СОДЕРЖАНИЕ

Том 58, номер 2, 2022

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пример дифференциальной системы с перроновской и верхнепредельной полной неустойчивостью, но массивной частной устойчивостью
А. А. Бондарев 147

О свойствах решений уравнений обобщённой иерархии уравнения P_{34}
В. И. Громак 153

Условия существования циклов у одной системы дифференциальных уравнений
С. С. Мамонов, И. В. Ионова, А. О. Харламова 164

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Классическое решение первой смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом
В. И. Корзюк, Я. В. Рудько 174

Метод редукции и новые точные решения многомерного уравнения нелинейной теплопроводности
А. А. Косов, Э. И. Семенов 185

Конвективный теплообмен между движущейся твёрдой сферической частицей и вязким газом
Н. В. Малай, Е. Р. Щукин, Д. Н. Ефимцева 192

Вариант ряда Фурье в сферической области и его применение к моделированию испарения капли воды
Х. Халласи, Х. Фуджита-Яшима 204

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

О корректной разрешимости интегро-дифференциальных уравнений в пространствах вектор-функций, голоморфных в угле
В. В. Власов, Н. А. Раутиан 223

Об асимптотике невещественного спектра интегро-дифференциального уравнения Гуртина–Пипкина с ядрами релаксации, представимыми в виде интеграла Стилтьеса
А. В. Давыдов 238

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

Управляемость для задач со смешанными ограничениями
А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский 252

Оценка времени поимки и построение стратегии преследователя в нелинейной дифференциальной игре двух лиц
К. А. Щелчков 260

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Двумерные аналоги классической волны Бейтмена – решения задач с движущимися источниками
А. С. Благовещенский, Е. А. Злобина, А. П. Киселев 270

Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике
Е. В. Панкратова 275

ХРОНИКА

О семинаре по проблемам нелинейной динамики и управления при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова 280

EDN: CISILP
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 147–152

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51

ПРИМЕР ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ПЕРРОНОВСКОЙ И ВЕРХНЕПРЕДЕЛЬНОЙ ПОЛНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТЬЮ, НО МАССИВНОЙ ЧАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТЬЮ

© 2022 г. А. А. Бондарев

Конструктивно доказывается, что из полной перроновской и верхнепредельной (в отличие от ляпуновской) неустойчивости двумерной дифференциальной системы, вообще говоря, не следует её глобальная неустойчивость. Более того, построенный в работе пример вполне неустойчивой гладкой нелинейной системы обладает ещё и нулевым первым приближением (вдоль нулевого решения) и не просто частной, а даже массивной частной устойчивостью.

DOI: 10.31857/S0374064122020017

Настоящая работа посвящена изучению недавно введённого понятия качественной теории дифференциальных уравнений – устойчивости по Перрону и его модификациям [1]. Она продолжает работы [2, 3] автора, в которых построены примеры дифференциальных систем, показывающие некоторые возможные взаимоотношения и связи между различными типами устойчивости по Перрону с одной стороны, а с другой – реализуемость таких взаимоотношений на системах с теми или иными специальными свойствами.

В работе [4] построен пример вполне неустойчивой по Ляпунову и Перрону системы дифференциальных уравнений, имеющей ненулевое решение, стремящееся к нулю на бесконечности. В [4] построенная система имела не ограниченное на временно́й полуоси $\mathbb{R}_+$ первое приближение вдоль нулевого решения. В [2] построен пример системы с такими же, как и в [4], асимптотическими свойствами её решений, но имеющей ограниченное на $\mathbb{R}_+$ первое приближение в нуле. Этот результат усилен в [3]: такая система может иметь тождественно нулевое первое приближение вдоль нулевого решения.

Усиление перечисленных результатов, полученное в данной работе, состоит в построении системы, обладающей теми же перроновскими и верхнепредельными свойствами: во-первых, полной неустойчивостью (а значит, кстати, и ляпуновской полной неустойчивостью, из которой вытекает и ляпуновская же глобальная неустойчивость), а во-вторых, частной устойчивостью (которой обладали также примеры, предложенные ранее) и даже массивной частной устойчивостью [5] (которой указанные примеры не обладали).

Для числа $n \in \mathbb{N}$ и области G евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ (с нормой $|\cdot|$), содержащей начало координат, рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,\infty), \quad x \in G, \tag{1}$$

с правой частью $f : \mathbb{R}_+ \times G \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условиям $f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \quad f(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+$, а значит, имеющей нулевое решение. Обозначим через $\mathcal{S}_*(f)$ множество всех непродолжаемых ненулевых решений системы (1), а через $\mathcal{S}_\delta(f) \subset \mathcal{S}_*(f)$ – подмножество, состоящее из тех её решений x, которые удовлетворяют начальному условию $|x(0)| < \delta$.

Определение (см., например, [1]). Скажем, что для системы (1) (точнее, для её *нулевого* решения, о чём для краткости не будет далее упоминаться) имеет место *перроновская* или, соответственно, *верхнепредельная*:

1) *устойчивость*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ удовлетворяет требованию

$$\varliminf_{t\to+\infty} |x(t)| < \varepsilon \quad \text{или, соответственно,} \quad \varlimsup_{t\to+\infty} |x(t)| < \varepsilon; \tag{2}$$

2) *неустойчивость*, если устойчивость не имеет места, а именно, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ некоторое решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ не удовлетворяет требованию (2);

3) *полная неустойчивость*, если для некоторых $\varepsilon, \delta > 0$ ни одно решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ не удовлетворяет требованию (2);

4) *глобальная неустойчивость*, если для некоторого $\varepsilon > 0$ ни одно решение $x \in \mathcal{S}_*(f)$ не удовлетворяет требованию (2);

5) *частная устойчивость*, если она не обладает глобальной неустойчивостью, а именно, для любого $\varepsilon > 0$ хотя бы одно её решение $x \in \mathcal{S}_*(f)$ удовлетворяет требованию (2);

6) *массивная частная устойчивость*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in \mathcal{S}_*(f) \setminus \mathcal{S}_\delta(f)$ удовлетворяет требованию (2).

Подчеркнём, что в этом определении требования (2) считаются не выполненными, в частности, уже тогда, когда решение x определено не на всей полуоси $\mathbb{R}_+$, т.е. когда соответствующая ему фазовая кривая за конечное время выходит к границе фазовой области G (согласно теореме о продолжаемости решений; см., например, [6, теорема 23]).

Мы не упомянули здесь такие, не менее интересные [5, 7], но не изучаемые в нашей работе разновидности перроновских и верхнепредельных свойств (не говоря уже об их ляпуновских аналогах), как асимптотическая устойчивость или неустойчивость, частичная устойчивость, глобальная устойчивость и частная неустойчивость, а также не указали, какие из них являются массивными непосредственно по определению.

Основной результат настоящей работы состоит в доказательстве существования дифференциальной системы, у которой все решения, начинающиеся достаточно близко к началу координат, стремятся по норме к бесконечности при $t \to +\infty$, следовательно, эта система обладает полной неустойчивостью (как перроновской, так и верхнепредельной), а все остальные решения стремятся к нулю, т.е. система тем не менее не обладает глобальной неустойчивостью (ни перроновской, ни верхнепредельной) или, что то же, обладает частной устойчивостью, причём не просто частной, а даже массивной.

Теорема. *При $n = 2$ и $G = \mathbb{R}^2$ существует система (1) с правой частью, для которой $f'_x(t, 0) = 0$, $t \in \mathbb{R}_+$, обладающая следующими двумя свойствами:*

1) *для каждого решения $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^{\mathrm{T}}$ системы (1), удовлетворяющего любому из начальных условий: $0 < |x(0)| < 1$, или $x(0) = (1, 0)^{\mathrm{T}}$, или $|x(0)| = 1$, но $x_2(0) < 0$, имеет место равенство $\lim\limits_{t \to +\infty} |x(t)| = +\infty$;*

2) *для всех остальных решений системы (1), т.е. удовлетворяющих любому из начальных условий: $|x(0)| > 1$, или $x(0) = (-1, 0)^{\mathrm{T}}$, или $|x(0)| = 1$, но $x_2(0) > 0$, имеет место равенство $\lim\limits_{t \to +\infty} |x(t)| = 0$.*

Доказательство. Введём на декартовой плоскости с координатами x_1, x_2 полярные координаты ρ, φ ($\rho \geqslant 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$):

$$x_1 = \rho \cos \varphi, \quad x_2 = \rho \sin \varphi \tag{3}$$

и рассмотрим автономную двумерную систему

$$\begin{pmatrix} \dot\rho \\ \dot\varphi \end{pmatrix} = \rho^2 \begin{pmatrix} 1 - \rho \\ \sin^2 \varphi + \chi(\rho, \varphi) \end{pmatrix}, \quad \rho^2 \equiv x_1^2 + x_2^2, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \tag{4}$$

где $\chi(\rho, \varphi) = (\rho - 1)^2 \cos^2 \varphi$, если $(\rho - 1) \cos \varphi \geqslant 0$, и $\chi(\rho, \varphi) = 0$ в противном случае.

Равенство (4) задаёт векторное поле в области $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ переменных (ρ, φ), которое при помощи локального диффеоморфизма, заданного формулой (3), переносится на проколотую окрестность $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ переменных (x_1, x_2). Полученное поле непрерывно продолжается в начало координат нулём, причём продолженное поле непрерывно дифференцируемо в начале координат и имеет нулевое линейное приближение за счёт наличия в правой части системы множителя ρ^2. Из сказанного следует, что система (4) допускает нулевое решение. Значит, она является системой вида (1).

Первое уравнение системы (4) задаёт динамическую систему на прямой (точнее, на полупрямой $\mathbb{R}_+$, так как по смыслу $\rho \geqslant 0$), имеющую на $\mathbb{R}_+$ две неподвижные точки: 0 и 1. При этом очевидно, что если $\rho(0)$ отлично от 0 и 1, то $\rho(t) \to 1$ при $t \to +\infty$.

А. Рассмотрим сначала все ненулевые решения данной системы, удовлетворяющие условию $\rho(0) < 1$. Такие решения имеются двух типов.

Тип 1. Для решений x, удовлетворяющих начальному условию $\varphi(0) = 0$, справедливо равенство $\varphi(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Тип 2. Рассмотрим решения, удовлетворяющие условию $\varphi(0) \neq 0$. Заметим, что угловая координата $\varphi(t)$ каждого такого решения x системы (4) возрастает при $t \to +\infty$, поэтому в некоторый момент $t > 0$ решение обязательно войдёт в область (4-ю четверть внутри круга) $V_4^{\bullet} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1, \quad x_1 > 0, \quad x_2 < 0\}$, в которой функция $\chi(\rho, \varphi)$ нулевая. В этой области система (4) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \dot\rho \\ \dot\varphi \end{pmatrix} = \rho^2 \begin{pmatrix} 1 - \rho \\ \sin^2 \varphi \end{pmatrix}, \tag{5}$$

следовательно, для рассматриваемых решений $\varphi(t) \to 2\pi$ при $t \to +\infty$.

Б. Рассмотрим решения, удовлетворяющие условию $\rho(0) > 1$. Такие решения у рассматриваемой системы (4) имеются двух типов.

Тип 3. Для решений x, удовлетворяющих начальному условию $\varphi(0) = \pi$, справедливо равенство $\varphi(t) = \pi$ при $t \in \mathbb{R}_+$.

Тип 4. Рассмотрим решения, удовлетворяющие условию $\varphi(0) \neq \pi$. Заметим, что угловая координата $\varphi(t)$ каждого такого решения x системы (4) возрастает при $t \to +\infty$, поэтому в некоторый момент $t > 0$ решение обязательно войдёт в область (2-ю четверть вне круга) $V_2^{\circ} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 > 1, \quad x_1 < 0, \quad x_2 > 0\}$, в которой функция $\chi(\rho, \varphi)$ нулевая. В этой области система (4) принимает вид (5), следовательно, для рассматриваемых решений выполняется соотношение $\varphi(t) \to \pi$ при $t \to +\infty$.

В. Рассмотрим теперь решения, удовлетворяющие начальному условию $\rho(0) = 1$. Такие решения бывают также двух типов.

Тип 5. Особыми точками системы (4) являются $e_1 = (1, 0)^{\mathrm{т}}$ и $e_2 = (-1, 0)^{\mathrm{т}}$, которые, как показано в пп. А и Б, представляют собой точки притяжения внутренности и внешности единичного круга соответственно.

Тип 6. Рассмотрим решения x, удовлетворяющие условию $x_2(0) \neq 0$. Угловая координата $\varphi(t)$ каждого решения этого типа удовлетворяет уравнению $\dot\varphi = \sin^2 \varphi$, поэтому решения с начальным условием $x_2(0) > 0$ асимптотически притягиваются при $t \to +\infty$ к особой точке e_2, а все остальные – к особой точке e_1.

Для упрощения в дальнейшем записи обозначим

$$\omega(a,b) = \int_a^b \exp\left(\left(\tau - \frac{1}{2}\right)^{-1}\left(\tau - \frac{1}{3}\right)^{-1}\right) d\tau \quad \text{и} \quad \delta(a,b) = \int_a^b \exp\left(\left(\tau + \frac{1}{2+t}\right)^{-1}\left(\tau + \frac{1}{3+t}\right)^{-1}\right) d\tau.$$

Для $i = 1, 2$ рассмотрим функции $\chi_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданные условиями

$$\chi_1(t,u) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad u \leqslant 1/3, \\ C_1(t)\omega(1/3, u), & \text{если} \quad 1/3 \leqslant u \leqslant 1/2, \\ t, & \text{если} \quad u \geqslant 1/2, \end{cases}$$

где $C_1(t) = t/\omega(1/3, 1/2)$, и

$$\chi_2(t,u) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad u \leqslant -1/(2+t), \\ C_2(t)\delta(-1/(2+t), u), & \text{если} \quad -1/(2+t) \leqslant u \leqslant -1/(3+t), \\ \dfrac{t}{1+t}, & \text{если} \quad u \geqslant -1/(3+t), \end{cases}$$

где $C_2(t) = t((1+t)\delta(-1/(2+t), -1/(3+t)))^{-1}$, которые являются гладкими функциями класса C^∞ по переменной u при каждом фиксированном значении $t \in \mathbb{R}_+$. Для краткости записи

также введём обозначения константы Σ_1 и функции $\Sigma_2\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, задав их равенствами

$$\Sigma_1 = \frac{1}{\omega(1/3,1/2)} \int\limits_{1/3}^{1/2} \omega(1/3,u)\,du \quad \text{и} \quad \Sigma_2(t) = \int\limits_{-1/(2+t)}^{-1/(3+t)} \chi_2(t,\tau)\,d\tau.$$

Теперь сделаем в рассматриваемой системе (4) неавтономную замену переменных

$$y_1 = \theta(t,x_1), \quad y_2 = x_2, \tag{6}$$

где

$$\theta(t,x_1) = \begin{cases} (t+1)x_1 + \left(b_1(t) - \dfrac{t+1}{2}\right), & \text{если} \quad x_1 \geqslant \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{3} + \displaystyle\int\limits_{1/3}^{x_1} (1+\chi_1(t,\tau))\,d\tau, & \text{если} \quad \dfrac{1}{3} \leqslant x_1 \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ x_1, & \text{если} \quad -\dfrac{1}{3+t} \leqslant x_1 \leqslant \dfrac{1}{3}, \\ b_2(t) + \displaystyle\int\limits_{-1/(2+t)}^{x_1} \left(\frac{1}{1+t} + \chi_2(t,\tau)\right) d\tau, & \text{если} \quad -\dfrac{1}{2+t} \leqslant x_1 \leqslant -\dfrac{1}{3+t}, \\ \dfrac{1}{1+t}x_1 + \left(\dfrac{1}{(2+t)(1+t)} + b_2(t)\right), & \text{если} \quad x_1 \leqslant -\dfrac{1}{2+t}, \end{cases}$$

а функции $b_1\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ и $b_2\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ задаются равенствами

$$b_1(t) = t\Sigma_1 + \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad b_2(t) = -\frac{1}{3+t} + \frac{1}{(1+t)(3+t)} - \frac{1}{(1+t)(2+t)} - \Sigma_2(t).$$

Прежде всего покажем, что функция $\theta(t,\cdot\,)$ является гладкой функцией своего аргумента при каждом фиксированном значении $t \in \mathbb{R}_+$. Для этого заметим, что она является линейной функцией (а значит, и гладкой) всюду за исключением отрезков $[-1/(2+t), -1/(3+t)]$ и $[1/3, 1/2]$. Внутри этих отрезков функция $\theta(t,\cdot\,)$ гладкая по построению, поэтому остаётся проверить её гладкость в четырёх точках $-1/(2+t)$, $-1/(3+t)$, $1/3$, $1/2$.

А. Проверим сначала непрерывность. Равенство

$$\theta\left(t, \frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{3} + \int\limits_{1/3}^{1/2} (1+\chi_1(t,\tau))\,d\tau = \frac{1}{3} + \tau\Big|_{1/3}^{1/2} + t\Sigma_1 = b_1(t) = \theta\left(t, \frac{1}{2} + 0\right)$$

и аналогично устанавливаемое равенство $\theta(t, 1/3{+}0) = \theta(t, 1/3{-}0)$ доказывают непрерывность функции $\theta(t,\cdot\,)$ в точках $1/2$ и $1/3$ соответственно. Далее, выполнение равенств

$$\theta\left(t, -\frac{1}{3+t} - 0\right) = b_2(t) + \int\limits_{-1/(2+t)}^{-1/(3+t)} \left(\frac{1}{1+t} + \chi_2(t,\tau)\right) d\tau = b_2(t) + \frac{\tau}{1+t}\Big|_{-1/(2+t)}^{-1/(3+t)} + \Sigma_2(t) =$$

$$= -\frac{1}{3+t} = \theta\left(t, -\frac{1}{3+t} + 0\right)$$

и

$$\theta\left(t, -\frac{1}{2+t} + 0\right) = b_2(t) + \int\limits_{-1/(2+t)}^{-1/(2+t)} \left(\frac{1}{1+t} + \chi_2(t,\tau)\right) d\tau = b_2(t) = \theta\left(t, -\frac{1}{2+t} - 0\right)$$

доказывает непрерывность в точках $-1/(3+t)$ и $-1/(2+t)$ соответственно.

Б. Проверим непрерывную дифференцируемость функции $\theta(t,\cdot)$ в рассматриваемых четырёх точках. В точках $-1/2$ и $-1/3$ непрерывная дифференцируемость следует из равенств

$$\theta'_{x_1}\left(t,\frac{1}{2}-0\right)=(1+\chi_1(t,\tau))|_{\tau=1/2}=1+t=\theta'_{x_1}\left(t,\frac{1}{2}+0\right)$$

и, соответственно,

$$\theta'_{x_1}\left(t,\frac{1}{3}+0\right)=(1+\chi_1(t,\tau))|_{\tau=1/3}=1=\theta'_{x_1}\left(t,\frac{1}{3}-0\right).$$

Аналогично выполнение равенств

$$\theta'_{x_1}\left(t,-\frac{1}{3+t}-0\right)=\left(\frac{1}{1+t}+\chi_2(t,\tau)\right)\Big|_{\tau=-1/(3+t)}=1=\theta'_{x_1}\left(t,-\frac{1}{3+t}+0\right)$$

и

$$\theta'_{x_1}\left(t,-\frac{1}{2+t}+0\right)=\left(\frac{1}{1+t}+\chi_2(t,\tau)\right)\Big|_{\tau=-1/(2+t)}=\frac{1}{1+t}=\theta'_{x_1}\left(t,-\frac{1}{2+t}-0\right)$$

доказывает непрерывную дифференцируемость в точках $-1/(3+t)$ и $-1/(2+t)$.

Теперь заметим, что в силу бесконечной дифференцируемости функций χ_i, а также выполнения для каждого $m\in\mathbb{N}$ равенств

$$\chi_1^{(m)}\left(t,\frac{1}{2}\right)=\chi_1^{(m)}\left(t,\frac{1}{3}\right)=\chi_2^{(m)}\left(t,-\frac{1}{3+t}\right)=\chi_2^{(m)}\left(t,-\frac{1}{2+t}\right)=0$$

функция $\theta(t,\cdot)$ является бесконечно дифференцируемой функцией своего аргумента для каждого фиксированного значения $t\in\mathbb{R}_+$. Покажем также, что она является возрастающей биекцией $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$. Действительно,

$$\theta'_{x_1}(t,x_1)=\begin{cases}(t+1), & \text{если}\quad x_1\geqslant\dfrac{1}{2},\\ 1+\chi_1(t,x_1), & \text{если}\quad \dfrac{1}{3}\leqslant x_1\leqslant\dfrac{1}{2},\\ 1, & \text{если}\quad -\dfrac{1}{3+t}\leqslant x_1\leqslant\dfrac{1}{3},\\ \dfrac{1}{1+t}+\chi_2(t,x_1), & \text{если}\quad -\dfrac{1}{2+t}\leqslant x_1\leqslant-\dfrac{1}{3+t},\\ \dfrac{1}{1+t}, & \text{если}\quad x_1\leqslant-\dfrac{1}{2+t},\end{cases}$$

откуда следует, что $\theta'_{x_1}(t,x_1)>0,\quad t\in\mathbb{R}_+,\quad x_1\in\mathbb{R}$, следовательно, функция $\theta(t,\cdot)$ монотонна и инъективна. Заметим, что при фиксированном значении $t\in\mathbb{R}_+$ выполняются и соотношения

$$\lim_{x_1\to+\infty}\theta(t,x_1)=+\infty\quad\text{и}\quad\lim_{x_1\to-\infty}\theta(t,x_1)=-\infty,$$

в силу которых и непрерывности функции $\theta(t,\cdot)\in C^\infty(\mathbb{R})$ получаем, что $\theta(t,\cdot)$ принимает все промежуточные значения от $-\infty$ до $+\infty$, т.е. является сюръекцией из $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$.

Остаётся заметить, что функция θ имеет непрерывные по совокупности переменных (t,x_1) производные всех порядков по t и x_1 на $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$, поэтому после такой замены (6) система (4) принимает вид

$$\dot y=F(t,y),\quad (t,y)=(t,(y_1,y_2)^{\mathrm{T}})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2, \tag{7}$$

с правой частью $F:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, удовлетворяющей условию $F,F'_y\in C(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2)$.

Далее, для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ в открытой полосе

$$U_t = \{x \in \mathbb{R}^2 : -1/(3+t) < x_1 < 1/3, \quad x_2 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2,$$

содержащей начало координат, замена (6) имеет вид $y = x$, следовательно, построенная система (7) имеет нулевую матрицу линейного приближения вдоль нулевого решения (так как этим же свойством обладает система (4)). Из сказанного выше следует, что система (7) является системой вида (1).

Теперь покажем, что система (7) обладает свойствами 1) и 2) доказываемой теоремы. Действительно, в силу положительности константы Σ_1 равномерно по $x_1 \in [1/2, 1]$ имеем

$$\lim_{t\to+\infty} \theta(t, x_1) = \lim_{t\to+\infty} \left((t+1)x_1 + \left(t\Sigma_1 + \frac{1}{2} - \frac{t+1}{2}\right)\right) \geqslant \lim_{t\to+\infty} t\Sigma_1 = +\infty,$$

что обеспечивает выполнение свойства 1). Далее заметим, что справедливы оценки

$$|\Sigma_2(t)| = \left| \int\limits_{-1/(2+t)}^{-1/(3+t)} \chi_2(t,\tau)\, d\tau \right| \leqslant \left(-\frac{1}{3+t} + \frac{1}{2+t}\right) \max_{\tau\in[-1/(2+t),-1/(3+t)]} |\chi_2(t,\tau)| \leqslant$$

$$\leqslant \left(-\frac{1}{3+t} + \frac{1}{2+t}\right)\frac{t}{1+t} \to 0$$

при $t \to +\infty$, следовательно, равномерно по $x_1 \in [-2, -1]$ справедливы соотношения

$$\lim_{t\to+\infty} |\theta(t, x_1)| = \lim_{t\to+\infty} \left|\frac{1}{1+t}x_1 + \left(\frac{1}{(2+t)(1+t)} + b_2(t)\right)\right| =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left|\frac{1}{1+t}\left(x_1 + \frac{1}{2+t}\right) - \frac{1}{3+t} + \frac{1}{(1+t)(3+t)} - \frac{1}{(1+t)(2+t)} - \Sigma_2(t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{3}{1+t} + \frac{1}{3+t} + \frac{1}{(1+t)(3+t)} + |\Sigma_2(t)|\right) = 0,$$

откуда вытекает свойство 2). Теорема доказана.

Автор выражает благодарность И.Н. Сергееву за ценные замечания, способствовавшие улучшению текста статьи.

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (проект 21-8-2-4-1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сергеев И.Н.* Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856.
2. *Бондарев А.А.* Один пример неустойчивой системы // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 899.
3. *Бондарев А.А.* Пример полной, но не глобальной неустойчивости по Перрону // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 2. С. 43–47.
4. *Сергеев И.Н.* Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 636–646.
5. *Сергеев И.Н.* Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557.
6. *Сергеев И.Н.* Лекции по дифференциальным уравнениям. М., 2019.
7. *Сергеев И.Н.* Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1576–1578.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 19.09.2021 г.
После доработки 16.01.2022 г.
Принята к публикации 07.02.2022 г.

EDN: AUZJAR
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 153–163

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.7

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ОБОБЩЁННОЙ ИЕРАРХИИ УРАВНЕНИЯ P_{34}

© 2022 г. В. И. Громак

Для нелинейных уравнений обобщённой иерархии уравнения P_{34} из классификационного списка Пенлеве исследуются локальные аналитические свойства решений, преобразования Беклунда, рациональные решения и их представление через специальные функции и полиномы.

DOI: 10.31857/S0374064122020029

Введение. В настоящее время решения уравнений Пенлеве $(P_1–P_6)$, называемые трансцендентами Пенлеве, рассматриваются как нелинейные версии специальных функций, а уравнения Пенлеве [1, гл. 12; 2, гл. 10; 3, гл. 2], первоначально возникшие при рассмотрении классификационной проблемы для обыкновенных дифференциальных уравнений относительно свойства Пенлеве, т.е. отсутствия у решений подвижных многозначных особых точек, имеют многочисленные приложения как в различных областях математики, например в изомонодромной проблеме на сфере Римана [4–6], так и в различных областях математической физики, особенно в приложениях к классическим, квантовым и дискретным интегрируемым системам [7, гл. 8; 8, гл. 4–7; 9, гл. 3–5]. В связи с этим также важным является рассмотрение иерархий уравнений Пенлеве и связанных с ними уравнений, т.е. множества нелинейных уравнений, имеющих одинаковую алгебраическую структуру с уравнениями Пенлеве [10–18].

В настоящей работе рассматриваются некоторые аналитические свойства решений уравнений обобщённой иерархии уравнения P_{34} в классификации Пенлеве, которое является модифицированным уравнением второго уравнения Пенлеве P_2.

Обобщённая иерархия уравнения P_{34}. Известно [19], что обобщённая иерархия второго уравнения Пенлеве P_2 может быть записана в виде

$$\widetilde{P}_2^{[2N]}:\left(\frac{d}{dz}+2w\right)\widetilde{L}_N[w'-w^2]-zw-\alpha=0,\quad N=1,2,\dots, \tag{1}$$

в которой оператор $\widetilde{L}_N$ определяется рекуррентным соотношением

$$\frac{d}{dz}\widetilde{L}_{N+1}[u]=\left(\frac{d^3}{dz^3}+(4u+\beta_N)\frac{d}{dz}+2u_z\right)\widetilde{L}_N[u],\quad \widetilde{L}_1[u]=u,\quad u=u(z),\quad N=1,2,\dots, \tag{2}$$

где α и β_N – числовые параметры. Согласно соотношению (2) последовательно находим

$$\widetilde{L}_2[u]=u_{zz}+3u^2+\beta_1 u,$$

$$\widetilde{L}_3[u]=10u^3+u\beta_1\beta_2+3u^2(\beta_1+\beta_2)+5(u_z)^2+(10u+\beta_1+\beta_2)u_{zz}+u_{4z},$$

$$\widetilde{L}_4[u]=35u^4+s_3u+10u^3s_1+3u^2s_2+5(14u+s_1)u_z^2+$$

$$+(70u^2+s_2+10us_1)u_{zz}+21u_{zz}^2+28u_zu_{zzz}+(14u+s_1)u_{4z}+u_{6z},$$

$$s_1=\beta_1+\beta_2+\beta_3,\quad s_2=\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3,\quad s_3=\beta_1\beta_2\beta_3.$$

Если в операторе $\widetilde{L}_N$ параметр*) $\beta = 0$, то $\widetilde{L}_N = L_N$. При этом относительно оператора $\widetilde{L}_N$ справедливо представление (лемма 1 из [20])

$$\widetilde{L}_N[u] = \sum_{j=0}^{N-1} s_j L_{N-j}[u], \tag{3}$$

в котором $s_0 = 1$, а s_j, $j = \overline{1, N-1}$, – основные симметрические полиномы параметров β_1, β_2, $\ldots$, β_{N-1}, $N = 2, 3, \ldots$

Для $N = 1, 2, 3$ из (1), (2) находим первые три уравнения иерархии:

$$\widetilde{P}_2^{[2]} = P_2 : w'' = 2w^3 + zw + \alpha,$$

$$\widetilde{P}_2^{[4]} : w^{(4)} = 10w^2w'' + 10w(w')^2 - 6w^5 - \beta_1(w'' - 2w^3) + zw + \alpha,$$

$$\widetilde{P}_2^{[6]} : w^{(6)} = 2w^2(5(\beta_1 + \beta_2)w'' + 7w^{(4)}) - w^{(4)}(\beta_1 + \beta_2) - 70w^4w'' +$$

$$+ w(10(\beta_1 + \beta_2)(w')^2 + 42(w'')^2 + 56w'w^{(3)}) - (\beta_1\beta_2 - 70(w')^2)w'' +$$

$$+ 2w^3(\beta_1\beta_2 - 70(w')^2) - 6w^5(\beta_1 + \beta_2) + 20w^7 + zw + \alpha.$$

Уравнение (1) можно записать в виде эквивалентной системы

$$w' = q + w^2, \quad \Psi' + 2\Psi w - \sigma = 0, \tag{4}$$

где введены функции

$$q(z) := w'(z) - w(z)^2, \quad \Psi(q(z)) := \widetilde{L}_N[q] - z/2. \tag{5}$$

Если из системы (4) исключить функцию $q(z)$, то относительно $w(z)$ будем иметь уравнение (1). Если же из системы (4) исключить функцию $w(z)$, то относительно $q(z)$ получим уравнение

$$\Psi'' - \frac{(\Psi')^2}{2\Psi} + 2q\Psi + \frac{\sigma^2}{2\Psi} = 0, \tag{6}$$

где $\sigma = \alpha - 1/2$, $\Psi = \Psi(q(z)) \neq 0$, $(\cdot)' = d(\cdot)/dz$.

Уравнение $\Psi(q) = 0$ определяет обобщённую иерархию первого уравнения Пенлеве. При этом уравнение $P_2^{[2N]}$ записывается в виде

$$P_2^{[2N]} : (D + 2w)\Psi(q) + 1/2 - \alpha = 0.$$

Следовательно, если $q = q(z)$ – решение уравнения $\Psi(q) = 0$ при $\sigma = 0$, то функция $w(z)$, определяемая из уравнения Риккати $w' - w^2 = q$, является решением уравнения $P_2^{[2N]}$ при $\alpha = 1/2$. Это свойство аналогично соотношению между решениями уравнений иерархий первого и второго уравнений Пенлеве [3, с. 293].

Система (4) определяет соотношение между решениями уравнений иерархий (1) и (6):

$$M : w(z) \mapsto q(z) = w'(z) - w(z)^2,$$

$$M^{-1} : q(z) \mapsto w(z) = -\frac{\Psi'(q) - \sigma}{2\Psi(q)}, \quad \Psi(q) \neq 0, \quad (\cdot)' = \frac{d}{dz}(\cdot). \tag{7}$$

При $N = 1$ уравнение (1) – второе уравнение Пенлеве P_2. Функция $\Psi(q)$ из (5) в этом случае имеет вид $\Psi_1(z) = q - z/2$, а первое уравнение иерархии (6) следующее:

$$q'' = (4q^3 - 4zq^2 + z^2q + q' - (q')^2 + \sigma^2 - 1/4)/(z - 2q). \tag{8}$$

*) Здесь и далее $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{N-1})$.

Уравнение (8) калибровочным преобразованием $q \mapsto \sigma q + z/2$ приводится к уравнению

$$P_{34} : q'' = (q')^2/(2q) - zq - 2\sigma q^2 - 1/(2q).$$

Это уравнение имеет порядковый номер 34 в классификационном списке Пенлеве [1, с. 456], а значит, его решения не имеют подвижных критических точек, т.е., другими словами, оно обладает свойством Пенлеве. Более того, в силу связи между уравнениями (8) и P_2 все решения уравнения (8), как и решения уравнения P_2, являются мероморфными функциями.

В случае $N = 2$ функция $\Psi(q)$ имеет вид $\Psi_2(z) = q'' + 3q^2 + \beta_1 q - z/2$, а уравнение относительно $q(z)$ следующее:

$$q^{(4)} = (\Psi_2')^2/(2\Psi_2) - 2q\Psi_2 - 6(q')^2 - q''(6q + \beta_1) - \sigma^2/(2\Psi_2). \tag{9}$$

В случае $N = 3$ функция $\Psi(q)$ имеет вид

$$\Psi_3(z) = q^{(4)} + 10q^3 + (3q^2 + q'')s_1 + 5(q')^2 + q(s_2 + 10q'') - z/2,$$

а уравнение относительно $q(z)$ следующее:

$$q^{(6)} = (\Psi_3')^2/(2\Psi_3) - 2q\Psi_3 - (60q + 6s_1)(q')^2 - (20q'' + 30q^2 + 6qs_1 + s_2)q'' - \\ - 30q'q^{(3)} - (10q + s_1)q^{(4)} - \sigma^2/(2\Psi_3), \tag{10}$$

где $s_1 = \beta_1 + \beta_2$, $s_2 = \beta_1\beta_2$.

Заметим, что преобразование M из (7) является преобразованием Миуры и, следовательно, уравнение (6) можно рассматривать как редукцию уравнения (1) относительно преобразования Миуры. Таким образом, следуя терминологии теории уравнения Котевега–де Фриза, по сути уравнение (6) является модифицированным уравнением (1). Мы же будем называть уравнение (6), следуя терминологии теории уравнений Пенлеве, уравнением, определяющим обобщённую иерархию $\tilde{P}_{34}^{[2N]}$ уравнения P_{34}. Заметим, что иерархия $P_{34}^{[2N]}$ уравнения P_{34} может быть получена из (6), если положить $\beta = 0$. При этом уравнение $\tilde{P}_{34}^{[2N]}$ имеет порядок $2N$, где N определяет номер оператора $\tilde{L}_N$ и номер уравнения иерархии. Решение N-го уравнения (6) обозначаем через $q^{[N]}(z)$, однако иногда для упрощения записи, если это не искажает смысл, верхний индекс будем опускать.

В настоящей работе исследуются некоторые аналитические свойства решений уравнений иерархии (6).

Локальные свойства решений. Прежде всего рассмотрим свойства решений уравнения (6), которые непосредственно вытекают из свойств решений уравнения (1).

Лемма 1. *Решения $w(z)$ и $q(z)$, связанные соотношениями (7), мероморфны или рациональны одновременно.*

Справедливость леммы следует непосредственно из соотношений (7), определения (5) функции $\Psi(q)$ и определения (2) оператора $\tilde{L}_N$.

Лемма 2. *Решение $q^{[N]}(z)$ N-го уравнения из (6) может иметь только полюсы второго порядка с нулевым вычетом и только в полюсах решения $w^{[N]}(z)$.*

Доказательство. Действительно, если z_0 – полюс решения $q^{[N]}(z)$, то в силу M^{-1}-преобразования решение $w^{[N]}(z)$ в точке z_0 либо голоморфно, либо имеет полюс. Но в силу M-преобразования z_0 не может быть точкой голоморфности решения $w^{[N]}(z)$ в случае полярности решения $q^{[N]}(z)$ в точке z_0. Следовательно, $w^{[N]}(z)$ в z_0 имеет полюс. Так как решение $w^{[N]}(z)$ уравнения (1) может иметь только простые полюсы с разложением (см., например, [21])

$$w^{[N]}(z) = c_{-1}(z - z_0)^{-1} + O(z - z_0),$$

в котором вычет $c_{-1} \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N\}$, то отсюда следует, что в окрестности полюса $z = z_0$ решение $q^{[N]}(z)$ N-го уравнения из (6) имеет разложение

$$q^{[N]}(z) = c_{-2}(z - z_0)^{-2} + c_0 + O(z - z_0), \tag{11}$$

где $c_{-2} = \operatorname{res}_{z=z_0}(zq^{[N]}(z)) = -m(m+1),\ \ m \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Лемма доказана.

В частности, для уравнения (8) в окрестности подвижного полюса z_0 решение имеет разложение

$$q^{[1]}(z) = -2t^{-2} + \frac{z_0}{6} + ht^2 - \frac{z_0 t^3}{18} + \frac{t^4}{6048}(720hz_0 + 8z_0^3 + 27(4\sigma^2 - 9)) + \sum_{j=5}^{\infty} c_j t^j,$$

где $t = z - z_0$, h – произвольная постоянная, а коэффициенты c_j, $j > 4$, однозначно определяются через z_0, h и параметр σ.

Для рациональных решений уравнений иерархии (6) бесконечно удалённая точка $z = \infty$ является точкой голоморфности. В частности, для уравнения (8) рациональное решение в окрестности бесконечно удалённой точки $z = \infty$ имеет разложение

$$q^{[1]}(z) = (1/4 - \sigma^2)/z^2 + (9 - 40\sigma^2 + 16\sigma^4)/(4z^5) - 7(876\sigma^2 - 189 - 496\sigma^4 + 64\sigma^6)/(16z^8) + O(z^{-9}).$$

Для уравнения (9) в окрестности подвижного полюса $z = z_0$ решение имеет одно из следующих разложений: либо

$$q^{[2]}(z) = -2t^{-2} - \beta_1/6 - \frac{6z_0 + \beta_1^2}{120}t^2 - \frac{2\sigma + 3}{36}t^3 + h_1 t^4 - \frac{\sigma\beta_1}{360}t^5 + h_2 t^6 + \sum_{j=7}^{\infty} c_j t^j,$$

где $t = z - z_0$, h_1, h_2 – произвольные постоянные, а коэффициенты c_j, $j > 6$, однозначно определяются через z_0, h_1, h_2 и параметры β_1, σ; либо

$$q^{[2]}(z) = -6t^{-2} - \beta_1/10 - \frac{(10z_0 + 3\beta_1^2)t^2}{1400} + h_1 t^4 - \frac{\beta_1 t^5}{1200} + h_2 t^6 + \sum_{j=7}^{\infty} c_j t^j,$$

где $t = z - z_0$, h_1, h_2 – произвольные постоянные, а коэффициенты c_j, $j > 6$, однозначно определяются через z_0, h_1, h_2 и параметры β_1, σ.

Для мероморфного решения $q^{[N]}(z)$ уравнения (6) функция

$$\tau^{[N]}(z) = \exp\left(\int^z \left(\int^z q^{[N]}(z)dz\right)dz\right) \tag{12}$$

является целой с нулями порядка $m(m+1)$, где $m \in \{1, 2, \ldots, N\}$, в полюсах $q^{[N]}(z)$. В справедливости этого утверждения несложно убедиться непосредственно, подставив разложение (11) в правую часть функции (12).

Заметим также, что произвольное мероморфное нерациональное решение $q(z)$ уравнения (6) имеет бесконечное число полюсов второго порядка с нулевым вычетом. Это утверждение следует из теоремы Виттиха [22, с. 118], согласно которой алгебраическое дифференциальное уравнение с одним доминирующим членом не может иметь целых трансцендентных решений. Уравнение из иерархии (6) после умножения на 2Ψ станет полиномиальным относительно $q,\ q',\ \ldots,\ q^{(2N)}$ с одним доминирующим членом, определяемым из выражения $4q\Psi^2$, и, по сути, из выражения $4q(\widetilde{L}_N[q])^2$. В самом деле, доминирующий член при $N = 1$ – это $4q^3$, при $N = 2$ – это $36q^5$, при $N = 3$ – это $400q^7$. Однако в силу (3) доминирующий член выражения $\widetilde{L}_N[q]$ совпадает с доминирующим членом выражения $L_N[q]$, который равен $a_N q^N$, где $a_N \neq 0$ – константа (см., например, [23]). Следовательно, выражение $4q\Psi^2$ содержит один доминирующий член $4a_N^2 q^{2N+1}$. Если при этом предположить, что мероморфное нерациональное решение $q(z)$ имеет конечное число полюсов, то тогда функция $v(z) = P(z)q(z)$ с подходящим полиномом $P(z)$ является целой трансцендентной функцией и при этом функция $v(z)$ удовлетворяет алгебраическому уравнению с одним доминирующим членом, что противоречит предположению. Заметим также, что аналогичное утверждение справедливо и для уравнений иерархии (1).

Преобразования Беклунда. Система (4) устанавливает связь между решениями уравнений (1) и (6) в соответствии с преобразованиями (7). При этом уравнение (1) имеет дискретную симметрию

$$S : w(z, \alpha, \beta) \mapsto -w(z, -\alpha, \beta). \tag{13}$$

Уравнение (6) также имеет дискретную симметрию

$$S_0 : q(z, \sigma, \beta) \mapsto \hat{q}(z, \hat{\sigma}, \beta) = q(z, -\sigma, \beta), \quad \hat{\sigma} = -\sigma, \tag{14}$$

которая означает, что функция $q(z, \sigma, \beta)$ является решением уравнения (6) как для параметров (σ, β), так и для параметров $(-\sigma, \beta)$. В работе [20] на основании преобразований (7), (13), (14) получены преобразования Беклунда

$$T : w_\alpha \mapsto w_{\alpha+1} = -w_\alpha + \frac{2\alpha + 1}{2\widetilde{L}_N[-w'_\alpha - w_\alpha^2] - z}, \tag{15}$$

$$T^{-1} : w_{\alpha+1} \mapsto w_\alpha = -w_{\alpha+1} + \frac{2\alpha + 1}{2\widetilde{L}_N[w'_{\alpha+1} - w_{\alpha+1}^2] - z} \tag{16}$$

для уравнения (1) и преобразование Беклунда для уравнения (6), т.е. доказана

Теорема 1. *Пусть $q_\sigma = q(z, \sigma, \beta)$ – решение произвольного уравнения иерархии (6) при фиксированном значении параметров (σ, β). Тогда преобразования*

$$B : q_\sigma \mapsto q_{\sigma+1} = -q_\sigma - \frac{1}{2}\left(\frac{\Psi'(q_\sigma) - \sigma}{\Psi(q_\sigma)}\right)^2, \tag{17}$$

$$B^{-1} : q_\sigma \mapsto q_{\sigma-1} = -q_\sigma - \frac{1}{2}\left(\frac{\Psi'(q_\sigma) + \sigma}{\Psi(q_\sigma)}\right)^2, \tag{18}$$

где $\Psi(\cdot) \neq 0$, $(\cdot)' = d(\cdot)/dz$, также определяют решения этого уравнения.

В следующем пункте работы мы рассмотрим приложение преобразований (17), (18) к построению рациональных решений уравнения (6). Заметим, что преобразования Беклунда (17), (18) определяют алгебру Вейля на множестве решений. В частности, для уравнения (8) три последовательные решения $q_{\sigma-1}$, q_σ, $q_{\sigma+1}$, образованные преобразованием (17), связаны алгебраическим соотношением

$$4(z - 2q_\sigma)^4(q_{\sigma-1} + q_\sigma)(q_\sigma + q_{\sigma+1}) - (8\sigma^2 + (z - 2q_\sigma)^2(q_{\sigma-1} + 2q_\sigma + q_{\sigma+1}))^2 = 0.$$

Рассмотрим ещё один класс преобразований, которые позволяют строить решения уравнения (6) по известному решению при фиксированных значениях параметров (σ, β). Такой класс преобразований назовём *автопреобразованиями* уравнения (6).

Для уравнения (1) автопреобразования Беклунда имеют вид [20]

$$\widetilde{w}(z, \alpha, \beta) = T^n \circ S \circ T^{-n} w(z, \alpha, \beta), \quad \alpha = n \in \mathbb{Z}. \tag{19}$$

При этом решения $\widetilde{w}(z, \alpha, \beta)$ и $w(z, \alpha, \beta)$ совпадают лишь в случае, если они рациональные решения. Приведём аналогичный класс преобразований для уравнения (6).

Пусть $q = q(z, \sigma, \beta)$ – фиксированное решение уравнения (6) для фиксированных значений параметров σ, β; при этом в соответствии $\sigma = \alpha - 1/2$ принимаем $\sigma = n - 1/2$, $\alpha = n \in \mathbb{Z}$. Тогда $\Psi(q) \neq 0$ и "новое" решение уравнения (6) при этих же значениях параметров строим в соответствии со схемой

$$q(z, \sigma, \beta) \overset{M^{-1}}{\mapsto} w(z, \alpha, \beta) \overset{T^n \circ S \circ T^{-n}}{\longmapsto} \tilde{w}(z, \alpha, \beta) \overset{M}{\mapsto} \tilde{q}(z, \sigma, \beta).$$

Тогда справедлива

Теорема 2. *Пусть* $q = q(z, \sigma, \beta)$ *– произвольное решение уравнения (6) при* $\sigma = n - 1/2$, $n \in \mathbb{Z}$. *Тогда функция* $\tilde{q}(z, \sigma, \beta)$, *определяемая соотношением*

$$\tilde{q}(z, \sigma, \beta) = Gq(z, \sigma, \beta), \quad G = H \circ S \circ H^{-1}, \quad H := M \circ T^n, \tag{20}$$

также является решением уравнения (6) при тех же значениях параметров σ, β. *При этом* $q(z, \sigma, \beta) \equiv \tilde{q}(z, \sigma, \beta)$ *тогда и только тогда, когда* $q(z, \sigma, \beta)$ *– рациональное решение.*

Доказательство соотношения (20) вытекает из того, что для уравнений (1) и (6) преобразования Беклунда (15)–(18) и преобразования (7) связывают решения этих уравнений. При этом решения $q(z, \sigma, \beta)$ и $\tilde{q}(z, \sigma, \beta)$ различны, если они нерациональны, и совпадают в противном случае, что следует из леммы 1. Теорема доказана.

В качестве примера рассмотрим случай $N = 1$, т.е. уравнение (8).

Пусть $q = q(z)$ – решение уравнения (8) при $\sigma = 1/2$, т.е. $n = 1$ в (20). Тогда функция

$$w_1 = w(z, 1) = M^{-1}q(z) = -(q' - 1)/(2q - z) \tag{21}$$

– решение уравнения P_2 при значении параметра $\alpha = 1$, а в силу преобразования (19) функция $\tilde{w}_1 = T \circ S \circ T^{-1} w_1$ также является решением уравнения P_2 при $\alpha = 1$. Явное выражение решения $\tilde{w}_1$ через w_1 получено в [24] и имеет вид

$$\tilde{w}_1 = -w_1 + 1/(2R) - R^2/(2(w_1 R - 1)^2 + (2w_1' + z)R^2 - 1), \tag{22}$$

где $R = w_1' - w_1^2 - z/2$. Но тогда по решению $\tilde{w}_1$ можно построить "новое" решение $\tilde{q}(z) = M\tilde{w}_1 = \tilde{w}_1' - \tilde{w}_1^2$ уравнения (8). При этом представления (21), (22) дают явное выражение для $\tilde{q}(z)$ через фиксированное решение $q(z)$ уравнения (8) при $\sigma = 1/2$. Если при этом исходное решение $q(z)$ имеет в точке z_0 начальные данные q_0, q_0' такие, что $k = 2q_0 - z_0 \neq 0$, то для решения $\tilde{q}(z)$ начальные данные в точке z_0 определяются равенствами

$$\tilde{q}(z_0) = -q_0 - 2(q_0'/k)^2, \quad \tilde{q}'(z_0) = (2q_0 + z_0)(q_0'/k) + 4(q_0'/k)^3. \tag{23}$$

Из соотношений (23) вытекает, что решения $q(z)$ и $\tilde{q}(z)$ имеют совпадающие начальные данные тогда и только тогда, когда $q_0 = q_0' = 0$. Но это начальные данные рационального решения $q(z) = 0$ при $\sigma = 1/2$.

Для второго уравнения Пенлеве P_2 также известно [2, с. 102] преобразование Беклунда между его решениями с параметрами $\alpha = 0$ и $\alpha = \varepsilon/2$, $\varepsilon^2 = 1$.

Пусть $w(z)$ – решение уравнения P_2 при $\alpha = \varepsilon/2$, $\varepsilon^2 = 1$, такое, что $R(w(z)) = w'(z) - \varepsilon w(z)^2 - \varepsilon z/2 \neq 0$. Тогда функция $y(\tau)$, определяемая соотношением

$$-2^{1/3}\varepsilon y(\tau)^2 = R(w(z)), \quad z = -2^{1/3}\tau,$$

является решением уравнения P_2 при $\alpha = 0$, а обратное преобразование определяет его решение $w(z) = 2^{-1/3}\varepsilon y'(\tau)/y(\tau)$, $y(\tau) \neq 0$. В силу M-преобразования из (7) по решениям $y(\tau)$ и $w(z)$ при $\varepsilon = 1$ уравнения P_2 можно построить решения $q(\tau) = q(\tau, -1/2, \beta) \neq 0$ и $\tilde{q}(z) = q(z, 0, \beta) \neq z/2$ уравнения (8) для значений параметров $\sigma = -1/2$ и $\sigma = 0$ соответственно, при этом между этими решениями имеет место следующая связь:

$$\tilde{q}(z) = z/2 - 2^{1/3}(q'(\tau))^2/(2q(\tau) - \tau)^2, \quad z = -2^{1/3}\tau.$$

Рациональные решения. Для рациональных решений уравнений иерархии (6) справедлива

Лемма 3. *Произвольное уравнение иерархии (6) имеет тривиальное решение* $q = 0$ *при* $\sigma = \pm 1/2$ *и решение* $q = -2/z^2$ *при* $\sigma = \pm 3/2$.

Доказательство леммы вытекает из соотношений (7) и того, что произвольное уравнение из иерархии (1) имеет тривиальное решение $w = 0$ при $\alpha = 0$ и решение $w = -1/z$ при $\alpha = 1$ (лемма 2 из [20]).

Теорема 3. *Для существования рационального решения у уравнения иерархии (6) необходимо и достаточно, чтобы* $\sigma = n + 1/2$, $n \in \mathbb{Z}$. *При этом для каждого такого* σ *и фиксированного* β *существует только одно рациональное решение.*

Доказательство теоремы 3 непосредственно следует из единственности рациональных решений уравнения (1) при $\alpha = n \in \mathbb{Z}$, леммы 1 и соотношений (7). Теорема доказана.

Рациональные решения уравнений иерархии (6) можно построить последовательным применением преобразования Беклунда (17), (18) с начальным тривиальным решением. Так в случае $N = 1$, т.е. для уравнения (8), которое не содержит параметр β, имеем первые рациональные решения

$$q^{[1]}(z, \pm 1/2) = 0, \quad q^{[1]}(z, \pm 3/2) = -2/z^2, \quad q^{[1]}(z, \pm 5/2) = -6z(z^3 - 8)/(z^3 + 4)^2,$$

$$q^{[1]}(z, \pm 7/2) = -12z(z^9 + 600z^3 + 1600)/(z^6 + 20z^3 - 80)^2,$$

$$q^{[1]}(z, \pm 9/2) = -\frac{20(z^{18} + 48z^{15} + 2520z^{12} - 78400z^9 - 1881600z^6 + 12544000)}{z^2(z^9 + 60z^6 + 11200)^2}.$$

Первые рациональные решения для уравнения (9) в явном виде приведены в [20]. Относительно представления рациональных решений уравнений из иерархии (6) через обобщённые полиномы Яблонского–Воробьёва [25, 26] справедлива

Теорема 4. *Произвольное рациональное решение* N*-го уравнения из иерархии (6) имеет вид*

$$q^{[N]}(z, \pm(n + 1/2), \beta) = 2\frac{(Q_n^{[N]})'' Q_n^{[N]} - ((Q_n^{[N]})')^2}{(Q_n^{[N]})^2} = 2\frac{d^2}{dz^2} \ln(Q_n^{[N]}), \tag{24}$$

где $Q_n^{[N]}(z)$ *– обобщённые полиномы Яблонского–Воробьёва, определяемые рекуррентными соотношениями*

$$Q_{n+1}^{[N]} Q_{n-1}^{[N]} = z(Q_n^{[N]})^2 - 2(Q_n^{[N]})^2 \widetilde{L}_N \left[2\frac{d^2}{dz^2} \ln(Q_n^{[N]}) \right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{25}$$

с начальными полиномами $Q_0^{[N]} = 1$, $Q_1^{[N]} = z$.

Доказательство. В работе [20] получен критерий существования и единственности рационального решения $w^{[N]}(z, \alpha, \beta)$ уравнения (1), который состоит в выполнении условия $\alpha \in \mathbb{Z}$ при фиксированном β. Если при этом $\alpha = n$, $n \in \mathbb{N}$, то рациональное решение имеет представление

$$w_n^{[N]}(z) = \frac{d}{dz} \ln(Q_{n-1}^{[N]}/Q_n^{[N]}). \tag{26}$$

Для $\alpha = 0$ рациональное решение нулевое: $w_0^{[N]} = 0$; для $\alpha = -n$, $n \in \mathbb{N}$, справедливо равенство $w_{-n}^{[N]} = -w_n^{[N]}$. В [20] получено также рекуррентное соотношение (25), исследована структура полиномов $Q_n^{[N]}(z)$ и установлено тождество (формулы (42), (44) из [20])

$$(Q_{n-1}^{[N]})'' Q_n^{[N]} - 2(Q_{n-1}^{[N]})'(Q_n^{[N]})' + Q_{n-1}^{[N]}(Q_n^{[N]})'' = 0. \tag{27}$$

Пусть $w_{n+1}^{[N]}(z)$ – рациональное решение уравнения (1) при $\alpha = n + 1$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Тогда в силу (7) имеем рациональное решение

$$q^{[N]}(z, \pm(n + 1/2), \beta) = (w_{n+1}^{[N]}(z))' - (w_{n+1}^{[N]}(z))^2 \tag{28}$$

уравнения (6). Подставляя в (28) выражение для $w_{n+1}^{[N]}(z)$ из (26) с условием (27) и с заменой n на $n+1$, приходим к представлению (24). При этом единственность рациональных решений уравнения (6) при $\sigma = n + 1/2$, $n \in \mathbb{Z}$, и фиксированном β следует из леммы 1, дискретной симметрии (14) и единственности рациональных решений уравнения (1). Теорема доказана.

В случае $N=1$ имеем $\widetilde{L}_1[u]=u$, поэтому

$$Q^{[1]}_{n+1}Q^{[1]}_{n-1}=z(Q^{[1]}_n)^2-4(Q^{[1]}_n(Q^{[1]}_n)''-((Q^{[1]}_n)')^2),\quad n=1,2,3,\dots$$

При этом $Q^{[1]}_0=1$, $Q^{[1]}_1=z$. Тогда последовательно находим первые полиномы

$$Q^{[1]}_2=z^3+4,\quad Q^{[1]}_3=z^6+20z^3-80,\quad Q^{[1]}_4=z^{10}+60z^7+11200z,$$

$$Q^{[1]}_5=z^{15}+140z^{12}+2800z^9+78400z^6-3136000z^3-6272000.$$

При этом полиномы $Q^{[1]}_n$ имеют лишь простые корни z_j, каждый из которых является полюсом рационального решения $q^{[1]}(z)$ с главной частью разложения $-2(z-z_j)^{-2}$.

Отметим, что для уравнения (9) первые рациональные решения, а также полиномы $Q^{[N]}_n$, $N=1,2,3$, в явной форме приведены в [20]. Отметим также, что степень полинома $Q^{[N]}_n$ не зависит от N, а зависит только от n и равна $n(n+1)/2$. При этом полиномы $Q^{[N]}_n$, $N>1$, могут иметь кратные корни.

Для рациональных решений уравнения P_2 известно детерминантное представление [27] (см. также [28]), которое в [21] обобщено на нестационарную иерархию P_2. На основании этого представления и связи (7) между решениями иерархий (1) и (6) справедлива

Теорема 5. *Рациональное решение N-го уравнения иерархии (6) представляется в виде*

$$q^{[N]}(z,\pm(m+1/2),\beta)=2\frac{d^2}{dz^2}\{\ln(\tau^{[N]}_m)\},\tag{29}$$

где полиномиальная τ-функция $\tau^{[N]}_m(z)$ является определителем

$$\tau^{[N]}_m=\begin{vmatrix} p^{[N]}_m(z) & p^{[N]}_{m+1}(z) & \dots & p^{[N]}_{2m-1}(z)\\ p^{[N]}_{m-2}(z) & p^{[N]}_{m-1}(z) & \dots & p^{[N]}_{2m-3}(z)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ p^{[N]}_{-m+2}(z) & p^{[N]}_{-m+3}(z) & \dots & p^{[N]}_1(z)\end{vmatrix}\tag{30}$$

матрицы m-го порядка, полиномы $p^{[N]}_m(z)$ ($p^{[N]}_m(z)=0$ для $m<0$) которой определяются образующей функцией $\Phi(z,\lambda)$ формального параметра λ:

$$\Phi(z,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}p^{[N]}_k(z)\lambda^k,\quad \Phi(z,\lambda)=\exp\biggl(z\lambda-\sum_{l=1}^{N}\frac{4^l s_{N-l}}{2l+1}\lambda^{2l+1}\biggr),\tag{31}$$

здесь $s_0=1$, а s_l, $l=\overline{1,N-1}$, – основные симметрические полиномы параметров $\beta_1,\ \dots,\ \beta_{N-1}$.

Зависимость между полиномиальными τ-функциями, задаваемыми равенствами (12), (30), и обобщёнными полиномами Яблонского–Воробьёва $Q^{[N]}_m$ следует из представлений (12) и (24) и выражается соотношением $\tau^{[N]}_m=c_mQ^{[N]}_m$, $c_m=\prod_{k=1}^{m}(2k+1)^{k-m}$ [21].

Покажем, что полиномы $p^{[N]}_m(z)$, определяющие детерминантное представление (29), (30) рационального решения N-го уравнения иерархии (6), так же, как и в случае $N=1$ для второго уравнения Пенлеве [28], удовлетворяют как разностному, так и линейному дифференциальному уравнениям.

Согласно определению (31) полиномов $p^{[N]}_m(z)$ имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}p^{[N]}_k(z)\lambda^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\biggl(z-\sum_{l=1}^{N}\frac{4^l s_{N-l}}{2l+1}\lambda^{2l}\biggr)^k.$$

Заметим также, что функция $\Phi(z,\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi_\lambda = \left(z - \sum_{l=1}^{N} 4^l s_{N-l}\lambda^{2l}\right)\Phi. \tag{32}$$

Тогда в силу равенств (31), (32) получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p_n^{[N]}\lambda^{n-1} = \left(z - \sum_{l=1}^{N} 4^l s_{N-l}\lambda^{2l}\right)\sum_{n=0}^{\infty} p_n^{[N]}\lambda^n. \tag{33}$$

В (33) положим $p_0^{[N]}(z) = 1$. Тогда $p_1^{[N]}(z) = z$ и для определения функций $p_n^{[N]}(z)$, $n = \overline{2,N}$, имеем рекуррентные соотношения

$$2np_{2n}^{[N]}(z) = zp_{2n-1}^{[N]} - \sum_{j=1}^{n-1} 4^j s_{N-j} p_{2n-2j-1}^{[N]}, \tag{34}$$

$$(2n+1)p_{2n+1}^{[N]}(z) = zp_{2n}^{[N]} - \sum_{j=1}^{n} 4^j s_{N-j} p_{2n-2j}^{[N]}. \tag{35}$$

Из соотношения (33) вытекает, что

$$\sum_{m=0}^{\infty}[(m+2N+1)p_{m+2N+1}^{[N]} - zp_{m+2N}^{[N]} + 4s_{N-1}p_{m+2N-2}^{[N]} + \ldots + 4^{N-1}s_1 p_{m+2}^{[N]} + 4^N p_m^{[N]}]\lambda^m = 0, \tag{36}$$

откуда и следует разностное уравнение для полиномов $p_m^{[N]}$ при $m > N$ (см. формулировку теоремы 6 ниже).

С другой стороны, функция $\Phi(z,\lambda)$ из (31) удовлетворяет дифференциальному уравнению $\Phi_z = \lambda\Phi$, и поэтому

$$\sum_{m=1}^{\infty}(Dp_m^{[N]} - p_{m-1}^{[N]}) = 0, \quad D = \frac{d}{dz}.$$

Следовательно, $Dp_m^{[N]} = p_{m-1}^{[N]}$, $m \geqslant 1$. Тогда в силу (36) получаем линейное обыкновенное дифференциальное уравнение $(2N+1)$-го порядка относительно $p_m^{[N]}(z)$:

$$(4^N D^{2N+1} + 4^{N-1}s_1 D^{2N-1} + \ldots + 4^{N-2}s_{N-1}D^3 - zD + m)p_m^{[N]} = 0. \tag{37}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 6. *Полиномы $p_m^{[N]}(z)$ удовлетворяют разностному уравнению $(2N+1)$-го порядка*

$$(m+2N+1)p_{m+2N+1}^{[N]} - zp_{m+2N}^{[N]} + 4s_{N-1}p_{m+2N-2}^{[N]} + \ldots + 4^{N-1}s_1 p_{m+2}^{[N]} + 4^N p_m^{[N]} = 0 \tag{38}$$

с начальными полиномами $p_0^{[N]}(z) = 1$, $p_1^{[N]}(z) = z$, и $p_3^{[N]}(z)$, $p_4^{[N]}(z)$, $\ldots$, $p_{2N}^{[N]}(z)$, определяемыми рекуррентными соотношениями (34), (35), и линейному дифференциальному уравнению (37) порядка $2N+1$.

Заметим, что в случае $s_1 = s_2 = \ldots = s_{N-1} = 0$, соответствующем стационарной иерархии $P_{34}^{[2N]}$, $N \in \mathbb{N}$, уравнение (37) имеет вид

$$(4^N D^k - zD + m)p_m^{[N]} = 0, \quad k = 2N+1, \tag{39}$$

для которого единственная особая точка $z=\infty$ является иррегулярной. Общее решение уравнения (39) представляется в виде

$$p_m^{[N]}=c_1\,{}_1F_{2N}\left(-\frac{m}{k};\frac{1}{k},\frac{2}{k},\dots,\frac{k-1}{k};\varsigma\right)+c_2z\,{}_1F_{2N}\left(\frac{1-m}{k};\frac{2}{k},\frac{3}{k},\dots,\frac{k-1}{k},\frac{k+1}{k};\varsigma\right)+\dots$$

$$\dots+c_kz^{k-1}\,{}_1F_{2N}\left(\frac{k-1-m}{k};\frac{k+1}{k},\frac{k+2}{k},\dots,\frac{2k-1}{k};\varsigma\right),\tag{40}$$

в котором $\varsigma=z^k(2k)^{-2N}$, c_k – произвольные постоянные, а ${}_1F_q(a;b_1,b_2,\dots,b_q;\varsigma)$ – обобщённая гипергеометрическая функция, определяемая равенством

$${}_1F_q(a;b_1,b_2,\dots,b_q;\varsigma)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(a)_j}{(b_1)_j,(b_2)_j,\dots,(b_q)_j}\frac{\varsigma^j}{j!},$$

где

$$(a)_j=a(a+1)\dots(a+j-1)=\Gamma(a+j)/\Gamma(a)$$

и $\Gamma(\cdot)$ – гамма функция. Если $m\in\mathbb{Z}^+$, как в нашем случае, то одна из гипергеометрических функций, входящих в представление (40), является полиномом по z, так как в этом случае функция ${}_1F_{2N}(-m;b_1,b_2,\dots,b_{2N};z^k(2k)^{-2N})$ – полином по z, который и определяет полином $p_m^{[N]}(z)$. Заметим, что при $N=1$ уравнения (37), (39) с общим решением (40) в этом случае получены в [28].

В качестве примера рассмотрим случай $N=3$, т.е. уравнение (10), имеющее свободные параметры s_1, s_2, σ. Пусть, как в теореме 5, $\sigma=m+1/2$, $m\in\mathbb{Z}^+$. Тогда из рекуррентных соотношений (34), (35) с начальными полиномами $p_0^{[3]}=1$, $p_1^{[3]}=z$ последовательно находим первые полиномы $p_m^{[3]}$:

$$p_2^{[3]}=z^2/2!,\quad p_3^{[3]}=(z^3-8s_2)/3!,\quad p_4^{[3]}=(z^4-32zs_2)/4!,$$

$$p_5^{[3]}=(z^5-384s_1-80z^2s_2)/5!,$$

$$p_6^{[3]}=(z^6-2304zs_1-160z^3s_2+640s_2^2)/6!,$$

$$p_7^{[3]}=(z^7-46080-8064z^2s_1-280z^4s_2+4480zs_2^2)/7!,$$

$$p_8^{[3]}=(z^8-368640z-21504z^3s_1-448z^5s_2+172032s_1s_2+17920z^2s_2^2)/8!,$$

которые при $N=3$ удовлетворяют уравнениям (37), (38) и в силу представлений (29), (30) определяют первые рациональные решения $q^{[3]}(z,\sigma,s_1,s_2)$ уравнения (10):

$$q^{[3]}(z,\pm1/2,s_1,s_2)=0,\quad q^{[3]}(z,\pm3/2,s_1,s_2)=-\frac{2}{z^2},$$

$$q^{[3]}(z,\pm5/2,s_1,s_2)=\frac{-6(z^4-8zs_2)}{(z^3+4s_2)^2},$$

$$q^{[3]}(z,\pm7/2,s_1,s_2)=-\frac{12(z^{10}+600z^4s_2^2+1600zs_2^3+432z^5s_1+3456s_1^2)}{(z^6+20z^3s_2-80s_2^2-144zs_1)^2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939.
2. *Gromak V.I., Laine I., Shimomura S.* Painlevé Differential Equations in the Complex Plane. De Gruyter. Studies in Mathematics. V. 28. Berlin; New-York, 2002.
3. *Кудряшов Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.; Ижевск, 2004.
4. *Flashka H., Newell A.C.* Monodromy and spectrum preserving deformations. I // Commun. Math. Phys. 1980. V. 76. P. 65–116.
5. *Its A.R., Novakshenov V.Yu.* The Isomonodromy Deformation Method in the Theory of Painlevé Equations // Lect. Notes in Math. 1986. V. 1191. P. 1–93.
6. *Итс А.Р., Капаев А.А., Новокшенов В.Ю., Фокас А.С.* Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана. М.; Ижевск, 2005.
7. *Babelon O., Bernard D., Talon M.* Introduction to Classical Integrable Systems. New York, 2003.
8. *Conte R., Musette M.* The Painlevé Handbook. Dordrecht, 2008.
9. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики. Догопрудный, 2010.
10. *Airault H.* Rational solutions of Painlevé equations // Stud. Appl. Math. 1979. V. 61. P. 31–53.
11. *Noumi M., Yamada Y.* Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$ // Funkcial. Ekvac. 1998. V. 41. P. 483–503.
12. *Gromak V.I.* Bäcklund transformations of the Painlevé equations and their applications // The Painlevé Property. One Century Later / Ed. R. Conte. CRM Series in Mathematical Physics. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo, 1999. P. 687–734.
13. *Clarkson P.A., Joshi N., Pickering A.* Bäcklund transformations for the second Painlevé hierarchy: a modified truncation approach // Inverse Problems. 1999. V. 15. P. 175–187.
14. *Kudryashov N.A.* One generalization of the second Painlevé hierarchy // J. Phys. A. Math. Gen. 2002. № 35. P. 93–99.
15. *Clarkson P.A., Mansfield E.L.* The second Painlevé equation, its hierarchy and associated special polynomials // Nonlinearity. 2003. V. 16. P. R1–R26.
16. *Joshi N.* The second Painlevé hierarchy and the stationary KdV hierarchy // Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences. 2004. V. 40. № 3. P. 1039–1061.
17. *Демина М.В., Кудряшов Н.А.* Специальные полиномы и рациональные решения иерархии второго уравнения Пенлеве // Теор. и мат. физика. 2007. Т. 153. № 1. С. 58–67.
18. *Sakka A.H.* Linear problems and hierarchies of Painlevé equations // J. Phys. A. Math. Theor. 2009. V. 42. P. 025210.
19. *Громак В.И.* К теории уравнений Пенлеве высших порядков // IX Белорус. мат. конф. Тез. докл. 3–6 ноября 2004 г., Гродно. Ч. 1. Гродно, 2004. С. 115–116.
20. *Громак В.И.* Аналитические свойства решений уравнений обобщённой иерархии второго уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1017–1033.
21. *Bobrova I.* On symmetries of the non-stationary $P_{II}^{(n)}$ hierarchy and their applications // arXiv: 2010.10617v2 [nlin.SI].
22. *Витгих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М., 1960.
23. *Li Y., He Y.* On analytic properties of higher analogs of the second Painlevé equation // J. Math. Phys. 2002. V. 43. № 2. P. 1106–1115.
24. *Громак В.И., Голубева Л.Л.* О решениях второго уравнения Пенлеве // University of Padlasie, Institute of Math. and Phys. Siedlce, 2001. V. 40. P. 79–84.
25. *Яблонский А.И.* О рациональных решениях второго уравнения Пенлеве // Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. наук. 1959. № 3. С. 30–35.
26. *Воробьев А.Р.* О рациональных решениях второго уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. С. 79–81.
27. *Kajiwara K., Ohta Y.* Determinant structure of the rational solutions for the Painlevé II equation // J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 4393–4704.
28. *Clarkson P. A.* Painlevé equations – nonlinear special functions // Lect. Notes in Math. 2006. V. 1883. P. 331–411.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 21.10.2021 г.
После доработки 18.01.2022 г.
Принята к публикации 07.02.2022 г.

EDN: ACBKAQ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 164–173

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.52

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЦИКЛОВ У ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2022 г. С. С. Мамонов, И. В. Ионова, А. О. Харламова

Рассматривается дифференциальная система третьего порядка, представляющая собой обобщение системы, описывающей математическую модель явления фазовой синхронизации. Получены достаточные условия существования у этой системы седлового цикла первого рода. Доказательство условий основывается на построении положительно инвариантного тороидального множества с использованием двух цилиндрических поверхностей, границы которых определяются предельными циклами дифференциальной системы второго порядка.

DOI: 10.31857/S0374064122020030

Введение. В настоящей работе рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = c^{\mathrm{T}}x + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^2$, $\sigma \in \mathbb{R}$ – фазовые переменные, точка над символом – производная по времени t, векторы $b, c \in \mathbb{R}^2$, числа $u \in [0,1]$ и $\alpha_1, \rho_1, \rho_0 \in \mathbb{R}$ и постоянная 2×2-матрица A заданы, заданная функция $\varphi(\sigma)$ является непрерывной и Δ-периодической. При выполнении равенства $u = 0$ система (1) является математической моделью системы фазовой синхронизации с фильтром, имеющим дробно-рациональную частотную характеристику с запаздыванием [1–14]. Запаздывание в системе фазовой автоподстройки определяется значением параметра $\rho = \rho_1 + \rho_0 > 0$, при отсутствии запаздывания значение ρ равно нулю [1, 12]. В случае $\rho = 0$, $u = 0$ изучению системы фазовой автоподстройки посвящены многочисленные работы [1–14]. Для системы (1) рассматривается задача определения седловых и устойчивых предельных циклов первого рода [1, 4, 5, 10–13]. Наличие предельных циклов обеспечивает для системы фазовой синхронизации существование режимов скрытой квазисинхронизации и мультистабильности. При этом скрытая квазисинхронизация определяется скрытыми предельными циклами, для которых $\langle\dot{\sigma}\rangle = T^{-1}\int_0^T \dot{\sigma}(t)\,dt = 0$ [5–7, 9, 12].

