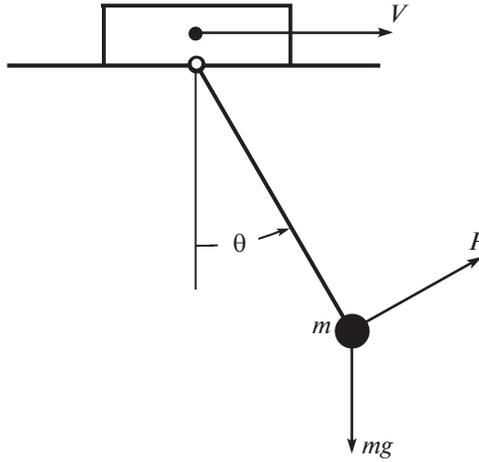


Рис. 1. Физическая интерпретация примера 4.6 – колебания маятника с подвижным основанием.

Однако управления (38) содержат сингулярность в точке $t = t_1 = 0$ и возникает вопрос, обсуждавшийся в замечании 4, о существовании решения системы (37). Для разрешения этого вопроса подставим управления (38) в систему (37) и сделаем в ней замену переменных:

$$x_1 = \frac{1}{2}Aty_1, \quad x_2 = \frac{1}{2}Aty_2.$$

В результате для переменных y_1, y_2 получим линейную систему уравнений

$$dy_1 = (a_{11}y_1 + a_{12}y_2)dt + b_{12}y_2dw, \quad dy_2 = (-a_{12}y_1 + a_{11}y_2)dt - b_{12}y_1dw,$$

которая, естественно, имеет сильное решение на интервале $[t_{\min}, 0]$, где t_{\min} — любое отрицательное число. А тогда и система (37) имеет решение на том же интервале.

Как следует из формулы (8), терминальное значение критерия (27) равно нулю. Из этого очевидно следует, что для любых начальных условий с вероятностью 1 $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0$.

Для этого примера 4.6 можно дать физическое истолкование.

Рассмотрим процесс колебаний в вертикальной плоскости маятника (рис. 1), состоящего из груза массы m , подвешенного на невесомом стержне длины l , точка подвеса которого a может перемещаться горизонтально со скоростью $V(t)$. На груз m действует сила тяжести mg и перпендикулярная к стержню l сила $P(t)$ (например, тяга реактивного двигателя или механизм, создающий момент силы относительно точки подвеса).

Величины $V(t)$ и $P(t)$ играют роль управлений и могут менять знак.

Линеаризованные уравнения движения маятника имеют вид

$$(39) \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega - \frac{V}{l}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{P}{ml} - \frac{g}{l}\theta.$$

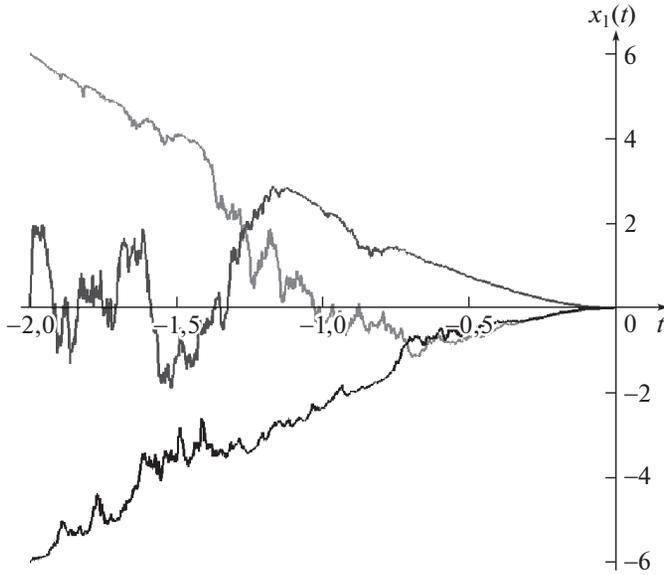


Рис. 2. Результаты моделирования трех реализаций случайного процесса для различных начальных точек в примере 4.6, демонстрирующие абсолютную инвариантность величины $x_1(0)$.

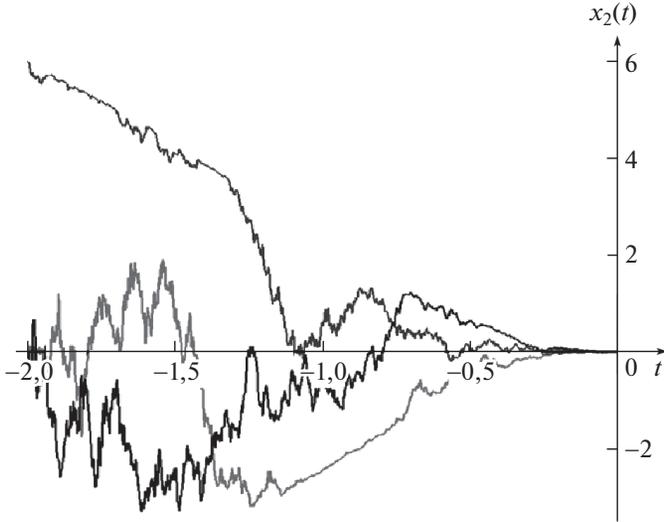


Рис. 3. Результаты моделирования трех реализаций случайного процесса для различных начальных точек в примере 4.6, демонстрирующие абсолютную инвариантность величины $x_2(0)$.

Линейная замена переменных $\theta = x_1$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}x_2$, $t = \sqrt{\frac{l}{g}}\tau$, $V = -\sqrt{gl}v_1$, $P = mgv_2$ приводит систему (39) к виду

$$(40) \quad \frac{dx_1}{d\tau} = x_2 + v_1, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = -x_1 + v_2.$$

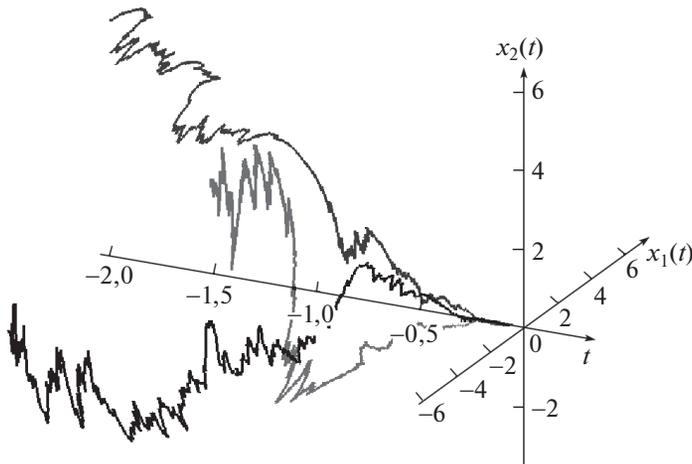


Рис. 4. Результаты моделирования трех реализаций случайного процесса для различных начальных точек в примере 4.6 – пространственная картина поведения переменных состояния $x_1(t)$, $x_2(t)$ во времени.

Предположим, что на предложенную механическую систему действует случайное возмущение в виде винеровского процесса, так что система (40) с учетом возмущения имеет вид системы уравнений Ито:

$$(41) \quad \begin{aligned} dx_1 &= (x_2 + v_1)dt + bx_2dw, \\ dx_2 &= (-x_1 + v_2)dt + ux_1dw. \end{aligned}$$

Здесь для удобства использования теории переменная τ заменена на t . Переменная $u = u(t)$ – дополнительное управление, позволяющее изменять характер действующих возмущений, а $b \neq 0$ – постоянная величина.

Если управление $u(t)$ взять в виде

$$(42) \quad u(t) = -b,$$

то система (41) представляет собой частный случай системы (37) и управления (38), (42) обеспечивают абсолютную инвариантность системы (41) по критерию (27). Физически это означает, что управления (38), (42) гасят колебания маятника в терминальный момент времени $t_1 = 0$.

На рис. 2, 3 показаны результаты моделирования реализаций случайного процесса $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$, $t \in [-2, 0]$ для трех различных начальных точек $x_0 = x(-2) = (6, 0)$, $x_0 = x(-2) = (0, 6)$, $x_0 = x(-2) = (-6, 0)$ (по одной реализации для каждой точки), демонстрирующие абсолютную инвариантность величин $x_1(0)$, $x_2(0)$. Величина A была выбрана равной 4. На рис. 4 показано поведение маятника в пространстве координат и времени.

Моделирование проводилось в системе MAPLE. Численное интегрирование системы уравнений Ито выполнялось классическим методом Эйлера [7]. Интервал интегрирования $[-2, 0]$ разбивался на 500 шагов. Величины $x_1(0)$, $x_2(0)$ на всех трех реализациях равны нулю с точностью до пятого знака

после запятой. Их малое отличие от нуля обусловлено ошибкой численного счета реализаций случайного процесса. Численный расчет реализаций имеет чисто демонстрационный характер.

7. Заключение

Условия терминальной инвариантности работ [3, 4] конкретизированы для квазилинейных стохастических систем диффузионного типа, нелинейных по управлению, и приобрели достаточно конструктивный вид.

В настоящее время достаточно интенсивно развивается и используется в приложениях теория робастности — ограниченности действия возмущений. На этом фоне возможность добиться полной компенсации возмущений (инвариантности) выглядит весьма привлекательно.

Следует отметить, что, несмотря на трудности синтеза систем, обладающих свойством терминальной инвариантности (по возмущениям или абсолютной), эта задача намного “мягче” аналогичной задачи классической теории инвариантности, когда нужно синтезировать систему, в которой при заданном начальном условии (t_0, x_0) изменение во времени заданной функции $\alpha(t, x)$ не зависит от возмущений. В стохастическом варианте в случае, когда с вероятностью единица $\alpha(t, x(t)) = \text{const}$, такая функция по аналогии с детерминированными системами называется первым интегралом стохастической системы [8].

“Мягкость” задачи терминальной инвариантности состоит в том, что в ней первый интеграл $\alpha(t, x) = \varphi(t, x)$ не задается априори, а выбирается в процессе решения задачи, в результате ее решение зачастую не единственно. Используя это, часто можно выполнить дополнительные требования к алгоритму управления. Например, в случае, когда система имеет вид (2) и ищется линейная стратегия управления (3), можно потребовать, чтобы стратегия управления не зависела от некоторых компонент вектора состояния x не доступных измерению (пример 2 в разделе 6).

Абсолютная терминальная инвариантность не имеет аналогов в классической теории инвариантности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Розоноэр Л.И.* Вариационный подход к проблеме инвариантности // *АиТ.* 1963. № 6. С. 744–756; № 7. С. 17–22.
Rozonoer L.I. A Variational Approach to the Problem of Invariance of Automation Control Systems // *Autom. Remote Control.* 1963. V. 24. No. 6. P. 680–743; No. 7. P. 793–800.
2. *Хрусталеv М.М.* Необходимые и достаточные условия слабой инвариантности // *АиТ.* 1968. № 4. С. 17–22.
Khrustalev M.M. Necessary and Sufficient Conditions of Invariance // *Autom. Remote Control.* 1968. V. 29. No. 4. P. 540–544.
3. *Хрусталеv М.М.* Инвариантность стохастических систем диффузионного типа // *ДАН.* 2017. Т. 476. № 2. С. 148–150.
Khrustalev M.M. Invariance of Stochastic Diffusion Systems // *Dokl. Math.* 2017. V. 96. No. 2. P. 535–537.

4. *Хрусталеv М.М.* Терминальная инвариантность стохастических систем диффузионного типа // *АиТ.* 2018. № 8. С. 81-100.
Khrustalev M.M. Terminal Invariance of Stochastic Diffusion Systems // *Autom. Remote Control.* 2018. Vol. 79. No. 8. С. 1434–1449.
5. *Хрусталеv М.М.* Терминальная инвариантность линейных стохастических систем диффузионного типа // *Труды 13-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ XIII, Москва, 2019).* М.: ИПУ РАН, 2019. С. 1305–1309.
6. *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985.
7. *Мильштейн Г.Н.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердловск: Изд-во Урал. ун-та, 1988.
8. *Карачанская Е.В.* Построение множества дифференциальных уравнений с заданным набором первых интегралов // *Вестн. ТОГУ.* 2011. № 3 (22). С. 47–56.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я.Рубиновичем.

Поступила в редакцию 28.02.2020

После доработки 11.05.2020

Принята к публикации 25.05.2020

Управление в технических системах

© 2020 г. В.Б. ТРОФИМОВ, канд. техн. наук (trofimov_vbt@mail.ru),
(Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»,
Москва)

О ПОДХОДЕ К ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОМУ УПРАВЛЕНИЮ СЛОЖНЫМИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ НА ПРИМЕРЕ ЧЕРНОЙ МЕТАЛЛУРГИИ

Предлагается оригинальный подход к синтезу интеллектуальных систем управления сложными нестационарными объектами, в которых происходит многократное воспроизведение производственных процессов за определенный отрезок времени, что позволяет накопить данные и знания о программах управления, условиях и результатах их реализации, о траекториях изменения контролируемых переменных. Рассматривается декомпозиция движения объекта управления на возмущенное и невозмущенное движение, для отображения невозмущенного программного движения объекта предлагается использовать экспертные системы и концепцию рассуждения по прецедентам, а для возмущенного движения — искусственные нейронные сети.

Ключевые слова: управление, прецедент, экспертные системы, искусственные нейронные сети, распознавание.

DOI: 10.31857/S0005231020100050

1. Введение

В автоматизированных системах управления сложными технологическими объектами целесообразно использовать прогнозирующие модели на основе искусственных нейронных сетей, экспертных систем и концепции рассуждения (обучения) по прецедентам [1–4]. Методы искусственного интеллекта используются как способ борьбы с неопределенностью внешней среды и нестационарностью объекта управления.

Переход к современным интеллектуальным производственным технологиям, создание систем обработки больших объемов данных, машинного обучения и искусственного интеллекта является актуальным направлением Стратегии научно-технологического развития Российской Федерации.

Большинство технологических объектов, особенно в черной металлургии, характеризуется нестационарностью, которая проявляется в изменении их параметров. Причина заключается в том, что они изнашиваются в процессе эксплуатации («стареют» элементы объектов), происходит изменение их конструктивных характеристик (модернизация, ремонт, замена, т.е. влияние внутренней структуры), изменение контролируемых и неконтролируемых

возмущений (например, изменение химического состава и качества перерабатываемого сырья, т.е. влияние внешней среды), существенное изменение технологического регламента производственных процессов на различных этапах (влияние внутренних условий). Управление объектами, функционирующие которых организовано циклически, предполагает повторение, с некоторой точностью, определенного набора действий для достижения желаемого результата по окончании каждого цикла работы. Многократное воспроизведение циклов за определенный отрезок времени позволяет накопить данные и знания о программах управления, условиях и результатах их реализации, о траекториях изменения контролируемых переменных. Прецеденты предлагаются использовать для формирования эффективных программ управления предстоящим циклом работы объекта в условиях изменения динамических характеристик возмущающих воздействий, свойств каналов управления и задающих воздействий. Циклы работы объекта различаются целями управления, требуемыми характеристиками выпускаемого продукта, изменяющимися свойствами объекта, способами принятия управленческих решений разными операторами-технологами, свойствами внешних воздействий.

