СОДЕРЖАНИЕ

Том 57, номер 11, 2021

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ХРОНИКА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1443–1449

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51+519.216.73

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СЛАБО УПРАВЛЯЕМЫХ ГРУБЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ГЁЛЬДЕРА

© 2021 г. **М. М. Васьковский**

Доказываются теоремы об устойчивости решений одномерных стохастических дифференциальных уравнений, управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера.

DOI: 10.31857/S0374064121110017

Введение. Рассмотрим одномерное стохастическое дифференциальное уравнение

$$dY_t = f(Y_t)\,dX_t, \quad t \in \mathbb{R}_+ := [0, +\infty), \tag{1}$$

где X_t – случайный процесс, имеющий п.н. непрерывные по Гёльдеру порядка $\alpha \in (0,1)$ траектории, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – детерминированная функция, имеющая непрерывные и ограниченные производные любого порядка $m \in \{0, \ldots, [1/\alpha] + 1\}$. Стохастические дифференциальные уравнения (1), вообще говоря, не могут быть исследованы в рамках как классической теории стохастических дифференциальных уравнений Ито [1], так и теорий Лайонса и Губинелли потраекторного интегрирования по грубым траекториям [2, 3]. В работе [4] разработан функциональный вариант теории интегрирования по грубым траекториям с произвольным показателем Гёльдера и с помощью этой теории доказаны теоремы существования и единственности решений, а также формула замены переменных.

В настоящей работе доказывается, что условия, обеспечивающие существование и единственность решений уравнений (1), гарантируют также непрерывную зависимость решений от начальных данных на любом конечном отрезке; исследуется устойчивость по Ляпунову нулевого решения уравнения (1) на основании устойчивости нулевого решения соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) $dZ_t = f(Z_t)\,dt$. При этом под *решением* уравнения (1) понимается решение стохастического дифференциального уравнения, слабо управляемого соответствующей грубой траекторией [4].

Для определения решений нам понадобится ряд понятий, введённых в статье [4].

Определение грубых траекторий. Зафиксируем какие-либо $T > 0$ и $\alpha \in (0, 1]$. Пусть V – конечномерное евклидово пространство. Через $C^\alpha([0,T], V)$ и $C_2^\alpha([0,T], V)$ обозначим множества функций $f : [0,T] \to V$ и $g : [0,T]^2 \to V$ соответственно, для которых величины

$$\|f\|_\alpha := \sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\ s\neq t}} \frac{|f_t - f_s|}{|t-s|^\alpha} \quad \text{и} \quad \|g\|_{\alpha,2} := \sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\ s\neq t}} \frac{|g_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}$$

конечны. Далее, как и в [5, гл. 2], для функции двух переменных $g_{s,t}$ будем писать $\|g\|_\alpha$ вместо $\|g\|_{\alpha,2}$. Для функции одной переменной f_t через $f_{s,t}$ будем обозначать приращение $f_t - f_s$.

Для целого неотрицательного k и конечномерных евклидовых пространств V и W через $C_b^k(V, W)$ обозначаем множество функций $h : V \to W$ таких, что норма

$$\|h\|_{C_b^k} := \sum_{i=0}^{k} \|D^i h\|_\infty$$

конечна, где $\|D^i h\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,T]} |D^i h_t|$.

Положим $n=[1/\alpha]$. Обозначим через $\mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$ множество α-непрерывных по Гёльдеру *грубых траекторий,* т.е. множество элементов $\mathbf{X}=(1,\mathbf{X}^1,\ldots,\mathbf{X}^n)$ таких, что $\mathbf{X}^i\in C_2^{i\alpha}([0,T],V^{\bigotimes i})$ для любого $i=\overline{1,n}$, и для любых $s,u,t\in[0,T]$ выполняется тождество Чена $\mathbf{X}_{s,t}=\mathbf{X}_{s,u}\boxplus\mathbf{X}_{u,t}$, в котором

$$(\mathbf{X}_{s,u}\boxplus\mathbf{X}_{u,t})^i=\sum_{j=0}^{i}\mathbf{X}_{s,u}^j\bigotimes\mathbf{X}_{u,t}^{i-j}.$$

Отметим, что операция $\boxplus$ задаёт умножение на тензорной алгебре $T^{(n)}(V)=\bigoplus\limits_{i=0}^{n}V^{\bigotimes i}$, где $V^{\bigotimes 0}=\mathbb{R}$. Таким образом, элемент $\mathbf{X}:[0,T]^2\to T^{(n)}(V)$ однозначно определяется значениями $\mathbf{X}_{0,t}$, $t\in[0,T]$, поскольку $\mathbf{X}_{s,t}=(\mathbf{X}_{0,s})^{-1}\boxplus\mathbf{X}_{0,t}$. Далее будем писать $\mathbf{X}_t$ вместо $\mathbf{X}_{0,t}$.

Грубая траектория $\mathbf{X}=(1,\mathbf{X}^1,\ldots,\mathbf{X}^n)$ называется *геометрической,* если

$$\operatorname{Sym}(\mathbf{X}_{s,t}^i)=\frac{1}{i!}(\mathbf{X}_{s,t}^1)^{\bigotimes i}\quad\text{для всех}\quad i=\overline{1,n}.$$

Множество геометрических грубых траекторий обозначаем через $\mathscr{C}_g^\alpha([0,T],V)$.

Будем говорить, что элемент $\mathbf{X}\in\mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$ является *грубой траекторией* над $X\in C^\alpha([0,T],V)$, если $\mathbf{X}_{0,t}^1=X_t$ для любых $t\in[0,T]$.

Определение слабо управляемых грубых траекторий. Пусть $X\in C^\alpha([0,T],V)$, а $\mathbf{X}=(1,\mathbf{X}^1,\ldots,\mathbf{X}^n)$ – грубая траектория над X. Пусть W – конечномерное евклидово пространство. Будем говорить, что функция $Y_t\in C^\alpha([0,T],W)$ *слабо управляется* грубой траекторией $\mathbf{X}\in\mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$, если существуют функции $Y^{(1)}:[0,T]\to\mathcal{L}(V,W)$, … …, $Y^{(n-1)}:[0,T]\to\mathcal{L}(V^{\bigotimes(n-1)},W)$ такие, что

$$Y_{s,t}=Y_s^{(1)}\mathbf{X}_{s,t}^1+\ldots+Y_s^{(n-1)}\mathbf{X}_{s,t}^{n-1}+R_{s,t}^{Y,n},\quad Y_{s,t}^{(1)}=Y_s^{(2)}\mathbf{X}_{s,t}^1+\ldots+Y_s^{(n-1)}\mathbf{X}_{s,t}^{n-2}+R_{s,t}^{Y,n-1},\quad\ldots$$

$$\ldots,\quad Y_{s,t}^{(n-2)}=Y_s^{(n-1)}\mathbf{X}_{s,t}^1+R_{s,t}^{Y,2},\quad Y_{s,t}^{(n-1)}=R_{s,t}^{Y,1};$$

а величина $\|R^{Y,i}\|_{i\alpha}$ конечна для каждого из остаточных членов $R^{Y,i}$, $i=\overline{1,n}$. Функцию $Y^{(i)}$ будем называть *грубой производной* порядка i от Y.

Определим банахово пространство

$$\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T],W)=\left\{(Y,Y^{(1)},\ldots,Y^{(n-1)}):Y\in C^\alpha([0,T],W),\ \ \sum_{i=1}^{n}\|R^{Y,i}\|_{i\alpha}<\infty\right\}$$

с полунормой

$$\|(Y,Y^{(1)},\ldots,Y^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\|R^{Y,i}\|_{i\alpha}.$$

Норма элемента $\mathbf{Y}=(Y,Y^{(1)},\ldots,Y^{(n-1)})\in\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T],W)$ определяется равенством

$$\|\mathbf{Y}\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha}:=\sum_{i=0}^{n-1}|Y_0^{(i)}|+\|(Y,Y^{(1)},\ldots,Y^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha},$$

где $Y_t^{(0)}=Y_t$.

Определение интеграла по грубым траекториям. Пусть V, W – некоторые конечномерные евклидовы пространства, $\mathbf{X}=(1,\mathbf{X}^1,\ldots,\mathbf{X}^n)\in\mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$, $Y\in C^\alpha([0,T],\mathcal{L}(V,W))$, $(Y,Y^{(1)},\ldots,Y^{(n-1)})\in\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T],\mathcal{L}(V,W))$. Возьмём некоторые $s,t\in[0,T]$, $s<t$, через $\mathcal{P}$ обозначим произвольное конечное разбиение отрезка $[s,t]$ точками, а через $|\mathcal{P}|$ – его диаметр.

Грубым потраекторным интегралом $\int_s^t Y_r\,d\mathbf{X}_r$ назовём следующий предел интегральных сумм (если этот предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения отрезка $[s,t]$ точками):

$$\int\limits_s^t Y_r\,d\mathbf{X}_r := \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \sum_{i=0}^{n-1} Y_u^{(i)} \mathbf{X}_{u,v}^{i+1}.$$

Определение грубых траекторий на полуоси. Пусть $\beta \in (1/(n+1), 1/n]$, $X \in C^\beta(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, т.е. при любом $T>0$ сужение $X|_{[0,T]}$ принадлежит пространству $C^\beta([0,T],\mathbb{R})$. Для каждого $i\in\{1,\ldots,n\}$ определим $\mathbf{X}_{s,t}^i := (X_{s,t})^i/i!$, $s,t\in\mathbb{R}_+$.

Элемент $\mathbf{X} = (1,\mathbf{X}^1,\ldots,\mathbf{X}^n) : \mathbb{R}_+^2 \to T^{(n)}(\mathbb{R})$ будем называть *геометрической грубой траекторией* над X. Множество геометрических грубых траекторий $\mathbf{X}$ над X по всем $X \in C^\beta(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ будем обозначать через $\mathscr{C}_g^\beta(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. Если $\mathbf{X}\in\mathscr{C}_g^\beta(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, то $\mathbf{X}|_{[0,T]^2} \in \mathscr{C}_g^\beta([0,T],\mathbb{R})$ для любого $T>0$.

Пусть $\alpha,\beta\in(1/(n+1),1/n]$, $\alpha<\beta$. Будем говорить, что функция $Y\in C^\alpha(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ *слабо управляется* геометрической грубой траекторией $\mathbf{X}\in\mathscr{C}_g^\beta(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, если существуют $Y^{(i)}: \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $i\in\{1,\ldots,n-1\}$, такие, что величины $\|R^{Y,i}|_{[0,T]^2}\|_{i\alpha}$ конечны при любом $T>0$ для каждого остаточного члена $R^{Y,i}$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, где

$$R_{s,t}^{Y,i} = Y_{s,t}^{(n-i)} - \sum_{j=1}^{i-1} Y_s^{(n-i+j)}\mathbf{X}_{s,t}^j.$$

Скажем, что вектор-функция $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)},\ldots,Y^{(n-1)})$ принадлежит множеству $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, если при любом $T>0$ её сужение $\mathbf{Y}|_{[0,T]}$ принадлежит пространству $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T],\mathbb{R})$.

Стохастические дифференциальные уравнения, слабо управляемые грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера. Пусть на полном вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$ с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ задан $\mathcal{F}_t$-согласованный случайный процесс X_t, $t\in\mathbb{R}_+$, такой, что почти все траектории процесса X_t принадлежат пространству $C^\beta(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, $\beta\in(1/(n+1),1/n]$. Определим процесс $\mathbf{X}_\cdot = (1,\mathbf{X}_{0,\cdot}^1,\ldots,\mathbf{X}_{0,\cdot}^n)$ как случайную величину, принимающую значения в $\mathscr{C}_g^\beta(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ п.н., где $\mathbf{X}_{s,t}^i = (X_{s,t})^i/i!$. Выберем и зафиксируем произвольное $\alpha\in(0,\beta)$.

Пусть $Y\in C^\alpha([0,T],\mathbb{R})$, $(Y,Y^{(1)},Y^{(2)},\ldots,Y^{(n-1)})\in\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T],\mathbb{R})$; $f\in C_b^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Определим $Z_t = f(Y_t)$. По аналогии с формулой Фаа-Ди-Бруно положим

$$Z^{(k)} = \sum_{j=1}^k D^j f(Y) B_{k,j}(Y^{(1)},\ldots,Y^{(k-j+1)}), \quad k=\overline{1,n-1}, \tag{2}$$

где $B_{k,j}(x_1,\ldots,x_{k-j+1})$ – многочлены Белла [6].

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dY_t = f(Y_t)\,d\mathbf{X}_t, \quad t\in\mathbb{R}_+. \tag{3}$$

Определение 1. Пусть $\xi:\Omega\to\mathbb{R}$ – $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина. *Решением* уравнения (3) с начальным условием $Y_0=\xi$ будем называть $\mathcal{F}$-измеримую случайную величину $\mathbf{Y} = (Y,Y^{(1)},\ldots,Y^{(n-1)})$ со значениями в $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ п.н. такую, что случайный процесс $\mathbf{Y}_t$ является $\mathcal{F}_t$-согласованным и п.н. для всех $t\in\mathbb{R}_+$ выполняется равенство

$$Y_t = \xi + \int\limits_0^t f(Y_s)\,d\mathbf{X}_s,$$

где грубые производные от функции $f(Y)$, участвующие в определении интеграла в правой части, определяются по формулам (2). Решение уравнения (3) с начальным условием $Y_0 = \xi$ назовём *единственным*, если для любых двух решений $\mathbf{Y}$ и $\bar{\mathbf{Y}}$ уравнения (3) с начальным условием $Y_0 = \xi$ выполняется равенство $P(\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{Y}}) = 1$.

Рассмотрим ОДУ

$$dZ_t = f(Z_t)\,dt, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Пусть S_t, $t \in \mathbb{R}$, – поток, порождённый уравнением (4), т.е. $Z_t = S_t Z_0$. В работе [4] доказано

Предложение. *Пусть* $\alpha, \beta \in (1/(n+1), 1/n]$, $\alpha < \beta$, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n) \in \mathscr{C}_g^\beta(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *п.н. Если* $f \in C_b^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *то для любой* $\mathcal{F}_0$*-измеримой случайной величины* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *существует единственное решение* $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)})$ *уравнения (1) с начальным условием* $Y_0 = \xi$ *и п.н. выполняются равенства*

$$Y_t = S_{X_{0,t}}\xi, \quad Y_t^{(i)} = D_f^{i-1} f(Y_t), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $(D_f h)(z) = f(z) Dh(z)$.

Непрерывная зависимость решений от начальных данных. Наряду с уравнением (3) рассмотрим возмущённое уравнение

$$dY_t = \widetilde{f}(Y_t)\,d\mathbf{X}_t, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть* $\alpha, \beta \in (1/(n+1), 1/n]$, $\alpha < \beta$, $p \geqslant 1$, $T > 0$, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n) \in \mathscr{C}_g^\beta(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *п.н.*, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ – $\mathcal{F}_0$*-измеримая случайная величина;* $f \in C_b^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Если* $\mathbb{E}\|X\|_{\alpha,[0,T]}^p < \infty$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta = \delta(\varepsilon, T)$ *такое, что для любых функции* $\widetilde{f} \in C_b^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *и* $\mathcal{F}_0$*-измеримой случайной величины* $\widetilde{\xi} : \Omega \to \mathbb{R}$, *для которых* $\|\widetilde{f} - f\|_{C_b^{n+1}} + \mathbb{E}|\widetilde{\xi} - \xi|^p \leqslant \delta$, *выполняется неравенство*

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\|\widetilde{Y}^{(i)} - Y^{(i)}\|_{\alpha,[0,T]}^p \leqslant \varepsilon,$$

где $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)})$ *– решение уравнения (3) с начальным условием* $Y_0 = \xi$, $\widetilde{\mathbf{Y}} = (\widetilde{Y}, \widetilde{Y}^{(1)}, \ldots, \widetilde{Y}^{(n-1)})$ *– решение уравнения (5) с начальным условием* $Y_0 = \widetilde{\xi}$.

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы не выполняется, т.е. найдётся $\varepsilon_0 > 0$, для которого при любом $\delta_k = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, существуют $f_k \in C_b^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{F}_0$-измеримые случайные величины $\xi_k : \Omega \to \mathbb{R}$ такие, что $\|f_k - f\|_{C_b^{n+1}} + \mathbb{E}|\xi_k - \xi|^p \leqslant \delta_k$, и выполняется неравенство

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\|Y_k^{(i)} - Y^{(i)}\|_{\alpha,[0,T]}^p \geqslant \varepsilon_0,$$

здесь $\mathbf{Y}_k = (Y_k, Y_k^{(1)}, \ldots, Y_k^{(n-1)})$ – решение уравнения (3) с начальным условием $Y_0 = \xi_k$. Пусть $S_{k,t}$ – поток, порождённый уравнением (4). Согласно предложению 1 имеем

$$Y_t = S_{X_t - X_0}\xi, \quad Y_t^{(i)} = D_f^{i-1} f(Y_t),$$

$$Y_{k,t} = S_{k, X_t - X_0}\xi_k, \quad Y_{k,t}^{(i)} = D_{f_k}^{i-1} f_k(Y_{k,t}).$$

Не нарушая общности, можно считать, что $X_0 = 0$. Обозначим $g(\tau) = S_\tau \xi$, $g_k(\tau) = S_{k,\tau}\xi_k$, $\psi_k(\tau) = g_k(\tau) - g(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Таким образом,

$$\|Y_k - Y\|_{\alpha,[0,T]} = \sup_{s \neq t} \frac{|\psi_k(X_t) - \psi_k(X_s)|}{|t-s|^\alpha} = \sup_{s \neq t} \frac{|(X_t - X_s) D\psi_k(X_s + \theta_k(X_t - X_s))|}{|t-s|^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \|X\|_{\alpha,[0,T]} \|D\psi_k\|_\infty.$$

Так как $\mathbb{E}\|X\|^p_{\alpha,[0,T]} < \infty$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbb{E}\|Y_k - Y\|^p_{\alpha,[0,T]} = 0$.

Выберем произвольно $i \in \{1,\ldots,n-1\}$. Обозначим $h(y) = D_f^{i-1}f(y)$, $h_k(y) = D_{f_k}^{i-1}f_k(y)$, $\varphi_k(y) = h_k(y) - h(y)$, $y \in \mathbb{R}$. Тогда будем иметь

$$\|Y_k^{(i)} - Y^{(i)}\|_{\alpha,[0,T]} = \sup_{s\neq t} \frac{|h_k(Y_{k,t}) - h_k(Y_{k,s}) - h(Y_t) + h(Y_s)|}{|t-s|^\alpha} =$$

$$= \sup_{s\neq t} \frac{|(Y_{k,t} - Y_{k,s})D\varphi_k(Y_{k,s} + \theta_k(Y_{k,t} - Y_{k,s}))|}{|t-s|^\alpha} + \sup_{s\neq t} \frac{|h(Y_{k,t}) - h(Y_{k,s}) - h(Y_t) + h(Y_s)|}{|t-s|^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \|Y_k - Y\|_{\alpha,[0,T]}\|D\varphi_k\|_\infty + \|Dh\|_\infty\|Y_k - Y\|_{\alpha,[0,T]} + C\|D^2h\|_\infty(\|Y_k - Y\|_{\alpha,[0,T]} + |\xi_k - \xi|).$$

Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbb{E}\|Y_k^{(i)} - Y^{(i)}\|^p_{\alpha,[0,T]} = 0$. Таким образом,

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\|Y_k^{(i)} - Y^{(i)}\|_{\alpha,[0,T]} = 0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Устойчивость по Ляпунову решений на полуоси. Перейдём к исследованию устойчивости нулевого решения уравнения (3) в предположении, что $f(0) = 0$. Дополнительно предположим, что функция $f \in C^{n+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ такова, что любое решение Z_t, $t \geqslant 0$, уравнения (4) не имеет взрывов.

Далее под нулевым решением уравнения (3) понимаем решение $\mathbf{Y} \equiv 0$ уравнения (3) с нулевым начальным условием $Y_0 = 0$.

Определение 2. Будем говорить, что нулевое решение уравнения (3) *устойчиво по вероятности,* если для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon_1,\varepsilon_2) > 0$ такое, что для каждой $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, $|\xi| \leqslant \delta$ п.н., выполняется неравенство

$$P\biggl(\sup_{t\geqslant 0}|Y_t| \geqslant \varepsilon_1\biggr) \leqslant \varepsilon_2,$$

где $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)},\ldots,Y^{(n-1)})$ – решение уравнения (3) с начальным условием $Y_0 = \xi$. Скажем, что нулевое решение уравнения (3) *асимптотически устойчиво по вероятности,* если оно устойчиво по вероятности и существует $\Delta > 0$, при котором для любой $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, $|\xi| \leqslant \Delta$ п.н., имеет место сходимость по вероятности $Y_t \underset{t\to+\infty}{\overset{P}{\to}} 0$. Пусть $p \geqslant 1$; будем говорить, что нулевое решение уравнения (3) является *p-устойчивым,* если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, $|\xi| \leqslant \delta$ п.н., выполняется неравенство $\sup\limits_{t\geqslant 0}\mathbb{E}|Y_t|^p \leqslant \varepsilon$.

Теорема 2. *Пусть* $X_t \underset{t\to+\infty}{\overset{P}{\to}} +\infty$ *и для любого* $T > 0$ *величина* $\mathbb{E}(\sup\limits_{t\in[0,T]}|X_t|)$ *конечна. Если нулевое решение уравнения (4) устойчиво по Ляпунову (соответственно асимптотически устойчиво) при* $t \geqslant 0$, *то нулевое решение уравнения (3) устойчиво по вероятности (соответственно асимптотически устойчиво по вероятности).*

Доказательство. Не нарушая общности, можем считать, что $X_0 = 0$. Пусть Z_t – решение уравнения (4) с начальным условием $Z_0 = \xi$, тогда $Y_t = Z_{X_t}$. Зафиксируем произвольные $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$.

Так как $X_t \underset{t\to+\infty}{\overset{P}{\to}} +\infty$, то для любого $\varepsilon_2 > 0$ существует $\tau = \tau(\varepsilon_2) > 0$, при котором

$$P(X_t \geqslant 0 \text{ для всех } t > \tau) \geqslant 1 - \varepsilon_2/2.$$

Так как величина $\mathbb{E}(\sup\limits_{t\in[0,\tau]}|X_t|)$ конечна, то в силу неравенства Чебышёва найдётся постоянная $M=M(\tau,\varepsilon_2)>0$ такая, что

$$P(|X_t|\leqslant M \ \text{ для всех } \ t\in[0,\tau])\geqslant 1-\varepsilon_2/2.$$

Предположим, что нулевое решение уравнения (4) устойчиво по Ляпунову при $t\geqslant 0$. Тогда найдётся $\delta=\delta(\varepsilon_1,M)>0$, при котором для любой $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины $\xi:\Omega\to\mathbb{R}$, $|\xi|\leqslant\delta$ п.н., выполняется неравенство $\sup\limits_{t\geqslant -M}|Z_t|\leqslant\varepsilon_1$ п.н.

Таким образом, имеем

$$P\Big(\sup_{t\geqslant 0}|Y_t|>\varepsilon_1\Big)=P\Big(\sup_{t\geqslant 0}|Z_{X_t}|>\varepsilon_1\Big)\leqslant P(\text{ существует } t\geqslant 0 \text{ такое, что } X_t<-M)\leqslant$$

$$\leqslant P(\text{ существует } t\in[0,\tau] \text{ такое, что } X_t<-M)+P(\text{ существует } t>\tau \text{ такое, что } X_t<0)\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon_2/2+\varepsilon_2/2=\varepsilon_2.$$

Таким образом, нулевое решение уравнения (3) устойчиво по вероятности.

Следовательно, нулевое решение уравнения (4) асимптотически устойчиво при $t\geqslant 0$. Тогда существует $\Delta>0$, при котором для любой $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины $\xi:\Omega\to\to\mathbb{R}$, $|\xi|\leqslant\Delta$ п.н., решение Z_t уравнения (4) с начальным условием $Z_0=\xi$ обладает свойством: с вероятностью 1 имеет место сходимость $Z_t\to 0$ при $t\to+\infty$. Возьмём произвольные $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$. Существует $\delta=\delta(\varepsilon_1)$ такое, что $P(|Z_t|\leqslant\varepsilon_1$ для всех $t\geqslant\delta)=1$.

Так как $X_t\underset{t\to+\infty}{\overset{P}{\to}}+\infty$, то найдётся $\delta_1>0$, при котором

$$P(\text{ существует } t\geqslant\delta_1 \text{ такое, что } X_t<\delta)\leqslant\varepsilon_2.$$

Таким образом,

$$P(|Y_t|\leqslant\varepsilon_1 \ \text{ для всех } \ t\geqslant\delta_1)=P(|Z_{X_t}|\leqslant\varepsilon_1 \ \text{ для всех } \ t\geqslant\delta_1)=$$
$$=1-P(\text{ существует } t\geqslant\delta_1 \text{ такое, что } |Z_{X_t}|>\varepsilon_1)\geqslant$$
$$\geqslant 1-P(\text{ существует } t\geqslant\delta_1 \text{ такое, что } X_t<\delta)\geqslant 1-\varepsilon_2.$$

Следовательно, $Y_t\underset{t\to+\infty}{\overset{P}{\to}}0$, поэтому нулевое решение уравнения (3) асимптотически устойчиво по вероятности. Теорема доказана.

Пример. Пусть W_t и B_t^H – независимые одномерные соответственно стандартное броуновское движение и дробное броуновское движение с индексом Хёрста $H\in(0,1/2)\bigcup(1/2,1)$. Рассмотрим линейное стохастическое дифференциальное уравнение

$$dY_t=-Y_t\,dX_t,\quad t\in\mathbb{R}_+,\tag{6}$$

где $X_t=at+bW_t+cB_t^H$, $a>0$, $b,c\in\mathbb{R}$.

Возьмём произвольные α, β, $0<\alpha<\beta<H$. Тогда почти все траектории процесса X_t принадлежат пространству $C^\beta(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. Из предложения вытекает, что уравнение (6) с начальным условием $Y_0=x$ имеет единственное решение, определяемое формулой

$$Y_t=e^{-at-bW_t-cB_t^H}x,\quad t\in\mathbb{R}_+.$$

Проверим выполнимость условий теоремы 2. Так как $\sup\limits_{t\in[0,T]}|X_t|\leqslant C\|X\|_{\beta,[0,T]}$, то, согласно лемме 7.4 [7], величина $\mathbb{E}(\sup\limits_{t\in[0,T]}|X_t|)$ конечна. Докажем, что $X_t\underset{t\to+\infty}{\overset{P}{\to}}+\infty$. Возьмём произвольные $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$. Так как процессы W_t и B_t^H независимы, то процесс $\bar{X}_t=bW_t+cB_t^H$

имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией, равной $b^2t+c^2t^{2H}$. Таким образом,

$$P(X_t>\varepsilon_1 \ \text{для всех}\ t\geqslant\delta)=P(\bar{X}_t>\varepsilon_1-at \ \text{для всех}\ t\geqslant\delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{M_t}^{\infty}e^{-s^2/2}\,ds,$$

где $M_t=(\varepsilon_1-at)/\sqrt{b^2t+c^2t^{2H}}$. Так как $M_t \underset{t\to+\infty}{\to} -\infty$, то найдётся $\delta>0$ такое, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{M_\delta}^{\infty}e^{-s^2/2}\,ds\geqslant 1-\varepsilon_2.$$

Таким образом, $X_t \underset{t\to+\infty}{\overset{P}{\to}} +\infty$. Следовательно, согласно теореме 2, нулевое решение уравнения (6) является асимптотически устойчивым по вероятности.

Пусть $p\geqslant 1$, исследуем p-устойчивость нулевого решения уравнения (6). Имеем

$$\mathbb{E}|Y_t|^p=\mathbb{E}|x|^p e^{t(-pa+p^2b^2/2)+t^{2H}p^2c^2/2}.$$

Таким образом, при $c\neq 0$ и $H>1/2$ нулевое решение уравнения (6) не является p-устойчивым. Если $c=0$ или $H\in(0,1/2)$, то нулевое решение этого уравнения p-устойчиво тогда и только тогда, когда $a>pb^2/2$.

Замечание. Аналогичный результат об устойчивости нулевого решения уравнения (6) с $H>1/2$ получен в статье [8]. Проблема устойчивости решений многомерных стохастических дифференциальных уравнений, управляемых дробными броуновскими движениями, исследовалась в работах [8–10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986.
2. *Lyons T.* Differential equations driven by rough signals // Rev. Mat. Iberoamericana. 1998. V. 14. № 2. P. 215–310.
3. *Gubinelli M.* Controlling rough paths // J. of Funct. Anal. 2004. V. 216. № 1. P. 86–140.
4. *Васьковский М.М.* Существование и единственность решений дифференциальных уравнений, слабо управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 10. С. 1305–1317.
5. *Friz P., Hairer M.* A Course on Rough Paths with an Introduction to Regularity Structures. Cham, 2014.
6. *Comtet L.* Advanced Combinatorics. The Art of Finite and Infinite Expansions. Dordrecht, 1974.
7. *Nualart D., Rascanu A.* Differential equations driven by fractional Brownian motion // Coll. Math. 2002. V. 53. № 1. P. 55–81.
8. *Качан И.В.* Устойчивость линейных стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа с дробными броуновскими движениями // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 5. С. 590–606.
9. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Стохастические дифференциальные уравнения и включения. Минск, 2019.
10. *Васьковский М.М.* Устойчивость и притяжение решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 2. С. 160–173.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 09.04.2021 г.
После доработки 09.04.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1450–1457

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ СО ВСЕМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УБЫВАЮЩИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ И РЕШЕНИЯМИ

© 2021 г. **Н. А. Изобов, А. В. Ильин**

Доказано существование n-мерных линейных дифференциальных систем с первым приближением, имеющим все положительные характеристические показатели, экспоненциально убывающими возмущениями и ровно $n-1$ линейно независимыми решениями с отрицательными показателями Ляпунова. Тем самым в линейном случае получен антиперроновский вариант – вариант, противоположный известному эффекту Перрона смены значений отрицательных показателей линейного приближения на положительные у решений дифференциальной системы с возмущением высшего порядка малости в окрестности начала координат и допустимого роста вне её.

DOI: 10.31857/S0374064121110029

Рассматриваем линейные дифференциальные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant t_0, \tag{1}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и положительными характеристическими показателями $\lambda_n(A) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_1(A) > 0$, а также возмущённые системы

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant t_0, \tag{2}$$

с бесконечно дифференцируемыми экспоненциально убывающими $n \times n$-матрицами-возмущениями Q, удовлетворяющими оценке

$$\|Q(t)\| \leqslant C_Q e^{-\sigma t}, \quad \sigma > 0, \quad C_Q = \mathrm{const}, \quad t \geqslant t_0. \tag{3}$$

Возникает вопрос о существовании, например, таких двумерной системы (1) и возмущения (3), что возмущённая система (2) имеет нетривиальное решение с отрицательным показателем Ляпунова. Решение этой (первой) задачи может служить предварительным этапом в решении более важной (второй) задачи о существовании нетривиальных решений с отрицательными показателями у нелинейной дифференциальной системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant t_0, \tag{4}$$

с бесконечно дифференцируемым m-возмущением $f(t, y)$:

$$\|f(t, y)\| \leqslant C_f \|y\|^m, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad C_f = \mathrm{const}, \quad t \geqslant t_0,$$

порядка $m > 1$ малости в окрестности начала координат $y = 0$ и допустимого роста вне её в “антиперроновском” случае положительности всех характеристических показателей линейного приближения (1). Действительно, согласно принципу линейного включения [1, с. 159], всякое бесконечно продолжимое вправо решение $y_0(t) \neq 0$ системы (4) с отрицательным показателем является и решением системы (2) с экспоненциально убывающим возмущением $Q_{y_0}(t)$, удовлетворяющим условию

$$\|Q_{y_0}(t)\| \leqslant C_f \|y_0(t)\|^{m-1}, \quad t \geqslant t_0.$$

Поэтому в случае допустимого отрицательного решения первой задачи следует и такое же решение второй.

Отметим, что в эффекте Перрона [2; 3, с. 50–51] смены значений отрицательных характеристических показателей системы (1) на положительные показатели решений системы (4) в работах [4, 5] получено окончательное полное описание множеств как всех положительных, так и всех отрицательных (в том числе и при отсутствии последних) показателей решений системы (4), у которой все нетривиальные решения бесконечно продолжимы вправо и имеют ограниченные конечные показатели.

Положительному решению первой задачи и посвящена настоящая работа. Справедлива следующая

Теорема 1. *Для любых параметров* $\lambda_2 \geqslant \lambda_1 > 0$, $\theta > 1$ *и* $\sigma \in (0, \lambda_1 + \theta^{-1}\lambda_2)$ *существуют:*

1) двумерная линейная система (1) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = 1, 2$;

2) бесконечно дифференцируемое экспоненциально убывающее удовлетворяющее оценке (3) возмущение $Q(t)$

такие, что возмущённая линейная система (2) имеет единственное (среди всех её линейно независимых) решение $y(t)$ *с отрицательным показателем Ляпунова, равным*

$$\lambda_0 = \frac{\theta\sigma - \theta\lambda_1 - \lambda_2}{\theta - 1}.$$

Доказательство. Сначала докажем теорему в более простом варианте системы (1) с кусочно-постоянной матрицей коэффициентов $A(t)$. Затем по ней построим уже бесконечно дифференцируемую матрицу $B(t)$, отличающуюся от матрицы $A(t)$ на таких столь коротких промежутках времени, содержащих её точки разрыва, что будет выполнено условие

$$J_M(B - A) \equiv \int\limits_{t_0}^{+\infty} \|B(\tau) - A(\tau)\| e^{M\tau}\, d\tau < +\infty$$

с достаточно большой постоянной $M > 0$ (например, большей коэффициента неправильности Гробмана системы (1)). Это интегральное условие обеспечит [6] совпадение характеристических показателей как у систем (1) и $\dot{x} = B(t)x$, так и у систем (2) и $\dot{y} = B(t)y + Q(t)y$ с одной и той же матрицей $Q(t)$.

1°. Построение системы первого приближения. По числу $\theta > 1$ и моментам $t_k = \theta^k$, $k \in \mathbb{N}$, определим коэффициенты

$$a_i(t) = (-1)^i \times \begin{cases} -\alpha_i, & t \in [t_{2k-1}, t_{2k}), \quad i = 1, 2, \\ \alpha_i, & t \in [t_{2k}, t_{2k+1}), \quad i = 1, 2, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

линейной диагональной системы

$$\dot{x} = \operatorname{diag}[a_1(t), a_2(t)]x \equiv A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_1 = \theta, \tag{6}$$

с кусочно-постоянной матрицей $A(t)$ и определяемыми ниже постоянными $\alpha_2 \geqslant \alpha_1 > 0$.

В силу представлений (5) коэффициентов $a_i(t)$ диагональной системы (6) справедливы равенства

$$\int\limits_{t_{2k-i+1}}^{t_{2k-i+3}} a_i(\tau)\, d\tau = \alpha_i \frac{\theta - 1}{\theta + 1}(t_{2k-i+3} - t_{2k-i+1}), \quad i = 1, 2, \quad k \in \mathbb{N},$$

из которых следуют представления

$$\lambda_i(A) = \alpha_i \frac{\theta - 1}{\theta + 1}, \quad i = 1, 2, \tag{7_1}$$

характеристических показателей системы (6). Из них для постоянных α_i в силу условия теоремы 1 получаем представления для постоянных α_i:

$$\alpha_i = \frac{\theta + 1}{\theta - 1}\lambda_i, \quad \theta > 1, \quad i = 1, 2. \tag{7_2}$$

2°. Одновременное построение экспоненциально убывающих возмущения и решения. Предположим, что на отрезке $[t_1, t_{2k-1}]$ с произвольно фиксированным $k \in \mathbb{N}$ построены необходимые возмущение (3) и решение $y(t)$ с положительными компонентами. При этом для нормы этого решения в момент $t = t_{2k-1}$ и угла $\gamma_{2k-1} = \sphericalangle\{y(t_{2k-1}, Ox_2)\}$ выполнены условия

$$2^{1-2k} \leqslant \|y(t_{2k-1})\| e^{-\lambda_0 t_{2k-1}} \leqslant 2^{2k-1} \tag{8}$$

с определённым в теореме числом λ_0, имеющим в силу (7) представление

$$\lambda_0 = \frac{\theta\sigma}{\theta - 1} - \frac{\theta\alpha_1 + \alpha_2}{\theta + 1};$$

$$\operatorname{tg}\gamma_{2k-1} = \exp(-\beta t_{2k-1}), \quad \beta = -\theta\sigma + (\theta - 1)(\alpha_1 + \alpha_2) > 0. \tag{9}$$

Продолжим построение 2×2-возмущения $Q(t)$ и решения $y(t)$ на следующем промежутке $(t_{2k-1}, t_{2k+1}]$. На первой его части $(t_{2k-1}, t_{2k}]$ элементы матрицы $Q(t) = (q_{ij}(t))$ определим следующим образом:

$$q_{ij}(t) = q_{22}(t) \equiv 0, \quad i = 1, \quad j = 1, 2, \quad t \in [t_{2k-1}, t_{2k}],$$

$$q_{21}(t) \equiv 0, \quad t \in [t_{2k-1}, \tau_1(t_{2k})], \quad \tau_1(t_{2k}) \equiv t_{2k} - 1 - 2\varepsilon(t_{2k}).$$

При этом используемая здесь и ниже при определении матрицы $B(t)$ величина $\varepsilon(t)$ имеет значение $\varepsilon(t) = \exp(-t^2)$.

На оставшемся промежутке $(\tau_1(t_{2k}), t_{2k}]$ бесконечно дифференцируемый и равномерно ограниченный по k элемент $q_{21}(t)$ имеет представление

$$q_{21}(t) = d_{2k}e^{-\sigma t} \times \begin{cases} e_{01}(t, \tau_1, \tau_2), & t \in (\tau_1, \tau_2), \\ 1, & t \in [\tau_2, \tau_3), \\ e_{10}(t, \tau_3, \tau_4), & t \in [\tau_3, \tau_4], \end{cases}$$

с некоторой определённой ниже постоянной d_{2k} и моментами $\tau_l \equiv \tau_l(t_{2k})$:

$$\tau_2 = \tau_1 + \varepsilon(t_{2k}), \quad \tau_3 = \tau_2 + 1, \quad \tau_4 = t_{2k}.$$

Функция же $e_{\alpha\beta}(\eta, \eta_1, \eta_2)$ является бесконечно дифференцируемой монотонной функцией Гелбаума–Олмстеда [4]

$$e_{\alpha\beta}(\eta, \eta_1\eta_2) = \alpha + (\beta - \alpha)\exp\{-(\eta - \eta_1)^{-2}\exp[-(\eta - \eta_2)^{-2}]\},$$

определённой на интервале с концами $\eta = \eta_1$ и $\eta = \eta_2$ (не обязательно соответственно левым и правым) и принимающей на них значения

$$e_{\alpha\beta}(\eta_1, \eta_1, \eta_2) = \alpha, \quad e_{\alpha\beta}(\eta_2, \eta_1, \eta_2) = \beta$$

и нулевые значения своих односторонних производных любого порядка.

В результате возмущённая система (2) на отрезке $[t_{2k-1}, t_{2k}]$ состоит из двух уравнений:

$$\dot{y}_1 = a_1(t)y_1, \quad \dot{y}_2 = a_2(t)y_2 + q_{21}(t)y_1. \tag{2_1}$$

Последовательно интегрируя их, получаем следующие представления компонент $y_i(t)$ исследуемого решения $y(t)$:

$$y_1(t) = y_1(t_{2k-1})\exp[\alpha_1(t - t_{2k-1})], \quad t \in [t_{2k-1}, t_{2k}]. \tag{10}$$

$$y_2(t) = y_2(t_{2k-1})\exp[-\alpha_2(t - t_{2k-1})], \quad t \in [t_{2k-1}, \tau_1], \tag{11_1}$$

$$y_2(t) = y_2(\tau_1)e^{-\alpha_2(t-\tau_1)} + \int\limits_{\tau_1}^{t} q_{21}(\tau)y_1(\tau)e^{\alpha_2(\tau-t)}\,d\tau, \quad t \in [\tau_1, \tau_4]. \tag{11_2}$$

Если $d_{2k} = 0$, то вторая компонента $y_2(t)$ решения $y(t)$ имеет представление (11_1) для всех $t \in [t_{2k-1}, t_{2k}]$. И поэтому в силу равенств (9) для угла $\gamma_{2k} = \sphericalangle\{y(t_{2k}), Ox_1\}$ справедливы оценки

$$\operatorname{tg}\gamma_{2k} = \frac{y_2(t_{2k})}{y_1(t_{2k})} = \operatorname{ctg}\gamma_{2k-1}\exp[-(\alpha_1+\alpha_2)(t_{2k} - t_{2-1})] \overset{(9)}{\geqslant} \exp(-\sigma t_{2k}). \tag{12}$$

С другой стороны, при $d_{2k} = -d < 0$ у соответствующего решения $y(t)$ системы (2_1) первая компонента $y_1(t)$ имеет прежнее представление (10), а для второй $y_2(t)$, определяемой равенствами (11_1), (11_2), возникает вопрос: может ли она при некоторой равномерно ограниченной по $k \geqslant k_0$ постоянной $d_{2k} < 0$ обратится в нуль в момент $t = t_{2k}$. Установим это. С помощью представлений (10) и (11_1), (11_2) для значения $y_2(t_{2k})$ этой компоненты имеем оценки сверху:

$$y_2(t_{2k})\exp[\alpha_2(t_{2k} - \tau_1)] \leqslant y_2(\tau_1) - dy_1(\tau_1)\int\limits_{\tau_2}^{\tau_3} e^{-\sigma\tau + (\alpha_1+\alpha_2)(\tau-\tau_1)}\,d\tau \leqslant y_2(\tau_1) - dy_1(\tau_1)e^{-\sigma\tau_1} \equiv R.$$

При этом последнее неравенство справедливо в силу оценки $\sigma < \alpha_1 + \alpha_2$, вытекающей из условия теоремы 1 изменения параметра σ и представлений (7) показателей системы (6).

В выражении для величины R заменим положительные значения $y_1(\tau_1)$ и $y_2(\tau_1)$ компонент рассматриваемого решения их представлениями (10) и (11_1), а также значением $\operatorname{tg}\gamma_{2k-1}$. В результате получим неравенства

$$\begin{gathered} Ry_1^{-1}(\tau_1) = \operatorname{ctg}\gamma_{2k-1} \times \exp[-(\alpha_1+\alpha_2)(\tau_1 - t_{2k-1})] - de^{-\sigma\tau_1} \leqslant \\ \leqslant \exp[-\sigma t_{2k} + (\alpha_1+\alpha_2)(t_{2k} - \tau_1)] - de^{-\sigma\tau_1} = e^{-\sigma\tau_1}(\exp[(\alpha_1+\alpha_2-\sigma)(t_{2k} - \tau_1)] - d) \leqslant \\ \leqslant e^{-\sigma\tau_1}(\exp[\alpha_1+\alpha_2-\sigma] - d) < e^{-\sigma\tau_1}(\exp(\alpha_1+\alpha_2) - d) = 0 \end{gathered} \tag{13}$$

для $d = \exp(\alpha_1 + \alpha_2)$ и $k \geqslant k_0$. Поэтому в силу непрерывной зависимости тангенса угла γ_{2k} от постоянной d и оценок (12) и (13) существует такое значение d_{2k} этой постоянной, что будет выполнено равенство $\operatorname{tg}\gamma_{2k} = \exp(-\beta t_{2k})$ с прежним (9) числом β (в доказательстве теоремы 2 при таких треугольных и аналогичных им возмущениях эти углы в отдельные моменты становятся равными нулю). При этом компонента $y_2(t)$ остаётся положительной для всех $t \in [t_{2k-1}, t_{2k}]$, совпадает на отрезке $[t_{2k-1}, \tau_1]$ с аналогичной компонентой y_2^0 решения $y_0(t)$ (с тем же начальным значением в момент $t = t_{2k-1}$) линейной системы (6).

Оценим на отрезке $[t_{2k-1}, t_{2k}]$ норму решения $y(t)$ построенной системы (2_1). Так как выполнено неравенство $\lambda_0 > -\alpha_2$, справедливое в силу очевидного неравенства

$$\lambda_0 + \alpha_2 = \frac{\theta\sigma}{\theta - 1} + \frac{\theta(\alpha_2 - \alpha_1)}{\theta + 1} > 0,$$

то для второй компоненты имеем оценки

$$0 < y_2(t) \leqslant \|y(t_{2k-1})\| y_2(t_{2k-1}) \exp[-\alpha_2(t - t_{2k-1})] \leqslant$$
$$\leqslant 2^{2k-1} \exp[\lambda_0 t - (\lambda_0 + \alpha_2)(t - t_{2k-1})] < 2^{2k-1} \exp(\lambda_0 t), \quad t \in [t_{2k-1}, t_{2k}]. \qquad (14)$$

Для первой же компоненты $y_1(t)$, ведущей для решения $y(t)$ на отрезке $[t_{2k-1}, t_{2k}]$, функция

$$\lambda_1(t) \equiv t^{-1} \ln y_1(t) = t^{-1}[\ln y_1(t_{2k-1}) + \alpha_1(t - t_{2k-1})]$$

имеет положительную производную

$$\lambda_1'(t) = t^{-2}[\alpha_1 t_{2k-1} - \ln y_1(t_{2k-1})] > 0, \quad t \in (t_{2k-1}, t_{2k}),$$

в силу неравенства $0 < y_1(t_{2k-1}) < 1$. Тем самым эта функция принимает наибольшее значение в момент $t = t_{2k}$. Поэтому справедливы оценки сверху

$$t^{-1} \ln y_1(t) \leqslant t_{2k}^{-1} \ln y_1(t_{2k}) \overset{(8)}{\leqslant} t_{2k}^{-1} \ln(2^{2k-1} \exp[\lambda_0 - \beta + (\theta - 1)\alpha_1] t_{2k-1}) =$$
$$= \lambda_0 - \frac{\theta - 1}{\theta + 1}(\alpha_2 - \alpha_1) + (2k - 1) t_{2k}^{-1} \ln 2 \equiv \lambda_{00} + (2k - 1) t_{2k}^{-1} \ln 2, \quad t \in [t_{2k-1}, t_{2k}]. \qquad (15)$$

Аналогичным образом для первой компоненты в момент $t = t_{2k}$ устанавливаются также и оценки снизу

$$t_{2k}^{-1} \ln y_1(t_{2k}) \geqslant t_{2k}^{-1} \ln(2^{1-2k} \exp[\lambda_0 - \beta - (\theta - 1)\alpha_1] t_{2k-1}) \geqslant \lambda_0 + (1 - 2k) \ln 2. \qquad (16)$$

В результате из неравенств $0 < y_2(t_{2k}) < y_1(t_{2k})$ и (14)–(16) вытекают окончательные оценки

$$\|y(t)\| \leqslant 2^{2k} e^{\lambda_0 t}, \quad t \in [t_{2k-1}, t_{2k}],$$
$$2^{-2k} \leqslant \|y(t_{2k})\| e^{-\lambda_{00} t_{2k}} \leqslant 2^{2k}.$$

На следующем отрезке $[t_{2k}, t_{2k+1}]$, на котором $a_1(t) = -\alpha_1$, $a_2(t) = \alpha_2$ и ведущей для решения $y(t)$ является её вторая компонента $y_2(t)$, осуществим аналогичные построения и рассуждения. В итоге получим оценки

$$0 < y_i(t) \leqslant 2^{2k} e^{\lambda_0 t}, \quad i = 1, 2, \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+1}],$$
$$2^{-2k} e^{\lambda_0 t_{2k+1}} \leqslant y_2(t_{2k+1}),$$

следствием которых и неравенства $y_1(t_{2k+1}) < y_2(t_{2k+1})$ являются двусторонние оценки

$$2^{-2k-1} e^{\lambda_0 t_{2k+1}} \leqslant \|y(t_{2k+1})\|, \quad \|y(t)\| \leqslant 2^{2k+1} e^{\lambda_0 t}, \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+1}].$$

Методом математической индукции эти построения возмущённой системы (2) с бесконечно дифференцируемым 2×2-возмущением и необходимым решением $y(t)$ с показателем $\lambda[y] = \lambda_0 < 0$, но кусочно-постоянной матрицей $A(t)$, распространим на всю полуось $[t_{2k_0-1}, +\infty)$, положив $Q(t) \equiv 0$ на промежутке $[t_0, t_{2k_0-1})$.

Для завершения доказательства теоремы 1 необходимо кусочно-постоянную диагональную матрицу $A(t)$ с элементами (5) и счётным числом точек разрыва $t = t_k$ заменить бесконечно дифференцируемой ограниченной матрицей $B(t)$, удовлетворяющей условию $J_M(B - A) < +\infty$ (с достаточно большим $M > 0$) и тем самым обеспечивающей совпадение показателей

$$\lambda_i(B) = \lambda_i(A), \quad \lambda_i(B + Q) = \lambda_i(A + Q), \quad i = 1, 2,$$

у построенных и “заменённых” линейных систем.

На отрезках $[\eta_1, \eta_2]$ с концами

$$\eta_1 = t_k, \quad \eta_2 = t_k + \varepsilon(t_k), \quad \varepsilon(t_k) \equiv \exp(-t_k^2), \quad k \geqslant k_0,$$

элементы $b_i(t)$ диагональной матрицы $B(t)$ определим равенствами $b_i(t) = e_{\delta_i \Delta_i}(\eta, \eta_1, \eta_2)$ через функции Гелбаума–Олмстеда со значениями

$$\delta_i = a_i(\eta_1), \quad \Delta_i = a_i(\eta_2), \quad i = 1, 2.$$

На остальных промежутках рассматриваемой полуоси функции $b_i(t)$ совпадают с элементами $a_i(t)$ матрицы $A(t)$. Эту операцию бесконечного сглаживания элементов $a_i(t)$ матрицы $A(t)$ осуществим для всех $k \geqslant k_0$. По свойствам функций Гелбаума–Олмстеда коэффициенты $b_i(t)$ уже являются бесконечно дифференцируемыми и для них выполнены соотношения

$$|b_i(t) - a_i(t)| \begin{cases} \leqslant 2\alpha_2, & t \in (t_k, t_k + \varepsilon(t_k)), \\ \equiv 0, & t \in [t_k + \varepsilon(t_k), t_{k+1}], \quad k \geqslant k_0. \end{cases}$$

Поэтому условие $J_M(B - A) < +\infty$ с любым числом $M > 0$, очевидно, оказывается выполненным:

$$J_M(B - A) \leqslant 2\alpha_2 \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-\theta^{2k} + M\theta^{k+1}) < +\infty, \quad \theta > 1.$$

Единственность решения $y_0(t)$ построенной линейной возмущённой системы (2) с отрицательным показателем среди всех её линейно независимых решений очевидным образом следует из неравенства Ляпунова. Действительно, предположив противное – существование второго решения $y_1(t)$ с отрицательным показателем, линейно независимого с построенным $y_0(t)$ и тем самым составляющего с ним фундаментальную систему $Y(t) = [y_0(t), y_1(t)]$ решений возмущённой системы (2), имели бы в силу неравенства Ляпунова следующее противоречие:

$$0 > \lambda[y_0] + \lambda[y_1] \geqslant \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{Sp}[A(\tau) + Q(\tau)]\, d\tau = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(\tau)\, d\tau = (\alpha_2 - \alpha_1)\frac{\theta - 1}{\theta + 1} \geqslant 0.$$

Из этих и аналогичных им неравенств следует используемое при доказательстве теоремы 2

Утверждение. *Для матрицы Коши $Y_2(t,\tau)$ построенной двумерной системы (2) и любых нечётных чисел $k(l)$, $l \in \mathbb{N}$, со свойством $k(l)/k(l+1) \to 0$ при $l \to \infty$ справедливо неравенство*

$$\lim_{l\to\infty} t_{k(l+1)}^{-1} \ln \|Y_2(t_{k(l+1)}, t_{k(l)})\| \geqslant -\lambda_0 > 0.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Построение необходимых возмущения $Q(t)$ и решения $y(t)$ можно вместо использованного в работе треугольного способа осуществить соответствующими поворотами.

Замечание 2. Вместо последовательности $t_{k+1} = \theta t_k$, $\theta > 1$, $k \in \mathbb{N}$, можно использовать последовательность $\{t_k\}$ со свойством $t_k t_{k+1}^{-1} \to 0$ при $k \to +\infty$.

Возникает вопрос, аналогичный вопросу в замечании 3.

Замечание 3. Справедливо ли утверждение:

$$\text{если} \;\; \lambda_i(A) > 0, \quad i = \overline{1,n}, \;\; \text{то} \;\; \lambda_n(A + Q) > 0$$

для любых кусочно-непрерывных ограниченной $n \times n$-матрицы $A(t)$ и экспоненциально убывающего $n \times n$-возмущения $Q(t)$?

Возникает также вопрос о возможном числе линейно независимых решений с отрицательными показателями Ляпунова у n-мерной линейной возмущённой системы (2), у которой система первого приближения (1) имеет все положительные характеристические показатели, а возмущение $Q(t)$ является экспоненциально убывающим. Справедлива следующая

Теорема 2. *Для любых параметров*

$$\lambda_n \geqslant \ldots \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_1 > 0, \quad n \geqslant 3, \quad \theta > 1, \quad 0 < \sigma < \lambda_1 + \theta^{-1}\lambda_2$$

существуют:

1) n-мерная линейная система (1) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = \overline{1,n}$;

2) бесконечно дифференцируемое экспоненциально убывающее удовлетворяющее оценке (3) возмущение Q

такие, что n-мерная возмущённая система (2) имеет ровно $n-1$ линейно независимых решений

$$Y_1(t), \ \ldots, \ Y_{n-1}(t) \tag{17}$$

с отрицательными показателями

$$\lambda[Y_i] = \frac{\sigma\theta - \theta\lambda_1 - \lambda_{i+1}}{\theta - 1} \equiv \Lambda_i, \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{18}$$

Схема доказательства основывается на утверждении теоремы 1 и её доказательстве. Для последовательности $\{k(l)\}$ нечётных чисел со свойством $k(l)/k(l+1) \to 0$ при $l \to \infty$ определим числа $T_l = t_{k(l)}$, $l \in \mathbb{N}$, по моментам $t_k = \theta^k$, $\theta > 1$, $k \in \mathbb{N}$, из доказательства теоремы 1. По показателям $\lambda_i > 0$ зададим равенствами (7_2) при $i = \overline{1,n}$ числа $\alpha_n \geqslant \ldots \ldots \geqslant \alpha_1 > 0$. По ним следующим образом определим кусочно-постоянные коэффициенты $a_1(t), \ \ldots, \ a_n(t)$ линейной n-мерной диагональной системы

$$\dot{x} = \operatorname{diag}[a_1(t), \ldots, a_n(t)]^{\mathrm{T}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant T_1. \tag{19}$$

Коэффициент $a_1(t)$ определим на всём бесконечном промежутке $[T_1, +\infty]$ равенствами (5). Остальные коэффициенты $a_i(t)$ зададим равенствами

$$a_i(t) = -\alpha_i \operatorname{sign} a_1(t), \quad t \in [T_{i-1+k(n-1)}, T_{i+k(n-1)}), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad i = \overline{2,n},$$

а вне указанных промежутков – равенствами

$$a_i(t) = -\alpha_i, \quad t \in [T_{i+k(n-1)}, T_{i-1+(k+1)(n-1)}), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad i = \overline{2,n},$$

обеспечивающими выполнение неравенств $\Lambda_i > -\alpha_i$ и тем самым необходимых равенств (18).

На отрезке $[T_1, T_2]$ построениями из доказательства теоремы 1 в координатной плоскости x_1Ox_2 получим первое необходимое решение $Y_1(t) = (y(t), 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ с двумерным вектором $y(t) \in \mathbb{R}^2$, реализующим "временной показатель" $\max t^{-1} \ln\|y(t)\| \approx \Lambda_1$ на отрезке $[T_1, T_2]$. Треугольным σ-возмущением (или соответствующим поворотом) в левосторонней окрестности момента $t = T_2$ (см. доказательство теоремы 1) решение $Y_1(t)$ к моменту $t = T_2$ "укладываем" в координатную ось Ox_2, т.е. получаем представление $Y_1(T_2) = \|Y_1(T_2)\|e_2$, где e_i – i-й координатный вектор n-мерного пространства. Далее это решение будет определяться равенством

$$Y_1(t) = \|Y_1(T_2)\|e^{-\alpha_2(t-T_2)}e_2 \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [T_2, T_n],$$

до левосторонней окрестности момента $t = T_n$.

Второе решение $Y_2(t)$ является решением системы (19), не подвергается возмущениям на промежутке $[T_1, T_2)$, расположено на оси Ox_3 и имеет на нём представление $Y_2(t) = e_3e^{-\alpha_3(t-T_1)}$. На отрезке $[T_2, T_2+1]$ допустимым треугольным возмущением, действующим в плоскости x_1Ox_3, образуем к моменту $t = T_2+1$ необходимый угол $\sphericalangle\{Y_2(T_2+1), Ox_3\}$ в первой четверти координатной плоскости x_1Ox_3 с тангенсом этого угла, равным $\exp[-\beta(T_2+1)]$ с соответствующим числом $\beta > 0$ (см. доказательство теоремы 1). Построениями и рассуждениями из доказательства теоремы 1, действующими на отрезке $[T_2+1, T_3]$ и не затрагивающими на нём остальных решений $Y_i(t) = \|Y_i(t)\|e_i$, $i \neq 2$, реализуем "временной показатель"

$\max\{t^{-1}\ln\|Y_2(t)\|\} \approx \Lambda_2$. Это решение, достаточно близко приближающееся к оси Ox_3 на отрезке $[T_3-1, T_3]$, укладываем на нём к моменту $t = T_3$ на эту ось. Далее оно определяется равенством

$$Y_2(t) = \|Y_2(T_3)\|e_3 e^{-\alpha_3(t-T_3)}, \quad t \in [T_3, T_{n+1}].$$

Методом математической индукции аналогичным образом построим все необходимые и, очевидно, линейно независимые решения (17) возмущённой системы (2) с $n\times n$-возмущением (3).

Докажем теперь отсутствие у системы (2), уже имеющей $n-1$ построенных решений (17) с отрицательными показателями (18), какого-либо решения $Y_n(t)$ также с отрицательным (и даже неположительным) показателем и линейно независимого со всеми решениями (17). Предположим противное – такое решение $Y_n(t)$ у системы (2) есть. Тогда для её фундаментальной системы решений $Y(t) = [Y_1(t), \ldots, Y_n(t)]$ и моментов $\tau(l) = T_1 + k(l)(n-1)$ с нечётными номерами $k(l)$, $l \in \mathbb{N}$, $k(l)/k(l+1) \to 0$ при $l \to \infty$, воспользуемся частным случаем оценки [7]:

$$\max_{j=\overline{1,n},} \|Y_j[\tau(l+1)]\| \times \prod_{j\neq p(l+1)} \|Y_j[\tau(l)]\| \geqslant$$

$$\geqslant C|\det Y[\tau(l)]| \times \|Y_2[\tau(l+1), \tau(l)]\|, \quad 0 < C = \text{const}, \quad l \in \mathbb{N}, \tag{20}$$

где $p(l+1) \in \{1, \ldots, n\}$ – номер, на котором реализуется максимум в последнем неравенстве, а $Y_2(t,\tau)$ – матрица Коши двумерной системы (см. утверждение в доказательстве теоремы 1). Вычислив логарифм от обеих частей неравенства (20), разделив их на $\tau(l+1)$ и затем перейдя к верхнему пределу от левой части при $l \to \infty$, на основании указанного утверждения и предположения получим противоречие $0 \geqslant -\lambda_0 > 0$.

Для завершения доказательства теоремы 2 осталось лишь применить изложенную в доказательстве теоремы 1 процедуру бесконечного сглаживания в точках разрыва матриц коэффициентов исходной и возмущённой систем с функцией $\varepsilon(t) = \exp(-t^2)$. Теорему 2 можно считать доказанной.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского (проект Ф20Р-005) и Российского (проект 20-57-00001Бел_а) фондов фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
2. *Perron O.* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Zeitschr. 1930. Bd. 32. Hf. 5. S. 703–728.
3. *Леонов Г.А.* Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. М.; Ижевск, 2006.
4. *Изобов Н.А., Ильин А.В.* Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 464–472.
5. *Изобов Н.А., Ильин А.В.* Построение счётного числа различных суслинских множеств характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1585–1589.
6. *Изобов Н.А., Мазаник С.А.* Об асимптотически эквивалентных линейных системах при экспоненциально убывающих возмущениях // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 2. С. 168–173.
7. *Изобов Н.А.* Оценка снизу для минимального показателя линейной системы // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 9. С. 1576–1588.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск,
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 09.04.2021 г.
После доработки 09.04.2021 г.
Принята к публикации 09.04.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1458–1463

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.938

НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ С ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ И ЛОКАЛИЗАЦИЯ АТТРАКТОРОВ

© 2021 г. А. П. Крищенко, К. Е. Старков

Для автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с дробно-рациональными правыми частями, для которых неотрицательный ортант положительно инвариантен, найдены достаточные условия существования нетривиальных локализирующих множеств, соответствующих координатным функциям. Установлены условия существования у таких систем аттрактора и исследовано его положение. Для систем, представляющих собой модели популяционной динамики, указана связь полученных результатов с условиями вымирания или выживания популяций.

DOI: 10.31857/S0374064121110030

Введение. Через $\mathbb{R}^n_{+,0}$ обозначим неотрицательный ортант пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. ортант, образованный точками с неотрицательными координатами: $\mathbb{R}^n_{+,0} = \{x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{т}} : x_i \geqslant 0, i = \overline{1,n}\}$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))^{\mathrm{т}}. \tag{1}$$

Далее считаем, что каждая функция $f_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, является дробно-рациональной, причём такой, что она представима в виде отношения двух многочленов со знаменателем, не имеющим нулей в $\mathbb{R}^n_{+,0}$. Раскладывая в этом представлении функции $f_i(x)$ числитель по степеням x_i, получаем, что

$$f_i(x) = x_i^{m_i}\frac{p_i(x)}{q_i(x)}, \quad p_i(x) = \sum_{j=0}^{n_i} p_{ij}(\hat{x}_i)x_i^j, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2}$$

где m_i – целое неотрицательное число, $q_i(x)$ – многочлен, принимающий положительные значения при $x \in \mathbb{R}^n_{+,0}$, а $p_i(x)$ – многочлен n_i-й степени по переменной x_i, коэффициенты которого $p_{ij}(\hat{x}_i)$, $j = \overline{0,n_i}$, являются многочленами переменной $\hat{x}_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)^{\mathrm{т}}$ и свободный член $p_{i0}(\hat{x}_i)$ ненулевой. Введём удобное в дальнейшем обозначение для отношения k-го и m-го коэффициентов многочлена $p_i(x)$: именно, положим $P^i_{km}(\hat{x}_i) \equiv p_{ik}(\hat{x}_i)/p_{im}(\hat{x}_i)$, $0 \leqslant k, m \leqslant n_i$.

Будем предполагать, что для системы (1) множество $\mathbb{R}^n_{+,0}$ положительно инвариантно. Для функций (2) это приводит к условию

$$f_i(x)\big|_{\{x_i=0\}\bigcap \mathbb{R}^n_{+,0}} \geqslant 0. \tag{3}$$

Поэтому в (2) для каждого значения i выполняется одно из двух условий: либо $m_i > 0$, либо $p_{i0}(\hat{x}_i) \geqslant 0$ при $\hat{x}_i \geqslant 0$, если $m_i = 0$.

К виду (1), (2) преобразуются математические модели роста раковой опухоли с учётом реакции иммунной системы [1, 2], развития рака поджелудочной железы [3, 4], динамики экологических систем [5], взаимодействия иммунной системы и раковых клеток [6–8], развития связанного со спидом рака [9], роста меланомы [10] и многие другие модели популяционной динамики.

В данной работе получены достаточные условия существования локализирующих множеств вида $\bigcap_{i=1}^n \{0 \leqslant x_i \leqslant a_i\}$ для инвариантных компактов и аттрактора системы (1)–(3).

1. Обозначения и определения. Все компактные инвариантные множества системы

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \tag{4}$$

содержащиеся в подмножестве $Q \subset \mathbb{R}^n$, лежат в *локализирующем множестве* $\Omega(\phi, Q)$ [11], соответствующем функции $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ (*локализирующей функции*) и множеству $Q \subset \mathbb{R}^n$ и определяемом равенством

$$\Omega(\phi, Q) = \{x \in Q : \phi_{\inf}(Q) \leqslant \phi(x) \leqslant \phi_{\sup}(Q)\}, \tag{5}$$

здесь

$$\phi_{\inf}(Q) = \inf\{\phi(x) : x \in S(\phi) \bigcap Q\}, \quad \phi_{\sup}(Q) = \sup\{\phi(x) : x \in S(\phi) \bigcap Q\},$$

а $S(\phi) = \{x \in \mathbb{R}^n : L_F\phi(x) = 0\}$ – *универсальное сечение функции* ϕ, $L_F\phi$ – производная Ли от функции $\phi(x)$ по направлению векторного поля системы (4). Очевидно, что производная $L_F\phi$ не имеет нулей в $Q \setminus \Omega(\phi, Q)$.

Локализирующие множества системы (4), построенные по множеству Q и функции $\phi(x)$, имеют следующие свойства [12–14].

Утверждение 1. *Если множество Q компактно и положительно инвариантно, то и локализирующее множество (5) компактно и положительно инвариантно.*

Утверждение 2. *Пусть множество Q положительно инвариантно и выполнены неравенства $L_F\phi > 0$ в $Q \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) < \phi_{\inf}(Q)\}$ и $L_F\phi < 0$ в $Q \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) > \phi_{\sup}(Q)\}$. Тогда любое расширение*

$$\Omega(\phi, Q, \varepsilon_-, \varepsilon_+) = \{x \in Q : \phi_{\inf}(Q) - \varepsilon_- \leqslant \phi(x) \leqslant \phi_{\sup}(Q) + \varepsilon_+\}, \quad \varepsilon_-, \varepsilon_+ > 0, \tag{6}$$

локализирующего множества (5) положительно инвариантно.

Утверждение 3. *Пусть выполняются следующие условия: множество Q положительно инвариантно; начинающиеся в Q траектории системы определены на неограниченном вправо временно́м интервале; для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $L_F\phi(x) < -\delta$ при $x \in Q \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n : \phi_{\sup}(Q) + \varepsilon_+ \leqslant \phi(x) \leqslant \phi_{\sup}(Q) + \varepsilon_+ + \varepsilon\}$; для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $L_F\phi(x) > \delta$ при $x \in Q \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n : \phi_{\inf}(Q) - \varepsilon_- - \varepsilon \leqslant \phi(x) \leqslant \phi_{\sup}(Q) - \varepsilon_-\}$. Тогда начинающиеся в $Q \setminus \Omega(\phi, Q, \varepsilon_-, \varepsilon_+)$ траектории системы (4) попадают в множество $\Omega(\phi, Q, \varepsilon_-, \varepsilon_+)$ (см. определение (6)) за конечное время.*

Последовательности $h_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $i \in \mathbb{N}$, локализирующих функций соответствуют итерационные последовательности локализирующих множеств вида (5)

$$K_0 = Q, \quad K_1 = \Omega(h_1, K_0), \quad \ldots, \quad K_i = \Omega(h_i, K_{i-1}), \quad \ldots \tag{7}$$

и расширенных локализирующих множеств

$$K'_0 = Q, \quad K'_1 = \Omega(h_1, K'_0, \varepsilon_{1-}, \varepsilon_{1+}), \quad \ldots, \quad K'_i = \Omega(h_i, K'_{i-1}, \varepsilon_{i-}, \varepsilon_{i+}), \quad \ldots \tag{8}$$

Множества (7), (8) содержат все компактные инвариантные множества, лежащие в множестве Q, и множества (8) положительно инвариантны, если положительно инвариантно множество Q.

2. Предварительные результаты. Обозначим через $S(\phi, Q)$ пересечение $S(\phi) \bigcap Q$, называемое универсальным сечением функции ϕ, соответствующим множеству Q.

Рассмотрим i-е уравнение системы (1)–(3).

Теорема 1. *Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n_{+,0}$ и старший коэффициент $p_{in_i}(\hat{x}_i)$ многочлена $p_i(x)$ не имеет нулей в Q. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. Если $n_i = 0$, $m_i = 0$ или $n_i = 0$, $m_i > 0$ и $\{x_i = 0\} \bigcap Q = \varnothing$, то система не имеет инвариантных компактов, содержащихся в Q.

2. Если $n_i = 0$, $m_i > 0$ и $\{x_i = 0\} \bigcap Q \neq \varnothing$, то все инвариантные компакты, принадлежащие множеству Q, содержатся в множестве $\{x_i = 0\} \bigcap Q$.

3. Если $n_i > 0$ и $A_i < +\infty$, где

$$A_i = \sup_{x \in Q} \max_{j = \overline{0, n_i - 1}} |P^i_{jn_i}(\hat{x}_i)|, \tag{9}$$

то все инвариантные компакты, принадлежащие множеству Q, содержатся в множестве

$$\{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant x_i \leqslant A_i + 1\} \bigcap Q. \tag{10}$$

Доказательство. Локализирующей функции $h = x_i$ и множеству Q соответствует универсальное сечение

$$S(h, Q) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x_i^{m_i} \sum_{j=0}^{n_i} p_{ij}(\hat{x}_i) x_i^j = 0\right\} \bigcap Q.$$

Если $S(h, Q) = \varnothing$, то система не имеет инвариантных компактов, содержащихся в Q. Именно этот случай реализуется при выполнении условий утверждения 1 теоремы.

В условиях утверждения 2 получаем, что $S(h, Q) = \{x_i = 0\} \bigcap Q \neq \varnothing$, $h_{\inf}(Q) = h_{\sup}(Q) = 0$ и все инвариантные компакты из Q содержатся в множестве $\Omega(h, Q)$, совпадающем с множеством $S(h, Q)$.

Пусть выполнены условия утверждения 3 теоремы и $m_i > 0$. Тогда $S(h, Q) = (\{x_i = 0\} \bigcup \{\sum_{j=0}^{n_i} p_{ij}(\hat{x}_i) x_i^j = 0\}) \bigcap Q \neq \varnothing$. Поэтому $h_{\inf}(Q) \geqslant 0$, а $h_{\sup}(Q) \leqslant \max\{0, \sup P_i\}$, где $P_i = \{x_i : \sum_{j=0}^{n_i} p_{ij}(\hat{x}_i) x_i^j = 0,\ \ x \in Q\}$. Множество P_i содержится в множестве неотрицательных корней многочлена

$$\sum_{j=0}^{n_i - 1} \frac{p_{ij}(\hat{x}_i)}{p_{in_i}(\hat{x}_i)} x_i^j + x_i^{n_i}$$

относительно переменной x_i, а значит, $\sup P_i \leqslant A_i + 1$. Следовательно, справедливо включение $\Omega(h, Q) \subset \{0 \leqslant x_i \leqslant A_i + 1\} \bigcap Q$, которое выполнено и в случаях $m_i = 0$, $n_i > 0$ и пустого множества $S(h, Q)$. Теорема доказана.

Следствие. *Если при $Q = \mathbb{R}^n_{+,0}$ для каждого $i = \overline{1, n}$ выполнено утверждение 2 или 3 теоремы 1, то все инвариантные компакты системы содержатся в параллелотопе*

$$\bigcap\nolimits_{i=1}^{i=n} \{0 \leqslant x_i \leqslant s_i\},$$

где $s_i = A_i + 1$ или $s_i = 0$.

Уточним утверждение 3 теоремы 1 при $n_i = 1, 2$, $Q = \mathbb{R}^n_{+,0}$ и отсутствии нулей в $\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}$ у старшего коэффициента $p_{in_i}(\hat{x}_i)$ многочлена $p_i(x)$. В случае $m_i = 0$ согласно условию (3) в $\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}$ выполнено неравенство $p_{i0}(\hat{x}_i) \geqslant 0$. Фиксируем локализирующую функцию $h = x_i$.

Рассмотрим случай $m_i = 0$, $n_i = 1$.

Если $p_{i1}(\hat{x}_i) > 0$ в $\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}$, то для функции $h = x_i$ универсальное сечение $S(h, \mathbb{R}^n_{+,0})$ совпадает с множеством $\{x_i = 0\} \bigcap \{p_{i0}(\hat{x}_i) = 0\} \bigcap \mathbb{R}^n_{+,0}$ и оказывается, что все инвариантные компакты содержатся в этом же множестве.

