Russian Academy of Sciences

Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 85. Iss. 3

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

May—June

Учредитель: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Редакция:
В.Г. Байдулов – отв. секретарь
Е.В. Есина – зав. редакцией

Адрес редакции: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245
Телефон редакции: 8 (495) 434-21-49
E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: http://pmm.ipmnet.ru

На сайте Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала "Прикладная математика и механика" в каталоге Роспечати 70706
ISSN 0032-8235

Founder: Russian Academy of Sciences

The Editorial Staff:
V.G. Baydulov – executive secretary
E.V. Esina – head of Editorial office (manager editor)

The Editorial Board Adress: 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia
Phone: 8 (495) 434-21-49
E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL : http://pmm.ipmnet.ru

The subscription index in Rospechat catalogue 70706
ISSN 0021-8928

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

ВЛАДИМИР АНДРЕЕВИЧ БАБЕШКО (К ВОСЬМИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)

DOI: 10.31857/S0032823521030127

30 мая 2021 года исполняется 80 лет академику, доктору физико-математических наук Владимиру Андреевичу Бабешко – крупному специалисту в области механики деформируемого твердого тела, прикладной математики, интегральных и дифференциальных уравнений, геофизики, акустики, сейсмологии, экологии. Он один из авторов открытия нового физического явления: существования высокочастотного резонанса в полуограниченных средах с неоднородностями. Основные результаты исследований этого явления нашли широкое применение в авиации, инженерном деле, сейсмологии и экологии. Предложенные им методы широко используются при оценке прочности инженерных сооружений и конструкций. В.А. Бабешко руководит исследованиями по сейсмической безопасности городов, которые находятся на стыке геофизики и механики. Он автор более 500 научных работ и патентов, 5 монографий. Результаты его деятельности получили широкое признание международного научного сообщества. В 1973 году он стал лауреатом премии Ленинского комсомола в области науки; а в 2001 – лауреатом Государственной премии России в области науки и техники. В разное время В.А. Бабешко был членом Президиума РАН, членом Бюро отделения энергетики, механики, машиностроения и управления РАН, членом Высшей аттестационной комиссии РФ, вице-президентом Союза ректоров РФ, вице-президентом международной организации “Зна-

ние". Сейчас руководитель направлений математики и механики Южного научного центра РАН, заведующий кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета. В.А. Бабешко член Президиума Национального комитета по теоретической и прикладной механике, член Американского акустического общества (ASA), Американского геофизического союза (AGU), Американского общества инженеров-механиков (ASME), представитель Кубанского государственного университета в Ассоциации институтов сейсмологии США (IRIS), Почетный сенатор Высшей технико-экономической школы г. Берлина (Германия).

Редколлегия и редакция ПММ, коллеги и многочисленные ученики сердечно поздравляют Владимира Андреевича с юбилеем, желают здоровья и новых творческих успехов.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 3, с. 277–284

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ЧЕТВЕРТЬ ПЛОСКОСТИ

© 2021 г. В. А. Бабешко[1,2,*], О. В. Евдокимова[1,], О. М. Бабешко[2,***]**

[1] Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Россия
[2] Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия
**e-mail: babeshko41@mail.ru*
***e-mail: evdokimova.olga@mail.ru*
****e-mail: babeshko49@mail.ru*

Поступила в редакцию 28.01.2021 г.
После доработки 24.02.2021 г.
Принята к публикации 12.03.2021 г.

В работе, впервые, координатным методом блочного элемента строится точное решение в первом квадранте плоской граничной задачи второго рода для динамических уравнений упругости Ламе, разложенное по решениям граничных задач для уравнения Гельмгольца. В более ранней работе авторов решение было построено интегродифференциальным методом. Точные решения векторных граничных задач скалярными в неклассических областях позволяют упростить решения граничных задач в средах сложной реологии и извлечь ранее упускавшиеся, при использовании иных подходов, сведения о некоторых процессах и явлениях в механике и физике.

Ключевые слова: граничные задачи, метод блочного элемента, упакованные блочные элементы, уравнения Ламе, уравнения Гельмгольца

DOI: 10.31857/S0032823521030024

1. Введение. В работе построено решение векторной граничной задачи, разложенное по упакованным блочным элементам, которые являются решениями скалярных граничных задач в неклассических областях. Решения ряда векторных дифференциальных уравнений в частных производных механики сплошных сред, электромагнитных явлений, теории поля допускают представления в виде разложений по решениям скалярных уравнений. В его основе лежит преобразование Б.Г. Галеркина [1, 2]. Этот подход удобен при решении задач во всем пространстве и в ряде классических областей. К ним относятся такие области, как полупространство, шар, цилиндр, а также в некоторые области, получаемые в результате представлений групп преобразований пространства [3]. В то же время для ряда важных областей, отличных от классических, например, клиновидных, прямоугольных, в форме полуполос и полуплит построение точных решений этим подходом пока не удавалось осуществить. Основная сложность при решении граничных задач этим подходом в неклассических областях состоит в трудности удовлетворения граничных условий.

Ранее в работе авторов [4] разложение решения векторной граничной задачи с помощью скалярных было построено интегродифференциальным методом. В настоящей работе, развит иной подход, названный координатным, также основанный на методе блочного элемента. Впервые, этим подходом строится точное решение в первом квадранте плоской граничной задачи второго рода для динамических уравнений Ламе.

Известно, что неограниченность области делает неэффективным использование в этой граничной задаче численных методов. Решение строится при произвольных граничных условиях. Это открывает возможность изучить различные свойства решений, изменяя воздействия на границе. В отличие от работы авторов [5] в данном исследовании используются продольный и поперечный потенциалы, которые удовлетворяют уравнениям Гельмгольца. Построение точных решений граничных задач в практических применениях позволяет выявлять свойства и явления, которые оказывались упущенными при использовании различных приближенных подходов. Так, разработанный недавно метод блочного элемента позволил выявить условия возникновения некоторых типов землетрясений [6, 7]. Этот же метод дал возможность обнаружить существование нового типа трещин, дополняющих трещины Гриффитса [8]. Исследованию граничных задач для уравнения Ламе посвящено огромное количество работ, содержащих как аналитические, так и численные исследования, выполненные более чем за полтора века. Все публикации в этой области невозможно охватить. Отметим те из них, где удавалось построить точные аналитические решения некоторых типов граничных задач для векторных уравнений Ламе в неклассических областях. Опустим из рассмотрения многочисленные работы, посвященные граничным задачам в полупространстве и слоистой среде, где преобразование Фурье решает проблему. В сферических областях следует отметить работы, посвященные построению собственных векторных функций [3]. Этот подход развивался для применения в цилиндрических, эллиптических, клиновидных, конических областях [9, 10].

Как отмечено выше, сложность применения этого метода разложения векторных граничных задач скалярными в материалах разных реологий в неклассических областях объясняется трудностью удовлетворения граничных условий. Поэтому в работах [11—13], в которых построены важные соотношения представления решений векторных граничных задач скалярными, решения построены только для полупространства и слоя. Представление этого решения в виде разложения по блочным элементам, являющееся решениями скалярных граничных задач в неклассических областях, делает возможность углубленного исследования свойств решений векторных граничных задач выполнимым.

2. Постановка задачи. Рассмотрим плоскую граничную задачу второго рода для системы уравнений Ламе, поставленную в первом квадранте при гармонических воздействиях на границе. Ранее точное ее решение получить не удавалось, однако метод блочного элемента в настоящей работе дает возможность это сделать в форме упакованных векторных блочных элементов.

В первом квадранте динамические уравнения Ламе после исключения члена $\exp(-i\omega t)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_1}+\mu\Delta u_1+k^2u_1=0, \quad \theta=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad k^2=\rho\omega^2\\
&(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_2}+\mu\Delta u_2+k^2u_2=0, \quad x_1,x_2\in\Omega, \quad \Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $u_n(x_1,x_2)$ — компоненты векторов перемещений в точке x_1, x_2, Ω — область первого квадранта $x_1\geq 0$, $x_2\geq 0$, λ, μ — параметры Ламе, ρ — плотность материала деформируемого тела, ω — частота внешних гармонических воздействий на границе, задаваемых комплексной функцией $\exp(-i\omega t)$, где t — время. В задаче первого рода значения напряжений на границах квадранта обозначаются на оси абсцисс функциями $X_{11}(x_1,0)$, $X_{12}(x_1,0)$ и $Y_{11}(0,x_2)$, $Y_{12}(0,x_2)$ — на оси ординат. Нормальные к границе напряжения обозначаются символом X, а касательные — Y. В задаче второго рода на границе первого квадранта задаются компоненты векторов перемещения $u_1(x_1,0)$, $u_2(x_1,0)$ и $u_1(0,x_2)$, $u_2(0,x_2)$.

3. Метод исследования. Достаточно давно было замечено, что уравнения Ламе как в статическом, так и в динамическом случаях обладают свойством представления решения в виде сумм решений скалярных граничных задач [11—13].

Следуя [11—13], примем разложение решения уравнений Ламе в следующей форме:

$$u_1(x_1,x_2) = \partial_1\varphi(x_1,x_2) + \partial_2\psi(x_1,x_2), \quad u_2(x_1,x_2) = \partial_2\varphi(x_1,x_2) - \partial_1\psi(x_1,x_2)$$
$$\partial_1 = \partial/\partial x_1, \quad \partial_2 = \partial/\partial x_2 \tag{3.1}$$

Здесь приняты обозначения

$$(\Delta + p_1^2)\varphi = 0, \quad (\Delta + p_2^2)\psi = 0, \quad p_1^2 = k_1^2(\lambda + 2\mu)^{-1}, \quad p_2^2 = k_1^2\mu^{-1}$$
$$\varphi(x_1,0) = f_1(x_1,0), \quad \varphi(0,x_2) = f_2(0,x_2) \tag{3.2}$$
$$\psi(x_1,0) = g_1(x_1,0), \quad \psi(0,x_2) = g_2(0,x_2)$$

Функции f_m, g_m, $m = 1,2$, в граничных условиях являются произвольными, удовлетворяющими лишь условиям корректности постановки граничной задачи. В частности, их можно брать из следов пространства медленно растущих обобщенных функций, в котором ищутся решения граничной задачи в области Ω.

Далее рассматривается случай граничной задачи Ламе второго рода для области Ω, в которой на границах задаются $u_n(x_1,0)$, $u_n(0,x_2)$, $n = 1,2$.

Таким образом, для решений уравнения Гельмгольца формируются граничные условия при $x_2 \to 0$ вида

$$\partial_1\varphi(x_1,x_2) + \partial_2\psi(x_1,x_2) = u_1(x_1,0), \quad \partial_2\varphi(x_1,x_2) - \partial_1\psi(x_1,x_2) = u_2(x_1,0) \tag{3.3}$$

Аналогично при $x_1 \to 0$

$$\partial_1\varphi(x_1,x_2) + \partial_2\psi(x_1,x_2) = u_1(0,x_2), \quad \partial_2\varphi(x_1,x_2) - \partial_1\psi(x_1,x_2) = u_2(0,x_2) \tag{3.4}$$

Решение граничной задачи для уравнений Ламе с граничными условиями (3.3), (3.4) требует построения решений граничных задач для уравнений Гельмгольца при произвольных граничных условиях (3.2). Это возможно сделать, используя метод блочного элемента, который описан в работах [4—7]. Примеры решения различных граничных задач с использованием решений уравнений Гельмгольца имеются в работах [14—17]. Решение граничной задачи в первом квадранте, выполненное методом блочного элемента, имеется в [14]. В упакованном виде в первом квадранте в случае граничной задачи Дирихле для уравнений Гельмгольца решения имеют вид

$$\varphi(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\frac{\omega_1(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p_1^2)}e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1d\alpha_2$$
$$\psi(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\frac{\omega_2(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p_2^2)}e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1d\alpha_2 \tag{3.5}$$

В результате вычислений получаем следующее представление решений каждой граничной задачи

$$\varphi(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\sum_{j=1}^{2}\left(\alpha_{3-j}-\alpha_{(3-j)1+}\right)\left\langle F_j(\alpha_j)-F_j(\alpha_{j1+})\right\rangle e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}\frac{id\alpha_1d\alpha_2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-p_1^2}$$
$$\psi(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\sum_{j=1}^{2}\left(\alpha_{3-j}-\alpha_{(3-j)2+}\right)\left\langle G_j(\alpha_j)-G_1(\alpha_{j2+})\right\rangle e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}\frac{id\alpha_1d\alpha_2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-p_2^2}$$
$$\alpha_{11+} = i\sqrt{\alpha_2^2-p_1^2}, \quad \alpha_{21+} = i\sqrt{\alpha_1^2-p_1^2}, \quad \alpha_{12+} = i\sqrt{\alpha_2^2-p_2^2}, \quad \alpha_{22+} = i\sqrt{\alpha_1^2-p_2^2}$$

Последние выражения представимы в виде

$$\varphi(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{j=1}^{2}\iint_{R^2}\frac{F_j(\alpha_j)-F_j(\alpha_{j1+})}{\alpha_{3-j}+\alpha_{(3-j)1+}}e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}id\alpha_1d\alpha_2$$

$$\psi(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{j=1}^{2}\iint_{R^2}\frac{G_j(\alpha_j)-G_1(\alpha_{j2+})}{\alpha_{3-j}+\alpha_{(3-j)2+}}e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}id\alpha_1d\alpha_2$$

Вычислим преобразования Фурье

$$\Phi(\alpha_1,x_2)=\int_0^\infty\varphi(x_1,x_2)e^{i\alpha_1x_1}dx_1,\quad \Phi(x_1,\alpha_2)=\int_0^\infty\varphi(x_1,x_2)e^{i\alpha_2x_2}dx_2$$

$$\Psi(\alpha_1,x_2)=\int_0^\infty\psi(x_1,x_2)e^{i\alpha_1x_1}dx_1,\quad \Psi(x_1,\alpha_2)=\int_0^\infty\psi(x_1,x_2)e^{i\alpha_2x_2}dx_2$$

Проведя исследования построенных преобразований Фурье для $\Phi(\alpha_1,x_2)$ и $\Psi(\alpha_1,x_2)$ вблизи границы $0<x_2\ll 1$ и отбросив исчезающие интегралы при $x_2=0$, получим соответственно представления вида

$$\Phi(\alpha_1,x_2)=F_1(\alpha_1)e^{i(\alpha_{21+}x_2)},\quad \Psi(\alpha_1,x_2)=G_1(\alpha_1)e^{i(\alpha_{22+}x_2)}$$

Проделав аналогичные действия вблизи границы $x_1=0$ с функциями $\Phi(x_1,\alpha_2)$, $\Psi(x_1,\alpha_2)$ при $0<x_1\ll 1$, получаем выражения в форме

$$\Phi(x_1,\alpha_2)=F_2(\alpha_2)e^{i(\alpha_{11+}x_1)},\quad \Psi(x_1,\alpha_2)=G_2(\alpha_2)e^{i(\alpha_{12+}x_1)}$$

4. Полученные результаты. На основании полученных выражений, сформируем представления решений граничных задач вблизи границ $x_1=0$ и $x_2=0$. Имеем

$$\varphi(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\alpha_1,x_2)e^{-i\alpha_1x_1}d\alpha_1$$

$$\psi(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\alpha_1,x_2)e^{-i\alpha_1x_1}d\alpha_1,\quad 0<x_2\ll 1$$

$$\varphi(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2x_2}d\alpha_2$$

$$\psi(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(x_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2x_2}d\alpha_2,\quad 0<x_1\ll 1$$

Отсюда получаем

$$\varphi(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\alpha_1)e^{i(\alpha_{21+}x_2)}e^{-i\alpha_1x_1}d\alpha_1$$

$$\psi(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G_1(\alpha_1)e^{i(\alpha_{22+}x_2)}e^{-i\alpha_1x_1}d\alpha_1,\quad 0<x_2\ll 1$$

$$\varphi(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_2(\alpha_2)e^{i(\alpha_{11+}x_1)}e^{-i\alpha_2x_2}d\alpha_2$$

$$\psi(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G_2(\alpha_2)e^{i(\alpha_{12+}x_1)}e^{-i\alpha_2x_2}d\alpha_2,\quad 0<x_1\ll 1$$

Для нахождения искомых граничных условий решений скалярных граничных задач, с целью построения решений векторных граничных задач, используем формулы (3.3), (3.4) представления решений векторных задач через скалярные. Имеем при $x_2 \to 0$

$$\partial_1\varphi(x_1,x_2)+\partial_2\psi(x_1,x_2)=u_1(x_1,0),\quad \partial_2\varphi(x_1,x_2)-\partial_1\psi(x_1,x_2)=u_2(x_1,0) \tag{4.1}$$

Аналогично при $x_1 \to 0$

$$\partial_1\varphi(x_1,x_2)+\partial_2\psi(x_1,x_2)=u_1(0,x_2),\quad \partial_2\varphi(x_1,x_2)-\partial_1\psi(x_1,x_2)=u_2(0,x_2) \tag{4.2}$$

В результате вычислений, находим значения граничных условий в граничных задачах для уравнений Гельмгольца, которые обеспечат выполнения граничных условий векторной граничной задачи. Эти условия имеют вид

$$\begin{gathered} F_1(\alpha_1)=i\Delta_1^{-1}\left[\alpha_1U_1(\alpha_1,0)-\alpha_{22+}U_2(\alpha_1,0)\right] \\ G_1(\alpha_1)=-i\Delta_1^{-1}\left[\alpha_{21+}U_1(\alpha_1,0)+\alpha_1U_2(\alpha_1,0)\right],\quad \Delta_1=\alpha_1^2+\alpha_{21+}\alpha_{22+} \end{gathered} \tag{4.3}$$

$$\begin{gathered} F_2(\alpha_2)=i\Delta_2^{-1}\left[\alpha_2U_1(0,\alpha_2)-\alpha_{12+}U_2(0,\alpha_2)\right] \\ G_2(\alpha_2)=-i\Delta_2^{-1}\left[\alpha_{11+}U_1(0,\alpha_2)+\alpha_1U_2(0,\alpha_2)\right],\quad \Delta_2=\alpha_2^2+\alpha_{11+}\alpha_{12+} \end{gathered} \tag{4.4}$$

Внеся найденные значения функций в представления внешних форм (3.5), с помощью соотношений (4.3), (4.4), имеем возможность проверить выполнение граничных условий векторной граничной задачи из разложений по решениям скалярных граничных задач. Осуществив вычисления по указанным формулам при $0<x_2\ll 1$, и выполнив последующий предельный переход при $x_2 \to 0$, имеем

$$\Delta_1^{-1}\left\langle[\alpha_1^2U_1(\alpha_1,0)-\alpha_1\alpha_{22+}U_2(\alpha_1,0)]+\alpha_{22+}[\alpha_{21+}U_1(\alpha_1,0)+\alpha_1U_2(\alpha_1,0)]\right\rangle=U_1(\alpha_1,0)$$

$$\begin{gathered} \Delta_1^{-1}\left\langle[-\alpha_{21+}\alpha_1U_1(\alpha_1,0)+\alpha_{21+}\alpha_{22+}U_2(\alpha_1,0)]+\right. \\ \left.+\,\alpha_1\left[\alpha_{21+}U_1(\alpha_1,0)+\alpha_1U_2(\alpha_1,0)\right]\right\rangle=U_2(\alpha_1,0) \end{gathered}$$

Проделав аналогичные вычисления при $0<x_1\ll 1$ и последующий предельный переход при $x_1\to 0$, получаем

$$\Delta_2^{-1}\left\langle[\alpha_2^2U_1(0,\alpha_2)-\alpha_2\alpha_{12+}U_2(0,\alpha_2)]+\alpha_{12+}\left[\alpha_{11+}U_1(0,\alpha_2)+\alpha_2U_2(0,\alpha_2)\right]\right\rangle=U_1(0,\alpha_2)$$

$$\begin{gathered} \Delta_2^{-1}\left\langle[-\alpha_{11+}\alpha_2U_1(0,\alpha_2)+\alpha_{11+}\alpha_{12+}U_2(0,\alpha_2)]+\right. \\ \left.+\,\alpha_2\left[\alpha_{11+}U_1(0,\alpha_2)+\alpha_2U_2(0,\alpha_2)\right]\right\rangle=U_2(0,\alpha_2) \end{gathered}$$

$$U_n(\alpha_1,0)=\int_0^\infty u_n(x_1,0)e^{i\alpha_1x_1}dx_1,\quad U_n(0,\alpha_2)=\int_0^\infty u_n(0,x_2)e^{i\alpha_2x_2}dx_2;\quad n=1,2$$

Таким образом, построенные формулы (4.3), (4.4) граничных условий решений граничных задач для уравнений Гельмгольца в первом квадранте, внесенные в представление внешних форм упакованных блочных элементов (3.5), дают точное решение граничной задачи второго рода для уравнений Ламе при произвольных граничных условиях в первом квадранте.

В работе рассмотрен простейший случай неклассической области для граничной задачи для уравнения Ламе в качестве иллюстрации. Переход к более сложным областям будет зависеть от успехов построения точных решений для скалярных граничных задач. Этот подход освобождает исследователя от необходимости применения к векторным граничным задачам дифференциальной факторизации матриц-функций функциональных уравнений и построения достаточно сложных представлений их решений, пример которого дан в [18].

Выводы. Полученный результат открывает перспективу более глубокого исследования свойств векторных граничных задач, опираясь на достаточно полно изученные свойства решений граничных задач для уравнений Гельмгольца [14]. Построенное разложение решения векторной граничной задачи с помощью решений скалярных граничных задач позволяет изучить некоторые вопросы моделирования наноматериалов. Построив топологическую дискретизацию решений граничных задач для скалярных уравнений [19], оказывается возможным построить топологическую дискретизацию решений векторных граничных задач и получать их решения в более сложных неклассических областях, чем рассмотренные. Последнее открывает возможность строго математически построить механическую концепцию самоорганизации и самосборки некоторых типов наноматериалов, частицы которых могут быть наделены многокомпонентными параметрами сложной реологии. Математические модели такого материала описываются дискретными топологическими пространствами, наследующими свойства отдельных наночастиц [19].

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации госзадания на 2021 г. Минобрнауки, проект (FZEN-2020-0020), ЮНЦ РАН проект (00-20-13) № госрег. 01201354241, и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 19-41-230003, 19-41-230004, 19-48-230014, 18-05-80008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Galerkin B.G.* Contribution a la solution generale du probleme de la theorie de lelastisitecas de trois-dimensions // C.R. Acad. Sci. 1930. V. 190. P. 1047–1048; 1931. V. 193. P. 568–571.
2. *Moisil G.C.* Asupra sistemelor de ecuatii cu derivate partiale lineare si cu coeficienti constanti // Bull. Sci. Acad. RPR. ser. A. 1949. V. 1.
3. *Гельфанд И.М., Минлос З.А., Шапиро З.Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М.: Гл. ред. физ-мат. лит., 1958. 368 с.
4. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Евдокимов В.С.* Метод блочного элемента в разложении решений сложных задач механики // Докл. РАН. 2020. Т. 495. №6. С. 34–38.
5. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Евдокимов В.С., Федоренко А.Г., Елецкий Ю.Б.* О векторных блочных элементах в задачах механики// Эколог. вестн. научн. центров Черном. эконом. сотрудн. 2019. Т. 16. № 3. С. 23–27.
6. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach // Acta Mech. 2018. V. 229. № 5. P. 2163–2175.
7. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On a mechanical approach to the prediction of earthquakes during horizontal motion of litospheric plates // Acta Mech. 2018. V. 229. № 11. P. 4727–4739.
8. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Трещины нового типа и модели некоторых наноматериалов // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 5. С. 13–20.
9. *Улитко А.Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 262 с.
10. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
11. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
12. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
13. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 162 с.
14. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* К проблеме акустических и гидродинамических свойств среды, занимающей область трехмерного прямоугольного клина // ПМТФ. 2019. Т. 60. № 6. С. 90–96.
15. *Ткачева Л.А.* Поведение плавающей пластины при колебаниях участка дна // ПМТФ. 2005. Т. 46. № 2 (270). С. 98–108.
16. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 502 с.
17. *Бабич В.М.* О коротковолновой асимптотике функции Грина для уравнения Гельмгольца // Математ. сб. 1964. Т. 65. С. 577–630.

18. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Применение метода блочного элемента в одной граничной задаче академика И.И. Воровича // Докл. РАН. 2020. Т. 493. С. 42–47.
19. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Бушуева О.А.* Топологическая дискретизация решений граничных задач механики сплошных сред // Эколог. вестн. научн. центров Черном. эконом. сотрудн. 2020. Т. 17. №3. С. 65–71.

On a Method for Solving Boundary Value Problems of the Dynamic Theory of Elasticity in a Quarter Plane

V. A. Babeshko[a,b,#], O. V. Evdokimova[a,##], and O. M. Babeshko[b,###]

[a] *Federal Research Centre the Southern Scientific Centre RAS, Rostov-on-Don, Russia*
[b] *Kuban State University, Krasnodar, Russia*
[#] *e-mail: babeshko41@mail.ru*
[##] *e-mail: evdokimova.olga@mail.ru*
[###] *e-mail: babeshko49@mail.ru*

The coordinate method block element is constructed exact solution in the first quadrant of the two-dimensional boundary value problems of the second kind for the dynamic equations of elasticity Lama, laid out on solutions of boundary-value problems of the Helmholtz equation. In the earlier work of the authors, the solution was constructed by the integro-differential method. Exact solutions of vector boundary value problems using scalar ones in non-classical domains make it possible to simplify solutions in environments with complex rheology and to obtain information about processes and phenomena in mechanics and physics that were not previously noted when using other approaches. The features of the block element method are that, being in a packed form, they represent the solution of the boundary value problem strictly on their carrier. Another feature is the ability of the method to accurately solve boundary value problems in non-classical domains – quarter plane, half-strip, rectangle, wedge. A method is developed that makes it possible to simplify solutions in non-classical domains of vector boundary value problems, that is, those described by systems of partial differential equations, by decomposing them using solutions of scalar boundary value problems, that is, those described by separate differential equations. The latter are solved by the block element method quite simply.

REFERENCES

1. *Galerkin B.G.* Contribution à la solution générale du problème de la théorie de l'élasticité dans le cas de trois dimensions // Comptes Rendus Acad. Sci., 1930, vol. 190, pp. 1047–1048; 1931, vol. 193, pp. 568–571. (in French)
2. *Moisil G.C.* Asupra sistemelor de ecuaţii cu derivate parţiale lineare şi cu coeficienţi constanti // Bul. sţiinţ. Acad. Rep. Pop. Române, ser. A, 1949, vol. 1, pp. 341. (in Romanian)
3. *Gelfand I.M., Minlos Z.A., Shapiro Z.Ya.* Representations of the Rotation Group and the Lorentz Group, Their Applications. Moscow: Nauka, 1958. (in Russian)
4. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Evdokimov V.S.* The block element method in the expansion of solutions to complex problems in mechanics // Dokl. RAN, 2020, vol. 495(6), pp. 34–38. (in Russian)
5. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Evdokimov V.S., Fedorenko A.G., Eletskiy Yu.B.* On vector block elements in mechanics problems // Ecolog. Bull. Res. Centers of the Black Sea Econom. Cooper., 2019, vol. 16(3), pp. 23–27. (in Russian)
6. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach // Acta Mech., 2018, vol. 229(5), pp. 2163–2175.
7. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On a mechanical approach to the prediction of earthquakes during horizontal motion of lithospheric plates // Acta Mech., 2018, vol. 229(11), pp. 4727–4739.
8. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* Cracks of a new type and models of some nano materials // Mech. Solids, 2020, no. 5, pp. 13–20. (in Russian)

9. *Ulitko A.F.* The Method of Eigenvector Functions in Spatial Problems of Elasticity Theory. Kiev: Nauk. Dumka, 1979. (in Russian)
10. *Grinchenko V.T., Meleshko V.V.* Harmonic Vibrations and Waves in Elastic Bodies. Kiev: Nauk. Dumka, 1981. (in Russian)
11. *Novatskiy V.* Elasticity Theory. Moscow: Mir, 1975. (in Russian)
12. *Novatskiy V.* Dynamic Problems of Thermoelasticity. Moscow: Mir, 1970. (in Russian)
13. *Novatskiy V.* Electromagnetic Effects in Solids. Moscow: Mir, 1986. (in Russian)
14. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On the problem of acoustic and hydrodynamic properties of a medium occupying the area of a three-dimensional rectangular wedge // J. Appl. Mech.&Tech. Phys., 2019, vol. 60(6), pp. 90–96. (in Russian)
15. *Tkacheva L.A.* Behavior of the floating plate when the bottom section vibrates // J. Appl. Mech.&Tech. Phys., 2005, vol. 46(2), pp. 98–108. (in Russian)
16. *Brekhovskikh L.M.* Waves in Layered Media. Moscow: Nauka, 1973. (in Russian)
17. *Babich V.M.* On the short-wavelength asymptotics of the Green's function for the Helmholtz equation // Sb. Math., 1964, vol. 65, pp. 577–630. (in Russian)
18. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* Application of the block element method in one boundary-value problem of academician I.I. Vorovich // Dokl. RAN, 2020, vol. 493, pp. 42–47. (in Russian)
19. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Bushueva O.A.* Topological discretization of solutions to boundary value problems in continuum mechanics // Ecolog. Bull. Res. Centers of the Black Sea Econom. Cooper., 2020, vol. 17(3), pp. 65–71. (in Russian)

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 3, с. 285–295

УДК 539.3

К ИССЛЕДОВАНИЮ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ

© 2021 г. А. О. Ватульян[1,2,*], Д. К. Плотников[1,2,]**

[1] *Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия*

[2] *Южный математический институт ВНЦ РАН, Владикавказ, Россия*

**e-mail: vatulyan@aaanet.ru*

***e-mail: dustheap@mail.ru*

Поступила в редакцию 03.02.2021 г.
После доработки 26.02.2021 г.
Принята к публикации 11.03.2021 г.

В плоской постановке исследована контактная задача для неоднородной упругой полосы и штампа с гладким основанием. С помощью преобразования Фурье построена система дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно трансформант компонент вектора смещений и тензора напряжений. На основе метода пристрелки построен символ ядра интегрального уравнения. Проведен асимптотический анализ символа ядра при малых и больших значениях параметра преобразования. Представлена вычислительная схема на основе метода граничных элементов построения решения интегрального уравнения контактной задачи с неизвестной областью контакта. Представлены результаты решения контактной задачи для разных законов неоднородности.