В данной работе на основе метода нелокального сведения [1–5] с использованием результатов работ [10, 11] получены достаточные условия существования нескольких предельных циклов первого рода у системы (1).

1. Условия существования седлового цикла системы.

Теорема 1. *Пусть для системы (1) выполняются следующие предположения:*

1) верно неравенство $c^{\mathrm{T}}b = -\Gamma < 0$, а вектор l, задаваемый равенством $l^{\mathrm{T}} = c^{\mathrm{T}}A$, линейно независим с вектором c и имеют место соотношения: $l^{\mathrm{T}}b = -\nu_1$, $l^{\mathrm{T}}A = -\alpha_1 l^{\mathrm{T}} - \beta_1 c^{\mathrm{T}}$, где $\beta_1 > 0$ и $\nu_1\beta_1^{-1} = \rho_1$;

2) Δ-периодическая функция $\varphi(\sigma)$ имеет на отрезке $[0,\Delta]$ два нуля $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$, в которых её производная удовлетворяет неравенствам $d\varphi(0)/d\sigma > 0$ и $d\varphi(\tilde{\sigma}_2)/d\sigma < 0$, а сама производная $d\varphi(\sigma)/d\sigma$ на отрезке $[0,\Delta]$ ограничена;

3) существуют положительные числа λ_1, λ_2 и r_1, при которых система дифференциальных уравнений второго порядка

$$\dot{y} = -\lambda_1 y - \lambda_2\sigma - \Gamma\varphi(\sigma) - \varepsilon, \quad \dot{\sigma} = y + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma \tag{2}$$

при $\varepsilon = -\varepsilon_1^-$ таком, что $r_1 < \varepsilon_1^-$, имеет решение, определяющее функцию $f_1^-(\sigma)$, неположительную на некотором отрезке $[-\sigma_1, \sigma_2]$, где $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, и обращающуюся в нуль только в его концах;

4) существует положительное число r_2, *для которого система (2) при* $\varepsilon = \varepsilon_1^+$ *таком, что* $\varepsilon_1^+ > r_2$, *имеет решение, определяющее неотрицательную на отрезке* $[0, \sigma_2]$ *функцию* $f_{11}^+(\sigma)$, *равную нулю только в точке* σ_2, *и неотрицательную на отрезке* $[-\sigma_1, 0]$ *функцию* $f_{12}^+(\sigma)$, *равную нулю только в точке* $-\sigma_1$, *причём* $f_{12}^+(0) < f_{11}^+(0)$;

5) система (2) при $\varepsilon = \varepsilon_2^-$ *таком, что* $r_2 < \varepsilon_2^-$, *имеет решение, определяющее на некотором отрезке* $[-\sigma_3, \sigma_4]$, *где* $-\sigma_3 < -\sigma_1$ *и* $\sigma_2 < \sigma_4$, *функцию* $f_2^-(\sigma)$, *обращающуюся в нуль в концах этого отрезка и удовлетворяющую неравенству* $f_2^-(\sigma) < f_1^-(\sigma)$ *на интервале* $(-\sigma_1, \sigma_2)$;

6) система (2) при $\varepsilon = -\varepsilon_2^+$ *таком, что* $r_1 < \varepsilon_2^+$, *имеет решение, определяющее на отрезке* $[0, \sigma_4]$ *функцию* $f_{21}^+(\sigma)$, *обращающуюся в нуль в точке* σ_4 *и удовлетворяющую неравенству* $f_{21}^+(\sigma) > f_{11}^+(\sigma)$ *на полуинтервале* $[0, \sigma_2)$, *и на отрезке* $[-\sigma_3, 0]$ *функцию* $f_{22}^+(\sigma)$, *обращающуюся в нуль в точке* $-\sigma_3$ *и удовлетворяющую неравенству* $f_{22}^+(\sigma) > f_{12}^+(\sigma)$ *на полуинтервале* $[-\sigma_1, 0)$, *причём* $f_{22}^+(0) > f_{21}^+(0)$;

7) для всех $\sigma \in [-\sigma_3, -\sigma_1]$ *справедливо неравенство* $\lambda_2\sigma + r_2 + \Gamma\varphi(\sigma) < 0$;

8) имеет место равенство $\lambda_2 = \beta_1 + \lambda_1(\lambda_1 - \alpha_1)$, *и для значений* $\sigma \in [-\sigma_3, \sigma_4]$ *выполняется неравенство*

$$\psi_1(\sigma) = (\lambda_2\rho_1 - \nu_1 - \lambda_1\Gamma + \lambda_2\rho_0(1-u))\varphi(\sigma) - \lambda_2(\alpha_1 u + \lambda_1 - \alpha_1)\sigma - (\alpha_1 - \lambda_1)r_1 < 0;$$

9) для любого $\sigma \in [-\sigma_3, \sigma_4]$ *справедливо неравенство*

$$\psi_2(\sigma) = (\lambda_2\rho_1 - \nu_1 - \lambda_1\Gamma + \lambda_2\rho_0(1-u))\varphi(\sigma) - \lambda_2(\alpha_1 u + \lambda_1 - \alpha_1)\sigma + (\alpha_1 - \lambda_1)r_2 > 0;$$

10) если для функции

$$\psi_4(\sigma) = \Gamma\varphi(\sigma) - \lambda_1\psi_3(\sigma) + \lambda_2\sigma,$$

где $\psi_3(\sigma) = \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma$, *при некотором значении* σ *выполняются неравенства* $-r_2 < \psi_4(\sigma) < r_1$, *то справедливо включение* $\sigma \in [-\tau_2, \tau_1]$, *где* $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$;

11) функция $\psi_5(\sigma) = -\alpha_1\Gamma\varphi(\sigma) - \nu_1\varphi(\sigma) + \beta_1\psi_3(\sigma)$ *на сегменте* $[-\tau_2, \tau_1] \bigcap [-\sigma_3, \sigma_4]$ *имеет единственный нуль* $\psi_5(0) = 0$.

Тогда система (1) имеет седловой предельный цикл первого рода.

Доказательство. Рассмотрим функции $W_i(z) = l^{\mathrm{T}}x + \lambda_1 c^{\mathrm{T}}x + \lambda_2\sigma + (-1)^i r_i$, $P(z) = c^{\mathrm{T}}x$, $V_{1i}^+(z) = c^{\mathrm{T}}x - f_{1i}^+(\sigma)$, $V_{2i}^+(z) = c^{\mathrm{T}}x - f_{2i}^+(\sigma)$, $V_i^-(z) = c^{\mathrm{T}}x - f_i^-(\sigma)$, где $i = 1, 2$, $z = (x^{\mathrm{T}}, \sigma)^{\mathrm{T}}$, числа r_1, r_2, λ_1, λ_2 и функции $f_{11}^+(\sigma)$, $f_{12}^+(\sigma)$, $f_1^-(\sigma)$, $f_{21}^+(\sigma)$, $f_{22}^+(\sigma)$, $f_2^-(\sigma)$ удовлетворяют условиям 3)–11) теоремы.

Используя значения σ_1, σ_2 из условия 3) теоремы, определим поверхности

$$\partial Q_{11} = \{z : V_{11}^+(z) = c^{\mathrm{T}}x - f_{11}^+(\sigma) = 0, \quad \sigma \in [0, \sigma_2]\},$$

$$\partial Q_{12} = \{z : V_{12}^+(z) = c^{\mathrm{T}}x - f_{12}^+(\sigma) = 0, \quad \sigma \in [-\sigma_1, 0]\},$$

$$\partial Q_2 = \{z : V_1^-(z) = c^{\mathrm{T}}x - f_1^-(\sigma) = 0, \quad \sigma \in [-\sigma_1, \sigma_2]\},$$

$$\partial Q_{01} = \{z : f_0(\sigma) = \sigma = 0, \quad f_{12}^+(0) \leqslant c^{\mathrm{T}}x \leqslant f_{11}^+(0)\}.$$

Пусть $\partial Q = \partial Q_{11} \bigcup \partial Q_{12} \bigcup \partial Q_2 \bigcup \partial Q_{01}$, тогда ∂Q является цилиндрической поверхностью. Обозначим внешность цилиндрической поверхности вместе с поверхностью ∂Q через Q. Значения σ_3, σ_4 из условия 5) теоремы позволяют определить поверхности

$$\partial D_{21} = \{z : V_{21}^+(z) = c^{\mathrm{T}}x - f_{21}^+(\sigma) = 0, \quad \sigma \in [0, \sigma_4]\},$$

$$\partial D_{22} = \{z : V_{22}^+(z) = c^{\mathrm{T}}x - f_{22}^+(\sigma) = 0, \quad \sigma \in [-\sigma_3, 0]\},$$

$$\partial D_2 = \{z : V_2^-(z) = c^{\mathrm{T}}x - f_2^-(\sigma) = 0, \quad \sigma \in [-\sigma_3, \sigma_4]\},$$

$$\partial Q_{02} = \{z : f_0(\sigma) := \sigma = 0, \quad f_{21}^+(0) \leqslant c^{\mathrm{T}}x \leqslant f_{22}^+(0)\}.$$

Пусть $\partial D = \partial D_{21} \bigcup \partial D_{22} \bigcup \partial D_2 \bigcup \partial D_{02}$, тогда ∂D является цилиндрической поверхностью. Обозначим внутренность цилиндрической поверхности ∂D вместе с поверхностью ∂D через D. Используя области Q и D, определим множество

$$G = Q \bigcap D \bigcap \{z : W_1(z) \leqslant 0\} \bigcap \{z : W_2(z) \geqslant 0\}.$$

Строение множества G представлено на рис. 1.

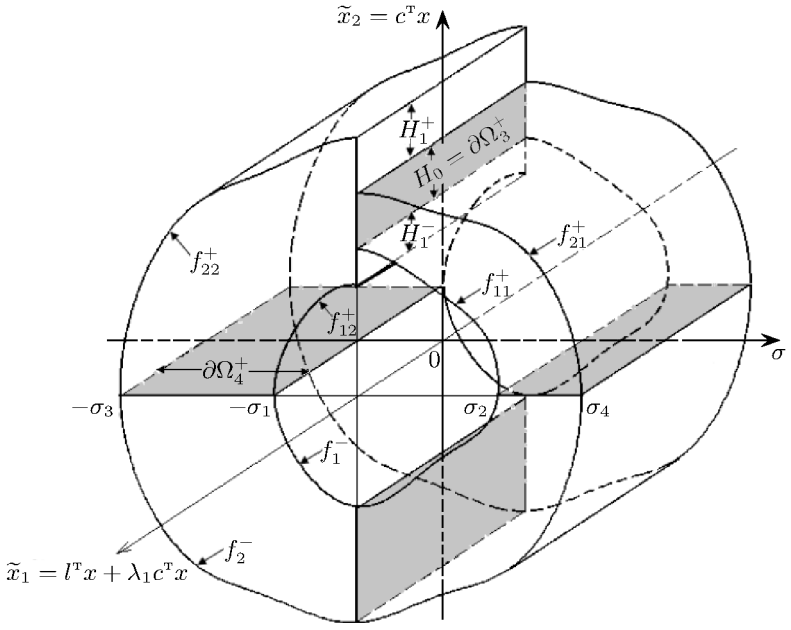

Рис. 1. Множество G в координатах $\widetilde{x}_1 = l^{\mathrm{T}}x + \lambda_1 c^{\mathrm{T}}x$, $\widetilde{x}_2 = c^{\mathrm{T}}x$, σ.

Множество G представим в виде объединения $G = G_1 \bigcup G_2$ множеств G_1 и G_2, где

$$G_1 = (G \bigcap \{z : c^{\mathrm{T}}x \leqslant 0\}) \bigcup (G \bigcap \{z : c^{\mathrm{T}}x \geqslant 0, \quad \sigma \geqslant 0\}),$$

$$G_2 = G \bigcap \{z : c^{\mathrm{T}}x \geqslant 0, \quad \sigma \leqslant 0\}.$$

Рассмотрим множества G_1, $L = \{z : W_1 \leqslant 0, \ W_2 \geqslant 0\}$,

$$\partial Q_{03} = \{z : f_0(\sigma) = \sigma = 0, \quad f_{11}^+(0) \leqslant c^{\mathrm{T}}x \leqslant f_{21}^+(0)\},$$

$$\partial Q_3 = \{z : P(z) = c^{\mathrm{T}}x = 0, -\sigma_3 \leqslant \sigma \leqslant -\sigma_1\}.$$

Граница ∂G_1 множества G_1 определяется равенствами

$$\partial G_1 = \partial\Omega_1^+ \bigcup \partial\Omega_2^+ \bigcup \partial\Omega_3^+ \bigcup \partial\Omega_4^+ \bigcup \partial\Omega_5^- \bigcup \partial\Omega_6^- \bigcup \partial\Omega_7^- \bigcup \partial\Omega_8^+,$$

$$\partial\Omega_1^+ = \partial Q_{11} \bigcap L, \quad \partial\Omega_2^+ = \partial Q_2 \bigcap L, \quad \partial\Omega_3^+ = \partial Q_{03} \bigcap L,$$
$$\partial\Omega_4^+ = \partial Q_3 \bigcap L, \quad \partial\Omega_5^- = \partial D_{21} \bigcap L, \quad \partial\Omega_6^- = \partial D_2 \bigcap L,$$
$$\partial\Omega_7^- = G_1 \bigcap \{z : W_1(z) = 0\}, \quad \partial\Omega_8^+ = G_1 \bigcap \{z : W_2(z) = 0\}.$$

Для вектора $z \in \partial\Omega_1^+$ справедливы соотношения

$$c^{\mathrm{T}}x = f_{11}^+(\sigma), \quad \sigma \in [0, \sigma_2],$$

$$l^{\mathrm{T}}x \geqslant -r_2 - \lambda_1 c^{\mathrm{T}}x - \lambda_2 \sigma. \tag{3}$$

Используя эти соотношения и условия 1) и 4) теоремы, найдём и оценим снизу производную функции $V_{11}^+(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_1^+$:

$$\dot V_{11}^+(z) = l^{\mathrm T}x - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{df_{11}^+(\sigma)}{d\sigma}(f_{11}^+(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma) \geqslant$$

$$\geqslant -r_2 - \lambda_2\sigma - \lambda_1 f_{11}^+(\sigma) - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{df_{11}^+(\sigma)}{d\sigma}(f_{11}^+(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma) =$$

$$= -r_2 + \varepsilon_1^+ > 0. \tag{4}$$

Для вектора $z \in \partial\Omega_2^+$ выполняются соотношения

$$c^{\mathrm T}x = f_1^-(\sigma), \quad \sigma \in [-\sigma_1, \sigma_2], \tag{5}$$

$$l^{\mathrm T}x \leqslant r_1 - \lambda_1 c^{\mathrm T}x - \lambda_2\sigma. \tag{6}$$

Найдём и оценим сверху производную функции $V_1^-(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_2^+$. Используя соотношения (5), (6) и условия 1) и 3) теоремы, получаем

$$\dot V_1^-(z) = l^{\mathrm T}x - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{df_1^-(\sigma)}{d\sigma}(f_1^-(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma) \leqslant$$

$$\leqslant r_1 - \lambda_2\sigma - \lambda_1 f_1^-(\sigma) - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{df_1^-(\sigma)}{d\sigma}(f_1^-(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma) =$$

$$= r_1 - \varepsilon_1^- < 0. \tag{7}$$

Найдём и оценим снизу производную функции $f_0(\sigma) \equiv \sigma$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_3^+$. Применяя условие 2) теоремы, будем иметь

$$\dot f_0(\sigma) = c^{\mathrm T}x + \rho_1\varphi(0) + \rho_0(1-u)\varphi(0) - \alpha_1 u\sigma = c^{\mathrm T}x \geqslant f_{11}^+(0) > 0. \tag{8}$$

Рассмотрим множество $\partial\Omega_4^+$. Если $z \in \partial\Omega_4^+$, то справедливы оценка (3) и равенство

$$c^{\mathrm T}x = 0, \quad \sigma \in [-\sigma_3, -\sigma_1]. \tag{9}$$

В силу условий 1) и 7) теоремы и соотношений (3), (9) заключаем, что производная функции $P(z) = c^{\mathrm T}x$ в силу системы (1) удовлетворяет на множестве $\partial\Omega_4^+$ соотношению

$$\dot P(z) = l^{\mathrm T}x - \Gamma\varphi(\sigma) \geqslant -r_2 - \lambda_2\sigma - \Gamma\varphi(\sigma) > 0. \tag{10}$$

Пусть $z \in \partial\Omega_5^-$, тогда справедливы оценка (6) и равенство

$$c^{\mathrm T}x = f_{21}^+(\sigma), \quad \sigma \in [0, \sigma_4]. \tag{11}$$

Используя соотношения (6), (11) и условия 1) и 6) теоремы найдём и оценим сверху производную функции $V_{21}^+(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_5^-$:

$$\dot V_{21}^+(z) = l^{\mathrm T}x - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{df_{21}^+(\sigma)}{d\sigma}(f_{21}^+(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma) \leqslant$$

$$\leqslant r_1 - \lambda_2\sigma - \lambda_1 f_{21}^+(\sigma) - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{df_{21}^+(\sigma)}{d\sigma}(f_{21}^+(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma) =$$

$$= r_1 - \varepsilon_2^+ < 0. \tag{12}$$

Для множества $\partial\Omega_6^-$ выполняется оценка (3) и равенство

$$c^{\mathrm T}x = f_2^-(\sigma), \quad \sigma \in [-\sigma_3, \sigma_4]. \tag{13}$$

Найдём и оценим снизу производную функции $V_2^-(\sigma)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_6^-$. Применяя соотношения (3), (13) и условия 1) и 5) теоремы, получаем

$$\dot{V}_2^{\,-}(z) \geqslant -r_2 - \lambda_2\sigma - \lambda_1 f_2^-(\sigma) - \Gamma\varphi(\sigma) -$$

$$- \frac{df_2^-(\sigma)}{d\sigma}(f_2^-(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma) = -r_2 + \varepsilon_2^- > 0. \tag{14}$$

Пусть $z \in \partial\Omega_7^-$, тогда выполняется условие 8) теоремы и справедливо равенство $l^{\mathrm{T}}x = r_1 - \lambda_2\sigma - \lambda_1 c^{\mathrm{T}}x$. Воспользовавшись этим равенством и условиями 1) и 8) теоремы, найдём и оценим сверху производную функции $W_1(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_7^-$:

$$\dot{W}_1(z) = -\alpha_1 l^{\mathrm{T}}x - \beta_1 c^{\mathrm{T}}x - \nu_1\varphi(\sigma) + \lambda_1 l^{\mathrm{T}}x - \lambda_1\Gamma\varphi(\sigma) + \lambda_2 c^{\mathrm{T}}x + \lambda_2\rho_1\varphi(\sigma) +$$

$$+ \lambda_2\rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \lambda_2\alpha_1 u\sigma = (\lambda_1 - \alpha_1)l^{\mathrm{T}}x + (\lambda_2 - \beta_1)c^{\mathrm{T}}x +$$

$$+ (\lambda_2\rho_1 - \nu_1 - \lambda_1\Gamma + \lambda_2\rho_0(1-u))\varphi(\sigma) - \lambda_2\alpha_1 u\sigma = (\lambda_1 - \alpha_1)r_1 - (\lambda_1 - \alpha_1)\lambda_2\sigma -$$

$$- (\lambda_1 - \alpha_1)\lambda_1 c^{\mathrm{T}}x + (\lambda_2 - \beta_1)c^{\mathrm{T}}x + (\lambda_2\rho_1 - \nu_1 - \lambda_1\Gamma + \lambda_2\rho_0(1-u))\varphi(\sigma) -$$

$$- \lambda_2\alpha_1 u\sigma = (\lambda_2 - \beta_1 - \lambda_1(\lambda_1 - \alpha_1))c^{\mathrm{T}}x - (\lambda_2\alpha_1 u + \lambda_2(\lambda_1 - \alpha_1))\sigma +$$

$$+ (\lambda_2\rho_1 - \nu_1 - \lambda_1\Gamma + \lambda_2\rho_0(1-u))\varphi(\sigma) - (\alpha_1 - \lambda_1)r_1 = \psi_1(\sigma) < 0. \tag{15}$$

Для $z \in \partial\Omega_8^+$ выполняются равенства $\lambda_2 = \beta_1 + \lambda_1(\lambda_1 - \alpha_1)$ и $l^{\mathrm{T}}x = -r_2 - \lambda_2\sigma - \lambda_1 c^{\mathrm{T}}x$. Учитывая эти равенства и условия 1) и 9) теоремы, найдём и оценим снизу производную функции $W_2(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_8^+$:

$$\dot{W}_2(z) = (\lambda_2 - \beta_1 - \lambda_1(\lambda_1 - \alpha_1))c^{\mathrm{T}}x - (\lambda_2\alpha_1 u + \lambda_2(\lambda_1 - \alpha_1))\sigma +$$

$$+ (\lambda_2\rho_1 - \nu_1 - \lambda_1\Gamma + \lambda_2\rho_0(1-u))\varphi(\sigma) + (\alpha_1 - \lambda_1)r_2 = \psi_2(\sigma) > 0. \tag{16}$$

Обозначим

$$\partial\Omega_3^+ = \{z : f_0(\sigma) = \sigma = 0, \quad f_{11}^+(0) \leqslant c^{\mathrm{T}}x \leqslant f_{21}^+(0), \quad W_1(z) \leqslant 0, \quad W_2(z) \geqslant 0\},$$

$$\partial\Omega_4^+ = \{z : P(z) = c^{\mathrm{T}}x = 0, \quad -\sigma_3 \leqslant \sigma \leqslant -\sigma_1, \quad W_1(z) \leqslant 0, \quad W_2(z) \geqslant 0\}.$$

Пусть T_1 – оператор сдвига по траекториям системы (1), определённый на множестве $\partial\Omega_3^+$. Покажем, что $T_1(\partial\Omega_3^+) \subset \partial\Omega_4^+$. Из построения множества G_1 следует существование $\overline{\varepsilon} > 0$ такого, что при любом $z \in G_1$ выполняется неравенство

$$(c^{\mathrm{T}}x)^2 + \sigma^2 \geqslant \overline{\varepsilon}. \tag{17}$$

Для множества G_1 поверхности $\partial\Omega_3^+$ и $\partial\Omega_4^+$ являются частью границы. Пусть $z_0 \in \partial\Omega_3^+$, покажем, что для решения $z(t, z_0)$ системы (1) с начальными условиями $z(0, z_0) = z_0$ найдётся t_1 такое, что $z(t_1, z_0) \notin G_1$. Предположим противное, т.е. что для любого $t > 0$ выполняется включение $z(t, z_0) \in G_1$. Множество G_1 является ограниченным, следовательно, ограничено и решение $z(t, z_0)$.

В силу системы (1) справедливо соотношение

$$\int_0^t \dot{\sigma}(t)\,dt = \int_0^t (c^{\mathrm{T}}x + \psi_3(\sigma))\,dt = \int_0^t (c^{\mathrm{T}}x + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma)\,dt = (\sigma(t) - \sigma(0)) \in \mathbb{R},$$

из которого вследствие леммы Барбалата [14, с. 230] вытекает равенство

$$\lim_{t\to+\infty}(c^{\mathrm{T}}x + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma)\,dt = \lim_{t\to+\infty}(c^{\mathrm{T}}x + \psi_3(\sigma)) = 0. \tag{18}$$

Используя условие 1) теоремы, найдём интегралы

$$\int_0^t c^{\mathrm{T}}\dot{x}\,dt = \int_0^t (l^{\mathrm{T}}x - \Gamma\varphi(\sigma))\,dt = c^{\mathrm{T}}(x(t) - x(0)) \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

$$\int_0^t l^{\mathrm{T}}\dot{x}\,dt = \int_0^t (-\alpha_1 l^{\mathrm{T}}x - \beta_1 c^{\mathrm{T}}x - \nu_1\varphi(\sigma))\,dt = l^{\mathrm{T}}(x(t) - x(0)) \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

С учётом (19), (20) и леммы Барбалата справедливы равенства

$$\lim_{t\to+\infty}(l^{\mathrm{T}}x - \Gamma\varphi(\sigma)) = 0, \tag{21}$$

$$\lim_{t\to+\infty}(-\alpha_1 l^{\mathrm{T}}x - \beta_1 c^{\mathrm{T}}x - \nu_1\varphi(\sigma)) = 0. \tag{22}$$

Так как $z(t, z_0) \in G_1$, то выполняется двойное неравенство

$$-r_2 \leqslant l^{\mathrm{T}}x + \lambda_1 c^{\mathrm{T}}x + \lambda_2\sigma \leqslant r_1. \tag{23}$$

В силу (18), (21), (23) для функции $\sigma(t)$ справедливы соотношения

$$-r_2 \leqslant \lim_{t\to+\infty}(\Gamma\varphi(\sigma) - \lambda_1\psi_3(\sigma) + \lambda_2\sigma) = \lim_{t\to+\infty}\psi_4(\sigma) \leqslant r_1,$$

из которых и условия 10) теоремы следует, что

$$-\tau_2 \leqslant \sigma \leqslant \tau_1. \tag{24}$$

Используя равенства (22), (21) и (18), получаем

$$\lim_{t\to+\infty}(-\alpha_1\Gamma\varphi(\sigma) + \beta_1\psi_3(\sigma) - \nu_1\varphi(\sigma)) = \lim_{t\to+\infty}\psi_5(\sigma) = 0. \tag{25}$$

Из условий 2) и 11) теоремы и соотношений (24), (25), (18) следует, что

$$\lim_{t\to+\infty}\sigma(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty}c^{\mathrm{T}}x = 0, \quad \lim_{t\to+\infty}((c^{\mathrm{T}}x)^2 + \sigma^2) = 0. \tag{26}$$

Равенства (17) и (26) одновременно выполняться не могут, поэтому существует t_1 такое, что $z(t_1, z_0) \notin G_1$. С учётом соотношений (4), (7), (8), (10), (12), (14)–(16) заключаем, что решение $z(t, z_0)$ может пересечь границу множества G_1 только через поверхность $\partial\Omega_4^+$. Следовательно, существует $\bar{t}_1$, для которого $z(\bar{t}_1, z_0) \in \partial\Omega_4^+$. Итак, оператор T_1 отображает множество $\partial\Omega_3^+$ в множество $\partial\Omega_4^+$, $T_1(\partial\Omega_3^+) \subset \partial\Omega_4^+$.

Рассмотрим множества G_2 и $L = \{z : W_1(z) \leqslant 0, W_2(z) \geqslant 0\}$. Граница ∂G_2 множества G_2 определяется равенствами

$$\partial G_1 = \partial\Omega_4^+ \bigcup \partial\Omega_9^+ \bigcup \partial\Omega_{10}^+ \bigcup \partial\Omega_{11}^- \bigcup \partial\Omega_{12}^- \bigcup \partial\Omega_{13}^+,$$

$$\partial\Omega_4^+ = \partial Q_3 \bigcap L, \quad \partial\Omega_9^+ = \partial Q_{12} \bigcap L, \quad \partial\Omega_{10}^+ = \partial Q_{02} \bigcap L, \quad \partial\Omega_{11}^- = \partial D_{22} \bigcap L,$$
$$\partial\Omega_{12}^- = G_2 \bigcap \{z : W_1(z) = 0\}, \quad \partial\Omega_{13}^+ = G_2 \bigcap \{z : W_2(z) = 0\}.$$

Обозначим через $\dot{V}_{\partial\Omega}$ производную функции $V(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega$. Вследствие оценок (8), (10), (15), (16) верны неравенства

$$\dot{f}_0(\sigma)_{\partial\Omega_{10}^+} > 0, \quad \dot{P}(z)_{\partial\Omega_4^+} > 0, \quad \dot{W}_1(z)_{\partial\Omega_{12}^-} < 0, \quad \dot{W}_2(z)_{\partial\Omega_{13}^+} > 0. \tag{27}$$

Пусть $z \in \partial\Omega_9^+$, тогда справедливо равенство $c^{\mathrm{T}}x = f_{12}^+(\sigma),\ \sigma \in [-\sigma_1, 0]$, используя которое и условия 1) и 4) теоремы, найдём и оценим снизу производную функции $V_{12}^+(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_9^+$:

$$\dot{V}_{12}^+(z)_{\partial\Omega_9^+} = l^{\mathrm{T}}x - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{df_{12}^+(\sigma)}{d\sigma}(f_{12}^+(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma) \geqslant$$

$$\geqslant -r_2 + \varepsilon_1^+ > 0. \tag{28}$$

Для $z \in \partial\Omega_{11}^-$ выполняется равенство

$$c^{\mathrm{T}}x = f_{22}^+(\sigma), \quad \sigma \in [-\sigma_3, 0]. \tag{29}$$

Найдём и оценим сверху производную функции $V_{22}^+(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_{11}^-$. С учётом соотношений (29), (7) и условий 1) и 6) теоремы получаем

$$\dot{V}_{22}^+(z)_{\partial\Omega_{11}^-} = l^{\mathrm{T}}x - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{df_{22}^+(\sigma)}{d\sigma}(f_{22}^+(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma) \leqslant$$

$$\leqslant r_1 - \varepsilon_2^+ < 0. \tag{30}$$

Обозначим через T_2 оператор сдвига по траекториям системы (1), определённый на множестве $\partial\Omega_4^+$. Множество G_2 является ограниченным. Рассмотрим решение $z(t, z_2)$ системы (1) с начальными условиями $z(0, z_2) = z_2 \in \partial\Omega_4^+$. Повторяя рассуждения, проведённые для множества G_1, и учитывая оценки (27), (28), (30), заключаем, что существует значение $\bar{t}_2$, для которого $z(\bar{t}_2, z_2) \in \partial\Omega_{10}^+$. Следовательно, оператор T_2 отображает множество $\partial\Omega_4^+$ в множество $\partial\Omega_{10}^+$, $T_2(\partial\Omega_4^+) \subset \partial\Omega_{10}^+$.

Используя операторы T_1 и T_2, определим оператор $T = T_2 \circ T_1$. Тогда оператор T отображает множество $\partial\Omega_3^+$ в множество $\partial\Omega_{10}^+$, $T(\partial\Omega_3^+) \subset \partial\Omega_{10}^+$, $\partial\Omega_3^+ \subset \partial\Omega_{10}^+$. В данном случае нет отображения множества $\partial\Omega_3^+$ в себя. Для определения неподвижной точки оператора T используем понятие вращения векторного поля [15].

Из условия 1) линейной независимости векторов l и c теоремы следует, что для матрицы $B = \|(l+\lambda_1)c, c\|$ существует обратная матрица B^{-1}. В системе (1) сделаем замену переменных $x = (B^{\mathrm{T}})^{-1}(\widetilde{x} + q)$, $q = \operatorname{colon}(q_1, k_0)$, $q_1 = 0$, $(f_{21}^+(0) + f_{11}^+(0))/2 = k_0$, $(f_{21}^+(0) - f_{11}^+(0))/2 = k_1 > 0$. Для отображения B_L, заданного равенством $\widetilde{x} = B^{\mathrm{T}}x - q$, имеем $\widetilde{x_1} = l^{\mathrm{T}}x + \lambda_1 c^{\mathrm{T}}x$, $\widetilde{x_2} = c^{\mathrm{T}}x - k_0$. Сделанная замена переменных является линейной, следовательно, отображает периодические функции в периодические. После сделанной замены переменные $\widetilde{x}$ переобозначим снова через x. Множества $\partial\Omega_3^+$, $\partial\Omega_{10}^+$ отображаются в множества $B_L(\partial\Omega_3^+) = H_0$, $B_L(\partial\Omega_{10}^+) = H = H_0 \bigcup H_1^+ \bigcup H_1^-$, где (ниже $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$)

$$H_0 = \{x : x_2 \leqslant k_1,\ \ x_2 \geqslant -k_1,\ \ x_1 \leqslant r_1,\ \ -r_2 \leqslant x_1\}, \quad \partial H_0 = L_1 \bigcup L_2 \bigcup L_3 \bigcup L_4,$$

$$L_1 = \{x : x_2 = k_1,\ \ x_1 \leqslant r_1,\ \ -r_2 \leqslant x_1\}, \quad L_2 = \{x : x_2 \leqslant k_1,\ \ x_2 \geqslant -k_1,\ \ x_1 = r_1\},$$

$$L_3 = \{x : x_2 = -k_1,\ \ x_1 \leqslant r_1,\ \ -r_2 \leqslant x_1\}, \ \ L_4 = \{x : x_2 \leqslant k_1,\ \ x_2 \geqslant -k_1,\ \ x_1 = -r_2\},$$

$$H_1^+ = \{x : x_2 \geqslant k_1,\ \ x_2 \leqslant f_{22}^+(0) - k_0 = k_2,\ \ x_1 \leqslant r_1,\ \ -r_2 \leqslant x_1\},$$

$$H_1^- = \{x : x_2 \geqslant f_{12}^+(0) - k_0 = -k_3,\ \ x_2 \leqslant -k_1,\ \ x_1 \leqslant r_1,\ \ -r_2 \leqslant x_1\}.$$

Пусть U – оператор сдвига по траекториям системы (1) после замены переменных B_L. В силу свойств оператора $T = T_2 \circ T_1$ выполняются включения

$$U(H_0) \subset H, \quad U(L_1) \subset H_1^+, \quad U(L_2) \subset H, \quad U(L_3) \subset H_1^-, \quad U(L_4) \subset H. \tag{31}$$

Оператор $U(x) = (x_1^*, x_2^*)^{\mathrm{T}} = x^*$ определяет на границе ∂H_0 ограниченной области H_0 векторное поле $S_U(x) = x - Ux = (x_1 - x_1^*, x_2 - x_2^*)^{\mathrm{T}} = x^*$ Для векторного поля S_U рассмотрим

линейный оператор $U_L(x) = A_L x$, где $A_L = \operatorname{diag}[\mu_1, \mu_2]$, $0 < \mu_1 < 1$, $\mu_2 > 1$. Оператор U_L определяет векторное поле $S_L = x - A_L x = ((1-\mu_1)x_1, (1-\mu_2)x_2)^{\mathrm{T}}$. Обозначим

$$S_0(x) = \frac{S_L(x)}{\|S_L(x)\|} + \frac{S_U(x)}{\|S_U(x)\|}$$

и покажем, что для любого $x \in \partial H_0$ вектор $S_0(x)$ ненулевой.

Пусть $\bar{x} \in L_1$, $U(L_1) \subset H_1^+$, $e_1 = (1,0)^{\mathrm{T}}$, $e_2 = (0,1)^{\mathrm{T}}$, тогда $\bar{x} = (\bar{x}_1, k_1)^{\mathrm{T}}$, $\bar{x}_1 \in [-r_2, r_1]$. Для вектора $U(\bar{x}) = \bar{x}^* = (\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*)^{\mathrm{T}}$ в силу включения $U(L_1) \subset H_1^+$ справедливы неравенства

$$0 < k_1 < \bar{x}_2^* < f_{22}^+(0) - k_0 = k_2, \quad -r_2 < \bar{x}_1^* < r_1. \tag{32}$$

Вследствие (32) и неравенства $\mu_2 > 1$ получаем, что

$$S_0(\bar{x})^{\mathrm{T}} e_2 = \left(\frac{S_L(\bar{x})}{\|S_L(\bar{x})\|} + \frac{S_U(\bar{x})}{\|S_U(\bar{x})\|}\right)^{\mathrm{T}} e_2 = \frac{1}{\|S_L(\bar{x})\|}(1-\mu_2)k_1 + \frac{1}{\|S_U(\bar{x})\|}(k_1 - \bar{x}_2^*) < 0,$$

откуда вытекает, что для любого $x \in L_1$ вектор $S_0(x)$ отличен от нулевого.

Пусть $\bar{x} \in L_4$, $U(L_4) \subset H$, тогда $\bar{x} = (-r_2, \bar{x}_2)^{\mathrm{T}}$, $\bar{x}_2 \in (-k_3, k_2)$. Пусть $U(\bar{x}) = \bar{x}^* = (\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*)^{\mathrm{T}}$. В силу включения $U(L_4) \subset H$ верны неравенства

$$-r_2 < \bar{x}_1^* < r_1, \quad 0 > -r_2 - \bar{x}_1^*,$$

из которых и неравенства $\mu_1 < 1$ следует, что

$$S_0(\bar{x})^{\mathrm{T}} e_1 = \left(\frac{S_L(\bar{x})}{\|S_L(\bar{x})\|} + \frac{S_U(\bar{x})}{\|S_U(\bar{x})\|}\right)^{\mathrm{T}} e_1 = \frac{1}{\|S_L(\bar{x})\|}(\mu_1 - 1)r_2 - \frac{1}{\|S_U(\bar{x})\|}(r_2 + \bar{x}_1^*) < 0.$$

Другими словами, для любого $x \in L_4$ вектор $S_0(x)$ отличен от нулевого. Аналогично тому, как это сделано для множеств L_1, L_4, с использованием включений (31) показывается, что и на множествах L_2, L_3 вектор $S_0(x)$ ненулевой. В силу [15, теорема 5.6] вращение $\gamma(S_U, \partial H_0)$ векторного поля S_U на множестве ∂H_0 равно вращению $\gamma(S_L, \partial H_0)$ линейного векторного поля S_L на множестве ∂H_0. Пусть $B_L = \operatorname{diag}[1-\mu_1, 1-\mu_2]$. Так как сумма кратностей $\beta(B_L)$ вещественных отрицательных собственных значений матрицы B_L равна единице, то $\gamma(S_L, \partial H_0) = (-1)^{\beta(B_L)} = -1$ и $\gamma(S_U, \partial H_0) = -1$. В силу [15, теорема 5.15] оператор U имеет на H_0 по крайней мере одну неподвижную точку $x^* \in H_0$, $Ux^* = x^*$. Неподвижная точка $z^* = (x^{*\mathrm{T}}, 0)^{\mathrm{T}}$ определяет начальные условия предельного цикла первого рода. Таким образом, система (1) имеет седловой предельный цикл первого рода, содержащийся во множестве G. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть для системы (1) выполнены условия 1)–3), 5), 7)–11) теоремы 1, в условии 4) вместо последнего неравенства выполняется неравенство $f_{12}^+(0) \geqslant f_{11}^+(0)$, а в условии 6) вместо последнего неравенства – неравенство $f_{22}^+(0) \leqslant f_{21}^+(0)$. Тогда система (1) имеет предельный цикл.*

Доказательство. Используя обозначения и рассуждения теоремы 1, показывается, что оператор U отображает замкнутое выпуклое множество H_0 в себя: $U(H_0) \subset H_0$. В силу теоремы Брауэра [15] оператор U имеет на H_0 по крайней мере одну неподвижную точку $x^* \in H_0$, $Ux^* = x^*$. Неподвижная точка $z^* = (x^{*\mathrm{T}}, 0)^{\mathrm{T}}$ определяет начальные условия предельного цикла первого рода. Таким образом, система (1) имеет предельный цикл первого рода, содержащийся во множестве G. Теорема доказана.

2. Проверка условий теоремы. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1), в которой

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -\nu_1 \\ -\Gamma \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_1 > 0, \quad \beta_1 > 0, \quad \rho_1 = \nu_1 \beta_1^{-1}, \quad \rho = \rho_1 + \rho_0. \tag{33}$$

Тогда $c^{\mathrm{T}}b = -\Gamma < 0$, $c^{\mathrm{T}}A = l^{\mathrm{T}}$, $l^{\mathrm{T}}b = -\nu_1 < 0$, $\operatorname{rang}||c, l|| = 2$, $l^{\mathrm{T}}A = -\alpha_1 l^{\mathrm{T}} - \beta_1 c^{\mathrm{T}}$. Для системы (1), (33) условие 1) теоремы 1 выполняется.

Пусть $\alpha_1 = 0.02$, $\beta_1 = 2.1$, $\Gamma = 4$, $\nu_1 = 1.24$, $\gamma = 0.18$, $u = 0.958$, $\rho_1 = 0.59$, $\rho_0 = 0.029$, $\varphi(\sigma) = -\gamma + \sin(\sigma + \arcsin\gamma)$, $\widetilde{\sigma}_1 = 0$, $\widetilde{\sigma}_2 = \pi - 2\arcsin\gamma = 2.8$. Тогда $\varphi(\widetilde{\sigma}_1) = \varphi(\widetilde{\sigma}_2) = 0$, $\dot{\varphi}(0) > 0$, $\dot{\varphi}(\widetilde{\sigma}_2) < 0$, функция $\varphi(\sigma)$ – периодическая с периодом $\Delta = 2\pi$. Уравнение $\varphi(\widetilde{\sigma}) = 0$ на сегменте $[0, \Delta]$ имеет два корня $\varphi(\widetilde{\sigma}_1) = \varphi(\widetilde{\sigma}_2) = 0$, $0 = \widetilde{\sigma}_1 < \widetilde{\sigma}_2 < \Delta$, при этом $\dot{\varphi}(\widetilde{\sigma})$ ограничена на сегменте $[0, \Delta]$. Для системы (1), (33) условие 2) теоремы 1 выполнено.

Для того чтобы выполнялись условия 3) и 4) теоремы 1, возьмём $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \beta_1 = 2.1$, $\varepsilon_1^- = \varepsilon_1^+ = \varepsilon_2^+ = \varepsilon_2^- = 0.92$, $r_1 = r_2 = 0.92 \cdot 10^{-10} < \varepsilon_1^-$. Пусть $-\sigma_1 = -3.11$, $\sigma_2 = 5.34$. Тогда при выбранных значениях σ_1, σ_2, ε_1^-, ε_1^+, r_1, r_2 система второго порядка (2) имеет решения, определяющие функции $f_1^-(\sigma)$, $f_{11}^+(\sigma)$, $f_{12}^+(\sigma)$, для которых выполнены условия 3) и 4) теоремы 1. Графики функций $f_1^-(\sigma)$, $f_{11}^+(\sigma)$, $f_{12}^+(\sigma)$ представлены на рис. 1.

Пусть $-\sigma_3 = -8.93$, $\sigma_4 = 8.48$. Тогда при выбранных значениях σ_3, σ_4, ε_2^-, ε_2^+, r_1, r_2 система второго порядка (2) имеет решения, определяющие функции $f_2^-(\sigma)$, $f_{21}^+(\sigma)$, $f_{22}^+(\sigma)$, для которых выполнены условия 5) и 6) теоремы 1. Графики функций $f_2^-(\sigma)$, $f_{21}^+(\sigma)$, $f_{22}^+(\sigma)$ показаны на рис. 1.

При $\sigma \in [-8.93, -3.11]$ верно неравенство $\lambda_2\sigma + r_2 + \Gamma\varphi(\sigma) < 0$, а для любого $\sigma \in [-8.93, 8.48]$ справедливы соотношения $\lambda_2 = \beta_1 = 2.1$, $\psi_1(\sigma) < 0$ и $\psi_2(\sigma) > 0$. Условия 7)–9) теоремы 1 выполнены.

При $\tau_1 = 0.154$, $\tau_2 = 0.151$ выполняется условие 10) теоремы 1, а функция $\psi_5(\sigma)$ на сегменте $[-\tau_2, \tau_1] \bigcup [-\sigma_3, \sigma_4]$ имеет единственный нуль $\psi_5(0) = 0$ (условие 11)). Для системы (1), (33) с приведёнными выше значениями выполнены все условия теоремы 1, поэтому эта система имеет седловой предельный цикл первого рода.

Из доказательства теоремы 1 следует, что начальные условия седлового цикла находятся в множестве H_0. Используя деление множества H_0 на части и вычисляя вращение векторного поля, численно определяются начальные условия седлового цикла. Система (1), (33) с указанными значениями параметров (в частности, $u = 0.958$) имеет седловой предельный цикл первого рода $z_1(t) = (x_1, x_2, \sigma)^{\mathrm{T}}$ с начальными условиями $x_1 = -0.0063142$, $x_2 = 10.36968$, $\sigma = 0$ и периодом $T_{z_1} = 4.35562692$. Мультипликаторы найденного седлового цикла $z_1(t)$ соответственно равны $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1.69$, $\mu_3 = 0.92$. Неравенство $\mu_2 > 1$ является характеристикой неустойчивости цикла.

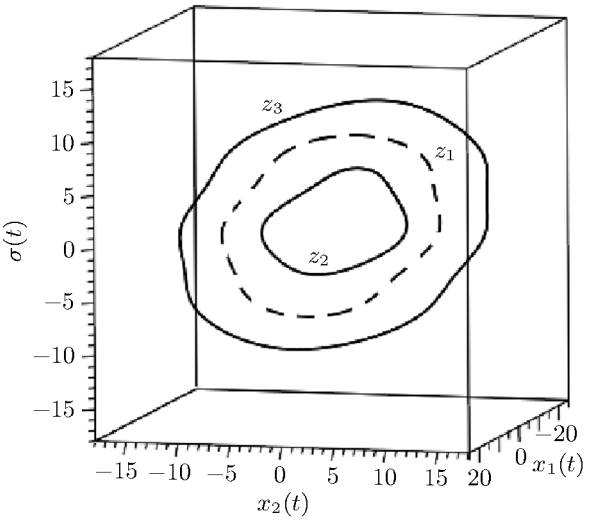

Рис. 2. Циклы системы (1) в пространстве $(x_1; x_2, \sigma)$ при $u = 0.958$.

С использованием теоремы 2 показывается, что у этой системы наряду с седловым предельным циклом $z_1(t)$ существуют два устойчивых предельных цикла первого рода: внутренний цикл $z_2(t)$ с начальными условиями $x_1 = -0.0101$, $x_2 = 7.1956$, $\sigma = 0$, периодом $T_{z_3} = 4.6930$ и мультипликаторами $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0.39$, $\mu_3 = 0.92$; внешний цикл $z_3(t)$ с начальными условиями $x_1 = -0.0021$, $x_2 = 14.8285$, $\sigma = 0$, периодом $T_{z_2} = 4.2732$ и мультипликаторами $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0.54$, $\mu_3 = 0.92$. Цикл $z_3(t)$ определяет скрытые колебания [7]. Взаимное расположение всех циклов рассматриваемой системы в пространстве (x_1, x_2, σ) изображено на рис. 2.

Рассмотрим систему (1) при $u = 0$

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma),$$

$$\dot{\sigma} = c^{\mathrm{T}}x + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0\varphi(\sigma). \qquad (34)$$

Система (34) является фазовой системой дифференциальных уравнений [2, с. 9] и определяет математическую модель фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка с

запаздыванием [1–13]. Численный анализ рассмотренной выше системы (1), (33) при уменьшении значения u с $u = 0.985$ до $u = 0$ позволяет сделать вывод о трансформации трёх циклов $z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$ в циклы $\widetilde{z}_1(t)$, $\widetilde{z}_2(t)$, $\widetilde{z}_3(t)$ системы (34). Используя начальные условия цикла $z_1(t)$, рассмотрим для системы (34) множество ω_1, которое определим следующим образом:

$$\omega_1 = \{(\sigma, x) : (x_1 + 0.00631)^2 + (x_2 - 10.36968)^2 \leqslant 1.12^2, \ \ \sigma = 0\}.$$

Пусть U_1 – оператор сдвига по траекториям фазовой системы (34). Обозначим $Q_1(x) = x - U_1(x)$. Вращение $\gamma(Q_1, \partial\omega_1)$ векторного поля $Q_1(x)$ на границе $\partial\omega_1$ множества ω_1 отлично от нуля, $\gamma(Q_1, \partial\omega_1) \neq 0$. Множество ω_1 содержит неподвижную точку оператора U_1, определяющую начальные условия седлового цикла первого рода $\widetilde{z}_1(t)$ системы (34) с начальными условиями $\widetilde{x}_1 = 0.374$, $\widetilde{x}_2 = 10.21184$, $\sigma = 0$ и периодом $T_{\widetilde{z}_2} = 4.3702$.

Система (34) имеет устойчивые циклы: внутренний цикл $\widetilde{z}_2(t)$ с начальными условиями $x_1 = 0.01$, $x_2 = 7.2768$, $\sigma = 0$ и периодом $T_{\widetilde{z}_2(t)} = 4.6771$; внешний цикл $\widetilde{z}_3(t)$ с начальными условиями $x_1 = 0.591$, $x_2 = 14.721$, $\sigma = 0$ и периодом $T_{\widetilde{z}_3(t)} = 4.2982$. Для устойчивых циклов $\widetilde{z}_2(t)$, $\widetilde{z}_3(t)$ определяются характеристики $\langle\dot{\sigma_2}\rangle = T^{-1}\int_0^T \dot{\sigma}(t)\,dt = -0.00075$ и $\langle\dot{\sigma_3}\rangle = -0.0044$. Полученные значения $\langle\dot{\sigma_2}\rangle$ и $\langle\dot{\sigma_3}\rangle$ позволяют сделать вывод о наличии в фазовой системе скрытых квазисинхронных режимов [5–7, 9, 12]. Существование в системе (34) разночастотных предельных циклов первого рода говорит о фазовой мультистабильности в этой системе, при этом предельные циклы первого рода системы (34) определяют квазисинхронные режимы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонов Г.А., Буркин И.М., Шепелявый А.И.* Частотные методы в теории колебаний. В 2-х ч. СПб, 1992.
2. *Леонов Г.А., Смирнова В.Б.* Математические проблемы теории фазовой синхронизации. СПб, 2000.
3. *Буркин И.М., Леонов Г.А.* О существовании нетривиальных периодических решений у одной нелинейной системы третьего порядка // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 12. С. 2036–2042.
4. *Буркин И.М., Буркина Л. И., Леонов Г.А.* Проблема Барбашина в теории фазовых систем // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 11. С. 1932–1944.
5. *Burkin I.M.* Transition into space of derivatives // Differ. Equat. 2015. V. 51. № 13. P. 1717–1751.
6. *Шалфеев В.Д., Матросов В.В.* Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Н. Новгород, 2013.
7. *Кузнецов Н.В.* Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2020. № 5. С. 5–27.
8. *Кузнецов Н.В., Лобачев М.Ю., Юлдашев М.В., Юлдашев Р.В.* О проблеме Гарднера для систем управления фазовой автоподстройкой частоты // Докл. АН СССР. 2019. Т. 489. № 6. С. 541–544.
9. *Матросов В.В.* Автомодуляционные режимы системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49. № 4. С. 357–368.
10. *Мамонов С.С.* Условия существования предельных циклов второго рода системы дифференциальных уравнений. I // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 5. С. 637–646.
11. *Мамонов С.С.* Условия существования предельных циклов второго рода системы дифференциальных уравнений. II // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 8. С. 1075–1084.
12. *Мамонов С.С., Ионова И.В., Харламова А.О.* Механизмы возникновения скрытой синхронизации динамических систем // Чебышёвский сб. 2019. Т. 20. № 3. С. 333–348.
13. *Mamonov S.S., Kharlamova A. O.* First-kind cycles of systems with cylindrical phase space // J. Math. Sci. 2020. V. 248. № 4. P. 457–466.
14. *Попов В.М.* Гиперустойчивость автоматических систем. М., 1970.
15. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., 1966.

Рязанский государственный университет
имени С.А. Есенина

Поступила в редакцию 03.12.2021 г.
После доработки 03.12.2021 г.
Принята к публикации 24.02.2022 г.

EDN: PQDJEB
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 174–184

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.35

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© 2022 г. В. И. Корзюк, Я. В. Рудько

Для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом, заданного в первом квадранте, рассматривается смешанная задача, в которой на пространственной полуоси задаются условия Коши, а на временно́й полуоси задаётся условие Дирихле. Решение строится методом характеристик в неявном аналитическом виде как решение некоторых интегральных уравнений. Проводится исследование разрешимости этих уравнений, а также зависимости от начальных данных и гладкости их решений. Для рассматриваемой задачи доказывается единственность решения и устанавливаются условия, при выполнении которых существует её классическое решение.

DOI: 10.31857/S0374064122020042

Введение. Сплошные среды описываются в основном нелинейными уравнениями в частных производных. Выбор для описания среды линейных или нелинейных уравнений зависит от той роли, которую играют нелинейные эффекты, и определяется конкретной физической ситуацией. Например, при описании распространения лазерных импульсов необходимо учитывать зависимость показателя преломления среды от интенсивности электромагнитного поля.

Линеаризация нелинейных уравнений математической физики не всегда ведёт к содержательному результату. Может оказаться, что линейные уравнения, возникшие в результате линеаризации, сохраняют свою применимость для рассматриваемого физического процесса лишь некоторое конечное время. Более того, с точки зрения физики для нелинейных уравнений математической физики зачастую исключительно важны “существенно нелинейные” решения, качественно отличающиеся от решений линейных уравнений. Такими могут быть стационарные решения солитонного типа, локализованные в одном или нескольких измерениях, или решения типа волновых коллапсов, описывающие самопроизвольную концентрацию энергии в небольших областях пространства. Существенно нелинейными являются и стационарные решения уравнений гидродинамики. Весьма важен вопрос об устойчивости существенно нелинейных решений, в том числе гидродинамических течений и солитонов, который решается либо при помощи линеаризации нелинейных уравнений на фоне изучаемых решений, либо при помощи вариационных оценок [1].

Классический метод последовательных приближений успешно использовался, в частности, для нахождения слабого решения смешанной задачи для нелинейного уравнения параболического типа [2, п. 9.2.1] и слабого решения задачи Коши для однородного нелинейного волнового уравнения [2, п. 12.2.1]. В работе [3, § 1] этими методами строится дважды непрерывно дифференцируемое решение $u = u(t,x)$ задачи Коши на конечном временно́м промежутке для нелинейного волнового уравнения с нелинейностью вида $G(|u|^2)u$ при определённой гладкости и ограниченности нелинейности G, начальных функций и их производных, кроме того, при дополнительных условиях на нелинейность решение определяется в некотором конусе [3, § 2]. Подобными методами для нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями были построены при некоторых предположениях сильные обобщённые и классические решения первой [4] (нелинейность вида $\lambda|u|^p u$) и второй задачи Дарбу [5, 6] (нелинейности вида $\lambda f(t,x,u,\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u(t,\eta)d\eta)$ и $\lambda|u|^p u$). Аналогичным образом в работе [7] при некоторых условиях построено сильное обобщённое и классическое решения задачи Коши–Гурса для нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями при нелинейности вида $\lambda|u|^p u$.

В данной статье, используя метод характеристик в сочетании с методом последовательных приближений, строится решение первой смешанной задачи для неоднородного гиперболического нелинейного уравнения второго порядка, доказывается единственность и непрерывная зависимость решения от начальных данных, а также выводятся условия, при выполнении которых решение смешанной задачи будет классическим.

Постановка задачи. В области $Q = (0,\infty)\times(0,\infty)$ двух независимых переменных $(t,x) \in \in \overline{Q} \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим одномерное нелинейное уравнение

$$\Box u(t,x) - \lambda(t,x) f(t,x,u(t,x)) = F(t,x), \tag{1}$$

где $\Box = \partial_t^2 - a^2\partial_x^2$ – оператор Д'Аламбера ($a > 0$ для определённости), F и λ – функции, заданные на множестве $\overline{Q}$, а f – функция, заданная на множестве $[0,\infty) \times [0,\infty) \times \mathbb{R}$ и удовлетворяющая условию Липшица с постоянной L по третьей переменной, т.е. $|f(t,x,z_1) - - f(t,x,z_2)| \leqslant L|z_1 - z_2|$. К уравнению (1) присоединяются начальные

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0,x) = \psi(x), \quad x \in [0,\infty), \tag{2}$$

и граничное

$$Bu(t,0) = \mu(t), \quad t \in [0,\infty), \tag{3}$$

условия, где φ, ψ, μ – функции, заданные на полуоси $[0,\infty)$, B – некоторый оператор (он может иметь различный вид, но в данной работе будем полагать, что $B = I$ – тождественный оператор).

Пример 1. Если в уравнении (1) положить $f(t,x,z) = \sin z$, $\lambda \equiv 1$, $F \equiv 0$ и $a = 1$, то получим уравнение синус-Гордона.

Пример 2. Если в уравнении (1) положить $f(t,x,z) = \alpha \sin z + \beta \sin(z/2)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ и $\lambda \equiv 1$, $F \equiv 0$, а $a = 1$, то получим двойное уравнение синус-Гордона, имеющее ряд приложений в физике, например: описание спиновых волн в жидком ^{3}He, описание распространения резонансных импульсов света в среде, атомы которой имеют вырожденные уровни энергии [8].

Пример 3. Если в уравнении (1) положить $f(t,x,z) = \alpha \sin z + \beta \sin(z/3) + \gamma \sin(2z/3)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, и $\lambda \equiv 1$, $F \equiv 0$, а $a = 1$, то получим тройное уравнение синус-Гордона, которое применяется в оптике [8].

Пример 4. Если в уравнении (1) положить $f(t,x,z) = \delta(t_0,x_0)z$, где $(t_0,x_0) \in Q$ и δ – дельта-функция, то получим телеграфное уравнение с потенциалом Дирака [9, 10].

Интегральное уравнение. Область Q характеристикой $x - at = 0$ разделим на две подобласти $Q^{(j)} = \{(t,x) \in Q : (-1)^j(at - x) > 0\}$, $j = 1,2$. В замыкании $\overline{Q^{(j)}}$ каждой из подобластей $Q^{(j)}$ рассмотрим интегральные уравнения

$$u^{(j)}(t,x) = g^{(1,j)}(x - at) + g^{(2)}(x + at) -$$

$$- \frac{1}{4a^2} \int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{(-1)^j(at-x)}^{x+at} \left[F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) + \lambda\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) \times \right.$$

$$\left. \times f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(j)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right)\right] dz, \quad (t,x) \in \overline{Q^{(j)}}, \quad j = 1,2, \tag{4}$$

где $g^{(2)}$, $g^{(1,1)}$ и $g^{(1,2)}$ – некоторые функции, первые две из которых заданы на неотрицательной, а последняя – на неположительной полуоси.

Определим на замыкании $\overline{Q}$ области Q функцию u как совпадающую на замыкании $\overline{Q^{(j)}}$ области $Q^{(j)}$ с решением $u^{(j)}$ интегрального уравнения (4)

$$u(t,x) = u^{(j)}(t,x), \quad (t,x) \in \overline{Q^{(j)}}, \quad j = 1,2. \tag{5}$$

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* $\lambda \in C^1(\overline{Q})$, $f \in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$. *Функция* $u^{(1)}$ *принадлежит классу* $C^2(\overline{Q^{(1)}})$ *и удовлетворяет уравнению (1) в* $\overline{Q^{(1)}}$ *тогда и только тогда, когда она является непрерывным решением уравнения (4) при* $j=1$, *функции* $g^{(1,1)}$ *и* $g^{(2)}$ *в котором из класса* $C^2([0,\infty))$.

Доказательство. 1. Пусть функция $u^{(1)} \in C^2(\overline{Q^{(1)}})$ удовлетворяет уравнению (1) в $\overline{Q^{(1)}}$. Сделав линейную невырожденную замену переменных независимых $\xi = x-at$, $\eta = x+at$ и обозначив $u^{(1)}(t,x) = v(\xi,\eta)$, получим новое дифференциальное уравнение

$$\partial_\xi\partial_\eta v(\xi,\eta) + \frac{1}{4a^2}\lambda\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)f\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2},v(\xi,\eta)\right) = -\frac{1}{4a^2}F\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right).$$

Проинтегрируем его дважды. В результате получим уравнение

$$v(\xi,\eta) = g^{(1,1)}(\xi) + g^{(2)}(\eta) - \frac{1}{4a^2}\int\limits_0^\xi d\mathrm{y}\int\limits_\xi^\eta\left\{F\left(\frac{z-\mathrm{y}}{2a},\frac{z+\mathrm{y}}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\lambda\left(\frac{z-\mathrm{y}}{2a},\frac{z+\mathrm{y}}{2}\right)f\left(\frac{z-\mathrm{y}}{2a},\frac{z+\mathrm{y}}{2},v(\mathrm{y},z)\right)\right\}dz, \quad \left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)\in\overline{Q^{(1)}}. \tag{6}$$

Уравнения (6) – это уравнение (4) для $j=1$. Отсюда также следует принадлежность функций $g^{(1,1)}$ и $g^{(2)}$ классу $C^2([0,\infty))$.

2. Если функция $u^{(1)}$ – решение уравнения (4), то в силу условий гладкости $\lambda \in C^1(\overline{Q})$, $f \in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$ и принадлежности функций $g^{(1,1)}$ и $g^{(2)}$ классу $C^2([0,\infty))$ заключаем, что $u^{(1)} \in C^2(\overline{Q^{(1)}})$. Подставляя представления (4) в уравнение (1), убеждаемся, что функция $u^{(1)}$ удовлетворяет этому уравнению в $\overline{Q^{(1)}}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия* $\lambda \in C^1(\overline{Q})$, $f \in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$. *Функция* $u^{(2)}$ *принадлежит классу* $C^2(\overline{Q^{(2)}})$ *и удовлетворяет уравнению (1) в* $\overline{Q^{(2)}}$ *тогда и только тогда, когда она является непрерывным решением уравнения (4) при* $j=2$, *функции* $g^{(1,2)}$ *и* $g^{(2)}$ *в котором из классов* $C^2((-\infty,0])$ *и* $C^2([0,\infty))$ *соответственно.*

Доказательство проводится аналогично доказательству предыдущей леммы.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* $\lambda \in C^1(\overline{Q})$, $f \in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$. *Функция* u *принадлежит классу* $C^2(\overline{Q})$ *и удовлетворяет уравнению (1) тогда и только тогда, когда она для каждого* $j=1,2$ *является непрерывным решением уравнения (4), функции* $g^{(1,1)}$, $g^{(1,2)}$ *и* $g^{(2)}$ *в котором из классов* $C^2([0,\infty))$, $C^2((-\infty,0])$ *и* $C^2([0,\infty))$ *соответственно, и выполняются условия согласования*

$$g^{(1,1)}(0) - g^{(1,2)}(0) = 0, \tag{7}$$

$$Dg^{(1,1)}(0) - Dg^{(1,2)}(0) = 0, \tag{8}$$

$$D^2g^{(1,1)}(0) - D^2g^{(1,2)}(0) + \frac{1}{a^2}(F(0,0) + \lambda(0,0)f(0,0,g^{(1,1)}(0)+g^{(2)}(0))) = 0. \tag{9}$$

Доказательство теоремы проведём, следуя схеме, изложенной в [11, п. 4.3] (в полном виде) и [12] (в кратком виде).

1. Пусть функция $u \in C^2(\overline{Q})$ удовлетворяет уравнению (1). Тогда, согласно леммам 1 и 2, функция u представима в виде (4), (5) и функции $g^{(1,1)}$, $g^{(1,2)}$ и $g^{(2)}$ из классов $C^2([0,\infty))$, $C^2((-\infty,0])$ и $C^2([0,\infty))$ соответственно. Кроме того, выполнены условия непрерывности функции u и её частных производных до второго порядка включительно, т.е.

$$\partial_t^k\partial_x^p u^{(1)}(t,x=at) = \partial_t^k\partial_x^p u^{(2)}(t,x=at), \quad 0 \leqslant k+p \leqslant 2, \tag{10}$$

где k, p – целые неотрицательные числа.

Заметим, что функция $\mathcal{W}(t,x) = g^{(2)}(x-at)$ принадлежит классу $C^2(\overline{Q})$. Поэтому из равенства (10) для $k=p=0$ следует условие согласования (7).

Вычисляем производные первого и второго порядка функций $u^{(j)}$, $j=1,2$, в $Q^{(j)}$. Затем на характеристике $\gamma = \{(t,x) : x = at\}$ рассмотрим их предельные значения. Имеем

$$\partial_t u^{(j)}(t,x) = -aDg^{(1,j)}(x-at) + aDg^{(2)}(x+at) + \frac{1}{4a} \times$$

$$\times\Bigg[\int\limits_{(-1)^j(at-x)}^{x+at} \mathcal{P}_j\left(\frac{at-x+z}{2a}, \frac{x-at+z}{2}\right) dz - \int\limits_0^{x-at} \mathcal{P}_j\left(\frac{at+x-y}{2a}, \frac{at+x+y}{2}\right) dy +$$

$$+ \int\limits_0^{x-at} (-1)^j \mathcal{P}_j\left(\frac{(-1)^j(at-x)-y}{2a}, \frac{(-1)^j(at-x)+y}{2}\right) dy\Bigg], \quad (t,x) \in Q^{(j)}, \quad j=1,2, \tag{11}$$

где $\mathcal{P}_j(w,z) = \lambda(w,z) f(w,z,u^{(j)}(w,z)) + F(w,z)$. Аналогично получаем

$$\partial_x u^{(j)}(t,x) = Dg^{(1,j)}(x-at) + Dg^{(2)}(x+at) - \frac{1}{4a^2} \times$$

$$\times\Bigg[\int\limits_{(-1)^j(at-x)}^{x+at} \mathcal{P}_j\left(\frac{at-x+z}{2a}, \frac{x-at+z}{2}\right) dz + \int\limits_0^{x-at} \mathcal{P}_j\left(\frac{at+x-y}{2a}, \frac{at+x+y}{2}\right) dy +$$

$$+ \int\limits_0^{x-at} (-1)^j \mathcal{P}_j\left(\frac{(-1)^j(at-x)-y}{2a}, \frac{(-1)^j(at-x)+y}{2}\right) dy\Bigg], \quad (t,x) \in Q^{(j)}, \quad j=1,2. \tag{12}$$

Из представлений (11) и (12) следует, что если предельные значения производных первого порядка на характеристике γ совпадают между собой, то выполняется условие

$$Dg^{(1,1)}(0) - Dg^{(1,2)}(0) +$$

$$+ \frac{1}{4a^2} \int\limits_0^{2at} \lambda\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\left[f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, u^{(2)}\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) - f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\right] dz = 0,$$

а так как $u^{(1)}(t,at) = u^{(2)}(t,at)$, то это равенство упрощается до (8).

Далее вычисляем в $Q^{(j)}$ производные второго порядка функций функций $u^{(j)}$, $j=1,2$. Имеем

$$\partial_t^2 u^{(j)}(t,x) = a^2 D^2 g^{(1,j)}(x-at) + a^2 D^2 g^{(2)}(x+at) + \frac{\mathcal{P}_j(t,x)}{2} -$$

$$- \frac{(-1)^j}{2} \mathcal{P}_j\left(\frac{((-1)^j+1)(at-x)}{2a}, \frac{((-1)^j-1)(at-x)}{2}\right) + \frac{1}{8a} \times$$

$$\times\Bigg[\int\limits_{(-1)^j(at-x)}^{at+x} \mathcal{P}_j^{(1)}\left(\frac{at-x+z}{2a}, \frac{x-at+z}{2}\right) dz - \int\limits_0^{x-at} \mathcal{P}_j^{(2)}\left(\frac{at+x-y}{2a}, \frac{at+x+y}{2}\right) dy +$$

$$+ \int\limits_0^{x-at} \mathcal{P}_j^{(2)}\left(\frac{(-1)^j(at-x)-y}{2a}, \frac{(-1)^j(at-x)+y}{2}\right) dy\Bigg], \quad (t,x) \in Q^{(j)}, \quad j=1,2, \tag{13}$$

где $\mathcal{P}_j^{(k)}(w,z) = \langle \operatorname{grad}\mathcal{P}(w,z), (1,(-1)^k a)^{\mathrm{T}}\rangle$, $k = 1,2$. Аналогично вычисляем вторые производные $\partial_x^2 u^{(j)}$, $\partial_t\partial_x u^{(j)}$. В результате получаем

$$\partial_x^2 u^{(j)}(t,x) = D^2 g^{(1,j)}(x-at) + D^2 g^{(2)}(x+at) - \frac{\mathcal{P}_j(t,x)}{2a^2} -$$

$$- \frac{(-1)^j}{2a^2}\mathcal{P}_j\left(\frac{((-1)^j+1)(at-x)}{2a}, \frac{((-1)^j-1)(at-x)}{2}\right) + \frac{1}{8a^3}\times$$

$$\times\left[\int\limits_{(-1)^j(at-x)}^{at+x} \mathcal{P}_j^{(1)}\left(\frac{at-x+z}{2a}, \frac{x-at+z}{2}\right)dz - \int\limits_0^{x-at} \mathcal{P}_j^{(2)}\left(\frac{at+x-y}{2a}, \frac{at+x+y}{2}\right)dy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{x-at} \mathcal{P}_j^{(2)}\left(\frac{(-1)^j(at-x)-y}{2a}, \frac{(-1)^j(at-x)+y}{2}\right)dy\right] = \frac{\partial_t^2 u^{(j)}(t,x) - \mathcal{P}_j(t,x)}{a^2},$$

$$(t,x) \in Q^{(j)}, \quad j = 1,2, \tag{14}$$

$$\partial_t\partial_x u^{(j)}(t,x) = -aD^2 g^{(1,j)}(x-at) + aD^2 g^{(2)}(x+at) +$$

$$-\frac{(-1)^j}{2a}\mathcal{P}_j\left(\frac{((-1)^j+1)(at-x)}{2a}, \frac{((-1)^j-1)(at-x)}{2}\right) - \frac{1}{8a^2}\times$$

$$\times\left[\int\limits_{(-1)^j(at-x)}^{at+x} \mathcal{P}_j^{(1)}\left(\frac{at-x+z}{2a}, \frac{x-at+z}{2}\right)dz + \int\limits_0^{x-at} \mathcal{P}_j^{(2)}\left(\frac{at+x-y}{2a}, \frac{at+x+y}{2}\right)dy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{x-at} \mathcal{P}_j^{(2)}\left(\frac{(-1)^j(at-x)-y}{2a}, \frac{(-1)^j(at-x)+y}{2}\right)dy\right], \quad (t,x) \in Q^{(j)}, \quad j = 1,2. \tag{15}$$

Используя представления (13), рассмотрим равенство (10) для $k = 2$, $p = 0$, т.е. равенство для вторых производных по t на характеристике γ. Для этого в (13) полагаем $x = at$. В результате получаем

$$\partial_t^2 u^{(1)}(t,at) = \frac{\mathcal{P}_1(t,at)}{2} + \frac{1}{8a}\int\limits_0^{2at} \mathcal{P}_1^{(1)}\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)dz + \frac{\mathcal{P}_1(0,0)}{2} + a^2 D^2 g^{(1,1)}(0) + a^2 D^2 g^{(2)}(2at) =$$

$$= \partial_t^2 u^{(2)}(t,at) = \frac{\mathcal{P}_2(t,at)}{2} + \frac{1}{8a}\int\limits_0^{2at} \mathcal{P}_2^{(1)}\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)dz - \frac{\mathcal{P}_2(0,0)}{2} + a^2 D^2 g^{(1,2)}(0) + a^2 D^2 g^{(2)}(2at).$$

Выполнение данных равенств влечёт за собой согласование функций $g^{(1,1)}$, $g^{(1,2)}$ и $g^{(2)}$ в точке 0 в виде (9), если верны равенства (10) для $k+p \leqslant 1$. Воспользовавшись представлениями (14) и (15), непосредственной проверкой убеждаемся, что из равенств (10) для $k = p = 1$ и $k = 0$, $p = 2$ следует условие (9), если равенство (10) верно при $k + p \leqslant 1$.