Если $p_{i1}(\hat{x}_i) < 0$ в $\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}$, то универсальное сечение $S(h, \mathbb{R}^n_{+,0})$ имеет вид

$$\{x \in \mathbb{R}^n_{+,0} : x_i = \psi_i(\hat{x}_i)\}, \quad \psi_i(\hat{x}_i) = -P^i_{01}(\hat{x}_i) \geqslant 0$$

и поэтому

$$h_{\inf}(\mathbb{R}^n_{+,0}) = \inf_{\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}} \psi_i(\hat{x}_i), \quad h_{\sup}(\mathbb{R}^n_{+,0}) = \sup_{\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}} \psi_i(\hat{x}_i).$$

Следовательно, все инвариантные компакты содержатся в локализирующем множестве

$$\Omega(h, \mathbb{R}^n_{+,0}) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \inf_{\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}} \psi_i(\hat{x}_i) \leqslant x_i \leqslant \sup_{\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}} \psi_i(\hat{x}_i)\right\} \bigcap \mathbb{R}^n_{+,0}. \tag{11}$$

Рассмотрим случай $m_i > 0$, $n_i = 1$. Универсальное сечение $S(h, \mathbb{R}^n_{+,0})$ совпадает с множеством $\{x_i = 0\} \bigcap \mathbb{R}^n_{+,0} \bigcup H$, где $H = \{x \in \mathbb{R}^n : p_{i0}(\hat{x}_i) + p_{i1}(\hat{x}_i) x_i = 0\} \bigcap \mathbb{R}^n_{+,0}$. Несложно заметить, что в этом случае

$$h_{\inf}(\mathbb{R}^n_{+,0}) = 0, \quad h_{\sup}(\mathbb{R}^n_{+,0}) \geqslant 0$$

и, более того, $h_{\sup}(\mathbb{R}^n_{+,0}) = \max\{0, \sup\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}} \psi_i(\hat{x}_i)\}$. Следовательно, все инвариантные компакты содержатся в локализирующем множестве

$$\Omega(h, \mathbb{R}^n_{+,0}) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant x_i \leqslant \max\left\{0, \sup_{\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}} \psi_i(\hat{x}_i)\right\}\right\} \bigcap \mathbb{R}^n_{+,0}. \tag{12}$$

В случае $m_i = 0$, $n_i = 2$ универсальное сечение функции h имеет вид

$$S(h, \mathbb{R}^n_{+,0}) = \{x \in \mathbb{R}^n : p_i(x) = p_{i0}(\hat{x}_i) + p_{i1}(\hat{x}_i)x_i + p_{i2}(\hat{x}_i)x_i^2 = 0\} \bigcap \mathbb{R}^n_{+,0}.$$

Если $p_{i2}(\hat{x}_i) > 0$ в $\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}$, то в $\mathbb{R}^n_{+,0}$ выполняется неравенство

$$p_i(x) \geqslant x_i(p_{i1}(\hat{x}_i) + p_{i2}(\hat{x}_i)x_i) > 0$$

для $x_i > \max\{0, -P^i_{12}(\hat{x}_i)\}$. Поэтому при

$$\sup_{\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}} -P^i_{12}(\hat{x}_i) < 0$$

находим, что $S(h, \mathbb{R}^n_{+,0}) = \{x \in \mathbb{R}^n : p_{i0}(\hat{x}_i) = 0; x_i = 0\} \bigcap \mathbb{R}^n_{+,0}$ и, если $S(h, \mathbb{R}^n_{+,0}) \neq \varnothing$, то имеет место равенство $h_{\sup}(\mathbb{R}^n_{+,0}) = 0$, а при

$$\sup_{\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}} -P^i_{12}(\hat{x}_i) \geqslant 0$$

выполнено неравенство

$$h_{\sup}(\mathbb{R}^n_{+,0}) \leqslant \sup_{\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}} -P^i_{12}(\hat{x}_i).$$

Следовательно, все инвариантные компакты содержатся в множестве

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant x_i \leqslant \max\left\{\sup_{\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}} -P^i_{12}(\hat{x}_i), 0\right\}\right\} \bigcap \mathbb{R}^n_{+,0}. \tag{13}$$

Если $p_{i2}(\hat{x}_i) < 0$ в $\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}$, то в $\{x_i \geqslant 1\} \bigcap \mathbb{R}^n_{+,0}$ справедливо неравенство

$$p_i(x) \leqslant x_i(p_{i0}(\hat{x}_i) + p_{i1}(\hat{x}_i) + p_{i2}(\hat{x}_i)x_i) < 0$$

для $x_i > \max\{1, -P^i_{02}(\hat{x}_i) - P^i_{12}(\hat{x}_i)\}$. Поэтому

$$h_{\sup}(\mathbb{R}^n_{+,0}) \leqslant \sup_{\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}} \max\{1, -P^i_{02}(\hat{x}_i) - P^i_{12}(\hat{x}_i)\}$$

и все инвариантные компакты содержатся в множестве

$$\left\{0 \leqslant x_i \leqslant \max\left\{1, \sup_{\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}} (-P^i_{02}(\hat{x}_i) - P^i_{12}(\hat{x}_i))\right\}\right\} \bigcap \mathbb{R}^n_{+,0}. \tag{14}$$

3. Существование ограниченного локализирующего множества. Для существования ограниченного локализирующего множества в виде параллелотопа

$$\bigcap\nolimits_{i=1}^n \{0 \leqslant a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\}, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

достаточно выполнения условий следствия. Эти условия содержат требование конечности точных верхних граней вида (9) при $Q = \mathbb{R}^n_{+,0}$. Аналогичное требование конечности точных верхних граней должно выполняться и в случае использования для некоторых значений i локализирующих множеств (11)–(14) вместо (10). Построение итерационной последовательности локализирующих множеств с использованием координатных локализирующих функций позволяет ослабить это требование. Действительно, при нахождении первого члена $K_1 = \Omega(h_1, K_0)$ итерационной последовательности для системы (1) экстремальные значения координатной локализирующей функции h_1 находятся на пересечении её универсального сечения с исходным множеством $K_0 = Q$, которое для системы (1) равно $\mathbb{R}^n_{+,0}$. В результате $K_1 = \Omega(h_1, K_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant h_{1\inf}(\mathbb{R}^n_{+,0}) \leqslant h_1(x) \leqslant h_{1\sup}(\mathbb{R}^n_{+,0})\} \bigcap \mathbb{R}^n_{+,0}$, и пусть функция h_1 такая, что $h_{1\sup}(\mathbb{R}^n_{+,0}) \in \mathbb{R}$, т.е. для первой функции h_1 выполняется требование конечности величины $h_{1\sup}(\mathbb{R}^n_{+,0})$. При нахождении k-го члена этой последовательности $K_k = \Omega(h_k, K_{k-1})$, $k > 1$, экстремальные значения локализирующей функции h_k находятся на пересечении её универсального сечения с предыдущим локализирующим множеством $K_{k-1} = \Omega(h_{k-1}, K_{k-2})$. Поэтому достаточно выполнения более слабого условия $h_{k\sup}(K_{k-1}) \in \mathbb{R}$. Пусть при каждом $k = \overline{2, n}$ координатная функция h_k такая, что все функции $h_1, \ \ldots, \ h_k$ попарно различны и $h_{k\sup}(K_{k-1}) \in \mathbb{R}$. Тогда приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть для системы (1) существует такой упорядоченный набор из n попарно различных координатных локализирующих функций*

$$h_1 = x_{i_1}, \quad \ldots, \quad h_n = x_{i_n}, \tag{16}$$

что все экстремальные значения $h_{i\sup}(K_{i-1})$, $i = \overline{1, n}$, конечны, где $K_0 = \mathbb{R}^n_{+,0}$, $K_i = \Omega(h_i, K_{i-1})$, $i = \overline{1, n-1}$. Тогда все инвариантные компакты системы, содержащиеся в K_0, лежат в ограниченном множестве $K_n = \Omega(h_n, K_{n-1})$.

В качестве примера укажем систему, рассмотренную в работе [15]. Она преобразуется к системе четвёртого порядка вида (1)–(3), где все $n_i = 1$, $m_2 = 1$, а остальные $m_i = 0$. Для этой системы условия теоремы 2 выполнены при $h_1 = x_2$, $h_2 = x_4$, $h_3 = x_1$ и $h_4 = x_3$.

4. Существование аттрактора. Теорема 2 утверждает существование ограниченного локализирующего множества для всех инвариантных компактов системы, которое имеет вид (15), но для существования в системе аттрактора необходимо ещё свойство ограниченности положительных полутраекторий системы. Установить это свойство можно с помощью проверки выполнения условий утверждения 3. Для этого локализирующим функциям (16) поставим в соответствие расширенные локализирующие множества вида (8), полагая

$$K_0' = \mathbb{R}^n_{+,0}, \quad K_k' = \Omega(h_{i_k}, K_{k-1}', 0, \varepsilon_k), \quad \varepsilon_k > 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Приходим к следующему следствию теоремы 2 и утверждения 3.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия: начинающиеся в $\mathbb{R}^n_{+,0}$ траектории системы (1)–(3) определены на неограниченном вправо временно́м интервале; существует такой упорядоченный набор из n попарно различных координатных локализирующих функций (16) и такие достаточно малые положительные ε_k, $k = \overline{1, n}$, что все экстремальные значения $h_{k\sup}(K_{k-1}')$, $k = \overline{1, n}$, конечны и для любого $k = \overline{1, n}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\dot{h}_k(x) < -\delta < 0$ при $x \in K_{k-1}' \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n : h_{k\sup}(K_{k-1}') + \varepsilon_k \leqslant h_k(x) \leqslant h_{k\sup}(K_{k-1}') + \varepsilon_k + \varepsilon\}$. Тогда все траектории системы попадают в ограниченное положительно инвариантное множество $\Omega(h_n, K_{n-1}', 0, \varepsilon_n)$ за конечное время и не выходят из него.*

5. Вымирание и выживание популяций. Важное значение для приложений [1–9] имеют условия на параметры системы, при которых происходит вымирание популяций или сохранение их численности (объёма) большим некоторой положительной величины, например, с некоторого момента времени при всех ненулевых начальных состояниях. Пусть в системе (1) переменная x_i характеризует объём популяции и решение $x(t) = x(t, x_0)$ соответствует начальному условию $x_0 = x(0, x_0)$. Тогда вымирание популяции означает выполнение условия $\lim\limits_{t\to+\infty} x_i(t) = 0$ для всех начальных условий с $x_i(0) > 0$, а выживание популяции – существование постоянной $c > 0$, для которой $\varliminf\limits_{t\to+\infty} x_i(t) > c$ при всех начальных условий с $x_i(0) > 0$.

Условие вымирания обычно находится с помощью доказательства асимптотической устойчивости в целом положения равновесия, принадлежащего множеству $\{x_i = 0\}$, или с помощью принципа инвариантности Ла-Салля. В последнем случае используется неположительность производной функции $V(x)$, например, $V(x) = x_i$, в положительно инвариантном множестве D, в которое все траектории системы попадают за конечное время. Для доказательства выживания достаточно установить существование такого $c > 0$, что любая траектория попадает за конечное время в множество $\{x_i > c\}$ и не выходит из него. В этом случае также часто используется положительно инвариантное множество D, в которое все траектории попадают за конечное время. При выполнении условий теоремы 3 в качестве D можно рассмотреть множество $\Omega(h_n, K'_{n-1}, 0, \varepsilon_n)$.

Заключение. Для изложения результатов использованы координатные локализирующие функции. Установлено, что возникающие локализирующие множества ограничены плоскостями, параллельными координатным плоскостям, что упрощает интерпретацию этих множеств.

Работа Крищенко А.П. выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-07-00296) и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 0705-2020-0047).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ku-Carrillo R.A., Delgadillo S.E., Chen-Charpentier B.M.* A mathematical model for the effect of obesity on cancer growth and on the immune system response // Appl Math. Model. 2016. V. 40. P. 4908–4920.
2. *Khajanchi S.* Uniform persistence and global stability for a brain tumor and immune system interaction // Biophys. Rev. and Lett. 2017. V. 12. № 4. P. 187–208.
3. *Louzoun Y., Xue C., Lesinski G.B, Friedman A.* A mathematical model for pancreatic cancer growth and treatments // J. Theor. Biol. 2014. V. 351. P. 74–82.
4. *Hu X., Ke G., Jang S. R.-J.* Modeling pancreatic cancer dynamics with immunotherapy // Bull. Math. Biol. 2019. V. 81. P. 1885–1915.
5. *Hastings A.* Transient dynamics and persistence of ecological systems // Ecology Lett. 2001. V. 4. P. 215–220.
6. *Kirschner D., Panetta J.C.* Modeling immunotherapy of the tumor-immune interaction // J. Math. Biol. 1998. V. 37. P. 235–252.
7. *De Pillis L.G., Radunskaya A.* The dynamics of an optimally controlled tumor model: a case study // Math. Comp. Model. 2003. V. 37. P. 1221–1244.
8. *Starkov K.E., Krishchenko A.P.* Ultimate dynamics of the Kirschner–Panetta model: Tumor eradication and related problems // Phys. Lett. A. 2017. V. 381. P. 3409–3416.
9. *Lou J., Ruggeri T., Ma Z.* Cycles and chaotic behavior in an AIDS-related cancer dynamic model in vivo // J. Biol. Systems. 2007. V. 15. P. 149–168.
10. *Kronik N., Kogan Y., Schlegel P.G., Wolfl M.* Improving T-cell immunotherapy for melanoma through a mathematically motivated strategy: efficacy in numbers? // J. Immunother. 2012. V. 35. P. 116–124.
11. *Крищенко А.П.* Локализация инвариантных компактов динамических систем // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 12. С. 1597–1604.
12. *Крищенко А.П.* Поведение траекторий автономных систем // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1445–1450.
13. *Крищенко А.П.* Локализация простой и сложной динамики в нелинейных системах // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 11. С. 1440–1447.
14. *Крищенко А.П.* Анализ асимптотической устойчивости автономных систем методом локализации инвариантных компактов // Докл. РАН. 2016. Т. 469. № 1. С. 17–20.
15. *Крищенко А.П., Тверская Е.С.* Поведение траекторий систем с неотрицательными переменными // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1439–1446.

Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана,
Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва,
Центр исследований и разработок
в области цифровых технологий (CITEDI)
Национального политехнического института,
г. Тихуана, Мексика

Поступила в редакцию 10.05.2021 г.
После доработки 10.05.2021 г.
Принята к публикации 05.10.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1464–1473

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНОГО ЭФФЕКТА ПЕРРОНА ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2021 г. А. В. Равчеев

Пусть $C\widetilde{\mathcal{M}}^n$ – класс n-мерных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывными на временно́й полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициентами, $n \geqslant 2$, а $\Lambda(A)$ – спектр показателей Ляпунова системы $A \in C\widetilde{\mathcal{M}}^n$ $(\Lambda(A) \in \overline{\mathbb{R}}^n$, где $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\bigsqcup\{-\infty,\infty\})$. Для заданных метрического пространства M, функции $\Theta \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ и каждой системы $A \in C\widetilde{\mathcal{M}}^n$ рассматривается класс $\mathcal{Q}^n[\Theta,A](M)$ таких параметрических возмущений $Q \in C(\mathbb{R}_+ \times M,\mathbb{R}^{n\times n})$ матрицы коэффициентов системы A, которые удовлетворяют оценке $\sup\{\|Q(t,\mu)\| : \mu \in M\} \leqslant C_Q \exp(-\Theta(t)t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, C_Q – постоянная (своя для каждой функции Q), и не уменьшают показатели Ляпунова системы A. Спектр $\Lambda(A+Q)$ показателей Ляпунова возмущённой системы является функцией $M \to \overline{\mathbb{R}}^n$ параметра μ. Получено полное описание класса пар $(\Lambda(A),\Lambda(A+Q))$, когда A пробегает класс $C\widetilde{\mathcal{M}}^n$, а матричнозначная функция Q при каждом A – класс $\mathcal{Q}^n[\Theta,A](M)$. Показано, в частности, что классы таких пар совпадают между собой, т.е. не зависят от выбора функции Θ.

DOI: 10.31857/S0374064121110042

Для заданного натурального $n \geqslant 2$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ множество линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами, а через $\mathcal{M}^n$ – его подмножество, состоящее из систем с ограниченными на временно́й полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициентами. Кроме того, через $C\widetilde{\mathcal{M}}^n$ и $C\mathcal{M}^n$ будем обозначать подмножества в $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ и $\mathcal{M}^n$ соответственно, образованные системами с непрерывными коэффициентами. Далее мы отождествляем систему (1) с матричнозначной функцией $A(\cdot)$ и пишем $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ и т.п.

Напомним, что *характеристическим показателем* вектор-функции $f : P \to \mathbb{R}^n$, заданной на неограниченном подмножестве P полуоси $\mathbb{R}_+$, называется величина (полагаем $\ln 0 = -\infty$)

$$\lambda[f] = \varlimsup_{P\ni t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln\|f(t)\|,$$

а *показателями Ляпунова* системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ – величины [1]

$$\lambda_i(A) = \inf_{L\in G_i(S(A))}\sup_{x\in L}\lambda[x], \quad i = \overline{1,n},$$

где $S(A)$ – векторное пространство решений системы (1), а $G_i(S(A))$ – множество его i-мерных подпространств. В наших обозначениях показатели Ляпунова нумеруются, в отличие от [1], в порядке неубывания. Набор $\Lambda(A) \equiv (\lambda_1(A),\ldots,\lambda_n(A))$ называется *спектром показателей Ляпунова* системы (1).

Так как мы не предполагаем коэффициенты рассматриваемых систем ограниченными на полуоси $\mathbb{R}_+$, их показатели Ляпунова могут, вообще говоря, принимать несобственные значения, т.е. являются точками расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R}\bigsqcup\{-\infty,+\infty\}$, которую наделим стандартным порядком и порядковой топологией. Если все показатели Ляпунова системы (1) конечны (что заведомо имеет место, если $A \in \mathcal{M}^n$), то они совпадают с величинами, определёнными в [2, § 3.1.3; 3, гл. III, § 4].

В работе [4] О. Перрон построил пример системы $A \in C\mathcal{M}^2$ и такой её непрерывной 2×2-матрицы-возмущения Q, экспоненциально убывающей к нулю на бесконечности, что каждый из показателей Ляпунова возмущённой системы $A + \mu Q$ при всех $\mu \neq 0$ принимает одно и то же значение, большее значения соответствующего показателя исходной системы A. Таким образом, в примере Перрона показатели Ляпунова являются ступенчатыми функциями параметра.

О. Перроном построен также [5] пример системы $A \in C\mathcal{M}^2$ с отрицательными показателями Ляпунова и такого её непрерывного возмущения $f : \mathbb{R}_+ \times G \to \mathbb{R}^2$ (G – окрестность нуля в $\mathbb{R}^2$) высшего порядка малости (т.е. $\|f(t,x)\|/\|x\| \rightrightarrows 0$ при $x \to 0$), что характеристический показатель любого имеющего в начальный момент $t = 0$ ненулевую первую компоненту решения возмущённой системы $\dot{x} = A(t)x + f(t,x)$ больше некоторого положительного числа, а характеристические показатели остальных решений совпадают со старшим показателем Ляпунова невозмущённой линейной системы.

Эти примеры Перрона послужили отправной точкой многочисленных исследований влияния различных классов линейных и нелинейных возмущений на показатели Ляпунова систем из $\mathcal{M}^n$, а результаты, полученные в этом направлении, составляют существенную часть современной теории показателей Ляпунова. Эффект скачкообразного изменения значений показателей Ляпунова системы из $\mathcal{M}^n$ при тех или иных "малых" её возмущениях назван в монографии [6, гл. 4] *эффектом Перрона*. Позднее, начиная с работы [7], это название – эффект Перрона – стало использоваться только применительно к ситуации (её, формально говоря, и рассмотрел О. Перрон), при которой возмущения не уменьшают показатели Ляпунова исходной системы (этой терминологии мы и следуем в дальнейшем). В отличие от [6, 7], в которых эффект Перрона, как в работе [5], рассматривался при возмущениях высшего порядка малости, мы в соответствии с работой [4] рассматриваем линейные убывающие (в частности, экспоненциально) к нулю возмущения матриц коэффициентов систем из $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ и в этом случае называем, следуя работе [8], эффект Перрона *линейным*.

Перейдём к более общей ситуации. Пусть M – метрическое пространство. Рассмотрим семейство линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t,\mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

зависящих от параметра $\mu \in M$, такое, что при каждом $\mu \in M$ система (2) имеет непрерывные коэффициенты. Зафиксировав $i = \overline{1,n}$ и поставив каждому $\mu \in M$ в соответствие i-й показатель Ляпунова системы (2), получим функцию $\lambda_i(\cdot\,; A) : M \to \overline{\mathbb{R}}$, которая называется i-м *показателем Ляпунова семейства* (2). Функция $\Lambda(\cdot\,; A) \equiv (\lambda_1(\cdot\,; A), \ldots, \lambda_n(\cdot\,; A))$ называется *спектром показателей Ляпунова* того же семейства.

Вопрос о возможном характере зависимости показателей Ляпунова от параметра поставлен В.М. Миллионщиковым в работе [9]. В этой же работе установлено, что если отображение $A : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывно, то каждый из показателей Ляпунова семейства (2) принадлежит классу функций, представимых в виде поточечного предела убывающей последовательности функций первого класса Бэра. В монографии [10, § 37] установлено, что указанный класс функций допускает и другое описание: это в точности те функции $M \to \overline{\mathbb{R}}$, для которых прообраз любого луча $[r, +\infty]$, $r \in \mathbb{R}$, является G_δ-множеством (отметим, что в [10] рассматриваются только $\mathbb{R}$-значные функции; к таким функциям при помощи сохраняющего порядок гомеоморфизма $\overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$ сводится рассматриваемая нами ситуация $\overline{\mathbb{R}}$-значных функций, см. [11]). Следуя [10], будем обозначать этот класс функций $({}^*, G_\delta)$.

В работе [12] для каждого метрического пространства M получено полное описание спектров показателей Ляпунова $\Lambda(\cdot\,; A)$, отвечающих семействам (2) с непрерывной функцией $A(\,\cdot\,,\cdot\,)$, которая ограничена при каждом $\mu \in M$, а в работе [11] аналогичное описание получено для семейств с произвольной непрерывной функцией $A(\,\cdot\,,\cdot\,)$, именно, доказано, что функция $F = (f_1, \ldots, f_n) : M \to (\overline{\mathbb{R}})^n$ является спектром показателей Ляпунова некоторого семейства (2) с непрерывной функцией $A(\cdot,\cdot)$ тогда и только тогда, когда её компоненты удовлетворяют условию $f_1 \leqslant \ldots \leqslant f_n$ и принадлежат классу $(^*, G_\delta)$. Условимся обозначать класс всех таких функций F через $\mathfrak{G}^n(M)$.

Для заданной функции $\Theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ через $\mathcal{Q}^n[\Theta](M)$ обозначим класс непрерывных по совокупности переменных матричнозначных функций $Q(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$, каждая из которых для некоторого числа $C_Q > 0$ удовлетворяет условию

$$\sup_{\mu\in M} \|Q(t,\mu)\| \leqslant C_Q e^{-\Theta(t)t}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

В работе [13] для каждых метрического пространства M и $i \in \{1,\ldots,n\}$ получено полное описание класса

$$\Big\{\lambda_i(\cdot\,; A+Q) : A \in C\mathcal{M}^n, \ \ Q \in \bigcup_{\sigma\in(0,+\infty)} \mathcal{Q}^n[\sigma](M)\Big\},$$

а в работе [14] – класса

$$\Big\{\Lambda(\cdot\,; A+Q) : A \in C\mathcal{M}^n, \ \ Q \in \bigcup_{\sigma\in(0,+\infty)} \mathcal{Q}^n[\sigma](M)\Big\}.$$

Последний состоит из всех ограниченных функций $F \in \mathfrak{G}^n(M)$. Отметим, что в силу теоремы Богданова–Гробмана [15, 16] для всякой системы $A \in \mathcal{M}^n$ существует такое число $\sigma_0 > 0$, что при всех $\sigma > \sigma_0$ и $\mu \in M$ спектры показателей Ляпунова систем $A(\cdot)$ и $A(\cdot) + Q(\cdot,\mu)$, если $Q \in \mathcal{Q}^n[\sigma](M)$, совпадают между собой. Для систем с неограниченными коэффициентами это уже не имеет места – в работе [17] построена такая система $A \in C\widetilde{\mathcal{M}}^n$, что для любого метрического пространства M класс $\{\Lambda(\cdot\,; A+Q) : Q \in \mathcal{Q}^n[3^{-1}\ln t](M)\}$ совпадает с классом $\mathfrak{G}^n(M)$, т.е. на таких – убывающих быстрее всякой экспоненты – параметрических возмущениях реализуется любой возможный для семейства (2) с непрерывными коэффициентами спектр показателей Ляпунова.

Для каждой системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ через $\mathcal{Q}^n[\Theta, A](M)$ обозначим подкласс класса $\mathcal{Q}^n[\Theta](M)$, состоящий из тех возмущений, которые не уменьшают её показателей Ляпунова, т.е. для любых системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ и её возмущения $Q \in \mathcal{Q}^n[\Theta, A](M)$ при всех $i = \overline{1,n}$ и $\mu \in M$ выполняется неравенство $\lambda_i(\mu; A+Q) \geqslant \lambda_i(A)$. Очевидно, что для любой системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ класс $\mathcal{Q}^n[\Theta, A](M)$ не пуст, поскольку ему принадлежит тождественно нулевая матрица.

Ставится задача полного дескриптивно-множественного описания для каждых $n \geqslant 2$ и метрического пространства M класса пар $(\Lambda(A), \Lambda(\cdot\,; A+Q))$, составленных из спектра $\Lambda(A)$ системы A и функции $\Lambda(\cdot\,; A+Q)$, когда A пробегает множество $C\widetilde{\mathcal{M}}^n$, а матричнозначная функция Q при каждом A – класс $\mathcal{Q}^n[\Theta, A](M)$, т.е. класса

$$\Pi^n[\Theta](M) = \{(\Lambda(A), \Lambda(\cdot\,; A+Q)) : A \in C\widetilde{\mathcal{M}}^n, \ \ Q \in \mathcal{Q}^n[\Theta, A](M)\}.$$

Другими словами, требуется получить описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях систем с неограниченными коэффициентами. Отметим, что полное описание линейного эффекта Перрона для систем с ограниченными коэффициентами, т.е. описание класса пар

$$\Big\{(\Lambda(A), \Lambda(\cdot\,; A+Q)) : A \in C\mathcal{M}^n, \ \ Q \in \bigcup_{\sigma\in(0,+\infty)} \mathcal{Q}^n[\sigma, A](M)\Big\},$$

составленного из спектра исходной системы с ограниченными непрерывными коэффициентами и спектра возмущённой системы с параметрическим возмущением, экспоненциально убывающим к нулю на бесконечности и не уменьшающим значений показателей Ляпунова исходной системы, получено в работе [8].

Решение поставленной выше задачи содержит

Теорема. *Пусть* $n \geqslant 2$, M – *метрическое пространство, а* $\Theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ – *непрерывная функция. Пара* $(l, F(\cdot))$, *где* $l = (l_1, \ldots, l_n) \in (\overline{\mathbb{R}})^n$ *и* $F(\cdot) = (f_1(\cdot), \ldots, f_n(\cdot)) : M \to (\overline{\mathbb{R}})^n$, *тогда и только тогда принадлежит классу* $\Pi^n[\Theta](M)$, *когда выполняются следующие условия: 1)* $l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_n$, *2)* $f_i(\mu) \geqslant l_i$ *для всех* $\mu \in M$ *и* $i = \overline{1, n}$, *3) функция* $F(\cdot)$ *принадлежит классу* $\mathfrak{G}^n(M)$.

Для доказательства теоремы нам потребуются четыре леммы, первые три из которых хорошо известны и легко доказываются (см. [17]), а четвёртая установлена в работе [18, лемма 2].

Лемма 1. *Пусть система (1) на полуинтервале* $[c, d) \subset (0, +\infty)$ *диагональна и имеет постоянные коэффициенты. Тогда для каждого* $i = \overline{1, n}$ *и любого решения* $x(\cdot)$ *этой системы функция* $\chi_i^x : [c, d] \to \mathbb{R} \bigsqcup \{-\infty\}$, *задаваемая равенством* $\chi_i^x(t) = t^{-1} \ln |x_i(t)|$, $t \in [c, d]$, *монотонна (вообще говоря, нестрого).*

Лемма 2. *Пусть* $P \subset \mathbb{R}_+$ – *неограниченное множество. Тогда для любой вектор-функции* $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))^{\mathrm{T}} : P \to \mathbb{R}^n$ *справедливо равенство* $\lambda[x] = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda[x_i]$.

Следуя [19, глава IV, § 2], скажем, что системы $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ *слабо ляпуновски эквивалентны*, если существуют фундаментальные матрицы $X(\cdot)$ и $Y(\cdot)$ этих систем, удовлетворяющие условию
$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} (\|L(t)\| + \|L^{-1}(t)\|) < \infty, \quad \text{где} \quad L(t) = Y(t) X^{-1}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3}$$
Нетрудно убедиться, что введённое отношение (слабой ляпуновской эквивалентности) является отношением эквивалентности на $\widetilde{\mathcal{M}}^n$. Отметим, что на множестве $\mathcal{M}^n$ отношения классической ляпуновской эквивалентности [2, § 18.2] и слабой ляпуновской эквивалентности совпадают между собой: если выполнено условие (3) и коэффициенты одной из рассматриваемых систем ограничены, то дополнительное условие $\sup\{\|\dot{L}(t)\| : t \in \mathbb{R}_+\} < \infty$ (производная вычисляется в тех точках, где она определена) равносильно [2, § 18.2] ограниченности коэффициентов другой системы. Заметим также, что в работе [20] используется другое, не равносильное нашему, определение слабой ляпуновской эквивалентности.

Лемма 3. *Если системы* $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ *и* $B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ *слабо ляпуновски эквивалентны, то их одноимённые показатели Ляпунова одинаковы:* $\lambda_i(A) = \lambda_i(B)$, $i = \overline{1, n}$.

Лемма 4. *Пусть системы* $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ *удовлетворяют условию*
$$\max\{\|A(t)\|, \|B(t)\|\} \leqslant f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$
где $f : \mathbb{R}_+ \to (0, +\infty)$ – *непрерывная функция, для которой интеграл* $\int_0^{+\infty} f(s)\, ds$ *расходится. Тогда если величина*
$$\left\| \int\limits_t^{+\infty} (B(s) - A(s))\; ds \right\| \exp\left(3 \int\limits_0^t f(s)\, ds\right), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$
ограничена, то системы A *и* B *слабо ляпуновски эквивалентны.*

Доказательство теоремы. 1. Установим сначала необходимость условий теоремы. Условия 1), 2) вытекают непосредственно из определений, а условие 3) – из [9, леммы 6–9] (см. также [11, следствие 1]).

2. Для доказательства достаточности воспользуемся подходящей модификацией построения, предложенного в работе [8]. Без ограничения общности можно считать, что функция Θ положительна, возрастает и не ограничена сверху (в противном случае заменим её функцией $t \mapsto e^t + \max\limits_{s \in [0, t]} |\Theta(s)|$, $t \in \mathbb{R}_+$).

Определим последовательность T_m^j, $m \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \bigsqcup \{0\}$, $j = \overline{0, 6}$, целых неотрицательных чисел рекуррентно равенствами $T_0^0 = 0$ и
$$T_{m+1}^0 = T_m^6, \quad T_m^j = T_m^{j-1} + \begin{cases} 1, & \text{если} \;\; j = 2, 5, \\ 2^{m+1}, & \text{если} \;\; j = 1, 3, 4, 6, \end{cases} \qquad m \in \mathbb{N}_0, \qquad j = \overline{1, 6}.$$

Нетрудно убедиться, что $T_m^0 = 4(2^{m+1}-2)+2m,\ m\in\mathbb{N}_0$.

Пусть функция $F(\cdot)=(f_1(\cdot),\ldots,f_n(\cdot))$ и набор $l=(l_1,\ldots,l_n)$ удовлетворяют условиям 1)–3), причём l не имеет конечных отрицательных компонент, т.е. для любого $i=\overline{1,n}$ имеем либо $l_i\geqslant 0$, либо $l_i=-\infty$. В силу [21] (см. также [11, следствие 2]) для каждого $i=\overline{1,n}$ существует последовательность непрерывных функций $f_m^i: M\to\mathbb{R},\ m\in\mathbb{N}_0$, такая, что справедливо представление

$$f_i(\mu)=\overline{\lim_{m\to\infty}}\, f_m^i(\mu),\quad \mu\in M.$$

Для каждых $m\in\mathbb{N}_0$ и $i=\overline{1,n}$ положим $\Theta_m=\Theta(T_{m+1}^0)$, $l_i^m=\min\{\max\{l_i,-\Theta_m\},\Theta_m\}$ и $L_i^m=\sum_{k=0}^{m-1} l_i^k(T_{k+1}^0-T_k^0)$. Так как $\Theta_m\to+\infty$ при $m\to\infty$, то, заменяя в случае необходимости функцию f_m^i функцией $\min\{f_m^i,\Theta_m\}$, можно считать, что $f_m^i(\mu)\leqslant\Theta_m$ при всех $m\in\mathbb{N}_0$, $i=\overline{1,n}$ и $\mu\in M$. Определим функцию $\sigma_m: M\to\mathbb{R}$ равенством

$$\sigma_m(\mu)=(L_{\theta(m)}^m+35\Theta_m 2^{m+1}-f_{\max\{q,0\}}^{\theta(m)}(\mu)T_m^3)/T_m^2,\quad \mu\in M,$$

где $q=(m-\theta(m))/n$, а функция $\theta:\mathbb{N}_0\to\{1,\ldots,n\}$ задаётся условием $\theta(m)\equiv m \pmod n$.

3. Для упрощения дальнейшей записи через $\Delta_m^j,\ m\in\mathbb{N}_0,\ j=\overline{1,6}$, условимся обозначать полуинтервал $[T_m^{j-1},T_m^j)$, через Δ_m – полуинтервал $[T_m^0,T_{m+1}^0)$, а через $\bar\Delta_m^j$ и $\bar\Delta_m$ – соответствующие отрезки.

Следуя [8], для каждой тройки чисел $\alpha=(a,b,c)^{\mathrm{т}}\in\mathbb{R}^3$ определим на отрезке $\bar\Delta_m$ матричнозначную функцию $A[\alpha;m]$ при помощи равенства

$$A[\alpha;m](t)=\begin{cases}\operatorname{diag}[-c,-2c] & \text{при}\ \ t\in\Delta_m^1\bigsqcup\Delta_m^4,\\ O_2 & \text{при}\ \ t\in\Delta_m^2\bigsqcup\Delta_m^5,\\ \operatorname{diag}[c,2c] & \text{при}\ \ t\in\Delta_m^3,\\ \operatorname{diag}[a+c,b+2c] & \text{при}\ \ t\in\bar\Delta_m^6.\end{cases}$$

Для матрицы Коши $X_{A[\alpha;m]}(\,\cdot\,,\cdot\,)$ системы

$$\dot x=A[\alpha;m](t)x,\quad x=(x_1,x_2)^{\mathrm{т}}\in\mathbb{R}^2,\quad t\in\bar\Delta_m,$$

непосредственными вычислениями получаем соотношения

$$X_{A[\alpha;m]}(T_m^1,T_m^0)=X_{A[\alpha;m]}(T_m^2,T_m^0)=X_{A[\alpha;m]}(T_m^4,T_m^0)=X_{A[\alpha;m]}(T_m^5,T_m^0)=\operatorname{diag}[e^{-cd_m},e^{-2cd_m}],$$

$$X_{A[\alpha;m]}(T_m^3,T_m^0)=E_2,\quad X_{A[\alpha;m]}(T_m^6,T_m^0)=\operatorname{diag}[e^{ad_m},e^{bd_m}], \tag{4}$$

где обозначено $d_m=2^{m+1}$, а E_2 – единичная 2×2-матрица.

Для всякого $\sigma>0$ определим на отрезке $\bar\Delta_m$ матричнозначную функцию $Q[\sigma;m]$ при помощи равенства

$$Q[\sigma;m](t)=\begin{cases}\begin{pmatrix}0 & 0\\ (-1)^j e^{-\sigma T_m^2} & 0\end{pmatrix} & \text{при}\ \ t\in\Delta_m^j,\quad j\in\{2,5\},\\ O_2 & \text{при остальных}\ \ t\in\bar\Delta_m,\end{cases}$$

где O_2 – нулевая 2×2-матрица. Положим $C[\alpha,\sigma;m]=A[\alpha;m]+Q[\sigma;m]$. Тогда для матрицы Коши $X_{C[\alpha,\sigma;m]}(\,\cdot\,,\cdot\,)$ системы

$$\dot x=C[\alpha,\sigma;m](t)x,\quad x=(x_1,x_2)^{\mathrm{т}}\in\mathbb{R}^2,\quad t\in\bar\Delta_m,$$

непосредственными вычислениями получаем соотношения

$$X_{C[\alpha,\sigma;m]}(T_m^1,T_m^0)=X_{C[\alpha,\sigma;m]}(T_m^5,T_m^0)=\operatorname{diag}[e^{-cd_m},e^{-2cd_m}],$$

$$X_{C[\alpha,\sigma;m]}(T_m^2,T_m^0)=X_{C[\alpha,\sigma;m]}(T_m^4,T_m^0)=\begin{pmatrix} e^{cd_m} & 0\\ e^{-\sigma T_m^2-cd_m} & e^{-2cd_m}\end{pmatrix},$$

$$X_{C[\alpha,\sigma;m]}(T_m^3,T_m^0)=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ e^{cd_m-\sigma T_m^2} & 1\end{pmatrix},\quad X_{C[\alpha,\sigma;m]}(T_m^6,T_m^0)=\operatorname{diag}[e^{ad_m},e^{bd_m}]. \tag{5}$$

4. Построим кусочно-постоянную матричнозначную функцию $\widetilde{A}(\cdot)\in\widetilde{\mathcal{M}}^n$ и семейство кусочно-постоянных матричнозначных функций $\widetilde{Q}(\,\cdot\,,\mu),\ \mu\in M,$ со следующими свойствами: 1) функция $\widetilde{Q}(\,\cdot\,,\cdot\,)$ принадлежит классу $\mathcal{Q}^n[\Theta](M)$; 2) все точки разрыва функций $\widetilde{A}(\cdot)$ и $\widetilde{Q}(\,\cdot\,,\mu),\ \mu\in M,$ содержатся в множестве $\{T_m^j: m\in\mathbb{N}_0,\ \ j=\overline{1,6}\}$; 3) спектр $\Lambda(\widetilde{A})$ показателей Ляпунова системы $\widetilde{A}$ совпадает с набором l; 4) спектр $\Lambda(\cdot\,;\widetilde{A}+\widetilde{Q})$ показателей Ляпунова семейства $\widetilde{A}+\widetilde{Q}$ совпадает с функцией $F(\cdot)$.

4.1. Для каждого $m\in\mathbb{N}_0$ определим на полуинтервале Δ_m систему $\widetilde{A}(\cdot)$ равенствами

$$\dot{x}_j=l_j^m x_j,\quad \text{если}\quad j\notin\{\theta(m),\theta(m+1)\}, \tag{6}$$

$$\dot{y}=A[((4+2^{-m})l^m_{\theta(m)},(4+2^{-m})l^m_{\theta(m+1)},35\Theta_m)^{\mathrm{T}};m](t)y, \tag{7}$$

а систему $\widetilde{Q}(\,\cdot\,,\mu)$ при всяком $\mu\in M$ – равенствами

$$\dot{x}_j=0,\quad \text{если}\quad j\notin\{\theta(m),\theta(m+1)\}, \tag{8}$$

$$\dot{y}=Q[\sigma_m(\mu);m](t)y. \tag{9}$$

В равенствах (7) и (9) обозначено $y=(x_{\theta(m)},x_{\theta(m+1)})^{\mathrm{T}}$. Так как $\bigsqcup_{m\in\mathbb{N}_0}\Delta_m=\mathbb{R}_+,$ то системы $\widetilde{A}(\cdot)$ и $\widetilde{Q}(\,\cdot\,,\mu),\ \mu\in M,$ заданы на всей временно́й полуоси.

Для доказательства свойства 1) заметим, что при всех $m\in\mathbb{N}_0$ и $\mu\in M$ справедливы неравенства $4T_m^2>T_{m+1}^0$ и $\sigma_m(\mu)>4\Theta_m$. Поэтому если $t\in\bar{\Delta}_m$ для некоторого $m\in\mathbb{N}_0,$ то

$$\|Q(t,\mu)\|\leqslant e^{-\sigma_m(\mu)T_m^2}\leqslant e^{-\sigma_m(\mu)tT_m^2/T_{m+1}^0}\leqslant e^{-\sigma_m(\mu)t/4}\leqslant e^{-\Theta_m t}\leqslant e^{-\Theta(t)t},\quad \mu\in M.$$

Свойство 2) выполнено по построению.

4.2. Зафиксируем $\mu\in M$ и вычислим показатели Ляпунова системы $\widetilde{C}(\,\cdot\,,\mu)\equiv\widetilde{A}(\cdot)+\widetilde{Q}(\,\cdot\,,\mu)$. С этой целью для каждого $i=\overline{1,n}$ найдём характеристический показатель решения $x^i(\cdot)$ этой системы, задаваемого начальным условием $x^i(0)=e^i,$ где e^i – i-й единичный вектор пространства $\mathbb{R}^n$. Если $j\in\{1,\ldots,n\}$ не совпадает ни с одним из чисел i и $\theta(i+1),$ то из задания систем (6)–(9) вытекает, что j-я координата решения $x^i(\cdot)$ тождественно равна нулю. Таким образом, имеем $\|x^i(t)\|=\|z^i(t)\|\equiv\|(x_i^i(t),x^i_{\theta(i+1)}(t))^{\mathrm{T}}\|$ при всех $t\in\mathbb{R}_+$ и, стало быть, справедливо равенство $\lambda[x^i]=\lambda[z^i]$.

Зададим функции $\chi_k^i:(0,+\infty)\to\mathbb{R}\bigsqcup\{-\infty\},\ k=1,2,$ равенством $\chi_k^i(t)=t^{-1}\ln|z_k^i(t)|,$ $t>0$. Заметим, что если $i\neq\theta(m),$ то функция $z_2^i(\cdot)$ тождественно равна нулю на каждом из отрезков $\bar{\Delta}_m^2$ и $\bar{\Delta}_m^5,$ а функция $\chi_1^i(\cdot)$ монотонна на них по лемме 1, поскольку функция $z_1^i(\cdot)$ удовлетворяет на соответствующих полуинтервалах автономному уравнению. Если же $i=\theta(m),$ то на каждом из промежутков Δ_m^2 и Δ_m^5 вектор-функция $z^i(\cdot)$ удовлетворяет системе (9), отсюда, учитывая, что $\|Q[\sigma_m(\mu);m](t)\|\leqslant1,\ \ t\in\bar{\Delta}_m,$ получаем двустороннюю оценку

$$\|z^i(T_m^{j-1})\|\exp(-(t-T_m^{j-1}))\leqslant\|z^i(t)\|\leqslant\|z^i(T_m^{j-1})\|\exp(t-T_m^{j-1}),\quad t\in\bar{\Delta}_m^j,\quad j=2,5.$$

Принимая во внимание, что каждый из отрезков $\bar{\Delta}_m^j,\ \ j=2,5,$ имеет длину 1, приходим к выводу, что при вычислении характеристического показателя $\lambda[z^i]$ вместо отрезков $\bar{\Delta}_m^j,\ \ j=2,5,\ \ m\in\mathbb{N}_0,$ достаточно рассмотреть только их левые концы. Таким образом, справедливо равенство $\lambda[z^i]=\lambda[z^i|_{\mathrm{T}}],$ где $\mathrm{T}=\bigcup_{m\in\mathbb{N}_0}(\bar{\Delta}_m^1\bigcup\bar{\Delta}_m^3\bigcup\bar{\Delta}_m^4\bigcup\bar{\Delta}_m^6)$.

Система $\widetilde{C}(\cdot\,,\mu)$ является диагональной и имеет постоянные коэффициенты на каждом из промежутков Δ_m^j, $j=1,3,4,6$, $m\in\mathbb{N}_0$, значит, по лемме 1 функции χ_k^i, $k=1,2$, монотонны на соответствующих отрезках. Следовательно, при вычислении их верхних пределов при $t\to\to+\infty$ по множеству T, т.е. показателей $\lambda[z_k^i|_{\mathrm{T}}]$, $k=1,2$, достаточно ограничиться концами этих отрезков. Если $i\notin\{\theta(m),\theta(m+1)\}$, то функция $z_1^i(\cdot)$ на промежутке Δ_m удовлетворяет уравнению (6), поэтому по лемме 1 функция $\chi_1^i(\cdot)$ монотонна на отрезке $\bar{\Delta}_m$, а функция $\chi_2^i(\cdot)$ в силу (6)–(9) тождественно равна $-\infty$ на том же отрезке. Из сказанного выше следует, что при вычислении показателей $\lambda[z_k^i|_{\mathrm{T}}]$, $k=1,2$, достаточно рассмотреть множество $\widetilde{\mathrm{T}}$, состоящее из точек T_m^j, $j=0,1,3,4$, для тех $m\in\mathbb{N}_0$, для которых одно из чисел $m-i$ или $m-i+1$ кратно n, и точек T_m^0 для всех остальных значений m. Подытоживая предыдущие рассуждения и применяя лемму 2, получаем

$$\lambda[z^i]=\lambda[z^i|_{\mathrm{T}}]=\max\{\lambda[z_1^i|_{\mathrm{T}}],\lambda[z_2^i|_{\mathrm{T}}]\}=\max\{\lambda[z_1^i|_{\widetilde{\mathrm{T}}}],\lambda[z_2^i|_{\widetilde{\mathrm{T}}}]\}.$$

Из последнего равенства в (5) и задания систем (6)–(9) вытекает, что для i-й компоненты любого решения $x(\cdot)$ рассматриваемой системы при всех $m\in\mathbb{N}_0$ выполнено соотношение $x_i(T_{m+1}^0)=x_i(T_m^0)\exp(l_i^m(T_{m+1}^0-T_m^0))$, из которого следует, что

$$x_i(T_m^0)=\exp(L_i^m)x_i(0),\quad m\in\mathbb{N}_0. \tag{10}$$

В частности,

$$z^i(T_m^0)=\exp(L_i^m)(1,0)^{\mathrm{T}},\quad m\in\mathbb{N}_0. \tag{11}$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{m\to\infty}(1/T_m^0)\ln\|z^i(T_m^0)\|=\varlimsup_{m\to\infty}L_i^m/T_m^0=l_i.$$

Положим $m_q^i=qn+i$, $q\in\mathbb{N}_0$, $i=\overline{1,n}$. Из равенств (5), (11) и оценки $L_i^m\leqslant\Theta_mT_m^0$ вытекают соотношения

$$\varlimsup_{q\to\infty}(1/T^1_{m_q^i})\ln\|z^i(T^1_{m_q^i})\|=\varlimsup_{q\to\infty}(L_i^{m_q^i}-35\Theta_{m_q^i}2^{m_q^i+1})/T^1_{m_q^i}=-\infty,$$

$$\varlimsup_{q\to\infty}(1/T^4_{m_q^i})\ln|z_2^i(T^4_{m_q^i})|\leqslant\varlimsup_{q\to\infty}(1/T^4_{m_q^i})\ln|z_1^i(T^4_{m_q^i})|=\varlimsup_{q\to\infty}(L_i^{m_q^i}-35\Theta_{m_q^i}2^{m_q^i+1})/T^4_{m_q^i}=-\infty,$$

$$\varlimsup_{q\to\infty}(1/T^3_{m_q^i})\ln|z_2^i(T^3_{m_q^i})|=\varlimsup_{q\to\infty}(L_i^{m_q^i}+35\Theta_{m_q^i}2^{m_q^i+1}-\sigma_{m_q^i}(\mu)T^2_{m_q^i})/T^3_{m_q^i}=\varlimsup_{q\to\infty}f_q^i(\mu)=f_i(\mu),$$

$$\varlimsup_{q\to\infty}(1/T^3_{m_q^i})\ln|z_1^i(T^3_{m_q^i})|=\varlimsup_{q\to\infty}L_i^{m_q^i}/T^3_{m_q^i}\leqslant l_i,$$

$$\varlimsup_{q\to\infty}(1/T^1_{m_q^i-1})\ln\|z^i(T^1_{m_q^i-1})\|=\varlimsup_{q\to\infty}(L_i^{m_q^i-1}-35\Theta_{m_q^i-1}2^{m_q^i+1})/T^1_{m_q^i-1}=-\infty,$$

$$\varlimsup_{q\to\infty}(1/T^4_{m_q^i-1})\ln\|z^i(T^4_{m_q^i-1})\|=\varlimsup_{q\to\infty}(L_i^{m_q^i-1}-35\Theta_{m_q^i-1}2^{m_q^i+1})/T^4_{m_q^i-1}=-\infty,$$

$$\varlimsup_{q\to\infty}(1/T^3_{m_q^i-1})\ln\|z^i(T^3_{m_q^i-1})\|=\varlimsup_{q\to\infty}L_i^{m_q^i-1}/T^3_{m_q^i-1}\leqslant l_i.$$

В силу приведённых выше соотношений и неравенства $f_i(\mu)\geqslant l_i$ получаем, что $\lambda[z^i]=f_i(\mu)$. Таким образом, $\lambda[x^i]=f_i(\mu)$.

4.3. Для каждого $i=\overline{1,n}$ положим $\mathrm{S}_i=\{T^3_{m_q^i}:q\in\mathbb{N}_0\}$. В силу п. 4.2 справедливы равенства

$$\lambda[x^i]=\lambda[x^i|_{\mathrm{S}_i}]=f_i(\mu),\quad\lambda[x^k|_{\mathrm{S}_i}]\leqslant l_k,\quad k=\overline{1,n},\quad k\neq i.$$

Рассуждая так же, как в доказательстве теоремы работы [8], устанавливаем нормальность [22] базиса $x^1(\cdot),\ldots,x^n(\cdot)$ решений системы $\widetilde{C}(\cdot\,,\mu)$. Таким образом, $\lambda[x^i]$, $i=\overline{1,n}$, – показатели Ляпунова системы $\widetilde{C}(\cdot\,,\mu)$. С учётом п. 4.2 имеем равенство $\Lambda(\mu;\widetilde{C})=F(\mu)$.

4.4. Вычислим теперь показатели Ляпунова невозмущённой системы $\widetilde{A}$. Для каждого $i = \overline{1,n}$ обозначим через $x^i(\cdot)$ решение этой системы, выходящее в момент времени $t=0$ из вектора e^i. Так как система $\widetilde{A}$ является диагональной, то все компоненты решения $x^i(\cdot)$, кроме i-й, тождественно равны нулю. Таким образом, $\|x^i(t)\| = |x^i_i(t)|$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Зададим функцию $\chi^i : (0,+\infty) \to \mathbb{R} \bigsqcup \{-\infty\}$ равенством $\chi^i(t) = t^{-1}\ln\|x^i(t)\|$, $t>0$. Система $\widetilde{A}$ имеет постоянные коэффициенты на каждом из промежутков Δ^j_m, $j=\overline{1,6}$, $m \in \mathbb{N}_0$, поэтому по лемме 1 функция χ^i монотонна на соответствующих отрезках. Следовательно, при вычислении её верхнего предела при $t \to +\infty$, т.е. показателя $\lambda[x^i]$, можно ограничиться концами указанных промежутков. Так как функция $x^i(\cdot)$ постоянна на каждом из отрезков $\bar{\Delta}^j_m$, $j=2,5$, $m \in \mathbb{N}_0$, и $\lim\limits_{m\to\infty} T^2_m/T^1_m = \lim\limits_{m\to\infty} T^5_m/T^4_m = 1$, то достаточно рассмотреть только левые их концы. Более того, если $i \notin \{\theta(m), \theta(m+1)\}$, то функция $x^i_i(\cdot)$ на промежутке Δ_m удовлетворяет автономному уравнению (6), поэтому функция $\chi^i(\cdot)$ монотонна на отрезке $\bar{\Delta}_m$. Из сказанного следует, что $\lambda[x^i] = \lambda[x^i|_{\widetilde{\mathrm{T}}}]$, где множество $\widetilde{\mathrm{T}}$ описано в п. 4.2.

Из последнего равенства в (4) и задания системы (6), (7) вытекает, что для i-й компоненты любого решения $x(\cdot)$ рассматриваемой системы при всех $m \in \mathbb{N}_0$ выполнено равенство (10). Из равенств (4), (10) и оценки $L^m_i \leqslant \Theta_m T^0_m$ вытекают соотношения

$$\varlimsup_{q\to\infty} \chi^i(T^j_{m^i_q}) = \varlimsup_{q\to\infty} (L_i^{m^i_q} - 35\Theta_{m^i_q} 2^{m^i_q+1})/T^j_{m^i_q} = -\infty, \quad j=1,4,$$

$$\varlimsup_{q\to\infty} \chi^i(T^j_{m^i_q-1}) = \varlimsup_{q\to\infty} (L_i^{m^i_q-1} - 35\Theta_{m^i_q-1} 2^{m^i_q+1})/T^j_{m^i_q-1} = -\infty, \quad j=1,4,$$

$$\varlimsup_{q\to\infty} \chi^i(T^3_{m^i_q}) = \varlimsup_{q\to\infty} L_i^{m^i_q}/T^3_{m^i_q} \leqslant l_i, \quad \varlimsup_{q\to\infty} \chi^i(T^3_{m^i_q-1}) = \varlimsup_{q\to\infty} L_i^{m^i_q-1}/T^3_{m^i_q-1} \leqslant l_i,$$

где обозначено $m^i_q = qn+i$, $q \in \mathbb{N}_0$, $i=\overline{1,n}$. Следовательно, $\lambda[x^i] = \lambda[x^i|_{\widetilde{\mathrm{T}}}] = l_i$. Так как система $\widetilde{A}$ диагональна, то базис $x^1(\cdot),\ldots,x^n(\cdot)$ является нормальным. Таким образом, спектр показателей Ляпунова системы $\widetilde{A}$ совпадает с набором l.

5. Построим теперь непрерывную матричнозначную функцию $A(\cdot)$ и семейство непрерывных матричнозначных функций $Q(\,\cdot\,,\mu)$, $\mu \in M$, такие, что спектры показателей Ляпунова систем $\widetilde{A}$ и A, а также спектры показателей Ляпунова семейств $\widetilde{A}+\widetilde{Q}$ и $A+Q$ совпадают между собой и выполнены неравенства

$$\|A(t)\| \leqslant \|\widetilde{A}(t)\|, \quad \|Q(t,\mu)\| \leqslant \|\widetilde{Q}(t,\mu)\|, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mu \in M.$$

Выберем непрерывную возрастающую функцию $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ так, чтобы при всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнялось неравенство $\|\widetilde{A}(t)\| + 1 \leqslant f(t)$. Тогда $\|\widetilde{C}(t,\mu)\| \leqslant f(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $\mu \in M$, поскольку $\|\widetilde{Q}(t,\mu)\| \leqslant 1$. Положим

$$T_{6m+j} = T^j_m, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad j=\overline{1,6}, \quad F(t) = 3\int\limits_0^t f(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$\delta_k = 2^{-k}\exp(-F(T_{k+1}))/f(T_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Далее, выберем непрерывную (например, кусочно-линейную) функцию $s : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$, которая тождественно равна нулю в окрестности каждой из точек T_k и тождественно равна единице на каждом из отрезков $[T_k+\delta_k, T_{k+1}-\delta_{k+1}]$, $k \in \mathbb{N}$.

Положим $A(t) = s(t)\widetilde{A}(t)$, $Q(t,\mu) = s(t)\widetilde{Q}(t,\mu)$, $C(t,\mu) = s(t)\widetilde{C}(t,\mu)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\mu \in M$. Так как матричнозначная функция $\widetilde{A}(\cdot)$ постоянна на каждом интервале (T_k, T_{k+1}), $k \in \mathbb{N}$, то матричнозначная функция $A(\cdot)$ непрерывна. Покажем, что матричнозначная функция $Q(\,\cdot\,,\cdot\,)$ непрерывна. Пусть заданы $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и $\mu_0 \in M$. Если t_0 совпадает с одной из точек T_k, $k \in \mathbb{N}$, или лежит внутри одного из промежутков Δ^j_m, $m \in \mathbb{N}_0$, $j=1,3,4,6$, то по построению найдётся такая окрестность U точки t_0, что $Q(t,\mu)$ – нулевая матрица при всех $t\in U$ и $\mu\in M$. Если t_0 лежит внутри одного из промежутков Δ_m^j, $m\in\mathbb{N}_0$, $j=\overline{2,5}$, то $Q(\,\cdot\,,\cdot\,)$ непрерывна в точке (t_0,μ_0) как произведение постоянной по t в некоторой окрестности точки t_0 и непрерывной по μ матричнозначной функции $\widetilde{Q}(\,\cdot\,,\cdot\,)$ и непрерывной функции $s(\cdot)$.

Пусть для некоторых $k',k''\in\mathbb{N}$ выполнены включения $t'\in[T_{k'},T_{k'+1})$ и $t''\in[T_{k''},T_{k''+1})$. Тогда справедлива цепочка неравенств

$$\int\limits_{t'}^{t''}\|s(\tau)\widetilde{C}(\tau,\mu)-\widetilde{C}(\tau,\mu)\|\,d\tau\leqslant\sum_{k=k'}^{k''+1}\int\limits_{T_k-\delta_k}^{T_k+\delta_k}f(\tau)\,d\tau\leqslant\sum_{k=k'}^{k''+1}2\delta_kf(T_{k+1})\leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{k=k'}^{k''+1}2^{-k}\exp(-F(T_{k+1}))\leqslant 2\exp(-F(t')),$$

из которой следует, что интеграл $I(t,\mu)=\int_t^{+\infty}\|C(\tau,\mu)-\widetilde{C}(\tau,\mu)\|\,d\tau$ при всех $\mu\in M$ и $t\in\mathbb{R}_+$ сходится и удовлетворяет оценке $I(t,\mu)\exp F(t)\leqslant 2$. В силу леммы 4 системы $C(\cdot\,,\mu)$ и $\widetilde{C}(\cdot\,,\mu)$ слабо ляпуновски эквивалентны при каждом $\mu\in M$. Применяя лемму 3, заключаем, что спектры показателей Ляпунова этих систем совпадают между собой. Аналогичными рассуждениями устанавливается совпадение спектров показателей Ляпунова систем A и $\widetilde{A}$.

6. Пусть теперь заданы набор $l\in(\overline{\mathbb{R}})^n$ и функция $F:M\to(\overline{\mathbb{R}})^n$, удовлетворяющие условиям 1)–3) теоремы, причём l_{i_0}, $i_0=\overline{1,n}$, – первый слева конечный отрицательный элемент набора l. По доказанному существуют система $A_0\in C\widetilde{\mathcal{M}}^n$ и семейство $Q\in\mathcal{Q}^n[\Theta,A_0](M)$, удовлетворяющие равенствам $\Lambda(A_0)=(l_1-l_{i_0},\ldots,l_n-l_{i_0})$ и $\Lambda(\cdot\,;A_0+Q)=(f_1-l_{i_0},\ldots,f_n-l_{i_0})$ (полагаем $-\infty-a=-\infty$ и $+\infty-a=+\infty$ для любого $a\in\mathbb{R}$).

Напомним следующее хорошо известное утверждение: показатели Ляпунова двух систем $\dot{x}=B(t)x$ и $\dot{y}=(B(t)+aE_n)y$, $x,y\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}_+$, где $a\in\mathbb{R}$, а E_n – единичная $n\times n$-матрица, связаны между собой равенством $\lambda_i(B+aE_n)=\lambda_i(B)+a$, $i=\overline{1,n}$, которое вытекает из того, что для решений $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ этих систем с одним и тем же начальным вектором $(x(0)=y(0))$ имеет место тождество $y(t)\equiv x(t)\exp(at)$, $t\in\mathbb{R}_+$.

Положим $A(\cdot)=A_0(\cdot)+l_{i_0}E_n$. Тогда вследствие выбора системы A_0 и сказанного выше получаем, что $\Lambda(A)=l$. По той же причине спектр $\Lambda(\cdot\,;A+Q)$ показателей Ляпунова семейства $A+Q$ с так определённой матричнозначной функцией $A(\cdot)$ совпадает с функцией $F(\cdot)$. Условие $Q\in\mathcal{Q}^n[\Theta,A](M)$ очевидно выполняется. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю В.В. Быкову за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Миллионщиков В.М.* Формулы для показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та прикл. математики им. И.Н. Векуа. Тбилиси, 1987. Т. 22. С. 150–178.
2. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
3. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
4. *Perron O.* Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // Math. Zeitschr. 1930. Bd. 31. Hf. 4. S. 748–766.
5. *Perron O.* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Zeitschr. 1930. Bd. 32. Hf. 5. S. 703–728.
6. *Леонов Г.А.* Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. М., Ижевск, 2006.
7. *Коровин С.К., Изобов Н.А.* Реализация эффекта Перрона смены значений характеристических показателей решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1536–1550.

8. *Барабанов Е.А., Быков В.В.* Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, экспоненциально убывающих к нулю на бесконечности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 4. С. 31–43.
9. *Миллионщиков В.М.* Показатели Ляпунова как функции параметра // Мат. сб. 1988. Т. 137. № 3. С. 364–380.
10. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.; Л., 1937.
11. *Карпук М.В.* Показатели Ляпунова семейств морфизмов обобщенных расслоений Миллионщикова как функции на базе расслоения // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2016. Т. 24. № 2. С. 55–71.
12. *Карпук М.В.* Показатели Ляпунова обобщённых расслоений Миллионщикова как функции на базе расслоения // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 8. С. 1140–1141.
13. *Быков В.В.* Функции, определяемые показателями Ляпунова семейств линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 12. С. 1579–1592.
14. *Барабанов Е.А., Быков В.В., Карпук М.В.* Полное описание спектров показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на временно́й полуоси // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 12. С. 1579–1588.
15. *Богданов Ю.С.* К теории систем линейных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1955. Т. 104. № 6. С. 813–814.
16. *Гробман Д.М.* Характеристические показатели систем, близких к линейным // Мат. сб. 1952. Т. 30. № 1. С. 121–166.
17. *Быков В.В.* Полное описание спектров показателей Ляпунова непрерывных семейств линейных дифференциальных систем с неограниченными коэффициентами // Изв. РАН. Сер. мат. 2020. Т. 84. № 6. С. 3–22.
18. *Залыгина В.И.* О ляпуновской эквивалентности линейных дифференциальных систем с неограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1325–1331.
19. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.
20. *Барабанов Е.А.* Обобщение теоремы Былова о приводимости и некоторые его применения // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 12. С. 1592–1596.
21. *Stepanoff W.* Sur les suites des fonctions continues // Fund. Math. 1928. V. 11. P. 264–274.
22. *Миллионщиков В.М.* Нормальные базисы семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения // Мат. заметки. 1985. Т. 38. Вып. 5. С 691–708.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 01.02.2021 г.
После доработки 16.09.2021 г.
Принята к публикации 05.10.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1474–1482

УДК 517.977.1:517.951

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. I

© 2021 г. В. И. Елкин

Рассматривается вопрос о применении дифференциально-геометрических и алгебраических методов теории динамических систем с управлением в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

DOI: 10.31857/S0374064121110054

Введение. После приведения системы дифференциальных уравнений с частными производными к специальному виду в параметрической форме, разрешённой относительно всех производных

$$\partial_k y^i = g_k^i(t, y, u),$$

открывается возможность применения некоторых дифференциально-геометрических и алгебраических методов теории динамических систем с управлением, используя некоторую аналогию данных объектов. Эти методы позволяют исследовать некоторые вопросы декомпозиции, построения симметрий и др.

1. Динамические системы с управлением и недоопределённые системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$h^k(t, y, dy/dt) = 0, \quad k = \overline{1, q}, \tag{1}$$

где h^k, $k = \overline{1, q}$, – заданные гладкие функции, $t \in \mathbb{R}^1$, $y = (y^1, \ldots, y^n)^{\text{т}} \in M$ (M – область в $\mathbb{R}^n$), $dy/dt = (dy^1/dt, \ldots, dy^n/dt)^{\text{т}}$. *Решением* системы (1) называется непрерывная кусочно-гладкая вектор-функция $y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, удовлетворяющая равенствам (1) всюду в точках её дифференцируемости. Система (1) называется *недоопределённой*, если $q < n$. Далее считаем это неравенство для системы (1) выполненным.

Динамической системой с управлением называется система уравнений вида

$$\dot{y}^i = f^i(t, y, u), \quad i = \overline{1, n}, \quad (t, y) \in [t_0, t_1] \times M \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^r, \tag{2}$$

где $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ фиксированы. Будем предполагать, что функции f^i, $\partial f^i/\partial y^j$, $\partial f^i/\partial u^\alpha$ являются гладкими. Обычно называют y *фазовыми переменными* (*состояниями*), u – *управлениями* (*внешними воздействиями*). Множество M, называемое *фазовым пространством*, и множество U являются областями. Управления могут быть кусочно-непрерывными вектор-функциями $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. В этом случае они называются *допустимыми*. *Решением* системы (2) называется непрерывная кусочно-гладкая вектор-функция $y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, для которой существует такое допустимое управление $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, что вектор-функции $y(t)$, $u(t)$ удовлетворяют соотношениям (2).

Недоопределённые системы являются более сложными математическими объектами, чем системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$dy^i/dt = f^i(t, y), \quad i = \overline{1, n}, \quad (t, y) \in \mathbb{R}^1 \times M. \tag{3}$$

Это проявляется, например, в том, что для систем (1) не верно утверждение о единственности решения, проходящего через заданную начальную точку (независимо от гладкости функций h^k).

Рассмотрим связь систем (2) и (1) между собой. Число уравнений в системе (1) меньше числа переменных. Поэтому все производные нельзя выразить из уравнений (1) через переменные y. Однако (по крайней мере локально) это можно сделать за счёт введения новых переменных. Пусть ранг якобиевой матрицы от функций h^k относительно производных dy^i/dt постоянен и равен q. Тогда по теореме о неявной функции некоторые q производных, соответствующих расположению главного минора в указанной матрице, (локально) выражаются через y и остальные $n-q$ производных, которые принимаются за новые параметрические переменные u. В результате соотношения (1) перейдут в соотношения (2). Обратно, аналогичным образом используя теорему о неявной функции и предположение о постоянстве ранга якобиевой матрицы от функций f^i относительно переменных u, можно перейти от системы (2) к двойственной системе (1) исключением переменных u (т.е. выражением их через y, dy/dt из одних уравнений и подстановкой в другие уравнения).

Отношение к уравнениям (2) именно как к системам с управлением сформировалось в прошлом веке, когда выяснилось, что некоторые реальные системы описываются такими соотношениями, причём функции $u(t)$ трактуются как внешние воздействия (управления). Оказалось, что некоторые задачи можно эффективно решать с помощью некоторых дифференциально-геометрических методов, использующих такие объекты как группа диффеоморфизмов, алгебра Ли векторных полей, распределение, кораспределение (система Пфаффа) и др. Указанные объекты связываются с системами (2) как некоторые ассоциированные с ними объекты и определяются правыми частями этих систем, а их классические свойства определяют управленческие свойства системы (2). Например, транзитивность ассоциированной группы связана с управляемостью (свойством достижимости), свойство допускать декомпозицию – с импримитивностью группы, вопрос о классификации аффинных систем с управлением связан с классическим вопросом классификации систем Пфаффа и т.д. [1–4].

Рассмотрим некоторые из ассоциированных объектов. Введём оператор полного дифференцирования по времени в силу системы (2):

$$X(u) := \frac{\partial}{\partial t} + f^i(t,y,u)\frac{\partial}{\partial y^i} \tag{4}$$

(здесь и далее применяется правило суммирования по повторяющемуся верхнему и нижнему индексам). Рассмотрим $X(u)$ как семейство операторов с параметром u. Придавая управлению u различные постоянные допустимые значения $u\in U$, получаем различные операторы (векторные поля) в области M, которые образуют семейство полей в M, которое назовём *ассоциированным*. Выделим в этом семействе базисное подсемейство, т.е. укажем такие допустимые значения $u_1,\ldots,u_p\in U$, что операторы

$$X_j := \frac{\partial}{\partial t} + f^i_j(t,y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad j=\overline{1,p}, \tag{5}$$

где $f^i_j(t,y)=f^i(t,y,u_j)$, линейно несвязаны, т.е. линейно независимы в каждой точке (t,y) (см. [1, определение 2.2]), а подстановка в (4) любого допустимого значения u приводит к оператору, который линейно связанно выражается через операторы $X_1,\ \ldots,\ X_p$:

$$X(u) = \varphi^j(t,y,u)X_j. \tag{6}$$

Таким образом, при любом допустимом управлении $u(t)$ оператор $X(u(t))$ линейно выражается через конечное число операторов X_j, не зависящих от управления.

После выделения базисного семейства $X_1,\ \ldots,\ X_p$ оно пополняется. Шаг классической процедуры пополнения заключается в вычислении коммутаторов $[X_j,X_k]$, $j,k=\overline{1,p}$. Если коммутатор линейно несвязан с операторами семейства, то он добавляется к нему; в противном случае он отбрасывается. Шаг повторяется для семейства, расширенного за счёт добавленных коммутаторов. Если на очередном шаге все вновь вычисленные коммутаторы отброшены, то процедура завершается. В частности, процедура завершится, если после очередного шага количество операторов в семействе сравняется с размерностью n пространства состояний. Итак, в результате пополнения получается полное семейство, состоящее из полей $X_1, \ldots, X_p$ и некоторых полей

$$X_k = \varphi_k^i(t,y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad k = \overline{p+1,m}. \tag{7}$$

Поля (7) получены в результате вычисления коммутаторов полей (5), поэтому них отсутствует дифференцирование по независимой переменной t. В более общем смысле можно говорить о переходе от ассоциированного семейства к минимальной алгебре Ли, содержащей это семейство. Процедура пополнения составляет только часть такого перехода и заключается в построении базисного семейства этой алгебры, т.е. максимального числа линейно несвязанных полей алгебры. Не следует путать базисное семейство с базисом, который состоит из максимального числа линейно независимых полей алгебры, если размерность алгебры конечна [5, с. 90]. Заметим, что число полей в базисном семействе конечно и не превышает число переменных (в данном случае $n+1$). Также в более общем и современном смысле это число равно рангу распределения, порождаемого алгеброй (подробности см. в [3, с. 62]). Для целей данной работы достаточно иметь дело с базисным семейством, которое получается в результате классического процесса пополнения [6, с. 14; 5, с. 70–72].

1.1. Первые интегралы и управляемость. Напомним, что *первым интегралом системы* (3) называется такая функция $\Phi(t,y)$, которая на любом решении $y(t)$ системы (3) принимает постоянное значение

$$\Phi(t,y(t)) = \mathrm{const}.$$

Дифференцируемая функция $\Phi(t,y)$ является первым интегралом системы (3), если и только если она удовлетворяет следующему тождеству:

$$\frac{\partial\Phi(t,y)}{\partial t} + f^i(t,y)\frac{\partial\Phi(t,y)}{\partial y^i} = 0 \quad \text{для всех} \quad (t,y)\in\mathbb{R}^1\times M \quad \text{и} \quad u\in U, \tag{8}$$

т.е. действие оператора полного дифференцирования по времени в силу системы (3) должно равняться нулю. *Первым интегралом системы с управлением* (2) естественно назвать функцию, принимающую постоянное значение на любых решениях, которые соответствуют произвольным допустимым управлениям $u(t)$. Таким образом, для таких функций $\Phi(t,y)$ должны выполняться соотношения

$$\frac{d\Phi(t,y(t))}{dt} = X(u(t))\Phi(t,y(t)) = \frac{\partial\Phi(t,y(t))}{\partial t} + f^i(t,y,u(t))\frac{\partial\Phi(t,y(t))}{\partial y^i} = 0. \tag{9}$$

Первые интегралы совпадают с решениями системы уравнений, соответствующими всем ассоциированным операторам (4), т.е. системы

$$\frac{\partial\Phi(t,y)}{\partial t} + f^i(t,y,u)\frac{\partial\Phi(t,y)}{\partial y^i} = 0 \quad \text{для всех} \quad (t,y)\in[t_0,t_1]\times M \quad \text{и} \quad u\in U, \tag{10}$$

поскольку тождественное выполнение равенств (10) влечёт за собой и выполнение всех равенств (9).

С другой стороны, решения системы (10) совпадают с решениями полной системы дифференциальных уравнений, которая соответствует полям (6), (7):

$$X_j\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + f_j^i(t,y)\frac{\partial\Phi}{\partial y^i} = 0, \quad j=\overline{1,p}, \tag{11}$$

$$X_k\Phi = \varphi_k^i(t,y)\frac{\partial\Phi}{\partial y^i} = 0, \quad k=\overline{p+1,m}. \tag{12}$$

Согласно теории полных систем [5, с. 16; 4, с. 72] у такой системы имеется набор функционально независимых решений (интегральный базис) в количестве, равном разности между числом переменных и числом уравнений. Для системы (11), (12) таковым является некоторый набор функций $\Phi^1(t,y),\ \ldots,\ \Phi^{n-m}(t,y)$, для которого

$$\operatorname{rank}\left\|\frac{\partial\Phi^k}{\partial y^i}\right\|_{i=\overline{1,n}}^{k=\overline{1,n-m}} = m,$$

причём для любого интеграла $\Phi(y)$ справедливо представление

$$\Phi(y) = G(\Phi^1(y),\ldots,\Phi^m(y)),$$

где G – гладкая функция. Сделаем (локальную) замену координат

$$x^k = \Phi^k(t,y), \quad k=\overline{1,n}, \tag{13}$$

где $\Phi^k(t,y)$, $k=\overline{1,m}$, – полный набор интегралов, а $\Phi^k(t,y)$, $k=\overline{m+1,n}$, – произвольные функции, выбранные таким образом, чтобы замена координат (13) являлась невырожденной. В новой системе координат система (2) приобретает вид

$$\dot x^k = 0, \quad k=\overline{1,m}, \tag{14}$$

$$\dot x^l = \overline{f}^l_0(t,x) + \overline{f}^l_\alpha(t,x)u^\alpha, \quad l=\overline{m+1,n}. \tag{15}$$

Система (2) называется *управляемой на интервале* $[t_0,t_1]$ [1, с. 63], если для любых двух состояний $y_0,y_1\in M$ существует её решение $y(t)$, удовлетворяющее условиям $y(t_0)=y_0$, $y(t_1)=y_1$. Связь понятия управляемости и первого интеграла заключается в следующем утверждении.

Теорема 1 [1, с. 63]. *Система (2) управляема на интервале $[t_0,t_1]$ только тогда, когда у неё отсутствуют нетривиальные (т.е. непостоянные) первые интегралы.*

Доказательство. Пусть система (2) управляема на интервале $[t_0,t_1]$. Фиксируем начальную точку (t_0,y_0). Для нетривиального первого интеграла $\Phi(t,y)$ (если он существует) по определению приходим к равенству

$$\Phi(t_0,y_0) = \Phi(t_1,y_1),$$

где $y_1 = y(t_1)$ – конечная точка некоторого решения $y(t)$. Так как точка y_1 может быть любой, то справедливы равенства

$$\frac{\partial\Phi(t_1,y)}{\partial y^i} = 0, \quad i=\overline{1,n},$$

что противоречит нетривиальности первого интеграла. Теорема доказана.

Следствие. *Система (2) управляема на интервале $[t_0,t_1]$ только тогда, когда число полей в полном семействе (6), (7) равно $n+1$.*

1.2. Автономные системы. Рассмотрим отдельно случай автономных систем, т.е. систем, в которые независимая переменная не входит явно. В нормальной форме такие системы с управлением имеют вид

$$\dot y^i = f^i(y,u), \quad i=\overline{1,n}, \quad y\in M\subset\mathbb{R}^n, \quad u\in U\subset\mathbb{R}^r. \tag{16}$$

В этом случае рассмотрение, в том числе введение сопутствующих дифференциально-геометрических понятий, естественно ведётся в фазовом пространстве M изменения фазовых переменных (состояний) y. Точнее, вводятся следующие ассоциированные объекты (подробности см. в [2, с. 124–126]).

Через $\mathfrak{c}_0$ обозначим семейство гладких векторных полей, заданных в области M:

$$\xi_u = f^i(y,u)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad u \in U. \tag{17}$$

Каждое поле семейства $\mathfrak{c}_0$ получается, если фиксировать некоторое постоянное значение u из множества U. Поля (17) называются *ассоциированными полями* системы (16), а семейство $\mathfrak{c}_0$ – *ассоциированным семейством* системы (16). Минимальная алгебра Ли векторных полей, содержащая семейство $\mathfrak{c}_0$, называется *ассоциированной алгеброй Ли* системы (16) и обозначается через $\mathfrak{c}$.

Введём также распределение $\Delta_{\mathfrak{c}}$, порождаемое ассоциированной алгеброй $\mathfrak{c}$. Это распределение ставит в соответствие каждой точке $y \in M$ линейную оболочку векторов, определяемых полями алгебры $\mathfrak{c}$. Величина $\dim \Delta_{\mathfrak{c}}$ равна числу полей в базисном семействе алгебры $\mathfrak{c}$, которое получается в результате пополнения базисного подсемейства семейства $\mathfrak{c}_0$. Ещё раз отметим, что не следует путать базисное семейство и базис алгебры: базис состоит из максимального числа линейно независимых полей, а базисное семейство состоит из максимального числа линейно несвязанных, т.е. линейно независимых в каждой точке, полей. Поэтому, в частности, число полей в базисном семействе алгебры не превышает n и равно $\dim \Delta_{\mathfrak{c}}$. Для неавтономных систем (2) аналогичное семейство состоит из полей (5) и (7). Через S_u обозначим локальные однопараметрические группы, порождаемые полями (17) и называемые ассоциированными *однопараметрическими группами* системы (16).

Преобразования однопараметрической группы, которая порождается полем с фиксированным $u_0 \in U$, переводят точки области M в точки этой же области по решениям $y(t)$, которые соответствуют постоянному управлению $U(t) = u_0$. Локальная группа диффеоморфизмов области M, порождаемая семейством векторных полей $\mathfrak{c}_0$ и являющаяся минимальной локальной группой, содержащей однопараметрические группы S_u, $u \in U$, называется *локальной ассоциированной группой* системы (16) и обозначается через S (в дальнейшем слово "локальная" для краткости опускается). Преобразования ассоциированной группы определяются решениями $y(t)$ системы (16), соответствующими всевозможным кусочно-постоянным управлениям, если при этом разрешается движение от точки к точке как в положительном, так и в отрицательном направлении времени. Более подробно это означает следующее. Каждое преобразование $s \in S$ имеет вид $s = s^{t_l}_{u_l} \cdots s^{t_2}_{u_2} s^{t_1}_{u_1}$, где $s^{t_k}_{u_k} \in S_{u_k}$, $k = \overline{1,l}$. Равенство $s(y) = y'$ означает существование конечной последовательности точек $y = c_0$, c_1, $\ldots$, $c_l = y'$ области M, где $c_k = s^{t_k}_{u_k} \cdots s^{t_2}_{u_2} s^{t_1}_{u_1}(y)$. Это эквивалентно тому, что для каждого $k = \overline{1,l}$ существует решение $y(t) = s^{t_k}_{u_k}(c_{k-1})$ системы (16), соответствующее постоянному управлению $u(t) = u_k$, для которого $y(0) = c_{k-1}$, $y(t_k) = c_k$. При этом, если $t_k \geqslant 0$, то $y(t)$ определено на отрезке $[0,t_k]$, а если $t_k \leqslant 0$, то на отрезке $[t_k, 0]$.