Ключевые слова: контактная задача, неоднородная полоса, асимптотический анализ, метод граничных элементов

DOI: 10.31857/S0032823521030103

1. Введение. Контактные задачи теории упругости для полосы – важный раздел смешанных задач, в который ростовские механики внесли значительный вклад. Отметим пионерскую работу [1], а также монографию [2], оказавшую значительное влияние на многих исследователей и дальнейшее развитие теории контактных задач. При этом в монографии представлены общие вопросы контактного взаимодействия, вопросы разрешимости краевых задач в различных классах функций, методы исследования интегральных уравнений для малых областей контакта (метод больших лямбда, развитый В.М. Александровым), и метод бесконечных систем (метод малых лямбда, развитый В.А. Бабешко [3, 4]). В дальнейшем ряд результатов в рамках метода больших лямбда был распространен на неоднородную полосу [5], в контактных задачах для которой основная трудность состоит в том, что символы ядер интегральных операторов невозможно построить в явном виде для произвольных законов неоднородности. Символ ядра строился в два этапа. На первом этапе решалась краевая задача для матричного дифференциального оператора с параметром (параметром преобразования Фурье); на втором этапе строилась аппроксимация полученной численно функциональной зависимости дробно-рациональными и степенными функциями. В работах [6, 7] данный подход расширен для многослойных структур с неоднородным покрытием.

В настоящее время в инженерную практику внедряется все большее количество составных конструкций, покрытий, конструктивных элементов, изготовленных из композиционных материалов. Моделирование таких объектов, обладающих существенно неоднородными свойствами, требует изучения деформирования неоднородных слоистых структур при статических и динамических воздействиях. Одним из наиболее популярных и быстро развивающихся направлений в конструировании неоднородных объектов является изготовление функционально-градиентных материалов (ФГМ). ФГМ представляет из себя среду, свойства которой изменяются по некоторому закону, исходя из некоторых требований, например, для снижения уровня напряженного состояния внутри конструктивного элемента [8].

Одной из наиболее перспективных областей применения ФГМ является изготовление градиентных покрытий различного назначения. Нанесение покрытий из ФГМ широко применяется при изготовлении различных элементов инженерных конструкций, режущего инструмента, медицинских приборов, в конструкциях компонентов двигателей авиационной и космической техники [9]. Переменный состав и изменение свойств с глубиной покрытия приводит к уменьшению концентрации напряжений, что в свою очередь позволяет снизить вероятность образования трещин и других дефектов.

Альтернативным способом исследования деформирования неоднородных оснований является построение приближенных моделей. В монографии [10] построен ряд приближенных моделей контактного взаимодействия для тел с тонкими покрытиями и прослойками. Работы [11, 12] посвящены разработке моделей деформирования неоднородной упругой полосы в рамках использования некоторых гипотез о структуре полей, позволяющие рассматривать произвольные законы неоднородности, в том числе разрывные.

Большое число работ посвящено решению контактных задач для функционально-градиентных материалов на основе метода конечных элементов. Исследована [13] контактная задача для вязкоупругого основания и сферического индентора. Построено [14] решение задачи о контактном взаимодействии неоднородного слоя, лежащего на однородном полупространстве, и двух плоских штампов.

Рассмотрена [15] задача о контакте двух сфер, усиленных функционально-градиентными покрытиями. Задача сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Неоднородность материала смоделирована путем создания многослойной области с постоянными свойствами в каждом слое.

Большое количество работ для полосы выполнено в предположении о том, что законы неоднородности изменяются экспоненциальным образом, что приводит к краевым задачам с постоянными коэффициентами и символы ядер интегральных операторов могут быть получены аналитически. В [16] исследована контактная задача для поперечно-неоднородного ортотропного слоя и цилиндрического штампа. Коэффициенты матрицы жесткостей изменяются с толщиной по экспоненциальному закону.

Настоящая работа посвящена развитию методов исследования контактных задач для неоднородной упругой полосы, где для изучения символа ядра интегрального оператора использованы численные и асимптотические методы, позволяющие выявить основные свойства этих функций при малых и больших значениях аргумента. Разработан метод граничных элементов для решения интегрального уравнения контактной задачи, позволяющий исследовать задачи с переменной областью контакта, не прибегая к затратной схеме его решения в расширенной области. Построены важные зависимости сила—внедрение для различных законов неоднородности.

2. Постановка задачи. В рамках плоской задачи теории упругости рассмотрим контактное взаимодействие поперечно-неоднородной упругой полосы толщины h и штампа с основанием гладкой формы. Свяжем с полосой прямоугольную систему координат Ox_1x_3 с началом в основании полосы, ось Ox_3 направлена вертикально вверх

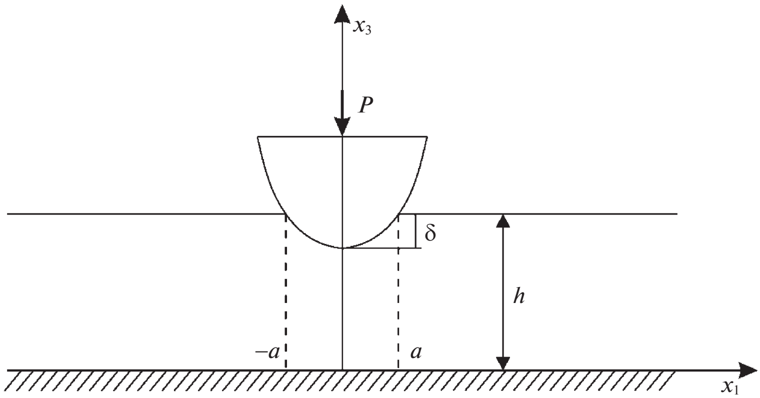

Рис. 1.

(рис. 1). Нижняя граница полосы $x_3 = 0$ жестко сцеплена с недеформируемым основанием. Область контакта полосы и штампа расположена на отрезке $|x_1| \le a$. Параметры Ламе полосы являются произвольными положительными функциями вертикальной координаты, $\lambda = \lambda(x_3)$, $\mu = \mu(x_3)$, $x_3 \in [0, h]$.

Уравнения равновесия и определяющие соотношения задачи имеют вид

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{13,3} = 0, \quad \sigma_{13,1} + \sigma_{33,3} = 0 \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered} \sigma_{11} = (\lambda(x_3) + 2\mu(x_3))u_{1,1} + \lambda(x_3)u_{3,3}, \quad \sigma_{13} = \mu(x_3)(u_{1,3} + u_{3,1}) \\ \sigma_{33} = \lambda(x_3)u_{1,1} + (\lambda(x_3) + 2\mu(x_3))u_{3,3}, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где u_i, σ_{ij} — компоненты вектора перемещений и тензора напряжений соответственно.

Считая, что трение между контактными поверхностями штампа и полосы отсутствует, сформулируем граничные условия контактной задачи

$$u_1(x_1, 0) = 0, \quad u_3(x_1, 0) = 0 \quad \sigma_{13}(x_1, h) = 0 \tag{2.3}$$

$$\sigma_{33}(x_1, h) = 0; \quad |x_1| > a, \quad u_3(x_1, h) = -\delta + f(x_1); \quad |x_1| \le a, \tag{2.4}$$

где δ — глубина внедрения, a — величина области контакта, функция $f(x_1)$ описывает форму основания штампа.

Связь между внедрением штампа δ и величиной области контакта a определяется из условия равенства нулю контактных напряжений на границе контакта. Для определения силы, действующей на штамп, служит условие равновесия штампа

$$P = \int_{-a}^{a} q(x_1)dx_1, \quad q(x_1) = \sigma_{33}(x_1, h)$$

Обезразмерим задачу, введя безразмерные параметры следующим образом

$$\xi_i = x_i/h, \quad \hat{u}_i = u_i/h, \quad \hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/\mu_0; \quad i, j = 1, 3$$

$$\beta = a/h, \quad \delta_* = \delta/h, \quad \gamma = f/h$$

$$f_1 = \lambda/\mu_0, \quad f_2 = \mu/\mu_0, \quad \hat{q} = q/\mu_0, \quad \hat{P} = P/\mu_0 h,$$

где μ_0 — характерное значение модуля сдвига (либо среднее значение функции, либо максимальное).

3. Равновесие неоднородной упругой полосы под действием нагрузки. Рассмотрим вспомогательную задачу о равновесии неоднородной упругой полосы под действием безразмерной нормальной нагрузки $\hat{q}(\xi_1)$, локализованной на отрезке $[-\beta,\beta]$ верхней границы. Граничные условия задачи в безразмерных параметрах имеют вид

$$\hat{u}_1(\xi_1,0)=0,\quad \hat{u}_3(\xi_1,0)=0 \tag{3.1}$$

$$\hat{\sigma}_{13}(\xi_1,1)=0,\quad \hat{\sigma}_{33}(\xi_1,1)=q_*(\xi_1), \tag{3.2}$$

где

$$q_*=\begin{cases}\hat{q}(\xi_1), & |\xi_1|\le\beta\\ 0, & |\xi_1|>\beta\end{cases}$$

В работе [17] система дифференциальных уравнений в частных производных (2.1), (2.2) с помощью преобразования Фурье по координате ξ_1 сведена к канонической системе обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно трансформант вида

$$\mathbf{X}'=A\mathbf{X},\quad X_1=i\tilde{u}_1,\quad X_2=\tilde{u}_3,\quad X_3=i\tilde{\sigma}_{13},\quad X_4=\tilde{\sigma}_{33}, \tag{3.3}$$

где знаком “~” обозначены символы Фурье соответствующих функций, а матрица коэффициентов системы не содержит производных от законов неоднородности, в отличие от [5, 18], и имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \dfrac{1}{f_2} & 0\\ \dfrac{\alpha f_1}{f_1+2f_2} & 0 & 0 & \dfrac{1}{f_1+2f_2}\\ \dfrac{4\alpha^2 f_2(f_1+f_2)}{f_1+2f_2} & 0 & 0 & -\dfrac{\alpha f_1}{f_1+2f_2}\\ 0 & 0 & \alpha & 0\end{pmatrix}$$

Граничные условия (3.1), (3.2) краевой задачи в трансформантах примут вид

$$X_1(\alpha,0)=0,\quad X_2(\alpha,0)=0,\quad X_3(\alpha,1)=0,\quad X_4(\alpha,1)=Q(\alpha), \tag{3.4}$$

где

$$Q(\alpha)=\int_{-\beta}^{\beta}\hat{q}(\xi_1)e^{i\alpha\xi_1}d\xi_1$$

Решение краевой задачи (3.3), (3.4) построим численно с помощью метода пристрелки. Для этого сформулируем следующие вспомогательные задачи Коши

$$X_1^{(1)}(\alpha,0)=0,\quad X_2^{(1)}(\alpha,0)=0,\quad X_3^{(1)}(\alpha,0)=1,\quad X_4^{(1)}(\alpha,0)=0 \tag{3.5}$$

$$X_1^{(2)}(\alpha,0)=0,\quad X_2^{(2)}(\alpha,0)=0,\quad X_3^{(2)}(\alpha,0)=0,\quad X_4^{(2)}(\alpha,0)=1 \tag{3.6}$$

В силу линейной независимости решений вспомогательных задач, решение краевой задачи (3.3), (3.4) запишем в виде их линейной комбинации

$$X_j(\alpha,\xi_3)=c_1X_j^{(1)}(\alpha,\xi_3)+c_2X_j^{(2)}(\alpha,\xi_3);\quad j=\overline{1,4}$$

Находя константы c_1, c_2 из условий (3.4) в точке $\xi_3=1$, получим решение краевой задачи (3.3), (3.4) в виде

$$\begin{gathered} X_j(\alpha,\xi_3)=(X_3^{(2)}(\alpha,1)X_j^{(1)}(\alpha,\xi_3)-X_3^{(1)}(\alpha,1)X_j^{(2)}(\alpha,\xi_3))\Delta^{-1}(\alpha)Q(\alpha)\\ \Delta(\alpha)=X_3^{(1)}(\alpha,1)X_4^{(2)}(\alpha,1)-X_3^{(2)}(\alpha,1)X_4^{(1)}(\alpha,1)\end{gathered} \tag{3.7}$$

Формула (3.7) позволяет установить связь трансформант нагрузки и вертикальной компоненты смещения верхней границы полосы в виде

$$X_2(\alpha,1) = K(\alpha)Q(\alpha), \tag{3.8}$$

где $K(\alpha)$ — передаточная функция, определяемая через решения вспомогательных задач Коши формулой

$$K(\alpha) = (X_3^{(2)}(\alpha,1)X_2^{(1)}(\alpha,1) - X_3^{(1)}(\alpha,1)X_2^{(2)}(\alpha,1))\Delta^{-1}(\alpha)$$

4. Анализ передаточной функции. Передаточная функция $K(\alpha)$ является важным объектом при исследовании контактных задач для полосы. Важную роль согласно [2] играет асимптотическое поведение этих функций при малых и больших значениях параметра преобразования. Значения в нуле характеризуют среднее значение контактного давления, а поведение на бесконечности — структуру контактного давления у границ области контакта. Исследуем поведение $K(\alpha)$ и проведем асимптотический анализ при малых и больших значениях параметра α.

Меняя в системе (3.3) α на $-\alpha$, нетрудно показать, что функция $K(\alpha)$ для любых законов неоднородности является четной функцией, т.е. $K(-\alpha) = K(\alpha)$.

При проведении асимптотического анализа рассмотрим задачу (3.3), (3.4), для удобства полагая $Q(\alpha) \equiv 1$, что соответствует действию сосредоточенной силы в точке $\xi_1 = 0$ верхней границы полосы

$$X_1(\alpha,0) = 0, \quad X_2(\alpha,0) = 0, \quad X_3(\alpha,1) = 0, \quad X_4(\alpha,1) = 1 \tag{4.1}$$

Полагая параметр α малым, представим решение краевой задачи в виде регулярных асимптотических разложений

$$X_j(\alpha,\xi_3) = X_{j0}(\xi_3) + \alpha X_{j1}(\xi_3) + \alpha^2 X_{j2}(\xi_3) + \ldots + \alpha^m X_{jm}(\xi_3) + \ldots \tag{4.2}$$

Подставляя выражение (4.2) в систему (3.3) и приравнивая между собой коэффициенты при одинаковых степенях α, получим краевые задачи для систем дифференциальных уравнений первого порядка, анализ которых позволяет найти начальные коэффициенты разложений (4.2). На основе асимптотических представлений решения краевой задачи передаточная функция для малых значений параметра α с учетом четности может быть записана в виде

$$K(\alpha) = X_2(\alpha,1) = X_{20}(1) + \alpha^2 X_{22}(1) + \ldots + \alpha^m X_{2m}(1) + \ldots,$$

где главный член разложения имеет вид

$$X_{20}(1) = \int_0^1 \frac{d\tau}{f_1(\tau) + 2f_2(\tau)},$$

а остальные находятся рекуррентным образом [15].

Рассмотрим теперь случай больших α и исследуем поведение передаточной функции при $\alpha \to \infty$, что приводит к анализу для системы с переменными коэффициентами краевой задачи с малым параметром при старшей производной. Используем для анализа асимптотический метод, например метод Вишика—Люстерника [19]. Отметим, что спектр матрицы коэффициентов системы (3.3) состоит из двух двукратных значений $|\alpha|$ и $-|\alpha|$, что приводит к существенному усложнению построения асимптотического решения в рамках известных подходов [20].

Будем искать решение задачи при больших α в окрестности $\xi_3 = 1$ при $\alpha > 0$ в виде

$$\begin{gathered} X_j(\alpha,\xi_3) = Y_j(\alpha,\xi_3)e^{\alpha(\xi_3-1)} \\ Y_j(\alpha,\xi_3) = Y_{k0}(\xi_3)\alpha + Y_{k1}(\xi_3) + Y_{k2}(\xi_3)\alpha^{-1} + o(\alpha^{-1}) \end{gathered} \tag{4.3}$$

Подставляя представление (4.3) в каноническую систему (3.3), решая возникающие краевые задачи и удовлетворяя граничным условиям (4.1), с учетом четности функции $K(\alpha)$ найдем главный член разложения передаточной функции при $|\alpha| \to \infty$ в явном виде

$$K(\alpha) = C|\alpha|^{-1} + o(|\alpha|^{-1}), \quad C = \frac{f_1(1) + 2f_2(1)}{2f_2(1)\left(f_1(1) + f_2(1)\right)} \tag{4.4}$$

Построенное асимптотическое представление согласуется с известными результатами для однородного случая [2], а также с качественными результатами, полученными для неоднородной полосы, например в [5].

5. Интегральное уравнение контактной задачи. Метод граничных элементов. Найдем вертикальное смещение верхней границы полосы, для этого построим обращение преобразования Фурье. Из формулы (3.8) найдем

$$\hat{u}_3(\xi_1, 1) = \int_{-\beta}^{\beta} k(\eta - \xi_1) q(\eta) d\eta,$$

причем ядро интегрального оператора имеет вид

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha) e^{i\alpha t} d\alpha$$

Учитывая условия (2.4), сформулируем интегральное уравнение контактной задачи в виде

$$\int_{-\beta}^{\beta} k(\eta - \xi_1) q(\eta) d\eta = -\delta_* + \gamma(\xi_1) \tag{5.1}$$

Поскольку основные свойства функции $K(\alpha)$ идентичны свойствам этой функции в однородном случае, можно показать, что ядро интегрального уравнения (5.1) имеет логарифмическую особенность и для его решения может быть использован метод больших лямбда [5] или численные методы.

Решение интегрального уравнения (5.1) построим численно с помощью метода граничных элементов. Учитывая симметрию задачи в случае, когда функция $\gamma(\xi_1)$, описывающая форму основания штампа, является четной, построим решение уравнения (5.1) в области $[0, \beta]$. Проведем дискретизацию уравнения (5.1), для этого разобьем отрезок $[0, \beta]$ на N элементов $\Delta_p = [\eta_p, \eta_{p+1}]$, $p = \overline{1, N}$, границы отрезков Δ_p определяются формулой $\eta_j = (j-1)s$, $s = \beta N^{-1}$, $j = \overline{1, N+1}$; в качестве точек коллокаций выберем середины отрезков Δ_p: $\xi_{1p} = (p - 0.5)s$. Будем считать, что функция $q(\xi_1)$ принимает постоянные значения на элементах и введем обозначение $q_p = q|_{\Delta_p}$. Считая, что уравнение (5.1) выполнено в наборе точек $\{\xi_{1p}\}$, составим алгебраическую систему относительно узловых значений неизвестной функции $q(\xi_1)$ вида

$$\sum_{p=1}^{N} q_p H_{pm} = g_m; \quad m = \overline{1, N}, \tag{5.2}$$

где

$$H_{pm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\alpha)}{i\alpha} \left(e^{i\alpha(\eta_{p+1} - \xi_{1m})} - e^{i\alpha(\eta_p - \xi_{1m})}\right) d\alpha, \quad g_m = -\delta_* + \gamma(\xi_{1m}) \tag{5.3}$$

При исследовании контактных задач для штампов с гладким основанием область контакта является неизвестной величиной, зависящей от глубины внедрения штампа, и подлежит определению. При реализации вычислительных схем решения интегральных уравнений в контактных задачах в качестве исходных параметров, как правило, задается значение внедрения или силы, действующей на штамп, а затем определяется величина области контакта, которая нелинейным образом зависит от задаваемых величин. В работе [21] исследована контактная задача для трехслойного сферического шарнира, решение интегрального уравнения построено с помощью метода коллокаций. Для определения величины области контакта по заданному значению внедрения построен итерационный процесс, в котором область контакта определяется из условия неотрицательности контактного давления. Схожий подход применен при решении пространственных контактных задач в работах [22, 23], в которых область контакта изначально полагается заведомо бóльшей, чем действительная, а затем уточняется на каждом шаге итерационного процесса.

При реализации вычислительной схемы, построенной в настоящей работе, задается значение β, а величина внедрения определяется из условия равенства нулю контактного давления на границах контактной области, которое после дискретизации является условием равенства нулю узлового значения q_N искомой функции вблизи границы контакта и может быть записано в виде

$$\Delta_N = 0, \tag{5.4}$$

где Δ_N — определитель матрицы, получающейся согласно методу Крамера заменой N-го столбца матрицы H на вектор-столбец g. Отметим, что параметр δ_* входит в правые части интегральных уравнений линейно и уравнение (5.4) является линейным алгебраическим уравнением относительно δ_*, что позволяет просто найти связь $\delta_*(\beta)$.

При вычислении коэффициентов алгебраической системы (5.2) интегралы в (5.3) вычисляются с использованием асимптотического представления символа ядра на бесконечности. Интегрирование осуществляется по отрезку $[0, b]$ с помощью квадратурных формул Гаусса, а при вычислении оставшейся части интеграла на полуинтервале $[b, \infty)$ функция $K(\alpha)$ заменяется ее асимптотическим представлением (4.4). Значение параметра b определяется в вычислительном эксперименте.

6. Результаты вычислительных экспериментов. При проведении вычислительных экспериментов были выбраны следующие законы неоднородности полосы

1. возрастающие: $f_1^{(1)}(\xi_3) = 0.75 + 2.25\xi_3^2$, $f_2^{(1)}(\xi_3) = 0.6 + 1.2\xi_3^2$;
2. убывающие: $f_1^{(2)}(\xi_3) = 2.4 - 1.8\xi_3$, $f_2^{(2)}(\xi_3) = 1.5 - \xi_3$;
3. немонотонные: $f_1^{(3)}(\xi_3) = 1.5 - 0.9\cos(2\pi\xi_3)$, $f_2^{(3)}(\xi_3) = 1 - 0.5\cos(2\pi\xi_3)$;
4. кусочно-линейные:

$$f_1^{(4)} = \begin{cases} 0.8380 + 0.9311\xi_3, & 0 \le \xi_3 < 0.9 \\ -2.6815 + 6.7039\xi_3, & 0.9 \le \xi_3 \le 1 \end{cases}$$

$$f_2^{(4)} = \begin{cases} 0.7111 + 0.3950\xi_3, & 0 \le \xi_3 < 0.9 \\ -5.5999 + 7.9999\xi_3, & 0.9 \le \xi_3 \le 1 \end{cases},$$

причем средние значения законов неоднородности на отрезке [0, 1] равны

$$\int_0^1 f_1^{(j)}(\xi_3)d\xi_3 = 1.5, \quad \int_0^1 f_2^{(j)}(\xi_3)d\xi_3 = 1; \quad j = \overline{1,4}$$

Графики законов неоднородности *1–4* представлены на рис. 2.

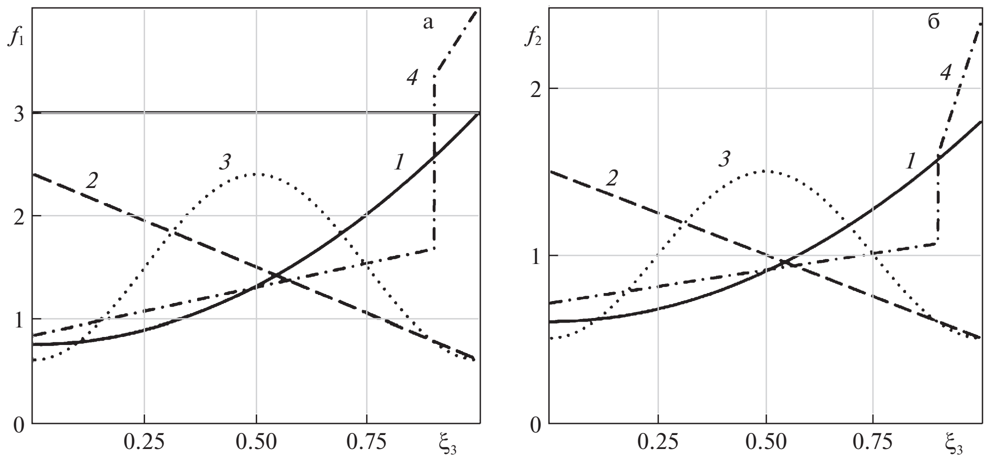

Рис. 2. Законы неоднородности *1–4*.

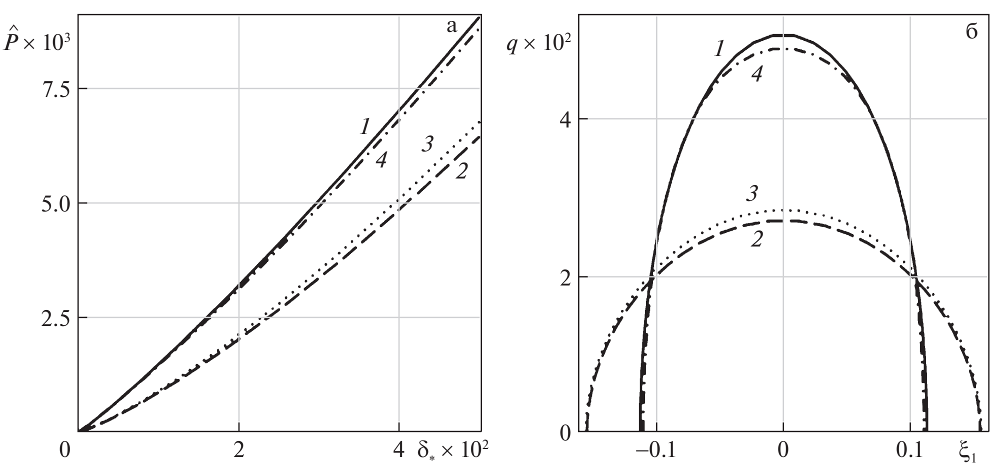

Рис. 3. Решения контактной задачи для законов *1–4*. а) зависимость сила–внедрение, б) распределение контактного давления.

С целью проверки сходимости вычислительной схемы решения задачи построены для различного количества граничных элементов на равномерной сетке при $N = 10$, 30, 90. Проведено сравнение значений искомого контактного давления в общих для разных разбиений точках коллокации. Проведенный анализ показал сходимость вычислительной схемы при увеличении количества отрезков разбиения. Более эффективным является построение неравномерной сетки граничных элементов со сгущением вблизи границ области контакта. Ниже представлены результаты вычислительных экспериментов, построенные для штампа с основанием параболической формы $\gamma(\xi_1) = \xi_1^2/2r$ при значениях параметров: $r = 5$, $N = 30$, $l_N/l_1 = 0.01$, l_p – длина отрезка Δ_p.

На рис. 3 представлены решения контактных задач для законов неоднородности *1–4*. Распределение контактного давления для разных законов построено при одинаковом значении внедрения $\delta_* = 0.005$. Контактное давление достигает наибольшей величины для законов, значение которых на верхней границе полосы больше. Результаты решения контактной задачи получились близкими для законов с близкими значениями модулей упругости на верхней границе.

Заключение. Исследована задача о контактном взаимодействии без трения неоднородной упругой полосы и штампа с гладким основанием. Проведен асимптотический анализ символа ядра интегрального уравнения контактной задачи при малых и больших значениях параметра преобразования. Главные члены асимптотик найдены в аналитическом виде. Показано, что значение символа ядра в нуле, характеризующее среднее значение контактного давления, определяется среднеинтегральным значением податливости полосы, а поведение на бесконечности, определяющее структуру контактного давления у границ области контакта, определяется значениями упругих модулей на верхней границе полосы. На основе метода граничных элементов построено решение интегрального уравнения контактной задачи. Представлен подход, позволяющий исследовать задачи с переменной областью контакта, не прибегая к затратной схеме ее определения в расширенной области. Построены зависимости сила—внедрение и распределение контактного давления для различных законов неоднородности.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ № 075-15-2019-1928.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И.И., Устинов Ю.А.* О давлении штампа на слой конечной толщины // ПММ. 1959. Т. 23. № 3. С. 445–455.
2. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. *Бабешко В.А.* Асимптотические свойства решений одного класса интегральных уравнений, возникающих в теории упругости и математической физике // Докл. АН СССР. 1969. Т. 186. № 6. С. 1273–1276.
4. *Александров В.М., Бабешко В.А.* Контактные задачи для упругой полосы малой толщины // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 2. С. 95–107.
5. *Айзикович С.М., Александров В.М., Белоконь А.В. и др.* Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.: Физматлит, 2006. 240 с.
6. *Волков С.С., Васильев А.С., Айзикович С.М. и др.* Напряженно-деформированное состояние упругого мягкого функционально-градиентного покрытия при внедрении сферического индентора // Вестн. ПНИПУ. Механика. 2016. № 4. С. 20–34.
7. *Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M.* Approximated analytical solution of contact problem on indentation of elastic half-space with coating reinforced with inhomogeneous interlayer // Mater. Phys.&Mech. 2018. V. 35. № 1. P. 175–180.
8. *Naebe M., Shirvanimoghaddam K.* Functionally graded materials: A review of fabrication and properties // Appl. Mater. Today. 2016. V. 5. P. 223–245.
9. *Mahamood R.M., Akinlabi E.T.* Functionally Graded Materials. Springer Int. Publ., 2017. 103 p.
10. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
11. *Ватульян А.О., Плотников Д.К.* Об одной модели индентирования функционально-градиентной полосы // Докл. РАН. 2019. Т. 485. № 5. С. 564–567.
12. *Ватульян А.О., Плотников Д.К., Поддубный А.А.* О некоторых моделях индентирования функционально-градиентных покрытий // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18. Вып. 4. С. 421–432.
13. *Wagiha A., Attiaab M.A., AbdelRahman A.A. et al.* On the indentation of elastoplastic functionally graded materials // Mech. Mater. 2019. V. 129. P. 169–188.
14. *Polat A., Kaya Y., Bendine K., Özşahin T.Ş.* Frictionless contact problem for a functionally graded layer loaded through two rigid punches using finite element method // J. Mech. V. 35. № 5. P. 591–600.

15. *Chen X.W., Yue Z.Q.* Contact mechanics of two elastic spheres reinforced by functionally graded materials (FGM) thin coatings // Engng. Analysis with Boundary Elements. V. 109. P. 57–69.
16. *Çömez İ.* Contact mechanics of the functionally graded monoclinic layer // Europ. J. Mech. A/Solids. V. 83. Art. no. 104018.
17. *Vatulyan A.O., Morozova J.A., Plotnikov D.K.* Deformation of inhomogeneous elastic strip // in: Multiscale Solid Mechanics. Advanced Structured Materials / *Ed. by Altenbach H. et al.* 2021. V. 141. P. 461–474.
18. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
19. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957. Т. 12. № 5 (77). С. 3–122.
20. *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1977. 354 с.
21. *Чебаков М.И., Абрамович М.В., Колосова Е.М.* Контактная задача для трехслойного сферического шарнира // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. 2015. № 3. С. 60–64.
22. *Горячева И.Г., Степанов Ф.И., Торская Е.В.* Скольжение гладкого индентора при наличии трения по вязкоупругому полупространству // ПММ. 2015. Т. 79. Вып. 6. С. 853–863.
23. *Степанов Ф.И., Торская Е.В.* Пространственная контактная задача для двухслойного упругого полупространства при наличии адгезии // ПММ. 2020. Т. 84. № 2. С. 256–268.