Актуальным направлением развития систем искусственного интеллекта является создание методов правдоподобных рассуждений на основе прецедентов (Case-Based Reasoning (CBR) — концепция обучения по примерам или концепция рассуждения по прецедентам) [1–4]. Повторное использование прецедентов позволяет уменьшить время, затрачиваемое на решение новой задачи, повысить качество управления, объяснить полученное решение путем демонстрации успешного прецедента с отражением показателей сходства, обучаться в процессе работы, избежать повторения ошибки [1, 2]. Использование прецедентов позволяет принимать управленческие решения, учитывающие множество реальных ограничений, в том числе по времени и эффективности [4].

Для отображения программного движения объекта управления предлагается использовать экспертные системы на основе CBR-концепции с выделением типовых технологических ситуаций (траекторий), их признаков, а для отображения возмущенного движения — искусственные нейронные сети. В экспертных системах представление знаний о программном движении осуществляется в явном виде с помощью продукционных правил (в библиотеке прецедентов — на основе текущей информации в режиме реального времени), а в нейронных сетях представление знаний о возмущенном движении осуществляется в неявном виде — в архитектуре сети, параметрах нейронов и связей.

Большое количество входных элементов нейронной сети позволяет учитывать внешние воздействия, которые обуславливают нестационарность объекта управления. Сеть эффективно отображает поведение сложного объекта управления в малом диапазоне изменений входных и выходных величин, поскольку может воспроизводить сложные нелинейные зависимости, обучаться на примерах и «узнавать» в потоке зашумленной и противоречивой информации черты ранее встреченных ситуаций. Использование экспертных систем с несколькими библиотеками прецедентов позволяет существенно повысить гибкость управления.

Актуальной задачей модификации СВР-цикла, основанного на опыте прошлых подобных ситуаций, является разработка процедур прогнозирования возможных последствий от применения прецедентного решения. Прогнозирование необходимо в связи с тем, что последствия реализованных управляющих воздействий сказываются на состояниях и выходных воздействиях сложных технологических объектов длительное время, технологические циклы (ситуации) в черной металлургии часто не являются точным повторением ранее реализованных циклов.

2. Прецедентный подход к интеллектуальному управлению

Предлагаемый подход основан на концепции возмущенного-невозмущенного (программного) движения, которая была разработана А.М. Ляпуновым и развита Н.Н. Красовским, А.М. Летовым для решения задач устойчивости [5]. Программное управляющее воздействие, поступая на технологический объект управления совместно с параметрическими и координатными возмущениями, вызывает «движение» объекта, координаты которого отличаются от координат невозмущенного движения на значение координат возмущенного движения, которые затем поступают в регулятор. Даже при точном исполнении программы действительное движение объекта будет отличаться от программного движения. Под невозмущенным движением будем понимать «нормальный» («программный», «номинальный», «базовый», «опорный», «нормативный», «штатный») режим работы объекта, соответствующий требованиям технологической инструкции, а под возмущенным движением — отклонение от «нормального» режима. Необходимость создания интеллектуальных систем управления, способных функционировать в условиях развития «расстройства» объекта управления, обуславливается тем, что именно этот период работы объекта характеризуется максимальными затратами материальных и временных ресурсов на ликвидацию этих «расстройств» (аварийных ситуаций), значительными потерями производства и снижением качества продукции. Подход основан на многолетней практике восстановительно-прогнозирующего управления металлургическими объектами АО «ЕВРАЗ Объединенного Западно-Сибирского металлургического комбината».

Информационная модель (структурированное представление накопленного опыта в виде данных и знаний) каждого прецедента включает описание проблемной ситуации (информативные признаки прецедента для его идентификации, описание условий, когда целесообразно его использовать), совокупности действий (управленческих решений, программ управления), принимаемых для устранения данной проблемной ситуации, и результата применения решения (оценка его эффективности).

Предлагаемый подход включает:

— многоструктурное распознавание ситуации в системе управления на основе текущей входной информации, поступающей из подсистемы оценивания, т.е. обнаружение типовых образов-знаний (признаков), отражающих неслучайные причинно-следственные связи событий в системе, которые можно использовать для управления, и запоминать их в базе знаний (распознавание осуществляется на основе коллективного принятия решений множеством классификаторов);

— извлечение из базы знаний прецедента или подмножества прецедентов, соответствующих текущей ситуации, и их ранжирование по коэффициенту уверенности (или по мере доверия), а также по зафиксированной ранее эффективности (например, минимальное время исполнения программы, надежность), т.е. отбор прецедентов из множества прошлых циклов (ситуаций) по отношению к предстоящему циклу может осуществляться исходя из совпадения целей и ограничений, близости (подобия) параметров качества получаемой продукции, близости продолжительности свершившегося и предстоящего циклов, близости начальных условий, а также из наименьших затрат [6];

— многовариантное прогнозирование возможных последствий от принимаемого решения, содержащегося в извлеченном прецеденте-победителе;

— повторное использование извлеченного прецедента-победителя (прецедентов) для принятия очередного решения (т.е. повторное применение траекторий программных управляющих воздействий, программных выходных воздействий, базовых уровней контролируемых внешних воздействий на заданном интервале времени);

— пересмотр («автоматическая коррекция», «адаптация», «преобразование») прецедентного решения в соответствии с поставленной задачей путем установления отличия между новым и «извлеченным» прецедентами с учетом цели управления на основе применения экспертной системы, использующей обобщенные знания из базы правил для решения текущей задачи;

— пополнение или корректировка библиотеки прецедентов («обучение системы» или «пополнение знаний»), т.е. сохранение вновь принятого решения как части нового прецедента для будущих аналогичных ситуаций или добавление скорректированного прецедента в базу знаний в случае успешного решения задачи, а также удаление или архивирование прецедентов, потерявших актуальность.

Таким образом, чем дольше функционирует система, тем разнообразнее у нее база знаний и тем эффективнее будут принимаемые решения.

Предпосылки предлагаемого подхода: 1) подобные задачи должны иметь подобные решения; 2) производственные задачи должны повторяться, т.е. для многих предстоящих проблем должен существовать аналог в базе знаний; 3) имеется возможность приобретения и представления знаний о типовых ситуациях из работы объекта управления; 4) предметная область является слабоструктурированной, а задачи плохо математически формализуемые; 5) наличие достаточно большого числа примеров эффективных управленческих решений, найденных оператором-технологом для различных типопредставительных ситуаций, а также наличие большого объема данных о внешних влияющих факторах.

На рис. 1 представлена схема интеллектуальной системы управления, которая реализует данный подход. На этом рисунке приняты следующие обозначения: $Y^D(t)$ — действительные (индекс D) выходные воздействия объекта управления на внешнюю среду в момент времени t ; $U^D(t)$ — управляющие воздействия; $W_K^D(t)$ — контролируемые (индекс K) внешние воздействия; $W_{HK}^D(t)$ — неконтролируемые (индекс HK) внешние воздействия; $Z_j^H(t_i) = \{Y_j^H(t_i), S_j^H(t_i), W_{Kj}^H(t_i), U_j^H(t_i)\}$ — вектор натуральных (индекс H) сигналов,

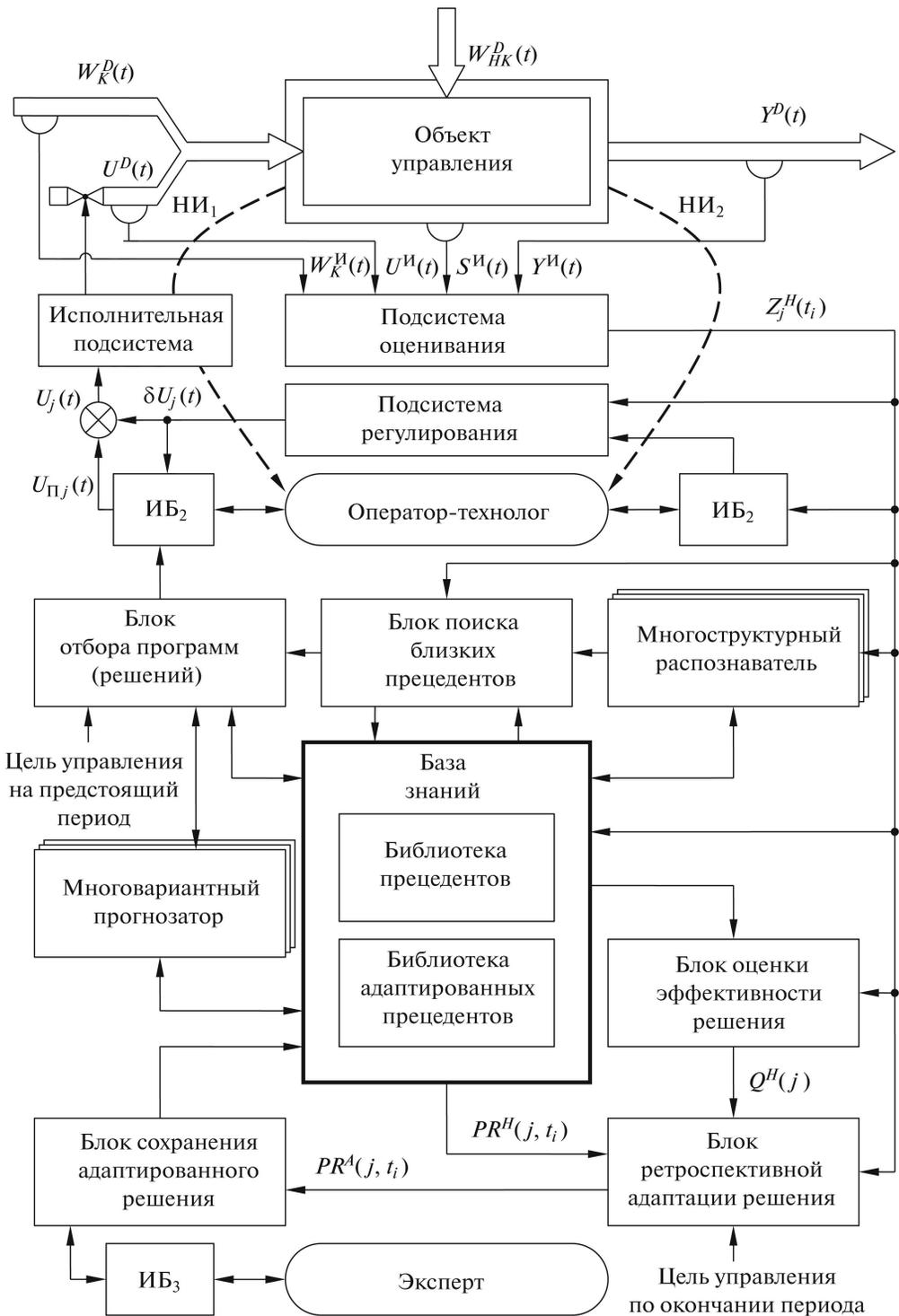


Рис. 1. Схема интеллектуальной системы управления на основе CBR-концепции.

относящихся к j -му технологическому циклу (ситуации, событию) и дискретному моменту времени t_i ; $Y_j^H(t_i) = \Psi_y(Y^I(t))$ — вектор натуральных дискретных данных, полученных из измерительных (индекс И) сигналов о выходных воздействиях объекта $Y^I(t)$; $U_j^H(t_i) = \Psi_u(U^I(t))$ — вектор натуральных дискретных данных, полученных из измерительных сигналов об управляющих воздействиях $U^I(t)$; $W_{Kj}^H(t_i) = \Psi_w(W_K^I(t))$ — вектор натуральных дискретных данных, полученных из измерительных сигналов о контролируемых внешних воздействиях $W_K^I(t)$; $S_j^H(t_i) = \Psi_s(S^I(t))$ — вектор натуральных дискретных данных, полученных из измерительных сигналов о состоянии объекта $S^I(t)$; $\Psi_y(\cdot)$, $\Psi_u(\cdot)$, $\Psi_w(\cdot)$, $\Psi_s(\cdot)$ — процедуры оценивания (фильтрации); НИ — неинструментальная информация; ИБ — интерфейсный блок.

В системе осуществляются следующие операции.

1. Сбор данных о прошедшем процессе (цикле процесса), проверка их на достоверность, контроль и оценивание $Z_j^H(t_i)$, расчет критериев эффективности управления $Q_m^H(T_j) = F_m\{Z_j^H(t_i), t_i \in [0, T_j]\}$, $m = 1, \dots, M$ по ходу и по окончании j -го временного отрезка $[0, T_j]$. В качестве основного показателя эффективности можно использовать, например, себестоимость продукции, полученной в j -м технологическом цикле, или затраты на ликвидацию j -й аварийной (нештатной) ситуации.
2. Сохранение траекторий вектора $Z_j^H(\cdot)$, компоненты которого имеют вид:

$$\begin{aligned} Y_j^H(t_i) &= [y_1^H(t_i), \dots, y_n^H(t_i), \dots, y_N^H(t_i)]_j; \\ S_j^H(t_i) &= [s_1^H(t_i), \dots, s_\ell^H(t_i), \dots, s_L^H(t_i)]_j; \\ W_{Kj}^H(t_i) &= [w_{K1}^H(t_i), \dots, w_{Kr}^H(t_i), \dots, w_{KR}^H(t_i)]_j; \\ U_j^H(t_i) &= [u_1^H(t_i), \dots, u_p^H(t_i), \dots, u_P(t_i)]_j. \end{aligned}$$

Натурные сигналы $Z_j^H(t_i)$, натурное программное управляющее воздействие $U_{\Pi j}^H(t_i)$, задающее воздействие $Y_j^*(t_i)$, значения критериев эффективность управления $Q_m^H(T_j)$, распознанное состояние объекта (его класс) $\tilde{S}_j(t_i)$, составляющие прецедент $PR^H(j, t_i) = \{Z_j^H(t_i), U_{\Pi j}^H(t_i), Y_j^*(t_i), Q_m^H(T_j), \tilde{S}_j(t_i)\}$, сохраняются в библиотеке прецедентов.

3. Оценивание экспертом (оператором-технологом) полученных прецедентов, установление им меры доверия от 0 до 1. Мера доверия равная 1 означает то, что эксперт считает данный прецедент полностью достоверным, а 0 — абсолютно недостоверным. Также эксперт выявляет наиболее эффективные прецеденты по их результатам с учетом состояния объекта управления.

4. Оценивание характеристик каналов управления, определение времени запаздывания, времени инерции и коэффициентов передачи по этим каналам путем нанесения тестовых воздействий.

5. Если прецедент обеспечил точное совпадение измеренных и заданных выходных величин, то он сохраняется в библиотеке прецедентов, в противном случае осуществляется его ретроспективная адаптация (пересмотр, пересчет) по окончании j -го технологического цикла (ситуации). Пересмотр осуществ-

ляется путем использования обратной нейросетевой пересчетной модели объекта управления. В качестве типа сети был выбран стандартный многослойный перцептрон, в промежуточных и выходном слоях которого использованы нейроны сигмоидального типа с униполярной функцией активации.

Корректировка программного управляющего воздействия осуществляется следующим образом:

$$U_{\Pi j}^A(t_i) = U_{\Pi j}^H(t_i) + F_{\text{инс}}\left(Y_j^*(t_i) - Y_j^H(t_i)\right),$$

где $F_{\text{инс}}(\cdot)$ — нейросетевой оператор.