Для автономных систем (16) понятие управляемости обычно вводят следующим образом. Система (16) называется *управляемой*, если для любых двух состояний $y_0, y_1 \in M$ существует её решение $y(t)$, $t \in [t_0,t_1]$, удовлетворяющее условиям $y(t_0) = y_0$, $y(t_1) = y_1$. Так же, как и для неавтономных систем, вопрос об управляемости тесно связан с существованием первых интегралов (по крайней мере локально). Вопрос о первых интегралах решается аналогично. По крайней мере локально дело сводится к процессу пополнения линейно несвязанных полей ассоциированного семейства (17). В результате пополнения возникает базисное семейство алгебры $\mathfrak{c}$ и распределения $\Delta_{\mathfrak{c}}$:

$$X_l = \varphi^i_l(y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad l = \overline{1,p}. \tag{18}$$

Здесь число p равно рангу распределения $\Delta_{\mathfrak{c}}$, т.е $\dim \Delta_{\mathfrak{c}}(y)$. При этом предполагается, что рассмотрение ведётся в окрестности точки y_0, где ранг постоянен и реализуем процесс пополнения. Пусть $p < n$. Тогда полная система дифференциальных уравнений

$$X_l\Phi(y) = \varphi^i_l(y)\frac{\partial \Phi(y)}{\partial y^i} = 0, \quad l = \overline{1,p}, \tag{19}$$

имеет в окрестности данной точки $m = n - p$ функционально независимых решений $\Phi^k(y)$, $k = \overline{1, m}$, для которых

$$\operatorname{rank} \left\| \frac{\partial \Phi^k}{\partial y^i} \right\|_{i=\overline{1,n}}^{k=\overline{1,m}} = m,$$

причём для любого интеграла $\Phi(y)$ справедливо представление

$$\Phi(y) = G(\Phi^1(y), \ldots, \Phi^m(y)),$$

где G – гладкая функция. В окрестности точки y_0 определено семейство локально инвариантных многообразий (т.е. преобразования групп не выводят точки из этих многообразий) размерности p:

$$\Phi^k(y) - c^k = 0, \quad k = 1, \ldots, m = n - p, \tag{20}$$

где $c^k = \mathrm{const}$. Сделаем (локальную) замену координат

$$x^k = \Phi^k(y), \quad k = \overline{1, n}, \tag{21}$$

где $\Phi^k(y)$, $k = \overline{1, m}$, – полный набор интегралов, а $\Phi^k(y)$, $k = \overline{m+1, n}$, – произвольные функции, выбранные таким образом, чтобы замена координат (21) являлась невырожденной. В новой системе координат семейство многообразий (20) запишется следующим образом:

$$x^k - c^k = 0, \quad k = \overline{1, m}, \tag{22}$$

а система (16) приобретает вид

$$\dot{x}^k = 0, \quad k = \overline{1, m}, \tag{23}$$

$$\dot{x}^l = \overline{f}{}_0^l(x) + \overline{f}{}_\alpha^l(x) u^\alpha, \quad l = \overline{m+1, n}. \tag{24}$$

Здесь полезна также интерпретация в терминах ассоциированной группы S. Если для любого $y \in M$ выполняется равенство $\dim \Delta_{\mathfrak{c}}(y) = n$ и M – связная область, то, согласно теореме Рашевского–Чжоу [3, с. 89], группа диффеоморфизмов, порождаемая семейством, является транзитивной. Следовательно, из любой точки $y_0 \in M$ можно попасть в любую другую точку $y_1 \in M$, двигаясь по интегральным траекториям полей семейства, т.е. по решениям управляемой системы (16), соответствующим постоянным (точнее, кусочно-постоянным) управлениям. При этом разрешается движение как в положительном направлении времени, так и в отрицательном. В этом случае говорят, что система (16) обладает свойством *слабой управляемости*. По поводу разных определений управляемости см., например, [7]. Декомпозиция (23), (24) является частным случаем более общей декомпозиции

$$\dot{x}^k = g_0^k(x^1, \ldots, x^m) + g_\alpha^k(x^1, \ldots, x^m) u^\alpha, \quad k = \overline{1, m}, \tag{25}$$

$$\dot{x}^i = g_0^i(x^1, \ldots, x^n) + g_\alpha^i(x^1, \ldots, x^n) u^\alpha, \quad i = \overline{m+1, n}, \tag{26}$$

$$(x^1, \ldots, x^m) \in W \subset \mathbb{R}^m, \quad (x^{m+1}, \ldots, x^n) \in L \subset \mathbb{R}^{n-m}, \quad u \in \mathbb{R}^r.$$

Возможность приведения с помощью замены переменных системы (16) к такому виду связана с другим более общим свойством группы S – импримитивностью (см. [3. с. 127–130]).

2. Системы дифференциальных уравнений с частными производными. Рассматривается система дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

$$\Lambda_\nu(t, y, p) = 0, \quad \nu = \overline{1, l}, \tag{27}$$

где $t = (t^1, \ldots, t^m)^{\mathrm{т}}$, $y = (y^1, \ldots, y^n)^{\mathrm{т}}$ и $p = (\ldots, \partial_k y^i, \ldots)$, где $\partial_k y^i = \partial y^i / \partial t^k$. В дальнейшем предполагаем для упрощения, что функции Λ_ν, а также все встречающиеся функции (в том числе решения) гладкие. Под гладкостью понимаем непрерывную бесконечную дифференцируемость. Считаем, что система (27) имеет максимальный ранг и $l \times mn$-матрица

Якоби производных от функций Λ_ν по p имеет ранг l всюду, где $\Lambda(t,y,p)=0$ (здесь и далее $\Lambda=(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_l)^{\mathrm{т}}$). При этом условии соотношения (27) задают гладкое многообразие $\mathcal{S}_\Lambda$ в пространстве переменных (t,y,p), или, иначе говоря, в пространстве 1-струй функций $y(t)$. Относительно системы (27) будем считать также, что она *локально разрешима.* Согласно [8, с. 212] система локально разрешима в точке $(t_0,y_0,p_0)\in\mathcal{S}_\Lambda$, если существует гладкое решение $y=f(t)$, определённое для t из некоторой окрестности точки t_0 и имеющее предписанные начальные условия $y_0=f(t_0)$, $p_0=(\partial f/\partial t)_{t=t_0}$. Система называется *локально разрешимой*, если она локально разрешима в каждой точке многообразия $\mathcal{S}_\Lambda$, а система, для которой одновременно выполняются свойства максимального ранга и локальной разрешимости называется *невырожденной* [8, с. 212].

2.1. Специальный вид и его трактовка с точки зрения теории управления. Уравнения (27) задают многообразие $\mathcal{S}_\Lambda$ в неявном виде. Это многообразие можно (в силу невырожденности) представить и в параметрическом виде (в некоторой локальной карте) при помощи разрешения системы (27) относительно максимального числа производных, причём если остальные (параметрические) производные считать параметрическими переменными и составленный из них вектор обозначить через u, то получим локальное представление $\mathcal{S}_\Lambda$ в параметрической форме, разрешённой относительно всех производных [8, с. 324]:

$$\partial_k y^i = f_k^i(t,y,u). \tag{28}$$

Выберем локальную карту таким образом, чтобы

$$t\in I\subset\mathbb{R}^m,\quad y\in M\subset\mathbb{R}^n,\quad u\in U\subset\mathbb{R}^s, \tag{29}$$

где I, M, U – некоторые области. Такое представление произвольной системы дифференциальных уравнений с частными производными известно как специальный вид [9, с. 324]. Данное представление встречается также в задаче оптимального управления систем с распределёнными параметрами для удобства вывода необходимых условий оптимальности [10, с. 30]. В (28) остальные (параметрические) производные обозначены через u как параметрические переменные, причём для параметрических производных соответствующее выражение имеет просто некоторый вид [9, с. 324]

$$\partial_\delta y^\beta = u^\gamma.$$

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\frac{\partial y^1}{\partial t^1}=\frac{\partial y^2}{\partial t^1}t^2,\quad \frac{\partial y^2}{\partial t^2}=y^1y^2,$$

$$\frac{\partial y^1}{\partial t^2}=y^2(1-t^2y^1). \tag{30}$$

Полагая $\partial y^2/\partial t^1=u$, запишем эту систему в виде

$$\frac{\partial y^1}{\partial t^1}=ut^2,\quad \frac{\partial y^2}{\partial t^1}=u, \tag{31}$$

$$\frac{\partial y^1}{\partial t^2}=y^2(1-t^2y^1),\quad \frac{\partial y^2}{\partial t^2}=y^1y^2. \tag{32}$$

Далее будем рассматривать системы уравнений в специальном виде и в карте (29). Условие локальной разрешимости в данном случае означает, что для любых точек $t_0\in I$, $y_0\in M$, $u_0\in U$ существует окрестность $V\subset L$ точки t_0, в которой определено такое гладкое решение $y(t)$, что $y(t_0)=y_0$, $u(t_0)=u_0$.

Сравнивая системы (28) и (2), можно заметить определённую аналогию между ними. Действительно, каждое решение $y(t)$ управляемой системы (2) получается после подстановки в правую часть управлений $u(t)$ из некоторого класса допустимых функций. С другой стороны, решения $y(t)$ системы (28) соответствуют выбору из некоторого класса параметрической функции $u(t)$. Однако имеется существенное различие в классах допустимых “управлений”. Для управляемых систем классы допустимых управлений достаточно известны и широки: от класса кусочно-непрерывных функций до класса измеримых функций. Для систем (28) заранее задать класс допустимых “управлений” затруднительно, так как далеко не каждый выбор функций $u(t)$ приводит к решению $y(t)$. Препятствием является, в частности, возможность несовместности полученной системы после подстановки управления $u(t)$. Тем не менее идеология теории управлений может быть полезна – можно построить аналогичные ассоциированные дифференциально-геометрические объекты, с помощью которых исследовать, например, характеристики, присущие всем реализациям допустимых параметрических функций.

2.2. Первые интегралы. Так же, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, введём понятие первого интеграла для систем (28). Гладкую функцию $\Phi(t,y)$ назовём *первым интегралом системы* (28), если на любом решении $y(t)$ системы (28) она принимает постоянное значение $\Phi(t,y(t)) = \mathrm{const}$.

Замечание. Введённое определение первого интеграла, по существу, совпадает с определением для обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако оно практически не используется в литературе для уравнений с частными производными. Причина, видимо, в малочисленности случаев существования нетривиальных первых интегралов для систем с частными производными и в отсутствии алгоритмов их нахождения. Актуальной считается более общая проблема существования законов сохранения (см., например, [8, с. 337; 11, с. 258]). Возможно, введённое понятие первого интеграла является более скромным или даже экзотическим по сравнению с законами сохранения. Тем не менее, если первые интегралы существуют и найдены, то это может существенно упростить исследование систем уравнений (понизить размерность задачи – см. ниже представление (37)), причём существование интегралов проверяется несложно с помощью предлагаемого аппарата, который может быть использован и для изучения более сложных, чем (37), декомпозиций типа (25), (26), а также для нахождения симметрий.

Условием того, что функция $\Phi(t,y)$ будет первым интегралом, является в силу её гладкости тождественное равенство нулю производных по всем независимым переменным от этой функции в силу каждого решения системы (28):

$$\frac{\partial\Phi(t,y(t))}{\partial t^k} + f_k^i(t,y(t),u(t))\frac{\partial\Phi(t,y(t))}{\partial y^i} \equiv 0, \quad t\in I, \quad k=\overline{1,m}. \tag{33}$$

(Напоминаем, что по повторяющимся верхнему и нижнему индексам проводится суммирование.)

Введём ассоциированные семейства векторных полей (операторов) C_k, $k=\overline{1,m}$, в области $I\times M$. Каждое семейство C_k состоит из векторных полей

$$\frac{\partial}{\partial t^k} + f_k^i(t,y,u)\frac{\partial}{\partial y^i} = 0, \quad k=\overline{1,m}, \tag{34}$$

с фиксированным $k=\overline{1,m}$, где u пробегает всё множество постоянных значений из U. Объединение этих семейств обозначим через C_0.

Теорема 2. *Функция $\Phi(t,y)$ является первым интегралом системы (28) тогда и только тогда, когда выполняются тождества*

$$\frac{\partial\Phi(t,y)}{\partial t^k} + f_k^i(t,y,u)\frac{\partial\Phi(t,y)}{\partial y^i} \equiv 0, \quad k=\overline{1,m}, \quad \text{для всех} \quad (t,y)\in I\times M, \quad u\in U. \tag{35}$$

Доказательство. Достаточность очевидна, поскольку выполнение тождеств (35) для всех $(t,y)\in I\times M$, $u\in U$ влечёт за собой выполнение тождеств (33).

Необходимость вытекает из условия локальной разрешимости. Действительно, возьмём первый интеграл $\Phi(t,y)$, точки $t_0\in I$, $y_0\in M$, $u_0\in U$ и гладкое решение $y(t)$ такое, что $y(t_0)=y_0$, $u(t_0)=u_0$. Из тождеств (33) для этого решения и произвольного выбора точек $t_0\in I$, $y_0\in M$, $u_0\in U$ следуют тождества (35).

Из предыдущих пунктов работы, посвящённых динамическим системам, следует алгоритм проверки существования и нахождения первых интегралов. Нужно выделить в каждом ассоциированном семействе (34) максимальное число линейно несвязанных векторных полей, объединить эти поля и пополнить в области $I \times M$ изменения переменных. Если число s полей в полученном полном семействе меньше числа переменных $n+m$, то нетривиальные первые интегралы существуют, причём число функционально независимых интегралов равно $n+m-s$. Они находятся с помощью решения соответствующей полной системы дифференциальных уравнений. Если сделать (локальную) замену зависимых переменных

$$x^k = \Phi^k(t,y), \quad k = \overline{1,n}, \tag{36}$$

где $\Phi^k(y)$, $k=\overline{1,q}$, – независимые интегралы, а $\Phi^k(y)$, $k=\overline{q+1,n}$, – произвольные функции, выбранные таким образом, чтобы замена координат (36) была невырожденной, то в новой системе координат система (28) приобретает следующий вид:

$$\partial_k x^i = 0, \quad i=\overline{1,q}, \quad \partial_k x^j = h_k^j(t,x,u), \quad j=\overline{q+1,n}. \tag{37}$$

Пример 2. Рассмотрим систему (31), (32) из примера 1. Семейство C_0 состоит из двух подсемейств

$$X_{1u} = \frac{\partial}{\partial t^1} + ut^2\frac{\partial}{\partial y^1} + u\frac{\partial}{\partial y^2}, \quad X_{2u} = \frac{\partial}{\partial t^2} + y^2(1+t^2y^1)\frac{\partial}{\partial y^1} + y^1y^2\frac{\partial}{\partial y^2},$$

т.е. второе подсемейство состоит из одного поля. Легко видеть, что поля $Y_1 = X_{10}$, $Y_2 = X_{11}$, $Y_3 = X_{2u}$ образуют линейно несвязанное подсемейство D семейства C_0. Вычисляя коммутаторы, получаем $[Y_1,Y_2]=0$, $[Y_1,Y_3]=0$, $[Y_2,Y_3]=(t^2y^2+y^1)Y_2-(t^2+y_1)Y_1$. Таким образом, поля $Y_1 = X_{10}$, $Y_2 = X_{11}$, $Y_3 = X_{2u}$ составляют полное семейство, т.е. процесс пополнения заканчивается на первом шаге и семейство D – полное. Соответствующая полная система дифференциальных уравнений имеет решение $\Phi(t,y) = y^2t^1 - y^1$. После замены переменных $x^1 = y^2t^1 - y^1$, $x^2 = y^2$ исходная система уравнений приводится к виду

$$\frac{\partial x^1}{\partial t^1} = \frac{\partial x^1}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial x^2}{\partial t^2} = x^2(t^1x^2 - x^1).$$

Заключение. Рассмотрена возможность применения методов теории управления в теории уравнений с частными производными.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-01-00625).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Яковенко Г.Н.* Теория управления регулярными системами. М., 2008.
2. *Елкин В.И.* Редукция нелинейных управляемых систем. Дифференциально-геометрический подход. М., 1997.
3. *Елкин В.И.* Редукция нелинейных управляемых систем. Декомпозиция и инвариантность по возмущениям. М., 2003.
4. *Елкин В.И.* Редукция нелинейных управляемых систем. Симметрии и классификация. М., 2006.
5. *Чеботарев Н.Г.* Непрерывные группы преобразований. М.; Л., 1940.
6. *Эйзенхарт Л.П.* Непрерывные группы преобразований. М., 1947.
7. *Hermann R., Krener A.J.* Nonlinear controllability and observability // IEEE Trans. Aut. Contr. 1977. V. AC–22. № 5. P. 728–740.
8. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М., 1989.
9. *Рашевский П.К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными. М.; Л., 1947.
10. *Лурье К.А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. М., 1975.
11. *Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М. и др.* Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Под ред. А.М. Виноградова, И.С. Красильщикова. М., 2005.

Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 07.06.2021 г.
После доработки 07.06.2021 г.
Принята к публикации 05.10.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1483–1490

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1+517.938

НАБЛЮДАТЕЛЬ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ЧЕТЫРЁХМЕРНОЙ СИСТЕМЫ С ВЕКТОРНЫМ ВЫХОДОМ

© 2021 г. А. Н. Канатников, О. С. Ткачева

Рассмотрена задача синтеза наблюдателя с линейной динамикой ошибки для четырёхмерной системы с векторным выходом. Получены необходимые и достаточные условия существования наблюдателя, предложен алгоритм его построения. Рассмотрен пример построения наблюдателя для четырёхмерной модели электрической активности сердца, представляющей собой систему двух связанных между собой уравнений Ван дер Поля.

DOI: 10.31857/S0374064121110066

Введение. Существуют различные подходы к восстановлению состояния динамической системы по её выходу. Один из таких подходов – построение наблюдателя. *Наблюдатель* – дополнительная система, которая в качестве входа использует выход исходной системы, а её состояние даёт оценку состояния исходной системы. Теме наблюдателей посвящено большое число работ (отметим монографии [1–3], обзор [4] и приведённую в них библиографию). В этом направлении достаточно глубоко исследованы системы со скалярным выходом, в то время как системы с векторным выходом изучены значительно меньше.

В данной работе для четырёхмерной системы с векторным выходом рассматривается наблюдатель с линейной динамикой ошибки. Синтез такого наблюдателя связан с приведением исходной системы к специальному виду (расширенному каноническому виду для построения наблюдателя, или третьему каноническому наблюдаемому виду) [1, с. 23; 5]. Основная проблема здесь как раз и состоит в таком преобразовании: для преобразованной системы наблюдатель строится без труда. Имеются необходимые и достаточные условия существования третьего канонического вида для произвольной динамической системы, но эти условия носят абстрактный характер и на практике трудно проверяемы. Отметим, что в случае двумерной системы со скалярным выходом построение наблюдателя с линейной динамикой ошибки не вызывает трудностей [2, с. 419; 6]. Однако уже в простейшем векторном случае четырёхмерной системы с двумерным выходом ситуация существенно сложнее: условия существования наблюдателя представляют собой систему из восьми дифференциальных уравнений в частных производных.

Статья организована следующим образом. В п. 1 приведены нужные в работе сведения о наблюдателях с линейной динамикой ошибки для нелинейных систем и из теории $K(x)$-двойственности, а также критерий существования наблюдателя на основе этой теории. В п. 2 сформулирован и доказан основной результат работы – необходимые и достаточные условия существования наблюдателя четырёхмерной системы. В п. 3 рассмотрен пример четырёхмерной системы, представляющей собой модель электрической активности сердечной системы на основе уравнения Ван дер Поля (она получена на материале статьи [7], см. также [8, 9]). В п. 4 показаны результаты численного эксперимента, проведённого с этой моделью. Заключение подводит итог выполненного исследования.

1. Наблюдатель с линейной динамикой ошибки. Рассмотрим динамическую систему с векторным выходом

$$\dot{x} = A(x), \quad y = h(x), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^k$, $A(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))^{\mathrm{т}} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $h(x) = (h_1(x), \ldots, h_k(x))^{\mathrm{т}}$.

Восстановление вектора состояния системы (1) по выходу y состоит в использовании последовательности функций $h(x)$, $L_A h(x)$, $L_A^2 h(x)$, $\ldots$, где $L_A h(x)$ – производная Ли функции h по векторному полю $A(x)$ системы (1) (производная функции h в силу системы (1)),

$L_A^s h(x) = L(L_A^{s-1} g(x))$, $s > 1$. Если восстановление возможно в окрестности каждой точки фазового пространства, то система называется *локально наблюдаемой* [2, с. 415; 5].

Если система (1) локально наблюдаема, то в окрестности заданной точки она в некоторой системе координат может быть представлена в *каноническом наблюдаемом виде*

$$\begin{gathered}\dot z_{11} = z_{12}, \quad \dot z_{12} = z_{13}, \quad \ldots, \quad \dot z_{1,l_1-1} = z_{1,l_1}, \quad \dot z_{1,l_1} = f_1(z),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dot z_{k1} = z_{k2}, \quad \dot z_{k2} = z_{k3}, \quad \ldots, \quad \dot z_{k,l_k-1} = z_{k,l_k}, \quad \dot z_{k,l_k} = f_k(z),\\ y_1 = z_{11}, \quad y_2 = z_{21}, \quad \ldots, \quad y_k = z_{k1}.\end{gathered} \tag{2}$$

Величины l_1, l_2, $\ldots$, l_k называются *индексами наблюдаемости*.

Представление (2) можно в блочно-векторной форме записать более компактно. Для этого через D^j обозначим квадратную матрицу порядка l_j, элементы d^j_{pq} $(p,q = \overline{1,l_j})$ которой определяются равенствами: $d^j_{pq} = 1$, если $p - q = -1$, и $d^j_{pq} = 0$ в противном случае; через $F^j(z)$ – вектор-столбец $(0, 0, \ldots, f_j(z))$ высоты l_j; через C^j – вектор-строку $(1, 0, \ldots, 0)$ длины l_j, $j = \overline{1,k}$. Тогда систему (2) можно записать в виде

$$\dot z = Dz + F(z), \quad y = Cz,$$

где $D = \operatorname{diag}(D^1, D^2, \ldots, D^k)$, $F(z) = (F^1(z), F^2(z), \ldots, F^k(z))^{\mathrm{т}}$, $C = \operatorname{diag}(C^1, C^2, \ldots, C^k)$.

Представление системы (1) вида

$$\dot\zeta = D^{\mathrm{т}}\zeta + \Psi(\tilde\zeta), \quad y = H(\tilde\zeta), \tag{3}$$

где $\tilde\zeta = (\zeta_{1,l_1}, \zeta_{2,l_2}, \ldots, \zeta_{k,l_k})^{\mathrm{т}}$, $\Psi(\tilde\zeta) = (\psi_1(\tilde\zeta), \psi_2(\tilde\zeta), \ldots, \psi_n(\tilde\zeta))^{\mathrm{т}}$, назовём *расширенным каноническим наблюдаемым видом для построения наблюдателя*, или просто *третьим каноническим наблюдаемым видом*. Этот канонический вид отличается от канонического вида (3) тем, что фазовые переменные в каждом блоке следуют в обратном порядке (так что вместо D имеем $D^{\mathrm{т}}$), а нелинейные добавки входят в каждое уравнение, но зависят только от переменных, присутствующих в выходе системы.

Для системы вида (3) при условии, что отображение H обратимо, наблюдатель с линейной динамикой ошибки строится в следующем виде:

$$\dot\eta = D^{\mathrm{т}}\eta + G\tilde C(\eta - \zeta) + \Psi(\tilde\zeta), \tag{4}$$

где $\tilde C = \operatorname{diag}(\tilde C^1, \tilde C^2, \ldots, \tilde C^k)$, а $\tilde C^j$ – вектор-строка $(0, 0, \ldots, 1)$ длины l_j, $j = \overline{1,k}$. Динамика ошибки $e = \eta - \zeta$ описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot e = (D^{\mathrm{т}} + GC)e.$$

При этом $n \times k$-матрицу G следует выбирать таким образом, чтобы квадратная матрица $D^{\mathrm{т}} + GC$ была гурвицевой.

Основные проблемы, возникающие здесь, – вопрос о существовании у заданной системы третьего канонического вида и при наличии последнего построение алгоритма приведения к нему. Решение этих проблем найдено в рамках теории $K(x)$-двойственности [5].

Рассмотрим динамическую систему с векторным управлением

$$\dot x = A(x) + B(x)u, \tag{5}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))^{\mathrm{т}} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $B(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ – матрица размера $n \times \times m$, $u \in \mathbb{R}^m$ – вектор управления. Класс систем (1) (динамических систем с выходом, ДС) и класс систем (5) (аффинных управляемых динамических систем, АУДС) связаны отношением двойственности.

Пусть $B_j(x)$ – столбцы матрицы $B(x)$, а $W^i(x)$ – матрицы Якоби векторных функций $H^i(x) = (h_i(x), L_A h_i(x), \ldots, L_A^{l_i-1} h_i(x))^{\mathrm{т}}$, имеющие размер $l_i \times n$. ДС (1) и АУДС (5) называются $K(x)$-*двойственными*, если выполняются равенства

$$W^i(x) B_j(x) = (0, \ldots, 0, k_{ij}(x))^{\mathrm{т}}, \quad i, j = \overline{1, k}; \tag{6}$$

обозначим $K(x) = (k_{ij}(x))_{i,j=1}^k$ [5]. Для любой локально наблюдаемой ДС и любой гладкой матрицы $K(x)$ существует $K(x)$-двойственная ей АУДС.

Теорема 1 [5]. *Локально наблюдаемая ДС (1), у которой все индексы наблюдаемости одинаковы: $l_1 = l_2 = \ldots = l_k = l$, допускает построение наблюдателя (4) в окрестности заданной точки x_0 тогда и только тогда, когда существует такая функциональная матрица $K(y)$ порядка k, гладкая в окрестности точки $h(x_0)$, что:*

а) алгебра Ли $K(h(x))$-двойственной аффинной управляемой системы коммутативна;

б) матрица $K(y)$ является матрицей Якоби некоторого гладкого отображения в окрестности точки $h(x_0)$, причём $\det K(h(x_0)) \neq 0$.

Замечание. Алгебра Ли $\mathcal{A}_n$ АУДС (5) порождается векторными полями $\mathrm{ad}_A^{i-1} B_j$, $i = \overline{1, l_j}$, $j = \overline{1, m}$, где $\mathrm{ad}_A^s B_j = \mathrm{ad}_A(\mathrm{ad}_A^{s-1} B_j)$, $\mathrm{ad}_A B_j = [A, B_j]$ – коммутатор векторных полей.

Пусть

$$V^l = (B_1, \ldots, (-1)^{l-1}\, \mathrm{ad}_A^{l-1} B_1, \ldots, B_m, \ldots, (-1)^{l-1}\, \mathrm{ad}_A^{l-1} B_m).$$

Матрица V^l состоит из части столбцов матрицы управляемости $K(x)$-двойственной АУДС.

Теорема 2 [5]. *Матрица Якоби отображения $x = T(\zeta)$, приводящего динамическую систему (1) к третьему каноническому наблюдаемому виду, записанная в переменных x, совпадает с матрицей $V^l(x)$, составленной для $K(h(x))$-двойственной АУДС.*

Теорема 1 доставляет условия существования у ДС третьего канонического вида, которые в конечном счёте сводятся к системе дифференциальных уравнений, выражающих равенство нулю коммутаторов векторных полей. Теорема 2 показывает, как найти замену переменных, приводящую ДС к третьему каноническому виду.

2. Четырёхмерная система с векторным выходом. Рассмотрим задачу построения наблюдателя с линейной динамикой ошибки для динамической системы четвёртого порядка с векторным выходом. Условие локальной наблюдаемости вместе с условием совпадения индексов наблюдаемости сводят задачу к частному случаю, когда размерность вектора выхода и два индекса наблюдаемости равны двум. Рассматривая вопрос о построении наблюдателя, сразу можно считать, что система задана в каноническом наблюдаемом виде (2):

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = F(x), \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = G(x), \quad y = (x_1, x_3), \tag{7}$$

здесь и ниже $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{т}}$.

Чтобы получить условия существования наблюдателя, найдём сначала $K(x)$-двойственную систему для произвольной матрицы $K(y)$ вида

$$K(y) = \begin{pmatrix} u_1(y) & v_1(y) \\ u_2(y) & v_2(y) \end{pmatrix},$$

где $u_1(y)$, $u_2(y)$, $v_1(y)$, $v_2(y)$ – функции, зависящие только от выхода системы, т.е. только от переменных x_1, x_3.

Находим подматрицы матрицы управляемости, соответствующие координатам выхода:

$$W^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления векторных полей B_1, B_2 двойственной АУДС используем уравнения (6). В результате получим, что

$$B_1 = (0, u_1, 0, u_2)^{\mathrm{т}}, \quad B_2 = (0, v_1, 0, v_2)^{\mathrm{т}}.$$

Найденные векторные поля B_1 и B_2 позволяют записать двойственную АУДС.

Условие коммутативности алгебры Ли эквивалентно тому, что векторные поля B_1, B_2, $\mathrm{ad}_A B_1 = [A, B]$, $\mathrm{ad}_A B_2$ попарно коммутируют. Для этого достаточно проверить равенство нулю векторных полей $[B_1, B_2]$, $[B_1, \mathrm{ad}_A B_1]$, $[B_2, \mathrm{ad}_A B_2]$, $[B_2, \mathrm{ad}_A B_1]$.

Для коммутатора $[B_1, B_2]$ имеем

$$[B_1, B_2] = \frac{\partial B_2}{\partial x} B_1 - \frac{\partial B_1}{\partial x} B_2 = 0,$$

т.е. векторные поля B_1 и B_2 коммутируют при любых условиях.

Вычислим векторное поле $\mathrm{ad}_A B_1$:

$$\mathrm{ad}_A B_1 = \begin{pmatrix} -u_1 \\ x_2 u_{1,x_1} + x_4 u_{1,x_3} - u_1 F_2 - u_2 F_4 \\ -u_2 \\ x_2 u_{2,x_1} + x_4 u_{2,x_3} - u_1 G_2 - u_2 G_4 \end{pmatrix},$$

где для краткости введены обозначения F_j и G_j для частных производных F_{x_j} и G_{x_j} соответственно. Аналогично (с заменой символа u на символ v) находим, что

$$\mathrm{ad}_A B_2 = \begin{pmatrix} -v_1 \\ x_2 v_{1,x_1} + x_4 v_{1,x_3} - v_1 F_2 - v_2 F_4 \\ -v_2 \\ x_2 v_{2,x_1} + x_4 v_{2,x_3} - v_1 G_2 - v_2 G_4 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычислим коммутатор $[B_1, \mathrm{ad}_A B_1]$:

$$[B_1, \mathrm{ad}_A B_1] = \begin{pmatrix} 0 \\ 2u_1 u_{1,x_1} + 2u_2 u_{1,x_3} - u_1^2 F_{22} - 2u_1 u_2 F_{24} - u_2^2 F_{44} \\ 0 \\ 2u_1 u_{2,x_1} + 2u_2 u_{2,x_3} - u_1^2 G_{22} - 2u_1 u_2 G_{24} - u_2^2 G_{44} \end{pmatrix},$$

где через F_{ij} и G_{ij} обозначены частные производные $F_{x_i x_j}$ и $G_{x_i x_j}$ соответственно. Аналогичным образом находится коммутатор $[B_2, \mathrm{ad}_A B_2]$:

$$[B_2, \mathrm{ad}_A B_2] = \begin{pmatrix} 0 \\ 2v_1 v_{1,x_1} + 2v_2 v_{1,x_3} - v_1^2 F_{22} - 2v_1 v_2 F_{24} - v_2^2 F_{44} \\ 0 \\ 2v_1 v_{2,x_1} + 2v_2 v_{2,x_3} - v_1^2 G_{22} - 2v_1 v_2 G_{24} - v_2^2 G_{44} \end{pmatrix}.$$

Наконец, вычислим последний коммутатор $[B_2, \mathrm{ad}_A B_1]$:

$$[B_2, \mathrm{ad}_A B_1] = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 v_{1,x_1} + u_2 v_{1,x_3} + v_1 u_{1,x_1} + v_2 u_{1,x_3} - u_1 v_1 F_{22} - (u_1 v_2 + v_1 u_2) F_{24} - u_2 v_2 F_{44} \\ 0 \\ v_1 u_{2,x_1} + v_2 u_{2,x_3} + u_1 v_{2,x_1} + u_2 v_{2,x_3} - u_1 v_1 G_{22} - (u_1 v_2 + v_1 u_2) G_{24} - u_2 v_2 G_{44} \end{pmatrix}.$$

В результате приходим к следующей системе условий для приведения системы (7) к третьему наблюдаемому каноническому виду:

$$u_{1,x_3} = v_{1,x_1}, \quad u_{2,x_3} = v_{2,x_1},$$

$$u_1^2 F_{22} + 2u_1 u_2 F_{24} + u_2^2 F_{44} - 2u_1 u_{1,x_1} - 2u_2 u_{1,x_3} = 0,$$

$$u_1^2 G_{22} + 2u_1 u_2 G_{24} + u_2^2 G_{44} - 2u_1 u_{2,x_1} - 2u_2 u_{2,x_3} = 0,$$

$$v_1^2 F_{22} + 2v_1 v_2 F_{24} + v_2^2 F_{44} - 2v_1 v_{1,x_1} - 2v_2 v_{1,x_3} = 0,$$

$$
\begin{gathered}
v_1^2 G_{22} + 2v_1 v_2 G_{24} + v_2^2 G_{44} - 2v_1 v_{2,x_1} - 2v_2 v_{2,x_3} = 0, \\
u_1 v_1 F_{22} + (u_1 v_2 + v_1 u_2) F_{24} + u_2 v_2 F_{44} - u_1 v_{1,x_1} - u_2 v_{1,x_3} - v_1 u_{1,x_1} - v_2 u_{1,x_3} = 0, \\
u_1 v_1 G_{22} + (u_1 v_2 + v_1 u_2) G_{24} + u_2 v_2 G_{44} - v_1 u_{2,x_1} - v_2 u_{2,x_3} - u_1 v_{2,x_1} - u_2 v_{2,x_3} = 0. \qquad (8)
\end{gathered}
$$

В системе (8) первая строка – условие того, что матрица $K(y)$ является матрицей Якоби некоторого отображения, остальные условия – условия коммутируемости векторных полей.

Последние шесть уравнений системы (8) распадаются на две группы: уравнения относительно F и уравнения относительно G. Каждая группа – это система трёх линейных алгебраических уравнений относительно трёх частных производных. Матрица каждой из этих двух систем имеет очень характерный вид. Она однородна, и её определитель фактически является степенью определителя матрицы $K(y)$, т.е. матрица невырождена:

$$
\det J_1 = \begin{vmatrix} v_1^2 & 2v_1 v_2 & v_2^2 \\ u_1^2 & 2u_1 u_2 & u_2^2 \\ u_1 v_1 & (u_1 v_2 + u_2 v_1) & u_2 v_2 \end{vmatrix} = (u_1 v_2 - u_2 v_1)^3.
$$

Отсюда вытекает, что частные производные второго порядка однозначно определяются через частные производные функций u_i, v_i, а следовательно, не зависят от переменных x_2, x_4, так как матрица $K(y)$ не зависит от этих переменных. Отсюда получаем следующий вывод.

Теорема 3. *Если система (7) приводится к третьему каноническому виду, то функции F и G являются квадратичными по переменным x_2, x_4.*

Если функции F и G удовлетворяют необходимому условию, то нужно решить систему (8) относительно четырёх функций u_i, v_i, $i = 1, 2$. Если такое решение существует, то система приводится к третьему каноническому виду. При этом замена переменных $x = T(\zeta)$, приводящая систему (7) к третьему каноническому виду, является решением следующей системы уравнений:

$$
\frac{dx}{d\zeta} = V^l = (B_1, -\mathrm{ad}_A B_1, B_2, -\mathrm{ad}_A B_2) = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & 0 & u_1 \\ v_1 & F_v & u_1 & F_u \\ 0 & v_2 & 0 & u_2 \\ v_2 & G_v & u_2 & G_u \end{pmatrix}, \qquad (9)
$$

где

$$
F_v = -x_2 v_{1x_1} - x_4 v_{1x_3} + v_1 F_{x_2} + v_2 F_{x_4}, \quad F_u = -x_2 u_{1x_1} - x_4 u_{1x_3} + u_1 F_{x_2} + u_2 F_{x_4},
$$

$$
G_v = -x_2 v_{2x_1} - x_4 v_{2x_3} + v_1 G_{x_2} + v_2 G_{x_4}, \quad G_u = -x_2 u_{2x_1} - x_4 u_{2x_3} + u_1 G_{x_2} + u_2 G_{x_4}.
$$

Для решения систему (9) необходимо преобразовать к виду $d\zeta/dx = (V^l)^{-1}$, и мы в результате приходим к задаче восстановления функций по их частным производным.

Замечание. Ошибка построенного наблюдателя асимптотически стремится к нулю в каноническеой системе координат. При переходе к исходным координатам стремление ошибки к нулю будет сохраняться, по крайней мере, локально, если траектория системы, отслеживаемая наблюдателем, является ограниченной при $t \to +\infty$. Если же траектория неограниченная, то сходимость наблюдателя можно гарантировать только при дополнительных условиях (например, при условии глобальной липшицевости замены переменных $x = T(\zeta)$).

3. Наблюдатель для системы двух связанных уравнений Ван дер Поля. Система

$$
\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a_1 x_2 (x_1 - w_{10})(x_1 - w_{11}) - x_1 (x_1 + d_1)(x_1 + e_2),
$$

$$
\dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = -a_2 x_4 (x_3 - w_{20})(x_3 - w_{21}) - x_3 (x_3 + d_2)(x_3 + e_2) + k_{21}(x_3 - x_1) \qquad (10)
$$

описывает электрическую активность сердца и представляет собой систему из двух связанных друг с другом модифицированных уравнений Ван дер Поля. Здесь x_1, x_3 – трансмембранные потенциалы в клетках синоатриального узла (SA) и атриовентикулярного узла (AV), а x_2, x_4 – скорости изменения этих потенциалов. В представленной модели не учтён третий узел сердечной системы – пучок Гиза–Пуркинье (предполагается, что он находится в состоянии блокады). В полном виде система из трёх связанных модифицированных уравнений Ван дер Поля как модель электрической активности сердца представлена в [7].

Измерению доступны только потенциалы электрической активности сердца, в то время как скорости потенциалов напрямую не измеряются. Поэтому в данном случае в качестве выхода следует рассматривать вектор-функцию $h(x) = (x_1, x_3)$. Рассмотрим задачу построения для системы (10) наблюдателя с линейной динамикой ошибки.

Рассматриваемая система является частным случаем системы (7) с функциями

$$F(x) = -a_1x_2(x_1 - w_{10})(x_1 - w_{11}) - x_1(x_1 + d_1)(x_1 + e_2),$$

$$G(x) = -a_2x_4(x_3 - w_{20})(x_3 - w_{21}) - x_3(x_3 + d_2)(x_3 + e_2) + k_{21}(x_3 - x_1).$$

Эти функции линейны по переменным x_2, x_4, так что необходимое условие, определяемое теоремой 3, выполнено. Более того, система уравнений (8) при этом существенно упрощается. Нетрудно заметить, что для того чтобы уравнения этой системы были выполнены, достаточно взять функции $u_1(y)$, $u_2(y)$, $v_1(y)$, $v_2(y)$ постоянными. Таким образом, рассматриваемая система приводится к третьему каноническому виду.

Положим

$$K(y) = \begin{pmatrix} u_1(y) & v_1(y) \\ u_2(y) & v_2(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно (9) для нахождения замены переменных, приводящей систему к третьему каноническому виду, получаем следующее уравнение:

$$\frac{dx}{d\zeta} = V^l = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & F_v & 0 & F_u \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & G_v & 1 & G_u \end{pmatrix}, \tag{11}$$

в котором в рассматриваемом случае $F_v = F_{x_2} = -a_1(x_1 - w_{10})(x_1 - w_{11})$, $F_u = F_{x_4} = 0$, $G_v = G_{x_2} = 0$, $G_u = G_{x_4} = -a_2(x_3 - w_{20})(x_3 - w_{21})$.

Система (11) распадается на две независимые подсистемы и легко решается. Решая её, находим искомую замену переменных:

$$\zeta_1 = a_1(3^{-1}x_1^3 - 2^{-1}(w_{10} + w_{11})x_1^2 + w_{10}w_{11}x_1) + x_2 + C_1, \quad \zeta_2 = x_1 + C_2,$$

$$\zeta_3 = a_2(3^{-1}x_3^3 - 2^{-1}(w_{20} + w_{21})x_3^2 + w_{20}w_{21}x_3) + x_4 + C_3, \quad \zeta_4 = x_3 + C_4,$$

где C_j – произвольные постоянные, которые можно положить равными нулю.

Обратная замена переменных (при $C_i = 0$, $i = \overline{1,4}$) имеет следующий вид:

$$x_1 = \zeta_2, \quad x_2 = \zeta_1 - a_1(3^{-1}\zeta_2^3 - 2^{-1}(w_{10} + w_{11})\zeta_2^2 + w_{10}w_{11}\zeta_2),$$

$$x_3 = \zeta_4, \quad x_4 = \zeta_3 - a_2(3^{-1}\zeta_4^3 - 2^{-1}(w_{20} + w_{21})\zeta_4^2 + w_{20}w_{21}\zeta_4). \tag{12}$$

Переход к третьему каноническому наблюдаемому виду даёт нам функцию $\Psi(\zeta_2, \zeta_4)$:

$$\Psi(\zeta_2, \zeta_4) = \begin{pmatrix} -\zeta_2(\zeta_2 + d_1)(\zeta_2 + e_2) \\ -a_1(3^{-1}\zeta_2^3 - 2^{-1}(w_{10} + w_{11})\zeta_2^2 + w_{10}w_{11}\zeta_2) \\ -\zeta_4(\zeta_4 + d_2)(\zeta_4 + e_2) + k_{21}(\zeta_4 - \zeta_2) \\ -a_2(3^{-1}\zeta_4^3 - 2^{-1}(w_{20} + w_{21})\zeta_4^2 + w_{20}w_{21}\zeta_4) \end{pmatrix}.$$

Наблюдатель с линейной динамикой ошибки строится по формуле (4), в которой

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Остаётся выбрать матрицу G, обеспечивая этим условие гурвицевости матрицы $M_e = D+GC$. Обозначив

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & g_{41} \\ g_{12} & g_{22} & g_{32} & g_{42} \end{pmatrix}^{\mathrm{т}},$$

получим

$$M_e = \begin{pmatrix} 0 & g_{11} & 0 & g_{12} \\ 1 & g_{21} & 0 & g_{22} \\ 0 & g_{31} & 0 & g_{32} \\ 0 & g_{41} & 1 & g_{42} \end{pmatrix}.$$

Запишем характеристический многочлен для матрицы M_e:

$$P(\lambda) = \lambda^4 + (-g_{21} - g_{42})\lambda^3 + (g_{21}g_{42} - g_{32} - g_{11} - g_{22}g_{41})\lambda^2 +$$
$$+ (g_{11}g_{42} - g_{12}g_{41} + g_{21}g_{32} - g_{22}g_{31})\lambda + g_{11}g_{32} - g_{12}g_{31}.$$

Задав по своему выбору четыре корня этого многочлена, получим систему из четырёх уравнений относительно восьми неизвестных – элементов второго и четвёртого столбцов матрицы G. Несложно заметить, что если, например, задать какие-либо значения элементов второго столбца, то относительно четырёх элементов четвёртого столбца получим систему линейных уравнений, решение которой не представляет сложности.

4. Численное моделирование. Работоспособность построенного наблюдателя для модели кардиостимулятора проверим с помощью вычислительного эксперимента. Объединяем систему (10) с системой (4), описывающей наблюдатель. Хотя в систему (4) формально входит вектор ζ – состояние исходной системы в каноническом виде, в действительности с учётом вида матрицы $\tilde{C}$ используются лишь переменные выхода.

Результат работы наблюдателя будем оценивать по разности векторов x и вектора $T(\eta)$, который получен из вектора η состояния наблюдателя с помощью преобразования T, описываемого соотношениями (12). Интегрирование объединённой системы будем проводить методом Рунге–Кутты с переменным шагом в среде Matlab (функция ode45).

В вычислительном эксперименте использованы следующие значения параметров системы (10):

$$a_1 = 1, \quad d_1 = 3, \quad e_1 = 3.5, \quad w_{10} = -0.81, \quad w_{11} = 0.82, \quad k_{21} = 1,$$
$$a_2 = 1, \quad d_2 = 3, \quad e_2 = 3.5, \quad w_{20} = -0.8, \quad w_{20} = 0.82.$$

Наблюдатель строился с собственными значениями -2, -3, -4, -5. Для переменных состояния модели и наблюдателя выбраны следующие начальные условия:

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0.01, \quad x_3(0) = -1, \quad x_4(0) = 3,$$
$$\eta_1(0) = 0.69, \quad \eta_2(0) = 1, \quad \eta_2(0) = 6.33, \quad \eta_4(0) = -1.$$

На рис. 1, 2 представлены результаты моделирования: динамика ошибок оценивания переменных x_2, x_4.

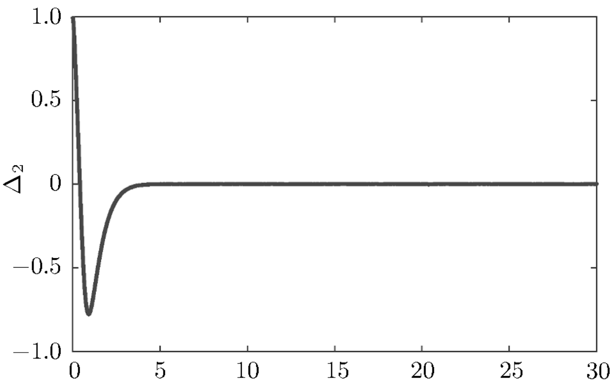

Рис. 1. Динамика ошибки оценивания переменной x_2.

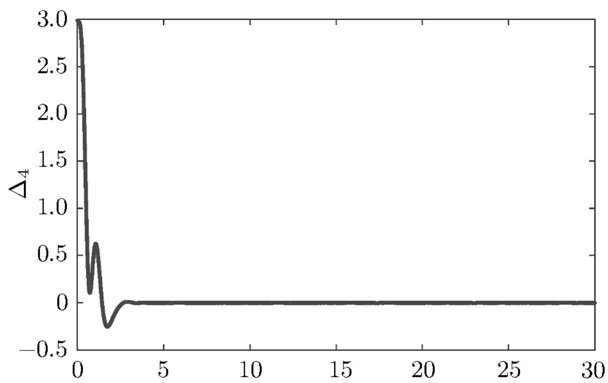

Рис. 2. Динамика ошибки оценивания переменной x_4.

Заключение. В работе рассмотрена задача построения наблюдателя с линейной динамикой ошибки для четырёхмерной системы с векторным выходом. Такой наблюдатель строится для локально наблюдаемой динамической системы, поэтому предполагалось, что исходная система имеет канонический вид. В работе получены необходимые и достаточные условия на правую часть четырёхмерной динамической системы, при выполнении которых построение для неё наблюдателя с линейной динамикой ошибки возможно. Эти условия найдены с помощью известных общих условий существования наблюдателя, сформулированных в терминах коммутативности некоторой алгебры Ли, практическая проверка которых затруднительна. Полученные условия существования наблюдателя и алгоритм его построения проверены на примере системы двух связанных между собой уравнений Ван дер Поля, которая представляет собой упрощённую модель электрической активности сердечной системы. Аналитические результаты проиллюстрированы численным моделированием.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и образования (грант 0705-2020-0047) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 20-07-00294а и 19-07-00817а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коровин С.К., Фомичев В.В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М., 2007.
2. *Краснощёченко В.И., Крищенко А.П.* Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М., 2005.
3. Nonlinear Observers and Applications / Ed. G. Besançon. Berlin, 2007.
4. *Голубев А.Е., Крищенко А.П., Ткачев С.Б.* Стабилизация нелинейных динамических систем с использованием оценки состояния системы асимптотическим наблюдателем (обзор) // Автоматика и телемеханика. 2005. № 7. С. 3–42.
5. *Крищенко А.П., Ткачев С.Б.* Двойственность нелинейных динамических систем и синтез наблюдателей // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 5. С. 649–663.
6. *Ткачева О.С., Канатников А.Н., Виноградова М.С.* Наблюдатель состояния для модели кардиостимулятора на основе уравнения Ван дер Поля // Математика и мат. моделирование. 2020. № 1. С. 16–32.
7. *Gois S.R.F.S.M., Savi M.A.* An analysis of heart rhythm dynamics using a three-coupled oscillator model // Chaos, Solitons & Fractals. 2009. V. 41. № 5. P. 2553–2565.
8. *Мурашко В.В., Струтынский А.В.* Электрокардиография. М., 2017.
9. *Van der Pol B., van der Mark J.* LXXII. The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart // The London, Edinburgh, and Dublin Philos. Magazine and J. of Sci. 1928. V. 6. № 38. P. 763–775.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 08.05.2021 г.
После доработки 29.05.2021 г.
Принята к публикации 05.10.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1491–1502

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.55

О ГАРАНТИРОВАННОМ УПРАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ФАЗОВЫХ КООРДИНАТАХ

© 2021 г. В. И. Максимов

Изучается задача управления в условиях неточного измерения части фазовых координат системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Суть задачи состоит в построении алгоритма формирования управления по принципу обратной связи, который гарантировал бы отслеживание траекторией заданной системы траектории другой системы, подверженной влиянию неизвестного возмущения, которое является функцией времени, суммируемой с квадратом евклидовой нормы. Рассмотрены случаи как непрерывного, так и дискретного по времени измерения. Указан набор устойчивых к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритмов решения задачи, основанных на конструкциях теории гарантирующего управления. Каждый из алгоритмов ориентирован на свои информационные условия относительно динамики системы и измеряемых координат.

DOI: 10.31857/S0374064121110078

Введение. Постановка задачи. Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений
$$\begin{aligned}\dot x(t) &= Ax(t)+By(t)+f_1(t), \quad t\in T=[0,\vartheta],\\ \dot y(t) &= Cx(t)+Dy(t)+Eu(t)+f(t)\end{aligned} \tag{1}$$
с начальным условием
$$x(0)=x_0, \quad y(0)=y_0.$$
Здесь $0<\vartheta<+\infty$, $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^N$, $u\in\mathbb{R}^r$, $f_1(\cdot)\in W^{1,\infty}(T;\mathbb{R}^n)=\{p(\cdot)\in L_2(T;\mathbb{R}^n):\dot p(\cdot)\in \in L_\infty(T;\mathbb{R}^n)\}$ и $f(\cdot)\in L_\infty(T;\mathbb{R}^N)$ – заданные функции, u – управление, A, B, C, D и E – стационарные матрицы соответствующих размеров.

Наряду с системой (1) имеется ещё одна система того же вида
$$\begin{aligned}\dot x_1(t) &= Ax_1(t)+By_1(t)+f_1(t), \quad t\in T,\\ \dot y_1(t) &= Cx_1(t)+Dy_1(t)+Ev(t)+f(t)\end{aligned} \tag{2}$$
с начальным условием
$$x_1(0)=x_{10}, \quad y_1(0)=y_{10}.$$
Эта система подвержена воздействию некоторого возмущения $v(\cdot)\in L_2(T;\mathbb{R}^r)$. Как само это возмущение $v(\cdot)$, так и отвечающее ему решение системы (2)
$$z_1(\cdot\,;z_{10},v(\cdot))=\{x_1(\cdot\,;z_{10},v(\cdot)),y_1(\cdot\,;z_{10},v(\cdot))\},$$
где $z_{10}=\{x_{10},y_{10}\}$, неизвестны.

В дискретные, достаточно частые, моменты времени $\tau_i\in\Delta=\{\tau_i\}_{i=0}^m$ ($\tau_0=0$, $\tau_m= =\vartheta$, $\tau_{i+1}=\tau_i+\delta$) измеряется часть фазовых состояний системы (2), а именно состояния $x_1(\tau_i)=x_1(\tau_i;z_{10},v(\cdot))$, а также состояния $z(\tau_i)=z(\tau_i;z_0,u(\cdot))=\{x(\tau_i;z_0,u(\cdot)),y(\tau_i;z_0,u(\cdot))\}$ ($z_0=\{x_0,y_0\}$) системы (1). Состояния $x_1(\tau_i)$ измеряются с ошибкой. Результаты измерений – векторы $\xi_i^h\in\mathbb{R}^n$, $i\in[0:m-1]$, – удовлетворяют неравенствам
$$|x_1(\tau_i)-\xi_i^h|_n\leqslant h. \tag{3}$$

Здесь $h \in (0,1)$ – уровень погрешности измерения, через $|\cdot|_n$ обозначена евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что

$$|x_0 - x_{10}|_n \leqslant h, \quad |y_0 - y_{10}|_N \leqslant h. \tag{4}$$

Необходимо сконструировать алгоритм формирования управления $u = u^h(\cdot)$ в системе (1), позволяющий осуществлять отслеживание решением $z(\cdot) = \{x(\cdot), y(\cdot)\}$ этой системы решение $z_1(\cdot) = \{x_1(\cdot), y_1(\cdot)\}$ системы (2). Таким образом, рассматривается задача, состоящая в построении алгоритма, который по текущим измерениям величин $x_1(\tau_i)$ и $z(\tau_i)$ формирует (по принципу обратной связи) управление $u = u^h(\cdot)$ такое, что отклонение решения $z^h(\cdot) = z(\cdot\,; z_0, u^h(\cdot))$ этой системы от решения системы (2) $z_1(\cdot) = z_1(\cdot\,; z_{10}, v(\cdot))$ в метрике пространства $C(T; \mathbb{R}^{n+N})$ мало при достаточной малости измерительной погрешности h.

Задача слежения – одна из классических задач теории управления. Она исследовалась многими авторами (см., например, [1, гл. 4, § 4; 2, гл. 7, § 3.3]). В данной статье мы рассмотрим случай неполной информации о фазовых координатах. При этом укажем четыре алгоритма решения задачи, которые основаны на комбинации метода динамического обращения [3, гл. 1, § 4; 4, гл. 6, § 17, 19] с известным в теории позиционных дифференциальных игр методом экстремального сдвига [5, гл. 3, § 13]. Другие алгоритмы решения задач слежения, основанные на подходящих модификациях метода экстремального сдвига, приведены в работах [6–9].

В дальнейшем матрицы A, B и E, а также функцию $f_1(\cdot)$ предполагаем известными. Матрицы C и D, а также функцию $f(\cdot)$ предполагаем неизвестными, считая известным лишь евклидову норму матрицы D. Неизвестен также вектор x_{10}.

Пусть для каждого $h \in (0,1)$ фиксировано семейство Δ_h разбиений отрезка T контрольными моментами времени $\tau_{h,i}$:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h), \quad \delta(h) \in (0, \delta_*), \tag{5}$$

где $\delta_* = \text{const} \in (0,1)$. Любую кусочно-постоянную функцию $\xi^h(\cdot): T \to \mathbb{R}^n$, $\xi^h(t) = \xi^h_i$ при $t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$, $i \in [0 : m_h - 1]$, удовлетворяющую ограничениям (3) (при $\tau_i = \tau_{h,i}$), будем называть *допустимым измерением точности* h.

Наряду с системами (1) и (2) введём ещё одну управляемую систему, которая описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{w}^h(t) = A\xi^h_i + By_{10} + \tilde{u}^h(t) + f_1(\tau_i), \quad w^h(0) = \xi^h_0, \quad t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \tag{6}$$

где управление $\tilde{u}^h(\cdot)$ находится по правилу

$$\tilde{u}^h(t) = \tilde{u}^h_i = U(\xi^h_i, w^h(\tau_i)) \quad \text{при} \quad t \in \delta_i, \quad i \in [0 : m_h - 1], \quad \tau_i = \tau_{h,i}, \tag{7}$$

ξ^h_i – результат измерения вектора $x_1(\tau_i)$ (см. (3)). Отображение U конструируется таким образом, что при соответствующем согласовании параметров h и $\delta(h)$ управление $\tilde{u}^h(\cdot)$ аппроксимирует в равномерной метрике ненаблюдаемую компоненту $y_1(\cdot)$. Любые функции

$$U(\,\cdot\,,\cdot\,) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N \quad \text{и} \quad V(\,\cdot\,,\cdot\,,\cdot\,) : T \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^r$$

будем называть *допустимыми обратными связями* (для системы (1)).

Решение $z = z^h(\cdot)$ системы (1) наблюдается в дискретные моменты $\tau_{h,i}$ и изменяется под воздействием некоторых обратных связей $\tilde{u}^h(\cdot) = U(\xi^h(\cdot), w^h(\cdot))$ и $u^h(\cdot) = V(\,\cdot\,, \tilde{u}^h(\cdot), y^h(\cdot))$. Таким образом, решение $z^h(\cdot) = \{x^h(\cdot), y^h(\cdot)\}$ системы (1) зависит от результатов $\xi^h(\cdot)$ измерения компоненты $x_1(\cdot)$ (т.е. допустимых измерений точности h) и удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений и начальному условию:

$$\dot{x}^h(t) = Ax^h(t) + By^h(t) + f_1(t), \quad t \in T,$$

$$\dot{y}^h(t) = Cx^h(t) + Dy^h(t) + Eu^h(t) + f(t), \quad x^h(0) = x_0, \quad y^h(0) = y_0, \tag{8}$$

где

$$u^h(t) = u_i^h = V(\tau_i, \tilde{u}_i^h, y^h(\tau_i)) \quad \text{при} \quad t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad \tau_i = \tau_{i,h}, \quad i \in [0 : m_h - 1], \tag{9}$$

векторы $\tilde{u}_i^h$ определяются согласно (7).

Рассматриваемая задача состоит в построении таких допустимых обратных связей $U(\,\cdot\,,\cdot\,)$ и $V(\,\cdot\,,\cdot\,,\cdot\,)$, чтобы выполнялось неравенство

$$\max_{i\in[0:m_h]} |z(\tau_{h,i}) - z^h(\tau_{h,i})|_{n+N} \leqslant \gamma(h), \tag{10}$$

где $\gamma(h) \to 0+$ при $h \to 0$.

Наряду с измерениями фазовых состояний x_1 системы (2) в дискретные моменты времени (см. (3)) рассмотрим также случай, когда измерения осуществляются "непрерывно". Именно, предполагается, что в каждый момент $t \in T$ определяется вектор $\xi^h(t) \in \mathbb{R}^n$ со свойством

$$|x_1(t) - \xi^h(t)|_n \leqslant h, \tag{11}$$

где функции $\xi^h(\cdot)$ измеримы по Лебегу. В этом случае вместо системы (6) будем рассматривать систему

$$\dot{w}^h(t) = A\xi^h(t) + By_{10} + \tilde{u}^h(t) + f_1(t), \quad w^h(0) = \xi_0^h, \quad t \in T, \tag{12}$$

где управление $\tilde{u}^h(\cdot)$ находится по правилу

$$\tilde{u}^h(t) = U(\xi^h(t), w^h(t)) \quad \text{при} \quad t \in T, \tag{13}$$

$\xi^h(t)$ – результат измерения вектора $x_1(t)$ (см. (11)). Допустимая обратная связь U конструируется таким образом, чтобы управление $\tilde{u}^h(\cdot)$ аппроксимировало в равномерной метрике компоненту $y_1(\cdot)$. Решение $z^h(\cdot)$ так же, как и в случае дискретного измерения, удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (6), в которой управления $u^h(\cdot)$ определяются по правилу

$$u^h(t) = V(t, \tilde{u}^h(t), y^h(t)) \quad \text{при} \quad t \in T. \tag{14}$$

Здесь векторы $\tilde{u}^h(t)$ определяются согласно (13). Задача в данном случае состоит в построении таких допустимых обратных связей $U(\,\cdot\,,\cdot\,)$ и $V(\,\cdot\,,\cdot\,,\cdot\,)$, чтобы выполнялось неравенство

$$\sup_{t\in T} |z_1(t) - z^h(t)|_{n+N} \leqslant \gamma_1(h), \tag{15}$$

где $\gamma_1(h) \to 0+$ при $h \to 0$.

В настоящей работе мы также исследуем задачу слежения в предположении, что измеряются координаты y_1 в дискретные моменты времени или непрерывно. В первом случае в моменты τ_i определяются векторы $\psi_i^h \in \mathbb{R}^N$, $i \in [0 : m_h - 1]$, со свойствами

$$|\psi_i^h - y_1(\tau_i)|_N \leqslant h,$$

а во втором случае в каждый момент $t \in T$ становится известным вектор $\psi^h(t) \in \mathbb{R}^N$, для которого

$$|\psi^h(t) - y_1(t)|_N \leqslant h, \tag{16}$$

где функции $\psi^h(\cdot)$ измеримы по Лебегу. Решение задачи слежения при измерении координат y_1 оказывается более простым (по сравнению со случаем измерения координат x_1), так как в этом случае отсутствует необходимость введения вспомогательной системы. Кроме того, о структуре управляемой системы необходим минимум информации: достаточно знать только матрицу E, а также норму матрицы D. Исследование обсуждаемой задачи начнём со случая, когда измеряются координаты x_1. В дальнейшем через c_1, c_2, $\ldots$, $c^{(1)}$, $c^{(1)}$, $\ldots$ $\ldots$, $d^{(0}$, $d^{(1)}$, $\ldots$ обозначаются положительные постоянные, выражения для которых могут быть записаны явно.

1. Алгоритм решения при непрерывном измерении координат x и x_1. Зададим две функции $\alpha(h):(0,1)\to(0,1)$ и $\alpha_1(h):(0,1)\to(0.1)$.

Пусть $\mathcal{X}(t)$ и $\mathcal{Y}(t)$ – фундаментальные матрицы систем уравнений

$$\dot{x}(t)=Ax(t) \quad \text{и} \quad \dot{y}(t)=Dy(t) \tag{17}$$

соответственно. Тогда справедливы неравенства

$$|\mathcal{X}(t)|\leqslant\exp\{\omega t\},\quad |\mathcal{Y}(t)|\leqslant\exp\{\chi t\},\quad t\geqslant 0,$$

где $\omega=|A|$, $\chi=|D|$. Через $|\cdot|$ обозначается евклидова норма матрицы.

До начала работы алгоритма фиксируем величину $h\in(0,1)$ и числа $\alpha=\alpha(h)$, $\alpha_1=\alpha_1(h)$. Управления $\tilde{u}^h(\cdot)$ (в системе (12)) и $u^h(\cdot)$ (в системе (8)) зададим по формулам (13) и (14), в которых положим

$$U(\xi^h(t),w^h(t))=\alpha^{-1}(\xi^h(t)-w^h(t)), \tag{18}$$

$$V(t,\tilde{u}^h(t),y^h(t))=\alpha_1^{-1}\exp\{-2\chi t\}E'(B^+\tilde{u}^h(t)+y_{10}-y^h(t)).$$

Здесь штрих означает транспонирование, символ B^+ – псевдообратную к B матрицу. На вход системы (8) при всех $t\in T$ будем подавать управление $u^h(t)$ вида (14), (18), а на вход системы (12) – управление $\tilde{u}^h(t)$ вида (13), (18).

Покажем, что допустимые обратные связи $U(\,\cdot\,,\cdot\,)$ и $V(\,\cdot\,,\cdot\,,\cdot\,)$ вида (18) обеспечивают выполнение неравенства (15).

Введём функционал

$$\lambda(t)=\exp\{-2\omega t\}|x^h(t)-x_1(t)|_n^2+\exp\{-2\chi t\}|y^h(t)-y_1(t)|_N^2. \tag{19}$$

Теорема 1. *Пусть $N\leqslant n$ и $\operatorname{rank}B=N$. Тогда справедливо неравенство*

$$\sup_{t\in T}\lambda(t)\leqslant d(\alpha+h^2+\alpha_1+h\alpha^{-1}+(\alpha\alpha_1^{-1})^2+(h(\alpha\alpha_1)^{-1})^2),$$

где d – положительная постоянная, не зависящая от h, α и α_1.

Доказательство теоремы состоит из двух этапов. На первом этапе оценивается величина $\sup\limits_{t\in T}|y_1(t)-y_{10}-B^+\tilde{u}^h(t)|_N$, а на втором – изменение величины $\lambda(t)$.

Этап 1. Введём функцию $Y(t)=y_1(t)-y_{10}$. Тогда первая подсистема системы (2) запишется в виде

$$\dot{x}_1(t)=Ax_1(t)+BY(t)+By_{10}+f_1(t).$$

В силу неравенства (11) справедлива оценка

$$|Ax_1(t)+By_{10}+f_1(t)-A\xi^h(t)-By_{10}-f_1(t)|_n\leqslant\tilde{M}_0h.$$

Заметим, что $Y(\cdot)\in W^{1,\infty}(T;\mathbb{R}^N)$ и $Y(0)=0$. Тогда в силу теоремы 1 [10] верно неравенство

$$\sup_{t\in T}|\tilde{u}^h(t)+B(y_{10}-y_1(t))|_n=\sup_{t\in T}|\tilde{u}^h(t)-BY(t)|_n\leqslant\nu_1(\alpha,h),$$

где $\nu_1(\alpha,h)=\tilde{M}_1(\alpha+h\alpha^{-1})$, $\tilde{M}_0>0$ и $\tilde{M}_1>0$ – некоторые постоянные. Значит,

$$|B^+\tilde{u}^h(t)+y_{10}-y_1(t)|_N\leqslant\tilde{M}_2\nu_1(\alpha,h). \tag{20}$$

Этап 2. Рассмотрим функцию

$$\varepsilon(t)=\lambda(t)+\alpha_1\int\limits_0^t(|u^h(\tau)|_r^2-|v(\tau)|_r^2)\,d\tau, \tag{21}$$

где $\alpha_1 = \alpha_1(h)$. Продифференцировав $\lambda(t)$ (см. (19)), будем иметь

$$\dot{\lambda}(t) \leqslant J_1(t) + J_2(t), \tag{22}$$

где $J_1(t) = 2\exp\{-2\omega t\}(\mu^h(t), \dot{\mu}^h(t))$, $J_2(t) = 2\exp\{-2\chi t\}(\nu^h(t), \dot{\nu}^h(t))$, $\mu^h(t) = x^h(t) - x_1(t)$, $\nu^h(t) = y^h(t) - y_1(t)$, через $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ обозначено скалярное произведение в конечномерном евклидовом пространстве. Нетрудно видеть, что справедливо неравенство

$$J_1(t) + J_2(t) \leqslant c_1\lambda(t) + J_3(t), \tag{23}$$

где $J_3(t) = 2\exp\{-2\chi t\}(\nu^h(t), E(u^h(t) - v(t)))$. В свою очередь, в силу (20), верна оценка

$$J_3(t) \leqslant 2\exp\{-2\chi t\}(y^h(t) - y_{10} - B^+\tilde{u}^h(t), E(u^h(t) - v(t))) + c_2\nu_1(\alpha, h)\{|u^h(t)|_r + |v(t)|_r\}. \tag{24}$$

Кроме того (см. (18), (13)),

$$|u^h(t)|_r \leqslant c_3\alpha_1^{-1}(\nu_1(\alpha, h) + \lambda^{1/2}(t)). \tag{25}$$

Поэтому при всех $t \in T$ будем иметь

$$c_2\nu_1(\alpha, h)\int\limits_0^t |u^h(s)|_r\,ds \leqslant c_2c_3\nu_1(\alpha, h)\alpha_1^{-1}\int\limits_0^t (\nu_1(\alpha, h) + \lambda^{1/2}(s))\,ds \leqslant$$

$$\leqslant c_2c_3\vartheta\nu_1^2(\alpha, h)\alpha_1^{-1} + 1/2c_2^2c_3^2\vartheta\nu_1^2(\alpha, h)\alpha_1^{-2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \lambda(s)\,ds. \tag{26}$$

В таком случае, учитывая оценки (24)–(26), а также включение $v(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r)$, заключаем, что при всех $t \in T$ справедливы неравенства

$$\int\limits_0^t J_3(s)\,ds + \alpha_1\int\limits_0^t (|u^h(s)|_r^2 - |v(s)|_r^2)\,ds \leqslant \pi(h, \alpha, \alpha_1) + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \lambda(s)\,ds, \tag{27}$$

где $\pi(h, \alpha, \alpha_1) = c_4(\nu_1^2(\alpha, h)\alpha_1^{-1} + \nu_1^2(\alpha, h)\alpha_1^{-2} + \nu_1(\alpha, h))$.

Из (22), (23), (27) вытекает оценка

$$\varepsilon(t) \leqslant \lambda(0) + \pi(h, \alpha, \alpha_1) + c_5\int\limits_0^t \lambda(s)\,ds.$$

Поэтому

$$\lambda(t) \leqslant c_6\alpha_1 + \lambda(0) + \pi(h, \alpha, \alpha_2) + c_5\int\limits_0^t \lambda(s)\,ds.$$

Воспользовавшись условием (4), а также леммой Гронуолла, получаем

$$\lambda(t) \leqslant (c_6\alpha_1 + h^2 + \pi(h, \alpha, \alpha_1))\exp\{c_5 t\}. \tag{28}$$

Отсюда следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и при при* $h \to 0$ *имеют место сходимости* $\alpha(h) \to 0$, $\alpha_1(h) \to 0$, $\alpha(h) \times \alpha_1^{-1}(h) \to 0$, $h(\alpha(h)\alpha_1(h))^{-1} \to 0$. *Тогда выполняется неравенство (15), в котором* $\gamma_1(h) = d^{(1)}(\alpha_1(h) + h^2 + \alpha^2(h)\alpha_1^{-2}(h) + h^2(\alpha(h)\alpha_1(h))^{-2})$.

2. Алгоритм решения при дискретном измерении координат x и x_1. Зададим две функции $\alpha(h) : (0,1) \to (0,1)$ и $\alpha_1(h) : (0,1) \to (0.1)$. В дальнейшем нам понадобится

Условие 1. Семейство разбиений Δ_h, $h \in (0,1)$, отрезка T и функции $\alpha(h)$, $\alpha_1(h)$ обладают следующими свойствами:

$$\delta(h) = C_0 h, \quad \alpha_1(h) \to 0, \quad \alpha(h) = C_1 h^{1/2}, \quad h^{1-\varepsilon}(h)\alpha_1^{-2}(h) \leqslant C_2 \quad \text{при} \quad h \to 0+.$$

Здесь $\varepsilon \in (0,1/2)$, $C_0 \in (0,1)$, C_1 и C_2 – положительные постоянные, не зависящие от h, δ, α и α_1.

Пусть, как и выше, $\mathcal{X}(t)$ и $\mathcal{Y}(t)$ – фундаментальные матрицы систем уравнений (17).

До начала работы алгоритма фиксируем величину $h \in (0,1)$, разбиение $\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}$ вида (5) с шагом $\delta = \delta(h)$ и числа $\alpha = \alpha(h)$, $\alpha_1 = \alpha_1(h)$. Работу алгоритма разобьём на конечное число однотипных шагов. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент τ_i, вычисляются векторы $\tilde{u}_i^h$ и u_i^h по формулам (7), (9), в которых

$$U(\xi_i^h, w^h(\tau_i)) = \alpha^{-1}(\xi_i^h - w^h(\tau_i)), \tag{29}$$

$$V(\tau_i, \tilde{u}_i^h, y^h(\tau_i)) = \alpha_1^{-1} \exp\{-2\chi(\tau_i + \delta)\} E'(B^+ \tilde{u}_i^h + y_{10} - y^h(\tau_i)).$$

Затем на вход системы (8) при всех $t \in \delta_i$ подаётся управление $u^h(t)$ вида (9), (29), а на вход системы (6) – управление $\tilde{u}^h(t)$ вида (7), (29). Под действием этих управлений система (8) переходит из состояния $z^h(\tau_i)$ в состояние $z^h(\tau_{i+1})$, а система (6) – из состояния $w^h(\tau_i)$ в состояние $w^h(\tau_{i+1})$. Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ.

Покажем, что допустимые обратные связи $U(\,\cdot\,,\cdot\,)$ и $V(\,\cdot\,,\cdot\,,\cdot\,)$ вида (29) обеспечивают выполнение неравенства (10).

В дальнейшем нам потребуется (см., например, [11, с. 312]) следующая

Лемма. (Дискретное неравенство Гроноулла). *Пусть* $\phi_j \geqslant 0$, $f_j \geqslant 0$ *при* $j \in [0:m]$ *и* $f_j \leqslant f_{j+1}$ *при* $j \in [0:m-1]$. *Тогда неравенства*

$$\phi_{j+1} \leqslant c_0 \delta \sum_{i=1}^{j} \phi_i + f_j, \quad j \in [1:m-1],$$

влекут за собой неравенства

$$\phi_{j+1} \leqslant f_j \exp\{c_0 j \delta\}, \quad j \in [0:m-1],$$

если $c_0 = \text{const} > 0$, $\phi_1 \leqslant f_0$.

Приведём основной результат работы.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие 1 и* $N \leqslant n$, $\operatorname{rank} B = N$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\max_{i \in [0:m_h-1]} \lambda(\tau_{i+1}) \leqslant d_0(\alpha_1(h) + h^\varepsilon), \tag{30}$$

в котором $d_0 = d_0(\varepsilon)$ *– положительная постоянная, не зависящая от* h, δ, α *и* α_1.

Доказательство теоремы 2, как и доказательство теоремы 1, состоит из двух этапов. На первом этапе оценивается величина $\sup\limits_{t \in T} |y_1(t) - y_{10} - B^+ \tilde{u}^h(t)|_N$, а на втором – изменение величины $\lambda(\tau_i)$, где функция $\lambda(\cdot)$ задаётся равенством (19).