Investigation of the Contact Problem for an Inhomogeneous Elastic Strip

A. O. Vatulyan[a,b,#] and D. K. Plotnikov[a,b,##]

[a] *Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia*
[b] *Southern Mathematical Institute of VSC RAS, Vladikavkaz, Russia*
[#]*e-mail: vatulyan@aaanet.ru*
[##]*e-mail: dustheap@mail.ru*

The plane contact problem for an inhomogeneous elastic strip and a stamp with a smooth base is investigated. Using the Fourier transform, a system of differential equations with variable coefficients for the transformants of the components of the displacement vector and the stress tensor is constructed. On the basis of the shooting method, the symbol of the kernel of the integral equation is constructed. An asymptotic analysis of the kernel symbol for small and large values of the transformation parameter is carried out. A computational scheme based on the boundary element method for constructing a solution to the integral equation of a contact problem with an unknown contact area is presented. The results of solving the contact problem for different laws of inhomogeneity are presented.

Keywords: contact problem, inhomogeneous strip, asymptotic analysis, boundary element method

REFERENCES

1. *Vorovich I.I., Ustinov Iu.A.* Pressure of a die on an elastic layer of finite thickness // JAMM, 1959, vol. 23, no. 3, pp. 445–455.
2. *Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A.* Non-Classical Mixed Problems of Elasticity Theory. Moscow: Nauka, 1974. 456 p.
3. *Babeshko V.A.* Asymptotic properties of the solutions of some integral equations // Dokl. AN SSSR, 1969, vol. 187, no 3. pp. 728–731.
4. *Aleksandrov V.M., Babeshko V.A.* Contact problems for an elastic strip of small thickness // Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh., 1965, no. 2, pp. 95–107. (in Russian)
5. *Ayzikovich S.M., Aleksandrov V.M., Belokon A.V. et al.* Contact Problems of the Theory of Elasticity for Inhomogeneous Media. (Kontaktnye zadachi teorii uprugosti dlya neodnorodnykh sred). Moscow: Fizmatlit, 2006. 240 p. (in Russian)

6. *Volkov S.S., Vasil'yev A.S., Ayzikovich S.M. et al.* Stress-strain state of an elastic soft functionally-graded coating subjected to indentation by a spherical punch // PNRPU Mech. Bull., 2016, no. 4, pp. 20–34. (in Russian).
7. *Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M.* Approximated analytical solution of contact problem on indentation of elastic half-space with coating reinforced with inhomogeneous interlayer // Mater. Phys.&Mech., 2018, vol. 35, no 1, pp. 175–180.
8. *Naebe M., Shirvanimoghaddam K.* Functionally graded materials: A review of fabrication and properties // Appl. Mater. Today, 2016, vol. 5, pp. 223–245.
9. *Mahamood R.M., Akinlabi E.T.* Functionally Graded Materials. Springer Int. Publ., 2017. 103 p.
10. *Aleksandrov V.M., Mkhitaryan S.M.* Contact Problems for Bodies with Thin Coatings and Interlayers (Kontaktnye zadachi dlya tel s tonkimi pokrytiyami i prosloykami). Moscow: Nauka, 1983. 488 p. (in Russian)
11. *Vatulyan A.O., Plotnikov D.K.* A Model of indentation for a functionally graded strip // Dokl. Phys., 2019, vol. 64, no. 4, pp. 173–175.
12. *Vatulyan A.O., Plotnikov D.K., Poddubny A.A.* On some models of indentation for functionally graded coatings // Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform., 2018, vol. 18, no. 4, pp. 421–432. (in Russian)
13. *Wagiha A., Attiaab M.A., AbdelRahman A.A. et. al.* On the indentation of elastoplastic functionally graded materials // Mech. Mater., 2019, vol. 129, pp. 169–188.
14. *Polat A., Kaya Y., Bendine K., Özşahin T.Ş.* Frictionless contact problem for a functionally graded layer loaded through two rigid punches using finite element method // J. Mech., vol. 35, no. 5, pp. 591–600.
15. *Chen X.W., Yue Z.Q.* Contact mechanics of two elastic spheres reinforced by functionally graded materials (FGM) thin coatings // Engng. Analysis with Boundary Elements, vol. 109, pp. 57–69.
16. *Çömez İ.* Contact mechanics of the functionally graded monoclinic layer // Europ. J. Mech. A/Solids, vol. 83, Art. no. 104018.
17. *Vatulyan A.O., Morozova J.A., Plotnikov D.K.* Deformation of inhomogeneous elastic strip // in: Multiscale Solid Mechanics. Advanced Structured Materials / *Ed. by Altenbach H. et al.* 2021, Vol. 141, pp. 461–474.
18. *Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko Zh.F.* Dynamics of Inhomogeneous Linear Elastic Media. (Dinamika neodnorodnih lineyno-uprugih sred) Moscow: Nauka, 1989. 344 p. (in Russian)
19. *Vishik M.I., Ljusternik L.A.* Regular degeneracy and boundary layer for linear differential equations with a small parameter // UMN, 1957, vol. 12, no. 5(77), pp. 3–122. (in Russian)
20. *Fedorjuk M.V.* Asymptotic Methods for Linear Ordinary Differential Equations. (Asimptoticheskie metody dlja linejnyh obyknovennyh differencial'nyh uravnenij) Moscow: Nauka, 1977. 354 p. (in Russian)
21. *Chebakov M.I., Abramovich M.V., Kolosova E.M.* Contact problem for a three-layer spherical hinge // Bull. Higher Educ. Inst. North Caucasus Region, 2015, no. 3, pp. 60–64. (in Russian)
22. *Goryacheva I.G., Stepanov F.I., Torskaya E.V.* Sliding of a smooth indentor over a viscoelastic half-space when there is friction // JAMM, 2015, vol. 79, no. 6, pp. 596–603.
23. *Stepanov F.I., Torskaya E.V.* 3D contact problem with adhesion for two-layered elastic half-space // PMM, 2020, vol. 84, no. 2, pp. 256–268. (in Russian)

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 3, с. 296–308

УДК 539.3:534.1

БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ В МНОГОСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ КОМПОЗИТАХ

Е. В. Глушков[1],*, Н. В. Глушкова[1]

[1] *Институт математики, механики и информатики КубГУ, Краснодар, Россия*
**e-mail: evg@math.kubsu.ru*

Поступила в редакцию 03.02.2021 г.
После доработки 11.03.2021 г.
Принята к публикации 27.03.2021 г.

Рассматривается возбуждение и распространение поверхностных акустических волн в многослойных волноводах с произвольной анизотропией упругих слоев. Дается краткий обзор асимптотических представлений, полученных в рамках разрабатываемого В.А. Бабешко интегрального подхода, в сопоставлении с результатами классического модального анализа. Приводятся примеры приложений к задачам ультразвукового неразрушающего контроля состояния изделий из композитных материалов.

Ключевые слова: композитные материалы, поверхностные акустические волны, интегральные и асимптотические представления, модальный анализ, вектор групповой скорости, ультразвуковой контроль, эффективные упругие модули

DOI: 10.31857/S0032823521030061

1. Введение. Основной областью научных интересов Владимира Андреевича Бабешко, с начала научной работы под руководством И.И. Воровича в 1960-х годах и до наших дней, является решение динамических задач теории упругости. Академик Бабешко – один из основоположников интегрального подхода, базирующегося на выводе и использовании интегрального представления вектора смещений возбуждаемого волнового поля $\mathbf{u}$ через матрицу Грина k для рассматриваемой упругой слоистой структуры и вектор приложенной нагрузки $\mathbf{q}$ [1]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \iint\limits_{\Omega} k(x-\xi, y-\eta, z)\mathbf{q}(\xi,\eta)d\xi d\eta =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2} K(\alpha_1,\alpha_2,z)\mathbf{Q}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i(\alpha_1 x+\alpha_2 y)}d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (1.1)$$

Здесь $K = F[k]$ и $\mathbf{Q} = F[\mathbf{q}]$ – Фурье-символы (результат преобразования Фурье F по горизонтальным координатам x и y) матрицы-функции $k(\mathbf{x})$ и вектор-функции $\mathbf{q}(x,y)$; $\mathbf{x} = (x,y,z) = (x_1,x_2,x_3)$. Такое представление позволяет разрабатывать эффективные полуаналитические методы как для решения динамических контактных задач (определение неизвестных контактных напряжений $\mathbf{q}$ и тем самым динамической реакции упругой среды), так и для исследования волновых процессов.

Контактные задачи сводятся к интегральным уравнениям, для решения которых В.А. Бабешко был разработан и реализован набор эффективных методов, таких как метод факторизации [1] и метод фиктивного поглощения [2]. Для исследования волновых процессов используются методы численного интегрирования (в ближней зоне) или выводятся асимптотики рассматриваемых интегралов (для дальней зоны) [3]. Важно, что интегральное представление (1.1) и полученные из него асимптотики справедливы для любой вертикально-неоднородной упругой среды, отличие только в конкретном виде матрицы K. Для классических однородных изотропных волноводов (слой, полупространство) ее элементы могут быть выписаны в явном виде, а для сред более сложного строения (многослойность, непрерывная зависимость упругих свойств от глубины и др.) для ее построения требуется разработка численно устойчивых алгоритмов [4–6]. При этом самостоятельный интерес представляют анизотропные волноводы, к которым, в частности, относятся пластины из многослойных композитных материалов [7].

Представление (1.1) остается справедливым и в этом случае, но задача усложняется как с точки зрения разработки эффективных алгоритмов построения матрицы K, так и вывода асимптотики бегущих волн, который уже не сводится к простому применению теоремы Коши о вычетах. Следует отметить, что для однородного ортотропного слоя А.О. Ватульяну удалось получить матрицу K в явном виде [8]. Однако в общем случае произвольной анизотропии разработка алгоритмов построения матрицы K потребовала значительной модификации по сравнению с изотропным случаем [9, 10].

Для моделирования распространения бегущих волн в упругих слоистых волноводах традиционно используется техника модального анализа. Они ищутся в виде плоских волн, волновой вектор которых указывает направление распространения, а их скорости и собственные формы определяются дисперсионными соотношениями, возникающими при подстановке искомого решения в однородные граничные условия. В анизотропном случае для многослойных волноводов разрабатываются специальные матричные алгоритмы вычисления волновых характеристик [11–14]. Причем некоторые из указанных подходов, например, метод дискретных слоев, базирующийся на конечно-элементной дискретизации по толщине [15], позволяет не только строить дисперсионные кривые, но и вычислять динамическую функцию Грина многослойного полупространства. Разработанные подходы к исследованию волн Лэмба в многослойных анизотропных пластинах (см., например обзор [16]) позволяют также исследовать такие интересные явления, как влияние сильной неоднородности материала на волновые эффекты [17] или строить их длинноволновые и коротковолновые асимптотики [18].

В отличие от изотропного случая, вектор групповой скорости $\mathbf{c}$, указывающий направление переноса энергии волновым пакетом, вообще говоря, не совпадает по направлению с волновым вектором $\mathbf{k}$, отклоняясь от него на некоторый угол ϑ. Возникает дополнительная проблема определения такого направления γ волнового вектора $\mathbf{k}$, которое дает требуемое направление φ для вектора групповой скорости $\mathbf{c}$. Ее решение важно, например, для развития SHM-технологии неразрушающего ультразвукового контроля композитных материалов, используемых в аэрокосмических изделиях [19]. Асимптотика, полученная из интегрального представления (1.1), описывает цилиндрические бегущие волны, распространяющиеся от источника (области приложения нагрузки $\mathbf{q}$) [9, 10]. Ее замечательным свойством является то, что значение групповой скорости $c = |\mathbf{c}|$ определяется этой асимптотикой для любого требуемого направления φ без необходимости находить направление волнового вектора $\mathbf{k}$ для эквивалентной плоской волны. Ниже это свойство подробно обсуждается в сопоставлении с результатами модального анализа. Преимущества асимптотических представлений, полученных в рамках интегрального подхода, иллюстрируются практическими приложениями к задачам обнаружения повреждений и скрытых дефектов методами SHM, а также к обратным задачам определения эффективных упругих модулей армированных углепластиков и нанокомпозитов.

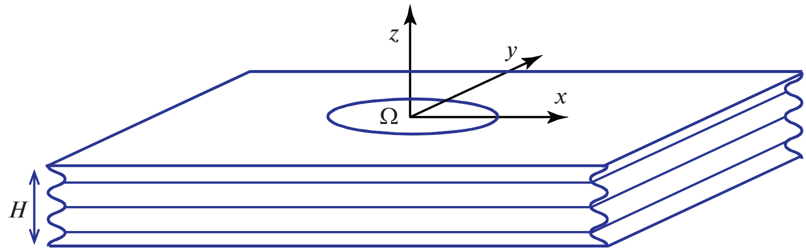

Рис. 1. Слоистая композитная пластина; Ω – область приложения поверхностной нагрузки.

2. Цилиндрические бегущие волны. Рассматривается M-слойная упругая пластина с произвольной анизотропией слоев, к поверхности которой в области Ω приложена осциллирующая нагрузка $\mathbf{q}(x,y)e^{-i\omega t}$, генерирующая поле установившихся гармонических колебаний $\mathbf{u}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$; $\omega = 2\pi f$ – круговая частота, f – частота (рис. 1). В частности, это может быть композитная пластина толщины H, изготовленная из волоконно-армированных трансверсально-изотропных слоев-препрегов [7], с приклеенным к поверхности круговым пьезоактуатором.

Вектор комплексной амплитуды смещений $\mathbf{u}$ удовлетворяет в каждом из слоев уравнениям эластодинамики

$$C_{ijkl}u_{l,jk} + \rho\omega^2 u_i = 0; \quad i = 1,2,3 \tag{2.1}$$

Здесь C_{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных, ρ – плотность. Слои жестко сцеплены между собой, т.е. поля перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и напряжений $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ непрерывны во всем объеме пластины $|x| < \infty$, $|y| < \infty$, $-H < z < 0$, в том числе и на внутренних границах раздела слоев $z = z_m$. Внешние границы $z = -H$ и $z = 0$ свободны от напряжений за исключением области приложения нагрузки. В случае пленочного пьзоактуатора нагрузка $\mathbf{q}$ – это радиальные контактные напряжения, концентрирующиеся на границе области контакта Ω [20, 21].

Решение данной краевой задачи представимо в виде (1.1). В полярных координатах

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi; \quad \alpha_1 = \alpha\cos\gamma, \quad \alpha_2 = \alpha\sin\gamma$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad 0 \le \gamma, \quad \varphi \le 2\pi$$

двукратный контурный интеграл сводится к однократному интегралу по контуру Γ_+, идущему в комплексной плоскости α вдоль положительной вещественной полуоси, отклоняясь от нее при обходе вещественных полюсов подынтегральной функции ζ_n, и внутреннему интегралу по угловой переменной γ:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\Gamma_+}\int_0^{2\pi} K(\alpha,\gamma,z)\mathbf{Q}(\alpha,\gamma)e^{-i\alpha r\cos(\gamma-\varphi)}d\gamma\alpha d\alpha \tag{2.2}$$

Основной идеей, позволившей сформировать алгоритм построения матрицы K в компактной матричной форме, является замена производных по пространственным координатам $\partial/\partial x_j$ на их Фурье-символы $-i\alpha_j$, в том числе и для производной по поперечной координате $z = x_3$, по которой преобразование Фурье формально не применимо [22]. При кусочно-постоянной зависимости упругих свойств от z общее решение уравнений (2.1) в области преобразования Фурье выписывается в каждом слое в явном виде с точностью до шести постоянных множителей $\mathbf{t}_m = (t_m^{(1)}, t_m^{(2)}, ..., t_m^{(6)})$, $m = 1, 2, ..., M$. Вектор неизвестных коэффициентов $\mathbf{t} = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, ..., \mathbf{t}_M)$ длиной $6M$ определяется из системы линейных алгебраических уравнений $A\mathbf{t} = \mathbf{f}$, возникающей при удовлетворении граничных условий. Поэтому по построению определитель матрицы этой системы $\Delta = \det A$ входит в знаменатель коэффициентов $\mathbf{t}_m$, а тем самым и в общий знаменатель элементов матрицы K : $K = \hat{K}(\alpha_1, \alpha_2, z)/\Delta(\alpha_1, \alpha_2)$. Корни $\alpha = \zeta_n$ характеристического уравнения

$$\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \omega) = \Delta(\alpha, \gamma, \omega) = 0 \tag{2.3}$$

являются полюсами подынтегральной функции в представлении (2.2) (числитель $\hat{K}$, как и Фурье-символ нагрузки $\mathbf{Q}$, полюсов не имеет). В анизотропном случае они зависят не только от частоты ω, но и от направления γ в плоскости (α_1, α_2): $\alpha = \zeta_n(\omega, \gamma)$.

Как в изотропном, так и в анизотропном случае разворот контура Γ_+ и его замыкание в соответствии с леммой Жордана позволяет воспользоваться теоремой Коши, заменив интеграл по α суммой вычетов в полюсах ζ_n, попадающих внутрь замкнутого контура (для обратной волны вычет берется в отрицательном полюсе $-\zeta_n$). Вычеты в вещественных полюсах дают бегущие волны. В изотропном случае их асимптотика в дальней зоне представима в виде [3]

$$\begin{gathered} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{a}_n(\varphi, z) e^{i\zeta_n r}/\sqrt{\zeta_n r}(1 + O((\zeta_n r)^{-1})), \quad \zeta_n r \to \infty \\ \mathbf{a}_n = i \operatorname{res} K(-\alpha, \varphi, z)\big|_{\alpha=\zeta_n} \mathbf{Q}(-\zeta_n, \varphi)\zeta_n, \end{gathered} \tag{2.4}$$

N – число вещественных полюсов. Каждое слагаемое в разложении (2.4) описывает цилиндрическую бегущую волну, распространяющуюся от источника на бесконечность с фазовой скоростью $v_n = \omega/\zeta_n$ и групповой скоростью $c_n = d\omega/d\zeta_n$. При этом амплитудные множители $\mathbf{a}_n$ однозначно определяются свойствами волновода (через $\operatorname{res} K$) и параметрами источника (через $\mathbf{Q}$).

В анизотропном случае зависимость полюсов ζ_n от γ не позволяет после взятия вычетов свести внутренние интегралы по γ к цилиндрическим функциям Бесселя. Поэтому для дальней зоны $\zeta_n r \gg 1$ строится их асимптотика методом стационарной фазы [23]. После замены переменных $\gamma = \beta + \varphi + \pi/2$ фазовая функция в показателе осциллирующей экспоненты принимает вид [10]

$$s_n(\beta) = \zeta_n(\theta)\sin\beta, \quad \theta = \beta + \varphi + \pi/2 \tag{2.5}$$

Стационарные точки β_{nm} определяются корнями уравнения

$$s_n'(\beta) = \zeta_n(\theta)\cos\beta + \zeta_n'(\theta)\sin\beta = 0, \tag{2.6}$$

которое эквивалентно уравнению $\operatorname{ctg}\beta = -\zeta_n'(\theta)/\zeta_n(\theta)$. В изотропном случае $\zeta_n'(\theta) = 0$, что приводит к фазовому уравнению $\cos\beta = 0$, имеющему на отрезке $[0, \pi]$ единственный корень $\beta = \pi/2$, дающий в конечном счете асимптотику (2.4).

В анизотропном случае $\zeta_n'(\theta) \neq 0$, что приводит, во-первых, к отклонению стационарной точки от $\pi/2$, а во-вторых, к возможности появления дополнительных стационарных точек – корней уравнения (2.6). В качестве иллюстрации на рис. 2, взятом из работы [10], показаны графики функций $\operatorname{ctg}\beta$ и $-\zeta_n'(\theta)/\zeta_n(\theta)$ для направления φ вдоль армирующих волокон верхнего слоя (рис. 2, а) и под углом 45° к ним (рис. 2, б) для фундаментальной моды SH_0, воздуждаемой в композитной пластине, геометрические и упругие свойства которой приведены в указанной работе. Точки пересечения этих

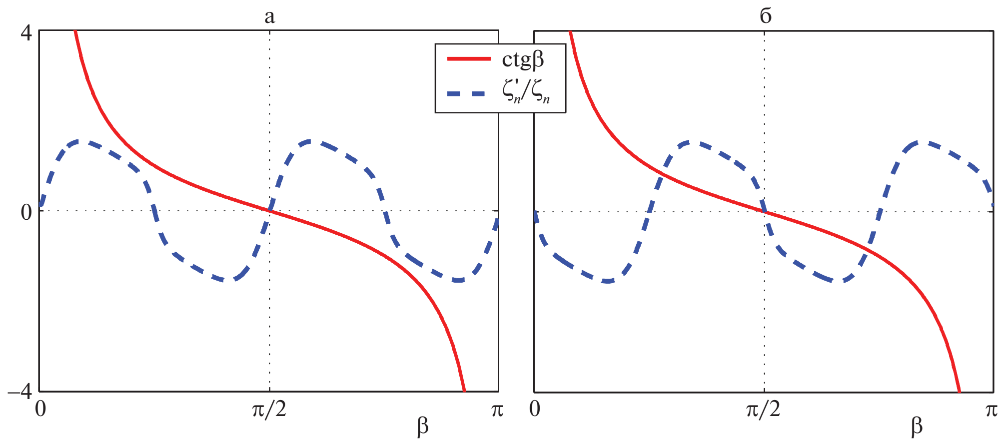

Рис. 2. Иллюстрация возможности появления нескольких бегущих волн, соответствующих одному и тому же полюсу ζ_n.

кривых дают корни уравнения (2.6). В первом случае, для главного направления вдоль волокон, корень $\beta = \pi/2$ такой же, как и в изотропном случае, а во втором случае наблюдается пересечение в трех точках. Это означает, что в асимптотике бегущих волн для этого направления φ одному полюсу ζ_n соответствует три волны, распространяющиеся с различными скоростями. В общем случае асимптотика цилиндрических бегущих волн, возбуждаемых локализованной нагрузкой $\mathbf{q}$ принимает вид [9, 10]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \sim \sum_{n=1}^{N} \mathbf{u}_n(r, \varphi, z), \quad \zeta r \to \infty; \quad \mathbf{u}_n = \sum_{m=1}^{M_n} \mathbf{a}_{nm}(\varphi, z) e^{i s_{nm} r} / \sqrt{\zeta r} \tag{2.7}$$

Здесь, как и в представлении (2.4), амплитудные множители $\mathbf{a}_{nm}$ выражаются через вычеты элементов матрицы K в полюсах $\alpha = \zeta_n$ при $\gamma = \theta_{nm}$ и $\mathbf{Q}(-s_{nm}, \varphi)$; M_n – число стационарных точек (корней β_{nm} уравнения (2.6)) для фиксированного направления φ, $s_{nm} = s_n(\beta_{nm})$, ζ – характерное значение волнового числа.

Наряду с возможным существованием нескольких бегущих волн, соответствующих одному полюсу ζ_n, качественное отличие разложения (2.7) от асимптотики (2.4) состоит в том, что сам по себе полюс уже не является волновым числом. Вместо него в показателе экспоненты при радиальной переменной r стоят коэффициенты s_{nm}, отличающиеся от ζ_n сомножителем $\sin\beta_{nm}$. Именно они и играют роль волнового числа. Соответственно, разложение (2.7) описывает набор бегущих волн, распространяющихся с фазовыми и групповыми скоростями

$$v_{nm}(\varphi) = \omega/s_{nm} \quad \text{и} \quad c_{nm}(\varphi) = d\omega/ds_{nm}, \tag{2.8}$$

причем их число может меняться в зависимости от направления φ.

3. Модальный анализ. В рамках модального анализа распространяющиеся вдоль пластины бегущие волны описываются собственными решениями рассматриваемой краевой задачи, которые ищутся в виде плоских волн

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(z) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} \tag{3.1}$$

Волновой вектор $\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0)$, $k_x = k\cos\gamma$, $k_y = k\sin\gamma$, $k = |\mathbf{k}|$, определяет ориентацию волнового фронта в плоскости (x, y), указывая ортогональное к фронту направление γ (традиционное обозначение волнового числа k совпало с также ставшим традиционным обозначением матрицы Грина в представлении (1.1); это не должно приводить к путанице, т.к. они используются в различных контекстах). Подстановка представления (3.1) в уравнения (2.1) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных компонент амплитудного вектора $\mathbf{a}(z)$. Как и при построении матрицы K, в каждом из слоев композита ее общее решение выписывается в явном виде с точностью до постоянных множителей $\mathbf{t}_m$, а общий вектор неизвестных $\mathbf{t}$ определяется из возникающей при удовлетворении граничных условий однородной системы $A\mathbf{t} = \mathbf{0}$ с той же матрицей A, но только с компонентами волнового вектора (k_x, k_y) вместо параметров преобразования Фурье (α_1, α_2). Поэтому условие $\det A = 0$, необходимое для существования ее ненулевого решения, дает такое же дисперсионное уравнение как и (2.3):

$$\Delta(k_x, k_y, \omega) = \Delta(k, \gamma, \omega) = 0 \tag{3.2}$$

Соответственно, его корни выражаются через те же полюса ζ_n:

$$k_{n,x} = \zeta_n(\gamma)\cos\gamma, \quad k_{n,y} = \zeta_n(\gamma)\sin\gamma, \quad k_n = |\mathbf{k}_n| = \zeta_n(\gamma) \tag{3.3}$$

В то время как векторы фазовой скорости $\mathbf{k}_n$ для мод бегущих волн, определяемых корнями дисперсионного уравнения, коллинеарны волновым векторам:

$$\mathbf{v}_n(\gamma) = (\omega/k_n^2)\mathbf{k}_n(\gamma),$$

векторы групповой скорости $\mathbf{c}_n$ могут отклоняться от $\mathbf{k}_n$, т.е. быть не ортогональными к фронту волны.

Для определения $\mathbf{c}_n$ уравнение (3.2) разрешается относительно частоты ω:

$$\omega = \omega_n(\mathbf{k}) = \omega_n(k_x, k_y),$$

и используется представление [24, 25]

$$\mathbf{c}_n = \operatorname{grad}\omega_n(k) = \left(\frac{\partial\omega_n}{\partial k_x}, \frac{\partial\omega_n}{\partial k_y}\right) \tag{3.4}$$

Чтобы не вычислять производные от искомых корней ω_n, удобно также использовать представление

$$\mathbf{c}_n = -\operatorname{grad}\Delta(\mathbf{k},\omega)/(\partial\Delta/\partial\omega)|_{\omega=\omega_n}, \tag{3.5}$$

для вывода которого достаточно взять полные производные уравнения (3.2) по k_x и k_y:

$$\frac{d\Delta}{dk_x} = \frac{\partial\Delta}{\partial k_x} + \frac{\partial\Delta}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial k_x} = 0, \quad \frac{d\Delta}{dk_y} = \frac{\partial\Delta}{\partial k_y} + \frac{\partial\Delta}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial k_y} = 0$$

Отклонение $\mathbf{c}_n$ от $\mathbf{k}_n$ хорошо иллюстрируется следующими геометрическими построениями. Будучи градиентом к поверхности $\omega_n(\mathbf{k})$, вектор $\mathbf{c}_n$ ортогонален к линии уровня $\omega_n = \mathrm{const}$, вычерчиваемой на плоскости (k_x, k_y) волновым вектором $\mathbf{k}_n(\gamma)$ при $0 \le \gamma \le 2\pi$ (рис. 3, а). В изотропном случае ζ_n не зависит от γ и кривая, определяемая равенствами (3.3), является окружностью, у которой радиус-вектор $\mathbf{k}_n$ ортогонален к касательной, т.е. угол φ, определяющий направление вектора групповой скорости $\mathbf{c}_n = (c_{n,x}, c_{n,y})$:

$$c_{n,x} = c_n\cos\varphi, \quad c_{n,y} = c_n\sin\varphi, \quad c_n = |\mathbf{c}_n|,$$

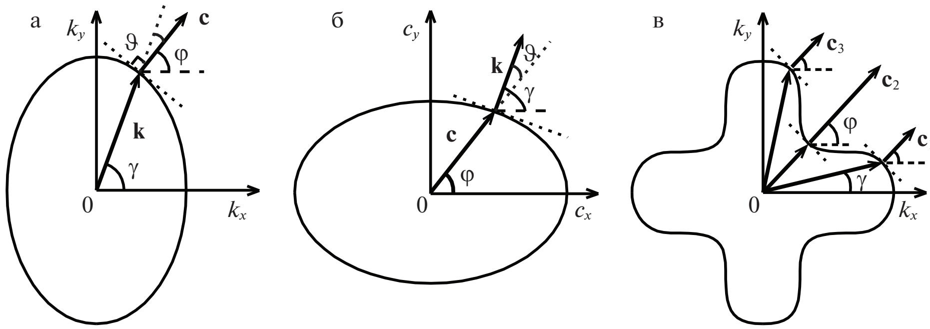

Рис. 3. Кривая волнового вектора $\mathbf{k}(\gamma)$ с ортогональным к ней вектором групповой скорости $\mathbf{c}(\varphi)$ (а) и обратное соотношение между кривой $\mathbf{c}(\varphi)$ с ортогональным к ней волновым вектором $\mathbf{k}(\gamma)$ (б); возникновение нескольких бегущих волн, соответствующих одному корню $\zeta_n(\gamma)$ дисперсионного уравнения (3.2) (в).

совпадает с углом γ волнового вектора. Следует отметить, что свойство ортогональности $\mathbf{c}_n$ к кривой $\mathbf{k}_n(\gamma)$ взаимно обратно: волновой вектор $\mathbf{k}_n$ также ортогонален к кривой, вычерчиваемой вектором групповой скорости $\mathbf{c}_n(\varphi)$ (рис. 3, б).