Оператор $F_{\text{инс}}(\cdot)$ описывается следующими формулами:

$$x_c^H(i) = \frac{x_c(i) - x_c^{\min}}{x_c^{\max} - x_c^{\min}};$$

$$v_p^H(i) = \left[1 + \exp \left(- \sum_{m=0}^M w_{pm}^{(3)} \left[1 + \exp \left(- \sum_{k=0}^K w_{mk}^{(2)} \left[1 + \exp \left(- \sum_{c=0}^C w_{kc}^{(1)} x_c^H(i) \right) \right]^{-1} \right) \right]^{-1} \right) \right]^{-1};$$

$$v_p(i) = v_p^{\min} + [v_p^{\max} - v_p^{\min}] v_p^H(i),$$

где $x_c(i)$ — отклонение натурального выходного воздействия от заданного (вход сети); $v_p(i)$ — корректирующее значения p -й программы управления (выход сети), $p = 1, \dots, P$ (выходной нейрон, у которого $p = 1$, отвечает за корректировку программного управления по первому каналу управления и т.д.); $x_c^H(i)$ и $v_p^H(i)$ — нормированные значения $x_c(i)$ и $v_c(i)$; x_c^{\max} , x_c^{\min} и v_p^{\max} , v_p^{\min} — максимальное и минимальное значения $x_c(i)$ и $v_p(i)$, взятые из обучающей выборки; $w_{kc}^{(1)}$, $w_{mk}^{(2)}$, $w_{pm}^{(3)}$ — весовые коэффициенты, оптимальные значения которых определяются в процессе обучения сети по алгоритму обратного распространения ошибки, например, на основе высокоуровневого языка программирования Python.

То есть происходит пересмотр управлений программного вида путем ретроспективной корректировки реализованных программных управлений (траекторий управления) по контролируемым данным об отклонениях выходных параметров по ходу процесса и в конце его от желаемого режима. Определяются те программные управляющие воздействия, которые следовало бы нанести на объект для того, чтобы обеспечить точное попадание выходных результатов процесса в их заданные значения. Это позволяет уменьшить влияние допущенных ошибок на последующие результаты ведения технологического процесса. Пересмотренные программы управления сохраняются в библиотеке адаптированных прецедентов, которые целесообразно использовать на предстоящих технологических циклах $PR^A(j, t_i)$. Эксперт принимает

решение о включении нового прецедента в базу знаний для его последующего применения.

6. Формирование множества актуальных прецедентов для предстоящего $(j + 1)$ -го периода работы объекта осуществляется по критерию максимальной близости (схожести) заданных значений целевых переменных предстоящего $(j + 1)$ -го цикла к соответствующим параметрам прецедента. Для оценивания степени близости целесообразно использовать евклидову метрику, квадрат евклидоваго расстояния, манхэттенскую метрику, меру сходства Хемминга, вероятностную меру сходства, меру сходства Роджерса–Танимото, расстояние Чебышева, меру близости Журавлева, метрику Махалонобиса, Брея–Кертиса, Жаккара, Чекановского [2]. При отборе учитываются возможные последствия от принимаемых решений, также текущие ограничения на управляющие воздействия, т.е. осуществляется проверка предлагаемых решений на реализуемость. Если рекомендация не прошла проверку, то можно взять результаты предыдущего цикла процесса, использовать базовые (средние) значения контролируемых переменных, либо взять данные типопредставительного процесса, которые хранятся в базе знаний и периодически обновляются.

7. Многовариантное прогнозирование выходных воздействий объекта путем многократного «проигрывания» различных вариантов управляющих воздействий в ускоренном времени по следующей формуле:

$$\begin{aligned} \left\{ \hat{Y}_M(\theta | \theta + T_{\Pi}/\chi) \right\} &= \Phi_1(U_{\Pi}(\theta | \theta + T_{\Pi}/\chi), W_K^B(\theta | \theta + T_{\Pi}/\chi)) + \\ &+ \Phi_2 \left(\left\{ \delta \hat{U}(\theta | \theta + T_{\Pi}/\chi) \right\}, \delta \hat{W}_K(\theta | \theta + T_{\Pi}/\chi) \right) + \delta \hat{Y}(\theta | \theta + T_{\Pi}/\chi); \\ \left\{ \hat{U}(\theta | \theta + T_{\Pi}/\chi) \right\} &= U_{\Pi}(\theta | \theta + T_{\Pi}/\chi) + \left\{ \delta \hat{U}(\theta | \theta + T_{\Pi}/\chi) \right\}; \\ \hat{W}_K(\theta | \theta + T_{\Pi}/\chi) &= W_K^B(\theta | \theta + T_{\Pi}/\chi) + \delta \hat{W}_K(\theta | \theta + T_{\Pi}/\chi), \end{aligned}$$

где $\Phi_1(\cdot)$ — продукционная модель соответствия программных управляющих воздействий $U_{\Pi}(\cdot)$ и базовых уровней контролируемых внешних воздействий $W_K^B(\cdot)$ программной составляющей выходного воздействия, накапливаемых и модифицируемых в базе знаний; $\Phi_2(\cdot)$ — нейросетевая модель влияния отклонений от программных и базовых уровней входных воздействий на изменение выходного воздействия; $\left\{ \delta \hat{U}(\theta | \theta + T_{\Pi}/\chi) \right\}$ — возможные варианты корректирующих воздействий; $U_{\Pi}(\theta | \theta + T_{\Pi}/\chi)$, $W_K^B(\theta | \theta + T_{\Pi}/\chi)$ — программные управления и базовые уровни контролируемых внешних воздействий, считываемые из базы знаний на интервале прогнозирования T_{Π} ; $\delta \hat{W}_K(\theta | \theta + T_{\Pi}/\chi)$ — прогноз отклонений от базовых уровней контролируемых внешних воздействий в ускоренном режиме времени; $\delta \hat{Y}(\theta | \theta + T_{\Pi}/\chi)$ — прогнозируемые в ускоренном времени косвенные оценки эффектов неконтролируемых внешних воздействий; $\left\{ \hat{Y}_M(\theta | \theta + T_{\Pi}/\chi) \right\}$ — прогнозные оценки выходных воздействий объекта управления, полученные в ускоренном времени при различных вариантах возможных управляющих воздействий; $\theta = t/\chi$ — ускоренное время; t — реальное время; $\chi \gg 1$ — коэффициент ускорения времени.

8. Выбор оператором-технологом на предстоящий период $T(j+1)$ такого прецедента, содержащего ретроспективно-оптимальную программу, который соответствует его предпочтениям и требованиям технологической инструкции.

9. Корректировка выбранной программы-прецедента $PR^*(j+1, t_i)$ при наличии существенных отклонений параметров возмущений $W_K^I(j+1, t_i)$ от соответствующих параметров $W_K^H(j+1, t_i)$ выбранной программы. При этом используется аналогичная нейросетевая модель, учитывающая влияние контролируемых возмущающих воздействий.

3. Применение прецедентного подхода в управлении

CBR-системы разрабатывают на платформах CBR-Works, CAT-CBR, myCBR. Предлагаемый подход целесообразно использовать для управления доменной печью, агломерационной машиной, сталеплавильным конвертером, они характеризуются большими объемами натуральных данных [7].

Сталеплавильный процесс в конвертерах принадлежит к классу сложных периодических производственных процессов, количество плавков (прецеден-

Таблица 1. Хронометраж плавки (описание решения проблемы)

Время, ч:мин	Длительность операции, мин:с	Наименование операции
09:55		присадка в конвертер: известь (1,61 т), ФМ-1 (0,40 т)
09:59	02:28	завалка лома
10:01		присадка в конвертер: известь (1,53 т), флюс ФОМИ (1 т)
10:02	06:04	нагрев лома: расход кислорода 1552 м ³ , положение фурмы до зеркала металла 3,54 м
10:03		присадка в конвертер: уголь ТОМО1 (2,44 т)
10:06		присадка в конвертер: известь (0,49 т), уголь ТОМО1 (0,58 т)
10:11	02:18	заливка чугуна
10:13	19:13	продувка: расход кислорода 7664 м ³
10:32	10:01	повалка
10:42	05:07	выпуск металла
10:48	01:36	прерывание выпуска
10:49	00:16	слив шлака
10:49	47:03	цикл плавки

Таблица 2. Результаты экспресс-анализа стали (в 10:44, описание результата)

Al, %	C, %	Mn, %	S, %	P, %	Cr, %	Ni, %	Cu, %
0,38	0,04	0,09	0,033	0,012	0,03	0,03	0,04
Полученная марка стали СТЗПС.4/ЭТ (ГОСТ 380-2005)							
Температура стали 1621 °С (в 10:38)							

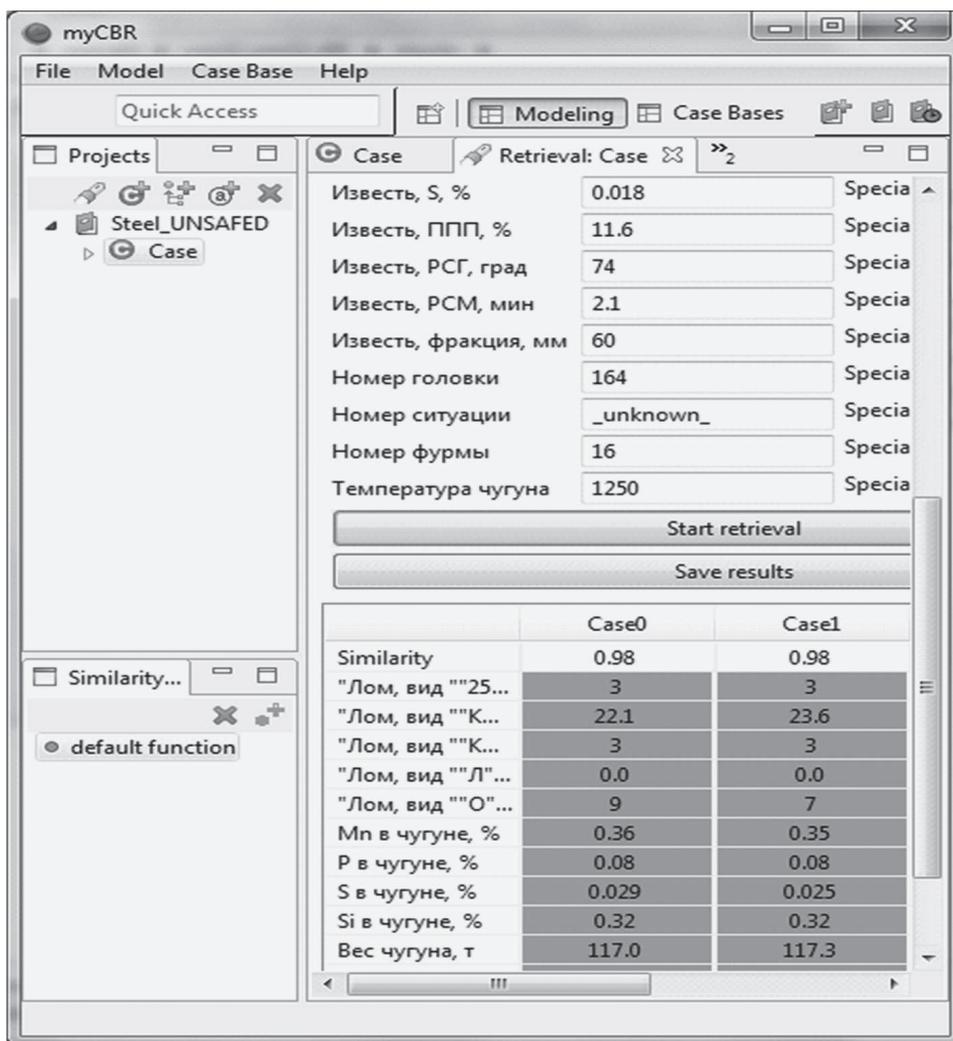


Рис. 2. Экранная форма CBR-системы для управления конвертером.

тов) в год достигает несколько тысяч. Каждая плавка состоит из периодов: завалка и нагрев лома; заливка чугуна; продувка кислородом; повалка (наклонение конвертера и взятие пробы); выпуск металла и шлака. Состав и масса исходных материалов плавки являются разовыми управляющими воздействиями, добавки сыпучих материалов — периодическими, а расход кислорода (интенсивность дутья) и изменение положения фурмы — непрерывным управлением. В этом случае прецедент включает:

— описание проблемной ситуации («химический состав чугуна, его температура и вес, вид лома и его вес, номер и состояние фурмы, футеровки, заданная марка стали, вид ферромарганца, флюса, тип угля, химический состав извести», «сворачивание шлака», «выбросы», «переливы шлака»);

— описание совокупности управляющих воздействий (расход кислорода и его программная траектория, положение фурмы и ее программная траектория, время начала и окончания плавки, количество чугуна, залитого в конвертер, количество лома, извести, ферромарганца, флюса, угля, поданного в конвертер, длительность нагрева лома, табл. 1);

— описание результата применения решения (химический состав полученной стали, ее температура, параметры отходящих технологических газов, полученная марка стали, табл. 2).

Применение СBR-системы способствует получению заданной марки стали, уменьшению дисперсии температуры металла.

На рис. 2 представлена экранная форма СBR-системы, созданная на открытой платформе *muСBR*. Система обеспечивает стабильность работы конвертера.

4. Заключение

Эффективность предлагаемого подхода зависит от количества высококачественных и актуальных прецедентов, т.е. прецедентов соответствующих текущему состоянию объекта, внешним воздействиям и цели управления, от размера базы знаний. При значительном разнообразии заданий на выпуск продукции (в современном сталеплавильном конвертерном цехе может выплавляться более 400 марок стали), а также при большом множестве ситуаций по внешним воздействиям и ошибкам измерений отобрать хотя бы несколько безупречных прецедентов на каждый вид продукции весьма сложно. Поэтому целесообразно по окончании каждого технологического цикла не отбрасывать ошибочные решения, а корректировать их, решая задачу пересмотра и расширения базы знаний с учетом доверия к этому новому прецеденту.

Предлагаемый подход отличается от других подходов, основанных на накоплении опыта управления, использованием разнообразных данных и знаний (количественных и качественных признаков) о работе действующей системы управления в режиме реального времени, оперативным сохранением в базе знаний не только лучших практик управления технологическим объектом, но и адаптированных решений, существенным разнообразием прецедентов в базе знаний, использованием информационных моделей прецедентов, применением многовариантного прогнозирования последствий от прецедентных решений, а также совместным использованием искусственных нейронных сетей и экспертных систем на основе концепции возмущенного-невозмущенного движения для технологического объекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cox M.T., Funk P., Begum S.* Case-Based Reasoning Research and Development. Stockholm: Springer, 2018.
2. *Варшавский П.Р., Еремеев А.П.* Моделирование рассуждений на основе прецедентов в интеллектуальных системах поддержки принятия решений // Искусственный интеллект и принятие решений. 2009. № 1. С. 45–57.

3. *Vassilyev S.N., Novikov D.A., Bakhtadze N.N.* Intelligent Control of Industrial Processes // 7th IFAC Conference on Manufacturing Modelling, Management, and Control, 2013. P. 49-57.
4. *Соколов И.А.* Теория и практика применения методов искусственного интеллекта // Вестн. РАН. 2019. Т. 89. № 4. С. 365–370.
5. *Воротников В.И.* Задачи и методы исследования устойчивости и стабилизации движения по отношению к части переменных: направления исследований, результаты, особенности // АиТ. 1993. № 3. С. 3–62.
Vorotnikov V.I. Stability and Stabilization of Motion: Research Approaches, Results, Distinctive Characteristics // Autom. Remote Control. 1993. V. 54. No. 3. P. 339–397.
6. *Aamodt A., Plaza E.* Case-Based Reasoning: Foundational Issues, Methodological Variations, and System Approaches // AI Communications. IOS Press. 1994. V. 7. No. 1. P. 39–59.
7. *Kulakov S.M., Trofimov V.B., Dobrynin A.S., Taraborina E.N.* Precedent Approach to the Formation of Programs for Cyclic Objects Control // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. IOP Publishing, 2018. V. 354. P. 1–9.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.Н.Бахтадзе.