Этап 1. Введём функцию $Y(t) = y_1(t) - y_{10}$. Тогда первая подсистема системы (2) запишется в виде

$$\dot{x}_1(t) = Ax_1(t) + BY(t) + By_{10} + f_1(t).$$

В силу условия $\dot{f}_1(\cdot) \in L_\infty(T; \mathbb{R}^n)$ и неравенств (3) справедливо соотношение

$$|Ax_1(t) + By_{10} + f_1(t) - A\xi_i^h - By_{10} - f_1(\tau_i)|_n \leqslant M_0(h + \delta)$$

(при п.в. $t \in \delta_i$ и всех $i \in [0:m-1]$, $m = m_h$). Заметим, что $Y(\cdot) \in W^{1,\infty}(T;\mathbb{R}^N)$ и $Y(0) = 0$. Тогда в силу теоремы 2 [10] верно неравенство

$$\sup_{t\in T} |\tilde{u}^h(t) + B(y_{10} - y_1(t))|_n = \sup_{t\in T} |\tilde{u}^h(t) - BY(t)|_n \leqslant \nu(\alpha, h, \delta),$$

где $\nu(\alpha, h, \delta) = M_1(\alpha + (h+\delta)\alpha^{-1})$, $\alpha = \alpha(h)$, $\delta = \delta(h)$, $M_0 > 0$ и $M_1 > 0$ – некоторые постоянные. Значит,

$$|B^+\tilde{u}^h(t) + y_{10} - y_1(t)|_N \leqslant M_2\nu(\alpha, h, \delta). \tag{31}$$

Этап 2. Оценим изменение величины $\varepsilon(t)$, определяемой равенством (21). Нетрудно видеть, что справедлива оценка

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \leqslant \varepsilon(\tau_i) + \lambda_{1i} + \mu_{1i} + \lambda_{2i} + \mu_{2i} + \alpha_1 \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (|u^h(\tau)|_r^2 - |v(\tau)|_r^2)\, d\tau, \tag{32}$$

в которой

$$\lambda_{1i} = 2\exp\{-2\omega\tau_{i+1}\}\biggl(\mathcal{X}(\delta)\mu^h(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau)B\nu^h(\tau)\, d\tau\biggr),$$

$$\mu^h(t) = x^h(t) - x_1(t), \quad \nu^h(t) = y^h(t) - y_1(t),$$

$$\mu_{1i} = \delta\exp\{-2\omega\tau_{i+1}\} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau)B\nu^h(\tau)|_n^2\, d\tau,$$

$$\lambda_{2i} = 2\biggl(S_i^h, \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \mathcal{Y}(\tau_{i+1} - \tau)\{C\mu^h(\tau) + E(u^h(\tau) - v(\tau))\}\, d\tau\biggr),$$

$$\mu_{2i} = \delta\exp\{-2\chi\tau_{i+1}\} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\mathcal{Y}(\tau_{i+1} - \tau)\{C\mu^h(\tau) + E(u^h(\tau) - v(\tau))\}|_N^2\, d\tau,$$

$$S_i^h = \exp\{-2\chi\tau_{i+1}\}\mathcal{Y}(\delta)\nu_i^h, \quad \nu_i^h = \nu^h(\tau_i).$$

Несложно видеть, что

$$\lambda_{1i} \leqslant c_0|\mu^h(\tau_i)|_n \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\nu^h(\tau)|_N\, d\tau \leqslant \delta\exp\{-2\omega\tau_i\}|\mu^h(\tau_i)|_n^2 + c^{(0)} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\nu^h(s)|_N^2\, ds. \tag{33}$$

Заметим, что при $t \in [0, \delta_*]$, $\delta_* \in (0,1)$, выполняется оценка $|\mathcal{Y}(t) - I|_N \leqslant c_* t$, $c_* = c_*(\delta_*)$, где I – единичная $N \times N$-матрица. Поэтому справедливо неравенство

$$|S_i^h - \exp\{-2\chi\tau_{i+1}\}\nu_i^h|_N \leqslant \delta c_*\exp\{-2\chi\tau_{i+1}\}|\nu_i^h|_N \leqslant \delta c_*|\nu_i^h|_N,$$

учитывая которое, получаем

$$|(S_i^h, \mathcal{Y}(\delta)Eu) - \exp\{-2\chi\tau_{i+1}\}(\nu_i^h, Eu)| \leqslant$$

$$\leqslant |S_i^h|_N|\mathcal{Y}(\delta) - I|_N|Eu|_N + |(S_i^h, Eu) - \exp\{-2\chi\tau_{i+1}\}(\nu_i^h, Eu)| \leqslant \delta c^{(1)}|\nu_i^h|_N|Eu|_N. \tag{34}$$

Далее, в силу (34) имеем

$$\lambda_{2i} \leqslant 2\exp\{-2\chi\tau_{i+1}\}\Bigl(y^h(\tau_i) - y_{10} - B^+\tilde{u}_i^h, E\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(u_i^h - v(\tau))\,d\tau\Bigr) + \sum_{j=1}^{3} I_{ji}.$$

Здесь

$$I_{1i} = c^{(2)}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|B^+\tilde{u}_i^h + y_{10} - y_1(\tau_i)|_N|u_i^h - v(\tau)|_r\,d\tau, \quad I_{2i} = c^{(3)}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|\nu^h(\tau_i)|_N|\mu^h(\tau)|_n\,d\tau,$$

$$I_{3i} = c^{(4)}\delta|\nu^h(\tau_i)|_N\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|u_i^h - v(\tau)|_r\,d\tau.$$

Заметим, что (см. (31)) $|B^+\tilde{u}_i^h + y_{10} - y_1(\tau_i)|_N \leqslant M_2\nu(\alpha,h,\delta)$. Следовательно, при $\varepsilon \in (0,1)$ имеет место оценка

$$I_{1i} \leqslant c^{(2)}\nu(\alpha,h,\delta)\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(|u_i^h|_r + |v(\tau)|_r)\,d\tau \leqslant c^{(5)}\nu^2(\alpha,h,\delta)\delta^\varepsilon + \delta^{1-\varepsilon}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(|u_i^h|_r^2 + |v(\tau)|_r^2)\,d\tau. \quad (35)$$

Нетрудно видеть, что справедливы неравенства

$$I_{2i} \leqslant c^{(3)}\delta^{1/2}|\nu^h(\tau_i)|_N\Bigl(\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|\mu^h(s)|_n^2\,ds\Bigr)^{1/2} \leqslant \frac{1}{2}\delta\exp\{-2\chi\tau_i\}|\nu^h(\tau_i)|_N^2 + c^{(6)}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|\mu^h(s)|_n^2\,ds,$$

$$I_{3i} \leqslant \frac{1}{2}\delta\exp\{-2\chi\tau_i\}|\nu^h(\tau_i)|_N^2 + c^{(7)}\delta\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(|u_i^h|_r^2 + |v(s)|_r^2)\,ds.$$

Учитывая оценку (35), последние два неравенства, а также правило выбора управления $u^h(\cdot)$ (см. (9), (29)), получаем

$$\lambda_{2i} + \alpha_1\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(|u^h(s)|_r^2 - |v(s)|_r^2)\,ds \leqslant \delta\exp\{-2\chi\tau_i\}|\nu^h(\tau_i)|_N^2 + c^{(5)}\nu^2(\alpha,h,\delta)\delta^\varepsilon +$$

$$+ c^{(6)}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|\mu^h(s)|_n^2\,ds + c^{(8)}\delta^{1-\varepsilon}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(|u_i^h|_r^2 + |v(s)|_r^2)\,ds. \quad (36)$$

Кроме того, верны оценки

$$\mu_{1i} \leqslant \delta c^{(9)}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|\nu^h(\tau)|_N^2\,d\tau \quad \text{и} \quad \mu_{2i} \leqslant \delta c^{(10)}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(|\mu^h(\tau)|_n^2 + |u_i^h|_r^2 + |v(\tau)|_r^2)\,d\tau. \quad (37)$$

Вследствие неравенств (33), (36), (37) из оценки (32) вытекает, что

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \leqslant \varepsilon(\tau_i) + \delta\lambda(\tau_i) + \delta^{1-\varepsilon}c^{(11)}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(|u_i^h|_r^2 + |v(\tau)|_r^2)\,d\tau + c^{(5)}\nu^2(\alpha,h,\delta)\delta^\varepsilon +$$

$$+ c^{(12)}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(|\mu^h(\tau)|_n^2 + |\nu^h(\tau)|_N^2)\,d\tau. \quad (38)$$

При $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ имеем

$$|\mu^h(t)|_n^2 + |\nu^h(t)|_N^2 \leqslant c^{(13)}\biggl(\lambda(\tau_i) + \delta \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (|u_i^h|_r^2 + |v(\tau)|_r^2)\, d\tau\biggr).$$

Поэтому из (38) следует неравенство

$$\lambda(\tau_{i+1}) \leqslant (1 + c^{(14)}\delta)\lambda(\tau_i) + \alpha_1 \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |v(\tau)|_r^2\, d\tau + c^{(15)}\delta^{1-\varepsilon} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (|v(\tau)|_r^2 + |u_i^h|_r^2)\, d\tau + c^{(5)}\nu^2(\alpha, h, \delta)\delta^\varepsilon,$$

учитывая которое, аналогично [5, с. 59–64] получаем

$$\lambda(\tau_{i+1}) \leqslant \lambda(0) + c^{(16)}\biggl(\delta^{\varepsilon-1}\nu^2(\alpha, h, \delta) + \alpha_1 \int\limits_0^{\tau_{i+1}} |v(\tau)|_r^2\, d\tau + \delta^{1-\varepsilon} \int\limits_0^{\tau_{i+1}} \{|u^h(\tau)|_r^2 + |v(\tau)|_r^2\}\, d\tau\biggr).$$

Тогда с учётом условия (4), а также включения $v(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r)$ из последнего неравенства выводим оценку

$$\lambda(\tau_{i+1}) \leqslant c^{(17)}\biggl(h^2 + \delta^{1-\varepsilon} + \delta^{\varepsilon-1}\nu^2(\alpha, h, \delta) + \alpha_1 + \delta^{2-\varepsilon}\sum_{j=0}^{i} |u_j^h|_r^2\biggr). \tag{39}$$

В свою очередь, в силу (31), (29) получаем

$$|u_i^h|_r^2 \leqslant \alpha_1^{-2}c^{(18)}(|B^+\tilde{u}_i^h + y_{10} - y_1(\tau_i)|_N^2 + |y^h(\tau_i) - y_1(\tau_i)|_N^2) \leqslant \alpha_1^{-2}c^{(19)}(\lambda(\tau_i) + \nu^2(\alpha, h, \delta)).$$

Поэтому справедлива оценка

$$\delta\sum_{j=0}^{i} |u_j^h|_r^2 \leqslant c^{(20)}\biggl(\delta\alpha_1^{-2}\sum_{j=0}^{i}\lambda(\tau_j) + \alpha_1^{-2}\nu^2(\alpha, h, \delta)\biggr). \tag{40}$$

В таком случае вследствие (39), (40) имеем

$$\lambda(\tau_{i+1}) \leqslant c^{(21)}\biggl(\alpha_1 + \delta^{1-\varepsilon} + h^2 + \delta^{2-\varepsilon}\alpha_1^{-2}\sum_{j=0}^{i}\lambda(\tau_j) + (\alpha_1^{-2}\delta^{1-\varepsilon} + \delta^{\varepsilon-1})\nu^2(\alpha, h, \delta)\biggr). \tag{41}$$

При $\delta(h) = C_0 h$ справедливо неравенство

$$\delta^{\varepsilon-1}\nu^2(\alpha, h, \delta) \leqslant c^{(22)}(\alpha^2\delta^{\varepsilon-1} + (h^2 + \delta^2)\alpha^{-2}\delta^{\varepsilon-1}) \leqslant c^{(23)}(\alpha^2 h^{\varepsilon-1} + h^{1+\varepsilon}\alpha^{-2}).$$

Отсюда при $\alpha(h) = C_1 h^{1/2}$ находим, что

$$\delta^{\varepsilon-1}\nu^2(\alpha, h, \delta) \leqslant c^{(24)}h^\varepsilon. \tag{42}$$

В свою очередь,

$$\alpha_1^{-2}\delta^{1-\varepsilon}\nu^2(\alpha, h, \delta) \leqslant c^{(25)}\alpha_1^{-2}(\alpha^2 h^{1-\varepsilon} + h^{3-\varepsilon}\alpha^{-2}) \leqslant c^{(26)}\alpha_1^{-2}h^{2-\varepsilon}. \tag{43}$$

Из (41), учитывая (42) и (43), получаем в силу леммы 2 оценку

$$\lambda(\tau_{i+1}) \leqslant c^{(27)}(\alpha_1(h) + h^\varepsilon + h^{1-\varepsilon} + h^{2-\varepsilon}\alpha_1^{-2}(h))\exp\{c^{(21)}\vartheta\delta^{1-\varepsilon}\alpha_1^{-2}(h)\} \leqslant c^{(28)}(\alpha_1(h) + h^\varepsilon),$$

в силу которой верно неравенство (30). Теорема доказана.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 2. *Пусть выполнено условие 1. Тогда справедливо неравенство (10), в котором* $\gamma(h) = d^{(2)}\{\alpha(h) + h^\varepsilon\}$.

Замечание. Описанные выше алгоритмы применимы также в случае, когда управляемая система подвержена внешнему возмущению, т.е. когда система (1) имеет вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + By(t) + f_1(t), \quad t \in T = [0, \vartheta],$$

$$\dot{y}(t) = Cx(t) + Dy(t) + E(u(t) - v_1(t)) + f(t),$$

где $v_1(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r)$ – неизвестное возмущение. В этом случае система (8) записывается следующим образом:

$$\dot{x}^h(t) = Ax^h(t) + By^h(t) + f_1(t), \quad t \in T,$$

$$\dot{y}^h(t) = Cx^h(t) + Dy^h(t) + E(u^h(t) - v_1(t)) + f(t), \quad x^h(0) = x_0, \quad y^h(0) = y_0.$$

3. Алгоритм решения при непрерывном измерении координат $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{y_1}$. Зададим функцию $\alpha_1(h) : (0,1) \to (0,1)$.

До начала работы алгоритма фиксируем величину $h \in (0,1)$ и число $\alpha_1 = \alpha_1(h)$. Управления $u^h(\cdot)$ (в системе (8)) зададим по формуле

$$u^h(t) = V(t, \psi^h(t), y^h(t)) = \alpha_1^{-1} \exp\{-2\chi t\} E'(\psi^h(t) - y^h(t)). \tag{44}$$

Таким образом, на вход системы (8) при всех $t \in T$ будем подавать управление $u^h(t)$, задаваемое равенством (44).

Теорема 3. *Справедливо неравенство*

$$\sup_{t\in T} \lambda(t) \leqslant d_1(\alpha_1 + h + h^2\alpha_1^{-2}), \tag{45}$$

где d_1 *– положительная постоянная, не зависящая от* h *и* α_1.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1. При этом оценивается изменение величин $\lambda(t)$ и $\varepsilon(t)$ (см. определения (19) и (21)). С помощью неравенств (16) доказывается, что вместо неравенства (24) имеет место неравенство

$$J_3(t) \leqslant 2\exp\{-2\chi t\}(y^h(t) - \psi^h(t), E(u^h(t) - v(t))) + c_2 h(|u^h(t)|_r + |v(t)|_r).$$

Далее, аналогично (28) устанавливается оценка $\lambda(t) \leqslant c_3(\alpha_1 + h^2\alpha_1^{-1} + h^2\alpha_1^{-2} + h)$. Отсюда следует неравенство (45).

Из теоремы 3 вытекает

Следствие 3. *Пусть* $\alpha_1(h) \to 0$, $h\alpha_1^{-1}(h) \to 0$ *при* $h \to 0$. *Тогда справедливо неравенство (15), в котором* $\gamma_1(h) = d^{(3)}(\alpha_1(h) + h^2\alpha_1^{-2}(h) + h)$.

4. Алгоритм решения при дискретном измерении координат $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{y_1}$. Зададим функцию $\alpha_1(h) : (0,1) \to (0,1)$. В дальнейшем нам понадобится

Условие 2. Имеют место равенства $\delta(h) = C_* h$, $\alpha_1(h) = C_{**} h^{(1-\varepsilon)/2}$, где C_*, C_{**} – положительные постоянные, $\varepsilon = \text{const} \in (0,1)$.

До начала работы алгоритма фиксируем величину $h \in (0,1)$, разбиение $\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}$ вида (5) и число $\alpha_1 = \alpha_1(h)$. Работу алгоритма разобьём на конечное число однотипных шагов. В течение i-го шага $(i \in [0 : m-1],\ m = m_h)$, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент τ_i, вычисляется вектор u_i^h по формуле

$$u_i^h = V(\tau_i, \psi_i^h, y^h(\tau_i)) = \alpha_1^{-1} \exp\{-2\chi\tau_{i+1}\} E'(\psi_i^h - y^h(\tau_i)). \tag{46}$$

Затем на вход системы (8) при всех $t \in \delta_i$ подаётся управление $u^h(t) = u_i^h$. Под действием этого управления система (8) переходит из состояния $z^h(\tau_i)$ в состояние $z^h(\tau_{i+1})$. Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие 2. Тогда справедливо неравенство*

$$\max_{i\in[0:m_h-1]} \lambda(\tau_{i+1}) \leqslant d_2 h^{(1-\varepsilon)/2}, \tag{47}$$

где d_2 *– положительная постоянная, не зависящая от* h, δ *и* α_1.

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущих теорем, оценим изменение величины (21). Нетрудно видеть, что справедливы неравенства (32) и (34). В силу (34) имеем

$$\lambda_{2i} \leqslant 2\exp\{-2\chi\tau_{i+1}\}\bigg(y^h(\tau_i) - \psi_i^h, \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} E\{u_i^h - v(\tau)\}\,d\tau\bigg) + \sum_{j=1}^{3} I_{ji}.$$

Здесь

$$I_{1i} = c^{(2)} h \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\psi_i^h - y^h(\tau_i)|_N |u_i^h - v(\tau)|_r\,d\tau,$$

величины I_{2i} и I_{3i} – те же, что в доказательстве теоремы 2. Далее, справедливы оценки (37). Следовательно, верно неравенство

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \leqslant \varepsilon(\tau_i) + \delta\lambda(\tau_i) + \delta^{1-\varepsilon} c^{(11)} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (|u_i^h|_r^2 + |v(\tau)|_r^2)\,d\tau +$$

$$+ c^{(5)} h^2 \delta^{\varepsilon} + c^{(12)} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (|\mu^h(s)|_n^2 + |\nu(s)|_N^2)\,ds,$$

из которого вытекает, что

$$\lambda(\tau_{i+1}) \leqslant (1 + c^{(14)}\delta)\lambda(\tau_i) + \alpha_1 \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |v(\tau)|_r^2\,d\tau + c^{(15)}\delta^{1-\varepsilon} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (|v(\tau)|_r^2 + |u_i^h|_r^2)\,d\tau + c^{(5)} h^2 \delta^{\varepsilon}. \tag{48}$$

В свою очередь, применяя последовательно неравенства (48), получаем

$$\lambda(\tau_{i+1}) \leqslant \lambda(0) + c^{(16)}\bigg(\delta^{\varepsilon-1} h^2 + \alpha_1 \int\limits_0^{\tau_{i+1}} |v(\tau)|_r^2\,d\tau + \delta^{1-\varepsilon} \int\limits_0^{\tau_{i+1}} (|u^h(\tau)|_r^2 + |v(\tau)|_r^2)\,d\tau\bigg).$$

В таком случае, учитывая условие (4), а также включение $v(\cdot) \in L_2(T;\mathbb{R}^r)$, из последнего неравенства выводим аналогичную (39) оценку

$$\lambda(\tau_{i+1}) \leqslant c^{(17)}\bigg(\delta^{1-\varepsilon} + \delta^{\varepsilon-1} h^2 + \alpha_1 + \delta^{2-\varepsilon} \sum_{j=0}^{i} |u_j^h|_r^2\bigg). \tag{49}$$

Воспользовавшись формулой (46), получаем $|u_i^h|_r^2 \leqslant \alpha_1^{-2} c^{(19)}(\lambda(\tau_i) + h^2)$. Поэтому справедлива оценка

$$\delta \sum_{j=0}^{i} |u_j^h|_r^2 \leqslant c^{(20)}\bigg(\delta\alpha_1^{-2} \sum_{j=0}^{i} \lambda(\tau_j) + \alpha_1^{-2} h^2\bigg). \tag{50}$$

Следовательно, ввиду (49), (50) имеем неравенство

$$\lambda(\tau_{i+1}) \leqslant c^{(21)}\bigg(\alpha_1 + \delta^{1-\varepsilon} + \delta^{2-\varepsilon}\alpha_1^{-2} \sum_{j=0}^{i} \lambda(\tau_j) + (\alpha_1^{-2}\delta^{1-\varepsilon} + \delta^{\varepsilon-1})h^2\bigg), \quad i \in [0:m-1],$$

из которого аналогично [5, с. 59–64] следует, что

$$\lambda(\tau_i) \leqslant c^{(21)}(\alpha_1 + \delta^{1-\varepsilon} + h^2(\delta^{\varepsilon-1} + \alpha_1^{-2}\delta^{1-\varepsilon}))\exp\{c^{(21)}\delta^{2-\varepsilon}\alpha_1^{-2}i\}.$$

Значит,

$$\lambda(\tau_i) \leqslant c^{(21)}(\alpha_1 + \delta^{1-\varepsilon} + h^2(\delta^{\varepsilon-1} + \delta^{1-\varepsilon}\alpha_1^{-2}))\exp\{c^{(21)}\vartheta\delta^{1-\varepsilon}\alpha_1^{-2}\}. \tag{51}$$

При выполнении условия 2 имеем $\delta^{1-\varepsilon}\alpha_1^{-2} = c^{(22)}$, $h^2\delta^{\varepsilon-1} = c^{(23)}h^{1+\varepsilon}$. Поэтому из (51) получаем оценку

$$\lambda(\tau_i) \leqslant c^{(24)}h^{(1-\varepsilon)/2}, \quad i \in [0:m],$$

в силу которой верно неравенство (47). Теорема доказана.

Из теоремы 4 вытекает

Следствие 4. *Пусть выполнено условие 2. Тогда справедливо неравенство (10), в котором* $\gamma(h) = d^{(4)}h^{(1-\varepsilon)/2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айзерман М.А.* Лекции по теории автоматического регулирования. М., 1958.
2. *Егоров А.И.* Основы теории управления. М., 2004.
3. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. London, 1995.
4. *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. М., 1999.
5. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
6. *Осипов Ю.С., Максимов В.И.* Отслеживание решения нелинейного распределенного дифференциального уравнения законами обратной связи // Сиб. журн. вычислит. математики. 2018. Т. 21. № 2. С. 201–213.
7. *Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Задача ресурсосберегающего слежения на бесконечном промежутке времени // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 7. С. 993–1002.
8. *Близорукова М.С., Максимов В.И.* О одном алгоритме отслеживания движения эталонной системы с последействием при измерении части координат // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 3. С. 415–426.
9. *Maksimov V.I.* Regularized extremal shift in problems of stable control // System Modeling and Optimization. CSMO 2011. IFIP Advances in Information and Communication Technology / Eds. D. Homberg, F. Troltzsch. Berlin; Heidelberg, 2013. V. 391. P. 112–121.
10. *Максимов В.И.* Об одном алгоритме восстановления управлений в равномерной метрике // Прикл. математика и механика. 2013. Т. 77. Вып. 2. С. 292–301.
11. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. М., 1971.

Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 05.04.2021 г.
После доработки 05.04.2021 г.
Принята к публикации 05.10.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1503–1515

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.58

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ С НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЯМИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЙ

© 2021 г. К. С. Маянцев, П. А. Точилин

Рассматривается задача управления кусочно-линейной системой на конечном отрезке времени в условиях неопределённости на основании неполной и неточной информации. Разработана схема приближённого решения, включающая построение вспомогательных кусочно-квадратичных функций цены. Приведены формулы для расчёта такой функции, позволяющей оценить извне информационное множество кусочно-линейной системы. Предложен алгоритм построения позиционного управления, минимизирующего (в соответствующей метрике) отклонение внешней оценки информационного множества от внутренней оценки множества разрешимости и решающего задачу о переводе траектории системы в малую окрестность целевого множества за заданное время.

DOI: 10.31857/S037406412111008X

Введение. В работе рассматривается задача целевого управления для кусочно-линейной системы с переключениями (частного случая гибридной системы) [1, 2]. Необходимо перевести траекторию системы из начального множества в малую окрестность целевого множества на заданном отрезке времени. Начальное положение системы считается неизвестным, а в уравнениях динамики имеются погрешности (неопределённости). Единственная доступная информация о текущем состоянии системы поступает из уравнений наблюдения. При этом наблюдения являются неполными и неточными.

Как известно [3], при решении задач управления на основании неполной и неточной информации о текущем состоянии наиболее важным является правильный выбор позиции системы. В [3] предложены несколько вариантов конструкций позиций, включающих либо информационные множества системы, либо соответствующие функции цены. В частном случае линейной динамики могут быть реализованы эффективные приближённые методы для решения задачи управления [4]. В настоящей работе указанные выше общие идеи реализованы для специального случая кусочно-линейной динамики, а в позицию системы включена внешняя оценка информационного множества.

Из задачи позиционного управления по результатам наблюдений можно выделить несколько ключевых подзадач: 1) построение множеств разрешимости (попятных множеств достижимости) [5] или их внутренних оценок; 2) построение информационных множеств; 3) синтез управлений за счёт применения модификации метода экстремального прицеливания [6]. Особенностью данной работы является то, что для решения указанных подзадач используется специальный класс непрерывных кусочно-квадратичных функций цены, ранее применявшихся авторами при решении задач достижимости [7], разрешимости и синтеза управлений [8, 9] на основании полной информации о состоянии системы.

В работе, используя кусочно-квадратичные функции цены, а также идею принципа сравнения [5, 10], получены формулы для построения внешних оценок информационных множеств кусочно-линейной системы и разработана общая схема вычисления синтеза управлений за счёт прицеливания оценками информационных множеств на внутренние аппроксимации множеств разрешимости.

1. Математическая модель системы. Рассмотрим математическую модель *системы с переключениями*, которую также будем называть *кусочно-линейной системой*. Она состоит из совокупности N подсистем, каждая из которых задаётся системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A^{(i)}(t)x + B^{(i)}(t)u + C^{(i)}(t)v + d^{(i)}(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad i = \overline{1, N}. \tag{1}$$

В любой момент времени активной является ровно одна из этих систем. Вектор $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ – фазовая траектория системы; $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ является управляющим параметром, $v \in \mathbb{R}^{n_v}$ – неопределённостью (помехой) динамики. Матричнозначные функции $A^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B^{(i)}(t) \in \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $C^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_v}$ и вектор-функции $d^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ заданы и непрерывны на $[t_0, t_1]$.

Модель рассматриваемой кусочно-линейной системы включает в себя также набор правил *мгновенных переключений* активной подсистемы. В фазовом пространстве $\mathbb{R}^{n_x}$ задана ограниченная замкнутая область Ω. Область Ω поделена на подобласти $\Omega^{(i)}$, $i = \overline{1, N}$, с помощью *гиперплоскостей переключений*:

$$\mathcal{H}^{(k)} = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} \colon \langle x, c^{(k)} \rangle = \gamma^{(k)}\}, \quad \|c^{(k)}\| = 1, \quad k = \overline{1, N_{\mathcal{H}}}.$$

Траектория системы $x(t)$ удовлетворяет i-му уравнению из (1), если $x(t) \in \Omega^{(i)}$. В момент перехода $x(t)$ из $\Omega^{(i)}$ в $\Omega^{(j)}$ (через границу между i-й и j-й областями) происходит обязательная смена активной подсистемы ("режима функционирования") с i-й на j-ю, которую также будем называть *переключением*. В случае возможного движения вдоль границы между областями $\Omega^{(i)}$ и $\Omega^{(j)}$ время переключения определяется как первый момент схода траектории с границы внутрь области $\Omega^{(j)}$. Далее будем рассматривать только такие траектории системы (1), которые не покидают Ω. Предполагаем, что область Ω подобрана таким образом, что множество траекторий с указанным свойством не пусто.

Кусочно-линейная система указанного вида может быть получена, например, в результате кусочной линеаризации нелинейных дифференциальных уравнений [9].

Будем считать, что точное текущее положение системы $x(t)$ неизвестно (в том числе в начальный момент времени t_0). Однако его можно оценить на основании поступающих в режиме реального времени результатов измерений. Рассматриваем следующее правило измерений:

$$y(t) = G(t)x(t) + w(t), \quad t \in [t_0, t_1], \tag{2}$$

в котором вектор $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ – доступное измерение траектории, а $w \in \mathbb{R}^{n_y}$ – погрешность измерений, матричнозначная функция $G(t) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ задана и непрерывна. Кроме того, предположим, что существует априорная оценка начального состояния:

$$x(t_0) \in \mathcal{X}_0,$$

где множество $\mathcal{X}_0 \subset \Omega$ является выпуклым и компактным.

Управление u и помехи (неопределённости) v, w удовлетворяют следующим *жёстким поточечным ограничениям*: $u = u(\pi) \in \mathcal{P}(t)$, $v = v(t) \in \mathcal{Q}(t)$, $w = w(t) \in \mathcal{R}(t)$, где $\mathcal{P}(t) \subset \subset \mathbb{R}^{n_u}$, $\mathcal{Q}(t) \subset \mathbb{R}^{n_v}$, $\mathcal{R}(t) \subset \mathbb{R}^{n_y}$ – многозначные отображения, непрерывные в смысле метрики Хаусдорфа и принимающие выпуклые компактные значения. *Позиция* π системы определяется ниже.

Пусть $\zeta_t(\,\cdot\,, t_0)$ – совокупность неопределённостей, присутствующих в системе:

$$\zeta_t(\,\cdot\,, t_0) = \{x_0, v(\tau), w(\tau) \colon x_0 \in \mathcal{X}_0, \ \ v(\tau) \in \mathcal{Q}(\tau), \ \ w(\tau) \in \mathcal{R}(\tau), \ \ \tau \in [t_0, t]\}.$$

Произвольная допустимая реализация $\zeta_{t_1}(\,\cdot\,, t_0)$ вместе с заданным допустимым управлением $u(\cdot)$ определяют траекторию $x(t) = x(t, t_0, x_0)|_{u(\cdot), v(\cdot)}$ системы (1), а также вектор-функцию измерений $y(t)$, определённую согласно (2). Здесь $t \in [t_0, t_1]$.

Предположим, что для любых двух соседних областей $\Omega^{(i)}$ и $\Omega^{(j)}$, общей границей которых является гиперплоскость $\mathcal{H}$, выполняется

либо условие *односторонней проницаемости*: при любых $t \in [t_0, t_1]$, $x \in \mathcal{H} \bigcap \Omega$ и для всех $u^{(i)} \in \mathcal{P}(t)$, $v^{(i)} \in \mathcal{Q}(t)$, $u^{(j)} \in \mathcal{P}(t)$, $v^{(j)} \in \mathcal{Q}(t)$ имеет место равенство

$$\operatorname{sgn}(\langle c, A^{(i)}(t)x + B^{(i)}(t)u^{(i)} + C^{(i)}(t)v^{(i)} + d^{(i)}(t)\rangle) =$$

$$= \operatorname{sgn}(\langle c, A^{(j)}(t)x + B^{(j)}(t)u^{(j)} + C^{(j)}(t)v^{(j)} + d^{(j)}(t)\rangle) = \pm 1$$

(здесь $c \in \mathbb{R}^{n_x}$ – нормаль к $\mathcal{H}$, $\|c\| = 1$);

либо условие *непрерывного сопряжения*: при любых $t \in [t_0, t_1]$, $x \in \mathcal{H} \bigcap \Omega$ и для всех $u \in \mathcal{P}(t)$, $v \in \mathcal{Q}(t)$ выполняются равенства $B^{(i)}(t) = B^{(j)}(t)$ и

$$A^{(i)}(t)x + B^{(i)}(t)u + C^{(i)}(t)v + d^{(i)}(t) = A^{(j)}(t)x + B^{(j)}(t)u + C^{(j)}(t)v + d^{(j)}(t).$$

Рассмотрим класс $\mathcal{U}_f$ *допустимых позиционных управлений*, содержащий многозначные отображения $u = u(\pi)$. Такое управление $u(\pi)$ будем называть *допустимым*, если при подстановке его в (1) полученные дифференциальные включения имеют решения при любом начальном векторе фазовых переменных $x_0 \in \Omega$.

Для неопределённостей v, w будем использовать классы *допустимых помех*, представляющие собой множества измеримых функций $v(t)$ и $w(t)$ соответственно, заданных при $t \in [t_0, t_1]$ и удовлетворяющих почти всюду ограничениям $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$, $w(t) \in \mathcal{R}(t)$.

Заметим, что при выполнении условий односторонней проницаемости или непрерывного сопряжения для любой траектории $x(t)$ системы, соответствующей допустимым помехам $\zeta_{t_1}(\,\cdot\,, t_0)$ и допустимому управлению $u(\cdot)$, на гиперплоскостях переключений $\mathcal{H}^{(k)}$ невозможно возникновение *скользящих режимов* [1], при которых $x(t)$ не удовлетворяет какому-либо из уравнений (1).

Уравнения наблюдений (2) можно интерпретировать как фазовые ограничения на состояние системы, которые становятся известными в режиме реального времени:

$$x(t) \in \mathcal{Y}(t) := \{x\colon y(t) - G(t)x = r(t) \in \mathcal{R}(t)\}, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{3}$$

Информационным множеством [11, с. 12] системы (1) при доступных измерениях $y(t)$ и фиксированном управлении $u(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$, назовём множество

$$\mathcal{X}(t, t_0, \mathcal{X}_0) = \{x: \ \text{ существует } \ v(\cdot) \ \text{ такое, что}$$

$$x(t_0, t, x)|_{u(\cdot), v(\cdot)} \in \mathcal{X}_0, \quad x(\tau) \in \mathcal{Y}(\tau) \text{ для всех } \ \tau \in [t_0, t]\}, \tag{4}$$

где $x(t_0, t, x)|_{u(\cdot), v(\cdot)}$ – значение траектории, выпущенной из позиции (t, x) в обратном времени, в момент времени t_0. *Информационная трубка* $\mathcal{X}[t]$ – это соответствующее многозначное отображение $\mathcal{X}(\,\cdot\,, t_0, \mathcal{X}_0)$.

Позицией системы назовём пару $\pi = \{t, \mathcal{X}(t)\}$, где $t \in [t_0, t_1]$ определяет текущее время, а информационное множество $\mathcal{X}(t) = \mathcal{X}(t, t_0, \mathcal{X}_0)$ содержит неизвестное состояние системы $x(t)$, т.е. является его гарантированной оценкой, учитывающей полученные к моменту t результаты наблюдений $y(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$.

2. Расширенные переменные. Будем далее считать, что множества $\mathcal{P}(t)$, $\mathcal{Q}(t)$, $\mathcal{R}(t)$ являются эллипсоидами:

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{E}(p(t), P(t)), \quad p(t) \in \mathbb{R}^{n_u}, \quad P(t) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}, \quad P(t) = P^{\text{т}}(t) > 0,$$

$$\mathcal{Q}(t) = \mathcal{E}(q(t), Q(t)), \quad q(t) \in \mathbb{R}^{n_v}, \quad Q(t) \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}, \quad Q(t) = Q^{\text{т}}(t) > 0,$$

$$\mathcal{R}(t) = \mathcal{E}(0, R(t)), \quad R(t) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}, \quad R(t) = R^{\text{т}}(t) > 0,$$

центры эллипсоидов $p(t)$, $q(t)$ и матрицы конфигураций $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ непрерывны по $t \in [t_0, t_1]$. Матрицы $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ являются положительно определёнными при любом фиксированном t.

Рассмотрим также “расширенное” пространство переменных $\widetilde{x} = (x^{\text{т}}, 1)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^{n_x + 1}$.

Эллипсоид $\mathcal{E}(q, Q)$ в пространстве $\mathbb{R}^k$ задаётся следующим соотношением:

$$\mathcal{E}(q, Q) = \{x \in \mathbb{R}^k\colon \langle x - q, Q^{-1}(x - q)\rangle \leqslant 1\} = \{x \in \mathbb{R}^k\colon \langle \widetilde{x}, \widetilde{Q}\widetilde{x}\rangle \leqslant 1\},$$

где

$$\widetilde{x} = (x^{\text{т}}, 1)^{\text{т}}, \quad \widetilde{Q} = \begin{pmatrix} Q^{-1} & -Q^{-1}q \\ -q^{\text{т}}Q^{-1} & q^{\text{т}}Q^{-1}q \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим дифференциальные уравнения (1) в “расширенном” пространстве:

$$\dot{\widetilde{x}} = \widetilde{A}^{(i)}(t)\widetilde{x} + \widetilde{C}^{(i)}(t)\widetilde{v}, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Фазовые ограничения, представленные уравнением наблюдений (2), принимают вид

$$\widetilde{G}(t)\widetilde{x} \in \mathcal{R}(t),$$

а “расширенные” матрицы задаются следующим образом:

$$\widetilde{A}^{(i)}(t) = \begin{pmatrix} A^{(i)}(t) & d^{(i)}(t) + B^{(i)}(t)u(t) + C^{(i)}(t)q(t) \\ \mathbb{O}_{1\times n_x} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{C}^{(i)}(t) = \begin{pmatrix} C^{(i)}(t) \\ \mathbb{O}_{1\times n_v} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G}(t) = \begin{pmatrix} -G(t) & y(t) \end{pmatrix},$$

на неопределённость $\widetilde{v}$ наложены поточечные ограничения: $\widetilde{v} \in \mathcal{E}(0, Q(t))$.

3. Задача синтеза управлений по результатам наблюдений. Зафиксируем целевое компактное множество $\mathcal{X}_1 \subset \Omega \subset \mathbb{R}^{n_x}$.

Задача *синтеза управлений по результатам наблюдений* состоит в построении допустимого управления $u^*(\pi(t))$, переводящего траектории системы (1) из произвольной начальной позиции $\pi_0 = \{t_0, \mathcal{X}_0\}$ в целевое множество $\mathcal{X}_1$ для произвольной допустимой реализации неопределённостей $\zeta_{t_1}(\,\cdot\,, t_0)$.

Для некоторых π_0, $\mathcal{X}_1$ сформулированная задача может не иметь решения. В таком случае будем решать следующую задачу оптимизации: для заданной начальной позиции $\pi_0 = \{t_0, \mathcal{X}_0\}$ требуется найти минимальное $\mu > 0$ такое, что существует управление $u^*(\pi(t))$, переводящее позицию π_0 в μ-окрестность (в некоторой метрике) множества $\mathcal{X}_1$ для любой допустимой реализации $\zeta_{t_1}(\,\cdot\,, t_0)$.

Согласно общей схеме решения задачи синтеза управлений по результатам наблюдений, изложенной в [3], эта задача может быть представлена в виде совокупности двух подзадач:

задачи *гарантированного оценивания*, состоящей в построении *информационного множества* $\mathcal{X}(t, \pi_0)$ по результатам наблюдений $y(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$;

задачи *синтеза управлений* $u^*(\pi(\tau))$, решаемой на полуинтервале $(t, t_1]$.

Здесь $t \in [t_0, t_1]$ – произвольный промежуточный момент времени.

Далее последовательно рассмотрим указанные подзадачи для рассматриваемой математической модели кусочно-линейной системы с переключениями.

4. Задача гарантированного оценивания. Пусть $\varphi_{\mathcal{A}}(x)$ – какая-либо неотрицательная гладкая функция, для которой $\mathcal{A}$ – следующее её лебегово множество:

$$\mathcal{A} = \{\xi \colon \varphi_{\mathcal{A}}(\xi) \leqslant 0\}.$$

Замечание. В силу неотрицательности функции $\varphi_{\mathcal{A}}(x)$ неравенство в определении множества $\mathcal{A}$ можно заменить на равенство. При $x \notin \mathcal{A}$ очевидно неравенство $\varphi_{\mathcal{A}}(x) > 0$.

Пусть известны начальная позиция $\pi_0 = \{t_0, \mathcal{X}_0\}$, наблюдения $y(\tau)$ и реализация управления $u(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$. Рассмотрим следующую функцию цены:

$$V_{\mathcal{X}}(t, x) = \max_{v \in \mathcal{Q}(t)} \left\{ \varphi_{\mathcal{X}_0}(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t} \varphi_{\mathcal{R}(\tau)}(r(\tau))\, d\tau : x(t) = x \right\}. \tag{5}$$

Здесь $r(\tau) = y(\tau) - G(\tau)x(\tau)$ – полученное в момент времени τ наблюдение. Функции $\varphi_{\mathcal{X}_0}(\cdot)$ и $\varphi_{\mathcal{R}(\cdot)}(\cdot)$ могут быть различными по форме.

Связь между информационным множеством (4) и функцией цены (5) задаётся следующим соотношением: $\mathcal{X}(t, t_0, \mathcal{X}_0) = \{x \colon V_{\mathcal{X}}(t, x) \leqslant 0\}$.

Функция цены $V_{\mathcal{X}}(t,x)$ в любой точке (t,x), $x\in\operatorname{int}\Omega^{(i)}$, в которой она является дифференцируемой, удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса (ГЯБА) [12]

$$\frac{\partial V_{\mathcal{X}}(t,x)}{\partial t}+\max_{v\in\mathcal{Q}(t)}\left\langle\frac{\partial V_{\mathcal{X}}(t,x)}{\partial x},A^{(i)}(t)x+B^{(i)}(t)u(t)+C^{(i)}(t)v+d^{(i)}(t)\right\rangle-\varphi_{\mathcal{R}(t)}(r(t))=0 \quad (6)$$

и начальному условию

$$V_{\mathcal{X}}(t_0,x)=\varphi_{\mathcal{X}_0}(x).$$

Преобразуем уравнение (6):

$$V_t'+\langle V_x',A^{(i)}(t)x+B^{(i)}(t)u(t)+d^{(i)}(t)\rangle+\rho(V_x'|C^{(i)}(t)\mathcal{Q}(t))-\varphi_{\mathcal{R}(t)}(r(t))=0, \quad (7)$$

где V_t' и V_x' – частные производные $V_{\mathcal{X}}(t,x)$ по переменным t и x соответственно, $\rho(l|\mathcal{X})$ – значение опорной функции ко множеству $\mathcal{X}$ в направлении l.

5. Кусочно-квадратичные функции цены. Построим аппроксимацию функции цены $V_{\mathcal{X}}(t,x)$ в классе функций $W_{\mathcal{X}}^{(i)}(t,\widetilde{x})=\langle\widetilde{x},K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t)\widetilde{x}\rangle$, $K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t)=(K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t))^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{(n_x+1)\times(n_x+1)}$. Здесь функция $W_{\mathcal{X}}^{(i)}(t,\widetilde{x})$ определена только при $x\in\Omega^{(i)}$. Матричнозначные функции $K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t)$ считаем непрерывно дифференцируемыми всюду на $[t_0,t_1]$ за исключением, быть может, конечного числа точек.

Для совокупности функций $W_{\mathcal{X}}^{(i)}(t,\widetilde{x})$ при различных i потребуем выполнения условия “непрерывной склейки”:

$$W_{\mathcal{X}}^{(i)}(t,\widetilde{x})=W_{\mathcal{X}}^{(j)}(t,\widetilde{x}) \quad \text{для всех} \quad t\in[t_0,t_1] \quad \text{и} \quad x\in\mathcal{H}^{(k)}, \quad (8)$$

здесь $\mathcal{H}^{(k)}$ – гиперплоскость переключений, разделяющая области $\Omega^{(i)}$ и $\Omega^{(j)}$.

Согласно [8] условие (8) будет выполнено, если имеют место равенства

$$K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t)\Gamma_k=K_{\mathcal{X}}^{(j)}(t)\Gamma_k \quad \text{для всех} \quad t\in[t_0,t_1], \quad (9)$$

$$\dot K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t)\Gamma_k=\dot K_{\mathcal{X}}^{(j)}(t)\Gamma_k \quad \text{для всех} \quad t\in[t_0,t_1], \quad (10)$$

где Γ_k – матрицы параметризации гиперплоскости $\mathcal{H}^{(k)}$, т.е.

$$x\in\mathcal{H}^{(k)}\Leftrightarrow\widetilde{x}=\Gamma_k\widetilde{y}, \quad \widetilde{y}=(y^{\mathrm{T}},1)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{n_x}.$$

При выполнении условий “непрерывной склейки” (9), (10) получается непрерывная кусочно-квадратичная функция $W_{\mathcal{X}}(t,\widetilde{x})$:

$$W_{\mathcal{X}}(t,\widetilde{x})=W_{\mathcal{X}}^{(i)}(t,\widetilde{x})=\langle\widetilde{x},K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t)\widetilde{x}\rangle, \quad t\in[t_0,t_1], \quad x\in\Omega^{(i)}, \quad i=\overline{1,N}, \quad (11)$$

дифференцируемая по любому ненулевому направлению $\ell=(\ell_t,\ell_x)$:

$$W_{\mathcal{X}}'(t,\widetilde{x};\ell)=\ell_t\langle\widetilde{x},\dot K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t)\widetilde{x}\rangle+2\langle\ell_x,K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t)\widetilde{x}\rangle, \quad \ell_t\in\mathbb{R}, \quad \ell_x\in\mathbb{R}^{n_x+1}.$$

6. Внешняя аппроксимация информационного множества. Рассмотрим задачу гарантированного оценивания в новых, “расширенных”, переменных $\widetilde{x}$ из начального множества $\mathcal{X}_0\times\{1\}$. Положим $\widetilde{V}_{\mathcal{X}}(t,\widetilde{x})=V_{\mathcal{X}}(t,x)$ – функция цены в “расширенном” пространстве. В таком случае уравнение (7) принимает вид

$$\widetilde{V}_t'+\langle\widetilde{V}_{\tilde{x}}',\widetilde{A}^{(i)}(t)\widetilde{x}\rangle+\langle\widetilde{V}_{\tilde{x}}',\mathbf{Q}^{(i)}(t)\widetilde{V}_{\tilde{x}}'\rangle^{1/2}-\varphi_{\mathcal{R}(t)}(\widetilde{G}(t)\widetilde{x})=0, \quad (12)$$

где $\widetilde{V}_t'$, $\widetilde{V}_{\tilde{x}}'$ – частные производные функции $\widetilde{V}_{\mathcal{X}}(t,\widetilde{x})$, а $\mathbf{Q}^{(i)}(t)=\widetilde{C}^{(i)}(t)Q(t)(\widetilde{C}^{(i)}(t))^{\mathrm{T}}$.

Выберем функцию $\varphi_{\mathcal{R}(t)}(r)$ следующим образом:

$$\varphi_{\mathcal{R}(t)}(r) = (\langle r, R^{-1}(t)r\rangle - 1)_+ \geqslant 0.$$

Тогда

$$\varphi_{\mathcal{R}(t)}(\widetilde{G}(t)\widetilde{x}) = \langle \widetilde{x}, \mathbf{R}(t)\widetilde{x}\rangle_+, \quad \mathbf{R}(t) = \widetilde{G}^{\mathrm{т}}(t)R^{-1}(t)\widetilde{G}(t) - \mathrm{diag}(0,\ldots,0,1).$$

Заметим, что $\langle \widetilde{x}, \mathbf{R}(t)\widetilde{x}\rangle \geqslant -1$ для любого x, причём равенство достигается при $\widetilde{G}(t)\widetilde{x} = 0$.

Используем далее принцип сравнения [5, 10] для построения внешней аппроксимации информационного множества $\mathcal{X}(t,t_0,\mathcal{X}_0)$. Этой аппроксимации соответствует нижняя оценка функции $\widetilde{V}_{\mathcal{X}}(t,\widetilde{x})$. Приведём способ построения такой оценки $W_{\mathcal{X}}(t,\widetilde{x})$, заданной в виде непрерывной кусочно-квадратичной функции (11), удовлетворяющей условиям "непрерывной склейки" (9), (10).

Пусть в начальный момент времени t_0 верно неравенство

$$W_{\mathcal{X}}(t_0,\widetilde{x}) \leqslant \varphi_{\mathcal{X}_0}(x) = \widetilde{V}_{\mathcal{X}}(t_0,\widetilde{x}) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega. \tag{13}$$

В частном случае, когда множество $\mathcal{X}_0$ является эллипсоидом $\mathcal{E}(x_0,X_0)$, можно взять

$$K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t_0) = \begin{pmatrix} X_0^{-1} & -X_0^{-1}x_0 \\ -x_0^{\mathrm{т}}X_0^{-1} & x_0^{\mathrm{т}}X_0^{-1}x_0 - 1 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,N}.$$

Запишем левую часть уравнения ГЯБА (12) в области $\Omega^{(i)}$ для функции $W_{\mathcal{X}}(t,\widetilde{x})$ – искомой оценки снизу функции $\widetilde{V}_{\mathcal{X}}(t,\widetilde{x})$:

$$\langle \widetilde{x}, \dot{K}_{\mathcal{X}}^{(i)}(t)\widetilde{x}\rangle + \langle \widetilde{x}, (K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t)\widetilde{A}^{(i)}(t) + (\widetilde{A}^{(i)}(t))^{\mathrm{т}}K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t))\widetilde{x}\rangle +$$
$$+ 2\langle \widetilde{x}, K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t)\mathbf{Q}^{(i)}(t)K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t)\widetilde{x}\rangle^{1/2} - \langle \widetilde{x}, \mathbf{R}(t)\widetilde{x}\rangle_+, \tag{14}$$

здесь $\partial W_{\mathcal{X}}(t,\widetilde{x})/\partial t = \langle \widetilde{x}, \dot{K}_{\mathcal{X}}^{(i)}(t)\widetilde{x}\rangle$, $\partial W_{\mathcal{X}}(t,\widetilde{x})/\partial \widetilde{x} = 2K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t)\widetilde{x}$.

Воспользуемся следующими неравенствами:

$$\langle \widetilde{x}, K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t)\mathbf{Q}^{(i)}(t)K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t)\widetilde{x}\rangle^{1/2} \leqslant \gamma^{(i)}(t) + \frac{1}{4\gamma^{(i)}(t)}\langle \widetilde{x}, K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t)\mathbf{Q}^{(i)}(t)K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t)\widetilde{x}\rangle, \tag{15}$$

$$\langle \widetilde{x}, \mathbf{R}(t)\widetilde{x}\rangle_+ \geqslant \beta(t)\langle \widetilde{x}, \mathbf{R}(t)\widetilde{x}\rangle = \langle \widetilde{x}, \beta(t)\mathbf{R}(t)\widetilde{x}\rangle, \tag{16}$$

справедливыми для любых скалярных функций $\gamma^{(i)}(t) > 0$ и $\beta(t) \in [0,1]$.

В неравенстве (15) равенство достигается при

$$\gamma^{(i)}(t) = \frac{1}{2}\langle \widetilde{x}, K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t)\mathbf{Q}^{(i)}(t)K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t)\widetilde{x}\rangle^{1/2}.$$

Неравенство (16) обращается в равенство на границе и вне "эллипсоида наблюдений" $\mathcal{R}(t)$ при $\beta(t) = 1$, во внутренних точках $\mathcal{R}(t)$ при $\beta(t) = 0$.

Используя (15), (16), получаем оценку сверху для (14):

$$\langle \widetilde{x}, (\dot{K}_{\mathcal{X}}^{(i)}(t) + F_{\mathcal{X}}^{(i)}(t) - \beta(t)\mathbf{R}(t))\widetilde{x}\rangle + 2\gamma^{(i)}(t), \quad x \in \Omega^{(i)},$$

$$F_{\mathcal{X}}^{(i)}(t) = K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t)\widetilde{A}^{(i)}(t) + (\widetilde{A}^{(i)}(t))^{\mathrm{т}}K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t) + \frac{1}{2\gamma^{(i)}(t)}K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t)\mathbf{Q}^{(i)}(t)K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t). \tag{17}$$

Введём следующие обозначения:

$$R_{\mathcal{X}}^{(i)}(t) = \dot{K}_{\mathcal{X}}^{(i)}(t) + F_{\mathcal{X}}^{(i)}(t) - \beta(t)\mathbf{R}(t), \tag{18}$$

$$\dot{\alpha}_{\mathcal{X}}^{(i)}(t) = \max\{\langle \widetilde{x}, R_{\mathcal{X}}^{(j)}(t)\widetilde{x}\rangle + 2\gamma^{(j)}(t)\colon j \in \mathcal{I}_i(t), \quad x \in \Omega^{(j)}\}, \quad t \in [t_0, t_1], \quad \alpha_{\mathcal{X}}^{(i)}(t_0) = 0. \qquad (19)$$

Здесь множество $\mathcal{I}_i(t) \subset \{1, \ldots, N\}$ зависит от взаимного расположения гиперплоскостей переключений $\mathcal{H}^{(k)}$ и содержит все значения индекса j такие, что

$$\text{существуют} \quad \tau_0 \in [t_0, t), \quad x_0 \in \Omega^{(j)} \quad \text{и} \quad v(\cdot), \quad \text{для которых} \quad x(t, \tau_0, x_0)|_{u(\cdot), v(\cdot)} \in \Omega^{(i)}.$$

Теорема 1. *Пусть при $t \in [t_0, t_1]$ заданы некоторые управление $u(\pi) \in \mathcal{U}_f$, непрерывные положительные функции $\gamma^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, N}$, и функция $\beta(t) \in [0, 1]$. Пусть матричнозначные функции $K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, N}$, дифференцируемы всюду на $[t_0, t_1]$ за исключением, быть может, конечного числа точек и почти всюду удовлетворяют условиям "непрерывной склейки" (9), (10), а матрицы $K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t_0)$ таковы, что выполняется неравенство (13). Функции $\alpha_{\mathcal{X}}^{(i)}(t)$ являются решениями задач Коши (19). Тогда при любом $t \in [t_0, t_1]$ множество*

$$\mathcal{X}_{\beta, \gamma^{(i)}}^{\mathrm{ext}}(t) := \bigcup_j \{x \in \Omega^{(j)} : W_{\mathcal{X}}(t, \widetilde{x}) \leqslant \alpha_{\mathcal{X}}^{(j)}(t)\}$$

является надмножеством информационного множества $\mathcal{X}(t, t_0, \mathcal{X}_0)$, т.е.

$$\mathcal{X}(t, t_0, \mathcal{X}_0) \subseteq \mathcal{X}_{\beta, \gamma^{(i)}}^{\mathrm{ext}}(t) \quad \text{при любом} \quad t \in [t_0, t_1]. \qquad (20)$$

Доказательство включения (20) проведём для $t = t_1$. Для всех остальных значений t доказательство аналогично.

Для произвольных вектора $x_1 \in \mathcal{X}(t_1, t_0, \mathcal{X}_0) \bigcap \Omega^{(i_1)}$ и допустимой помехи $\widetilde{v}(\cdot)$ рассмотрим решение $\widetilde{x}(t) = \widetilde{x}(t, t_1, x_1)|_{u(\cdot), \widetilde{v}(\cdot)}$ замкнутой системы. Очевидно, что $\widetilde{x}(t_0) \in \mathcal{X}_0$, а значит, из неравенства (13) вытекает оценка $W_{\mathcal{X}}(t_0, \widetilde{x}(t_0)) \leqslant 0$.

Используя свойство дифференцируемости кусочно-квадратичной функции $W_{\mathcal{X}}(t, \widetilde{x})$ по направлениям, оценим её изменение вдоль траектории $\{t, \widetilde{x}(t)\}$. Пусть $\ell(t) = (\ell_t(t), \ell_x(t))$, $\ell_t(t) = 1$, $\ell_x(t) = \widetilde{A}^{(i(t))}(t)\widetilde{x}(t) + \widetilde{C}^{(i(t))}(t)\widetilde{v}(t)$. Тогда

$$W_{\mathcal{X}}(t_1, \widetilde{x}(t_1)) - W_{\mathcal{X}}(t_0, \widetilde{x}(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} W'_{\mathcal{X}}(t, \widetilde{x}(t); \ell(t))\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \Big(\ell_t(t) \langle \widetilde{x}(t), \dot{K}_{\mathcal{X}}^{(i(t))}(t)\widetilde{x}(t)\rangle +$$

$$+ 2\langle \ell_x(t), K_{\mathcal{X}}^{(i(t))}(t)\widetilde{x}(t)\rangle \Big)\, dt \leqslant \int_{t_0}^{t_1} (\langle \widetilde{x}, R_{\mathcal{X}}^{(i(t))}(t)\widetilde{x}\rangle + 2\gamma^{(i(t))}(t))\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t_1} \max\{\langle \widetilde{x}, R_{\mathcal{X}}^{(j)}(t)\widetilde{x}\rangle + 2\gamma^{(j)}(t)\colon j \in \mathcal{I}_{i_1}(t), \quad x \in \Omega^{(j)}\}\, dt = \alpha_{\mathcal{X}}^{(i_1)}(t_1).$$

Отсюда следует, что

$$W_{\mathcal{X}}(t_1, \widetilde{x}(t_1)) \leqslant \alpha_{\mathcal{X}}^{(i_1)}(t_1) + W_{\mathcal{X}}(t_0, \widetilde{x}(t_0)) \leqslant \alpha_{\mathcal{X}}^{(i_1)}(t_1).$$

Таким образом, $x_1 \in \mathcal{X}_{\beta, \gamma^{(i)}}^{\mathrm{ext}}(t_1)$. Теорема доказана.

7. Задача синтеза управлений. Сформулируем задачу *синтеза управлений по результатам наблюдений* в пространстве информационных множеств: для заданной начальной позиции $\pi(t) = \{t, \mathcal{X}\}$, целевого множества $\mathcal{X}_1$ и величины $\mu \geqslant 0$ требуется построить позиционное управление $u^*(\pi(\tau))$, $\tau \in [t, t_1]$, переводящее позицию $\pi(t)$ в μ-окрестность (в некоторой метрике) множества $\mathcal{X}_1$ для любой допустимой реализации неопределённостей $\zeta_{t_1}(\,\cdot\,, t)$.

Среди всех значений $\mu \geqslant 0$, для которых задача синтеза разрешима, требуется указать наименьшее.

Слабо инвариантным множеством $\mathbf{W}_\mu(t) = \mathbf{W}_\mu(t, t_1, \mathcal{X}_1)$ системы (1) относительно множества $\mathcal{X}_1$ назовём совокупность множеств $\mathcal{X} \subset \Omega$, для которых при заданном $\mu \geqslant 0$ разрешима задача синтеза управлений из начальной позиции $\{t, \mathcal{X}\}$.

Для решения задачи синтеза управлений по результатам наблюдений будет использован метод *экстремального прицеливания* [6, 3] информационного множества $\mathcal{X}(t)$ (его внешней оценки) на множество $\mathbf{W}_\mu(t)$ (его внутреннюю оценку): необходимо построить многозначное управление $\mathcal{U}(\pi(t))$, которое в каждый момент времени t не увеличивает расстояние между множествами $\mathcal{X}(t)$ и $\mathbf{W}_\mu(t)$.

Отметим, что определение управления $\mathcal{U}(\pi(t))$ – задача в бесконечномерном пространстве (в силу бесконечномерности $\mathbf{W}_\mu(t)$), что существенно усложняет вычисления. В случае линейных систем, согласно [3], можно перейти к конечномерной задаче, рассматривая вместо $\mathbf{W}_\mu(t)$ множество разрешимости $\mathcal{W}_\mu(t) = \mathcal{W}_\mu(t, t_1, \mathcal{X}_1)$ системы (1) без учёта наблюдений, т.е. множество, выпущенное (в обратном времени) из позиции $\{t_1, \mathcal{X}_1\}$. Для этого множества верно соотношение

$$\mathcal{W}_\mu(t) = \bigcup \Big\{ \bigcup \{x \colon x \in \mathcal{X}\} \colon \mathcal{X} \in \mathbf{W}_\mu(t) \Big\}.$$

Построению внутренних аппроксимаций $\mathcal{W}^{\mathrm{int}}_{\mu, \gamma^{(i)}_{\mathcal{W}}, S^{(i)}}(t)$ множества $\mathcal{W}_\mu(t)$ кусочно-линейной системы (1) посвящена работа [8]. В ней, в частности, показано, что оценка $\mathcal{W}^{\mathrm{int}}_{\mu, \gamma^{(i)}_{\mathcal{W}}, S^{(i)}}(t)$ может быть найдена в виде множества уровня кусочно-квадратичной функции цены:

$$\mathcal{W}^{\mathrm{int}}_{\mu, \gamma^{(i)}_{\mathcal{W}}, S^{(i)}}(t) = \bigcup_j \{x \in \Omega^{(j)} : W_{\mathcal{W}}(t, \widetilde{x}) \leqslant \alpha^{(j)}(t) + \mu\},$$

$$W_{\mathcal{W}}(t, \widetilde{x}) = \langle \widetilde{x}, K^{(i)}_{\mathcal{W}}(t) \widetilde{x} \rangle, \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad x \in \Omega^{(i)}, \quad i = \overline{1, N},$$
$$\varphi_{\mathcal{X}_1}(x) \leqslant W_{\mathcal{W}}(t_1, \widetilde{x}) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega,$$
$$F^{(i)}_{\mathcal{W}}(t) = K^{(i)}_{\mathcal{W}}(t) D^{(i)}(t) + (D^{(i)}(t))^{\mathrm{т}} K^{(i)}_{\mathcal{W}}(t) + \frac{1}{2\gamma^{(i)}_{\mathcal{W}}(t)} K^{(i)}_{\mathcal{W}}(t) \mathbf{Q}^{(i)}(t) K^{(i)}_{\mathcal{W}}(t),$$
$$D^{(i)}(t) = \widetilde{A}^{(i)}_0(t) - \frac{1}{\sqrt{C_x^2 + 1}} (\mathbf{P}^{(i)}(t))^{1/2} (S^{(i)}(t))^{\mathrm{т}}, \quad \mathbf{P}^{(i)}(t) = \widetilde{B}^{(i)}(t) P(t) (\widetilde{B}^{(i)}(t))^{\mathrm{т}},$$
$$R^{(i)}_{\mathcal{W}}(t) = \dot{K}^{(i)}_{\mathcal{W}}(t) + F^{(i)}_{\mathcal{W}}(t),$$
$$\dot{\alpha}^{(i)}_{\mathcal{W}}(t) = \max\{\langle \widetilde{x}, R^{(j)}_{\mathcal{W}}(t) \widetilde{x} \rangle + 2\gamma^{(j)}_{\mathcal{W}}(t) \colon j \in \mathcal{I}(i), \quad x \in \Omega^{(j)}\}, \quad t \in [t_0, t_1], \quad \alpha^{(i)}_{\mathcal{W}}(t_1) = 0.$$

Здесь $C_x > 0$ – такая константа, для которой $\|\widetilde{x}\|^2 \leqslant C_x^2 + 1$ при всех $x \in \Omega$. Конкретная внутренняя оценка множества разрешимости определяется параметрами: функциями $\gamma^{(i)}_{\mathcal{W}}(t) > 0$ и $S^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, N}$, $t \in [t_0, t_1]$, причём $(S^{(i)}(t))^{\mathrm{т}} = (S^{(i)}(t))^{-1}$.

8. Метод экстремального прицеливания. Зафиксируем параметры – функции $\beta(t)$, $\gamma^{(i)}(t)$, $\gamma^{(i)}_{\mathcal{W}}(t)$, $S^{(i)}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, $i = \overline{1, N}$, задающие внешнюю оценку информационного множества и внутреннюю оценку множества разрешимости. Для краткости через $\mathcal{X}(t)$ и $\mathcal{W}_\mu(t)$ будем обозначать множества $\mathcal{X}^{\mathrm{ext}}_{\beta, \gamma^{(i)}}(t)$ и $\mathcal{W}^{\mathrm{int}}_{\mu, \gamma^{(i)}_{\mathcal{W}}, S^{(i)}}(t)$ соответственно. Введём также следующие обозначения:

$$\overline{W}^{(i)}_{\mathcal{X}}(t, \widetilde{x}) = W^{(i)}_{\mathcal{X}}(t, \widetilde{x}) - \alpha^{(i)}_{\mathcal{X}}(t) = \langle \widetilde{x}, K^{(i)}_{\mathcal{X}}(t) \widetilde{x} \rangle - \alpha^{(i)}_{\mathcal{X}}(t), \tag{21}$$

$$\overline{W}^{(i)}_{\mathcal{W}}(t, \widetilde{x}) = W^{(i)}_{\mathcal{W}}(t, \widetilde{x}) - \alpha^{(i)}_{\mathcal{W}}(t) = \langle \widetilde{x}, K^{(i)}_{\mathcal{W}}(t) \widetilde{x} \rangle - \alpha^{(i)}_{\mathcal{W}}(t). \tag{22}$$

В таком случае множества $\mathcal{X}(t)$ и $\mathcal{W}_\mu(t)$ задаются следующими соотношениями:

$$\mathcal{X}(t) = \bigcup_i \mathcal{X}^{(i)}(t) = \bigcup_i \{x \in \Omega^{(i)} \colon \overline{W}^{(i)}_{\mathcal{X}}(t, \widetilde{x}) \leqslant 0\},$$

$$\mathcal{W}_\mu(t)=\bigcup_i \mathcal{W}_\mu^{(i)}(t)=\bigcup_i \{x\in\Omega^{(i)}\colon \overline{W}_{\mathcal{W}}^{(i)}(t,\widetilde{x})\leqslant\mu\}.$$

Отметим, что каждое из множеств $\mathcal{X}^{(i)}(t)$, $\mathcal{W}_\mu^{(i)}(t)$ является выпуклым и компактным.

Рассмотрим полурасстояние между рассматриваемыми множествами, порождаемое кусочно-квадратичными функциями (21), (22):

$$h(t)=\min_{\mu\geqslant 0}\{\mu\colon \mathcal{X}(t)\subseteq\mathcal{W}_\mu(t)\}.$$

Из определения множеств $\mathcal{X}(t)$ и $\mathcal{W}_\mu(t)$ следует, что

$$h(t)=\max\{0,\hat h(t)\},\quad \hat h(t)=\max_i h^{(i)}(t)=\max_i\max_{x\in\Omega^{(i)}}\{\overline{W}_{\mathcal{W}}^{(i)}(t,\widetilde{x}):\overline{W}_{\mathcal{X}}^{(i)}(t,\widetilde{x})\leqslant 0\}. \tag{23}$$

Случай $\hat h(t)\leqslant 0$ соответствует ситуации, когда $\mathcal{X}(t)\subset\mathcal{W}_0(t)$.

Нас интересуют такие допустимые управления $u^*(\pi(t))$, при которых значение производной $\dot{\hat h}(t)$ минимально при любой возможной неопределённости системы, т.е.

$$u^*(\pi(t))=\{u\in\mathcal{P}(t)\colon u\in\operatorname{Arg}\min_u\max_{\zeta_t(\,\cdot\,,t_0)}\dot{\hat h}(t)\}. \tag{24}$$

В силу сложной структуры функций $h^{(i)}(t)$ перейдём к рассмотрению функции $H(t)$, являющейся верхней оценкой функции $\hat h(t)$:

$$H(t)=\max_i H^{(i)}(t)=\max_i\max_{x\in\Omega^{(i)}}H^{(i)}(t,\widetilde{x})=\max_i\max_{x\in\Omega^{(i)}}\{\overline{W}_{\mathcal{W}}^{(i)}(t,\widetilde{x})-\overline{W}_{\mathcal{X}}^{(i)}(t,\widetilde{x})\}. \tag{25}$$

Заметим, что для любых i и x, для которых $\overline{W}_{\mathcal{X}}^{(i)}(t,\widetilde{x})\leqslant 0$, выполнено неравенство

$$\overline{W}_{\mathcal{W}}^{(i)}(t,\widetilde{x})-\overline{W}_{\mathcal{X}}^{(i)}(t,\widetilde{x})\geqslant\overline{W}_{\mathcal{W}}^{(i)}(t,\widetilde{x}),$$

а значит, $\hat h(t)\leqslant H(t)$.

Исследуем поведение производной функции $H(t)$. Согласно [13, с. 86] при вычислении производной операции дифференцирования и максимизации по конечному числу функций можно поменять местами:

$$\dot H(t)=\max_i\{\dot H^{(i)}(t),\quad i\colon H^{(i)}(t)=H(t)\}.$$

Согласно теореме о дифференцировании максимума функции [14, с. 61] производная $H(t)$ представляется в виде

$$\dot H(t)=\max_{(i,x)}\{\dot{\overline{W}}_{\mathcal{W}}^{(i)}(t,\widetilde{x})-\dot{\overline{W}}_{\mathcal{X}}^{(i)}(t,\widetilde{x}),\quad x\in\Omega^{(i)},\quad (i,x)\in\operatorname{Argmax}H(t)\}. \tag{26}$$

Вследствие определения функций $\overline{W}_{\mathcal{W}}^{(i)}(t,\widetilde{x})$ и $\overline{W}_{\mathcal{X}}^{(i)}(t,\widetilde{x})$ для производных в (26) имеем

$$\dot{\overline{W}}_{\mathcal{X}}^{(i)}(t,\widetilde{x})=\langle\widetilde{x},\dot K_{\mathcal{X}}^{(i)}(t)\widetilde{x}\rangle-\dot\alpha_{\mathcal{X}}^{(i)}(t),\quad \dot{\overline{W}}_{\mathcal{W}}^{(i)}(t,\widetilde{x})=\langle\widetilde{x},\dot K_{\mathcal{W}}^{(i)}(t)\widetilde{x}\rangle-\dot\alpha_{\mathcal{W}}^{(i)}(t).$$

Переходя от $h(t)$ к $H(t)$ в (24), будем искать управление $u^*(\pi(t))$ в виде

$$u^*(\pi(t))=\operatorname{Arg}\min_{u\in\mathcal{P}(t)}\max_{\zeta_t(\,\cdot\,,t_0)}\dot H(t).$$

При этом значения $\dot{K}^{(i)}_{\mathcal{W}}(t)$, $\dot{\alpha}^{(i)}_{\mathcal{W}}(t)$ могут быть вычислены заранее согласно приведённым выше формулам (подробнее см. в [8]) и доступны при любых i, t. Значения производных $\dot{\alpha}^{(i)}_{\mathcal{X}}(t)$ в момент времени t при реализовавшихся ранее неопределённостях не зависят от управляющего параметра.

Максимизация производной $\dot{H}(t)$ по всем допустимым помехам равносильна минимизации выражения $\langle\widetilde{x}, \dot{K}^{(i)}_{\mathcal{X}}(t)\widetilde{x}\rangle$. Используя обозначение (18), заключаем, что минимум достигается при минимальном значении выражения $\langle\widetilde{x}, \beta(t)\mathbf{R}(t)\widetilde{x}\rangle$, которое, согласно определению $\mathbf{R}(t)$, не менее -1.

Замечание. Указанный минимум соответствует случаю, когда наблюдение $y(t)$ не даёт никакой новой информации. Более того, значение $r(t)$ в (3) является центром эллипсоида $\mathcal{R}(t)$.

Таким образом,

$$u^*(\pi(t)) =$$

$$= \operatorname{Arg}\min_{u\in\mathcal{P}(t)}\max\left\{\dot{\overline{W}}^{(i)}_{\mathcal{W}}(t,\widetilde{x}) - \langle\widetilde{x}, (R^{(i)}_{\mathcal{X}}(t) - F^{(i)}_{\mathcal{X}}(t))\widetilde{x}\rangle + 1 + \dot{\alpha}^{(i)}_{\mathcal{X}}(t) : (i,x)\in\operatorname{Argmax}H(t)\right\}. \quad (27)$$

Формула (27) позволяет в общем случае определить управление в позиционной форме, минимизирующее отклонение информационного множества от множества разрешимости в смысле полурасстояния (25). Выражение в (27) допускает дальнейшие преобразования. Для упрощения промежуточных выкладок сделаем следующее

Предположение. Для текущей позиции $\pi(t)$ множество $\operatorname{Argmax}H(t)$ состоит из конечного числа пар $(i_1, x^{(i_1)}), \ldots, (i_M, x^{(i_M)})$.

Тогда

$$\max\left\{\dot{\overline{W}}^{(i)}_{\mathcal{W}}(t,\widetilde{x}) - \langle\widetilde{x}, (R^{(i)}_{\mathcal{X}}(t) - F^{(i)}_{\mathcal{X}}(t))\widetilde{x}\rangle + 1 + \dot{\alpha}^{(i)}_{\mathcal{X}}(t) | (i,x)\in\operatorname{Argmax}H(t)\right\} =$$

$$= \max\left\{\sum_{k=1}^{M}\lambda_k(\dot{\overline{W}}^{(i_k)}_{\mathcal{W}}(t,\widetilde{x}^{(i_k)}) - \langle\widetilde{x}^{(i_k)}, (R^{(i_k)}_{\mathcal{X}}(t) - F^{(i_k)}_{\mathcal{X}}(t))\widetilde{x}^{(i_k)}\rangle + \dot{\alpha}^{(i_k)}_{\mathcal{X}}(t)) + 1 : \right.$$

$$\left.(\lambda_1,\ldots,\lambda_M)\in\Lambda_M\right\}, \quad (28)$$

где

$$\Lambda_M = \left\{\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_M)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^M : \xi_i \geqslant 0, \quad i=\overline{1,M}, \quad \sum_{i=1}^{M}\xi_i = 1\right\} \text{ – симплекс.}$$

Заменим в (27) выражение в фигурных скобках согласно (28). В полученном представлении, в силу теоремы о минимаксе [14, с. 81–82], можно поменять местами $\min\limits_u$ и $\max\limits_\lambda$. После этого подсчитаем внутренний минимум по u. Зависимость от управления имеется лишь в $F^{(i_k)}_{\mathcal{X}}(t)$, а именно, в значении матриц $\widetilde{A}^{(i_k)}(t)$. Представим $\widetilde{A}^{(i_k)}(t)$ в виде суммы:

$$\widetilde{A}^{(i_k)}(t) = \widetilde{A}^{(i_k)}_0(t) + \widetilde{A}^{(i_k)}_u(t), \quad \widetilde{A}^{(i_k)}_0(t) = \begin{pmatrix} A^{(i_k)}(t) & d^{(i_k)}(t) + C^{(i_k)}(t)q(t) \\ \mathbb{O}_{1\times n_x} & 0\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{A}^{(i_k)}_u(t) = \begin{pmatrix}\mathbb{O}_{n_x\times n_x} & B^{(i_k)}(t)u \\ \mathbb{O}_{1\times n_x} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbb{O}_{(n_x+1)\times n_x} & \widetilde{B}^{(i_k)}(t)u\end{pmatrix}.$$

Учитывая определение (17) матриц $F^{(i_k)}_{\mathcal{X}}(t)$, получаем, что требуется минимизировать по u выражение

$$\sum_{k=1}^{M}\lambda_k\langle\widetilde{x}^{(i_k)}, K^{(i_k)}_{\mathcal{X}}(t)\widetilde{A}^{(i_k)}_u(t)\widetilde{x}^{(i_k)}\rangle = \sum_{k=1}^{M}\lambda_k\langle\widetilde{x}^{(i_k)}, K^{(i_k)}_{\mathcal{X}}(t)\widetilde{B}^{(i_k)}(t)u\rangle.$$

В результате приходим к следующему управлению:

$$u^*(\pi(t)) = \begin{cases} p(t) - \dfrac{P(t)\ell^*}{\langle \ell^*, P(t)\ell^*\rangle^{1/2}}, & \ell^* \neq 0, \\ \mathcal{E}(p(t), P(t)), & \ell^* = 0, \end{cases} \tag{29}$$

где $\ell^* = \sum_{k=1}^{M} \lambda_k (\widetilde{B}^{(i_k)}(t))^{\mathrm{T}} K_{\mathcal{X}}^{(i_k)}(t)\widetilde{x}^{(i_k)}$. При найденном управлении верно равенство

$$\sum_{k=1}^{M} \lambda_k \langle \widetilde{x}^{(i_k)}, K_{\mathcal{X}}^{(i_k)}(t)\widetilde{A}_u^{(i_k)}(t)\widetilde{x}^{(i_k)}\rangle = \langle \ell^*, p(t)\rangle - \langle \ell^*, P(t)\ell^*\rangle^{1/2}.$$

Итоговое выражение для производной полурасстояния имеет вид

$$\min_u \dot{H} = \max\biggl\{\sum_{k=1}^{M} \lambda_k(\langle \widetilde{x}^{(i_k)}, \dot{K}_{\mathcal{W}}^{(i_k)}(t)\widetilde{x}^{(i_k)}\rangle - \dot{\alpha}_{\mathcal{W}}^{(i_k)}(t) - \langle \widetilde{x}^{(i_k)}, (R_{\mathcal{X}}^{(i_k)}(t) - F_{\mathcal{X},0}^{(i_k)}(t))\widetilde{x}^{(i_k)}\rangle +$$

$$+ \dot{\alpha}_{\mathcal{X}}^{(i_k)}(t)) + 1 + 2\langle \ell^*, p(t)\rangle - 2\langle \ell^*, P(t)\ell^*\rangle^{1/2} : (\lambda_1, \ldots, \lambda_M) \in \Lambda_M\biggr\}. \tag{30}$$

Далее необходимо решить задачу максимизации вогнутой функции на ограниченном компактном множестве Λ_M и найти соответствующий максимизатор $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_M^*)$. После его подстановки в выражение для ℓ^* из (29) получим итоговое позиционное управление.

Заметим, что максимизатор $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_M^*)$ в (30) может быть выбран таким образом, чтобы он непрерывно зависел от текущей позиции $\pi(t)$, а значит, и от неизвестной величины $x(t)$ – решения системы (1). После подстановки такого максимизатора в управление (29) получаем многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями, полунепрерывное сверху по x. Следовательно, после подстановки такого управления в систему (1) для полученных дифференциальных включений будет выполнена теорема о существовании решений [15, с. 60–61], т.е. найденное управление является допустимым.

Общий случай, когда сделанное предположение не выполняется, может быть разобран аналогичным образом, при помощи замены суммы по различным максимизаторам $(i_k, x^{(i_k)})$ на сумму интегралов по множеству максимизаторов.

9. Априорная оценка качества управления. Полученное выше позиционное управление (29) минимизирует производную $\dot{H}(t)$. Однако нельзя утверждать, что эта производная будет неотрицательна. Таким образом, при $t \in [t_0, t_1]$ может накапливаться погрешность, увеличивающая размеры окрестности целевого множества, попадание в которую можно гарантировать. Для априорной оценки размеров такой окрестности поступим следующим образом. Пусть $\pi(t_0)$ – известная начальная позиция. Воспользуемся формулам из п. 6 для построения оценок информационных множеств $\hat{\mathcal{X}}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. При построении этих множеств используем управление (29), а также наиболее неблагоприятные наблюдения: $\widetilde{G}(t)\widetilde{x}(t) \equiv 0$. Для информационной трубки $\hat{\mathcal{X}}(t)$ подсчитаем соответствующую величину

$$\hat{H}(t_1) = \hat{H}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \dot{\hat{H}}(\tau)\, d\tau.$$

Теорема 2. *Для любых допустимых погрешностей $\zeta_{t_1}(\,\cdot\,, t_0)$ управление (29) переведёт любую соответствующую траекторию кусочно-линейной системы (1) в μ-окрестность целевого множества, где $\mu \leqslant \hat{H}(t_1)$.*

Доказательство этого утверждения следует из того, что информационные множества $\mathcal{X}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, использующие реально поступающую информацию об измерениях (2), удовлетворяют при всех $t \in [t_0, t_1]$ включению $\mathcal{X}(t) \subseteq \hat{\mathcal{X}}(t)$. Тогда в силу равенств (25) заключаем, что $H(t) \leqslant \hat{H}(t_1)$ для всех $t \in [t_0, t_1]$. Наконец, из (23) вытекает двойное неравенство $\mu \leqslant h(t_1) \leqslant H(t_1) \leqslant \hat{H}(t_1)$.