Зависимость полюсов ζ_n от γ дает кривую, отличную от окружности, нормаль к которой в общем случае не совпадает с направлением радиус-вектора $\mathbf{k}_n(\gamma)$ (совпадает только для главных осей анизотропии). При этом угол отклонения $\vartheta = \varphi(\gamma) - \gamma$ зависит не только от γ, но и от частоты ω и может достигать значительных величин, превышающих 45°. В качестве примера на рис. 4 показаны зависимости ϑ от γ для фундаментальных мод A_0, S_0 и SH_0, возбуждаемых в однонаправленном (рис. 4, а) и перекрестно-армированном (рис. 4, б) композитах толщины $H = 1.1$ мм, составленных из слоев-препрегов плотности $\rho = 1482$ кг/м^3. Препреги моделируются трансверсально-изотропными слоями с упругими модулями $C_{11} = 95.9$, $C_{12} = 3.6$, $C_{22} = 9.6$, $C_{44} = 3.0$, $C_{55} = 3.45$ (ГПа) (C_{ij} в нотации Фойгта [7]).

4. Сравнение характеристик цилиндрических и плоских волн. Как правило, вектор $\mathbf{k}_n(\gamma)$ вычерчивает выпуклую кривую. Но если $\zeta_n(\gamma)$ в диапазоне $0 \le \gamma \le \pi/2$ меняется немонотонно, то эта кривая становится невыпуклой. В этом случае несколько точек γ_m могут давать одно и то же направление φ для соответствующих векторов групповой скорости $\mathbf{c}_m$ (рис. 3, в), то есть в таком направлении φ распространяется несколько волновых пакетов, переносимых плоскими волнами с разным направлением волновых векторов. Это полностью согласуется с возможностью существования в асимптотике (2.7) M_n бегущих цилиндрических волн, соответствующих одному и тому же полюсу ζ_n. Более того, значения $c_n(\varphi)$, получающиеся для плоских волн по формуле (3.4) или (3.5), совпадают со значениями групповой скорости цилиндрических волн $c_{nm}(\varphi)$, получаемых из (2.8).

В качестве примера на рис. 5 показаны угловые диаграммы групповых скоростей плоских волн $c_n(\varphi)$ (сплошные линии) и цилиндрических волн $c_{nm}(\varphi)$ (маркеры) для фундаментальных мод, распространяющихся в тех же композитных пластинах, что и на рис. 4. Для каждого направления φ их значения полностью совпадают, однако формулы (2.8) дают их сразу, в то время как углы γ волновых векторов плоских волн, определяющих их групповую скорость в этом направлении, заранее неизвестны. По-

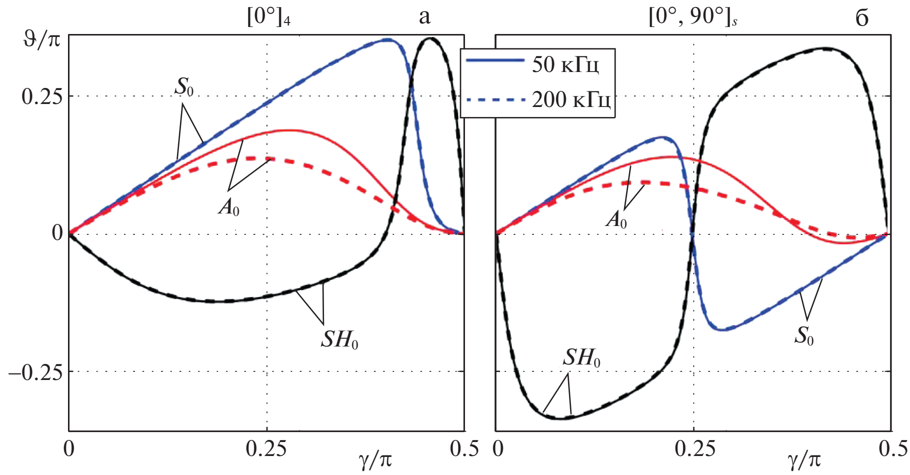

Рис. 4. Зависимость угла отклонения ϑ от угла γ, задающего направление волнового вектора $\mathbf{k}$, для фундаментальных волн Лэмба в однонаправленном (а) и перекрестно-армированном (б) композите.

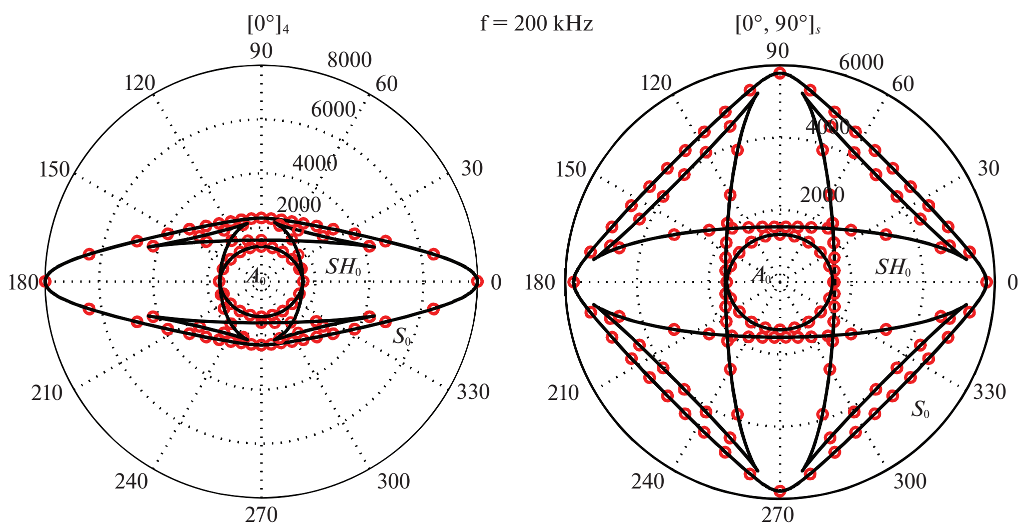

Рис. 5. Диаграммы зависимости групповой скорости от направления распространения для плоских (представление (3.6), сплошные линии) и цилиндрических ((2.8), маркеры) фундаментальных волн Лэмба; композитные образцы те же, что и на рис. 4.

этому в практических приложениях на каждом шаге применения формул (3.4)–(3.5) необходим поиск требуемых углов γ_m.

Кроме того, разложение (2.7) дает однозначные величины амплитудных коэффициентов $\mathbf{a}_{nm}(\varphi, z)$, тогда как собственные формы $\mathbf{a}(z)$ плоских волн (3.1) определяются с точностью до постоянного множителя, не учитывая параметры источника. Тем не менее, их нормированные зависимости от z для одинаковых φ совпадают: и те, и другие описывают одни и те же собственные формы нормальных мод.

В целом, полученная из интегрального представления асимптотика бегущих волн (2.7) дает те же волновые характеристики, что и классический модальный анализ (скорость, собственные формы), но вдобавок имеет два важных преимущества:

1) учет источника, позволяющий получать значение амплитуды возбуждаемых волн и тем самым анализировать амплитудно-частотные характеристики, определять оптимальные диапазоны возбуждения требуемых мод и т.п.

2) нет необходимости подбирать нужную ориентацию плоской волны для определения групповой скорости движения волнового пакета в требуемом направлении φ.

5. Практические приложения. Преимущества интегрального подхода позволяют решать задачи, которые сложно или даже невозможно решить, используя только модальный анализ. Из недавних примеров отметим реализацию метода обращения времени для анизотропных композитов [26] и определение эффективных упругих модулей нанокомпозитов [27].

5.1. Метод обращения времени [28], известный в отечественной литературе как метод обращения волн [29], основан на инвариантности волнового оператора относительно замены времени t на $-t$ для сред без внутреннего трения. Это позволяет использовать сигналы $v_j(t)$, регистрируемые в различных точках $\mathbf{x}_j$ поверхности упругой пластины, например, сетью пьезосенсоров, в качестве обращенных по времени управляющих сигналов $q_j(t) = pv_j(-t)$ источников, расположенных в этих же точках; p — размерный коэффициент. Эти источники генерируют волновые поля $\mathbf{u}_j(\mathbf{x},t)$, и, если сигналы $v_j(t)$ были принесены волнами, рассеянными скрытым дефектом, то обращенные волны фокусируются на нем, обнаруживая его местоположение.

Для изотропных пластин местоположение рассеивателя может быть определено и более простыми средствами, например, с помощью триангуляции, зная время прихода сигналов и групповую скорость приносящих их волн. Однако для анизотропных композитных пластин зависимость вектора групповой скорости $\mathbf{c}_n$ от направления распространения и частоты не позволяет использовать простую триангуляцию или фокусировку обращенных плоских волн $\mathbf{u}_j$.

В то же время, использование полученных в рамках интегрального подхода асимптотик (2.7) для вычисления обращенных волн $\mathbf{u}_j$ по данным экспериментальных измерений сигналов $v_j(t)$ позволило реализовать метод обращения времени и для композитных образцов [26].

5.2. Определение эффективных упругих модулей композитной пластины по характеристикам возбуждаемых в ней бегущих волн базируется на минимизации фунционала невязки

$$F(C,\rho,h) = \sum_j (1 - d_j^m / d_j^c)^2, \tag{5.1}$$

в котором C, ρ и h — массивы упругих модулей, плотностей и толщин слоев образца, а d_j^m и d_j^c измеренные и расчетные волновые характеристики, например, групповые скорости или длины волн на определенных частотах. Алгоритмы минимизации функционала F могут быть различными (покоординатный или градиентный спуск, метод сопряженных градиентов, генетический алгоритм и др.), но каждый их шаг требует пересчета волновых характеристик d_j^c по новым значениям варьируемых (неизвестных) входных параметров. Использование асимптотики (2.7) и представлений (2.8) дает такое же преимущество по сравнению с модальным анализом, как и в методе обращения времени. Однако поиск корней дисперсионного уравнения (2.3) все еще требует сотни и тысячи вызовов процедуры вычисления матрицы K на каждом шаге, определяя общий уровень вычислительных затрат. Тем не менее, реализация такого

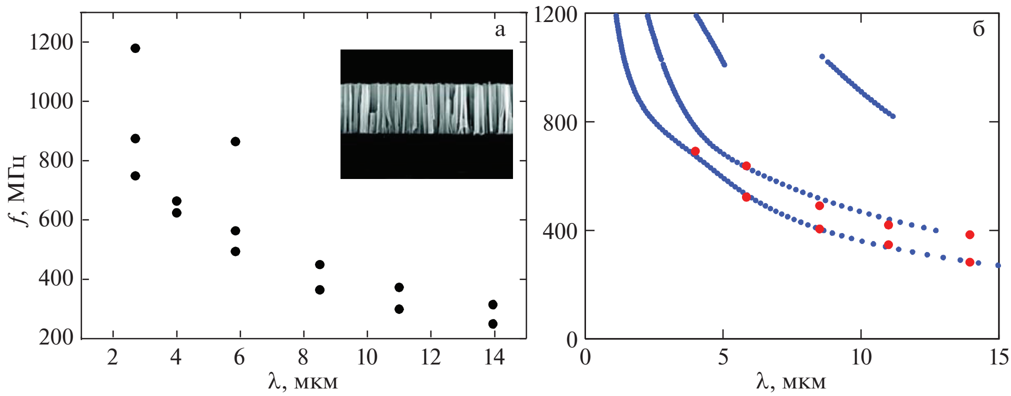

Рис. 6. а: Экспериментальные данные (точки резонансного отклика в плоскости длина волны – частота) для нанокомпозитной пленки с платиновым покрытием на кремниевой подложке и б: дисперсионные кривые для трехслойного упругого анизотропного полупространства с эффективными параметрами, восстановленными по этим данным.

подхода позволила успешно определить свойства используемых в экспериментах образцов и провести на этой основе экспериментальную верификацию полученных интегральных и асимптотических представлений (2.2), (2.7) для анизотропных композитных пластин [30].

При использовании лазерно-оптической установки измерения дисперсионных характеристик бегущих волн на определенных фиксированных частотах методом TGM (transient grating method) [31] удалось избежать поиска корней ζ_n, снизив этим вычислительные затраты на 2–3 порядка [27]. Идея заключается в том, что для полученных методом TGM пар (λ_j, f_j), $j = 1, 2, \ldots$ (длина волны – частота), дающих пиковые значения частотного спектра поверхностных акустических волн (ПАВ), целевую функцию можно сформировать в следующем виде

$$F(C, \rho, h) = \sum_j |K_{33}^{-1}(\alpha_j, \omega_j)|, \tag{5.2}$$

где K_{33} элемент матрицы K, дающий вертикальную компоненту смещений при нормальном воздействии q_3, $\alpha_j = 2\pi/\lambda_j$, $\omega_j = 2\pi f_j$. Для ПАВ значения α_j, ω_j должны совпадать с корнями дисперсионного уравнения (2.3). Обратная величина элементов маирицы K при этом должна обращаться в ноль, что и позволяет использовать функционал (5.2) вместо (5.1). Минимизация этого функционала уже не требует затратного поиска корней дисперсионного уравнения, а только вычисления значений K_{33} в нескольких точках (α_j, ω_j).

В качестве примера на рис. 6, а показано типичное распределение точек резонансного отклика в плоскости (λ, f), полученное для композитной пленки толщиной около 1 микрона с III-нитридными нанонитями GaN, запеченными в пластик HSQ [27]. Дисперсионные кривые, посчитанные для эффективных параметров композита, полученных при минимизации функционала (5.2), проходят через эти точки (рис. 6, б), т.е. дают наблюдаемые в эксперименте характеристики ПАВ.

Заключение. Рассмотрено приложение интегрального подхода к анализу бегущих волн в анизотропных композитных пластинах. Показаны преимущества полученных асимптотических представлений при решении задач неразрушающего ультразвукового контроля и определения эффективных упругих свойств композитных материалов.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01191).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
2. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 258 с.
3. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
4. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В.* Методы построения матрицы Грина стратифицированного упругого полупространства // ЖВММФ. 1987. Т. 27. № 1. С. 93–101.
5. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Еремин А.А. и др.* Метод слоистых элементов в динамической теории упругости // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 4. С. 622–634.
6. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Фоменко С.И. и др.* Поверхностные волны в материалах с функционально-градиентными покрытиями // Акуст. ж. 2012. Т. 58. № 3. С. 370–385.
7. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
8. *Ватульян А.О.* Контактные задачи со сцеплением для анизотропного слоя // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 4. С. 727–734.
9. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Кривонос А.С.* Возбуждение и распространение упругих волн в многослойных анизотропных композитах // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 3. С. 419–432.
10. *Glushkov E., Glushkova N., Eremin A.* Forced wave propagation and energy distribution in anisotropic laminate composites // J. Acoust. Soc. Am. 2011. V. 129. № 5. P. 2923–2934.
11. *Kausel E.* Wave propagation in anisotropic layered media // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1986. V. 23. № 8. P. 1567–1578.
12. *Nayfeh A.H.* The general problem of elastic wave propagation in multilayered anisotropic media // J. Acoust. Soc. Am. 1991. V. 89. № 4. P. 1521–1531.
13. *Lowe M.J.S.* Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 1995. V. 42. № 4. P. 525–542.
14. *Velichko A., Wilcox P.D.* Modelling the excitation of guided waves in generally anisotropic multilayered media // J. Acoust. Soc. Am. 2007. V. 121. P. 60–69.
15. *Kausel E.* Dynamic point sources in laminated media via the thin-layer method // Int. J. Solids Struct. 1999. V. 36. № 31–32. P. 4725–4742.
16. *Kuznetsov S.V.* Lamb waves in anisotropic plates (review) // Acoust. Phys. 2014. V. 60. P. 95–103.
17. *Kaplunov J., Prikazchikov D.A., Prikazchikova L.A.* Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate // Int. J. Solids Struct. 2017. V. 113–114. P. 169–179.
18. *Djeran-Maigre I., Kuznetsov S.* Solitary SH waves in two-layered traction-free plates // Comptes Rendus Mécanique. 2008. V. 336(1–2). P. 102–107.
19. *Giurgiutiu V.* Structural Health Monitoring of Aerospace Composites. Amsterdam: Acad. Press, 2016. 470 p.
20. *Giurgiutiu V.* Tuned Lamb wave excitation and detection with piezoelectric wafer active sensors for structural health monitoring // J. Intell. Mater. Syst.&Struct. 2005. V. 16. № 4. P. 291–305.
21. *Raghavan A., Cesnik C.E.S.* Finite-dimensional piezoelectric transducer modeling for guided wave based structural health monitoring // Smart Mater. Struct. 2005. V. 14. № 6. P. 1448–1461.
22. *Глушков Е.В., Сыромятников П.В.* Анализ волновых полей, возбуждаемых поверхностным гармоническим источником в анизотропном полупространстве. Краснодар, 1985. 11 с. Рукопись представлена Кубанским госуниверситетом, Деп. в ВИНИТИ 07.08.85, № 5861-85.
23. *Федорюк М.В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
24. *Neau G., Deschamps M., Lowe M.J.S.* Group velocity of Lamb waves in anisotropic plates: comparison between theory and experiment // in: Rev. Progr. in Quantit. NDE / *Ed. by Thompson D.O., Chimenti D.E.* New York: AIP, 2001. P. 81–88.
25. *Wang L., Yuan F.G.* Group velocity and characteristic wave curves of Lamb waves in composites: Modeling and experiments // Composites Sci. & Technol. 2007. V. 67. № 8. P. 1370–1384.

26. *Eremin A., Glushkov E., Glushkova N. et al.* Guided wave time-reversal imaging of macroscopic localized inhomogeneities in anisotropic composites // Struct. Health Monit. 2019. V. 18. № 5–6. P. 1803–1819.
27. *Glushkov E., Glushkova N., Bonello B. et al.* Evaluation of effective elastic properties of nitride NWs/polymer composite materials using laser-generated surface acousticwaves // Appl. Sci. 2018. V. 8. № 11:2319.
28. *Fink M., Cassereau D., Derode A. et al.* Time-reversed acoustics // Rep. Prog. Phys. 2000. V. 63. № 12. P. 1933–1995.
29. *Зверев В.А.* Принцип акустического обращения волн и голография // Акуст. ж. 2004. Т. 50. С. 792–801.
30. *Eremin A., Glushkov E., Glushkova N. et al.*, Evaluation of effective elastic properties of layered composite fiber-reinforced plastic plates by piezoelectrically induced guided waves and laser Doppler vibrometry // Compos. Struct. 2015. V. 125. P. 449–458.
31. *Lu L., Charron E., Glushkov E. et al.* Probing elastic properties of nanowire-based structures // Appl. Phys. Lett. 2018. V. 113. № 16. P. 161903.

Guided Waves in Multilayered Anisotropic Composites

E. V. Glushkov[a,#] and N. V. Glushkova[a]

[a] *Institute for Mathematics, Mechanics and Informatics KubSU, Krasnodar, Russia*
[#]*e-mail: evg@math.kubsu.ru*

The excitation of surface acoustic waves in multilayered arbitrarily anisotropic waveguides is considered. The article provides a brief overview of the explicit asymptotic representations derived within the framework of the integral approach developed by V.A. Babeshko in comparison with the classic modal analysis results. The practical application is illustrated by examples of ultrasonic evaluation of composites.

Keywords: composite materials, surface acoustic waves, integral and asymptotic representations, modal analysis, group velocity vector, ultrasonic inspection, effective elastic moduli

REFERENCES

1. *Vorovich I.I., Babeshko V.A.* Dynamic Mixed Problems of Elasticity for Non-Classical Domains. (Dynamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlja neklassicheskih oblastej) Moscow: Nauka, 1979. 320 p. (in Russian)
2. *Babeshko V.A.* Generalized Factorization Method in Dynamic Mixed Problems of Elasticity. (Obobshchennyy metod faktorizatsii v dinamicheskikh smeshannykh zadachakh teorii uprugosti) Moscow: Nauka, 1984. 258 p. (in Russian)
3. *Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko J.F.* Dynamics of Inhomogeneous Linearly Elastic Media. (Dinamika neodnorodnykh lineyno-uprugikh sred) Moscow: Nauka, 1989. 344 p. (in Russian).
4. *Babeshko V.A., Glushkov E.V., Glushkova N.V.* Methods of constructing Green's matrix of a stratified elastic half-space // USSR Comput. Math.&Math. Phys., 1987, vol. 27, no. 1, pp. 60–65.
5. *Glushkov Ye.V., Glushkova N.V., Yeremin A.A., Mikhas'kiv V.V.* The layered element method in the dynamic theory of elasticity // JAMM, 2009, vol. 73, pp. 449–456.
6. *Glushkov E.V., Glushkova N.V., Fomenko S.I., Zhang C.* Surface waves in materials with functionally gradient coatings // Acoust. Phys., 2012, vol. 58, no. 3, pp. 339–353.
7. *Christensen R.M.* Mechanics of Composite Materials. N.Y.: Wiley-Intersci., 1979. 348 p.
8. *Vatul'ian A.O.* Contact problem with adhesion for an anisotropic layer // JAMM, 1977, vol. 41, no. 4, pp. 745–752.
9. *Glushkov Ye.V., Glushkova N.V., Krivonos A.S.* The excitation and propagation of elastic waves in multilayered anisotropic composites // JAMM, 2010, vol. 74, pp. 297–305.
10. *Glushkov E., Glushkova N., Eremin A.* Forced wave propagation and energy distribution in anisotropic laminate composites // J. Acoust. Soc. Am., 2011, vol. 129, no. 5, pp. 2923–2934.

11. *Kausel E.* Wave propagation in anisotropic layered media // Int. J. Numer. Meth. Eng., 1986, vol. 23, no. 8, pp. 1567–1578.
12. *Nayfeh A.H.* The general problem of elastic wave propagation in multilayered anisotropic media // J. Acoust. Soc. Am., 1991, vol. 89, no. 4, pp. 1521–1531.
13. *Lowe M.J.S.* Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control, 1995, vol. 42, no. 4, pp. 525–542.
14. *Velichko A., Wilcox P.D.* Modeling the excitation of guided waves in generally anisotropic multi-layered media // J. Acoust. Soc. Am., 2007, vol. 121, pp. 60–69.
15. *Kausel E.* Dynamic point sources in laminated media via the thin-layer method // Int. J. Solids Struct., 1999, vol. 36, no. 31–32, pp. 4725–4742.
16. *Kuznetsov S.V.* Lamb waves in anisotropic plates (review) // Acoust. Phys., 2014, vol. 60, pp. 95–103.
17. *Kaplunov J., Prikazchikov D.A., Prikazchikova L.A.* Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate // Int. J. Solids Struct., 2017, vol. 113–114, pp. 169–179.
18. *Djeran-Maigre I., Kuznetsov S.* Solitary SH waves in two-layered traction-free plates // Comptes Rendus Mécanique, 2008, vol. 336, no. 1–2, pp. 102–107.
19. *Giurgiutiu V.* Structural Health Monitoring of Aerospace Composites. Amsterdam: Acad. Press, 2016. 470 p.
20. *Giurgiutiu V.* Tuned Lamb wave excitation and detection with piezoelectric wafer active sensors for structural health monitoring // J. Intell. Mater. Syst.&Struct., 2005, vol. 16, no. 4, pp. 291–305.
21. *Raghavan A., Cesnik C.E.S.* Finite-dimensional piezoelectric transducer modeling for guided wave based structural health monitoring // Smart Mater. Struct., 2005, vol. 14, no. 6, pp. 1448–1461.
22. *Glushkov E.V., Syromyatnikov P.V.* Analysis of wave fields excited by a harmonic surface source in an anisotropic half-space // Krasnodar, 1985. Manuscript presented at the Kuban State University. Deposited at VINITI 7 August 1985, No. 5861–85.
23. *Fedoryuk M.V.* Saddle-Point Method (Metod perevala). Moscow: Nauka, 1977. 368 p. (in Russian)
24. *Neau G., Deschamps M., Lowe M.J.S.* Group velocity of Lamb waves in anisotropic plates: Comparison between theory and experiment // in: Rev. Progr. in Quantit. NDE / *Ed. by Thompson D.O., Chimenti D.E.* N.Y.: AIP, 2001. pp. 81–88.
25. *Wang L., Yuan F.G.* Group velocity and characteristic wave curves of Lamb waves in composites: Modeling and experiments // Compos. Sci.&Technol., 2007, vol. 67, no. 8, pp. 1370–1384.
26. *Eremin A., Glushkov E., Glushkova N. et al.* Guided wave time-reversal imaging of macroscopic localized inhomogeneities in anisotropic composites // Struct. Health Monit., 2019, vol. 18, no. 5–6, pp. 1803–1819.
27. *Glushkov E., Glushkova N., Bonello B. et al.* Evaluation of effective elastic properties of nitride NWs/polymer composite materials using laser-generated surface acoustic waves // Appl. Sci., 2018, vol. 8, no. 11:2319.
28. *Fink M., Cassereau D., Derode A. et al.* Time-reversed acoustics // Rep. Prog. Phys., 2000, vol. 63, no. 12, pp. 1933–1995.
29. *Zverev V.A.* The principle of acoustic time reversal and holography // Acoust. Phys., 2004, vol. 50, pp. 685–693.
30. *Eremin A., Glushkov E., Glushkova N. et al.* Evaluation of effective elastic properties of layered composite fiber-reinforced plastic plates by piezoelectrically induced guided waves and laser Doppler vibrometry // Compos. Struct., 2015, vol. 125, pp. 449–458.
31. *Lu L., Charron E., Glushkov E. et al.* Probing elastic properties of nanowire-based structures // Appl. Phys. Lett., 2018, vol. 113, no. 16:161903.

УДК 539.3

О ДИНАМИКЕ НЕОДНОРОДНОЙ ПРЕДНАПРЯЖЕННОЙ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ СРЕДЫ В УСЛОВИЯХ ВОЗДЕЙСТВИЯ ВНЕШНЕГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

© 2021 г. Т. И. Белянкова[1,*], В. В. Калинчук[1,]**

[1] Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Россия

**e-mail: tbelen415@mail.ru*

***e-mail: vkalin415@mail.ru*

Поступила в редакцию 03.02.2021 г.
После доработки 25.02.2021 г.
Принята к публикации 12.03.2021 г.

Развивается метод исследования волн Релея на поверхности неоднородной предварительно напряженной электроупругой среды, находящейся под воздействием внешнего электростатического поля. Среда представляет собой однородное полупространство с неоднородным покрытием, выполненным из функционально градиентного материала. Полупространство и покрытие в естественном состоянии (ЕС) представляют собой пьезоэлектрики класса 6 мм, оси симметрии которых совпадают и ориентированы по нормали к поверхности среды. Начально-деформированное состояние (НДС) покрытия вызвано действием начальных механических усилий и внешнего электростатического поля. Методами операционного исчисления краевая задача о колебаниях среды сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которая, в свою очередь, сведена к системе задач Коши с начальными условиями. Использование численных методов позволяет построить интегральное представление, описывающее движение произвольной точки среды, а также дисперсионное уравнение, решение которого определяет основные характеристики поверхностных акустических волн. Метод позволяет исследовать влияние свойств покрытия, градиентности и локализации неоднородности, вида начального напряженного состояния и величины начальных напряжений, внешнего электростатического поля на параметры распространения релеевских волн в широком диапазоне изменения параметров.

Ключевые слова: пьезоэлектрическая структура, подложка, покрытие, начальные напряжения, внешнее электростатическое поле, функционально градиентный пьезоэлектрический материал (ФГПМ), волны Релея

DOI: 10.31857/S003282352103005X

1. Введение. Особенности технологии получения новых типов сегнетоэлектрических структур из кристаллических пленок или керамики с переменными свойствами приводят к появлению деформаций, существенно изменяющих физические свойства исходных материалов. Это обуславливает необходимость усовершенствования заложенных [1–5] фундаментальных основ создания акустоэлектронных устройств. В работах [6–8] проведена последовательная линеаризация и построены линеаризованные определяющие соотношения динамики однородных или слоисто-неоднородных предварительно напряженных электро- [6, 7] и электротермоупругих [8] сред при наличии внешних электрических полей. Влияние электростатического поля на особенности распространения акустических волн в кристаллических пластинах рассмотрено в статьях [5, 9]. В работе [10] на примере структур “пьезоэлектрический кристалл/изотропная подложка” и “изотропный слой/пьезоэлектрическая подложка” исследовано влияние электростатического поля на параметры дисперсии и анизотропию распространения волн Релея и Лява. Особенности распространения сдвиговых волн в слоистых преднапряженных средах рассмотрены в [11–15]. Изучено влияние начальных напряжений на скорости распространения волн Лява и Гуляева–Блюштейна [11–14]. Исследованы процессы распространения волн в функционально градиентных пьезоактивных средах специального типа, параметры которых допускают построение аналитического решения [15–18]. Более общая модель неоднородного покрытия рассмотрена в работах [19–23]. Покрытие представляет собой либо слой, выполненный из ФГПМ [19, 20, 23], либо пакет неоднородных слоев [21, 22]. В этих работах исследованы особенности распространения sh-волн в зависимости от физических свойств покрытия, в частности, характера, интенсивности и области локализации неоднородности. Процесс распространения релеевских волн в функционально градиентных средах в отсутствие начальных напряжений исследовался в [24]. Изучено влияние коэффициентов градиентности изменения упругих и электрических модулей на изменение скорости волн Релея. В работе [25] исследованы дисперсионные соотношения для поверхностных акустических волн Лява, распространяющихся в трехслойном изотропном упругом полупространстве. Установлены свойства структуры среды, при которых выполняются условия существования волны Лява. В статье [26] исследованы нелинейные уравнения, описывающие поведение упругих пьезоэлектриков в электромагнитном поле при учете процессов релаксации диэлектрической поляризации. Получены дисперсионные уравнения, вычислены скорости и декременты затухания таких волн. В работе [27] проведен цикл исследований по применению поверхностных акустических волн (ПАВ) для неразрушающей диагностики слоистых сред. Исследовано дисперсионное уравнение для многослойного композита, контактирующего с анизотропным полупространством. Показано, что изменение физических параметров и геометрии любого из внутренних слоев приводит к изменению характера дисперсионных кривых. В работе [28] предложен полуаналитический подход к исследованию многослойных структур из однородных слоев, позволяющий эффективно исследовать задачи дифракции, энергетические характеристики и направленность излучения волн, возбуждаемых в многослойной среде поверхностными пьезоактуаторами. В настоящей работе развит метод исследования особенностей распространения ПАВ в сегнетоэлектрической гетероструктуре с предварительно напряженным покрытием, выполненным из ФГПМ и находящимся под воздействием внешнего электростатического поля. Метод позволяет изучать влияние свойств покрытия, градиентности неоднородности и ее локализации, вида начального напряженного состояния и величины начальных напряжений, ориентации и напряженности внешнего электростатического поля на основные характеристики волн Релея в широком диапазоне изменения параметров.