2. Предположим, что имеют место представления функции u в виде (4), (5), где $g^{(1,1)} \in \in C^2([0,\infty))$, $g^{(1,2)} \in C^2((-\infty,0])$ и $g^{(2)} \in C^2([0,\infty))$, и выполнены условия (7)–(9). Из лемм 1 и 2 следует, что функция u принадлежит классам $C^2(\overline{Q^{(1)}})$ и $C^2(\overline{Q^{(2)}})$ и удовлетворяет уравнению (1) в $\overline{Q^{(1)}}$ и $\overline{Q^{(2)}}$. Чтобы при этом функция u принадлежала классу $C^2(\overline{Q})$ достаточно совпадений между собой на характеристике $x = at$ значений функций $u^{(j)}$, значений их

производных первого порядка и значений их производных второго порядка, т.е. чтобы выполнялись равенства (10). Последнее равносильно выполнению условий (7)–(9), что легко выводится, если провести рассуждения в порядке, обратном порядку п. 1 доказательства, исходя из представлений (4). Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $F \in C(\overline{Q})$, $\lambda \in C(\overline{Q})$, $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, *функция* f *удовлетворяет условию Липшица с постоянной* L *по третьей переменной, т.е.* $|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leqslant L|z_1 - z_2|$, *и функции* $g^{(1,1)}$, $g^{(1,2)}$ *и* $g^{(2)}$ *непрерывны. Тогда решения уравнений (4) существуют, единственны и непрерывно зависят от исходных данных.*

Доказательство теоремы проведём по схеме, изложенной в [13, п. 2.4]. Для определённости рассмотрим уравнение (4) при $j = 1$. Будем решать его методом последовательных приближений. Обозначим $G(t,x) = g^{(1,j)}(x - at) + g^{(2)}(x + at)$. Возьмём начальное приближение $u^{(1,0)} = G$. Тогда каждое следующее приближение будет вычисляться по формуле

$$u^{(1,m)}(t,x) = G(t,x) - \frac{1}{4a^2} \int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{x-at}^{x+at} \left[F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) + \lambda\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) \times \right.$$

$$\left. \times f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1,m-1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right)\right] dz, \quad (t,x) \in \overline{Q^{(1)}}. \tag{16}$$

Найдём оценки для последовательных приближений.

Пусть $\widetilde{x} > 0$, $\mathcal{A} = \overline{Q^{(1)}} \bigcap ([0, \widetilde{x}/a] \times [0, \widetilde{x}])$, $M = \max\limits_{(t,x)\in\mathcal{A}} |G(t,x)|$, $c = \max\limits_{(t,x)\in\mathcal{A}} |\lambda(t,x)|$. Тогда

$$|(u^{(1,1)} - u^{(1,0)})(t,x)| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{1}{4a^2} \int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{x-at}^{x+at} \lambda\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1,0)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right) dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L}{4a^2} \int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{x-at}^{x+at} c \left| u^{(1,0)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right| dz \leqslant \frac{LcMt(x-at)}{2a},$$

$$|(u^{(1,2)} - u^{(1,1)})(t,x)| \leqslant \frac{L}{4a^2} \int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{x-at}^{x+at} c \left| u^{(1,1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) - u^{(1,0)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right| dz \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L}{4a^2} \int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{x-at}^{x+at} \frac{Lc^2 M|y||z-y|}{4a^2}\, dz \leqslant \frac{L^2c^2M\widetilde{x}at(x^2 - a^2t^2)}{(4a^2)^2}.$$

Далее методом математической индукции, в качестве базы в которой здесь выбирается последнее неравенство, несложно доказывается, что имеет место оценка

$$|(u^{(1,i+1)} - u^{(1,i)})(t,x)| \leqslant \frac{2(Lc)^{i+1}M\widetilde{x}at(x-at)^i(x+at)^i}{(1)_i(2)_i(4a^2)^{i+1}}, \quad (t,x) \in \mathcal{A}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad i \geqslant 2, \tag{17}$$

где использовано обозначение $(x)_n = \prod_{k=1}^{n}(x + k - 1)$ – символ Похгаммера.

Заметим, что $u^{(1,m)} = u^{(1,0)} + \sum_{j=0}^{m-1}(u^{(1,j+1)} - u^{(1,j)})$. Из оценки (17) следует абсолютная и равномерная сходимость ряда $u^{(1,\infty)} = u^{(1,0)} + \sum_{j=0}^{\infty}(u^{(1,j+1)} - u^{(1,j)})$ на множестве $\mathcal{A}$, поскольку его члены мажорируются по абсолютной величине членами равномерно сходящегося ряда

$$M + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2(Lc)^{i+1}M\widetilde{x}at(x-at)^i(x+at)^i}{(1)_i(2)_i(4a^2)^{i+1}} = M\left(1 + \frac{Lc\widetilde{x}t\,{}_0F_1(;2;(4a^2)^{-1}Lc(x-at)(x+at))}{2a}\right),$$

где ${}_0F_1$ – вырожденная гипергеометрическая функция, которая может быть определена как сумма ряда

$$ {}_0F_1(;b;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(b)_k k!}. $$

Таким образом, последовательные приближения непрерывных функций $u^{(1,m)}$ равномерно стремятся на множестве $\mathcal{A}$ к непрерывной в $\mathcal{A}$ функции $u^{(1)}:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$, а в силу произвольности $\widetilde{x}$ – к непрерывной в $\overline{Q^{(1)}}$ функции $u^{(1)}:\overline{Q^{(1)}}\to\mathbb{R}$, $(t,x)\mapsto u^{(1)}(t,x)$. Переходя в равенстве (16) к пределу при $m\to\infty$, получаем, что функция $u^{(1)}$ является решением уравнения (4) при $j=1$ на множестве $\overline{Q^{(1)}}$.

Докажем единственность решения уравнения (4) при $j=1$ от противного. Пусть у уравнения (4) при $j=1$ существуют два решения $u^{(1)}$ и $\widetilde{u}^{(1)}$. Обозначим $U=u^{(1)}-\widetilde{u}^{(1)}$. Тогда

$$ U(t,x)=-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at}dy\int\limits_{x-at}^{x+at}\lambda\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)dz+ $$

$$ +\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at}dy\int\limits_{x-at}^{x+at}\lambda\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},\widetilde{u}^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)dz,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(1)}}. \tag{18} $$

Функция U является непрерывной, значит, $|U(t,x)|\leqslant M_U$ при условии $(t,x)\in\mathcal{A}$, где M_U – некоторая константа. Из равенства (18) с учётом условия Липшица следует, что

$$ |U(t,x)|\leqslant\frac{L}{4a^2}\int\limits_0^{x-at}dy\int\limits_{x-at}^{x+at}cM_U\,dz\leqslant\frac{LcM_Ut\widetilde{x}}{2a},\quad (t,x)\in\mathcal{A}. $$

Применяя метод математической индукции, придём к следующей оценке:

$$ |U(t,x)|\leqslant\frac{2(Lc)^{i+1}M\widetilde{x}at(x-at)^i(x+at)^i}{(1)_i(2)_i(4a^2)^{i+1}}\leqslant\frac{2^{i+1}(Lc)^{i+1}M_U\widetilde{x}^{2i+1}}{(1)_i(2)_i(4a^2)^i} $$

для любого натурального i и любой пары (t,x) из $\mathcal{A}$. Отсюда следует, что $U\equiv0$ на множестве $\mathcal{A}$, а в силу произвольности $\widetilde{x}$ – что $U\equiv0$ на множестве $\overline{Q^{(j)}}$. Таким образом, доказано существование единственного непрерывного решения уравнения (4) при $j=1$.

Для доказательства непрерывной зависимости решения от начальных данных рассмотрим наряду с уравнением (4) при $j=1$ возмущённое уравнение

$$ (u^{(1)}+\Delta u)(t,x)=(G+\Delta G)(t,x)-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at}dy\int\limits_{x-at}^{x+at}\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+\right. $$

$$ \left.+\lambda\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},(u^{(1)}+\Delta u)\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dz,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(1)}}, \tag{19} $$

и разность возмущённого (19) и невозмущённого (4) уравнений

$$ \Delta u(t,x)=\Delta G(t,x)-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at}dy\int\limits_{x-at}^{x+at}\left[\lambda\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\times\right. $$

$$ \left.\times\left\{f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},(u^{(1)}+\Delta u)\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)-\right.\right. $$

$$- f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right)\Big\}\Big]\, dz, \quad (t,x) \in \overline{Q^{(1)}}. \tag{20}$$

Для уравнения (20) относительно возмущения Δu справедлива следующая оценка модуля возмущения:

$$|\Delta u(t,x)| \leqslant M_{\Delta G}\left(1 + \frac{Lc\widetilde{x}t\,{}_0F_1(;2;(4a^2)^{-1}Lc(x-at)(x+at))}{2a}\right), \quad (t,x) \in \mathcal{A},$$

где $M_{\Delta G} = \max\limits_{(t,x)\in\mathcal{A}} |\Delta G(t,x)|$. Из полученного неравенства вытекает, что какое бы малое возмущение ΔG, $M_{\Delta G} = \varepsilon$, мы ни взяли, для возмущения решения выполняется неравенство

$$|\Delta u(t,x)| = \delta \leqslant \varepsilon\left(1 + \frac{Lc\widetilde{x}^2}{2a^2}\,{}_0F_1\left(;2;\frac{Lc\widetilde{x}^2}{4a^2}\right)\right)$$

на множестве $\mathcal{A}$. В силу произвольности $\widetilde{x}$ получаем, что решение уравнения (4) при $j = 1$ непрерывно зависит от исходных данных.

Существование единственного непрерывного и непрерывно зависящего от начальных данных решения уравнения (4) при $j = 2$ доказывается аналогично. Теорема доказана.

Построение решения смешанной задачи. Теперь продемонстрируем наш метод решения смешанных задач на примере задачи (1)–(3) при $B = I$ (тождественный оператор), т.е. в этом случае условие (3) имеет простой вид $u(t,0) = \mu(t)$ (условие Дирихле).

Функции $g^{(1,1)}$ и $g^{(2)}$ определяем из условий Коши (2). Подставляя выражение (4) для функции $u^{(j)}$ при $j = 1$ в условия (2), получаем систему уравнений относительно функций $g^{(1,1)}$ и $g^{(2)}$:

$$u^{(1)}(0,x) = \varphi(x) = g^{(1,1)}(x) + g^{(2)}(x), \quad x \geqslant 0,$$

$$\partial_t u^{(1)}(0,x) = \psi(x) = -aDg^{(1,1)}(x) + aDg^{(2)}(x) -$$

$$- \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \left[\lambda\left(\frac{x-y}{2a}, \frac{x+y}{2}\right) f\left(\frac{x-y}{2a}, \frac{x+y}{2}, u^{(1)}\left(\frac{x-y}{2a}, \frac{x+y}{2}\right)\right) + F\left(\frac{x-y}{2a}, \frac{x+y}{2}\right)\right] dy, \quad x \geqslant 0.$$

Проинтегрировав второе уравнение от 0 до x, будем иметь

$$g^{(1,1)}(x) + g^{(2)}(x) = \varphi(x), \quad x \geqslant 0,$$

$$- g^{(1,1)}(x) + g^{(2)}(x) = \frac{1}{a}\int\limits_0^x \psi(z)\, dz + \frac{1}{2a^2}\int\limits_0^x dz \int\limits_0^z \left[F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) +\right.$$

$$\left. + \lambda\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right)\right] dy + 2C, \quad x \geqslant 0,$$

откуда вытекает, что

$$g^{(1,1)}(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(z)\, dz - C - \frac{1}{4a^2} \times$$

$$\times \int\limits_0^x dz \int\limits_0^z \left[F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) + \lambda\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right)\right] dy, \quad x \geqslant 0,$$

$$g^{(2)}(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(z)\, dz + C + \frac{1}{4a^2}\int\limits_0^x dz \int\limits_0^z \left[F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) +\right.$$

$$\left. + \lambda\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right)\right] dy, \quad x \geqslant 0, \tag{21}$$

где C – произвольная действительная константа. Функцию $g^{(1,2)}$ определяем из граничного условия. Подставляя выражение (4) для функции $u^{(j)}$ при $j = 2$ в условия (3), получаем уравнение $g^{(1,2)}(-at) + g^{(2)}(at) = \mu(t)$ относительно функции $g^{(1,2)}$. Сделав в нём замену $t = -z/a$, будем иметь $g^{(1,2)}(z) = \mu(-z/a) - g^{(2)}(-z)$. Отсюда

$$g^{(1,2)}(x) = \mu\left(-\frac{x}{a}\right) - \frac{\varphi(-x)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_0^{-x}\psi(z)\,dz - C - \frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{-x}dz\int\limits_0^{z}\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \lambda\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy, \quad x \leqslant 0. \tag{22}$$

Подставив представления (21) и (22) в исходные интегральные уравнения (4), получим

$$u^{(1)}(t,x) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz +$$

$$+ \frac{1}{4a^2}\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z}\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right) + \lambda\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy, \quad (t,x) \in \overline{Q^{(1)}},$$

$$u^{(2)}(t,x) = \mu\left(t-\frac{x}{a}\right) + \frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(z)\,dz -$$

$$-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at}dy\int\limits_{at-x}^{x+at}\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+\lambda\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(2)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dz+$$

$$+ \frac{1}{4a^2}\int\limits_{at-x}^{x+at}dz\int\limits_0^{z}\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right) + \lambda\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy, \quad (t,x) \in \overline{Q^{(2)}}. \tag{23}$$

Лемма 3. *Пусть выполняются условия* $\lambda \in C^1(\overline{Q})$, $f \in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^2([0,\infty))$ *и функция* f *удовлетворяет условию Липшица с постоянной* L *по третьей переменной. Тогда решения* $u^{(j)}$ $(j = 1,2)$ *уравнений (23) существуют, единственны в классе* $C^2(\overline{Q^{(j)}})$ *и непрерывно зависят от функций* φ, ψ *и* μ.

Доказательство следует из теорем 1 и 2.

Таким образом, построено кусочно-гладкое решение задачи (1)–(3), которое определяется формулами (23) и (5).

Анализ решения смешанной задачи. Чтобы функция u принадлежала классу $C^2(\overline{Q})$, кроме требований гладкости для функций f, F, λ необходимо и достаточно выполнение равенств (7)–(9) согласно теореме 1. Вычисляя величины, которые входят в выражения (7)–(9), получаем следующие условия согласования:

$$\mu(0) = \varphi(0), \tag{24}$$

$$\mu'(0) = \psi(0), \tag{25}$$

$$\mu''(0) = \frac{1}{2}\lambda(0,0)(f(0,0,\mu(0)) + f(0,0,\varphi(0))) + F(0,0) + a^2\varphi''(0). \tag{26}$$

Результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* $\lambda \in C^1(\overline{Q})$, $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^2([0,\infty))$ *и функция* f *удовлетворяет условию Липшица с постоянной* L *по третьей переменной. Первая смешанная задача (1)–(3) имеет в классе* $C^2(\overline{Q})$ *единственное решение и тогда и только тогда, когда выполняются условия (24)–(26). Это решение определяется формулами (5) и (23).*

Доказательство следует из теоремы 1, леммы 3 и проведённых выше рассуждений.

Неоднородные условия согласования. Если заданные функции задачи (1)–(3) не удовлетворяют однородным условиям согласования (24)–(26), то решение задачи (1)–(3) сводится к решению соответствующей задачи сопряжения, в которой условия сопряжения задаются на характеристике $x - at = 0$.

Условиями сопряжения могут быть следующие условия:

$$[(u)^+ - (u)^-](t, x = at) = \varphi(0) - \mu(0),$$

$$[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-](t, x = at) = \psi(0) - \mu'(0) +$$

$$+ \frac{1}{4a} \int\limits_0^{2at} \lambda\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\left[f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) - f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\right] dz,$$

$$[(\partial_t^2 u)^+ - (\partial_t^2 u)^-](t, x = at) = F(0,0) + \frac{\lambda(0,0)}{2}\left(f(0,0,(u)^+(0,0)) + f(0,0,(u)^-(0,0))\right) +$$

$$+ \frac{\lambda(t,at)}{2}\left(f(t,at,(u)^+(t,at)) - f(t,at,(u)^-(t,at))\right) - \mu''(0) + a^2\varphi''(0) + \frac{1}{8a} \times$$

$$\times \int\limits_0^{2at} \left\{\left(a\partial_x\lambda\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) - \partial_t\lambda\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\left(f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) - f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\right) +\right.$$

$$+ \lambda\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) \times \left[\left((\partial_t u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) - a(\partial_x u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\partial_y f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, y = (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) -\right.$$

$$\left. - a\partial_x f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) + \partial_t f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\right] -$$

$$- \lambda\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) \times \left[\left((\partial_t u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) - a(\partial_x u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\partial_y f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, y = (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) -\right.$$

$$\left.\left. - a\partial_x f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) + \partial_t f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\right]\right\} dz. \tag{27}$$

Здесь через $()^{\pm}$ обозначаются предельные значения функции и её частных производных, вычисляемые с разных сторон характеристики $x - at = 0$, т.е.

$$(\partial_t^p u)^{\pm}(t, x = at) = \lim_{\delta \to 0+} \partial_t^p u(t, at \pm \delta).$$

Теперь задачу (1)–(3) можно сформулировать, используя условия сопряжения (27), следующим образом.

Задача (1)–(3) с условиями сопряжения на характеристиках. Найти классическое решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям Коши (2), граничным условиям (3) и условиям сопряжения (27).

Отметим, что такая формулировка рассмотренной задачи с условиями сопряжения более приемлема для её численной реализации.

Заключение. В статье получены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом существует единственное классическое решение первой смешанной задачи в четверти плоскости. Установлена зависимость гладкости решения от гладкости начальных функций. В работе предложен метод доказательства существования классических решений смешанных задач для нелинейных уравнений. Кроме того, сформулирована задача с условиями сопряжения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Физическая энциклопедия: в 5 т. / Гл. ред. А.М. Прохоров. Т. 3. М., 1992.
2. *Evans L.C.* Partial Differential Equations. Providence, 2010.
3. *Jörgens K.* Das Anfangswertproblem in Großen für eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen // Math. Zeitschr. 1961. № 208. S. 295–308.
4. *Берикелашвили Г.К., Джохадзе О.М., Мидодашвили Б.Г., Харибегашвили С.С.* О существовании и отсутствии глобальных решений первой задачи Дарбу для нелинейных волновых уравнений // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 3. С. 359–372.
5. *Kharibegashvili S., Jokhadze O.* The second Darboux problem for the wave equation with integral nonlinearity // Trans. of A. Razmadze Math. Inst. 2016. V. 170. № 3. P. 385–394.
6. *Харибегашвили С.С., Джохадзе О.М.* Вторая задача Дарбу для волнового уравнения со степенной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 12. С. 1623–1640.
7. *Jokhadze O.* On existence and nonexistence of global solutions of Cauchy–Goursat problem for nonlinear wave equations // J. of Math. Anal. and Appl. 2008. V. 340. № 2. P. 1033–1045.
8. *Bullough R.K., Caudrey P.J., Gibbs H.M.* The double sine-Gordon equations: a physically applicable system of equations // Solitons. Topics in Current Physics / Eds. R.K. Bullough, P.J. Caudrey. Berlin; Heidelberg, 1980. V. 17. P. 107–141.
9. *Моисеев Е.И., Юрчук Н.И.* Классические и обобщённые решения задач для телеграфных уравнений с потенциалом Дирака // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 10. С. 1338–1344.
10. *Барановская С.Н., Новиков Е.Н., Юрчук Н.И.* Задача с косой производной в граничном условии для телеграфного уравнения с потенциалом Дирака // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 9. С. 1176–1183.
11. *Корзюк В.И.* Уравнения математической физики. М., 2021.
12. *Корзюк В.И., Козловская И.С., Соколович В.Ю.* Классическое решение в четверти плоскости смешанной задачи для волнового уравнения // Докл. НАН Беларуси. 2018. Т. 62. № 6. С. 647–651.
13. *Столярчук И.И.* Классические решения смешанных задач для уравнения Клейна–Гордона–Фока: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Гродно, 2020.

Белорусский государственный университет,
г. Минск,
Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию 20.10.2021 г.
После доработки 01.02.2022 г.
Принята к публикации 07.02.2022 г.

EDN: GZYITJ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 185–191

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957+517.958:536.2

МЕТОД РЕДУКЦИИ И НОВЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2022 г. А. А. Косов, Э. И. Семенов

Изучается нелинейное многомерное уравнение теплопроводности со степенным коэффициентом. Предлагается строить его точные решения методом многомерной редукции на основе использования специального анзаца. В результате редукции задача сводится к решению систем матрично-векторных алгебраических уравнений, определяющих зависимость от пространственных переменных, и интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих зависимость от времени. Для ряда примеров с различными значениями показателей степени получены явные выражения через элементарные функции для точных многомерных решений, в том числе анизотропных по пространственным переменным. Найденные точные решения могут быть полезны при построении приближённых решений краевых задач для нелинейного уравнения теплопроводности с помощью численных методов, приводящих к необходимости решения систем уравнений высокой размерности.

DOI: 10.31857/S0374064122020054

Введение. В данной работе, используя метод редукции, построены новые точные многомерные решения уравнения нелинейной теплопроводности со степенным коэффициентом

$$v_t = \nabla \cdot (v^{1/\lambda} \nabla v), \tag{1}$$

которое после замены $v = u^\lambda$ запишется в виде

$$u_t = u\Delta u + \lambda |\nabla u|^2, \quad u = u(\mathbf{x}, t). \tag{2}$$

Здесь Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$, ∇ – оператор взятия градиента; $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $\lambda \neq 0$ – произвольный вещественный параметр. Отметим, что построению точных решений уравнения нелинейной теплопроводности (1) посвящено огромное количество работ. Не ставя своей целью дать их подробный обзор, отметим только статьи [1, 2] и справочники [3–7], в которых содержится наиболее полная сводка точных решений уравнения (1).

Основная идея метода редукции состоит в том, чтобы с помощью некоторого анзаца построение точных решений нелинейных уравнений с частными производными сводилось к решению некоторого обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) или системы ОДУ. В данной работе точные решения уравнения (2) предлагается отыскивать в виде специального многомерного анзаца

$$u(\mathbf{x}, t) = a(t)\Omega(\omega) + f(t)W(\mathbf{x}) + g(t), \quad \omega = \psi(t)W(\mathbf{x}) + \varphi(t), \tag{3}$$

в котором используется следующая многомерная конструкция:

$$W(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{B}, \mathbf{x}) + C, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad n \geqslant 2, \tag{4}$$

где A – ненулевая вещественная симметрическая $n \times n$-матрица, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ – постоянный вектор, $C \in \mathbb{R}$ – константа. При этом в результате редукции мы должны получить некоторое ОДУ для функции $\Omega(\omega)$. Именно использование квадратичной функции (4) от $n \geqslant 2$ переменных позволяет нам говорить о *многомерной редукции*.

Отметим, что в литературе подобный метод редукции для нелинейных уравнений с частными производными с одномерной пространственной переменной иногда называют методом Кларксона–Крускала [4, гл. 6]; он опирается на технику обобщённого разделения переменных [4, 6, 7].

После подстановки анзаца (3) в исследуемое уравнение (2) мы должны подобрать функции $a(t)$, $f(t)$, $g(t)$, $\psi(t)$, $\varphi(t)$ таким образом, чтобы в результате всё свелось к одному ОДУ для функции $\Omega(\omega)$, в этом случае будем считать задачу выполненной. При этом будем предполагать, что коэффициенты функции $W(\mathbf{x})$ удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$A = 2\sigma A^2, \quad \mathbf{B} = 2\sigma A\mathbf{B}, \quad C = \sigma|\mathbf{B}|^2, \tag{5}$$

где $\sigma \neq 0$ – некоторая постоянная. При таком предположении, как несложно проверить, функция $W(\mathbf{x})$ обладает следующим свойством:

$$W = \sigma|\nabla W|^2. \tag{6}$$

Кроме того, $\Delta W = \operatorname{tr} A = \text{const} \neq 0$, где $\operatorname{tr} A$ – след матрицы A. Заметим, что конструкция (4) ранее успешно применялась для построения частных точных многомерных решений некоторых нелинейных уравнений и систем [8, 9].

1. Применение метода редукции. После подстановки анзаца (3) в уравнение (2) и вычисления необходимых производных придём к равенству

$$a_t'\Omega + (a\psi_t'\Omega_\omega' + f_t')W + a\varphi_t'\Omega_\omega' + g_t' = \frac{\lambda}{\sigma}(a\psi\Omega_\omega' + f)^2 W +$$
$$+ (a\Omega + fW + g)\left((a\psi\Omega_\omega' + f)\operatorname{tr} A + \frac{1}{\sigma}a\psi^2\Omega_{\omega\omega}'' W\right), \tag{7}$$

в котором для краткости записи опущены аргументы у всех функций; при его выводе мы воспользовались свойством (6). Это равенство, исключив в нём функцию W с помощью тождества $W = (\omega - \varphi)/\psi$, вытекающего из (3), запишем в виде

$$(a_t' - af\operatorname{tr} A)\Omega + a(\varphi_t' - g\psi\operatorname{tr} A)\Omega_\omega' + g_t' - gf\operatorname{tr} A = a^2\psi\operatorname{tr} A\Omega\Omega_\omega' +$$
$$+ \frac{af}{\sigma}\omega^2\Omega_{\omega\omega}'' - \frac{2af\varphi}{\sigma}\omega\Omega_{\omega\omega}'' + \frac{af\varphi^2}{\sigma}\Omega_{\omega\omega}'' + (\omega - \varphi)\Gamma, \tag{8}$$

где введено обозначение

$$\Gamma = \frac{a^2\psi}{\sigma}(\Omega\Omega_{\omega\omega}'' + \lambda\Omega_\omega'^2) + \frac{ag\psi}{\sigma}\Omega_{\omega\omega}'' - \frac{a(\psi_t' - (\operatorname{tr} A + 2\lambda/\sigma)\psi f)}{\psi}\Omega_\omega' - \frac{f_t' - (\operatorname{tr} A + \lambda/\sigma)f^2}{\psi}.$$

Так как нас интересует сведéние равенства (8) к одному-единственному ОДУ для функции $\Omega(\omega)$, то положим $\varphi(t) \equiv \varphi_0 = \text{const}$. Кроме того, потребуем, чтобы выполнялись соотношения

$$a_t' - af\operatorname{tr} A = 0, \quad g_t' - gf\operatorname{tr} A = 0, \tag{9}$$

из которых следует, что $g(t) = \nu a(t)$, где $\nu \neq 0$ – произвольная постоянная. С учётом тождеств (9) и предположения $\varphi(t) \equiv \varphi_0$ равенство (8) примет вид

$$\nu a^2\psi\operatorname{tr} A\Omega_\omega' + a^2\psi\operatorname{tr} A\Omega\Omega_\omega' + \frac{af}{\sigma}(\omega - \varphi_0)^2\Omega_{\omega\omega}'' + a^2\psi(\omega - \varphi_0)\Gamma_1 = 0, \tag{10}$$

где

$$\Gamma_1 = \frac{1}{\sigma}(\Omega\Omega_{\omega\omega}'' + \lambda\Omega_\omega'^2) + \frac{\nu}{\sigma}\Omega_{\omega\omega}'' - \frac{\psi_t' - (\operatorname{tr} A + 2\lambda/\sigma)\psi f}{a\psi^2}\Omega_\omega' - \frac{f_t' - (\operatorname{tr} A + \lambda/\sigma)f^2}{a^2\psi^2}.$$

Поделив все слагаемые в равенстве (10) на $a^2\psi$, получим

$$\nu\operatorname{tr} A\Omega_\omega' + \operatorname{tr} A\Omega\Omega_\omega' + \frac{f}{\sigma a\psi}(\omega - \varphi_0)^2\Omega_{\omega\omega}'' + (\omega - \varphi_0)\Gamma_1 = 0. \tag{11}$$

Чтобы это равенство представляло собой ОДУ для неизвестной функции $\Omega(\omega)$, оно не должно содержать функции, зависящие от времени t. Поэтому должны выполняться тождества

$$\frac{f}{a\psi}=\mu_1,\quad \frac{\psi_t'-(\operatorname{tr}A+2\lambda/\sigma)\psi f}{a\psi^2}=\mu_2,\quad \frac{f_t'-(\operatorname{tr}A+\lambda/\sigma)f^2}{a^2\psi^2}=\mu_3, \tag{12}$$

где $\mu_1\neq 0$, μ_2, μ_3 – некоторые постоянные, которые можно выбирать произвольными. Из равенства (11) в силу тождеств (12) получим для искомой функции $\Omega(\omega)$ нелинейное ОДУ второго порядка

$$(\omega-\varphi_0)\left(\frac{1}{\sigma}\Omega\Omega''_{\omega\omega}+\frac{\lambda}{\sigma}\Omega'^2_{\omega}+\frac{\nu}{\sigma}\Omega''_{\omega\omega}-\mu_2\Omega'_{\omega}-\mu_3\right)+\frac{\mu_1}{\sigma}(\omega-\varphi_0)^2\Omega''_{\omega\omega}+\operatorname{tr}A(\Omega+\nu)\Omega'_{\omega}=0.$$

Отметим, что ранее авторами уже изучалась [8, 9] система алгебраических уравнений (5). Поэтому повторять её полное исследование не будем, а приведём только решение матричного уравнения из (5), которое нам понадобится. Именно, если $(A,\mathbf{B},C)$ – решение системы (5), где A – ненулевая вещественная симметричная матрица, то $A=(2\sigma)^{-1}SE_mS^{\mathrm{T}}$. Здесь E_m – диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены $m\in\{1,2,\ldots,n\}$ единиц и $n-m$ нулей, S – произвольная ортогональная матрица. При этом имеем

$$\operatorname{tr}A=m/(2\sigma),\quad m\leqslant n,\quad n\in\mathbb{N},\quad n\geqslant 2. \tag{13}$$

Замечание. Пространственная структура решений определяется рангом матрицы E_m. Если $\operatorname{rank}E_m=1$, то имеем "псевдомногомерные" точные решения, т.е. решения с линейной комбинацией пространственных переменных. Если $1<\operatorname{rank}E_m<n$, то получим анизотропные по пространственным переменным точные решения. Наконец, если $\operatorname{rank}E_m=n$, то имеем радиально-симметричные по пространственным переменным точные решения.

Окончательно, с учётом формулы (13) ОДУ для искомой функции $\Omega(\omega)$ примет следующий вид:

$$(\omega-\varphi_0)\left(\frac{1}{\sigma}\Omega\Omega''_{\omega\omega}+\frac{\lambda}{\sigma}\Omega'^2_{\omega}+\frac{\nu}{\sigma}\Omega''_{\omega\omega}-\mu_2\Omega'_{\omega}-\mu_3\right)+\frac{\mu_1}{\sigma}(\omega-\varphi_0)^2\Omega''_{\omega\omega}+\frac{m}{2\sigma}(\Omega+\nu)\Omega'_{\omega}=0. \tag{14}$$

Соотношения (9), (12) при условии $\mu_2\neq 0$, $\mu_3\neq 0$ сводятся к следующим ОДУ:

$$a_t'=\frac{\mu_1 m}{2\sigma}a^2\psi,\quad \psi_t'=\left(\mu_2+\left(\frac{m}{2\sigma}+\frac{2\lambda}{\sigma}\right)\mu_1\right)a\psi^2,\quad f_t'=\left(\frac{m}{2\sigma}+\frac{\lambda}{\sigma}+\frac{\mu_3}{\mu_1^2}\right)f^2. \tag{15}$$

Если $\mu_2=\mu_3=0$, то соотношения (9), (12) редуцируются к ОДУ вида

$$a_t'=\frac{\mu_1 m}{2\sigma}a^2\psi,\quad \psi_t'=\left(\frac{m}{2\sigma}+\frac{2\lambda}{\sigma}\right)a\psi^2,\quad f_t'=\left(\frac{m}{2\sigma}+\frac{\lambda}{\sigma}\right)f^2. \tag{16}$$

При этом должно выполняться условие $f(t)=\mu_1 a(t)\psi(t)$, которое подробно рассмотрим при интегрировании систем ОДУ (15) и (16).

Изучим теперь частный случай анзаца (3) при $f(t)\equiv 0$ и $g(t)\equiv 0$. В этом случае анзац примет вид $u(\mathbf{x},t)=a(t)\Omega(\omega)$, и после подстановки его в уравнение (2) придём к равенству

$$a_t'\Omega+a\psi_t'\Omega'_{\omega}W+a\varphi_t'\Omega'_{\omega}=\frac{\lambda}{\sigma}a^2\psi^2\Omega'^2_{\omega}W+a\Omega\left(a\psi\Omega'_{\omega}\operatorname{tr}A+\frac{1}{\sigma}a\psi^2\Omega''_{\omega\omega}W\right),$$

которое получается из равенства (7) при $f(t)\equiv 0$ и $g(t)\equiv 0$ после очевидных преобразований. Это равенство, разделив его на $a_t'\neq 0$ и исключив в нём функцию W с помощью тождества $W=(\omega-\varphi)/\psi$, вытекающего из (3), запишем в виде

$$\Omega+\frac{a\varphi_t'}{a_t'}\Omega'_{\omega}=\frac{a^2\psi}{a_t'}\operatorname{tr}A\Omega\Omega'_{\omega}+(\omega-\varphi)\left[\frac{a^2\psi}{\sigma a_t'}(\Omega\Omega''_{\omega\omega}+\lambda\Omega'^2_{\omega})-\frac{a\psi_t'}{a_t'\psi}\Omega'_{\omega}\right]. \tag{17}$$

Чтобы равенство (17) представляло собой ОДУ для неизвестной функции $\Omega(\omega)$, оно не должно содержать функции, зависящие от времени t. Кроме того, положим $\varphi(t) \equiv \varphi_0 = \text{const}$. Поэтому должны выполняться тождества

$$\frac{a^2\psi}{a'_t} = \delta_1, \quad \frac{a\psi'_t}{a'_t\psi} = \delta_2, \tag{18}$$

где $\delta_1 \neq 0$, $\delta_2 \neq 0$ – некоторые постоянные, которые можно выбирать произвольными. Из равенства (17) в силу тождеств (18) получим для искомой функции $\Omega(\omega)$ нелинейное ОДУ второго порядка

$$\frac{m\delta_1}{2\sigma}\Omega\Omega'_\omega + (\omega - \varphi_0)\left[\frac{\delta_1}{\sigma}(\Omega\Omega''_{\omega\omega} + \lambda\Omega'^2_\omega) - \delta_2\Omega'_\omega\right] - \Omega = 0. \tag{19}$$

Из равенств (18) находим, что $\psi(t) = \delta_0 a(t)^{\delta_2}$, причём

$$a(t) = (C - (1+\delta_2)\delta_0\delta_1^{-1}t)^{\delta}, \quad \text{если} \quad \delta_2 \neq -1, \quad \text{и} \quad a(t) = \exp(\delta_0\delta_1^{-1}t + C), \quad \text{если} \quad \delta_2 = -1.$$

Здесь $\delta = -1/(1+\delta_2)$, а $\delta_0 \neq 0$, C – произвольные постоянные.

2. Интегрирование систем ОДУ (15), (16). Прежде чем приступить к построению частных точных решений найденных ОДУ для функции $\Omega(\omega)$, проинтегрируем системы ОДУ для функций времени $a(t)$, $\psi(t)$, $f(t)$.

1. Пусть $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$, $\mu_3 \neq 0$. Обозначим $k_1 = \mu_1 m/(2\sigma)$, $k_2 = \mu_2 + (m/(2\sigma) + 2\lambda/\sigma)\mu_1$.

Пусть выполнено условие $k_1 + k_2 \neq 0$, тогда система ОДУ (15) для функций $a(t)$ и $\psi(t)$ имеет общее решение

$$a(t) = (C_1 t + C_2)^{k_1/(k_1+k_2)}, \quad \psi(t) = -\frac{C_1}{k_1+k_2}(C_1 t + C_2)^{k_2/(k_1+k_2)},$$

где $C_1 \neq 0$, C_2 – произвольные постоянные. Интегрируя ОДУ (15) для функции $f(t)$, находим

$$f(t) = \frac{1}{-\varepsilon_1 t + C_2}, \quad \text{где} \quad \varepsilon_1 = \frac{m}{2\sigma} + \frac{\lambda}{\sigma} + \frac{\mu_3}{\mu_1^2}.$$

Так как должно выполняться равенство $f(t) = \mu_1 a(t)\psi(t)$, то из последних формул вытекает, что $C_1 = -\varepsilon_1$ и $C_1\mu_1 = -k_1 + k_2$. Вследствие этих двух равенств имеем

$$\mu_1\mu_2 + \frac{m+2\lambda}{2\sigma}\mu_1^2 = \mu_3.$$

С учётом последних соотношений искомые функции примут окончательный вид

$$a(t) = \left[-\left(\frac{m+2\lambda}{\sigma} + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)t + C_2\right]^p, \quad \psi(t) = \frac{1}{\mu_1}\left[-\left(\frac{m+2\lambda}{\sigma} + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)t + C_2\right]^{-1-p},$$

$$f(t) = \left[-\left(\frac{m+2\lambda}{\sigma} + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)t + C_2\right]^{-1}, \quad p = -\frac{m\mu_1/2}{(m+2\lambda)\mu_1 + \sigma\mu_2}, \quad \mu_2 \neq -\frac{m+2\lambda}{\sigma}\mu_1.$$

Если $k_1 + k_2 = 0$ $(k_1 = k,\ k_2 = -k,\ k \neq 0)$, то система ОДУ (15) для функций $a(t)$ и $\psi(t)$ имеет общее решение

$$a(t) = C_1\exp(C_2 t), \quad \psi(t) = \frac{C_2}{kC_1}\exp(-C_2 t),$$

где $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ – произвольные постоянные. Так как должно выполняться равенство $f(t) = \mu_1 a(t)\psi(t)$, то из последних формул следует, что $f(t) \equiv \mu_1 C_2/k$. Чтобы решением

ОДУ (15) для функции $f(t)$ была константа, мы должны потребовать равенство нулю коэффициента в правой части этого уравнения, т.е. $\mu_3 = -(m+2\lambda)\mu_1^2/(2\sigma)$, $\lambda \neq -m/2$. Тогда в силу условия $k_1 + k_2 = 0$ имеем $\mu_2 = -(m+2\lambda)\mu_1/\sigma$. Искомые функции $a(t)$, $\psi(t)$, $f(t)$ примут окончательный вид

$$a(t) = C_1 \exp(C_2 t), \quad \psi(t) = \frac{2\sigma C_2}{m\mu_1 C_1} \exp(-C_2 t), \quad f(t) \equiv \frac{2\sigma C_2}{m}. \tag{20}$$

2. Пусть $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 = \mu_3 = 0$. Обозначим $k_1 = \mu_1 m/(2\sigma)$, $k_2 = m/(2\sigma) + 2\lambda/\sigma$.

Пусть выполнено условие $k_1 + k_2 \neq 0$, тогда система ОДУ (16) для функций $a(t)$ и $\psi(t)$ имеет общее решение

$$a(t) = (C_1 t + C_2)^{k_1/(k_1+k_2)}, \quad \psi(t) = -\frac{C_1}{k_1 + k_2}(C_1 t + C_2)^{k_2/(k_1+k_2)}, \tag{21}$$

где $C_1 \neq 0$, C_2 – произвольные постоянные. Интегрируя ОДУ (16) для функции $f(t)$, находим

$$f(t) = \frac{1}{-\varepsilon_2 t + C_2}, \quad \text{где} \quad \varepsilon_2 = \frac{m+2\lambda}{2\sigma}.$$

Так как должно выполняться равенство $f(t) = \mu_1 a(t)\psi(t)$, то из последних формул вытекает, что $C_1 = -\varepsilon_2$ и $C_1\mu_1 = -k_1 + k_2$. Вследствие этих двух равенств имеем $\mu_1 = (m+4\lambda)/\lambda$. С учётом последних соотношений искомые функции примут окончательный вид

$$a(t) = \left[-\frac{m+2\lambda}{2\sigma} t + C_2 \right]^q, \quad \psi(t) = \frac{1}{\mu_1}\left[-\frac{m+2\lambda}{\sigma} t + C_2 \right]^{-1-q},$$

$$f(t) = \left[-\frac{m+2\lambda}{2\sigma} t + C_2 \right]^{-1}, \quad q = -\frac{\mu_1 m}{\mu_1 m + m + 4\lambda}, \quad \mu_1 \neq -\frac{m+4\lambda}{m}.$$

Если $k_1 + k_2 = 0$ $(k_1 = k,\ k_2 = -k,\ k \neq 0)$, то система ОДУ (16) для функций $a(t)$ и $\psi(t)$ имеет общее решение

$$a(t) = C_1 \exp(C_2 t), \quad \psi(t) = \frac{C_2}{kC_1} \exp(-C_2 t),$$

где $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ – произвольные постоянные. Так как должно выполняться равенство $f(t) = \mu_1 a(t)\psi(t)$, то из последних формул следует, что $f(t) \equiv \mu_1 C_2/k$. Чтобы решением ОДУ (16) для функции $f(t)$ была константа, мы должны потребовать равенство нулю коэффициента в правой части этого уравнения, т.е. $\lambda = -m/2$. Кроме того, в силу условия $k_1 + k_2 = 0$ имеем $\mu_1 = -(m+4\lambda)/m$, $\lambda \neq -m/4$. Искомые функции $a(t)$, $\psi(t)$, $f(t)$ примут окончательный вид (20).

3. Частные точные решения ОДУ (14), (19). Поскольку построение общего решения нелинейных ОДУ второго порядка (14), (19) представляется весьма непростой задачей, то в этом пункте работы ограничимся предъявлением явных частных точных решений указанных уравнений.

Пусть $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$, $\mu_3 \neq 0$, $\varphi_0 \neq 0$, тогда при следующих значениях параметров:

$$\lambda = -\frac{m+2}{4}, \quad 1)\ \mu_2 = \frac{\mu_1(4-m)}{4\sigma}, \quad 2)\ \mu_2 = \frac{(2-m)(m+4)\mu_1}{8\sigma},$$

ОДУ (14) имеет соответственно следующие точные частные решения:

$$1)\ \Omega(\omega) = -\frac{\mu_1}{2\varphi_0}\omega^2 + \frac{\mu_1\varphi_0}{2} - \nu \quad \text{и} \quad 2)\ \Omega(\omega) = -\frac{\mu_1(m+2)}{4\varphi_0}\omega^2 + \frac{(m+2)\mu_1\varphi_0}{4} - \nu. \tag{22}$$

Отметим, что при сделанных предположениях: $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$, $\mu_3 \neq 0$, $\varphi_0 \neq 0$ и $\lambda = -(m+2)/4$, ОДУ (14) обладает точным частным решением $\Omega(z) = P_1\omega^2 + P_2\omega + P_3$, но значения постоянных P_i, $i = 1, 2, 3$, получаются чрезвычайно громоздкими, и поэтому их приводить не будем.

Пусть $\varphi_0 = 0$, $m = 2$, $\lambda = -m/2$, $\delta_2 = -1$, тогда ОДУ (19) имеет частное точное решение

$$\Omega(\omega) = \frac{\sigma}{\delta_1(1-p)}\omega + C\omega^p,$$

где $p \neq 1$, C – произвольные постоянные.

Пример 1. Пусть $n = 3$, $m = 2$, $\lambda = -1$, тогда уравнение нелинейной теплопроводности (2) в трёхмерном координатном пространстве имеет частное точное анизотропное по пространственным переменным решение

$$u(x,y,z,t) = \frac{\delta_0\sigma}{(1-p)\delta_1}W(x,y,z) + C\delta_0^p \exp\left((1-p)\frac{\delta_0}{\delta_1}t\right)W^p(x,y,z),$$

где

$$W(x,y,z) = \frac{1}{256\sigma}(55x^2 + 39y^2 + 34z^2 - 30xy - 6\sqrt{30}xz - 10\sqrt{30}yz) -$$
$$- \frac{1}{3}(5l_1 + \sqrt{30}l_2)x + l_1y + l_2z + \frac{\sigma}{9}(34l_1^2 + 10\sqrt{30}l_1l_2 + 39l_2^2), \tag{23}$$

$p \neq 1$, $\delta_0 \neq 0$, $\delta_1 \neq 0$, $\sigma \neq 0$, C, l_1, l_2, l_3 – произвольные параметры.

Пример 2. Пусть $n = 3$, $m = 2$, $\lambda = -1$, $\mu_1 = \beta$, $\mu_2 = \beta/(2\sigma)$, $\mu_3 = 2\beta^2/\sigma$, тогда уравнение нелинейной теплопроводности (2) в трёхмерном координатном пространстве имеет частное точное анизотропное по пространственным переменным решение

$$u(x,y,z,t) = a(t)\Omega(\omega) + f(t)W(x,y,z) + \nu a(t), \quad \omega = \psi(t)W(x,y,z) + 1,$$

где

$$\Omega(\omega) = P\omega^2 - (2P+\beta)\omega + \beta - \nu,$$
$$a(t) = \left(C_2 - \frac{1}{2\sigma}t\right)^{-2}, \quad \psi(t) = \frac{1}{\mu_1}\left(C_2 - \frac{1}{2\sigma}t\right), \quad f(t) = \left(C_2 - \frac{1}{2\sigma}t\right)^{-1}, \tag{24}$$

а функция $W(x,y,z)$ определена равенством (23), где $P \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$, $\nu > 0$, C_2, l_1, l_2, l_3 – произвольные параметры.

Пример 3. Пусть $n = 3$, $m = 2$, $\lambda = -1$, тогда уравнение нелинейной теплопроводности (2) в трёхмерном координатном пространстве имеет частное точное анизотропное по пространственным переменным решение

$$u(x,y,z,t) = a(t)\Omega(\omega) + f(t)W(x,y,z) + \nu a(t), \quad \omega = \psi(t)W(x,y,z) + \varphi_0,$$

где функция $\Omega(\omega)$ задаётся формулой 1) в (22), а функции $a(t)$, $\psi(t)$, $f(t)$ и $W(x,y,z)$ – равенствами (24) и (23) соответственно, здесь $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$, $\varphi_0 \neq 0$, $\nu > 0$, C_2, l_1, l_2, l_3 – произвольные параметры.

Пример 4. Пусть $n = 3$, $m = 3$, $\lambda = -5/4$, тогда уравнение нелинейной теплопроводности (2) в трёхмерном координатном пространстве имеет частные точные радиально-симметричные решения

$$u_i(x,y,z,t) = a_i(t)\Omega_i(\omega_i) + f_i(t)W_0(x,y,z) + \nu a_i(t), \quad \omega_i = \psi_i(t)W_0(x,y,z) + \varphi_0,$$

где $i = 1, 2$, функции $\Omega_i(\omega)$ задаются соответственно формулами 1) и 2) в (22),

$$a_i(t) = \left(C_2 + \frac{(-1)^i}{i}\frac{3}{4\sigma}t\right)^{6i-8}, \quad \psi_i(t) = \frac{1}{\mu_1}\left(C_2 + \frac{(-1)^i}{i}\frac{3}{4\sigma}t\right)^{-6i+7}, \quad f_i(t) = \left(C_2 + \frac{(-1)^i}{i}\frac{3}{4\sigma}t\right)^{-1},$$

$$W_0(x,y,z)=\frac{1}{4\sigma}(x^2+y^2+z^2)+l_1x+l_2y+l_3z+\sigma(l_1^2+l_2^2+l_3^2),$$

где $\mu_1\neq 0$, $\mu_2\neq 0$, $\varphi_0\neq 0$, $\nu>0$, C_2, l_1, l_2, l_3 – произвольные параметры.

Приведённые примеры достаточно наглядно иллюстрируют новизну полученных результатов. В примерах 1–3 с одинаковым значением параметра $\lambda=-1$ найдены точные решения, представленные функциями различных видов. В примере 1 (вообще говоря, не полиномиальное, поскольку p не обязательно целое) решение имеет степень $2p\neq 2$ по пространственным переменным и экспоненциально зависящие от времени множители. В примере 2 решение является полиномом 4-й степени по пространственным переменным с зависящими от времени коэффициентами, представляющими собой отношение полиномов. В примере 3 решение имеет ту же структуру, что и в примере 2, однако в коэффициентах, отражающих зависимость от времени, степени полиномов другие. Тем самым показано, что предложенный подход позволяет находить для одного и того же многомерного нелинейного уравнения теплопроводности несколько семейств точных решений различной структуры. В примере 4 для значения параметра $\lambda=-5/4$ предъявлено радиально симметричное по пространственным переменным решение, а зависимость от времени выражена через полиномы существенно более высоких степеней, чем в примерах 1–3.

Заключение. В статье методом редукции построены новые многомерные точные решения уравнения нелинейной теплопроводности со степенным коэффициентом. Полученные явные выражения для точных многомерных решений, включающих комбинации элементарных функций, могут представлять не только теоретический, но и прикладной интерес, поскольку их можно использовать для тестирования, настройки и адаптации численных методов и алгоритмов [10, 11]. Кроме того, найденные точные решения могут быть полезны при построении для нелинейного уравнения теплопроводности приближённых решений краевых задач, приводящих к необходимости решения систем уравнений высокой размерности.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-07-00397).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *King J.R.* Exact multidimensional solutions to some nonlinear diffusion equations // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1993. V. 46. № 3. P. 419–436.
2. *Пухначев В.В.* Многомерные точные решения уравнения нелинейной диффузии // Прикл. механика и техн. физика. 1995. Т. 36. № 2. С. 23–31.
3. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. М., 2002.
4. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М., 2005.
5. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Нелинейные уравнения математической физики. В 2-х ч. Ч. 1. М., 2017.
6. *Полянин А.Д., Журов А.И.* Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. М., 2020.
7. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs. Boca Raton; London; New York, 2022.
8. *Косов А.А., Семенов Э.И.* О точных многомерных решениях системы уравнений реакции-диффузии со степенными нелинейностями // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 4. С. 796–812.
9. *Косов А.А., Семенов Э.И.* О точных многомерных решениях одной нелинейной системы уравнений реакции–диффузии // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 1. С. 108–122.
10. *Галактионов В.А., Самарский А.А.* Методы построения приближённых автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. I // Мат. сб. 1982. Т. 118. № 3. С. 291–322.
11. *Ulrich Olivier Dangui-Mbani, Liancun Zheng, Xinxin Zhang.* On analytical solutions for the nonlinear diffusion equation // Amer. J. of Engineering Research. 2014. V. 3. № 9. P. 224–232.

Институт динамики систем и теории управления
им. В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск

Поступила в редакцию 25.06.2021 г.
После доработки 21.01.2022 г.
Принята к публикации 07.02.2022 г.

EDN: MOUFMD
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 192–203

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957+517.958:536.24

КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН МЕЖДУ ДВИЖУЩЕЙСЯ ТВЁРДОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЕЙ И ВЯЗКИМ ГАЗОМ

© 2022 г. Н. В. Малай, Е. Р. Щукин, Д. Н. Ефимцева

Получено приближённое решение краевой задачи для уравнения конвективного теплообмена методом сращиваемых асимптотических разложений при малых значениях чисел Пекле и Рейнольдса. При решении стационарной системы газодинамических уравнений теплообмена, включающей линеаризованную по скорости систему уравнений Навье–Стокса, уравнение конвективного теплообмена и уравнение Пуассона, предполагается, что зависимости вязкости, теплопроводности и плотности газообразной среды от температуры носят степенной характер.

DOI: 10.31857/S0374064122020066

Введение. Математические исследования процессов переноса, происходящих в аэродисперсных системах, вызваны как теоретическими, так и практическими интересами и в настоящее время представляют собой обширную и быстро развивающуюся область газовой динамики. Явление переноса – это неравновесный процесс, причиной которого являются возмущения системы, нарушающие состояние её термодинамического равновесия. При взаимодействии аэродисперсных систем, имеющих разную температуру, между ними происходит обмен энергией (перенос теплоты). Значение процесса теплообмена в природе и производстве определяется тем, что свойства тел самым существенным образом зависят от их теплового состояния, которое, в свою очередь, само определяется условиями теплообмена. Эти условия оказывают существенное влияние на процессы изменения состояния вещества и на механические, тепловые, магнитные и другие свойства тел.

При математическом описании процесса теплообмена вводят безразмерный параметр $\Theta(T)$, характеризующий относительный перепад температуры, под которым понимают отношение разности между средней температурой T_S поверхности частицы и температурой T_∞ области вдали от неё к температуре T_∞, т.е. $\Theta(T) = (T_S - T_\infty)/T_\infty$. Относительный перепад температуры считается малым, если $\Theta(T) \ll 1$, и значительным в противном случае. В первом случае вязкая газообразная среда называется изотермической, а во втором – неизотермической.

Если выполняется условие $\Theta(T) \ll 1$, то решение системы газодинамических уравнений, описывающей процесс теплообмена, существенно упрощается. В частности, коэффициенты молекулярного переноса (вязкость, теплопроводность) и плотность газообразной среды можно считать постоянными величинами, а сама система газодинамических уравнений распадается при этом на гидродинамическую (система уравнений Навье–Стокса) и тепловую (уравнение Лапласа и уравнение Пуассона).

В данной работе рассматривается конвективный теплообмен, обусловленный совместным действием двух механизмов переноса тепла – конвекцией и теплопроводностью. В этом случае общее уравнение переноса тепла в вязкой неизотермической газообразной среде имеет в стационарном приближении вид [1, гл. V, с. 232]

$$\rho(x)c_p(x)(\mathbf{U}(x)\nabla)T(x) = \operatorname{div}(\lambda(x)\nabla T(x)) + \Phi(x) + Q(x),$$

где $\mathbf{U}(x)$ – вектор массовой скорости, $T(x)$ – температура, $\rho(x)$ – плотность, $c_p(x)$ – удельная теплоёмкость при постоянном давлении, $\lambda(x)$ – коэффициент теплопроводности, $\Phi(x)$ – диссипативная функция, учитывающая нагрев среды из-за внутреннего трения, $Q(x)$ – внутреннее тепловыделение в единице объёма среды, ∇ – оператор набла, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

При нахождении решения этого уравнения даже при малых относительных перепадах температуры необходимо знать векторное поле массовой скорости, для чего нужно решить систему уравнений Навье–Стокса. Система уравнений Навье–Стокса, представляющая собой математическое выражение законов сохранения импульса и массы, относится к классу нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Как известно, при её решении возникают существенные математические трудности, обусловленные наличием конвективного члена ускорения. Поэтому на первый план выходит вопрос не только решения самого конвективного уравнения теплопроводности, но и нахождения решений системы уравнений гидродинамики (системы уравнений Навье–Стокса) и разрешимости краевых задач для этой системы [2].

В газовой динамике вследствие указанных выше проблем разработаны приближённые методы, позволяющие в той или иной мере упростить систему гидродинамики и приспособить её к характеру отдельных типов конкретных физических задач. В научной литературе имеется обширный класс таких течений, в котором можно пренебречь конвективным членом ускорения в системе уравнений Навье–Стокса. Такие системы уравнений получили название линеаризованных по скорости систем уравнений Навье–Стокса.

К настоящему времени процесс теплообмена между частицей сферической формы и газообразной средой подробно исследован лишь в изотермическом случае (см., например, [3, гл. 4]). В последнее время возрос интерес и к исследованию краевых задач, когда параметр $\Theta(T) \sim O(1)$ (см., например, [4–7]). Однако в этих работах не учитывалось влияние конвективного переноса тепла на поведение взвешенных аэрозольных частиц в аэродисперсных системах.

Отметим, что при описании теплообмена если малы характерная скорость (числа Пекле и Рейнольдса малы) и относительный перепад температуры в газе, то конвективным переносом тепла $(\rho c_p(\mathbf{U}\nabla)T)$ по сравнению с молекулярным переносом $(\operatorname{div}(\lambda\nabla T))$ можно пренебречь. Ситуация существенно меняется, когда относительный перепад температуры в газе значительный, т.е. $\Theta(T) \sim O(1)$ (например, частицу нагрели лазером до $700\,^\circ$C, а температура окружающей её газообразной среды $20\,^\circ$C). Тогда конвективный перенос тепла по порядку величины сравним с молекулярным переносом тепла и его необходимо учитывать при описании аэродисперсных систем. Настоящая работа посвящена исследованию такого случая.

Постановка задачи. Основные уравнения и граничные условия. Рассматривается классическая задача для установившегося процесса теплообмена при обтекании твёрдой неравномерно нагретой частицы сферической формы радиуса R плоскопараллельным потоком газа со скоростью $\mathbf{U}_\infty$ ($\mathbf{U}_\infty \| Oz$, ось Oz направлена горизонтально) при произвольных перепадах температуры. Описание проводится в сферической системе координат (r, φ, θ). При этом положение декартовой системы координат фиксировано относительно оси частицы Oz, проходящей через её центр. Задача осесимметрична (это означает, что все неизвестные функции зависят только от координат r и θ) и формулируется следующим образом.

Задача. Вязкая неизотермическая газообразная среда занимает неограниченную область $\Omega_\mathrm{e} = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\mathrm{i}$, где Ω_i – сферическая область с центром в нуле евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Требуется найти векторное поле массовой скорости $\mathbf{U}_\mathrm{e}(x) = (U_1^{(\mathrm{e})}(x), U_2^{(\mathrm{e})}(x), U_3^{(\mathrm{e})}(x))$ ($x \in \Omega_\mathrm{e}$) и распределения температур $T_\mathrm{e}(x)$ ($x \in \Omega_\mathrm{e}$) и $T_\mathrm{i}(x)$ ($x \in \Omega_\mathrm{i}$) в газообразной среде и внутри частицы, удовлетворяющие уравнениям:

$$\nabla_k P_\mathrm{e} = \sum_{j=1}^{3} \nabla_j \left[\mu_\mathrm{e} \left(\nabla_j U_k^{(\mathrm{e})} + \nabla_k U_j^{(\mathrm{e})} - \frac{2}{3}\delta_{jk}(\nabla \cdot \mathbf{U}_\mathrm{e}) \right) \right], \quad k = 1, 2, 3, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot (\rho_\mathrm{e} \mathbf{U}_\mathrm{e}) = 0, \tag{2}$$

$$\rho_\mathrm{e} c_{p\mathrm{e}} (\mathbf{U}_\mathrm{e} \cdot \nabla T_\mathrm{e}) = \nabla \cdot (\lambda_\mathrm{e} \nabla T_\mathrm{e}), \tag{3}$$

$$\nabla \cdot (\lambda_\mathrm{i} \nabla T_\mathrm{i}) = -q_\mathrm{i}, \tag{4}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $P_\mathrm{e}(x)$ – давление, $\nabla = (\nabla_1, \nabla_2, \nabla_3)$ – векторный дифференциальный оператор Гамильтона в декартовых координатах, $\nabla_j \equiv \partial/\partial x_j$, $q_\mathrm{i}(x)$ – заданная в Ω_i функция,

определяющая распределение плотности тепловых источников внутри частицы. Здесь и далее индекс e относится к областям Ω_{e}, индекс i относится к области Ω_{i}; индексом ∞ обозначены значения физических величин в невозмущённом потоке (т.е. вдали от частицы) и индексом S – значения физических величин, взятые при средней температуре поверхности частицы, равной T_S.

Ввиду того, что μ_{e}, ρ_{e}, λ_{e}, λ_{i} являются функциями от искомых функций $T_{\mathrm{e}}(x)$ и $T_{\mathrm{i}}(x)$, система уравнений (1)–(4) в целом является нелинейной. Уравнение (1) в литературе называется стационарным линеаризованным по скорости уравнением Навье–Стокса, (2) – уравнением неразрывности, (3) – уравнение теплопроводности, описывающее распределение температуры в области Ω_{e}, а (4) – уравнение Пуассона, описывающее распределение температуры внутри области Ω_{i} (внутри частицы).

Для решения системы уравнений газовой динамики сделаем следующие физические допущения, реализуемые в большинстве прикладных задач (см., например, [4–6]).

Допущение 1. При описании свойств частицы и газообразной среды рассматривается степенной вид зависимости динамической вязкости, теплопроводности и плотности от температуры (см., например, [8, гл. IX, с. 217]):

$$\mu_{\mathrm{e}} = \mu_\infty (T_{\mathrm{e}}/T_\infty)^\beta, \quad \rho_{\mathrm{e}} = \rho_\infty (T_\infty/T_{\mathrm{e}}), \quad \lambda_{\mathrm{e}} = \lambda_\infty (T_{\mathrm{e}}/T_\infty)^\alpha, \quad \lambda_{\mathrm{i}} = \lambda_* (T_{\mathrm{i}}/T_\infty)^\gamma,$$

где μ_∞, ρ_∞, λ_∞, λ_*, T_∞ – положительные постоянные. В указанных степенных зависимостях показатели заключены в следующих пределах: $0,5 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$, $-1 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

Допущение 2. Как и в работах [4–6], будем считать, что коэффициент теплопроводности частицы много больше коэффициента теплопроводности газа, что имеет место для большинства реальных газообразных сред. Это допущение приводит к тому, что в коэффициенте вязкости можно пренебречь зависимостью от угла θ в системе частица–газообразная среда (предполагается слабая угловая асимметрия распределения температуры) и, следовательно, вязкость связана только с температурой $T_{\mathrm{e}0}(r)$, т.е. $\mu_{\mathrm{e}}(T_{\mathrm{e}}(r,\theta)) \approx \mu_{\mathrm{e}}(T_{\mathrm{e}0}(r))$. При этом $T_{\mathrm{e}}(r,\theta) = T_{\mathrm{e}0}(r) + \delta T_{\mathrm{e}}(r,\theta)$, где $\delta T_{\mathrm{e}}(r,\theta) \ll T_{\mathrm{e}0}(r)$, а $\delta T_{\mathrm{e}}(r,\theta)$ и $T_{\mathrm{e}0}(r)$ определяются из решения уравнений (3), (4). При таком допущении мы можем рассматривать гидродинамическую часть отдельно от тепловой части, а связь между ними осуществлять с помощью граничных условий.

Допущение 3. Частица образована однородным и изотропным по своим свойствам веществом.

В сферической системе координат (r,θ,φ) система газодинамических уравнений, описывающая распределение скорости и давления вне частицы, имеет следующий вид [1, с. 70–71, 232]:

$$\frac{\partial P_{\mathrm{e}}}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial y} + \frac{2}{y}\sigma_{rr} + \frac{1}{y}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{y}\sigma_{r\theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{y}, \tag{5}$$

$$\frac{1}{y}\frac{\partial P_{\mathrm{e}}}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial y} + \frac{3}{y}\sigma_{r\theta} + \frac{1}{y}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{y}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}), \tag{6}$$

$$\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}(y^2 \rho_{\mathrm{e}} U_r^{(\mathrm{e})}) + \frac{1}{y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \rho_{\mathrm{e}} U_\theta^{(\mathrm{e})}) = 0, \tag{7}$$

а уравнения теплопроводности с учётом допущения 1 принимают вид

$$\frac{\rho_\infty c_{p\mathrm{e}} R}{\lambda_\infty t_{\mathrm{e}}}\left(U_r^{(\mathrm{e})}\frac{\partial t_{\mathrm{e}}}{\partial y} + \frac{U_\theta^{(\mathrm{e})}}{y}\frac{\partial t_{\mathrm{e}}}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 t_{\mathrm{e}}^\alpha \frac{\partial t_{\mathrm{e}}}{\partial y}\right) + \frac{1}{y^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(t_{\mathrm{e}}^\alpha \sin\theta \frac{\partial t_{\mathrm{e}}}{\partial \theta}\right), \tag{8}$$

$$\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 t_{\mathrm{i}}^\gamma \frac{\partial t_{\mathrm{i}}}{\partial y}\right) + \frac{1}{y^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta t_{\mathrm{i}}^\gamma \frac{\partial t_{\mathrm{i}}}{\partial \theta}\right) = -\frac{R^2}{\lambda_* T_\infty} q_{\mathrm{i}}, \tag{9}$$

где $y = r/R$; $U_r^{(\mathrm{e})}$, $U_\theta^{(\mathrm{e})}$ – нормальная и касательные компоненты массовой скорости в сферической системе координат; $t_{\mathrm{e}} = T_{\mathrm{e}}/T_\infty$, $t_{\mathrm{i}} = T_{\mathrm{i}}/T_\infty$; σ_{rr}, $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}$ – компоненты

тензора напряжений в сферической системе координат, определяемые равенствами [1, гл. II, с. 70]:

$$\sigma_{rr} = \mu_{\mathrm{e}}\left(2\frac{\partial U_r^{(\mathrm{e})}}{\partial y} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{U}_{\mathrm{e}}\right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \mu_{\mathrm{e}}\left(\frac{2}{y}\frac{\partial U_\theta^{(\mathrm{e})}}{\partial \theta} + \frac{2}{y}U_r^{(\mathrm{e})} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{U}_{\mathrm{e}}\right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \mu_{\mathrm{e}}\left(\frac{2}{y}U_r^{(\mathrm{e})} + \frac{2}{y}\operatorname{ctg}\theta U_\theta^{(\mathrm{e})} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{U}_{\mathrm{e}}\right), \quad \sigma_{r\theta} = \mu_{\mathrm{e}}\left(\frac{\partial U_\theta^{(\mathrm{e})}}{\partial y} + \frac{1}{y}\frac{\partial U_r^{(\mathrm{e})}}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^{(\mathrm{e})}}{y}\right).$$

Для уравнений теплообмена задаются краевые условия первого и второго рода: на поверхности частицы (при $y = 1$) имеют место равенство температур и непрерывность радиальных потоков тепла с учётом излучения, а также справедливы следующие стандартные условия при $y \to \infty$ и $y \to 0$:

$$\lim_{y\to 1} T_{\mathrm{e}}(y,\theta) = \lim_{y\to 1} T_{\mathrm{i}}(y,\theta), \tag{10}$$

$$\lim_{y\to 1} \lambda_{\mathrm{e}}\frac{\partial T}{\partial y} = \lim_{y\to 1}\left(\lambda_{\mathrm{i}}\frac{\partial T_{\mathrm{i}}}{\partial y} + R\sigma_0\sigma_1(T_{\mathrm{i}}^4 - T_\infty^4)\right), \tag{11}$$

$$\lim_{y\to\infty} P_{\mathrm{e}} = P_\infty, \quad \lim_{y\to\infty} T_{\mathrm{e}} = T_\infty, \quad \lim_{y\to 0}|T_{\mathrm{i}}| < \infty, \tag{12}$$

$$\lim_{y\to\infty}(U_r^{(\mathrm{e})}(y,\theta) - U_\infty\cos\theta) = 0, \quad \lim_{y\to\infty}(U_\theta^{(\mathrm{e})}(y,\theta) + U_\infty\sin\theta) = 0,$$

где σ_0 – постоянная Стефана–Больцмана, σ_1 – интегральная степень черноты тела, $U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|$. В силу общности постановки задачи граничные условия на поверхности частицы для нормальной $U_r^{(\mathrm{e})}(y,\theta)$ и касательной $U_\theta^{(\mathrm{e})}(y,\theta)$ компонент массовой скорости $\boldsymbol{U}_{\mathrm{e}}$ мы не приводим. При математическом описании равномерного движения нагретых частиц в вязкой неизотермической газообразной среде природа сил, вызывающих это движение, нас интересовать не будет. Она может быть гравитационной, магнитной, термофоретической и т.д., что позволит распространить метод решения системы газодинамических уравнений на более широкий класс физических задач.

Компоненты массовой скорости и давления будем искать в виде разложения по полиномам Лежандра и Гегенбауэра. Используя свойство полиномов Лежандра и Гегенбауэра, несложно показать, что в случае осесимметричного течения для определения физических величин, его характеризующих, можно ограничиться первыми членами разложений (см. [3, гл. 4, с. 156]). Поэтому будем считать, что

$$V_r^{(\mathrm{e})}(y,\theta) = G(y)\cos\theta, \quad V_\theta^{(\mathrm{e})}(y,\theta) = -g(y)\sin\theta, \tag{13}$$

где $V_r^{(\mathrm{e})} = U_r^{(\mathrm{e})}/U_\infty$, $V_\theta^{(\mathrm{e})} = U_\theta^{(\mathrm{e})}/U_\infty$, $G(y)$ и $g(y)$ – функции, зависящие от радиальной координаты.

Связь между функциями $G(y)$ и $g(y)$ находится из уравнения непрерывности (7) с учётом зависимости плотности газообразной среды от температуры (допущение 1) и имеет следующий вид:

$$g(y) = G(y) + \frac{y}{2}(G'(y) - f(y)G(y)), \quad f(y) = \frac{1}{t_{\mathrm{e}0}(y)}\frac{dt_{\mathrm{e}0}(y)}{dy}. \tag{14}$$

Определяющими параметрами в задаче являются материальные постоянные μ_∞, ρ_∞, λ_∞ и сохраняющиеся в процессе обтекания частицы постоянные R, T_∞, U_∞. Из этих параметров можно составить две безразмерные комбинации – числа Пекле и Рейнольдса, которые считаются малыми величинами. Так как число Пекле выражается через число Рейнольдса, то в качестве малого параметра в задаче используется число Рейнольдса ($\mathrm{Re}_\infty = (\rho_\infty R U_\infty)/\mu_\infty$). Решение уравнений (8), (9) будем искать методом сращиваемых асимптотических разложений (см. [9, гл. 12, с. 291]), при этом ограничимся членами до первого порядка малости (как правило, этого достаточно для физических приложений).

Внутренние и внешние асимптотические разложения обезразмеренной температуры ищутся в виде

$$t_{\mathrm{e}}(y,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(\varepsilon)t_{en}(y,\theta),\quad f_0(\varepsilon)=1, \tag{15}$$

$$t_{\mathrm{e}}^*(\xi,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n^*(\varepsilon)t_{en}^*(\xi,\theta), \tag{16}$$

где $\xi=\varepsilon y$ – "сжатая" радиальная координата [9, гл. 12.3, с. 291]. При этом требуется, чтобы выполнялись соотношения

$$\frac{f_{n+1}(\varepsilon)}{f_n(\varepsilon)}\to 0\quad\text{и}\quad\frac{f_{n+1}^*(\varepsilon)}{f_n^*(\varepsilon)}\to 0\quad\text{при}\quad\varepsilon\to 0. \tag{17}$$

Относительно функций $f_n(\varepsilon)$ и $f_n^*(\varepsilon)$ предполагается лишь, что их порядок малости по ε увеличивается с ростом n (см. (17)). Недостающие краевые условия для внутреннего и внешнего разложений вытекают из условия тождественности асимптотических продолжений того и другого разложения в некоторую промежуточную область

$$t_{\mathrm{e}}(y\to\infty,\theta)=t_{\mathrm{e}}^*(\xi\to 0,\theta).$$

Асимптотические разложения решения внутри частицы, как показывают краевые условия на поверхности частицы, следует искать в виде, аналогичном (15):

$$t_{\mathrm{i}}(y,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(\varepsilon)t_{\mathrm{i}n}(y,\theta).$$

С учётом сжатой радиальной координаты имеем следующее уравнение для температуры t_{e}^* (оно получается из уравнения конвективной теплопроводности заменой y на $\xi=\varepsilon y$):

$$\frac{\mathrm{Pr}_\infty}{t_{\mathrm{e}}^*}\left(V_r^*\frac{\partial t_{\mathrm{e}}^*}{\partial\xi}+\frac{V_\theta^*}{\xi}\frac{\partial t_{\mathrm{e}}^*}{\partial\theta}\right)=\mathrm{div}^*(t_{\mathrm{e}}^{*\alpha}\nabla^* t_{\mathrm{e}}^*), \tag{18}$$

при этом

$$\mathbf{V}_{\mathrm{e}}^*=\mathbf{n}_z+\varepsilon\mathbf{V}_{\mathrm{e}}^*+\ldots,\quad t_{\mathrm{e}}^*\to 1\quad\text{при}\quad\xi\to\infty,$$

где $\mathrm{Pr}_\infty=\mu_\infty c_p/\lambda_\infty$ – число Прандтля, ∇^* – оператор набла, полученный из оператора ∇ заменой y на ξ и т.д., $\mathbf{n}_z$ – единичный вектор в направлении оси Oz.