10. Пример. Рассмотрим кусочно-линейную систему (1), состоящую из трёх подсистем:

$$\dot{x} = A^{(i)}x + Bu + Cv, \quad t \in [0, 3], \quad i = 1, 2, 3.$$

Уравнение измерений (2) имеет вид

$$y(t) = Gx(t) + w = x_1(t) + x_2(t) + w.$$

Матрицы $A^{(i)}$, B, C, G следующие:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Начальное $\mathcal{X}_0 = \mathcal{E}(x_0, X_0)$ и целевое $\mathcal{X}_1 = \mathcal{E}(x_1, X_1)$ множества заданы равенствами

$$x_0 = \begin{pmatrix} -2.0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_0 = 0.3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_1 = 0.5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На управление u, неопределённость v и погрешность w наложены ограничения:

$$|u| \leqslant 1, \quad |v| \leqslant 1, \quad |w| \leqslant 0.2.$$

Области $\Omega^{(i)}$ заданы следующим образом:

$$\Omega^{(1)} = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon -6 \leqslant x_1 \leqslant -1, \ \ |x_2| \leqslant 6\},$$

$$\Omega^{(2)} = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon |x_1| \leqslant 1, \ \ |x_2| \leqslant 6\},$$

$$\Omega^{(3)} = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon 6 \geqslant x_1 \geqslant 1, \ \ |x_2| \leqslant 6\}.$$

В качестве начальной (но неизвестной системе) точки выберем значение $x(0) = x_0$. Случайные реализации неопределённости v и помехи w получены с использованием равномерного распределения.

На рис. 1 изображены: траектория системы $x(t)$ с выделенной точкой $x(1.5)$, внешняя оценка информационного множества $\mathcal{X}(1.5, t_0, \mathcal{X}_0)$, внутренняя оценка множества разрешимости $\mathcal{W}(1.5, t_1, \mathcal{X}_1)$ (лежит в области $\Omega^{(3)}$).

На рис. 2 приведён график функции $H(t)$ – реальное изменение полурасстояния между множествами по мере обработки поступающих результатов измерений с использованием предложенного позиционного управления.

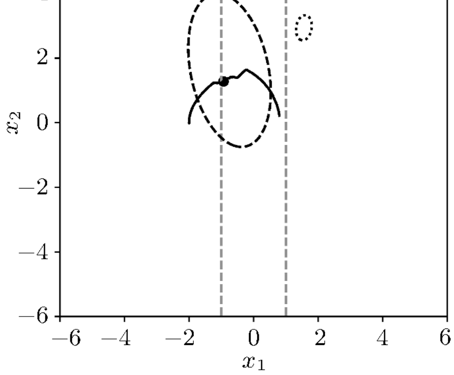

Рис. 1. Траектория $x(t)$ системы.

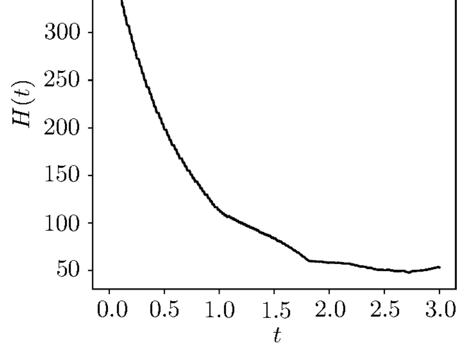

Рис. 2. График функции $H(t)$.

Заключение. В работе получены формулы для построения внешних оценок информационного множества кусочно-линейной системы с неопределённостями (помехами) в уравнениях динамики и измерений. Предложен метод для вычисления позиционного управления, решающего задачу о переводе системы из заданного начального множества в заданное целевое множество. Рассмотренные в статье вопросы, безусловно, должны быть впоследствии дополнены эффективными вычислительными схемами и алгоритмами. Их разработка является одной из ближайших целей авторов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках реализации программы Математического центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621, а также Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-01-00613а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Liberzon D.* Switching in Systems and Control. Boston, 2003.
2. *Куржанский А.Б., Точилин П.А.* Слабо инвариантные множества гибридных систем // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 11. С. 1523–1533.
3. *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Optimization of output feedback control under set-membership uncertainty // J. Optim. Theory Appl. 2011. V. 151. № 1. P. 11–32.
4. *Куржанский А.Б., Точилин П.А.* К задаче синтеза управлений при неопределённости по данным финитных наблюдателей // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1599–1607.
5. *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Dynamics and Control of Trajectory Tubes. Theory and Computation. Basel, 2014.
6. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М., 1985.
7. *Точилин П.А.* О построении невыпуклых аппроксимаций множеств достижимости кусочно-линейных систем // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 11. С. 1503–1515.
8. *Маянцев К.С., Точилин П.А.* Об одном методе построения кусочно-квадратичных функций цены для задачи управления системой с переключениями // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1497–1507.
9. *Чистяков И.А., Точилин П.А.* Приближённое решение задачи целевого управления в случае нелинейности по одной переменной // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 11. С. 1560–1571.
10. *Куржанский А.Б.* Принцип сравнения для уравнения типа Гамильтона–Якоби в теории управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12. № 1. С. 173–183.
11. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М., 1977.
12. *Fleming W.H., Soner H.M.* Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. New York, 1993.
13. *Демьянов В.Ф.* Условия экстремума и вариационное исчисление. М., 2005.
14. *Пшеничный Б.Н.* Необходимые условия экстремума. М., 1982.
15. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 10.05.2021 г.
После доработки 13.06.2021 г.
Принята к публикации 05.10.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1516–1535

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.929+517.977

ОДНОВРЕМЕННАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ СЕМЕЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО СОСТОЯНИЮ

© 2021 г. А. В. Метельский

Для спектрально управляемой линейной автономной системы с соизмеримыми запаздываниями строится динамическая обратная связь по состоянию в виде дифференциально-разностного регулятора, обеспечивающая замкнутой системе финитную стабилизацию (полное успокоение исходной системы за конечное время). Решение этой задачи выполняется при помощи приведения исходной системы к системе с конечным спектром (спектральное приведение) внутренним контуром регулятора, определяемым некоторым векторным полиномом. Затем строится внешний контур регулятора, обеспечивающий замкнутой системе финитную стабилизацию. Указаны условия на коэффициенты семейства спектрально управляемых линейных автономных систем одного порядка с одними и теми же соизмеримыми запаздываниями, при выполнении которых указанный регулятор будет единым для всех систем семейства – тем самым решена задача одновременной финитной стабилизации такого семейства. Результаты проиллюстрированы примерами.

DOI: 10.31857/S0374064121110091

Введение. Пусть объект управления описывается линейной автономной дифференциально-разностной системой

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=0}^{m}A_ix(t-ih)+bu(t),\quad t>0,\quad x(t)=\eta(t),\quad t\in[-mh,0]. \tag{1}$$

Здесь x – n-вектор-столбец решения системы (1) $(n\geqslant 2)$; $h>0$ – постоянное запаздывание; A_i – постоянные $n\times n$-матрицы $(i=\overline{0,m},$ m – максимальная кратность запаздывания в системе (1)); b – постоянный n-вектор; η – начальная кусочно непрерывная функция; u – скалярное управление. Векторные величины полагаем записанными в столбец, штрих далее обозначает операцию транспонирования.

Считаем, что в системе (1) $b=e_n=[0,\ldots,0,1]'$. Этого всегда можно достичь линейным невырожденным преобразованием переменных $\breve{x}=Tx$ с постоянной матрицей T или введением вспомогательной переменной $\dot{u}(t)=u_1(t)$. Обозначим $A(\lambda)=A_0+A_1\lambda+\ldots+A_m\lambda^m$, где $\lambda\in\mathbb{C}$. Пусть E_n – единичная матрица n-го порядка, $W(p,e^{-ph})=pE_n-A(e^{-ph})$ – характеристическая матрица $(p\in\mathbb{C})$, $w(p,e^{-ph})=|W(p,e^{-ph})|$ – характеристический квазиполином однородной $(b=0)$ системы (1). Здесь и далее $|\cdot|$ – определитель квадратной матрицы. Набор $\sigma=\{p\in\mathbb{C}: w(p,e^{-ph})=0\}$ корней характеристического квазиполинома с учётом их кратностей называют *спектром* системы (1). Так как коэффициенты характеристического квазиполинома $w(p,e^{-ph})$ действительны, то не вещественные числа, входящие в σ, разбиваются на пары взаимно сопряжённых.

Пусть в операторной записи уравнений λ – оператор сдвига, p – оператор дифференцирования: $p^i\lambda^jf(t)=f^{(i)}(t-jh)$ $(f(t)$ – функция; i, j – целые неотрицательные числа).

Задача стабилизации дифференциальной системы с запаздыванием и её обобщение – задача управления спектром – имеют давнюю историю [1, 2]. Н.Н. Красовским в докладе [1] указана связь задачи стабилизации со свойством вполне управляемости, означающим полное успокоение системы (1). Задача *полного успокоения* системы (1) заключается [3, с. 358] в обеспечении за счёт выбора управления $u(t)$, $t\in[0,t_1]$, тождеств

$$x(t)\equiv 0,\quad u(t)\equiv 0,\quad t\geqslant t_1, \tag{2}$$

где $t_1 > 0$ – некоторый фиксированный момент времени, не зависящий от начальной функции η.

В настоящей работе решается задача полного успокоения системы (1) посредством динамического дифференциально-разностного регулятора по типу обратной связи по состоянию. Если такая обратная связь построена, то она обеспечивает точечную вырожденность [4, 5] замкнутой системы в направлениях, выделяющих её первые n фазовых переменных. Это наблюдение стало основой оригинального подхода [6] к построению динамических регуляторов полного успокоения линейных автономных систем с запаздыванием второго порядка. В дальнейшем этот подход был обобщён [7, 8] на названные системы произвольного порядка, а также на системы других видов [9, 10]. В работах [6, 7] установлено, что для разрешимости задачи полного успокоения системы (1) посредством обратной связи по состоянию необходимо и достаточно, чтобы система (1) была спектрально управляема, т.е. чтобы выполнялось равенство

$$\operatorname{rank}[pE_n - A(e^{-ph}), b] = n \quad \text{для всех} \quad p \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Следуя [11], обеспечение полного успокоения исходной системы (1) посредством обратной связи будем также называть *финитной стабилизацией*. В работах [6–10] задача финитной стабилизации решается через обеспечение замкнутой системе конечного спектра (спектральное приведение). Задача спектрального приведения инициирована работой [12] и в различных постановках исследовалась многими авторами [13–15] (в этих работах приведена достаточно полная библиография).

Ниже для спектрально управляемой системы (1) предлагается схема построения обратной связи, обеспечивающей замкнутой системе финитную стабилизацию. Решение этой задачи, как и в отмеченных выше работах [6–10], выполняется через приведение исходной системы к системе с конечным спектром с помощью регулятора, определяемого некоторым векторным полиномом. Подбором числового вектора строится квазиполином, не имеющий общих корней с характеристическим полиномом спектрально приведённой системы, что достаточно для построения второго контура регулятора, обеспечивающего финитную стабилизацию исходной системы.

Получены условия на коэффициенты систем, при выполнении которых указанные векторный полином и числовой вектор могут быть выбраны едиными для семейства спектрально управляемых линейных автономных систем одного порядка с одними и теми же соизмеримыми запаздываниями, что тем самым даёт решение задачи их одновременной финитной стабилизации. Задача одновременной асимптотической стабилизации названного семейства объектов с запаздыванием исследована в работах [16, 17]. Излагаемый далее подход к решению задачи финитной стабилизации является по своей сути алгебраическим и сводится к стандартным операциям над полиномами и полиномиальными матрицами.

Структура статьи следующая. В п. 1 обоснованы (теорема 1) общие требования к двухконтурному регулятору, обеспечивающему финитную стабилизацию замкнутой системы. В п. 2 по шагам излагается реализация этих требований. Исходная система приводится к системе с конечным спектром подбором векторного полинома, обеспечивающего выполнение приводимого ниже равенства (8) (шаг 1). Построение внешнего контура регулятора (см. теорему 2), обеспечивающего точечную вырожденность замкнутой системы и тем самым – её финитную стабилизацию, основано на лемме 1 (шаг 2). На этом шаге строится квазиполином, не имеющий общих корней с характеристическим полиномом системы, замкнутой внутренним контуром (см. ниже систему (18)). Несовместность этой системы позволяет алгоритмизировать вычисление коэффициентов внешнего контура регулятора (шаги 3–5). В конце п. 2 рассмотрен случай, когда исходная система имеет конечный спектр и, следовательно, необходимость внутреннего контура отпадает. В п. 3 построенный регулятор модифицируется для его применения к семейству спектрально управляемых систем (см. пп. 4, 5).

1. Регулятор финитной стабилизации. Построим дифференциально-разностный регулятор, обеспечивающий замкнутой системе (1) финитную стабилизацию (см. тождества (2)).

Обозначим $M_{n+1}(p,\lambda) = w(p,\lambda)$, и пусть

$$M(p,\lambda) = [M_1(p,\lambda), \ldots, M_n(p,\lambda), M_{n+1}(p,\lambda)]' \tag{4}$$

– вектор-столбец, образованный алгебраическими дополнениями к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы

$$F_\varphi(p,\lambda)=\begin{bmatrix} p-a_{11}(\lambda) & \ldots & -a_{1,n-1}(\lambda) & -a_{1,n}(\lambda) & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -a_{n,1}(\lambda) & \ldots & -a_{n,n-1}(\lambda) & p-a_{n,n}(\lambda) & -1\\ -\varphi_1(\lambda) & \ldots & -\varphi_{n-1}(\lambda) & -\varphi_n(\lambda) & p^r-\sum\limits_{i=1}^{r}\bar\varphi_i(\lambda)p^{r-i}\end{bmatrix}. \tag{5}$$

Здесь $a_{ij}(\lambda)$ – элементы матрицы $A(\lambda)$; $\varphi_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, $\bar\varphi_i(\lambda)$, $i=\overline{1,r}$, – полиномы с действительными коэффициентами, которые подбираем такими, чтобы $|F_\varphi(p,\lambda)|=d_0(p)$, где $d_0(p)$ – некоторый полином степени $\nu=\deg d_0(p)\geqslant n+1$.

При выполнении условия (3) система полиномиальных уравнений

$$M_i(p,\lambda)=0,\quad (p,\lambda)\in\mathbb{C}^2,\quad i=\overline{1,n+1}, \tag{6}$$

относительно переменных p, λ может иметь лишь конечное [8], в частности, пустое множество решений. Поэтому редуцированный базис Грёбнера (в словарном порядке $\lambda>p$) для системы полиномов (4) необходимо содержит полином $\widetilde d_0(p)$ с действительными коэффициентами, множество корней которого обозначим $\widetilde P_0$. В частности, возможно $\widetilde d_0(p)=1$ и тогда $\widetilde P_0=\varnothing$. По свойству базиса Грёбнера найдётся векторный полином $\widetilde\varphi'(p,\lambda)=(\widetilde\varphi_1(p,\lambda),\ldots,\widetilde\varphi_{n+1}(p,\lambda))$ такой, что справедливо разложение

$$\widetilde\varphi'(p,\lambda)M(p,\lambda)=\widetilde d_0(p). \tag{7}$$

Замечание 1. При вычислении базиса Грёбнера для системы полиномов (4) полином $M_{n+1}(p,\lambda)=w(p,\lambda)$ можно исключить, так как он является линейной комбинацией полиномов $M_i(p,\lambda)$, $i=\overline{1,n}$.

Если степень полинома $\widetilde\nu=\deg\widetilde d_0(p)$ меньше, чем $n+1$, то обе части равенства (7) домножим на полином $d_1(p)$ с действительными коэффициентами степени $n+1-\widetilde\nu$. Обозначим $d_0(p)=d_1(p)\widetilde d_0(p)$. Если $\deg\widetilde d_0(p)\geqslant n+1$, то полагаем $d_1(p)=1$. Таким образом, $\nu=\deg d_0(p)\geqslant n+1$. Считаем, что старший коэффициент полинома $d_0(p)$ равен единице. Множество различных корней полинома $d_0(p)$ обозначим $P_0=\{p_i\in\mathbb{C}: i=\overline{1,\mu_0}\}$.

Согласно [18, следствие 1] найдутся полиномы $\varphi_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$; $\bar\varphi_i(\lambda)$, $i=\overline{1,r}$, $r=\nu-n\geqslant 1$, обеспечивающие равенство

$$\Big[-\varphi_1(\lambda),\ldots,-\varphi_n(\lambda),p^r-\sum_{i=1}^{r}\bar\varphi_i(\lambda)p^{r-i}\Big]M(p,\lambda)=d_0(p). \tag{8}$$

Полиномы $\varphi_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, и $\bar\varphi_i(\lambda)$, $i=\overline{1,r}$, можно найти методом неопределённых коэффициентов, используя равенство (8).

Замечание 2. В силу задания системы (6) значения $p_k\in\widetilde P_0$ войдут в состав корней полинома $d_0(p)$ при любом выборе полиномов $\varphi_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, $\bar\varphi_i(\lambda)$, $i=\overline{1,r}$, обеспечивающих равенство (8). Поэтому $d_0(p)=d_1(p)\widetilde d_0(p)$ и $\widetilde P_0\subseteq P_0$. Значения $p_k\in\widetilde P_0$ будем называть *инвариантными спектральными значениями*, а полином $\widetilde d_0(p)$ – *инвариантным полиномом.*

Если $\widetilde P_0=\varnothing$, то множество корней полинома $d_0(p)=d_1(p)$ может быть произвольным при условии: невещественные корни разбиваются на пары самосопряжённых. При выборе полинома $d_1(p)$ учитываем требование: различным корням p_i полинома $d_1(p)$ должны соответствовать различные значения $\lambda_i=e^{-p_ih}$. Оно необходимо для построения искомого регулятора.

Равенство (8) означает, что $|F_\varphi(p,\lambda)|=d_0(p)$, т.е. замкнутая система с характеристической матрицей $F_\varphi(p,\lambda)$ имеет конечный спектр.

Регулятор финитной стабилизации будем строить в виде

$$u(t) = x_{n+1}(t),$$

$$x_{n+1}^{(r)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\lambda)x_i(t) + \sum_{i=1}^{r} \bar{\varphi}_i(\lambda)x_{n+1}^{(r-i)}(t) + f_1(p,\lambda)x_{n+2}(t) + q_1(\lambda)a_1(\lambda)x_{n+3}(t),$$

$$x_{n+2}^{(s)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i x_i(t) + f_2(p,\lambda)x_{n+2}(t) + q_2(\lambda)a_1(\lambda)x_{n+3}(t),$$

$$\dot{x}_{n+3}(t) = x_{n+2}(t) + a_2(\lambda)x_{n+3}(t), \quad t > 0. \tag{9}$$

Здесь $a_i(\lambda),\ i=1,2,\ q'(\lambda)=[q_1(\lambda),q_2(\lambda)];\ \psi_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,n}$ – числа; $f_1(p,\lambda)=\sum_{i=0}^{r_1}\hat{f}_i(\lambda)p^{r_1-i}$, $\hat{f}_i(\lambda),\ i=\overline{0,r_1},\ f_2(p,\lambda)=\sum_{i=0}^{s}\bar{f}_i(\lambda)p^{s-i},\ \bar{f}_i(\lambda),\ i=\overline{0,s}$, – некоторые полиномы, $r_1\geqslant 0$, $s\geqslant 1$.

Характеристической матрицей замкнутой системы (1), (9) будет следующая $(\lambda=e^{-ph})$:

$$\widetilde{A}(p,\lambda)=\begin{bmatrix} p-a_{11}(\lambda) & \ldots & -a_{1,n}(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n-1,1}(\lambda) & \ldots & -a_{n-1,n}(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ -a_{n,1}(\lambda) & \ldots & p-a_{n,n}(\lambda) & -1 & 0 & 0 \\ -\varphi_1(\lambda) & \ldots & -\varphi_n(\lambda) & p^r-\sum_{i=1}^{r}\bar{\varphi}_i(\lambda)p^{r-i} & -f_1(p,\lambda) & -q_1(\lambda)a_1(\lambda) \\ -\psi_1 & \ldots & -\psi_n & 0 & p^s-f_2(p,\lambda) & -q_2(\lambda)a_1(\lambda) \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 & p-a_2(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Замкнутую систему (1), (9) с характеристической матрицей (10) будем называть *системой* (10). Коэффициенты системы (10) подберём такими, чтобы имело место равенство

$$|\widetilde{A}(p,\lambda)| = d(p),$$

где $d(p)=d_2(p)d_0(p)$ – характеристический полином степени $N\geqslant n+3$, а $d_2(p)$ – некоторый полином с действительными коэффициентами. Также потребуем, чтобы замкнутая система приводилась к нормальной форме. Ниже установлено (теорема 2), что при $N\geqslant 2n+r$ это возможно, причём полиномы $f_i(p,\lambda),\ i=1,2$, можно выбрать (лемма 3) такими, чтобы выполнялись неравенства

$$r_1=\deg_p f_1(p,\lambda)\leqslant n+r-1, \quad r_2=\deg_p f_2(p,\lambda)\leqslant s-1. \tag{11}$$

Неравенство $N\geqslant 2n+r$ всегда можно обеспечить за счёт степени $\deg d_2(p)=s+1$ полинома $d_2(p)$.

Покажем, что если $N\geqslant 2n+r$ и выполнены неравенства (11), то система (10) может быть записана в нормальной форме. Для упрощения будем оперировать элементами характеристической матрицы (10).

Если $r\geqslant 2$, то, введя вспомогательные переменные

$$\dot{x}_{n+1}(t)=\widetilde{x}_1(t), \quad \dot{\widetilde{x}}_1(t)=\widetilde{x}_2(t), \quad \ldots, \quad \dot{\widetilde{x}}_{r-2}(t)=\widetilde{x}_{r-1}(t)$$

из системы (10), получим систему с характеристической матрицей, в которой после n-й строки и $(n+1)$-го столбца добавятся $r-1$ строк и столбцов. Так как эта процедура общеизвестна, то выпишем фрагмент полученной матрицы, начиная с элемента, расположенного в позиции $(n, n+1)$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ p & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p & -1 & 0 \\ -\bar{\varphi}_r(\lambda) & -\bar{\varphi}_{r-1}(\lambda) & \dots & -\bar{\varphi}_2(\lambda) & p-\bar{\varphi}_1(\lambda) & -f_1(p,\lambda) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & p^s - \sum\limits_{i=1}^{s} \bar{f}_i(\lambda)p^{s-i} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Если $m_1 = r_1 - r \geqslant 0$, то, выполняя элементарные преобразования над столбцами этой матрицы (см. [19, п. 3.4]), её последний столбец приведём к виду

$$\Big[-\widetilde{f}_0(p,\lambda), -\widetilde{f}_1(\lambda), \dots, -\widetilde{f}_{r-1}(\lambda), -\widetilde{f}_r(\lambda), p^s - \sum_{i=1}^{s} \bar{f}_i(\lambda)p^{s-i}\Big]'. \tag{13}$$

Здесь $\widetilde{f}_0(p,\lambda)$ – некоторый полином со старшим членом $\hat{f}_0(\lambda)p^{r_1-r}$ относительно p; $\widetilde{f}_i(\lambda)$, $i=\overline{1,r}$, – некоторые полиномы.

Так как $N \geqslant 2n + r$, то $s = N - n - r - 1 \geqslant n - 1$. Если $s \geqslant 2$, то в полученной характеристической матрице после $(n+r)$-й строки и $(n+r+1)$-го столбца аналогично (12) добавим $s-1$ строку и $s-1$ столбец, что опять-таки равносильно введению $s-1$ вспомогательных переменных.

Согласно (11) получаем $m_1 = r_1 - r \leqslant n-1$, и поскольку $n - 1 \leqslant s$, то $m_1 \leqslant s$. Если $m_1 > 0$, то, используя строки с номерами с $n+r+1$ по $n+r+s$, посредством элементарных преобразований элементы n-й строки

$$[-a_{n,1}(\lambda), \dots, p - a_{n,n}(\lambda), -1, 0, \dots, 0, -\widetilde{f}_0(p,\lambda), 0, \dots, 0],$$

начиная с $n+r+1$-го, заменим полиномами, зависящими только от λ. В результате получим регулятор финитной стабилизации в виде

$$u(t) = \psi_1 f(\lambda)x_1(t) + \dots + \psi_n f(\lambda)x_n(t) + x_{n+1}(t) + \dots + \breve{f}_1(\lambda)x_{N-s}(t) + \dots$$
$$\dots + \breve{f}_s(\lambda)x_{N-1}(t) + f(\lambda)q_2(\lambda)a_1(\lambda)x_N(t),$$
$$\dot{x}_{n+1}(t) = x_{n+2}(t) + \widetilde{f}_1(\lambda)x_{N-s}(t), \quad \dots, \quad \dot{x}_{N-s-2}(t) = x_{N-s-1}(t) + \widetilde{f}_{r-1}(\lambda)x_{N-s}(t),$$
$$\dot{x}_{N-s-1}(t) = \varphi_1(\lambda)x_1(t) + \dots + \varphi_n(\lambda)x_n(t) + \bar{\varphi}_r(\lambda)x_{n+1}(t) + \dots$$
$$\dots + \bar{\varphi}_1(\lambda)x_{N-s-1}(t) + \widetilde{f}_r(\lambda)x_{N-s}(t) + \dots + q_1(\lambda)a_1(\lambda)x_N(t),$$
$$\dot{x}_{N-s}(t) = x_{N-s+1}(t), \quad \dots, \quad \dot{x}_{N-2}(t) = x_{N-1}(t),$$
$$\dot{x}_{N-1}(t) = \psi_1 x_1(t) + \dots + \psi_n x_n(t) + \dots + \bar{f}_s(\lambda)x_{N-s}(t) + \dots$$
$$\dots + \bar{f}_1(\lambda)x_{N-1}(t) + q_2(\lambda)a_1(\lambda)x_N(t), \quad \dot{x}_N(t) = x_{N-s}(t) + a_2(\lambda)x_N(t), \quad t > 0. \tag{14}$$

Здесь $\breve{f}_i(\lambda)$, $i = \overline{1,s}$, – некоторые полиномы; $f(\lambda) = \hat{f}_0(\lambda)$ – коэффициент полинома $f_1(p,\lambda)$ при p^{r_1}, если $m_1 = r_1 - r = s$, и $f(\lambda) = 0$, если $m_1 < s$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие спектральной управляемости (3). Для финитной стабилизации системы (1) регулятором (14) достаточно:*

1) обеспечить замкнутой системе (10) конечный спектр с некоторым характеристическим полиномом $d(p)$ степени $N \geqslant 2n + r$;

2) выбрать полиномы $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$ так, чтобы функции $a_1(e^{-ph})/d(p)$, $(a_2(e^{-ph})-p)/d(p)$ были целыми.

Доказательство теоремы следует доказательству теоремы 1 работы [8]. Так как характеристическая матрица замкнутой системы (1), (14) (обозначим её $\hat{A}(p, e^{-ph})$) получена из матрицы (10) элементарными преобразованиями строк и столбцов, то её определитель также равен $d(p)$. К замкнутой системе (1), (14) применимо преобразование Лапласа. Согласно теореме Винера–Пэли для выполнения тождеств (2) достаточно [4], чтобы элементы первых n строк матрицы $(\hat{A}(p, e^{-ph}))^{-1}$ были целыми функциями экспоненциального типа. Поэтому, учитывая структуру обратной матрицы, достаточно, чтобы дополнительные миноры к элементам первых n столбцов характеристической матрицы $\hat{A}(p, e^{-ph})$ были целыми функциями. Последнее свойство обеспечено ввиду разложения названных миноров по последнему столбцу матрицы $\hat{A}(p, e^{-ph})$ и условия 2) теоремы 1 (детали см. в [8]). Таким образом, регулятор (14) обеспечивает финитную стабилизацию системы (1).

2. Вычисление коэффициентов регулятора (9). Заметим, что построение регулятора (14) равносильно построению регулятора (9), поскольку регулятор (14) получен элементарными преобразованиями характеристической матрицы (10). Поэтому приведём схему вычисления коэффициентов регулятора (9), гарантирующих выполнение условий теоремы 1.

1) Полиномы $\varphi_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n}$, и $\bar{\varphi}_j(\lambda)$, $j = \overline{0, r-1}$, можно найти как указано в [8, следствие 1] или методом неопределённых коэффициентов, используя равенство (8).

2) Выбор коэффициентов $\psi_1, \ \ldots, \ \psi_{n-1}, \ \psi_n$.

Введём определитель

$$\Delta_\psi(p, \lambda) = \begin{vmatrix} p - a_{11}(\lambda) & \ldots & -a_{1,n-1}(\lambda) & -a_{1,n}(\lambda) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ -a_{n-1,1}(\lambda) & \ldots & p - a_{n-1,n-1}(\lambda) & -a_{n-1,n}(\lambda) \\ \psi_1 & \ldots & \psi_{n-1} & \psi_n \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что $\Delta_\psi(p, \lambda) = M_1(p, \lambda)\psi_1 + \ldots + M_{n-1}(p, \lambda)\psi_{n-1} + M_n(p, \lambda)\psi_n$.

Лемма 1. *При выполнении условия (3) для произвольного набора чисел* $P_0 = \{p_i \in \mathbb{C} : i = \overline{1, \mu_0}\}$ *найдётся действительный вектор* $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}, \psi_n)$, $\psi_n = 1$, *такой, что*

$$\Delta_\psi(p_i, e^{-p_i h}) = M_1(p_i, e^{-p_i h})\psi_1 + \ldots + M_{n-1}(p_i, e^{-p_i h})\psi_{n-1} + M_n(p_i, e^{-p_i h}) \neq 0, \quad p_i \in P_0. \quad (15)$$

Доказательство. Согласно условию (3) $(M_1(p, e^{-ph}), \ldots, M_n(p, e^{-ph})) \neq 0$, $p \in \mathbb{C}$, поэтому имеем систему ненулевых векторов

$$\bar{M}_i = (M_1(p_i, e^{-p_i h}), \ldots, M_n(p_i, e^{-p_i h})) \neq 0, \quad p_i \in P_0, \quad i = \overline{1, \mu_0}. \quad (16)$$

Каждому вектору системы (16) поставим в соответствие ненулевой вектор, образованный только действительными или только мнимыми частями его компонент. А именно, пусть

$$\hat{M}_i = (M_{i1}, \ldots, M_{i,n}), \quad i = \overline{1, \mu_0},$$

где $\hat{M}_i = \operatorname{Re} \bar{M}_i$, если вектор $\operatorname{Re} \bar{M}_i$ ненулевой, и $\hat{M}_i = \operatorname{Im} \bar{M}_i$ в противном случае. В силу условия (16) либо $\operatorname{Re} \bar{M}_i \neq 0$, либо $\operatorname{Im} \bar{M}_i \neq 0$ при каждом $i = \overline{1, \mu_0}$.

Очевидно, что для конечной системы ненулевых векторов $\{\hat{M}_i : i = \overline{1, \mu_0}\}$ существует направление $(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}, 1)$, проекция на которое каждого вектора будет отлична от нуля. Значит, найдутся числа $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \neq 0$, $i = \overline{1, \mu_0}$, такие, что система линейных алгебраических уравнений

$$M_{i1}\psi_1 + \ldots + M_{i,n-1}\psi_{n-1} = \alpha_i - M_{i,n}, \quad i = \overline{1, \mu_0}, \quad (17)$$

совместна относительно неизвестных $\psi_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n-1}$. Числа $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \neq 0$, $i = \overline{1, \mu_0}$, можно найти из условия ортогональности столбца $[\alpha_1 - M_{1n}, \ldots, \alpha_{\mu_0} - M_{\mu_0,n}]'$ всем решениям однородной системы линейных алгебраических уравнений, сопряжённой к системе (17) (теорема Фредгольма). Требуемый набор действительных чисел $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$, удовлетворяющих условию (15), получим как решение системы (17). Лемма доказана.

Вследствие выбора вектора $(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1})$ система уравнений

$$\Delta_\psi(p, e^{-ph}) = 0, \quad d_0(p) = 0 \tag{18}$$

несовместна. Отсюда вытекает [19, следствие 1] следующее утверждение, существенное для построения регулятора (9), точнее, для построения векторных полиномов $q'(\lambda) = (q_1(\lambda), q_2(\lambda))$, $f'(p, \lambda) = (f_1(p, \lambda), \;\; f_2(p, \lambda))$.

Лемма 2. *Если выполнено условие (15), то система полиномиальных уравнений*

$$\Delta_\psi(p, \lambda) = 0, \quad d_0(p) = 0, \quad (p, \lambda) \in \mathbb{C}^2, \tag{19}$$

относительно переменных (p, λ) *может иметь лишь конечное, в частности, пустое множество решений* $P_\lambda = \{(p_i, \lambda_i) \in \mathbb{C}^2 : i = \overline{1, \mu}\}$.

Замечание 3. Ввиду несовместности системы (18) замкнутая система (1) с характеристической матрицей (5), в которой $\lambda = e^{-ph}$, спектрально наблюдаема по линейному выходу $y(t) = \psi_1 x_1(t) + \ldots + \psi_{n-1} x_{n-1}(t) + x_n(t), \;\; t \geqslant 0$.

3) Выбор полинома $d(p)$ и полиномов $a_1(\lambda), \;\; a_2(\lambda)$.

Согласно п. 1 получаем разложение (7) и полином $d_0(p)$, удовлетворяющий (8). Характеристический полином $d(p)$ замкнутой системы (10) берём в виде $d(p) = d_2(p) d_0(p)$, где $d_2(p)$ – полином с действительными коэффициентами. Для приведения замкнутой системы (10) к нормальной форме понадобится неравенство $N = \deg d(p) \geqslant 2n + r$, которое всегда можно выполнить за счёт степени полинома $d_2(p)$. При выборе полинома $d_2(p)$ также учитываем требование: различным корням p_i полинома $d_2(p)$ должны соответствовать различные значения $\lambda_i = e^{-p_i h}$.

Пусть характеристический полином $d(p)$ замкнутой системы имеет вид

$$d(p) = \prod_{i=1}^{s_1} (p - p_i)^{r_i}, \quad p_i \in \widetilde{P}, \tag{20}$$

где $\widetilde{P} = \{p_i \in \mathbb{C} : \;\; i = \overline{1, s_1}\}$ – множество его различных корней, а r_i – алгебраическая кратность корня p_i. Обозначим $\widetilde{\Lambda} = \{e^{-p_i h} : p_i \in \widetilde{P}, \;\; i = \overline{1, s_1}\}$.

Для обеспечения условия 2) теоремы 1 необходимо и достаточно, чтобы корни полинома $d(p)$ (см. (20)) являлись нулями функций $a_1(e^{-ph})$ и $a_2(e^{-ph}) - p$ не меньшей кратности. Поэтому возьмём [6]

$$a_1(\lambda) = \prod_{i=1}^{s_1} (\lambda - \lambda_i)^{r_i}, \quad \lambda_i = e^{-p_i h} \in \widetilde{\Lambda}. \tag{21}$$

Чтобы функция $(a_2(e^{-ph}) - p)/d(p)$ была целой необходимо и достаточно, чтобы для всех $p_i \in \widetilde{P}$ производные по переменной p обращались в нуль:

$$(a_2(e^{-ph}) - p)^{(k)}|_{p = p_i} = 0, \quad i = \overline{1, s_1}, \quad k = \overline{0, r_i - 1}.$$

Поэтому для всех $\lambda_i = e^{-p_i h} \in \widetilde{\Lambda} \;\; (p_i \in \widetilde{P})$ должны выполняться равенства

$$a_2(\lambda_i) = p_i \in \widetilde{P}, \quad a_2^{(k)}(\lambda_i) = \frac{(-1)^k (k-1)!}{h \lambda_i^k}, \quad k = \overline{1, r_i - 1}, \quad \text{если} \quad r_i > 1, \quad i = \overline{1, s_1}. \tag{22}$$

Замечание 4. Если набор корней полинома $\tilde{d}_0(p) \;\; (d(p) = \tilde{d}_0(p) d_1(p) d_2(p))$ содержит комплексно сопряжённые корни, то возможна ситуация, когда $p_{k_1} \neq p_{k_2}$, но $\lambda_{k_1} = \lambda_{k_2} = e^{-p_{k_{1,2}} h}$, и первое равенство в (22) выполнить нельзя, так как в этом случае $a_2(\lambda_{k_1}) = a_2(\lambda_{k_2})$. В такой ситуации, чтобы воспользоваться уже проведёнными рассуждениями, введём [20] новое запаздывание: $\tilde{h} = h/k$, где k – натуральное число. Тогда матрица системы (1) будет иметь вид $A(\lambda) = A_0 + A_1\lambda^k + \ldots + A_m\lambda^{km}$ и $\lambda^i x_k(t) = x_k(t - i\tilde{h})$. Натуральное k и полиномы $d_1(p)$, $d_2(p)$ можно выбрать такими, чтобы различным значениям $p_i \in \widetilde{P}$ соответствовали различные $\lambda_i = e^{-p_i\tilde{h}}$. Считаем далее это условие выполненным.

Пусть $P_0^* = \{p_i \in \mathbb{C} : i = \overline{1, \mu_1}\}$, $\Lambda = \{\lambda_j \in \mathbb{C} : j = \overline{1, \mu_2}\}$ – конечные (см. лемму 2) множества различных значений переменных (p, λ) таких, что при некоторых (i, j) пара $(p_i, \lambda_j) \in P_\lambda$, т.е. P_0^*, Λ – проекции множества P_λ на p и λ соответственно. Очевидно включение $P_0^* \subseteq P_0$.

Обозначим $Q(p, \lambda) = (\Delta_\psi(p, \lambda), d_0(p))'$. Потребуем, чтобы одновременно с равенствами (22) выполнялись соотношения $Q(a_2(\lambda_i), \lambda_i) \neq 0$, $\lambda_i \in \Lambda\backslash\widetilde{\Lambda}$, т.е. равносильно

$$|\Delta_\psi(a_2(\lambda_i), \lambda_i)| + |d_0(a_2(\lambda_i))| \neq 0, \quad \lambda_i \in \Lambda\backslash\widetilde{\Lambda}. \tag{23}$$

Эти условия понадобятся при построении векторного полинома $q'(\lambda)$.

Если для интерполяционного полинома $a_2(\lambda)$, построенного согласно формулам (22), при некотором $\lambda_i^* \in \Lambda\backslash\widetilde{\Lambda}$ неравенство (23) не выполняется, то к интерполяционным условиям (22) добавим [19] равенство

$$a_2(\lambda_i^*) = p_0 \quad (p_0 \in \mathbb{R}, \quad p_0 \notin P_0 \ \text{ и } \ \lambda_i^* \in \Lambda\backslash\widetilde{\Lambda}). \tag{24}$$

Напомним, что P_0 – множество различных корней полинома $d_0(p)$. Значение p_0 можно взять одним и тем же для всех $\lambda_i^* \in \Lambda\backslash\widetilde{\Lambda}$. Вместо (24) можно потребовать выполнения равенства

$$a_2(\lambda_i^*) = p_i^* \quad (p_i^* \in \mathbb{C}, \quad e^{-p_i^* h} = \lambda_i^*, \ \ \lambda_i^* \in \Lambda\backslash\widetilde{\Lambda}). \tag{25}$$

При этом паре комплексно сопряжённых значений $\lambda_{i_{1,2}}^*$ ставим в соответствие пару комплексно сопряжённых значений $p_{i_{1,2}}^*$. Полином $a_2(\lambda)$ найдём как решение известной в теории полиномов интерполяционной задачи (22), (24) или (22), (25), т.е. как полином Лагранжа–Сильвестра [21, с. 104].

4) Вычисление полинома $q'(\lambda) = (q_1(\lambda), q_2(\lambda))$.

Положим

$$k(p, \lambda) = (a_1(\lambda)q'(\lambda)Q(p, \lambda) + d(p))/(a_2(\lambda) - p), \quad K(p, \lambda) = k(p, \lambda) + p^s d_0(p). \tag{26}$$

Докажем, что справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнено условие спектральной управляемости (3). Для того чтобы замкнутая система (10) имела характеристический полином $d(p)$ степени $N \geqslant 2n + r$ достаточно:*

1) выбрать векторный полином $q'(\lambda)$ таким, чтобы функция $k(p, \lambda)$ была полиномом;

2) векторный полином $f'(p, \lambda) = (f_1(p, \lambda), f_2(p, \lambda))$ взять таким, чтобы имело место равенство

$$f'(p, \lambda)Q(p, \lambda) = K(p, \lambda), \quad Q(p, \lambda) = (\Delta_\psi(p, \lambda), d_0(p))', \tag{27}$$

где функция $K(p, \lambda)$ задана в (26).

Доказательство. Пусть выполнены условия 1), 2). Разлагая определитель матрицы (10) по последней строке, получаем

$$|\widetilde{A}(p, \lambda)| = (p - a_2(\lambda))((p^s - f_2(p, \lambda))d_0(p) - f_1(p, \lambda)\Delta_\psi(p, \lambda)) - a_1(\lambda)(q_1(\lambda)\Delta_\psi(p, \lambda) + q_2(\lambda)d_0(p)) =$$

$$= (p - a_2(\lambda))((p^s d_0(p) - f'(p, \lambda)Q(p, \lambda)) - a_1(\lambda)q'(\lambda)Q(p, \lambda). \tag{28}$$

Так как $f'(p, \lambda)Q(p, \lambda) = K(p, \lambda)$, то из (26), (28) вытекает, что $|\widetilde{A}(p, \lambda)| = d(p)$. Теорема доказана.

Чтобы функция $k(p, \lambda)$ являлась полиномом должно, согласно теореме Безу, выполняться тождество

$$a_1(\lambda)q'(\lambda)Q(a_2(\lambda), \lambda) + d(a_2(\lambda)) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{29}$$

Существование векторного полинома $q'(\lambda)$, обеспечивающего это тождество, следует из работы [19]. Действительно, полиномы $\Delta_\psi(a_2(\lambda),\lambda)$ и $d_0(a_2(\lambda))$ взаимно просты в силу условия (23). Поэтому существует векторный полином $\widetilde{q}(\lambda)$ такой, что

$$\widetilde{q}\,'(\lambda)Q(a_2(\lambda),\lambda)=1,\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Полином $\widetilde{q}(\lambda)$ может быть найден с помощью алгоритма Евклида или методом неопределённых коэффициентов. Таким образом, при

$$q'(\lambda)=-\widetilde{q}\,'(\lambda)d(a_2(\lambda))/a_1(\lambda) \tag{30}$$

тождество (29) выполняется (дробь $d(a_2(\lambda))/a_1(\lambda)$ является полиномом согласно [19]).

5) Нахождение векторного полинома $f'(p,\lambda)$.

Полином $k(p,\lambda)$ запишем следующим образом:

$$k(p,\lambda)=((d(p)-d(p)\widetilde{q}\,'(\lambda)Q(p,\lambda))+(d(p)\widetilde{q}\,'(\lambda)Q(p,\lambda)+a_1(\lambda)q'(\lambda)Q(p,\lambda)))/(a_2(\lambda)-p).$$

Так как $d(p)=d_2(p)d_0(p)=[0,d_2(p)]Q(p,\lambda)$, то, заменив в первой скобке $d(p)$ последним выражением и во второй скобке заменив $q'(\lambda)$ согласно (30), получаем

$$k(p,\lambda)=\left(\frac{1-\widetilde{q}\,'(\lambda)Q(p,\lambda)}{a_2(\lambda)-p}[0,d_2(p)]+\frac{d(p)-d(a_2(\lambda))}{a_2(\lambda)-p}\widetilde{q}\,'(\lambda)\right)Q(p,\lambda). \tag{31}$$

Здесь, согласно теореме Безу, $(1-\widetilde{q}\,'(\lambda)Q(p,\lambda))/(a_2(\lambda)-p)$ и $(d(p)-d(a_2(\lambda)))/(a_2(\lambda)-p)$ – полиномы.

Взяв полином

$$f'(p,\lambda)=\frac{1-\widetilde{q}\,'(\lambda)Q(p,\lambda)}{a_2(\lambda)-p}[0,d_2(p)]+\frac{d(p)-d(a_2(\lambda))}{a_2(\lambda)-p}\widetilde{q}\,'(\lambda)+[0,1]p^s, \tag{32}$$

вследствие (31) имеем равенство (27), т.е. выполнено условие 2) теоремы 2. Итак, все условия теорем 1 и 2 реализованы, следовательно, регулятор (14) построен.

Запишем равенство (27) в развёрнутом виде

$$K(p,\lambda)=f_1(p,\lambda)\Delta_\psi(p,\lambda)+f_2(p,\lambda)d_0(p). \tag{33}$$

Лемма 3. *Если $N\geqslant 2n+r$, то в равенстве (33) можно считать выполненными неравенства*

$$\deg_p f_1(p,\lambda)\leqslant n+r-1 \quad \text{и} \quad \deg_p f_2(p,\lambda)\leqslant s-1.$$

Доказательство. Степень полинома $f_1(p,\lambda)$ относительно p сделаем меньше степени $n+r$ переменной p в полиноме $d_0(p)$. Если степень переменной p полинома $f_1(p,\lambda)$ не меньше, чем $n+r$, то представим его в виде

$$f_1(p,\lambda)=\xi_0(p,\lambda)d_0(p)+\xi_1(p,\lambda),$$

где $\xi_i(p,\lambda)$, $i=0,1$, – полиномы, причём $\deg_p\xi_1(p,\lambda)\leqslant n+r-1$. Это возможно, так как полином $d_0(p)$ имеет старший член p^{n+r}. В результате получим

$$K(p,\lambda)=\xi_1(p,\lambda)\Delta_\psi(p,\lambda)+(f_2(p,\lambda)+\xi_0(p,\lambda)\Delta_\psi(p,\lambda))d_0(p). \tag{34}$$

Покажем, что

$$\deg_p(f_2(p,\lambda)+\xi_0(p,\lambda)\Delta_\psi(p,\lambda))\leqslant s-1.$$

Если допустить обратное неравенство, то

$$\deg_p(f_2(p,\lambda)+\xi_0(p,\lambda)\Delta_\psi(p,\lambda))d_0(p)\geqslant n+r+s. \tag{35}$$

Так как $s = N - n - r - 1 \geqslant n - 1$, то $2n + r - 1 \leqslant n + r + s$. Отсюда с учётом того, что $\deg_p \xi_1(p,\lambda) \leqslant n + r - 1$ и $\deg_p \Delta_\psi(p,\lambda) = n - 1$, получаем

$$\deg_p(\xi_1(p,\lambda)\Delta_\psi(p,\lambda)) \leqslant 2n + r - 2 < n + r + s.$$

Ввиду (34), (35) $\deg_p K(p,\lambda) \geqslant n + r + s$, что противоречит равенству (26), согласно которому $\deg_p K(p,\lambda) \leqslant n + r + s - 1$. Лемма доказана.

Полиномы $q'(\lambda)$, $f'(p,\lambda)$ можно находить методом неопределённых коэффициентов как решение полиномиального уравнения

$$(a_1(\lambda)q'(\lambda)Q(p,\lambda) + d(p)) - (a_2(\lambda) - p)(f_1(p,\lambda), f_2(p,\lambda) - p^s)Q(p,\lambda) = 0. \tag{36}$$

Замечание 5. Если исходная система (1) имеет конечный спектр, т.е. $w(p, e^{-ph}) = w(p)$ – полином, то полагаем $d_0(p) = w(p)$ и регулятор финитной стабилизации строим в виде

$$u(t) = f_1(p,\lambda)x_{n+1}(t) + q_1(\lambda)a_1(\lambda)x_{n+2}(t),$$

$$x_{n+1}^{(s)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i x_i(t) + f_2(p,\lambda)x_{n+1}(t) + q_2(\lambda)a_1(\lambda)x_{n+2}(t),$$

$$\dot{x}_{n+2}(t) = x_{n+1}(t) + a_2(\lambda)x_{n+2}(t), \quad t > 0. \tag{37}$$

Здесь, как и раньше, $a_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, $q'(\lambda) = (q_1(\lambda), q_2(\lambda))$; $\psi_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$ – числа; $f_1(p,\lambda) = \sum_{i=0}^{r_1} \hat{f}_i(\lambda)p^{r_1-i}$, $\hat{f}_i(\lambda)$, $i = \overline{0,r_1}$, $f_2(p,\lambda) = \sum_{i=0}^{s} \bar{f}_i(\lambda)p^{s-i}$, $\bar{f}_i(\lambda)$, $i = \overline{0,s}$, – некоторые полиномы, $r_1 \geqslant 0$, $s \geqslant 1$.

Все приведённые выше утверждения, включая теоремы 1 и 2 (при $r = 0$), а также изложенная в п. 2 схема вычисления коэффициентов регулятора остаются в силе. В частности, при $N \geqslant 2n$ замкнутая система (1), (37) приводится к нормальному виду. Для этого при $s \geqslant 2$ в полученной характеристической матрице после n-й строки и $(n+1)$-го столбца аналогично (12) добавим $s - 1$ строку и $s - 1$ столбец, что равносильно введению $s - 1$ вспомогательных переменных. Если $r_1 > 0$, то, используя строки с номерами с $n + 1$ по $n + s$, с помощью элементарных преобразований замкнутую систему (1), (37) приведём к нормальному виду.

3. Модификация регулятора (9). При построении регулятора элемент $\widetilde{a}_{n+2,n+1}$ характеристической матрицы (10) в позиции $(n+2, n+1)$ можно взять равным -1. Тогда, как несложно видеть, модифицированный регулятор

$$u(t) = x_{n+1}(t),$$

$$x_{n+1}^{(r)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\lambda)x_i(t) + \sum_{i=1}^{r} \bar{\varphi}_i(\lambda)x_{n+1}^{(r-i)}(t) + f_1(p,\lambda)x_{n+2}(t) + q_1(\lambda)a_1(\lambda)x_{n+3}(t),$$

$$x_{n+2}^{(s)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i x_i(t) + x_{n+1}(t) + f_2(p,\lambda)x_{n+2}(t) + q_2(\lambda)a_1(\lambda)x_{n+3}(t),$$

$$\dot{x}_{n+3}(t) = x_{n+2}(t) + a_2(\lambda)x_{n+3}(t), \quad t > 0, \tag{38}$$

отличается от регулятора (9) лишь предпоследним уравнением.

Полиномы $d(p)$ и $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$ регулятора (38) строятся так же, как и в п. 2, поскольку формулировка теоремы 1 не меняется.

Векторные полиномы $q'(\lambda)$, $f'(p,\lambda)$ находятся согласно (30), (32) с заменой $Q(p,\lambda) = (\Delta_\psi(p,\lambda), d_0(p))'$ на $\widetilde{Q}(p,\lambda) = (\widetilde{\Delta}_\psi(p,\lambda), d_0(p))'$, где

$$\widetilde{\Delta}_\psi(p,\lambda) = \begin{vmatrix} p - a_{11}(\lambda) & \ldots & -a_{1,n-1}(\lambda) & -a_{1,n}(\lambda) & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ -a_{n,1}(\lambda) & \ldots & -a_{n,n-1}(\lambda) & p - a_{n,n}(\lambda) & -1 \\ \psi_1 & \ldots & \psi_{n-1} & \psi_n & 1 \end{vmatrix} = w(p,\lambda) + \Delta_\psi(p,\lambda).$$

Действительно, характеристический определитель замкнутой системы (1), (38) имеет вид

$$(p - a_2(\lambda))((p^s - f_2(p,\lambda))d_0(p) - f_1(p,\lambda)\widetilde{\Delta}_\psi(p,\lambda)) - a_1(\lambda)(q_1(\lambda)\widetilde{\Delta}_\psi(p,\lambda) + q_2(\lambda)d_0(p)) =$$
$$= (p - a_2(\lambda))((p^s d_0(p) - f'(p,\lambda)\widetilde{Q}(p,\lambda)) - a_1(\lambda)q'(\lambda)\widetilde{Q}(p,\lambda), \tag{39}$$

аналогичный (28), поэтому для регулятора (38) верна прежняя теорема 2, задающая векторные полиномы $q'(\lambda)$, $f'(p,\lambda)$.

Замечание 6. Так как $\widetilde{\Delta}_\psi(p,e^{-ph}) = w(p,e^{-ph}) + \Delta_\psi(p,e^{-ph})$, то выбором действительного вектора $\psi = (\psi_1,\ldots,\psi_n)$, $\psi_n = 1$, достаточно обеспечить (см. лемму 1) выполнение условия $\Delta_\psi(p_i,e^{-p_i h}) \neq 0$ для тех значений $p_i \in P_0$, для которых $w(p_i,e^{-p_i h}) = 0$. Тогда при некотором $\gamma \in \mathbb{R}$ и действительном векторе $(\psi_1^*,\ldots,\psi_n^*) = \gamma(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1},1)$ (число γ легко подобрать) будем иметь

$$\widetilde{\Delta}_\psi(p_i,e^{-p_i h}) = M_1(p_i,e^{-p_i h})\psi_1^* + \ldots + M_n(p_i,e^{-p_i h})\psi_n^* + M_{n+1}(p_i,e^{-p_i h}) \neq 0, \quad p_i \in P_0. \tag{40}$$

Если $w(p_i,e^{-p_i h}) \neq 0$ для всех $p_i \in P_0$, то полагаем $(\psi_1,\ldots,\psi_n) = 0$ и $\widetilde{\Delta}_\psi(p,e^{-ph}) = w(p,e^{-ph})$. Тем самым модифицированный регулятор (38) расширяет возможности обеспечения условия (40), требуемого леммой 2. Это существенно при спектральном приведении и финитной стабилизации семейства систем вида (1) (см. п. 4).

Ввиду условия (40) для полиномов $\widetilde{\Delta}_\psi(p,\lambda)$, $d_0(p)$ справедлива лемма 2. Поэтому остаётся в силе схема п. 2 вычисления полиномов $q'(\lambda)$, $f'(p,\lambda)$ регулятора (38).

Как и выше, считаем, что $N \geqslant 2n + r$. Так как $N = n + r + s + 1$, то $s \geqslant n - 1$. Согласно лемме 3 $m_1 = r_1 - r \leqslant n - 1$, поэтому $m_1 \leqslant s$. В этом случае справедливо равенство (34), в котором вместо полинома $\Delta_\psi(p,\lambda)$ будет полином $\widetilde{\Delta}_\psi(p,\lambda)$. Так как $\deg_p(\xi_1(p,\lambda)\widetilde{\Delta}_\psi(p,\lambda)) \leqslant 2n + r - 1 \leqslant n + r + s$, $\deg_p K(p,\lambda) \leqslant n + r + s - 1$ то

$$\deg_p(f_2(p,\lambda) + \xi_0(p,\lambda)\widetilde{\Delta}_\psi(p,\lambda)) \leqslant s.$$

Итак, в равенстве (33) можно полагать, что

$$r_1 = \deg_p f_1(p,\lambda) \leqslant n + r - 1 \quad \text{и} \quad r_2 = \deg_p f_2(p,\lambda) \leqslant s \tag{41}$$

соответственно, где $f_1(p,\lambda) = \sum_{i=0}^{r_1} \hat{f}_i(\lambda)p^{r_1-i}$ и $f_2(p,\lambda) = \sum_{i=0}^{s} \bar{f}_i(\lambda)p^{s-i}$.

Вместо матрицы (12) будем иметь матрицу

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ p & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & p & -1 & 0 \\ -\bar{\varphi}_r(\lambda) & -\bar{\varphi}_{r-1}(\lambda) & \ldots & -\bar{\varphi}_2(\lambda) & p - \bar{\varphi}_1(\lambda) & -f_1(p,\lambda) \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & p^s - f_2(p,\lambda) \end{bmatrix}.$$

Элементарными преобразованиями (см. [19, п. 3.4]) её последний столбец приведём к виду

$$[-\widetilde{f}_0(p,\lambda), -\widetilde{f}_1(\lambda), \ldots, -\widetilde{f}_{r-1}(\lambda), -\widetilde{f}_r(\lambda), p^s - \hat{f}(p,\lambda)]', \tag{42}$$

где $\widetilde{f}_0(p,\lambda)$ – некоторый полином со старшим членом $\hat{f}_0(\lambda)p^{r_1-r}$ относительно p; $\widetilde{f}_i(\lambda)$, $i = \overline{1,r}$, – некоторые полиномы; $\hat{f}(p,\lambda) = f_2(p,\lambda) + \widetilde{f}_0(p,\lambda)$.

Так как характеристический полином системы (1), замкнутой регулятором (38), имеет старший член p^N, то, как следует из представления (39), $\deg_p(f'(p,\lambda)\widetilde{Q}(p,\lambda)) \leqslant n + r + s - 1$. Если $r_2 = s$, то $\deg_p(f_2(p,\lambda)d_0(p)) = n + r + s$. Вследствие равенства $f'(p,\lambda)\widetilde{Q}(p,\lambda) = f_1(p,\lambda)\widetilde{\Delta}_\psi(p,\lambda) + f_2(p,\lambda)d_0(p)$ должно быть

$$\deg_p(f_1(p,\lambda)\widetilde{\Delta}_\psi(p,\lambda)) = n + r + s \tag{43}$$

и $\hat{f}_0(\lambda)+\bar{f}_0(\lambda)=0$ – сумма старших относительно p коэффициентов полиномов $f_1(p,\lambda)$, $f_2(p,\lambda)$. Итак, полином $\hat{f}(p,\lambda)$ в столбце (42) будет относительно p иметь степень не большую, чем $s-1$.

В силу (43) имеем $r_1+n=n+r+s$ или $r_1-r=s$. Так как $r_1-r\leqslant n-1$ (см. (41)) и $s\geqslant n-1$, то $r_1-r=s=n-1$. Если $s\geqslant 2$, то с помощью элементарных преобразований над строками характеристической матрицы, описанных после выражения (13), приведём регулятор финитной стабилизации к виду (14), где первое и предпоследнее уравнения будут такими:

$$u(t)=\psi_1 f(\lambda)x_1(t)+\ldots+\psi_n f(\lambda)x_n(t)+(f(\lambda)+1)x_{n+1}(t)+\ldots+\breve{f}_1(\lambda)x_{N-s}(t)+\ldots$$

$$\ldots+\breve{f}_s(\lambda)x_{N-1}(t)+f(\lambda)q_2(\lambda)a_1(\lambda)x_N(t),$$

$$\dot{x}_{N-1}(t)=\psi_1x_1(t)+\ldots+\psi_nx_n(t)+x_{n+1}(t)+\ldots+\hat{f}_s(\lambda)x_{N-s}(t)+\ldots$$

$$\ldots+\hat{f}_1(\lambda)x_{N-1}(t)+q_2(\lambda)a_1(\lambda)x_N(t). \qquad (44)$$

Как и в (14), здесь $\breve{f}_i(\lambda)$, $i=\overline{1,s}$, – некоторые полиномы; $f(\lambda)=\hat{f}_0(\lambda)$ – коэффициент полинома $f_1(p,\lambda)$ при p^{r_1}, если $m_1=r_1-r=s$, и $f(\lambda)=0$, если $m_1<s$.

Все коэффициенты модифицированного регулятора (38) находятся по изложенной выше схеме. Как и выше, система (1), замкнутая регулятором (38), при $N\geqslant 2n+r$ введением вспомогательных переменных (если необходимо) и элементарными преобразованиями столбцов также может быть приведена к нормальной форме. Характеристический определитель (полином $d(p)$) приведённой системы, очевидно, не изменится. Первые $N-1$ строки матрицы, обратной к характеристической матрице приведённой системы, образованы целыми функциями экспоненциального типа. Если старшая степень λ в i-й строке этой матрицы равна α_i, $i=\overline{1,n+1}$, то согласно теореме Винера–Пэли в замкнутой системе (1), (38) переменные $x_i(t)\equiv 0$, $i=\overline{1,n+1}$, по крайней мере, при $t\geqslant(\alpha_i+1)h$. При этом и управление $u(t)\equiv 0$, $t\geqslant(\alpha_i+1)h$, поскольку $u(t)=x_{n+1}(t)$. Следовательно, тождества (2) будут иметь место, по крайней мере, при $t\geqslant t_1=(\bar{\alpha}+1)h$, $\bar{\alpha}=\max\{\alpha_i\colon\ i=\overline{1,n+1}\}$.

4. Спектральное приведение и финитная стабилизация семейства систем вида (1). Единый регулятор финитной стабилизации семейства систем (1) будем строить в виде (38). Как отмечалось в замечании 6, модифицированный регулятор (38) расширяет возможности обеспечения условия (40), требуемого леммой 2.

Из изложенного выше видно, что основными этапами построения регулятора являются обеспечение равенства (8) и неравенства (40) за счёт выбора соответственно векторного полинома $(-\varphi_1(\lambda),\ldots,-\varphi_n(\lambda),p^r-\sum_{i=1}^r\bar{\varphi}_i(\lambda)p^{r-i})$ и действительного вектора $(\psi_1^*,\ldots,\psi_n^*)$. Следовательно, системы, для которых эти векторы являются общими, могут быть замкнуты единым регулятором. Выясним, для каких семейств систем вида (1) это возможно.

Рассмотрим семейство объектов управления, описываемых линейными автономными дифференциально-разностными системами n-го порядка с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}^\omega(t)=\sum_{i=0}^m A_i^\omega x^\omega(t-ih)+bu(t),\quad t>0,\quad x^\omega(t)=\eta^\omega(t),\quad \omega\in\Omega,\quad t\in[-mh,0]. \qquad (45)$$

Множество Ω может быть подмножеством действительных чисел: $\Omega\subseteq\mathbb{R}$, тогда ω – параметр, от которого зависят коэффициенты семейства (45), или отрезком натурального ряда: $\Omega\subset\mathbb{N}$ конечно, тогда ω – натуральный индекс (порядковый номер системы: $\omega=\overline{1,N_\Omega}$). В записанных далее выражениях и соотношениях предполагается, что $\omega\in\Omega$. Смысл остальных обозначений прежний: $x^\omega=[x_1^\omega,\ldots,x_n^\omega]'$ – n-вектор-столбец решения системы с индексом ω семейства (45) (для краткости – системы ω) ($n\geqslant 2$); $0<h$ – постоянное запаздывание; A_i^ω – постоянные $n\times n$-матрицы ($i=\overline{0,m}$, m – максимальная кратность запаздывания в семействе (45); η^ω – начальная кусочно непрерывная функция; $b=e_n=[0,\ldots,0,1]'$, u – скалярное управление, одно и то же для всех систем семейства.

Следуя п. 1, обозначим $A^\omega(\lambda) = A_0^\omega + A_1^\omega\lambda + \ldots + A_m^\omega\lambda^m$ $(\lambda \in \mathbb{C})$; $A^\omega(\lambda) = [a_{ij}^\omega(\lambda)]$;

$$F_\varphi^\omega(p,\lambda) = \begin{bmatrix} p - a_{11}^\omega(\lambda) & \ldots & -a_{1,n-1}^\omega(\lambda) & -a_{1,n}^\omega(\lambda) & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n,1}^\omega(\lambda) & \ldots & -a_{n,n-1}^\omega(\lambda) & p - a_{n,n}^\omega(\lambda) & -1 \\ -\varphi_1(\lambda) & \ldots & -\varphi_{n-1}(\lambda) & -\varphi_n(\lambda) & p^r - \sum\limits_{i=1}^r \bar\varphi_i(\lambda)p^{r-i} \end{bmatrix}.$$

Здесь $\varphi_i(\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, $\bar\varphi_j(\lambda)$, $j = \overline{1,r}$, – некоторые полиномы $(r \geqslant 1)$.

Обозначим

$$\Phi(\lambda) = (\varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_n(\lambda)), \quad \bar\Phi(\lambda) = (\bar\varphi_1(\lambda), \ldots, \bar\varphi_r(\lambda)).$$

Векторные полиномы $\Phi(\lambda)$, $\bar\Phi(\lambda)$ в последней строке матрицы $F_\varphi^\omega(p,\lambda)$ будем выбирать такими, чтобы

$$|F_\varphi^\omega(p,\lambda)| = d_0(p) = p^\nu + p^{\nu-1}\beta_1 + \ldots + p^n\beta_r + \ldots + \beta_\nu, \tag{46}$$

где $d_0(p)$ – некоторый полином с действительными коэффициентами: β_i – вещественные числа, $i = \overline{1,\nu}$, $\nu = n + r$. Напомним, что здесь и далее предполагается, что $\omega \in \Omega$, поэтому если $\Omega \subset \mathbb{N}$ конечно, то (46) является конечной системой равенств: $\omega = \overline{1, N_\Omega}$.

Определение. Если при некоторых полиномах $\Phi(\lambda)$, $\bar\Phi(\lambda)$ и $d_0(p)$ для всех $\omega \in \Omega$ имеет место равенство (46), то семейство систем (45) назовём *спектрально приводимым с полиномом* $d_0(p)$.

Пусть $W^\omega(p,\lambda) = [M_1^\omega(p,\lambda), \ldots, M_{n+1}^\omega]'$ – алгебраческие дополнения к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы $F_\varphi^\omega(p,\lambda)$. Заметим, что $M_{n+1}^\omega(p,\lambda) = w^\omega(p,\lambda)$, где $w^\omega(p,\lambda) = |pE_n - A^\omega(e^{-ph})|$.

Как и в п. 1, полином $d_0(p) = d_1(p)\widetilde{d}_0(p)$, где $d_1(p)$ – некоторый полином с действительными коэффициентами, $\widetilde{d}_0(p)$ – инвариантный полином, который получается следующим образом. При $\omega \in \Omega$ для системы полиномов $\{M_1^\omega(p,\lambda), \ldots, M_n^\omega(p,\lambda)\}$ находим редуцированный базис Грёбнера (в словарном порядке $\lambda > p$). Ввиду спектральной управляемости он необходимо содержит полином $\widetilde{d}_0^\omega(p)$, корни которого, если полином отличен от постоянной, являются инвариантными спектральными значениями. Поэтому должно выполняться равенство $\widetilde{d}_0^\omega(p) = \widetilde{d}_0(p)$, т.е. этот полином не должен зависеть от параметра ω, иначе построение предполагаемого единого регулятора невозможно. (В таком случае можно рассмотреть построение по изложенной выше схеме "универсального" регулятора с коэффициентами, зависящими от параметра ω.)

Если параметр ω – натуральный индекс, то, вычисляя редуцированный базис Грёбнера для системы полиномов $\{M_1^\omega(p,\lambda), \ldots, M_n^\omega(p,\lambda)\}$, находим инвариантный полином $\widetilde{d}_0^\omega(p)$, $\omega = \overline{1, N_\Omega}$, для каждой системы ω в отдельности. Полином $\widetilde{d}_0(p)$ записываем как наименьшее общее кратное найденных инвариантных полиномов. Векторные полиномы $\Phi(\lambda)$, $\bar\Phi(\lambda)$, обеспечивающие равенство (46), могут быть найдены методом неопределённых коэффициентов. При этом полином $d_1(p)$ также предпочтительно брать с неопределёнными коэффициентами, так как для фиксированных коэффициентов полинома $d_1(p)$ система (46) может не иметь решения.

Получим необходимые условия на семейство систем (45), при которых единый регулятор финитной стабилизации существует, а также необходимые условия, которым удовлетворяют коэффициенты регулятора. Пусть

$$M_k^\omega(p,\lambda) = \sum_{i=0}^{n-2} \gamma_{k,i}^\omega(\lambda)p^i, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad M_n^\omega(p,\lambda) = p^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \gamma_{n,i}^\omega(\lambda)p^i. \tag{47}$$

Очевидно, что

$$|F_\varphi^\omega(p,\lambda)| = -(\varphi_1(\lambda)M_1^\omega(p,\lambda) + \ldots + \varphi_n(\lambda)M_n^\omega(p,\lambda)) + w^\omega(p,\lambda)\biggl(p^r - \sum_{i=1}^r \bar\varphi_i(\lambda)p^{r-i}\biggr). \tag{48}$$

С учётом (47) первую группу слагаемых в (48) представим в виде

$$-(\varphi_1(\lambda)M_1^\omega(p,\lambda)+\ldots+\varphi_n(\lambda)M_n^\omega(p,\lambda))=-\sum_{i=0}^{n-1}p^i s_i^\omega(\lambda),$$

где

$$s_i^\omega(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(\lambda)\gamma_{j,i}^\omega(\lambda),\quad i=\overline{0,n-2},\quad s_{n-1}^\omega(\lambda)=\varphi_n(\lambda).$$

Замечание 7. Произведение полиномов $L_1(p)=\sum_{i=0}^{k}a_i(\lambda)p^{k-i}$, $L_2(p)=\sum_{i=0}^{l}b_i(\lambda)p^{l-i}$ может быть записано в виде

$$L_1(p)L_2(p)=\sum_{i=0}^{N_1}p^{N_1-i}\sum_{j=\max(0,i-l)}^{\min(i,k)}a_j(\lambda)b_{i-j}(\lambda),\quad N_1=k+l.$$

Запишем характеристический квазиполином системы ω:

$$w^\omega(p,\lambda)=p^n+p^{n-1}\alpha_1^\omega(\lambda)+\ldots+p\alpha_{n-1}^\omega(\lambda)+\alpha_n^\omega(\lambda).$$

Согласно замечанию 7 (напоминаем, что $\nu=n+r$) имеем

$$w^\omega(p,\lambda)\biggl(p^r-\sum_{i=1}^{r}\bar\varphi_i(\lambda)p^{r-i}\biggr)=-\sum_{i=0}^{\nu}p^{\nu-i}\sum_{j=\max(0,i-r)}^{\min(i,n)}\alpha_j^\omega(\lambda)\bar\varphi_{i-j}(\lambda),\quad \alpha_0^\omega(\lambda)=1,\quad \bar\varphi_0(\lambda)=-1.$$

Сравнивая коэффициенты полиномов $|F_\varphi^\omega(p,\lambda)|$ и $d_0(p)$, получаем

$$-\sum_{j=0}^{\min(i,n)}\alpha_j^\omega(\lambda)\bar\varphi_{i-j}(\lambda)=\beta_i,\quad i=\overline{1,r},\quad -\sum_{j=i-r}^{\min(i,n)}\alpha_j^\omega(\lambda)\bar\varphi_{i-j}(\lambda)-s_{\nu-i}^\omega(\lambda)=\beta_i,\quad i=\overline{r+1,\nu}. \tag{49}$$

Таким образом, верна

Теорема 3. *Семейство систем (45) спектрально приводимо с полиномом $d_0(p)$, если и только если найдутся полиномы $\Phi(\lambda)$, $\bar\Phi(\lambda)$, обеспечивающие равенства (49).*

Так как числа β_j, $j=\overline{1,\nu}$, не зависят от параметра ω, то и полиномы в правых частях равенств (49) не должны зависеть от ω. Величины, не зависящие от индекса ω системы, будем называть *инвариантными.*

Опираясь на теорему 3, приведём простые для проверки необходимые условия спектральной приводимости семейства (45).

Следствие 1. *Для спектральной приводимости семейства (45) при $1\leqslant r\leqslant n-2$ необходимо, чтобы были инвариантны r коэффициентов характеристических квазиполиномов систем семейства (45):*

$$\alpha_i^\omega(\lambda)=\alpha_i(\lambda),\quad i=\overline{1,r},\quad \omega\in\Omega.$$

Если $r\geqslant n-1\geqslant 1$, то должны быть инвариантны все коэффициенты характеристических квазиполиномов, т.е. системы семейства (45) должны иметь общий характеристический квазиполином

$$w^\omega(p,\lambda)=w(p,\lambda)=p^n+p^{n-1}\alpha_1(\lambda)+\ldots+p\alpha_{n-1}(\lambda)+\alpha_n(\lambda).$$

Доказательство. Если $1\leqslant r\leqslant n-2$, то из (49) имеем

$$-\sum_{j=0}^{i}\alpha_j^\omega(\lambda)\bar\varphi_{i-j}(\lambda)=\beta_i,\quad i=\overline{1,r}.$$

Или, в подробной записи:

$$\alpha_1^\omega(\lambda)-\bar\varphi_1(\lambda)=\beta_1,\quad \alpha_2^\omega(\lambda)-\alpha_1^\omega(\lambda)\bar\varphi_1(\lambda)-\bar\varphi_2(\lambda)=\beta_2,$$
$$\alpha_r^\omega(\lambda)-\alpha_{r-1}^\omega(\lambda)\bar\varphi_1(\lambda)-\ldots-\alpha_1^\omega(\lambda)\bar\varphi_{r-1}(\lambda)-\bar\varphi_r(\lambda)=\beta_r. \tag{50}$$

Отсюда следует инвариантность коэффициентов $\alpha_i^\omega(\lambda)$, $i=\overline{1,r}$, $r\leqslant n-2$.

При $r=n-1$ имеем систему равенств (50) и дополнительно при $i=n$ из правой системы в (49) получаем равенство

$$-\alpha_1^\omega(\lambda)\bar\varphi_{n-1}(\lambda)-\ldots-\alpha_{n-1}^\omega(\lambda)\bar\varphi_1(\lambda)+\alpha_n^\omega(\lambda)-\varphi_n(\lambda)=\beta_n,$$

что влечёт за собой инвариантность коэффициента $\alpha_n^\omega(\lambda)=\alpha_n(\lambda)$.

Если $r\geqslant n$, то из (49) получаем систему равенств (50), где $r=n$, откуда и следует инвариантность всех коэффициентов: $\alpha_i^\omega(\lambda)=\alpha_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$.

Поэтому для спектральной приводимости семейства (45) при $r\geqslant n-1$ необходимо, чтобы все его системы имели общий характеристический квазиполином $w^\omega(p,\lambda)=w(p,\lambda)$. Следствие доказано.

Если $r\geqslant n-1$, то из правой системы в (49) вытекает, что

$$-\sum_{j=i-r}^{n}\alpha_j^\omega(\lambda)\bar\varphi_{i-j}(\lambda)-s_{\nu-i}^\omega(\lambda)=\beta_i,\quad i=\overline{r+1,\nu}.$$

Отсюда в подробной записи получаем

$$-\alpha_1^\omega(\lambda)\bar\varphi_r(\lambda)-\ldots-\alpha_n^\omega(\lambda)\bar\varphi_{r+1-n}(\lambda)-\varphi_n(\lambda)=\beta_{r+1},$$
$$-\alpha_2^\omega(\lambda)\bar\varphi_r(\lambda)-\ldots-\alpha_n^\omega(\lambda)\bar\varphi_{r+2-n}(\lambda)-s_{n-2}^\omega(\lambda)=\beta_{r+2},\quad \ldots,$$
$$-\alpha_{n-1}^\omega(\lambda)\bar\varphi_r(\lambda)-\alpha_n^\omega(\lambda)\bar\varphi_{r-1}(\lambda)-s_1^\omega(\lambda)=\beta_{\nu-1},\quad -\alpha_n^\omega(\lambda)\bar\varphi_r(\lambda)-s_0^\omega(\lambda)=\beta_\nu.$$

Таким образом, можно сформулировать ещё одно следствие из теоремы 3.

Следствие 2. *Для спектральной приводимости семейства (45) при* $r\geqslant n-1\geqslant 1$ *необходима инвариантность всех полиномов*

$$s_i^\omega(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(\lambda)\gamma_{j,i}^\omega(\lambda)=s_i(\lambda),\quad i=\overline{0,n-2}.$$

Следуя п. 3, рассмотрим определитель

$$\widetilde\Delta_\psi^\omega(p,\lambda)=\begin{vmatrix} p-a_{11}^\omega(\lambda) & \ldots & -a_{1,n-1}^\omega(\lambda) & -a_{1,n}^\omega(\lambda) & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -a_{n,1}^\omega(\lambda) & \ldots & -a_{n,n-1}^\omega(\lambda) & p-a_{n,n}^\omega(\lambda) & -1\\ \psi_1(\lambda) & \ldots & \psi_{n-1}(\lambda) & \psi_n(\lambda) & 1\end{vmatrix}=w^\omega(p,\lambda)+\Delta_\psi^\omega(p,\lambda),$$

где определитель $\Delta_\psi^\omega(p,\lambda)$ получается вычеркиванием в определителе $\widetilde\Delta_\psi^\omega(p,\lambda)$ последнего столбца и предпоследней строки; $\psi_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, – некоторые полиномы.