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 01.06.2020

Принята к публикации 09.07.2020

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2020 г. В.М. МАКСИМОВ, (vladislav.maksimov@phystech.edu)
(Московский физико-технический институт),
П.Ю. ЧЕБОТАРЕВ, д-р физ.-мат. наук (pavel4e@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СОЦИАЛЬНАЯ ДИНАМИКА, ОПРЕДЕЛЯЕМАЯ ГОЛОСОВАНИЕМ: КВАРТИЛЬНЫЙ УЧЕТ ОСОБЕННОСТЕЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

В рамках модели социальной динамики, определяемой голосованием в стохастической среде (модель ViSE), исследуется влияние тяжести хвостов распределения на эффективность эгоистической и альтруистических стратегий в отношении максимизации двух критериев: среднего приращения капитала и числа неразорвавшихся участников. Рассмотрены однородные общества и четыре типа распределений, генерирующих предложения: нормальные, логистические, Стьюдента с тремя степенями свободы и симметризованные распределения Парето. Для оценки влияния тяжести хвостов стандартизация распределений по разбросу проводится на основе квартилей. Это позволяет отобрать для сопоставления распределения с тяжелыми хвостами, сравнимые по плотности с другими рассматриваемыми распределениями на интервале, включающем 90 % наблюдений.

Ключевые слова: модель ViSE, социальная динамика, динамическое голосование, стохастическая среда, яма ущерба, эгоизм, альтруизм, распределения с тяжелыми хвостами.

DOI: 10.31857/S0005231020100062

1. Введение

Основные положения модели ViSE (Voting in Stochastic Environment), предложенной для анализа полезности коллективных решений, состоят в следующем [1, 2].

Общество исходно состоит из n участников (*агентов*), каждый из которых характеризуется текущим значением *капитала* (его отрицательное значение — долг), или *полезности*. Задается вектор неотрицательных начальных значений капитала участников. На каждом шаге $t = 1, \dots, M$ на голосование ставится *предложение*, и участники голосуют, руководствуясь определенными стратегиями, за или против его принятия. Предложение есть вектор алгебраических приращений капиталов участников. Предложения, одобренные посредством принятой процедуры голосования, реализуются. Один из вариантов модели предполагает выбывание разорвавшихся участников, т.е. участников, чей капитал стал отрицательным (вариант “с *вымиранием*”). Анализ

динамики капиталов участников позволяет сравнивать стратегии голосования и процедуры принятия коллективных решений и выбирать среди них оптимальные в отношении максимизации того или иного критерия.

Предполагается, что каждое предложение формируется стохастически: его компоненты есть реализации случайных величин, в простейшем случае независимых и одинаково распределенных, с заданными математическим ожиданием μ и стандартным отклонением σ . Поэтому предложения, выносимые на голосование, могут быть также названы *предложениями стохастической среды*, или *предложениями среды*. Среда *благоприятна* при $\mu > 0$, *нейтральна* при $\mu = 0$ и *неблагоприятна* при $\mu < 0$.

Пусть $\mathbf{c}(m)$ — вектор капиталов участников по окончании шага $m \geq 0$; $\mathbf{c}(0)$ — вектор начальных значений капитала. В случае модели с вымиранием в число этих участников входят лишь те, чей капитал по окончании шага m неотрицателен. В случае без вымирания число компонент вектора $\mathbf{c}(m)$ остается равным n . Тогда

$$(1) \quad \mathbf{c}(m) = r(\mathbf{c}(m-1) + \boldsymbol{\zeta}(m) I(m)), \quad 0 < m \leq M,$$

где $\boldsymbol{\zeta}(m)$ — вектор предложения среды на шаге m ; M — общее число предложений;

$$I(m) = \begin{cases} 1, & \text{если предложение } \boldsymbol{\zeta}(m) \text{ принято голосованием;} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$r(\cdot)$ — оператор, исключающий из вектора отрицательные компоненты в модели с вымиранием и тождественный оператор в модели без вымирания.

Сравнение эффективности индивидуальных стратегий голосования и процедур принятия коллективных решений проводится на основании анализа статистических закономерностей изменения вектора капиталов (1) в разных средах, т.е. при различных распределениях, используемых для генерации предложений.

В данной работе статье исследуются решения, принимаемые простым большинством голосов, и следующие принципы голосования участников. *Эгоист* поддерживает предложение тогда и только тогда, когда оно увеличивает его капитал. Рассматриваются *альтруисты* со следующей стратегией. Участники упорядочиваются по возрастанию текущего значения капитала. Фиксируется $\delta \in [\frac{1}{n}; 1]$, и для текущего предложения среды находится сумма приращений капиталов $[\delta n]$ беднейших¹ участников, где $[\cdot]$ — целая часть. Альтруист поддерживает предложение тогда и только тогда, когда эта сумма положительна. *Окном поддержки* альтруистов называется отрезок $[0; \delta]$; δ может выражаться в процентах.

В [2] для нескольких типов стохастических сред исследовалось влияние социальных установок (эгоизм, альтруизм) на динамику благосостояния общества. Для анализа влияния типа распределения необходимо унифицировать

¹ Уже после первого принятого предложения капиталы участников можно считать различными, т.к. предложения генерируются случайными величинами с непрерывным распределением. Если в начальном состоянии капиталы не различаются, то до принятия первого предложения альтруисты находят сумму приращений капитала участников с порядковыми номерами $1, \dots, [\delta n]$.

распределения по параметрам положения и масштаба. Предложения генерировались посредством симметричных распределений, поэтому в качестве параметра положения использовалась медиана (совпадавшая со средним, поскольку для рассматриваемых распределений оно существовало). Масштаб оценивался стандартным отклонением, однако был сделан вывод, что это приводит к не совсем естественным результатам, а именно, к сопоставлению распределений, кардинально различающихся на интервале, где сосредоточена почти вся вероятность. Поэтому было указано на необходимость проведения нового исследования с использованием меры масштаба, более адекватной решаемой задаче.

Эта программа реализована в настоящей статье. В разделах 2 и 3 обсуждаются модель ViSE и недостатки унификации распределений по дисперсии при ее исследовании. В разделе 4 приведены основания другого подхода к стандартизации распределений – по квантилям. В разделе 5 этот подход применен для анализа социальной динамики при генерации предложений посредством нормального распределения и симметризованных распределений Парето. В разделе 6 в сравнение включены логистическое распределение и распределение Стьюдента. В разделах 5 и 6 формулируются качественные выводы о влиянии социальных установок участников и типа стохастической среды на динамику капиталов и скорость разорения. Получение этих выводов составляет главную цель статьи. Исследование проводится посредством имитационного моделирования, поскольку аналитические методы, разработанные в [1], не позволяют получить конечные выражения исследуемых величин для участников с альтруистическими стратегиями. В разделе 7 сформулированы основные результаты статьи.

2. Модель ViSE: основания и связь с реальностью

Модель ViSE — вариант развития модели голосования, предложенной А.В. Малишевским (см., например, [3], глава 2, раздел 1.3). А.В. Малишевский первым показал, что, лицо, обладающее монопольным правом ставить предложения на голосование (назовем его “предлагающим”), может за несколько шагов провести через голосующий орган фактически любое решение. В модели каждый голосующий поддерживает любое предложение, увеличивающее его индивидуальную полезность, при этом процедура голосования — квалифицированное большинство, но не единогласие. Для достижения своей цели предлагающий использует алгоритм “мелких подачек большинству”. Каждое предложение, которое он ставит на голосование, выгодно некоторому большинству, достаточному для принятия решения, но дает этому большинству суммарно меньше, чем отнимает у меньшинства. Ясно, что если в меньшинстве хотя бы по одному разу окажется каждый, то совокупный результат серии таких предложений можно сделать сколь угодно невыгодным для всех голосующих. Настолько невыгодным, что намеченное исходно “предлагающим” решение будет одобрено единогласно.

Как “снять” этот парадокс, демонстрирующий уязвимость демократических процедур? Можно попытаться исключить его, сделав модель более жесткой. В исходной модели “предлагающий” обладает огромной свободой: ему доступны любые предложения из пространства, размерность которого

равна числу голосующих. На практике предложения обычно принадлежат пространству более низкой размерности. Сохранится ли парадокс, если размерность пространства предложений равна, например, 2 или 3? Из работ Ч. Плотта, Р. Маккельви, Н. Скофилда, Д. Саари и др. [4–8] следует, что во многих случаях сохранится, хотя и необходимо выполнить определенные условия, в частности, связывающие порог большинства с размерностью пространства.

Как же реабилитировать демократию? Ясно, что необходимо ограничить монополию “предлагающего” либо изменить стратегии² голосования. Например, пусть предлагать могут сами участники голосования. Но в каком порядке? Одновременно (чтобы был выбор из нескольких проектов) или попеременно? Поодиночке или группами? Альянсы постоянны или ситуативны? Есть ли внешние предлагающие и сколько? Какой информацией обладают участники о предложениях и стратегиях остальных? Могут ли стратегии строиться рефлексивно? В зависимости от деталей процедуры, объема прав участников и их информированности возникает множество игровых постановок и... довольно хаотическая ситуация. Ряд задач такого рода можно решить [9–14], но результаты разнородны и локальны. Итог — скорее мозаика, чем общая система закономерностей. Причина, главным образом, в том, что постановки не образуют иерархической структуры, дерева. Нет основного “нулевого” варианта, после исследования которого можно было бы двигаться по боковым ветвям к все более изощренным постановкам.

Модель ViSE — это возможный нулевой вариант. Нет “предлагающего” со своей стратегией, вместо него внешняя среда, благоприятная, нейтральная или неблагоприятная, наделенная прерогативой предлагать. Разнообразие предложений обеспечивается ее стохастической природой. В простейшем варианте среда характеризуется *благоприятностью* — это μ/σ , где μ — среднее значение индивидуального предложения, σ — стандартное отклонение. Последнее можно рассматривать как масштаб, единицу измерения μ . Наиболее естественное распределение в нулевом варианте — нормальное.

Сохранится ли при этом парадокс Малишевского? Иными словами, могут ли серии решений, принимаемых большинством, быть в конечном счете невыгодны для всех? Причем невыгодны не иногда, а при определенных условиях систематически, “как правило”.

Этот вопрос фундаментален, поскольку касается самой природы коллективных решений, а не внешнего манипулирования ими. Иначе его можно сформулировать так: служит ли голосование эффективным фильтром при взаимодействии общества с неблагоприятной (но не изощренно-изобретательной) средой, требующей от него бинарных решений?

Этот вопрос нетривиален, и ответ в нулевом варианте таков [15]: да, в умеренно неблагоприятной среде реализуется парадокс “ямы ущерба” (вариант парадокса Малишевского). А именно: решения, принятые большинством голосов, как правило, невыгодны для общества.

² Под стратегией в моделях голосования рассматриваемого типа понимается алгоритм использования агентом имеющейся у него информации для принятия индивидуальных решений о поддержке предложений/кандидатов.

Не продолжая обсуждение этой темы в деталях, коснемся теперь жизненных прототипов модели ViSE. Представим себе страну, где решения принимает парламент, назовем его Госдумой. Предложения исходят от внешней по отношению к ней среды, например, ОПЕК+ предлагает соглашение об ограничении добычи нефти. Это предложение одни акторы внутри страны готовы поддержать, другие – нет. Одним силам (в том числе лоббистским), представленным в Госдуме, оно выгодно, другим нет. И его надо принять или отвергнуть. Другой пример: США или НАТО предлагают подписать новое соглашение о контроле над вооружениями. Та же ситуация. Или решение Гаагского окружного суда предписывает выплатить компенсации семьям погибших пассажиров сбитого Боинга. Надо решить, выполнить его или нет. Разные политические силы придерживаются разных мнений. Или может поступить предложение об участии в новом соглашении по ограничению выбросов парниковых газов. Если внешнеполитическая конъюнктура для страны благоприятна, то будет больше выгодных предложений, если нет, то наоборот.

Далее, поскольку решения принимает Госдума, предложения, приходящие из администрации президента или из правительства, для нее тоже внешние. И они отражают определенную внешнюю конъюнктуру: во-первых, насколько президент и/или правительство действуют в интересах страны, во-вторых, эти предложения неизбежно транслируют общие экономические, социальные, политические тенденции и вызовы. В качестве актуальных примеров можно привести предложение о поправках в Конституцию или предложение о введении экстренных мер в связи с пандемией коронавируса. Общая ситуация влияет на страну и помимо решений Госдумы, но предметом изучения является не это безусловное воздействие, а эффективность и рациональность коллективных решений.

Другой класс примеров. Представим себе совет директоров компании. Менеджмент или отдел планирования предлагает новую стратегию развития компании. Нужно ее принять либо отвергнуть, отправить на доработку и пока двигаться прежним курсом. При этом у каждого члена совета директоров есть свое мнение и свои интересы. Можно рассмотреть “игры” с менеджментом или отделом планирования, но есть другой важный круг вопросов, связанный с эффективностью процедуры голосования и стратегиями его участников. Либо другая компания – потенциальный партнер – предлагает нашей компании сделку. В чем-то сделка выгодна, в чем-то нет. Нужно принять или отклонить предложение. А если оно не отклонено безусловно, его можно послать на доработку. Причем чем лучше идут дела у компании (и чем лучше экономическая ситуация), тем благосклоннее к ней “среда”, тем более выгодные предложения потенциальных партнеров она в среднем генерирует и предлагает для голосования.

Разумно ли полагать компоненты комплексного предложения, относящиеся к разным агентам, статистически независимыми? Поскольку предложения достаточно разнородны, из выгодности предложения для политических сил (или членов совета директоров) А и В не следует ни выгодность, ни невыгодность его для силы С. Как известно, в политике по разным поводам могут возникать неожиданные альянсы: левых с ультраправыми и т.п. Поэтому независимость — вполне допустимый нулевой вариант. Если рассматривает-

ся класс ситуаций, в которых выигрыши разных сил имеют фиксированную сумму или жестко связаны иным образом, в рамках модели могут быть наложены соответствующие дополнительные ограничения.

Позволяет ли модель ViSE получать выводы, приложимые к реальности? Приведем несколько примеров.