2. Постановка задачи. Рассматривается задача об установившихся гармонических колебаниях сегнетоэлектрической гетероструктуры, представляющей собой неоднородное пьезоактивное покрытие $0 \le x_3 \le H$ на пьезоэлектрической подложке $x_3 \le 0$, $|x_1|, |x_2| \le \infty$. Поверхность среды предполагается свободной от напряжений, свойства покрытия описываются функциями

$$\rho^{(1)} = \rho_0 f_\rho^{(1)}(x_3), \quad c_{ij}^{(1)} = c_{ij}^0 f_c^{(1)}(x_3), \quad e_{ij}^{(1)} = e_{ij}^0 f_e^{(1)}(x_3), \quad \varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^0 f_\varepsilon^{(1)}(x_3) \tag{2.1}$$

ρ_0, c_{ij}^0, e_{ij}^0, ε_{ij}^0 – соответственно плотность, упругие, пьезоэлектрические и диэлектрические модули материала подложки класса 6 мм с осью симметрии, направленной вдоль оси x_3. НДС покрытия однородно и наводится за счет действия механических напряжений и электростатического поля [6–8]:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{\Lambda}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{\Lambda} = \delta_{ij} v_i \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j, \quad \varphi_0 = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{R}, \quad v_i = \mathrm{const} \tag{2.2}$$

Здесь $\mathbf{R}$, $\mathbf{r}$ – радиус-векторы точки среды в НДС и в естественном состоянии (ЕС) соответственно, $v_i = 1 + \delta_i$, δ_i – главные относительные удлинения, δ_{ij} – символ Кронекера, φ_0 – электрический потенциал, $\mathbf{E}_0$ – напряженность начального внешнего электростатического поля.

Полагаем, что колебания среды вызваны действием удаленного источника и удовлетворяют условиям ($k = 1,3,4$, $s = 1,2,3$, $n = 1,2$)

$$u_k^{(n)} = u_k^{(n)}(x_1, x_3), \quad \partial/\partial x_2 = 0, \quad u_2^{(n)} = u_s^{(0)} = 0 \tag{2.3}$$

Верхний индекс $n = 0$, 1, 2 отвечает соответственно вакууму, покрытию и полупространству. Ниже использованы безразмерные параметры [21–23]: $l' = l/H$, $\rho'^{(n)} = \rho^{(n)}/\rho^{(2)}$, $c'^{(n)}_{ij} = c^{(n)}_{ij}/c^{(2)}_{44}$, $e'^{(n)}_{ij} = e^{(n)}_{ij}\xi/c^{(2)}_{44}$, $\varepsilon'^{(n)}_{ij} = \varepsilon^{(n)}_{ij}\varepsilon^{(0)}\xi^2/c^{(2)}_{44}$, $\varphi'^{(n)} = \varphi^{(n)}/(\xi H)$, $E'_k = E_k/\xi$; $\varepsilon^{(0)}$ – диэлектрическая проницаемость вакуума, $\xi = 10^{10}$ В/м, $\kappa_2 = \omega H/V_S^{(2)}$ и $\kappa_{2e} = \omega H/V_{Se}^{(2)}$ – безразмерные частоты, $V_{Se}^{(2)} = \sqrt{(c_{44}^{(2)} + (e_{15}^{(2)})^2/\varepsilon_{11}^{(2)})/\rho^{(2)}}$ и $V_S^{(2)} = \sqrt{c_{44}^{(2)}/\rho^{(2)}}$ – скорости объемных сдвиговых волн с учетом и без учета пьезоэлектрических свойств среды. Далее штрихи опущены.

Задача о движении составной преднапряженной электроупругой среды описывается уравнениями [6–8] ($\mathbf{\Theta}^{(n)} = \mathbf{\Pi}^{(n)} + \mathbf{m}^{(n)}$)

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{\Theta}^{(n)} = \rho_0^{(n)} \ddot{\mathbf{u}}^{\mathbf{e}(n)}, \quad \nabla_0 \cdot \mathbf{d}^{(n)} = 0; \quad n = 1,2 \tag{2.4}$$

Для вакуума справедливо

$$\Delta\varphi^{(0)} = 0 \tag{2.5}$$

Граничные условия на поверхности среды $x_3 = H$:
отсутствие напряжений

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Theta}^{(1)} = 0 \tag{2.6}$$

случай электрически свободной поверхности

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{d}^{(0)}, \quad \varphi^{(1)} = \varphi^{(0)} \tag{2.7}$$

случай короткозамкнутой (металлизированной и заземленной) поверхности

$$\varphi^{(1)} = 0 \tag{2.8}$$

На границе раздела сред $x_3 = 0$ предполагается выполнение условий

$$\mathbf{u}^{\mathbf{e}(1)} = \mathbf{u}^{\mathbf{e}(2)}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Theta}^{(1)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Theta}^{(2)}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{d}^{(2)} \tag{2.9}$$

На бесконечности

$$\mathbf{u}^{\mathbf{e}(2)}\Big|_{x_3 \to -\infty} \to 0, \quad \varphi^{(0)}\Big|_{x_3 \to \infty} \to 0 \tag{2.10}$$

Здесь ∇_0 – оператор Гамильтона, $\mathbf{u}^{\mathbf{e}(n)} = \{u_1^{(n)}, u_3^{(n)}, u_4^{(n)} = \varphi^{(n)}\}$ – расширенный вектор перемещений, $\varphi^{(n)}$ – электрический потенциал, $\mathbf{n}$ – вектор внешней нормали к поверхности структуры в системе координат, связанной с ЕС, $\rho_0^{(n)}$ – плотность материала n-й составляющей структуры в ЕС, Δ – оператор Лапласа. Компоненты линеаризованных тензора напряжений Пиолы $\mathbf{\Pi}^{(n)}$, электрического тензора Пиолы–Максвелла $\mathbf{m}^{(n)}$ и “материального” вектора индукции $\mathbf{d}^{(n)}$ представляются в виде [6–8] ($k, l, s, p = 1, 2, 3$, $n = 1, 2$):

$$\begin{gathered}\Theta_{lk}^{(n)} = \Pi_{lk}^{(n)} + m_{lk}^{(n)}, \quad \Pi_{lk}^{(n)} = c_{lksp}^{(n)*}u_{s,p}^{(n)} + e_{lkp}^{(n)*}\varphi_{,p}^{(n)} \\ m_{lk}^{(n)} = \zeta_{lksp}^{(n)*}u_{s,p}^{(n)} + \psi_{lkp}^{(n)*}\varphi_{,p}^{(n)}, \quad d_l^{(n)} = g_{lsp}^{(n)*}u_{s,p}^{(n)} - \eta_{lp}^{(n)*}\varphi_{,p}^{(n)}\end{gathered} \tag{2.11}$$

Далее для удобства используем представление тензора напряжений и вектора индукции в виде:

$$\Theta_{lk}^{(n)} = \theta_{lksp}^{(n)}u_{s,p}^{(n)} + \theta_{lk4p}^{(n)}\varphi_{,p}^{(n)}, \quad d_l^{(n)} = \theta_{l4sp}^{(n)}u_{s,p}^{(n)} + \theta_{l44p}^{(n)}\varphi_{,p}^{(n)}, \tag{2.12}$$

где

$$\begin{gathered}\theta_{lksp}^{(n)} = c_{lksp}^{(n)*} + M_{lksp}^{(n)}, \quad \theta_{lk4p}^{(n)} = e_{lkp}^{(n)*} + M_{lk4p}^{(n)} \\ \theta_{l4sp}^{(n)} = e_{lsp}^{(n)*} + M_{l4sp}^{(n)}, \quad \theta_{l44p}^{(n)} = -\eta_{lp}^{(n)*} \\ M_{lksp}^{(n)} = \zeta_{lksp}^{(n)*}, \quad M_{lk4p}^{(n)} = \psi_{lkp}^{(n)*}, \quad M_{l4sp}^{(n)} = \psi_{lsp}^{(n)*}; \quad k, l, s, p = 1, 2, 3\end{gathered} \tag{2.13}$$

Вид коэффициентов $c_{lksp}^{(1)*}$, $e_{lsp}^{(1)*}$, $\zeta_{lksp}^{(1)*}$, $\psi_{lkp}^{(1)*}$, $\eta_{lp}^{(1)*}$ и $g_{lsp}^{(1)*} = e_{lsp}^{(1)*} + \psi_{lsp}^{(1)*}$ для общего случая преднапряженного покрытия приведен в работах [7, 8]. Следует отметить, что коэффициенты $c_{lksp}^{(1)*}$, $e_{lsp}^{(1)*}$ и $\eta_{lp}^{(1)*}$ являются функциями x_3, компоненты $M_{lksp}^{(1)}$ не зависят от x_3 и определены направлением и величиной напряженности начального электростатического поля. В общем случае компоненты $\theta_{lksp}^{(1)}$ и $M_{lksp}^{(1)}$ зависят от характера и величины наведенных начальных деформаций. Для однородного материала подложки в ЕС выполняются соотношения

$$c_{lksp}^{(2)*} = c_{lksp}^{(2)}, \quad e_{lsp}^{(2)*} = g_{lsp}^{(2)*} = e_{lsp}^{(2)}, \quad \eta_{lp}^{(2)*} = \varepsilon_{lp}^{(2)} = \varepsilon_0\delta_{lp} + \beta_{lp}^{(2)}, \quad M_{lksp}^{(2)} = 0$$

С учетом зависимостей (2.1), (2.3) и представлений (2.11)–(2.13) краевая задача (2.4)–(2.10) о колебаниях электроупругой среды с предварительно напряженным неоднородным покрытием принимает вид [19–21, 23]:

для неоднородного покрытия $0 \le x_3 \le H$

$$\begin{gathered}\mathbf{L}_{11}^{(1)}[u_1^{(1)}] + \mathbf{L}_{12}^{(1)}[u_3^{(1)}] + \theta^{(1)}u_{3,13}^{(1)} + \mathbf{L}_{13}^{(1)}[u_4^{(1)}] + \psi^{(1)}u_{4,13}^{(1)} + \theta_{3113,3}^{(1)}u_{1,3}^{(1)} + \theta_{1313,3}^{(1)}u_{3,1}^{(1)} + \theta_{3141,3}^{(1)}u_{4,1}^{(1)} = 0 \\ \mathbf{L}_{12}^{(1)}[u_1^{(1)}] + \theta^{(1)}u_{1,13}^{(1)} + \mathbf{L}_{22}^{(1)}[u_3^{(1)}] + \mathbf{L}_{23}^{(1)}[u_4^{(1)}] + \theta_{1133,3}^{(1)}u_{1,1}^{(1)} + \theta_{3333,3}^{(1)}u_{3,3}^{(1)} + \theta_{3343,3}^{(1)}u_{4,3}^{(1)} = 0 \\ \mathbf{L}_{13}^{(1)}[u_1^{(1)}] + \psi^{(1)}u_{1,13}^{(1)} + \mathbf{L}_{23}^{(1)}[u_3^{(1)}] + \mathbf{L}_{33}^{(1)}[u_4^{(1)}] + \theta_{1143,3}^{(1)}u_{1,1}^{(1)} + \theta_{3343,3}^{(1)}u_{3,3}^{(1)} + \theta_{3443,3}^{(1)}u_{4,3}^{(1)} = 0\end{gathered} \tag{2.14}$$

для подложки $x_3 \le 0$

$$\begin{gathered}\mathbf{L}_1^{(2)}[u_1^{(2)}] + \theta^{(2)}u_{3,13}^{(2)} + \psi^{(2)}u_{4,13}^{(2)} = 0 \\ \theta^{(2)}u_{1,13}^{(2)} + \mathbf{L}_2^{(2)}[u_3^{(2)}] + \mathbf{L}_3^{(2)}[u_4^{(2)}] = 0 \\ \psi^{(2)}u_{1,13}^{(2)} + \mathbf{L}_3^{(2)}[u_3^{(2)}] + \mathbf{L}_4^{(2)}[u_4^{(2)}] = 0\end{gathered} \tag{2.15}$$

для вакуума $x_3 > H$

$$\sum_{k=1,3} u_{4,kk}^{(0)} = 0 \tag{2.16}$$

Граничные условия на поверхности $x_3 = H$

$$\begin{aligned}\Theta_{31}^{(1)} &= M_{3133}^{(1)}u_{3,3}^{(1)} + \theta_{3113}^{(1)}u_{1,3}^{(1)} + \theta_{1313}^{(1)}u_{3,1}^{(1)} + \theta_{3141}^{(1)}u_{4,1}^{(1)} + M_{3143}^{(1)}u_{4,3}^{(1)} = 0\\ \Theta_{33}^{(1)} &= \theta_{1133}^{(1)}u_{1,1}^{(1)} + \theta_{3333}^{(1)}u_{3,3}^{(1)} + M_{3313}^{(1)}u_{1,3}^{(1)} + M_{3341}^{(1)}u_{4,1}^{(1)} + \theta_{3343}^{(1)}u_{4,3}^{(1)} = 0\end{aligned} \tag{2.17}$$

случай электрически свободной поверхности

$$\begin{gathered}d_3^{(1)} = \theta_{1143}^{(1)}u_{1,1}^{(1)} + \theta_{3343}^{(1)}u_{3,3}^{(1)} + M_{3413}^{(1)}u_{1,3}^{(1)} + M_{3431}^{(1)}u_{3,1}^{(1)} + \theta_{3443}^{(1)}u_{4,3}^{(1)}\\ d_3^{(0)} = d_3^{(1)}, \quad u_4^{(0)} = u_4^{(1)}\end{gathered} \tag{2.18}$$

случай короткозамкнутой (металлизированной и заземленной) поверхности

$$u_4^{(1)} = 0 \tag{2.19}$$

Граничные условия на поверхности $x_3 = 0$

$$\Theta_{31}^{(1)} = \Theta_{31}^{(2)}, \quad \Theta_{33}^{(1)} = \Theta_{33}^{(2)}, \quad d_3^{(1)} = d_3^{(2)}, \quad u_1^{(1)} = u_1^{(2)}, \quad u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \quad u_4^{(1)} = u_4^{(2)} \tag{2.20}$$

Условие на бесконечности

$$u_1^{(2)}, u_3^{(2)}, u_4^{(2)}\Big|_{x_2 \to -\infty} \to 0, \quad u_4^{(0)}\Big|_{x_2 \to \infty} \to 0 \tag{2.21}$$

В уравнениях (2.13) и (2.14) использованы обозначения

$$\begin{gathered}\mathbf{L}_{11}^{(1)} = \theta_{1111}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \theta_{3113}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \rho^{(1)}\kappa_2^2, \quad \mathbf{L}_{12}^{(1)} = M_{1131}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + M_{3133}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\\ \mathbf{L}_{13}^{(1)} = M_{1141}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + M_{3143}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \mathbf{L}_{22}^{(1)} = \theta_{1331}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \theta_{3333}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \rho^{(1)}\kappa_2^2\\ \mathbf{L}_{23}^{(1)} = \theta_{1341}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \theta_{3343}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \mathbf{L}_{33}^{(1)} = \theta_{1441}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \theta_{3443}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\\ \mathbf{L}_1^{(2)} = \mathbf{L}_{11}^{(2)}, \quad \mathbf{L}_2^{(2)} = \mathbf{L}_{22}^{(2)}, \quad \mathbf{L}_3^{(2)} = \mathbf{L}_{23}^{(2)}, \quad \mathbf{L}_4^{(2)} = \mathbf{L}_{33}^{(2)}\\ \theta^{(n)} = \theta_{1133}^{(n)} + \theta_{1313}^{(n)}, \quad \psi^{(n)} = \theta_{1143}^{(n)} + \theta_{3141}^{(n)}\end{gathered} \tag{2.22}$$

Участвующие в представлениях (2.14)–(2.22) коэффициенты в рамках предположений (2.2) с учетом свойств материала имеют вид

$$\theta_{1111}^{(1)} = c_{11}^{(1)}v_1^2 + P_{11} - \varepsilon_0\frac{v_2v_3}{v_1}E_1^2, \quad \theta_{3333}^{(1)} = c_{33}^{(1)}v_3^2 + P_{33} - \varepsilon_0\frac{v_1v_2}{v_3}E_3^2$$

$$\theta_{1133}^{(1)} = \theta_{3311}^{(1)} = c_{13}^{(1)}v_1v_3 + \frac{1}{2}\varepsilon_0v_2M_{13}, \quad \theta_{1313}^{(1)} = \theta_{3131}^{(1)} = c_{44}^{(1)}v_1v_3 - \frac{1}{2}\varepsilon_0v_2M_{13}$$

$$\theta_{1331}^{(1)} = c_{44}^{(1)}v_3^2 + P_{11} - \varepsilon_0\frac{v_2v_3}{v_1}E_3^2, \quad \theta_{3113}^{(1)} = c_{44}^{(1)}v_1^2 + P_{33} - \varepsilon_0\frac{v_1v_2}{v_3}E_1^2$$

$$\theta_{1143}^{(1)} = \theta_{3411}^{(1)} = e_{31}^{(1)}v_1 + \varepsilon_0v_2E_3, \quad \theta_{3343}^{(1)} = e_{33}^{(1)}v_3 - \varepsilon_0E_3v_1v_2/v_3$$

$$\theta_{1341}^{(1)} = \theta_{1431}^{(1)} = e_{15}^{(1)}v_3 - \varepsilon_0E_3v_2v_3/v_1, \quad \theta_{3141}^{(1)} = \theta_{1413}^{(1)} = e_{15}^{(1)}v_1 - \varepsilon_0v_2E_3$$

$$M_{1131}^{(1)} = M_{1311}^{(1)} = -\varepsilon_0\frac{v_2v_3}{v_1}E_1E_3, \quad M_{1141}^{(1)} = M_{1411}^{(1)} = -\varepsilon_0\frac{v_2v_3}{v_1}E_1$$

$$M_{3313}^{(1)} = M_{3133}^{(1)} = -\varepsilon_0\frac{v_1v_2}{v_3}E_1E_3, \quad M_{3341}^{(1)} = M_{1433}^{(1)} = \varepsilon_0v_2E_1$$

$$M_{1343}^{(1)} = M_{3431}^{(1)} = -\varepsilon_0 v_2 E_1, \quad M_{3143}^{(1)} = M_{3413}^{(1)} = -\varepsilon_0 E_1 v_1 v_2 / v_3$$

$$M_{13} = E_1^2 + E_3^2 - E_2^2, \quad E_i = W_i / v_i$$

Здесь P_{ii} и W_i – компоненты тензора Кирхгофа, определяющие действие начальных механических напряжений, и компоненты вектора напряженности начального электростатического поля в системе координат, связанной с ЕС.

Далее рассматриваются две важные для изучения особенностей процесса распространения волн Релея задачи:

задача I – "открытый случай". Задача описывается системой уравнений движения (2.14)–(2.16), (2.22) с граничными условиями (2.17), (2.18), (2.20) и (2.21);

задача II – "короткозамкнутый случай". Поверхность среды металлизирована и заземлена. Задача описывается уравнениями движения (2.14), (2.15), (2.22) с граничными условиями (2.17), (2.19)–(2.21).

3. Решение задач. Решение задач I и II строится в пространстве образов Фурье (α – параметр преобразования по координате x_1):

$$U_p^{(1)}(\alpha, x_3) = \sum_{k=1}^{6} c_k^{(1)} y_{sk}^{(1)}(\alpha, x_3); \quad p = 1, 3, 4, \quad s = 4, 5, 6 \tag{3.1}$$

$$U_p^{(2)}(\alpha, x_3) = \sum_{k=1}^{3} f_{pk}^{(2)} c_k^{(2)} e^{\sigma_k^{(2)} x_3}, \quad U_4^{(0)}(\alpha, x_3) = c_1^{(0)} e^{-\alpha x_3} \tag{3.2}$$

Функции $y_{sk}^{(1)}(\alpha, x_3)$ в представлении (3.1) являются линейно независимыми решениями задачи Коши с начальными условиями $y_{sk}^{(1)}(\alpha, 0) = \delta_{sk}$ для уравнения

$$\mathbf{Y}^{(1)'} = \mathbf{R}^{(1)}(\alpha, x_3)\, \mathbf{Y}^{(1)} \tag{3.3}$$

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{\boldsymbol{\Sigma}}^1 \\ \mathbf{Y}_{\mathbf{u}}^1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_{\boldsymbol{\Sigma}}^1 = \{\Theta_{31}^{F(1)}, \Theta_{33}^{F(1)}, D_3^{F(1)}\}^T, \quad \mathbf{Y}_{\mathbf{u}}^1 = \{U_1^{(1)}, U_3^{(1)}, U_4^{(1)}\}^T \tag{3.4}$$

Здесь $\Theta_{31}^{F(n)}$, $\Theta_{33}^{F(n)}$, $D_3^{F(n)}$, $U_k^{(n)}$ – трансформанты Фурье компонент тензора напряжений, вектора индукции (2.12), (2.13) и расширенного вектора смещений; δ_{kp} – символ Кронекера. Элементы матрицы $\mathbf{R}^{(1)}(\alpha, x_3) = \|R_{ij}\|_{i,j=1}^{6}$ имеют вид:

$$R_{11} = i\alpha g_{12}/g_0, \quad R_{12} = -i\alpha g_{11}/g_0, \quad R_{13} = i\alpha g_{13}/g_0$$

$$R_{14} = -\alpha^2((\theta_{1133}^{(1)})^2 r_0 + (\theta_{1143}^{(1)})^2 r_5 - 2\theta_{1133}^{(1)}\theta_{1143}^{(1)} r_1)/g_0 + P_1$$

$$R_{15} = \alpha^2(M_{3341}^{(1)} g_{13} - \theta_{3131}^{(1)} g_{12} + M_{1131}^{(1)} g_0)/g_0$$

$$R_{16} = \alpha^2(M_{3341}^{(1)} g_{11} - \theta_{3141}^{(1)} g_{12} + M_{1141}^{(1)} g_0)/g_0$$

$$R_{21} = -i\alpha g_{22}/g_0, \quad R_{22} = i\alpha g_{21}/g_0, \quad R_{23} = -i\alpha g_{23}/g_0, \quad R_{24} = R_{15}$$

$$R_{25} = -\alpha^2((M_{3341}^{(1)})^2 r_5 + (\theta_{3131}^{(1)})^2 r_3 - 2M_{3341}^{(1)}\theta_{3131}^{(1)} r_4)/g_0 + P_2$$

$$R_{26} = -\alpha^2(M_{3341}^{(1)} g_{21} - \theta_{3141}^{(1)} g_{23} - \theta_{1431}^{(1)} g_0)/g_0$$

$$R_{31} = -i\alpha g_{32}/g_0, \quad R_{32} = i\alpha g_{31}/g_0, \quad R_{33} = -i\alpha g_{33}/g_0$$

$$R_{34} = R_{16}, \quad R_{35} = R_{26}$$

$$R_{36} = -\alpha^2((M_{3341}^{(1)})^2 r_0 + (\theta_{3141}^{(1)})^2 r_3 - 2M_{3341}^{(1)}\theta_{3141}^{(1)} r_2 - \theta_{1441}^{(1)} g_0)/g_0$$

$$R_{41} = r_3/g_0,\quad R_{42} = -r_2/g_0,\quad R_{43} = r_4/g_0,\quad R_{44} = R_{11},\quad R_{45} = R_{21},\quad R_{46} = R_{31} \tag{3.5}$$

$$R_{51} = R_{42},\quad R_{52} = r_0/g_0,\quad R_{53} = -r_1/g_0,\quad R_{54} = R_{12},\quad R_{55} = R_{22},\quad R_{56} = R_{32}$$

$$R_{61} = R_{43},\quad R_{62} = R_{53},\quad R_{63} = r_5/g_0,\quad R_{64} = R_{13},\quad R_{65} = R_{23},\quad R_{66} = R_{33}$$

$$g_0 = \theta^{(1)}_{3333}r_0 - M^{(1)}_{3313}r_2 - \theta^{(1)}_{3343}r_1,\quad r_0 = (M^{(1)}_{3143})^2 - \theta^{(1)}_{3113}\theta^{(1)}_{3443}$$

$$r_1 = M^{(1)}_{3313}M^{(1)}_{3143} - \theta^{(1)}_{3113}\theta^{(1)}_{3343},\quad r_2 = \theta^{(1)}_{3343}M^{(1)}_{3143} - M^{(1)}_{3313}\theta^{(1)}_{3443}$$

$$r_3 = (\theta^{(1)}_{3343})^2 - \theta^{(1)}_{3333}\theta^{(1)}_{3443},\quad r_4 = \theta^{(1)}_{3333}M^{(1)}_{3143} - M^{(1)}_{3313}\theta^{(1)}_{3343}$$

$$r_5 = (M^{(1)}_{3313})^2 - \theta^{(1)}_{3113}\theta^{(1)}_{3333},\quad g_{11} = (\theta^{(1)}_{1143}r_1 - \theta^{(1)}_{1133}r_0),\quad g_{12} = (\theta^{(1)}_{1143}r_4 - \theta^{(1)}_{1133}r_2)$$

$$g_{13} = (\theta^{(1)}_{1143}r_5 - \theta^{(1)}_{1133}r_1),\quad g_{21} = (M^{(1)}_{3341}r_1 - \theta^{(1)}_{3131}r_2),\quad g_{22} = (M^{(1)}_{3341}r_4 - \theta^{(1)}_{3131}r_3)$$

$$g_{23} = (M^{(1)}_{3341}r_5 - \theta^{(1)}_{3131}r_4),\quad g_{31} = (M^{(1)}_{3341}r_0 - \theta^{(1)}_{3141}r_2),\quad g_{32} = (M^{(1)}_{3341}r_2 - \theta^{(1)}_{3141}r_3)$$

$$g_{33} = (M^{(1)}_{3341}r_1 - \theta^{(1)}_{3141}r_4),\quad P_1 = \alpha^2\theta^{(1)}_{1111} - \rho^{(1)}\kappa_2^2,\quad P_2 = \alpha^2\theta^{(1)}_{1331} - \rho^{(1)}\kappa_2^2$$

Уравнение (3.3) с обозначениями (3.4), (3.5) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с переменными коэффициентами, линейно независимые решения которой строятся на основе численного решения набора задач Коши с начальными условиями при фиксированных значениях параметра α. Для решения систем ОДУ могут быть использованы различные численные методы. Участвующие в представлении (3.2) величины $\sigma_k^{(2)}$ удовлетворяют уравнению

$$\det \mathbf{R}_\sigma^{(2)}(\sigma) = 0$$

$$\mathbf{R}_\sigma^{(2)}(s) = \begin{pmatrix} c_{44}^{(2)}s^2 - P_1 & -i\alpha\theta^{(2)}s & -i\alpha\psi^{(2)}s \\ -i\alpha\theta^{(2)}s & c_{33}^{(2)}s^2 - P_2 & e_{33}^{(2)}s^2 - e_{15}^{(2)}\alpha^2 \\ -i\alpha\psi^{(2)}s & e_{33}^{(2)}s^2 - e_{15}^{(2)}\alpha^2 & -\varepsilon_{33}^{(2)}s^2 + \varepsilon_{11}^{(2)}\alpha^2 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Коэффициенты $f_{pk}^{(2)}$ определяются из однородной системы линейных уравнений (3.6) с матрицей $\mathbf{R}_\sigma^{(2)}(\sigma_k^{(2)})$. При подстановке представлений (3.1) и (3.2) в граничные условия для вычисления неизвестных коэффициентов $c_k^{(n)}$ получается однородная система линейных алгебраических уравнений с матрицей [15–17, 22]

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{(1)}(H) & \mathbf{G}^{(1)} \\ \mathbf{A}^{(1)}(0) & \mathbf{B}^{(2)}(0) \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Размеры матрицы $\mathbf{A}$ (3.7) и матриц ее составляющих определяются типом задачи и граничными условиями. Матрица $\mathbf{A}^{(1)}(0)$ в силу принятых начальных условий задачи Коши, как для задачи I, так и для задачи II является единичной $\mathbf{A}^{(1)}(0) = \mathbf{E}$. Для задачи I матрица $\mathbf{A}$ имеет размерность 10×10, ее составляющие в соответствии с граничными условиями (2.17), (2.18), (2.20) и (2.21) представляются в виде

$$\mathbf{B}^{(1)}(H) = \left\|B_{ij}^{(1)}\right\|_{i=1,\,j=1}^{4,6},\quad \mathbf{B}^{(2)}(0) = \left\|B_{ij}^{(2)}\right\|_{i=1,\,j=1}^{6,4},\quad \mathbf{G}^{(1)} = \left\|G_{ij}\right\|_{i,\,j=1}^{4}, \tag{3.8}$$

где

$$B_{ij}^{(1)} = \gamma_i y_{ij}^{(1)},\quad \gamma_1 = \gamma_2 = 1,\quad \gamma_3 = \gamma_4 = e^{\alpha H};\quad i = 1,..4,\quad j = 1,..,6$$

$$G_{34}=-\varepsilon_0\alpha,\quad G_{44}=-1,\quad G_{ij}=0;\quad i=1,2,3,\quad j=1,2,\quad B_{j4}^{(2)}=0;\quad j=1,..,6$$

$$B_{1k}^{(2)}=c_{44}^{(2)}\sigma_k^{(2)}f_{1k}^{(2)}-i\alpha c_{44}^{(2)}f_{3k}^{(2)}-i\alpha e_{15}^{(2)}f_{4k}^{(2)}$$

$$B_{2k}^{(2)}=-i\alpha c_{13}^{(2)}f_{1k}^{(2)}+c_{33}^{(2)}\sigma_k^{(2)}f_{3k}^{(2)}+e_{33}^{(2)}\sigma_k^{(2)}f_{4k}^{(2)}$$

$$B_{3k}^{(2)}=-i\alpha e_{31}^{(2)}f_{1k}^{(2)}+e_{33}^{(2)}\sigma_k^{(2)}f_{3k}^{(2)}-\varepsilon_{33}^{(2)}\sigma_k^{(2)}f_{4k}^{(2)}$$

$$B_{ik}^{(2)}=-f_{pk}^{(2)};\quad i=4,5,6,\quad p=1,3,4,\quad k=1,2,3$$

Для задачи II матрица $\mathbf{A}$ имеет размерность 9×9, $\mathbf{G}^{(1)}$ – нулевая матрица размерности 3×3, матрицы $\mathbf{B}^{(1)}(H)$ и $\mathbf{B}^{(2)}(0)$ получаются путем вычеркивания 3-й строки и 4-го нулевого столбца в представлениях (3.8) соответствующих матриц задачи I, в матрице $\mathbf{B}^{(1)}(H)$ коэффициент $\gamma_i=1$.