Решения уравнений теплопереноса. Сначала найдём решение уравнения конвективного теплопереноса. Построение решения начинается с определения нулевого члена внешнего разложения (16). В данном случае, очевидно, нашей краевой задаче удовлетворяет решение

$$t_{\mathrm{e}0}^*=1. \tag{19}$$

Найдём нулевой член внутреннего разложения (15). При $\varepsilon=0$ из уравнения (8) получим

$$\Delta t_{\mathrm{e}0}^{1+\alpha}=0,$$

и его общее решение имеет вид

$$t_{\mathrm{e}0}=\left[K_0+\frac{\Gamma_0}{y}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(K_n y^n+\frac{\Gamma_n}{y^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)\right]^{1/(1+\alpha)}. \tag{20}$$

Здесь $P_n(\cos\theta)$ – полиномы Лежандра.

Постоянные интегрирования K_n и Γ_n определяются из условия сращивания, для этого внешнее разложение должно быть разложено в ряд по ξ. Затем значения констант находятся из требования соответствия поведения членов полученного ряда при $\xi \to 0$ и членов разложения (20) при $y \to \infty$. Для нулевых приближений сращивание тривиально: $K_0 = 1$, $\Gamma_n = K_n = 0$ при $n \geqslant 1$. Следовательно,

$$t_{\mathrm{e}0} = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y}\right)^{1/(1+\alpha)}. \tag{21}$$

Постоянная интегрирования K_0 определяется из краевых условий на поверхности частицы ($y = 1$). Для её определения необходимо знать поле температуры внутри частицы (9). Как будет показано ниже, поле температуры $t_{\mathrm{i}}(y, \theta)$ можно искать в виде

$$t_{\mathrm{i}}(y, \theta) = t_{\mathrm{i}0}(y) + \varepsilon t_{\mathrm{i}1}(y, \theta), \tag{22}$$

где

$$t_{\mathrm{i}0}(y) = \left(B_0 + \frac{H_0}{y} - \frac{1}{y}\int\limits_1^y \psi_0(y)\,dy + \int\limits_1^y \frac{\psi_0(y)}{y}\,dy\right)^{1/(1+\gamma)}, \quad \psi_0(y) = -\frac{R^2}{2\lambda_*}\frac{1+\gamma}{T_\infty}y^2\int\limits_{-1}^1 q_{\mathrm{i}}\,dx,$$

$$H_0 = \int\limits_1^0 \psi_0(y)\,dy, \quad \psi_1(y) = -\frac{3R^2}{2\lambda_* T_\infty}y^2\int\limits_{-1}^{+1} q_{\mathrm{i}} x\,dx, \quad H_1 = \int\limits_1^0 \psi_1 y\,dy = \frac{R^2}{3\lambda_* T_\infty}J_1, \quad x = \cos\theta,$$

$$t_{\mathrm{i}1}(y, \theta) = \frac{N_0}{t_{\mathrm{i}0}^\gamma} + \frac{\cos\theta}{t_{\mathrm{i}0}^\gamma}\left[B_1 y + \frac{H_1}{y^2} + \frac{1}{3}\left(y\int\limits_1^y \frac{\psi_1(y)}{y^2}\,dy - \frac{1}{y^2}\int\limits_1^y \psi_1(y) y\,dy\right)\right], \quad J_1 = \frac{1}{V}\int\limits_V q_{\mathrm{i}} z\,dV.$$

Здесь $\int_V q_{\mathrm{i}} z\,dV$ – дипольный момент плотности тепловых источников [7] и интегрирование ведётся по всему объёму частицы, $V = 4\pi R^3/3$, $z = r\cos\theta$.

Через T_S обозначим среднее значение температуры поверхности частицы ($T_S = t_{\mathrm{i}S}T_\infty$, $t_{\mathrm{i}S} = t_{\mathrm{i}0}$ $(y = 1)$), тогда из краевых условий (10), (11) получим

$$\Gamma_0 = \left(\frac{T_S}{T_\infty}\right)^{1+\alpha} - 1, \quad \frac{\ell^{(S)}}{1+\alpha}\frac{\lambda_{\mathrm{e}S}}{\lambda_{\mathrm{i}S}}t_{\mathrm{e}S} = \frac{R^2}{3\lambda_{\mathrm{i}S}T_\infty}J_0 - \sigma_0\sigma_1\frac{RT_\infty^3}{\lambda_{\mathrm{i}S}}(t_{\mathrm{i}S}^4 - 1),$$

где

$$\lambda_{\mathrm{e}S} = \lambda_\infty t_{\mathrm{e}S}^\alpha, \quad \lambda_{\mathrm{i}S} = \lambda_* t_{\mathrm{i}S}^\gamma, \quad t_{\mathrm{e}S} = t_{\mathrm{e}0} \quad (y = 1),$$

$$\ell^{(S)} = \ell \quad (y = 1), \quad \ell(y) = \frac{\Gamma_0}{y + \Gamma_0}, \quad J_0 = \frac{3}{4\pi R^3}\int\limits_V q_{\mathrm{i}}\,dV.$$

Найдём первые приближения для внешней температуры. Для членов первого приближения внешнего разложения в силу представления (16) имеем

$$t_{\mathrm{e}}(\xi, \theta) = 1 + f_1^*(\varepsilon)t_{\mathrm{e}1}^*(\xi, \theta).$$

Найдём явный вид коэффициента $f_1(\varepsilon)$. Для этого перейдём в решении (21) к внешней переменной. Видим, что $f_1(\varepsilon) = \varepsilon$, тогда

$$t_{\mathrm{e}}(\xi, \theta) = 1 + \varepsilon t_{\mathrm{e}1}^*(\xi, \theta). \tag{23}$$

Подставляя выражение (23) для t_{e} в уравнение (18) и удерживая члены порядка ε, получаем следующее уравнение:

$$\mathrm{Pr}_\infty\left(x\frac{\partial t_{\mathrm{e}1}^*}{\partial \xi} + \frac{1 - x^2}{\xi}\frac{\partial t_{\mathrm{e}1}^*}{\partial x}\right) = \Delta^* t_{\mathrm{e}1}^* \quad \text{при} \quad \xi \to \infty, \quad t_{\mathrm{e}1}^* \to 0. \tag{24}$$

Общее решение уравнения (24) имеет вид

$$t^*_{\mathrm{e}1} = \exp\left\{\frac{\mathrm{Pr}_\infty}{2}x\xi\right\}\left(\frac{\pi}{\mathrm{Pr}_\infty\xi}\right)^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}L_nK_{n+1/2}\left(\frac{\mathrm{Pr}_\infty\xi}{2}\right)P_n(x),$$

$$\left(\frac{\pi}{\mathrm{Pr}_\infty\xi}\right)^{1/2}K_{n+1/2}\left(\frac{\mathrm{Pr}_\infty\xi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{\mathrm{Pr}_\infty\xi}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{\mathrm{Pr}_\infty}{2}\xi\right\}\sum_{m=0}^{n}\frac{(n+m)!}{(n-m)!m!(\mathrm{Pr}_\infty\xi)^m}.$$

Здесь $\left(\frac{\pi}{\mathrm{Pr}_\infty\xi}\right)^{1/2}K_{n+1/2}\left(\frac{\mathrm{Pr}_\infty\xi}{2}\right)$ – модифицированная функция Бесселя [10, с. 398]. Постоянные интегрирования L_n определяются из условия сращивания: $L_0 = (\mathrm{Pr}_\infty\Gamma_0)/(\pi(1+\alpha))$ и $L_n = 0$ при $n \geqslant 1$. Следовательно,

$$t^*_{\mathrm{e}1}(\xi,\theta) = \frac{\Gamma_0}{(1+\alpha)\xi}\exp\left\{-\frac{\mathrm{Pr}_\infty}{2}\xi(1-\cos\theta)\right\}. \tag{25}$$

Найдём первое приближение для внутреннего разложения (15). Из формулы (25) видно, что $f_1(\varepsilon) = \varepsilon$, и тогда

$$t_{\mathrm{e}}(y,\theta) = t_{\mathrm{e}0}(y) + \varepsilon t_{\mathrm{e}1}(y,\theta). \tag{26}$$

Подставляя выражение (26) для t_{e} в уравнение (8), приходим к уравнению для функции $t_{\mathrm{e}1}(y,\theta)$:

$$\frac{\mathrm{Pr}_\infty}{t_{\mathrm{e}0}(y)}V_r^{(\mathrm{e})}(y,\theta)\frac{\partial t_{\mathrm{e}0}(y)}{\partial y} = \mathrm{div}\left(t^{\alpha}_{\mathrm{e}0}(y)\nabla t_{\mathrm{e}1}(y,\theta) + \alpha t^{\alpha-1}_{\mathrm{e}0}(y)t_{\mathrm{e}1}(y,\theta)\nabla t_{\mathrm{e}0}(y)\right). \tag{27}$$

Чтобы определить поведение $t_{\mathrm{e}1}(y\to\infty,\theta)$ (т.е. краевое условие), срастим двучленные внутреннее и внешнее разложения, имеем:

$$t_{\mathrm{e}1}(y\to\infty,\theta) = \frac{\omega_1}{2}(\cos\theta - 1), \quad \omega_1 = \frac{\Gamma_0\mathrm{Pr}_\infty}{1+\alpha}. \tag{28}$$

Из уравнения (27) видно, что для нахождения первого приближения $t_{\mathrm{e}1}(y,\theta)$ для внутреннего разложения необходимо знать компоненты поля массовой скорости. Для их определения поступим аналогично тому, как это сделано в [4, 5]. Учитывая решение (21) и допущение 2, заключаем, что зависимость динамической вязкости от температуры имеет вид

$$\mu_{\mathrm{e}}(y,\theta) = \mu_\infty\left(1+\frac{\Gamma_0}{y}\right)^{\beta(1+\alpha)}. \tag{29}$$

Продифференцируем уравнение (5) по переменной θ и уравнение (6) по переменной y, затем, подставляя в получившиеся уравнения представления (13) и учитывая соотношения (14) и (29), после очевидных преобразований получим для функции $G(y)$ на полуинтервале $[1,\infty)$ следующее линейное неоднородное дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$[\ell^3 - 3\ell^4 + 3\ell^5 - \ell^6]\frac{d^3G(\ell)}{d\ell^3} + [2\ell^2 - \ell^3(10+\gamma_1) + 2\ell^4(7+\gamma_1) - \ell^5(6+\gamma_1)]\frac{d^2G(\ell)}{d\ell^2} -$$

$$- [6\ell - \ell^2(2-2\gamma_1-\gamma_2) - \ell^3(10+4\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) + \ell^4(6+2\gamma_1+\gamma_3)]\frac{dG(\ell)}{d\ell} +$$

$$+ \gamma_3\ell^2(2-\ell)G(\ell) = \frac{d}{\Gamma_0}\ell(1-\ell)^{\gamma_4^*}, \tag{30}$$

в котором

$$\gamma_1 = \frac{1-\beta}{1+\alpha}, \quad \gamma_1 = 2\frac{1+\beta}{1+\alpha}, \quad \gamma_3 = \frac{2+2\alpha-\beta}{(1+\alpha)^2}, \quad \gamma_4^* = \frac{\beta}{1+\alpha} - 1, \quad d = \text{const},$$

$$1 < y < \infty, \quad \ell(y) = \frac{\Gamma_0}{y+\Gamma_0},$$

с краевым условием

$$\lim_{y\to\infty} G(y) = 1. \tag{31}$$

Далее будем называть однородным уравнением (30) уравнение (30) с нулевой правой частью. Найдём решение однородного уравнения (30). Точка $\ell = 0$ является для него регулярной особой точкой, поэтому его решение будем искать в виде обобщённого степенного ряда [10, гл. V, с. 101; 11, гл. IV, с. 146]:

$$G(\ell) = \ell^\rho \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \ell^n, \quad \alpha_0 \neq 0. \tag{32}$$

Подставляя ряд (32) в однородное уравнение (30) и приравнивая коэффициент при y^ρ к нулю, получаем определяющее уравнение $\rho(\rho-3)(\rho+2) = 0$, корни которого $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 0$, $\rho_3 = -2$. Большему из этих корней отвечает решение

$$G_1(y) = \ell^3 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(1)} \ell^n, \quad \alpha_0^{(1)} \neq 0. \tag{33}$$

Подставляя ряд (33) в однородное уравнение (30) и используя метод неопределённых коэффициентов, приходим к следующей рекуррентной формуле для нахождения коэффициентов $\alpha_n^{(1)}$ $(n \geqslant 1)$:

$$\alpha_n^{(1)} = \frac{1}{n(n+3)(n+5)}\{(n+2)[(n+1)(3n+10+\gamma_1) - 2 + 2\gamma_1 + \gamma_2]\alpha_{n-1}^{(1)} -$$

$$- [(n+1)(n(3n+11+2\gamma_1) + 10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + 2\gamma_3]\alpha_{n-2}^{(1)} +$$

$$+ [n((n-1)(n+4+\gamma_1) + 6 + \gamma_3 + 2\gamma_1) + \gamma_3]\alpha_{n-3}^{(1)}\}.$$

Второе решение $G_3(\ell)$ однородного уравнения (30), отвечающее корню $\rho_2 = 0$, имеет вид

$$G_3(\ell) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(3)} \ell^n + \omega_3^* G_1(\ell) \ln\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right), \quad \alpha_0^{(3)} \neq 0, \quad \ell_0 = \ell \quad (y = 1), \tag{34}$$

где коэффициенты $\alpha_n^{(3)}$ $(n \geqslant 3)$ определяются следующей рекуррентной формулой:

$$\alpha_n^{(3)} = \frac{1}{n(n+2)(n-3)}\{(n-1)[(n-2)(3n+1+\gamma_1) - 2 + 2\gamma_1 + \gamma_2]\alpha_{n-1}^{(3)} -$$

$$- [(n-2)((n-3)(3n+2+2\gamma_1) + 10 + 4\gamma_1 + \gamma_2\gamma_2) + 2\gamma_3]\alpha_{n-2}^{(3)} +$$

$$+ [(n-3)((n-4)(n+1+\gamma_1) + 6 + \gamma_3 + 2\gamma_1) + \gamma_3]\alpha_{n-3}^{(3)} - \omega_3^* S_{n-3}^{(1)}\},$$

$$S_n^{(1)} = (3n^2+16n+15)\alpha_n^{(1)} - (9n^2+18n+(10+\gamma_1)(2n+3)+2\gamma_1+\gamma_2)\alpha_{n-1}^{(1)} +$$

$$+(9n^2+7+(14+2\gamma_1)(2n+1)+4\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)\alpha_{n-2}^{(1)} - (3n^2-6n+8+(6+\gamma_1)(2n-1)+2\gamma_1+\gamma_3)\alpha_{n-3}^{(1)}.$$

Третье решение однородного уравнения (30), линейно независимое с решениями $G_1(\ell)$, $G_3(\ell)$ и соответствующее корню определяющего уравнения $\rho_3 = -2$, мы не приводим, поскольку оно не удовлетворяет краевому условию (31).

Исходя из вида правой части неоднородного уравнения (30), его частное решение ищем в виде

$$G(\ell) = A_2 G_2(\ell), \quad G_2(\ell) = \ell \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(2)} \ell^n + \omega_2^* G_1(\ell) \ln\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right), \quad \alpha_0^{(2)} \neq 0, \quad A_2 = \text{const}. \tag{35}$$

Поступая аналогичным образом, имеем рекуррентные формулы для коэффициентов $\alpha_n^{(2)}$ $(n \geqslant 3)$:

$$\alpha_n^{(2)} = \frac{1}{(n+1)(n+3)(n-2)} \Big\{ n[(n-1)(3n+4+\gamma_1) - 2 + 2\gamma_1 + \gamma_2]\alpha_{n-1}^{(2)} -$$

$$- [(n-1)((n-2)(3n+5+2\gamma_1) + 10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + 2\gamma_3]\alpha_{n-2}^{(2)} +$$

$$+ [(n-2)((n-3)(n+2+\gamma_1) + 6 + \gamma_3 + 2\gamma_1) + \gamma_3]\alpha_{n-3}^{(2)} - \omega_2^* S_{n-2}^{(1)} + \frac{d}{\Gamma_0}(-1)^n \frac{\gamma_4^*!}{(\gamma_4^* - n)!n!} \Big\}.$$

Здесь

$$\omega_2^* = \frac{1}{15\alpha_0^{(1)}}[(16 + 6\gamma_1 + 2\gamma_2)\alpha_1^{(2)} - (10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + 3\gamma_3 + 3\gamma_4^*(\gamma_4^* - 1))\alpha_0^{(2)}],$$

$$\frac{d}{\Gamma_0} = -6\alpha_0^{(2)}, \quad \alpha_1^{(2)} = -\frac{\alpha_0^{(2)}}{6}(-2 + 2\gamma_1 + \gamma_2 + 6\gamma_4^*), \quad \alpha_2^{(2)} = 1, \quad \alpha_1^{(3)} = 0, \quad \alpha_3^{(3)} = 1,$$

$$\omega_3^* = \frac{\gamma_3}{15\alpha_0^{(1)}}[(16 + 6\gamma_1 + 2\gamma_2)\alpha_1^{(2)} - (10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + 3\gamma_3 + 3\gamma_4^*(\gamma_4^* - 1))\alpha_0^{(2)}],$$

$$\alpha_2^{(3)} = \frac{\gamma_3}{4}\alpha_0^{(3)}, \quad \alpha_n^{(k)} = 0, \quad \text{если} \quad n < 0 \quad (k = 1, 2, 3).$$

Таким образом, общее решение уравнения (30) имеет вид

$$G(\ell) = A_1 G_1(\ell) + A_2 G_2(\ell) + A_3 G_3(\ell), \tag{36}$$

где функции $G_1(\ell)$, $G_2(\ell)$ и $G_3(\ell)$ задаются формулами (33), (35) и (34) соответственно, а входящие в них коэффициенты определяются следующими после этих формул равенствами.

Заметим, что функция $G(\ell)$ удовлетворяет уравнению (30) по построению. Ряды, определяющие функции $G_k(\ell)$, $k = 1, 2, 3$, равномерно сходятся при всех $1 \leqslant y < \infty$ $(\ell(y) = \Gamma_0/(y + \Gamma_0))$.

Учитывая явный вид коэффициентов $\alpha_n^{(1)}$, введём в рассмотрение мажорирующий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{(1)} \ell^n, \tag{37}$$

в котором коэффициенты $\beta_n^{(1)}$ неотрицательны и определяются рекуррентной формулой

$$\beta_n^{(1)} = 3\beta_{n-1}^{(1)} + 3\beta_{n-2}^{(1)} + \beta_{n-3}^{(1)},$$

где $\beta_{-2}^{(1)} = \beta_{-1}^{(1)} = \beta_0^{(1)} = \beta$, $\beta > 0$ – достаточно большое число.

Тогда имеем следующую оценку:

$$\beta_n^{(1)} \leqslant 7^n \beta.$$

Следовательно, ряд (37) сходится при $7\ell < 1$ ($\ell < 1/7$ или $y > 6\Gamma_0$, $\Gamma_0 = (T_s/T_\infty)^{1+\alpha} - 1$). Так как коэффициенты дифференциального уравнения (30) аналитичны при $1 \leqslant y < \infty$, то в силу принципа аналитического продолжения решение этого уравнения ряд (37) не может иметь особых точек при всех $1 \leqslant y < \infty$. Таким образом, ряд (33) сходится при всех $1 \leqslant y < \infty$. Аналогично устанавливается равномерная сходимость рядов, определяющих функции $G_2(\ell)$, $G_3(\ell)$.

В результате проведённого исследования доказана следующая

Теорема 1. *Общее решение уравнения (30) имеет вид (36), где коэффициенты A_1, A_2, A_3 – произвольные постоянные, а функции $G_1(\ell)$, $G_2(\ell)$, $G_3(\ell)$ задаются формулами (33), (35), (34).*

Отметим, что выбор постоянных $\alpha_0^{(1)}$, $\alpha_0^{(2)}$, $\alpha_0^{(3)}$ осуществляется таким образом, чтобы выполнялся предельный переход к задаче обтекания сфере при малых относительных перепадах температуры. Для этого удобно перейти от переменной ℓ к переменной y. Тогда имеем

$$G(y) = A_1 G_1(y) + A_2 G_2(y) + A_3 G_3(y),$$

$$G_1(y) = \frac{1}{y^3}\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)}\ell^n, \quad G_2(y) = \frac{1}{y}\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(2)}\ell^n + \omega_2 G_1(y)\ln y, \quad G_3(y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(3)}\ell^n + \omega_3 G_1(y)\ln y,$$

$$C_n^{(1)} = \Gamma_0^3(1-\ell)^3\alpha_n^{(1)}, \quad C_n^{(2)} = \Gamma_0(1-\ell)\alpha_n^{(2)}, \quad C_n^{(3)} = \alpha_n^{(3)},$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_2^*}{\ln(\Gamma_0(1-\ell)/\ell)}\ln\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right), \quad \omega_3 = \frac{\omega_3^*}{\ln(\Gamma_0(1-\ell)/\ell)}\ln\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right).$$

В этом случае функции $G_1(y)$, $G_2(y)$, $G_3(y)$ стремятся к соответствующим функциям для сферы при малых относительных перепадах температуры [2, с. 144; 3, с. 83]. При $\Gamma_0 \to 0$ имеем

$$G_1(y) \to \frac{1}{y^3}, \quad G_2(y) \to \frac{1}{y}, \quad G_3(y) \to 1,$$

откуда видим, что $C_0^{(1)} = C_0^{(2)} = C_0^{(3)} = 1$, $A_3 = 1$.

Зная общее решение уравнения (30) и связь между функциями $G(y)$ и $g(y)$, получаем выражения для компонент векторного поля скорости $\mathbf{U}_{\mathrm{e}}(x)$:

$$V_r(y,\theta) = \cos\theta\Big[A_1 G_1(y) + A_2 G_2(y) + G_3(y)\Big], \tag{38}$$

$$V_\theta(y,\theta) = -\sin\theta\Big[A_1 G_4(y) + A_2 G_5(y) + G_6(y)\Big], \tag{39}$$

где

$$G_k(y)\left(1 + \frac{\ell}{2(1+\alpha)}\right)G_{k-3}(y) + \frac{y}{2}G'_{k-3}(y) \quad (k = 4,5,6).$$

Таким образом, в работе для линеаризованной по скорости стационарной системы уравнений Навье–Стокса при степенной зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры получено приближённое решение, удовлетворяющее краевому условию (31).

Поскольку нами получены выражения для компонентов массовой скорости, мы можем решить уравнение (27), удовлетворяющее краевому условию (28). Будем искать решение этого уравнения в виде

$$t_{\mathrm{e}1}(y,\theta) = \zeta(y) + \frac{1}{t_{\mathrm{e}0}^{\alpha}}\tau_{\mathrm{e}}(y)\cos\theta \tag{40}$$

с краевыми условиями

$$\zeta(y\to\infty) \to -\frac{\omega_1}{2}, \quad \tau_{\mathrm{e}}(y\to\infty) \to \frac{\omega_1}{2}. \tag{41}$$

Подставляя представление (40) в уравнение (27) и учитывая, что

$$V_r^{(\mathrm{e})}(y,\theta)=\cos\theta(A_1G_1(y)+A_2G_2(y)+G_3(y)),\quad t_{\mathrm{e}0}(y)=(1+\Gamma_0/y)^{1/(1+\alpha)},$$

для нахождения функции τ_{e} получаем линейное обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\tau_{\mathrm{e}}}{dy^2}+\frac{2}{y}\frac{d\tau_{\mathrm{e}}}{dy}-\frac{2}{y^2}\tau_{\mathrm{e}}=-\omega_1\frac{\ell}{y\Gamma_0}(A_1G_1(y)+A_2G_2(y)+G_3(y)),$$

решение которого ищется стандартным способом.

Таким образом, имеем следующее выражение для функции $t_{\mathrm{e}1}(y,\theta)$, удовлетворяющее краевым условиям (41):

$$t_{\mathrm{e}1}(y,\theta)=\frac{\omega_1}{2yt_{\mathrm{e}0}^{\alpha}(y)}(N_1-y)+\frac{\cos\theta}{t_{\mathrm{e}0}^{\alpha}}\left[\frac{\Gamma_1}{y^2}+\frac{\omega_1}{3}\left(\tau_3(y)+A_2\frac{\tau_2(y)}{y}-A_1\frac{\tau_1(y)}{y^3}\right)\right]. \tag{42}$$

Здесь

$$\tau_1(y)=(1-\ell)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Omega_n^{(1)}\ell^n}{n+1}-\frac{(1-\ell)^4}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Omega_n^{(3)}\ell^n}{n+4},$$

$$\tau_2(y)=\frac{1}{1-\ell}\left[1+\ell\ln\ell+C_1^{(2)}(\ell^2-\ell\ln\ell)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n^{(2)}\ell^n}{n-1}\left(1-\frac{n-1}{n}\ell\right)\right]+$$

$$+(1-\ell)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Omega_n^{(4)}\ell^n}{n+2}+\frac{\omega_2(1-\ell)}{y^2}S_n^{(2)},$$

$$\tau_3(y)=\frac{1}{(1-\ell)^2}\left[\frac{1}{2}-2\ell-\ell^2\ln\ell+C_1^{(3)}(\ell+2\ell^2\ln\ell-\ell^3)+C_2^{(3)}\left(-\frac{1}{2}-\ell^2\ln\ell+2\ell^3\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{C_n^{(3)}\ell^n}{n-2}\left(1+\frac{n-2}{n}\ell^2-2\frac{n-2}{n-1}\ell\right)\right]+(1-\ell)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Omega_n^{(6)}\ell^n}{n+1}+\frac{\omega_3}{y^3}(1-\ell)S_n^{(2)},$$

$$\Omega_n^{(1)}=\sum_{k=0}^{n}C_k^{(1)},\quad \Omega_n^{(3)}=\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)C_k^{(1)},$$

$$\Omega_n^{(2)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\Omega_k^{(1)}}{k+1},\quad \Omega_n^{(6)}=\sum_{k=0}^{n}C_k^{(3)},\quad \Omega_n^{(5)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\Omega_k^{(3)}}{k+4},$$

$$\Theta_n^{(1)}=\Omega_n^{(2)}+\Omega_n^{(1)}\ln y,\quad \Theta_n^{(2)}=\Omega_n^{(5)}+\Omega_n^{(3)}\ln y,\quad \Omega_n^{(4)}=\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)C_k^{(2)},$$

$$S_n^{(2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ell^n}{6(n+4)}\left[(1-\ell)^3\Theta_n^{(2)}-6\frac{n+4}{n+1}\Theta_n^{(1)}\right].$$

Теорема 2. *Распределения температур $T_{\mathrm{e}}(x)$ $(x\in\Omega_{\mathrm{e}})$ и $T_{\mathrm{i}}(x)$ $(x\in\Omega_{\mathrm{i}})$, где $\Omega_{\mathrm{e}}=\mathbb{R}^3\setminus\Omega_{\mathrm{i}}$ (Ω_{i} – сферическая область с центром в нуле евклидова пространства $\mathbb{R}^3$) в газообразной среде и внутри частицы, удовлетворяющие уравнениям (3), (4) и краевым условиям (10)–(12), имеют вид (22), (42).*

Постоянные интегрирования A_1, A_2, входящие в выражения (38), (39) и поле температуры $t_{\mathrm{e}}(y,\theta)$, определяются из краевых условий для компонент массовой скорости (нормальной $U_r^{(\mathrm{e})}$ и касательной $U_\theta^{(\mathrm{e})}$) на поверхности частицы. Эти краевые условия определяются конкретной

физической задачей. При математическом описании процесса теплообмена между движущейся нагретой частицей и вязкой неизотермической газообразной средой (в системе координат, связанной с частицей, имеем задачу обтекания) природа сил, вызывающих это движение, может быть гравитационной, магнитной, фотофоретической, термофоретической и т.д., что позволяет распространить разработанный метод решения системы газодинамических уравнений на широкий класс физических задач.

Полученные выше формулы можно использовать и при малых относительных перепадах температуры, т.е. когда величина нагрева поверхности частицы мала. В этом случае средняя температура поверхности частицы незначительно отличается от температуры окружающей газообразной среды вдали от неё и при $\Gamma_0 \to 0$ $(y = 1)$ имеем

$$G_1 = 1, \quad G_1' = 1, \quad G_1'' = 12, \quad G_2 = 1, \quad G_2' = -1, \quad G_2'' = 2, \quad G_3 = 1, \quad G_3' = 0, \quad G_3'' = 0,$$
$$\tau_1 = 3/4, \quad \tau_1' = 0, \quad \tau_2 = 3/2, \quad \tau_2' = 0, \quad \tau_3 = 3/2, \quad \tau_3' = 0.$$

Качественный анализ показывает (см. формулу (42)), что величина конвективного переноса тепла пропорциональна коэффициенту $\omega_1 = \Gamma_0 \mathrm{Pr}_\infty/(1+\alpha)$ (при прочих равных условиях). Для большинства газов число Прандтля имеет порядок единица, а $\Gamma_0 = (T_S/T_\infty)^{(1+\alpha)} - 1$. Следовательно, $\omega_1 \sim \Gamma_0$, т.е. чем сильнее нагрета частица, тем значительнее вклад конвективного переноса тепла.

Заключение. В работе получено приближённое решение стационарной системы газодинамических уравнений, описывающей конвективный теплообмен между движущейся неравномерно нагретой крупной твёрдой частицей сферической формы и вязкой неизотермической газообразной средой при малых значениях чисел Пекле и Рейнольдса. При описании теплообмена предполагалось, что зависимости коэффициентов теплопроводности, вязкости и плотности газообразной среды от температуры имеют степенной характер. Получено приближённое решение линеаризованной по скорости системы уравнений Навье–Стокса (теорема 1). Методом сращиваемых асимптотических разложений найдено решение уравнения теплопроводности, описывающего поле температуры вне частицы, и методом теории возмущений – решение уравнения Пуассона, описывающего поле температуры внутри частицы (теорема 2). Нулевые приближения внутренних и внешних асимптотических разложений определяются формулами (19), (21), а первые приближения – формулами (25), (42).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. М., 1954.
2. *Ладыженская О.А.* Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье–Стокса. Существование и гладкость // Успехи мат. наук. 2003. Т. 58. Вып. 2 (350). С. 44–78.
3. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М., 1960.
4. *Малай Н.В., Лиманская А.В., Щукин Е.Р.* Решение краевой задачи для линеаризованного по скорости уравнения Навье–Стокса в случае неизотермического обтекания равномерно нагретой сферы газообразной средой // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 10. С. 1328–1338.
5. *Малай Н.В., Глушак А.В., Щукин Е.Р.* Решение краевой задачи медленного обтекания сферы неизотермическим газом // Изв. вузов. Математика. 2016. № 12. С. 54–65.
6. *Малай Н.В., Щукин Е.Р.* Термофорез нагретых умеренно крупных аэрозольных частиц сферической формы // Прикл. механика и техн. физика. 2019. Т. 60. № 3 (355). С. 136–145.
7. *Малай Н.В., Лиманская А.В., Щукин Е.Р., Стукалов А.А.* Термофорез нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы // Журн. техн. физики. 2012. Т. 82. № 10. С. 42–49.
8. *Бретшнайдер С.* Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М., 1966.
9. *Найфэ А.* Введение в методы возмущения. М., 1984.
10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 2003.
11. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Объединённый институт высоких температур РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 29.05.2020 г.
После доработки 21.01.2022 г.
Принята к публикации 07.02.2022 г.

EDN: XDFUVZ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 204–222

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

ВАРИАНТ РЯДА ФУРЬЕ В СФЕРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ИСПАРЕНИЯ КАПЛИ ВОДЫ

© 2022 г. Х. Халласи, Х. Фуджита-Яшима

Рассматривается краевая задача для системы двух линейных уравнений в частных производных параболического типа, описывающей поведение температуры и плотности пара в сферической капле и её окрестности при процессе испарения. Для её изучения построен вариант ряда Фурье в сферической области для функций со сферической симметрией. С помощью этого ряда доказываются существование и единственность решения рассматриваемой задачи с характерным для испарения необычным условием связи уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064122020078

Введение. Как хорошо известно (см., например, [1, пп. 180–182; 2, пп. 157, 158; 3, § 17]), решение начально-краевых задач для уравнения теплопроводности в ограниченной области можно представить, используя ряд Фурье, в виде ряда по ортонормированной системе функций, умноженных на подходящие коэффициенты. В частности, если уравнение рассматривается на отрезке или на сфере со сферической симметрией, то ортонормированными функциями являются тригонометрические функции или функции типа $r^{-1}\sin(kr)$. Изучению уравнений аналогичного типа и вариантов условий посвящены многочисленные статьи и монографии, в том числе такие классические как [3–5].

В работе [6] мы рассматривали систему двух линейных уравнений в частных производных параболического типа, описывающих поведение температуры в воде и в воздухе и плотности пара в воздухе при наличии испарения, и, пользуясь соответствующим рядом Фурье, доказали существование и единственность решения граничной задачи для этой системы в области, ограниченной двумя горизонтальными плоскостями.

В настоящей работе, используя идеи [6], изучается аналогичная задача в сферической области. Эта задача соответствует описанию поведения температуры и плотности водяного пара при испарении с поверхности капли воды (в фазе, когда изменение объёма капли достаточно мало по сравнению с объёмом капли). Напомним, что явление испарения капли (не обязательно водяной) интересует инженеров с точки зрения его промышленного применения. Теоретические исследования в рамках математической физики проводились, например, в [7–11].

В данной работе будем предполагать, что водяная капля является сферической и заполняет открытый шар $\Omega_{0,a}$ радиуса a, а в качестве её воздушной окружающей среды рассматривается прилегающий к ней открытый сферический слой $\Omega_{a,b}$, внутренний и внешний радиусы которого a и b соответственно. В предположении сферической симметрии функций будем рассматривать линейное параболическое уравнение для температуры T в занятом водой и воздухом открытом шаре $\Omega_{0,b} = \overline{\Omega_{0,a}} \bigcup \Omega_{a,b}$ и линейное параболическое уравнение для плотности Π пара в занятой воздухом области $\Omega_{a,b}$. Будем предполагать, что в уравнении для T источник тепла сосредоточен на сфере $\{r = a\}$ – границе раздела водной и воздушной сред – и пропорционален величине $\varepsilon_1^{-1}[\Pi|_{r=a+\varepsilon_1} - \Pi|_{r=a}]$ с некоторым $\varepsilon_1 > 0$ (см. ниже (1.3)). Это предположение соответствует скрытой теплоте испарения (см., например, [12]) и используемому на практике приближению для количества испарившейся воды (см., например, [13, 14]). Будем предполагать также, что функция Π удовлетворяет условию

$$\Pi|_{r=a} = \overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1 T|_{r=a},$$

где $\overline{\pi}_0$ и $\overline{\alpha}_1$ – постоянные (см. ниже (1.7)). Это условие представляет собой линеаризацию соотношения $\Pi|_{r=a} = \overline{\pi}_{\mathrm{vs}}(T)$ между плотностью $\overline{\pi}_{\mathrm{vs}}(T)$ насыщенного пара и температурой T (см., например, [12]).

Технически наши рассуждении основаны на использовании ряда Фурье, построенного по системе собственных функций оператора диффузии. В частности, используются свойства этих функций, полученные с помощью анализа их явного выражения. Отметим, что оператор диффузии в нашем случае имеет кроме особенности в $r = 0$ различные коэффициенты в $\Omega_{0,a}$ и в $\Omega_{a,b}$, что значительно усложняет исследование задачи.

Применяя этот вариант ряда Фурье к нашей системе уравнений, с помощью оценок мы докажем существование и единственность решения нашей задачи.

1. Постановка задачи. Для вектора $x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^3$ через r обозначим его евклидову норму, т.е. $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Зафиксируем положительные числа $a < b$ и в областях $\Omega_{0,b} = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant r < a\}$ и $\Omega_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^3 : a < r < b\}$ рассмотрим систему уравнений

$$\nu \partial_t T = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \psi \delta(r - a) \quad \text{в} \quad \Omega_{0,b}, \tag{1.1}$$

$$\partial_t \Pi = \gamma_0 \Delta \Pi \quad \text{в} \quad \Omega_{a,b}, \tag{1.2}$$

где число ψ задаётся соотношением

$$\psi = \gamma_1 \frac{\Pi|_{r=a+\varepsilon_1} - \Pi|_{r=a}}{\varepsilon_1}, \tag{1.3}$$

здесь γ_0, γ_1, ε_1 – положительные постоянные, причём $0 < \varepsilon_1 < b - a$, а $\delta(\cdot)$ – δ-функция Дирака. Предположим, что

$$\nu(x) = \nu_1 \quad \text{при} \quad 0 < r < a, \quad \nu(x) = \nu_2 \quad \text{при} \quad a < r < b, \tag{1.4}$$

$$\kappa(x) = \kappa_1 \quad \text{при} \quad 0 < r < a, \quad \kappa(x) = \kappa_2 \quad \text{при} \quad a < r < b, \tag{1.5}$$

где ν_1, κ_1, ν_2, κ_2 – положительные постоянные. Для искомых функций T и Π будем рассматривать граничные условия

$$T|_{r=b} = \overline{T}_b, \tag{1.6}$$

$$\Pi|_{r=a} = \overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1 T|_{r=a}, \tag{1.7}$$

$$\Pi|_{r=b} = \overline{\Pi}_b, \tag{1.8}$$

где $\overline{T}_b$, $\overline{\Pi}_b$ и $\overline{\pi}_0$, $\overline{\alpha}_1$ – заданные постоянные.

Как сказано выше, функция T описывает температуру, а Π – плотность пара. В этой интерпретации γ_0 – коэффициент диффузии пара в воздухе, κ_i $(i = 1, 2)$ – коэффициент теплопроводности в воде $(i = 1)$ и в воздухе $(i = 2)$, ν_i $(i = 1, 2)$ – произведение $c_{\mathrm{v}i}\varrho_i$ удельной теплоёмкости $c_{\mathrm{v}i}$ и плотности ϱ_i в воде $(i = 1)$ и в воздухе $(i = 2)$.

Напомним выражение оператора Лапласа для функций со сферической симметрией (в $\mathbb{R}^3$).

Лемма 1.1. *Если функция $u(x)$ принадлежит классам $C^2(\Omega_{0,a})$ или $C^2(\Omega_{a,b})$ и зависит только от $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, то оператор Лапласа от такой функции можно вычислять по формуле*

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} u(r) \right).$$

Доказательство следует непосредственно из правила вычисления производных.

Поэтому в предположении сферической симметрии функций $T(t, \cdot)$ и $\Pi(t, \cdot)$ уравнения (1.1), (1.2) сводятся к уравнениям

$$\nu \partial_t T = \partial_r (r^2 \kappa(r) \partial_r T) + \psi \delta(r - a) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}_+ \times]0, b[, \tag{1.9}$$

$$\partial_t \Pi = \gamma_0 \partial_r (r^2 \partial_r \Pi) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}_+ \times]a, b[. \tag{1.10}$$

Определения (1.3)–(1.5) функций ψ, ν, κ и граничные условия (1.6)–(1.8), поскольку все они зависят только от r, остаются неизменными.

В дальнейшем рассмотрим систему уравнений (1.9), (1.10), (1.3) с граничными условиями (1.6)–(1.8) и начальными условиями

$$T\,|_{t=0}= T_0(r) \quad \text{при} \quad 0<r<b, \tag{1.11}$$

$$\Pi\,|_{t=0}= \Pi_0(r) \quad \text{при} \quad a<r<b, \tag{1.12}$$

где $T_0(r)$ и $\Pi_0(r)$ – заданные функции. Требуется также выполнение условий согласования

$$T_0(b)=\overline{T}_b, \quad \Pi_0(a)=\overline{\pi}_0+\overline{\alpha}_1 T_0(a), \quad \Pi_0(b)=\overline{\Pi}_b.$$

2. Некоторые предварительные замечания. Для изучения задачи (1.9), (1.10), (1.3), (1.6)–(1.8), (1.11), (1.12) нам понадобятся некоторые гильбертовы пространства, которые введём в этом пункте работы и отметим их нужные в дальнейшем свойства. Именно, определим следующие пространства:

$$\widetilde{L}^2_\nu(0,b)=\left\{\varphi:(0,b)\to\mathbb{R} \ \text{ измеримы и } \ \int\limits_0^b \nu(r)r^2|\varphi(r)|^2dr<\infty\right\},$$

$$\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)=\left\{\varphi\in\widetilde{L}^2_\nu(0,b) \ \text{ такие, что } \ \int\limits_0^b \kappa(r)r^2\left|\frac{d}{dr}\varphi(r)\right|^2dr<\infty \ \text{ и } \ \varphi(b)=0\right\},$$

$$\widetilde{L}^2(a,b)=\left\{\varphi:(a,b)\to\mathbb{R} \ \text{ измеримы и } \ \int\limits_a^b r^2|\varphi(r)|^2\,dr<\infty\right\},$$

$$\widetilde{H}^1(a,b)=\left\{\varphi\in\widetilde{L}^2(a,b) \ \text{ такие, что } \ \int\limits_a^b r^2\left|\frac{d}{dr}\varphi(r)\right|^2dr<\infty \quad \text{и} \quad \varphi(a)=\varphi(b)=0\right\}$$

со скалярным произведением

$$\langle u,v\rangle_{\widetilde{L}^2_\nu(0,b)}=\int\limits_0^b \nu(r)r^2u(r)v(r)\,dr, \quad \langle u,v\rangle_{\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)}=\int\limits_0^b \kappa(r)r^2\frac{du(r)}{dr}\frac{dv(r)}{dr}\,dr,$$

$$\langle u,v\rangle_{\widetilde{L}^2(a,b)}=\int\limits_a^b r^2u(r)v(r)\,dr, \quad \langle u,v\rangle_{\widetilde{H}^1(a,b)}=\int\limits_a^b r^2\frac{du(r)}{dr}\frac{dv(r)}{dr}\,dr \tag{2.1}$$

соответственно и нормой, порождённой указанным скалярным произведением.

Напомним элементарные свойства этих гильбертовых пространств.

Лемма 2.1. *Вложение пространства $\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$ в пространство $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$ компактно.*

Доказательство. Зададим отображение J равенством

$$J(\varphi)(x)=\varphi(|x|), \quad x\in\Omega_{0,b},$$

для определённых на $]0,b[$ функций φ. Тогда для любой измеримой функции φ, определённой на $]0,b[$, будем иметь

$$\int\limits_{\Omega_{0,b}} J(\nu)(x)|J(\varphi)(x)|^2\,dx=4\pi\int\limits_0^b \nu(r)r^2|\varphi(r)|^2\,dr, \tag{2.2}$$

$$\int\limits_{\Omega_{0,b}} J(\kappa)(x)|\nabla J(\varphi)(x)|^2\,dx = 4\pi \int\limits_0^b \kappa(r) r^2 \left|\frac{d}{dr}\varphi(r)\right|^2 dr. \tag{2.3}$$

Пусть M – ограниченное множество в $\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$. Из равенства (2.3) и оценок $0 < \kappa_1 \leqslant \leqslant J(\kappa)(x) \leqslant \kappa_2 < \infty$ следует, что множество

$$J(M) = \{v = J(u) : u \in M\}$$

ограниченно в обычном пространстве Соболева $H^1_0(\Omega_{0,b})$. В силу компактности вложения $H^1_0(\Omega_{0,b})$ в $L^2(\Omega_{0,b})$ существует сходящаяся в $L^2(\Omega_{0,b})$ подпоследовательность $\{J(u_k)\}_{k=1}^\infty$. Из равенства (2.2) и оценок $0 < \nu_1 \leqslant J(\nu)(x) \leqslant \nu_2 < \infty$ вытекает, что последовательность $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ сходится в $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$. Следовательно, вложение $\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$ в $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$ компактно. Лемма доказана.

Так как вложение $\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$ в $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$ компактно, существует ортонормальный базис $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ пространства $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$, который является ортогональной системой в $\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$. Свойства этого ортонормального базиса играют важную роль в наших рассуждениях в следующем пункте работы.

С другой стороны, известно (см., например, [15, гл. 3, § 5.4]), что вложение $\widetilde{H}^1(a,b)$ в $\widetilde{L}^2(a,b)$ компактно и существует ортонормальный базис $\{d_k\}_{k=1}^\infty$ пространства $\widetilde{L}^2(a,b)$, который является ортогональной системой в $\widetilde{H}^1(a,b)$. Явное выражение для функций d_k указано в следующей лемме.

Лемма 2.2. *Пусть*

$$d_k(r) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b-a}}\frac{1}{r}\sin\left(\frac{k\pi}{b-a}(r-a)\right) \quad \textit{при} \quad a \leqslant r \leqslant b, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

(A′) Семейство $\{d_k\}_{k=1}^\infty$ является ортонормальным базисом пространства $\widetilde{L}^2(a,b)$ и ортогональной системой в $\widetilde{H}^1(a,b)$.

(B′) Справедливо равенство

$$\|d_k\|^2_{\widetilde{H}^1(a,b)} = k^2\pi^2/(b-a)^2. \tag{2.5}$$

Доказательство. Так как вложение $\widetilde{H}^1(a,b)$ в $\widetilde{L}^2(a,b)$ компактно, существуют ортонормальный базис $\{d_k\}_{k=1}^\infty$ пространства $\widetilde{L}^2(a,b)$, который является ортогональной системой в $\widetilde{H}^1(a,b)$, и последовательность положительных чисел $\{\Lambda_k\}_{k=1}^\infty$, которые удовлетворяют соотношению

$$\langle d_k, \varphi\rangle_{\widetilde{H}^1(a,b)} = \Lambda_k \langle d_k, \varphi\rangle_{\widetilde{L}^2(a,b)} \quad \text{для любой} \quad \varphi \in \widetilde{H}^1(a,b).$$

Поэтому в силу определения в (2.1) получаем

$$-\int\limits_a^b \left(\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}d_k(r)\right)\right)\varphi(r)\,dr = \Lambda_k \int\limits_a^b r^2 d_k(r)\varphi(r)dr \quad \text{для любой} \quad \varphi \in \widetilde{H}^1(a,b),$$

откуда следует равенство

$$-\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}d_k(r)\right) = \Lambda_k r^2 d_k(r). \tag{2.6}$$

Нетрудно видеть, что функции $u(r)$ и значения $\Lambda \in \mathbb{R}$, которые удовлетворяют уравнению

$$-\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}u(r)\right) = \Lambda r^2 u(r)$$

и граничным условиям $u(a) = u(b) = 0$, имеют вид

$$u(r) = \frac{c}{r}\sin\left(\frac{k\pi}{b-a}(r-a)\right), \quad c \in \mathbb{R}, \quad \text{и} \quad \Lambda = \frac{k^2\pi^2}{(b-a)^2}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Поэтому, принимая во внимание определение нормы $\|\cdot\|_{\widetilde{L}^2(a,b)}$ (см. (2.1)), заключаем, что функции $d_k(r)$ и значения Λ_k, которые удовлетворяют уравнению (2.6) и условиям $d_k(a) = d_k(b) = 0$ и $\|d_k\|_{\widetilde{L}^2(a,b)} = 1$, имеют вид (2.4) (для $d_k(r)$) и $\Lambda_k = k^2\pi^2/(b-a)^2$, $k = 1, 2, \ldots$

Кроме того, согласно определению (2.1) скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\widetilde{L}^2(a,b)}$, имеем

$$\langle d_k, d_m\rangle_{\widetilde{L}^2(a,b)} = \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b \sin\left(\frac{k\pi}{b-a}(r-a)\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b-a}(r-a)\right)dr = \delta_{km}.$$

Значит, $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$ является ортонормальной системой в $\widetilde{L}^2(a,b)$.

С другой стороны, из условия $d_k(a) = d_k(b) = 0$ и равенства

$$-\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d}{dr}\frac{\sin(\frac{k\pi}{b-a}(r-a))}{r}\right] = \left(\frac{k\pi r}{b-a}\right)^2\frac{1}{r}\sin\left(\frac{k\pi}{b-a}(r-a)\right)$$

следует, что

$$\langle d_k, d_m\rangle_{\widetilde{H}^1(a,b)} = \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b r^2\left(\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\sin\left(\frac{k\pi}{b-a}(r-a)\right)\right)\left(\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\sin\left(\frac{m\pi}{b-a}(r-a)\right)\right)dr =$$

$$= -\frac{2}{b-a}\int\limits_a^b\left(\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\sin\left(\frac{k\pi}{b-a}(r-a)\right)\right]\right)\frac{1}{r}\sin\left(\frac{m\pi}{b-a}(r-a)\right)dr = \left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2\delta_{km},$$

где $\delta_{km} = 1$, если $k = m$, и $\delta_{km} = 0$, если $k \neq m$. Таким образом, $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$ является ортогональной системой в $\widetilde{H}^1(a,b)$ и выполняется равенство (2.5) Лемма доказана.

Отметим также, что справедливо свойство:

(C′) для всех $r \in [a,b]$ и каждого $k \in \mathbb{N}$ верна оценка $|d_k(r)| \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{a\sqrt{b-a}}$, которая следует непосредственно из определения (2.4).

3. Ортонормальный базис в $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$ и свойства его элементов. Для того чтобы построить ортонормальный базис $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ пространства $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$, который является ортогональной системой в $\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$, построим сначала при каждом $\lambda > 0$ функцию $y(\lambda; r)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\kappa(r)\frac{d}{dr}y(r)\right) = -\lambda\nu(r)r^2y(r) \tag{3.1}$$

и начальному условию

$$y(b) = 0, \quad y'(b) \neq 0. \tag{3.2}$$

Для удобства вычислений положим

$$s = b - r, \quad \widetilde{\nu}(s) = \nu(b-s), \quad \widetilde{\kappa}(s) = \kappa(b-s)$$

и рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{ds}\left((b-s)^2\widetilde{\kappa}(s)\frac{d}{ds}z(\lambda;s)\right) = -\lambda\widetilde{\nu}(s)(b-s)^2z(\lambda;s) \tag{3.3}$$

с начальным условием

$$z(\lambda;0)=0,\quad \frac{d}{ds}z(\lambda;s)\Big|_{s=0}=1. \tag{3.4}$$

Несложно видеть, что существует единственное решение $z(\lambda;s)$ задачи Коши (3.3), (3.4) в полуинтервале $[0,b[$. Укажем в лемме 3.1 явный вид решения $z(\lambda;s)$, а в лемме 3.2 условие его принадлежности к классу $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)\bigcap\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$. Для упрощения в дальнейшем записи обозначим $\omega_i(\lambda)=\sqrt{\lambda\nu_i/\kappa_i}$, $i=1,2$.

Лемма 3.1. *Решение $z(\lambda;s)$ задачи Коши (3.3), (3.4) в полуинтервале $[0,b[$ имеет вид*

$$z(\lambda;s)=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega_2(\lambda)}\dfrac{b}{b-s}\sin(\omega_2(\lambda)s) & \text{при}\quad 0\leqslant s\leqslant b-a,\\[2mm] \dfrac{\gamma(\lambda)}{b-s}\sin(\beta(\lambda)+\omega_1(\lambda)(s-b+a)) & \text{при}\quad b-a\leqslant s<b,\end{cases} \tag{3.5}$$

где $\beta(\lambda)$ и $\gamma(\lambda)$ определяются следующими соотношениями:

i) если

$$2m<\frac{b-a}{\pi}\omega_2(\lambda)<2m+1,\quad m\in\mathbb{Z}_+,$$

то

$$\beta(\lambda)=\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{\frac{\nu_2\kappa_2}{\nu_1\kappa_1}}\operatorname{ctg}\left(\omega_2(\lambda)(b-a)\right)+\frac{\kappa_2-\kappa_1}{a\sqrt{\lambda\kappa_1\nu_1}}\right), \tag{3.6}$$

$$\gamma(\lambda)=\frac{1}{\omega_2(\lambda)}\frac{b}{\sin\beta(\lambda)}\sin(\omega_2(\lambda)(b-a)), \tag{3.7}$$

ii) если

$$2m+1<\frac{b-a}{\pi}\omega_2(\lambda)<2(m+1),\quad m\in\mathbb{Z}_+,$$

то

$$\beta(\lambda)\ \text{такая же, как в случае } i),\quad \gamma(\lambda)=-\frac{1}{\omega_2(\lambda)}\frac{b}{\sin\beta(\lambda)}\sin(\omega_2(\lambda)(b-a)),$$

iii) если

$$\frac{b-a}{\pi}\omega_2(\lambda)=2m,\quad m\in\mathbb{N},$$

то

$$\beta(\lambda)=0,\quad \gamma(\lambda)=\frac{\kappa_2 b}{\sqrt{\lambda\nu_1\kappa_1}}, \tag{3.8}$$

iv) если

$$\frac{b-a}{\pi}\omega_2(\lambda)=2m+1,\quad m\in\mathbb{Z}_+,$$

то

$$\beta(\lambda)=0,\quad \gamma(\lambda)=\frac{-\kappa_2 b}{\sqrt{\lambda\nu_1\kappa_1}}. \tag{3.9}$$

Доказательство. Вычисления показывают, что определённая равенством (3.5) функция $z(\lambda;s)$ удовлетворяет на интервале $]0,b-a[$ уравнению (3.3).

С другой стороны, каков бы ни был вектор $(\beta,\gamma)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2$, функция

$$z(s)=\frac{\gamma}{b-s}\sin(\beta+\omega_1(\lambda)(s-b+a))$$

удовлетворяет на интервале $]b-a,b[$ уравнению (3.3). Однако непрерывность функций $z(\lambda;s)$ и $\widetilde{\kappa}(s)dz(\lambda;s)/ds$ в точке $s=b-a$ требует, чтобы функции β и γ удовлетворяли соотношениям

$$\gamma\frac{\sin\beta}{a}=\frac{1}{\omega_2(\lambda)}\frac{b}{a}\sin(\omega_2(\lambda)(b-a)), \tag{3.10}$$

$$\kappa_1\gamma\omega_1(\lambda)\frac{\cos\beta}{a}+\kappa_1\gamma\frac{\sin\beta}{a^2}=\kappa_2\frac{b}{a}\cos(\omega_2(\lambda)(b-a))+\kappa_2\frac{1}{\omega_2(\lambda)}\frac{b}{a^2}\sin(\omega_2(\lambda)(b-a)). \tag{3.11}$$

Для того чтобы определить функции $\beta=\beta(\lambda)$, $\gamma=\gamma(\lambda)$ для каждого $\lambda>0$, нужно различать те же четыре случая, что и в формулировке леммы 3.1:

i) $\sin(\omega_2(\lambda)(b-a))>0$,

ii) $\sin(\omega_2(\lambda)(b-a))<0$,

iii) $\sin(\omega_2(\lambda)(b-a))=0$ и $\cos(\omega_2(\lambda)(b-a))=1$,

iv) $\sin(\omega_2(\lambda)(b-a))=0$ и $\cos(\omega_2(\lambda)(b-a))=-1$.

В случаях i) и ii), разделив обе части равенства (3.11) на

$$\kappa_1\gamma\omega_1(\lambda)\frac{\sin\beta}{a}=\frac{\sqrt{\kappa_1\kappa_2\nu_1}}{\sqrt{\nu_2}}\frac{b}{a}\sin(\omega_2(\lambda)(b-a)),$$

получим

$$\operatorname{ctg}(\beta(\lambda))=\sqrt{\frac{\nu_2\kappa_2}{\nu_1\kappa_1}}\operatorname{ctg}(\omega_2(\lambda)(b-a))+\frac{\kappa_2-\kappa_1}{a\sqrt{\lambda\kappa_1\nu_1}}, \tag{3.12}$$

откуда вытекают представления (3.6), (3.7) и представления в случае ii). В случаях iii) и iv), подставив в (3.10), (3.11) значения $\sin(\omega_2(\lambda)(b-a))$ и $\cos(\omega_2(\lambda)(b-a))$, придём к представлениям (3.8) и (3.9). Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Решение $z(\lambda;s)$ задачи Коши (3.3), (3.4) тогда и только тогда принадлежит классу $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)\bigcap\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$, когда выполняется включение*

$$\frac{1}{\pi}(\beta(\lambda)+\omega_1(\lambda)a)\in\mathbb{Z}_+. \tag{3.13}$$

Кроме того, соотношения

$$\lim_{s\to b-0}|z(\lambda;s)|<\infty,$$

$$\frac{d}{ds}z(\lambda;s)\bigg|_{s=b}=0$$

справедливы тогда и только тогда, когда выполняется условие (3.13).

Доказательство. Так как $\sin(m\pi-r')=\pm\sin r'$ при $m\in\mathbb{Z}_+$ (здесь знак "$+$" или "$-$" определяется в соответствии с чётностью m), то, если включение (3.13) выполняется, положив $r=b-s$, получим

$$z(\lambda;s)=\pm\frac{\gamma(\lambda)}{r}\sin(\omega_1(\lambda)r)\quad\text{при}\quad 0<r\leqslant a. \tag{3.14}$$

Таким образом,

$$\lim_{s\to b-0}|z(\lambda;s)|=\lim_{r\to0+0}\frac{|\gamma(\lambda)|}{r}|\sin(\omega_1(\lambda)r)|=|\gamma(\lambda)|\omega_1(\lambda)<\infty.$$

Кроме того,

$$\frac{d}{ds}z(\lambda;s)\bigg|_{s=b}=\pm\gamma(\lambda)\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\sin(\omega_1(\lambda)r)\bigg|_{r=0}=0.$$

Из последнего соотношения вытекает, что производная $\widetilde{\kappa}(s)dz(\lambda;s)/ds$ ограничена. Следовательно, справедливо включение $z(\lambda;\cdot)\in\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$.

С другой стороны, если $\pi^{-1}(\beta(\lambda)+\omega_1(\lambda)a)\notin\mathbb{Z}_+$, то существует такое число $\varepsilon\in]0,\pi[$, что

$$z(\lambda;s)=\pm\gamma(\lambda)\frac{\sin(\varepsilon+\omega_1(\lambda)r)}{r}\quad\text{при}\quad 0<r\leqslant a\quad(b-a\leqslant s<b).$$

В этом случае имеем

$$\frac{d}{ds}z(\lambda;s)=\pm\gamma(\lambda)\left[\omega_1(\lambda)\frac{1}{r}\cos(\varepsilon+\omega_1(\lambda)r)-\frac{1}{r^2}\sin(\varepsilon+\omega_1(\lambda)r)\right].$$

Таким образом, существует такое число $\delta>0$, при котором выполняется оценка

$$\left|\frac{d}{dr}z(\lambda;b-r)\right|\geqslant\frac{1}{2}|\gamma(\lambda)|\frac{\sin\varepsilon}{r^2}\quad\text{для любого}\quad r\in]0,\delta[.$$

Следовательно,

$$\|z(\lambda;\cdot)\|^2_{\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)}=\int\limits_0^b\kappa(r)r^2\left|\frac{d}{dr}z(\lambda;b-r)\right|^2dr=\infty.$$

Лемма доказана.

Теперь установим характеристики тех значений λ, при которых функция $z(\lambda;\cdot)$ принадлежит классу $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)\bigcap\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$, и докажем полезные свойства функции $y(\lambda;r)=z(\lambda;b-r)$. Для этого напомним, что при $0<r<a$ функция $y(\lambda;r)=z(\lambda;b-r)$ имеет вид (выражение (3.14))

$$y(\lambda;r)=z(\lambda;b-r)=\pm\frac{\gamma(\lambda)}{r}\sin(\omega_1(\lambda)r),\quad 0<r<a.$$

Начнём со следующей леммы, которая доказывается непосредственным вычислением.

Лемма 3.3. *Пусть $\varepsilon>0$. Функция*

$$\varphi_0(x)=\operatorname{ctg}x-\frac{1-\varepsilon}{x},\quad x\in\mathbb{R}_+,\quad\frac{x}{\pi}\notin\mathbb{Z}_+,\tag{3.15}$$

строго убывает на каждом интервале $]k\pi,(k+1)\pi[$, $k\in\mathbb{Z}_+$, причём

$$\lim_{x\to k\pi+0}\varphi_0(x)=+\infty,\qquad\lim_{x\to(k+1)\pi-0}\varphi_0(x)=-\infty\quad\text{для любого}\quad k\in\mathbb{Z}_+.\tag{3.16}$$

Доказательство. Так как

$$\frac{d}{dx}\varphi_0(x)=-1-\operatorname{ctg}^2x+\frac{1-\varepsilon}{x^2}=\frac{-1}{\sin^2x}+\frac{1-\varepsilon}{x^2}$$

и $\sin x<x$ для всех $x>0$, то

$$\frac{d}{dx}\varphi_0(x)\leqslant\frac{-1}{\sin^2x}+\frac{1}{x^2}<0\quad\text{для всех}\quad x\in\mathbb{R}_+,\quad\frac{x}{\pi}\notin\mathbb{Z}_+.$$

Следовательно, функция $\varphi_0(x)$ строго убывает на каждом интервале $]k\pi,(k+1)\pi[$, $k\in\mathbb{Z}_+$.

Соотношения (3.16) очевидны. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь две последовательности $\{p^*_{k'}\}_{k'=1}^\infty$ и $\{p^{**}_{k''}\}_{k''=1}^\infty$ положительных вещественных чисел, определяемые соотношениями

$$p^*_{k'}=k'\pi\frac{\sqrt{\kappa_1}}{a\sqrt{\nu_1}},\quad p^{**}_{k''}=k''\pi\frac{\sqrt{\kappa_2}}{(b-a)\sqrt{\nu_2}}.\tag{3.17}$$

Определим множества

$$E^*=\{p^*_{k'}\}_{k'=1}^\infty,\quad E^{**}=\{p^{**}_{k''}\}_{k''=1}^\infty.\tag{3.18}$$

Занумеровав в порядке неубывания все элементы объединения $E^*\bigcup E^{**}$ натуральными числами, считая дважды в случае $p^*_{k'}=p^{**}_{k''}$, и добавив $p_0=0$, определим последовательность $\{p_k\}_{k=0}^\infty$. Тогда

$$\{p_k\}_{k=0}^\infty=\{0\}\bigcup E^*\bigcup E^{**},\tag{3.19}$$

$$p_{k-1} < p_k < p_{k+1}, \quad \text{если} \quad p_k = p^*_{k'} \in E^* \backslash E^{**},$$
$$p_{k-1} < p_k < p_{k+1}, \quad \text{если} \quad p_k = p^{**}_{k''} \in E^{**} \backslash E^*,$$
$$p_{k-1} < p_k = p_{k+1} < p_{k+2}, \quad \text{если} \quad p_k = p_{k+1} = p^*_{k'} = p^{**}_{k''} \in E^* \bigcap E^{**}.$$

В случае $p_{k-1} < p_k$ положим

$$\Phi(q) = \operatorname{ctg}\left(a\sqrt{\frac{\nu_1}{\kappa_1}}q\right) + \sqrt{\frac{\kappa_2\nu_2}{\kappa_1\nu_1}}\operatorname{ctg}\left((b-a)\sqrt{\frac{\nu_2}{\kappa_2}}q\right) + \frac{\kappa_2-\kappa_1}{a\sqrt{\kappa_1\nu_1}q} \quad \text{при} \quad p_{k-1} < q < p_k. \tag{3.20}$$

Лемма 3.4. *Для каждого $k \in \mathbb{N}$ такого, что $p_{k-1} < p_k$, существует единственное значение $q = q_k$, принадлежащее интервалу $]p_{k-1}, p_k[$ и удовлетворяющее уравнению*

$$\Phi(q) = 0.$$

Доказательство. Положив $x = a\sqrt{\nu_1/\kappa_1}q$, представим функцию $\Phi(q)$ в виде

$$\Phi(q) = \varphi_0(x) + \operatorname{ctg}(Ax),$$

где $\varphi_0(x)$ – определённая в (3.15) функция с $\varepsilon = \kappa_2/\kappa_1$, а

$$A = \frac{(b-a)\sqrt{\nu_2\kappa_1}}{a\sqrt{\nu_1\kappa_2}}.$$

Положим $\overline{x}^*_{k'} = k'\pi$, $\overline{x}^{**}_{k''} = k''\pi/A$. Напомним, что

$$\lim_{x\to 0+0}\operatorname{ctg}(Ax) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to \overline{x}^{**}_{k''}+0}\operatorname{ctg}(Ax) = +\infty, \qquad \lim_{x\to \overline{x}^{**}_{k''}-0}\operatorname{ctg}(Ax) = -\infty \quad \text{при любом} \quad k'' = 1, 2, 3, \ldots$$

Кроме того, функция $\operatorname{ctg}(Ax)$ непрерывна и строго убывает в интервале $]\overline{x}^{**}_{k''}, \overline{x}^{**}_{k''+1}[$ при каждом $k'' \in \mathbb{Z}_+$. Из этих соотношений и леммы 3.3 следует, что функция $\Phi(q)$ непрерывна, строго убывает на интервале $]p_{k-1}, p_k[$ и удовлетворяет соотношениям

$$\lim_{q\to 0+0}\Phi(q) = +\infty, \qquad \lim_{q\to p_k+0}\Phi(q) = +\infty, \qquad \lim_{q\to p_k-0}\Phi(q) = -\infty.$$

Отсюда следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Далее, используя лемму 3.4, определим числовую последовательность $\{\overline{q}_k\}_{k=1}^{\infty}$ соотношениями

$$p_{k-1} < \overline{q}_k < p_k, \quad \Phi(\overline{q}_k) = 0, \quad \text{если} \quad p_{k-1} < p_k,$$
$$p_{k-1} = \overline{q}_k = p_k, \quad \text{если} \quad p_{k-1} = p_k.$$

Отметим, что согласно определению чисел p_k, $k \in \mathbb{Z}_+$ (см. (3.17)–(3.19)), имеем

$$0 < \overline{q}_1 < \ldots < \overline{q}_k < \overline{q}_{k+1} < \ldots \quad \text{и} \quad \overline{q}_k \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Положим

$$\lambda_k = \overline{q}_k^2. \tag{3.21}$$

Лемма 3.5. *Для заданной равенством (3.5) функции $z(\lambda; s)$ соотношение*

$$\lim_{s\to b-0}|z(\lambda; s)| < \infty \tag{3.22}$$

имеет место тогда и только тогда, когда $\lambda = \lambda_k$, где числа λ_k $(k \in \mathbb{N})$ определены в (3.21). Функция $z(\lambda_k; s)$ имеет ровно $k-1$ нулей в интервале $]0, b[$.

Доказательство. Согласно лемме 3.2 (см. также (3.14)), если $\lim\limits_{s\to b-0}|z(\lambda;s)|<\infty$, то функция $z(\lambda;s)=z(\lambda;b-r)$ имеет вид

$$z(\lambda;b-r)=\pm\frac{\gamma}{r}\sin(\omega_1(\lambda)r)\quad\text{при}\quad 0<r\leqslant a.$$

Так как функции $z(\lambda;s)$ и $\widetilde{\kappa}dz(\lambda;s)/ds$ непрерывны на полуинтервале $[0,b[$, то соотношение (3.22) выполняется тогда и только тогда, когда существует такое $\gamma\in\mathbb{R}$, что

$$\frac{\gamma}{a}\sin(\omega_1(\lambda)a)=\frac{1}{\omega_2(\lambda)}\frac{b}{a}\sin(\omega_2(\lambda)(b-a)),\tag{3.23}$$

$$\kappa_1\gamma\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\sin(\omega_1(\lambda)r)\right)\Big|_{r=a}=-\kappa_2 b\frac{1}{\omega_2(\lambda)}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{b-s}\sin(\omega_2(\lambda)s)\right)\Big|_{s=b-a}.\tag{3.24}$$

Если $\sin(\omega_1(\lambda)a)=0$ и $\sin(\omega_2(\lambda)(b-a))\neq 0$, то очевидно, что ни при каком γ равенство (3.23) не выполняется.

Если $\sin(\omega_2(\lambda)(b-a))=0$ и $\sin(\omega_1(\lambda)a)\neq 0$, то из (3.23) следует, что $\gamma=0$, но при $\gamma=0$ не выполняется (3.24). Поэтому нет γ, при котором справедливы равенства (3.23), (3.24).

С другой стороны, если $\sin(\omega_1(\lambda)a)=\sin(\omega_2(\lambda)(b-a))=0$, то равенство (3.23) выполнено автоматически, а (3.24) сводится к равенству

$$\kappa_1\omega_1(\lambda)\frac{\gamma}{a}\cos(\omega_1(\lambda)a)=\kappa_2\frac{b}{a}\cos(\omega_2(\lambda)(b-a)),$$

из которого можно найти значение γ, при котором справедливы равенства (3.23) и (3.24).

Если $\sin(\omega_1(\lambda)a)\neq 0$ и $\sin(\omega_2(\lambda)(b-a))\neq 0$, то аналогично выводу соотношения (3.12) из равенств (3.10), (3.11) заключаем, что $\gamma\in\mathbb{R}$, при котором выполняются равенства (3.23) и (3.24), существует тогда и только тогда, когда $\Phi(\sqrt{\lambda})=0$, где $\Phi(\cdot)$ – функция, определённая в (3.20).

Из этих рассмотрений и леммы 3.4 следует, что соотношение

$$\lim_{r\to 0+0}|z(\lambda;b-r)|<\infty$$

имеет место тогда и только тогда, когда $\lambda=\lambda_k$ при $k\in\mathbb{N}$. Кроме того, как нетрудно видеть, из определения последовательностей $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\overline{q}_k\}_{k=1}^{\infty}$ следует, что функция $y(\lambda_k;r)=z(\lambda_k;b-r)$ имеет ровно $k-1$ нулей в интервале $]0,b[$. Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Положим*

$$e_k(r)=\frac{y_k(r)}{\|y_k(r)\|_{\widetilde{L}^2_\nu(0,b)}},\tag{3.25}$$

где

$$y_k(r)=z(\lambda_k;s),\tag{3.26}$$

а $z(\lambda;s)$ – функция, определённая равенством (3.5).

Тогда справедливы следующие утверждения:

(A) семейство $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ является ортонормальным базисом в $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$;

(B) семейство $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ является ортогональной системой в $\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$;

(C) верно равенство

$$\|e_k\|^2_{\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)}=\lambda_k;$$

(D) функции $e_k(r)$ и $r^2\kappa(r)de_k(r)/dr$ непрерывны;

(E) имеют место равенства $de_k(r)/dr|_{r=0}=0$ и $e_k(b)=0$;

(F) выполняется соотношение

$$-\frac{d}{dr}\left(r^2\kappa(r)\frac{d}{dr}e_k(r)\right)=\lambda_k\nu(r)r^2e_k(r)\quad\text{для всех}\quad r\in]0,a[\bigcup]a,b[;$$

(G) существует такая постоянная $C_1 < \infty$, *что*

$$|e_k(a)| \leqslant C_1 \quad \text{для любого} \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.27}$$

(H) функция $e_k(r)$ *имеет ровно* $k-1$ *нулей в интервале* $]0,b[$;
(I) имеет место двойное неравенство

$$M_0(k-1)^2 \leqslant \lambda_k \leqslant M_0(k+1)^2, \quad \text{где} \quad M_0 = \left(\frac{\sqrt{\kappa_1\kappa_2}}{\pi(a\sqrt{\nu_1\kappa_2}+(b-a)\sqrt{\nu_2\kappa_1})}\right)^2.$$

4. Доказательство теоремы 3.1. Доказательство теоремы 3.1 проводится в несколько этапов. Докажем сначала нужные леммы, а затем теорему.