1. В модели реализуется [16] известный “эффект малой партии”, состоящий в том, что в присутствии двух больших партий, ни одна из которых не имеет большинства, малая партия, образующая большинство с любой из больших, получает преимущество, а иногда, когда большие партии выступают с противоположных позиций, — и положение, сравнимое с диктаторским.
2. Модель ViSE выявляет [16] один из механизмов устойчивости двухпартийной системы с почти равными по силе партиями.
3. В модели реализуется [16, 17] механизм “снежного кома кооперации”: поскольку принадлежность к группе обычно выгоднее, чем индивидуальная защита своих интересов, участники присоединяются к группе, и по мере ее роста групповой эгоизм становится все ближе к альтруизму.
4. Давно является классическим такой инструмент анализа, как индексы влияния фракций в парламенте. Исследование зависимости приращений полезности в модели ViSE и индексов влияния приводит к следующему выводу: при простейшем наборе параметров средние приращения полезностей линейно связаны (после естественной нормировки) со значениями индекса Банцафа. Это, с одной стороны, дает новую интерпретацию полезностям модели ViSE, с другой — позволяет среди разнообразия индексов влияния выделить индекс Банцафа как имеющий “внешние” интерпретацию и подтверждение. Таким образом, модель влияния Банцафа и модель ViSE подкрепляют друг друга (это вывод еще не опубликованной работы).
5. Обсуждавшийся выше результат анализа модели ViSE — парадокс “ямы ущерба”. Он имеет [15] механизм, несомненно, реализующийся на практике. А именно: в неблагоприятной среде выигрыши в среднем меньше, а проигрыши больше, чем в нейтральной среде с тем же разбросом, тем самым средняя разность модулей выигрыша и проигрыша отрицательна. Поэтому предложения, принятые простым большинством с малым перевесом голосов “за”, будут чаще давать суммарный проигрыш, чем выигрыш. Этот механизм едва ли четко выявляется другими моделями. Практическое следствие: чем среда менее благоприятна, тем выше в ней должен быть порог голосования для принятия новых предложений.
6. Вывод предыдущего пункта 5 допускает исключения. Последние связаны с распределениями с тяжелыми хвостами, которые в ряде случаев адекватно описывают политико-экономическую неопределенность. Изучение данного круга вопросов позволяет ввести понятие оптимального порога голосования [15] и выразить его общей формулой [18].
7. Сравнение распределений с легкими и тяжелыми хвостами в качестве генераторов неопределенности в модели ViSE и альтруистических стратегий с разными окнами поддержки позволяет [2] указать эффекты, соотносимые с явлением “антихрупкости”, и “стратегией штанги”, обсуждаемыми Н. Талебом.

8. Кроме парадокса “ямы ущерба”, анализ модели ViSE позволяет выявить еще один интересный парадокс голосования: в действительно благоприятной среде при определенных условиях голосование большинством может давать худшие в среднем результаты для общества, чем принятие всех предложений “не глядя”. Численно данный парадокс симметричен парадоксу “ямы ущерба”, что кажется на первый взгляд простым фактом, но имеет нетривиальное доказательство.
9. Одна из ключевых проблем не только общественных наук, но и общественной практики — сравнение рациональности (с позиций индивидуума и общества) социальных стратегий — узкоэгоистических и просоциальных, включая коллективистские, ориентированные на общее благо, предполагающие филантропию и т.д. Одна из возможных целей таких исследований — показать гражданину, что он не проиграет, если будет придерживаться просоциальных стратегий. А точнее — выяснить, в каких условиях какая стратегия что ему принесет. Численный анализ проблем такого рода традиционно проводится на материале матричных игр. Но совокупность получаемых результатов, как и в стратегических задачах голосования, больше похожа на мозаику, чем на общие закономерности. Модель ViSE дает необыкновенную гибкость задания внешних условий, структур общества и социальных установок. Например, в ее рамках можно описать большое разнообразие просоциальных стратегий, причем выводы из анализа имеют форму закономерностей. Эти выводы можно соотнести с реальностью и оценить, насколько жизненны модельные механизмы, к ним приводящие. Данный пункт перечисления применений модели ViSE объемнее предыдущих, поэтому продолжим его обсуждение отдельно.

Итак, исследование феноменов кооперации, коллективизма и альтруизма, как отмечено выше, часто ведется посредством изучения динамики простых игр с использованием имитационного моделирования и “лабораторных” экспериментов с людьми. Одна из наиболее популярных среди этих игр — дилемма заключенного.

Однако достаточно очевидна метафорическая условность данного подхода. Жизненные ситуации, в которых человек выбирает линию социального поведения, не так уж часто похожи на дилемму заключенного. Ее ключевое условие — недостаток информации: игрок не знает, какую стратегию выберет визави, а именно этим во многом определяется его выигрыш/проигрыш. Если другой также протянет ему руку, оба выиграют по сравнению с индивидуализмом каждого, а если откажет, то отказавший “сорвет банк”, а тот, чья рука повиснет в воздухе, проиграет. Особенность реальной жизни в том, что люди могут *договариваться*³ и в существенной мере контролировать соблюдение договоренностей. То есть ключевой элемент данной модели не всегда отвечает реальности. Кроме того, дилемма заключенного — это игра двух лиц, а в жизни в кооперацию вовлечено обычно большее число агентов, причем механизм ее не сводится к попарным взаимодействиям. Несмотря на то, что лишь малая часть проблем реальной кооперации адекватно описывается моделями, основанными на дилемме заключенного (а в остальных случаях

³ Не учитывается это и в таких играх, как “Ультиматум”, “Диктатор”.

связь этих моделей с реальностью лишь метафорическая), соответствующие модели ценны и интересны. Они затрагивают важный аспект реальности — влияние информационной неопределенности на кооперацию двух лиц, и в их рамках можно получать нетривиальные результаты.

Отмеченная ограниченность дилеммы заключенного как модели кооперации — “парность” взаимодействий — снимается рассмотрением других игр, таких, например, как Public Goods (общественные блага). Но и здесь выгода участника всецело зависит от соотношения его стратегии и неизвестных ему стратегий других игроков, и в центре оказывается проблема “фрирайдерства” (безбилетничества, паразитизма).

В жизни также есть “фрирайдерство”, затрудняющее кооперацию, но проблематика кооперации не сводится к этому феномену.

Проблема реального человека, определяющего степень кооперативности своего поведения, главным образом, не в незнании, как поступят другие, а в том, что “своя рубашка ближе к телу”. Он может пойти и купить себе и своим детям рубашки, и, надев их, они будут рады. А может вложить свои деньги / усилия в более или менее абстрактное общее благо, но его дети продолжат ходить в старых рубашках. Общее благо принесет, скорее всего, пользу со временем всем, либо незащищенным уже сегодня, но оптимальная пропорция вложений в общее и индивидуальное благо для каждого своя и зависит от обстоятельств.

Важно отметить, что в жизни даже адекватная информация о поведении других агентов (нередко имеющаяся) не устраняет сложности выбора стратегии. Она в том, что эффект вложений в общее благо отложен и трудно прогнозируем. Потому что, образно говоря, агенты плывут на общем корабле (или на разных лодках) по бурному морю, где их ждут различные сюрпризы. Новая рубашка уже сейчас полезна, а что и когда вернется ему с рубля, вложенного в общее благо, оценить трудно. Таким образом, источником неоднозначности служат не только (а часто не столько) неизвестные стратегии “коллег”, но и неопределенность *внешней среды* (не говоря о непростой проблеме дисконтирования).

Именно такая внешняя среда является одним из основных элементов модели ViSE. Участник может вложить свой ресурс (голос при голосовании) в свое благо или в благо всего общества или какой-либо его страты, ему небезразличной (куда сам он может и не входить, например, это может быть группа беднейших). Кроме того, у него может быть сколь угодно сложная “комбинированная” стратегия голосования, с разными весами учитывающая его благо, благо всего общества и благо любого числа групп. Это дает большую гибкость задания стратегий поведения, похожих по структуре на стратегии в реальном мире. Например, используя комбинированные стратегии, можно моделировать такую страту общества, как *ответственная элита* [19]. Включение комбинированных функций полезности в модели игр типа Public Goods не представляется столь же естественным.

Выше отмечалось, что анализ модели ViSE с альтруистическими агентами позволяет сформулировать определенные закономерности. Перечислим некоторые из простейших выводов [2, 19, 20]. 1. “Принципиальный” (“hard-core”

по терминологии Эдварда Уилсона [21]) альтруизм, являющийся относительной редкостью, может быть в ряде случаев заменен рациональной стратегией, исходящей из подтверждаемой теоретически выгоды коллективизма, что может вести к восприятию все большей части общества как своего коллектива. 2. Обществу, вообще говоря, не обязательно, чтобы большинство его членов были альтруистами: к сопоставимому результату приводит наличие весьма умеренной их доли. В частности, сравнительно небольшая альтруистическая фракция может защитить общество от разорения, но сама эта фракция оказывается в наиболее уязвимом положении. 3. Если альтруистическая фракция достигает определенной критической массы, ее уязвимость снижается до допустимых границ. 4. Полезность для общества тех или иных альтруистических стратегий сильно зависит от свойств внешней среды: так, в благоприятной среде рациональна благотворительность по отношению к сравнительно немногим, но в неблагоприятной среде правильнее помогать всем, поскольку все находятся в зоне риска. 5. Поскольку обществу весьма полезно наличие участников с просоциальной стратегией голосования, но сами эти участники наименее защищены, обществу имеет смысл оказывать этим участникам дополнительную поддержку; при этом польза для остальных оказывается выше их издержек на поддержку.

Исследование модели позволяет проследить теоретические механизмы реализации этих и других выводов. Указанные механизмы могут быть соотнесены с реальностью, что позволяет оценить адекватность выводов определенным жизненным ситуациям.

Последний (5-й) вывод определяет подход к сравнению схем налогообложения. Поэтому в перечисление применений обсуждаемой модели можно добавить следующий пункт.

10. Модель ViSE может быть состыкована с финансовыми моделями налогообложения, распределяемого в пользу участников, работающих на общество. Использование для той же цели игровых моделей кооперации представляется менее продуктивным.

Элементом применения математических моделей нередко является их идентификация, т.е. определение значений параметров, соответствующих наблюдениям.

Идентификация модели ViSE в принципе возможна. Так, для совета директоров фирмы или парламента, где представлены разные силы, можно пытаться оценить выгоду серии вносимых извне проектов для отдельных голосующих / политических сил и тем самым оценить μ , σ и вид распределения-генератора. В свою очередь, это даст возможность найти оптимальный порог голосования для предложений исследуемого типа, а также оценить динамику полезностей и выраженность различных эффектов.

Однако, как и в случае ряда игровых моделей, применение модели ViSE не сводится к расчету параметров и эффектов по наблюдениям. Ценность представляет также выявление феноменов и механизмов, которые без модели выявить трудно. Один из простых примеров, уже обсуждавшихся выше, — разнородное меньшинство, которое систематически теряет больше, чем приобретает большинство. Это фундаментальный и очень важный фено-

мен, который можно назвать основным пороком голосования. Его всегда, при любом принятии коллективных решений, нужно иметь в виду, и он требует применения конкретных мер, которые могут быть сначала опробованы на модели. А пример механизма, который можно использовать на практике, — “снежный ком кооперации”, т.е. приближение группового эгоизма успешной и открытой (для вступления в нее) группы — к альтруизму. Этот образ использовался в статье [22], где на материале исследования модели ViSE обсуждались механизмы развития гражданского общества, а именно, речь шла о выстраивании сети взаимоподдержки его ячеек. При этом решение о поддержке любого запроса принимается каждой ячейкой самостоятельно, но те ячейки, которые систематически отказывают другим в поддержке, исключаются из сети. В приведенном выше перечислении приложений (в частности, в п. 9) отмечено также несколько других феноменов и механизмов. Их можно соотносить с реальностью, оценивая их действенность в конкретных условиях.

3. Унификация распределений по дисперсии при анализе модели ViSE

В [2] в числе прочих рассматривались среды, генерирующие предложения, подчиняющиеся симметризованному распределению Парето (*СП-распределению*) со сверттяжелыми хвостами.

СП-распределение с параметрами $k > 0$, $a > 0$ и μ имеет [2] плотность

$$(2) \quad f(x) = \frac{k}{2a} \left(\frac{|x - \mu|}{a} + 1 \right)^{-(k+1)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

среднее μ при $k > 1$ и дисперсию $\sigma^2 = 2a^2 / ((k - 1)(k - 2))$ при $k > 2$. При невыполнении указанных неравенств соответствующие интегралы расходятся. При $k \rightarrow \infty$ СП-распределение сходится к распределению Лапласа с плотностью $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{\sigma} \sqrt{2}\right)$ (лемма 3 в [2]).

В [2] сравнивались средние значения капитала участника за один шаг голосования для нескольких симметричных распределений, имеющих одинаковые математическое ожидание μ и дисперсию σ^2 . При этом было отмечено, что два симметричных распределения с совпадающими μ и σ могут отличаться кардинально. Так, помимо непрерывности, симметричности, инфинитности и общей моды, у распределений, плотности которых показаны на рис. 1, сложно обнаружить какую-либо общность. В точке моды $x = 1$ их плотности относятся как 20 к 1, а в точке $x = 0$ — как 1 к 43.

По рис. 1 трудно предположить, что эти два распределения имеют равную дисперсию: “на глаз” типичные отклонения от $\mu = 1$ для распределения с $k = 1000$ существенно выше. Объяснить равенство их дисперсий позволяет рис. 2, где те же две плотности (при $x \geq 1$) показаны в логарифмических шкалах. Хвосты распределения с $k = 2,01$, кажущиеся “легкими” в пределах рис. 1, на большом удалении от среднего (при $|x - \mu| > 8$) оказываются значительно более тяжелыми, чем хвосты распределения с $k = 1000$. Поскольку $P(|x - \mu| > 8) \approx 7,4 \cdot 10^{-5}$, наблюдения, относящиеся к столь отдаленным

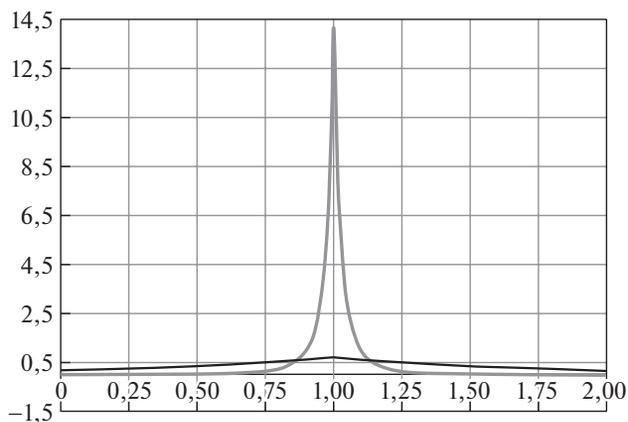


Рис. 1. Плотности двух симметризованных распределений Парето с $\mu = 1$, $\sigma = 1$. Серая линия: $k = 2,01$; черная линия: $k = 1000$.

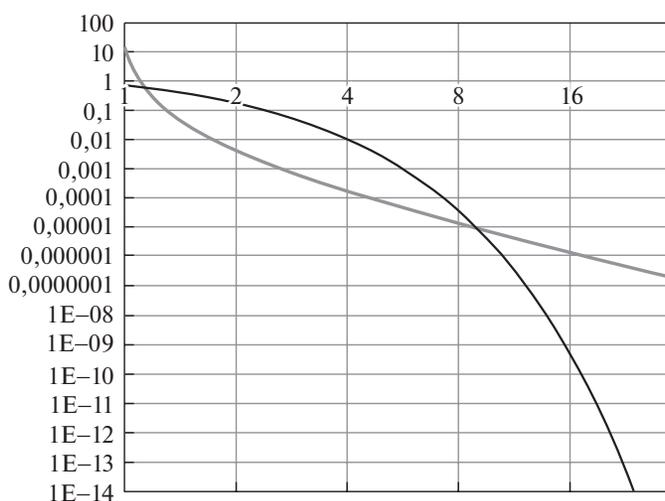


Рис. 2. Плотности двух симметризованных распределений Парето с $\mu = 1$, $\sigma = 1$ в логарифмических шкалах при $x \geq 1$. Серая линия: $k = 2,01$; черная линия: $k = 1000$.