Применяя к выражениям (3.1) и (3.2) обратное преобразование Фурье получаем решение краевой задачи (2.4)–(2.10). В более общем случае при рассмотрении динамических задач о гармонических колебаниях пьезоэлектрической структуры с функционально градиентным преднапряженным покрытием, вызванных действием заданной на интервале $[-a; a]$ поверхностной нагрузки $\mathbf{q}(x_1)$, решение задачи имеет вид [29]:

$$\mathbf{u}^{(n)}(x_1,x_3)=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\mathbf{k}^{(n)}(x_1-\xi,x_3)\,\mathbf{q}(\xi)\,d\xi \tag{3.9}$$

с символом ядра

$$\mathbf{k}^{(n)}(s,x_3)=\int_{\Gamma}\mathbf{K}^{(n)}(\alpha,x_3)\,e^{-i\alpha s}d\alpha,\quad \mathbf{K}^{(n)}(\alpha,x_3)=\left\|K_{lj}^{(n)}\right\|_{l,j=1,3,4} \tag{3.10}$$

Контур Γ в представлении (3.10) проходит в области аналитичности подынтегральной функции и выбирается в соответствии с правилами, указанными в работе [29]. Компоненты матрицы-функции $\mathbf{K}^{(n)}(\alpha,x_3)$ в выражении (3.10) имеют вид ($l,j=1,3,4$, $s=4,5,6$):

$$K_{lj}^{(1)}=\frac{1}{\Delta_0}\sum_{k=1}^{6}\Delta_{jk}y_{sk}^{(n)}(\alpha,x_3),\quad K_{lj}^{(2)}=\frac{1}{\Delta_0}\sum_{k=1}^{3}f_{lk}^{(2)}\Delta_{j,k+6}e^{\sigma_k^{(2)}x_3}, \tag{3.11}$$

Δ_0, Δ_{ns} – определитель и алгебраическое дополнение элемента ns матрицы $\mathbf{A}$ (3.6). Выражения (3.10) и (3.11) являются определяющими элементами в интегральном представлении перемещения произвольной точки среды (3.9). Основные характеристики волнового процесса определяются дисперсионным уравнением

$$\det\mathbf{A}=0 \tag{3.12}$$

Решение уравнения (3.12) позволяет исследовать влияние свойств покрытия, градиентности неоднородности и ее локализации, вида начального напряженного состояния и величины начальных напряжений, внешнего электростатического поля на параметры распространения релеевских волн в широком диапазоне изменения параметров. Центральным моментом в процессе исследования является численное построение определителя матрицы $\mathbf{A}$ на основе решения уравнения (3.3), которое представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с переменными коэффициентами. Ее линейно независимые решения строятся на основе численного решения набора задач Коши с начальными условиями при фиксированных значениях параметра α. Для решения систем ОДУ традиционно привлекаются различные численные методы [21–23]. Одним из наиболее распространенных является классический метод Рунге–Кутты четвёртого порядка. Однако при исследовании

ПАВ целесообразно применять методы более высокого порядка повышенной точности. Высокую эффективность продемонстрировал метод Рунге–Кутты пятого порядка в модификации Мерсона (в литературе используют название Рунге–Кутты–Мерсона или Кутты–Мерсона), который позволяет сочетать хорошую точность и высокую скорость вычислений. Преимуществом метода является автоматическое изменение шага в ходе решения систем дифференциальных уравнений, что обеспечивает уменьшение общего числа шагов в несколько раз и уменьшает вероятность неустойчивости численного алгоритма.

Заключение. Развит метод исследования особенностей распространения волн Релея на поверхности сегнетоэлектрической гетероструктуры, представляющей собой однородную пьезоэлектрическую подложку с неоднородным предварительно напряженным покрытием из ФГПМ, свойства которого изменяются по заданному закону. В основе метода лежит сведение краевой задачи для системы уравнений в частных производных с переменными коэффициентами к системе начальных задач Коши, решение которой строится численно с помощью метода Рунге–Кутты пятого порядка в модификации Мерсона. Метод позволяет изучать влияние свойств покрытия, градиентности и локализации неоднородности, вида начального напряженного состояния и величины начальных напряжений, внешнего электростатического поля на основные характеристики релеевского волнового поля в широком диапазоне изменения параметров.

Работа выполнена в рамках реализации госзадания Южного научного центра РАН, номер госрегистрации 01201354242 при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 19-08-01051, 19-01-00719.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mason W.P.* Physical Acoustics and the Properties of Solids. Princeton (N.J.): Van Nostrand, 1958. 402 p.
2. *Dieulesaint E., Royer D.* On des Elastiques Dans Les Solides. Application au traitement du signal. Paris: Ed. Masson, 1974. 407 p.
3. *Matthews H.* (ed.) Surface Wave Filters. Design, Construction and Use. New York: John Wiley & Sons, 1977. 521 p.
4. *Biryukov S.V., Gulyaev Y.V., Krylov V.V. et al.* Surface Acoustic Waves in Inhomogeneous Media. New York: Springer, 1995. 287 p.
5. *Александров К.С., Сорокин Б.П., Бурков С.И.* Эффективные пьезоэлектрические кристаллы для акустоэлектроники, пьезотехники и сенсоров. Т. 2. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. 429 с.
6. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих тел. М.: Физматлит, 2006. 272 с.
7. *Евдокимова О.В., Белянкова Т.И., Калинчук В.В.* Уравнения динамики преднапряженной пьезоактивной среды при наличии внешнего электростатического поля // Вестн. Южного науч. центра РАН. 2007. Т.3. № 4. С. 19–25.
8. *Белянкова Т.И., Калинчук В.В., Шейдаков Д.Н.* Уравнения динамики преднапряженной электротермоупругой среды // Вестн. Южного науч. центра РАН. 2011. Т. 7. № 2. С. 5–14.
9. *Бурков С.И., Золотова О.П., Сорокин Б.П. и др.* Влияние внешнего электрического поля на характеристики волны Лэмба в пьезоэлектрической пластине // Акустич. ж. 2010. Т. 56. № 5. С. 606–612.
10. *Burkov S.I., Zolotova O.P., Sorokin B.P.* Influence of bias electric field on elastic waves propagation in piezoelectric layered structures // Ultrasonics. 2013. V. 53. № 6. P. 1059–1064.
11. *Liu H., Wang Z.K., Wang T.J.* Effect of initial stress on the propagation behavior of Love waves in a layered piezoelectric structure // Int. J. Eng.Sci. 2001. V. 38. P. 37–51.
12. *Jin F., Wang Z., Wang T.* The Bleustein–Gulyaev (B–G) wave in a piezoelectric layered half-space // Int. J. Eng. Sci. 2001. V. 39. P. 1271–1285.

13. *Liu H., Kuang Z.B., Cai Z.M.* Propagation of Bleustein–Gulyaev waves in a prestressed layered piezoelectric structure // Ultrasonics. 2003. V. 41. P. 397–405
14. *Qian Z., Jin F., Wang Z. et al.* Love waves propagation in a piezoelectric layered structure with initial stresses // Acta Mech. 2004. V. 171. P. 41–57.
15. *Collet B., Destrade M., Maugin G.A.* Bleustein–Gulyaev waves in some functionally graded materials // Europ. J. Mech. A/Solids. 2006. V. 25. P. 695–706.
16. *Cao X., Jin F., Wang Z. et al.* Bleustein–Gulyaev waves in a functionally graded piezoelectric material layered structure // Sci. China Ser. G-Phys. Mech. Astron. 2009. V. 52. P. 613–625.
17. *Qian Z., Jin F., Wang Z. et al.* Transverse surface waves on a piezoelectric material carrying a functionally graded layer of finite thickness // Int. J. Engng. Sci. 2007. V. 45. P. 455–466.
18. *Qian Z.-H., Jin F., Lu T. et al.* Effect of initial stress on Love waves in a piezoelectric structure carrying a functionally graded material layer // Ultrasonics. 2010. V. 50. P. 84–90.
19. *Belyankova T.I., Kalinchuk V.V.* Propagation of SH-waves in piezoelectric structures with functionally graded coating from different materials // IOP J. Phys. Conf. Ser. 2019. V. 1260. P. 112005.
20. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 312 с.
21. *Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Tukodova O.M.* Peculiarities of the surface SH – waves propagation in the weakly inhomogeneous pre-stressed piezoelectric structures // Springer Proc. in Phys. 2016. V. 175. P. 413–429.
22. *Belyankova T.I., Kalinchuk V.V.* Surface sh-waves in pre-stressed piezoelectrics with functionally graded coating // PNRPU Mech. Bull. 2016. V. 3. P. 7–27.
23. *Belyankova T.I., Kalinchuk V.V.* Shear horizontal waves in piezoelectric structures with a functionally graded coating // Mech. Adv. Mater.&Struct. 2019. https://doi.org/10.1080/15376494.2019.1578006
24. *Ben Salah I., Njeh A., Ben Ghozlen M.H.* A theoretical study of the propagation of Rayleigh waves in a functionally graded piezoelectric material (FGPM) // Ultrasonics. 2012. V. 52. № 2. P. 306–314
25. *Капцов А.В., Кузнецов С.В.* Волны Лява в трехслойном упругом полупространстве // ПММ. 2015. Т. 79. В. 7. С. 550–557.
26. *Желнорович В.А.* Поверхностные волны Релея и Блюстейна–Гуляева в упругих пьезоэлектриках при наличии релаксации диэлектрической поляризации // ПММ. 2015. Т. 79. В. 2. С. 273–285.
27. *Гольдштейн Р.В., Кузнецов С.В.* Поверхностные акустические волны в диагностике слоистых сред. Чувствительность волн к вариации свойств отдельных слоев // ПММ. Т. 77. В. 4. 2013. С. 74–82.
28. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Кривонос А.С.* Возбуждение и распространение упругих волн в многослойных анизотропных композитах // ПММ. Т. 74. В. 5. 2010. С. 419–432.
29. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.

On the Dynamics of an Inhomogeneous Prestressed Electroelastic Medium under Exposure to an External Electric Field

T. I. Belyankova[a,#] and V. V. Kalinchuk[a,##]

[a] *Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia*

[#]*e-mail: tbelen415@mail.ru*

[##]*e-mail: vkalin415@mail.ru*

A method for studying Rayleigh waves on the surface of an inhomogeneous prestressed electroelastic medium under the influence of external electrostatic fields is being developed. The medium is a homogeneous half-space with an inhomogeneous coating made of a functionally graded material. The half-space and the coating in the natural state (EC) are piezoelectrics of the 6 mm class, the axes of symmetry of which coincide and are oriented along the normal to the surface of the medium. The initial deformed state (IDS) of the coating is caused by the action of initial mechanical forces and an external electric field. Using the methods of operational calculus, the boundary value problem of oscillations of a medium is reduced to a system of ordinary differential equations with variable coefficients, which, in turn, is reduced to a system of Cauchy problems with initial conditions. The use of numerical methods makes it possible to construct an integral representation that describes the motion of an arbitrary point in the medium, as well as a dispersion equation, the solution of which determines the characteristics of surface acoustic waves (SAW). The method allows one to investigate the influence of coating properties, gradient and localization of inhomogeneity, the type of the initial stress state and the magnitude of the initial stresses, external electrostatic field on the characteristics of the propagation of Rayleigh waves in a wide range of parameters.

Keywords: piezoelectric structure, substrate, coating, initial stresses, external electrostatic field, functionally graded piezoelectric material (FGPM), Rayleigh waves

REFERENCES

1. *Mason W.P.* Physical Acoustics and the Properties of Solids. Princeton (N.J.): Van Nostrand, 1958. 402 p.
2. *Dieulesaint E., Royer D.* On des Elastiques Dans Les Solides. Application au traitement du signal. Paris: Ed. Masson, 1974. 407 p.
3. *Matthews H.* (ed.) Surface Wave Filters. Design, Construction and Use. N.Y.: John Wiley & Sons, 1977. 521 p.
4. *Biryukov S.V., Gulyaev Y.V., Krylov V.V. et. al.* Surface Acoustic Waves in Inhomogeneous Media. N.Y.: Springer, 1995. 287 p.
5. *Aleksandrov K.S., Sorokin B.P., Burkov S.I.* Effective Piezoelectric Crystals for Acoustoelectronics, Piezoelectric Technology and Sensors. Vol. 2. Novosibirsk: SB RAN, 2008. 429 p. (in Russian)
6. *Kalinchuk V.V., Belyankova T.I.* Dynamic Contact Problems for Prestressed Electroelastic Bodies. Moscow: Fizmatlit, 2006. 272 P. (in Russian)
7. *Evdokimova O.V., Belyankova T.I., Kalinchuk V.V.* Dynamics equations for a prestressed piezoactive medium in the presence of an external electrostatic field // Bull. South. Sci. Center RAS, 2007, vol. 3, no. 4, pp. 19–25. (in Russian)
8. *Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Sheydakov D.N.* Equations of dynamics of a prestressed electrothermoelastic medium // Bull. South. Sci. Center RAS, 2011, vol. 7, no. 2, pp. 5–14. (in Russian)
9. *Burkov S.I., Zolotova O.P., Sorokin B.P. et.al.* Effect of an external electric field on the characteristics of a Lamb wave in a piezoelectric plate // Akusticheskij zh., 2010, vol. 56, no. 5, pp. 606–612. (in Russian)
10. *Burkov S.I., Zolotova O.P., Sorokin B.P.* Influence of bias electric field on elastic waves propagation in piezoelectric layered structures // Ultrasonics, 2013, vol. 53, no. 6, pp. 1059–1064.
11. *Liu H., Wang Z.K., Wang T.J.* Effect of initial stress on the propagation behavior of Love waves in a layered piezoelectric structure // Int. J. Eng. Sci., 2001, vol. 38, pp. 37–51.
12. *Jin F., Wang Z., Wang T.* The Bleustein–Gulyaev (B–G) wave in a piezoelectric layered half-space // Int. J. Eng. Sci., 2001, vol. 39, pp. 1271–1285.
13. *Liu H., Kuang Z.B., Cai Z.M.* Propagation of Bleustein–Gulyaev waves in a prestressed layered piezoelectric structure // Ultrasonics, 2003, vol. 41, pp. 397–405
14. *Qian Z., Jin F., Wang Z. et al.* Love waves propagation in a piezoelectric layered structure with initial stresses // Acta Mech., 2004, vol. 171, pp. 41–57.
15. *Collet B., Destrade M., Maugin G.A.* Bleustein–Gulyaev waves in some functionally graded materials // Europ. J. Mech. A/Solids, 2006, vol. 25, pp. 695–706.
16. *Cao X., Jin F., Wang Z. et al.* Bleustein–Gulyaev waves in a functionally graded piezoelectric material layered structure // Sci. China Ser. G-Phys. Mech. Astron., 2009, vol. 52, pp. 613–625.
17. *Qian Z., Jin F., Wang Z. et. al.* Transverse surface waves on a piezoelectric material carrying a functionally graded layer of finite thickness // Int. J. Engng. Sci., 2007, vol. 45, pp. 455–466.
18. *Qian Z.-H., Jin F., Lu T. et.al.* Effect of initial stress on Love waves in a piezoelectric structure carrying a functionally graded material layer // Ultrasonics, 2010, vol. 50, pp. 84–90.
19. *Belyankova T.I., Kalinchuk V.V.* Propagation of SH-waves in piezoelectric structures with functionally graded coating from different materials // IOP J. Phys. Conf. Ser., 2019, vol. 1260, pp. 112005.

20. *Kalinchuk V.V., Belyankova T.I.* Surface Dynamics of Inhomogeneous Media. Moscow: Fizmatlit, 2009. 312 p. (in Russian)
21. *Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Tukodova O.M.* Peculiarities of the surface SH – waves propagation in the weakly inhomogeneous pre-stressed piezoelectric structures // Springer Proc. in Phys., 2016, vol. 175, pp. 413–429.
22. *Belyankova T.I., Kalinchuk V.V.* Surface sh-waves in pre-stressed piezoelectrics with functionally graded coating // PNRPU Mech. Bull., 2016, vol. 3, pp. 7–27.
23. *Belyankova T.I., Kalinchuk V.V.* Shear horizontal waves in piezoelectric structures with a functionally graded coating // Mech. Adv. Mater.&Struct., 2019. doi:10.1080/15376494.2019.1578006.
24. *Ben Salah I., Njeh A., Ben Ghozlen M.H.* A theoretical study of the propagation of Rayleigh waves in a functionally graded piezoelectric material (FGPM) // Ultrasonics, 2012, vol. 52, no. 2, pp. 306–314.
25. *Kaptsov A.V., Kuznetsov S.V.* Love waves in a three-layer elastic half-space // JAMM, 2015, vol. 79, no. 4, pp. 388–393.
26. *Zhelnorovich V.A.* Rayleigh and Bleustein–Gulyayev surface waves in elastic piezoelectric materials with relaxation of dielectric polarization // JAMM, 2015, vol. 79, no. 2, pp. 186–194.
27. *Goldstein R.V., Kuznetsov S.V.* Surface acoustic waves in the testing of layered media. The waves' sensitivity to variations in the properties of the individual layers // JAMM, 2013, vol. 77, no. 1, pp. 51–56.
28. *Glushkov Ye.V., Glushkova N.V., Krivonos A.S.* The excitation and propagation of elastic waves in multilayered anisotropic composites // JAMM, 2010, vol. 74, no. 3, pp. 297–305.
29. *Vorovich I.I., Babeshko V.A.* Dynamic Mixed Problems of Elasticity Theory for Non-Classical Domains. Moscow: Nauka, 1979. 320 p. (in Russian)

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 3, с. 321–331

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ ШТАМПА НА ПОВЕРХНОСТИ ГЕТЕРОГЕННОГО СЛОЯ ПРИ УЧЕТЕ ТРЕНИЯ В ОБЛАСТИ КОНТАКТА

О. А. Беляк[1,*], Т. В. Суворова[1,]**

[1] *Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростов-на-Дону, Россия*
**e-mail: o_bels@mail.ru*
***e-mail: suvorova_tv111@mail.ru*

Поступила в редакцию 30.01.2021 г.
После доработки 25.02.2021 г.
Принята к публикации 15.03.2021 г.

Рассматривается контактная задача о колебаниях штампа с плоским основанием на поверхности гетерогенного слоя при учете сил трения в области контакта. Микроструктура пористоупругого насыщенного флюидом слоя описывается уравнениями Био-Френкеля, в области контакта выполняется закон трения Кулона–Амонтона. Краевая задача сведена к разностному интегральному уравнению 1-го рода относительно контактных давлений. Построено приближенное решение интегрального уравнения с использованием метода граничных элементов. Исследовано влияние частоты вибрации, толщины слоя на контактные напряжения на примере маслосодержащего композита на основе фенилона, механические модули которого определены с помощью методов микромеханики и наноиндентирования.

Ключевые слова: динамическая контактная задача, трение в области контакта, гетерогенный слой

DOI: 10.31857/S0032823521030048

1. Введение. Контактным задачам теории упругости посвящены многочисленные исследования, отметим здесь монографии и статьи школы академика Бабешко В.А., где рассмотрены динамические контактные задачи для упругих слоистых оснований [1–4], для насыщенных пористоупругих сред такие задачи представлены в работах [5–9]. Особым интересом и актуальностью пользуются приложения контактных задач к трибологии. Решения широкого круга контактных задач в статической и квазистатической постановках для однородных упругих и вязкоупругих сред рассмотрены работах [10–12], для пористоупругих насыщенных сред, описываемых моделью Био-Френкеля рассмотрены в работах [13–15], в том числе в динамической постановке [7–9].

В настоящей работе рассматривается динамическая контактная задача для гетерогенного двухфазного слоя при учете трения в области контакта. Для описания микроструктуры основания, состоящего из изотропной вязкоупругой матрицы и вязкого флюида, использованы уравнения гетерогенной среды Био [16–18]. Практическое значение рассматриваемой задачи при конструировании новых наномодифицированных композиционных материалов [19–21] состоит в изучении влияния динамических эффектов, возникающих за счет вибрации, на трибологический процесс. С этой целью численные расчеты представлены для маслонаполненного композита с матрицей на основе фенилона и наноразмерных добавок, экспериментально определены модуль Юнга, в том числе, с помощью наноиндентирования, коэффициент Пуассона [21]. Изменение механических модулей многофазной среды при росте пористости получе-

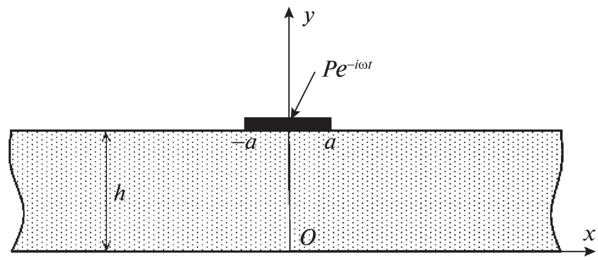

Рис. 1. Схема динамической контактной задачи.

но с помощью дифференциальной схемы метода самосогласования и конечно-элементных моделей со стохастически распределенными сферическими порами [22].

2. Постановка задачи. Рассматривается контактная задача о вибрации с частотой ω жесткого штампа с плоским основанием шириной $2a$ под действием приложенной к нему силы $\mathbf{P} = \{P_1e^{-i\omega t}, P_2e^{-i\omega t}\}$ изменяющейся по гармоническому закону, на верхней границе слоя $-\infty < x < \infty$, $0 \le y \le h$, занятого гетерогенной средой, состоящей из двух фаз: вязкоупругой пористой матрицы-скелета и вязкого флюида (рис. 1).

Будем полагать, что амплитуда приложенной силы такова, что в процессе колебаний не происходит нарушение контакта или возникновение зон скольжения. В области контакта нормальные и касательные напряжения связаны законом Амонтона–Кулона, а внутренняя микроструктура основания описывается уравнениями Био-Френкеля [16–18]. Считаем, что штамп и границы слоя непроницаемы для жидкой фазы, а режим колебаний является установившимся. После отделения временного множителя уравнения Био-Френкеля имеют вид:

$$\begin{gathered}
N\Delta\mathbf{u} + \nabla\left((A+N)\nabla\cdot\mathbf{u} + Q\nabla\cdot\mathbf{v}\right) + \omega^2(\rho_{11}\mathbf{u} + \rho_{12}\mathbf{v}) + i\omega b\left(\mathbf{u}-\mathbf{v}\right) = 0 \\
\nabla\left(Q\nabla\cdot\mathbf{u} + R\nabla\cdot\mathbf{v}\right) + \omega^2(\rho_{12}\mathbf{u} + \rho_{22}\mathbf{v}) - i\omega b\left(\mathbf{u}-\mathbf{v}\right) = 0 \\
\sigma_{ij}^s = Ae\delta_{ij} + 2Ne_{ij} + Q\varepsilon\delta_{ij} \\
\sigma^f = Qe + R\varepsilon; \quad i,j = 1,2 \\
e_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad \varepsilon_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2 \\
e = \nabla\cdot\mathbf{u}, \quad \varepsilon = \nabla\cdot\mathbf{v}, \quad \Gamma_{ij} = \sigma_{ij}^s + \delta_{ij}\sigma^f,
\end{gathered} \tag{2.1}$$

где A, N, Q, R, ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{22} – механические характеристики двухфазной среды, $\mathbf{e}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензоры деформации, соответствующие амплитудным значениям векторов перемещений твердой фазы $\mathbf{u}\{u_1, u_2\}$ и жидкой фазы $\mathbf{v}\{v_1, v_2\}$, $\boldsymbol{\sigma}^s$ – тензор напряжений, действующий на вязкоупругий скелет, σ^f – давления, действующие на флюид в порах, $b = m^2\eta k_o^{-1}$, где η, k_o – динамическая вязкость флюида и проницаемость среды соответственно, m – пористость среды.

Граничные условия в случае слоя, лежащего без трения на жестком основании, имеют вид:

$$\begin{gathered}
\Gamma_{21}(x,h) = \mu\Gamma_{22}(x,h); \quad |x| \le a \\
\Gamma_{22}(x,h) = q(x), \quad u_2(x,h) = v_2(x,h) = \delta; \quad |x| \le a \\
\Gamma_{22}(x,h) = 0, \quad u_2(x,h) = v_2(x,h); \quad |x| > a \\
u_2(x,0) = v_2(x,0) = 0, \quad \Gamma_{21}(x,0) = 0,
\end{gathered} \tag{2.2}$$

где δ – амплитуда перемещения штампа в вертикальном направлении, μ – коэффициент трения, $q(x)$ – неизвестные контактные давления.

Перейдем в соотношениях (2.1)–(2.2) к безразмерному виду:

$$q_{11} = (A + 2N)/N, \quad q_{12} = Q/N, \quad q_{22} = R/N$$
$$\gamma_{11} = (\rho_{11} + ib/\omega)/\rho_{11}, \quad \gamma_{12} = (\rho_{12} - ib/\omega)/\rho_{11}$$
$$\gamma_{22} = (\rho_{22} + ib/\omega)/\rho_{11}, \quad \vartheta^2 = \rho\omega^2 a^2/N, \quad \delta_0 = \delta/a,$$

линейные величины отнесены к полуширине штампа. Замыкают постановку краевой задачи (2.1)–(2.2) условие излучения волн на бесконечность, устанавливаемые аналогично случаю упругой среды [2]. Далее, будем разыскивать контактные давления $q(x)$ и горизонтальные смещения $u_1(x,0)$ под штампом.

3. Сведение краевой задачи к интегральному уравнению. Применим к уравнениям (2.1)–(2.2) интегральное преобразование Фурье [23] по переменной x. Представим перемещения в виде двух скалярных и векторного потенциалов [8]. В результате уравнения (2.1) расщепляются на три волновые уравнения, а потенциалы соответствуют трем типам волн: медленной и быстрой продольной, и поперечной волны, распространяющимся в гетерогенной среде со скоростями V_i, $i = 1,2,3$. В результате получим связь перемещений и напряжений для слоя:

$$\mathbf{u}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Upsilon} \mathbf{G}(\alpha,y)\,\mathbf{Q}(\alpha)\,e^{-i\alpha x}d\alpha$$
$$\mathbf{v}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Upsilon} \mathbf{G}_v(\alpha,y)\,\mathbf{Q}(\alpha)\,e^{-i\alpha x}d\alpha \tag{3.1}$$
$$\mathbf{Q}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{q}(x)\,e^{i\alpha x}dx, \quad \mathbf{q} = \{\Gamma_{21}(x), \Gamma_{22}(x)\}$$

Контур Υ выбирается в соответствии с условиями излучения волн на бесконечность, α – параметр преобразования Фурье, $\mathbf{G}(\alpha,y)$, $\mathbf{G}_v(\alpha,y)$ – матрицы Грина для перемещений скелета и флюида соответственно.

$$\mathbf{G}(\alpha,y) = \mathbf{B}(\alpha)\mathbf{E}(\alpha,y)\left(\mathbf{D}(\alpha,h)\right)^{-1}$$
$$\mathbf{G}_v(\alpha,y) = \mathbf{B}(\alpha)\mathbf{E}_v(\alpha,y)\left(\mathbf{D}(\alpha,h)\right)^{-1}$$
$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} -i\alpha & -i\alpha & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial y} & i\alpha \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{E}(\alpha,y) = \left(E_{ii}(\alpha,y)\right)$, $\mathbf{E}_v(\alpha,y) = \left(E_{v,ii}(\alpha,y)\right)$ – диагональные матрицы с элементами $E_{ii} = \operatorname{ch} s_i y$, $E_{v,ii} = m_i \operatorname{ch} s_i y$, $i = 1,2,3$,

$$\mathbf{D}(\alpha,y) = \begin{pmatrix} -2i\alpha s_1 \operatorname{sh} s_1 y & -2i\alpha s_2 \operatorname{sh} s_2 y & (\alpha^2 + s_3^2)\operatorname{sh} s_3 y \\ g_{01}\operatorname{ch} s_1 y & g_{02}\operatorname{ch} s_2 y & 2i\alpha s_3 \operatorname{ch} s_3 y \\ m_{01}s_1 \operatorname{sh} s_1 y & m_{02}s_2 \operatorname{sh} s_2 y & i\alpha\gamma_{13}\operatorname{sh} s_3 y \end{pmatrix}$$
$$g_{0i} = 2\alpha^2 - \theta_i^2(q_{11} + q_{12} + (q_{12} + q_{22})m_i)$$
$$m_{0i} = 1 - m_i, \quad i = 1,2, \quad \gamma_{13} = 1 + \gamma_{12}/\gamma_{22} \tag{3.2}$$
$$s_k = \sqrt{\alpha^2 - \theta_k^2}; \quad k = 1,2,3$$
$$\varsigma_3 = (\gamma_{11}\gamma_{22} - {\gamma_{12}}^2)/\gamma_{22}, \quad \theta_i^2 = \rho_s\omega^2 a^2\varsigma_i/N,$$

а m_i, ς_i, $i = 1,2$ определяются соотношениями:

$$\begin{vmatrix} q_{12} & q_{11} \\ q_{22} & q_{12} \end{vmatrix} \varsigma^2 + \left(\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_{22} & \gamma_{12} \\ q_{12} & q_{11} \end{vmatrix} \right) \varsigma + \begin{vmatrix} \gamma_{12} & \gamma_{11} \\ \gamma_{22} & \gamma_{12} \end{vmatrix} = 0$$

$$m_i = \frac{\gamma_{12} - \varsigma_i q_{12}}{\varsigma_i q_{22} - \gamma_{22}}$$

С целью оптимизации вычислительных процессов проведем ряд аналитических преобразований и раскрытий неопределенностей, в результате матрица Грина примет вид:

$$\mathbf{G}(\alpha, y) = \frac{1}{D(\alpha)}\left(G_{ij}(\alpha, y)\right); \quad i, j = 1, 2$$

$$D(\alpha) = 2\alpha^2(2g_0 \operatorname{sh} s_1h \operatorname{sh} s_2h \operatorname{ch} s_3h + \gamma_{13}g_4 \operatorname{sh} s_3h) - (\alpha^2 + s_3^2)g_5 \operatorname{sh} s_3h$$

$$g_0 = (m_1 - m_2)s_1s_2s_3$$

$$G_{11}(\alpha, h) = s_3(g_6\alpha^2 + g_5)\operatorname{ch} s_3h + \gamma_{13}\alpha^2(g_{01} - g_{02})\operatorname{ch} s_1h \operatorname{ch} s_2h \operatorname{sh} s_3h$$

$$G_{12}(\alpha, h) = -i\alpha(2g_0 \operatorname{sh} s_1h \operatorname{sh} s_2h \operatorname{ch} s_3h + 2\alpha^2\gamma_{13}g_7 \operatorname{sh} s_3h - (\alpha^2 + s_3^2)g_6 \operatorname{sh} s_3h) \tag{3.3}$$

$$G_{21}(\alpha, h) = i\alpha\left(g_0 \operatorname{sh} s_1h \operatorname{sh} s_2h \operatorname{ch} s_3h - (\gamma_{13}g_4 - g_5)\operatorname{sh} s_3h\right)$$

$$G_{22}(\alpha, h) = (m_1 - m_2)s_1s_2\theta_3^2 \operatorname{sh} s_1h \operatorname{sh} s_2h \operatorname{sh} s_3h$$

$$g_4 = \begin{vmatrix} g_{01}\operatorname{ch} s_1h & g_{02}\operatorname{ch} s_2h \\ s_1 \operatorname{sh} s_1h & s_2 \operatorname{sh} s_2h \end{vmatrix}, \quad g_5 = \begin{vmatrix} g_{01}\operatorname{ch} s_1h & g_{02}\operatorname{ch} s_2h \\ m_{01}s_1 \operatorname{sh} s_1h & m_{02}s_2 \operatorname{sh} s_2h \end{vmatrix}$$

$$g_6 = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} s_1h & \operatorname{ch} s_2h \\ m_{01}s_1 \operatorname{sh} s_1h & m_{02}s_2 \operatorname{sh} s_2h \end{vmatrix}, \quad g_7 = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} s_1h & \operatorname{ch} s_2h \\ s_1 \operatorname{sh} s_1h & s_2 \operatorname{sh} s_2h \end{vmatrix}$$

В случае толщины слоя $h \to \infty$ соотношения (3.3) принимают вид:

$$D(\alpha) = 2\alpha^2(2g_0 + \gamma_{13}g_4) - (\alpha^2 + s_3^2)g_5$$

$$G_{11}(\alpha) = s_3(g_6\alpha^2 + g_5) + \gamma_{13}\alpha^2(g_{01} - g_{02})$$

$$G_{12}(\alpha) = -i\alpha(2g_0 + 2\gamma_{13}g_7\alpha^2 - (\alpha^2 + s_3^2)g_6)$$

$$G_{21}(\alpha) = i\alpha\left(g_0 - (\gamma_{13}g_4 - g_5)\right)$$

$$G_{22}(\alpha) = (m_1 - m_2)s_1s_2\theta_3^2$$

$$g_4 = g_{01}s_2 - g_{02}s_1, \quad g_5 = g_{01}m_{02}s_2 - g_{02}m_{01}s_1$$

$$g_6 = m_2 - m_1, \quad g_7 = s_2 - s_1$$

и совпадают с ранее полученными соотношениями для компонент матрицы Грина в случае гетерогенной полуплоскости [8].