Лемма 4.1. *Существует линейный оператор* A, *действующий из* $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$ *в* $\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$, *который каждому* $u \in \widetilde{L}^2_\nu(0,b)$ *ставит в соответствие элемент* $Au \in \widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$, *удовлетворяющий соотношению*

$$\langle Au, \varphi\rangle_{\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)} = \langle u, \varphi\rangle_{\widetilde{L}^2_\nu(0,b)} \quad \text{для любой} \quad \varphi \in \widetilde{H}^1_\kappa(0,b). \tag{4.1}$$

Оператор A, *переводящий* $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$ *в себя, является самосопряжённым компактным оператором в* $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$, *а его собственные единичные векторы* $\widetilde{e}_k$ *составляют ортонормальный базис* $\{\widetilde{e}_k\}_{k=1}^\infty$ *в* $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$. *При этом если* μ_k *– собственное значение, отвечающее вектору* $\widetilde{e}_k$,

$$A\widetilde{e}_k = \mu_k \widetilde{e}_k, \tag{4.2}$$

то $\mu_k \to 0$ *при* $k \to \infty$ *и без нарушения общности* $\mu_k \geqslant \mu_{k+1}$ *при* $k = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Так как

$$\int_0^b \nu(r) r^2 |\varphi(r)|^2\, dr = \int_0^b \nu(r) r^2 \int_b^r 2\varphi(r') \frac{d}{dr'}\varphi(r') dr'\, dr \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\int_0^b \nu(r) r^2 |\varphi(r)|^2\right)^{1/2} \left(\int_0^b \kappa(r) r^2 \left|\frac{d}{dr}\varphi(r)\right|^2\right)^{1/2},$$

где

$$C = b\left(\max\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}, 1\right)\right)^{1/2} \left(\max\left(\frac{\nu_1}{\kappa_1}, \frac{\nu_1}{\kappa_2}, \frac{\nu_2}{\kappa_2}\right)\right)^{1/2},$$

то

$$\|\varphi\|_{\widetilde{L}^2_\nu(0,b)} \leqslant C \|\varphi\|_{\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)} \quad \text{для любой} \quad \varphi \in \widetilde{H}^1_\kappa(0,b).$$

Итак, скалярное произведение $\langle u, \varphi\rangle_{\widetilde{L}^2_\nu(0,b)}$ является непрерывным линейным функционалом, определённым на функциях $\varphi \in \widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$. Следовательно, в силу теоремы Рисса существует единственный элемент $U \in \widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$ такой, что выполняется соотношение

$$\langle U, \varphi\rangle_{\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)} = \langle u, \varphi\rangle_{\widetilde{L}^2_\nu(0,b)} \quad \text{для любой} \quad \varphi \in \widetilde{H}^1_\kappa(0,b). \tag{4.3}$$

Положив $Au = U$, зададим оператор A из $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$ в $\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$.

Таким образом, лемма следует из теории самосопряжённых компактных операторов и определения пространств $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$ и $\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$ (см., например, [15, гл. IV, § 1, лемма 1]). Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Пусть* $\{\widetilde{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– ортонормальный базис в* $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$, *определённый в лемме 4.1. Тогда для каждого* $k\in\mathbb{N}$ *справедливо равенство*

$$\mu_k\frac{d}{dr}\left(\kappa r^2\frac{d}{dr}\widetilde{e}_k\right)=-\nu r^2\widetilde{e}_k \quad \text{в} \quad L^2(0,b). \tag{4.4}$$

Доказательство. Так как $A\widetilde{e}_k=\mu_k\widetilde{e}_k$, то, положив $U=A\widetilde{e}_k$, будем согласно (4.3) иметь

$$\int\limits_I \mu_k\kappa(r)r^2\left(\frac{d}{dr}\widetilde{e}_k(r)\right)\frac{d}{dr}\varphi(r)\,dr=\int\limits_I \nu(r)r^2\widetilde{e}_k(r)\varphi(r)\,dr.$$

Это равенство с учётом того, что $\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$ плотно в $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$, определяет обобщённую производную $\dfrac{d}{dr}\left(\kappa(r)r^2\dfrac{d}{dr}\widetilde{e}_k(r)\right)$, для которой выполняется равенство (4.4). Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Пусть* $\{\widetilde{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– ортонормальный базис в* $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$, *определённый в лемме 4.1. Тогда для каждого* $k\in\mathbb{N}$ *функция* $\widetilde{e}_k(r)$ *имеет вид*

$$\widetilde{e}_k(r)=\frac{y_k(r)}{\|y_k(r)\|_{\widetilde{L}^2_\nu(0,b)}}, \tag{4.5}$$

где $y_k(r)$ *– функция, определённая равенством (3.26).*

Доказательство. В силу леммы 4.2 функция $\widetilde{e}_k(r)$ должна удовлетворять уравнению (4.4), которое совпадает с уравнением (3.1) при $\lambda=1/\mu_k$, и граничным условиям (3.2). Следовательно, $\widetilde{e}_k(r)$ должна иметь вид функции $y(\lambda;r)=z(\lambda;b-r)$ (определённой равенством (3.5)) с $\lambda=1/\mu_k$. С другой стороны, $\widetilde{e}_k(r)$ должна принадлежать классу $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)\bigcap\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$, поэтому, согласно лемме 3.5, $\lambda=1/\mu_k$ должно быть одним из значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Так как $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ – убывающая последовательность, а $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ – возрастающая, то $\lambda_k=1/\mu_k$. Значит, справедлива формула (4.5). Лемма доказана.

Перейдём к доказательству теоремы 3.1. Так как в силу леммы 4.3 справедливы равенства $\widetilde{e}_k=e_k$, $\lambda_k=1/\mu_k$, то утверждение (A) доказано. Утверждение (B) вытекает непосредственно из леммы 4.1. Чтобы проверить (C), достаточно подставить $u=\varphi=e_k$ в соотношение (4.1) и учесть равенство (4.2). Утверждения (D) и (F) следуют непосредственно из равенства (4.4). Утверждения (E) и (H) вытекают из определения функции $e_k(r)$ и леммы 3.2.

Для упрощения в дальнейшем записи обозначим $\omega_i^k=\sqrt{\lambda_k\nu_i/\kappa_i}$, $i=1,2$ (т.е. в предыдущих обозначениях $\omega_i^k=\omega_i(\lambda_k)$, $i=1,2$). Чтобы доказать неравенство (3.27), нам удобно рассмотреть функцию

$$z(\lambda_k;s)=\frac{1}{\omega_2^k}\frac{b}{b-s}\sin(\omega_2^k s) \quad \text{при} \quad 0\leqslant s\leqslant b-a.$$

Таким образом,

$$e_k(a)=\frac{1}{\omega_2^k}\frac{b}{a}\sin(\omega_2^k(b-a))\frac{1}{\|z(\lambda_k;\cdot)\|_{\widetilde{L}^2_\nu(0,b)}}.$$

Из последнего выражения непосредственно следует, что

$$|e_k(a)|\leqslant\frac{1}{\omega_2^k}\frac{b}{a}\frac{1}{\|z(\lambda_k;\cdot)\|_{\widetilde{L}^2_\nu(0,b)}}.$$

Рассмотрим сначала случай, когда

$$\lambda_k\geqslant\frac{\pi^2\kappa_2}{(b-a)^2\nu_2}, \quad \text{т.е.} \quad \omega_2^k(b-a)\geqslant\pi.$$

Здесь имеем

$$\|z(\lambda_k;\cdot)\|^2_{\widetilde{L}^2_\nu(0,b)} = \int\limits_0^b \widetilde{\nu}(s)(b-s)^2(z(\lambda_k;\cdot))^2\,ds \geqslant \nu_2 b\frac{1}{\omega_2^k}\int\limits_0^{b-a}\sin^2(\omega_2^k s)\,ds =$$

$$= \nu_2 b\frac{1}{\omega_2^k}\int\limits_0^{b-a}\frac{1}{2}(1-\cos(2\omega_2^k s))\,ds \geqslant \frac{\nu_2 b}{2}\frac{1}{\omega_2^k}\int\limits_{\pi/(4\omega_2^k)}^{b-a}(1-\cos(2\omega_2^k))\,ds =$$

$$= \frac{\nu_2 b}{2}\frac{1}{\omega_2^k}\left[s-\frac{1}{\omega_2^k}\sin(2\omega_2^k s)\right]_{\pi/(4\omega_2^k)}^{b-a} = \frac{\nu_2 b}{2}\frac{1}{\omega_2^k}\left[b-a-\frac{1}{2\omega_2^k}\sin(2\omega_2^k(b-a))-\frac{\pi}{4}\frac{1}{\omega_2^k}\right] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\nu_2 b}{2}\frac{1}{\omega_2^k}\left[b-a-\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{\omega_2^k}\right] \geqslant \frac{1}{\pi}\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{2}\right)(b-a)\frac{\nu_2 b}{2}\frac{1}{\omega_2^k}.$$

Отсюда вытекает, что

$$|e_k(a)| \leqslant \frac{2a}{b}\left(\frac{1}{\pi}\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{2}\right)(b-a)\nu_2 b\right)^{-1} \equiv C_1^{[+]} \quad \text{при} \quad \lambda_k \geqslant \frac{\pi^2\kappa_2}{(b-a)^2\nu_2}. \tag{4.6}$$

С другой стороны, так как множество чисел λ_k таких, что $\lambda_k < \pi^2\kappa_2/((b-a)^2\nu_2)$, конечно, а функция $e_k(r)$ непрерывна, то

$$\sup_{k\in\Lambda_0}|e_k(a)| \equiv C_1^{[-]} < \infty, \tag{4.7}$$

где

$$\Lambda_0 = \left\{k\in\mathbb{N} : \lambda_k < \frac{\pi^2\kappa_2}{(b-a)^2\nu_2}\right\}.$$

Из (4.6), (4.7) следует утверждение (G):

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}|e_k(a)| \leqslant \max\{C_1^{[+]}, C_1^{[-]}\} \equiv C_1 < \infty.$$

Из представления для функции $e_k(r)$ (см. (3.25), (3.26), (3.5)) вытекает, что число её нулей в полуинтервалах $]0,a]$ и $[a,b[$ равно $[a\omega_1^k\pi]$ и $[(b-a)\omega_2^k\pi]$ соответственно (здесь $[\cdot]$ обозначает целую часть числа). Так как число нулей функции $e_k(r)$ в интервале $]0,b[$ равно $k-1$, имеем: $k = [a\omega_1^k\pi] + [(b-a)\omega_2^k\pi]$, если $a\omega_1^k\pi = [a\omega_1^k\pi]$ (и $(b-a)\omega_2^k\pi = [(b-a)\omega_2^k\pi]$), и $k = [a\omega_1^k\pi] + [(b-a)\omega_2^k\pi] + 1$ в противном случае.

Так как для любого $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ верно неравенство

$$\alpha+\beta-2 < [\alpha]+[\beta] \leqslant \alpha+\beta,$$

то

$$\sqrt{\lambda_k}\pi\frac{a\sqrt{\nu_1\kappa_2}+(b-a)\sqrt{\nu_2\kappa_1}}{\sqrt{\kappa_1\kappa_2}} - 2 \leqslant k-1 \leqslant \sqrt{\lambda_k}\pi\frac{a\sqrt{\nu_1\kappa_2}+(b-a)\sqrt{\nu_2\kappa_1}}{\sqrt{\kappa_1\kappa_2}},$$

откуда находим, что

$$\frac{\sqrt{\kappa_1\kappa_2}(k-1)}{\pi(a\sqrt{\nu_1\kappa_2}+(b-a)\sqrt{\nu_2\kappa_1})} \leqslant \sqrt{\lambda_k} \leqslant \frac{\sqrt{\kappa_1\kappa_2}}{\pi(a\sqrt{\nu_1\kappa_2}+(b-a)\sqrt{\nu_2\kappa_1})}(k+1).$$

Таким образом, утверждение (I), а с ним и теорема 3.1 доказаны.

5. Стационарное решение. Найдём стационарное решение задачи (1.9), (1.10) (с (1.3)), (1.6)–(1.8). В следующем пункте работы воспользуемся им для решения эволюционной задачи.

Рассмотрим следующую задачу: найти функции $T(r)$ и $\Pi(r)$, удовлетворяющие уравнениям

$$-\frac{d}{dr}\left(r^2\kappa(r)\frac{d}{dr}T(r)\right) = \psi\delta(r-a) \quad \text{при} \quad 0 < r < b, \tag{5.1}$$

$$-\gamma_0\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\Pi(r)\right) = 0 \quad \text{при} \quad a < r < b, \tag{5.2}$$

где число ψ задаётся соотношением

$$\psi = \gamma_1\frac{\Pi(a+\varepsilon_1) - \Pi(a)}{\varepsilon_1}, \tag{5.3}$$

и граничным условиям

$$T(b) = \overline{T}_b, \tag{5.4}$$

$$\Pi(a) = \overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1 T(a), \tag{5.5}$$

$$\Pi(b) = \overline{\Pi}_b. \tag{5.6}$$

В (5.2)–(5.6), как и выше, $\gamma_0 > 0$, $\gamma_1 > 0$, $\varepsilon \in (0, b-a)$, $\overline{\pi}_0$, $\overline{\alpha}_1$, $\overline{T}_b$, $\overline{\Pi}_b$ – заданные постоянные.

Определим величину $\overline{\Theta}_a$ соотношением

$$\overline{\Theta}_a = \frac{\gamma_1 b\overline{A}_a}{(b-a)(a+\varepsilon_1)}(\overline{\Pi}_b - (\overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1(\overline{T}_b + \overline{\Theta}_a))), \tag{5.7}$$

т.е.

$$\overline{\Theta}_a = \frac{\gamma_1 b\overline{A}_a}{(b-a)(a+\varepsilon_1) + \gamma_1 b\overline{A}_a\overline{\alpha}_1}(\overline{\Pi}_b - \overline{\pi}_0 - \overline{\alpha}_1\overline{T}_b),$$

где

$$\overline{A}_a = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(e_k(a))^2}{\lambda_k}.$$

Докажем, что справедлива

Теорема 5.1. *Решение $(T(r), \Pi(r))$ задачи (5.1)–(5.6) определяется соотношениями*

$$T(r) = \overline{T}_b + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\Theta} e_k(r), \quad c_k^{\Theta} = \gamma_1\frac{\overline{\Pi}_b - (\overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1(\overline{T}_b + \overline{\Theta}_a))}{b}\frac{e_k(a)}{\lambda_k}, \tag{5.8}$$

$$\Pi(r) = \frac{b\overline{\Pi}_b - a(\overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1(\overline{T}_b + \overline{\Theta}_a))}{(b-a)} - \frac{ab(\overline{\Pi}_b - (\overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1(\overline{T}_b + \overline{\Theta}_a)))}{(b-a)r}. \tag{5.9}$$

Доказательство. Очевидно, что решением задачи (5.2), (5.5), (5.6) является функция

$$\Pi(r) = \frac{b\overline{\Pi}_b - a(\overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1 T(a))}{(b-a)} - \frac{ab(\overline{\Pi}_b - (\overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1 T(a)))}{(b-a)r}. \tag{5.10}$$

Подставив её в соотношение (5.3), получим

$$\psi = \gamma_1\frac{\Pi|_{r=a+\varepsilon_1} - \Pi|_{r=a}}{\varepsilon_1} = \gamma_1\frac{b(\overline{\Pi}_b - (\overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1 T(a)))}{(b-a)(a+\varepsilon_1)} \equiv \psi_a(T(a)). \tag{5.11}$$

Положим также $\Theta(r) = T(r) - \overline{T}_b$. Тогда задача (5.1), (5.4) сводится к следующей задаче:

$$-\frac{d}{dr}\left(r^2\kappa(r)\frac{d}{dr}\Theta(r)\right) = \psi_a(T(a))\delta(r-a), \tag{5.12}$$

$$\Theta(b) = 0. \tag{5.13}$$

Положив

$$\Theta(r) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\Theta} e_k(r)$$

и проинтегрировав по полуинтервалу $]0, b]$ обе части уравнения (5.12), умноженные на $e_k(r)$, получим с помощью утверждений (B), (C), (D), (F) теоремы 3.1 равенства

$$\lambda_k c_k^{\Theta} = \int_0^b e_k(r)\left(-\frac{d}{dr}\left(r^2\kappa(r)\frac{d}{dr}\Theta(r)\right)\right)dr = \psi_a(T(a))e_k(a).$$

Поэтому решением задачи (5.12)–(5.13) является функция

$$\Theta(r) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\Theta} e_k(r), \quad \text{где} \quad c_k^{\Theta} = \psi_a(T(a))\frac{e_k(a)}{\lambda_k}; \tag{5.14}$$

тогда

$$\Theta(a) = \psi_a(T(a))\overline{A}_a, \quad \overline{A}_a = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(e_k(a))^2}{\lambda_k}. \tag{5.15}$$

Поэтому из равенств (5.11) и (5.15) следует, что

$$\Theta(a) = \frac{\gamma_1 b\overline{A}_a}{(b-a)(a+\varepsilon_1)}(\overline{\Pi}_b - (\overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1(\overline{T}_b + \Theta(a)))).$$

Таким образом, согласно определению величины $\overline{\Theta}_a$ (см. (5.7)), имеем $\Theta(a) = \overline{\Theta}_a$ и, следовательно, $T(a) = \overline{T}_b + \overline{\Theta}_a$. Подставив это выражение в (5.11), (5.14), (5.10), получим равенства (5.8) и (5.9). Теорема доказана.

6. Существование и единственность решения эволюционной задачи. Обозначим через $(\overline{T}_{\rm st}(r), \overline{\Pi}_{\rm st}(r))$ решение стационарной задачи, которое мы определили формулами (5.8)–(5.9) в теореме 5.1. Положим

$$\vartheta = \vartheta(t,r) = T(t,r) - \overline{T}_{\rm st}(r), \tag{6.1}$$

$$\eta = \eta(t,r) = \Pi(t,r) - \overline{\Pi}_{\rm st}(r) - \overline{\alpha}_1\vartheta(t,r). \tag{6.2}$$

Так как $\partial_r(r^2\partial_r\Pi) = 0$ (см. (5.2)), то из (1.10) вытекает, что

$$\partial_t\eta - \gamma_0\partial_r(r^2\partial_r\eta) = -\overline{\alpha}_1(\partial_t\vartheta - \gamma_0\partial_r(r^2\partial_r\vartheta)) \quad \text{при} \quad a < r < b.$$

Отметим, что в силу (1.9), (1.4), (1.5) и (6.1) выполняется также равенство

$$-\overline{\alpha}_1(\partial_t\vartheta - \gamma_0\partial_r(r^2\partial_r\vartheta)) = -\overline{\alpha}_1\left(\frac{\kappa_2}{\nu_2} - \gamma_0\right)\partial_r(r^2\partial_r\vartheta) \quad \text{при} \quad a < r < b.$$

Эти соотношения позволяют свести систему (1.9), (1.10) (с (1.3)) к следующей системе:

$$\nu\partial_t\vartheta - \partial_r(r^2\kappa\partial_r\vartheta) = q\delta(r-a) \quad \text{в} \quad]0, b[, \tag{6.3}$$

$$\partial_t \eta - \gamma_0 \partial_r (r^2 \partial_r \eta) = f \quad \text{в} \quad]a,b[, \tag{6.4}$$

где

$$q = q(t) = \gamma_1 \frac{\eta(t,\varepsilon_1)}{\varepsilon_1}, \tag{6.5}$$

$$f = -\overline{\alpha}_1 \left(\frac{\kappa_2}{\nu_2} - \gamma_0 \right) \partial_r (r^2 \partial_r \vartheta). \tag{6.6}$$

Тогда граничные условия преобразуются в условия

$$\vartheta(t,b) = 0, \quad \eta(t,a) = \eta(t,b) = 0 \quad \text{для всех} \quad t \geqslant 0, \tag{6.7}$$

а начальные условия примут вид

$$\vartheta(0,r) = T_0(r) - \overline{T}_{\mathrm{st}}(r) \equiv \vartheta_0(r) \quad \text{при} \quad 0 < r < b, \tag{6.8}$$

$$\eta(0,r) = \Pi_0(r) - \overline{\Pi}_{\mathrm{st}}(r) - \overline{\alpha}_1 \vartheta_0(r) \equiv \eta_0(r) \quad \text{при} \quad a < r < b. \tag{6.9}$$

Для определённых на полуинтервале $]0,b]$ функций u, используя функции e_k, заданные равенствами (3.25), (3.26), определим коэффициенты Фурье $\widehat{u}(k)$ и норму $\|u\|_{H^\sigma_{(0,b)}}$ соотношениями

$$\widehat{u}(k) = \langle u, e_k \rangle_{\widetilde{L}^2_\nu(0,b)}, \quad \|u\|_{H^\sigma_{(0,b)}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\sigma |\widehat{u}(k)|^2 \right)^{1/2}. \tag{6.10}$$

Аналогично, для определённых на отрезке $[a,b]$ функций u, используя функции $d_k(r)$, заданные равенством (2.4), определим коэффициенты Фурье $\widehat{u}(k)$ и норму $\|u\|_{H^\sigma_{(a,b)}}$ следующим образом:

$$\widehat{u}(k) = \langle u, d_k \rangle_{\widetilde{L}^2(a,b)}, \quad \|u\|_{H^\sigma_{(a,b)}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{2\sigma} |\widehat{u}(k)|^2 \right)^{1/2}. \tag{6.11}$$

Имеем следующий результат.

Теорема 6.1. *Пусть* $1 < \sigma < 3/2$. *Если* $\vartheta_0 \in H^{\sigma-1}_{(0,b)}$ *и* $\eta_0 \in H^{\sigma-1}_{(a,b)}$, *то, каково бы ни было число* $\overline{t} > 0$, *существует единственное решение* (ϑ, η) *задачи (6.3)–(6.9) в классе*

$$\vartheta \in L^\infty(0,\overline{t}; H^{\sigma-1}_{(0,b)}) \bigcap L^2(0,\overline{t}; H^\sigma_{(0,b)}), \quad \eta \in L^\infty(0,\overline{t}; H^{\sigma-1}_{(a,b)}) \bigcap L^2(0,\overline{t}; H^\sigma_{(a,b)}). \tag{6.12}$$

Доказательство. Используя коэффициенты Фурье, определённые в (6.10), (6.11) (даже если используем один и тот же символ $\widehat{u}(k)$ для двух разных значений, их нетрудно отличить в зависимости от контекста), преобразуем уравнения (6.3), (6.4) соответственно в уравнения

$$\frac{d}{dt} \widehat{\vartheta}(t,k) + \lambda_k \widehat{\vartheta}(t,k) = q(t) e_k(a), \tag{6.13}$$

$$\frac{d}{dt} \widehat{\eta}(t,k) + \gamma_0 \frac{\pi^2}{(b-a)^2} k^2 \widehat{\eta}(t,k) = \widehat{f}(t,k). \tag{6.14}$$

Умножив обе части уравнения (6.13) на функцию $\lambda_k^{\sigma-1} \widehat{\vartheta}(t,k)$, получим

$$\frac{1}{2} \partial_t \lambda_k^{\sigma-1} \widehat{\vartheta}^2(t,k) + \lambda_k^\sigma \widehat{\vartheta}^2(t,k) = \lambda_k^{\sigma-1} \widehat{\vartheta}(t,k) q(t) e_k(a).$$

В силу оценки (3.27) имеем

$$\lambda_k^{\sigma-1} \widehat{\vartheta}(t,k) q(t) e_k(a) \leqslant \frac{1}{2} \lambda_k^\sigma |\widehat{\vartheta}(t,k)|^2 + \frac{C_1^2}{2} \lambda_k^{\sigma-2} |q(t)|^2.$$

Учитывая, что $\sigma - 2 < -1/2$, вследствие утверждения (I) теоремы 3.1 получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\sigma-2} \equiv C_\lambda < \infty.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt}\|\vartheta\|^2_{H^{\sigma-1}_{(0,b)}} + \|\vartheta\|^2_{H^{\sigma}_{(0,b)}} \leqslant C_1^2 C_\lambda |q(t)|^2.$$

Далее, нетрудно получить неравенство

$$|q(t)|^2 = \frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2}|\eta(t,\varepsilon_1)|^2 = \frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\eta}(t,k)d_k(\varepsilon_1)\right|^2 \leqslant C_q \sum_{k=1}^{\infty} k^{2\sigma-1}|\widehat{\eta}(t,k)|^2 = C_q\|\eta(t,\cdot)\|^2_{H^{\sigma-1/2}_{(a,b)}},$$

где

$$C_q = \frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2}\frac{2}{a^2(b-a)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2\sigma-1}} < \infty.$$

Из двух последних неравенств следует, что

$$\frac{d}{dt}\|\vartheta\|^2_{H^{\sigma-1}_{(0,b)}} + \|\vartheta\|^2_{H^{\sigma}_{(0,b)}} \leqslant C_1^2 C_\lambda C_q \|\eta\|^2_{H^{\sigma-1/2}_{(a,b)}}. \tag{6.15}$$

С другой стороны, если умножим обе части уравнения (6.14) на функцию $k^{2\sigma-2}\widehat{\eta}(t,k)$ и просуммируем получившиеся уравнения по k, то получим

$$\frac{d}{dt}\|\eta\|^2_{H^{\sigma-1}_{(a,b)}} + \gamma_0\frac{\pi^2}{(b-a)^2}\|\eta\|^2_{H^{\sigma}_{(a,b)}} \leqslant C_2\|f(t,\cdot)\|^2_{H^{\sigma-2}_{(a,b)}}, \tag{6.16}$$

где $C_2 = (b-a)^2/(\gamma_0\pi^2)$.

Пусть ω – положительное число, которое выберем в дальнейшем. Если положить

$$\widetilde{\vartheta} = e^{-\omega t}\vartheta, \quad \widetilde{\eta} = e^{-\omega t}\eta, \quad \widetilde{q} = e^{-\omega t}q, \quad \widetilde{f} = e^{-\omega t}f,$$

то из уравнений (6.3), (6.4) вытекает соответственно, что

$$\nu\partial_t\widetilde{\vartheta} - \partial_r(r^2\kappa\partial_r\widetilde{\vartheta}) + \omega\nu\widetilde{\vartheta} = \widetilde{q}\delta(r) \quad \text{в} \quad]0,b[, \tag{6.17}$$

$$\partial_t\widetilde{\eta} - \gamma_0\partial_r(r^2\partial_r\widetilde{\eta}) + \omega\widetilde{\eta} = \widetilde{f} \quad \text{в} \quad [a,b[. \tag{6.18}$$

Действуя аналогично тому, как получены неравенства (6.15), (6.16), из уравнений (6.17), (6.18) получим неравенства

$$\frac{d}{dt}\|\widetilde{\vartheta}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(0,b)}} + \|\widetilde{\vartheta}\|^2_{H^{\sigma}_{(0,b)}} + 2\omega\|\widetilde{\vartheta}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(0,b)}} \leqslant C_1^2 C_\lambda C_q \|\widetilde{\eta}\|^2_{H^{\sigma-1/2}_{(a,b)}}, \tag{6.19}$$

$$\frac{d}{dt}\|\widetilde{\eta}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(a,b)}} + \gamma_0\frac{\pi^2}{(b-a)^2}\|\widetilde{\eta}\|^2_{H^{\sigma}_{(a,b)}} + 2\omega\|\widetilde{\eta}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(a,b)}} \leqslant C_2\|\widetilde{f}\|^2_{H^{\sigma-2}_{(a,b)}}. \tag{6.20}$$

Введём банахово пространство

$$Y_\vartheta = L^\infty(0,\overline{t}; H^{\sigma-1}_{(0,b)}) \bigcap L^2(0,\overline{t}; H^{\sigma}_{(0,b)}).$$

Пусть $\overline{\vartheta} \in Y_\vartheta$. Подставляя $\overline{\vartheta}$ вместо ϑ в правую часть равенства (6.6), определим функцию $\overline{f} = \overline{f}(\overline{\vartheta})$, т.е.

$$\overline{f} = \overline{f}(\overline{\vartheta}) = -\overline{\alpha}_1\left(\frac{\kappa_2}{\nu_2} - \gamma_0\right)\partial_r(r^2\partial_r\overline{\vartheta}).$$

Затем, подставив $\overline{f}$ в правую часть уравнения (6.4), получим

$$\partial_t \eta - \gamma_0 \partial_r (r^2 \partial_r \eta) = \overline{f} \quad \text{в} \quad]a,b[.$$

Разрешив это уравнение, найдём η, причём согласно (6.16) справедливо включение

$$\eta \in L^\infty(0,\overline{t}; H^{\sigma-1}_{(a,b)}) \bigcap L^2(0,\overline{t}; H^{\sigma}_{(a,b)}).$$

Затем, определив q соотношением (6.5), получим решение ϑ уравнения (6.3). Это решение в силу (6.15) принадлежит пространству Y_ϑ. Таким образом, определён оператор G_1, который каждому $\overline{\vartheta} \in Y_\vartheta$ ставит в соответствие решение $\vartheta \in Y_\vartheta$ уравнения (6.3), полученное так, как сказано выше.

Если положить $\widetilde{\overline{f}} = e^{-\omega t}\overline{f}$, то из определения функции $\overline{f}$ следует, что существует такая постоянная C_f, для которой

$$\|\widetilde{\overline{f}}\|^2_{H^{\sigma-2}_{(a,b)}} \leqslant C_f \|\widetilde{\overline{\vartheta}}\|^2_{H^{\sigma}_{(a,b)}}. \tag{6.21}$$

Теперь рассмотрим две функции $\overline{\vartheta}_1$ и $\overline{\vartheta}_2$ из Y_ϑ. Определим $\widetilde{\overline{\vartheta}}_1$, $\widetilde{\overline{\vartheta}}_2$, $\widetilde{\vartheta}_1$, $\widetilde{\vartheta}_2$, $\widetilde{\eta}_1$, $\widetilde{\eta}_2$ так, как сказано выше ($\widetilde{\overline{\vartheta}}_1 = e^{-\omega t}\overline{\vartheta}_1$ и т.д.), и положим

$$\widetilde{\Theta} = \widetilde{\vartheta}_1 - \widetilde{\vartheta}_2, \quad \widetilde{H} = \widetilde{\eta}_1 - \widetilde{\eta}_2, \quad \widetilde{\overline{\Theta}} = \widetilde{\overline{\vartheta}}_1 - \widetilde{\overline{\vartheta}}_2.$$

Поскольку уравнения (6.17), (6.18) линейны, то так же, как и для (6.19)–(6.21), получаем

$$\frac{d}{dt}\|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(0,b)}} + \|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^{\sigma}_{(0,b)}} + 2\omega\|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(0,b)}} \leqslant C_1^2 C_\lambda C_q \|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma-1/2}_{(a,b)}}, \tag{6.22}$$

$$\frac{d}{dt}\|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(a,b)}} + \gamma_0 \frac{\pi^2}{(b-a)^2}\|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma}_{(a,b)}} + 2\omega\|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(a,b)}} \leqslant C_2 C_f \|\widetilde{\overline{\Theta}}\|^2_{H^{\sigma}_{(a,b)}}.$$

Так как $\lambda^{2\sigma-1} \leqslant \delta\lambda^{2\sigma} + \lambda^{2\sigma-2}/(4\delta)$ и поэтому $\|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma-1/2}_{(a,b)}} \leqslant \delta\|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma}_{(a,b)}} + \|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(a,b)}}/(4\delta)$ для любого $\delta > 0$, то, умножив обе части (6.22) на постоянную Λ, которая будет определена ниже, получим

$$\frac{d}{dt}(\Lambda\|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(0,b)}} + \|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(a,b)}}) + \Lambda\|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^{\sigma}_{(0,b)}} + \gamma_0 \frac{\pi^2}{(b-a)^2}\|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma}_{(a,b)}} + 2\Lambda\omega\|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(0,b)}} + 2\omega\|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(a,b)}} \leqslant$$

$$\leqslant \delta\Lambda C_1^2 C_\lambda C_q \|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma}_{(a,b)}} + \frac{\Lambda}{4\delta} C_1^2 C_\lambda C_q \|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(a,b)}} + C_2 C_f \|\widetilde{\overline{\Theta}}\|^2_{H^{\sigma}_{(0,b)}}. \tag{6.23}$$

Если возьмём

$$\Lambda = 2C_2 C_f, \quad \delta = \frac{\gamma_0 \pi^2}{2\Lambda(b-a)^2 C_1^2 C_\lambda C_q}, \quad \omega = \frac{\Lambda}{4\delta} C_1^2 C_\lambda C_q,$$

то неравенство (6.23) примет вид

$$\frac{d}{dt}(\Lambda\|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(0,b)}} + \|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(a,b)}}) + \Lambda\|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^{\sigma}_{(0,b)}} + \gamma_0 \frac{\pi^2}{2(b-a)^2}\|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma}_{(a,b)}} +$$

$$+ 2\Lambda\omega\|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(0,b)}} + \omega\|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(a,b)}} \leqslant \frac{\Lambda}{2}\|\widetilde{\overline{\Theta}}\|^2_{H^{\sigma}_{(0,b)}}. \tag{6.24}$$

Из неравенства (6.24) вытекает, что последовательные приближения $\widetilde{\vartheta}_{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, для задачи (6.17), (6.18) (с начальными условиями (6.8), (6.9) для всякого n с $\vartheta_0 \in H^{\sigma-1}_{(0,b)}$ и $\eta_0 \in H^{\sigma-1}_{(a,b)}$) сходятся в банаховом пространстве $\widetilde{Y}_\vartheta$ с нормой

$$\|\widetilde{\vartheta}\|_{\widetilde{Y}_\vartheta} = (\|\widetilde{\vartheta}\|^2_{L^\infty(0,\overline{t};H^{\sigma-1}_{(0,b)})} + \|\widetilde{\vartheta}\|^2_{L^2(0,\overline{t};H^{\sigma}_{(0,b)})} + 2\omega\|\widetilde{\vartheta}\|^2_{L^2(0,\overline{t};H^{\sigma-1}_{(0,b)})})^{1/2}.$$

Так как уравнения линейны, предел $\widetilde{\vartheta}$ последовательных приближений $\widetilde{\vartheta}_{(n)}$ будет решением задачи (6.17), (6.18), причём с ним определяется также и $\widetilde{\eta}$. Итак, положив

$$\vartheta = e^{\omega t}\widetilde{\vartheta}, \quad \eta = e^{\omega t}\widetilde{\eta},$$

видим, что пара (ϑ, η) является решением задачи (6.3)–(6.9). Включения (6.12) следуют из полученных выше оценок. Теорема доказана.

Отметим, что, используя представления (6.1), (6.2) и найденное решение (ϑ, η) задачи (6.3)–(6.9), можно определить функции $T(t,r)$ и $\Pi(t,r)$, удовлетворяющие уравнениям (1.9), (1.10) (с (1.3)) и условиям (1.6)–(1.8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 2. М., 1974.
2. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М., 1981.
3. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
4. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.
5. *Крылов Н.В.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. М., 1985.
6. *Hallaci Kh., Fujita Yashima H.* Système d'équations paraboliques linéaires du type: température et densité de vapeur avec l'effet de l'évaporation // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 2020. V. 65. P. 45–73.
7. *Fuchs N.A.* Evaporation and Droplet Growth in Gaseous Media. London, 1959.
8. *Pustovalov V.K., Romanov G.S.* The theory of heating and evaporation of a spherical particle exposed to optical radiation // Int. J. Heat Mass Transfer. 1985. V. 28. P. 277–289.
9. *Козырев А.В., Ситников А.Г.* Испарение сферической капли в газе среднего давления // Успехи физ. наук. 2001. Т. 171. С. 765–774.
10. *Sazhin S.S.* Droplets and Sprays. Heidelberg, 2014.
11. *Zubkov V.S., Cossali G.E., Tonini S., Rybdylova O., Crua C., Sazhin S.S.* Mathematical modelling of heating and evaporation of a spheroidal droplet // Int. J. Heat Mass Transfer. 2017. V. 108. P. 2181–2190.
12. *Матвеев Л.Т.* Основы общей метеорологии. Физика атмосферы. СПб, 2000.
13. *Albertson M.L.* La mécanique de l'évaporation // La Houille Blanche. 1995. V. 5. P. 704–717.
14. *Гета Р.И.* Моделирование испарения с водной поверхности на основе теории подобия // Вестн. Восточно–Казахстан. гос. техн. ун-та. 2012. № 4. С. 5–12.
15. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1976.

Высшая национальная школа гидравлики,
г. Блида, Алжир,
Высшая нормальная школа,
г. Константина, Алжир

Поступила в редакцию 11.06.2020 г.
После доработки 18.07.2021 г.
Принята к публикации 24.02.2022 г.

EDN: CGOPIT
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 223–237

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.72

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В УГЛЕ

© 2022 г. В. В. Власов, Н. А. Раутиан

Изучаются линейные пространства вектор-функций, голоморфных в угловой области комплексной плоскости, со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве. Показано, что снабжённые соответствующими нормами указанные пространства являются гильбертовыми. В этих пространствах исследуется начальная задача для интегро-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами и устанавливается её корректная разрешимость.

DOI: 10.31857/S037406412202008X

Введение. В настоящей работе изучаются интегро-дифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Главной частью этих уравнений является абстрактное параболическое уравнение, возмущённое вольтерровым интегральным оператором. Принципиальное отличие данной работы от имеющихся и посвящённых исследованию интегро-дифференциальных уравнений состоит в том что мы рассматриваем и изучаем интегро-дифференциальные уравнения для вектор-функций, аргументы которых принимают значения в угловой области комплексной плоскости.

Статья состоит из двух частей. В первой части вводятся необходимые в дальнейшем функциональные пространства и устанавливаются основные их свойства. Во второй её части исследуется во введённых функциональных пространствах начальная задача для рассматриваемых интегро-дифференциальных уравнений и устанавливается её корректная разрешимость. При этом существенно используются результаты первой части работы.

1. Функциональные пространства и их основные свойства. Определения, обозначения и формулировка результатов. В работе М.М. Джрбашяна и В.М. Мартиросяна [1], а также в монографии М.М. Джрбашяна [2, гл. VII] изучен класс $\Re_2(S_\theta)$ функций, голоморфных в угловой области $S_\theta = \{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \theta\}$ и таких, что

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(te^{i\varphi})|^2 \, dt \right\} < +\infty.$$

В [1, 2] установлено, что это линейное пространство, снабжённое соответствующей нормой $\Re_2[S_\theta]$, является гильбертовым, и для него доказана теорема типа Пэли–Винера.

В данной работе исследуются классы $\Re_2(S_\theta, H)$ и $W_2^n(S_\theta, A^n)$ функций со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H, голоморфных в области S_θ, которые определяются следующим образом.

Обозначим через $\Re_2(S_\theta, H)$ класс вектор-функций, для которых конечна величина

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int_0^{+\infty} \|f(te^{i\varphi})\|^2 \, dt,$$

а через $W_2^n(S_\theta, A^n)$ класс вектор-функций, для которых конечна величина

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int_0^{+\infty} \left(\left\| \frac{\partial^n}{\partial t^n} u(te^{i\varphi}) \right\|^2 + \|A^n u(te^{i\varphi})\|^2 \right) dt,$$

где A – самосопряжённый положительный оператор в пространстве H, имеющий компактный обратный. Через $(\cdot,\cdot)$ и $||\cdot||$ обозначим скалярное произведение и норму в пространстве H соответственно.

В работе доказано, что снабжённый соответствующей нормой класс $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ образует гильбертово пространство, и для этого пространства установлен аналог теоремы Пэли–Винера. Показано также, что снабжённый соответствующей нормой класс $W_2^n(S_\theta, A^n)$ функций является гильбертовым пространством, и установлен аналог теоремы о промежуточных производных и теоремы о следах.

Условимся в дальнейшем называть функцией (без добавления слова "вектор") функцию со значениями в пространстве H, а функцию со значениями в $\mathbb{C}$ будем называть скалярной или числовой функцией.

Пусть $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$. Обозначим через $L_2(\mathbb{R}_+, H)$ пространство (классов) функций $\mathbb{R}_+ \to \to H$, измеримых относительно меры Лебега dt на полуоси $\mathbb{R}_+$ и таких, что

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = \left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|^2 \, dt \right)^{1/2} < +\infty.$$

Пусть A – самосопряжённый положительный оператор (т.е. $A^* = A \geqslant \kappa I$, $\kappa = \mathrm{const} > 0$), действующий в пространстве H, имеющий компактный обратный.

Превратим область определения $\mathrm{Dom}\,(A^\beta)$ оператора A^β, $\beta > 0$, в гильбертово пространство H_β, введя норму $\|\cdot\|_\beta = \|A^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A^β.

Через $W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ обозначим пространство Соболева функций $\mathbb{R}_+ \to H$, снабжённое нормой

$$\|u\|_{W_2^n(\mathbb{R}_+,A^n)} \equiv \left(\int_0^{+\infty} (\|u^{(n)}(t)\|^2 + \|A^n u(t)\|^2) \, dt \right)^{1/2}.$$

Подробнее о пространствах $W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ см. монографию [3, гл. 1]. Для $n = 0$ полагаем $W_2^0(\mathbb{R}_+, A^0) \equiv L_2(\mathbb{R}_+, H)$. Будем также полагать в дальнейшем, что $\mathfrak{R}_2(S_0, H) = L_2(\mathbb{R}_+, H)$, $W_2^n(S_0, A^n) = W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$.

Укажем основные свойства пространства $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$.

Предложение 1. *У функции $f(\tau) \in \mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ существуют граничные значения $f(te^{\pm\theta}) \in \in L_2(\mathbb{R}_+, H)$ такие, что*

$$\lim_{\varphi \to \pm\theta} \|f(te^{i\varphi}) - f(te^{\pm i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = 0. \tag{1}$$

Предложение 2. *Для функции $f(\tau) \in \mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ справедлива интегральная формула Коши*

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{f(\varsigma e^{-i\theta})}{\varsigma e^{-i\theta} - \tau} e^{-i\theta} \, d\varsigma - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{f(\varsigma e^{i\theta})}{\varsigma e^{i\theta} - \tau} e^{i\theta} \, d\varsigma, \quad \tau \in S_\theta. \tag{2}$$

Предложение 3. *Пусть функции $f_{-\theta}$ и $f_{+\theta}$ принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R}_+, H)$. Тогда функция $f(\tau)$, представимая в виде*

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} e^{-i\theta} \frac{f_{-\theta}(\varsigma)}{\varsigma e^{-i\theta} - \tau} \, d\varsigma - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} e^{i\theta} \frac{f_{+\theta}(\varsigma)}{\varsigma e^{i\theta} - \tau} \, d\varsigma, \quad \tau \in S_\theta,$$

принадлежит классу $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$.

На основании предложений 1–3 доказывается

Теорема 1. 1^0. *Класс функций* $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ *с нормой*

$$\|f\|^*_{2,\theta} = \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} \|f(te^{i\varphi})\|^2 \, dt \right\}^{1/2}$$

является банаховым пространством.

2^0. *Класс функций* $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ *со скалярным произведением*

$$\langle f, g\rangle_{2,\theta} = \int\limits_0^{+\infty} (f(te^{-i\theta}), g(te^{-i\theta}))\, dt + \int\limits_0^{+\infty} (f(te^{i\theta}), g(te^{i\theta}))\, dt \tag{3}$$

является гильбертовым пространством.

3^0. *Если* $f(\tau)$ *– произвольная функция из класса* $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ *и* $\|f\|_{2,\theta} = \langle f(\tau), f(\tau)\rangle^{1/2}_{2,\theta}$, *то справедливы оценки*

$$\|f\|^*_{2,\theta} \leqslant \sqrt{2}\|f\|_{2,\theta} \leqslant 2\|f\|^*_{2,\theta}. \tag{4}$$

Приведём аналог теоремы Пэли–Винера для класса функций $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$.

Теорема 2. *Пусть* $\theta \in (0, \pi/2)$. *Справедливы следующие утверждения:*

1^0. *Класс функций* $\mathfrak{R}_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$ *совпадает с множеством функций, допускающих представление*

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\varphi} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t e^{-i\varphi}} f(te^{-i\varphi})\, dt, \quad |\arg\lambda - \varphi| < \pi/2, \quad \varphi \in (-\theta, \theta), \tag{5}$$

$f(\tau) \in \mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$.

2^0. *В представлении (5) для каждой фиксированной функции* $F(\lambda) \in \mathfrak{R}_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$ *функция* $f(\tau) \in \mathfrak{R}_{2,\theta}(\mathbb{R}_+, H)$ *единственна и справедлива формула обращения*

$$f(te^{i\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\varphi} \frac{d}{dt} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ity} - 1}{iy} F(e^{i(\pi/2 \cdot \operatorname{sgn} y - \varphi)}|y|)\, dy. \tag{6}$$

3^0. *Если функция* $F(\lambda) \in \mathfrak{R}_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$ *с помощью функции* $f(\tau) \in \mathfrak{R}_{2,\theta}(\mathbb{R}_+, H)$ *представима по формуле (5), то выполняются оценки*

$$\|F\|_{2,\theta+\pi/2} \leqslant 2\|f\|_{2,\theta} \leqslant 2\sqrt{2}\|F\|_{2,\theta+\pi/2}. \tag{7}$$

Отметим, что при $\theta = 0$ теорема 2 переходит в хорошо известную теорему Пэли–Винера для пространства $L_2(\mathbb{R}_+, H)$ и пространства Харди в правой полуплоскости $\mathfrak{R}_2(\operatorname{Re}\lambda > 0; H)$. Соответствующий комментарий по этому поводу в скалярном случае приведён в статье [1].

Перейдём к рассмотрению и изучению аналогов пространств Соболева $W^n_2(S_\theta, A^n)$ функций, голоморфных в угле S_θ.

Условимся в дальнейшем обозначать через $\dfrac{du}{d\tau}(\tau)$ производную функции $u(\tau)$ в смысле комплексного анализа. Поскольку

$$\frac{d^k}{d\tau^k} u(\tau) = e^{-ik\varphi} \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(te^{i\varphi}), \quad |e^{ik\varphi}| = 1, \quad k \in \mathbb{N},$$

то класс функций $W_2^n(S_\theta, A^n)$ совпадает с классом функций, голоморфных в угле S_θ и таких, что конечна величина

$$\|u\|_{W_2^n(S_\theta,A^n)} \equiv \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \left\{ \int_0^{+\infty} \left(\left\| \frac{d^n}{d\tau^n} u(te^{i\varphi}) \right\|^2 + \|A^n u(te^{i\varphi})\|^2 \right) dt \right\}^{1/2}.$$

В следующей лемме установлен аналог хорошо известной теоремы о промежуточных производных (см. [3, с. 29]).

Лемма. *Пусть функция $u(\tau)$ принадлежит классу $W_2^n(S_\theta, A^n)$. Тогда функции $A^{n-j} \times \frac{d^j}{d\tau^j} u(\tau)$, $j = \overline{0,n}$, принадлежат классу $\Re_2(S_\theta, H)$ и справедливы неравенства*

$$\|A^{n-j} u^{(j)}\|_{\Re_2(S_\theta,H)} \leqslant K_j \|u\|^*_{W_2^n(S_\theta,A^n)}$$

с положительными постоянными K_j, $j = \overline{0,n}$.

Предложение 4. *У функции $u(\tau) \in W_2^n(S_\theta, A^n)$ существуют граничные значения $u_{\pm\theta}(t) = u(te^{\pm i\theta})$ из класса $W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ такие, что*

$$\lim_{\varphi\to\pm\theta} \int_0^{+\infty} \left(\left\| \frac{d^n}{d\tau^n} u(te^{i\varphi}) - \frac{d^n}{d\tau^n} u(te^{\pm i\theta}) \right\|^2 + \|A^n(u(te^{i\varphi}) - u(te^{\pm i\theta}))\|^2 \right) dt = 0.$$

Теорема 3. 1^0. *Класс функций $W_2^n(S_\theta, A^n)$ с нормой*

$$\|u\|^*_{W_2^n(S_\theta,A^n)} = \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \left\{ \int_0^{+\infty} \left(\left\| \frac{d^n}{d\tau^n} u(te^{i\varphi}) \right\|^2 + \|A^n u(te^{i\varphi})\|^2 \right) dt \right\}^{1/2}$$

является банаховым пространством.

2^0. *Класс функций $W_2^n(S_\theta, A^n)$ со скалярным произведением*

$$\langle u, v\rangle_{W_2^n(S_\theta,A^n)} = \int_0^{+\infty} \left\{ \left(\frac{d^n}{d\tau^n} u(te^{-i\theta}), \frac{d^n}{d\tau^n} v(te^{-i\theta}) \right) + (A^n u(te^{-i\theta}), A^n v(te^{-i\theta})) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{d^n}{d\tau^n} u(te^{i\theta}), \frac{d^n}{d\tau^n} v(te^{i\theta}) \right) + (A^n u(te^{i\theta}), A^n v(te^{i\theta})) \right\} dt$$

является гильбертовым пространством.

3^0. *Для произвольной функции $u(\tau) \in W_2^n(S_\theta, A^n)$ справедливы неравенства*

$$\|u\|^*_{W_2^n(S_\theta,A^n)} \leqslant \sqrt{2}\|u\|_{W_2^n(S_\theta,A^n)} \leqslant 2\|u\|^*_{W_2^n(S_\theta,A^n)},$$

где $\|u\|_{W_2^n(S_\theta,A^n)} = \langle u, u\rangle^{1/2}_{W_2^n(S_\theta,A^n)}$.

Приведём вариант теоремы о следах для пространства $W_2^n(S_\theta, A^n)$.

Теорема 4. *Для функции $u(\tau) \in W_2^n(S_\theta, A^n)$ существуют пределы*

$$\lim_{\substack{\tau\in S_\theta,\\ |\tau|\to 0}} A^{n-p-1/2} \frac{d^p}{d\tau^p} u(\tau), \quad p = \overline{0, n-1},$$

в смысле нормы пространства H равномерно относительно $\arg\tau$, $|\arg\tau| < \theta$.

Отметим, что теоремы 3 и 4, а также предложение 4 приведены в статье [4]; полные подробные доказательства сформулированных утверждений о пространствах $\Re_2(S_\theta, H)$ и $W_2^n(S_\theta, A^n)$ приведены в депонированной работе [5].

2. Доказательства некоторых сформулированных утверждений о свойствах функциональных пространств $\Re_2(S_\theta, H)$ и $W_2^n(S_\theta, A^n)$.

Доказательство предложения 1. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис сепарабельного гильбертова пространства H. Для функции $f(\tau) \in \Re_{2,\theta}(\mathbb{R}_+, H)$ положим $f_j(\tau) = (f(\tau), e_j)$, $j \in \mathbb{N}$, $\tau \in S_\theta$. Тогда справедливы представление

$$f(\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(\tau) e_j \tag{8}$$

и следующая цепочка равенств:

$$\|f(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = \int_0^{+\infty} \|f(te^{i\varphi})\|^2 dt = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} |f_j(te^{i\varphi})|^2 dt = \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}.$$

Согласно лемме A [1, с. 871] числовая функция $f_j(\tau)$, $j \in \mathbb{N}$, имеет граничные значения $f_j(te^{\pm i\theta}) \in L_2(\mathbb{R}_+)$, т.е. существуют такие функции $f_j(te^{\pm i\theta})$, для которых справедливо соотношение

$$\lim_{\varphi \to \pm\theta} \int_0^{+\infty} |f_j(te^{i\varphi}) - f_j(te^{\pm i\theta})|^2 dt = 0. \tag{9}$$

Положим $f(te^{\pm i\theta}) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(te^{\pm i\theta}) e_j$ и покажем, что $f(te^{\pm i\theta}) \in L_2(\mathbb{R}_+, H)$, т.е. что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j(te^{\pm i\theta})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} < +\infty. \tag{10}$$

Доказательство проведём для $+\theta$; рассуждения для $-\theta$ совершенно аналогичны. Обозначим через M величину

$$M := \sup_{|\varphi|<\theta} \|f(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = \sup_{|\varphi|<\theta} \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}.$$

Предположим противное. Тогда найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\sum_{j=1}^{N} \|f_j(te^{i\theta})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} > 4M. \tag{11}$$

В силу соотношения (9) для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\varphi_0 < \theta$, что при всех φ, удовлетворяющих неравенствам $\varphi_0 < \varphi < \theta$, выполняются оценки

$$\sum_{j=1}^{N} \|f_j(te^{i\theta})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} < 2\sum_{j=1}^{N} \|f_j(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} + \varepsilon \leqslant 2\sup_{|\varphi|<\theta} \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leqslant 2M + \varepsilon.$$

Но тогда получаем противоречие с неравенством (11).

Таким образом, неравенство (10) установлено. Согласно лемме 1.1 [1, с. 873] для числовых функций $f_j(\tau)$ справедливо неравенство

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \|f_j(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leqslant 2(\|f_j(te^{-i\theta})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} + \|f_j(te^{i\theta})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}),$$

откуда вытекает, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \|f_j(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leqslant 2\sum_{j=1}^{\infty} (\|f_j(te^{-i\theta})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} + \|f_j(te^{i\theta})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}). \tag{12}$$

Установим теперь справедливость соотношения (1). Рассмотрим случай $\varphi \to +\theta$; случай $\varphi \to -\theta$ рассматривается аналогично.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По ε выберем такое $N \in \mathbb{N}$, чтобы выполнялись неравенства

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \|f_j(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} < \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{и} \quad \sum_{j=N+1}^{\infty} \|f_j(te^{i\theta})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{13}$$

В силу (10), (12) такой выбор N возможен. По N выберем такое $\delta > 0$, чтобы при любом φ, для которого $\theta - \varphi < \delta$, выполнялись неравенства

$$\|f_j(te^{i\varphi}) - f_j(te^{i\theta})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} < \frac{\varepsilon}{2N}, \quad j = \overline{1, N}. \tag{14}$$

Существование такого δ вытекает из соотношения (9). Тогда будем иметь

$$\sum_{j=1}^{N} \|f_j(te^{i\varphi}) - f_j(te^{i\theta})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \theta - \varphi < \delta. \tag{15}$$

Наконец, из неравенств (13), (15) следует, что

$$\|f(te^{i\varphi}) - f(te^{i\theta})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \sum_{j=1}^{N} \|f_j(te^{i\varphi}) - f_j(te^{i\theta})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} +$$

$$+ 2\sum_{j=N+1}^{\infty} \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \|f_j(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} + 2\sum_{j=N+1}^{\infty} \|f_j(te^{i\theta})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} < \varepsilon.$$

Таким образом, соотношение (1) установлено. Предложение 1 доказано.

Доказательство предложения 2. Сходимость интегралов в правой части формул (2) при $\tau \in S_\theta$ вытекает из оценок

$$\left\| \int_0^{+\infty} \frac{f(\varsigma e^{\pm i\theta})}{\varsigma e^{\pm i\theta} - \tau} e^{\pm i\theta}\, d\varsigma \right\| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\|f(\varsigma e^{\pm i\theta})\|}{|\varsigma e^{\pm i\theta} - \tau|}\, d\varsigma \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^{+\infty} \|f(\varsigma e^{\pm i\theta})\|^2\, d\varsigma \right)^{1/2} \left(\int_0^{+\infty} |\varsigma e^{\pm i\theta} - \tau|^{-2}\, d\varsigma \right)^{1/2} < \infty.$$

Чтобы убедиться в справедливости равенства

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{f(\varsigma e^{-i\theta})}{\varsigma e^{-i\theta} - \tau} e^{-i\theta}\, d\varsigma - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{f(\varsigma e^{i\theta})}{\varsigma e^{i\theta} - \tau} e^{i\theta}\, d\varsigma,$$

достаточно проверить его покоординатно:

$$(f(\tau), e_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{(f(\varsigma e^{-i\theta}), e_j)}{\varsigma e^{-i\theta} - \tau} e^{-i\theta}\, d\varsigma - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{(f(\varsigma e^{i\theta}), e_j)}{\varsigma e^{i\theta} - \tau} e^{i\theta}\, d\varsigma.$$

Для числовых функций $(f(\tau), e_j)$ справедлива интегральная формула Коши [2, теорема 7.5, с. 414], откуда и вытекает интегральная формула Коши для $f(\tau) \in \Re_{2,\theta}(\mathbb{R}_+, H)$.

Доказательство предложения 3. Для числовых функций известен следующий аналог теоремы М. Рисса об интегралах типа Коши [6, с. 471, теорема 2.2].

Теорема. *Пусть функции $h_{-\theta}(\varsigma)$ и $h_{+\theta}(\varsigma)$ принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R}_+)$. Тогда для функции $h(\tau)$, представимой в виде*

$$h(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty \frac{h_{-_\theta}(\varsigma)}{\varsigma e^{-i\theta} - \tau} e^{-i\theta}\, d\varsigma - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty \frac{h_{+\theta}(\varsigma)}{\varsigma e^{i\theta} - \tau} e^{i\theta}\, d\varsigma,$$

справедливо неравенство

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int\limits_0^\infty |h(te^{i\varphi})|^2\, dt \leqslant \mathrm{const}\left\{\int\limits_0^\infty |h_{-\theta}(\varsigma)|^2\, d\varsigma + \int\limits_0^\infty |h_{+\theta}(\varsigma)|^2\, d\varsigma\right\},$$

где постоянная const *не зависит от функций $h_{-\theta}(\varsigma)$, $h_{+\theta}(\varsigma)$. Кроме того, функция $h(\tau)$ голоморфна в секторе S_θ.*

Используя разложение функции $f(\tau)$ по ортонормированному базису $\{e_j\}_{j=1}^\infty$:

$$f(\tau) = \sum_{j=1}^\infty (f(\tau), e_j) e_j,$$

а также то, что

$$\|f(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = \int\limits_0^\infty \|f(te^{i\varphi})\|^2\, dt = \sum_{j=1}^\infty \|(f(te^{i\varphi}), e_j)\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)},$$

получаем векторный аналог приведённого утверждения. В самом деле, для любого $\varphi \in (-\theta, \theta)$ имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\|f(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = \sum_{j=1}^\infty \|(f(te^{i\varphi}), e_j)\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{j=1}^\infty (\|(f_{-\theta}(t), e_j)\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} + \|(f_{+\theta}(t), e_j)\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}) = C(\|f_{-\theta}(t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} + \|f_{+\theta}(t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)}),$$

где C – некоторая постоянная, откуда вытекает, что

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \|f(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant C\int\limits_0^\infty (\|f_{-\theta}(t)\|^2 + \|f_{+\theta}(t)\|^2)\, dt.$$

Голоморфность функции $f(\tau)$ при $\tau \in S_\theta$ очевидным образом следует из свойств интегралов типа Коши.

Доказательство теоремы 1. Вначале докажем п. 3^0. Установим оценки (4). Оценка $\|f\|^*_{2,\theta} \leqslant \sqrt{2}\|f\|_{2,\theta}$ вытекает из более сильного неравенства (12).

Докажем правую оценку в (4). Для этого воспользуемся соотношением (1) из предложения 1, согласно которому для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при всех φ, для которых $\theta - \varphi < \delta$, выполняется неравенство $\|f(te^{i\varphi}) - f(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} < \varepsilon$. Отсюда из неравенства

$$|\|f(te^{i\varphi})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} - \|f(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)}| \leqslant \|f(te^{i\varphi}) - f(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)}$$

следует, в частности, что $\|f(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \|f(te^{i\varphi})\| + \varepsilon$ и тем более

$$\|f(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \|f(te^{i\varphi})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} + \varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности ε вытекает, что

$$\|f(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \|f(te^{i\varphi})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = \|f(\tau)\|^*_{2,\theta}.$$

Дословно повторяя проведённые рассуждения для $-\theta$, получаем

$$\|f(te^{-i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \|f(\tau)\|^*_{2,\theta}.$$

Из последних двух неравенств и следует, что $\|f(\tau)\|_{2,\theta} \leqslant \sqrt{2}\|f(\tau)\|^*_{2,\theta}$.

1^0. В доказательстве нуждается лишь утверждение о полноте, так как проверка того, что числовая функция $\|\cdot\|^*_{2,\theta}$ обладает свойствами нормы, вытекает из соответствующих свойств нормы $\|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)}$.

Итак, пусть имеется фундаментальная по норме $\|\cdot\|^*_{2,\theta}$ последовательность $\{f_k(\tau)\}_{k=1}^{\infty}$ функций, т.е. $\|f_k(\tau) - f_l(\tau)\|^*_{2,\theta} \to 0$ при $k,l \to \infty$. Покажем, что существует функция $f(\tau) \in \in \mathfrak{R}_{2,\theta}(\mathbb{R}_+,H)$ такая, что $\|f_k(\tau) - f(\tau)\|^*_{2,\theta} \to 0$ при $k \to \infty$.

Согласно предложению 1 каждая из функций $f_k(\tau)$ имеет граничные значения $f_k(te^{\pm i\theta}) \in \in L_2(\mathbb{R}_+,H)$, а значит, в соответствии с неравенством (4) из сходимости последовательности функций $\{f_k(\tau)\}_{k=1}^{\infty}$ по норме $\|\cdot\|^*_{2,\theta}$ вытекает сходимость последовательностей $\{f_k(te^{\pm i\theta})\}_{k=1}^{\infty}$ по норме пространства $L_2(\mathbb{R}_+,H)$. Но так как пространство $L_2(\mathbb{R}_+,H)$ является полным, то существуют функции $f_{\pm\theta}(t) \in L_2(\mathbb{R}_+,H)$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k(te^{\pm i\theta}) - f_{\pm\theta}(t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = 0.$$

По функциям $f_{\pm\theta}(t)$ образуем интеграл типа Коши

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} e^{-i\theta}\frac{f_{-\theta}(t)}{te^{-i\theta}-\tau}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} e^{i\theta}\frac{f_{\theta}(t)}{te^{i\theta}-\tau}\,dt.$$

Тогда в соответствии с предложением 3 функция $f(\tau)$ принадлежит классу $\mathfrak{R}_2(S_\theta,H)$, поэтому последовательность $\{f_k(\tau)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к функции $f(\tau)$ по норме $\|\cdot\|^*_{2,\theta}$.

2^0. Полнота пространства $\mathfrak{R}_2(S_\theta,H)$ с нормой $\|\cdot\|_{2,\theta}$, порождаемой скалярным произведением (3), вытекает из неравенства (4) и утверждения п. 1^0. Проверка остальных аксиом гильбертова пространства со скалярным произведением (4) проводится непосредственно. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. 1^0. Пусть $F(\lambda) \in \mathfrak{R}_2(S_\theta,H)$. Положим $F_j(\lambda) = (F(\lambda),e_j)$. Тогда $F_j(\lambda) \in \mathfrak{R}_2(S_{\theta+\pi/2})$ и, согласно [1, теорема 1], существует скалярная функция $f_j(\tau) \in \in \mathfrak{R}_2(S_\theta)$ такая, что

$$F_j(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\varphi}\int_o^{\infty} e^{-\lambda te^{-i\varphi}} f_j(te^{-i\varphi})\,dt.$$

Причём функция $f_j(\tau)$ определяется единственным образом по функции $F_j(\lambda)$ и, согласно теореме Пэли–Винера (см. [1]), имеют место неравенства

$$|F_j(\lambda)|_{2,\theta+\pi/2} \leqslant 2|f_j(\tau)|_{2,\theta} \leqslant 2\sqrt{2}|F_j(\lambda)|_{2,\theta+\pi/2}. \tag{16}$$

Здесь и в дальнейшем приняты обозначения

$$|f|^2_{2,\kappa} := \int\limits_0^{+\infty} |f(te^{-i\kappa})|^2\,dt + \int\limits_0^{+\infty} |f(te^{+i\kappa})|^2\,dt,$$

$$|f|^*_{2,\kappa} := \sup_{\varphi:|\varphi|<\kappa} \left(\int\limits_0^{+\infty} |f(te^{i\varphi})|^2\,dt \right)^{1/2}, \quad 0 \leqslant \kappa < \pi.$$

По набору скалярных функций $\{f_j(\tau)\}_{j=1}^{\infty}$ определим функцию $f(\tau)$ равенством (8). Покажем, что $f(\tau) \in \Re_2(S_\theta, H)$. Так как для числовых функций $f_j(\tau)$ справедлива оценка

$$\frac{1}{2}|f_j(\tau)|^2_{2,\theta} \leqslant \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int\limits_0^{+\infty} |f_j(te^{i\varphi})|^2\,dt \leqslant 2|f_j(\tau)|^2_{2,\theta}, \tag{17}$$

то в силу оценок (16), (17) получаем следующую цепочку неравенств:

$$\|F(\lambda)\|^2_{2,\theta+\pi/2} = \sum_{j=1}^{\infty} |F_j(\lambda)|^2_{2,\theta+\pi/2} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(\tau)|^2_{2,\theta} \geqslant \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int\limits_0^{+\infty} |f_j(te^{i\varphi})|^2\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4} \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int\limits_0^{+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(te^{i\varphi})|^2\,dt = \frac{1}{4} \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int\limits_0^{+\infty} \|f(te^{i\varphi})\|^2\,dt.$$

Искомое утверждение вытекает теперь из того, что слабая голоморфность в банаховых пространствах влечёт за собой сильную голоморфность (см. [7, теорема 3.10.1]), и, значит, из голоморфности скалярных функций $f_j(\tau)$ следует голоморфность вектор-функции $f(\tau)$.

2^0. Так как интеграл в правой части формулы (6) существует при всех φ таких, что $|\varphi| < \theta$, то достаточно установить равенство (6) покоординатно. Но покоординатное равенство справедливо в силу [1, теорема 1] (см. п. 2^0).

3^0. Неравенство (7) вытекает из того, что для числовых функций $F_j(\lambda)$ и $f_j(\tau)$, согласно [1, теорема 1] (см. п. 3^0), справедливы оценки $|F_j(\lambda)|^2_{2,\theta+\pi/2} \leqslant 4|f_j(\tau)|^2_{2,\theta} \leqslant 8|F_j(\lambda)|^2_{2,\theta+\pi/2}$, и, кроме того, имеют место очевидные равенства

$$\|F(\lambda)\|^2_{2,\theta+\pi/2} = \sum_{j=1}^{\infty} |F_j(\lambda)|^2_{2,\theta+\pi/2}, \quad \|f(\tau)\|^2_{2,\theta} = \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(\tau)|^2_{2,\theta}.$$

Теорема 2 доказана.

Ограничения по объёму статьи не позволяют нам привести полные доказательства леммы, предложения 4, теорем 3 и 4. Как уже отмечалось, полные подробные доказательства указанных утверждений приведены в работе [5]. Ограничимся здесь только указанием схем доказательства некоторых из указанных утверждений.

Доказательство леммы существенно опирается на теорему о промежуточных производных для пространства $W_2^n(\mathbb{R}_+, A)$ (см. [3, с. 29]), из которой вытекают неравенства

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \|A^{n-j}u^{(j)}(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int\limits_0^{+\infty} \|A^{n-j}\frac{\partial^j}{\partial t^j}u(te^{i\varphi})\|^2\,dt \leqslant$$

$$\leqslant K_j^2 \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int\limits_0^{+\infty} \left(\left\| \frac{\partial^n}{\partial t^n}u(te^{i\varphi}) \right\|^2 + \|A^n u(te^{i\varphi})\|^2 \right) dt.$$

В свою очередь доказательство предложения 4 опирается на лемму, а также на предложение применительно к функциям

$$A^{n-j}\frac{d^j u}{d\tau^j}(\tau) \in \mathfrak{R}_2(S_\theta, H), \quad j = \overline{0,n}.$$

Доказательство теоремы 3 проводится аналогично доказательству теоремы 1. Доказательство теоремы 4 опирается на теорему о следах (см. [3, теорема 3.1]), подробнее см. [5].

3. Начальная задача для интегро-дифференциального уравнения. Постановка задачи и формулировка основного результата. Рассмотрим для интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{du}{d\tau}(\tau) + Au(\tau) - \int\limits_0^\tau K(\tau - s)Au(s)\,ds = f(\tau), \quad \tau \in S_\theta, \tag{18}$$

начальную задачу

$$u(+0) = \varphi_0. \tag{19}$$

Здесь, как и выше, A – самосопряжённый положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий компактный обратный. Ядро $K(\tau)$ принадлежит пространству Харди $\mathfrak{R}_1(S_\theta)$, правая часть $f(\tau)$ – пространству $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$, а вектор φ_0 – пространству $H_{1/2}$.

Напомним, что пространства Харди $\mathfrak{R}_p(S_\theta)$, $1 \leqslant p < \infty$, состоят из функций, голоморфных в угловой области S_θ и удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^p\,dr\right\}^{1/p} < +\infty.$$

Подробнее см., например, [6, с. 463].

Отметим, что в интегро-дифференциальном уравнении (18) в интегральном слагаемом интегрирование проводится по отрезку, соединяющему начало координат и точку $\tau \in S_\theta$. Однако в силу регулярности функций $K(\tau)$ и $u(\tau)$ интеграл можно брать по любому спрямляемому кусочно-гладкому контуру, соединяющему эти точки.

Основным результатом второй части работы является теорема 5 о разрешимости задачи (18), (19) в пространстве $W_2^1(S_\theta, A)$. Для упрощения в дальнейшем записи удобно обозначить $c(\alpha, r, \theta) := (\alpha^2 + r^2)^{-1/2}(1 - \sin\theta)^{-1/2}$, где $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $r > 0$, $\theta \in [0, \pi/2)$.

Теорема 5. *Пусть в задаче (18), (19) ядро $K(\tau)$ принадлежит пространству Харди $\mathfrak{R}_1(S_\theta)$, вектор-функция $f(\tau)$ – пространству $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$, а вектор φ_0 – пространству $H_{1/2}$ и для преобразования Лапласа $\hat{K}(\lambda)$ ядра $K(\tau)$ выполняется неравенство*

$$\sup_{\varphi\in(-\frac{\pi}{2}-\theta,\frac{\pi}{2}+\theta)}|\hat{K}(re^{i\varphi})|\sup_{\alpha\geqslant\alpha_0} ac(\alpha, r, \theta) < 1, \tag{20}$$

где $a \in (\alpha_0, +\infty)$, $\alpha_0 = \inf\limits_{\|x\|=1, x\in\mathrm{Dom}\,(A)}(Ax, x)$. Тогда существует единственное решение $u(\tau) \in W_2^1(S_\theta, A)$ этой задачи, и это решение удовлетворяет оценке

$$\|u(\tau)\|_{W_2^1(S_\theta,A)} \leqslant d(\|f(\tau)\|^2_{\mathfrak{R}_2(S_\theta,H)} + \|\varphi_0\|^2_{1/2})^{1/2} \tag{21}$$

с постоянной d, не зависящей от вектор-функции $f(\tau)$ и вектора φ_0.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\varphi_0 = 0$. Тогда преобразование Лапласа $\hat{u}(\lambda)$ решения $u(\tau)$ уравнения (18) имеет вид

$$\hat{u}(\lambda) = L^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda), \tag{22}$$

при этом оператор-функция $L(\lambda)$, являющаяся символом уравнения (18), представима в виде $L(\lambda) = \lambda I + A - \hat{K}(\lambda)A$. Для доказательства этой теоремы достаточно, как следует из теоремы Пэли–Винера, показать, что вектор-функции $\lambda\hat{u}(\lambda)$ и $A\hat{u}(\lambda)$ принадлежат пространству $\Re_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$, а также получить их оценки.