хвостам, встречаются крайне редко. Влияние относительной тяжести этих хвостов в экспериментах небольшого объема может быть описано в терминах отличия понятий “почти невероятно” и “практически невероятно”.

Однако благодаря этим хвостам СП-распределение с $k = 2,01$ имеет единичную дисперсию, как и показанное на рис. 1 распределение Парето с $k = 1000$. Таким образом, слабо влияющие на результаты экспериментов (во всяком случае, при исследовании модели ViSE) хвосты заставляют сравнивать СП-распределение с $k = 2,01$ с не похожими на него другими распределениями — если стандартизация распределений производится по μ и σ . Тем самым возникает потребность в ином принципе установления соответствия

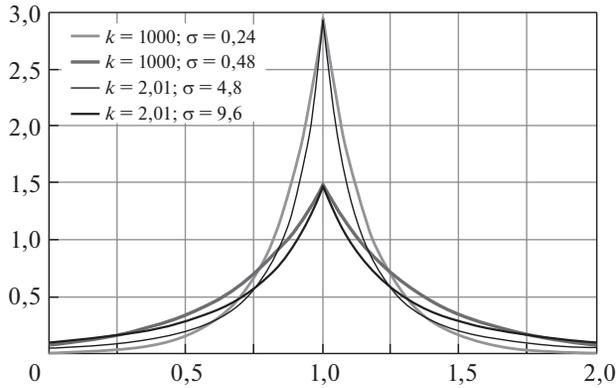


Рис. 3. Примеры функций плотности симметризованных распределений Парето с $\mu = 1$.

между распределениями. Такой принцип обсуждается в следующем разделе 4.

Спорность в данном контексте соответствия, установленного по среднему и дисперсии, была отмечена в [2]: “В статье анализируется социальная динамика в модели ViSE при разнотипных вероятностных распределениях, имеющих одинаковые математическое ожидание и дисперсию. Такая стандартизация по параметрам часто используется и представляется естественной. Однако обратимся к рис. 3 [нумерация приведена в соответствии с настоящей статьей], где показаны две пары СП-распределений, сравнительно близких в большой окрестности моды — точки μ .

Как было отмечено, распределения, входящие в каждую пару, отличаются по σ в 20 раз. Если привести распределения со сверхтяжелыми хвостами ($k = 2,01$) к той же дисперсии, что и распределения с $k = 1000$, то первые “сконцентрируются” в 20 раз, и никакого сходства в окрестности моды уже не будет. Вопрос: какое из распределений с $k = 2,01$ имеет смысл сопоставлять с распределением, у которого $k = 1000$? Исходное, близкое к нему при заметных значениях плотности, но с большей в 400 раз дисперсией, или имеющее ту же дисперсию и при этом плотность, очень быстро убывающую при удалении от μ ? Есть сильные аргументы, свидетельствующие в пользу первого ответа. Это указывает на осмысленность иных подходов к стандартизации распределений. Так, аналогичными можно считать распределения, одинаковые по μ и по ширине интервала с центром в μ , содержащего “половину” или “большую часть” распределения. Тогда [...] выводы проведенного исследования дополнятся новыми”.

Тот факт, что стандартизация по дисперсии чрезмерно сосредотачивает распределения Парето с тяжелыми хвостами вблизи моды, объясняется тем, что любое увеличение вероятности больших выбросов (учитываемых при вычислении дисперсии квадратично) должно быть уравновешено снижением вероятности отклонений среднего диапазона, превосходящих σ , и/или увеличением вероятности отклонений, меньших σ . Тем самым утяжеление хвостов при фиксированной дисперсии приводит к ускорению убывания плотности

при удалении от среднего (совпадающего с модой) и, возможно, к увеличению плотности в самой моде.

В настоящей статье в рамках модели ViSE сопоставляются несколько симметричных непрерывных распределений с равными значениями среднего μ и ширины интервала с центром в μ , содержащего “половину” распределения, т.е. интервала, интеграл по которому от плотности равен 0,5. Данный подход будем называть стандартизацией симметричных распределений *по квартилям*, или *по математическому ожиданию и односторонней медиане*.

4. Стандартизация распределений по квартилям для анализа модели ViSE

При исследовании модели ViSE большой интерес представляет анализ влияния на социальную динамику *типа распределения*, посредством которого генерируются предложения. Рассматриваемые распределения унимодальны и симметричны относительно моды. При этом понятие типа распределения включает, в частности, тяжесть хвостов и вид функции плотности вблизи моды, но исключает [23, 24] параметры положения (среднее, в данном случае совпадающее с модой и медианой) и разброса/масштаба (к которым относится дисперсия). Для симметризованных распределений Парето [2] тип распределения задается параметром $k > 0$: чем меньше k , тем тяжелее хвосты распределения. При $k \leq 2$ распределение Парето не имеет дисперсии, а при $k \leq 1$ не имеет и математического ожидания.

Мерой, часто используемой для характеристики тяжести хвостов распределения (и одновременно формы его пика), является предложенный К. Пирсоном эксцесс: $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$, где $\mu_4 = E[(X - EX)^4]$ — четвертый центральный момент распределения, σ — его стандартное отклонение. Однако в данном случае эксцесс неприменим, поскольку для распределений Парето он существует лишь при $k > 4$, а в [2] и данной статье рассматриваются в числе прочих распределения Парето со значениями k , близкими к 2. Альтернативные меры, как правило, определяются через квантили распределения (см., например, [23]).

Для оценки влияния типа распределения на социальную динамику будем сравнивать распределения, имеющие одинаковые значения квартилей Q_1 , Q_2 и Q_3 , отсекающих $1/4$, $1/2$ и $3/4$ единичной вероятности соответственно: $Q_s = F^{-1}(\frac{s}{4})$, $s = 1, 2, 3$, где $F(\cdot)$ — непрерывная функция распределения. Такие распределения будем считать аналогичными по моде (ею в силу симметрии и унимодальности является медиана — центральный квартиль), и масштабу (разбросу).

Таким образом, условием включения двух симметричных функций распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ в один класс является выполнение равенств

$$(3) \quad F_1^{-1}(0,25) = F_2^{-1}(0,25); \quad F_1^{-1}(0,5) = F_2^{-1}(0,5),$$

из которых в силу симметрии распределений следует $F_1^{-1}(0,75) = F_2^{-1}(0,75)$. Отметим, что данный способ сопоставимого шкалирования распределений рассматривался как наиболее приемлемый в [23, 25] и ряде других публикаций.

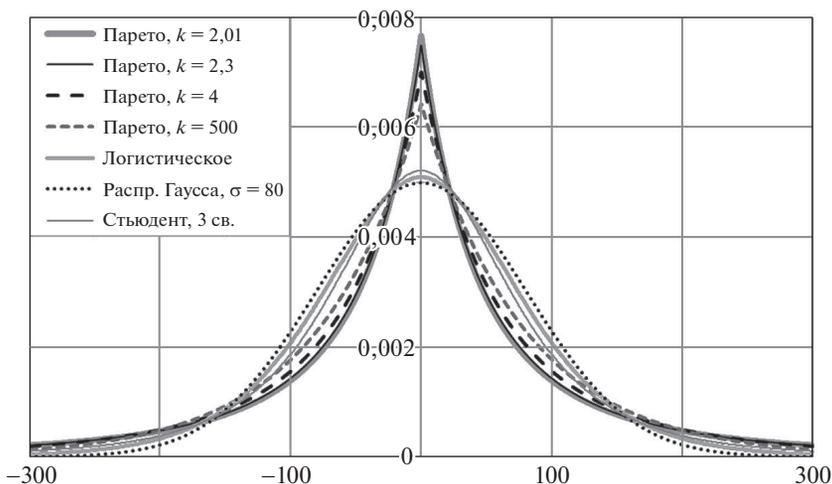


Рис. 4. Плотности рассматриваемых распределений, для которых $\mu = 0$ и $Q_3 \approx 53,95918$: нормального ($\sigma = 80$), логистического, распределения Стьюдента с 3 степенями свободы (“3 св.”) и симметризованных распределений Парето с разными k .

Для определенности будем рассматривать классы распределений, включающие распределение Гаусса (нормальное распределение) с параметром $\sigma = 80$. Каждый такой класс характеризуется медианой $F^{-1}(0,5)$ всех входящих в него распределений. На рис. 4 плотность нормального распределения с параметром $\sigma = 80$ представлена наряду с плотностями нескольких других распределений: Стьюдента с тремя степенями свободы, логистического и симметризованного Парето с четырьмя значениями параметра k .

Распределения с $k = 2,1$ и $k = 2,01$ можно назвать распределениями со *сверхтяжелыми хвостами*, поскольку при еще большей тяжести хвостов ($k \leq 2$) параметры социальной динамики не удастся оценить усреднением результатов имитационного моделирования из-за отсутствия дисперсии. В “худшем случае” при $k = 2,01$ в интервал $[-281; 281]$ попадает 90 % наблюдений.

Следует заметить, что квантильный подход служит основой разработки семейства мер тяжести хвостов, предложенных в [25]. Эти меры оценивают распределение по отношению к его квантилям и в свою очередь восходят к мерам Хинкли [26]. Так, левый квантильный вес (LQW) и правый квантильный вес (RQW) определяются формулами

$$\text{LQW}_F(p) = \frac{F^{-1}\left(\frac{p}{2}\right) + F^{-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{p}{2}\right) - 2F^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)}{F^{-1}\left(\frac{p}{2}\right) - F^{-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{p}{2}\right)},$$

$$\text{RQW}_F(q) = \frac{F^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{q}{2}\right) + F^{-1}\left(1 - \frac{q}{2}\right) - 2F^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)}{F^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{q}{2}\right) - F^{-1}\left(1 - \frac{q}{2}\right)},$$

где $0 < p < 0,5 < q < 1$. Для оценки тяжести левого и правого хвоста распределения используются, в частности, $\text{LQW}_F(0,25)$ и $\text{RQW}_F(0,75)$.

Стандартизация (3), в отличие от использованной в [2], где разброс оценивался среднеквадратичным отклонением, приводит к сопоставлению функций плотности, сравнимых по значениям в окрестности среднего, включающей большую часть распределения. Это позволяет получить выводы о зависимости динамических свойств модели ViSE от типа распределений, лучше интерпретируемые в терминах приложений.

5. Исследование социальной динамики при стандартизации распределений по квартилям

Перейдем к анализу результатов исследования социальной динамики в модели ViSE при стандартизации распределений по квартилям. На рис. 5,а графики среднего приращения капитала за один шаг голосования (СПК; см. [2]) эгоистов при СП-распределении не имеют (в отличие от распределения Гаусса) существенной “ямы ущерба” [2], т.е. участка по μ , где голосование в среднем приводит к невыгодным для общества решениям. В обществе, состоящем из эгоистов, при отсутствии вымирания утяжеление хвостов симметризованного распределения Парето приводит к большим значениям СПК при тех же μ .

В обществе из альтруистов с окном поддержки [0; 65 %] (рис. 5,б), если k достаточно велико (в данном случае — при $k > 2,3$), то график СПК имеет заметную яму ущерба; при увеличении k она сдвигается вправо. Чем тяжелее хвосты распределения, тем выше положительные значения СПК. При отрицательных СПК (в яме ущерба) это утверждение выполняется не всегда. Наличие ямы ущерба связано с тем, что альтруисты поддерживают лишь 65 % общества; при окне поддержки [0; 100 %] она невозможна по определению альтруистической стратегии.

Положительное влияние тяжести хвостов на скорость роста СПК — свойство, ярко проявляющееся именно при стандартизации распределений по квартилям. При содержательно неоправданной стандартизации по среднему и дисперсии реализуется обратная закономерность (см. рис. 5 в [2]), поскольку увеличивающие СПК большие выбросы получают при k , близких к 2, очень низкую вероятность, и их присутствие компенсируется малостью типичных положительных отклонений от среднего (см. рис. 1).

В случае с вымиранием (рис. 5,в) тяжесть хвостов также увеличивает СПК — как эгоистов, так и альтруистов с окном [0; 65 %], но на СПК альтруистов влияет намного сильнее. При фиксированном k СПК альтруистов существенно выше, чем у эгоистов; СПК альтруистов при $k = 20$ сравнимо с СПК эгоистов при $k = 2,1$. Таким образом, альтруистические общества с вымиранием эффективнее эгоистических по критерию СПК.

На рис. 5,г показаны линии относительной численности (в случае с вымиранием) участников после 500-го хода: эгоистов и альтруистов с окнами поддержки [0; 65 %] и [0; 100 %] при значениях k , равных 2,01, 2,1 и 200. Все рассматриваемые функции численности при $\mu = -10$ принимают значения на небольшом отрезке [0,15; 0,16]. При $\mu < -13$ и фиксированном k лучше всех сохраняют численность эгоисты, затем альтруисты с окном [0; 100 %] и, наконец, альтруисты с окном [0; 65 %], но при $\mu > -2$ порядок обратный! В рамках

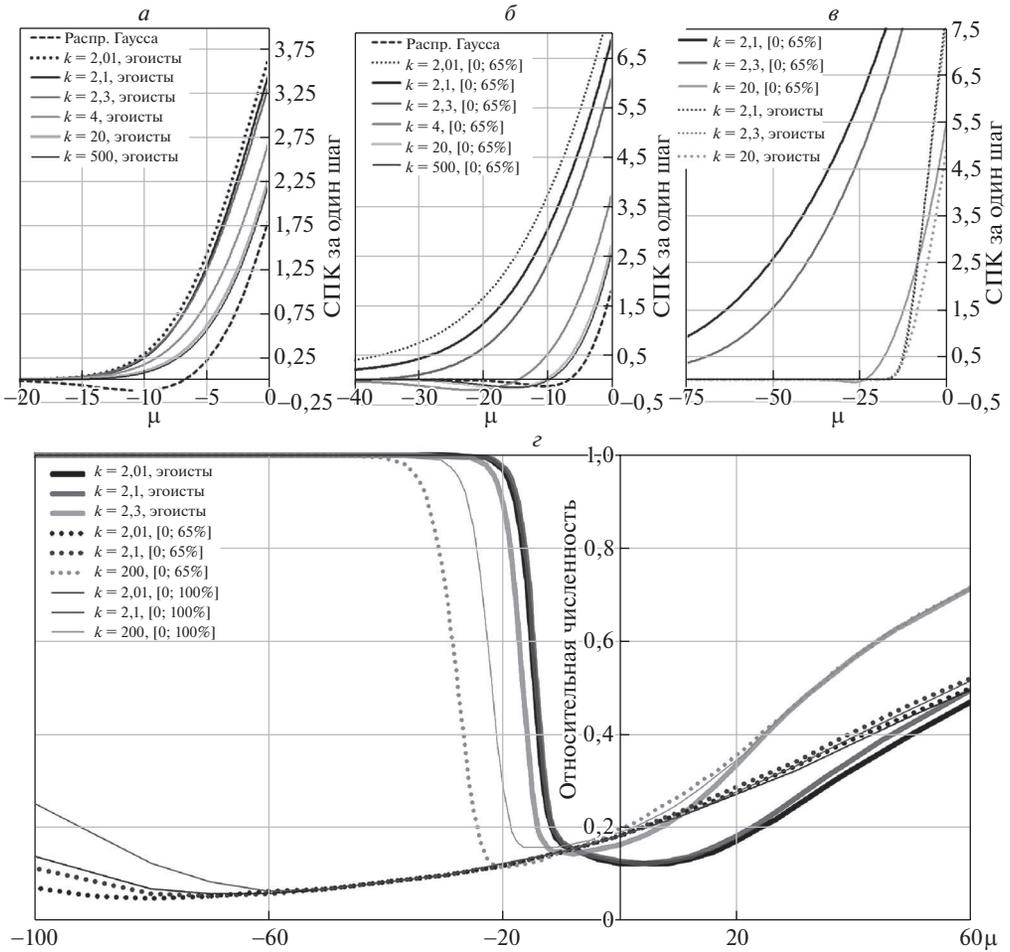


Рис. 5. СП-распределения с $k \in (2; 2,3]$ в сравнении с другими распределениями. СПК за один шаг без вымирания: *а* — эгоисты, *б* — альтруисты с окном $[0; 65\%]$. Эгоисты и альтруисты с вымиранием: *в* — СПК за 1 шаг, *г* — доля участников после 500 шагов. Начальное число участников $n = 201$; начальный капитал участника $C_0 = 40$; стандартизация по квартилям; для распределения Гаусса $\sigma = 80$.