После удовлетворения граничных условий (2.2), приходим к интегральному уравнению 1-го рода с разностным ядром относительно неизвестного контактного давления:

$$\int_{-1}^{1} k(x - \xi)q(\xi)d\xi = \delta_0 \tag{3.4}$$

Ядро интегрального уравнения (3.4) имеет вид:

$$k(x - \xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Upsilon}\left(\mu G_{21}(\alpha, h) + G_{22}(\alpha, h)\right)/D(\alpha)e^{i\alpha(x-\xi)}d\alpha \tag{3.5}$$

4. Построение решения интегрального уравнения. Элементы матрицы $\mathbf{G}(\alpha, h)$ являются мероморфными функциями в комплексной плоскости, с общими комплексными полюсами, определяемыми соотношением $D(\alpha) = 0$. Комплексные полюса определяют скорость и затухание поверхностных волн в гетерогенном слое. Проведен анализ поведения элементов матрицы $\mathbf{G}(\alpha, h)$ при $\alpha \to 0$:

$$\lim_{\alpha\to\infty} G_{ii}(\alpha)/D(\alpha) = \frac{d_{ii}}{|\alpha|}$$
$$\lim_{\alpha\to\infty} G_{ij}(\alpha)/D(\alpha) = \frac{(-1)^i d_{ij}}{\alpha}; \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2 \tag{4.1}$$

Аналитические методы регуляризации и решения уравнений с разностным ядром для упругих сред развиты в фундаментальных работах школы академика Бабешко В.А., например, в работах [1–4]. В настоящей работе для построения приближенного решения уравнения (3.4) применен метод граничных элементов, при этом в качестве регуляризатора уравнения использована функция $d_{ii}/\sqrt{\alpha^2 + R^2}$, $i = 1, 2$, не имеющая полюсов в комплексной плоскости и совпадающая по асимптотическому поведению с членом, несущим логарифмическую особенность. Для пористоупругого полупространства этот метод успешно апробирован и изложен в [7–9]. Выделим в (3.5) логарифмическую особенность:

$$k(x-\xi) = I(x-\xi) + K_0(R|x-\xi|)/\pi$$
$$I(x-\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Upsilon} L(\alpha) e^{i\alpha(x-\xi)} d\alpha \tag{4.2}$$
$$L(\alpha) = \mu G_{21}(\alpha) + G_{22}(\alpha) - d_{22}/\sqrt{\alpha^2 + R^2},$$

где $K_0(z)$ – функция Макдональда нулевого порядка [24]. Интеграл $I(x-\xi)$ в (4.2) является быстро сходящимся. Выбор $R \gg 1$ ускоряет сходимость при дальнейших вычислениях интегралов. Проведем дискретизацию области контакта для плоского штампа, выбрав точки коллокации x_i, ξ_i, равномерно распределенными, с шагом $h = 2/N$ на отрезке $[-1 + h/2, 1 - h/2]$, $\xi_k = -1 + h(k - 0.5)$; $k = 1, 2, \ldots, N$. При этом полагаем $q(x)|_{x_i<x<x_{i+1}} = q(x_i) = q_i$; $i = 1, 2, \ldots, N$.

В результате решение интегрального уравнения (3.4) сводится к конечной системе линейных уравнений N порядка, быстро сходящейся и обладающей квазидиагональной матрицей:

$$\sum_{m=1}^{N} r_{mn} q_n = \delta_0/h; \quad n = 1, 2, \ldots, N$$
$$r_{mn} = I(x_m - \xi_n) + c_1(\mathrm{erf}(z_2) - \mathrm{erf}(z_1)); \quad m \neq n,$$
$$d_0 = d_{22}\,\mathrm{sign}(x_m - \xi_n)/h \tag{4.3}$$
$$z_1 = \sqrt{(x_m - \xi_n)R}, \quad z_2 = \sqrt{(x_{m+1} - \xi_n)R}$$
$$r_{nn} = I_1(x_n - \xi_n) + 2d_{22}\,\mathrm{erf}(\sqrt{hR/2})/h,$$

где $\mathrm{erf}(z)$ – интеграл вероятности [24].

Элементы матрицы системы (4.3) имеют максимальное значение на главной диагонали и быстро убывают по мере удаления от нее. Интеграл $I(x_m - \xi_n)$ вычисляется по контуру Υ в комплексной плоскости, который выбирается в соответствии с условиями излучения, так, чтобы перемещения поверхности гетерогенного слоя убывали при удалении от вибрирующего штампа. Этот выбор производится после нахождения полюсов подынтегральных функций в (3.5) и их анализа при стремлении внутреннего трения среды к нулю [2]. Отметим, что для анализа скорости сходимости процесса оценивались элементы невязки для количества разбиений N и $3N$. Измельчение сетки производилось до относительного значения невязки, меньшего чем 10^{-4}. Горизонтальные смещения под штампом определялись через контактные давления следующим образом:

$$u_1(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{N} q_n \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} \int_{\Upsilon} \left(\mu G_{11}(\alpha) + G_{12}(\alpha)\right) e^{i\alpha(x-\xi)} d\alpha d\xi \qquad (4.4)$$

Заметим, что при построении численного алгоритма в соотношениях (3.2)–(3.4) для функций $\operatorname{sh} s_i h$, $\operatorname{ch} s_i h$; $i = 1, 2, 3$, необходимо выносить растущие при больших аргументах экспоненты за рамки вычислительного процесса.

5. Результаты численного анализа. На примере гетерогенного слоя моделировалось покрытие из композиционного материала с матрицей на основе ароматического полиамида фенилона, модифицированного наноразмерной добавкой (алюмо-магниевая шпинель) и наполнителем в виде цилиндрового масла [21]. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона композита определены экспериментально, в том числе, с помощью наноиндентирования [21]. Изменение этих модулей при различной пористости, а также модуля объемного сжатия дренированной среды получены с помощью конечно-элементного моделирования [22] и на основе дифференциальной схемы метода самосогласования. Коэффициенты уравнений (2.1) по известным модулям объемного сжатия вязкоупругой матрицы K_s, пористой среды с незаполненными порами K_b, флюида K_f, пористости m вычислялись по формулам, приведенным в [16, 18]. Численный анализ проводился при следующих данных: $K_s = 5.2$ ГПа, $K_f = 2$ ГПа, $N = 1.85$ ГПа, $\rho_s = 1.2\times10^3$ кг/м^3, $\rho_f = 0.93\times10^3$ кг/м^3, $K_b(m = 5\%) = 4.38$ ГПа, $K_b(m = 10\%) = 3.58$ ГПа, $K_b(m = 15\%) = 2.78$ ГПа, $K_b(m = 20\%) = 2.21$ ГПа.

Вязкость матрицы композита учитывалась в рамках модели частотно-независимого внутреннего трения, поскольку фенилон отличается малой склонностью к ползучести под действием напряжений [25], а использование нанодобавок с целью модификации матрицы композита позволяет подавлять релаксационные процессы [25]. Согласно такому подходу модуль сдвига имеет вид $N(1 + i\gamma_0)$, где величина γ_0 пропорциональна тангенсу угла механических потерь вязкоупругого материала [26–29]. Вследствие этой зависимости присутствует малая комплексная составляющая в коэффициентах уравнения (2.1) N, A, Q, R [18, 27], $10^{-3} < \gamma_0 < 0.5\times10^{-1}$. Диапазон изменения параметра γ_0 был оценен на основании анализа влияния различных наноразмерных добавок на величину внутреннего трения композиционного материала с матрицей из фенилона [27]. Отметим, что на скорость сходимости процесса решения системы уравнений в соотношениях (4.3) параметр γ_0 влияние не оказывает, а изменение контактных давлений для приведенного диапазона изменения γ_0 при этом не превышает 2%. Коэффициент проницаемости гетерогенной среды изменялся в диапазоне $10^{-14} < k_o < 10^{-10}$ м^2 [30], а извилистость поровых каналов соответствовала случаю частиц сферической формы [31].

В рамках численного эксперимента исследовались нормальные и касательные контактные напряжения при вибрации на верхней границе слоя штампа с плоским основанием при заданной единичной осадке. На основании проведенных исследований установлен ряд общих закономерностей поведения контактных напряжений при учете трения в области контакта, как для гетерогенного полупространства, приведенные в работах [7–9], так и для слоя. При возрастании коэффициента трения значительно

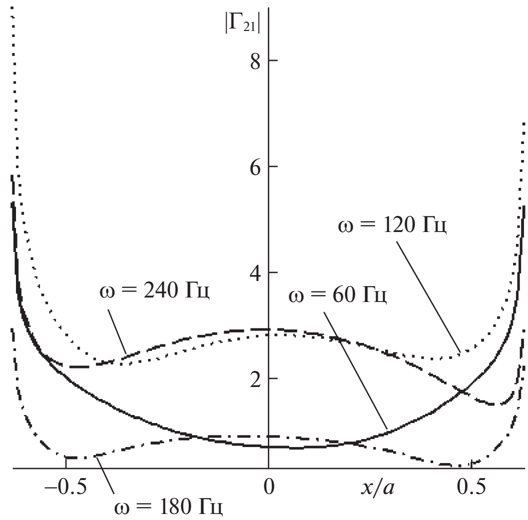

Рис. 2. Влияние частоты колебаний штампа на распределение модуля касательных контактных напряжений.

увеличивается несимметричность распределения напряжений под штампом, появляется выраженный экстремум. Зависимость нормальных и касательных контактных напряжений от пористости гетерогенного основания [7, 8], проницаемости композита, вязкости жидкой фракции, определяющей степень межфазной адгезии и взаимодействия фаз [9], носит нелинейный характер. Модули контактных напряжений уменьшаются при увеличении пористости и насыщенности флюидом [7, 8].

Наибольшее отличие от гетерогенного полупространства имеют зависимости контактных напряжений от частоты колебаний штампа, от толщины слоя. Рис. 2 иллюстрирует распределение под штампом модуля касательных контактных напряжений Γ_{21} при разных частотах колебаний $\omega = 60$ Гц, $\omega = 120$ Гц, $\omega = 180$ Гц, $\omega = 240$ Гц, $\eta/k_o = 0.3\times 10^9$, $m = 0.2$, $\mu = 0.3$, $h/a = 1$. При увеличении частоты не наблюдается монотонное изменение контактных напряжений, имеется диапазон частот, где контактные напряжения имеют максимальное значение, этот диапазон зависит от всех параметров задачи.

Среднее за период изменение количества энергии источника колебаний, отдаваемое в среду через область контакта, следуя [4], определяется соотношением:

$$\mathrm{E} = -\frac{\omega}{2}\mathrm{Im}\int_{-1}^{1}(\mathbf{u},\mathbf{q})dx,$$

где $(\mathbf{u},\mathbf{q})$ – скалярное произведение векторов, с учетом соотношений (2.2), (3.1). На основании численного анализа контактных напряжений и горизонтальных перемещений можно оценить энергетическое воздействие за период колебаний, от которого, в том числе, зависит износостойкость композиционного материала, при этом изменение амплитуды силы трения за период колебаний играет ключевую роль. Эту закономерность иллюстрирует рис. 3, где показаны изменение нормальных контактных напряжений Γ_{22} за период колебаний T для двух значений частоты колебаний штампа $\omega = 60$ Гц (слева) и $\omega = 120$ (справа). Сплошная линия соответствует $t = 0$, пунктирная $t = T/4$, штриховая $t = T/2$, штрих-пунктирная $t = 3T/4$. Диапазон изменения нормальных контактных напряжений пропорционален энергетическому воздействию при колебаниях штампа, имеет максимальное значение при $\omega = 100–180$ Гц для

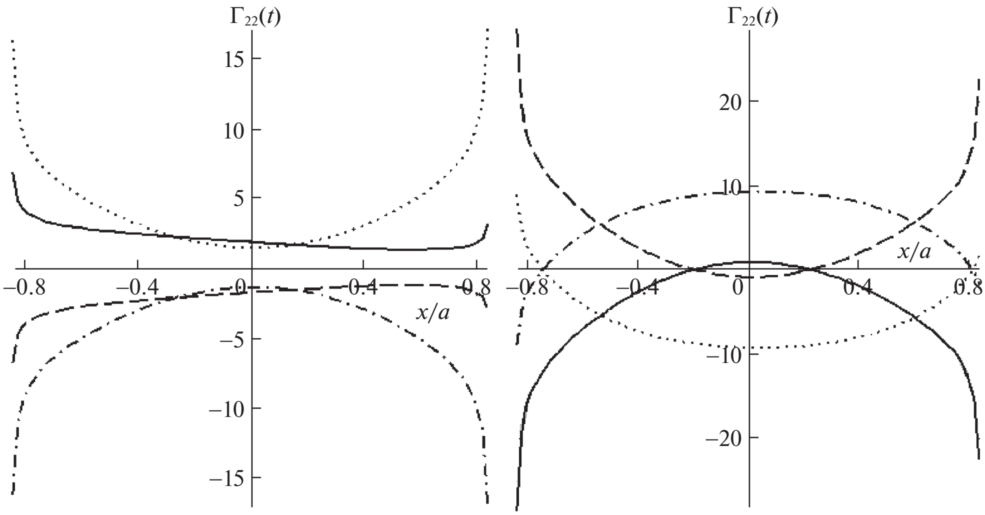

Рис. 3. Изменение нормальных контактных напряжений за период колебаний *T*.

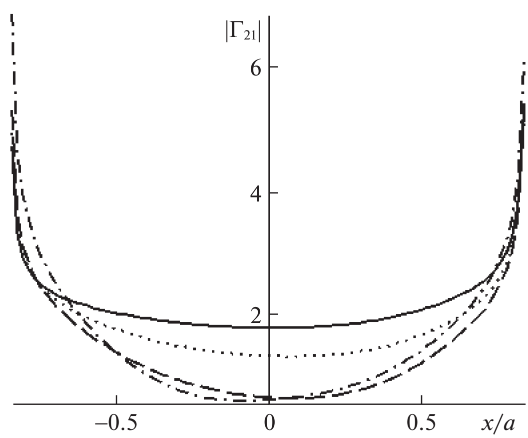

Рис. 4. Влияние толщины слоя на распределение модуля касательных напряжений под штампом.

данной гетерогенной среды. При этом необходимо учитывать не только нормальные, но и горизонтальные перемещения в области контакта.

Если количество поверхностных волн остается неизменным, контактные давления меняются монотонно, прослеживается нелинейная зависимость их от толщины слоя. В случае двух распространяющихся поверхностных мод распределение касательных напряжений по области контакта при возрастании толщины слоя иллюстрирует рис. 4, где сплошная линия соответствует $h/a = 0.5$, пунктирная – $h/a = 0.75$, штриховая – $h/a = 1.0$, штрих-пунктирная – $h/a = 1.25$, $\omega = 60$ Гц. Зависимость контактных напряжений от частоты колебаний, толщины покрытия, пористости, вязкости флюида в порах нелинейная.

Заключение. Построено аналитико-численное решение динамической контактной задачи для гетерогенного слоя в рамках модели Био при учете сил трения в области контакта. На основании проведенного численного анализа контактных напряжений показана необходимость учета не только механических характеристик гетерогенной среды, ее пористости, флюидонасыщенности среды, степени взаимодействия фаз, но и частоты колебаний и толщины слоя. Дана оценка энергетического воздействия в контактной области за период колебаний, которое играет ключевую роль в износостойкости конструированного гетерогенного композиционного материала. Проведенные исследования позволяют найти оптимальное соотношение механических свойств композитного материала, работающего в условиях динамического нагружения, управлять трибологическим процессом с помощью подбора толщины слоя и состава композита.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 20-08-00614-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
2. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
3. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Блочные элементы в контактных задачах с переменным коэффициентом трения // Докл. РАН. 2018. Т. 480. № 5. С. 537–541.
4. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
5. *R. He, L. Wang, H.Y. Yu* Time harmonic point load and dynamic contact problem of contacting fluid and poroelastic half-spaces // Soil Dyn.& Earthq. Engng. 2012. V. 36. P. 20–31.
6. *Ватульян А.О.* Коэффициентные обратные задачи механики. М.: Физматлит, 2019. 272 с.
7. *Колесников В.И., Беляк О.А., Колесников И.В. и др.* О математической модели для прогнозирования трибологических свойств маслонаполненных композитов при вибрации // Докл. РАН. 2020. Т. 491. С. 44–47.
8. *Kolesnikov V.I., Suvorova T.V., Belyak O.A.* Modeling antifriction properties of composite based on dynamic contact problem for a heterogeneous foundation // Mater. Phys.&Mech. 2020. V. 46. № 1. P. 139–148.
9. *Беляк О.А., Суворова Т.В.* О влиянии взаимодействия фаз гетерогенного основания на контактные напряжения при колебаниях штампа с трением // Эколог. вестн. научн. центров Черном. эконом. сотр. 2020. Т. 17. № 3. С. 29–36.
10. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
11. *Горячева И.Г., Добычин М.Н.* Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 253 с.
12. *Chen W., Wang Q., Huan Z. et al.* Semi analytical viscoelastic contact modeling of polymer based materials // J. Tribology. 2011. V. 133. № 4. P. 041404.
13. *Liu M., Huang H.* Poroelastic response of spherical indentation into a half space with a drained surface via step displacement // Int. J. Solids&Struct. 2019. V. 165. P. 34–49.
14. *Суворова Т.В., Беляк О.А.* Контактные задачи для пористоупругого композита при наличии сил трения // ПММ. 2020. Т. 84. № 4. С. 529–539.
15. *Беляк О.А., Суворова Т.В.* Влияние микроструктуры основания на силы трения при движении плоского штампа // Эколог. вестн. научн. центров Черном. эконом. сотр. 2018. № 3. С. 25–31.
16. *Био М.А.* Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде // Сб. пер. иностр. статей. 1963. Вып. 6. № 82. С. 103–134.
17. *Ковтун А.А.* Об уравнениях Био и их модификациях // Уч. зап. СПбГУ. 2011. Вып. 44. № 444. С. 3–26.
18. *Degrande G., Roeck G. De, Breck P. Van Den et al.* Wave propagation in layered dry, saturated and unsaturated poroelastic media // Int. J. Solids&Struct. 1998. V. 35 (34-35). P. 4753–4778.
19. *Долгополов К.Н., Колесников И.В., Мельников Э.Л.* Применение антифрикционных полимерных самосмазывающихся материалов класса “Масляниты” в узлах трения скольжения // Ремонт. Восстановление. Модернизация. 2018. № 4. С. 23–26.
20. *Sytar V.I., Kuzyayev I.M., Sukhyy K.M. et al.* Influence of the nature and concentration of porogens on the structure and properties of phenylone // Voprosy khimii i khimicheskoi tekhnologii. 2019. № 6. P. 213–220.
21. *Иваночкин П.Г., Суворова Т.В., Данильченко С.А. и др.* Комплексное исследование полимерных композитов с матрицей на основе фенилона С-2 // Вестн. РГУПС. 2018. В. 4. С. 18–25.

22. *Belyak O.A., Suvorova T.V.* Modeling stress deformed state upon contact with the bodies of two phase microstructure // Solid State Phenom. 2020. V. 299. P. 124–129.
23. *Брычков Ю.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 288 с.
24. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 296 с.
25. *Абакумова Н.М., Гудимов М.М., Финогенов Г.Н. и др.* Физико-механические свойства ароматических полиамидов марки фенилон // Пластич. массы. 1973. № 9. С. 30–32.
26. *Афашагова З.Х., Буря А.И., Козлов Г.В. и др.* Структура и свойства дисперсно-наполненных нанокомпозитов фенилон/аэросил // Механика композ. матер. 2007. Т. 13. № 4. С. 479–492.
27. *Иваночкин П.Г., Беляк О.А.* Влияние наноразмерных наполнителей на вязкоупругие свойства композиционных материалов с матрицей на основе фенилона // Новые матер. и технол. в машиностр. 2020. № 32. С. 25–29.
28. *Guyer R.A., Kim H. Alicia, Derome D. et al.* Hysteresis in modeling of poroelastic systems: Quasistatic equilibrium // Phys. Rev. E. 2011. № 83. P. 061408.
29. *Chandra R., Singh S.P., Gupta K.* A study of damping in fiber-reinforced composites // J. Sound&Vibr. 2003. V. 262. № 3. P. 475–496.
30. *Chevillotte F., Jaouen L., Bécot F.* On the modeling of visco-thermal dissipations in heterogeneous porous media // J. Acoust. Soc. Am. 2015. V. 138. № 6. P. 3922–3929.
31. *Wu A., Yang B., Xi Y. et al.* Pore structure of ore granular media by computerized tomography image processing // J. Central South Univ. Technol. 2007. V. 14. № 2. P. 220–224.

Vibrations of a Punch on the Surface of a Heterogeneous Layer with Account of Friction in the Contact Area

O. A. Belyak[a,#] and T. V. Suvorova[a,##]

[a] *Rostov State Transport University, Rostov on Don, Russia*
[#]*e-mail: o_bels@mail.ru*
[##]*e-mail: suvorova_tv111@mail.ru*

The contact problem of vibrations of a punch with a flat base on the surface of a heterogeneous layer is considered, taking into account the friction forces in the contact area. The microstructure of a porous-elastic layer saturated with a fluid is described by the Biot–Frenkel equations; in the contact area, the Coulomb–Amonton law of friction is fulfilled. The boundary value problem is reduced to a difference integral equation of the first kind for contact pressures. An approximate solution of the integral equation is constructed using the boundary element method. The influence of vibration frequency, layer thickness on contact stresses was investigated on the example of an oil-containing composite based on phenylone, the mechanical moduli of which were determined using micromechanical methods.

Keywords: dynamic contact problem, heterogeneous layer, contact area with friction

REFERENCES

1. *Babeshko V.A.* Generalized Method of Factorization in Spatial Dynamic Mixed Problems of Theory of Elasticity. (Obobshchennyj metod faktorizacii v prostranstvennyh dinamicheskih smeshannyh zadachah teorii uprugosti) Moscow: Nauka, 1984. 256 p. (in Russian)
2. *Vorovich I.I., Babeshko V.A.* Dynamic Mixed Problems of Elasticity Theory for Non-Classical Domains. (Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskih oblastej) Moscow: Nauka, 1979. 319 p. (in Russian)
3. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* Block elements in contact problems with a variable friction coefficient // Dokl. Phys., 2018 vol. 63, no. 6, pp. 239–243.
4. *Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko J.F.* Dynamics of Inhomogeneous Linear Elastic Media. (Dinamika neodnorodnyh linejno-uprugih sred). Moscow: Nauka, 1989. 344 p. (in Russian)
5. *He R., Wang L., Yu H.Y.* Time harmonic point load and dynamic contact problem of contacting fluid and poroelastic half-spaces // Soil Dyn.&Earthq. Engng., 2012, vol. 36, pp. 20–31.
6. *Vatulyan A.O.* Coefficient Inverse Problems of Mechanics. (Koefficientnye obratnye zadachi mekhaniki) Moscow: Fizmatlit, 2019. 272 p. (in Russian)

7. *Kolesnikov V.I., Belyak O.A., Kolesnikov I.V., Suvorova T.V.* A mathematical model for prediction of the tribological properties of oil-filled composites under vibration // Dokl. Phys., 2020, vol. 65, no. 4, pp. 149–152.
8. *Kolesnikov V.I., Suvorova T.V., Belyak O.A.* Modeling antifriction properties of composite based on dynamic contact problem for a heterogeneous foundation // Mater. Phys.&Mech., 2020, vol. 46, no. 1, pp. 139–148.
9. *Belyak O.A., Suvorova T.V.* Effect of interaction of heterogeneous base phases on contact stresses at punch oscillations with friction // Ecol. Bull. BSEC Sci. Centers, 2014, vol. 17, no. 3, pp. 29–36. (in Russian)
10. *Goryacheva I.G.* Mechanics of Frictional Interaction. (Mekhanika frikcionnogo vzaimodejstviya) Moscow: Nauka, 2001. 478 p. (in Russian)
11. *Goryacheva I.G., Dobychin M.N.* Contact Problems in Tribology (Kontaktnye zadachi v tribologii) Moscow: Mashinostroenie, 1988. 253 p. (in Russian)
12. *W. Chen, Q. Wang, Z. Huan et al.* Semi analytical viscoelastic contact modeling of polymer based materials // J. Tribology, 2011, vol. 133, no. 4, pp. 041404.
13. *Suvorova T.V., Belyak O.A.* Contact problems for a porous composite in the presence of friction forces // Mech. Solids, 2020, vol. 55, no. 8, pp. 329–336.
14. *Belyak O.A., Suvorova T.V.* Influence of the microstructure of the base on the friction forces during the movement of the flat stamp // Ecol. Bull. BSEC Sci. Centers, 2018, no. 3, pp. 25–31. (in Russian)
15. *Liu M., Huang H.* Poroelastic response of spherical indentation into a half space with a drained surface via step displacement // Int. J. Solids&Struct., 2019, vol. 165, pp. 34–49.
16. *Bio M.A.* Mechanics of deformation and propagation of acoustic waves in a porous medium // Coll. Transl. Foreign. Articles. 1963, no. 82, iss. 6, pp. 103–134.
17. *Kovtun A.A.* On the equations Bio and their modifications // Proc. St. Petersburg State Univ., 2011, no. 444, Iss. 44, pp. 3–26.
18. *Degrande G., Roeck G.D., Breck P. et al.* Wave propagation in layered dry, saturated and unsaturated poroelastic media // Int. J. Solids&Struct., 1998, vol. 35 (34–35), pp. 4753–4778.
19. *Dolgopolov K.N., Kolesnikov I.V., Melnikov E.L.* Application of self-lubricating antifriction polymer materials of “oily” material (“maslyanit”) class in sliding friction units // Repair. Recovery. Modernization, 2018, no. 4, pp. 23–26.
20. *Sytar V.I., Kuzyayev I.M., Sukhyy K.M. et al.* Influence of the nature and concentration of porogens on the structure and properties of phenylone // Voprosy khimii i khimicheskoi tekhnologii, 2019, no. 6, pp. 213–220.
21. *Ivanochkin P.G., Suvorova T.V., Danilchenko S.A. et al.* Complex research of polymer composites with a matrix on the basis of phenilon C-2 // Vestn. RGUPS, 2018, no. 4, pp. 18–25.
22. *Belyak O.A., Suvorova T.V.* Modeling stress deformed state upon contact with the bodies of two phase microstructure // Solid State Phenom., 2020, vol. 299, pp. 124–129.
23. *Brichkov Y.A., Prudnikov A.P.* Integral Transforms of Generalized Functions. Moscow: Nauka, 1977. 288 p. (in Russian)
24. *Bateman G, Erdeyi A.* Higher Transcendental Functions. N.Y.: McGraw-Hill, 1953. 296 p.
25. *Abakumova N.M., Gudimov M.M., Finogenov G.N. et al.* Physico-mechanical properties of aromatic polyamides phenylilone brand // Int. Polymer Sci.&Technol., 1973, no. 9, pp. 30–32. (in Russian)
26. *Afashagova Z.H, Burya A.I., Kozlov G.V., et al.* Structure and properties of dispersed-filled phenylon/aerosil nanocomposites // J. Compos. Mech.&Design, 2007, vol. 13, no. 4, pp. 479–492. (in Russian)
27. *Ivanochkin P.G. Belyak O.A* Influence of nanosized fillers on the viscoelastic properties of composite materials with a matrix based on phenylone // New Mater.&Technol. in Mech. Engng., 2020, no. 32, pp. 25–29. (in Russian)
28. *Guyer R.A., Kim H. Alicia, Derome D. et al.* Hysteresis in modeling of poroelastic systems: Quasistatic equilibrium // Phys. Rev. E., 2011, no. 83, pp. 061408.
29. *Chandra R., Singh S.P., Gupta K.* A study of damping in fiber-reinforced composites // J. Sound&Vibr., 2003, vol. 262, no. 3, pp. 475–496.
30. *Chevillotte F., Jaouen L., Bécot F.* On the modeling of visco-thermal dissipations in heterogeneous porous media // J. Acoust. Soc. Am., 2015, vol. 138, no. 6, pp. 3922–3929.
31. *Wu A., Yang B., Xi Y. et al.* Pore structure of ore granular media by computerized tomography image processing // J. Central South Univ. Technol., 2007, vol. 14, no. 2, pp. 220–224.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 3, с. 332–346

УДК 539.3:517.968.2

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ФИКТИВНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ

© 2021 г. А. В. Павлова[1,*], С. Е. Рубцов[1,], И. С. Телятников[2,***]**

[1] *ФГБОУ ВО “Кубанский государственный университет”, Краснодар, Россия*

[2] *ФГБУН ФИЦ Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Россия*

**e-mail: pavlova@math.kubsu.ru*

***e-mail: rub_serg@mail.ru*

****e-mail: ilux_t@list.ru*

Поступила в редакцию 03.02.2021 г.
После доработки 27.03.2021 г.
Принята к публикации 29.03.2021 г.