С этой целью покажем, что оператор-функция $L^{-1}(\lambda)$ в области $G_{\theta+\pi/2} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| < \theta + \pi/2\}$ является голоморфной и допускает оценки

$$\|AL^{-1}(\lambda)\| < +\infty, \quad \|\lambda L^{-1}(\lambda)\| < +\infty. \tag{23}$$

Запишем оператор-функцию $L^{-1}(\lambda)$ следующим образом:

$$L^{-1}(\lambda) = (\lambda I + A)^{-1}(I - \hat{K}(\lambda)A(\lambda I + A)^{-1})^{-1}, \tag{24}$$

где I – тождественный в H оператор. После перехода к полярным координатам $\lambda = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ получаем неравенство

$$a/|\lambda + a| \leqslant a(r^2 - 2ar\sin\theta + a^2)^{-1/2} \leqslant ac(a, r, \theta), \quad \lambda \in G_{\theta+\pi/2}, \quad a \in (\alpha_0, +\infty).$$

Отсюда и из спектральной теоремы (см. [8, с. 446]) вытекает, что справедлива оценка

$$\|A(\lambda I + A)^{-1}\| \leqslant \sup_{\alpha \geqslant \alpha_0} ac(a, r, \theta), \quad \lambda \in G_{\theta+\pi/2}, \quad a \in (\alpha_0, +\infty), \tag{25}$$

из которой и неравенств (20) и (25) следует, что $\|\hat{K}(\lambda)A(\lambda I + A)^{-1}\| < 1$, $\lambda \in G_{\theta+\pi/2}$. Поэтому в области $G_{\theta+\pi/2}$ существует и аналитична оператор-функция $(I - \hat{K}(\lambda)A(A + \lambda I)^{-1})^{-1}$, являющаяся ограниченной в этой области, т.е.

$$\|(I - \hat{K}(\lambda)A(A + \lambda I)^{-1})^{-1}\| \leqslant \text{const}, \quad \lambda \in G_{\theta+\pi/2}. \tag{26}$$

Переходя к полярным координатам $\lambda = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$, в силу легко проверяемого неравенства $|\lambda|/|a + \lambda| \leqslant c(a, r, \theta)$, $\lambda \in G_{\theta+\pi/2}$, и спектральной теоремы (см. [8, с. 446]) приходим к неравенству

$$\|\lambda(\lambda I + A)^{-1}\| \leqslant \sup_{\alpha \geqslant \alpha_0} rc(\alpha, r, \theta), \quad \lambda \in G_{\theta+\pi/2}, \tag{27}$$

На основании неравенств (25)–(27) и представления (24) получаем, что справедливы неравенства (23). Вследствие того, что умножение функции из пространства Харди на голоморфную и ограниченную оператор-функцию не выводит её из этого пространства, заключаем, что функции $\lambda\hat{u}(\lambda)$ и $A\hat{u}(\lambda)$ принадлежат пространству $\Re_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$. Отсюда и из теоремы 2 (Пэли–Винера) вытекает, что функции $\dfrac{du}{d\tau}(\tau)$ и $Au(\tau)$ принадлежат пространству $\Re_2(S_\theta, H)$.

Более того, согласно представлениям (22), (24), неравенствам (23), (25)–(27) справедливы следующие оценки:

$$\|\lambda\hat{u}(\lambda)\|_{\Re_2(S_{\theta+\pi/2},H)} \leqslant d_1\|\hat{f}(\lambda)\|_{\Re_2(S_{\theta+\pi/2},H)} \quad \text{и} \quad \|A\hat{u}(\lambda)\|_{\Re_2(S_{\theta+\pi/2},H)} \leqslant d_2\|\hat{f}(\lambda)\|_{\Re_2(S_{\theta+\pi/2},H)},$$

в силу которых и теоремы 2 получаем, что

$$\left\|\frac{du}{d\tau}(\tau)\right\|_{\Re_2(S_\theta,H)} \leqslant d_3\|f(\tau)\|_{\Re_2(S_\theta,H)} \quad \text{и} \quad \|Au(\tau)\|_{\Re_2(S_\theta,H)} \leqslant d_4\|f(\tau)\|_{\Re_2(S_\theta,H)}.$$

Откуда и вытекает искомая оценка

$$\|u(\tau)\|_{W_2^1(S_\theta,A)} \leqslant d_0\|f(\tau)\|_{\Re_2(S_\theta,H)}. \tag{28}$$

Перейдём к случаю ненулевого вектора φ_0 в начальном условии (19). Будем искать решение задачи (18), (19) в виде суммы

$$u(\tau) = \exp(-A\tau)\varphi_0 + v(\tau),$$

где $v(\tau)$ – решение задачи вида (18), (19), для которого $v(+0) = 0$. Таким образом, для функции $v(\tau)$ получаем следующую задачу:

$$\frac{dv}{d\tau}(\tau) + Av(\tau) - \int\limits_0^\tau K(\tau-\zeta)v(\zeta)\,d\zeta = f_1(\tau), \tag{29}$$

$$v(+0) = 0, \tag{30}$$

где

$$f_1(\tau) = f(\tau) + \int\limits_0^\tau K(\tau-\zeta)A\exp(-\zeta A)\varphi_0\,d\zeta.$$

Для доказательства разрешимости задачи (29), (30) достаточно установить, что функция

$$h(\tau) = \int\limits_0^\tau K(\tau-\zeta)A\exp(-\zeta A)\varphi_0\,d\zeta$$

принадлежит пространству $\Re_2(S_\theta, H)$ и найти её оценку. В силу теоремы 2 (Пэли–Винера) включение $h(\tau) \in \Re_2(S_\theta, H)$ равносильно тому, что преобразование Лапласа $\hat{h}(\lambda)$ функции $h(\tau)$ принадлежит пространству $\Re_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$. Очевидно, что $\hat{h}(\lambda) = \hat{K}(\lambda)A(A-\lambda I)^{-1}\varphi_0$.

Покажем, что функция $\hat{h}(\lambda)$ принадлежит пространству $\Re_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$ и установим её оценку. Разложим функцию $\hat{h}(\lambda)$ по ортонормированному базису $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ из собственных векторов оператора A. Обозначим через a_j собственное значение, отвечающее вектору e_j, т.е. $Ae_j = a_je_j$ (в силу сделанных предположений об операторе A числа a_j вещественны и положительны; без нарушения общности считаем их упорядоченными по неубыванию с учётом кратности: $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_j \leqslant a_{j+1} \leqslant \ldots$). Имеем

$$\hat{h}(\lambda) = \sum_{j=1}^\infty h_j(\lambda)e_j = \sum_{j=1}^\infty \hat{K}(\lambda)a_j(a_j+\lambda)^{-1}(\varphi_0, e_j)e_j = \sum_{j=1}^\infty \hat{K}(\lambda)a_j^{1/2}(a_j+\lambda)^{-1}(a_j^{1/2}\varphi_0, e_j)e_j.$$

Заметим, что

$$\|\hat{h}(\lambda)\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\hat{K}(\lambda)|^2 \frac{a_n}{|a_n+\lambda|^2}|(a_n^{1/2}\varphi_0, e_n)|^2.$$

Справедливо равенство

$$\sup_{|\varphi|<\theta+\pi/2} \int\limits_0^\infty \|\hat{h}(re^{i\varphi})\|^2\,dr = \sup_{|\varphi|<\theta+\pi/2} \int\limits_0^\infty \sum_{n=1}^\infty |\hat{K}(re^{i\varphi})|^2 \frac{a_n}{|a_n+re^{i\varphi}|^2}|(a_n^{1/2}\varphi_0, e_n)|^2\,dr. \tag{31}$$

Поменяем в правой части равенства (31) порядок интегрирования и суммирования и оценим следующий интеграл:

$$\int\limits_0^\infty |\hat{K}(re^{i\varphi})|^2 \frac{a_n}{a_n^2+r^2+2ra_n\cos\varphi}\,dr \leqslant \int\limits_0^\infty |\hat{K}(re^{i\varphi})|^2 \frac{a_n}{a_n^2+r^2-2a_nr\sin\theta}\,dr \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty |\hat{K}(re^{i\varphi})|^2 \frac{a_n}{(a_n^2+r^2)(1-\sin\theta)}\,dr = \frac{1}{(1-\sin\theta)} \int\limits_0^\infty |K(re^{i\varphi})|^2 \frac{dr}{a_n.(1+r^2/a_n^2)}. \tag{32}$$

Сделаем замену переменных $\zeta = r/a_n,\ d\zeta = dr/a_n$. Тогда последний интеграл в соотношениях (32) примет вид

$$\frac{1}{(1-\sin\theta)} \int\limits_0^\infty |\hat{K}(a_n\zeta e^{i\varphi})|^2 \frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)}.$$

Таким образом, получаем оценку

$$\int\limits_0^{+\infty} |\hat{K}(re^{i\varphi})|^2 \frac{a_n}{a_n^2+r^2+2a_nr\cos\varphi}\,dr \leqslant \frac{\pi}{2} \sup_{\substack{\varphi:|\varphi|<\theta+\pi/2\\ \zeta\in\mathbb{R}_+}} |\hat{K}(a_n\zeta e^{i\varphi})|^2 \frac{1}{1-\sin\theta} =: d_1.$$

Отсюда вытекает, что выражение в правой части равенства (31) допускает оценку

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta+\pi/2} \sum_{n=1}^\infty \left(\int\limits_0^{+\infty} |\hat{K}(re^{i\varphi})|^2 \frac{a_n}{|a_n+re^{i\varphi}|^2}\,dr \right) |(a_n^{1/2}\varphi_0, e_n)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant d_1 \sum_{n=1}^\infty |(a_n^{1/2}\varphi_0, e_n)|^2 = d_1 \|A^{1/2}\varphi_0\|^2,$$

из которой и равенства (31) следует, что

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta+\pi/2} \int\limits_0^{+\infty} \|\hat{h}(re^{i\varphi})\|^2\,dr \leqslant d_1\|A^{1/2}\varphi_0\|^2. \tag{33}$$

Объединяя неравенства (28) и (33), приходим к доказываемому неравенству (21) с постоянной $d = d_0\max(1, d_1)$. Теорема 5 доказана.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 5 и ядро $K(\tau)$ тождественно нулевое. Тогда существует единственное решение $u(\tau) \in W_2^1(S_\theta, A)$ задачи (18), (19), и это решение удовлетворяет неравенству (21).*

Замечание. Хорошо известно, что решение начально-краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности при естественных предположениях о начальных данных допускает аналитическое продолжение по временно́й переменной t в угловую область комплексной плоскости. С этим тесно связана теория аналитических полугрупп операторов (см., например, монографии [7–10]).

В утверждении следствия из теоремы 5 установлена не только аналитичность решения абстрактного параболического уравнения, но и получена оценка (21) в гильбертовых пространствах $W_2^1(S_\theta, A),\ \Re_2(S_\theta, H)$, что является более глубоким результатом, чем результат об аналитичности (голоморфности) решения.

Из теоремы 5 также вытекает соответствующее утверждение при $\theta = 0$, т.е. для случая, когда задача (18), (19) рассматривается на полуоси $\mathbb{R}_+$, а не в угловой области S_θ. При этом пространство $\Re_2(S_\theta, H)$ переходит в пространство $L_2(\mathbb{R}_+, H)$, а пространство $W_2^1(S_\theta, A)$ – в пространство Соболева $W_2^1(\mathbb{R}_+, A)$.

Таким образом, задача принимает следующий вид:

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) - \int\limits_0^t K(t-s)Au(s)\,ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{34}$$

$$u(+0) = \varphi_0. \tag{35}$$

Теорема 6. *Пусть в задаче (34), (35) ядро $K(t)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}_+)$, вектор-функция $f(t)$ – пространству $L_2(\mathbb{R}_+, H)$, а вектор φ_0 – пространству $H_{1/2}$ и для преобразования Лапласа $\hat{K}(\lambda)$ ядра $K(\tau)$ выполняется неравенство*

$$|\hat{K}(re^{\pm i\pi/2})| \sup_{\alpha \geqslant \alpha_0} a(a^2 + r^2)^{-1/2} < 1,$$

где $a \in (\alpha_0, +\infty)$, $\alpha_0 = \inf\limits_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \mathrm{Dom}\,(A)}} (Ax, x)$, $r > 0$. Тогда эта задача имеет единственное решение $u(t) \in W_2^1(\mathbb{R}_+, A)$ и это решение удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{W_2^1(\mathbb{R}_+, A)} \leqslant d(\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+, H)} + \|\varphi_0\|^2_{1/2})^{1/2}$$

с постоянной d, не зависящей от вектор-функции $f(t)$ и вектора φ_0.

Отметим, что теорема 6 тесно связана с теоремой 2.1 из работы [11], а также теоремой 3.2.3 из монографии [12]. В указанных теоремах установлена корректная разрешимость начальной задачи для интегро-дифференциального уравнения, близкого к уравнению (34), в весовых пространствах Соболева $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A)$, снабжённых нормой

$$\|u\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A)} \equiv \left(\int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t} (\|u^{(1)}(t)\|^2 + \|Au(t)\|^2)\, dt \right)^{1/2}.$$

Таким образом, теорема 6 относится к случаю $\gamma = 0$. При этом в упомянутых теоремах из [11, 12] ядро интегрального оператора $K(t)$ допускает представление

$$K(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ts}}{s}\, d\mu(s), \tag{36}$$

где $d\mu$ – положительная мера, которой соответствует возрастающая, непрерывная справа функция распределения μ, а его преобразование Лапласа имеет вид

$$\hat{K}(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(s)}{s(s+\lambda)}. \tag{37}$$

Из представления (37) вытекает, что при некоторых предположениях относительно меры $d\mu(s)$ функция $\hat{K}(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение из правой полуплоскости в угловую область $\{\lambda : |\arg \lambda| < \theta + \pi/2\}$, $0 < \theta < \pi/2$. Вопрос о том, когда функция $\hat{K}(\lambda)$, заданная равенством (37), удовлетворяет неравенству (20), будет рассмотрен в другой работе авторов. Отметим также, что весьма популярные в механике и, в частности, в теории вязкоупругости, ядра Работного допускают интегральное представление (36) с помощью интегралов Стилтьеса (подробнее см. [13, 14]).

Утверждения п. 2 работы, а также теоремы 1 и 2 получены при финансовой поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Математические методы анализа сложных систем”, теоремы 5 и 6 – при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-01-00288А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джрбашян М.М., Мартиросян В.М.* Теоремы Винера–Пэли и Мюнца–Саса // Изв. АН СССР. 1977. Сер. Мат. Т. 41. № 4. С. 868–894.
2. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представление функций в комплексной области. М., 1966.
3. *Лионс Ж.Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.

4. *Власов В.В.* Кратная минимальность части системы корневых векторов пучка М.В. Келдыша // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 6. С. 1289–1293.
5. *Власов В.В.* О некоторых пространствах вектор-функций, голоморфных в угле // Деп. в ВИНИТИ 20.08.1981 г. № 4177–81..
6. *Григорян Ш.А.* О базисности неполных систем рациональных функций в угловых областях // Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1978. Т. 13. № 5–6. С. 461–489.
7. *Хилле Э., Филипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.
8. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
9. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М., 1967.
10. *Engel K.J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. New York, 2000.
11. *Власов В.В., Раутиан Н.А., Шамаев А.С.* Исследование операторных моделей, возникающих в задачах наследственной механики // Совр. математика. Фунд. направления. 2012. Т. 45. С. 43–61.
12. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М., 2016.
13. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* О вольтерровых интегро-дифференциальных уравнениях с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 4. С. 536–551.
14. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Полугруппы операторов, порождаемые интегро-дифференциальными уравнениями с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса // Совр. математика. Фунд. направления. 2021. Т. 67. № 4. С. 507–525.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 13.01.2022 г.
После доработки 13.01.2022 г.
Принята к публикации 07.02.2022 г.

EDN: NUAAGI
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 238–251

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.72+517.984.5

ОБ АСИМПТОТИКЕ НЕВЕЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГУРТИНА–ПИПКИНА С ЯДРАМИ РЕЛАКСАЦИИ, ПРЕДСТАВИМЫМИ В ВИДЕ ИНТЕГРАЛА СТИЛТЬЕСА

© 2022 г. А. В. Давыдов

Для интегро-дифференциального уравнения Гуртина–Пипкина, ядро релаксации которого представимо в виде интеграла Стилтьеса по положительной полуоси от убывающей экспоненты, описано представление асимптотики невещественного спектра в зависимости от асимптотических характеристик меры Стилтьеса и поведения самого ядра релаксации в нуле. Продемонстрировано применение полученных результатов к наиболее широко применяемым на практике ядрам.

DOI: 10.31857/S0374064122020091

1. Введение. В работе исследуется уравнение Гуртина–Пипкина с ядром релаксации, представимым в виде интеграла Стилтьеса

$$R(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\, d\sigma(x), \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty). \tag{1}$$

Здесь ядро релаксации – эмпирический функциональный параметр из линейной теории вязкоупругости, используемый для описания релаксации напряжений при деформации тела. Уравнение Гуртина–Пипкина является абстрактным гиперболическим уравнением в сепарабельном гильбертовом пространстве H, возмущённым слагаемым, содержащим вольтерровы интегральные операторы:

$$u''(t) + A^2 u(t) - \int_0^t R(t-\tau) A^2 u(\tau)\, d\tau = f(t), \tag{2}$$

где A – неограниченный самосопряжённый положительный оператор в H, имеющий компактный обратный, а $u(t)$ и $f(t)$ – векторные функции $\mathbb{R}^+ \to H$. Данное уравнение используется при изучении явлений, возникающих в теории вязкоупругости, в частности, при изучении движения вязкоупругой пластины при отсутствии внешнего потока жидкости или газа (см., например, [1]), а также при описании распространения тепла в средах с памятью и в задачах усреднения в многофазных средах (см. [2, 3]). Все известные в настоящее время модели, в которых применяется уравнение Гуртина–Пипкина, таковы, что ядра релаксации этих интегро-дифференциальных уравнений экспоненциально убывают на бесконечности и бесконечно возрастают при стремлении переменной ядра к нулю. Для ядра (1) эти свойства можно обеспечить, если использовать меру σ, которая не будет конечной.

Задаче Коши для уравнения (2) посвящено большое количество работ как отечественных, так и зарубежных авторов. Отметим здесь работы В.В. Власова и Н.А. Раутиан [4; 5, § 3.2], в них при некоторых предположениях установлена корректная разрешимость уравнения Гуртина–Пипкина в весовых пространствах Соболева, проведён спектральный анализ символа уравнения (2), получена асимптотика невещественных точек спектра для ядер, представимых в виде ряда из экспонент, и локализация вещественных кластеров, на основе чего получено

представление решения в виде ряда из экспонент. Кроме того, получены результаты о корректной разрешимости данной задачи. Естественное продолжение этих исследований проведено в работе [6], в которой исследуется классическое уравнение Гуртина–Пипкина с дробно-экспоненциальными ядрами релаксации.

В работах [7] и [8] рассматривались задачи управления решениями уравнения Гуртина–Пипкина посредством граничных воздействий. В [9] устанавливается зависимость скорости убывания энергии от скорости убывания ядра в модели теплопроводности Гуртина–Пипкина.

Подход к решению задачи Коши для уравнения (2) с позиции теории полугрупп разработан в монографии [10] и работах [11, 12], в которых для широкого класса ядер $R(t)$ устанавливается вид генератора полугруппы и доказывается, что полугруппа является сжимающей и экспоненциально устойчивой. Полугрупповой подход к более общим задачам, в которых интегральное ядро имеет компактный носитель, развивался в работах Н.Д. Копачевского и Д.А. Закоры [13, 14]. В этих работах установлена экспоненциальная устойчивость соответствующих сжимающих полугрупп. Полугрупповой подход для исследования уравнений типа Гуртина–Пипкина с двумя некоммутирующими операторами используется в статье [15]. В ней описывается построение принципиально новой полугруппы, связанной с такими уравнениями, использующейся для доказательства экспоненциальной устойчивости решений этих уравнений, их классической разрешимости, а также для построения энергетического равенства. Кроме того, в работе [16] даётся описание полугрупп, возникающих при исследовании уравнений типа Гуртина–Пипкина с трением Кельвина–Фойгхта. Отметим также работу [17], в которой исследуется обобщённая разрешимость уравнений типа Гуртина–Пипкина с двумя некоммутирующими операторами.

В работе [18] доказано, что спектр символа интегро-дифференциального уравнения типа Гуртина–Пипкина с ненулевым слагаемым трения Кельвина–Фойгхта содержит лишь конечное число невещественных точек в спектре. В статье [19] исследуется вопрос о наличии и локализации бесконечного невещественного спектра символа этого уравнения в случае ядра, представимого бесконечной суммой экспонент, а в [20, 21] – вопросы асимптотической устойчивости решений и асимптотики спектра для модификации уравнения (2) с относительно компактным возмущением, описывающей колебание вязкоупругой пластины в сверхзвуковом потоке жидкости или газа.

Основная цель настоящей работы – найти асимптотику невещественного спектра символа интегро-дифференциального уравнения (2). Эта асимптотика может быть использована при исследовании высокочастотных колебаний, при определении скорости распространения волн, а также при составлении базиса Рисса в рассматриваемых задачах.

Исследование спектра символа уравнения Гуртина–Пипкина ведётся достаточно давно для различных видов ядер релаксации. Здесь прежде всего необходимо отметить результаты работ [18, 5, 6].

Результаты, посвящённые спектру символа $L(z) = z^2 I + (1 - K(z))A^2$ уравнения (2), представлены в работе [18], в частности, при $\sigma(t) = Mt^\alpha + O(t^\rho)$, $0 < \rho < \alpha < 1$, в случае совпадения спектра оператора A с множеством $\mathbb{N}$ натуральных чисел доказано

Предложение 1. *Для достаточно больших n невещественный спектр $\sigma_{\mathrm{Im}^+}(L(z))$ содержит точку z_n такую, что*

$$z_n = in + \hat{C}_1 M n^\alpha (1 + \bar{o}(1)) \quad \textit{при} \quad n \to +\infty,$$

где

$$\hat{C}_1 = \begin{cases} \pi\alpha e^{i\pi(\alpha-1)/2}/\sin(\pi\alpha), & \textit{если} \quad \alpha > 0, \\ -i, & \textit{если} \quad \alpha > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Теорема и следствие 1 настоящей работы обобщают результаты, представленные в [18], и могут быть применены к другим описанным в [18] операторным функциям.

В монографии [5, гл. 3] исследован невещественный спектр символа $L(z)$ уравнения (2) при $R(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e^{-\gamma_j t}$ в случае степенной зависимости величин c_j и γ_j от j. Следствие 5 дополняет этот результат из [5] и, в частности, исчерпывает случай степенного стремления c_j к $+\infty$ при $j \to +\infty$.

Отметим, что в работе [6] также обобщаются результаты монографии [5, гл. 3], но на уравнение (2) с дробно-экспоненциальным ядром

$$R(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_j)^n t^{n\alpha}}{\Gamma((n+1)\alpha)},$$

где Γ – гамма-функция Эйлера.

2. Постановка задачи. Обозначим через $\mathbf{F}[0,+\infty)$ класс неотрицательных непрерывных слева функций $\sigma(t)$ на $[0,+\infty)$ таких, что интеграл Стилтьеса $\int_1^{+\infty} t^{-1}\,d\sigma(t)$ существует и конечен и $\sigma(0)=0$.

Рассмотрим задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения (2):

$$u''(t) + A^2u(t) - R(t) * A^2u(t) = f(t), \tag{4}$$

$$u(0) = \varphi_0, \tag{5}$$

$$u'(0) = \varphi_1. \tag{6}$$

Здесь u и f – векторные функции из $\mathbb{R}^+$ в сепарабельное гильбертово пространство H; $*$ – операция свёртки; A – неограниченный самосопряжённый положительный оператор в H, имеющий компактный обратный; функция $R(t)$ определяется равенством (1). Корректная разрешимость данного уравнения обоснована, например, в монографиях [10] (в классическом смысле) и [5] (в пространствах Соболева).

Как следует из теоремы Гильберта–Шмидта, в пространстве H имеется ортонормированный базис из собственных векторов e_n, $n \in \mathbb{N}$, оператора A; собственные значения, отвечающие вектору e_n, обозначим через a_n, $n \in \mathbb{N}$ $(a_n > 0)$, т.е $Ae_n = a_n e_n$.

Применение преобразования Лапласа к левой части уравнения (4) приводит к операторфункции

$$L(z) = z^2 I + (1 - K(z))A^2,$$

которая называется *символом* исходного уравнения. Здесь $K(z)$ – преобразование Лапласа функции $R(t)$ из (1), т.е.

$$K(z) = \int_0^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{z+t}.$$

Определение. *Резольвентным множеством* $R(L)$ оператор-функции $L(z)$ называется множество всех значений $z \in \mathbb{C}$, для которых оператор-функция $L^{-1}(z)$ существует и ограничена. Дополнение $\sigma(L)$ множества $R(L)$ в комплексной плоскости, т.е. $\sigma(L) = \mathbb{C} \setminus R(L)$, называется *спектром* оператор-функции $L(z)$.

Необходимо найти асимптотику спектра $\sigma(L)$ символа уравнения (4).

Рассмотрим проекции на одномерное собственное подпространство $\operatorname{span} e_n$ вектора $L(z)e_n$, т.е. функцию

$$l_n(z) \equiv (L(z)e_n, e_n) = z^2 + (1 - K(z))a_n^2, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

Тогда спектр $\sigma(L)$ оператор-функции $L(z)$ представляет собой замыкание множества нулей функций $l_n(z)$, т.е.

$$\sigma(L) = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{z \in \mathbb{C} : l_n(z) = 0\}}.$$

Нас будет интересовать невещественный спектр уравнения (4):

$$\sigma_{\mathrm{Im}}(L) = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \neq 0, \;\; l_n(z) = 0\}} =$$

$$= \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0, \;\; l_n(z) = 0\}} \bigcup \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0, \;\; l_n(z) = 0\}}.$$

Заметим также, что из вещественности коэффициентов в (7) вытекает, что спектр $\sigma(L)$ симметричен относительно вещественной оси. Поэтому для нахождения невещественного спектра достаточно найти только спектр в верхней полуплоскости:

$$\sigma_{\mathrm{Im}^+}(L) = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0, \quad l_n(z) = 0\}}.$$

3. Основные результаты.

Предложение 2. *Функция $l_n(z)$, определённая равенством (7), при любом $n \in \mathbb{N}$ имеет в верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ только один нуль μ_n^+.*

Доказательство сформулированного предложения приведено в работе [18].

Введём обозначение

$$\hat{\sigma}(x, v) = \frac{\sigma(xv)}{\sigma(v)}. \tag{8}$$

Теорема. *Пусть $\sigma(t) \in \mathbf{F}[0, +\infty)$ и выполняется условие асимптотической равномерной масштабируемости: существует $r(x) \in \mathbf{F}[0, +\infty)$ такая, что*

$$\lim_{v\to+\infty} \hat{\sigma}(x, v) = r(x) \quad \text{для любого} \quad x > 0. \tag{9}$$

Пусть, кроме того, существуют $v_0 > 0$ и $\sigma_1(x) \in \mathbf{F}[0, +\infty)$, при которых выполняется неравенство

$$\sup_{v\geqslant v_0} \hat{\sigma}(x, v) < \sigma_1(x) \quad \text{для любого} \quad x > 0. \tag{10}$$

Тогда имеет место асимптотическое представление

$$\mu_n^+ = ia_n + \frac{C_1}{2i}\sigma(a_n)(1 + \bar{o}(1)) \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

где $C_1 = \int_0^{+\infty}(i + q)^{-1}\, dr(q)$.

Следствие 1. *Пусть $\sigma(t) \in \mathbf{F}[0, +\infty)$ и*

$$\sigma(x) = Mx^\alpha(\ln x)^\beta(1 + \bar{o}(1)) \quad \text{при} \quad x \to +\infty, \tag{11}$$

где $M > 0$, а $\beta \in \mathbb{R}$, если $0 < \alpha < 1$, и $\beta \geqslant 0$, если $\alpha = 0$.

Тогда

$$\mu_n^+ = ia_n + \frac{\hat{C}_1}{2i}M(a_n)^\alpha(\ln a_n)^\beta(1 + \bar{o}(1)) \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

где величина $\hat{C}_1$ определена равенством (3).

Следствие 2. *Пусть $\sigma(t)$ – неубывающая неотрицательная непрерывная слева функция на $\mathbb{R}^+$ такая, что интеграл Стилтьеса $\int_0^{+\infty} d\sigma(t)$ конечен. Тогда*

$$\mu_n^+ = ia_n - \frac{\sigma(+\infty)}{2}(1 + \bar{o}(1)) \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

где $\sigma(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} \sigma(x)$.

Следствия 1 и 2 можно также сформулировать в терминах ядра релаксации $R(t)$.

Следствие 3. *Пусть $\sigma(t)$ – неубывающая неотрицательная непрерывная слева функция на $\mathbb{R}^+$ такая, что интеграл Стилтьеса $\int_0^{+\infty} t^{-1}\, d\sigma(t)$ конечен и*

$$\sigma(x) = Mx^\alpha(\ln x)^\beta(1 + \bar{o}(1)) \quad \text{при} \quad x \to +\infty,$$

где $M > 0$, а $\beta \in \mathbb{R}$, если $0 < \alpha < 1$, и $\beta \geqslant 0$, если $\alpha = 0$.

Тогда

$$\mu_n^+ = ia_n + \frac{\hat{C}_1}{2i\Gamma(\alpha+1)} R(1/a_n)(1+\bar{o}(1)) \quad при \quad n \to +\infty,$$

где $\Gamma(t)$ *– гамма-функция Эйлера, а величина* $\hat{C}_1$ *определена равенством (3).*

Следствие 4. *Пусть* $\sigma(t)$ *– неубывающая неотрицательная непрерывная слева функция на* $[0,+\infty)$ *такая, что интеграл Стилтьеса* $\int_0^{+\infty} d\sigma(t)$ *конечен. Тогда*

$$\mu_n^+ = ia_n - \frac{R(0)}{2}(1+\bar{o}(1)) \quad при \quad n \to +\infty.$$

Если $K(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} (\gamma_j + z)^{-1} c_j = \int_0^{+\infty} (z+t)^{-1}\, d\sigma(t)$, то функция $\sigma(t)$ – кусочно-постоянная, имеющая скачки в точках γ_j, равные c_j. Найдём асимптотическое представление функции $\sigma(t)$ при $K(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} (\gamma_j + z)^{-1} c_j$ для некоторых c_j, γ_j – его даёт

Утверждение 1. *Пусть* $c_j = f(j)$, $\gamma_j = g(j)$, *где* $f(x)$ *– монотонная непрерывная положительная функция* $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *и* $g(x)$ *– возрастающая положительная функция* $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $g(t) \to +\infty$, $t \to +\infty$. *Пусть, кроме того, для первообразной* $F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$ *функции* f *выполняются соотношения*

$$F(t) \to +\infty \quad и \quad f(t)/F(t) \to 0 \quad при \quad t \to \infty. \tag{12}$$

Тогда $\sigma(t) = F(g^{-1}(t))(1+\bar{o}(1))$ $(t \to +\infty)$. *Здесь* g^{-1} *– обратная в функциональном смысле к* g *функция.*

Утверждение 1 позволяет сформулировать следствие 1 для степенных c_j, γ_j.

Следствие 5. *Пусть* $K(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} (\gamma_j + z)^{-1} c_j$, *где* $c_j = Mj^\alpha$, $\gamma_j = Bj^\beta$, *а* $M, B > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \geqslant -1$, $\alpha - \beta < -1$.

Тогда при $\alpha > -1$ *справедливо асимптотическое представление*

$$\mu_n^+ = ia_n + \frac{W}{2i} \frac{M}{B^s(\alpha+1)} (a_n)^s (1+\bar{o}(1)) \quad при \quad n \to +\infty,$$

где $s = (\alpha+1)/\beta$ *и* $W = \pi s e^{i\pi(s-1)/2} / \sin(\pi s)$, *а при* $\alpha = -1$ *– представление*

$$\mu_n^+ = ia_n - \frac{1}{2}\frac{M}{\beta} \ln(a_n)(1+\bar{o}(1)) \quad при \quad n \to +\infty.$$

4. Доказательства. Имеет место

Утверждение 2. *Если* $\sigma_0(t) \in \mathbf{F}[0,+\infty)$, *то* $\sigma_0(t)/t \to 0$ *при* $t \to +\infty$.

Доказательство. Достаточно считать, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \sigma(t) = +\infty$, в противном случае утверждение очевидно.

Предположим, что $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\sigma(t) \neq 0$, т.е. существуют константа $P > 0$ и возрастающая последовательность $t_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ такие, что $\sigma_0(t_k) > Pt_k$.

Тогда, так как $\int_0^{+\infty} t^{-1}\, d\sigma_0(t) < +\infty$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\sigma_0(t)}{t} < +\infty. \tag{13}$$

Но в то же время

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\sigma_0(t)}{t} \geqslant \frac{\sigma_0(t_{k+1}) - \sigma_0(t_k)}{t_{k+1}} > \frac{\sigma_0(t_{k+1}) - \sigma_0(t_k)}{\sigma_0(t_{k+1})/P}, \tag{14}$$

так как $\sigma_0(t_{k+1}) \to +\infty$ при $k \to +\infty$. В силу неравенств (13) и (14) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_0(t_{k+1}) - \sigma_0(t_k)}{\sigma_0(t_{k+1})} \tag{15}$$

сходится; в частности, $(\sigma_0(t_{k+1}) - \sigma_0(t_k))/\sigma_0(t_{k+1}) \to 0$ при $k \to +\infty$. Следовательно, $\varepsilon_k = \sigma_0(t_k)/\sigma_0(t_{k+1}) \to 1 - 0$ (так как $\sigma_0(t)$ неубывает и $\sigma_0(t_k)/\sigma_0(t_{k+1}) \leqslant 1$).

Далее, в некоторой левой окрестности точки 1 (пусть в окрестности $(r, 1]$) выполняется неравенство $1 - x \geqslant -(\ln x)/2$. Выберем k_0 таким, чтобы при $k > k_0$ имело место включение $\varepsilon_k \in (r, 1]$. Естественно, сходимость ряда (15) влечёт за собой сходимость ряда

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\sigma_0(t_{k+1}) - \sigma_0(t_k)}{\sigma_0(t_{k+1})} = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (1 - \varepsilon_k). \tag{16}$$

Так как $\varepsilon_k \in (r, 1]$ и на $(r, 1]$ выполняется неравенство $1 - x \geqslant -(\ln x)/2$, то из равенства (16) следует сходимость ряда

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} (-\ln \varepsilon_k) = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(-\ln \frac{\sigma_0(t_k)}{\sigma_0(t_{k+1})} \right) =$$

$$= \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (\ln \sigma_0(t_{k+1}) - \ln \sigma_0(t_k)) = \lim_{k \to \infty} \ln \sigma_0(t_k) - \ln \sigma_0(t_{k_0+1}).$$

Так как $t_k \to +\infty$, то $\sigma_0(t_k) \to +\infty$ и, значит, $\ln \sigma_0(t_k) \to +\infty$. Противоречие. Следовательно, $\sigma_0(t)/t \to 0$ при $t \to +\infty$, что и требовалось доказать. Утверждение доказано.

Доказательство теоремы. Докажем сначала, что справедлива

Лемма 1. *Пусть выполняется условие (11). Тогда*

$$K(ia_n) = C_1 \frac{\sigma(a_n)}{a_n}(1 + \bar{o}(1)) \quad \textit{при} \quad n \to +\infty. \tag{17}$$

Кроме того, если $D = \{z : |z - ia_n| < |C_1|\sigma(a_n)\}$, *то*

$$\max_{\overline{D}} |K'(z)| \leqslant C_2 \sigma(a_n)/a_n^2 \tag{18}$$

для некоторой константы C_2 *при достаточно большом* n.

Для доказательства леммы 1 нам понадобятся два утверждения.

Утверждение 3. *Пусть заданы конечные последовательность* M_i, $i = \overline{1, n}$, *неотрицательных чисел и возрастающая последовательность* t_i, $i = \overline{1, n}$, *положительных чисел. Пусть также числа* $v_1 \leqslant v_2 \leqslant \ldots \leqslant v_n$ *удовлетворяют неравенствам* $0 \leqslant v_i \leqslant M_i$, $i = \overline{1, n}$. *Тогда максимум суммы* $s(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{i=1}^{n-1} t_i^{-1}(v_{i+1} - v_i)$ *достигается при* $v_1 = 0$ *и* $v_i = M_i$, $i = \overline{2, n}$.

Доказательство. Так как

$$\frac{\partial s}{\partial v_{i+1}} = \frac{1}{t_i} - \frac{1}{t_{i+1}} > 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \text{и} \quad \frac{\partial s}{\partial v_1} = -\frac{1}{t_1} < 0,$$

то функция $s(v_1, \ldots, v_n)$ возрастает по каждой из переменных, начиная со второй, и убывает по первой, а значит, достигает своего максимума при $v_i = M_i$, $i = \overline{2, n}$, и $v_1 = 0$. Утверждение доказано.

Утверждение 4. *Пусть* $\sigma_1(t), \sigma_2(t) \in \mathbf{F}[0, +\infty)$ *и при* $t > N$ *выполняется неравенство* $\sigma_2(t) < \sigma_1(t)$. *Тогда справедлива оценка*

$$\int\limits_N^{+\infty} \frac{d\sigma_2(t)}{t} \leqslant \frac{\sigma_1(N)}{N} + \int\limits_N^{+\infty} \frac{d\sigma_1(t)}{t}. \tag{19}$$

Доказательство. При $M > N$ имеем

$$\int\limits_N^{M} \frac{d\sigma_2(t)}{t} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sigma_2(t_{i+1}) - \sigma_2(t_i)}{t_i},$$

где $t_i = N + i(M-N)/n$ – положительная неубывающая последовательность. Тогда, применяя утверждение 3 при $v_i = \sigma_2(t_i)$ и $M_i = \sigma_1(t_i)$, получаем

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sigma_2(t_{i+1}) - \sigma_2(t_i)}{t_i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{v_{i+1} - v_i}{t_i} \leqslant \frac{M_2}{t_1} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{M_{i+1} - M_i}{t_i} = \frac{\sigma_1(t_2)}{t_1} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\sigma_1(t_{i+1}) - \sigma_1(t_i)}{t_i}.$$

Устремляя n к $+\infty$, будем иметь $t_2 \to N$, $t_1 \to N$, а значит,

$$\int\limits_N^{M} \frac{d\sigma_2(t)}{t} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sigma_2(t_{i+1}) - \sigma_2(t_i)}{t_i} \leqslant \frac{\sigma_1(N)}{N} + \int\limits_N^{M} \frac{d\sigma_1(t)}{t},$$

поэтому, устремляя M к $+\infty$, приходим к неравенству (19). Утверждение доказано.

Доказательство леммы 1. Проводя замену $t = qa_n$, получаем

$$K(ia_n) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t + ia_n} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\sigma(qa_n)}{a_n(i+q)} = \frac{1}{a_n} \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\sigma(qa_n)}{i+q} = \frac{\sigma(a_n)}{a_n} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{i+q}\, d\left(\frac{\sigma(qa_n)}{\sigma(a_n)}\right). \tag{20}$$

Для того чтобы получить представление (17), необходимо доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{i+q}\, d\left(\frac{\sigma(qa_n)}{\sigma(a_n)}\right) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\hat{\sigma}(q, a_n)}{i+q} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dr(q)}{i+q} = C_1, \tag{21}$$

где функция $\hat{\sigma}$ определена равенством (8).

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для него выберем N и n достаточно большими – такими, что выполняются следующие три неравенства:

$$1)\ \ \frac{\sigma_1(N)}{N} + \int\limits_N^{+\infty} \frac{d\sigma_1(t)}{t} < \varepsilon; \quad 2)\ \ \left| \int\limits_0^{N} \frac{d\hat{\sigma}(q, a_n)}{i+q} - \int\limits_0^{N} \frac{dr(q)}{i+q} \right| < \varepsilon; \quad 3)\ \ \int\limits_N^{+\infty} \frac{dr(q)}{q} < \varepsilon.$$

Возможность осуществить неравенство 1) следует из утверждения 2 и предположения (10). Выполнимость неравенства 2) вытекает из теоремы Хелли, которую содержит

Предложение 3 (первая теорема Хелли). *Пусть функции* Φ_n, $n \in \mathbb{N}$, *с ограниченным изменением на отрезке* $[a, b]$ *поточечно на этом отрезке сходятся к некоторой функции* Φ, *причём полные изменения функций ограниченны в совокупности*[*)]

$$V_a^b[\Phi_n] \leqslant C, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{22}$$

[*)] Через V_a^b здесь и далее обозначается вариация функции на отрезке $[a, b]$.

Тогда предельная функция Φ *тоже имеет ограниченное изменение и для любой непрерывной функции* f *справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\,d\Phi_n(x)=\int\limits_a^b f(x)\,d\Phi(x).$$

Доказательство этой теоремы Хелли см. в [22, гл. VI, § 6.5].

Действительно, положив $\Phi_n(q)=\hat\sigma(q,a_n)$, $\Phi(q)=r(q)$, $a=0$, $b=N$, в силу условия (9) будем иметь поточечную сходимость. Кроме того, последовательность $d_n=V_0^N[\Phi_n]=\sigma(Na_n)/\sigma(a_n)$ сходится к $g(N)$, а значит, ограничена, что и влечёт за собой неравенства (22). Неравенство 3) можно осуществить в силу условия (9).

Окончательно получаем

$$\Big|\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\hat\sigma(q,a_n)}{i+q}-\int\limits_0^{+\infty}\frac{dr(q)}{i+q}\Big|\leqslant\Big|\int\limits_0^{N}\frac{d\hat\sigma(q,a_n)}{i+q}-\int\limits_0^{N}\frac{dr(q)}{i+q}\Big|+\int\limits_N^{+\infty}\frac{dr(q)}{|i+q|}+\int\limits_N^{+\infty}\frac{d\hat\sigma(q,a_n)}{|i+q|}\leqslant$$

$$\leqslant\Big|\int\limits_0^{N}\frac{d\hat\sigma(q,a_n)}{i+q}-\int\limits_0^{N}\frac{dr(q)}{i+q}\Big|+\int\limits_N^{+\infty}\frac{dr(q)}{q}+\int\limits_N^{+\infty}\frac{d\hat\sigma(q,a_n)}{q}<3\varepsilon \tag{23}$$

согласно условиям 1)–3), а также результату (19) утверждения 4 при $\sigma_2(q)=\hat\sigma(q,a_n)$. Из этого и следует соотношение (21).

Докажем теперь оценку (18). Выберем n настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $\sigma(a_n)/a_n<1/(2|C_1|)$. Тогда круг D из условия леммы 1 содержится в круге $D_0=\{z:|z-ia_n|<a_n/2)\}$. Далее, проведём при $t=a_nq\in\mathbb{R}^+$ следующие оценки:

$$|z+t|^2\geqslant|\operatorname{Im}(z+t)||z+t|\geqslant|\operatorname{Im}z||z+t|\geqslant\frac{a_n}{2}|z+t|\geqslant\frac{a_n}{2}(|t+ia_n|-|ia_n-z|)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{a_n}{2}|t+ia_n|\left(1-\frac{|ia_n-z|}{|t+ia_n|}\right)\geqslant\frac{a_n}{2}|t+ia_n|\left(1-\frac{|ia_n-z|}{|\operatorname{Im}(t+ia_n)|}\right)=$$

$$=\frac{a_n}{2}|t+ia_n|\left(1-\frac{|ia_n-z|}{a_n}\right)>\frac{a_n}{2}|t+ia_n|\left(1-\frac{a_n/2}{a_n}\right)=\frac{a_n}{4}|t+ia_n|=\frac{a_n^2}{4}|i+q|.$$

Таким образом, при $z\in D_0$ имеем

$$|K'(z)|=\Big|\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\sigma(t)}{(t+z)^2}\Big|\leqslant\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\sigma(t)}{|t+z|^2}\leqslant\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\sigma(qa_n)}{a_n^2|i+q|/4}=\frac{4}{a_n^2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\sigma(qa_n)}{|i+q|}. \tag{24}$$

Проведя рассуждения, аналогичные тем, с помощью которых устанавливались соотношения (20)–(23), но заменяя в них $i+q$ на модуль $|i+q|$, несложно получить, что

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\sigma(qa_n)}{|i+q|}=\sigma(a_n)(C_3+\overline{o}(1)),\quad\text{где}\quad C_3=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dr(q)}{|i+q|}. \tag{25}$$

Из (24), (25) следует, что оценка (18) выполняется при достаточно большом n, если положить в ней $C_2=8C_3$, что и требовалось доказать.

Утверждение 5. *Пусть* $h(z)$ *– некоторая комплексная функция,* $a,b,z_0\in\mathbb{C}$ *и функция* $h_1(z)$ *определена равенством* $h_1(z)=h(z)-a-b(z-z_0)$. *Если найдётся* $c\in(|b|,+\infty)$, *при котором выполнены следующие условия:*

1) круг $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| \leqslant r\}$, *где* $r = z_0 - \dfrac{a}{b}$ *и* $r = \left|\dfrac{a}{b}\right| \dfrac{c}{|b| - c}$, *целиком содержится в области определения функции* $h_1(z)$,

2) при всех $z \in B$ *справедливо неравенство* $|h_1(z)| < c|z - z_0|$,

то в круге B *функция* $h(z)$ *имеет единственный нуль.*

Доказательство. Верно равенство $h(z) = f_1(z) + h_1(z)$, где $f_1(z) = a + b(z - z_0)$. Линейная функция $f_1(z)$ имеет единственный нуль (в точке z_1), а её модуль на границе ∂B постоянен: $|f_1(z)| = |b|r$. Кроме того, на границе ∂B справедлива оценка

$$|g_1(z)| < c|z - z_0| = c|z_1 + re^{i\varphi} - z_0| = c|re^{i\varphi} - a/b| \leqslant c\left(r + \left|\frac{a}{b}\right|\right) = c\left|\frac{a}{b}\right|\left(\frac{c}{|b| - c} + 1\right) =$$

$$= c\left|\frac{a}{b}\right|\frac{|b|}{|b| - c} = |b|\left|\frac{a}{b}\right|\frac{c}{|b| - c} = |b|r = |f_1(z)|.$$

Значит, по теореме Руше в области $B \setminus \partial B$ существует и единственен нуль функции $h(z)$. Утверждение доказано.

Лемма 2. *Пусть* $f(z)$, $g(z)$ – *голоморфные функции в области* $D \subset \mathbb{C}$ *и выполнены следующие условия:*

1) в области D *функция* $f(z)$ *имеет единственный нуль в точке* z_0 *(пусть* $g(z_0) = g_0$*);*

2) справедливо представление $f'(z) = C + v(z)$, *где* C – *константа и* $|v(z)| < V$ *при* $z \in D$;

3) выполняется оценка $|g'(z)| \leqslant G$ *в области* D;

4) имеет место неравенство $G + V < |C|$;

5) круг $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| \leqslant r\}$, *где* $r = \left|\dfrac{g_0}{C}\right| \dfrac{G + V}{|C| - V - G}$ *и* $z_1 = z_0 - \dfrac{g_0}{C}$, *содержится в области* D.

Тогда функция $f(z) + g(z)$ *в круге* B *имеет единственный нуль.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$h(z) = f(z) + g(z) = f(z_0) + \int\limits_{z_0}^{z} f'(z)\,dz + g(z_0) + \int\limits_{z_0}^{z} g'(z)\,dz =$$

$$= 0 + \int\limits_{z_0}^{z} (C + v(z))\,dz + g_0 + \int\limits_{z_0}^{z} g'(z)\,dz = g_0 + C(z - z_0) + \int\limits_{z_0}^{z} (v(z) + g'(z))\,dz.$$

Тогда можно применить предыдущее утверждение, так как

$$\left|\int\limits_{z_0}^{z} (v(z) + g'(z))\,dz\right| \leqslant \max_{B} |v(z) + g'(z)||z - z_0| \leqslant \sup_{D} |v(z) + g'(z)||z - z_0| \leqslant (V + G)|z - z_0|$$

при $a = g_0$, $b = C$, $c = G + V$. Лемма доказана.

Перейдём непосредственно к доказательству теоремы. Выберем при достаточно большом n (т.е. при $n > n_0$, где n_0 будет указано ниже) $z_0 = ia_n$, и пусть $D = \{z : |z - z_0| < |C_1|\sigma(a_n)\}$. С помощью леммы 2 оценим местоположение нуля функции $l_n(z)$. Положим $f(z) = z^2 + a_n^2$, $g(z) = -a_n^2 K(z)$. В области D можно записать $f'(z) = 2z = 2ia_n + 2(z - ia_n)$.

В обозначениях леммы 2 очевидно, что $C = 2ia_n$, $V = 2|C_1|\sigma(a_n)$. Кроме того, согласно лемме 1 выполнено $g_0 = -a_n^2 C_1 a_n^{-1}\sigma(a_n)(1 + \bar{o}(1)) = C_1 a_n \sigma(a_n)(1 + \bar{o}(1))$. Положим далее n достаточно большим – таким, что выполняется оценка (18) с некоторой константой C_2. В этом случае константу G можно положить равной $C_2\sigma(a_n)$.

Положим, следуя условию 5) леммы 2,

$$r_n = 2\frac{|g_0|}{|C| - V - G}\frac{G + V}{|C|} = 2\frac{|C_1|a_n\sigma(a_n)(1 + \bar{o}(1))}{2a_n - 2|C_1|\sigma(a_n) - C_2\sigma(a_n)}\frac{2|C_1|\sigma(a_n) + C_2\sigma(a_n)}{2a_n} =$$

$$= 2\frac{|C_1|\sigma(a_n)(1+\bar o(1))}{2-(2|C_1|+C_2)\sigma(a_n)/a_n}\frac{2|C_1|+C_2}{2}\frac{\sigma(a_n)}{a_n} = 2\frac{(\sigma(a_n))^2}{a_n}\frac{|C_1|(1+\bar o(1))}{2-(2|C_1|+C_2)\sigma(a_n)/a_n}\frac{2|C_1|+C_2}{2}.$$

Так как, согласно утверждению 2, $\lim\limits_{n\to\infty}(\sigma(a_n)/a_n)=0$, то при $n\to\infty$ последовательности r_n и $a_n^{-1}(\sigma(a_n))^2$ эквивалентны. Значит, $r_n=\bar o(\sigma(a_n))$. Вспоминая, что

$$z_1 = z_0 - g_0/C = ia_n + \frac{C_1 a_n\sigma(a_n)(1+\bar o(1))}{2ia_n} = ia_n + \frac{C_1}{2i}\sigma(a_n)(1+\bar o(1)), \tag{26}$$

видим, что круг $B=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_1|<r_n\}$ при достаточно большом n содержится в области D. Действительно, если $|z-z_1|<r_n$, то при достаточно большом n выполняется неравенство

$$|z-z_0|\leqslant|z-z_1|+|z_1-z_0|<r_n+\left|\frac{C_1}{2i}\sigma(a_n)(1+\bar o(1))\right| =$$

$$= |C_1|\sigma(a_n)\frac{|1+\bar o(1)|}{2}+\bar o(\sigma(a_n))<|C_1|\sigma(a_n). \tag{27}$$

Таким образом, при достаточно большом n выполнено условие 4) леммы 2 (здесь мы берём n достаточно большим, чтобы выполнялись оценки (18) и (27)). Тогда применима лемма 2 и в круге B находится ровно один нуль функции $l_n(z)$.

В итоге имеет место (с учётом (26)) представление

$$\mu_n^+ = z_1+\bar o(\sigma(a_n)) = ia_n+\frac{C_1}{2i}\sigma(a_n)(1+\bar o(1))+\bar o(\sigma(a_n)) = ia_n+\frac{C_1}{2i}\sigma(a_n)(1+\bar o(1)),$$

так как $r_n=\bar o(\sigma(a_n))$. Теорема доказана.

Доказательство следствия 1. Запишем представление (11) в эквивалентной форме

$$\sigma(x)=Mx^\alpha(\ln x)^\beta(1+d(x)),\quad \lim_{x\to+\infty}d(x)=0. \tag{28}$$

Докажем, что для $\sigma(x)$ имеет место

Утверждение 6. Справедливы следующие свойства:

1) $\lim\limits_{v\to+\infty}\hat\sigma(x,v)=x^\alpha$, $x>0$;

2) для некоторых констант $v_0>0$, $S>0$ *и для любых* $\theta\in(\alpha,1)$, $x>e$, $v>v_0$ *выполняется оценка* $\hat\sigma(x,v)\leqslant Sx^\theta$;

3) $\hat\sigma(0,v)=0$.

Доказательство. Сначала отметим следующее свойство: если $\sigma(x)=\sigma_1(x)\sigma_2(x)$, то

$$\hat\sigma(x,v)=\frac{\sigma(xv)}{\sigma(v)}=\frac{\sigma_1(xv)}{\sigma_1(v)}\frac{\sigma_2(xv)}{\sigma_2(v)}=\hat\sigma_1(x,v)\hat\sigma_2(x,v). \tag{29}$$

Далее,

$$(Mxv)^\alpha/(Mv)^\alpha=x^\alpha, \tag{30}$$

$$\frac{(\ln(xv))^\beta}{(\ln v)^\beta}=\left(1+\frac{\ln x}{\ln v}\right)^\beta\to1\quad\text{при}\quad v\to+\infty, \tag{31}$$

$$\frac{1+d(xv)}{1+d(v)}\to1,\quad\text{так как}\quad d(v)\to0,\quad d(xv)\to0\quad\text{при}\quad v\to+\infty. \tag{32}$$

Учитывая полученные выше соотношения (11)–(32), несложно показывается, что свойство 1) утверждения выполняется.

Заметим, что так как для функции $y(x)=x^\tau/\tau-\ln x$ справедливы неравенства

$$y(1)=1/\tau>0\quad\text{и}\quad y'(x)=x^{\tau-1}-x^{-1}=\frac{x^\tau-1}{x}>0,\quad\text{где}\quad x>1,\quad\tau>0,$$

то функция $y(x)$ положительна, $x > 1$, $\tau > 0$, а значит,

$$\ln x < x^\tau/\tau, \quad x > 1, \quad \tau > 0. \tag{33}$$

Тогда, используя (31), (33), получаем, что при $v > e$, $x > e$, $\beta \geqslant 0$ имеют место неравенства

$$\frac{(\ln(xv))^\beta}{(\ln v)^\beta} = \left(1 + \frac{\ln x}{\ln v}\right)^\beta < (1 + \ln x)^\beta < (2\ln x)^\beta < 2^\beta \frac{x^{\beta\beta_1}}{\beta_1^\beta} \tag{34}$$

для любого $\beta_1 > 0$, а при $\beta < 0$ – неравенство

$$\frac{(\ln(xv))^\beta}{(\ln v)^\beta} = \left(1 + \frac{\ln x}{\ln v}\right)^\beta < 1. \tag{35}$$

Кроме того, если взять v_0 таким, чтобы при $v > v_0$ выполнялась оценка $|d(v)| < 1/2$, то при таких v и при $x > e > 1$ будем иметь

$$\frac{1 + d(xv)}{1 + d(v)} < \frac{1 + 1/2}{1 - 1/2} = 3, \tag{36}$$

так как $xv > v > v_0$. В итоге на основании (28)–(30), (35), (36) получаем при $v > v_0$, $x > e$, $\beta < 0$, что справедлива оценка

$$\hat\sigma(x, v) < 3x^\alpha < 3x^\theta,$$

а при $v > v_0$, $x > e$, $\beta \geqslant 0$, $\beta_1 = (\theta - \alpha)/\beta$ – оценка

$$\hat\sigma(x, v) < 3\frac{x^{\beta\beta_1+\alpha}}{\beta_1^\beta} = \frac{3 \cdot 2^\beta}{\beta_1^\beta} x^\theta.$$

Свойство 2) утверждения установлено.

Свойство 3) утверждения следует из того, что $\hat\sigma(0, v) = \sigma(0)/\sigma(v) = 0$. Утверждение доказано.

В обозначениях теоремы работы с помощью утверждения 6 заключаем, что

$$r(q) = \begin{cases} q^\alpha, & q > 0, \\ 0, & q = 0, \end{cases} \quad \sigma_1(x) = \begin{cases} Sx^\theta, & x > e, \\ Se^\theta, & x \leqslant e. \end{cases} \tag{37}$$

Равенство (21) при $\alpha > 0$ вытекает из того, что (см., например, [23, задача 28.22])

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dq^\alpha}{z + q} = \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\alpha} z^{\alpha-1},$$

а при $\alpha = 0$ – из того, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dr(q)}{i + q} = \frac{1}{i + 0}(r(0+) - r(0)) + \int\limits_{0+}^{+\infty} \frac{d1}{i + q} = \frac{1}{i} + 0 = \frac{1}{i}. \tag{38}$$

Доказательство следствия 2. Следствие 2 представляет собой частный случай следствия 1 при $\alpha = \beta = 0$, $M = \sigma(+\infty)$, т.е. случай конечной меры Стилтьеса $\sigma(t)$. В данном случае функция

$$r(q) = \begin{cases} 1, & q > 0, \\ 0, & q = 0, \end{cases}$$

является функцией Хевисайда на $\mathbb{R}^+$, значение которой в нуле заменено нулём.

Доказательство следствий 3, 4. Докажем вначале следствие 3. Используя вместо функции $i+q$ функцию e^q и проводя рассуждения, аналогичные тем, с помощью которых устанавливались соотношения (20)–(23), получаем

$$R(1/a_n)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-t/a_n}\,d\sigma(t)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\sigma(t)}{e^{t/a_n}}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\sigma(qa_n)}{e^q}=\sigma(a_n)\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{e^q}\left(\frac{d\sigma(qa_n)}{\sigma(a_n)}\right)=$$

$$=\Gamma(\alpha+1)\sigma(a_n)(1+\bar o(1))\quad\text{при}\quad n\to\infty, \tag{39}$$

так как аналогично (21) имеем при $\alpha>0$ равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{e^q}\left(\frac{\sigma(qa_n)}{\sigma(a_n)}\right)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-q}dr(q)=\alpha\Gamma(\alpha)=\Gamma(\alpha+1)$$

вследствие того, что функция $r(q)$ задаётся так же, как и в (37). При $\alpha=0$ по аналогии с (38) получаем

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{e^q}\left(\frac{\sigma(qa_n)}{\sigma(a_n)}\right)=e^0(r(0+)-r(0))=1=\Gamma(\alpha+1).$$

Тогда, заменяя асимптотику $\sigma(a_n)$ согласно соотношению (39), приходим к утверждению следствия 3.

Следствие 4 – частный случай следствия 3 для конечной меры $\sigma(x)$.

Доказательство утверждения 1. Очевидны равенства

$$\sigma(t)=\int\limits_0^t d\sigma=\sum_{j:\gamma_j<t}c_j=\sum_{j:\gamma_j<t}c_j=\sum_{j:g(j)<t}f(j)=\sum_{j:j<g^{-1}(t)}f(j)=\sum_{j=1}^{[g^{-1}(t)]}f(j).$$

Допустим, что функция $f(y)$ убывает. Тогда при $y\in[j,j+1]$ выполняются неравенства $f(y-1)\geqslant f(j)\geqslant f(y)$, а значит, верны неравенства

$$f(1)\geqslant f(1)\geqslant\int\limits_1^2 f(y)\,dy,$$

$$\int\limits_{j-1}^{j}f(y)\,dy=\int\limits_{j}^{j+1}f(y-1)\,dy\geqslant f(j)\geqslant\int\limits_{j}^{j+1}f(y)\,dy,\quad j=\overline{2,[g^{-1}(t)]},$$

$$f(1)+\int\limits_1^{[g^{-1}(t)]}f(y)\,dy\geqslant\sum_{j=1}^{[g^{-1}(t)]}f(j)\geqslant\int\limits_1^{[g^{-1}(t)]+1}f(y)\,dy.$$

Итак,

$$f(1)+F([g^{-1}(t)])\geqslant\sigma(t)\geqslant F([g^{-1}(t)]+1). \tag{40}$$

Так как f положительна и непрерывна, то F возрастает и дифференцируема, кроме того, по условию $F(t)\to+\infty$ при $t\to+\infty$. Следовательно, при некотором $|\theta|<1$ будем иметь

$$|\sigma(t)-F(g^{-1}(t))|\leqslant F([g^{-1}(t)])+f(1)-F([g^{-1}(t)])=f(1)+f(g^{-1}(t)+\theta)=\bar o(F(g^{-1}(t))),$$

так как согласно условию $f(t) = \bar{o}(F(t))$. Это следует из соотношений (12), (40), так как $f(1) = \bar{o}(F(g^{-1}(t)))$. Поэтому

$$\sigma(t) = F(g^{-1}(t))(1 + \bar{o}(1)) \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{41}$$

Допустим, что функция $f(y)$ возрастает. Тогда при $y \in [j, j+1]$ выполняются неравенства $f(y-1) \leqslant f(j) \leqslant f(y)$, а значит, верны неравенства

$$f(1) \leqslant f(1) \leqslant \int\limits_1^2 f(y)\,dy,$$

$$\int\limits_{j-1}^{j} f(y)\,dy = \int\limits_j^{j+1} f(y-1)\,dy \leqslant f(j) \leqslant \int\limits_j^{j+1} f(y)\,dy, \quad j = \overline{2, [g^{-1}(t)]},$$

$$f(1) + \int\limits_1^{[g^{-1}(t)]} f(y)\,dy \leqslant \sum_{j=1}^{[g^{-1}(t)]} f(j) \leqslant \int\limits_1^{[g^{-1}(t)]+1} f(y)\,dy.$$

Итак,

$$F([g^{-1}(t)]) \leqslant f(1) + F([g^{-1}(t)]) \leqslant \sigma(t) \leqslant F([g^{-1}(t)] + 1). \tag{42}$$

Так как f положительна, возрастает и непрерывна, то F возрастает и дифференцируема, кроме того, $F(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Следовательно, при некотором $|\theta| < 1$ будем иметь

$$|\sigma(t) - F(g^{-1}(t))| \leqslant F([g^{-1}(t)] + 1) - F([g^{-1}(t)]) = f(g^{-1}(t) + \theta) = \bar{o}(F(g^{-1}(t))),$$

так как согласно условию $f(t) = \bar{o}(F(t))$. Это следует из соотношений (12), (42). Поэтому верно представление (41). Утверждение доказано.

Доказательство следствия 5. Согласно предположению следствия $g^{-1}(t) = (t/B)^{1/\beta}$, а

$$F(t) = \begin{cases} Mt^{\alpha+1}/(\alpha+1), & \alpha > -1, \\ M \ln t, & \alpha = -1. \end{cases}$$

Значит,

$$F(g^{-1}(t)) = \begin{cases} MB^{-s}t^s/(\alpha+1), & \alpha > -1, \\ (\ln t - \ln B)/\beta, & \alpha = -1. \end{cases}$$

Для завершения доказательства остаётся применить утверждение 2 и следствие 1. Следствие доказано.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В.В. Власову за постановку задачи, научное руководство и активную поддержку, а также участникам научного семинара “Функционально-дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения и их спектральный анализ”, в особенности Н.А. Раутиан, за поддержку и ценные советы.

Автор признателен рецензенту за конструктивные замечания, способствовавшие улучшению текста статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова научной школе “Математические методы анализ сложных систем”, руководимой акад. В.А. Садовничим, а также при финансовой поддержке фонда развития теоретической физики и математики “Базис”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алгазин С.Д., Кийко И.А.* Флаттер пластин и оболочек. М., 2006.
2. *Pipkin A.C., Gurtin M.E.* A General theory of heat conduction with finite wave speeds // Arch. Ration. Mech. and Anal. 1968. V. 31. P. 113–126.
3. *Жиков В.В.* Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости // Мат. сб. 2000. Т. 191. № 7. С. 31–72.

4. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ абстрактных гиперболических интегро-дифференциальных уравнений // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2011. Вып. 28. С. 75–113.
5. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М., 2016.
6. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ и представление решений интегро-дифференциальных уравнений с дробно-экспоненциальными ядрами // Тр. Моск. мат. о-ва. 2019. Т. 80. № 2. С. 197–220.
7. *Pandolfi L., Ivanov S.* Heat equations with memory: lack of controllability to the rest // J. of Math. and Appl. 2009. V. 355. P. 1–11.
8. *Pandolfi L.* The controllability of the Gurtin–Pipkin equations: a cosine operator approach // Appl. Math. and Optim. 2005. V. 52. P. 143–165.
9. *Rivera J.E.M., Naso M.G.* On the decay of the energy for systems with memory and indefinite dissipation // Asympt. Anal. 2006. V. 49. P. 189–204.
10. *Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M.* Thermodynamics of Materials with Memory, Theory and Applications. New York; Dordrecht; Heidelberg; London, 2012.
11. *Dafermos C.M.* Asymptotic stability in viscoelasticity // Arch. for Rat. Mech. and Anal. 1970. V. 37. P. 297–308.
12. *Fabrizio M., Giorgi C., Pata V.* A New approach to equations with memory // Arch. for Rat. Mech. and Anal. 2010. V. 198. P. 189–232.
13. *Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д., Орлова Л.Д.* Операторный подход к исследованию гидродинамической модели Олдройта // Мат. заметки. 1999. Т. 65. Вып. 6. С. 924–928.
14. *Закора Д.А.* Экспоненциальная устойчивость одной полугруппы и приложения // Мат. заметки. 2018. Т. 103. Вып. 5. С. 702–719.
15. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1122–1126.
16. *Тихонов Ю.А.* Об аналитичности полугруппы операторов, возникающих в задачах теории вязкоупругости // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 808–822.
17. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений наследственной механики // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2020. Т. 60. № 8. С. 78–87.
18. *Eremenko A., Ivanov S.* Spectra of the Gurtin–Pipkin type equations // SIAM J. Math. Anal. 2011. № 43. P. 2296–2306.
19. *Давыдов А.В., Тихонов Ю.А.* Исследование операторных моделей Кельвина–Фойгта, возникающих в теории вязкоупругости // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 12. С. 1663–1677.
20. *Давыдов А.В.* Спектральный анализ интегро-дифференциальных операторов, возникающих при изучении флаттера вязкоупругой пластины // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат., мех. 2020. № 2. С. 15–22.
21. *Davydov A.V.* Asymptotics of the spectrum of an integro-differential equation arising in the study of the flutter of a viscoelastic plate // Rus. J. of Math. Phys. 2021. Т. 28. № 2. С. 188–197.
22. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 2012.
23. *Евграфов М.А.* Сборник задач по теории аналитических функций. М., 1972.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 03.10.2021 г.
После доработки 27.12.2021 г.
Принята к публикации 24.02.2022 г.

EDN: RYLQOE
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 252–259

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ДЛЯ ЗАДАЧ СО СМЕШАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© 2022 г. А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский

Для управляемой системы со смешанными ограничениями типа равенств и неравенств и геометрическим ограничением, представляющим собой непустое замкнутое выпуклое множество, получены достаточные условия существования допустимых позиционных управлений в терминах производных первого порядка отображений, задающих смешанные ограничения. Кроме того, в терминах производных первого и второго порядков этих отображений найдены достаточные условия существования допустимых позиционных управлений, применимые и в случае вырождения первых производных указанных отображений.

DOI: 10.31857/S0374064122020108

Введение. Пусть для управляемой системы

$$\dot{x} = F(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

смешанные и геометрические ограничения имеют соответственно вид

$$G^1(x, u, t) = 0, \quad G^2(x, u, t) \leqslant 0 \tag{2}$$

и

$$u(x, t) \in U. \tag{3}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовая переменная, $u \in \mathbb{R}^m$ – вектор управления, $t \geqslant t_0$ – время, отображение $F\colon\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ задано и является непрерывным по первой и второй переменным, измеримым по третьей переменной и ограниченным в окрестности фиксированной точки (x_0, u_0, t_0); заданное множество $U \subset \mathbb{R}^m$ непусто, замкнуто и выпукло. Вектор-функции $G^l\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{s_l}$, $l = 1, 2$, непрерывны; соотношения (2) выполняются покоординатно.

Под *управлением* понимается непрерывная функция u переменных x и t, определённая в некоторой окрестности точки (t_0, x_0) и такая, что $u(x, t) \in U$.

Будем говорить, что система (1)–(3) *локально разрешима* в точке (x_0, u_0, t_0), если существует окрестность Ω точки (x_0, t_0), непрерывное отображение $\bar{u} : \Omega \to U$, число $\tau > 0$ и абсолютно непрерывная функция $\bar{x} : [t_0, t_0 + \tau) \to \mathbb{R}^n$ такие, что $\bar{u}(x_0, t_0) = u_0$, при всех $t \in [t_0, t_0 + \tau)$ выполнены соотношения

$$G^1(\bar{x}(t), \bar{u}(\bar{x}(t), t), t) = 0, \quad G^2(\bar{x}(t), \bar{u}(\bar{x}(t), t), t) \leqslant 0$$

и функция $\bar{x}(\cdot)$ является решением задачи Коши

$$\dot{\bar{x}} = F(\bar{x}, \bar{u}(\bar{x}, t), t), \quad \bar{x}(t_0) = x_0, \tag{4}$$

т.е. $\dot{\bar{x}}(t) = F(\bar{x}(t), \bar{u}(\bar{x}(t), t), t)$ при п.в. $t \in [t_0, t_0 + \tau)$ и $\bar{x}(t_0) = x_0$. Указанную функцию $\bar{u}(\cdot)$ принято называть *допустимым позиционным управлением*, а пару $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ – *допустимым процессом*.

Наша цель заключается в том, чтобы получить достаточные условия локальной разрешимости для системы (1)–(3) как в терминах первой производной отображений G^1 и G^2, так и в терминах второй производной этих отображений.

1. Регулярность первого порядка. В этом пункте работы в терминах первой производной приведём условия регулярности смешанных ограничений. Предположим, что

$$G^1(x_0, u_0, t_0) = 0, \quad G^2(x_0, u_0, t_0) \leqslant 0.$$

Обозначим через I множество всех тех индексов $i \in \{1, \dots, s_2\}$, для которых i-я компонента $G^{2,i}(x_0, u_0, t_0)$ вектора $G^2(x_0, u_0, t_0)$ равна нулю. Для вектор-функции G^l, $l = 1, 2$, через ${G^l}_u$ обозначим матрицу её первых частных производных по компонентам вектора u, а для произвольного $\xi \in \mathbb{R}^m$ через $({G^2}_u(x_0, u_0, t_0)\xi)_i$ – i-ю компоненту вектора ${G^2}_u(x_0, u_0, t_0)\xi \in \mathbb{R}^{s_2}$.

Теорема 1. *Пусть отображения F и G^l, $l = 1, 2$, непрерывны, отображения G^l строго дифференцируемы по u в точке (x_0, u_0, t_0) равномерно по x и выполняются следующие предположения:*

(R1) $0 \in \operatorname{int} {G^1}_u(x_0, u_0, t_0)(U - \{u_0\})$;

(R2) *существует вектор $\xi \in U - \{u_0\}$ такой, что ${G^1}_u(x_0, u_0, t_0)\xi = 0$ и*

$$({G^2}_u(x_0, u_0, t_0)\xi)_i < 0 \quad \text{для всех} \quad i \in I.$$

Тогда система (1)–(3) локально разрешима в точке (x_0, u_0, t_0).