этой закономерности различия в численности в одних случаях почти отсутствуют, в других — весьма велики. То, что при заметных отрицательных μ и симметризованных распределениях Парето эгоисты лучше сохраняют численность, чем альтруисты с окном $[0; 100\%]$, уже отмечалось ранее (в связи с рис. 3,б в [2]).

При $\mu < -6,6$ численность эгоистов лучше сохраняется в случае распределений с тяжелыми хвостами; при $\mu > -6,6$ — напротив, для распределений с более легкими хвостами. Скорости разорения при распределениях с $k = 2,01$ и $k = 2,1$ отличаются незначительно, однако при $k = 200$ отличие от распределений с тяжелыми хвостами значимо.

На численность альтруистов тяжесть хвостов распределения влияет отрицательно и весьма существенно. Так, для альтруистов с окном поддержки $[0; 65\%]$ при $k = 200$ и $\mu = -50$ после 500-го шага общество сохраняется практически полностью, а при $k = 2,1$ остается лишь 7% участников. В случае $\mu > 20$ такое общество также заметно лучше сохраняется при высоких k . Лишь в интервале $-20 < \mu < 5$ (особенно в слабо неблагоприятной среде, при $\mu \in [-20; -3]$) значение k почти не влияет на финальную относительную численность, растущую с увеличением μ от 0,12 до 0,22. При $\mu \in [-20; -10]$ в среде с $k = 200$ разорение даже чуть быстрее, чем в средах с $k = 2,1$ и $k = 2,01$. Для альтруистов с окном поддержки $[0; 100\%]$ в целом наблюдаются те же качественные закономерности, причем на луче $\mu < -10$ численность сохраняется лучше, чем при окне $[0; 65\%]$, а на луче $\mu > 0$ — хуже.

Таким образом, наличие больших выбросов заметно интенсифицирует процесс разорения альтруистов, а при достаточно высоких μ (в данном случае при $\mu > -6,6$) также и эгоистов. При стандартизации распределений по среднему и дисперсии, приводящей к сопоставлению очень непохожих распределений, этот эффект не проявляется и численность, напротив, лучше сохраняется при распределениях с тяжелыми хвостами (рис. 5,2 в [2]).

Быстрее всего общество разоряется при умеренных отрицательных значениях μ ; исключения составляют общества из эгоистов при распределениях со сверхтяжелыми хвостами ($k = 2,01$, $k = 2,1$), еще интенсивнее разоряющиеся в слабо благоприятной среде. Отклонение μ от указанных значений ослабляет разорение: при уменьшении μ — из-за отказа от большей части разоряющих предложений, при увеличении μ — за счет повышения благоприятности предложений.

Сравнение графиков на рис. 5,6 и 5,2 приводит к следующим выводам. СПК всегда растет с тяжестью хвостов, но этот рост сопровождается (для альтруистов, а при $\mu > -6,6$ и для эгоистов) увеличением темпов разорения. Исключения составляют эгоисты при $\mu < -6,6$: для них с увеличением тяжести хвостов разорение замедляется одновременно с ростом СПК. Однако при увеличении μ от этих значений растет доля принятых предложений. В результате заметной величины достигает частота больших разорительных потерь, внедряемых в принятые предложения распределениями с тяжелыми хвостами. Поэтому рост μ увеличивает сравнительную опасность таких распределений в отношении разорения.

Рисунки 6,а и 6,б представляют (в более мелком масштабе, чем на рис. 5) линии СПК эгоистов и альтруистов при отрицательных и положительных μ в модели с вымиранием. В случае $\mu > 0$ СПК также растет с убыванием k , т.е. с увеличением тяжести хвостов.

В благоприятной среде (как и в умеренно неблагоприятной) самое высокое СПК имеют альтруисты с окном поддержки $[0; 100\%]$, ниже СПК альтруистов с окном $[0; 65\%]$, еще ниже СПК эгоистов, причем этот порядок, разумеется, не зависит от стандартизации распределений, поскольку не требует сравнения распределений друг с другом.

Графики численности (рис. 6,в) на дополнительном материале (добавлено СП-распределение с $k = 3$) подтверждают выводы, полученные при анализе

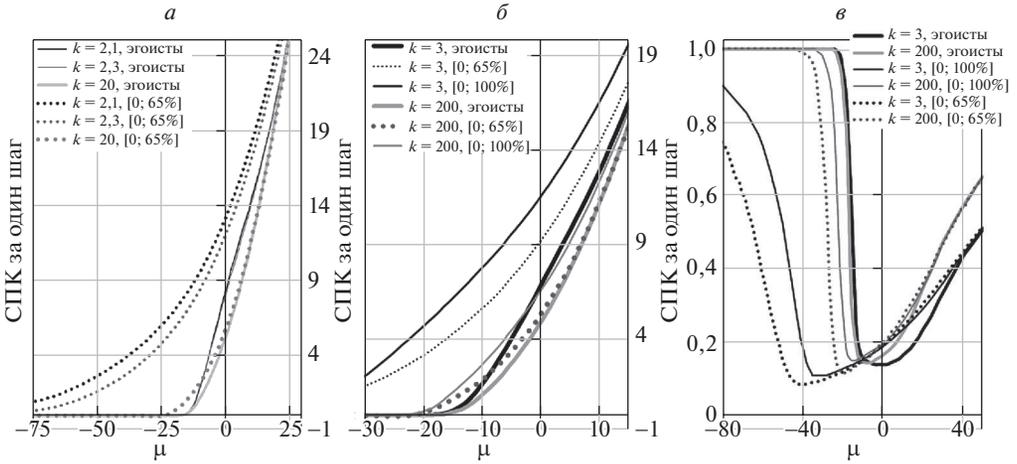


Рис. 6. Показатели социальной динамики при СП-распределениях и вымирании; $n = 201$; начальный капитал $C_0 = 40$; стандартизация по квартилям; распределения из класса, включающего распределение Гаусса с $\sigma = 80$. *а*, *б* — СПК, *в* — доля участников после 500 шагов.

рис. 5,з: при распределениях с тяжелыми хвостами общество сохраняется хуже (исключение — общество из эгоистов при $\mu < -6$), достигая при этом, однако, более высокого среднего приращения капитала участников. Отметим близость значений остаточной численности альтруистов и эгоистов в случаях слабо неблагоприятной и благоприятной ($\mu > -12$) среды при сравнительно легких ($k = 200$) хвостах распределения, генерирующего предложения.

На рис. 6,а графики обществ из эгоистов при $k = 2,1$ и $k = 2,3$ почти не отличаются. На представленном диапазоне изменения μ СПК альтруистов с окном $[0; 65\%]$ и теми же k положительно и значительно выше, чем СПК эгоистов. Последнее почти не отличается от нуля при $\mu < -15$, а при больших значениях μ положительно. В случае $k = 20$ разница между графиками СПК альтруистов с окном $[0; 65\%]$ и эгоистов гораздо меньше: первые заметно отличаются (и опережают) лишь при $-23 < \mu < 5$, а при $\mu < -23$ СПК и тех, и других близко к нулю. Альтруисты не опережают эгоистов значительно, в частности, из-за того, что при окне поддержки $[0; 65\%]$ они игнорируют приращения капитала 35% участников. Общий простой вывод: тяжелые хвосты распределения повышают СПК как эгоистов, так и альтруистов, но альтруистов заметно сильнее. Перечень основных выводов будет приведен в разделе 6.

6. Логистическое распределение и распределение Стьюдента

В предыдущем разделе 5 представлен анализ динамики капиталов при генерации предложений посредством распределения Гаусса и симметризованных распределений Парето. Эти два генератора контрастны по двум признакам: классическое колоколообразное распределение с легкими ($\sim e^{-x^2}$) хвостами и распределения с тяжелыми хвостами и острым пиком. Разумеется, класс симметричных унимодальных распределений на прямой включает

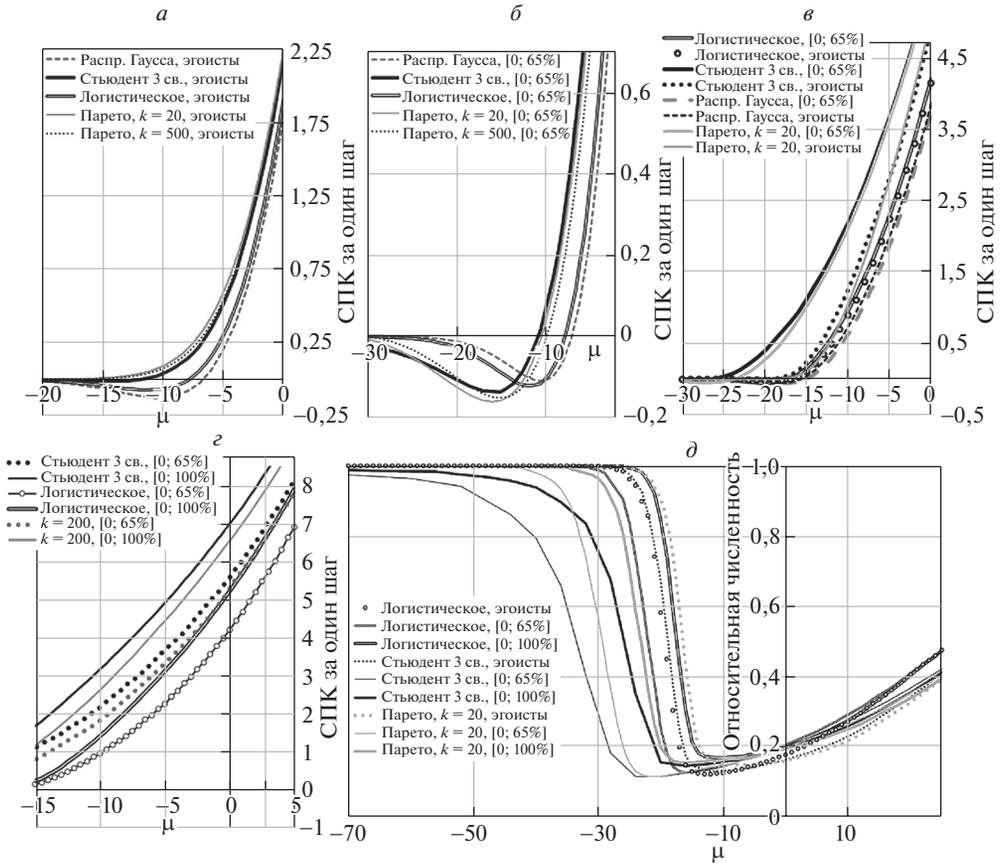


Рис. 7. Логистическое распределение и распределение Стьюдента с 3 степенью свободы в сравнении с другими. СПК за один шаг в модели без вымирания: *a* — эгоисты, *б* — альтруисты с окном [0; 65%]. Эгоисты и альтруисты в модели с вымиранием: *в*, *з* — СПК за 1 шаг, *д* — доля участников после 500 шагов при начальном капитале участника $C_0 = 40$. Начальное число участников $n = 201$; стандартизация по квартилям; для распределения Гаусса $\sigma = 80$.

большое разнообразие представителей с иными свойствами. Чтобы оценить степень влияния типа распределения на динамику капитала, рассмотрим также распределение Стьюдента с тремя степенями свободы (при двух степенях свободы распределение не имеет дисперсии) и логистическое распределение. Соответствующие показатели социальной динамики в сравнении с распределениями, рассмотренными ранее, показаны на рис. 7.

Для общества из эгоистов (рис. 7, *a*) все рассматриваемые распределения при $\mu < 0$ однозначно упорядочиваются по СПК: при распределении Гаусса СПК самое низкое, далее следует логистическое, заметно обгоняет его распределение Стьюдента и, наконец, приводящие примерно к тем же значениям СПК симметризованные распределения Парето с $k = 500$ и $k = 20$. Это упорядочение совпадает с упорядочением по тяжести хвостов. Тем самым добавленные распределения подтверждают закономерности, выявленные при анализе рис. 5, *a*.

В случае общества из альтруистов с окном поддержки $[0; 65\%]$ закономерность несколько сложнее (рис. 7,б). Линии СПК(μ) для логистического распределения и распределения Стьюдента могут быть получены из линии для распределения Гаусса последовательными сдвигами влево и немного вниз с небольшими дополнительными растяжениями. Тем самым при μ , меньших на несколько единиц, достигаются несколько меньшие, чем для распределения Гаусса, значения СПК. В результате увеличение тяжести хвостов приводит к увеличению СПК лишь при положительных и сравнительно небольших по модулю отрицательных μ , при дальнейшем же уменьшении μ выгоднее, чтобы хвосты распределения были легче. СПК для распределения Стьюдента и СП-распределений с $k = 20$ и $k = 500$, как и в обществе из эгоистов, довольно близки, но в данном случае распределение Стьюдента с 3 степенями свободы чуть больше похоже по СПК на СП-распределение с $k = 20$.

В модели с вымиранием (рис. 7,в) логистическое распределение имеет ту же особенность, что и распределение Гаусса: линии СПК эгоистов и альтруистов с окном поддержки $[0; 65\%]$ очень близки, но логистическое распределение позволяет получить несколько бóльшие значения СПК. Распределение Стьюдента для альтруистов с окном поддержки $[0; 65\%]$ дает большой выигрыш в сравнении с логистическим распределением, но для эгоистов этот выигрыш меньше. Тем самым при распределении Стьюдента участникам заметно выгоднее (в смысле СПК) быть альтруистами с окном $[0; 65\%]$, чем эгоистами, и эта специфика сближает указанное распределение с распределениями Парето. Наиболее близко оно к СП-распределению с $k = 20$: отличие их кривых приращения капитала для обоих типов обществ незначительно. В качестве тонкого эффекта можно отметить, что при заметных отрицательных значениях μ эгоисты имеют более высокое СПК, когда предложения генерируются распределением Стьюдента с 3 степенями свободы, но при $\mu > -5$ более выгодным для них оказывается уже распределение Парето с $k = 20$. Аналогично для альтруистов с окном $[0; 65\%]$ распределение Парето с $k = 20$ “догоняет” при $\mu = -1$ распределение Стьюдента по СПК.