Для реализации единого регулятора вида (38) полиномы $\psi_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, должны быть такими, чтобы выполнялись соотношения

$$\widetilde\Delta_\psi^\omega(p,e^{-ph})\neq 0,\quad p\in P^0=\{p\in\mathbb{C}: d_0(p)=0\}, \tag{51}$$

т.е. $\widetilde\Delta_\psi^\omega(p,e^{-ph})\neq 0$ на корнях полинома $d_0(p)$ (см. (46)). Последнее условие легко обеспечить для всех систем семейства (45) единым набором чисел $\psi=(\psi_1,\ldots,\psi_n)$ (см. лемму 1). Но, кроме того, определитель

$$\widetilde\Delta_\psi^\omega(p,\lambda)=\sum_{i=0}^{n}p^{n-i}\bar q_i(\lambda),\quad \bar q_0(\lambda)=1, \tag{52}$$

должен быть одним и тем же для всех систем семейства (45) ($\bar{q}_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, – некоторые полиномы). Чтобы расширить класс систем (45), для которых это возможно, в последней строке определителя $\widetilde{\Delta}_\psi^\omega(p,\lambda)$ числовой вектор ψ заменён векторным полиномом $\Psi(\lambda) = (\psi_1(\lambda),\ldots,\psi_n(\lambda))$.

Имеем равенство

$$\widetilde{\Delta}_\psi^\omega(p,\lambda) = (\psi_1(\lambda)M_1^\omega(p,\lambda)+\ldots+\psi_n(\lambda)M_n^\omega(p,\lambda)) + w^\omega(p,\lambda), \tag{53}$$

заменяя в котором полиномы $M_i^\omega(p,\lambda)$ согласно (47), можем записать

$$\widetilde{\Delta}_\psi^\omega(p,\lambda) = p^n + \sum_{i=1}^n p^{n-i}\alpha_i^\omega(\lambda) + \sum_{i=1}^n p^{n-i}\widetilde{s}_{n-i}^\omega(\lambda),$$

где

$$\widetilde{s}_i^\omega(\lambda) = \sum_{j=1}^n \psi_j(\lambda)\gamma_{j,i}^\omega(\lambda), \quad i=\overline{0,n-2}, \quad \widetilde{s}_{n-1}^\omega(\lambda) = \psi_n(\lambda).$$

Тогда в силу (52) верно равенство

$$\alpha_i^\omega(\lambda) + \widetilde{s}_{n-i}^\omega(\lambda) = \bar{q}_i(\lambda), \quad i=\overline{1,n}. \tag{54}$$

С учётом следствия 1 получаем

Следствие 3. *Для существования единого регулятора стабилизации семейства (45) при $2\leqslant r\leqslant n-2$ необходимо, чтобы были инвариантны $r-1$ полиномов*

$$\widetilde{s}_i^\omega(\lambda) = \sum_{j=1}^n \psi_j(\lambda)\gamma_{j,i}^\omega(\lambda) = \widetilde{s}_i(\lambda), \quad i=\overline{n-r,n-2}.$$

Если $r\geqslant n-1\geqslant 1$, то должны быть инвариантны полиномы

$$\widetilde{s}_i^\omega(\lambda) = \widetilde{s}_i(\lambda), \quad i=\overline{0,n-2}.$$

В последнем случае ($r\geqslant n-1\geqslant 1$), согласно следствию 1, необходимо, чтобы выполнялись равенства $w^\omega(p,\lambda) = w(p,\lambda)$. Если к тому же $w(p,e^{-ph})\neq 0$, $p\in P^0$, то можно положить $\psi_j(\lambda)=0$, $j=\overline{1,n}$, и вследствие (53) получаем, что $\widetilde{\Delta}_\psi^\omega(p,\lambda) = w(p,\lambda)$.

Теорема 4. *Для реализации единого регулятора вида с полиномами $\widetilde{\Delta}_\psi(p,\lambda) = p^n + \sum_{i=1}^n p^{n-i}\bar{q}_i(\lambda)$ и $d_0(p) = p^\nu + \sum_{i=1}^\nu p^{\nu-i}\beta_i$ достаточно, чтобы существовали векторные полиномы $\Phi(\lambda)$, $\bar{\Phi}(\lambda)$, обеспечивающие равенства (49), и векторный полином $\Psi(\lambda)$, обеспечивающий равенства (54) и неравенства (51).*

Полиномы $\Phi(\lambda)$, $\bar{\Phi}(\lambda)$, $d_0(p)$ можно находить методом неопределённых коэффициентов как решение системы (49), полином $\Psi(\lambda)$ – как решение системы (54) и неравенства (51).

5. Примеры. Процедуру построения единого регулятора финитной стабилизации вида (38) проиллюстрируем примерами.

Пример 1. Пусть объект управления описывается системой (45) второго порядка с матрицами

$$A^\omega(\lambda) = \begin{bmatrix} \omega(2-\lambda) & \omega(2-\lambda) \\ (-1-4\omega-2\omega^2+\omega^2\lambda)/\omega & -4-2\omega+\omega\lambda \end{bmatrix}, \quad \omega\neq 0, \quad b=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \quad h=\ln 2. \tag{55}$$

Система (55) имеет бесконечный спектр и характеристический квазиполином ($\lambda = e^{-ph}$) $w(p,\lambda) = p^2+4p-\lambda+2$.

Алгебраические дополнения $M^\omega(p,\lambda)=[M_1^\omega(p,\lambda),M_2^\omega(p,\lambda),M_3^\omega(p,\lambda)]'$ к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы $F_\varphi(p,\lambda)$ следующие:

$$M_1^\omega(p,\lambda)=-\omega(2-\lambda),\quad M_2^\omega(p,\lambda)=p+\omega(2-\lambda),\quad M_3^\omega(p,\lambda)=p^2+4p-\lambda+2.$$

Решая систему (6), находим $(p,\lambda)=(0,2)$. Так как $e^{-ph}\neq\lambda$, то система (55) спектрально управляема, поскольку, очевидно, выполняется условие (3). Следовательно, регулятор финитной стабилизации при каждом действительном значении $\omega\neq0$ существует.

Находим базис Грёбнера: $\{p,-2+\lambda\}$ для системы полиномов $M^\omega(p,\lambda)$; значит, в разложении (7) $\widetilde{d}_0(p)=p$. Возьмём $d_1(p)=(p+1)(p+3)$, тогда $d_0(p)=p(p+1)(p+3)$, $P_0=\{0,-1,-3\}$. Равенство (8) примет вид

$$[1+\lambda,1+\lambda,p]M^\omega(p,\lambda)=d_0(p).$$

Полином $\widetilde{\Delta}_\psi^\omega(p,\lambda)$, обеспечивающий выполнение требования (51), не должен зависеть от ω. Так как полином $w(p,\lambda)=p^2+4p-\lambda+2$ удовлетворяет этому требованию и $w(p_i,e^{-p_ih})\neq\neq0$ для всех $p_i\in P_0$, то, согласно (40), полагаем $(\psi_1^*,\psi_2^*)=0$ и $\widetilde{\Delta}_\psi^\omega(p,e^{-ph})=w(p,e^{-ph})$. Итак,

$$\widetilde{\Delta}_\psi(p,\lambda)=p^2+4p-\lambda+2,\quad d_0(p)=3p+4p^2+p^3.$$

Решая систему (19), находим

$$P_\lambda=\{(-3,-1),(-1,-1),(0,2)\},\quad \Lambda=\{-1,2\},\quad P_1^*=\{0,-1,-3\}.$$

В данном случае $r=1$, поэтому порядок замкнутой системы равен $N=2n+r=5$, $s==N-(n+r+1)=1$. И следовательно, единый регулятор финитной стабилизации ищем в виде (38):

$$\begin{gathered}u(t)=x_3(t),\\ \dot{x}_3(t)=-(1+\lambda)x_1(t)-(1+\lambda)x_2(t)+f_1(p,\lambda)x_4(t)+q_1(\lambda)a_1(\lambda)x_5(t),\\ \dot{x}_4=x_3(t)+f_2(p,\lambda)x_4(t)+q_2(\lambda)a_1(\lambda)x_5(t),\\ \dot{x}_5(t)=x_4(t)+a_2(\lambda)x_5(t),\quad t>t_0\geqslant0.\end{gathered}\tag{56}$$

Характеристическая матрица замкнутой системы в данном случае следующая:

$$pE_5-\bar{A}^\omega(\lambda)=\begin{bmatrix}p-a_{11}^\omega(\lambda) & -a_{12}^\omega(\lambda) & 0 & 0 & 0\\ -a_{21}^\omega(\lambda) & p-a_{22}^\omega(\lambda) & -1 & 0 & 0\\ 1+\lambda & 1+\lambda & p & -f_1(p,\lambda) & -q_1(\lambda)a_1(\lambda)\\ 0 & 0 & -1 & p-f_2(p,\lambda) & -q_2(\lambda)a_1(\lambda)\\ 0 & 0 & 0 & -1 & p-a_2(\lambda)\end{bmatrix}.\tag{57}$$

Полиномы $a_i(\lambda)$, $q_i(\lambda)$, $f_i(p,\lambda)$, $i=1,2$, получим, выполнив рекомендации п. 2 (пп. 4, 5).

Полином $d(p)$ возьмём в виде $d(p)=(p-1)p(p+1)(p+2)(p+3)$. Следовательно,

$$\widetilde{P}=\{-3,-2,-1,0,1\},\quad \widetilde{\Lambda}=\{8,4,2,1,1/2\}.$$

Согласно формулам (21), (22) строим полиномы

$$a_1(\lambda)=(\lambda-8)(\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda-1)(2\lambda-1)/2,$$

$$a_2(\lambda)=(\lambda-1)(-2136+1014\lambda-211\lambda^2+14\lambda^3)/840$$

такие, чтобы функции $a_1(e^{-ph})/d(p)$ и $(a_2(e^{-ph})-p)/d(p)$ были целыми. Непосредственной проверкой убеждаемся, что условие (23) для $\Lambda\setminus\widetilde{\Lambda}=\{-1\}$ выполняется.

Методом неопределённых коэффициентов, решая уравнения (36), находим компоненты векторных полиномов $q'(\lambda)=(q_1(\lambda),q_2(\lambda))$ и $f'(p,\lambda)=(f_1(p,\lambda),f_2(p,\lambda))$, существование которых обосновано в п. 2 (там же приведены и необходимые формулы):

$$q_1(\lambda)=-(677-453\lambda+46\lambda^2)(-2136+1014\lambda-211\lambda^2+14\lambda^3)\times$$
$$\times(-1488+831\lambda-197\lambda^2+14\lambda^3)(-582+321\lambda-113\lambda^2+14\lambda^3)/120022560000,$$
$$q_2(\lambda)=(-525141162+534571011\lambda-308231478\lambda^2+110236554\lambda^3-$$
$$-25304723\lambda^4+3585194\lambda^5-279412\lambda^6+9016\lambda^7)/142884000,$$
$$f_1(p,\lambda)=-(\lambda-4)(2\lambda-1)(677-453\lambda+46\lambda^2)(13856256+4616640p+705600p^2-$$
$$-24040800\lambda-2646000p\lambda+19271700\lambda^2+1029000p\lambda^2-9434700\lambda^3-189000p\lambda^3+$$
$$+3024973\lambda^4+11760p\lambda^4-639450\lambda^5+84925\lambda^6-6300\lambda^7+196\lambda^8)/285768000,$$
$$f_2(p,\lambda)=(13677888+2274720p-50700330\lambda-6640200p\lambda+58581965\lambda^2+4716600p\lambda^2-$$
$$-35143770\lambda^3-1108800p\lambda^3+13352874\lambda^4+77280p\lambda^4-$$
$$-3280845\lambda^5+488310\lambda^6-39180\lambda^7+1288\lambda^8)/340200.$$

Все параметры замкнутой системы (57) указаны, т.е. единый регулятор финитной стабилизации вида (56) построен. Приведём замкнутую систему (57) к нормальной форме.

Выполняя элементарные преобразования над столбцами характеристической матрицы (57), её четвёртый столбец приведём к виду (см. (14), (44))

$$[0,-\tilde f_0(p,\lambda),-\tilde f_1(\lambda),p-\hat f_1(\lambda),-1]',\quad \hat f_1(\lambda)=f_2(p,\lambda)+\tilde f_0(p,\lambda).$$

Здесь

$$\tilde f_0(p,\lambda)=-\frac{(\lambda-4)(2\lambda-1)(677-453\lambda+46\lambda^2)(5496+840p-3150\lambda+1225\lambda^2-225\lambda^3+14\lambda^4)}{340200},$$
$$\tilde f_1(\lambda)=-(\lambda-8)(\lambda-4)(\lambda-2)(2\lambda-1)(677-453\lambda+46\lambda^2)(-1488+831\lambda-197\lambda^2+14\lambda^3)\times$$
$$\times\frac{(-582+321\lambda-113\lambda^2+14\lambda^3)}{285768000},\quad \hat f_1(\lambda)=-\frac{1}{840}(2976-3150\lambda+1225\lambda^2-225\lambda^3+14\lambda^4).$$

Умножая четвёртую строку полученной матрицы на полином

$$f(\lambda)=-(\lambda-4)(2\lambda-1)(677-453\lambda+46\lambda^2)/405$$

и прибавляя ко второй строке, получаем, что

$$\breve f_1(\lambda)=-(\lambda-4)(2\lambda-1)(677-453\lambda+46\lambda^2)/135.$$

Окончательно система (55), замкнутая единым регулятором финитной стабилизации, имеет вид

$$pE_5-\hat A^\omega(\lambda)=\begin{bmatrix} p-a_{11}^\omega(\lambda) & -a_{12}^\omega(\lambda) & 0 & 0 & 0\\ -a_{21}^\omega(\lambda) & p-a_{22}^\omega(\lambda) & -f(\lambda)-1 & -\breve f_1(\lambda) & -f(\lambda)q_2(\lambda)a_1(\lambda)\\ 1+\lambda & 1+\lambda & p & -\tilde f_1(\lambda) & -q_1(\lambda)a_1(\lambda)\\ 0 & 0 & -1 & p-\hat f_1(\lambda) & -q_2(\lambda)a_1(\lambda)\\ 0 & 0 & 0 & -1 & p-a_2(\lambda)\end{bmatrix}. \qquad (58)$$

Так как функции $a_1(e^{-ph})/d(p)$ и $(a_2(e^{-ph})-p)/d(p)$ – целые, то первые четыре строки обратной матрицы $(pE_5-\hat A^\omega(e^{-ph}))^{-1}$ образованы целыми функциями экспоненциального типа. Запишем старшие степени переменной λ в первых четырёх строках матрицы, присоединённой к характеристической матрице $pE_5-\hat A^\omega(\lambda)$ замкнутой системы (58):

$$((6,6,6,10,18),\ (6,6,6,10,18),\ (13,13,13,17,25),\ (5,5,5,9,17)).$$

Отсюда заключаем, что первые две строки обратной матрицы $(pE_5 - \hat{A}^{\omega}(e^{-ph}))^{-1}$ образованы целыми функциями, имеющими экспоненциальный тип не выше $18h$. Согласно теореме Винера–Пэли в замкнутой системе (57) переменные $x_i(t)$, $i = 1, 2$, обратятся в нуль, по крайней мере, начиная с момента $t_0 + 18h$, $h = \ln 2$ $(u(t) = 0,\ t \leqslant t_0,\ t_0 \geqslant 0$ – момент включения регулятора), независимо от начальных кусочно непрерывных функций системы (55) и построенного регулятора.

Замечание 8. Переменные $x_i(t)$, $i = 3, 4$, также обратятся в нуль, начиная с момента $t_0 + 25h$ и $t_0 + 17h$ соответственно.

Таким образом, регулятор

$$u(t) = (f(\lambda) + 1)x_3(t) + \breve{f}_1(\lambda)x_4(t) + f(\lambda)q_2(\lambda)a_1(\lambda)x_5(t),$$

$$\dot{x}_3(t) = -(1 + \lambda)x_1(t) - (1 + \lambda)x_2(t) + \tilde{f}_1(\lambda)x_4(t) + q_1(\lambda)a_1(\lambda)x_5(t),$$
$$\dot{x}_4 = x_3(t) + \hat{f}_1(\lambda)x_4(t) + q_2(\lambda)a_1(\lambda)x_5(t),$$
$$\dot{x}_5(t) = x_4(t) + a_2(\lambda)x_5(t), \quad t > t_0, \quad u(t) = 0, \quad t \leqslant t_0,$$

с указанными выше полиномами $f(\lambda)$, $\breve{f}_1(\lambda)$, $\tilde{f}_1(\lambda)$, $\hat{f}_1(\lambda)$; $a_i(\lambda)$, $q_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, обеспечивает конечный спектр (с характеристическим полиномом $d(p) = (p-1)p(p+1)(p+2)(p+3)$) и точечную вырожденность замкнутой системы (58) в направлениях, выделяющих переменные $x_i(t)$, $i = 1, 2$, и тем самым – финитную стабилизацию (см. тождества (2), где в рассматриваемом случае $t_1 = t_0 + 18h$) системы (55).

Пример 2. Рассмотрим семейство, состоящее из двух систем вида (1):

$$A^1(\lambda) = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 4-\lambda \\ 1+\lambda & -4+\lambda \end{bmatrix}, \quad A^2(\lambda) = \begin{bmatrix} -2+\lambda & -3+\lambda \\ -4-\lambda & -\lambda \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h = \ln 4.$$

Систему с матрицей $A^i(\lambda)$ обозначим S_i, $i = 1, 2$. Вычисляя базис Грёбнера для каждой системы, получаем $\{2 + p, -4 + \lambda\}$ для S_1, $\{-1 + p, -3 + \lambda\}$ для S_2. Отсюда заключаем, что обе системы спектрально управляемы и что инвариантный полином $\widetilde{d}_0(p)$ имеет вид $\widetilde{d}_0(p) = (-1+p)(2+p)$, поскольку $d_0(p)$ берём в виде $d_0(p) = (-1+p)(2+p)(p_0+p)$. Так как $r = 1 = n-1$, то, согласно следствию 1, системы S_1, S_2 должны иметь общий характеристический квазиполином, что в данном случае выполнено: $w(p,\lambda) = p^2 + 2p + 3\lambda - 12$ $(\lambda = e^{-ph})$. Последнюю строку матрицы $F^{\omega}_{\varphi}(p,\lambda)$ ищем в виде $[-(f_0 + f_1\lambda), -(f_2 + f_3\lambda), p - (f_4 + f_5\lambda)]$.

Решая систему

$$F^{\omega}_{\varphi}(p,\lambda) = (p+2)(p-1)(p+p_0), \quad \omega = 1, 2,$$

находим

$$[-(f_0 + f_1\lambda), -(f_2 + f_3\lambda), p - (f_4 + f_5\lambda)] = [6 - 3\lambda, 21/2 - 3\lambda, p + 1/2], \quad p_0 = 3/2.$$

Для приведения замкнутой системы к нормальной форме требуется, чтобы порядок N замкнутой системы удовлетворял неравенству $N = n + r + s + 1 \geqslant 2n + r = 5$, поэтому выберем $s = 1$ и $d(p) = d_0(p)d_2(p) = (p + 3/2)(-1 + p)(2 + p)(1 + p)p$. Так как $w(p_i, e^{-p_ih}) \neq 0$ для всех $p_i \in P_0 = \{-2, 1, -3/2\}$, то в (53) полагаем $\Psi(\lambda) = (0,0)$ и $\widetilde{\Delta}^{\omega}_{\psi}(p, e^{-ph}) = w(p, e^{-ph})$. Согласно формулам (21), (22) строим полиномы

$$a_1(\lambda) = (-512 + 2784\lambda - 3196\lambda^2 + 1037\lambda^3 - 117\lambda^4 + 4\lambda^5)/4,$$

$$a_2(\lambda) = (-1 + \lambda)(-903232 + 288028\lambda - 33167\lambda^2 + 1148\lambda^3)/624960$$

такие, чтобы функции $a_1(e^{-ph})/d(p)$ и $(a_2(e^{-ph}) - p)/d(p)$ были целыми. Непосредственной проверкой убеждаемся, что условие (23) для $\Lambda \setminus \widetilde{\Lambda} = \{3, 17/4\}$ выполняется.

Методом неопределённых коэффициентов, решая уравнения (36), найдём компоненты векторных полиномов $q'(\lambda) = (q_1(\lambda), q_2(\lambda))$ и $f'(p,\lambda) = (f_1(p,\lambda), f_2(p,\lambda))$. Единый регулятор финитной стабилизации вида (38) для систем S_1, S_2 построен. Как указано в предыдущем примере, приводим регулятор к виду, обеспечивающему замкнутой системе нормальную форму. Переменные $x_i(t)$, $i = 1, 2$, обратятся в нуль, по крайней мере, начиная с момента t_0+18h, $h = \ln 4$ $(u(t) = 0,\ t \leqslant t_0,\ t_0 \geqslant 0$ – момент включения регулятора).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н.* Оптимальные процессы в системах с запаздыванием // Статистические методы. Тр. II Междунар. конгресса ИФАК. Базель, 1963. Т. 2. М., 1965.
2. *Булатов В.И., Калюжная Т.С., Наумович Р.Ф.* Управление спектром дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 11. С. 1946–1952.
3. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М., 1968.
4. *Kappel F.* On degeneracy of functional-differential equations // J. Differ. Equat. 1976. V. 22. № 2. P. 250–267.
5. *Метельский А.В.* Проблема точечной полноты в теории управления дифференциально-разностными системами // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49. Вып. 2 (296). С. 103–141.
6. *Карпук В.В., Метельский А.В.* Полное успокоение и стабилизация линейных автономных систем с запаздыванием // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 6. С. 19–28.
7. *Метельский А.В.* Полное успокоение линейной автономной дифференциально-разностной системы регулятором того же типа // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 9. С. 1240–1255.
8. *Метельский А.В.* Полное успокоение и стабилизация системы с запаздыванием через спектральное приведение // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2014. № 1. С. 3–21.
9. *Метельский А.В., Хартовский В.Е., Урбан О.И.* Регуляторы успокоения решения линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 391–403.
10. *Метельский А.В., Хартовский В.Е.* Синтез регуляторов успокоения решения вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 547–558.
11. *Фомичев В.В.* Достаточные условия стабилизации линейных динамических систем // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 11. С. 1516–1521.
12. *Manitius A.Z., Olbrot A.W.* Finite spectrum assignment problem for systems with delays // IEEE Trans. on Autom. Contr. 1979. AC-24. № 4. P. 541–553.
13. *Метельский А.В.* Задача назначения конечного спектра для системы запаздывающего типа // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 5. С. 692–701.
14. *Хартовский В.Е.* Приведение к конечному спектру вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с последействием // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 827–841.
15. *Ким И.Г.* Назначение конечного спектра в линейных системах с несколькими сосредоточенными и распределенными запаздываниями посредством статической обратной связи по выходу // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Комп. науки. 2020. Т. 30. Вып. 3. С. 367–384.
16. *Коровин С.К., Миняев С.И., Фурсов А.С.* Подход к одновременной стабилизации линейных динамических объектов с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1592–1598.
17. *Миняев С.И., Фурсов А.С.* Одновременная стабилизация: построение универсального стабилизатора для линейных объектов с запаздыванием с использованием спектральной приводимости // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 11. С. 1533–1539.
18. *Метельский А.В.* Построение наблюдателей для дифференциальной системы запаздывающего типа с одномерным выходом // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 396–408.
19. *Метельский А.В.* Полная и финитная стабилизация дифференциальной системы с запаздыванием обратной связью по неполному выходу // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1665–1682.
20. *Карпук В.В., Метельский А.В.* Критический случай при построении регулятора полного успокоения для линейной автономной системы с запаздыванием // Тез. докл. Междунар. мат. конф. “Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям”. Минск, 2010. С. 88–89.
21. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1988.

Белорусский национальный технический университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 13.05.2021 г.
После доработки 14.08.2021 г.
Принята к публикации 05.10.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1536–1545

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1

О МИНИМАКСНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА: СЛУЧАЙ НЕОДНОРОДНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА

© 2021 г. А. Р. Плаксин

Исследуется уравнение Гамильтона–Якоби с коинвариантными производными, отвечающее динамическим системам нейтрального типа. При этом, в отличии от предыдущих работ, гамильтониан в уравнении может не удовлетворять условию однородности. Дано определение минимаксного (обобщённого) решения этого уравнения. Доказаны существование и единственность этого решения, а также установлена его согласованность с понятием решения в классическом смысле. Доказательства основаны на выборе подходящего функционала Ляпунова–Красовского.

DOI: 10.31857/S0374064121110108

Введение. Работа продолжает исследования [1–6] уравнений Гамильтона–Якоби в функционально-дифференциальных системах и посвящена развитию теории минимаксных (обобщённых) решений [7] для уравнений Гамильтона–Якоби, проистекающих из задач управления и дифференциальных игр [8–10] в системах нейтрального типа [11, 12].

Рассматривается задача Коши для уравнения Гамильтона–Якоби с коинвариантными производными [1–3, 13] и условием на правом конце. При этом рассматриваемое уравнение имеет две особенности. Первая – это появление нового слагаемого, которого не возникало при исследовании уравнений Гамильтона–Якоби, соответствующих системам с запаздыванием [1–3], а вторая – отсутствие условия однородности гамильтониана, что влечёт за собой существенные отличия данной работы от работы [5], в которой это условие предполагалось выполненным. Отметим, что из-за указанных особенностей разработанные ранее конструкции решений уравнений Гамильтона–Якоби [1–3, 5, 7] к рассматриваемому уравнению напрямую неприменимы: возникают трудности как технического, так и принципиального характера. При этом в приложениях к задачам динамической оптимизации первая особенность позволяет охватить динамические системы, которые описываются при помощи функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа в форме Дж. Хейла [14], а вторая – использовать интегрально-терминальные показатели для оценки качества динамического процесса.

В статье дано определение минимаксного решения рассматриваемой задачи Коши. Установлена его согласованность с понятием решения в классическом смысле (теоремы 1, 2). Доказаны существование и единственность минимаксного решения (теорема 3). Доказательства проводятся по классической схеме рассуждений из [7] (см. также [3]) и существенно опираются на свойства (леммы 1, 2) подходящего функционала Ляпунова–Красовского [6, 12].

1. Вспомогательные определения и обозначения. Пусть $t_0, \vartheta \in \mathbb{R}$, $t_0 < \vartheta$ и $h > 0$.

Всюду ниже угловые скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle$ используем для обозначения скалярного произведения векторов, а двойные скобки $\|\cdot\|$ – для евклидовой нормы. Через $\mathrm{Lip}\,([a,b],\mathbb{R}^n)$ обозначаем пространство липшицевых функций, действующих из $[a,b]$ в $\mathbb{R}^n$, снабжённое равномерной нормой. Для краткости обозначим $\mathrm{Lip} = \mathrm{Lip}\,([-h,0],\mathbb{R}^n)$ и $\mathbb{G} = [t_0,\vartheta]\times\mathrm{Lip}$. Равномерную норму пространства Lip обозначим через $\|\cdot\|_\infty$.

Пусть $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$. Определим множество всех липшицевых продолжений функции $w(\cdot)$:

$$\Lambda(\tau, w(\cdot)) = \{x(\cdot) \in \mathrm{Lip}\,([\tau-h,\vartheta],\mathbb{R}^n)\colon x_\tau(\cdot) = w(\cdot)\}.$$

Здесь $x_\tau(\cdot)$ – функция из Lip такая, что $x_\tau(\xi) = x(\tau+\xi)$, $\xi \in [-h,0]$.

Следуя [1; 2; 3, § 2; 13, § 2.4], говорим, что функционал $\varphi\colon \mathbb{G}\to\mathbb{R}$ коинвариантно дифференцируем (ci-дифференцируем) в точке $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $\tau < \vartheta$, если существуют число

$\partial_\tau\varphi(\tau, w(\cdot))$ и вектор $\nabla\varphi(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$ такие, что для любой функции $x(\cdot) \in \Lambda(\tau, w(\cdot))$ имеет место равенство

$$\varphi(t, x_t(\cdot)) - \varphi(\tau, w(\cdot)) = \partial_\tau\varphi(\tau, w(\cdot))(t-\tau) + \langle x(t) - w(0), \nabla\varphi(\tau, w(\cdot))\rangle + o(t-\tau), \quad t \in [\tau, \vartheta],$$

где величина $o(t-\tau)$ зависит от пары $\{\tau, x(\cdot)\}$, и $o(t-\tau)/(t-\tau) \to 0$ при $t \to \tau+0$. Величины $\partial_\tau\varphi(\tau, w(\cdot))$ и $\nabla\varphi(\tau, w(\cdot))$ называются ci-производными функционала φ в точке $(\tau, w(\cdot))$.

Аналогично, отображение $\mathbb{G} \ni (\tau, w(\cdot)) \mapsto \psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) \in \mathbb{R}^n$ ci-дифференцируемо в точке $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $\tau < \vartheta$, если в этой точке ci-дифференцируемы функционалы $\psi_i\colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$. При этом полагаем $\partial_\tau\psi = (\partial_\tau\psi_1, \ldots, \partial_\tau\psi_n)$ и $\nabla\psi = (\nabla\psi_1, \ldots, \nabla\psi_n)$.

2. Уравнение Гамильтона–Якоби с коинвариантными производными. Пусть функция $g\colon [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию

(g) для любого $\alpha > 0$ существует такое $\lambda_g = \lambda_g(\alpha) > 0$, что, каковы бы ни были $\tau, t \in [t_0, \vartheta]$ и $x, y \in \mathbb{R}^n$, при условии $\max\{\|x\|, \|y\|\} \leqslant \alpha$ имеет место оценка

$$\|g(\tau, x) - g(t, y)\| \leqslant \lambda_g(|\tau - t| + \|x - y\|).$$

Рассмотрим отображение $\psi(\tau, w(\cdot)) = g(\tau, w(-h))$, $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$. Обозначим через $\mathbb{G}_*$ множество точек $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $\tau < \vartheta$, в которых это отображение ci-дифференцируемо. Далее для удобства примем обозначения $\partial_\tau g(\tau, w(\cdot)) = \partial_\tau\psi(\tau, w(\cdot))$ и $\nabla g(\tau, w(\cdot)) = \nabla\psi(\tau, w(\cdot))$. Отметим, что если функция g дифференцируема в точке $(\tau, w(-h))$ и существует правая производная $d^+w(-h)/d\tau$, то справедливы равенства

$$\partial_\tau g(\tau, w(\cdot)) = \partial g(\tau, w(-h))/\partial\tau + \nabla_x g(\tau, w(-h)) d^+w(-h)/d\tau, \quad \nabla g(\tau, w(\cdot)) = 0.$$

Отметим также, что, следуя схеме доказательства леммы 1 из [4], несложно получить

Утверждение 1. *Пусть* $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $\tau < \vartheta$ *и* $x(\cdot) \in \Lambda(\tau, w(\cdot))$. *Тогда при почти всех* $t \in [\tau, \vartheta]$ *справедливы соотношения*

$$(t, x_t(\cdot)) \in \mathbb{G}_*, \quad \partial_\tau g(t, x_t(\cdot)) = \frac{d}{dt}(g(t, x(t-h))), \quad \nabla g(t, x_t(\cdot)) = 0.$$

Пусть функция $H\colon [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и отображение $\sigma\colon \mathrm{Lip} \to \mathbb{R}$ удовлетворяют следующим условиям:

$(H.1)$ функция H непрерывна;

$(H.2)$ существует такая константа $c_H > 0$, при которой справедливо неравенство

$$|H(\tau, x, x', s) - H(\tau, x, x', r)| \leqslant c_H(1 + \|x\| + \|x'\|)\|s - r\|, \quad \tau \in [t_0, \vartheta], \quad x, x', s, r \in \mathbb{R}^n;$$

$(H.3)$ для любого $\alpha > 0$ существует такое $\lambda_H = \lambda_H(\alpha) > 0$, что, каковы бы ни были $\tau \in [t_0, \vartheta]$ и $x, x', y, y', s \in \mathbb{R}^n$, при условии $\max\{\|x\|, \|x'\|, \|y\|, \|y'\|\} \leqslant \alpha$ имеет место оценка

$$|H(\tau, x, x', s) - H(\tau, y, y', s)| \leqslant \lambda_H(\|x - y\| + \|x' - y'\|)(1 + \|s\|);$$

(σ) отображение σ непрерывно.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Гамильтона–Якоби с ci-производными

$$\partial_\tau\varphi(\tau, w(\cdot)) + \langle\partial_\tau g(\tau, w(\cdot)), \nabla\varphi(\tau, w(\cdot))\rangle +$$
$$+ H(\tau, w(0), w(-h), \nabla\varphi(\tau, w(\cdot))) = 0, \quad (\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}_*, \tag{1}$$

и условием на правом конце

$$\varphi(\vartheta, w(\cdot)) = \sigma(w(\cdot)), \quad w(\cdot) \in \mathrm{Lip}. \tag{2}$$

Отметим, что условия $(H.1)$–$(H.3)$ и (σ) аналогичны условиям, рассматриваемым при исследованиях минимаксных решений уравнений Гамильтона–Якоби для систем с запаздыванием (см. [1; 2; 3, § 4]). Однако главное отличие уравнения (1) от уравнений Гамильтона–Якоби для систем с запаздыванием заключается в появлении нового слагаемого $\langle\partial_\tau g(\tau,w(\cdot)),\nabla\varphi(\tau,w(\cdot))\rangle$. Так как это слагаемое определено только на множестве $\mathbb{G}_*$, то уравнение (1) также можно рассматривать только на этом множестве. При этом, как и в уравнениях Гамильтона–Якоби для систем с запаздыванием, искомым в задаче (1), (2) будем считать непрерывный функционал φ, определённый на всём $\mathbb{G}$.

3. Минимаксное решение. Через $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ обозначим класс всех подмножеств в $\mathbb{R}^n$. Взяв константу c_H из условия $(H.2)$, определим отображение $F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ соотношением

$$F(x,x')=\{f_x\in\mathbb{R}^n\colon \|f_x\|\leqslant c_H(1+\|x\|+\|x'\|)\},\quad x,x'\in\mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Пусть $(\tau,w(\cdot))\in\mathbb{G}$. Через $X(\tau,w(\cdot))$ обозначим множество таких функций $x(\cdot)\in\Lambda(\tau,w(\cdot))$, для которых справедливо дифференциальное включение

$$\frac{d}{dt}(x(t)-g(t,x(t-h)))\in F(x(t),x(t-h))\quad \text{при п.в.}\quad t\in[\tau,\vartheta].$$

Тогда в силу утверждения 1 работы [5] и вида (3) отображения F получаем

Утверждение 2. *Множество $X(\tau,w(\cdot))$ является непустым компактом в пространстве $\mathrm{Lip}\,([\tau-h,\vartheta],\mathbb{R}^n)$. Более того, существует такое число $\alpha>0$, что для любой функции $x(\cdot)\in X(\tau,w(\cdot))$ справедливы неравенства*

$$\|x(t)\|\leqslant\alpha,\quad \|x(t)-x(t')\|\leqslant\alpha|t-t'|,\quad t,t'\in[\tau-h,\vartheta],$$
$$\left\|\frac{d}{dt}(x(t)-g(t,x(t-h)))\right\|\leqslant\alpha\quad \textit{при п.в.}\quad t\in[\tau,\vartheta]. \tag{4}$$

Определим отображение $E:[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}$ соотношением

$$E(\tau,x,x',s)=\{(f_x,f_z)\in F(x,x')\times\mathbb{R}\colon f_z=\langle f_x,s\rangle-H(\tau,x,x',s)\}. \tag{5}$$

Пусть $(\tau,w(\cdot))\in\mathbb{G}$ и $s\in\mathbb{R}^n$. Через $CH(\tau,w(\cdot),s)$ обозначим множество таких пар $(x(\cdot),z(\cdot))\in\Lambda(\tau,w(\cdot))\times\mathrm{Lip}\,([\tau,\vartheta],\mathbb{R})$, для которых справедливо дифференциальное включение

$$\frac{d}{dt}(x(t)-g(t,x(t-h)),z(t))\in E(t,x(t),x(t-h),s)\quad \text{при п.в.}\quad t\in[\tau,\vartheta]$$

и выполнено условие $z(\tau)=0$. Тогда, пользуясь утверждением 1 работы [5] и видом (5) отображения E, нетрудно показать, что справедливо

Утверждение 3. *Множество $CH(\tau,w(\cdot),s)$ является непустым компактом в пространстве $\mathrm{Lip}\,([\tau-h,\vartheta],\mathbb{R}^n)\times\mathrm{Lip}\,([\tau,\vartheta],\mathbb{R})$. Для числа α из утверждения 2 и любой пары $(x(\cdot),z(\cdot))\in CH(\tau,w(\cdot),s)$ справедливы неравенства (4). Существует такое число $\beta>0$, что для любой пары $(x(\cdot),z(\cdot))\in CH(\tau,w(\cdot),s)$ справедливы неравенства*

$$|z(t)|\leqslant\beta,\quad |z(t)-z(t')|\leqslant\beta|t-t'|,\quad t,t'\in[\tau,\vartheta].$$

Функционал $\varphi_+\colon\mathbb{G}\to\mathbb{R}$ назовём *верхним решением* задачи (1), (2), если он удовлетворяет следующим условиям:

($\varphi_+.1$) функционал φ_+ полунепрерывен снизу;

($\varphi_+.2$) для любых $(\tau,w(\cdot))\in\mathbb{G}$, $s\in\mathbb{R}^n$, $t^*\in[\tau,\vartheta]$ и $\zeta>0$ найдётся такая пара $(x(\cdot),z(\cdot))\in CH(\tau,w(\cdot),s)$, что справедливо неравенство $\varphi_+(t^*,x_{t^*}(\cdot))-z(t^*)\leqslant\varphi_+(\tau,w(\cdot))+\zeta$;

($\varphi_+.3$) имеет место оценка $\varphi_+(\vartheta,w(\cdot))\geqslant\sigma(w(\cdot))$ для всех $w(\cdot)\in\mathrm{Lip}$.

Функционал $\varphi_-\colon\mathbb{G}\to\mathbb{R}$ назовём *нижним решением* задачи (1), (2), если он удовлетворяет следующим условиям:

($\varphi_-.1$) функционал φ_- полунепрерывен сверху;

$(\varphi_-.2)$ для любых $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $s \in \mathbb{R}^n$, $t^* \in [\tau, \vartheta]$ и $\zeta > 0$ найдётся такая пара $(x(\cdot), z(\cdot)) \in CH(\tau, w(\cdot), s)$, что справедливо неравенство $\varphi_-(t^*, x_{t^*}(\cdot)) - z(t^*) \geqslant \varphi_-(\tau, w(\cdot)) - \zeta$;

$(\varphi_-.3)$ имеет место оценка $\varphi_-(\vartheta, w(\cdot)) \leqslant \sigma(w(\cdot))$ для всех $w(\cdot) \in \mathrm{Lip}$.

Функционал $\varphi\colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ будем называть *минимаксным решением* задачи (1), (2), если он является одновременно верхним и нижним решением этой задачи.

Действуя по схеме из доказательств лемм 4, 5 работы [4], опираясь при этом на утверждение 3, несложно доказать

Утверждение 4. *При выполнении условия $(\varphi_+.1)$ условие $(\varphi_+.2)$ эквивалентно условию*

$(\varphi_+^*.2)$ для любых $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ и $s \in \mathbb{R}^n$ найдётся такая пара $(x(\cdot), z(\cdot)) \in CH(\tau, w(\cdot), s)$, что справедливо неравенство $\varphi_+(t, x_t(\cdot)) - z(t) \leqslant \varphi_+(\tau, w(\cdot))$, $t \in [\tau, \vartheta]$.

При выполнении условия $(\varphi_-.1)$ условие $(\varphi_-.2)$ эквивалентно условию

$(\varphi_-^*.2)$ для любых $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ и $s \in \mathbb{R}^n$ найдётся такая пара $(x(\cdot), z(\cdot)) \in CH(\tau, w(\cdot), s)$, что справедливо неравенство $\varphi_-(t, x_t(\cdot)) - z(t) \geqslant \varphi_-(\tau, w(\cdot))$, $t \in [\tau, \vartheta]$.

4. Согласованность. Как и в случае уравнений Гамильтона–Якоби для систем с запаздыванием [3, гл. 2], для доказательства согласованности понятия решения в классическом смысле задачи (1), (2) с введённым выше понятием минимаксного решения этой задачи на "классическое" решение φ требуется наложить дополнительные условия гладкости. Если следовать [3, гл. 2], то от φ нужно потребовать непрерывность на $\mathbb{G}$, ci-дифференцируемость на $[t_0, \vartheta) \times \mathrm{Lip}$ и непрерывность его ci-производных $\partial_t\varphi$ и $\nabla\varphi$ на $[t_0, \vartheta) \times \mathrm{Lip}$. Однако, как показано в [4], даже в самом простом случае для систем нейтрального типа такие условия не выполняются. Поэтому, следуя работе [4], в приводимой ниже теореме будем предполагать выполненными другие более приспособленные к системам нейтрального типа условия.

Теорема 1. *Пусть функционал $\varphi\colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:*

$(\varphi.1)$ функционал φ непрерывен;

$(\varphi.2)$ для любого $\alpha > 0$ существует такое $\lambda_\varphi = \lambda_\varphi(\alpha) > 0$, что справедливо неравенство

$$|\varphi(\tau, w(\cdot)) - \varphi(\tau', w'(\cdot))| \leqslant \lambda_\varphi(|\tau - \tau'| + \|w(\cdot) - w'(\cdot)\|_\infty), \quad \tau, \tau' \in [t_0, \vartheta], \quad w(\cdot), w'(\cdot) \in D(\alpha),$$

где $D(\alpha) = \{w(\cdot) \in \mathrm{Lip}\colon \|w(\cdot)\|_\infty \leqslant \alpha,\ |w(\xi) - w(\xi')| \leqslant \alpha|\xi - \xi'|,\ \xi, \xi' \in [-h, 0]\}$;

$(\varphi.3)$ функционал φ ci-дифференцируем на $\mathbb{G}_*$;

$(\varphi.4)$ существуют такие $t_0 < t_1 < \ldots < t_k = \vartheta$, что для любых $\alpha > 0$ и $\eta \in (0, \Delta t)$, где $\Delta t = \min\{t_{i+1} - t_i : i = \overline{0, k-1}\}$, градиент $\nabla\varphi$ равномерно непрерывен на множестве $\big(\bigcup_{i=0}^{k-1} [t_i, t_i - \eta] \times D(\alpha)\big) \bigcap \mathbb{G}_*$.

Пусть также функционал φ удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби (1) и условию (2). Тогда φ является минимаксным решением задачи (1), (2).

Доказательство. Из того, что функционал φ удовлетворяет условиям $(\varphi.1)$ и (2) следует, что для φ выполняются условия $(\varphi_+.1)$, $(\varphi_+.3)$ и $(\varphi_-.1)$, $(\varphi_-.3)$. Таким образом, для доказательства теоремы остаётся показать выполнение для φ условий $(\varphi_+.2)$ и $(\varphi_-.2)$. Ниже приведено доказательство условия $(\varphi_+.2)$. Доказательство условия $(\varphi_-.2)$ проводится аналогичным образом.

Отметим, что в случае $\tau = \vartheta$ условие $(\varphi_+.2)$ выполняется.

Пусть $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $\tau < \vartheta$, $t^* \in [\tau, \vartheta]$ и $s \in \mathbb{R}^n$. Для удобства доказательства будем предполагать, что вместо условия $(\varphi.4)$ для φ выполнено условие

$(\varphi^*.4)$ существуют такие $\tau < t_1 < \ldots < t_k = t^*$, что для любых $\alpha > 0$ и $\eta \in (0, \Delta t)$, где $\Delta t = \min\{t_{i+1} - t_i : i = \overline{0, k-1}\}$, градиент $\nabla\varphi$ равномерно непрерывен на множестве $\big(\bigcup_{i=0}^{k-1} [t_i, t_i - \eta] \times D(\alpha)\big) \bigcap \mathbb{G}_*$.

В силу утверждения 3 и условия $(\varphi.1)$ найдётся такое $\eta \in (0, \min\{\Delta t/2, t_1 - \tau\})$, что для любых $(x(\cdot), z(\cdot)) \in CH(\tau, w(\cdot), s)$ и $i \in \{1, \ldots, k\}$ имеет место оценка

$$\max\{|\varphi(t_i - \eta, x_{t_i - \eta}(\cdot)) - \varphi(t, x_t(\cdot))|, |z(t_i - \eta) - z(t)|\} \leqslant \zeta/(4k), \quad t \in [t_i - \eta, t_i + \eta] \bigcap [\tau, t^*]. \quad (6)$$

Следуя работе [4], определим по непрерывности функционал $\Phi\colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, для которого справедливо равенство

$$\Phi(t, r(\cdot)) = \nabla\varphi(t, r(\cdot)), \quad (t, r(\cdot)) \in \mathbb{G}_*. \quad (7)$$

Выберем число α в соответствии с утверждением 3. В силу этого утверждения, леммы 3 работы [4] и условия $(\varphi^*.4)$ существует такое $\delta \in (0, \eta)$, что для всех $(x(\cdot), z(\cdot)) \in CH(\tau, w(\cdot), s)$ и $t, t' \in \bigcup_{i=1}^{k-1}[t_i, t_{i+1} - \eta] \bigcup [\tau, t_1 - \eta]$ при условии $|t - t'| \leqslant \delta$ выполняется неравенство

$$\|\Phi(t, x_t(\cdot)) - \Phi(t', x_{t'}(\cdot))\| \leqslant \zeta/(2(\alpha + c_H(1 + 2\alpha))(\vartheta - \tau)). \tag{8}$$

Зафиксируем разбиение

$$\Delta = \{\tau_j \in [\tau, \vartheta], \ \ j = \overline{0, l}\colon \tau_0 = \tau, \ \ \tau_l = \vartheta, \ \ 0 < \tau_{j+1} - \tau_j \leqslant \delta\}.$$

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\frac{d}{dt}(x(t) - g(t, x(t-h)), z(t)) \in E(t, x(t), x(t-h), s) \bigcap E(t, x(t), x(t-h), \Phi(\tau_j, x_{\tau_j}(\cdot))) \tag{9}$$

для $t \in [\tau_j, \tau_{j+1})$ и $j = \overline{0, l-1}$ при начальном условии

$$x_\tau(\cdot) = w(\cdot), \quad z(\tau) = 0. \tag{10}$$

Рассуждениями, аналогичными [7, с. 12], показывается, что правая часть этого включения не пуста. Кроме того, нетрудно доказать, что на каждом отрезке $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, $j = \overline{0, l-1}$, она удовлетворяет условиям $(F.1)$–$(F.3)$ работы [5]. Поэтому в силу утверждения 1 работы [5] найдётся пара $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \mathrm{Lip}\,([\tau - h, \vartheta], \mathbb{R}^n) \times \mathrm{Lip}\,([\tau, \vartheta], \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая условию (10) и включению (9) при почти всех $t \in [\tau_j, \tau_{j+1})$, $j = \overline{0, l-1}$. Зафиксируем эту пару. Согласно заданию включения (9) имеем $(x(\cdot), z(\cdot)) \in CH(\tau, w(\cdot), s)$.

Далее покажем, что для выбранной пары $(x(\cdot), z(\cdot))$ выполняется неравенство из условия $(\varphi_+.2)$. В силу выбора η и δ для каждого $i = \overline{1, k}$ найдётся такое $m_i \in \{0, \ldots, l\}$, что $t_i \leqslant \tau_{m_i} \leqslant t_i + \eta$. Обозначим $\tau_{m_{i_*-1}} = \tau$. Рассмотрим функцию $\omega(t) = \varphi(t, x_t(\cdot)) - z(t) - \varphi(\tau, w(\cdot))$, $t \in [\tau, \vartheta]$. Тогда, пользуясь утверждением 3 и условием $(\varphi.2)$, несложно показать, что эта функция липшицева и, принимая во внимание неравенство (6) и начальное условие (10), что для неё имеют место оценки

$$\omega(t^*) = \omega(\tau) + \sum_{i=1}^{k}(\omega(\tau_{m_i}) - \omega(t_i - \eta)) + \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\tau_{m_{i-1}}}^{t_i - \eta} \frac{d}{dt}\omega(t)\, dt \leqslant \zeta/2 + \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\tau_{m_{i-1}}}^{t_i - \eta} \frac{d}{dt}\omega(t)\, dt. \tag{11}$$

Далее, в силу условия $(\varphi.3)$, включения (9), утверждения 1 и равенства (7) для любого $j = \overline{0, l}$ и почти всех $t \in [\tau_j, \tau_{j+1})$ имеем

$$\frac{d}{dt}\omega(t) = \partial_\tau \varphi(t, x_t(\cdot)) + \left\langle \frac{d}{dt}x(t), \nabla\varphi(t, x_t(\cdot)) \right\rangle - \frac{d}{dt}z(t) =$$

$$= \left\langle \frac{d}{dt}(x(t) - g(t, x(t-h))), \Phi(t, x_t(\cdot)) \right\rangle - H(t, x(t), x(t-h), \Phi(t, x_t(\cdot))) -$$

$$- \left\langle \frac{d}{dt}(x(t) - g(t, x(t-h))), \Phi(\tau_j, x_{\tau_j}(\cdot)) \right\rangle - H(t, x(t), x(t-h), \Phi(\tau_j, x_{\tau_j}(\cdot))).$$

Отсюда, пользуясь выбором числа α, условием $(H.2)$ и неравенством (8), приходим к оценке $d\omega(t)/\,dt \leqslant \zeta/(2(\vartheta - \tau))$ при почти всех $t \in [\tau_{m_{i-1}}, t_i - \eta]$, $i = \overline{1, k}$. Объединяя эту оценку с оценкой (11), получаем неравенство в условии $(\varphi_+.2)$.

Теорема 2. *Пусть функционал* $\varphi\colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ *является минимаксным решением задачи (1), (2) и* ci-*дифференцируемым в точке* $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}_*$. *Тогда он удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби (1) в этой точке.*

Доказательство. Покажем, что справедливо неравенство

$$\partial_\tau\varphi(\tau,w(\cdot))+\langle\partial_\tau g(\tau,w(\cdot)),\nabla\varphi(\tau,w(\cdot))\rangle+H(\tau,w(0),w(-h),\nabla\varphi(\tau,w(\cdot)))\leqslant 0. \tag{12}$$

Так как φ является минимаксным решением, то вследствие утверждения 4 для него выполнено условие $(\varphi^*_+.2)$. В согласии с этим условием, полагая в нём $s=\nabla\varphi(\tau,w(\cdot))$, определим пару $(x(\cdot),z(\cdot))\in CH(\tau,w(\cdot),\nabla\varphi(\tau,w(\cdot)))$. Тогда, пользуясь ci-дифференцируемостью отображений φ и g в точке $(\tau,w(\cdot))$, а также утверждением 1, приходим к соотношению

$$0\geqslant\frac{\varphi(t,x_t(\cdot))-\varphi(\tau,w(\cdot))}{t-\tau}-\frac{1}{t-\tau}\int\limits_\tau^t\frac{d}{d\xi}z(\xi)\,d\xi=\partial_\tau\varphi(\tau,w(\cdot))+$$

$$+\langle\partial_\tau g(\tau,w(\cdot)),\nabla\varphi(\tau,w(\cdot))\rangle+\frac{1}{t-\tau}\int\limits_\tau^t H(\xi,x(\xi),x(\xi-h),\nabla\varphi(\tau,w(\cdot)))\,d\xi+\frac{o(t-\tau)}{t-\tau}.$$

Устремляя в нём $t\to\tau+0$ и принимая при этом во внимание утверждение 3 и условие $(H.1)$, получаем неравенство (12). Аналогичным образом устанавливается обратное к (12) неравенство. Теорема доказана.

5. Функционал Ляпунова–Красовского. Пусть $\alpha>0$. Выбирая в согласии с условиями (g) и (H_3) числа $\lambda_g=\lambda_g(\alpha)>1$ и $\lambda_H=\lambda_H(\alpha)>0$, определим числа $\lambda_*=4\lambda_H+2\lambda_g/h$ и $\varepsilon_*=e^{-\lambda_*(\vartheta-t_0)}$. Пусть $\varepsilon\in(0,\varepsilon_*)$. Для $\tau\in[t_0,\vartheta]$, $c\in\mathbb{R}^n$ и $w(\cdot)\in\mathrm{Lip}$ обозначим:

$$\nu^\alpha_\varepsilon(\tau,c,w(\cdot))=\theta^\alpha_\varepsilon(\tau)\kappa^\alpha_\varepsilon(c,w(\cdot)),\quad \mu^\alpha_\varepsilon(\tau,c)=(\theta^\alpha_\varepsilon(\tau)/\sqrt{\varepsilon^4+\|c\|^2})c,$$

$$\theta^\alpha_\varepsilon(\tau)=\frac{e^{-\lambda_*(\tau-t_0)}-\varepsilon}{\varepsilon},\quad \kappa^\alpha_\varepsilon(c,w(\cdot))=\sqrt{\varepsilon^4+\|c\|^2}+2\lambda_H\int\limits_{-h}^0\biggl(1-\frac{2\lambda_g\xi}{h}\biggr)\|w(\xi)\|d\xi. \tag{13}$$

Лемма 1. *Пусть $(\tau,w(\cdot))\in\mathbb{G}$ и число α взято в согласии с утверждением 2. Пусть $\varepsilon\in(0,\varepsilon_*)$ таково, что $\theta^\alpha_\varepsilon(t)>1$, $t\in[t_0,\vartheta]$. Пусть, кроме того, $x(\cdot),y(\cdot)\in X(\tau,w(\cdot))$. Обозначим*

$$r(t)=x(t)-y(t),\quad t\in[\tau-h,\vartheta],\quad c(t)=r(t)-g(t,x(t-h))+g(t,y(t-h)),\quad t\in[\tau,\vartheta],$$

$$\tilde\nu(t)=\nu^\alpha_\varepsilon(t,c(t),r_t(\cdot)),\quad \tilde\mu(t)=\mu^\alpha_\varepsilon(t,c(t)),\quad t\in[\tau,\vartheta]. \tag{14}$$

Тогда функция $\tilde\nu$ является липшицевой на отрезке $[\tau,\vartheta]$ и для неё при почти всех $t\in[\tau,\vartheta]$ справедливо неравенство

$$\frac{d}{dt}\tilde\nu(t)\leqslant\biggl\langle\frac{d}{dt}c(t),\tilde\mu(t)\biggr\rangle+H(t,x(t),x(t-h),\tilde\mu(t))-H(t,y(t),y(t-h),\tilde\mu(t)). \tag{15}$$

Доказательство. Обозначим $\tilde\kappa(t)=\kappa^\alpha_\varepsilon(c(t),r_t(\cdot))$, $t\in[\tau,\vartheta]$. Пользуясь утверждением 2 и условием (g), нетрудно показать, что функции $\tilde\nu$ и $\tilde\kappa$ являются липшицевыми на отрезке $[\tau,\vartheta]$. Тогда имеем

$$\frac{d}{dt}\tilde\kappa(t)=\frac{\langle dc(t)/dt,c(t)\rangle}{\sqrt{\varepsilon^4+\|c(t)\|^2}}+2\lambda_H\|r(t)\|-2\lambda_H(1+2\lambda_g)\|r(t-h)\|+\frac{4\lambda_H\lambda_g}{h}\int\limits_{t-h}^t\|r(\xi)\|d\xi.$$

Отсюда выводим неравенство

$$\frac{d}{dt}\tilde\nu(t)\leqslant-\lambda_*(1+\theta^\alpha_\varepsilon(t))\biggl(\|c(t)\|+2\lambda_H\int\limits_{t-h}^t\|r(\xi)\|d\xi\biggr)+\theta^\alpha_\varepsilon(t)\frac{d}{dt}\tilde\kappa\leqslant$$

$$\leqslant\biggl\langle\frac{d}{dt}c(t),\tilde\mu(t)\biggr\rangle+2\lambda_H\theta^\alpha_\varepsilon(t)\|r(t)\|-2\lambda_H\theta^\alpha_\varepsilon(t)(1+2\lambda_g)\|r(t-h)\|-4\lambda_H\theta^\alpha_\varepsilon(t)\|c(t)\|. \tag{16}$$

По определению функции $\tilde{\mu}$ имеем $\|\tilde{\mu}(t)\| \leqslant \theta_\varepsilon^\alpha(t),\ t \in [\tau, \vartheta]$. Тогда, учитывая неравенство $\theta_\varepsilon^\alpha(t) > 1,\ t \in [t_0, \vartheta]$, и выбор чисел α, λ_g и λ_H, для всех $t \in [\tau, \vartheta]$ получаем

$$\|c(t) - r(t)\| \leqslant \lambda_g \|r(t-h)\|,$$

$$H(t, y(t), y(t-h), \tilde{\mu}(t)) - H(t, x(t), x(t-h), \tilde{\mu}(t)) \leqslant 2\lambda_H \theta_\varepsilon^\alpha(t)(\|r(t)\| + \|r(t-h)\|). \qquad (17)$$

Таким образом, из оценок (16) и (17) вытекает неравенство (15). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ и число α взято в согласии с утверждением 2. Существует такое число $\lambda_\kappa > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ справедливо неравенство*

$$\|r_\vartheta(\cdot)\|_\infty^2 \leqslant \lambda_\kappa \kappa_\varepsilon^\alpha(c, r_\vartheta(\cdot)), \quad x(\cdot), y(\cdot) \in X(\tau, w(\cdot)), \quad c \in \mathbb{R}^n, \qquad (18)$$

где $r_\vartheta(\cdot)$ определяется в согласии с (14).

Доказательство. Положим $\lambda_\kappa = \alpha(2+1/h)/\lambda_H$. Пусть $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ и $x(\cdot), y(\cdot) \in X(\tau, w(\cdot))$. Так как функция $r_\vartheta(\cdot)$ непрерывна, найдутся такие $\xi_0, \xi_1 \in [-h, 0]$, что

$$\|r_\vartheta(\xi_0)\| = \|r_\vartheta(\cdot)\|_\infty, \quad \|r_\vartheta(\xi_1)\| = \frac{1}{h}\int\limits_{-h}^{0} \|r(\xi)\| d\xi.$$

Тогда, пользуясь выбором числа α, выводим

$$\|r_\vartheta(\cdot)\|_\infty^2 = \|r_\vartheta(\xi_0)\|^2 \leqslant \|r_\vartheta(\xi_1)\|^2 + 2\left|\int\limits_{\xi_0}^{\xi_1} \left\langle \frac{d}{d\xi} r_\vartheta(\xi), r_\vartheta(\xi)\right\rangle d\xi\right| \leqslant 2\lambda_H \lambda_\kappa \int\limits_{-h}^{0} \|r_\vartheta(\xi)\| d\xi.$$

Отсюда, учитывая определение $\kappa_\varepsilon^\alpha$ в (13), для любого $c \in \mathbb{R}^n$ получаем неравенство (18).

6. Существование и единственность минимаксного решения. Взяв константу c_H из условия $(H.2)$, для $\alpha, \varepsilon > 0$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$ и $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$\Psi_\varepsilon^\alpha(\tau, x, x', y, y') = \{(f_x, f_y, f_z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \colon \|f_x\| \leqslant c_H(1 + \|x\| + \|x'\|),$$
$$\|f_y\| \leqslant c_H(1 + \|y\| + \|y'\|),\ c = x - y - g(\tau, x') + g(\tau, y'),$$
$$|f_z + \langle f_x - f_y, \mu_\varepsilon^\alpha(\tau, c)\rangle + H(\tau, x, x', \mu_\varepsilon^\alpha(\tau, c)) - H(\tau, y, y', \mu_\varepsilon^\alpha(\tau, c))| \leqslant \varepsilon\}.$$

Пусть $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ и $z_0 \in \mathbb{R}$. Через $X^2W_\varepsilon^\alpha(\tau, w(\cdot), z_0)$ обозначим множество таких троек $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot)) \in \mathrm{Lip}([\tau-h, \vartheta], \mathbb{R}^n) \times \mathrm{Lip}([\tau-h, \vartheta], \mathbb{R}^n) \times \mathrm{Lip}([\tau, \vartheta], \mathbb{R})$, для которых справедливо дифференциальное включение

$$\frac{d}{dt}(x(t) - g(t, x(t-h)), y(t) - g(t, y(t-h)), z(t)) \in \Psi_\varepsilon^\alpha(t, x(t), x(t-h), y(t), y(t-h))$$

при почти всех $t \in [\tau, \vartheta]$ и выполнено начальное условие

$$x_\tau(\cdot) = y_\tau(\cdot) = w(\cdot), \quad z(\tau) = z_0. \qquad (19)$$

Несложно показать, что правая часть этого включения удовлетворят условиям $(F.1)$–$(F.3)$ работы [5], и, следовательно, в силу утверждения 1 работы [5] множество $X^2W_\varepsilon^\alpha(\tau, w(\cdot), z_0)$ является непустым компактом в $\mathrm{Lip}([\tau-h, \vartheta], \mathbb{R}^n) \times \mathrm{Lip}([\tau-h, \vartheta], \mathbb{R}^n) \times \mathrm{Lip}([\tau, \vartheta], \mathbb{R})$.

Лемма 3. *Пусть φ_+ – верхнее и φ_- – нижнее решения задачи (1), (2). Пусть также $\alpha, \varepsilon > 0$, $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $\tau < \vartheta$, и $z_0 = \varphi_+(\tau, w(\cdot)) - \varphi_-(\tau, w(\cdot))$. Тогда существует такая тройка $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot)) \in X^2W_\varepsilon^\alpha(\tau, w(\cdot), z_0)$, что справедливо неравенство*

$$z(\vartheta) \geqslant \varphi_+(\vartheta, x_\vartheta(\cdot)) - \varphi_-(\vartheta, y_\vartheta(\cdot)). \qquad (20)$$

Доказательство. Обозначим

$$M(t) = \{(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot)) \in X^2 W_\varepsilon^\alpha(\tau, w(\cdot), z_0)\colon z(t) \geqslant \varphi_+(t, x_t(\cdot)) - \varphi_-(t, y_t(\cdot))\}, \quad t \in [\tau, \vartheta].$$

В силу начального условия (19) справедливо равенство $z(\tau) = z_0 = \varphi_+(\tau, w(\cdot)) - \varphi_-(\tau, w(\cdot))$, которое влечёт за собой непустоту множества $M(\tau)$. Определим число

$$t_* = \max\{t \in [\tau, \vartheta]\colon M(t) \neq \varnothing\}.$$

Здесь максимум достигается в силу компактности множества $X^2 W_\varepsilon^\alpha(\tau, w(\cdot), z_0)$ и условий $(\varphi_+.1)$ и $(\varphi_-.1)$. Таким образом, для доказательства леммы достаточно доказать равенство $t_* = \vartheta$.

Предположим, что $t_* < \vartheta$. Далее в доказательстве используем обозначения (14). По определению числа t_* найдётся такая тройка $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot))$, что справедливы соотношения

$$z(t_*) \geqslant \varphi_+(t_*, x_{t_*}(\cdot)) - \varphi_-(t_*, y_{t_*}(\cdot)), \quad x(\cdot), y(\cdot) \in X(\tau, w(\cdot)) \tag{21}$$

и при почти всех $t \in [\tau, t_*]$ неравенство

$$|dz(t)/dt + \langle dc(t)/dt, \tilde\mu(t)\rangle + H(t, x(t), x(t-h), \tilde\mu(t)) - H(t, y(t), y(t-h), \tilde\mu(t))| \leqslant \varepsilon. \tag{22}$$

В силу утверждения 4 для φ_+ и φ_- выполняются условия $(\varphi_+^*.2)$ и $(\varphi_-^*.2)$. Пользуясь этими условиями, полагая в них $s = \tilde\mu(t_*)$, можно переопределить функции $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ на отрезке $[t_*, \vartheta]$ так, чтобы сохранились соотношения (21) и для всех $t \in [t_*, \vartheta]$ выполнялись неравенства

$$\varphi_+(t, x_t(\cdot)) - \int\limits_{t_*}^{t} \biggl(\Bigl\langle \frac{d}{d\xi}(x(\xi) - g(\xi, x(\xi-h))), \tilde\mu(t_*) \Bigr\rangle - H(\xi, x(\xi), x(\xi-h), \tilde\mu(t_*)) \biggr) d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \varphi_+(t_*, x_{t_*}(\cdot)),$$

$$\varphi_-(t, y_t(\cdot)) - \int\limits_{t_*}^{t} \biggl(\Bigl\langle \frac{d}{d\xi}(y(\xi) - g(\xi, y(\xi-h))), \tilde\mu(t_*) \Bigr\rangle - H(\xi, y(\xi), y(\xi-h), \tilde\mu(t_*)) \biggr) d\xi \geqslant$$

$$\geqslant \varphi_-(t_*, y_{t_*}(\cdot)). \tag{23}$$

Вследствие определения (13) функция μ_ε^α является непрерывной. Тогда, учитывая утверждение 2 и условие $(H.1)$, несложно показать существование такого $t^* \in (t_*, \vartheta]$, при котором для почти всех $t \in [t_*, t^*]$ имеет место оценка

$$|\langle dc(t)/dt, \tilde\mu(t) - \tilde\mu(t_*)\rangle - H(t, x(t), x(t-h), \tilde\mu(t)) + H(t, x(t), x(t-h), \tilde\mu(t_*)) +$$

$$+ H(t, y(t), y(t-h), \tilde\mu(t)) - H(t, y(t), y(t-h), \tilde\mu(t_*))| \leqslant \varepsilon. \tag{24}$$

Переопределим функцию $z(\cdot)$ на интервале $(t_*, \vartheta]$ так, чтобы сохранилось включение $z(\cdot) \in \in \mathrm{Lip}\,([\tau, \vartheta], \mathbb{R}^n)$ и почти всюду выполнялись равенства

$$dz(t)/dt = \langle dc(t)/dt, \tilde\mu(t_*)\rangle - H(t, x(t), x(t-h), \tilde\mu(t_*)) + H(t, y(t), y(\xi-h), \tilde\mu(t_*)), \quad t \in [t_*, t^*],$$

$$dz(t)/dt = \langle dc(t)/dt, \tilde\mu(t)\rangle - H(t, x(t), x(t-h), \tilde\mu(t)) + H(t, y(t), y(t-h), \tilde\mu(t)), \quad t \in [t^*, \vartheta].$$

Тогда из соотношений (21)–(24) вытекает включение $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot)) \in M(t^*)$, которое противоречит выбору числа t_*. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть φ_+ – верхнее и φ_- – нижнее решения задачи (1), (2). Тогда справедливо неравенство*

$$\varphi_+(\tau, w(\cdot)) \geqslant \varphi_-(\tau, w(\cdot)), \quad (\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}. \tag{25}$$

Доказательство. При $\tau = \vartheta$ неравенство (25) следует из условий $(\varphi_+.3)$ и $(\varphi_-.3)$.

Пусть теперь $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $\tau < \vartheta$. Для доказательства леммы достаточно показать, что для любого $\zeta > 0$ имеет место оценка

$$z_0 = \varphi_+(\tau, w(\cdot)) - \varphi_-(\tau, w(\cdot)) \geqslant -\zeta. \tag{26}$$

Пусть $\zeta > 0$. В силу утверждения 2 и условия (σ), во-первых, найдётся такое $\delta_\sigma > 0$, что для любых $x(\cdot), y(\cdot) \in X(\tau, w(\cdot))$ при условии $\|x_\vartheta(\cdot) - y_\vartheta(\cdot)\|_\infty \leqslant \delta_\sigma$ будет справедливо неравенство

$$|\sigma(x_\vartheta(\cdot)) - \sigma(y_\vartheta(\cdot))| \leqslant \zeta/3, \tag{27}$$

а во-вторых, найдётся такое число $\gamma_1 > 0$, при котором имеет место оценка $|\sigma(x_\vartheta(\cdot))| \leqslant \gamma_1$, $x(\cdot) \in X(\tau, w(\cdot))$. Определим число $\alpha > 0$ в согласии утверждением 2. По определению (13) функции $\theta_\varepsilon^\alpha$ существует такое число $\gamma_2 > 0$, что справедливо неравенство $\theta_\varepsilon^\alpha(\tau)\varepsilon^2 \leqslant \gamma_2$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$. Таким образом, полагая $\gamma = 2\gamma_1 + \gamma_2 + |z_0| + (\vartheta - \tau)\varepsilon_*$, выводим оценку

$$\theta_\varepsilon^\alpha(\tau)\varepsilon^2 + z_0 - \sigma(x_\vartheta(\cdot)) + \sigma(y_\vartheta(\cdot)) + (\vartheta - \tau)\varepsilon \leqslant \gamma. \tag{28}$$

В согласии с леммой 2 возьмём число λ_κ и выберем $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\theta_\varepsilon^\alpha(t) > 1, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad \lambda_\kappa \gamma / \theta_\varepsilon^\alpha(\vartheta) \leqslant \delta_\sigma^2, \quad \theta_\varepsilon^\alpha(\tau)\varepsilon^2 \leqslant \zeta/3, \quad (\vartheta - \tau)\varepsilon \leqslant \zeta/3. \tag{29}$$

Согласно лемме 3 найдётся такая тройка $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot)) \in X^2 W_\varepsilon^\alpha(\tau, w(\cdot), z_0)$, что имеет место оценка (20). Ниже в доказательстве для упрощения записи будем использовать обозначения (14). По определению множества $X^2 W_\varepsilon^\alpha(\tau, w(\cdot), z_0)$ имеем

$$\frac{dz(t)}{dt} \leqslant -\left\langle \frac{d}{dt} c(t), \tilde{\mu}(t) \right\rangle - H(t, x(t), x(t-h), \tilde{\mu}(t)) + H(t, y(t), y(t-h), \tilde{\mu}(t)) + \varepsilon. \tag{30}$$

Определим функцию $\eta(t) := \tilde{\nu}(t) + z(t) - (t - \tau)\varepsilon$, $t \in [\tau, \vartheta]$. Тогда из леммы 1 и оценки (30) следует неравенство $d\eta(t)/dt \leqslant 0$ при почти всех $t \in [\tau, \vartheta]$. Отсюда, учитывая (13), (19), выбор тройки $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot))$ и условия $(\varphi_+.3)$, $(\varphi_-.3)$, получаем, что

$$\theta_\varepsilon^\alpha(\tau)\varepsilon^2 + z_0 = \eta(\tau) \geqslant \eta(\vartheta) \geqslant \theta_\varepsilon^\alpha(\vartheta)\kappa_\varepsilon^\alpha(c(\vartheta), r_\vartheta(\cdot)) + \sigma(x_\vartheta(\cdot)) - \sigma(y_\vartheta(\cdot)) - (\vartheta - \tau)\varepsilon. \tag{31}$$

В силу оценок (28) и (31) имеем $\kappa_\varepsilon^\alpha(c(\vartheta), r_\vartheta(\cdot)) \leqslant \gamma/\theta_\varepsilon^\alpha(\vartheta)$. Далее, пользуясь леммой 2 и выбором ε в (29), заключаем, что $\|r_\vartheta(\cdot)\| \leqslant \delta_\sigma$, откуда вытекает неравенство (27). Воспользовавшись неравенством (27) и третьей и четвёртой оценками в (29), из оценки (31) выводим неравенство (26).

Теорема 3. *Минимаксное решение задачи (1), (2) существует и единственно.*

Доказательство. Обозначим через Φ_+ множество функционалов $\varphi_+ \colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям $(\varphi_+.2)$ и $(\varphi_+.3)$. Аналогично, через Φ_- обозначим множество функционалов $\varphi_- \colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям $(\varphi_-.2)$ и $(\varphi_-.3)$. Подобно рассуждениям из [7, § 8] (см. также [3, § 6]) показывается, что справедливы следующие утверждения:

(a) при любом $s \in \mathbb{R}^n$ для функционала $\varphi_+^s(\tau, w(\cdot)) := \max\{\sigma(x_\vartheta(\cdot)) - z(\vartheta) : (x(\cdot), z(\cdot)) \in CH(\tau, w(\cdot), s)\}$, $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, имеет место включение $\varphi_+^s \in \Phi_+$;

(b) при любом $s \in \mathbb{R}^n$ для функционала $\varphi_-^s(\tau, w(\cdot)) := \min\{\sigma(x_\vartheta(\cdot)) - z(\vartheta) \colon (x(\cdot), z(\cdot)) \in CH(\tau, w(\cdot), s)\}$, $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, и произвольного функционала $\varphi \in \Phi_+$ справедливо неравенство $\varphi_-^s(\tau, w(\cdot)) \leqslant \varphi(\tau, w(\cdot))$, $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$;

(c) для функционала $\varphi_0(\tau, w(\cdot)) := \inf\{\varphi(\tau, w(\cdot)) \colon \varphi \in \Phi_+\}$, $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, в силу утверждений (a) и (b) выполняются оценки

$$-\infty < \varphi_-^s(\tau, w(\cdot)) \leqslant \varphi_0(\tau, w(\cdot)) \leqslant \varphi_+^s(\tau, w(\cdot)) < +\infty, \quad (\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}, \quad s \in \mathbb{R}^n;$$

(d) из определения функционала φ_0 и с учётом утверждения (c) следует включение $\varphi_0 \in \Phi_+$;

(e) при любых $\xi \in [t_0, \vartheta]$ и $s \in \mathbb{R}^n$ для функционала

$$\varphi_0^{\xi,s}(\tau, w(\cdot)) := \begin{cases} \sup\{\varphi_0(\xi, x_\xi(\cdot)) - z(\xi)\colon (x(\cdot), z(\cdot)) \in CH(\tau, w(\cdot), s)\}, & \tau \in [t_0, \xi), \\ \varphi_0(\tau, w(\cdot)), & \tau \in [\xi, \vartheta], \end{cases}$$

где $w(\cdot) \in \mathrm{Lip}$, справедливо включение $\varphi_0^{\xi,s} \in \Phi_+$;

(f) из утверждения (d) и (e) вытекает, что $\varphi_0 \in \Phi_+ \bigcap \Phi_-$.

Пользуясь утверждением (f), условием (σ) и утверждением 2 работы [5], несложно показать, что функционалы

$$\varphi_0^+(\tau, w(\cdot)) := \lim_{\delta\to 0} \inf\{\varphi_0(t, r(\cdot))\colon (t, r(\cdot)) \in \mathbb{G}\colon |t-\tau| \leqslant \delta, \|w(\cdot) - r(\cdot)\|_\infty \leqslant \delta\},$$

$$\varphi_0^-(\tau, w(\cdot)) := \lim_{\delta\to 0} \sup\{\varphi_0(t, r(\cdot))\colon (t, r(\cdot)) \in \mathbb{G}\colon |t-\tau| \leqslant \delta, \|w(\cdot) - r(\cdot)\|_\infty \leqslant \delta\}, \quad (\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G},$$

являются верхним и нижним решениями задачи (1), (2) соответственно.

Таким образом, мы показали существование верхнего φ_0^+ и нижнего φ_0^- решений, удовлетворяющих неравенству $\varphi_0^+(\tau, w(\cdot)) \leqslant \varphi_0^-(\tau, w(\cdot))$, $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$. Отсюда в силу леммы 4 выводим равенство $\varphi_0^+(\tau, w(\cdot)) = \varphi_0^-(\tau, w(\cdot))$, $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, которое и означает, что функционал $\varphi = \varphi_0^+ = \varphi_0^-$ является минимаксным решением задачи (1), (2). Единственность минимаксного решения также следует из леммы 4.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение 075-02-2021-1383).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю.* Уравнения типа Гамильтона–Якоби в наследственных системах: минимаксное решение // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6. № 1. С. 110–130.
2. *Лукоянов Н.Ю.* Уравнения Гамильтона–Якоби для наследственных систем: минимаксное и вязкостное решения // Докл. РАН. 2008. Т. 418. № 3. С. 300–303.
3. *Лукоянов Н.Ю.* Функциональные уравнения Гамильтона–Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург, 2011.
4. *Плаксин А.Р.* Об уравнении Гамильтона–Якоби–Айзекса–Беллмана для систем нейтрального типа // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2017. Т. 27. Вып. 2. С. 222–237.
5. *Плаксин А.Р.* О минимаксном решении функциональных уравнений Гамильтона–Якоби для систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 11. С. 1519–1527.
6. *Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R.* Hamilton–Jacobi equations for neutral-type systems: inequalities for directional derivatives of minimax solutions // Minimax Theory and its Appl. 2020. V. 5. № 2. P. 369–381.
7. *Subbotin A.I.* Generalized Solutions of First Order PDEs: the Dynamical Optimization Perspective. Berlin, 1995.
8. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
9. *Осипов Ю.С.* Дифференциальные игры систем с последействием // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196. № 4. С. 779–782.
10. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М., 1985.
11. *Гомоюнов М.И., Плаксин А.Р.* Об основном уравнении дифференциальных игр для систем нейтрального типа // Прикл. математика и механика. 2018. Т. 82. Вып. 6. С. 675–689.
12. *Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р.* К теории позиционных дифференциальных игр для систем нейтрального типа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 3. С. 118–128.
13. *Kim A.V.* Functional Differential Equations. Application of i-Smooth Calculus. Dordrecht, 1999.
14. *Hale J.K., Cruz M.A.* Existence, uniqueness and continuous dependence for hereditary systems // Ann. Mat. Pura Appl. 1970. V. 85. № 1. P. 63–81.

Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 11.05.2021 г.
После доработки 11.05.2021 г.
Принята к публикации 05.10.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1546–1554

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.935

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ФИЛЬТРОВ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

© 2021 г. В. В. Фомичев, М. А. Каменщиков

Рассматривается задача построения функциональных фильтров (оптимальных функциональных наблюдателей, т.е. наблюдателей для линейных функционалов от фазового вектора) для линейных стационарных управляемых систем, неоднородность которых, кроме управления, содержит в качестве слагаемого аддитивный белый шум. Выход системы линеен по фазовому вектору и содержит в качестве слагаемого также аддитивный белый шум. С помощью канонических представлений проведён сравнительный анализ фильтров второго и третьего порядков по среднеквадратической ошибке наблюдения в установившемся режиме. Приведён пример системы четвёртого порядка, показывающий, что с увеличением динамического порядка фильтра оптимальность по квадратичному критерию повышается.

DOI: 10.31857/S037406412111011X

Введение. Рассматривается задача построения функциональных фильтров второго и третьего порядков, восстанавливающих по измеряемому скалярному выходу несмещённую и оптимальную оценку скалярного функционала от фазового вектора непрерывной системы со стохастическими возмущениями. Некоррелированные между собой белые шумы с априорно известными вероятностными характеристиками воздействуют как на объект, так и на канал измерений. В качестве критерия оптимальности используется установившаяся среднеквадратичная ошибка.

На практике применение фильтров второго и третьего порядков оказывается более подходящим, чем использование фильтров первого порядка, например, при обработке сигналов спутниковых навигационных систем [1, гл. 5]. В работе [2] сравниваются фильтры первого и второго порядков и отмечаются преимущества фильтра второго порядка, при этом оптимальный наблюдатель интерпретируется как авторегрессионная модель. Фильтр третьего порядка, основанный на интегрированной модели случайного блуждания, исследуется в работе [3], где среднеквадратичная ошибка вычисляется с помощью решения уравнений Риккати.

Функциональные фильтры исследовались ранее как в непрерывном [4, 5], так и в дискретном [6] времени. В [4] предложено обобщение условия несмещённости в совместной задаче стабилизации и оптимальной фильтрации, а в [5] предложен подход к численному моделированию фильтров пониженного порядка на основе построения статистических оценок критерия оптимальности. В [6] представлены аналитические выражения для передаточных функций системы в отклонениях и функциональных фильтров различных динамических порядков, начиная с первого порядка.

В данной работе скалярный функционал от вектора состояния стохастической системы выбирается таким образом, что фильтра первого порядка, восстанавливающего несмещённую оценку, не существует. При этом осуществляется синтез и сравнение между собой по квадратичному критерию фильтров второго и третьего порядков. Для вычисления критерия оптимальности применяется метод интегральных квадратичных оценок качества [7].

1. Постановка задачи. Рассмотрим n-мерную линейную систему со стохастическими возмущениями и с одномерным выходом:

$$\dot{x} = Ax + Bu + w(t), \quad x(0) = x_0,$$

$$y = Cx + v(t), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – неизвестный фазовый вектор, $u \in \mathbb{R}^m$ – известный вход системы, $y \in \mathbb{R}$ – измеряемый выход системы; A, B, C – постоянные матрицы соответствующих размеров, x_0 – случайная величина, а $w(t)$ и $v(t)$ – белые шумы размерности n и 1 соответственно, с известными вероятностными характеристиками

$$E[x_0] = \bar{x}_0, \quad E[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^{\mathrm{T}}] = P_0,$$

$$E[w(t)] = 0, \quad E[w(t)w(t')^{\mathrm{T}}] = Q\delta(t - t'),$$

$$E[v(t)] = 0, \quad E[v(t)v(t')] = R\delta(t - t'),$$

$$E[w(t)v(t')] = 0,$$

здесь Q и P_0 – положительно полуопределённые матрицы; $R > 0$; случайная величина x_0 не коррелированна с шумами $w(t)$ и $v(t)$. Первое уравнение в системе (1) понимается в смысле стохастического дифференциального уравнения [8, с. 65].

Требуется на основе наблюдения выхода $y(t)$ и по известному входу $u(t)$ определить несмещённую оценку $\widetilde{z}(t)$ скалярного функционала

$$z(t) = Fx(t) \tag{2}$$

с известной матрицей $F = (f_1 \ \dots \ f_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}$, обеспечивающую минимум установившегося среднего значения квадрата ошибки наблюдения $e(t) \overset{\Delta}{=} z(t) - \widetilde{z}(t)$:

$$J = \lim_{t\to\infty} E[e^2(t)] \to \min. \tag{3}$$

Не ограничивая общности рассуждений, считаем, что пара $\{C, A\}$ наблюдаема и задана во второй канонической форме наблюдаемости [9, с. 25]:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где α_i – коэффициенты характеристического полинома матрицы A, т.е.

$$\alpha(s) = \det(sI - A) = s^n + \alpha_n s^{n-1} + \dots + \alpha_1.$$

2. Построение наблюдателей. Пусть для матрицы F имеет место разложение

$$F = PT,$$

где $P \in \mathbb{R}^{1\times k}$, $T \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Тогда

$$z = Fx = PTx = Pq,$$

где $q = Tx \in \mathbb{R}^k$ – неизвестный вектор, подлежащий оценке. Для его восстановления используем наблюдатель порядка k вида

$$\dot{\widetilde{q}} = N\widetilde{q} + TBu + My, \quad \widetilde{q}(0) = T\bar{x}_0,$$

$$\widetilde{z} = P\widetilde{q}. \tag{5}$$

Используя правило дифференцирования Ито [8, с. 85] стохастического сигнала, нетрудно убедиться, что ошибка оценивания $e_q(t) \overset{\Delta}{=} q(t) - \widetilde{q}(t)$ описывается уравнением

$$\dot{e}_q = \dot{q} - \dot{\widetilde{q}} = T\dot{x} - N\widetilde{q} - TBu - My =$$

$$= TAx - N(q - e_q) - MCx + Tw - Mv = Ne_q + (TA - MC - NT)x + Tw - Mv,$$

в котором $\widetilde{q} \in \mathbb{R}^k$ – фазовый вектор наблюдателя, N, M, P, T – постоянные матрицы соответствующих размеров.

Уравнение для ошибки $e = z - \widetilde{z}$ имеет вид

$$e = z - \widetilde{z} = Fx - P\widetilde{q} = PTx - P\widetilde{q} = P(q - \widetilde{q}) = Pe_q.$$

На основании известных результатов [10, с. 55] заключаем, что для того чтобы оценки $\widetilde{q}(t)$ и $\widetilde{z}(t)$ являлись несмещёнными для $q(t)$ и $z(t)$ соответственно, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

$$F = PT, \quad TA - MC - NT = 0, \quad N \text{ – гурвицева матрица.} \tag{6}$$

При этом, если матрица N гурвицева, то [11, с. 127] ошибка наблюдения e в установившемся режиме является стационарным в широком смысле случайным процессом, в котором математическое ожидание постоянно, а корреляционная функция зависит от одной переменной.

Не ограничивая общности рассуждений, считаем, что пара $\{P, N\}$ наблюдаема и задана в первой канонической форме наблюдаемости [9, с. 24]:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -l_1 & -l_2 & -l_3 & \dots & -l_k \end{pmatrix}, \quad P = (1\ 0\ \dots\ 0), \tag{7}$$

где l_i – коэффициенты характеристического полинома матрицы N, т.е.

$$\beta(s) = \det(sI - N) = s^k + l_k s^{k-1} + \ldots + l_1.$$

Известно [9, с. 75], что для того чтобы функционал (2) мог быть восстановлен наблюдателем (5) второго порядка $(k = 2,\ n > 4)$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$l_1 = \frac{f_2 f_4 - f_3^2}{f_1 f_3 - f_2^2} > 0, \quad l_2 = \frac{f_2 f_3 - f_4 f_1}{f_1 f_3 - f_2^2} > 0, \quad f_1 f_3 - f_2^2 \neq 0, \tag{8}$$

$$f_i = -f_{i-2}\frac{f_2 f_4 - f_3^2}{f_1 f_3 - f_2^2} - f_{i-1}\frac{f_2 f_3 - f_4 f_1}{f_1 f_3 - f_2^2}, \quad i = \overline{5, n}, \tag{9}$$

где условие $f_1 f_3 - f_2^2 \neq 0$ в (8) означает, что наблюдатель (5) первого порядка $(k = 1)$ не может восстановить несмещённую оценку функционала (2).

Исследуем вопрос, когда линейные фильтры второго $(k = 2)$ и третьего $(k = 3)$ порядков могут для системы (1), (4) четвёртого $(n = 4)$ порядка восстановить функционал (2) от вектора состояния, в котором элементы матрицы F удовлетворяют ограничениям (8).

Из условий (6) и канонических представлений (4), (7) следует, что для фильтров второго порядка

$$T = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f_2 & f_3 & f_4 & t_{24} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -\alpha_1 f_1 - \alpha_2 f_2 - \alpha_3 f_3 - \alpha_4 f_4 - t_{24} \\ -\alpha_1 f_2 - \alpha_2 f_3 - (\alpha_3 - l_1) f_4 - (\alpha_4 - l_2) t_{24} \end{pmatrix},$$

$$t_{24} = -l_1 f_3 - l_2 f_4, \tag{10}$$

где коэффициенты l_1, l_2 характеристического полинома фильтра удовлетворяют условиям (8). Вместе с этим передаточные функции относительно входов w, v и выхода e имеют вид

$$W_{\mathrm{ew}}(s) = \frac{1}{\beta(s)}\big(f_1(s + l_2) + f_2 \quad f_2 s - f_1 l_1 \quad f_3 s - f_2 l_1 \quad f_4 s - f_3 l_1\big),$$

$$W_{\mathrm{ev}}(s) = \frac{1}{\beta(s)}((\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \alpha_4 f_4 + t_{24})s - (\alpha_2 f_1 + \alpha_3 f_2 + \alpha_4 f_3 + f_4) l_1 + (l_2 f_1 + f_2)\alpha_1). \tag{11}$$

Из условий (6) и канонических представлений (4), (7) следует, что для фильтров третьего порядка имеют место равенства

$$T=\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4\\ f_2 & f_3 & f_4 & t_{24}\\ f_3 & f_4 & t_{24} & t_{34}\end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix} -\alpha_1f_1-\alpha_2f_2-\alpha_3f_3-\alpha_4f_4-t_{24}\\ -\alpha_1f_2-\alpha_2f_3-\alpha_3f_4-\alpha_4t_{24}-t_{34}\\ -\alpha_1f_3-(\alpha_2-l_1)f_4-(\alpha_3-l_2)t_{24}-(\alpha_4-l_3)t_{34}\end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3\\ f_2 & f_3 & f_4\\ f_3 & f_4 & t_{24}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1\\ l_2\\ l_3\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} f_4\\ t_{24}\\ t_{34}\end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $t_{24},\ t_{34}$ – неизвестные параметры. При этом условие

$$t_{24}\ne\frac{f_3(f_3^2-f_2f_4)+f_4(f_1f_4-f_2f_3)}{f_1f_3-f_2^2} \tag{14}$$

является необходимым и достаточным условием существования единственного решения линейной системы (13), которое в этом случае имеет вид

$$l_1=\frac{f_4(f_4^2-f_3t_{24})+t_{24}(f_2t_{24}-f_3f_4)+t_{34}(f_3^2-f_2f_4)}{t_{24}(f_1f_3-f_2^2)-f_3(f_3^2-f_2f_4)-f_4(f_1f_4-f_2f_3)},$$

$$l_2=\frac{f_4(f_2t_{24}-f_3f_4)+t_{24}(f_3^2-f_1t_{24})+t_{34}(f_1f_4-f_2f_3)}{t_{24}(f_1f_3-f_2^2)-f_3(f_3^2-f_2f_4)-f_4(f_1f_4-f_2f_3)},$$

$$l_3=\frac{f_4(f_3^2-f_2f_4)+t_{24}(f_1f_4-f_2f_3)+t_{34}(f_2^2-f_1f_3)}{t_{24}(f_1f_3-f_2^2)-f_3(f_3^2-f_2f_4)-f_4(f_1f_4-f_2f_3)}, \tag{15}$$

где параметры $t_{24},\ t_{34}$ выбираются такими, чтобы полином $\beta(s)$ был устойчив, т.е. чтобы выполнялись неравенства

$$l_1>0,\quad l_2>0,\quad l_3>0,\quad l_2l_3-l_1>0. \tag{16}$$

Одновременно с этим передаточные функции относительно входов $w,\ v$ и выхода e имеют вид

$$W_{\mathrm{ew}}(s)=\frac{1}{\beta(s)}\begin{pmatrix} f_1(s^2+l_3s+l_2)+f_2(s+l_3)+f_3\\ f_2(s^2+l_3s)+f_3s-f_1l_1\\ f_3(s^2+l_3s)+f_4s-f_2l_1\\ f_4(s^2+l_3s)+t_{24}s-f_3l_1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$W_{\mathrm{ev}}(s)=\frac{1}{\beta(s)}((\alpha_1f_1+\alpha_2f_2+\alpha_3f_3+\alpha_4f_4+t_{24})s^2+$$

$$+(l_3(\alpha_1f_1+\alpha_2f_2+\alpha_3f_3+\alpha_4f_4+t_{24})+\alpha_1f_2+\alpha_2f_3+\alpha_3f_4+\alpha_4t_{24}+t_{34})s+$$

$$+\alpha_1(l_2f_1+l_3f_2+f_3)-l_1(\alpha_2f_1+\alpha_3f_2+\alpha_4f_3+f_4)). \tag{17}$$

Если условие (14) нарушено, то решение линейной системы (13) имеет вид

$$l_1=\frac{(f_2f_4-f_3^2)(f_1f_4-f_2f_3)+C_1(f_2f_4-f_3^2)(f_1f_3-f_2^2)}{(f_1f_3-f_2^2)^2},$$

$$l_2=\frac{3f_1f_2f_3f_4-f_1^2f_4^2-f_1f_3^3-f_2^3f_4+C_1(f_2f_3-f_1f_4)(f_1f_3-f_2^2)}{(f_1f_3-f_2^2)^2},\quad l_3=C_1, \tag{18}$$

где C_1 – свободная неизвестная, которая выбирается такой, чтобы выполнялись условия устойчивости (16). По-другому это означает, что существует множество наблюдателей третьего порядка, у которых коэффициенты характеристического полинома находятся на пересечении области гурвицевости матрицы N и линейного многообразия решений системы уравнений

$$s_1^3 + l_3 s_1^2 + l_2 s_1 + l_1 = 0, \quad s_2^3 + l_3 s_2^2 + l_2 s_2 + l_1 = 0, \tag{19}$$

где s_1, s_2 (корни характеристического полинома $s^2 + l_2 s + l_1$, в котором коэффициенты l_1 и l_2 удовлетворяют условиям (8)) вычисляются по формуле

$$s_{1,2} = \frac{f_1 f_4 - f_2 f_3 \pm \sqrt{(f_2 f_3 - f_1 f_4)^2 - 4(f_2 f_4 - f_3^2)(f_1 f_3 - f_2^2)}}{2(f_1 f_3 - f_2^2)}.$$

Кроме того, если условие (14) нарушено, то передаточные функции $W_{\mathrm{ew}}(s)$, $W_{\mathrm{ev}}(s)$ будут такими же, как и в случае фильтра второго порядка.

Для систем (1), (4) порядка выше четвёртого $(n > 4)$ существование единственного оптимального фильтра третьего порядка, восстанавливающего несмещённую оценку функционала (2) от вектора состояния и удовлетворяющего условиям (6), исключает возможность существования фильтра второго порядка, так как в этом случае нарушается условие (9).

Приведённые рассуждения позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема. *Для системы (1), (4) со стохастическими возмущениями и фильтров (5), (7) второго и третьего порядков, восстанавливающих несмещённую оценку функционала (2) от вектора состояния, в котором элементы матрицы F удовлетворяют ограничениям (8), справедливы следующие утверждения:*

1) для системы четвёртого $(n = 4)$ порядка условия (8) являются необходимыми и достаточными условиями существования фильтра второго порядка, в котором элементы матриц T и M определяются по формуле (10), а передаточные функции W_{ew} и W_{ev} имеют вид (11);

2) для системы четвёртого $(n = 4)$ порядка условия (14)–(16) являются необходимыми и достаточными условиями существования единственного оптимального фильтра третьего порядка, в котором элементы матриц T и M определяются по формулам (12), (13), а передаточные функции W_{ew} и W_{ev} имеют вид (17); при этом если условие (14) нарушено, то существует множество наблюдателей третьего порядка, у которых коэффициенты характеристического полинома имеют вид (18), а передаточные функции W_{ew} и W_{ev} – вид (11);

3) для системы порядка выше четвёртого $(n > 4)$ условия (8), (9) являются необходимыми и достаточными условиями существования фильтра второго порядка, в котором элементы матриц T и M задаются равенствами

$$T = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ f_2 & f_3 & \dots & f_n & t_{2n} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i - t_{2n} \\ -\sum\limits_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_{i+1} - (\alpha_n - l_2) t_{2n} + l_1 f_n \end{pmatrix},$$

$$t_{2n} = -l_1 f_{n-1} - l_2 f_n,$$

а передаточные функции W_{ew} и W_{ev} имеют вид

$$W_{\mathrm{ew}}(s) = \frac{1}{\beta(s)} \big(f_1(s + l_2) + f_2 \quad \dots \quad f_{n-1}(s + l_2) + f_n \quad f_n(s + l_2) + t_{2n} \big),$$

$$W_{\mathrm{ev}}(s) = \frac{1}{\beta(s)} \bigg(\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + t_{2n} \Big)(s + l_2) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_{i+1} + (\alpha_n - l_2) t_{2n} - l_1 f_n \bigg);$$

4) для системы порядка выше шестого $(n > 6)$ условия

$$f_5 \neq \frac{f_3(f_3^2 - f_2 f_4) + f_4(f_1 f_4 - f_2 f_3)}{f_1 f_3 - f_2^2}, \tag{20}$$

$$
\begin{gathered}
f_i = -l_1 f_{i-3} - l_2 f_{i-2} - l_3 f_{i-1}, \quad i = \overline{7, n}, \\
l_1 = \frac{f_4(f_4^2 - f_3 f_5) + f_5(f_2 f_5 - f_3 f_4) + f_6(f_3^2 - f_2 f_4)}{f_5(f_1 f_3 - f_2^2) - f_3(f_3^2 - f_2 f_4) - f_4(f_1 f_4 - f_2 f_3)}, \\
l_2 = \frac{f_4(f_2 f_5 - f_3 f_4) + f_5(f_3^2 - f_1 f_5) + f_6(f_1 f_4 - f_2 f_3)}{f_5(f_1 f_3 - f_2^2) - f_3(f_3^2 - f_2 f_4) - f_4(f_1 f_4 - f_2 f_3)}, \\
l_3 = \frac{f_4(f_3^2 - f_2 f_4) + f_5(f_1 f_4 - f_2 f_3) + f_6(f_2^2 - f_1 f_3)}{f_5(f_1 f_3 - f_2^2) - f_3(f_3^2 - f_2 f_4) - f_4(f_1 f_4 - f_2 f_3)}, \\
l_1 > 0, \quad l_2 > 0, \quad l_3 > 0, \quad l_2 l_3 - l_1 > 0
\end{gathered}
$$

являются необходимыми и достаточными условиями существования фильтра третьего порядка, в котором элементы матриц T *и* M *задаются равенствами*

$$
T = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_{n-2} & f_{n-1} & f_n \\ f_2 & f_3 & \ldots & f_{n-1} & f_n & t_{2n} \\ f_3 & f_4 & \ldots & f_n & t_{2n} & t_{3n} \end{pmatrix},
$$

$$
M = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i - t_{2n} \\ -\sum\limits_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_{i+1} - \alpha_n t_{2n} - t_{34} \\ -\sum\limits_{i=1}^{n-2} \alpha_i f_{i+2} - (\alpha_{n-1} - l_2) t_{2n} - (\alpha_n - l_3) t_{3n} + l_1 f_n \end{pmatrix},
$$

$$
t_{2n} = -l_1 f_{n-2} - l_2 f_{n-1} - l_3 f_n, \quad t_{3n} = -l_1 f_{n-1} - l_2 f_n - l_3 t_{2n},
$$

а передаточные функции W_{ew} *и* W_{ev} *имеют вид*

$$
W_{\mathrm{ew}}(s) = \frac{1}{\beta(s)} \begin{pmatrix} f_1(s^2 + l_3 s + l_2) + f_2(s + l_3) + f_3 \\ \ldots \\ f_{n-2}(s^2 + l_3 s + l_2) + f_{n-1}(s + l_3) + f_n \\ f_{n-1}(s^2 + l_3 s + l_2) + f_n(s + l_3) + t_{2n} \\ f_n(s^2 + l_3 s + l_2) + t_{2n}(s + l_3) + t_{3n} \end{pmatrix}^{\mathrm{т}},
$$

$$
\begin{gathered}
W_{\mathrm{ev}}(s) = \frac{1}{\beta(s)} \bigg(\bigg(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + t_{2n} \bigg) (s^2 + l_3 s + l_2) + \bigg(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_{i+1} + \alpha_n t_{2n} + t_{34} \bigg) (s + l_3) \bigg) + \\
+ \frac{1}{\beta(s)} \bigg(\sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i f_{i+2} + (\alpha_{n-1} - l_2) t_{2n} + (\alpha_n - l_3) t_{3n} - l_1 f_n \bigg),
\end{gathered}
$$

при этом условие (20) исключает возможность существования фильтра второго порядка для систем порядка выше четвёртого ($n > 4$)*, так как в этом случае нарушается условие (9).*

3. Вычисление критерия оптимальности. Так как шумы $w(t)$ и $v(t)$ не коррелированы между собой, то [12, с. 21]

$$
J = \lim_{t \to \infty} E[e^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (W_{\mathrm{ew}}(j\omega) Q W_{\mathrm{ew}}^{\mathrm{т}}(-j\omega) + W_{\mathrm{ev}}(j\omega) R W_{\mathrm{ev}}^{\mathrm{т}}(-j\omega))\, d\omega,
$$

если передаточные функции W_{ew} и W_{ev} устойчивы. Согласно теореме это условие устойчивости выполняется, если выполнены условия (6) для фильтров второго и третьего порядков.

Вычисление интеграла J сводится [13, с. 334] к вычислению интегралов вида

$$\bar{J}_\nu = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{b_0(j\omega)^{\nu-1}+b_1(j\omega)^{\nu-2}+\ldots+b_{\nu-1}}{a_0(j\omega)^\nu+a_1(j\omega)^{\nu-1}+\ldots+a_\nu}\right|^2 d\omega, \tag{21}$$

коэффициенты a_i, b_i в которых зависят от неизвестных параметров фильтра (5), указанных в теореме. Индекс ν в формуле (21) равен порядку (степени полинома знаменателя) передаточных функций $W_{\mathrm{ew}}(s)$ и $W_{\mathrm{ev}}(s)$. При этом для расчёта интегралов (21) существуют специальные таблицы [13, с. 742]. Для случая $\nu = 2$ значение интеграла (21) следующее:

$$\bar{J}_2 = \frac{b_0^2a_2 + b_1^2a_0}{2a_0a_1a_2}. \tag{22}$$

Для систем четвёртого порядка и фильтров третьего порядка, как очевидно следует из вида передаточных функций W_{ew} и W_{ev}, приведённых в сформулированной теореме, функционал в задаче оптимизации является рациональной функцией, т.е. отношением двух полиномов от переменных t_{24}, t_{34}.

4. Пример. Проведём численный эксперимент на примере системы (1), (4) четвёртого порядка $(n = 4)$, в которой

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 0 & -6\\ 0 & 0 & 1 & -4\end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -5\end{bmatrix},\quad \bar{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$Q = P_0 = I,\quad R = 1,\quad B = 0.$$

Фильтра первого порядка $(k = 1)$, восстанавливающего несмещённую оценку скалярного функционала (2), не существует. Фильтр второго порядка $(k = 2)$, восстанавливающий несмещённую оценку скалярного функционала (2), имеет вид (5), в котором

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0\end{pmatrix},\quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & -3\end{pmatrix},\quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -5\\ -1 & 2 & -5 & 13\end{pmatrix},\quad M = \begin{pmatrix} -2\\ 5\end{pmatrix}.$$

Установившееся среднее значение квадрата ошибки наблюдения вычисляется по формуле (22):

$$J = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|j\omega+2|^2+|j\omega+1|^2+|2j\omega+1|^2+|5j\omega+2|^2+|2j\omega+1|^2}{|(j\omega)^2+3j\omega+1|^2}\,d\omega = \frac{23}{3}\approx 7.6667.$$

Если условие (14) нарушено $(t_{24} = 13)$, то наблюдатели третьего $(k = 3)$ порядка имеют вид (5), а

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 3 - C_1 & 8 - 3C_1 & -C_1\end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -5\\ -1 & 2 & -5 & 13\\ 2 & -5 & 13 & -34\end{pmatrix},\quad M = \begin{pmatrix} -2\\ 5\\ -13\end{pmatrix},\quad C_1 > 3.$$

Значение J в критерии оптимальности в этом случае для фильтров третьего порядка находится так же, как и для фильтра второго порядка и равно

$$J = 23/3 \approx 7.6667.$$

Следовательно, для случая $t_{24}=13$ существует множество наблюдателей, у которых коэффициенты характеристического полинома $\beta(s)$ находятся на пересечении линейного многообразия решений системы уравнений (19) с $s_{1,2}=(-3\pm\sqrt{5})/2$ и области гурвицевости матрицы N.

Если условие (14) выполнено $(t_{24}\neq 13)$, то существует функциональный оптимальный наблюдатель (5) третьего порядка, решающий задачу оптимальной фильтрации, в котором для нахождения неизвестных переменных $(t_{24},\ t_{34})$ решается задача минимизации критерия оптимальности с ограничением на параметры, которые должны быть такими, чтобы характеристический полином наблюдателя был устойчив. Численные результаты, которые получены с помощью метода последовательного квадратичного программирования [14, гл. 18], дают следующие значения:

$$N\approx\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2.0493 & -4.1196 & -3.5352\end{pmatrix},\quad T\approx\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -5\\ -1 & 2 & -5 & 11.4859\\ 2 & -5 & 11.4859 & -24.1049\end{pmatrix},$$

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad M\approx\begin{pmatrix}-0.4859\\ 1.1614\\ -2.6394\end{pmatrix}.$$

Установившееся среднее значение квадрата ошибки наблюдения в этом случае $J\approx 7.0675$.

Таким образом, критерий оптимальности (3) для фильтра третьего порядка оказался меньше, чем для фильтра второго порядка.

Заключение. В работе предложены необходимые и достаточные условия существования и единственности фильтров второго и третьего порядков. С помощью канонических представлений линейных систем получены аналитические выражения как для передаточных функций систем в отклонениях, так и для коэффициентов характеристического полинома функциональных фильтров. Приведён пример системы четвёртого порядка, для которой построены фильтры второго и третьего порядков и проведено сравнение по среднеквадратичному критерию оптимальности полученных фильтров. Показано, что по сравнению с фильтром второго порядка фильтр третьего порядка может дать выигрыш по квадратичному критерию оптимальности в установившемся режиме.

Статья опубликована при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках реализации программы Математического центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621 и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 20-37-90065-Аспиранты, 20-08-00073-А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kaplan E., Hegarty C.* Understanding GPS: Principles and Applications. Boston, 2005.
2. *El Husseini A.H., Simon E.P., Ros L.* Second-order autoregressive model-based Kalman filter for the estimation of a slow fading channel described by the Clarke model: optimal tuning and interpretation // Digital Signal Processing. 2019. V. 90. P. 125–141.
3. *Shu H., Simon E.P., Ros L.* Third-order kalman filter: tuning and steady-state performance // IEEE Signal Proc. Lett. 2013. V. 20. № 11. P. 1082–1085.
4. *Каменщиков М.А., Капалин И.В.* Метод построения оптимального функционального фильтра для линейных стационарных стохастических систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 2018. № 4. С. 19–26.
5. *Каменщиков М.А., Капалин И.В.* Численное моделирование линейной стохастической системы в задаче оптимальной фильтрации пониженного порядка // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 8. С. 1142–1143.
6. *Каменщиков М.А.* Передаточные функции оптимальных фильтров различных динамических порядков для дискретных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 2021. № 2. С. 19–28.
7. *Красовский А.А.* О степени устойчивости линейных систем // Тр. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского. 1948.

8. *Острем К.Ю.* Введение в стохастическую теорию управления. М., 1973.
9. *Коровин С.К., Фомичев В.В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М., 2007.
10. *O'Reilly J.* Observers for Linear Systems. London, 1983.
11. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М., 1977.
12. *Saberi A., Stoorvogel A.A., Sannuti P.* Filtering Theory. With Applications to Fault Detection, Isolation, and Estimation. Basel, 2007.
13. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического управления. СПб., 2003.
14. *Nocedal J., Wright S.* Numerical Optimization. New York, 2006.

Электротехнический университет, г. Ханчжоу, Китай
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Институт системного анализа РАН, г. Москва,
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
Национальный исследовательский
технологический университет "МИСиС", г. Москва

Поступила в редакцию 10.06.2021 г.
После доработки 10.06.2021 г.
Принята к публикации 05.10.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1555–1563

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.935

ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ С РЕЖИМАМИ РАЗЛИЧНЫХ ПОРЯДКОВ

© 2021 г. А. С. Фурсов, Ю. М. Мосолова, С. И. Миняев

Исследуется задача стабилизации по состоянию скалярных по входу переключаемых интервальных линейных систем, режимы функционирования которых могут иметь различные динамические порядки. Для решения этой задачи предлагается подход к построению стабилизирующего регулятора, основанный на методе расширения динамического порядка и решении систем линейных матричных неравенств.

DOI: 10.31857/S0374064121110121

1. Постановка задачи. Настоящая статья является продолжением исследований работ [1, 2] по стабилизации параметрически неопределённых скалярных по входу переключаемых интервальных линейных систем, режимы функционирования которых могут иметь различные динамические порядки. Предлагаемые в данной статье подходы к решению указанной задачи основываются на методе расширения динамического порядка [3, с. 205] и существенно опираются на результаты работ [1, 4]. Отметим, что в [4] введена необходимая терминология и достаточно подробно описана процедура применения метода расширения динамического порядка для построения алгоритма стабилизации по состоянию для переключаемых линейных систем с режимами различных динамических порядков.

Итак, в соответствии с терминологией работы [4] рассматривается переключаемая интервальная линейная система, скалярная относительно входа и заданная следующим уравнением состояния:

$$\dot{x}^{(\sigma)} = [A_\sigma]x^{(\sigma)} + [b_\sigma]u, \quad \sigma \in S(\Omega), \quad Z(\Omega) = \{Z_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j} : (i,j) \in \Omega\}, \tag{1}$$

где $\sigma : \mathbb{R}_+ \to I = \{1,\ldots,m\}$ – кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном промежутке, I – множество индексов, нумерующих режимы функционирования системы (1); $[A_\sigma] = [A] \circ \sigma$ – композиция отображения $[A] : I \to \{[A_1],\ldots,[A_m]\}$ $([A_i] \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i})$ и переключающего сигнала σ, $[b_\sigma] = [b] \circ \sigma$ – аналогичная композиция для отображения $[b] : I \to \{[b_1],\ldots,[b_m]\}$ $([b_i] \in \in \mathbb{R}^{n_i \times 1})$; пары матриц $([A_i],[b_i])$, $i = \overline{1,m}$, определяют режимы функционирования системы (1); $u \in \mathbb{R}^1$ – управляющий скалярный вход; $\Omega \subseteq I \times I$ – множество, определяющее допустимые переключения между режимами, т.е. пара индексов (i,j) принадлежит множеству Ω, если и только если возможно переключение с j-го на i-й режим функционирования; $S(\Omega)$ – множество допустимых переключающих сигналов σ, т.е. если $\tilde{t}$ – точка разрыва функции $\sigma \in S(\Omega)$ и

$$\lim_{t\to\tilde{t}-0} \sigma(t) = j, \quad \lim_{t\to\tilde{t}+0} \sigma(t) = i,$$

то выполняется включение $(i,j) \in \Omega$. Содержательный смысл входящего в задание системы (1) множества $Z(\Omega)$ описывается ниже.

Под i-м *режимом функционирования* системы (1) понимается динамическая система

$$\dot{x}^{(i)} = [A_i]x^{(i)} + [b_i]u.$$

При этом предполагается, что, в общем случае, режимы функционирования имеют различные динамические порядки, определяемые векторами состояния

$$x^{(i)} = (x_{j_1},\ldots,x_{j_{n_i}}) \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad j_1 < \ldots < j_{n_i}, \quad \{j_1,\ldots,j_{n_i}\} \subseteq \{1,\ldots,n\},$$

где $n = \max\{j_{n_1}, \ldots, j_{n_m}\}$. Таким образом, $\mathbb{R}^{n_i} \subseteq \mathbb{R}^n$ для каждого $i = \overline{1,m}$. Обозначим упорядоченный набор индексов $\{j_1, \ldots, j_{n_i}\}$ через Γ_i, а множество $\{1, \ldots, n\}$ через Γ. Далее будем обозначать через $\tilde{x}^{(i)}$ вектор из $\mathbb{R}^n$, все компоненты которого с индексами из множества $\Gamma \backslash \Gamma_i$ равны нулю. Заметим, что если для различных режимов (i-го и j-го) совпадают наборы переменных состояния, то в этом случае $\Gamma_i = \Gamma_j$.

В силу кусочной непрерывности функции $\sigma(t)$ переходы между режимами осуществляются скачкообразно, а движение переключаемой системы в каждый момент времени определяется активным режимом. Так как различные режимы могут отличаться динамическими порядками и/или набором переменных состояний, то необходимо обеспечить преемственность [5, с. 18] между каждой парой соседних режимов. Для этого задаётся множество $Z(\Omega)$, состоящее из матриц $Z_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$, $(i,j) \in \Omega$, называемых *матрицами преемственности*. Каждая матрица Z_{ij} определяет линейное преобразование конечного состояния предыдущего j-го режима $x^{(j)}(t_{ij})$ в начальное состояние текущего i-го режима $x^{(i)}(t_{ij})$ (t_{ij} – момент переключения между j-м и i-м режимами), т.е.

$$x^{(i)}(t_{ij}) = Z_{ij} x^{(j)}(t_{ij}).$$

Более точно,

$$x^{(i)}(t_{ij}) = \lim_{t \to t_{ij}+0} x^{(i)}(t), \quad x^{(j)}(t_{ij}) = \lim_{t \to t_{ij}-0} x^{(j)}(t).$$

Отметим, что систему (1) также можно интерпретировать как интервальное семейство переключаемых линейных систем

$$\dot{x}^{(\sigma)} = A_\sigma x^{(\sigma)} + b_\sigma u \tag{2}$$

с режимами (A_i, b_i)

$$\dot{x}^{(i)} = A_i x^{(i)} + b_i u, \tag{3}$$

где $A_i \in [A_i]$, $b_i \in [b_i]$. Далее каждую такую систему (2) будем называть *элементом* интервального семейства (1).

Решением системы (1) при фиксированных режимах $(A_i,\, b_i)$ $(A_i \in [A_i],\ b_i \in [b_i],\ i = \overline{1,m})$, заданном управлении u, переключающем сигнале $\sigma \in S(\Omega)$ и начальном условии $x^{(\sigma(0))}(0) \in \mathbb{R}^{n_{\sigma(0)}}$ называется кусочно-дифференцируемая [6, с. 477] вектор-функция $x(t) \in \mathbb{R}^n$, терпящая потерю дифференцируемости и непрерывности разве что в моменты переключения режимов и совпадающая на каждом промежутке активности i-го режима $(i \in I)$ с вектор-функцией $\tilde{x}^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^n$. При этом вектор-функция $\tilde{x}^{(i)}(t)$ порождается решением линейной системы (3) на соответствующем промежутке активности i-го режима $[t_{ij}, t_{li}]$ с начальными условиями

$$x^{(i)}(t_{ij}) = Z_{ij} x^{(j)}(t_{ij}),$$

где $x^{(j)}(t_{ij})$ – конечное значение j-го режима на предыдущем промежутке времени.

При замыкании системы (1) регулятором в форме статической обратной связи $u = u(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ его действие на каждый режим определяется следующими системами:

$$\dot{x}^{(i)} = [A_i] x^{(i)} + [b_i] u(\tilde{x}^{(i)}), \quad i = \overline{1,m}.$$

Пучком траекторий системы (1) назовём множество $\mathfrak{X}$ её решений $x(t)$ для всех возможных элементов интервального семейства при заданном управлении u, переключающем сигнале $\sigma \in S(\Omega)$ и начальном условии $x^{(\sigma(0))}(0) \in \mathbb{R}^{n_{\sigma(0)}}$.

Сечением пучка траекторий $\mathfrak{X}$ системы (1) в момент времени $t = t^*$ называется множество $\mathfrak{X}_{t^*}$ значений решений $x \in \mathfrak{X}$ при $t = t^*$ при заданном управлении u, переключающем сигнале $\sigma \in S(\Omega)$ и начальном условии $x^{(\sigma(0))}(0) \in \mathbb{R}^{n_{\sigma(0)}}$, т.е. $\mathfrak{X}_{t^*} = \{x(t^*) : x(\cdot) \in \mathfrak{X}\}$.

Норму сечения пучка траекторий $\|\mathfrak{X}_{t^*}\|$ определим следующим образом:

$$\|\mathfrak{X}_{t^*}\| = \sup_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}} \|x(t^*)\|.$$

Будем говорить, что система (1), замкнутая регулятором в форме статической обратной связи $u = u(x)$ $(u(0) = 0)$, $S(\Omega)$-*устойчива*, если для любого переключающего сигнала $\sigma \in$ $\in S(\Omega)$ и произвольного начального условия $x^{(\sigma(0))}(0) \in \mathbb{R}^{n_{\sigma(0)}}$ для соответствующего пучка траекторий $\mathfrak{X}$ выполняется соотношение

$$\|\mathfrak{X}_t\| \to 0 \quad \text{при } t \to \infty.$$

Постановка задачи стабилизации. Для переключаемой интервальной линейной системы вида (1) требуется построить регулятор в форме статической обратной связи по состоянию $u = u(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n,\ u(0) = 0)$, обеспечивающий $S(\Omega)$-устойчивость замкнутой системы.

В настоящей работе стабилизирующий регулятор, решающий сформулированную задачу, будем искать в виде линейной стационарной обратной связи

$$u(x) = -k^{\mathrm{т}} x, \tag{4}$$

где $k \in \mathbb{R}^n$ – постоянный вектор параметров обратной связи. В связи с этим далее под замкнутой переключаемой системой понимаем систему с реализованным управлением вида (4).

2. Приведение к единому динамическому порядку. В соответствии с методом расширения динамического порядка [3, с. 205], аналогично работе [4], поставим в соответствие системе (1) переключаемую интервальную линейную n-мерную систему

$$\dot{x} = [\tilde{A}_\sigma]x + [\tilde{b}_\sigma]u, \quad \sigma \in S(\Omega), \quad \tilde{Z}(\Omega) = \{\tilde{Z}_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n} : (i,j) \in \Omega\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

для которой режимы функционирования задаются уравнениями

$$\dot{x} = [\tilde{A}_i]x + [\tilde{b}_i]u, \quad i = \overline{1,m},$$

где $[\tilde{A}_\sigma] = [\tilde{A}] \circ \sigma$ – композиция отображения $[\tilde{A}] : I \to \{[\tilde{A}_1], \ldots, [\tilde{A}_m]\}$ $([\tilde{A}_i] \in \mathbb{R}^{n\times n})$ и переключающего сигнала σ, $[\tilde{b}_\sigma] = [\tilde{b}]\circ\sigma$ – аналогичная композиция для отображения $[\tilde{b}] : I \to$ $\to \{[\tilde{b}_1], \ldots, [\tilde{b}_m]\}$ $([\tilde{b}_i] \in \mathbb{R}^n)$;

$$[\tilde{A}_i] = T_i[A_i]T_i^{\mathrm{т}} + \hat{T}_i\hat{A}_i\hat{T}_i^{\mathrm{т}}, \quad [\tilde{b}_i] = T_i[b_i]. \tag{6}$$

Здесь $\hat{A}_i$ – некоторые фиксированные устойчивые матрицы порядка $n - n_i$, $T_i \in \mathbb{R}^{n\times n_i}$ – матрица, содержащая $n - n_i$ нулевых строк и n_i строк с одной единицей, при этом единицы расположены только в позициях (j_k, k), $k = \overline{1, n_i}$, $j_k \in \Gamma_{n_i}$, $\hat{T}_i \in \mathbb{R}^{n\times(n-n_i)}$ – матрица, содержащая n_i нулевых строк и $n - n_i$ строк с одной единицей, при этом единицы расположены только в позициях (j_k, k), $k = \overline{1, n_i}$, $j_k \in \Gamma\backslash\Gamma_i$.

Замечание. Здесь и далее мы используем следующее определение для арифметических операций над интервальными матрицами [7, с. 75; 8, с. 46]:

$$[A] * [B] = \square\{A * B : A \in [A], \quad B \in [B]\},$$

где $* \in \{+, -, \cdot\}$, а через $\square\{\cdot\}$ обозначается интервальная оболочка соответствующего множества матриц или векторов.

Множество матриц преемственности $\tilde{Z}(\Omega)$ для системы (5) формируется на основе соответствующего множества $Z(\Omega)$ системы (1) следующим образом:

$$\tilde{Z}_{ij} = T_i Z_{ij} T_j^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

для всех $(i,j) \in \Omega$. Множество $\tilde{Z}(\Omega)$ обеспечивает для системы (5) преемственность между каждой парой соседних режимов аналогично тому, как это определено выше для системы (1). Заметим, что для любой матрицы $Z_{ij} \in Z(\Omega)$ и соответствующей ей матрицы $\tilde{Z}_{ij} \in \tilde{Z}(\Omega)$ выполняется также равенство

$$Z_{ij} = T_i^{\mathrm{т}} \tilde{Z}_{ij} T_j.$$

Переключаемую систему (5) будем называть *динамическим расширением* системы (1).

Рассмотрим теперь систему (5), замкнутую обратной связью $u = -k^{\mathrm{т}}x$:

$$\dot{x} = ([\tilde{A}_\sigma] - [\tilde{b}_\sigma]k^{\mathrm{т}})x, \quad \sigma \in S(\Omega), \quad \tilde{Z}(\Omega) = \{\tilde{Z}_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n} : (i,j) \in \Omega\}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

Систему (7) понимаем как семейство переключаемых систем вида

$$\dot{x} = (\tilde{A}_\sigma - \tilde{b}_\sigma k^{\mathrm{т}})x, \quad \sigma \in S(\Omega),$$

где $\tilde{A}_i \in [\tilde{A}_i]$, $\tilde{b}_i \in [\tilde{b}_i]$.

Решением системы (7) при фиксированных режимах $(\tilde{A}_i, \tilde{b}_i)$ $(\tilde{A}_i \in [\tilde{A}_i]$, $\tilde{b}_i \in [\tilde{b}_i]$, $i = \overline{1,m})$, переключающем сигнале $\sigma \in S(\Omega)$ и начальном условии $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть кусочно-дифференцируемое решение $x(t)$ линейной нестационарной системы

$$\dot{x} = (\tilde{A}_{\sigma(t)} - \tilde{b}_{\sigma(t)}k^{\mathrm{т}})x, \quad x(0) = x_0.$$

В силу соотношений (6) и леммы 1 работы [4] справедлива следующая

Лемма 1. *Для любых фиксированных режимов* (A_i, b_i) $(A_i \in [A_i]$, $b_i \in [b_i]$, $i = \overline{1,m})$, *заданного управления* $u = -k^{\mathrm{т}}x$, *переключающего сигнала* $\sigma \in S(\Omega)$ *и произвольного вектора* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *решение* $x(t)$ *системы (1) с начальным условием* $x^{(\sigma(0))}(0) = T^{\mathrm{т}}_{\sigma(0)}x_0$ *совпадает с решением соответствующей системы (7) для режимов*

$$\tilde{A}_i = T_iA_iT_i^{\mathrm{т}} + \hat{T}_i\hat{A}_i\hat{T}_i^{\mathrm{т}}, \quad \tilde{b}_i = T_ib_i$$

с начальным условием $x(0) = T_{\sigma(0)}T^{m}_{\sigma(0)}x_0$.

Скажем, что система (5), замкнутая обратной связью (4), $S(\Omega)$-*устойчива*, если для любых $\sigma \in S(\Omega)$ и $x(0) \in \mathbb{R}^n$ для соответствующего пучка траекторий $\mathfrak{X}$ системы (7) выполняется соотношение

$$\|\mathfrak{X}_t\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

При этом обратную связь (4) называем $S(\Omega)$-*стабилизирующей*. Лемма 1 позволяет сформулировать следующее утверждение о связи свойства устойчивости замкнутых систем (1) и (5).

Лемма 2. *Пусть линейная стационарная обратная связь* $u = -k^{\mathrm{т}}x$ $(k \in \mathbb{R}^n)$ *является* $S(\Omega)$*-стабилизирующей для системы (5). Тогда эта же обратная связь будет* $S(\Omega)$*-стабилизирующей и для системы (1).*

Таким образом, лемма 2 позволяет свести задачу стабилизации системы (1) к задаче стабилизации соответствующей расширенной системы (5).

Отметим, что в общем случае замкнутая система (7) не является интервальной, что существенно усложняет проверку её устойчивости. Поэтому наряду с системой (7) будем рассматривать интервальную систему

$$\dot{x} = [\tilde{\Lambda}_\sigma(k)]x, \quad \sigma \in S(\Omega), \quad \tilde{Z}(\Omega) = \{\tilde{Z}_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n} : (i,j) \in \Omega\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

с режимами

$$[\tilde{\Lambda}_i(k)] = \square\{\tilde{A}_i - \tilde{b}_ik^{\mathrm{т}} : \tilde{A}_i \in [\tilde{A}_i], \ \tilde{b}_i \in [\tilde{b}_i]\}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Систему (8) назовём *интервальной оболочкой системы* (7), а её решения и $S(\Omega)$-устойчивость определяем так же, как и для системы (7). Если рассматривать системы (7) и (8) как семейства переключаемых систем, то очевидно, что семейство систем (7) является подмножеством интервального семейства (8). Учитывая этот факт, сформулируем следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть для некоторого* $k \in \mathbb{R}^n$ *система (8) является* $S(\Omega)$*-устойчивой. Тогда при этом* k *система (7) будет также* $S(\Omega)$*-устойчивой.*

Лемма 3 позволяет свести задачу стабилизации системы (1) к задаче поиска вектора $k \in \mathbb{R}^n$, для которого система (8) является $S(\Omega)$-устойчивой.

3. Решение задачи стабилизации. Рассмотрим для произвольной интервальной матрицы $[A] = ([\underline{a}_{kj}, \overline{a}_{kj}])_{k,j=\overline{1,n}}$ параллелотоп $P(A) = \prod_{k,j=\overline{1,n}}[\underline{a}_{kj}, \overline{a}_{kj}]$ в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$. Каждому вектору $q = (q_1, \ldots, q_{n^2})^{\mathrm{T}} \in P(A)$ поставим в соответствие матрицу

$$A(q) = \begin{pmatrix} q_1 & \ldots & q_n \\ q_{n+1} & \ldots & q_{2n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ q_{n(n-1)+1} & \ldots & q_{n^2} \end{pmatrix}.$$

Тогда $[A] = \{A(q) : q \in P(A)\}$. Пусть $G(A) = \{q_A^{(\nu)} : \nu = \overline{1, 2^{n^2}}\}$ – множество всех вершин параллелотопа $P(A)$, откуда следует, что $P(A) = \operatorname{Conv}\{q_A^{(\nu)} : \nu = \overline{1, 2^{n^2}}\}$, а значит, и $[A] = \operatorname{Conv}\{A(q_A^{(\nu)}) : \nu = \overline{1, 2^{n^2}}\}$. Матрицы $A(q_A^{(\nu)})$ называют *вершинными* матрицами для интервальной матрицы $[A]$.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) при некотором векторе $k \in \mathbb{R}^n$ существует единая функция Ляпунова $V(x) = x^{\mathrm{T}}Hx$ $(H \succ 0)$ для семейства систем

$$\dot{x} = Q_l^{(i)}x, \quad i = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, 2^{n^2}}, \tag{9}$$

где $Q_l^{(i)}$ – вершинные матрицы i-го режима соответствующей системы (8);

2) для матриц преемственности из множества $\tilde{Z}(\Omega)$ системы (8) выполняются неравенства

$$\|\tilde{Z}_{ij}\|_2^2 \leqslant \theta \quad \text{для всех} \quad (i,j) \in \Omega, \tag{10}$$

где $\theta = \lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H)$ $(\lambda_{\min}(H)$ и $\lambda_{\max}(H)$ – минимальное и максимальное собственные значения матрицы H соответственно).

Тогда система (8) является $S(\Omega)$-устойчивой.

Доказательство. Покажем сначала, что если выполнено условие (10), то в моменты смены режимов, когда могут происходить скачкообразные изменения вектора состояния системы (8), определяемые матрицами преемственности $\tilde{Z}_{ij}$, значение функции $V(x)$ не возрастает, т.е.

$$V(\tilde{Z}_{ij}x) \leqslant V(x) \tag{11}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $(i,j) \in \Omega$.

Действительно, как известно, для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ верны оценки

$$\lambda_{\min}(H)\|x\|_2^2 \leqslant V(x) \leqslant \lambda_{\max}(H)\|x\|_2^2.$$

Поэтому имеем

$$V(\tilde{Z}_{ij}x) \leqslant \lambda_{\max}(H)\|\tilde{Z}_{ij}x\|_2^2 \leqslant \lambda_{\max}(H)\|\tilde{Z}_{ij}\|_2^2\|x\|_2^2.$$

Тогда

$$V(x) - V(\tilde{Z}_{ij}x) \geqslant \lambda_{\min}(H)\|x\|_2^2 - \lambda_{\max}(H)\|\tilde{Z}_{ij}\|_2^2\|x\|_2^2 =$$

$$= (\lambda_{\min}(H) - \lambda_{\max}(H)\|\tilde{Z}_{ij}\|_2^2)\|x\|_2^2 \geqslant \left(\lambda_{\min}(H) - \lambda_{\max}(H)\frac{\lambda_{\min}(H)}{\lambda_{\max}(H)}\right)\|x\|_2^2 =$$

$$= (\lambda_{\min}(H) - \lambda_{\min}(H))\|x\|_2^2 = 0.$$

Таким образом, неравенства (11) доказаны.

Далее, пусть переключаемая система

$$\dot{x} = \Lambda_\sigma(k)x \tag{12}$$

является некоторым элементом интервального семейства (8). Рассмотрим производную

$$\dot{V}|_{(i)}(x) = x^{\mathrm{T}}(\Lambda_i(k)^{\mathrm{T}}H + H\Lambda_i(k))x$$

общей квадратичной функции Ляпунова $V(x) = x^{\text{т}}Hx$ в силу i-го режима

$$\dot{x} = \Lambda_i(k)x, \quad \Lambda_i(k) \in [\tilde{\Lambda}_i(k)] \tag{13}$$

системы (12).

Заметим, что $\Lambda_i(k) = \sum \alpha_l Q_l^{(i)}$, где $\alpha_l \geqslant 0$, $\sum \alpha_l = 1$, $Q_l^{(i)}$ – вершинные матрицы для интервальной матрицы $[\tilde{\Lambda}_i(k)]$. Тогда

$$\dot{V}|_{(i)}(x) = x^{\text{т}}((\sum \alpha_l Q_l^{(i)})^{\text{т}}H + H(\sum \alpha_l Q_l^{(i)}))x = \sum \alpha_l (x^{\text{т}}((Q_l^{(i)})^{\text{т}}H + HQ_l^{(i)})x) \leqslant \sum \alpha_l \lambda_l^{(i)} \|x\|^2,$$

где $\lambda_l^{(i)}$ – максимальное собственное значение матрицы $(Q_l^{(i)})^{\text{т}}H + HQ_l^{(i)}$.

Пусть

$$-\lambda = \max_{i,l} \lambda_l^{(i)},$$

где максимум берётся по всем вершинным матрицам всех интервальных матриц $[\tilde{\Lambda}_i(k)]$. Очевидно, что $-\lambda < 0$.

Тогда получаем следующую оценку:

$$\dot{V}|_{(i)}(x) \leqslant \sum \alpha_l \lambda_l^{(i)} \|x\|^2 \leqslant -\lambda \|x\|^2 \sum \alpha_l = -\lambda \|x\|^2 < 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0. \tag{14}$$

Предположим, что при выполнении условий теоремы 1 соответствующая система (8) всё же не является $S(\Omega)$-устойчивой. Тогда в силу (14) для некоторого переключающего сигнала $\hat{\sigma} \in S(\Omega)$ и начального условия $\hat{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ найдётся такое $\mu > 0$, что для любого $t^* > 0$ будет существовать хотя бы одно решение $x(t)$ из соответствующего пучка $\mathfrak{X}$, которое не попадает в область $\omega_0 = \{x : V(x) < \mu\}$ при $t \in [0, t^*]$. Пусть r – радиус некоторого принадлежащего области ω_0 шара с центром в нуле. Зафиксируем произвольное $t^* > 0$. Тогда в соответствии со сделанным предположением найдётся решение $\hat{x}(t) \in \mathfrak{X}$, для которого выполняется неравенство $\|\hat{x}(t)\| > r$ при всех $t \in [0, t^*]$. Пусть $\hat{x}(t)$ является решением некоторой системы (12).

Обозначим через t_1, t_2, …, t_l все моменты переключения системы (12) на промежутке $[0, t^*]$, обусловленные переключающим сигналом $\hat{\sigma}(t)$. Пусть

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_l < t_{l+1} = t^*.$$

Пусть на некотором промежутке $[t_j, t_{j+1}]$ активным является i-й режим (13). Тогда на этом промежутке в силу оценки (14) и выбора константы r выполняется неравенство

$$\dot{V}(\hat{x}(t)) < -\lambda r^2.$$

Теперь, учитывая неравенство (11), оценим значение $V(\hat{x}(t^*))$. Имеем

$$V(\hat{x}(t^*)) = V(\hat{x}(0)) + (V(\hat{x}(t_1)) - V(\hat{x}(0))) + (V(\hat{x}(t_2)) - V(\tilde{Z}_{\sigma(t_1)\sigma(0)}\hat{x}(t_1))) +$$
$$+ (V(\tilde{Z}_{\sigma(t_1)\sigma(0)}\hat{x}(t_1)) - V(\hat{x}(t_1))) + (V(\hat{x}(t_3)) - V(\tilde{Z}_{\sigma(t_2)\sigma(t_1)}\hat{x}(t_2))) +$$
$$+ (V(\tilde{Z}_{\sigma(t_2)\sigma(t_1)}\hat{x}(t_2)) - V(\hat{x}(t_2))) + \ldots + (V(\hat{x}(t^*)) - V(\tilde{Z}_{\sigma(t_l)\sigma(t_{l-1})}\hat{x}(t_l))) +$$
$$+ (V(\tilde{Z}_{\sigma(t_l)\sigma(t_{l-1})}\hat{x}(t_l)) - V(\hat{x}(t_l))) \leqslant V(\hat{x}(0)) + (V(\hat{x}(t_1)) - V(\hat{x}(0))) +$$
$$+ (V(\hat{x}(t_2)) - V(\tilde{Z}_{\sigma(t_1)\sigma(0)}\hat{x}(t_1))) + (V(\hat{x}(t_3)) - V(\tilde{Z}_{\sigma(t_2)\sigma(t_1)}\hat{x}(t_2))) + \ldots$$
$$\ldots + (V(\hat{x}(t^*)) - V(\tilde{Z}_{\sigma(t_l)\sigma(t_{l-1})}\hat{x}(t_l))) = V(\hat{x}(0)) + \int_0^{t_1} \dot{V}|_{\sigma(0)}\hat{x}(\tau)\,d\tau +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t_2} \dot V|_{\sigma(t_1)}\hat x(\tau)\,d\tau + \int\limits_{t_2}^{t_3} \dot V|_{\sigma(t_2)}\hat x(\tau)\,d\tau + \ldots + \int\limits_{t_l}^{t^*} \dot V|_{\sigma(t_l)}\hat x(\tau)\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant V(\hat x(0)) + \int\limits_{0}^{t_1}(-\lambda r^2)\,d\tau + \int\limits_{t_1}^{t_2}(-\lambda r^2)\,d\tau + \int\limits_{t_2}^{t_3}(-\lambda r^2)\,d\tau + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{t_l}^{t^*}(-\lambda r^2)\,d\tau = V(\hat x(0)) - \lambda r^2 t^*.$$

Таким образом, пришли к неравенству

$$V(\hat x(t^*)) \leqslant V(\hat x(0)) - \lambda r^2 t^*.$$

Так как константа λr^2 не зависит от t^*, то при достаточно больших t^* верно неравенство $V(\hat x(t^*)) < 0$, а это противоречит положительной определённости функции $V(x)$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Леммы 2, 3 и теорема 1 дают, фактически, конструктивный алгоритм для проверки того, является ли данная обратная связь $u = -k^{\mathrm{т}}x$ $(k \in \mathbb{R}^n)$ стабилизирующей для системы (1). Указанный алгоритм позволяет разрабатывать различные численные процедуры поиска вектора k стабилизирующей обратной связи для системы (1). Это могут быть либо обычные сеточные методы поиска, либо методы интеллектуального поиска на множестве параметров обратной связи.

Рассмотрим вопрос об аналитическом алгоритме поиска вектора k стабилизирующей обратной связи. Запишем в явном виде интервальные матрицы $[\tilde\Lambda_i(k)]$ $(i=\overline{1,m})$, являющиеся интервальными оболочками матричных семейств

$$\{\tilde A_i - \tilde b_i k^{\mathrm{т}} : \tilde A_i \in [\tilde A_i],\quad \tilde b_i \in [\tilde b_i]\},\quad i=\overline{1,m}.$$

Вследствие правил выполнения интервальных операций (сложения, вычитания и умножения) [7, с. 24; 8, с. 39] эти интервальные матрицы описываются следующим образом:

$$[\tilde\Lambda_i(k)] = ([\lambda_{pr}^{(i)}(k_r)])_{p,r=1}^n,$$

где k_r – r-я компонента вектора $k \in \mathbb{R}^n$,

$$\lambda_{pr}(k_r) = \begin{cases} [\underline{a}_{pr}^{(i)} - \overline{b}_i^p k_r, \overline{a}_{pr}^{(i)} - \underline{b}_i^p k_r], & \text{если}\quad k_r \geqslant 0,\\ [\overline{a}_{pr}^{(i)} - \underline{b}_i^p k_r, \overline{a}_{pr}^{(i)} - \overline{b}_i^p k_r], & \text{если}\quad k_r \leqslant 0.\end{cases} \tag{15}$$

Здесь b_i^p – p-я компонента вектора $\tilde b_i$.

Рассмотрим случай, когда для всех векторов $[b_i]$, определяющих режимы системы (1), выполняются условия $\underline{b_i} = \overline{b_i}$, т.е. когда эти векторы являются “точечными”. В этом случае поиск вектора k параметров стабилизирующей обратной связи можно свести к решению системы линейных матричных неравенств. Действительно, если векторы $[b_i]$ являются точечными, то в силу (15) получаем

$$[\tilde\Lambda_i(k)] = [\tilde A_i] - \tilde b_i k^{\mathrm{т}} = ([\underline{a}_{pr}^{(i)} - b_i^p k_r, \overline{a}_{pr}^{(i)} - b_i^p k_r])_{p,r=1}^n$$

и вершинные матрицы $Q_l^{(i)}$ для интервальной матрицы $[\tilde\Lambda_i(k)]$ имеют вид

$$Q_l^{(i)} = \tilde A_i^l - \tilde b_i k^{\mathrm{т}},$$

где $\tilde{A}_l^{(i)}$ – вершинные матрицы для $[\tilde{A}_i]$. Тогда условие существования общей квадратичной функции Ляпунова для семейства систем (9) равносильно разрешимости системы матричных неравенств

$$\begin{cases}(\tilde{A}_l^{(i)} - \tilde{b}_i k^{\mathrm{т}})^{\mathrm{т}} H + H(\tilde{A}_l^{(i)} - \tilde{b}_i k^{\mathrm{т}}) \prec 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad l = \overline{1, 2^{n^2}},\\ H \succ 0,\end{cases}$$

которая является билинейной относительно неизвестной матрицы H и вектора k. Известно [9, с. 44], что умножение первого неравенства на матрицу H^{-1} слева и справа переводит эту пару неравенств в линейные матричные неравенства относительно новых матриц $\hat{H} = H^{-1}$ и $\hat{k}^{\mathrm{т}} = k^{\mathrm{т}} H^{-1}$:

$$\begin{cases}\hat{H}(\tilde{A}_l^{(i)})^{\mathrm{т}} + \tilde{A}_l^{(i)}\hat{H} - (\hat{k}\tilde{b}_i^{\mathrm{т}} + \tilde{b}_i\hat{k}^{\mathrm{т}}) \prec 0, \quad i = \overline{1,m},\\ \hat{H} \succ 0, \quad l = \overline{1, 2^{n^2}}.\end{cases} \tag{16}$$

Таким образом, если система линейных матричных неравенств (16) имеет решения $\hat{H}$, $\hat{k}$, то система (8), для которой

$$[\tilde{\Lambda}_\sigma(k)] = [\tilde{A}_\sigma] - \tilde{b}_\sigma k^{\mathrm{т}}, \tag{17}$$

при $k^{\mathrm{т}} = \hat{k}^{\mathrm{т}}\hat{H}^{-1}$ удовлетворяет условию 1) теоремы 1.

Далее, в работе [4] показано, что условие

$$H - \tilde{Z}_{ij}^{\mathrm{т}} H \tilde{Z}_{ij} \succeq 0, \quad (i,j) \in \Omega, \tag{18}$$

эквивалентно неравенству $V(x) - V(\tilde{Z}_{ij}x) \geqslant 0$ при $x \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, требование условия 2) теоремы 1 можно заменить условием (18). Умножив теперь неравенства (18) слева и справа на матрицу H^{-1}, получаем

$$\hat{H} - \hat{H}\tilde{Z}_{ij}^{\mathrm{т}}\hat{H}^{-1}\tilde{Z}_{ij}\hat{H} \succeq 0. \tag{19}$$

В работе [4] также показано, что система матричных неравенств, составленная из неравенств (16) и (19), эквивалентна системе линейных матричных неравенств

$$\begin{cases}\hat{H}(\tilde{A}_i^l)^{\mathrm{т}} + \tilde{A}_i^l\hat{H} - (\hat{k}\tilde{b}_i^{\mathrm{т}} + \tilde{b}_i\hat{k}^{\mathrm{т}}) \prec 0, \quad i = \overline{1,m},\\ \hat{H} \succ 0, \quad l = \overline{1, 2^{n^2}},\\ \begin{pmatrix}\hat{H} & \tilde{Z}_{ij}\hat{H}\\ \hat{H}\tilde{Z}_{ij}^{\mathrm{т}} & \hat{H}\end{pmatrix} \succeq 0.\end{cases} \tag{20}$$

Таким образом, в случае, когда векторы $[b_i]$ системы (1) являются точечными, поиск стабилизирующей обратной связи для такой системы можно свести к решению системы линейных матричных неравенств (20). Именно, справедлива

Теорема 2. *Пусть для системы (1) вида*

$$\dot{x}^{(\sigma)} = [A_\sigma]x^{(\sigma)} + b_\sigma u, \quad \sigma \in S(\Omega), \quad Z(\Omega) = \{Z_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j} : (i,j) \in \Omega\} \tag{21}$$

разрешима система линейных матричных неравенств (20) относительно матрицы $\hat{H}$ *и вектора* $\hat{k}$ ($\tilde{A}_l^{(i)}$ *– вершинные матрицы для* $[\tilde{A}_i]$).

Тогда обратная связь $u = -k^{\mathrm{т}}x$, *где* $k^{\mathrm{т}} = \hat{k}^{\mathrm{т}}\hat{H}^{-1}$, *является* $S(\Omega)$*-стабилизирующей для системы (21).*

В заключение отметим, что представленные в настоящей работе достаточные условия стабилизации переключаемых интервальных линейных систем с режимами различных динамических порядков (теоремы 1 и 2) носят конструктивный характер и допускают численную реализацию процесса поиска стабилизирующего регулятора.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 20-57-0001, 20-07-00827, 19-07-00294) и Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фурсов А.С., Миняев С.И., Мосолова Ю.М.* Синтез цифрового стабилизатора по выходу для переключаемой интервальной линейной системы // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 11. С. 1545–1559.
2. *Фурсов А.С., Мосолова Ю.М., Миняев С.И.* Цифровая сверхстабилизация переключаемой интервальной линейной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1516–1527.
3. *Фурсов А.С.* Одновременная стабилизация: теория построения универсального регулятора для семейства динамических объектов. М., 2016.
4. *Фурсов А.С., Капалин И.В.* Некоторые подходы к стабилизации переключаемых линейных систем с режимами различных динамических порядков // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1693–1700.
5. *Барсегян В.Р.* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М., 2016.
6. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. 1. М., 1981.
7. *Шарый С.П.* Конечномерный интервальный анализ. М., 2007.
8. *Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э.* Прикладной интервальный анализ. М.; Ижевск, 2007.
9. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М., 2007.

Электротехнический университет, г. Ханчжоу, Китай,
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича, г. Москва,
АО “Корпорация “Московский институт теплотехники”

Поступила в редакцию 08.05.2021 г.
После доработки 08.05.2021 г.
Принята к публикации 05.10.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1564–1567

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956.6

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ

© 2021 г. С. А. Алдашев

Приводится пример смешанной области, в которой решение задачи Трикоми тривиально. Получен также критерий единственности классического решения этой задачи.

DOI: 10.31857/S0374064121110133

Введение. Известно, что колебания упругих мембран в пространстве моделируются уравнениями в частных производных. Если прогиб мембраны считать функцией $u(x,t)$ пространственных $x=(x_1,\ldots,x_m)$, $m\geqslant 2$, и временно́й $t\geqslant 0$ переменных, то, согласно принципу Гамильтона, приходим к многомерному волновому уравнению.

Полагая, что в положении изгиба мембрана находится в равновесии, вследствие принципа Гамильтона получаем также многомерное уравнение Лапласа.

Таким образом, колебания упругих мембран в пространстве можно моделировать многомерным уравнением Лаврентьева–Бицадзе [1, с. 276; 2, с. 33].

Теория краевых задач для гиперболо-эллиптических уравнений на плоскости хорошо изучена (см., например, монографии [2, 3] и приведённые в них библиографии).

Проблема корректности смешанных задач для гиперболо-эллиптических уравнений в многомерных ограниченных областях все ещё остаётся нерешённой [4, с. 110].

Многомерный аналог задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе сформулирован в [4, с. 110; 5] (см. также [6]). В работах [7, 8] доказано, что эта задача в многомерном случае может иметь не единственное решение. Отметим также работу [9], в которой изучается задача Трикоми в трёхмерной области.

Естественно, возникает важный вопрос: в какой смешанной области решение задачи Трикоми является единственным. В настоящей работе приводится пример такой смешанной области. Получен также критерий единственности классического решения.

Постановка задачи и результат. Пусть Ω_ε – конечная область евклидова пространства $\mathbb{R}^{m+1}$ точек $(x_1,\ldots,x_m,t)$, ограниченная при $t>0$ сферической поверхностью $\Gamma: |x|^2+t^2=1$, а при $t<0$ конусами $K_\varepsilon: |x|=-t+\varepsilon$, $K_1: |x|=1+t$, $(\varepsilon-1)/2\leqslant t\leqslant 0$, где $|x|$ – длина вектора $x=(x_1,\ldots,x_m)$, а $0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$.

Обозначим через Ω^+ и Ω^-_ε части области Ω_ε, лежащие в полупространствах $t>0$ и $t<0$ соответственно, через S^ε – общую часть границ областей Ω^+ и Ω^-_ε, представляющую собой множество $\{t=0,\ 0<|x|<1\}$ точек из $\mathbb{R}^m$. Часть конуса K_ε, ограничивающего область Ω^-_ε, обозначим через S_ε.

В области Ω_ε рассмотрим многомерное уравнения Лаврентьева–Бицадзе

$$\Delta_x u+(\operatorname{sgn} t)u_{tt}=0, \tag{1}$$

где Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1,\ \ldots,\ x_m$, $m\geqslant 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,\ \ldots,\ x_m$, t к сферическим r, $\theta_1,\ \ldots,\ \theta_{m-1}$, t, $r\geqslant 0$, $0\leqslant\theta_1<2\pi$, $0\leqslant\theta_i\leqslant\pi$, $i=\overline{2,m-1}$, $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_{m-1})$.

В качестве многомерной задачи Трикоми рассматривается следующая

Задача 1. Найти решение из класса $C(\overline{\Omega}_\varepsilon)\bigcap C^2(\Omega^+\bigcup\Omega^-_\varepsilon)$ уравнения (1) в области Ω_ε при $t\neq 0$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_\Gamma=0, \tag{2}$$

$$u|_{S_\varepsilon}=0. \tag{3}$$

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$; через $W_2^l(S)$, $l \in \mathbb{Z}_+$, обозначаем пространства Соболева функций, определённых на множестве S.

Имеет место (см., например, [10, с. 142])

Лемма. *Пусть* $f(r,\theta) \in W_2^l(S^\varepsilon)$. *Если* $l \geqslant m-1$, *то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta),$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leqslant l-m+1$, *сходятся абсолютно и равномерно, при этом* $f_n^k(r) = \int_H f_n^k(r,\theta) Y_{n,m}^k(\theta)\,dH$, *где* H *– единичная сфера в* $\mathbb{R}^m$.

Тогда справедлива

Теорема. *Решение* $u(r,\theta,t)$ *задачи 1 тождественно равно нулю тогда и только тогда, когда* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. В сферических координатах уравнение (1) имеет вид [10, с. 143]

$$u_{rr} + (m-1)r^{-1}u_r - \delta r^{-2}u + u_{tt} = 0, \tag{4}$$

где

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right), \quad g_1 = 1, \quad g_j = (\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно, что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение задачи 1 в области Ω^+ принадлежит классу $C(\overline{\Omega^+}) \bigcap C^2(\Omega^+)$, то это решение можно искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{5}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ – функции, подлежащие определению.

Подставляя представление (5) в уравнение (4) и учитывая ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [10, с. 144], будем иметь

$$\bar{u}_{nrr}^k + (m-1)r^{-1}\bar{u}_{nr}^k + \bar{u}_{ntt}^k - \lambda_n r^{-2}\bar{u}_n^k = 0, \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{6}$$

при этом краевое условие (2) в силу леммы запишется в виде

$$\bar{u}_n^k(r, \sqrt{1-r^2}) = 0, \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1. \tag{7}$$

В (6), (7) сделаем замену $\bar{u}_n^k(r,t) = r^{(1-m)/2}u_n^k(r,t)$, затем, положив $r = \rho\cos\varphi$, $r = \rho\sin\varphi$, $\rho \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, получим

$$\upsilon_{n\rho\rho}^k + \rho^{-1}\upsilon_{n\rho}^k + \rho^{-2}\upsilon_{n\varphi\varphi}^k + \overline{\lambda}_n\rho^{-2}(\sec^2\varphi)\upsilon_n^k = 0, \tag{8}$$

$$\upsilon_n^k(1,\varphi) = 0, \tag{9}$$

где

$$\upsilon_n^k(\rho,\varphi) = u_n^k(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi), \quad \overline{\lambda}_n = ((m-1)(3-m) - 4\lambda_n)/4.$$

Решение задачи (8), (9) будем искать в виде

$$\upsilon_n^k(\rho,\varphi) = R(\rho)\phi(\varphi). \tag{10}$$

Подставляя выражение (10) в уравнение (8), будем иметь

$$\rho^2 R_{\rho\rho} + \rho R_\rho - \mu R = 0, \quad \mu = \text{const}, \tag{11}$$

$$\phi_{\varphi\varphi} + (\mu + \overline{\lambda}_n \sec^2\varphi)\phi = 0. \tag{12}$$

Если решение уравнение Эйлера (11) будем искать в виде $R(\rho) = \rho^s$, $0 \leqslant s = \text{const}$, то получим, что $s^2 = \mu$.

Далее уравнение (12) запишем следующим образом:

$$\phi_{\varphi\varphi} = (l(l-1)\sec^2\varphi - s^2)\phi, \quad l = -n - (m-3)/2. \tag{13}$$

Сделав в уравнении (13) замену $\xi = \sin^2\varphi$, приходим к уравнению

$$\xi(\xi-1)g_{\xi\xi} + ((\alpha+\beta+1)\xi - 1/2)g_\xi + \alpha\beta g = 0, \tag{14}$$

$$g(\xi) = \phi(\varphi)\sec^l\varphi, \quad \alpha = (l+s)/2, \quad \beta = (l-s)/2.$$

Общее решение уравнение (14) представимо по формуле (см. [11, гл. 2, с. 421])

$$g_s(\xi) = c_{1s}F(\beta,\gamma,1/2;\xi) + c_{2s}\sqrt{\xi}F(\beta+1/2,\gamma+1/2,3/2;\xi), \tag{15}$$

которая периодическая по φ, если $s \in \mathbb{Z}_+$, где c_{1s}, c_{2s} – произвольные независимые постоянные, а $F(\beta,\gamma,\alpha;\xi)$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

Таким образом, из равенств (10), (15) вытекает, что общее решение уравнения (8) записывается в виде

$$\upsilon_{n,\mu}^k(\rho,\varphi) = \sum_{s=0}^{\infty} \rho^s \cos^l\varphi\left[c_{1s}F\left(\beta,\gamma,\frac{1}{2};\sin^2\varphi\right) + c_{2s}\sin\varphi F\left(\beta+\frac{1}{2},\gamma+\frac{1}{2},\frac{3}{2};\sin^2\varphi\right)\right]. \tag{16}$$

Так как $|\upsilon_n^k(\rho,\pi/2)| < \infty$, то из представления (16) следует, что

$$c_{1s}F\left(\beta,\gamma,\frac{1}{2};1\right) + c_{2s}F\left(\beta+\frac{1}{2},\gamma+\frac{3}{2},\frac{3}{2};1\right) = 0,$$

или

$$c_{2s} = -\frac{2\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1/2-\beta)\Gamma(1/2-\gamma)}c_{1s}, \tag{17}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Подставляя (17) в (16), получаем

$$\upsilon_n^k(\rho,\varphi) = \sum_{s=0}^{\infty} c_{1s}\rho^s\cos^l\varphi\left[F\left(\beta,\gamma,\frac{1}{2};\sin^2\varphi\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1/2-\beta)\Gamma(1/2-\gamma)}\sin\varphi F\left(\beta+\frac{1}{2},\gamma+\frac{1}{2},\frac{3}{2};\sin^2\varphi\right)\right]. \tag{18}$$

Подчинив функцию (18) граничному условию (9), найдём, что $c_{1s} = 0$, $s \in \mathbb{Z}_+$, и, значит, $\bar{u}_n^k(\rho,\varphi) \equiv 0$, $k = \overline{1,k_n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Тогда из равенства (5) в свою очередь вытекает, что решением задачи (1), (2) в области Ω^+ является функция $u(r,\theta,t)\equiv 0$, откуда при $t\to +0$ имеем

$$u(r,\theta,t)=0, \quad \varepsilon<r<1. \tag{19}$$

Таким образом, учитывая краевые условия (3) и (19), получаем в области Ω_ε^- задачу Дарбу–Проттера для многомерного волнового уравнения

$$\Delta_x u - u_{tt}=0 \tag{20}$$

с краевыми условиями

$$u|_{S_\varepsilon \bigcup S^\varepsilon}=0. \tag{21}$$

При $\varepsilon>0$, из результатов работ [12, 13] следует, что решение $u(r,\theta,t)$ задачи (20), (21) тождественно нулевое. Следовательно, и решение задачи 1 тривиальное.