Доказательство. Предположим сначала, что $G^2(x_0, u_0, t_0) = 0$. Для произвольных $x \in \mathbb{R}^n$, $v = (\lambda, \nu, y)^{\mathrm{T}} \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{s_2}$ и $t \in \mathbb{R}$ положим

$$G(x, t, v) := \begin{pmatrix} G^1(x, u_0 + \nu/\lambda, t) \\ G^2(x, u_0 + \nu/\lambda, t) + y \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Определим множество K формулой

$$K := \{(\lambda, \lambda\nu, y)^{\mathrm{T}} : \lambda \geqslant 0, \quad \nu \in U - \{u_0\}, \quad y \in \mathbb{R}^{s_2}_+\}, \tag{6}$$

где $\mathbb{R}^{s_2}_+$ – конус в $\mathbb{R}^{s_2}$, образованный векторами с неотрицательными компонентами.

Покажем, что множество K является выпуклым замкнутым конусом.

Для произвольных $\mu \geqslant 0$ и $(\lambda, \lambda\nu, y)^{\mathrm{T}} \in K$ имеем $\mu(\lambda, \lambda\nu, y)^{\mathrm{T}} = (\mu\lambda, \mu\lambda\nu, \mu y)^{\mathrm{T}} \in K$, поскольку, во-первых, $\mu\lambda \geqslant 0$, во-вторых, $\nu \in U - \{u_0\}$ и, в-третьих, $\mu y \in \mathbb{R}^{s_2}_+$. Значит, множество K является конусом.

Для произвольных $\mu \in [0, 1]$, $(\lambda, \lambda\nu, y)^{\mathrm{T}} \in K$, $(\lambda', \lambda'\nu', y')^{\mathrm{T}} \in K$ имеем

$$\mu(\lambda, \lambda\nu, y)^{\mathrm{T}} + (1 - \mu)(\lambda', \lambda'\nu', y')^{\mathrm{T}} =$$

$$= \left(\mu\lambda + (1 - \mu)\lambda', \mu\lambda + (1 - \mu)\lambda'\left(\frac{\mu\lambda}{\mu\lambda + (1 - \mu)\lambda'}\nu + \frac{(1 - \mu)\lambda'}{\mu\lambda + (1 - \mu)\lambda'}\nu'\right), \mu y + (1 - \mu)y'\right)^{\mathrm{T}} \in K.$$

Здесь включение следует из неравенства $\mu\lambda + (1 - \mu)\lambda' \geqslant 0$ и включений

$$\frac{\mu\lambda}{\mu\lambda + (1 - \mu)\lambda'}u + \frac{(1 - \mu)\lambda'}{\mu\lambda + (1 - \mu)\lambda'}u' \in U - \{u_0\} \quad \text{и} \quad \mu y + (1 - \mu)y' \in \mathbb{R}^{s_2}_+,$$

вытекающих из выпуклости множеств $U - \{u_0\}$ и $\mathbb{R}^{s_2}_+$ соответственно. Таким образом, конус K является выпуклым.

Возьмём произвольную последовательность $\{(\lambda_j, \lambda_j\nu_j, y_j)^{\mathrm{T}}\} \subset K$, сходящуюся к некоторой точке $(\lambda, z, y)^{\mathrm{T}}$. Так как $\{y_j\} \subset \mathbb{R}^{s_2}_+$ и $\{y_j\} \to y$, то $y \in \mathbb{R}^{s_2}_+$. Рассмотрим два случая: $\lambda = 0$ и $\lambda > 0$. Пусть $\lambda = 0$. Тогда, $z = \lambda \lim\limits_{j \to \infty} \nu_j = 0$ и, значит, $(\lambda, z, y)^{\mathrm{T}} \in K$. Пусть $\lambda > 0$. Тогда поскольку $\{\nu_j\} \to z/\lambda$, $\{\nu_j\} \subset U - \{u_0\}$ и множество $U - \{u_0\}$ замкнуто, то $z/\lambda \in U - \{u_0\}$ и, значит, $(\lambda, z, y)^{\mathrm{T}} = (\lambda, \lambda z/\lambda, y)^{\mathrm{T}} \in K$. Следовательно, множество K замкнуто.

Через G_v обозначим матрицу первых частных производных вектор-функции G по компонентам вектора v. Обозначим также $v_0 := (1, 0, 0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{s_2}$ и

$$\mathcal{K} := K + \operatorname{span}\{v_0\} \quad \text{и} \quad C := G_v(x_0, t_0, v_0)\mathcal{K}. \tag{7}$$

Покажем, что для отображения G и конуса K в точке v_0 выполнено условие регулярности Робинсона по переменной v, т.е. $C = \mathbb{R}^{s_1} \times \mathbb{R}^{s_2}$. Обозначим $A_l = {G^l}_u(x_0, u_0, t_0)$, $l = 1, 2$. Имеем

$$G_v(x_0, t_0, v_0) = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 \\ 0 & A_2 & E \end{pmatrix} \tag{8}$$

(здесь $E : \mathbb{R}^{s_2} \to \mathbb{R}^{s_2}$ – тождественный оператор),

$$\mathcal{K} = \{(\mu, \lambda\nu, y)^{\mathrm{T}} : \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda \geqslant 0, \quad \nu \in U - \{u_0\}, \quad y \in \mathbb{R}^{s_2}_+\}. \tag{9}$$

Следовательно,

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda A_1 \nu \\ y + \lambda A_2 \nu \end{pmatrix} : \lambda \geqslant 0, \quad \nu \in U - \{u_0\}, \quad y \in \mathbb{R}^{s_2}_+ \right\} = \mathbb{R}^{s_1} \times \mathbb{R}^{s_2}.$$

Для доказательства последнего равенства возьмём произвольные $(y_1, y_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{s_1} \times \mathbb{R}^{s_2}$ и покажем, что система

$$\lambda A_1 \nu = y_1, \quad y + \lambda A_2 \nu = y_2 \tag{10}$$

имеет решение $(\lambda, \nu, y)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R} \times (U - \{u_0\}) \times \mathbb{R}^{s_2}_+$. В силу предположения **(R1)** существуют $\gamma > 0$ и $\bar{\nu} \in U - \{u_0\}$ такие, что $\gamma A_1 \bar{\nu} = y_1$. Следовательно,

$$\gamma A_1(\tau\bar{\nu})/\tau = y_1 \quad \text{для всех} \quad \tau \in (0, 1).$$

В силу предположения **(R2)** существует вектор $\bar{\xi} \in U$ такой, что $A_1\bar{\xi} = 0$ и каждая компонента вектора $A_2\bar{\xi}$ отрицательна. Тогда существует $\tau \in (0, 1)$, при котором

$$\gamma A_2(1 - \tau)\bar{\xi}/\tau \leqslant y_2 - \gamma A_2\bar{\nu}$$

покомпонентно. Следовательно, существует $y \in \mathbb{R}^{s_2}_+$ такой, что

$$y + \gamma A_2(\tau\bar{\nu} + (1 - \tau)\bar{\xi})/\tau = y_2.$$

Положим $\lambda := \gamma/\tau$, $\nu := \tau\bar{\nu} + (1-\tau)\bar{\xi}$. Тогда $\lambda \geqslant 0$, $\nu \in U - \{u_0\}$, $y \in \mathbb{R}^{s_2}_+$ и соотношения (10) выполняются.

Таким образом, для отображения G имеют место предположения классической теоремы о неявной функции (см., например, [1, 5]). Поэтому существует окрестность $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ точки (x_0, t_0) и непрерывные отображения $\widetilde{\lambda} : \Omega \to (0, +\infty)$, $\widetilde{\nu} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ и $\widetilde{y} : \Omega \to \mathbb{R}^{s_2}_+$ такие, что

$$G^1(x, u_0 + \widetilde{\nu}(x,t)/\widetilde{\lambda}(x,t), t) = 0, \quad G^2(x, u_0 + \widetilde{\nu}(x,t)/\widetilde{\lambda}(x,t), t) = -\widetilde{y}(x,t),$$

где $(\widetilde{\lambda}(x,t), \widetilde{\nu}(x,t), \widetilde{y}(x,t)) \in K$, $(x,t) \in \Omega$. Положим $\bar{u}(x,t) := u_0 + \widetilde{\nu}(x,t)/\widetilde{\lambda}(x,t)$, $(x,t) \in \Omega$. Тогда

$$G^1(x, \bar{u}(x,t), t) = 0, \quad G^2(x, \bar{u}(x,t), t) \leqslant 0, \quad \bar{u}(x,t) \in U \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \Omega$$

и функция $\bar{u}$ непрерывна. Следовательно, функция $(x,t) \mapsto F(x, \bar{u}(x,t), t)$, $(x,t) \in \Omega$, непрерывна по x, измерима по t и ограничена в некоторой окрестности точки (x_0, t_0). Значит (см., например, [2, с. 214]), существует решение $\bar{x}(\cdot)$ задачи Коши (4), определённое на $[t_0, t_0 + \tau)$ при некотором $\tau > 0$.

В случае $G^2(x_0, u_0, t_0) \neq 0$ доказательство проводится аналогично с заменой G^2 на отображение, полученное вычёркиванием i-х компонент $G^{2,i}$, $i \notin I$, вектор-функции G^2. Теорема доказана.

Замечание 1. Если в задаче (1)–(3) смешанные ограничения типа равенств отсутствуют, то предположения **(R1)** и **(R2)** принимают вид

(R2′) существует вектор $\xi \in U - \{u_0\}$ такой, что

$$({G^2}_u(x_0, u_0, t_0)\xi)_i < 0 \quad \text{для всех} \quad i \in I.$$

Отметим также, что достаточным условием для **(R2′)** (но не необходимым) является условие линейной независимости векторов $({G^2}_u(x_0, u_0, t_0))_i$, $i \in I$.

Рассмотрим управляемую систему (1), (2) с управлением

$$u(t) \in U. \tag{11}$$

Эта система называется *локально разрешимой* в точке (t_0, x_0), если существуют $\tau > 0$, абсолютно непрерывная функция $\widehat{x} : [t_0, t_0 + \tau) \to \mathbb{R}^n$ и измеримая существенно ограниченная функция $\widehat{u} : [t_0, t_0 + \tau) \to \mathbb{R}^m$ такие, что

$$G^1(\widehat{x}(t), \widehat{u}(t), t) = 0, \quad G^2(\widehat{x}(t), \widehat{u}(t), t) \leqslant 0$$

при п.в. t и функция $x = \widehat{x}(\cdot)$ является решением задачи Коши

$$\dot{x} = F(x, \widehat{u}(t), t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Указанную функцию $\widehat{u}(\cdot)$ принято называть *допустимым программным управлением*.

Из локальной разрешимости системы (1)–(3) в точке (x_0, u_0, t_0) следует, что существует допустимое программное управление $\widehat{u}(\cdot)$ системы (1), (2), (11). Действительно, если $\bar{u}(\cdot)$ – допустимое позиционное управление, а $\bar{x}(\cdot)$ – соответствующая траектория, то $\widehat{u}(t) \equiv \bar{u}(t, \bar{x}(t))$ – допустимое программное управление. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно. Проиллюстрируем сказанное примером.

Пример 1. Зададим отображение $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ формулой

$$\Psi(u) := \frac{1}{|u|} \begin{pmatrix} u_1^2 - u_2^2 \\ 2u_1u_2 \end{pmatrix}, \quad u = (u_1, u_2)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^2, \quad u \neq 0, \quad \Psi(0) = 0.$$

Положим $x_0 := 0$, $t_0 := 0$, $u_0 := 0$. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad \Psi(u) = x,$$

т.е. $n = m = 2$, $G^1(x, u, t) = \Psi(u) - x$, $G(x, u, t) \equiv 0$.

Эта система имеет допустимое программное управление $\widehat{u}(t) \equiv 0$. Однако допустимого позиционного управления $\bar{u}$ для рассматриваемой системы не существует. Действительно, если некоторая функция $\bar{u}$ является допустимым позиционным управлением, то она непрерывна, $\bar{u}(0, 0) = 0$ и $\Psi(\bar{u}(x, t)) \equiv x$, т.е. $\bar{u}(\,\cdot\,, 0)$ является непрерывным правым обратным отображением к Ψ в окрестности нуля. Последнее противоречит примеру 2 в [3], в котором было показано, что непрерывного правого обратного отображения к Ψ в окрестности нуля не существует.

В заключение отметим, что для управляемой системы в примере 1 выполняются предположения теоремы о существовании программных допустимых управлений [4, теорема 2]. Предположения [4, теорема 2] слабее предположений теоремы 1. Пример 1 показывает, что в предположениях [4, теорема 2] допустимого программного управления системы (1)–(3) в окрестности заданной точки может не существовать.

2. Регулярность второго порядка. Исследуем вопрос о разрешимости управляемой системы (1)–(3) в случае, когда условия **(R1)** и **(R2)** нарушаются.

Положим

$$\mathcal{V} := \ker {G^1}_u(x_0, u_0, t_0) \bigcap \{v \in \mathbb{R}^m : {G^2}_u(x_0, u_0, t_0)v \leqslant 0\}.$$

Через ${G^l}_{uu}$, $l = 1, 2$, обозначим матрицу вторых частных производных вектор-функции G^l по компонентам вектора u.

Теорема 2. *Пусть отображения F и G^l, $l = 1, 2$, непрерывны, отображения G^l, $l = 1, 2$, дважды непрерывно дифференцируемы по u в окрестности точки (x_0, u_0, t_0). Если выполняются предположения*

(R3) *существует вектор $h \in \mathcal{V} \bigcap (U - \{u_0\})$ такой, что*

$$-{G^1}_{uu}(x_0, u_0, t_0)[h, h] \in {G^1}_u(x_0, u_0, t_0) \operatorname{cone}(U - \{u_0\}), \tag{12}$$

$${G^1}_u(x_0, u_0, t_0) \operatorname{cone}(U - \{u_0\}) + {G^1}_{uu}(x_0, u_0, t_0)[h, \operatorname{cone}(U - \{u_0\}) \bigcap \mathcal{V}] = \mathbb{R}^{s_1}; \tag{13}$$

(R4) *существует вектор* $\xi \in \mathcal{V} \bigcap (U - \{u_0\})$, *для которого*

$$(G^2{}_u(x_0, u_0, t_0)\xi)_i < 0 \ \text{при всех } i \in I \ \text{таких, что } (G^2{}_u(x_0, u_0, t_0)h)_i = 0.$$

Тогда система локально разрешима в точке (x_0, u_0, t_0).

Доказательство. Будем предполагать, что $G^2(x_0, u_0, t_0) = 0$. Если $G^2(x_0, u_0, t_0) \neq 0$, то доказательство проводится аналогично, но с заменой G^2 на вектор-функцию, полученную вычёркиванием i-х компонент $G^{2,i}$, $i \notin I$, вектор-функции G^2.

I. Для произвольных $x \in \mathbb{R}^n$, $v = (\lambda, \nu, y)^{\mathrm{T}} \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{s_2}$, $t \in \mathbb{R}$, определим функцию $G(x, t, v)$ равенством (5). Пусть A_l, $l = 1, 2$, – те же матрицы, что и в доказательстве теоремы 1, а $Q_l := G^l{}_{uu}(x_0, u_0, t_0)$, $l = 1, 2$. Определим множество K формулой (6). В доказательстве теоремы 1 показано, что K является выпуклым замкнутым конусом.

Пусть h – вектор из предположения **(R3)**. Так как $-Q_1[h, h] \in A_1 \operatorname{cone}(U - \{u_0\})$, то существуют число $\gamma > 0$ и вектор $\bar{\nu} \in U - \{u_0\}$, для которых

$$-Q_1[h, h] = \gamma A_1 \bar{\nu}. \tag{14}$$

В силу предположения **(R4)** существует вектор $\xi \in U - \{u_0\}$ такой, что

$$A_1\xi = 0, \quad A_2\xi \leqslant 0 \quad \text{и} \quad (A_2\xi)_i < 0 \quad \text{при всех} \quad i \in I, \quad \text{для которых} \quad (A_2h)_i = 0. \tag{15}$$

Следовательно, существуют числа $\theta > 0$, $\tau \in (0, 1)$ и вектор $y \in \mathbb{R}^{s_2}_+$ такие, что

$$Q_2[h, h] - \gamma A_2\bar{\nu} = y + 2\theta A_2 h + \frac{1 - \tau}{\tau} A_2\xi. \tag{16}$$

Как и выше, положим $v_0 := (1, 0, 0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{s_2}$ и определим множества $\mathcal{K}$ и C равенствами (7). Тогда имеют место представления (8) и (9) и

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda A_1 \nu \\ y + \lambda A_2 \nu \end{pmatrix} : \lambda \geqslant 0, \ \ \nu \in U - \{u_0\}, \ \ y \in \mathbb{R}^{s_2}_+ \right\}.$$

II. Покажем, что отображение G является 2-регулярным в точке (x_0, t_0, v_0) относительно конуса K по направлению вектора $h_0 := (\theta, h, -A_2h)^{\mathrm{T}}$, т.е. что

$$h_0 \in \mathcal{K}, \quad G_v(x_0, t_0, v_0)h_0 = 0,$$

$$-G_{vv}(x_0, t_0, v_0)[h_0, h_0] \in C, \tag{17}$$

$$G_v(x_0, t_0, v_0)\mathcal{K} + G_{vv}(x_0, t_0, v_0)[h_0, \mathcal{K} \bigcap \ker G_v(x_0, t_0, v_0)] = \mathbb{R}^{s_1} \times \mathbb{R}^{s_2}. \tag{18}$$

Включение $h_0 \in \mathcal{K}$ следует из (9) и определений множества $\mathcal{K}$ и вектора h_0. Из равенства (8) и предположения **(R3)** вытекает, что

$$G_v(x_0, t_0, v_0)h_0 = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 \\ 0 & A_2 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ h \\ -A_2h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1h \\ A_2h - A_2h \end{pmatrix} = 0.$$

Докажем включение (17). Имеем

$$G_{vv}(x_0, t_0, v_0)[\delta, \delta] = \begin{pmatrix} -2\delta_\lambda A_1\delta_\nu + Q_1[\delta_\nu, \delta_\nu] \\ -2\delta_\lambda A_2\delta_\nu + Q_2[\delta_\nu, \delta_\nu] \end{pmatrix} \quad \text{для любого} \quad \delta = (\delta_\lambda, \delta_u, \delta_y), \tag{19}$$

$$G_{vv}(x_0, t_0, v_0)[h_0, h_0] = \begin{pmatrix} Q_1[h, h] \\ -2\theta A_2h + Q_2[h, h] \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$-G_{vv}(x_0,t_0,v_0)[h_0,h_0]=-\begin{pmatrix}Q_1[h,h]\\ -2\theta A_2h+Q_2[h,h]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma A_1(\tau\bar\nu+(1-\tau)\xi)/\tau\\ y+\gamma A_2(\tau\bar\nu+(1-\tau)\xi)/\tau\end{pmatrix}\in C.$$

Здесь второе равенство вытекает из равенств (14), $A_1\xi=0$ и (16). Включение (17) доказано.

Докажем соотношение (18). Для этого возьмём произвольную пару $(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^{s_1}\times\mathbb{R}^{s_2}$ и покажем, что уравнение

$$G_v(x_0,t_0,v_0)\zeta+G_{vv}(x_0,t_0,v_0)[h_0,\zeta']=(y_1,y_2)^{\mathrm{т}} \tag{20}$$

имеет решение (ζ,ζ') такое, что $\zeta\in\mathcal{K}$, $\zeta'\in\mathcal{K}\bigcap\ker G_v(x_0,t_0,v_0)$.

Согласно предположению **(R3)** существуют $\gamma>0$, $\nu\in U-\{u_0\}$, $\lambda'>0$, $\nu'\in U-\{u_0\}$, для которых

$$A_1\nu'=0,\quad A_2\nu'\leqslant 0,\quad \gamma A_1\nu+Q_1[h,\lambda'\nu']=y_1. \tag{21}$$

В силу (15) существуют $\tau>0$, $\mu'<0$ и $y\in\mathbb{R}^{s_2}_+$ такие, что

$$\gamma\frac{1-\tau}{\tau}A_2\xi-\mu'A_2h+y=y_2-\gamma A_2\nu+\theta\lambda'A_2\nu'-Q_2[h,\lambda'\nu']. \tag{22}$$

Положим

$$\zeta:=(0,\gamma(\tau\nu+(1-\tau)\xi)/\tau,y)^{\mathrm{т}},\quad \zeta'=(\mu',\lambda'\nu',-\lambda'A_2\nu')^{\mathrm{т}}. \tag{23}$$

Покажем, что $\zeta\in\mathcal{K}$, $\zeta'\in\mathcal{K}\bigcap\ker G_v(x_0,t_0,v_0)$ и пара (ζ,ζ') является решением уравнения (20). Включение $\zeta\in\mathcal{K}$ вытекает из выпуклости множества $U-\{u_0\}$, соотношений $\gamma>0$, $\tau>0$, $y\in\mathbb{R}^{s_2}_+$ и определения множества $\mathcal{K}$. Включение $\zeta'\in\mathcal{K}'$ следует из соотношений $\lambda'>0$, $\nu'\in U-\{u_0\}$, $A_2\nu'\leqslant 0$. Кроме того,

$$G_v(x_0,t_0,v_0)\zeta'=\begin{pmatrix}\lambda'A_1\nu'\\ \lambda'A_2\nu'-\lambda'A_2\nu'\end{pmatrix}=0,$$

поскольку $A_1\nu'=0$. Следовательно, $\zeta'\in\mathcal{K}\bigcap\ker G_v(x_0,t_0,v_0)$. Наконец,

$$G_v(x_0,t_0,v_0)\zeta+G_{vv}(x_0,t_0,v_0)[h_0,\zeta']=$$

$$=\begin{pmatrix}\gamma A_1(\tau\nu+(1-\tau)\xi)/\tau\\ \gamma A_2(\tau\nu+(1-\tau)\xi)/\tau+y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\theta\lambda'A_1\nu'-\mu'A_1h+\lambda'Q_1[h,\nu']\\ -\theta\lambda'A_2\nu'-\mu'A_2h+\lambda'Q_2[h,\nu']\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\gamma A_1\nu+\lambda'Q_1[h,\nu']\\ \gamma A_2(\tau\nu+(1-\tau)\xi)/\tau+y-\theta\lambda'A_2\nu'-\mu'A_2h+\lambda'Q_2[h,\nu']\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}.$$

Здесь первое равенство следует из соотношений (9), (19) и (23), второе – из того, что $A_1\xi=0$, $A_1\nu'=0$ и $A_1h=0$, а третье – из равенств в (21) и (22). Следовательно, пара (ζ,ζ') является решением уравнения (20). Соотношение (18) доказано.

III. Отображение G является 2-регулярным в точке (x_0,t_0,v_0) относительно конуса K по направлению h_0. Следовательно, для G выполнены предположения теоремы о неявной функции в окрестности анормальной точки [1, теорема 3]. Поэтому существуют окрестность $\Omega\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ точки (x_0,t_0) и непрерывные отображения $\widetilde\lambda:\Omega\to(0,+\infty)$, $\widetilde\nu:\Omega\to\mathbb{R}^m$ и $\widetilde y:\Omega\to\mathbb{R}^{s_2}_+$ такие, что

$$G^1(x,u_0+\widetilde\nu(x,t)/\widetilde\lambda(x,t),t)=0,\quad G^2(x,u_0+\widetilde\nu(x,t)/\widetilde\lambda(x,t),t)=-\widetilde y(x,t),$$

где $(\widetilde\lambda(x,t),\widetilde\nu(x,t),\widetilde y(x,t))\in K$, $(x,t)\in\Omega$. Положим $\bar u(x,t):=u_0+\widetilde\nu(x,t)/\widetilde\lambda(x,t)$, $(x,t)\in\Omega$. Тогда

$$G^1(x,\bar u(x,t),t)=0,\quad G^2(x,\bar u(x,t),t)\leqslant 0,\quad \bar u(x,t)\in U\quad\text{для всех}\quad (x,t)\in\Omega$$

и функция $\bar{u}$ непрерывна. Следовательно, функция $(x,t) \mapsto F(x,\bar{u}(x,t),t)$, $(x,t) \in \Omega$, непрерывна. Значит (см., например, [2, с. 214]), существует решение $\bar{x}(\cdot)$ задачи Коши (4), определённое на $[t_0, t_0+\tau)$ при некотором $\tau > 0$. Теорема доказана.

Замечание 2. Если в задаче (1)–(3) смешанные ограничения типа неравенств отсутствуют, то предположение **(R3)** является достаточным для локальной разрешимости системы (1)–(3) в точке (x_0, u_0, t_0).

Замечание 3. Теорема 2 даёт достаточные условия локальной разрешимости управляемой системы также и в случае, когда условия регулярности **(R1)** и **(R2)** нарушаются. Если же условия **(R1)** и **(R2)** выполняются, то выполняются и условия **(R3)** и **(R4)**. Покажем это.

Пусть выполнены предположения **(R1)** и **(R2)**. Положим $h := 0$. Тогда

$$-G^1{}_{uu}(x_0,u_0,t_0)[h,h] = 0, \quad G^1{}_{uu}(x_0,u_0,t_0)[h,v] = 0 \quad \text{для любого} \quad v \in \mathbb{R}^m.$$

Кроме того, из предположения **(R1)** следует, что

$$G^1{}_u(x_0,u_0,t_0)\,\mathrm{cone}\,(U - \{u_0\}) = \mathbb{R}^{s_1}.$$

Поэтому

$$-G^1{}_{uu}(x_0,u_0,t_0)[h,h] = 0 \in G^1{}_u(x_0,u_0,t_0)\,\mathrm{cone}\,(U-\{u_0\});$$

$$G^1{}_u(x_0,u_0,t_0)\,\mathrm{cone}\,(U-\{u_0\}) + G^1{}_{uu}(x_0,u_0,t_0)[h,\mathrm{cone}\,(U-\{u_0\}) \bigcap \mathcal{V}] =$$

$$= G^1{}_u(x_0,u_0,t_0)\,\mathrm{cone}\,(U-\{u_0\}) + \{0\} = \mathbb{R}^{s_1}.$$

Таким образом, предположение **(R3)** выполняется.

В силу предположения **(R2)** существует вектор $\xi \in U - \{u_0\}$ такой, что $G^1{}_u(x_0,u_0,t_0)\xi = 0$ и

$$(G^2{}_u(x_0,u_0,t_0)\xi)_i < 0 \quad \text{для всех} \quad i \in I.$$

Значит, $\xi \in \mathcal{V} \bigcap (U - \{u_0\})$ и, следовательно, предположение **(R4)** также выполняется.

Приведём пример управляемой системы, к которой применима теорема 2 и неприменима теорема 1.

Пример 2. Положим $G^1(x,u,t) := u_1^2 - u_2^2 - t|x|$, $F(x,u,t) = u$, $x \in \mathbb{R}^2$, $u = (u_1,u_2)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$, $U := \mathbb{R}^2$, $x_0 = 0$, $u_0 = 0$, $t_0 = 0$. Тогда система (1)–(3) примет вид

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad u_1^2 - u_2^2 - t|x| = 0.$$

Для этой системы предположение **(R1)** нарушается, поскольку

$$G^1{}_u(x_0,u_0,t_0) = 0.$$

Покажем, что предположение **(R3)** выполняется.

Положим $h := (1,1)^{\mathrm{т}}$. Имеем $V = \mathbb{R}^2$, $\mathrm{cone}\,(U - \{u_0\}) = \mathbb{R}^2$,

$$G^1{}_{uu}(x_0,u_0,t_0)[u,v] = 2u_1v_1 - 2u_2v_2 \quad \text{для всех} \quad u = (u_1,u_2)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{и} \quad v = (v_1,v_2)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^2.$$

Следовательно,

$$-G^1{}_{uu}(x_0,u_0,t_0)[h,h] = 0 \in \{0\} = G^1{}_u(x_0,u_0,t_0)\,\mathrm{cone}\,(U-\{u_0\}),$$

$$G^1{}_u(x_0,u_0,t_0)\,\mathrm{cone}\,(U-\{u_0\}) + G^1{}_{uu}(x_0,u_0,t_0)[h,\mathrm{cone}\,(U-\{u_0\}) \bigcap \mathcal{V}] =$$

$$= G^1{}_{uu}(x_0,u_0,t_0)[h,\mathbb{R}^2] = \{2v_1 - 2v_2 : (v_1,v_2)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}.$$

Значит, в рассматриваемом примере предположение **(R3)** выполняется. Поэтому в силу теоремы 2 (см. замечание 2) система разрешима в точке (x_0,u_0,t_0).

В заключение приведём простой пример, иллюстрирующий существенность условий регулярности **(R3)** и **(R4)**. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad u^2 + t^2 \leqslant 0.$$

Очевидно, что эта система не разрешима в точке $(0, 0, 0)$ и предположения **(R3)** и **(R4)** для этой системы нарушаются.

Результаты п. 1 получены Арутюновым А.В. при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00042), результаты п. 2 – Жуковским С.Е. при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МД-2658.2021.1.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арутюнов А.В.* Теорема о неявной функции без априорных предположений нормальности // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2006. Т. 46. № 2. С. 205–215.
2. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., 1977.
3. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Существование обратных отображений и их свойства // Тр. МИАН. 2010. Т. 271. С. 18–28.
4. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Локальная разрешимость управляемых систем со смешанными ограничениями // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1561–1570.
5. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М., 1979.

Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 04.11.2021 г.
После доработки 04.11.2021 г.
Принята к публикации 07.02.2022 г.

EDN: AAKZHT
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 260–269

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.8

ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ ПОИМКИ И ПОСТРОЕНИЕ СТРАТЕГИИ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ДВУХ ЛИЦ

© 2022 г. К. А. Щелчков

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается дифференциальная игра двух лиц – преследователя и убегающего, описываемая нелинейной автономной управляемой системой дифференциальных уравнений в нормальной форме, правая часть которой представляет собой сумму двух функций, одна из которых зависит только от фазовой переменной и управления преследователя, а другая – только от фазовой переменной и управления убегающего. Множество значений управления преследователя является конечным, а множество значений управления убегающего – компактом. Цель преследователя состоит в приведении траектории системы из начального положения в любую наперёд заданную окрестность нуля за конечное время. Стратегия преследователя конструируется как кусочно-постоянная функция со значениями в заданном конечном множестве, для построения которой разрешается использовать лишь информацию о значении текущих фазовых координат. Управление убегающего – измеримая функция, для построения которой нет ограничений по доступной информации. Показано, что для перевода системы в любую наперёд заданную окрестность нуля преследователю достаточно использовать стратегию с постоянным шагом разбиения временно́го промежутка. Величина фиксированного шага разбиения найдена в явном виде. Выделен класс систем, для которых получена оценка времени перевода из произвольного начального положения в заданную окрестность нуля. Оценка является неулучшаемой в некотором точно указанном смысле. В решении существенно используется понятие положительного базиса векторного пространства.

DOI: 10.31857/S037406412202011X

Введение. Дифференциальные игры двух лиц, рассмотренные первоначально Р.Ф. Айзексом [1], в настоящее время представляют собой достаточно развитую теорию, имеющую многочисленные практические приложения [2–7]. В ней разработаны методы решения различных классов игровых задач: метод Айзекса, основанный на анализе некоторого уравнения в частных производных и его характеристик, метод экстремального прицеливания Красовского, метод Понтрягина и другие. Н.Н. Красовским и его научной школой создана теория позиционных игр, в основе которой лежит понятие максимального стабильного моста и правило экстремального прицеливания. Однако эффективное построение таких мостов для реальных конфликтно управляемых процессов, в первую очередь, нелинейных дифференциальных игр, весьма затруднительно или даже невозможно. Удобнее строить мосты, не являющиеся максимальными, но обладающие свойством стабильности и дающие эффективно реализуемые процедуры управления для отдельных классов игр. Достаточные условия разрешимости задачи преследования в нелинейном примере Л.С. Понтрягина получены в [8]. В работе [9] представлены достаточные условия разрешимости задачи преследования в нелинейной дифференциальной игре при некоторых дополнительных условиях на вектограмму системы и терминальное множество. Приближённое построение стабильных мостов в нелинейных дифференциальных играх, в том числе численно, рассматривается, в частности, в работах [10, 11].

В работе [12] введено понятие положительного базиса векторного пространства, которое в работах [12, 13] эффективно использовалось для исследования свойства управляемости нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями в конечномерном евклидовом пространстве. Свойства положительного базиса в работах [14–16] использовались для исследования управляемых систем на многообразиях, а в работах [17–21] – для исследования задачи преследования группой преследователей одного или нескольких убегающих в линейных дифференциальных играх с равными возможностями игроков. В работе [22] получены достаточные

условия разрешимости задачи поимки для дифференциальной игры двух лиц, описываемой нелинейной дифференциальной системой первого порядка при дискретном управлении и с неполной информацией. Доказано, что существует окрестность нуля, из каждой точки которой происходит поимка.

В данной работе в продолжение исследования [22] получены следующие результаты. Показано, что для перевода системы в любую наперёд заданную окрестность нуля достаточно использовать стратегию с постоянным шагом разбиения временно́го интервала. Выделен класс систем, для которого получена оценка времени поимки из заданного начального положения, являющаяся неулучшаемой в некотором описанном в работе смысле. Свойства положительного базиса векторного пространства играют в дальнейшем существенную роль.

1. Постановка задачи. В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра двух лиц: преследователя P и убегающего E. Динамика игры описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x,u) + g(x,v), \quad u \in U, \quad v \in V, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^k$ – фазовый вектор, u, v – управляющие воздействия. Множество $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ конечно, $u_i \in \mathbb{R}^l$, $i = \overline{1,m}$; множество $V \subset \mathbb{R}^s$ – компакт. Функция $f : \mathbb{R}^k \times U \to \mathbb{R}^k$ – для каждого $u \in U$ липшицева по x. Функция $g : \mathbb{R}^k \times V \to \mathbb{R}^k$ – липшицева по совокупности переменных, т.е. существуют положительные числа $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_m$, L_2 такие, что

$$\|f(x^1,u_i) - f(x^2,u_i)\| \leqslant \overline{L}_i \|x^1 - x^2\|, \quad x^1, x^2 \in \mathbb{R}^k, \quad i = \overline{1,m},$$

$$\|g(x^1,v^1) - g(x^2,v^2)\| \leqslant L_2(\|x^1 - x^2\| + \|v^1 - v^2\|), \quad x^1, x^2 \in \mathbb{R}^k, \quad v^1, v^2 \in V. \tag{2}$$

Здесь и всюду далее норма считается евклидовой. Обозначим $L_1 = \max\{\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_m\}$.

Под разбиением σ промежутка $[0,T]$ будем понимать конечное множество $\{\tau_q\}_{q=0}^{\eta}$ точек этого промежутка такое, что $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_\eta = T$.

Определение 1. *Кусочно-постоянной стратегией* W преследователя P называется пара (σ, W_σ), где $\sigma = \{\tau_q\}_{q=0}^{n}$ – разбиение промежутка $[0,T]$, а W_σ – семейство отображений d_r, $r = \overline{0,\eta-1}$, ставящих в соответствие парам $(\tau_r, x(\tau_r)) \in [0,T] \times \mathbb{R}^k$ постоянное управление $\overline{u}_r(t) \equiv \overline{u}_r \in U$, $t \in [\tau_r, \tau_{r+1})$.

Под *управлением убегающего* понимаем произвольную измеримую функцию $v : [0,\infty) \to V$.

Обозначим данную игру через $\Gamma(x_0)$.

Определение 2. Будем говорить, что в игре $\Gamma(x_0)$ *происходит* ε*-поимка*, если существует $T > 0$ такое, что для любого $\hat{\varepsilon} > 0$ существует кусочно-постоянная стратегия W преследователя P такая, что для любого допустимого управления убегающего $v(\cdot)$ выполняется неравенство $\|x(\tau)\| < \hat{\varepsilon}$ для некоторого $\tau \in [0,T]$.

Целью преследователя является осуществление ε-поимки.

Целью убегающего – воспрепятствовать этому.

Определение 3 [12]. Совокупность векторов $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^k$ называется *положительным базисом в* $\mathbb{R}^k$, если для любой точки $\xi \in \mathbb{R}^k$ существуют неотрицательные числа $\mu_1, \ldots, \mu_n$ такие, что $\xi = \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i$.

Используем следующие обозначения: $\operatorname{Int} A$ – внутренность множества A; $\operatorname{co} A$ – выпуклая оболочка множества A; $O_\varepsilon(x)$ – ε-окрестность точки x; $D_\varepsilon(x)$ – замкнутый шар радиуса ε с центром в точке x.

Справедлива следующая теорема о поимке [22].

Теорема 1 [22]. *Пусть векторы* $f(0,u_1), \ldots, f(0,u_m)$ *образуют положительный базис и имеют место включения* $-g(0,V) \subset \operatorname{Int}(\operatorname{co}\{f(0,u_1), \ldots, f(0,u_m)\})$. *Тогда существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для любой точки* $x_0 \in O_{\varepsilon_0}(0)$ *в игре* $\Gamma(x_0)$ *происходит* ε*-поимка.*

Замечание 1. Согласно доказательству теоремы 1 движение, порождаемое выигрышной стратегией преследователя, находится внутри шара $D_{x_0}(0)$. Поэтому достаточно считать функции $f(\cdot,\cdot)$, $g(\cdot,\cdot)$ определёнными в некоторой окрестности нуля фазового пространства. При этом данные функции могут быть локально липшицевы в указанном выше смысле.

Замечание 2. Без ограничения общности можно считать, что $U = \{1, \dots, m\}$, так как управление преследователя на интервалах разбиения постоянно, т.е. функция f имеет вид $f(x, j) = f_j(x)$, где $f_j \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ – липшицева по x функция. Кроме того, множество U может быть произвольным непустым подмножеством в $\mathbb{R}^l$ при условии, что для каждого $u \in U$ функция f является липшицевой по x. В этом случае, если существует конечный набор величин $\{u_1, \dots, u_m\} \subset U$, который удовлетворяет условию теоремы 1, то происходит ε-поимка.

2. Стратегия поимки, сконструированная в [22]. Приведём выигрышную стратегию преследователя, найденную в [22], сопутствующие обозначения и некоторые установленные в доказательстве теоремы 1 результаты. Считаем, что условия этой теоремы выполнены. Существование указанных в данном пункте параметров установлено в [22] при доказательстве теоремы 1.

Существуют $\alpha > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ такие, что для любых точки $x \in D_{\varepsilon_0}(0)$ и вектора $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, найдётся $i \in \{1, \dots, m\}$, для которого при любом $v \in V$ выполнено неравенство

$$\langle f(x, u_i) + g(x, v), p\rangle \geqslant \alpha,$$

где

$$\alpha = \min_{x \in D_{\varepsilon_0}(0)} \min_{\|p\|=1} \min_{v \in V} \max_{i=\overline{1,m}} \langle f(x, u_i) + g(x, v), p\rangle.$$

Существует число $h > 0$ такое, что для каждого $x_0 \in D_{\varepsilon_0}(0) \setminus \{0\}$ и любого $v \in V$ справедливо неравенство

$$\langle f(x, \overline{u}_0) + g(x, v), -x_0/\|x_0\|\rangle \geqslant \alpha/2 = \overline{\alpha} \tag{3}$$

при всех $x \in D_h(x_0)$. Здесь $\overline{u}_0$ находится из следующего максимума:

$$\max_{u \in U} \langle f(x_0, u), -x_0/\|x_0\|\rangle = \langle f(x_0, \overline{u}_0), -x_0/\|x_0\|\rangle. \tag{4}$$

При этом достаточно взять $h = \alpha/(2L_1 + 2L_2)$.

Пусть D – число, при котором имеет место неравенство $\|f(x, u_i) + g(x, v)\| \leqslant D$ для всех $x \in D_{\varepsilon_0}(0)$, любого $v \in V$ и каждого $i \in \{1, \dots, m\}$.

Обозначим

$$\Delta(\xi) = \min\{\overline{\alpha}\|\xi\|/D^2, h/D\}. \tag{5}$$

В работе [22] показано, что при реализации стратегии преследователя длина отрезка разбиения $[\tau_j, \tau_{j+1})$, $j = 0, 1, \dots$, выбирается с использованием определённой равенством (5) функции $\Delta(\cdot)$ и задаётся равенством $\tau_{j+1} - \tau_j = \Delta(x(\tau_j))$. Управление $\overline{u}_j$ находится из следующего максимума:

$$\max_{u \in U} \langle f(x(\tau_j), u), -x(\tau_j)/\|x(\tau_j)\|\rangle = \langle f(x(\tau_j), \overline{u}_j), -x(\tau_j)/\|x(\tau_j)\|\rangle. \tag{6}$$

Для каждого $j = 0, 1, \dots$ справедлива следующая оценка:

$$\|x(\tau_{j+1})\|^2 = \|x(\tau_j)\|^2 + \left\| \int_{\tau_j}^{\tau_j + \Delta(x(\tau_j))} (f(x(s), \overline{u}_j) + g(x(s), v(s)))\, ds \right\|^2 +$$

$$+ 2 \int_{\tau_j}^{\tau_j + \Delta(x(\tau_j))} \langle f(x(s), \overline{u}_j) + g(x(s), v(s)), x(\tau_j)\rangle\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \|x(\tau_j)\|^2 + D^2(\Delta(x(\tau_j)))^2 - 2\Delta(x(\tau_j))\overline{\alpha}\|x(\tau_j)\| \leqslant \|x(\tau_j)\|^2 - \Delta(x(\tau_j))\overline{\alpha}\|x(\tau_j)\|. \tag{7}$$

Кроме того, $\|x(t)\| < \|x(\tau_j)\|$, $t \in (\tau_j, \tau_{j+1})$.

При использовании данной стратегии происходит ε-поимка. В доказательстве теоремы 1 (см. [22]) получена общая, т.е. для всех $x_0 \in D_{\varepsilon_0}(0) \setminus \{0\}$, верхняя оценка времени ε-поимки.

Геометрический смысл такого выбора параметров для описанной выше стратегии заключается в следующем.

Пусть начальное положение находится в точке $b \in D_{\varepsilon_0}(0)$ (рис. 1). Управление преследователя выбирается в соответствии с максимумом (4), где $x_0 = b$. Тогда для всех $t \in [0, \Delta(b)]$ справедливо включение $x(t) \in D_h(b)$ (рис. 1, малая окружность). Поэтому до момента $\Delta(b)$ для скорости будет справедливо неравенство (3), т.е. вектор скорости будет находиться в выпуклом конусе, определяемом положительным числом $\overline{\alpha}$. Таким образом, траектория также будет содержаться в выпуклом конусе, определяемом числом $\overline{\alpha}$, но с вершиной в точке b (рис. 1, лучи, выходящие из точки b). В силу определения функции $\Delta(\cdot)$ к моменту $\Delta(b)$ траектория в конусе уйдёт не дальше некоторого расстояния (рис. 1, большая дуга). Причём это расстояние равно половине длины произвольной хорды, проведённой из точки b вдоль границы конуса. Так как в силу (3) для всех $t \in [0, \Delta(b)]$ верно неравенство $\|\dot{x}(t)\| \geqslant \overline{\alpha}$, то в момент $\Delta(b)$ точка траектории будет находиться в конусе на расстоянии от точки b не ближе, чем $\overline{\alpha}\Delta(b)$ (рис. 1, малая дуга). Из описанного выше следует, что к моменту $\Delta(b)$ траектория системы будет находиться в закрашенной области (рис. 1).

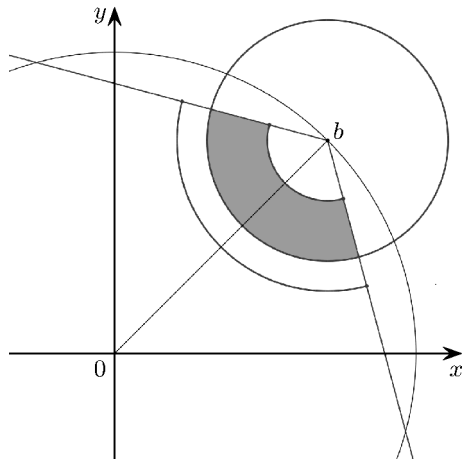

Рис. 1. Геометрический смысл выбора параметров.

3. Гарантированное время поимки. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество систем, удовлетворяющих постановке задачи и теореме 1. Другими словами, под элементом $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$ будем понимать набор $(f(\cdot,\cdot), g(\cdot,\cdot), U, V)$, для которого выполнены следующие условия:

1) $k, l, s, m \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$;

2) множество $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ конечно, $u_i \in \mathbb{R}^l$, $i = \overline{1,m}$;

3) множество $V \subset \mathbb{R}^s$ – компакт;

4) функция $f : \mathbb{R}^k \times U \to \mathbb{R}^k$ при каждом $u \in U$ липшицева по x, функция $g : \mathbb{R}^k \times V \to \mathbb{R}^k$ липшицева по совокупности переменных, т.е. существуют положительные числа L_1, L_2 такие, что выполняются оценки (2);

5) векторы $f(0,u_1)$, $\ldots$, $f(0,u_m)$ образуют положительный базис в $\mathbb{R}^k$, и имеет место включение $-g(0,V) \subset \operatorname{Int}(\operatorname{co}\{f(0,u_1), \ldots, f(0,u_m)\})$.

Дифференциальную игру (1), соответствующую четвёрке $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$ и начальному положению x_0, обозначим $\Gamma(\mathfrak{s}, x_0)$.

Пусть $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$. Определим число $\varepsilon_0(\mathfrak{s})$ условием

$$\varepsilon_0(\mathfrak{s}) = \sup\{r \geqslant 0 : -g(x,V) \subset \operatorname{Int}(\operatorname{co}\{f(x,u_1), \ldots, f(x,u_m)\}), \quad x \in D_r(0)\}.$$

Далее, определим множество $O(\mathfrak{s}) \subset \mathbb{R}^k$ равенством

$$O(\mathfrak{s}) = \begin{cases} O_{\varepsilon_0(\mathfrak{s})}(0), & \varepsilon_0(\mathfrak{s}) < +\infty, \\ \mathbb{R}^k, & \varepsilon_0(\mathfrak{s}) = +\infty. \end{cases}$$

Отметим, что согласно теореме 1 для каждого $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$ и любого $x_0 \in O(\mathfrak{s})$ в игре $\Gamma(\mathfrak{s}, x_0)$ происходит ε-поимка.

Обозначим

$$D(\mathfrak{s}, r) = \max\{\|f(x,u) + g(x,v)\| : x \in D_r(0), u \in U, v \in V\},$$
$$\alpha(\mathfrak{s}, x_0) = \min_{x \in D_{\|x_0\|}(0)} \min_{\|p\|=1} \min_{v \in V} \max_{i=\overline{1,m}} \langle f(x,u_i) + g(x,v), p\rangle. \tag{8}$$

Для $\mu \in [0,1]$ определим следующие функции:

$$h(\mathfrak{s}, \mu) = \frac{\mu\alpha(\mathfrak{s}, x_0)}{2(L_1 + L_2)} \tag{9}$$

и

$$\overline{\alpha}(\mathfrak{s}, \mu) = \alpha(\mathfrak{s}, x_0)\left(1 - \frac{\mu}{2}\right). \tag{10}$$

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$, $x_0 \in O(\mathfrak{s})$, $x_0 \neq 0$, L_1 *и* L_2 *– константы Липшица, соответствующие четвёрке* $\mathfrak{s}$. *Тогда в игре* $\Gamma(\mathfrak{s}, x_0)$ *для любого* $\delta > 0$, $\delta < \|x_0\|$, *траекторию системы можно перевести в шар* $D_\delta(0)$, *используя кусочно-постоянную стратегию преследователя с фиксированным шагом разбиения* $\Delta = h(\mathfrak{s}, \mu_0)/D(\mathfrak{s}, \|x_0\|)$ *за время*

$$T_\delta \leqslant \frac{\|x_0\|^2 - \delta^2}{2\overline{\alpha}(\mathfrak{s}, \mu_0)\delta - (D(\mathfrak{s}, \|x_0\|))^2\Delta} + \Delta,$$

где

$$\mu_0 = \min\{1, (L_1 + L_2)\delta/D(\mathfrak{s}, \|x_0\|)\}. \tag{11}$$

Доказательство. Так как четвёрка $\mathfrak{s}$ фиксирована, то для упрощения записи обозначим: $D(\mathfrak{s}, \|x_0\|) = D$, $\alpha(\mathfrak{s}, x_0) = \alpha(x_0)$, $h(\mathfrak{s}, \mu) = h(\mu)$, $\overline{\alpha}(\mathfrak{s}, \mu) = \overline{\alpha}(\mu)$.

1⁰. В этом пункте доказательства получим оценки, соответствующие функциям $\alpha(x_0)$, $h(\mu)$, $\overline{\alpha}(\mu)$.

Пусть $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, $\mu \in (0, 1]$, $\xi \in D_{\|x_0\|}(0)$, $\overline{x} \in D_{h(\mu)}(\xi)$. Выберем такое значение $\overline{u} \in U$, на котором достигается следующий максимум:

$$\max_{u \in U} \langle f(\xi, u), p\rangle = \langle f(\xi, \overline{u}), p\rangle.$$

Докажем, что для любого $v \in V$ справедливо неравенство

$$\langle f(\overline{x}, \overline{u}) + g(\overline{x}, v), p\rangle \geqslant \overline{\alpha}(\mu). \tag{12}$$

Используя определения (8), оценим скалярное произведение в (12):

$$\begin{gathered}
\langle f(\overline{x}, \overline{u}) + g(\overline{x}, v), p\rangle = \langle f(\overline{x}, \overline{u}) - f(\xi, \overline{u}) + f(\xi, \overline{u}) + g(\overline{x}, v) - g(\xi, v) + g(\xi, v), p\rangle = \\
= \langle f(\xi, \overline{u}) + g(\xi, v), p\rangle + \langle f(\overline{x}, \overline{u}) - f(\xi, \overline{u}), p\rangle + \langle g(\overline{x}, v) - g(\xi, v), p\rangle \geqslant \\
\geqslant \alpha(x_0) - \|f(\overline{x}, \overline{u}) - f(\xi, \overline{u})\| - \|g(\overline{x}, v) - g(\xi, v)\| \geqslant \\
\geqslant \alpha(x_0) - L_1\|\overline{x} - \xi\| - L_2\|\overline{x} - \xi\| \geqslant \alpha(x_0) - (L_1 + L_2)h(\mu) = \\
= \alpha(x_0) - (L_1 + L_2)\frac{\mu\alpha(x_0)}{2(L_1 + L_2)} = \overline{\alpha}(\mu).
\end{gathered}$$

Таким образом, неравенство (12) доказано.

Заметим, что функция $h(\mu)$ является строго возрастающей, функция $\overline{\alpha}(\mu)$ – строго убывающей и имеют место двойные неравенства

$$0 \leqslant h(\mu) \leqslant \frac{\alpha(x_0)}{2(L_1 + L_2)} \quad \text{и} \quad \frac{\alpha(x_0)}{2} \leqslant \overline{\alpha}(\mu) \leqslant \alpha(x_0), \quad \mu \in [0, 1]. \tag{13}$$

2⁰. В этом пункте доказательства построим стратегию, переводящую траекторию системы в шар $D_\delta(0)$.

В силу определений (9), (11) и неравенств (13) справедлива оценка

$$h(\mu_0) \leqslant \overline{\alpha}(\mu_0)\delta/D. \tag{14}$$

Определим фиксированный шаг разбиения $\Delta = h(\mu_0)/D$. Фиксированное управление преследователя $\overline{u}_j \in U$ на интервале $[\tau_j, \tau_{j+1})$, $j = \overline{0, \eta}$, будем выбирать из условия (6).

Оценим квадрат нормы, используя неравенства (12), (14), (8). Для всех $t \in (0, \tau_1]$ имеем

$$\|x(t)\|^2 = \left\| x_0 + \int_0^t (f(x(s), \overline{u}_0) + g(x(s), v(s)))\, ds \right\|^2 =$$

$$= \|x_0\|^2 + \left\| \int_0^t (f(x(s), \overline{u}_0) + g(x(s), v(s)))\, ds \right\|^2 + 2\int_0^t \langle f(x(s), \overline{u}_0) + g(x(s), v(s)), x_0\rangle\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \|x_0\|^2 + D^2t^2 - 2t\overline{\alpha}(\mu_0)\|x_0\| \leqslant$$
$$\leqslant \|x_0\|^2 + D^2t\Delta - 2tDh(\mu_0) = \|x_0\|^2 + Dth(\mu_0) - 2tDh(\mu_0) < \|x_0\|^2. \tag{15}$$

Отметим, что при рассматриваемых условиях в силу выбора (6) управления преследователя траектория системы не покидает шар $D_{\|x_0\|}(0)$. Поэтому при выводе неравенств (15) корректно оценивать норму скорости системы величиной $D = D(\mathfrak{s}, \|x_0\|)$.

В силу (15) справедливо следующее неравенство:

$$\|x(\tau_1)\|^2 \leqslant \|x_0\|^2 + D^2\Delta^2 - 2\Delta\overline{\alpha}(\mu_0)\delta < \|x_0\|^2. \tag{16}$$

Пусть $x(\tau_1), \ldots, x(\tau_{\eta-1}) \notin D_\delta(0)$. Тогда аналогично (16) для всех $j = \overline{1,\eta}$ справедливы неравенства $\|x(\tau_j)\|^2 \leqslant \|x(\tau_{j-1})\|^2 + D^2\Delta^2 - 2\Delta\overline{\alpha}(\mu_0)\delta < \|x(\tau_{j-1})\|^2$. Следовательно,

$$\|x(\tau_\eta)\|^2 \leqslant \|x_0\|^2 + \eta D^2\Delta^2 - 2\eta\Delta\overline{\alpha}(\mu_0)\delta.$$

Отсюда, если $\|x_0\|^2 + \eta D^2\Delta^2 - 2\eta\Delta\overline{\alpha}(\mu_0)\delta \leqslant \delta^2$, то $x(\tau_\eta) \in D_\delta(0)$. Таким образом,

$$\eta \leqslant \left[\frac{\|x_0\|^2 - \delta^2}{2\Delta\overline{\alpha}(\mu_0)\delta - D^2\Delta^2}\right] + 1. \tag{17}$$

Здесь $[\cdot]$ – целая часть числа. Если η строго больше правой части неравенства (17), то $x(\tau_{\eta-1}) \in D_\delta(0)$, что противоречит предположению $x(\tau_{\eta-1}) \notin D_\delta(0)$.

Оценим величину τ_η:

$$\tau_\eta = \eta\Delta \leqslant \left(\left[\frac{\|x_0\|^2 - \delta^2}{2\Delta\overline{\alpha}(\mu_0)\delta - D^2\Delta^2}\right] + 1\right)\Delta \leqslant \left(\frac{\|x_0\|^2 - \delta^2}{2\Delta\overline{\alpha}(\mu_0)\delta - D^2\Delta^2} + 1\right)\Delta = \frac{\|x_0\|^2 - \delta^2}{2\overline{\alpha}(\mu_0)\delta - D^2\Delta} + \Delta.$$

Таким образом,

$$T_\delta \leqslant \frac{\|x_0\|^2 - \delta^2}{2\overline{\alpha}(\mu_0)\delta - D^2\Delta} + \Delta,$$

где $\mu_0 = \min\{1, (L_1 + L_2)\delta/D\}$, $\Delta = h(\mu_0)/D$. Теорема доказана.

Обозначим

$$T(\mathfrak{s}, x_0) = \|x_0\|/\alpha(\mathfrak{s}, x_0).$$

Теорема 3. *Для множества $\mathfrak{S}$ справедливы следующие свойства.*

1) Для любого $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$ и любого $x_0 \in O(\mathfrak{s})$ в игре $\Gamma(\mathfrak{s}, x_0)$ происходит ε-поимка за время $T(\mathfrak{s}, x_0)$.

2) Существуют $\mathfrak{c} \in \mathfrak{S}$ и $x_0 \in O(\mathfrak{c})$, для которых за любое время $\overline{T} < T(\mathfrak{c}, x_0)$ в игре $\Gamma(\mathfrak{c}, x_0)$ ε-поимка не происходит.

Доказательство. Так как четвёрка $\mathfrak{s}$ фиксирована, то для упрощения записи обозначим: $D(\mathfrak{s}, \|x_0\|) = D$, $\alpha(\mathfrak{s}, x_0) = \alpha(x_0)$, $h(\mathfrak{s}, \mu) = h(\mu)$, $\overline{\alpha}(\mathfrak{s}, \mu) = \overline{\alpha}(\mu)$, $T(x_0) = T(\mathfrak{s}, x_0)$.

1^0. В этом пункте доказательства построим стратегию поимки, используя теорему 2.

Зафиксируем произвольно число $\omega \in (0, 1)$. Выберем μ_1 таким, что

$$0 < \mu_1 \leqslant \min\{1, (L_1 + L_2)\omega\|x_0\|/D\}. \tag{18}$$

Тогда аналогично (14) справедлива оценка

$$h(\mu_1) \leqslant \overline{\alpha}(\mu_1)\omega\|x_0\|/D. \tag{19}$$

Обозначим $\Delta_1 = h(\mu_1)/D$. Аналогично п. **2^0** доказательства теоремы 2, используя фиксированный шаг Δ_1 разбиения, показывается, что траектория системы переводится в шар $D_{\omega\|x_0\|}(0)$ за время T_1, где

$$T_1 \leqslant \frac{\|x_0\|^2(1 - \omega^2)}{2\overline{\alpha}(\mu_1)\omega\|x_0\| - D^2\Delta_1} + \Delta_1.$$

Далее, обозначим $\mu_2 = \omega\mu_1$. Тогда $h(\mu_2) = \omega h(\mu_1)$. Следовательно, так как $\overline{\alpha}(\cdot)$ является строго убывающей функцией, то в силу (19) справедлива оценка

$$h(\mu_2) \leqslant \overline{\alpha}(\mu_1)\omega^2\|x_0\|/D \leqslant \overline{\alpha}(\mu_2)\omega^2\|x_0\|/D. \tag{20}$$

Обозначим $\Delta_2 = h(\mu_2)/D$. Таким образом, используя фиксированный шаг Δ_2 разбиения, видим, что траектория системы переводится в шар $D_{\omega^2\|x_0\|}(0)$ из положения $x(T_1)$ за время T_2. Так как $\|x(T_1)\| \leqslant \omega\|x_0\|$, то

$$T_2 \leqslant \frac{\|x(T_1)\|^2 - \omega^4\|x_0\|^2}{2\overline{\alpha}(\mu_2)\omega^2\|x_0\| - D^2\Delta_2} + \Delta_2 \leqslant \frac{\omega^2\|x_0\|^2(1-\omega^2)}{2\overline{\alpha}(\mu_2)\omega^2\|x_0\| - D^2\Delta_2} + \Delta_2. \tag{21}$$

Далее, повторяем процедуру. Обозначим $\mu_3 = \omega\mu_2$, тогда $h(\mu_3) = \omega h(\mu_2)$ и в силу (20) справедливо неравенство

$$h(\mu_3) \leqslant \overline{\alpha}(\mu_2)\omega^3\|x_0\|/D \leqslant \overline{\alpha}(\mu_3)\omega^3\|x_0\|/D.$$

Фиксированный шаг $\Delta_3 = h(\mu_3)/D$. Аналогично (21) оценим T_3:

$$T_3 \leqslant \frac{\omega^4\|x_0\|^2(1-\omega^2)}{2\overline{\alpha}(\mu_3)\omega^3\|x_0\| - D^2\Delta_3} + \Delta_3.$$

И так далее для каждого $q \in \mathbb{N}$. В результате получаем

$$\mu_q = \omega^{q-1}\mu_1, \quad h(\mu_q) = \omega^{q-1}h(\mu_1), \quad \Delta_q = \omega^{q-1}\Delta_1,$$

$$T_q \leqslant \frac{\omega^{2(q-1)}\|x_0\|^2(1-\omega^2)}{2\overline{\alpha}(\mu_q)\omega^q\|x_0\| - D^2\Delta_q} + \Delta_q. \tag{22}$$

В силу построения данной процедуры верно неравенство

$$x(T_1 + \ldots + T_q) \leqslant \omega^q\|x_0\|.$$

Таким образом, можем перевести траекторию системы в любую наперёд заданную окрестность нуля. Следовательно, для того чтобы при использовании данной процедуры происходила ε-поимка, осталось показать, что величина $\sum_{q=1}^{\infty} T_q$ ограничена сверху.

Используя неравенства (22), преобразуем оценку для T_q:

$$T_q \leqslant \frac{\omega^{2(q-1)}\|x_0\|^2(1-\omega^2)}{2\overline{\alpha}(\mu_q)\omega^q\|x_0\| - D^2\Delta_q} + \Delta_q = \frac{\omega^{2(q-1)}\|x_0\|^2(1-\omega^2)}{2\overline{\alpha}(\mu_q)\omega^q\|x_0\| - D^2\omega^{q-1}\Delta_1} + \omega^{q-1}\Delta_1 =$$

$$= \frac{\|x_0\|^2(1-\omega^2)}{2\overline{\alpha}(\mu_q)\omega\|x_0\| - Dh(\mu_1)}\omega^{q-1} + \omega^{q-1}\Delta_1 \leqslant \frac{\|x_0\|^2(1-\omega^2)}{2\overline{\alpha}(\mu_1)\omega\|x_0\| - Dh(\mu_1)}\omega^{q-1} + \omega^{q-1}\Delta_1. \tag{23}$$

Теперь, используя (23), оценим следующую сумму:

$$\sum_{q=1}^{\infty} T_q \leqslant \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\|x_0\|^2(1-\omega^2)}{2\overline{\alpha}(\mu_1)\omega\|x_0\| - Dh(\mu_1)}\omega^{q-1} + \sum_{q=1}^{\infty}\omega^{q-1}\Delta_1 =$$

$$= \frac{\|x_0\|^2(1-\omega^2)}{2\overline{\alpha}(\mu_1)\omega\|x_0\| - Dh(\mu_1)}\frac{1}{1-\omega} + \frac{1}{1-\omega}\Delta_1 = \frac{\|x_0\|^2(1+\omega)}{2\overline{\alpha}(\mu_1)\omega\|x_0\| - Dh(\mu_1)} + \frac{h(\mu_1)}{D(1-\omega)}.$$

Таким образом, из начального положения x_0 ε-поимка происходит за конечное время $T(\omega, \mu_1)$, которое определяется равенством

$$T(\omega, \mu_1) = \frac{\|x_0\|^2(1+\omega)}{2\overline{\alpha}(\mu_1)\omega\|x_0\| - Dh(\mu_1)} + \frac{h(\mu_1)}{D(1-\omega)}. \tag{24}$$

2^0. В этом пункте доказательства оценим время поимки, используя равенство (24). На основе построения данной оценки покажем выполнение свойств из условия теоремы.

Обозначим

$$\overline{\mu} = \min\{1, (L_1 + L_2)\omega\|x_0\|/D\}.$$

Отметим, что в силу (18) число $T(\omega, \mu_1)$ определено для каждого $\mu_1 \in (0, \overline{\mu}]$. Так как функция $h(\cdot)$ является строго возрастающей, а $\overline{\alpha}(\cdot)$ – строго убывающей, то

$$\inf_{\mu_1 \in (0,\overline{\mu}]} T(\omega, \mu_1) = \lim_{\mu_1 \to 0+} T(\omega, \mu_1).$$

Найдём, используя определения (9) и (10), значение последнего предела, которое обозначим через $T(\omega, 0)$, т.е.

$$\lim_{\mu_1 \to 0+} T(\omega, \mu_1) = \lim_{\mu_1 \to 0+} \left(\frac{\|x_0\|^2(1+\omega)}{2\overline{\alpha}(\mu_1)\omega\|x_0\| - Dh(\mu_1)} + \frac{h(\mu_1)}{D(1-\omega)} \right) = \frac{\|x_0\|^2(1+\omega)}{2\alpha(x_0)\omega\|x_0\|}.$$

Таким образом, для любого $\omega \in (0,1)$ ε-поимка происходит за любое время $T > T(\omega, 0)$.

Функция $T(\omega, 0)$ является строго убывающей при $\omega \in (0,1)$. Поэтому

$$\inf_{\omega \in (0,1)} T(\omega, 0) = \lim_{\omega \to 1-} T(\omega, 0) = \lim_{\omega \to 1-} \frac{\|x_0\|^2(1+\omega)}{2\alpha(x_0)\omega\|x_0\|} = \frac{\|x_0\|}{\alpha(x_0)} = T(x_0).$$

Покажем, что за время $T(x_0)$ происходит ε-поимка. В силу построения ε-поимка происходит за любое время $T > T(x_0)$. Пусть $\delta > 0$, $\overline{T} = T(x_0) + \delta/(2D)$. Тогда за время $\overline{T}$ происходит ε-поимка. Следовательно, существует кусочно-постоянная стратегия преследователя такая, что $\|x(\tau)\| < \delta/2$ для некоторого $\tau \in [0, \overline{T}]$. В силу определений (8) справедливо неравенство

$$|\|x(\tau)\| - \|x(\tau - \delta/(2D))\|| \leqslant D\delta/(2D) = \delta/2.$$

Поэтому $\|x(\tau - \delta/(2D))\| \leqslant \|x(\tau)\| + \delta/2 < \delta$. При этом $\tau - \delta/(2D) \leqslant T(x_0)$. Таким образом, доказано, что за время $T(x_0)$ происходит ε-поимка. Следовательно, свойство 1) из формулировки теоремы выполнено.

Приведём пример, для которого выполнено свойство 2) из формулировки теоремы. Рассмотрим в случае $k = s = 2$ систему

$$\dot{x}_1 = u_1 + v_1, \quad \dot{x}_2 = u_2 + v_2,$$

$$f(x,u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad g(x,v) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5 \\ -1.5 \end{pmatrix} \right\}, \quad V = [-1,1] \times [-1,1], \quad v(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \geqslant 0.$$

Отметим, что здесь, согласно теореме 1, ε-поимка будет происходить из любого начального положения $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Для данного примера $\alpha(x_0) = 0.5$, $T(x_0) = 2$.

Оценим $x_2(t)$:

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t (u_2(s) + 1)\, ds \geqslant 1 + \int_0^t (-1.5 + 1)\, ds = 1 - 0.5t.$$

Отсюда если $T \in [0, 2)$, то $x(T) \notin O_{1-0.5T}(0)$. Следовательно, ε-поимка не происходит за время $T < 2 = T(x_0)$. Таким образом, справедливо и свойство 2) из формулировки теоремы. Теорема доказана.

4. Компьютерное моделирование. Рассмотрим дифференциальную игру в $\mathbb{R}^2$. Система (2) дифференциальных уравнений имеет вид

$$\dot{x}_1 = u_1\cos(|x_1|+|x_2|) - u_2\sin(|x_1|+|x_2|) + v_1\cos\left(\frac{\pi}{2}-|x_1|-|x_2|\right) - v_2\sin\left(\frac{\pi}{2}-|x_1|-|x_2|\right),$$

$$\dot{x}_2 = u_1\sin(|x_1|+|x_2|) + u_2\cos(|x_1|+|x_2|) + v_1\sin\left(\frac{\pi}{2}-|x_1|-|x_2|\right) + v_2\cos\left(\frac{\pi}{2}-|x_1|-|x_2|\right),$$

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in U = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\},$$

$$v(t) = (v_1(t), v_2(t)) \in V = \operatorname{co}\left\{ \begin{pmatrix}0.5\\0.5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-0.5\\0.5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-0.5\\-0.5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.5\\-0.5\end{pmatrix} \right\},$$

с начальным условием

$$x_0 = \begin{pmatrix}x_{01}\\x_{02}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.2\\3\end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$f(x,u) = A(|x_1|+|x_2|)u, \quad g(x,v) = A\left(\frac{\pi}{2}-|x_1|-|x_2|\right)v,$$

где $A(\cdot)$ – матрица поворота, $u = (u_1,u_2)^{\mathrm{T}}$, $v = (v_1,v_2)^{\mathrm{T}}$.

Данная система удовлетворяет условиям теоремы 1, причём ε-поимка происходит при любом $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Система имеет следующие параметры:

$$\alpha(x_0) = 1 - 0.5\sqrt{2}, \quad L_1 = 2\sqrt{2}, \quad L_2 = \sqrt{2}, \quad D = 1.5\sqrt{2}.$$

Выберем $\delta = 0.1$. Тогда согласно теореме 2 для перевода траектории системы в шар $D_\delta(0)$ достаточно использовать фиксированный шаг разбиения $\Delta \leqslant (1-0.5\sqrt{2})/18$. Выберем $\Delta = 0.0162$.

Приближённое решение данной системы находим методом Рунге–Кутты третьего порядка с шагом 10^{-4}. Управление убегающего на каждом шаге метода постоянное, его выбор осуществляется из следующего максимума: $\max\limits_{v\in V}\langle g(\hat{x},v), \hat{x}/\|\hat{x}\|\rangle = \langle g(\hat{x},\hat{v}), \hat{x}/\|\hat{x}\|\rangle$, где $\hat{x}$ – положение на начало шага метода.

Результат моделирования: время достижения шара $D_\delta(0)$ равно $T_\delta = 6.9187$; траектория системы и полученное решение представлены на рис. 2 и 3. Отметим, что $T_\delta < T((1-\delta/\|x_0\|)x_0) \approx 9.9239$.

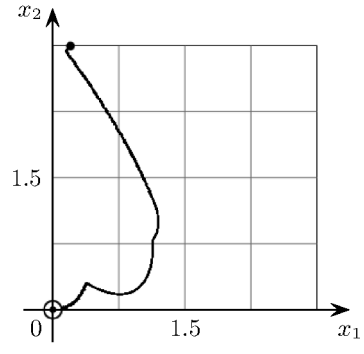

Рис. 2. Полученная траектория $(x_1(t), x_2(t))$.

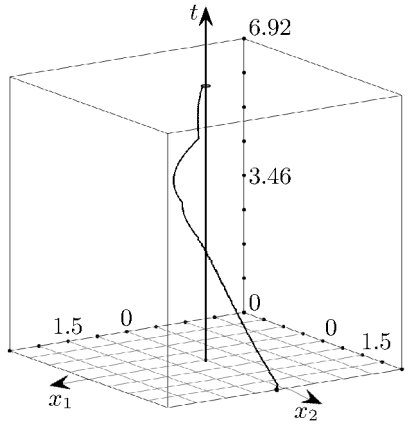

Рис. 3. Полученное решение $(x_1(t), x_2(t), t)$.