На рис. 7,г показаны линии СПК альтруистов с окнами поддержки $[0; 65\%]$ и $[0; 100\%]$ для распределений Стьюдента, логистического и СП-распределения с $k = 200$. При каждом из них большее окно поддержки приводит к бóльшим значениям СПК, причем разрыв увеличивается с ростом μ . Иными словами, чем благоприятнее среда на рассматриваемом диапазоне μ , тем менее осмысленна (по критерию СПК) поддержка не всего общества, а лишь 65% беднейших. Если СП-распределение с $k = 20$ приводит примерно к таким же результатам, как распределение Стьюдента с тремя степенями свободы (рис. 7,в), то при СП-распределении с $k = 200$, имеющем более легкие хвосты, СПК как эгоистов, так и альтруистов ниже.

Кривые остаточной численности общества представлены на рис. 7,д. Заметим, что линии эгоистов для распределений Стьюдента и логистического при $\mu < 0$ весьма близки, а при $\mu > 0$ более высокие значения дает логистическое распределение. При этом для распределения Стьюдента при достаточно больших по модулю отрицательных μ эгоисты сохраняют численность лучше, чем альтруисты, а при логистическом распределении численность эгоистов лежит между численностями альтруистов с окнами $[0; 65\%]$ и $[0; 100\%]$. Таким об-

разом, и здесь распределение Стьюдента демонстрирует те же качественные свойства, что и распределения Парето, а логистическое распределение лишь несколько отклоняется от нормального (для которого численности эгоистов и альтруистов с окном поддержки $[0; 65\%]$ близки, см. рис. 3,а в [2]) в сторону распределений с тяжелыми хвостами.

Если по СПК в модели с вымиранием распределения Стьюдента и Парето с $k = 20$ приводят к близким результатам (рис. 7,б), то по численности в достаточно неблагоприятной среде как эгоистам, так и альтруистам заметно выгоднее распределение Парето, а в существенно благоприятной — несколько выгоднее распределение Стьюдента. В нейтральной среде (а для альтруистов — при $-4 < \mu < 10$) остаточные численности для этих двух распределений практически совпадают. При $\mu < -4$ почти одинаковую остаточную численность, как отмечалось выше, дают уже распределение Стьюдента и логистическое распределение.

Для эгоистов при $\mu < -4$ самое выгодное из сравниваемых в отношении численности — СП-распределение, а при $\mu > -4$ логистическое распределение. Для альтруистов при всех μ наиболее выгодно логистическое распределение, однако при $-10 < \mu < 5$ распределения Стьюдента и Парето обеспечивают практически такие же значения численности.

Общее лидерство по численности при $\mu < -4$ принадлежит эгоистам при распределении Парето, но для положительных значений μ они уже на последнем месте, а на первом — альтруисты с окном поддержки $[0; 65\%]$ в среде с логистическим распределением. При $\mu = 20$ их догоняют как альтруисты с окном $[0; 100\%]$, так и эгоисты — также при логистическом распределении.

7. Основные результаты

К основным (и наиболее простым) результатам исследования динамики модели ViSE, полученным в данной статье, можно отнести следующие.

1. При стандартизации по квартилям тяжесть хвостов распределения повышает СПК как эгоистов, так и альтруистов — как в случае с вымиранием, так и в модели без него. При этом СПК альтруистов повышается существенно сильнее, но с одним исключением: при заметных отрицательных μ увеличение тяжести хвостов может приводить не к увеличению СПК альтруистов с окном поддержки $[0; 65\%]$, а к сдвигу ямы ущерба влево и даже к ее углублению.
2. В случае с вымиранием тяжесть хвостов распределения ускоряет разорение как эгоистов, так и альтруистов, но также с одним исключением: при заметных отрицательных μ разорение эгоистов при распределениях с тяжелыми хвостами, напротив, несколько замедляется. Таким образом, рост одного критерия (СПК) при вариации параметров распределения часто сопровождается уменьшением другого (численности).
3. Логистическое распределение в рамках модели ViSE дает результаты, умеренно отличающиеся от результатов распределения Гаусса в сторону распределений с более тяжелыми хвостами.

4. Распределение Стьюдента с тремя степенями свободы похоже по СПК на СП-распределение с $k = 20$, особенно — для эгоистов и альтруистов с окном поддержки $[0; 65\%]$ в модели с вымиранием. В случае без вымирания для эгоистов СПК при распределении Стьюдента примерно такое же, как для распределений с более легкими хвостами (даже ниже, чем у СП-распределения с $k = 500$), а для альтруистов с окном $[0; 65\%]$ — напротив, как у одного из СП-распределений с более тяжелыми хвостами, чем при $k = 20$. Еще ярче последняя закономерность проявляется для графиков остаточной численности. Для эгоистов кривая распределения Стьюдента лежит между кривыми логистического и СП-распределения, почти сливаясь с первой при существенных отрицательных μ и со второй при $\mu > 0$. Для альтруистов с окнами поддержки $[0; 65\%]$ и $[0; 100\%]$ распределение Стьюдента дает значения, характерные для распределений с более тяжелыми хвостами, чем СП-распределение с $k = 20$. Это отличие кривых может быть связано с различием формы: острый пик у СП-распределений и колоколообразная форма распределения Стьюдента.

Ряд других установленных закономерностей приведен в разделах 4 и 5.

8. Заключение

В статье изучена динамика однородных обществ в модели ViSE при генерации предложений посредством распределений, различающихся тяжестью хвостов: нормального, логистического, Стьюдента и симметризованных распределений Парето. В [2] было установлено, что тяжесть хвостов распределения случайных величин, генерирующих предложения, существенно влияет на динамику капиталов и эффективность стратегий участников. Количественный учет влияния данного фактора требует введения классов распределений, различающихся по нему и близких по другим существенным параметрам. В [2] такие классы строились посредством унификации математического ожидания μ и дисперсии σ^2 , что приводило к рассмотрению распределений с тяжелыми хвостами, для которых вероятность заметных (в масштабе σ) отклонений от среднего слишком низка. Это делает стандартное отклонение контринтуитивной мерой разброса в случае распределений со сверхтяжелыми хвостами и исследований рассматриваемого типа.

В данной статье разброс оценивался с помощью квартилей, результатом чего было включение в один класс распределений, плотности которых умеренно различаются на интервале, где сосредоточена большая часть вероятности. При данном подходе к унификации распределений установлено, что утяжеление хвостов распределения (означающее переток вероятности от средних выбросов к большему, а также, возможно, к наблюдениям, близким к среднему) приводит к более высоким темпам разорения, но одновременно позволяет участникам аккумулировать более высокий капитал посредством реализации коллективных решений. Исключение — общества из альтруистов в неблагоприятной среде, для которых увеличение тяжести хвостов распределения может приводить к сдвигу “ямы ущерба” влево и вниз. Установлен и ряд более тонких эффектов, характеризующих динамику капитала однородных обществ с различными социальными установками участников в разных стохастических средах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чеботарев П.Ю.* Аналитическое выражение ожидаемых значений капиталов при голосовании в стохастической среде // *АиТ.* 2006. № 3. С. 152–165.
Chebotarev P.Yu. Analytical Expression of the Expected Values of Capital at Voting in the Stochastic Environment // *Autom. Remote Control.* 2006. V. 67. No. 3. P. 480–492.
2. *Чеботарев П.Ю., Цодикова Я.Ю., Логинов А.К., Лезина З.М., Афонькин В.А., Мальшиев В.А.* О сравнительной полезности альтруизма и эгоизма при голосовании в стохастической среде // *АиТ.* 2018. № 11. С. 123–149.
Chebotarev P.Yu., Tsodikova Ya.Yu., Loginov A.K., Lezina Z.M., Afonkin V.A., Malyshev V.A. Comparative Efficiency of Altruism and Egoism as Voting Strategies in Stochastic Environment // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 11. P. 2052–2072.
3. *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974.
Mirkin B.G. Group Choice (P.C. Fishburn, ed.). N.Y.: Wiley, 1979.
4. *Plott C.R.* A Notion of Equilibrium and Its Possibility under Majority Rule // *Amer. Econ. Rev.* 1967. V. 58. No. 4. P. 787–806.
5. *McKelvey R.D.* Intransitivities in Multidimensional Voting Models and Some Implications for Agenda Control // *J. Economic Theory.* 1976. V. 12. No. 3. P. 474–482.
6. *Schofield N.* The Spatial Model of Politics. Routledge, 2007.
7. *Чеботарев П.Ю.* Некоторые свойства траекторий в динамической задаче голосования // *АиТ.* 1986. № 1. С. 133–138.
Chebotarev P.Yu. Some Properties of Paths in the Dynamic Voting Problem // *Autom. Remote Control.* 1986. V. 47. No. 1. Part 2. P. 121–126.
8. *Saari D.G.* The Generic Existence of a Core for q -rules // *Economic Theory.* 1997. V. 9. No. 2. P. 219–260.
9. *Новиков С.Г.* Об одной динамической задаче теории голосований. I // *АиТ.* 1985. № 8. С. 104–114.
Novikov S.G. One Dynamic Problem in Voting Theory. I // *Autom. Remote Control.* 1985. V. 46. No. 8. P. 1016–1026.
10. *Новиков С.Г.* Об одной динамической задаче теории голосований. II // *АиТ.* 1985. № 9. С. 118–127.
Novikov S.G. One Dynamic Problem in Voting Theory. II // *Autom. Remote Control.* 1985. V. 46. No. 9. P. 1168–1177.
11. *McKelvey R.D.* Game Theoretic Models of Voting in Multidimensional Issue Spaces // *Game Theory Appl.*, Ed. by Ichiishi T., Neyman A., Tauman Y. San Diego: Academ. Press, 1990. P. 317–335.
12. *Ordeshook P.C.* The Spatial Analysis of Elections and Committees: Four Decades of Research // *Perspectiv. Public Choice: A Handbook*, Mueller D. (Ed.). Cambridge, U.K.: Cambridge Univer. Press, 1997. P. 247–270.
13. *Lehtinen A.* The Welfare Consequences of Strategic Voting in Two Commonly Used Parliamentary Agendas // *Theor. Decis.* 2007. V. 63. No. 1. P. 1–40.
14. *Kress D., Pesch E.* Sequential Competitive Location on Networks // *Eur. J. Oper. Res. Eur.* V. 217. No. 3. P. 483–499.
15. *Чеботарев П.Ю., Мальшиев В.А., Цодикова Я.Ю. и др.* Оптимальный порог голосования как функция коэффициента вариации среды // *Управление большими системами.* 2016. Т. 62. С. 169–187.

- Chebotarev P.Y., Malyshev V.A., Tsodikova Ya.Yu., Loginov A.K., Lezina Z.M., Afonkin V.A.* The Optimal Majority Threshold as a Function of the Variation Coefficient of the Environment // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 4. P. 725–736.
16. *Чеботарев П.Ю., Логинов А.К., Цодикова Я.Ю., Лезина З.М., Борзенко В.И.* Анализ феноменов коллективизма и эгоизма в контексте общественного благосостояния // *Проблемы управления.* 2008. № 4. С. 30–37.
- Chebotarev P.Yu., Loginov A.K., Tsodikova Ya.Yu., Lezina Z.M., Borzenko V.I.* Analysis of Collectivism and Egoism Phenomena within the Context of Social Welfare // *Autom. Remote Control.* 2010. V. 71. No. 6. P. 1196–1207.
17. *Чеботарев П.Ю., Логинов А.К., Цодикова Я.Ю. и др.* “Снежный ком” кооперации и “снежный ком”-мунизм // Четвертая междунар. конф. по проблемам управления: Сб. тр. М.: ИПУ РАН, 2009. С. 687–699.
18. *Malyshev V.* Optimal Majority Threshold in a Stochastic Environment // arXiv preprint math.OС/1901.09233, 2019.
19. *Tsodikova Y., Chebotarev P., Loginov A., Lezina Z.* Modeling Responsible Elite // *Recent Advances of the Russian Operations Research Society*, Ed. by Aleskerov F., Vasin A. Newcastle upon Tyne: Cambridge Scholars Publishing, 2020. P. 89–110. arXiv preprint physics.soc-ph/1906.02072, 2019.
20. *Чеботарев П.Ю., Цодикова Я.Ю., Логинов А.К., Лезина З.М.* Какой процент альтруистов нужен в обществе и на что им следует направлять свои усилия? // Второй Российский экономический конгресс, Суздаль, 18–22 февраля 2013 г., М.: НЭА, 2013. С. 1–3. <http://skachate.ru/download/filosofiya-31943/31943.doc>
21. *Wilson E.O.* On Human Nature. Cambridge, MA: Harvard Univer. Press, 1979.
22. *Чеботарев П.Ю.* Как строить гражданское общество “по науке” // Троицкий вариант — Наука. 2015. № 186. С. 1–2. <http://trv-science.ru/uploads/186N.pdf>
23. *Groeneveld R.A.* A Class of Quantile Measures for Kurtosis // *Amer. Statistician.* 1998. V. 52. No. 4. P. 325–329.
24. *Arriaza A. et al.* Shape Measures Based on the Convex Transform Order // *Metrika.* 2019. V. 82. No. 1. P. 99–124.
25. *Brys G., Hubert M., Struyf A.* Robust Measures of Tail Weight // *Comput. Stat. Data An.* 2006. V. 50. No. 3. P. 733–759.
26. *Hinkley D.V.* On Power Transformations to Symmetry // *Biometrika.* 1975. V. 62. P. 101–111.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 16.12.2019

После доработки 29.04.2020

Принята к публикации 25.05.2020

СОДЕРЖАНИЕ

Обзоры

- Воропай Н.И., Голуб И.И., Ефимов Д.Н., Исакаков А.Б., Ядыкин И.Б.** Спектральный и модальный методы в исследованиях устойчивости электроэнергетических систем и управлении ими 3

Нелинейные системы

- Андриевский Б.Р., Фуртат И.Б.** Наблюдатели возмущений: методы и приложения. Часть 2 35

Стохастические системы

- Азанов В.М., Тарасов А.Н.** Двусторонняя оценка функции Беллмана в задаче оптимального удержания траекторий дискретной стохастической системы в трубке по критерию вероятности 92
- Хрусталева М.М.** Терминальная инвариантность квазилинейных диффузионных стохастических систем, нелинейных по управлению 118

Управление в технических системах

- Трофимов В.Б.** О подходе к интеллектуальному управлению сложными технологическими процессами на примере черной металлургии 137

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

- Максимов В.М., Чеботарев П.Ю.** Социальная динамика, определяемая голосованием: квартильный учет особенностей стохастической среды 149

C O N T E N T S

Surveys

- Voropai N.I., Golub I.I., Efimov D.N., Iskakov A.B., Yadykin I.B.** Spectral and Modal Methods for Studying Stability and Control of Electric Power Systems 3

Nonlinear Systems

- Andrievsky B.R., Furtat I.B.** Disturbance Observers: Methods and Applications. II. Applications 35

Stochastic Systems

- Azanov V.M., Tarasov A.N.** Probabilistic Criterion-Based Optimal Retention of Trajectories of a Discrete-Time Stochastic System in a Given Tube: Bilateral Estimation of the Bellman Function 92
- Khrustalev M.M.** Terminal Invariance of Quasi-Linear Stochastic Diffusion Systems That Are Nonlinear in Control Variable 118

Control in Technical Systems

- Trofimov V.B.** An Approach to Intelligent Control of Complex Industrial Processes: An Example of Ferrous Metal Industry 137

Optimization, System Analysis, and Operations Research

- Maksimov V.M., Chebotarev P.Yu.** Voting Originated Social Dynamics: Quartile Analysis of Stochastic Environment Peculiarities 149