Пусть теперь решение $u(r,\theta,t)$ задачи 1 тождественно нулевое. Покажем, что $\varepsilon>0$. Предположим противное, т.е. $\varepsilon=0$.

Если $\varepsilon=0$, то, как показано выше, задача 1 сводится к задаче Дарбу–Проттера для уравнения (20) с условием

$$u|_{S_0 \bigcup S^0}=0. \tag{22}$$

В работах [13, 14] доказано, что задача (20), (22) имеет ненулевое решение. Приходим к противоречию. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1966.
2. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
3. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнения в частных производных. М., 2006.
4. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М., 1959.
5. *Бицадзе А.В.* К проблеме уравнений смешанного типа в многомерных областях // Докл. АН СССР. 1956. Т. 110. № 6. С. 901–902.
6. *Пулькин С.В.* Сингулярная задача Трикоми // Тр. Третьего всесоюз. математического съезда. Т. 1. М., 1956. С. 65–66.
7. *Алдашев С.А.* Неединственность решения пространственной задачи Геллерстедта для одного класса многомерного уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Матер. междунар. конф. “Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теории приближений”, посвящ. 100-летию акад. С.Л. Соболева. Новосибирск, 2008. С. 93.
8. *Алдашев С.А.* Неединственность решения пространственной задачи Геллерстедта для одного класса многомерных гиперболо-эллиптических уравнений // Укр. мат. журн. 2010. Т. 62. № 2. С. 265–269.
9. *Моисеев Е.И., Нефедов П.Х., Холомеева А.А.* Аналоги задач Трикоми и Франкля в трёхмерных областях для уравнения Ларентьева–Бицадзе // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 12. С. 1672–1675.
10. *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М., 1962.
11. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1965.
12. *Алдашев С.А.* О некоторых локальных и нелокальных краевых задачах для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 1. С. 3–8.
13. *Алдашев С.А.* О некоторых краевых задачах для многомерного волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265. № 6. С. 1289–1292.
14. *Алдашев С.А.* О критериях единственность и решения задачи Дарбу–Проттера для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Мат. журн. Алматы. 2002. Т. 2. № 4 (6). С. 26–29.

Институт математики и математического моделирования
Министерства образования и науки Республики Казахстан,
г. Алматы

Поступила в редакцию 06.02.2021 г.
После доработки 06.02.2021 г.
Принята к публикации 05.10.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1568–1572

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.977.1

ОДНОРОДНЫЕ СУБРИМАНОВЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА ГРУППЕ ДВИЖЕНИЙ ПЛОСКОСТИ

© 2021 г. Ю. Л. Сачков

Описаны однородные субримановы геодезические для стандартной субримановой структуры на группе собственных движений плоскости SE(2). Показано, что эта структура не является геодезически орбитальной, несмотря на инвариантность времени разреза при сдвиге начальной точки вдоль геодезических.

DOI: 10.31857/S0374064121110145

В римановой геометрии известны понятия однородных геодезических и геодезически орбитальных пространств [1–5]. В субримановой геометрии по этой тематике ряд результатов получен в работах В.Н. Берестовского и И.А. Зубаревой [6–12]: доказана геодезическая орбитальность осесимметричных левоинвариантных субримановых метрик на группах SU(2), SO(3), SL(2), $\mathrm{SO}_0(2,1)$ и всех локально изоморфных и локально изометричных накрытий последней группы с упомянутыми субримановыми метриками. Все эти метрики реализуемы как инвариантные метрики на соответствующих слабо симметрических по А. Сельбергу пространствах.

1. Однородные и эквиоптимальные субримановы геодезические на группах Ли. Пусть на гладком многообразии M задана субриманова структура [13, с. 22; 14, с. 76]. Обозначим через $\mathrm{Isom}\,(M)$ группу изометрий субриманова многообразия M.

Субриманова геодезическая $\gamma \subset M$ называется *однородной*, если она является однородным пространством некоторой однопараметрической подгруппы группы $\mathrm{Isom}\,(M)$. Субриманово многообразие называется *геодезически орбитальным*, если все его геодезические однородны.

Временем разреза для геодезической $g(t)$, $t \geqslant 0$, соответствующим начальному моменту $t=0$, называется величина $t_{\mathrm{cut}}(g(\cdot)) = \sup\{T>0 : g(t)$ оптимальна при $t\in[0,T]\}$. Геодезическая $g(t)$, $t\in[0,T]$, где $T = t_{\mathrm{cut}}(g(\cdot)) < +\infty$, называется *непродолжаемой кратчайшей*.

Пусть на группе Ли G задана левоинвариантная субриманова структура с ортонормированным репером $(X_1,\ldots,X_k)$, $X_i \in \mathrm{Vec}(G)$. Будем говорить, что *геодезическая* $\{g(t)\}\subset G$ *соответствует управлению* $u(t) = (u_1(t),\ldots,u_k(t))$, $u_i\in L^\infty$, если выполняется равенство

$$\dot g(t) = \sum_{i=1}^k u_i(t) X_i(g(t)).$$

Согласно принципу максимума Понтрягина [15, с. 25; 16, с. 176] любая нормальная геодезическая $\{g(t)\}\subset G$ является проекцией нормальной экстремали $\{\lambda(t)\}\subset T^*G$:

$$\dot\lambda(t) = \vec H(\lambda(t)), \quad \lambda(t)\in T^*_{g(t)}G, \tag{1}$$

где $\vec H \in \mathrm{Vec}(T^*G)$ – гамильтоново векторное поле с гамильтонианом

$$H = \frac12\sum_{i=1}^k h_i^2 \in C^\infty(T^*G), \quad h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i(\pi(\lambda))\rangle,$$

и $\pi : T^*G \to G$ – каноническая проекция.

Кокасательное расслоение T^*G группы Ли G левыми сдвигами $L_g : g_0 \mapsto gg_0$, $g, g_0\in G$, тривиализуется:

$$\Phi : \mathfrak g^* \times G \to T^*G, \quad (p,g)\mapsto L^*_{g^{-1}}p,$$
$$\langle L^*_{g^{-1}}p, L_{g*}\xi\rangle = \langle p,\xi\rangle, \quad p\in\mathfrak g^*, \quad \xi\in\mathfrak g, \quad g\in G,$$

где $\mathfrak{g} = T_{\mathrm{Id}}G$ – алгебра Ли группы Ли G, а $\mathfrak{g}^*$ – сопряжённое к $\mathfrak{g}$ пространство. В этой тривиализации гамильтонова система (1) становится треугольной (см. [16, с. 251]):

$$\dot{p} = \left(\mathrm{ad}\frac{\partial H}{\partial p}\right)^* p, \quad p \in \mathfrak{g}^*, \tag{2}$$

$$\dot{g} = L_{g_*}\frac{\partial H}{\partial p}, \quad g \in G.$$

Обозначим вертикальную компоненту гамильтонова поля в правой части уравнения (2) через $\vec{H}_v \in \mathrm{Vec}(\mathfrak{g}^*)$.

Переходя к натурально параметризованным геодезическим $(\sum_{i=1}^k u_i^2(t) \equiv 1)$, будем считать, что $p \in C := \mathfrak{g}^* \bigcap \{H = 1/2\}$. Тогда время разреза t_{cut} на нормальных геодезических $g(t) = \pi \circ e^{t\vec{H}}(p, \mathrm{Id})$ становится функцией $C \to (0, +\infty]$.

Пусть $g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – натурально параметризованная геодезическая в субримановом многообразии M. Геодезическая $g(t)$ называется *эквиоптимальной*, если она удовлетворяет следующему свойству: если $g(t)$, $t \in [0, T]$, – непродолжаемая кратчайшая, то для любого $\tau \in \mathbb{R}$ геодезическая $g(t+\tau)$, $t \in [0, T]$, – также является непродолжаемой кратчайшей. Субриманово многообразие M называется *эквиоптимальным*, если любая его натурально параметризованная геодезическая эквиоптимальна.

Лемма. *Пусть $\{g(t)\} \subset G$ – субриманова геодезическая с управлением $u(t)$. Тогда для любого $g_1 \in G$ кривая $\widetilde{g}(t) = g_1 g(t+\tau)$ является субримановой геодезической с управлением $\widetilde{u}(t) = u(t+\tau)$.*

Доказательство. Кривая $g(t+\tau)$ – геодезическая по определению геодезической, а её левый сдвиг $\widetilde{g}(t) = L_{g_1}(g(t+\tau))$ является геодезической в силу левоинвариантности субримановой структуры. Вычислим управление $\widetilde{u}(t)$, соответствующее геодезической $\widetilde{g}(t)$:

$$\dot{\widetilde{g}}(t) = \frac{d}{dt}L_{g_1}(g(t+\tau)) = L_{g_1*}\dot{g}(t+\tau) = L_{g_1*}\sum_{i=1}^k u_i(t+\tau)X_i(g(t+\tau)) =$$

$$= \sum_{i=1}^k u_i(t+\tau)L_{g_1*}X_i(g(t+\tau)) = \sum_{i=1}^k u_i(t+\tau)X_i(\widetilde{g}(t)),$$

поэтому $\widetilde{u}(t) = u(t+\tau)$. Лемма доказана.

Предложение 1. *Нормальная геодезическая $g(t) = \pi \circ e^{t\vec{H}}(p, \mathrm{Id})$, $t \in \mathbb{R}$, эквиоптимальна тогда и только тогда, когда время разреза инвариантно относительно выбора начального момента, т.е.*

$$t_{\mathrm{cut}} \circ e^{\tau\vec{H}_v}(p) = t_{\mathrm{cut}}(p), \quad p \in C, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Доказательство. Геодезическая $\overline{g}(t) = g(t+\tau)$, $t \in [0, T]$, является непродолжаемой кратчайшей тогда и только тогда, когда непродолжаемой кратчайшей является геодезическая $\widetilde{g}(t) = g_1^{-1}\overline{g}(t) = g_1^{-1}g(t+\tau)$, $g_1 = g(\tau)$, $t \in [0, T]$. Если геодезическая $g(t)$ соответствует управлению $u(t)$, то геодезическая $\widetilde{g}(t)$ – управлению $\widetilde{u}(t) = u(t+\tau)$ (см. лемму). Наконец, равенство (3) означает, что для любого $T > 0$ управления $u(t)$, $t \in [0, T]$, и $u(t+\tau)$, $t \in [0, T]$, одновременно оптимальны или неоптимальны.

Следствие. *Стандартные левоинвариантные субримановы структуры на следующих группах Ли эквиоптимальны:*

1) группа Гейзенберга;

2) группы $\mathrm{SO}(3)$, $\mathrm{SU}(2)$, $\mathrm{SL}(2)$ *с осесимметричной субримановой метрикой;*

3) группы $\mathrm{SE}(2)$ *и* $\mathrm{SH}(2)$;

4) группы Энгеля и Картана.

Доказательство. Все геодезические для указанных групп Ли нормальны. Свойство (3) инвариантности времени разреза для групп Ли 1)–4) доказано соответственно в статьях: 1) [17]; 2) [7, 9, 18]; 3) [19, 20]; 4) [21].

Предложение 2. *Если субриманова геодезическая однородна, то она эквиоптимальна.*

Доказательство. Пусть геодезическая $\gamma = \{g(t) : t \in \mathbb{R}\}$ однородна, и пусть $\{\varphi_s : s \in \in \mathbb{R}\}$ – та однопараметрическая подгруппа в $\operatorname{Isom}(G)$, для которой γ является однородным пространством. Далее, пусть $g(t)$, $t \in [0, T,]$ – непродолжаемая кратчайшая. Возьмём любое $\tau \in \mathbb{R}$ и найдём такое $s \in \mathbb{R}$, что $\varphi_s(g(0)) = g(\tau)$. Тогда $g(t+\tau)$, $t \in [0, T]$, – непродолжаемая кратчайшая, так как $g(t+\tau) = \varphi_s(g(t))$, $t \in \mathbb{R}$.

В следующем пункте работы на примере стандартной субримановой структуры на группе SE(2) [20, 22, 23] покажем, что утверждение, обратное к предложению 2, неверно.

2. Субримановы геодезические на группе SE(2). Группа собственных движений евклидовой плоскости SE(2) представляет собой полупрямое произведение группы параллельных переносов $\mathbb{R}^2$ и группы вращений плоскости SO(2), т.е. $\mathrm{SE}(2) = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathrm{SO}(2)$. Эта группа имеет линейное представление

$$\mathrm{SE}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x \\ \sin\theta & \cos\theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \theta \in S^1, \quad x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Наряду с матричным обозначением будем обозначать элементы этой группы как (x, y, θ).

Рассмотрим на группе SE(2) стандартную левоинвариантную субриманову структуру, порождённую ортонормированным репером

$$X_1 = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Субримановы геодезические и оптимальный синтез для этой структуры описаны в работах [20, 22, 23].

Пример. Отметим следующие геодезические для этой структуры:

1) “движение вперед”: $e^{tX_1}(\mathrm{Id}) = (x, y, \theta)(t) = (t, 0, 0)$, $t \in \mathbb{R}$;

2) “поворот на месте”: $e^{tX_2}(\mathrm{Id}) = (x, y, \theta)(t) = (0, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Проекции всех остальных геодезических на плоскость (x, y) являются некомпактными кусочно-гладкими кривыми с точками возврата (см. [22]).

Группа $\operatorname{Isom}(\mathrm{SE}(2))$ вычислена в работе [24], в которой показано, что

$$\operatorname{Isom}(\mathrm{SE}(2)) \cong \mathrm{SE}(2) \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2). \tag{4}$$

Группа SE(2) действует на себе левыми сдвигами. В представлении (4) один сомножитель $\mathbb{Z}_2$ означает отражение относительно какой-либо оси на плоскости (x, y), а другой сомножитель $\mathbb{Z}_2$ – разворот. В частности, все однопараметрические подгруппы в $\operatorname{Isom}(\mathrm{SE}(2))$ будут однопараметрическими подгруппами в группе SE(2).

Теорема. *Однородными геодезическими в группе* SE(2) *являются только геодезические 1) и 2), указанные в примере.*

Группа SE(2) *не является геодезически орбитальным пространством.*

Доказательство. Вычислим однопараметрические подгруппы в $\operatorname{Isom}(\mathrm{SE}(2))$, т.е. в SE(2). Алгебра Ли группы Ли SE(2) имеет вид

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{se}(2) = \operatorname{span}(E_{13}, E_{23}, E_{21} - E_{12}),$$

где E_{ij} – 3×3-матрица с единственным ненулевым элементом на строке i и столбце j, равным 1. Однопараметрической подгруппой, соответствующей её элементу $X = aE_{13} + bE_{23} + c(E_{21} - E_{12})$, будет $e^{sX} = (x(s), y(s), \theta(s))$, где координаты x, y, θ удовлетворяют задаче Коши

$$\dot{x} = -cy + a, \quad x(0) = 0,$$

$$\dot{y} = cx + b, \quad y(0) = 0,$$

$$\dot{\theta} = c, \quad \theta(0) = 0.$$

Поэтому $\theta(s) = cs$ и

$$x(s) = as, \quad y(s) = bs \ \text{ при } \ c = 0,$$

$$x(s) = \frac{b}{c}(\cos(cs) - 1) + \frac{a}{c}\sin(cs), \quad y(s) = \frac{b}{c}\sin(cs) + \frac{a}{c}(1 - \cos(cs)) \ \text{ при } \ c \neq 0.$$

Орбита однопараметрической подгруппы $\{e^{sX}\} \subset \mathrm{SE}(2)$, проходящая через точку $(x_0, y_0, \theta_0) \in$ $\in \mathrm{SE}(2)$, представляется в виде:

$$(x_0 + as, y_0 + bs, \theta_0) \ \text{ при } \ c = 0,$$

$$\left(\left(x_0 + \frac{b}{c}\right)\cos cs + \left(\frac{a}{c} - y_0\right)\sin cs - \frac{b}{c}, \left(y_0 - \frac{a}{c}\right)\cos cs + \left(\frac{b}{c} + x_0\right)\sin cs + \frac{a}{c}, \theta_0 + cs\right) \ \text{ при } \ c \neq 0.$$

Эта орбита проекцией на плоскость (x, y) имеет следующую кривую:

1) прямую при $c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$;

2) точку при $c \neq 0$, $(x_0 + b/c)^2 + (a/c - y_0)^2 = 0$;

3) окружность при $c((x_0 + b/c)^2 + (a/c - y_0)^2) \neq 0$.

Из описания проекций геодезических на плоскость (x, y) следует, что однопараметрические подгруппы в случае (3) не могут быть геодезическими. Значит, только геодезические из приведённого выше примера однородны (случаи 1), 2)).

Таким образом, на группе $\mathrm{SE}(2)$, во-первых, все геодезические эквиоптимальны (следствие), а во-вторых, однородны только геодезические типов 1), 2) примера. Поэтому группа $\mathrm{SE}(2)$ эквиоптимальна, но не геодезически орбитальна. Теорема доказана.

Глубинная причина эквиоптимальности группы $\mathrm{SE}(2)$ остаётся скрытой. С другой стороны, группы, перечисленные в пп. 1) и 2) следствия геодезически орбитальны и эквиоптимальны. Отметим также, что стандартная левоинвариантная субриманова структура на свободной двуступенной группе Карно с тремя образующими (вектор роста $(3, 6)$) [25] эквиоптимальна, потому геодезически орбитальна согласно доказанному следствию.

Автор выражает благодарность А.В. Подобряеву за полезные обсуждения этой работы, а также рецензенту за ценную информацию о публикациях по теме статьи.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01387-П).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ambrose W., Singer I.M.* On homogeneous Riemannian manifolds // Duke Math. J. 1958. V. 25. P. 647–669.
2. *Kaplan A.* On the geometry of groups of Heisenberg type // Bull. London Math. Soc. 1983. V. 15. P. 35–42.
3. *Kowalski O., Vanhecke L.* Riemannian manifolds with homogeneous geodesics // Boll. Un. Mat. Ital. 1991. V. 5. P. 189–246.
4. *Kowalski D., Szenthe J.* On the existence of homogeneous geodesics in honogeneous Riemannian manifolds // Geom. Dedicata. 2000. V. 81. № 1–3. P. 209–214.
5. *Berestovskii V., Nikonorov Yu.* Riemannian Manifolds and Homogeneous Geodesics. Cham, 2020.
6. *Берестовский В.Н.* (Локально) кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли $\mathrm{SO}0(2,1)$ // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27. № 1. С. 3–22.
7. *Берестовский В.Н., Зубарева И.А.* Геодезические и кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли $\mathrm{SO}(3)$ // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56. № 4. С. 762–774.
8. *Берестовский В.Н., Грибанова И.А.* Субриманово расстояние в группах Ли $\mathrm{SU}(2)$ и $\mathrm{SO}(3)$ // Мат. тр. 2015. Т. 18. № 2. С. 3–21.
9. *Берестовский В.Н., Зубарева И.А.* Геодезические и кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли $\mathrm{SL}(2)$ // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57. № 3. С.527–542.
10. *Берестовский В.Н., Зубарева И.А.* Локально изометричные накрытия группы Ли $\mathrm{SO}0(2,1)$ со специальной субримановой метрикой // Мат. сб. 2016. Т. 207. № 9. С. 35–56.
11. *Берестовский В.Н., Зубарева И.А.* Субриманово расстояние в группе Ли $\mathrm{SO}0(2,1)$ // Алгебра и анализ. 2016. Т 28. № 4. С. 62–79.

12. *Берестовский В.Н., Зубарева И.А.* Субриманово расстояние в группе Ли $\mathrm{SL}(2)$ // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 1. С. 22–35.
13. *Montgomery R.* A Tour of Subriemannnian Geometries, their Geodesics and Applications. Providence, 2002.
14. *Agrachev A., Barilari D., Boscain U.* A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint. Cambridge, 2019.
15. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., 1961.
16. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М., 2005.
17. *Вершик А.М., Гершкович В.Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техн. Совр. проблемы математики. Фунд. направления. 1987. Т. 16. С. 5–85.
18. *Boscain U., Rossi F.* Invariant Carnot–Caratheodory metrics on S^3, $\mathrm{SO}(3)$, $\mathrm{SL}(2)$ and lens spaces // SIAM J. Contr. Optim. 2008. V. 47. P. 1851–1878.
19. *Butt Y.A., Bhatti A.I., Sachkov Yu.L.* Cut locus and optimal synthesis in sub-Riemannian problem on the Lie group $\mathrm{SH}(2)$ // J. of Dynam. and Contr. Systems. 2017. V. 23. P. 155–195.
20. *Sachkov Yu.L.* Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM: COCV. 2011. V. 17. P. 293–321.
21. *Ardentov A.A., Sachkov Yu.L.* Cut time in sub-Riemannian problem on Engel group // ESAIM: COCV. 2015. V. 21. № 4. P. 958–988.
22. *Moiseev I., Sachkov Yu.L.* Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM: COCV. 2010. V. 16. P. 380–399.
23. *Sachkov Yu.L.* Conjugate and cut time in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM: COCV. 2010. V. 16. P. 1018–1039.
24. *Ardentov A., Bor G., Le Donne E., Montgomery R., Sachkov Yu.* Bicycle paths, elasticae and sub-Riemannian geometry // Nonlinearity. 2021. V. 34. P. 4661–4683.
25. *Myasnichenko O.* Nilpotent $(3,6)$ sub-Riemannian problem // J. of Dynam. and Contr. Systems. 2002. V. 8. № 4. P. 573–597.

Институт программных систем
им. А.К. Айламазяна РАН,
г. Переславль-Залесский

Поступила в редакцию 27.05.2021 г.
После доработки 12.08.2021 г.
Принята к публикации 05.10.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1573–1586

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ*)

Ниже публикуются**) аннотации докладов, заслушанных в осеннем семестре 2021 г. (предыдущее сообщение о работе семинара см. в журнале “Дифференц. уравнения”. 2021. Т. 57. № 6).

DOI: 110.31857/S0374064121110157

А. Н. Ветохин (Москва) “Об одном свойстве линейных систем с непрерывными ограниченными коэффициентами, обобщённо приводимых к упорядоченно-диагональному виду” (24 сентября 2021 г.).

Для заданного натурального n через $\mathcal{M}_n$ обозначим класс линейных дифференциальных систем
$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$
с ограниченной непрерывной оператор-функцией A, которую мы отождествляем с самой системой (1) и поэтому пишем $A \in \mathcal{M}_n$. По линейной системе $A \in \mathcal{M}_n$ зададим на пространстве $\mathbb{R}^n$ набор метрик
$$d_t^A(x_0, y_0) = \max_{\tau\in[0,t]} \|x(\tau, x_0) - x(\tau, y_0)\|, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$
где $x(\,\cdot\,, a)$ – решение системы A, удовлетворяющее условию $x(0, a) = a$, а $\|\cdot\|$ – норма в $\mathbb{R}^n$ (для определённости $\|x\| = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$). Пусть $N_{\|\cdot\|}(A, \mathcal{K}, \varepsilon, t)$ – *ε-ёмкость* компактного множества $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ с метрикой d_t^A [1] (т.е. максимальное число точек, попарные d_t^A-расстояния между которыми больше ε), тогда топологическая энтропия системы (1) определяется формулой
$$h_{\mathrm{top}}(A) = \sup_{\mathcal{K}\subset\mathbb{R}^n} \lim_{\varepsilon\to0} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln N_{\|\cdot\|}(A, \mathcal{K}, \varepsilon, t)$$
(её правая часть не зависит от выбора нормы $\|\cdot\|$, поэтому определение корректно).

В докладе [2] введён класс EI_n таких систем $A \in \mathcal{M}_n$, что для всякой непрерывной оператор-функции B с отрицательным характеристическим показателем
$$\chi(B) \equiv \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln\|B(t)\| < 0 \tag{2}$$
система $A+B$ имеет те же показатели Ляпунова, что и система A (здесь $\|\cdot\|$ – какая-либо матричная норма). Известно [3], что класс правильных (по Ляпунову) систем содержится в EI_n. В докладе [4] предложено естественное расширение класса правильных систем с сохранением свойства инвариантности показателей Ляпунова относительно экспоненциально убывающих возмущений их матриц коэффициентов, а именно – класс GROD_n систем из $\mathcal{M}_n$, обобщённо ляпуновски эквивалентных системам с упорядоченной диагональю. Напомним, что системы

*) Семинар основан В.В. Степановым в 1930 г., впоследствии им руководили В.В. Немыцкий, Б.П. Демидович, В.А. Кондратьев, В.М. Миллионщиков. В настоящее время руководители семинара – Н.Х. Розов, И.Н. Сергеев, И.В. Асташова, А.В. Боровских, учёный секретарь семинара – В.В. Быков, e-mail: vvbykov@gmail.com.

**) Составитель хроники И.Н. Сергеев.

A и B (матрицы коэффициентов которых не обязательно ограничены на полуоси) называются *обобщённо ляпуновски эквивалентными*, если некоторое дифференцируемое линейное преобразование координат с матрицей $L(t)$, $t\in\mathbb{R}_+$, удовлетворяющее условию

$$\chi(\|L\|+\|L^{-1}\|)\leqslant 0,$$

переводит систему A в систему B. В работе [5] для каждого $n\in\mathbb{N}$ установлено, что класс GROD_n содержится в классе EI_n, но не совпадает с ним для каждого $n\geqslant 2$ (при $n=1$ оба эти класса совпадают с $\mathcal{M}_1$).

Обозначим через EITE_n класс таких систем $A\in\mathcal{M}_n$, что для всякой непрерывной оператор-функции B с отрицательным характеристическим показателем (2) система $A+B$ имеет ту же топологическую энтропию, что и система A.

Теорема 1. *Для любого* $n\in\mathbb{N}$ *имеет место включение* $\mathrm{GROD}_n\subset\mathrm{EITE}_n$.

Возникает естественный вопрос: верно ли обратное включение $\mathrm{EITE}_n\subset\mathrm{GROD}_n$? Для ответа на него рассмотрим систему

$$\dot{x}=\mathrm{diag}\,[a_1(t),a_2(t),\underbrace{0,\ldots,0}_{n-2}]x, \tag{3}$$

$$a_1(t)=\begin{cases}1, & t\in[0,6],\\ 1, & t\in((3k)!,(3k+1)!-1],\\ 0, & t\in[(3k+1)!,(3k+2)!],\\ 1, & t\in[(3k+2)!+1,(3k+3)!],\end{cases}\qquad a_2(t)=\begin{cases}1, & t\in[0,6],\\ 1, & t\in((3k)!,(3k+1)!],\\ 1, & t\in((3k+1)!,(3k+2)!-1],\\ 0, & t\in[(3k+2)!,(3k+3)!],\end{cases}$$

где $k\in\mathbb{N}$, причём функция $a_1(t)$ аффинно линейна по t на отрезках $[(3k+1)!-1,(3k+1)!]$ и $[(3k+2)!,(3k+2)!+1]$, а функция $a_2(t)$ – на отрезках $[(3k+2)!-1,(3k+2)!]$.

Теорема 2. *Для любого* $n\geqslant 2$ *система (3) принадлежит классу* EITE_n, *но не принадлежит классу* GROD_n.

Литература. 1. Колмогоров А.Н. Асимптотические характеристики вполне ограниченных метрических пространств // Докл. АН СССР. 1956. Т. 179. № 3. С. 585–589. 2. Миллионщиков В.М. Экспоненциально-инвариантные системы // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 11. С. 2014. 3. Гробман Д.М. Характеристические показателей систем, близких к линейным // Мат. сб. 1952. Т. 30. № 1. С. 121–166. 4. Миллионщиков В.М. Об одном классе линейных систем // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 6. С. 1090–1091. 5. Ветохин А.Н. О несовпадении двух множеств линейных систем // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 6. С. 784–788.

И. Н. Сергеев (Москва) "Исследование по первому приближению радиальных показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости" (1 октября 2021 г.).

Для области G евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ $(n>1)$ рассмотрим дифференциальную (вообще говоря, нелинейную) систему вида

$$\dot{x}=f(t,x),\quad x\in G,\quad f(t,0)=0,\quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0,+\infty),\quad f,f'_x\in C(\mathbb{R}_+\times G). \tag{1}$$

С системой (1) свяжем линейную однородную систему её первого приближения

$$\dot{x}=A(t)x,\quad A(t)\equiv f'(t,0),\quad t\in\mathbb{R}_+,\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{2}$$

причём на нелинейную добавку: $h(t,x)\equiv f(t,x)-A(t)x=o(x)$ при $x\to 0$, обычное требование её равномерной малости по $t\in\mathbb{R}_+$ мы здесь не накладываем.

Через $x_f(\,\cdot\,,x_0)$ будем обозначать непродолжаемое решение системы (1) с начальным условием $x_f(0,x_0)=x_0$, а через $S_*(f)$ и S_A – множество всех ненулевых решений системы (1) и, соответственно, всех решений системы (2).

Ниже в определении 1 вводятся [1] три основных разновидности функционала K, по которым затем в определении 2 строятся соответствующие им показатели $\varkappa$.

Определение 1. Функционалы $\mathrm{K}(t,u)$ определены на парах $t\in\mathbb{R}_+$ и $u\colon[0,t]\to\mathbb{R}^n$, принимают значение $+\infty$ всякий раз, когда функция u определена не на всём отрезке $[0,t]$, отвечают показателям

$$\varkappa=\nu,\theta,\rho \quad \text{при} \quad \mathrm{K}=\mathrm{N},\Theta,\mathrm{P} \quad \text{соответственно} \tag{3}$$

и описывают следующие свойства решений:

1) *колеблемость* $(\varkappa=\nu)$, если $\mathrm{K}(t,u)=\mathrm{N}(t,u)$ – умноженное на π число нулей на промежутке $(0,t]$ функции P_1u, где P_1 – ортогональный проектор на фиксированную прямую, причём если хотя бы один из этих нулей *кратен* (т.е. является нулём ещё и производной $(P_1u)^{\cdot}$), то считаем $\mathrm{N}(t,u)=+\infty$;

2) *вращаемость* (*ориентированная*, $\varkappa=\theta$), если $\mathrm{K}(t,u)=\Theta(t,u)\equiv|\varphi(t,P_2u)|$ – модуль *ориентированного* угла $\varphi(t,P_2u)$ (непрерывного по t, с начальным условием $\varphi(0,P_2u)=0$) между вектором $P_2u(t)$ и начальным вектором $P_2u(0)$, где P_2 – ортогональный проектор на фиксированную плоскость, причём если $P_2u(\tau)=0$ хотя бы при одном $\tau\in[0,t]$, то считаем $\Theta(t,u)=+\infty$;

3) *блуждаемость* $(\varkappa=\rho)$, если

$$\mathrm{K}(t,u)=\mathrm{P}(t,u)\equiv\int\limits_0^t|(u(\tau)/|u(\tau)|)^{\cdot}|\,d\tau,\quad u(\tau)\ne0,\quad \tau\in[0,t].$$

Известны и другие функционалы, отвечающие за *неориентированную* или *частотную вращаемость* [1], *поворачиваемость k-го ранга* [2], а также *плоскую вращаемость* [3].

Определение 2. Для каждого функционала из числа описанных в определении 1 зададим:

а) *слабый* и *сильный нижние линейные* показатели (3) решения $x\in S_*(f)$, определённого на всей полуоси $\mathbb{R}_+$, по формулам

$$\check\varkappa^\circ(x)\equiv\varliminf_{t\to+\infty}\inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n}t^{-1}\mathrm{K}(t,Lx),\quad \check\varkappa^\bullet(x)\equiv\inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n}\varliminf_{t\to+\infty}t^{-1}\mathrm{K}(t,Lx); \tag{4}$$

б) *слабый* и *сильный нижние радиальные* показатели (3) задачи Коши системы (1) с начальным значением $x_0\in G$ по формулам [4]

$$\check\varkappa_r^\circ(f,x_0)\equiv\varliminf_{t\to+\infty}\inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n}t^{-1}\check{\mathrm{K}}_r(f,x_0,t,L),\quad \check\varkappa_r^\bullet(f,x_0)\equiv\inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n}\varliminf_{t\to+\infty}t^{-1}\check{\mathrm{K}}_r(f,x_0,t,L), \tag{5}$$

где для момента $t\in\mathbb{R}_+$ и невырожденного преобразования $L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$ обозначено

$$\check{\mathrm{K}}_r(f,x_0,t,L)=\varliminf_{\mu\to+0}\mathrm{K}(t,Lx_f(\,\cdot\,,\mu x_0)),\quad \hat{\mathrm{K}}_r(f,x_0,t,L)=\varlimsup_{\mu\to+0}\mathrm{K}(Lx_f(t,\cdot\,,\mu x_0));$$

в) *слабый* и *сильный верхние линейные* $\hat\varkappa^\circ(x)$, $\hat\varkappa^\bullet(x)$ и *радиальные* $\hat\varkappa_r^\circ(x_0,f)$, $\hat\varkappa_r^\bullet(x_0,f)$ показатели по тем же формулам (4) и (5) соответственно, но с заменой в них нижних пределов при $t\to+\infty$ верхними, а функционалов $\check{\mathrm{K}}_r$ функционалами $\hat{\mathrm{K}}_r$;

г) *точные* или *абсолютные* разновидности тех же показателей, которые возникают при совпадении соответствующих значений нижнего и верхнего показателей или соответственно слабого и сильного показателей: в первом случае будем опускать в их обозначении галочку и крышечку, а во втором – пустой и полный кружочек.

Введение радиальных, сферических [5] и шаровых [6] показателей обусловлено тем, что решения нелинейной системы (1) могут оказаться определёнными не на всей временно́й полуоси. Некоторые свойства всех этих показателей описаны в работе [7]. Ниже изучается возможная связь между радиальными показателями нелинейной системы (1) и системы её первого приближения (2) (для последней они равны линейным показателям).

С одной стороны, радиальные показатели блуждаемости полностью совпадают с соответствующими линейными показателями системы первого приближения, причём в двумерном случае аналогичное совпадение наблюдается и для показателей вращаемости, что утверждают

Теорема 1. *Для любой системы (1) и любого ненулевого решения $x \in S_A$ системы её первого приближения (2) для функционалов блуждаемости выполнены равенства*

$$\check{\mathrm{P}}_r(f, x(0), t, L) = \hat{\mathrm{P}}_r(f, x(0), t, L) = \mathrm{P}(Lx, t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad L \in \operatorname{Aut} \mathbb{R}^n,$$

а для всех показателей блуждаемости – равенства

$$\tilde{\rho}_r^*(f, x(0)) = \tilde{\rho}^*(x), \quad \sim\, = \,\check{}\,, \hat{}\,, \quad * = \circ, \bullet.$$

Теорема 2. *При $n = 2$ для любой системы (1) и любого ненулевого решения $x \in S_A$ системы её первого приближения (2) для функционалов вращаемости выполнены равенства*

$$\check{\Theta}_r(f, x(0), t, L) = \hat{\Theta}_r(f, x(0), t, L) = \Theta(Lx, t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad L \in \operatorname{Aut} \mathbb{R}^n,$$

а для всех показателей вращаемости – равенства

$$\tilde{\theta}_r^*(f, x(0)) = \tilde{\theta}^*(x), \quad \sim\, = \,\check{}\,, \hat{}\,, \quad * = \circ, \bullet.$$

С другой стороны, уже в трёхмерном автономном случае радиальные показатели вращаемости, равно как и колеблемости, вообще говоря, не совпадают с соответствующими линейными показателями системы первого приближения, а для показателей колеблемости аналогичное несовпадение наблюдается даже и в двумерном случае, как показывают

Теорема 3. *При $n = 3$ и $G = \mathbb{R}^3$ существует такая автономная система (1), что для любого ненулевого решения $x \in S_A$ системы её первого приближения (2) решение $x_f(\,\cdot\,, x(0))$ также определено на всей полуоси $\mathbb{R}_+$, причём значения всех показателей вращаемости и колеблемости точны, абсолютны и для некоторого двумерного подпространства $S \subset S_A$ удовлетворяют соотношениям*

$$0 = \theta_r(f, x(0)) = \nu_r(f, x(0)) \leqslant \theta(x) = \nu(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in S \setminus \{0\}; \\ 0, & \text{если} \quad x \notin S. \end{cases}$$

Теорема 4. *При $n = 2$ и $G = \mathbb{R}^2$ существует такая система (1), что для любого ненулевого решения $x \in S_A$ системы её первого приближения (2) решение $x_f(\,\cdot\,, x(0))$ также определено на всей полуоси $\mathbb{R}_+$, причём значения всех показателей колеблемости точны, абсолютны и удовлетворяют соотношениям*

$$0 = \nu_r(f, x(0)) < \nu(x) = 1.$$

Литература. 1. Сергеев И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219. 2. Сергеев И.Н. Характеристики поворачиваемости решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1353–1361. 3. Сергеев И.Н. Показатели плоской вращаемости линейной дифференциальной системы // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2019. Вып. 32. С. 325–348. 4. Сергеев И.Н. Определение радиальных показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1560–1562. 5. Сергеев И.Н. Определение сферических показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 839–840. 6. Сергеев И.Н. Определение шаровых показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 6. С. 859–861. 7. Сергеев И.Н. Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 3. С. 41–46.

И. Н. Сергеев (Москва) “Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем” (8 октября 2021 г.).

Для заданной окрестности нуля $G \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in G, \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G). \tag{1}$$

Через S_* и S_δ будем обозначать множества всех непродолжаемых ненулевых решений x системы (1) и, соответственно, тех из них, что удовлетворяют начальному условию $|x(0)| < \delta$.

Определение 1 [1, 2]. Будем говорить, что система (1) обладает *перроновской* или, соответственно, *верхнепредельной*:

1) *устойчивостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta$ удовлетворяет требованию

$$\varliminf_{t\to+\infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon \quad \text{или, соответственно,} \quad \varlimsup_{t\to+\infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon, \tag{2}$$

молчаливо предполагающему, что решение x определено на всей полуоси $\mathbb{R}_+$;

2) *полной* (или *глобальной*) *неустойчивостью*, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для некоторого $\delta > 0$ любое решение $x \in S_\delta$ (или $x \in S_*$) не удовлетворяет требованию (2);

3) *асимптотической* (или *глобальной*) *устойчивостью*, если при $\varepsilon = 0$ для некоторого $\delta > 0$ любое решение $x \in S_\delta$ (или $x \in S_*$) удовлетворяет требованию (2).

Для определения же соответствующих *ляпуновских* свойств [3, гл. II, § 1] системы (1) нужно:

4) в пп. 1) и 2) заменить требование (2) требованием

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |x(t)| \leqslant \varepsilon, \tag{3}$$

а в п. 3) в дополнение к соответствующему верхнепредельному свойству потребовать наличие у системы (1) ляпуновской устойчивости.

Определение 2 (см. [4]). Все перечисленные в определении 1 ляпуновские, перроновские и верхнепредельные свойства системы (1) назовём *массивными*: при их описании сразу на все решения $x \in S$, где $S = S_\delta, S_*$ (допускается даже $S = S_* \setminus S_\delta$ [5]), накладывается определённое условие – требование (2), (3) или его отрицание. Каждому массивному свойству из определения 1 поставим в соответствие его *почти массивный* аналог, а именно: *почти устойчивость*, *почти полную* (*почти глобальную*) *неустойчивость* и *почти асимптотическую* (*почти глобальную*) *устойчивость*, в описании которых соответствующее условие накладывается уже не на все решения $x \in S$, а только на те, начальные значения которых не принадлежат некоторому множеству (назовём его *множеством вырождения*) нулевой меры Лебега и первой категории Бэра (представимому в виде счётного объединения нигде не плотных множеств).

Оказывается, свойства ляпуновской устойчивости и ляпуновской почти устойчивости в действительности неразличимы между собой, о чём и говорит

Теорема 1. *Если система (1) ляпуновски почти устойчива, то и ляпуновски устойчива.*

Если ляпуновскую асимптотическую (глобальную) устойчивость, означающую одновременное выполнение двух условий: ляпуновской устойчивости и верхнепредельной асимптотической (глобальной) устойчивости, ослабить до ляпуновской почти асимптотической (почти глобальной) устойчивости, то первого условия, а именно ляпуновской устойчивости, это ослабление не коснётся, как показывает

Теорема 2. *Если система (1) ляпуновски почти асимптотически или почти глобально устойчива, то и ляпуновски устойчива.*

Логическая иерархия, действующая между массивными свойствами, не только полностью распространяется на их почти массивные аналоги, но и, более того, справедлива

Теорема 3. *Если для каких-либо двух массивных свойств имеет место импликация, то она имеет место и для их почти массивных аналогов, а если какие-либо два массивных свойства несовместны, то несовместны и их почти массивные аналоги.*

Указанный в теореме 1 пример массивного свойства, неразличимого со своим почти массивным аналогом, оказывается уникальным в том смысле, который подразумевают

Теорема 4. *При $n = 2$ существует автономная линейная диагональная система (1), не обладающая ни ляпуновской, ни перроновской, ни верхнепредельной полной неустойчивостью, но почти глобально неустойчивая и ляпуновски, и перроновски, и верхнепредельно.*

Теорема 5. *При $n = 2$ существует автономная система (1), не устойчивая ни перроновски, ни верхнепредельно, но почти глобально устойчивая и перроновски, и верхнепредельно.*

Теорема 6. *При $n = 2$ существует автономная система (1), не обладающая ляпуновской асимптотической устойчивостью, но ляпуновски почти глобально устойчивая.*

Заметим, что теорема 6 распространяет на ляпуновские свойства утверждение теоремы 5 в максимально возможной степени общности – ровно в той, в какой оно не противоречит теореме 1. Множества вырождения почти массивных свойств в примерах систем из теорем 4–6 можно выбрать совпадающими с одной из координатных осей или полуосей. Примером, подтверждающим справедливость теоремы 4, служит гиперболическая нулевая особая точка автономной линейной системы (ляпуновски условно устойчивая [3, гл. IV, § 7]).

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856. 2. Сергеев И.Н. Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557. 3. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967. 4. Сергеев И.Н. Некоторые особенности перроновских и ляпуновских свойств устойчивости автономных систем // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 830–831. 5. Бондарев А.А. Существование вполне неустойчивой по Ляпунову дифференциальной системы, обладающей перроновской и верхнепредельной массивной частной устойчивостью // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 6. С. 858–859.

В. В. Малыгина (Пермь) “О некоторых признаках устойчивости функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа” (15 октября 2021 г.).

Рассмотрим линейное функционально-дифференциальное уравнение (с интегралом Римана–Стилтьеса)

$$\dot{x}(t)+\int\limits_s^t x(\tau)\,d_\tau r(t,\tau)=f(t),\quad r(t,s)=0,\quad t\geqslant s, \tag{1}$$

где функция $r(\,\cdot\,,\tau)\colon [s,+\infty)\to\mathbb{R}$ измерима по Лебегу, а функция $r(t,\cdot\,)\colon [s,t]\to\mathbb{R}$ нестрого возрастает и имеет ограниченную локально суммируемую вариацию $\rho(t)=\operatorname*{Var}\limits_{\tau\in[s,t]} r(t,\tau)$.

Частными случаями уравнения (1) являются обыкновенное дифференциальное уравнение, уравнение с запаздывающим аргументом (как сосредоточенным, так и распределённым) и интегро-дифференциальное уравнение. Уравнение (1) с заданным начальным условием однозначно разрешимо в классе локально абсолютно непрерывных функций, а его решение представимо в виде [1, с. 84]

$$x(t)=C(t,s)x(s)+\int\limits_s^t C(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,\quad t\geqslant s,$$

через функцию Коши $C(\,\cdot\,,\cdot\,)$. Она является центральным объектом при изучении линейных функционально-дифференциальных уравнений, так как в терминах её свойств легко описываются все виды устойчивости для уравнения (1). Приведём ряд утверждений об асимптотическом поведении решений этого уравнения с использованием оценок функции Коши.

Обозначим $\Delta=\{(t,s)\in\mathbb{R}^2\colon t\geqslant s\}$ и $h(t)=\inf\{\tau\colon r(t,\tau)\neq 0\}$.

Теорема 1. *Если выполнено неравенство*

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\int\limits_{h(t)}^t \rho(\tau)\,d\tau<3/2, \tag{2}$$

то для некоторых положительных K, γ функция Коши уравнения (1) удовлетворяет оценке

$$|C(t,s)|\leqslant Ke^{-\gamma\int_s^t\rho(\tau)\,d\tau},\quad (t,s)\in\Delta.$$

Следствие 1. *Если выполнены условия теоремы 1 и интеграл $\int_s^{+\infty}\rho(\tau)\,d\tau$ расходится, то уравнение (1) асимптотически устойчиво.*

Теорема 2. *Если выполнено неравенство*

$$\sup_{t\geqslant 0}\int\limits_{h(t)}^{t}\rho(\tau)\,d\tau\leqslant 3/2, \tag{3}$$

то для некоторого $K>0$ *функция Коши уравнения (1) удовлетворяет оценке*

$$|C(t,s)|\leqslant K,\quad (t,s)\in\Delta.$$

Следствие 2. *В условиях теоремы 2 уравнение (1) равномерно устойчиво.*

Теоремы 1 и 2 обобщают и уточняют известный признак устойчивости (“3/2-теорему”) А.Д. Мышкиса [2]. Постоянная 3/2 в теоремах 1 и 2 является точной [2, 3]: в оценке (2) нельзя, без потери свойства асимптотической устойчивости, заменить строгое неравенство нестрогим, а в оценке (3) увеличение 3/2 на сколь угодно малую величину или даже замена точной верхней грани верхним пределом приводит к появлению у уравнения (1) неограниченных решений.

Литература. 1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М., 1991. 2. Мышкис А.Д. О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // Мат. сб. 1951. № 3. С. 641–658. 3. Малыгина В.В. Некоторые признаки устойчивости уравнений с запаздывающим аргументом // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 10. С. 1716–1723.

В. В. Быков, **А. В. Равчеев** (Москва) “Описание линейного эффекта Перрона при сколь угодно быстро убывающих параметрических возмущениях системы с неограниченными коэффициентами” (22 октября 2021 г.).

Для заданного $n\in\mathbb{N}$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0,+\infty), \tag{1}$$

с непрерывными коэффициентами. Обозначим через $\lambda_1(A)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n(A)$ показатели Ляпунова системы (1), а через $\Lambda(A)=(\lambda_1(A),\ldots,\lambda_n(A))$ – их спектр. Так как мы не предполагаем коэффициенты рассматриваемых систем ограниченными на полуоси, их показатели Ляпунова могут принимать, вообще говоря, несобственные значения, т.е. являются точками расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}\equiv\mathbb{R}\bigsqcup\{-\infty,+\infty\}$, которая наделяется стандартным порядком и порядковой топологией.

Обозначив через Φ множество всех непрерывных функций $\varphi:\mathbb{R}_+\to(0,+\infty)$, для системы $A\in\widetilde{\mathcal{M}}_n$, метрического пространства M и подмножества $\Psi\subset\Phi$ рассмотрим класс $\mathcal{Q}_n^{\Psi}[A](M)$ непрерывных матриц-функций $Q\colon\mathbb{R}_+\times M\to\mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющих для любого $\psi\in\Psi$ условию

$$\lim_{t\to+\infty}(\psi(t))^{-1}\sup_{\mu\in M}\|Q(t,\mu)\|=0$$

и таких, что показатели Ляпунова $\lambda_1(A+Q,\mu)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n(A+Q,\mu)$ системы $A+Q$ (зависящие от параметра $\mu\in M$) не меньше соответствующих показателей Ляпунова системы A, т.е.

$$\lambda_k(A+Q,\mu)\geqslant\lambda_k(A),\quad k=\overline{1,n},\quad \mu\in M.$$

Отметим, что для любой системы $A\in\widetilde{\mathcal{M}}_n$ класс $\mathcal{Q}_n^{\Psi}[A](M)$ не пуст, поскольку ему заведомо принадлежит тождественно нулевая матрица Q.

Ставится задача для каждых $n\in\mathbb{N}$, метрического пространства M и множества $\Psi\subset\Phi$ дать полное дескриптивно-множественное описание класса

$$\Pi\mathcal{Q}_n^{\Psi}(M)=\{(\Lambda(A),\Lambda(A+Q,\cdot)):A\in\widetilde{\mathcal{M}}_n,\ Q\in\mathcal{Q}_n^{\Psi}[A](M)\},$$

т.е. описать все пары, составленные из спектров систем A и $A+Q$, где при каждом фиксированном $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n$ матрица-функция Q пробегает класс $\mathcal{Q}_n^\Psi[A](M)$. Эту задачу можно рассматривать как обобщение примера Перрона [1, § 1.4] на случай неограниченных систем.

Будем говорить [2, с. 224], что функция $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $(^*, G_\delta)$, если для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}([r, +\infty])$ замкнутого луча $[r, +\infty]$ является G_δ-множеством метрического пространства M. В частности, $(^*, G_\delta)$ – подкласс второго класса Бэра [2, с. 248].

Решение поставленной задачи для счётного множества Ψ содержит следующая

Теорема. *Для каждых метрического пространства M, числа $n \geqslant 2$ и счётного множества $\Psi \subset \Phi$ пара (l, f), где $l = (l_1, \ldots, l_n) \in (\overline{\mathbb{R}})^n$ и $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon M \to (\overline{\mathbb{R}})^n$, принадлежит классу $\Pi\mathcal{Q}_n^\Psi(M)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) $l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_n$;

2) $f_1(\mu) \leqslant \ldots \leqslant f_n(\mu)$ для любого $\mu \in M$;

3) $f_i(\mu) \geqslant l_i$ для всех $\mu \in M$ и $i = \overline{1, n}$;

4) для каждого $i = \overline{1, n}$ функция $f_i(\cdot)\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $(^*, G_\delta)$.

Замечание. Эта теорема представляет собой аналог теоремы, установленной в работе [3] для класса систем с ограниченными коэффициентами.

Приведённая теорема показывает, что все теоретически возможные пары спектров исходной и параметрически возмущённой систем (при условии, что каждый показатель Ляпунова возмущённой системы не меньше соответствующего показателя Ляпунова исходной системы) можно получить в классе сколь угодно быстро убывающих возмущений. Эта свойство является специфичным именно для систем с неограниченными коэффициентами, поскольку показатели Ляпунова систем с ограниченными коэффициентами инвариантны относительно возмущений, убывающих быстрее любой экспоненты [1, § 8.1].

Литература. 1. Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск, 2006. 2. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.; Л., 1937. 3. Барабанов Е.А., Быков В.В. Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, экспоненциально убывающих к нулю на бесконечности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 4. С. 31–43.

Б. С. Калитин (Минск) “О проблеме Немыцкого” (29 октября 2021 г.).

Проблема Немыцкого [1] тесно связана с нахождением условий, при которых в динамической системе $(X, \mathbb{R}, \pi)$ существуют точки покоя эллиптического типа. Решение этой проблемы было получено Н.Н. Ладисом [2], обнаружившим, что в связном локально-компактном, но не компактном метрическом пространстве X не существует точек покоя эллиптического типа. В обобщённой формулировке, где вместо точки покоя изучается произвольное компактное инвариантое подмножество $M \subset X$, а вместо эллиптического типа рассматривается слабо эллиптический тип, проблема решена в [3] для локально компактной динамической системы (откуда следует и результат [2]).

Пусть $(X, \mathbb{R}, \pi)$ – динамическая система на метрическом пространстве X с метрикой d и фазовым отображением $\pi : X \times \mathbb{R} \to X$, удовлетворяющим трём аксиомам динамической системы [4, с. 14] с обозначениями: $\pi(x, t) \equiv xt$, $YT \equiv \{yt : y \in Y,\ t \in \mathbb{R}\}$ при $Y \subset X$, $T \subset \mathbb{R}$ и $B(M, \varepsilon) \equiv \{x \in X : d(M, x) < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, $L^+(x)$ $(L^-(x))$ – ω-предельное (α-предельное) множество для точки $x \in X$, а

$$A^+(M) \equiv \{x \in X : \lim_{t \to +\infty} d(M, xt) = 0\}, \quad A^+_\omega(M) \equiv \{x \in X : \varliminf_{t \to +\infty} d(M, xt) = 0\}$$

– область притяжения и, соответственно, область слабого притяжения для M.

Определение 1 [4, с. 32]. Пусть M – замкнутое инвариантное подмножество метрического пространства X. Тогда точка $x \in X$ называется:

1) *слабо эллиптической* для M, если $L^+(x) \bigcap M \neq \varnothing$ и $L^-(x) \bigcap M \neq \varnothing$;

2) *эллиптической* для M, если $\varnothing \neq L^+(x) \subset M$ и $\varnothing \neq L^-(x) \subset M$.

Обозначив через $E(M)$ (соответственно $E_\omega(M)$) множество всех эллиптических (слабо эллиптических) для M точек $x \in X$, по определению имеем $M \subset E(M) \subset E_\omega(M)$. Будем говорить, что M – множество *эллиптического* (*слабо эллиптического*) типа, если некоторая его окрестность целиком содержится в $E(M)$ (соответственно в $E_\omega(M)$).

Компактное подмножество $M \subset X$ называется:

а) *устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что $B(M,\delta)\mathbb{R}^+ \subset B(M,\varepsilon)$;

б) *притягивающим*, если для некоторого $\delta > 0$ при любом $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\tau > 0$, что $B(M,\delta)[\tau,+\infty) \subset B(M,\varepsilon)$;

в) *асимптотически устойчивым*, если оно и устойчивое, и притягивающее.

Определение 2 [5, 6]. Динамическая система $(X,\mathbb{R},\pi)$ называется *асимптотически компактной* на подмножестве $W \subset X$, если для любой пары последовательностей $t_1,t_2,\ldots > 0$ и $x_1,x_2,\ldots \in W$, удовлетворяющей условиям: $t_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$ и $x_n[0,t_n] \subset W$, последовательность (x_nt_n) относительно компактна.

Приведём обобщение теоремы о структуре окрестности притягивающего множества, сформулированной в [4, с. 138] для случая локально компактной динамической системы.

Теорема 1. *Если M – связное компактное притягивающее подмножество метрического пространства X, а динамическая система $(X,\mathbb{R},\pi)$ асимптотически компактна в замыкании $\overline{A^+(M)}$ его области притяжения, то множество $E_\omega(M)$ – наименьшее компактное инвариантное асимптотически устойчивое множество, содержащее M, причём*

$$A^+(E_\omega(M)) = A^+(M).$$

Решение одного обобщения проблемы Немыцкого [1; 2; 4, с. 151] содержит

Теорема 2. *Если M – связное компактное притягивающее подмножество некомпактного метрического пространства X, а динамическая система $(X,\mathbb{R},\pi)$ асимптотически компактна в замыкании $\overline{A^+(M)}$ его области притяжения, то M не является множеством слабо эллиптического типа.*

Отметим, что в идейном плане решения проблемы Немыцкого в работах [2, 3] и в теореме 2 близки друг к другу по представлению результатов.

Литература. 1. Немыцкий В.В. Топологическая классификация особых точек многомерных систем // Тез. кратких науч. сообщ. “Международный конгресс математиков”. Секция 6. М., 1966. С. 40. 2. Ладис Н.Н. Отсутствие двусторонних точек притяжения // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 6. С. 1157. 3. Калитин Б.С. О структуре окрестности слабо притягивающих компактных инвариантных множеств // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 4. С. 565–574. 4. Калитин Б.С. Качественная теория устойчивости движения динамических систем. Минск, 2002. 5. Ladyzhenskaya O. Attractors for Semigroups and Evolution Equations. Cambridge; New York, 1991. 6. Arredondo J.H., Seibert P. On a characterization of asymptotic stability // Aport. Mat. Ser. Comunicationes. 2001. V. 29. P. 11–16.

В. В. Амелькин (Минск), **В. Ю. Тыщенко** (Гродно) “Продолжимость решений неавтономных дифференциальных систем” (12 ноября 2021 г.).

Рассмотрим неавтономную систему в дифференциалах

$$dx = F(t,x)dt, \quad x = (x_1,\ldots,x_n)^{\text{т}}, \quad t = (t_1,\ldots,t_m)^{\text{т}}, \tag{1}$$

где ранг матрицы (точнее, матричной функции) $F = (F_{ij}) \in C^2(\mathbb{R}^{m+n},\mathbb{R}^{n\times m})$ почти всюду на $\mathbb{R}^{m+n}$ равен $r \in \{1,\ldots,\min(m,n)\}$.

Назовём *локальным решением* $(\Omega,x;t_0,x_0)$ системы (1) функцию $x \in C^3(\Omega,\mathbb{R}^n)$, определённую в некоторой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ и удовлетворяющую условиям $x(t_0) = x_0$ и $dx(t) \equiv F(t,x(t))dt$, $t \in \Omega$. В дальнейшем будем предполагать, что система (1) *вполне разрешима*, т.е. для любой точки $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ существует локальное решение $(\Omega,x;t_0,x_0)$, причём любое такое решение *единственно* в смысле [1, с. 21].

График локального решения в пространстве $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ назовём *локальной интегральной поверхностью*, а его проекцию на пространство $\mathbb{R}^n$ – *локальной орбитой* $\operatorname{orb}(\Omega_0,x;t_0,x_0)$. Будем говорить, что решения $(\Omega_1,x^1;t_0^1,x_0^1)$ и $(\Omega_2,x^2;t_0^2,x_0^2)$, а также их орбиты $\operatorname{orb}(\Omega_1,x^1;t_0^1,x_0^1)$ и

$\operatorname{orb}(\Omega_2, x^2; t_0^2, x_0^2)$ являются *продолжениями друг друга через область* $\Omega_0 \subset \Omega_1 \bigcap \Omega_2 (\neq \varnothing)$, если $x^1(t) = x^2(t)$, $t \in \Omega_0$. При продолжении решений через некоторую область могут появляться многозначные функции (что невозможно в случае $m = 1$): например, функция $\operatorname{arctg}(x_2/x_1)$ является бесконечнозначной на области $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$.

Назовём решения системы (1) *эквивалентными в точке* t_0, если они продолжают друг друга через некоторую окрестность этой точки. *Ростком* $\mathfrak{g}(t_0, x_0)$ системы (1) в точке $t_0 \in \Omega$ назовём класс эквивалентности решений этой системы по отношению к введённому понятию эквивалентности, а *непродолжаемым* решением $(\Theta, x; t_0, x_0)$, порождённым ростком $\mathfrak{g}(t_0, x_0)$, назовём множество всех ростков, которые можно получить в результате продолжений ростка $\mathfrak{g}(t_0, x_0)$ через всевозможные области. График в пространстве $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, соответствующий непродолжаемому решению, – это *непродолжаемая интегральная поверхность*, а её проекция на пространство $\mathbb{R}^n$ – *орбита* $\operatorname{orb}(x_0)$. Понятие непродолжаемого решения можно также вводить [1, с. 27; 2; 3] при помощи поглощения областей определения решений.

Для системы (1) имеет место представление

$$F(t, x) \equiv f(t, x)\nu(t, x),$$

где на всём $\mathbb{R}^{m+n}$ ранг матрицы $f \in C^2(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R}^{n\times r})$ не превосходит r, а ранг матрицы $\nu \in C^2(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R}^{r\times m})$ равен r. Заданной невырожденной всюду на $\mathbb{R}^{m+n}$ матрице $\mu \in C^2(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R}^{r\times r})$ и системе (1) поставим в соответствие неавтономную обыкновенную дифференциальную систему (при $r = 1$) или вполне разрешимую неавтономную систему в дифференциалах (при $r > 1$)

$$dx = f(\xi, x)\mu(\xi, x)d\xi, \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_r)^{\text{т}} \tag{2}$$

и рассмотрим задачу: найти условия существования такой матрицы μ, что у системы (2) все решения определены на пространстве $\mathbb{R}^r$.

Системе (2) поставим в соответствие *вспомогательную* автономную систему в дифференциалах

$$d\begin{pmatrix}\xi\\ x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r\\ f(\xi, x)\mu(\xi, x)\end{pmatrix} d\zeta, \quad \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_r)^{\text{т}}, \tag{3}$$

где I_r – единичная матрица порядка r. Система (3) получена из системы (2) с помощью замены $\xi = \zeta + C$, где $C = (C_1, \ldots, C_r)^{\text{т}}$ – вектор, состоящий из произвольных постоянных, на основании чего приходим к выводу, что система (3) также является вполне разрешимой.

Невырожденную матрицу μ назовём *допустимой*, если автономная система уравнений в дифференциалах (2) является вполне разрешимой. Будем говорить, что вполне разрешимая неавтономная система уравнений в дифференциалах (1) *приводима*, если существует допустимая матрица μ, приводящая систему (1) к автономной системе (3), все решения которой определены на пространстве $\mathbb{R}^r$.

Теорема 1. *При $r = 1$ любая вполне разрешимая система (1) приводима.*

Следствие. *Любая обыкновенная дифференциальная система (1) приводима.*

Вполне разрешимую автономную систему в дифференциалах

$$dy = G(y)\, d\theta$$

с матрицей $G \in C^2(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^{p\times r})$ ранга r почти везде на $\mathbb{R}^p$ при $p > r > 1$ назовём *выпрямляемой*, если существует 2-диффеоморфизм $\psi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, переводящий каждую орбиту этой системы в одну из r-мерных плоскостей семейства $y_k = C_k$, $k = \overline{1, p - r}$.

Теорема 2. *Вполне разрешимая система (1) приводима тогда и только тогда, когда вспомогательная автономная вполне разрешимая система*

$$d\begin{pmatrix}\xi\\ x\\ \zeta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r\\ f(\xi, x)\mu(\xi, x)\\ I_r\end{pmatrix} d\tau, \quad \tau = \begin{pmatrix}\tau_1\\ \vdots\\ \tau_r\end{pmatrix}$$

выпрямляема.

Литература. 1. Гайшун И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. М., 2004. 2. Мышкис А.Д. О продолжении решений уравнений Пфаффа // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 8. С. 1331–1337. 3. Сергеев И.Н. Продолжаемость решений дифференциальных уравнений до непродолжаемого // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 6. С. 847–848.

И. В. Асташова, Д. А. Лашин, А. В. Филиновский (Москва) "О свойствах управляющей функции в экстремальной задаче управления с точечным наблюдением для параболического уравнения" (19 ноября 2021 г.).

Рассмотрим смешанную задачу для параболического уравнения

$$u_t = (a(x,t)u_x)_x + b(x,t)u_x + d(x,t)u, \quad (x,t) \in Q_T \equiv (0,1) \times (0,T), \tag{1}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u_x(1,t) = \psi(t), \quad t \in (0,T), \quad u(x,0) = \xi(x), \quad x \in (0,1), \tag{2}$$

где a, b, d – достаточно гладкие в замыкании $\overline{Q}_T$ функции, $0 < a_0 \leqslant a(x,t) \leqslant a_1 < +\infty$, $\varphi, \psi \in W_2^1(0,T)$, $\xi \in L_2(0,1)$. Для заданной точки $x_0 \in (0,1]$ и фиксированных ξ, ψ изучаем задачу управления с точечным наблюдением (возникающую в модели управления климатом в промышленных теплицах [1, 2]): управляя температурой $\varphi(t)$, сделать температуру $u(x_0,t)$ близкой к заданной функции $z(t)$ на всём интервале времени $(0,T)$.

Постановки экстремальных задач для параболических уравнений можно найти в [3, 4], причём наиболее изучены задачи с финальным или распределённым наблюдением. В докладе, в развитие работ [1, 2, 5–8], исследуется более общее уравнение с переменным коэффициентом диффузии a, коэффициентом конвекции b и потенциалом d.

Обозначим через $V_2^{1,0}(Q_T)$ [9, с. 15] банахово пространство функций $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$, для которых норма

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \equiv \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(\,\cdot\,,t)\|_{L_2(0,1)} + \|u_x\|_{L_2(Q_T)}$$

конечна и отображение $t \mapsto u(\,\cdot\,,t)$ из $[0,T]$ в $L_2(0,1)$ непрерывно, а через $\widetilde{W}_2^1(Q_T)$ – множество тех функций $\eta \in W_2^1(Q_T)$, для которых $\eta(\,\cdot\,,T) = \eta(0,\cdot\,) = 0$.

Определение. *Слабым* решением задачи (1), (2) будем называть функцию $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(0,\cdot\,) = \varphi$ и при всех $\eta \in \widetilde{W}_2^1(Q_T)$ – интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} (au_x\eta_x - bu_x\eta - du\eta - u\eta_t)\,dx\,dt = \int\limits_0^1 \xi(x)\eta(x,0)\,dx + \int\limits_0^T a(1,t)\psi(t)\eta(1,t)\,dt.$$

Теорема 1 [10, 11]. *Задача (1), (2) имеет единственное слабое решение $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, причём для него справедливо неравенство*

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leqslant C_1(\|\varphi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\psi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\xi\|_{L_2(0,1)})$$

с некоторой постоянной C_1, не зависящей от φ, ψ, ξ.

Теорема 2 (принцип максимума). *Если $u = u_j$, $j = 1,2$, – решения задачи (1), (2) при $\varphi = \varphi_j$, $\psi = \psi_j$ и $\xi = \xi_j$, причём $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$, $\psi_1 \leqslant \psi_2$ и $\xi_1 \leqslant \xi_2$, то $u_1 \leqslant u_2$.*

С использованием теоремы 2 получена оценка сверху нормы решения задачи (1).

Теорема 3. *Если $\varphi, \psi, \xi, a_t, b_x - d \geqslant 0 \geqslant b(1,\cdot\,)$ и $b(x,t) \geqslant 0$ при $(x,t) \in [0,x_0] \times [0,T]$, то для решения задачи (1), (2) имеет место неравенство*

$$\|u(x_0,\cdot\,)\|_{L_1(0,T)} \leqslant \|\varphi\|_{L_1(0,T)} + C_2x_0(\|\psi\|_{L_1(0,T)} + \|\xi\|_{L_1(0,1)})$$

с некоторой постоянной C_2, не зависящей от φ, ψ, ξ.

Следствие. *В условиях теоремы 3 при $\psi = \xi = 0$ для решения задачи (1), (2) выполняется неравенство $\|u(x_0,\cdot\,)\|_{L_1(0,T)} \leqslant \|\varphi\|_{L_1(0,T)}$.*

Обозначим через $\Phi \subset W_2^1(0,T)$ множество управляющих функций φ, которое будем далее считать непустым, замкнутым, выпуклым и ограниченным, а через $Z \subset L_2(0,T)$ – множество целевых функций z. Рассмотрим квадратичный функционал качества

$$J[z,\varphi] = \int\limits_0^T (u_\varphi(x_0,t) - z(t))^2\,dt, \quad x_0 \in (0,1), \quad z \in Z, \quad \varphi \in \Phi,$$

где $u_\varphi \in V_2^{1,0}(Q_T)$ – решение задачи (1), (2) с данной управляющей функцией φ. Фиксировав функцию z, рассмотрим задачу минимизации функционала J: $m[z,\Phi] \equiv \inf\limits_{\varphi\in\Phi} J[z,\varphi]$.

Теорема 4 [8, 10, 11]. *Для любой $z \in L_2(0,T)$ существует единственная функция $\varphi_0 \in \Phi$, для которой $m[z,\Phi] = J[z,\varphi_0]$.*

Из теоремы 3 следует оценка снизу нормы управляющей функции.

Теорема 5. *В условиях теоремы 3 имеет место неравенство*

$$\|\varphi\|_{L_1(0,T)} \geqslant \max\{0, \|z\|_{L_1(0,T)} - \sqrt{TJ[z,\varphi]} - C_2x_0(\|\psi\|_{L_1(0,T)} + \|\xi\|_{L_1(0,1)})\},$$

где C_2 – постоянная из теоремы 3.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

Литература. 1. Astashova I.V., Filinovskiy A.V., Lashin D.A. On maintaining optimal temperatures in greenhouses // WSEAS Trans. on Circuits and Systems. 2016. V. 15. № 23. P. 198–204. 2. Astashova I., Filinovskiy A., Lashin D. On optimal temperature control in hothouses // Proc. Int. Conf. on Numer. Anal. and Appl. Math. 2016. AIP Conf. Proc. 2017. P. 4–8. 3. Troltzsch F. Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications. Graduate Studies in Mathematics. V. 112. Providence, 2010. 4. Lurie K.A. Applied Optimal Control Theory of Distributed Systems. Berlin, 2013. 5. Асташова И.В., Филиновский А.В. Об управляемости в параболической задаче с распределённым по времени функционалом // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 53. № 6. С. 851–853. 6. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. On the dense controllability for the parabolic problem with time-distributed functional // Tatra Mt. Math. Publ. 2018. V. 71. P. 9–25. 7. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. On properties of minimizers of a control problem with time-distributed functional related to parabolic equations // Opuscula Math. 2019. V. 39. № 5. P. 595–609. 8. Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. Об управлении с точечным наблюдением для параболической задачи с конвекцией // Тр. Моск. мат. о-ва. 2019. Т. 80. № 2. С. 258–274. 9. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. 10. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. Controllability and exact controllability in a problem of heat transfer with convection and time distributed functional // J. Math. Sci. 2020. V. 244. № 2. P. 148–157. 11. Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. О задаче управления с точечным наблюдением для параболического уравнения при наличии конвекции и обедняющего потенциала // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 828–829.

Т. А. Корчёмкина (Москва) “О качественном поведении решений уравнений третьего порядка с положительным потенциалом и степенной нелинейностью общего вида” (26 ноября 2021 г.).

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''' + p_0|y|^{k_0}|y'|^{k_1}|y''|^{k_2}\,\mathrm{sgn}\,(yy'y'') = 0, \quad p_0, k_0, k_1, k_2 > 0. \tag{1}$$

В случае $1 \neq k_0 > 0 = k_1 = k_2$ асимптотическое поведение решений уравнения (1) изучалось в работах [1, гл. 5–7] и [2]. Свойства решений уравнений высокого порядка, нелинейных относительно производных, исследовались в работах [3, 4], а нелинейных относительно y – в монографии [5, гл. 4]. В работе [6] рассматривался случай $p_0 < 0$.

Поведение решений уравнения (1) с положительными начальными данными вблизи правой границы области определения решения описывает

Теорема. *Если $y(x)$ – максимально продолженное вправо решение уравнения (1), удовлетворяющее в некоторой точке x_0 условиям $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0) > 0$, то:*

1) если $0 < k_2 < 1$, то $y(x), y'(x) \to \mathrm{const}$, $y''(x) \to 0$ при $x \to x^* - 0$ для некоторого $x^* < +\infty$;

2) если $1 < k_2 < 2$, то $y(x) \to +\infty$, $y'(x) \to \mathrm{const}$, $y''(x) \to 0$ при $x \to +\infty$;

3) если $2 < k_2 < 2 + k_0$, то $y(x) \to +\infty$, $y''(x) \to 0$ и $y'(x) \to \mathrm{const}$ или $y'(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$;

4) если $k_2 > 2 + k_0$, то $y(x), y'(x) \to +\infty$, $y''(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-31-90168).

Литература. 1. Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / Под ред. И.В. Асташовой. М., 2012. С. 22–288. 2. Astashova I.V. On asymptotic classification of solutions to nonlinear regular and singular third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity // Differential and Difference Equations with Applications. Proceedings in Mathematics & Statistics. Springer, 2016. V. 164. P. 191–204. 3. Евтухов В.М. Об одном классе монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения n-го порядка типа Эмдена–Фаулера // Сообщ. АН Грузии. 1992. Т. 145. № 2. С. 269–273. 4. Евтухов В.М., Клопот А.М. Асимптотика некоторых классов решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями // Укр. мат. журн. 2013. Т. 65. № 3. С. 354–380. 5. Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1990. 6. Korchemkina T. On the behavior of solutions with positive initial data to third order differential equations with general power-law // Intern. Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations. QUALITDE–2019, December 7–9. Tbilisi, Georgia, 2019. P. 112–117.

О. Д. Прокопенко (Москва) “О некоторых свойствах решений дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера с неограниченным потенциалом” (26 ноября 2021 г.).

Рассматриваются решения $y \in C^2(0, +\infty)$ дифференциального уравнения типа Эмдена–Фаулера

$$y'' = x^k |y|^n |y'|^m \operatorname{sgn}(yy'), \quad x > 0, \quad k \in \mathbb{R}, \quad n, m > 0. \tag{1}$$

Для уравнения

$$y'' = p(x, y, y')|y|^n |y'|^m \operatorname{sgn}(yy'), \quad n, m > 0, \tag{2}$$

где $p = p(x, u, v) > 0$ непрерывна по x и липшицева по u, v, в [1] изучен вопрос о локальной единственности решения задачи Коши. Для уравнения (2) с ограниченной и отделённой от нуля функцией p в [2] приведены результаты о качественном поведении решений в зависимости от показателей нелинейности n, m и в [3] найдена асимптотика решений, неограниченных вблизи границ их области определения.

С использованием результатов [1] и методов [4, 5] доказана

Теорема. *Если $n + m - 1 > 0$, то при $k + n + 1 < 0$ все положительные возрастающие решения уравнения (1) представимы в виде*

$$y(x) = Cx^\alpha (1 + o(1)) \quad \text{при} \quad x \to +\infty, \quad \alpha > 1,$$

а при $k - m + 2 > 0$ все отрицательные решения уравнения (1), стремящиеся к $-\infty$ при $x \to +0$, представимы в виде

$$y(x) = -Cx^\alpha (1 + o(1)) \quad \text{при} \quad x \to +0, \quad \alpha < 0,$$

где обозначено

$$\alpha = -\frac{k - m + 2}{m + n - 1}, \quad C = (|\alpha|^{1-m}|\alpha - 1|)^{1/(m+n-1)}.$$

Замечание. Теорема дополняет результаты работы [6], в которой для уравнения (1) в частном случае доказано существование положительных неограниченно возрастающих на бесконечности решений с заданной асимптотикой.

Литература. 1. Асташова И.В. Единственность решений уравнений второго порядка типа Эмдена–Фаулера // Проблемы мат. анализа. 2021. Т. 109. С. 11–16. 2. Korchemkina T. On the behavior of solutions to second–order differential equation with general power–law nonlinearity // Mem. on Differ. Equat. and Math. Phys. 2018. V. 73. P. 101–111. 3. Корчемкина Т.А. Об асимптотическом поведении неограниченных решений дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями общего вида // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2019. Вып. 32. С. 239–256. 4. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., 1954. 5. Асташова И.В. Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений // Изв. РАН. 2008. Т. 72. № 6. С. 103–124. 6. Евтухов В.М. Об асимптотике монотонных решений нелинейных дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 6. С. 1076–1078.

И. В. Асташова (Москва) “Замечание о непрерывной зависимости решений уравнения Риккати от правой части” (3 декабря 2021 г.).

Для числа $T > 0$, функции $K \in C[0,T]$ и произвольного начального значения $u_0 \in \mathbb{R}$ рассмотрим задачу Коши для уравнения Риккати

$$\dot{u} + u^2 + K(t) = 0, \quad u(0) = u_0 \tag{1}$$

и задачу Коши с тем же начальным условием для возмущённого уравнения

$$\dot{v} + v^2 + K(t) + Q(t) = 0, \quad v(0) = u_0, \quad Q \in C[0,T]. \tag{2}$$

Зададимся вопросом: верно ли, что если решение задачи (1) существует на отрезке $[0,T]$, то на этом же отрезке существует и решение задачи (2) при малом возмущении Q? Вопрос сформулирован недостаточно строго и, оказывается, допускает противоположные ответы при разных трактовках.

С одной стороны, имеет место следующий результат, уточняющий для рассматриваемого уравнения классическую теорему о непрерывной зависимости решения от правой части и начальных условий (см., например, теорему 6 из [1, § 7]).

Теорема 1. *Если решение $u(\cdot)$ задачи (1) определено на отрезке $[0,T]$, то для любой функции $Q \in C[0,T]$, удовлетворяющей условию*

$$|Q(t)| < \varepsilon = \left(4\int_0^T \exp\left(-2\int_0^t u(\tau)\,d\tau\right)dt \int_0^T \exp\left(2\int_0^t u(\tau)\,d\tau\right)dt\right)^{-1}, \quad t \in [0,T],$$

решение задачи (2) также определено на всём отрезке $[0,T]$.

С другой стороны, если в формулировке теоремы 1 значение $\varepsilon > 0$ заменить каким-либо другим значением, единым для всех решений u, то получившееся утверждение будет неверным.

Теорема 2. *При $T = \pi/2$ и $K(t) \equiv 1$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое u_0, что решение задачи (1) определено на отрезке $[0,T]$, а решение задачи (2) при $Q(t) \equiv \varepsilon/2 < \varepsilon$ определено не на всём отрезке $[0,T]$.*

Отметим также, что утверждение теоремы 1 станет неверным, если в нём отрезок $[0,T]$ заменить полуинтервалом $[0,T)$.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

Литература. 1. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М., 2007.