Заключение. Для одного класса нелинейных дифференциальных игр преследования показано, что можно использовать стратегию преследователя с постоянным шагом разбиения временно́го интервала. Получена оценка времени поимки из заданного начального положения, которая в определённом смысле является неулучшаемой.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075-01265-22-00 (проект FEWS-2020-0010) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-01-00293). При выполнении исследований использовались вычислительные ресурсы центра коллективного пользования ИММ УрО РАН "Суперкомпьютерный центр ИММ УрО РАН".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Isaacs R.* Differential Games. New York, 1965.
2. *Blaquiere A., Gerard F., Leitmann G.* Quantitative and Qualitative Differential Games. New York, 1969.
3. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., 1970.
4. *Friedman A.* Differential Games. New York, 1971.
5. *Hajek O.* Pursuit Games. New York, 1975.
6. *Leitmann G.* Cooperative and Noncooperative Many-Player Differential Games. Vienna, 1974.
7. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
8. *Никольский М.С.* Одна нелинейная задача преследования // Кибернетика. 1973. № 2. С. 92–94.
9. *Пшеничный Б.Н., Шишкина Н.Б.* Достаточные условия конечности времени преследования // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 517–523.
10. *Двуреченский П.Е., Иванов Г.Е.* Алгоритмы вычисления операторов Минковского и их применение в дифференциальных играх // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2014. Т. 54. № 2. С. 224–255.
11. *Ушаков В.Н., Ершов А.А.* К решению задачи управления с фиксированным моментом окончания // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 4. С. 543–564.
12. *Петров Н.Н.* Об управляемости автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617.
13. *Петров Н.Н.* Локальная управляемость автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 7. С. 1218–1232.
14. *Нарманов А.Я., Петров Н.Н.* Нелокальные проблемы теории оптимальных процессов. I // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 4. С. 605–614.
15. *Нарманов А.Я.* О стабильности вполне управляемых систем // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 10. С. 1336–1344.
16. *Нарманов А.Я.* О стабильности вполне управляемых систем // Мат. тр. 2001. Т. 4. № 1. С. 94–110.
17. *Банников А.С., Петров Н.Н.* К нестационарной задаче группового преследования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 40–51.
18. *Петров Н.Н.* Одна задача простого преследования с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 1992. № 5. С. 22–26.
19. *Петров Н.Н.* Одна задача группового преследования с дробными производными и фазовыми ограничениями // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. № 1. С. 54–59.
20. *Петров Н.Н., Соловьева Н.А.* Многократная поимка в рекуррентном примере Л.С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 2. С. 178–186.
21. *Виноградова М.Н., Петров Н.Н., Соловьева Н.А.* Поимка двух скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 41–48.
22. *Щелчков К.А.* Об одной нелинейной задаче преследования с дискретным управлением и неполной информацией // Вестн. Удмуртск. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. № 1. С. 111–118.

Удмуртский государственный университет,
г. Ижевск

Поступила в редакцию 03.06.2021 г.
После доработки 14.01.2022 г.
Принята к публикации 24.02.2022 г.

EDN: GTOQSO
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 270–274

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956.32

ДВУМЕРНЫЕ АНАЛОГИ КЛАССИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ БЕЙТМЕНА – РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ДВИЖУЩИМИСЯ ИСТОЧНИКАМИ

© 2022 г. А. С. Благовещенский, Е. А. Злобина, А. П. Киселев

Показано, что естественные обобщения решения волнового уравнения с тремя пространственными переменными, предложенного Г. Бейтменом, на случай двух пространственных переменных являются решениями задач с точечными источниками.

DOI: 10.31857/S0374064122020121

Введение. Г. Бейтмен [1] предложил в качестве решения волнового уравнения с тремя пространственными переменными

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} - c^{-2}U_{tt} = 0, \quad c = \text{const} > 0, \tag{1}$$

сингулярное выражение – *волну Бейтмана*

$$U = \frac{1}{\beta} f\left(\alpha + \frac{x^2 + y^2}{\beta}\right). \tag{2}$$

Здесь *форма волны* f – произвольная функция одного переменного, а

$$\alpha = z - ct, \quad \beta = z + ct. \tag{3}$$

Нетрудно непосредственно проверить, что для гладкой функции f функция (2) удовлетворяет уравнению (1) при $z \neq -ct$. Не интересовавший Бейтмена вопрос о том, является ли функция (2) решением уравнения (1) во всём пространстве-времени $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, решён положительно лишь недавно (см. [2, 3]) и только для гладких финитных функций f.

Выражение (2) принадлежит к классу *относительно неискажающихся волн*. Так в классических руководствах по математической физике (см., например, [4, с. 617]) названы функции вида

$$U = gf(\Theta), \tag{4}$$

где функции $g = g(x, y, z, t)$ и $\Theta = \Theta(x, y, z, t)$ фиксированы, а форма волны f произвольна. При этом не уточняется, допустимо ли локальное нарушение равенства (1) и какими свойствами должны обладать g, f и Θ. Чтобы это определение охватывало важные примеры, следует потребовать, чтобы уравнение (1) выполнялось всюду, кроме, быть может, многообразия меньшей размерности*). Функции, удовлетворяющие однородному волновому уравнению (1) в $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ за исключением, быть может, многообразия меньшей размерности, будем называть *волнами* (независимо от того, имеют ли они вид (4) или нет).

С 90-х годов прошлого столетия внимание исследователей привлекают комплексифицированные версии волны Бейтмена, простейшая из которых получается сдвигом на мнимую постоянную:

$$\beta \mapsto \beta_* = \beta - ib = z + ct - ib, \tag{5}$$

*) Для классических сферических волн такое многообразие состоит из одной пространственной точки, а для привлекающих большое внимание с 70-х годов прошлого века комплексифицированных сферических волн оно представляет собой двумерное многообразие с краем в $\mathbb{R}^3$ (см., например, [5]).

$b > 0$, а от функции f требуется аналитичность в верхней полуплоскости. Такие волны имеют приложения в оптике, поскольку при удачно подобранных f описывают сильно локализованные волновые пучки и пакеты (см., например, [6–8]). И исходная (2), и комлексифицированные версии волны Бейтмена доставляют простые примеры [2, 3] решений уравнения (1) во всём $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, имеющих сингулярность в бегущей пространственной точке. Внимание к таким решениям привлечено открытиями Хёрмандера [9, с. 324].

Комплексифицированная волна Бейтмена (2), (5) удовлетворяет однородному волновому уравнению во всём пространстве-времени и легко обобщается с сохранением этого свойства на произвольную пространственную размерность, большую единицы [10]. Некомплексифицированные волны Бейтмена в произвольной размерности введены К. Шимомурой [11], который не интересовался вопросом о том, являются ли они решениями однородного волнового уравнения во всём пространстве-времени.

В настоящей заметке показано, что в случае двух пространственных переменных при исчезновении комплексифицирующей добавки волна Бейтмена перестаёт быть решением однородного волнового уравнения и становится решением задачи с бегущим точечным источником. Соответствующую функцию источника мы вычисляем явно.

1. Постановка задачи. Двумерная версия волны Бейтмена, предложенная в [11], имеет вид

$$u := \frac{1}{\sqrt{\beta}} f(\theta), \quad \theta = \alpha + \frac{x^2}{\beta}, \tag{6}$$

где линейные функции α и β определены в (3). Квадратный корень понимается обычным образом: если $p \geqslant 0$, то $\sqrt{p} \geqslant 0$ и $\sqrt{-p} = i\sqrt{p}$. Форма волны f предполагается достаточно гладкой.

Результат применения оператора Даламбера, отвечающего двум пространственным переменными (x, z), к функции (6) обозначим через F:

$$\Box u = u_{xx} + u_{zz} - c^{-2} u_{tt} = u_{xx} + 4u_{\alpha\beta} = F. \tag{7}$$

Наша цель состоит в вычислении обобщённой функции F, которую мы называем *функцией источника*. В отличие от случая трёх пространственных переменных, она оказывается отличной от нуля.

Кроме того, аналогичный вопрос решается для двух других относительно неискажающихся волн, получающихся из комплексифицированного решения вида (6), в котором сделана замена (5), в результате перехода к пределу $b \to 0$:

$$u := \frac{1}{\sqrt{|\beta|}} f(\theta) \tag{8}$$

и

$$u := \frac{\operatorname{sgn}\beta}{\sqrt{|\beta|}} f(\theta). \tag{9}$$

Справедлива

Теорема 1. *Пусть в выражении (6) функция f принадлежит классу $C_0^2(\mathbb{R})$. Тогда правая часть равенства (7) имеет вид*

$$F = \delta(x)\delta(\beta)(\mathcal{F}_+(\alpha) + i\mathcal{F}_-(\alpha)), \tag{10}$$

где

$$\mathcal{F}_+(\alpha) = 4 \int\limits_{\alpha}^{+\infty} \frac{f'(s)\,ds}{\sqrt{s-\alpha}}, \quad \mathcal{F}_-(\alpha) = 4 \int\limits_{-\infty}^{\alpha} \frac{f'(s)\,ds}{\sqrt{\alpha - s}}. \tag{11}$$

Функция источника (10) сосредоточена в пространственной точке $\{x = 0,\ z = -ct\}$, бегущей вдоль пространственной прямой $x = 0$ со скоростью c, и имеет амплитуду, зависящую от α.

2. Доказательство теоремы 1. Нетрудно показать, что функция (6) локально интегрируема на $\mathbb{R}^3$. В стандартных для теории обобщённых функций обозначениях (см., например, [9]) равенство (7) записывается следующим образом:

$$(\Box u, \varphi) = (u, \Box \varphi) := \int\limits_{\mathbb{R}^3} u \Box \varphi \, dx \, dy \, dt = (F, \Box \varphi), \tag{12}$$

где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ – произвольная основная функция.

Пусть $\varepsilon > 0$. Очевидно, что $\Box u = 0$ в областях $\Omega_\varepsilon = \{(x, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 : \beta \geqslant \varepsilon\}$ и $\Omega_{-\varepsilon} = \{(x, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 : \beta \leqslant -\varepsilon\}$, а интеграл в (12) представим в виде

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} u \Box \varphi \, dx \, dy \, dt = \frac{1}{2c} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int\limits_{\Omega_\varepsilon} + \int\limits_{\Omega_{-\varepsilon}} \right) u \Box \varphi \, dx \, d\alpha \, d\beta. \tag{13}$$

Рассмотрим в (13) интеграл по области Ω_ε. Интегрируя по частям по переменным x и β и пользуясь финитностью функции φ, получаем

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} u \Box \varphi \, dx \, d\alpha \, d\beta = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \varphi \Box u \, dx \, d\alpha \, d\beta + 4 \int\limits_{\mathbb{R}^2} (u_\alpha \varphi)(x, \alpha, \varepsilon) \, dx \, d\alpha. \tag{14}$$

Так как u удовлетворяет уравнению (1) в области Ω_ε, то первое слагаемое в правой части этого равенства равно нулю.

Исследуем второе слагаемое в правой части (14). Заметим, что

$$u_\alpha(x, \alpha, \varepsilon)|_{\beta = \varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} f'\left(\alpha + \frac{x^2}{\varepsilon}\right),$$

где $f'(s) := df(s)/ds$. В интеграле перейдём от переменной x к переменной $\xi = x^2/\varepsilon$, тогда

$$4 \int\limits_{\mathbb{R}^2} (u_\alpha \varphi)(x, \alpha, \varepsilon) \, dx \, d\alpha = 2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int\limits_0^{+\infty} \frac{f'(\alpha + \xi)}{\sqrt{\xi}} (\varphi(\sqrt{\varepsilon\xi}, \alpha, \varepsilon) + \varphi(-\sqrt{\varepsilon\xi}, \alpha, \varepsilon)) \, d\xi =$$

$$= 2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int\limits_\alpha^{+\infty} \frac{f'(s)}{\sqrt{s - \alpha}} (\varphi(\sqrt{\varepsilon(s - \alpha)}, \alpha, \varepsilon) + \varphi(-\sqrt{\varepsilon(s - \alpha)}, \alpha, \varepsilon)) \, ds.$$

Устремим $\varepsilon \to 0$. Воспользовавшись финитностью φ, получим

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega_\epsilon} \varphi \Box u \, d\alpha \, d\beta \, dx = 4 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int\limits_\alpha^{+\infty} \frac{f'(s)}{\sqrt{s - \alpha}} \varphi(0, \alpha, 0) \, ds.$$

Заметим, что

$$4 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int\limits_\alpha^{+\infty} \frac{f'(s)}{\sqrt{s - \alpha}} \varphi(0, \alpha, 0) \, ds = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \delta(x) \delta(\beta) \mathcal{F}_+(\alpha) \varphi(x, \alpha, \beta) \, dx \, d\alpha \, d\beta, \tag{15}$$

где функция $\mathcal{F}_+$ определена в (11).

Совершенно аналогично, учитывая, что

$$u_\alpha(x, \alpha, \beta)|_{\beta = -\varepsilon} = -\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} f'\left(\alpha - \frac{x^2}{\varepsilon}\right),$$

находим предел интеграла по $\Omega_{-\varepsilon}$ при $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_{-\varepsilon}} \varphi\,\Box u\,d\alpha\,d\beta\,dx = 4i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int\limits_{-\infty}^{\alpha} \frac{f'(s)}{\sqrt{\alpha - s}}\varphi(0,\alpha,0) =$$

$$= i\int\limits_{\mathbb{R}^3} \delta(x)\delta(\beta)\mathcal{F}_-(\alpha)\varphi(x,\alpha,\beta)\,dx\,d\alpha\,d\beta \tag{16}$$

(функция $\mathcal{F}_-$ определена в (11)). Подставляя (15) и (16) в представление (13), получаем для функции F выражение (10). Теорема 1 доказана.

3. Функции источника для волн (8) и (9). Аналогично доказывается

Теорема 2. *При $f \in C_0^2(\mathbb{R})$ в случае (8) правая часть равенства (7) имеет вид*

$$F = \delta(x)\delta(\beta)(\mathcal{F}_+(\alpha) - \mathcal{F}_-(\alpha)),$$

а в случае (9) – вид

$$F = \delta(x)\delta(\beta)(\mathcal{F}_+(\alpha) + \mathcal{F}_-(\alpha)).$$

Функции $\mathcal{F}_\pm$ определены в (11).

Замечание 1. Условие финитности формы волны $f \in C^2(\mathbb{R})$ в условиях теорем 1 и 2 может быть ослаблено. Достаточно потребовать следующей скорости убывания $f'(s)$ при $|s| \to \infty$:

$$|f'(s)| \leqslant \mathrm{const}|s|^{-\gamma-1/2}, \quad \gamma > 0, \quad \mathrm{const} > 0.$$

Замечание 2. Результаты, аналогичные теоремам 1 и 2, справедливы для всех чётных пространственных размерностей.

Заключительные замечания. Мы показали, что введённая К. Шимомурой [11, 12] некомплексифицированная волна Бейтмена (6) не является для пространственной размерности 2 при гладких формах волны f решением однородного волнового уравнения $\Box u = 0$ в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.

Применение классического метода спуска [4, с. 682] к волне Бейтмена (2) даёт решение однородного волнового уравнения для пространственной размерности 2 (см. [13]). Это решение не является относительно неискажающейся волной.

Отметим, что одно из фундаментальных решений двумерного волнового уравнения можно трактовать как функцию вида (6) с сингулярной формой волны $f(\theta) = 1/\sqrt{-\theta}$ (для которой интегралы (11) расходятся, см. [14]). Выражение для соответствующей функции источника качественно отличается от найденного выше для гладких функций f.

Исследования Злобиной Е.А. выполнены при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение между МОН РФ и ПОМИ РАН о предоставлении гранта в форме субсидий из федерального бюджета на создание и развитие международных математических центров мирового уровня № 075-15-2019-1620 от 8 ноября 2019 г.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bateman H.* The conformal transformations of space of four dimensions and their applications to geometrical optics // Proc. London Math. Soc. 1909. V. 7. P. 70–89.
2. *Благовещенский А.С.* Плоские волны, решения Бейтмена и источники на бесконечности // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2014. Т. 426. С. 23–33.
3. *Blagoveshchensky A.S., Tagirdzhanov A.M., Kiselev A.P.* On the Bateman–Hörmander solution of the wave equation, having a singularity at a running point // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2018. Т. 471. С. 76–85.
4. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., 1964.
5. *Tagirdzhanov A.M., Blagoveshchensky A.S., Kiselev A.P.* “Complex source” wavefields: sources in real space // J. Phys. A: Math. Theor. 2011. V. 44. № 42. P. 425203.

6. *Hillion P.* Courant–Hilbert solutions of the wave equation // J. Math. Phys. 1992. V. 33. № 8. P. 2749–2753.
7. *Kiselev A.P., Perel M.V.* Highly localized solutions of the wave equation // J. Math. Phys. 2000. V. 41. № 4. P. 1934–1955.
8. *Киселев А.П.* Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения. Обзор // Оптика и спектроскопия. 2007. Т. 102. № 4. С. 697–717.
9. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. М., 1986.
10. *Киселев А.П., Перель М.В.* Относительно неискажающиеся волны для m-мерного волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 8. С. 1128–1129.
11. *Shimomura K.* Liouville type theorem associated with the wave equation // Math. J. Ibaraki Univ. 2011. V. 43. P. 51–64.
12. *Shimomura K.* Generalizations of Bateman's transformation for general indefinite metrics // Math. J. Ibaraki Univ. 2013. V. 45. P. 7–13.
13. *Благовещенский А.С., Киселев А.П.* Двумерные волны Бейтмена–Хёрмандера с сингулярностью в бегущей точке // Мат. заметки. 2019. Т. 106. Вып. 5. С. 793–796.
14. *Злобина Е.А., Киселев А.П.* Двумерные сингулярные сплэш моды // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2019. Т. 483. С. 79–84.

Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова РАН,
Институт проблем машиноведения РАН,
г. Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 22.02.2021 г.
После доработки 22.12.2021 г.
Принята к публикации 07.02.2022 г.

EDN: GXHXZM
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 275–279

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.968.72

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТЕПЛОФИЗИКЕ

© 2022 г. Е. В. Панкратова

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение Гуртина–Пипкина в предположении, что его ядра представляют собой ряды из экспонент. Для оператор-функции, являющейся его символом, найдена асимптотика невещественной части спектра.

DOI: 10.31857/S0374064122020133

Введение. Данная работа посвящена исследованию спектра оператор-функции, возникающей при изучении абстрактного интегро-дифференциального уравнения второго порядка в сепарабельном гильбертовом пространстве H:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \int_0^t Q(t-s)\frac{du(s)}{ds}\,ds + A^2u(t) - \int_0^t K(t-s)A^2u(s)\,ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ := (0,+\infty), \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u'(+0) = \varphi_1. \quad (2)$$

Здесь A – линейный оператор, действующий в H; $A : \mathrm{Dom}\,(A) \to H$ – самосопряжённый положительно определённый оператор, обратный к которому компактен. При этом предполагается, что скалярные функции $Q(t)$ и $K(t)$ допускают представления

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{-\gamma_k t}, \quad K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\gamma_k t},$$

где числа c_k, d_k, γ_k $(k \in \mathbb{N})$ положительны и последовательность $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно возрастает к $+\infty$.

Задача (1), (2) является операторной моделью известного уравнения Гуртина–Пипкина [1], возникающего в теории теплопроводности, изучению которого посвящено большое количество работ. Отметим, что уравнение вида (1), (2), где $Q \equiv 0$, подробно изучено в работах [2–7]. В работе [8] рассматривались задачи управления решениями уравнения Гуртина–Пипкина посредством граничных воздействий. Подход к решению задачи (1), (2) с позиции теории полугрупп развит в [9] и [10].

В данной работе проводится спектральный анализ оператор-функции, возникающей в результате применения преобразования Лапласа к левой части уравнения (1). В частности, получена локализация спектра этой оператор-функции.

1. Постановка задачи. Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H оператор-функцию

$$L(\lambda) := \lambda^2 I + \lambda\hat{Q}(\lambda) - \hat{K}(\lambda)A^2 + A^2.$$

Функции $\hat{Q}(\lambda)$, $\hat{K}(\lambda)$ – преобразования Лапласа функций $Q(t)$, $K(t)$ соответственно, т.е.

$$\hat{Q}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{\lambda+\gamma_k}, \quad \hat{K}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda+\gamma_k}. \quad (3)$$

В дальнейшем предполагаем, что выполняется

Условие А. Пусть коэффициенты c_k, d_k и числа γ_k $(k \in \mathbb{N})$ допускают следующие представления:

$$c_k = Ak^{-\alpha} + O(k^{-\alpha-1}), \quad d_k = Ek^{-\mu} + O(k^{-\mu-1}), \quad \gamma_k = Bk^{\beta} + O(k^{\beta-1}) \quad \text{при} \quad k \to +\infty,$$

где $A > 0$, $B > 0$, $E > 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $0 < \mu \leqslant 1$, $\alpha + \beta > 1$, $\mu + \beta > 1$, и выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} < 1.$$

2. Изучение спектра оператор-функции $L(\lambda)$. При сделанных предположениях относительно оператора A в пространстве H имеется ортонормированный базис $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, составленный из собственных векторов оператора A. Обозначим собственное значение оператора A, отвечающее вектору e_n, через a_n, т.е. $Ae_n = a_n e_n$, $n \in \mathbb{N}$. Числа a_n вещественны, положительны, не ограничены в совокупности и не имеют конечных предельных точек; без нарушения общности считаем, что последовательность (a_n) не убывает. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим проекции на одномерное собственное подпространство $\operatorname{span} e_n$ вектора $L(\lambda)e_n$, т.е. функцию

$$l_n(\lambda) := (L(\lambda)e_n, e_n) = \lambda^2 + \lambda\hat{Q}(\lambda) - a_n^2\hat{K}(\lambda) + a_n^2. \tag{4}$$

Тогда спектр $\sigma(L(\lambda))$ оператор-функции $L(\lambda)$ совпадает с множеством $\{\overline{\bigcup \lambda} : l_n(\lambda) = 0\}$ [2, гл. 3, с. 196]. Обозначим $r := (\alpha + \beta - 1)/\beta$. Из приведённых выше неравенств для чисел α и β следует, что $r \in (0, 1]$. Введём последовательность $\{b_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ функций равенством

$$b_k(t) = -\frac{AB^{r-1}}{\beta t^r}\frac{\pi}{\sin(\pi r)}e^{i\pi(k-r+1)/2}\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{1}{2^{j+1}(k-j)!}\prod_{s=0}^{k-j-1}(r+s)\right).$$

По построению $b_k(a_n) = O(1/a_n^r)$.

Если $r \in (0, 1)$, то обозначим $M := \lceil 1/r \rceil - 1$. С помощью последовательности $\{b_k(a_n)\}_{k=0}^{\infty}$ рекуррентно определим последовательность $\{t_k(a_n)\}_{k=1}^{M}$, положив $t_1(a_n) = b_0(a_n)$, $t_2(a_n) = b_1(a_n)t_1(a_n)$, $t_3(a_n) = b_1(a_n)t_2(a_n) + b_2(a_n)t_1^2(a_n)$ и далее

$$t_k(a_n) = b_1(a_n)t_{k-1}(a_n) + b_2(a_n)(t_1(a_n)t_{k-2}(a_n) + t_2(a_n)t_{k-3}(a_n) + \ldots + t_{k-2}(a_n)t_1(a_n)) +$$

$$+ b_3(a_n)\{t_1(a_n)[t_1(a_n)t_{k-3}(a_n) + t_2(a_n)t_{k-4}(a_n) + \ldots + t_{k-3}(a_n)t_1(a_n)] + t_2(a_n)[t_1(a_n)t_{k-4}(a_n) + \ldots$$

$$\ldots + t_{k-4}(a_n)t_1(a_n)] + \ldots + t_{k-3}(a_n)t_1(a_n)t_1(a_n)\} + \ldots + b_{k-1}(a_n)t_1^{k-1}(a_n).$$

Здесь $t_k(a_n)$, $k \geqslant 2$, является суммой произведений $b_l(a_n)$, где $l = \overline{1, k-1}$, на сумму всевозможных произведений из l множителей, выбранных из набора $\{t_s(a_n)\}_{s=1}^{k-1}$, таких, что сумма индексов в каждом таком произведении из l множителей равна $k-1$.

Предложение. *При $n \to +\infty$ имеет место асимптотическое равенство*

$$t_k(a_n) = O(1/a_n^{rk}).$$

Основной результат работы содержит следующая

Теорема. *Пусть выполнено условие А. Тогда функция $l_n(\lambda)$ имеет ровно два невещественных корня $\lambda_n^{\pm}$, эти корни комплексно сопряжены, т.е. $\lambda_n^+ = \overline{\lambda_n^-}$, и асимптотически представимы в виде*

$$\lambda_n^+ = ia_n + a_n\sum_{k=1}^{M} t_k(a_n) + O(1), \quad \textit{если} \quad 0 < r < 1, \quad M = \lceil 1/r \rceil - 1, \tag{5}$$

$$\lambda_n^+ = ia_n - \frac{1}{2}\frac{A}{\beta}\ln a_n + O(1), \quad \textit{если} \quad r = 1 \tag{6}$$

при $n \to +\infty$.

Отметим, что сформулированная теорема является обобщением соответствующих результатов из [2, гл. 3; 6]. В указанных работах рассматривался случай $Q(t) \equiv 0$.

Доказательство теоремы разобьём на несколько этапов.

1. Сначала докажем, что все функции $l_n(\lambda)$ имеют не более двух невещественных нулей.

Обозначим: $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ – верхняя полуплоскость и $\mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$ – нижняя полуплоскость. Для $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_+$ определено неевклидово расстояние [11, с. 30]

$$D(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{|\overline{z_1} - z_2| + |z_1 - z_2|}{|\overline{z_1} - z_2| - |z_1 - z_2|}.$$

В дальнейшем нам понадобится

Теорема Шварца–Пика [11, гл. 4, теорема 3]. *Пусть $f(z)$ – голоморфная функция, отличная от константы, отображающая верхнюю полуплоскость в себя. Тогда для любых двух внутренних точек z_1 и z_2 верхней полуплоскости выполнено неравенство $D(f(z_1), f(z_2)) \leqslant \leqslant D(z_1, z_2)$, причём равенство достигается только в случае, если $f(z)$ – дробно-линейное отображение, переводящее верхнюю полуплоскость на себя.*

Лемма 1. *Функция $l_n(\lambda)$, определённая равенством (4), для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет не более двух невещественных корней, причём эти корни комплексно сопряжены.*

Доказательство леммы. Запишем уравнение $l_n(\lambda) = \lambda^2 + \lambda\hat{Q}(\lambda) - a_n^2\hat{K}(\lambda) + a_n^2 = 0$ в виде равенства $\lambda = \psi(f_n(\lambda))$, где $f_n(\lambda) = -a_n^2 + a_n^2\hat{K}(\lambda) - \lambda\hat{Q}(\lambda)$ и $\psi(z) = |z|^{1/2}e^{(i\arg z)/2}$.

Несложно видеть, что $f_n(\lambda) : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_-$. Поэтому $\psi(f_n(\lambda)) : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$.

Если $z_1 = \psi(f_n(z_1))$, $z_2 = \psi(f_n(z_2))$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_+$, $z_1 \neq z_2$, то по теореме Шварца–Пика $D(z_1, z_2) = D(\psi(f_n(z_1)), \psi(f_n(z_2))) < D(z_1, z_2)$. Последнее неравенство верно, поскольку $\psi(f_n(z))$ не является дробно-линейным отображением. Единственность доказана.

2. Покажем, что для достаточно больших натуральных n невещественные нули функции $l_n(\lambda)$ асимптотически представимы в виде $\lambda_n^+ = ia_n + \tau_n a_n$, $\lambda_n^- = \overline{\lambda_n^+}$, где $\{\tau_n\}$ – некоторая числовая последовательность. Для этого достаточно показать, что асимптотическое представление λ_n^+ удовлетворяет уравнению $l_n(\lambda_n^+) = 0$, т.е. $\tau_n = g_n(\tau_n)$, где

$$g_n(\tau) = \frac{1}{\tau + 2i}\left(\hat{K}(ia_n + \tau a_n) - \frac{ia_n + \tau a_n}{a_n^2}\hat{Q}(ia_n + \tau a_n)\right), \quad z_n = ia_n + \tau a_n. \tag{7}$$

Таким образом, для достаточно больших n число τ_n является неподвижной точкой отображения $\tau \mapsto g_n(\tau)$. Следовательно, достаточно показать, что для всех n, начиная с некоторого, отображение $\tau \mapsto g_n(\tau)$ является сжимающим. Тогда искомое решение $\tau_n \in \mathbb{R}$ может быть найдено как предел последовательности $\tau_n^{[k]}$, $k \to \infty$, где $\tau_n^{[k]} = g_n(\tau_n^{[k-1]})$, $\tau_n^{[0]} = 0$.

В дальнейшем в доказательстве мы будем заменять суммы рядов интегралами и проводить оценки полученных интегралов. Для этого нужны леммы 2–5, носящие технический характер.

Лемма 2. *Пусть $z \in \mathbb{C}$, а функции $\hat{K}(z)$, $\hat{Q}(z)$ определены равенством (3). Если $|\arg z| < \pi - \delta$, где $\delta > 0$ и $|z| > 1$, то справедливы следующие утверждения:*

$$|\hat{K}^{(k)}(z) - h_k(z)| \lesssim \frac{1}{|z|^{k+1}}, \quad \text{где} \quad h_k(z) = (-1)^k k! \int\limits_1^\infty \frac{A\,dx}{x^\alpha(z + Bx^\beta)^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}; \tag{8}$$

$$\hat{K}^{(k)}(z) = \frac{(-1)^k k! AB^{r-1}}{\beta|z|^{r+k}} \int\limits_0^\infty \frac{dt}{t^r(e^{i\varphi} + t)^{k+1}} + O(1/|z|^{k+1}) \quad \text{при} \quad 0 < r < 1, \quad k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\};$$

$$\hat{K}^{(k)}(z) = \frac{(-1)^k k! A}{\beta z^{k+1}} \ln\left|\frac{z}{B} + 1\right| + O(1/|z|^{k+1}) \quad \text{при} \quad r = 1, \quad k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\};$$

$$|z^k\hat{K}^{(k)}(z)| \to 0, \quad |z^k\hat{Q}^{(k)}(z)| \to 0 \quad \text{при} \quad |z| \to +\infty, \quad k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}.$$

Отношение $\lesssim$ в (8) означает, что если $a_k \lesssim b_k$ при $k \in \mathbb{N}$, то найдётся постоянная $c > 0$ такая, что $a_k \leqslant cb_k$ при $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 3. *Отображение $\tau \mapsto g_n(\tau)$, определённое равенством (7), является сжимающим. При этом функция $g_n(\tau)$ аналитична в круге $|\tau| < 1/2$.*

Лемма 4. *Пусть отображение $\hat{K}(\lambda)$ определено равенством (3). Тогда*

$$\hat{K}^{(k)}(ia_n) = \frac{AB^{r-1}}{\beta a_n^{r+k}} \frac{\pi}{\sin(\pi r)} \prod_{j=0}^{k-1}(r+j)e^{i\pi(k-r)/2} + O(1/a_n^{k+1}) \quad \textit{при} \quad 0 < r < 1, \quad k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\},$$

$$\hat{K}^{(k)}(ia_n) = \frac{(-1)^k k! A}{i^{k+1}\beta a_n^{k+1}} \ln a_n + O(1/a_n^{k+1}) \quad \textit{при} \quad r = 1, \quad k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}.$$

Лемма 5. *Пусть отображение $g_n(\tau)$ определено равенством (7). Тогда верны следующие соотношения:*

$$g_n^{(k)}(0) = -k! \frac{AB^{r-1}}{\beta a_n^r} \frac{\pi}{\sin(\pi r)} e^{i\pi(k-r+1)/2} \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{1}{2^{j+1}(k-j)!} \prod_{s=0}^{k-j-1}(r+s) \right) + O(1/a_n) =$$

$$= k! b_k + O(1/a_n) \quad \textit{при} \quad r \in (0,1), \quad k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\},$$

$$g_n^{(k)}(0) = -k! e^{i\pi k/2} \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}} \frac{A}{\beta a_n} \ln(a_n) + O(1/a_n) \quad \textit{при} \quad r = 1, \quad k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}.$$

Представим функцию $g_n(\tau)$ в круге $|\tau| < 1/2$ степенным рядом $g_n(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty}(g_n^{(k)}(0)\tau^k/k!)$ и будем искать для каждого n предел последовательности $\tau_n^{[k]}$, $k \to \infty$, где, как и выше, $\tau_n^{[k]} = g_n(\tau_n^{[k-1]})$, $\tau_n^{[0]} = 0$. Рассмотрим сначала случай $r \in (0,1)$. Для каждого n имеем равенство $g_n^{(k)}(0)/k! = b_k + \theta_n^{[k]}$, где $\theta_n^{[k]} = O(1/a_n)$ при $n \to +\infty$. Группируя члены по степеням a_n до степени $1/a_n$, получаем

$$\tau_n^{[0]} = 0,$$

$$\tau_n^{[1]} = g_n(\tau_n^{[0]}) = b_0(a_n) + \theta_n^{[0]} = t_1(a_n) + \varphi_n^{[1]},$$

$$\tau_n^{[2]} = g_n(\tau_n^{[1]}) = (b_0(a_n) + \theta_n^{[0]}) + (b_1(a_n) + \theta_n^{[1]})(t_1(a_n) + \varphi_n^{[1]}) + (b_2(a_n) + \theta_n^{[2]})(t_1(a_n) + \varphi_n^{[1]})^2 + \ldots$$

$$\ldots + (b_{M-1}(a_n) + \theta_n^{[M-1]})(t_1(a_n) + \varphi_n^{[1]})^{M-1} + \psi_n^{[2]} = b_0(a_n) + b_1(a_n)t_1(a_n) + b_2(a_n)t_1^2(a_n) + \ldots + \varphi_n^{[2]} =$$

$$= t_1(a_n) + t_2(a_n) + b_2(a_n)t_1^2(a_n) + \ldots + b_{M-1}(a_n)t_1^{M-1}(a_n) + \varphi_n^{[2]},$$

$$\ldots,$$

$$\tau_n^{[k]} = t_1(a_n) + \ldots + t_M(a_n) + \varphi_n^{[k]} \quad \text{для} \quad k \geqslant M.$$

Отметим, что для каждого k справедливы равенства $\theta_n^{[k]} = O(1/a_n)$, $\psi_n^{[k]} = O(1/a_n)$ и $\varphi_n^{[k]} = O(1/a_n)$ при $n \to +\infty$. $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_n^{[k]} = \tau_n$, поэтому для $\varepsilon = 1/a_n$ существует $\tilde{k}$ такое, что для любого $k > \tilde{k}$ выполняется неравенство $|\tau_n - \tau_n^{[k]}| < 1/a_n$, т.е.

$$\tau_n = \tau_n^{[k]} + \delta_n^{[k]}, \quad \text{где} \quad \delta_n^{[k]} = O(1/a_n), \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Таким образом, выбрав k бóльшим, чем $\max(M, \tilde{k})$, будем иметь $\tau_n = \tau_n^{[k]} + \delta_n^{[k]} = t_1(a_n) + \ldots + t_M(a_n) + \varphi_n^{[k]} + \delta_n^{[k]}$. Следовательно, $\tau_n = t_1(a_n) + \ldots + t_M(a_n) + O(1/a_n)$.

Рассмотрим теперь случай $r = 1$. Проводя рассуждения, аналогичные предыдущему случаю, получаем, что $\tau_n^{[k]} = g_n(0) + \varphi_n^{[k]}$ при $k \geqslant 1$, где $\varphi_n^{[k]} = O(1/a_n)$ при $n \to +\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_n^{[k]} = \tau_n$. Поэтому для $\varepsilon = 1/a_n$ существует $\tilde{k}$ такое, что для любого $k > \tilde{k}$ выполняется неравенство $|\tau_n - \tau_n^{[k]}| < 1/a_n$, т.е. $\tau_n = \tau_n^{[k]} + \delta_n^{[k]}$, где $\delta_n^{[k]} = O(1/a_n)$ при $n \to +\infty$. Фиксируя $k > \tilde{k}$ и учитывая, что $\varphi_n^{[k]} + \delta_n^{[k]} = O(1/a_n)$ при $n \to +\infty$, получаем

$$\tau_n = \tau_n^{[k]} + \delta_n^{[k]} = g_n(0) + \varphi_n^{[k]} + \delta_n^{[k]} = -\frac{1}{2}\frac{A}{\beta a_n}\ln a_n + O(1/a_n) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Таким образом, при $r \in (0,1)$ справедливо асимптотическое равенство (5), а при $r = 1$ – равенство (6). Теорема доказана.

Автор выражает благодарность проф. В.В. Власову за постановку задачи и внимание к работе, а также всем участникам семинара под его руководством за полезные указания и обсуждения полученных результатов.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы МГУ “Математические методы анализа сложных систем”, а также Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pipkin A.C., Gurtin M.E.* A General theory of heat conduction with finite wave speeds"// Arch. for Rational Mech. and Anal. 1968. V. 31. P. 113–126.
2. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М., 2016.
3. *Власов В.В., Раутиан Н.А., Шамаев А.С.* Исследование операторных моделей, возникающих в задачах наследственной механики // Совр. математика. Фунд. направления. 2012. Т. 45. С. 43–61.
4. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Совр. математика. Фунд. направления. 2016. Т. 62. С. 53–71.
5. *Eremenko A., Ivanov S.* Spectra of the Gurtin–Pipkin type equations // SIAM J. Math. Anal. 2011. V. 43. № 5. P. 2296–2306.
6. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ абстрактных гиперболических интегродифференциальных уравнений // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2011. Вып. 28. С. 75–113.
7. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ и представление решений интегро-дифференциальных уравнений с дробно-экспоненциальными ядрами // Тр. Моск. мат. о-ва. 2019. Т. 80. № 2. С. 197–220.
8. *Pandolfi L., Ivanov S.* Heat equations with memory: lack of controllability to the rest // J. of Math. and Appl. 2009. V. 355. P. 1–11.
9. *Раутиан Н.А.* О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 9. С. 1255–1272.
10. *Закора Д.А.* Модель сжимаемой жидкости Олдройта // Тр. Крымской осенней мат. школы-симпозиума. М., 2016. С. 41–66.
11. *Каратеодори К.* Конформное отображение. М., 1934.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 20.12.2021 г.
После доработки 02.02.2022 г.
Принята к публикации 24.02.2022 г.

EDN: WHBDLX
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 280–288

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО ПРОБЛЕМАМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ ПРИ МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ им. М.В. ЛОМОНОСОВА*)

Ниже публикуются краткие аннотации докладов, состоявшихся в осеннем семестре 2021 г. (предыдущее сообщение о работе семинара дано в журнале "Дифференц. уравнения". 2021. Т. 57. № 2; за дополнительной информацией обращаться по адресу: nds@cs.msu.su)**).

DOI: 10.31857/S0374064122020145

А.С. Фурсов, Ю.М. Мосолова (Москва, Россия, ВМК МГУ). "Перспективы использования нейрорегуляторов для стабилизации переключаемых систем" (13.09.2021).

Рассматривается непрерывная скалярная переключаемая линейная система

$$\dot{x} = A_\sigma x + b_\sigma u, \quad \sigma \in S_\tau, \tag{1}$$

где $\sigma\colon \mathbb{R}_+ \to I = \{1, \ldots, m\}$ – кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном промежутке; S_τ – множество всех тех переключающих сигналов σ, для которых время между каждыми двумя соседними переключениями не меньше τ $(\tau > 0)$; I – множество индексов, нумерующих режимы функционирования системы (1); $A_\sigma = A \circ \sigma$ – композиция отображения $A\colon I \to \{A_1, \ldots, A_m\}$ $(A_i \in \mathbb{R}^{n\times n})$ и переключающего сигнала σ, а $b_\sigma = b \circ \sigma$ – аналогичная композиция для отображения $b\colon I \to \{b_1, \ldots, b_m\}$ $(b_i \in \mathbb{R}^n)$; пары матриц (A_i, b_i), $i = \overline{1,m}$, определяют режимы функционирования системы (1); $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^1$ – управляющий вход.

Требуется *стабилизировать* систему (1) в некоторой окрестности $D(0)$ нуля, т.е. построить обратную связь $u = u(x)$ такую, что для каждого $\sigma \in S_\tau$ и любого $x_0 \in D(0)$ норма решения $x(t)$ с начальным вектором $x(0) = x_0$ системы (1) стремится к нулю при $t \to \infty$. При этом вектор-функция $x(t)$ определяется как решение линейной дифференциальной системы с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)} x + b_{\sigma(t)} u, \quad x(0) = x_0, \quad \sigma \in S_\tau.$$

Один из возможных подходов к решению поставленной задачи заключается в построении переключаемого регулятора

$$u = -k_\sigma x, \tag{2}$$

каждый режим которого является стабилизирующей обратной связью $u = -k_i x$ для, соответственно, i-го режима $\dot{x} = A_i x + b_i u$ переключаемой системы (1), т.е. обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы $\dot{x} = (A_i - b_i k_i)x$. Такую обратную связь всегда можно построить в предположении полной управляемости пары (A_i, b_i) [1, с. 249].

Основная проблема данного подхода состоит в том, что для реализации указанного регулятора необходимо знать моменты переключения режимов и номера активных режимов в каждый момент времени (т.е. функцию σ) – для того чтобы обеспечить синхронность переключений регулятора и отображения A_σ. Однако, как правило, такая информация о переключаемой системе в режиме реального времени не доступна.

*) Семинар основан академиками РАН С.В. Емельяновым и С.К. Коровиным.

**) Составитель хроники А.В. Ильин.

Возможное решение, позволяющее использовать данный регулятор, заключается в построении "наблюдателя", который определял бы номер активного режима для текущего момента времени. В качестве такого "наблюдателя" предлагается использовать нейронную сеть [2, с. 55].

Пару – переключаемый регулятор и нейронная сеть – далее будем называть *нейрорегулятором*. Перенумеруем (от 1 до m^2) все возможные режимы $\dot{x} = (A_i - b_i k_j)x$ $(i, j = \overline{1, m})$ системы (1), замкнутой переключаемым регулятором (2). Основная работа нейронной сети состоит в следующем: выбирается дискретная последовательность моментов времени εl, $l = 0, 1, 2 \ldots$, где ε – достаточно малая положительная константа $(\varepsilon < \tau)$, и далее по каждой паре измерений вектора состояния $(x(\varepsilon l), x(\varepsilon(l+1)))$ нейронная сеть должна определять номер текущего режима замкнутой переключаемой системы в момент $t = \varepsilon(l+1)$. Используя данную информацию, осуществляется переключение векторов k_i стабилизирующей обратной связи в переключаемом регуляторе.

Можно выделить несколько основных шагов настройки нейрорегулятора:

1) выбор структуры нейросети;

2) выбор величины ε с учётом времени задержки τ;

3) выбор регуляторов $u = -k_i x$, обеспечивающих нужное быстродействие с учётом параметра τ;

4) построение обучающей выборки для нейросети с учётом окрестности $D(0)$, в которой осуществляется стабилизация переключаемой системы;

5) обучение нейросети на парах $(x(0), x(\varepsilon))$;

6) проверка работоспособности нейросети по определению текущего активного режима;

7) моделирование переключаемой системы (1), замкнутой нейрорегулятором.

Данный алгоритм прошёл апробацию на примере переключаемой системы вида (1) второго порядка с двумя режимами. Результаты моделирования подтвердили работоспособность изложенного выше алгоритма стабилизации системы (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00162).

Литература. 1. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М., 1976. 2. Хайкин С. Нейронные сети. М., 2006.

Н.А. Магницкий (Россия, Москва, ФИЦ ИУ РАН). "Вывод дифференциальных уравнений Максвелла из уравнений классической механики" (27.09.2021).

Считается, что система линейных дифференциальных уравнений электромагнитного поля в вакууме – система уравнений Максвелла – "не вытекает из каких-либо более общих теоретических положений, но является обобщённой записью наблюдавшихся на опыте фактов" [1, с. 41]. Покажем, что это не так и что система уравнений Максвелла является следствием системы уравнений вакуума (эфира), предложенной автором в [2–4] и описывающей эфирную среду в трёхмерном евклидовом пространстве двумя нелинейными уравнениями, которые следуют из уравнений классической механики Ньютона

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad \frac{d\rho\,\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \rho\,\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\rho \mathbf{u}) = 0, \tag{1}$$

в них векторы $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ и $\mathbf{r}(t)$ являются соответственно скоростью и координатами распространения локальных возмущений плотности $\rho(t, \mathbf{r})$ среды (эфира) в каждый момент времени t.

Определения векторов напряжённости электрического поля $\mathbf{E}$ и магнитной индукции $\mathbf{B}$ даны в работах автора [2–4] и выражаются формулами

$$\mathbf{B} = c\nabla \times (\rho \mathbf{u}), \quad \mathbf{E} = (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\rho \mathbf{u}), \tag{2}$$

где c – скорость распространения возмущений в эфире (скорость света).

Три уравнения Максвелла из четырёх получаются достаточно просто из системы уравнений эфира (1). Применим к выражениям (2) оператор дивергенции $\nabla \cdot$. Получим два уравнения из системы уравнений Максвелла:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{и} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\sigma, \tag{3}$$

здесь σ имеет смысл плотности заряда, определяемой возмущениями плотности эфира

$$4\pi\sigma = \nabla\cdot(|\mathbf{u}|\nabla(\rho|\mathbf{u}|) - \mathbf{u}\times(\nabla\times(\rho\mathbf{u}))).$$

Применим оператор ротора $c\nabla\times$ ко второму уравнению системы (1). Придём к первому уравнению из системы уравнений Максвелла

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + c\nabla\times\mathbf{E} = 0, \tag{4}$$

являющемуся обобщением закона индукции Фарадея.

Наиболее сложным является вывод второго уравнения из системы уравнений Максвелла, содержащего плотность тока $\mathbf{j}$ и плотность тока смещения. Применим ко второму уравнению системы (1) оператор производной вдоль кривой $(\mathbf{u}\cdot\nabla)$. Получим

$$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)((\mathbf{u}\cdot\nabla)(\rho\mathbf{u})) - \left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\cdot\nabla\right)(\rho\mathbf{u}) = 0.$$

Используя далее вытекающее из системы (1) уравнение $\partial\mathbf{u}/\partial t = (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - (\nabla\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}$ и известные правила действия с оператором набла ∇, придём к уравнению

$$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} - \nabla\times\left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{c}\mathbf{B}\right) + 4\pi\mathbf{j} = 0, \tag{5}$$

в котором $\mathbf{j}$ имеет смысл вектора плотности электрического тока и

$$4\pi\mathbf{j} = (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathbf{u}(\nabla\cdot\mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla\cdot\mathbf{u}) - \nabla\times(\mathbf{u}\times(\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}) - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{u}))) +$$

$$+ \nabla\times(\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot(\nabla\times\mathbf{a}))) - (((\nabla\cdot\mathbf{u})\mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u})\cdot\nabla)\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = \rho\mathbf{u}, \quad \mathbf{b} = (\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho\mathbf{u}.$$

В случае $|\mathbf{u}| \approx c$ и экспериментально определяемых σ и $\mathbf{j}$ уравнения (3)–(5) переходят в классическую линейную систему уравнений Максвелла

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla\times\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\mathbf{j}}{c}, \quad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \quad \nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\sigma. \tag{6}$$

Таким образом, систему уравнений (3)–(5) можно интерпретировать как систему обобщённых нелинейных уравнений Максвелла. Важно отметить, что исходные нелинейные уравнения эфира (1) инвариантны относительно преобразования Галилея. Одной из причин потери такой инвариантности в классических линейных уравнениях Максвелла является линеаризация обобщённых нелинейных уравнений Максвелла (3)–(5) при $|\mathbf{u}| \approx c$. Другой причиной является применение операторов дифференцирования при переходе к векторам $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Последнее приводит также к потере продольной компоненты в винтовой электромагнитной волне эфира (фотоне)

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{r}) = u_0\sin(\omega t - ky)\mathbf{i}_x + c\mathbf{i}_y + u_0\cos(\omega t - ky)\mathbf{i}_z, \quad \omega = kc, \tag{7}$$

распространяющейся со скоростью света c в направлении y в эфире постоянной плотности, где u_0– амплитуда поперечной компоненты скорости, а $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$, $\mathbf{i}_z$ – единичные базисные векторы декартовой системы координат. Нетрудно проверить, что вектор (7) является решением системы уравнений (1), записанной в декартовой системе координат. Вычисляя теперь векторы индукции магнитного поля и напряжённости электрического поля по формулам (2), получаем

$$\mathbf{B} = c\nabla\times(\rho\mathbf{u}) = u_0\rho\omega(\sin(\omega t - ky)\mathbf{i}_x + \cos(\omega t - ky)\mathbf{i}_z), \tag{8}$$

$$\mathbf{E} = (\mathbf{u}\cdot\nabla)(\rho\mathbf{u}) = u_0\rho\omega(-\cos(\omega t - ky)\mathbf{i}_x + \sin(\omega t - ky)\mathbf{i}_z). \tag{9}$$

Векторы (8) и (9) ортогональны между собой, имеют равные амплитуды $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}| = u_0\rho\omega$ и лежат в плоскости (x,z), ортогональной направлению движения эфирной волны (фотона).

Нетрудно проверить, что векторы (8) и (9) являются также решениями классической линейной системы уравнений Максвелла (6) в случае отсутствия зарядов и токов. Следовательно, в этом частном случае линейная система уравнений Максвелла (6) даёт верный результат в виде плоской монохроматической циркулярно поляризованной электромагнитной волны.

В другом частном случае, когда решением системы уравнений (1) является продольная волна возмущений плотности эфира

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{r}) = c\mathbf{i}_y, \quad \rho(t,\mathbf{r}) = \rho_0(1+\alpha\sin(\omega t - ky)), \quad \omega = kc, \quad \alpha \ll 1, \tag{10}$$

вычисленные по формулам (2) векторы индукции магнитного поля и напряжённости электрического поля имеют вид

$$\mathbf{B} = c\nabla\times(\rho\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{E} = (\mathbf{u}\cdot\nabla)(\rho\mathbf{u}) = -c\omega\rho_0\alpha\cos(\omega t - ky)\mathbf{i}_y.$$

Следовательно, этот случай не описывается линейной системой уравнений Максвелла. Вполне вероятно, что продольная волна возмущений плотности эфира (10) является волной радиантного электричества Николы Тесла. Вывод из системы (1) других известных физических законов и уравнений можно найти в работах автора [5, 6].

Литература. 1. Левич В.Г. Курс теоретической физики. Т. 1. М., 1969. 2. Магницкий Н.А. Математическая теория физического вакуума. М., 2010. 3. Магницкий Н.А. К электродинамике физического вакуума // Сложные системы. 2011. Т. 1. № 1. С. 83–91. 4. Magnitskii N.A. Mathematical theory of physical vacuum // Comm. Nonlin. Sci. and Numer. Simul. 2011. V. 16. P. 2438–2444. 5. Magnitskii N.A. Theory of compressible oscillating ether // Results in Phys. 2019. V. 12. P. 1436–1445. 6. Магницкий Н.А. Теория сжимаемого осциллирующего эфира. М., 2021.

Е.И. Атамась, А.И. Роговский (Москва, Россия, ВМК МГУ). “О свойствах обобщения относительного порядка для систем с запаздыванием” (11.10.2021).

Рассматриваем линейную стационарную управляемую систему с соизмеримыми запаздываниями. Такая система имеет следующий вид:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{k} A_i x(t-i\tau) + \sum_{i=0}^{k} B_i u(t-i\tau), \quad y(t) = \sum_{i=0}^{k} C_i x(t-i\tau). \tag{1}$$

Здесь $x(t)\in\mathbb{R}^n$, $y(t), u(t)\in\mathbb{R}^l$, матрицы A_i, B_i, C_i, $i=\overline{1,l}$, постоянны и имеют соответствующие размеры, $\tau>0$. Будем рассматривать квадратные системы, т.е. системы, размерности входа и выхода которых одинаковы. Далее введём оператор запаздывания и, заменив его символом Δ, получим систему в алгебраической форме [1]:

$$\dot{x} = A(\Delta)x + B(\Delta)u, \quad y = C(\Delta)x, \tag{2}$$

где $A(\Delta)$, $B(\Delta)$, $C(\Delta)$ – полиномиальные матрицы размеров $n\times n$, $n\times l$, $l\times n$ соответственно. Систему (2) будем называть также *системой* (A,B,C).

Определение 1. Вектор $r=(r_1,\ldots,r_l)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{N}^l$ называется *вектором относительного порядка* системы (2), если выполнены следующие условия:

1) $C_{i*}(\Delta)A^{r_i-1}(\Delta)B(\Delta)\neq 0$ [*)] и если $r_i>1$, то $C_{i*}(\Delta)A^{j-1}(\Delta)B(\Delta)=0$, где через $C_{i*}(\Delta)$ обозначена i-я строка матрицы $C(\Delta)$;

2) определитель матрицы

$$H(\Delta) = \begin{pmatrix} C_{1*}(\Delta)A^{r_1-1}(\Delta)B(\Delta) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{l*}(\Delta)A^{r_l-1}(\Delta)B(\Delta) \end{pmatrix}$$

является ненулевым полиномом.

[*)] т.е. указанная строка отлична от строки, целиком состоящей из нулевых полиномов.

Если, кроме этого, определитель $\det H(\Delta)$ обратим, т.е. является ненулевым числом, то относительный порядок называется *чистым*.

Понятие относительного порядка имеет фундаментальное значение в математической теории управления, в частности, при решении задач наблюдения и обращения [2]. К сожалению, не для всех систем относительный порядок определён, поэтому приходится рассматривать обобщения этого понятия. В докладе приводятся некоторые результаты о свойствах таких обобщений для систем с запаздыванием, близкие к результатам работы [3].

Определение 2. Вектор $r = (r_1, \ldots, r_l)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{N}^l$ называется *вектором неполного относительного порядка* (*НОП*) системы (2), если для него выполнено условие 1) определения 1.

Определение 3. Вектор $r = (r_1, \ldots, r_l)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{N}^l$ называется *вектором главного неполного относительного порядка* (*ГНОП*), если r – вектор НОП и для любых попарно различных индексов $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k$ таких, что $r_{i_1} = r_{i_2} = \ldots = r_{i_q},$ полином

$$G[C_{i_1*}A^{r_{i_1}-1}B,\ C_{i_2*}A^{r_{i_2}-1}B,\ \ldots,\ C_{i_q}A^{r_{i_q}-1}B]$$

ненулевой, где $G[v_1, v_2, \ldots, v_p] = \det(v_i v_j^{\mathrm{т}})_{i,j=1}^{k}$ – определитель матрицы Грама.

Определение 4. Систему $\{A, B, C\}$ назовём *слабо приводимой*, если при любой унимодулярной матрице T для системы $\{A, B, TC\}$ определён вектор НОП.

Утверждение 1. *Система $\{A, B, C\}$ является слабо приводимой тогда и только тогда, когда матрица*

$$V(\Delta) = [CB, CAB, \ldots, CA^{n-1}B]$$

имеет полный ранг l при всех Δ, за исключением, быть может, конечного числа значений.

Утверждение 2. *Пусть система $\{A, B, C\}$ является слабо приводимой. Тогда найдётся такая унимодулярная матрица T, что система $\{A, B, TC\}$ имеет вектор ГНОП.*

Утверждение 3. *Пусть r – вектор ГНОП слабо приводимой системы $\{A, B, C\}$. Тогда при любой унимодулярной матрице T для системы $\{A, B, TC\}$ определён вектор НОП $\tilde{r}$, причём выполнено покомпонентное неравенство $\operatorname{ord}(r) \geqslant \operatorname{ord}(\tilde{r})$, где $\operatorname{ord}(r)$ обозначает вектор с теми же компонентами, что и у r, но упорядоченными по невозрастанию.*

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для молодых учёных-кандидатов наук (проект МК-4905.2021.1.1).

Литература. 1. Morse A.S. Ring models for delay-differential systems // IFAC Proc. Volumes. 1974. V. 7. № 1. P. 439–445. 2. Ильин А.В., Атамась Е.И., Фомичев В.В. О приведении систем с запаздыванием к форме с выделением нулевой динамики // Докл. РАН. 2018. Т. 480. № 1. С. 11–15. 3. Фомичев В.В., Краев А.В., Роговский А.И. Обобщение понятия относительного порядка и его свойства // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 8. С. 1099–1108.

В.В. Фомичев, Н.И. Денисова (Москва, Россия, ВМК МГУ, ИПМ им. М.В. Келдыша).
“Наблюдатели для квазистационарных систем при внешних возмущениях” (15.11.2021).

Хорошо известны подходы к построению наблюдателей линейных стационарных систем [1]. Как правило, для построения таких наблюдателей требуется достаточная гладкость параметров системы. Большой интерес вызывает случай линейных нестационарных систем. С возникающими проблемами можно бороться с помощью, например, адаптивных наблюдателей [2]. Для некоторых линейных нестационарных систем можно построить даже экспоненциально устойчивый наблюдатель [3]. Значительно интереснее обстоит дело в задаче о синтезе наблюдателей для систем с возмущениями при непрерывности или однократной дифференцируемости параметров системы. Если для стационарного случая известны различные методы решения этой задачи (при различных предположениях о системе), то в нестационарном случае продвижений в её решении очень мало.

В докладе предпринята попытка перенести некоторые результаты, полученные для линейных стационарных систем с возмущением, на нестационарный случай.

Итак, рассматриваем систему

$$\dot{x} = A(t)x + D(t)f, \quad y = C(t)x, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^k$, $f \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^l$, известные матрицы $A(t)$, $C(t)$, $D(t)$ – гладкие по t и имеют соответствующий порядок, возмущение f мажорируется константой.

Требуется по информации об известном входе $u(t)$ и известном выходе $y(t)$ построить асимптотическую оценку $\tilde{x}(t)$ вектора состояния $x(t)$.

Далее предполагаем, что (1) является *гипервыходной системой*, т.е. системой, для которой $l > m$ (число известных выходов больше числа неизвестных входов). Предполагаем также, что $\operatorname{rank}(CD) = m$, т.е. матрица CD имеет полный ранг. Кроме того, считаем, что последнее условие выполняется "равномерно по выходам", т.е. что выход можно разделить:

$$y = \begin{pmatrix} C' \\ C'' \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix}, \quad \det\bigl(C'(t)D(t)\bigr) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad t.$$

Применяя сначала стационарное преобразование координат с произвольной матрицей F такой, что

$$T = \begin{pmatrix} F \\ C' \end{pmatrix}, \quad \det T(t) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad t, \quad Tx = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = T'x' + T''y',$$

а затем делая нестационарную замену $\tilde{x}' = x' - FD(C'D)^{-1}y'$, получаем систему

$$\dot{\tilde{x}}' = A_{11}(t)\tilde{x}' + A_{12}(t)y', \quad \dot{y}' = A_{21}(t)\tilde{x}' + A_{22}(t)y' + A_{24}f.$$

Рассмотрим "запасные" выходы, которые после преобразований принимают вид

$$y'' = C''T'\tilde{x}' + C''(T'FD(C'D)^{-1} + T'')y',$$

откуда получаем итоговую систему без явного влияния возмущения с известным выходом, для которой можно пробовать строить наблюдатель:

$$\dot{\tilde{x}}' = A_{11}(t)\tilde{x}' + A_{12}(t)y', \quad \tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x}', \tag{2}$$

где $\tilde{C} = C''T'$.

Для иллюстрации предложенного подхода рассмотрим квазистационарный случай системы третьего порядка, когда $n = 3$, C и D – постоянные матрицы. Тогда

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Лемма 1. *Система (1), (3) наблюдаема тогда и только тогда, когда* $a_{13}^2(t) + a_{23}^2(t) \neq 0$.

В силу вида исходной матрицы C можно выполнить невырожденное стационарное преобразование

$$Tx = \begin{pmatrix} F \\ C' \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

В итоге получим систему (2) с матрицами

$$A_{11}(t) = \begin{pmatrix} -d_2a_{12}(t) + a_{22}(t) & -d_2a_{13}(t) + a_{23}(t) \\ -d_3a_{12}(t) + a_{32}(t) & -d_3a_{13}(t) + a_{33}(t) \end{pmatrix},$$

$$A_{12}(t) = \begin{pmatrix} a_{21}(t) - d_2a_{11}(t) - d_2^2a_{12}(t) + d_2a_{22}(t) - d_2d_3a_{13}(t) + d_3a_{23}(t) \\ a_{31}(t) - d_3a_{11}(t) - d_2d_3a_{12}(t) + d_2a_{32}(t) - d_3^2a_{13}(t) + d_3a_{33}(t) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{C} = (1,\ 0).$$

Для построения наблюдателя необходима наблюдаемость пары $\{A_{11}(t), \tilde{C}\}$.

Лемма 2. *Пара* $\{A_{11}(t), \tilde{C}\}$ *наблюдаема, когда* $a_{23}(t) \not\equiv d_2 a_{13}(t)$.

Замечание. В случае ненаблюдаемости исходной системы (3) пара $\{A_{11}(t), \tilde{C}\}$ также не будет наблюдаемой.

Итак, имеем наблюдаемую систему

$$\dot{\tilde{x}}' = A_{11}(t)\tilde{x}' + A_{12}(t)y', \quad \tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x}'.$$

Строим наблюдатель

$$\dot{\bar{x}} = A_{11}(t)\bar{x} + A_{12}(t)y' - L(\tilde{C}\tilde{x}' - y), \quad \text{где } L = (l_1, l_2)^{\mathrm{T}}.$$

Для матрицы

$$A_L(t) = A_{11}(t) - L\tilde{C} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}(t) - l_1(t) & \tilde{a}_{12}(t) \\ \tilde{a}_{21}(t) - l_2(t) & \tilde{a}_{22}(t) \end{pmatrix}$$

рассмотрим функцию Ляпунова $V = e^{\mathrm{T}}Pe$, $\dot{e} = A_L e$ с матрицей $P = \operatorname{diag}[h_1, h_2]$, $h_1, h_2 > 0$.

Теорема. *Задача наблюдения может быть решена при* $\tilde{a}_{22}(t) = a_{33}(t) - d_3 a_{13}(t) > 0$.

В этом случае $l_1 = l_1(t) = \tilde{a}_{11}(t) + \delta$, $\delta > 0$, а функция l_2 выбирается достаточно малой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00288).

Литература. 1. Fomichev V.V., Vysotskii A.O. Algorithm for designing a cascade asymptotic observer for a system of maximal relative order // Differ. Equat. 2019. V. 67. № 3. P. 553–560. 2. Куок Дат Во, Бобцов А.А. Адаптивный наблюдатель переменных состояния линейных нестационарных систем с параметрами, заданными не точно // Автоматика и телемеханика. 2020. № 12. С. 100–110. 3. Зубер И.Е. Синтез экспоненциально устойчивого наблюдателя для линейных нестационарных систем с одним выходом // Автоматика и телемеханика. 1995. № 5. С. 42–49.

Д.В. Злобин (Москва, Россия, ВМК МГУ). “Анализ эффективности автоматически сгенерированного кода для вычисления матриц Якоби и Гессе в задачах нелинейного программирования” (13.12.2021).

Пусть нелинейный динамический объект задан в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$
$$x(0) = x_0, \quad t \in [0, T],$$

а на его фазовый вектор наложены нелинейные ограничения

$$G_L \leqslant G(x(t), u(t), T) \leqslant G_U,$$

где $f(x, u), x(t), x_0 \in \mathbb{R}^n$; $u(t) \in \mathbb{R}^m$; $G(x, u, T), G_L, G_U \in \mathbb{R}^r$; $T \in \mathbb{R}_+$.

Для этого объекта требуется решить задачу оптимального управления (ОУ) с нелинейным функционалом качества:

$$\min_{u(t) \in \mathcal{U}} F(x(t), u(t), T),$$

где $F(x, u, T) \in \mathbb{R}$, а $\mathcal{U}$ – множество допустимых управлений.

Один из способов решения такой задачи состоит в переходе от неё к задаче нелинейного программирования (НЛП) при помощи дискретизации по времени фазового вектора, управления, уравнений динамики, ограничений и функционала качества [1, с. 91–216]. Полученная задача НЛП решается одним из численных методов. Если ограничения и функционал качества задачи НЛП дважды непрерывно дифференцируемы, то можно использовать решатель IpOpt [2], являющийся открытой эффективной реализацией метода внутренней точки.

Для применения решателя IpOpt пользователь должен предоставить реализацию на языке C++ функций для вычисления функционала качества, ограничений, градиента функционала качества, ненулевых элементов матрицы Якоби для ограничений и ненулевых элементов

матрицы Гессе для лагранжиана задачи. Эти функции могут быть написаны вручную или сгенерированы при помощи специального программного обеспечения на основе высокоуровневого описания задачи НЛП.

В данном докладе сравниваются быстродействия автоматически сгенерированных кодов, полученных при помощи пакетов sympy2ipopt [3, 4] и CasADi [5]. Пакет CasADi, основанный на идеях автоматического дифференцирования, ориентирован на общий случай задач НЛП. В отличие от него разработанный автором доклада пакет sympy2ipopt явно использует особенности структуры задач НЛП, полученных при дискретизации задач ОУ. Это делает результирующий код более компактным и потенциально более быстрым.

Для проведения тестирования были выбраны четыре тестовые задачи ОУ из набора COPS3 [6]: “robot”, “rocket”, “steering”, “glider”. Применялся компилятор gcc 9.3.0, вычисления проводились на компьютере с процессором Intel® Core™ i7-9750H.

Результаты экспериментов приведены в табл. 1 и 2. В первом случае сборка осуществлялась с использованием флага оптимизации “-O3”, а во втором – флага “-Ofast”.

Таблица 1. Время (в мкс), затраченное на вычисление автоматически сгенерированных функций, сборка осуществлялась с флагом “-O3”

Функции	sympy2ipopt				CasADi			
	robot	rocket	steering	glider	robot	rocket	steering	glider
Функционал качества	1	1	1	1	3	3	3	3
Ограничения	118	18	32	47	144	34	41	146
Градиент	3	2	2	2	11	7	7	6
Матрица Якоби	430	81	50	364	370	144	140	385
Матрица Гессе	1050	223	24	2359	404	183	85	770

Таблица 2. Время (в мкс), затраченное на вычисление автоматически сгенерированных функций, сборка осуществлялась с флагом “-Ofast”

Функции	sympy2ipopt				CasADi			
	robot	rocket	steering	glider	robot	rocket	steering	glider
Функционал качества	2	1	1	1	3	3	3	3
Ограничения	22	13	22	13	50	30	33	117
Градиент	3	2	2	2	10	7	7	6
Матрица Якоби	75	40	37	56	265	136	127	344
Матрица Гессе	78	39	24	54	297	177	76	711

По сравнению с фагом “-O3” флаг “-Ofast” включает дополнительные оптимизации, которые не соответствуют спецификациям IEEE и ISO для математических функций. В частности, не устанавливается переменная “errno” после выполнения математических операций, которые занимают одну инструкцию, предполагается, что в процессе выполнения не будет ошибок деления на нуль, переполнения и т.п.

Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы. Во-первых, использование пакета sympy2ipopt даёт выигрыш в скорости, за исключением вычисления элементов матриц Якоби и Гессе при сборке с флагом “-O3” для задач “robot” и “glider”. Во-вторых, использование флага компилятора “-Ofast” существенно увеличивает скорость выполнения кода для вычисления элементов матриц Якоби и Гессе, сгенерированного при помощи пакета sympy2ipopt.

Степень влияния флага “-Ofast” объясняется способом представления математических выражений, который использует программный пакет. Пакет CasADi основан на представлении выражений в виде направленного графа, а пакет sympy2ipopt использует средства библиотеки SymPy [7] (символьные вычисления на языке Python), в которой выражения представляются в виде дерева. Из-за этого многократно вычисляются одни и те же подвыражения, что приводит к большим накладным расходам на проверки, если не указан флаг компилятора “-Ofast”.

Полученные результаты показывают, что изменение представления математических выражений в пакете sympy2ipopt позволит добиться высокой скорости выполнения сгенерированного кода без использования “агрессивной” оптимизации “-Ofast”.

Литература. 1. Betts J.T. Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming. Philadelphia, 2010. 2. Wächter A., Biegler A. On the implementation of a primal-dual interior point filter line search algorithm for large-scale nonlinear programming // Math. Programming. 2006. V. 106. P. 25–57. 3. Злобин Д.В. Использование разреженной структуры матриц Якоби и Гессе для ускорения численного решения задач оптимального планирования траекторий // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2021. Т. 25. № 4. С. 285–288. 4. GitHub. symp2ipopt. 2021. Режим доступа: https://github.com/zlobin-d/sympy2ipopt (Дата обращения: 13.12.2021). 5. Andersson J.A.E., Gillis J., Horn G., Rawlings J.B., Diehl M. CasADi – a software framework for nonlinear optimization and optimal control // Math. Progr. Comput. 2019. V. 11. P. 1–36. 6. Dolan E.D., Moré J.J., Munson T.S. Benchmarking Optimization Software with COPS 3.0 // Technical Memorandum. ANL/MCS-TM-273. Argonne National Laboratory, 2004. 7. Meurer A., Smith Ch.P., Paprocki M., Čertík O. SymPy: symbolic computing in Python // Peer J. Comp. Sci. 2017. V. 3. P. e103.

Р.Р. Бегишев, А.В. Ильин, А.И. Роговский (Москва, Россия, ВМК МГУ). “Достаточные условия существования периодических решений у нелинейной системы третьего порядка” (20.12.2021).

Рассматривается нелинейная система третьего порядка

$$\dot{z_1} = z_2, \quad \dot{z_2} = -z_1 + \mu(-\gamma z_2 + (\Delta - z_1)f(z_3)), \quad \dot{z_3} = -\beta z_3 + \alpha(\cos(\zeta \operatorname{arctg}(z_1)) + 1), \qquad (1)$$

где числа α, β, γ, Δ, ζ положительны, а $f(z)$ – возрастающая, непрерывно дифференцируемая и ограниченная на $\mathbb{R}$ функция. Требуется найти параметры системы, при которых у неё существует нестационарное периодическое решение.

Отметим, что вопрос о существовании периодических решений у системы (1) с конкретной функцией $f(z_3)$ исследовался в работах [1–4]. В настоящем докладе результаты работы [4] обобщаются на случай произвольной функции $f(z_3)$.

Используя результаты, приведённые в монографии [5, гл. XIV], доказана следующая

Теорема. *Пусть функция* $H(p)$, $p \in \mathbb{R}$, *задана равенством*

$$H(p) = \gamma\pi p + \int_0^{2\pi} (\Delta - p\cos(s))f(\omega(s,p))\sin(s)\,ds,$$

где

$$\omega(s,p) = e^{-\beta s}\left(\frac{\alpha}{e^{2\pi\beta}-1}\int_0^{2\pi} e^{\beta q}\cos(\zeta \operatorname{arctg}(p\cos(q)))\,dq + \alpha\int_0^{s} e^{\beta q}\cos(\zeta \operatorname{arctg}(p\cos(q)))\,dq\right) + \frac{\alpha}{\beta},$$

и числа α, β, γ, Δ, ζ *таковы, что найдётся положительное* $\overline{p}$, *для которого выполняются соотношения* $H(\overline{p}) = 0$ *и* $dH(\overline{p})/dp \neq 0$. *Тогда найдётся такое* $\overline{\mu} > 0$, *что система (1) имеет отличное от константы периодическое решение при всех* $\mu \in [0, \overline{\mu}]$.

Литература. 1. Fomichev V.V., Iline A.V., Rogovskii A.I., Todorov G.D., Sofronov Ya.P. Search for periodic regimes in an energy-harvester model by simulation // Comput. Math. and Model. 2020. V. 31. № 1. P. 293–307. 2. Фурсов А.С., Митрев Р.П., Крылов П.А., Тодоров Т.С. О существовании периодического режима в одной нелинейной системе // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1104–1115. 3. Фурсов А.С., Митрев Р.П., Крылов П.А., Тодоров Т.С. О существовании колебательных режимов в одной нелинейной системе с гистерезисами // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1103–1121. 4. Фомичев В.В., Ильин А.В., Роговский А.И., Бегишев Р.Р., Митрев Р.П., Тодоров Т.С. О существовании периодических решений у нелинейной системы третьего порядка // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 10. С. 1367–1383. 5. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.