В работе описана модификация метода фиктивного поглощения в части выбора базисных функций, а также схема реализации метода для случая, когда штамп или дефект имеют невыпуклую область в плане. В отличие от обычно применяемой схемы, для вводимой вспомогательной составляющей решения использованы производные δ-функций Дирака с граничным множеством области контакта в качестве носителя. Применение нового вида вспомогательных функций продемонстрировано на примере интегральных уравнений осесимметричных задач о колебаниях штампа и трещины в упругой среде. Выбор более сложного вида базисных функций приводит к более простой форме решения.

Ключевые слова: интегральное уравнение, метод фиктивного поглощения, осциллирующее ядро, область сложной конфигурации, осесимметричная задача

DOI: 10.31857/S0032823521030097

1. Введение. Аппарат интегральных уравнений (ИУ) занимает важное место в решении смешанных задач механики деформируемого твердого тела, в том числе задач контактного взаимодействия. В [1, 2] проведено сравнение применяемых подходов и представлены результаты анализа применимости различных методов ИУ статических и динамических задач.

Задачи без начальных условий для установивших колебаний объектов на поверхности упругой среды, возникающие при исследовании взаимодействия источника с деформируемым основанием, сводятся к решению ИУ или систем интегральных уравнений (СИУ) с осциллирующими ядрами. В.А. Бабешко был предложен эффективный метод решения ИУ и СИУ с разностными ядрами I-го рода, названный методом фиктивного поглощения (МФП) [3]. Дальнейшее развитие этот метод получил в работах В.А. Бабешко и О.Д. Пряхиной [4–8] применительно к решению интегральных уравнений и СИУ для различных постановок смешанных задач и моделей сред, обладающих сложными свойствами, в том числе анизотропией. Примеры успешного применения МФП в задачах термо- и электроупругости при учете связности полей продемонстрированы в работах [9, 10]. В [9] в схему МФП включены прямые численные методы, позволяющие использовать точное представление символа ядра ИУ динамической задачи, не прибегая к его аппроксимации легко факторизуемыми функциями. Для невыпуклых односвязных областей МФП был применен в [11].

Идея МФП [3] заключается в преобразовании уравнения, имеющего осциллирующее ядро, к ИУ с быстро убывающим на бесконечности ядром. Подобное поведение свойственно ИУ задач для сред с большой вязкостью. МФП позволяет уверенно решать ИУ динамических задач, используя в качестве вспомогательных статические задачи или задачи для сред с затуханием. Для решения последних можно применять многочисленные методы, в частности, изложенные в [12].

МФП создан В.А. Бабешко на рубеже 70–80-х годов прошлого столетия и, к сожалению, нечасто используется в настоящее время. Цель статьи – вновь привлечь внимание к этому методу решения ИУ с осциллирующими ядрами. В работе описана модификация МФП в части выбора базисных функций, а также схема реализации метода для случая, когда штамп или дефект имеют невыпуклую область в плане. В отличие от представленной в [4–9] традиционно применяемой схемы, для вводимой вспомогательной составляющей решения использованы производные δ-функций Дирака, в качестве носителя которых выбрано граничное множество области контакта.

2. МФП в односвязной области произвольной конфигурации. Пусть в плоскости изменения типа граничных условий (контакта штампа со средой или расположения внутреннего дефекта) введена декартова система координат x_1Ox_2. Запишем ИУ рассматриваемой задачи в форме

$$\mathcal{K}q \equiv \iint\limits_{\Omega} k(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)\, q(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2 = f(x_1,x_2); \quad (x_1,x_2)\in\Omega \tag{2.1}$$

Решение (2.1) будем искать в классе суммируемых функций $q(x_1,x_2)\in \mathbf{L}_b(\Omega)$, $b>1$ [7]. Будем рассматривать ситуацию, когда конечная область интегрирования Ω представляется объединением M $(1<M<\infty)$ выпуклых областей $\Omega=\bigcup_{m=1}^{M} D_m$, где области разбиения D_m $(\partial D_m = S_m)$ могут иметь общие участки границ. ИУ (2.1) можно записать в виде системы

$$\sum_{m=1}^{M} \mathcal{K}_m q_m = f_s(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2)\in D_s; \quad s=\overline{1,M} \tag{2.2}$$

$$\mathcal{K}_m q_m = \iint\limits_{D_m} k(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)\, q_m(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2, \quad (x_1,x_2)\in D_m$$
$$k(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2} K(\alpha_1,\alpha_2)\exp(-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2))\, d\alpha_1 d\alpha_2, \tag{2.3}$$

$f_s = \mathrm{P}_{[D_s]} f(x_1,x_2)$, где $\mathrm{P}_{[D_s]}$ – проекционный оператор на область D_s, положение Γ_1, Γ_2 в комплексной плоскости определено принципом предельного поглощения [7, 8].

Свойства символа ядра интегрального уравнения (2.1) K определяются выбранной моделью упругой среды и подробно описаны в [7, 8]. Здесь принимается, что $K(\alpha_1,\alpha_2)\equiv K(\alpha)$ $(\alpha_1^2+\alpha_2^2=\alpha^2)$, $K(\alpha)=K(-\alpha)$, $K(\alpha) = C|\alpha|^{-1}[1+O(\alpha^{-1})]$, $|\alpha|\to\infty$. Мероморфная функция K может иметь конечное число вещественных полюсов p_k и нулей z_k $(k=\overline{1,N})$, увеличивающееся с ростом частоты колебаний, и счетное множество комплексных p_k, z_k $(k=\overline{N+1,\infty})$ [7, 8, 14].

В дальнейшем, кроме введенной системы координат x_1Ox_2, будем использовать локальные декартовы системы координат $x_1^mO_mx_2^m$, $O_m(a_m,b_m)\in D_m$, выбрав оси параллельными осям x_1Ox_2.

Для системы штампов в ряде случаев единственность решения СИУ [13] не достигается, то же самое имеет место в задачах для установившихся колебаний структур с множественными неоднородностями. Далее для простоты полагается, что ИУ

$$\int_0^{2\pi} f_{ks}(\psi)\exp\left(ip_k R_s(\psi)\cos(\psi-\gamma)\right)d\psi = b_{ks}(\gamma), \quad 0 \le \gamma \le 2\pi, \tag{2.4}$$

где $R_m = R_m(\psi)$ – уравнения границ S_m в локальных координатах, $\forall\, k = \overline{1,N}$, $s = \overline{1,M}$, $b_{ks} \in \mathbf{C}(0,2\pi)$ имеют единственное решение [7].

Представим решение (2.1) $q(x_1,x_2) \in \mathbf{L}_b(\Omega)$, $b > 1$, в форме

$$q(x_1,x_2) = p(x_1,x_2) + \varphi(x_1,x_2) \tag{2.5}$$

Возьмем φ в виде

$$\varphi(x_1,x_2) = \sum_{s=1}^{M} \varphi_s(x_1,x_2)$$

$$\varphi_s(x_1,x_2) \equiv \sum_{k=1}^{N} \varphi(x_1-a_s, x_2-b_s, G_k, R_s, f_{ks}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} G_k(-\Delta)\int_0^{2\pi} \delta[x_1-a_s-R_s(\psi)\cos\psi]\delta[x_2-b_s-R_s(\psi)\sin\psi]\,g_{ks}(\psi)\,d\psi \tag{2.6}$$

$$G_k(\alpha^2) = (\alpha^2-p_1^2)\ldots(\alpha^2-p_{k-1}^2)(\alpha^2-p_{k+1}^2)\ldots(\alpha^2-p_N^2),$$

где g_{ks} – неизвестные однозначные функции, $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$. Выбор базисных функций для φ может быть различным [7], в данной работе представлен МФП для $\varphi(x_1,x_2)$ вида (2.6). Если все полюсы p_k функции K простые, то $\varphi(x_1,x_2)$ и $p(x_1,x_2)$ должны обладать свойствами

$$\mathrm{V}_2\varphi(x_1,x_2) = \mathrm{V}_2 q(x_1,x_2), \quad \mathrm{V}_2\varphi_s(x_1,x_2) = \mathrm{V}_2 q(x_1,x_2,D_s)$$

$$\alpha^2 = p_k^2; \quad k = \overline{1,N} \tag{2.7}$$

$$\mathrm{V}_2 p(x_1,x_2) = 0, \quad \alpha^2 = p_k^2; \quad k = \overline{1,N}$$

Здесь и далее через $\mathrm{V}_2 g(x_1,x_2)$ обозначено двумерное изображение Фурье функции $g(x_1,x_2)$. Условия для случая кратных полюсов сформулированы в [7]. Далее будем считать, что функция $K(\alpha)$ не имеет кратных нулей z_k и полюсов p_k (z_k, $p_k \in \mathbb{R}$). Тогда для нее справедливо представление $K(\alpha) = K_0(\alpha)\Pi(\alpha)$, где $K_0(\alpha)$ имеет то же асимптотическое поведение при $|\alpha| \to \infty$, что и $K(\alpha)$, и является регулярной на вещественной оси. Функция $\Pi(\alpha)$ имеет на вещественной оси конечное число нулей и полюсов, совпадающих с нулями и полюсами $K(\alpha)$.

Функция $\Pi(\alpha)$ приближается рациональной функцией с заданной точностью [14]. Для простоты введем функцию $\Pi(\alpha,N) = E_N(\alpha^2)Q_N^{-1}(\alpha^2)$, где $E_N(\alpha^2) = \prod_{k=1}^{N}(\alpha^2 - z_k^2)$, $Q_N(\alpha^2) \equiv \prod_{k=1}^{N}(\alpha^2 - p_k^2)$, p_k и z_k – полюсы и нули $K(\alpha)$ соответственно, p_k, $z_k \in \mathbb{R}$, $\Pi(\alpha,N) = 1 + O(\alpha^{-1})$, $|\alpha| \to \infty$.

Тогда функция $K_0(\alpha) = K(\alpha)\Pi^{-1}(\alpha,N)$ будет обладать свойствами, характерными для символа ядра ИУ статической задачи. Далее будем использовать представление

$$K(\alpha) = K_0(\alpha)\Pi(\alpha,N) \tag{2.8}$$

Из (2.1), принимая во внимание (2.8), в операторном виде можно записать соотношение для новой неизвестной $t(x_1,x_2) = \mathrm{V}_2^{-1}\Pi(\alpha,N)\,\mathrm{V}_2 p(x_1,x_2)$, где V_2^{-1} — оператор обратного двумерного преобразования Фурье,

$$\mathcal{K}_0 t = f(x_1,x_2) - \mathcal{K}_0\mathrm{V}_2^{-1}\Pi(\alpha,N)\,\mathrm{V}_2\varphi,$$

где $\mathcal{K}_0$ — интегральный оператор с символом ядра $K_0(\alpha)$,

$$\mathcal{K}_0 t = f(x_1,x_2) - \mathcal{K}_0\varphi - S\varphi$$

$$S\varphi = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{\Omega}\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2} K_0(\alpha)[\Pi(\alpha,N)-1]\times$$
$$\times\exp(-i(\alpha_1(x_1-\xi_1)+\alpha_2(x_2-\xi_2)))\,d\alpha_1 d\alpha_2\varphi(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2$$

Существуют различные техники построения обратного оператора $\mathcal{K}_0^{-1}$ в зависимости от свойств функции $K_0(\alpha)$, обзор их можно найти, в том числе, в [1]. Положим, что $\mathcal{K}_0^{-1}$ известен, тогда

$$t = \mathcal{K}_0^{-1}f(x_1,x_2) - \varphi - \mathcal{K}_0^{-1}S\varphi \tag{2.9}$$

и решение (2.1) в операторном виде запишется как

$$q = p + \varphi = \mathrm{V}_2^{-1}\Pi^{-1}\,\mathrm{V}_2\,t + \varphi = \mathrm{V}_2^{-1}\Pi^{-1}\,\mathrm{V}_2[\mathcal{K}_0^{-1}f - \varphi - \mathcal{K}_0^{-1}S\varphi] + \varphi =$$
$$= \mathcal{K}_0^{-1}f - \mathcal{K}_0^{-1}S\varphi + \mathrm{V}_2^{-1}[\Pi^{-1}-1]\,\mathrm{V}_2[\mathcal{K}_0^{-1}f - \varphi - \mathcal{K}_0^{-1}S\varphi] \tag{2.10}$$

Чтобы $p(x_1,x_2)\in\mathbf{L}_b(\Omega)$ имела носитель в Ω, требуется выполнение условий [7]

$$\mathrm{V}_2[\mathcal{K}_0^{-1}f - \varphi - \mathcal{K}_0^{-1}S\varphi] = 0,\quad \alpha^2 = z_k^2;\quad k = \overline{1,N} \tag{2.11}$$

Выделим у функции $\mathrm{V}_2^{-1}\Pi(\alpha,N)\,\mathrm{V}_2\varphi$, в общем случае имеющей в качестве носителя всю плоскость, обобщенную составляющую φ_0 с носителем в Ω. Тогда $\varphi_2 = \mathrm{V}_2^{-1}\Pi(\alpha,N)\,\mathrm{V}_2\varphi - \varphi_0$ будет классической функцией, имеющей носитель во всей плоскости. С этой целью в соотношении

$$\mathrm{V}_2^{-1}\Pi(\alpha,N)\,\mathrm{V}_2\varphi = \mathrm{V}_2^{-1}\Pi(\alpha,N)\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{M}G_k(\alpha^2)\exp(i(a_s\alpha_1+b_s\alpha_2))\times$$
$$\times\int\limits_0^{2\pi}g_{ks}(\psi)\exp(i\alpha R(\psi)\cos(\psi-\gamma))\,d\psi$$

из рациональных функций выделим полиномиальные составляющие

$$\Pi(\alpha,N)\,G_k(\alpha^2) = P_k(\alpha^2) + R_k(\alpha^2)$$

$$P_k(\alpha^2) = [E_N(\alpha^2) - E_N(p_k^2)](\alpha^2 - p_k^2)^{-1} \approx \alpha^{2N-2}$$

$$R_k(\alpha^2) = E_N(p_k^2)(\alpha^2 - p_k^2)^{-1} \approx \alpha^{-2};\quad \alpha\to\infty$$

Будем иметь

$$\varphi_2 = \mathrm{V}_2^{-1}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{M}R_k(\alpha^2)\exp(i(a_s\alpha_1+b_s\alpha_2))\int\limits_0^{2\pi}g_{ks}(\psi)\exp(i\alpha R(\psi)\cos(\psi-\gamma))\,d\psi$$

Из (2.9)

$$t = \mathcal{K}_0^{-1}f(x_1,x_2) - \varphi_0(x_1,x_2) - \mathcal{K}_0^{-1}\mathrm{P}_{[\Omega]}\mathcal{K}_0\varphi_2 \tag{2.12}$$

В (2.12) использован проектор на Ω, так как носитель φ_2 — вся плоскость. Из (2.10)

$$p(x_1, x_2) = V_2^{-1}\Pi^{-1}(\alpha, N)\, V_2[\mathcal{K}_0^{-1}(f(x_1, x_2) - P_{[\Omega]}\mathcal{K}_0\varphi_2) - \varphi_0(x_1, x_2)]$$

Условия (2.11) перепишутся в форме

$$V_2 P_{[\Omega]}[\mathcal{K}_0^{-1}(f(x_1, x_2) - P_{[\Omega]}\mathcal{K}_0\varphi_2) - \varphi_0] = 0, \quad \alpha^2 = z_n^2; \quad n = \overline{1, N},$$

которую, в свою очередь, можно представить следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{N} P_k(z_n)\int_0^{2\pi} g_{ks}(\psi)\exp(\mathrm{i}z_n R(\psi)\cos(\psi - \gamma))\,\mathrm{d}\psi =$$
$$= \exp(-\mathrm{i}(a_s\alpha_1 + b_s\alpha_2))\, V_2 P_{[D_s]}\mathcal{K}_0^{-1}[f(x_1, x_2) - P_{[\Omega]}\mathcal{K}_0\varphi_2] \tag{2.13}$$
$$\alpha^2 = z_n^2; \quad n = \overline{1, N}, \quad s = \overline{1, M}$$

Для (2.4) полагалась разрешимость левой части полученной системы относительно $g_{ks}(\psi)$. В правой части (2.13) неизвестные $g_{ks}(\psi)$ содержатся в φ_2. Обратив левую часть, придем к системе ИУ II-го рода относительно введенных в (2.6) функций $g_{ks}(\psi)$, которая, в свою очередь, может быть решена с помощью дискретизации.

С учетом вышесказанного для решения (2.1) справедливо представление

$$q(x_1, x_2) = V_2^{-1}\Pi^{-1}(\alpha, N)\, V_2[\varphi_2 + \mathcal{K}_0^{-1}(f(x_1, x_2) - P_{[\Omega]}\mathcal{K}_0\varphi_2)], \tag{2.14}$$

где

$$\varphi_2 = V_2^{-1}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{M} E_N(p_k^2)(\alpha^2 - p_k^2)^{-1}\overline{g}_{ks}(\alpha)\exp(i(a_s\alpha_1 + b_s\alpha_2))$$

$$\overline{g}_{ks}(\alpha) = \int_0^{2\pi} g_{ks}(\psi)\exp(i\alpha R(\psi)\cos(\psi - \gamma))\,d\psi$$

Можно проделать дальнейшие упрощения (2.14), представив φ_2 в виде $\varphi_2(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{M}\varphi_{2s}^{+} + \varphi_2^{-}$, где $\varphi_{2s}^{+} = P_{[D_s]}\varphi_2^{+}$. Обозначив $q_s(x_1, x_2) \equiv q(x_1, x_2, D_s)$, $(x_1, x_2) \in D_s$, получим решения (2.2)

$$q(x_1, x_2, D_s) = V_2^{-1}\Pi^{-1}(\alpha, N)\, F(\alpha_1, \alpha_2, D_s)$$

$$F(\alpha_1, \alpha_2, D_s) = V_2 P_{[D_s]}\mathcal{K}_0^{-1}[f - P_{[\Omega]}\mathcal{K}_0\varphi_2^{-}] + V_2\varphi_{2s}^{-}$$

Неизвестные g_{ks} при этом определяются из системы, аналогично [7]

$$F(\alpha_1, \alpha_2, D_s) = 0, \quad \alpha^2 = z_n^2; \quad n = \overline{1, N}$$

Из полученных представлений решения видно, что введенная в виде (2.6) функция φ присутствует лишь под знаками интегральных операторов.

3. МФП в осесимметричных задачах

3.1. Решение ИУ осесимметричной задачи с убывающим символом ядра. Рассмотрим интегральное уравнение пространственной задачи об установившихся колебаниях (с частотой ω) круглого штампа на поверхности однородного упругого слоя толщины h с защемленной нижней гранью в отсутствии трения в области контакта штампа со средой при заданных вертикальных смещениях его подошвы. В декартовой системе координат плоскость x_1Ox_2 совмещена с поверхностью слоя, ось Ox_3 направлена вверх по нормали. В случае осевой симметрии в цилиндрических координатах ИУ принимает вид

$$\int_0^a k(r,\tau)\,q(\tau)\,\tau d\tau = f(r), \quad 0 \le r \le a \tag{3.1}$$

$$k(r,\tau) = \int_{\Gamma_0} K(\alpha)\,J_n(\alpha r)\,J_n(\alpha\tau)\,\alpha d\alpha, \tag{3.2}$$

где a – радиус штампа, $J_n(r)$ – функция Бесселя I рода порядка n, Γ_0 – часть контура Γ (2.3), расположенная в полуплоскости $x_1 > 0$. Неизвестная функция $q(r)$ описывает напряжения в области контакта штампа со средой, функция $f(r)$ – перемещения подошвы штампа. Вид символа ядра, соответствующий элементу матрицы-функции Грина $K(\alpha) \equiv K_{33}(\alpha,0)$ упругого слоя, жестко сцепленного с недеформируемым основанием, приведен в [2, 7, 8]. Там же описаны свойства элементов матрицы Грина, зависящих от упругих характеристик, плотности среды и толщины слоя.

Рассмотрим в качестве вспомогательного для решения (3.1) уравнение с правой частью в виде функции Бесселя I рода вида

$$\int_0^a k(r,\tau)\,q(\tau)\,\tau d\tau = J_n(\eta r), \quad 0 \le r \le a, \quad \operatorname{Im}\eta = 0, \quad \eta > 0 \tag{3.3}$$

с ядром (3.2). Для произвольной правой части следует разложить $f(r)$ в ряд по функциям Бесселя или представить ее в виде интеграла Фурье–Бесселя.

Имеется много примеров применения МФП в осесимметричных задачах [5–8]. Но везде в качестве функции φ используется линейная комбинация δ-функций Дирака с непересекающимися носителями вида

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{N} C_k\delta(r - r_k), \quad 0 < r_k < a$$

Вместе с тем, справедлива лемма, позволяющая выбрать другой вид функции φ.

Лемма [7]: Пусть функция $q(r) \in \mathbf{L}_b(0,a)$ $(b > 1)$. Существует единственная функция $\varphi(r)$ вида

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{N} C_k N_{m_k} G_k(L_n)\,\delta(r - a), \quad L_n = -\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right) - \frac{n^2}{r^2}\right),$$

такая, что имеют место равенства $Q(p_k) = \Phi(p_k)$; $k = \overline{1,N}$, где

$$Q(\alpha) = \mathrm{V}_{B_n} q(x), \quad \Phi(\alpha) = \mathrm{V}_{B_n}\varphi(x), \quad N_m f = r^{-n}\left(\frac{d}{rdr}\right)^m r^{n+m} f(r)$$

Здесь V_{B_n} – оператор интегрального преобразования Ханкеля (Бесселя–Фурье), m_k выбирается таким образом, что $J_n(ap_k) \ne 0$. Далее рассматривается $m_k = 0$.

Функцию $K(\alpha)$ символа ядра представим в виде (2.8). Как, например в [7], выберем в качестве $K_0(\alpha)$ функцию $K_0(\alpha) = (\alpha^2 + B^2)^{-1/2}$, где B – заданный параметр аппроксимации. Рациональная функция $\Pi(\alpha, N) = \prod_{k=1}^{N}(\alpha^2 - z_k^2)(\alpha^2 - p_k^2)^{-1}$ описана в предыдущем разделе. Здесь p_k – полюса, лежащие выше контура Γ_0.

В соответствии с (2.5) представим решение (3.3) в виде

$$q(r) = p(r) + \varphi(r); \quad 0 \le r \le a$$

В качестве $\varphi(r)$ возьмем

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{N} G_k(L_n) C_k \delta(r-a), \tag{3.4}$$

где, как и ранее, $G_k(\alpha^2) = (\alpha^2 - p_1^2)\ldots(\alpha^2 - p_{k-1}^2)(\alpha^2 - p_{k+1}^2)\ldots(\alpha^2 - p_N^2)$, а C_k — неизвестные константы, определяемые в дальнейшем.

В соответствии с (2.7)

$$Q(p_k) = \Phi(p_k); \quad k = \overline{1, N}, \quad Q(\alpha) \equiv \mathrm{V}_{B_n} q = \int_0^a q(r) J_n(\alpha r) r\mathrm{d}r$$

$$\Phi(\alpha) \equiv \mathrm{V}_{B_n}\varphi = \int_0^a \varphi(r) J_n(\alpha r) r dr = \sum_{k=1}^{N} G_k\left(\alpha^2\right) C_k a J_n(a\alpha)$$

Введем новую неизвестную $t(r)$, для которой, используя представление (2.8), приходим к ИУ с регулярным убывающим ядром

$$\begin{gathered}\int_0^a k_0(r,\tau) t(\tau) \tau d\tau = J_n(\eta r) - \sum_{k=1}^{N} \int_0^a k(r,\tau) C_k G_k(L_N) \delta(\tau - a) \tau d\tau \\ k_0(r,\tau) = \int_0^\infty K_0(\alpha) J_n(\alpha r) J_n(\alpha\tau) \alpha d\alpha\end{gathered} \tag{3.5}$$

Решение ИУ (3.3) запишется в виде

$$\begin{gathered}q(r) = t_\eta(r) + \int_{\Gamma_0} (\Pi^{-1}(\alpha, N) - 1) T_\eta(\alpha) \alpha J_n(\alpha r) d\alpha - \\ - \int_{\Gamma_0} \Pi^{-1}(\alpha, N) \sum_{k=1}^{N} a C_k [L_k(\alpha) - R_k(\alpha^2) J_n(a\alpha)] J_n(\alpha r) \alpha d\alpha \\ L_k(\alpha) = \int_{\Gamma_0} K_0(\eta) R_k(\eta^2) T_\eta(\alpha) \eta J_n(\eta a) d\eta\end{gathered}$$

Система для определения (2.13) примет вид

$$\sum_{k=1}^{N} P_k(\alpha^2) C_k a J_n(a\alpha) + \mathrm{V}\mathcal{K}_0^{-1} \mathrm{P}_{[0,a]} \mathcal{K}_0 \varphi_2 = T(\alpha), \quad \alpha = z_k; \quad k = \overline{1, N},$$

где z_l — нули функции $\Pi(\alpha, N)$, лежащие выше контура Γ_0.

Оценка точности построения решения ИУ для среды с поглощением определяется значением параметра B, порядок отбрасываемых при деформации контура интегрирования членов тем меньше, чем больше значение B [14]. Воспользуемся приведенным в [7] приближенным решением уравнения

$$\int_0^a k_0(r,\tau) t(\tau) \tau \mathrm{d}\tau = J_n(\eta r)$$

с ядром (3.5) и представлением [7]

$$\Pi^{-1}(\alpha, N) = 1 + \sum_{j=1}^{N} \beta_j (\alpha^2 - z_j^2)^{-1}, \quad \beta_j = \prod_{k=1}^{N} (z_j^2 - p_k^2) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} (z_j^2 - z_k^2)^{-1}$$

Применив процедуру перехода к интегрированию по развернутому контуру, Г, используя свойства цилиндрических функций, в результате получим представление решения (3.3)

$$q(r) = J_n(\eta r)K^{-1}(\eta) + \frac{i\pi a}{2}K_0^{-1}\sum_{l=1}^{N}\beta_l J_n(z_l r)G_1(\eta, z_l) -$$
$$-\frac{a\pi^2}{4}\sum_{k=1}^{N}g_k\sum_{l=1}^{N}\beta_l J_n(z_l r)G_2(z_l, p_k)b(\eta)\left(\frac{\exp(-B(a-r))}{\sqrt{a^2-r^2}} + i\pi\sqrt{\frac{a\varepsilon}{2}}\sum_{l=1}^{N}\beta_l H_n^{(1)}(z_l a)J_n(z_l r)\right) +$$
$$+\left[i\sqrt{\frac{a\pi}{2}}\frac{\exp(-B(a-r))}{\sqrt{a^2-r^2}} - \frac{a\pi\sqrt{\pi\varepsilon}}{2}\sum_{l=1}^{N}\beta_l J_n(z_l r)H_n^{(1)}(z_l a)\right]\sum_{k=1}^{N}\frac{g_k}{\sqrt{B-ip_k}}H_n^{(1)}(p_k a), \qquad (3.6)$$

где

$$G_1(\eta, z) = [\eta J_{n+1}(\eta a)H_n^{(1)}(za) - zJ_n(\eta a)H_{n+1}^{(1)}(za)](\eta^2 - z^2)^{-1}$$
$$G_2(z, p) = [pH_{n+1}^{(1)}(pa)H_n^{(1)}(za) - zH_n^{(1)}(pa)H_{n+1}^{(1)}(za)](z^2 - p^2)^{-1}$$
$$b(\eta) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}}[H_n^{(1)}(\eta a)\sqrt{B+i\eta} + H_n^{(2)}(\eta a)\sqrt{B-i\eta}], \quad \varepsilon = \frac{1}{B}$$

Здесь использованы обозначения, аналогичные [7], $H_0^{(j)}$ – функции Бесселя III рода (функции Ханкеля) $(j = 1, 2)$. Присутствующие в представлении (3.6) g_k содержат в себе неизвестные константы C_k, $g_k = aC_k E_N(p_k^2)J_n(ap_k)$.

Алгебраическая система для определения g_k примет вид

$$\sum_{k=1}^{N}g_k[(p_k H_{n+1}^{(1)}(ap_k)J_n(a\alpha) - \alpha H_n^{(1)}(ap_k)J_{n+1}(a\alpha))(\alpha^2 - p_k^2)^{-1} -$$
$$+\left[i\sqrt{\frac{a\pi}{2}}\frac{\exp(-B(a-r))}{\sqrt{a^2-r^2}} - \frac{a\pi\sqrt{\pi\varepsilon}}{2}\sum_{l=1}^{N}\beta_l J_n(z_l r)H_n^{(1)}(z_l a)\right]\sum_{k=1}^{N}\frac{g_k}{\sqrt{B-ip_k}}H_n^{(1)}(p_k a) =$$
$$= \frac{2i}{\pi}\frac{\sqrt{B^2+\eta^2}}{\alpha^2-\eta^2}[\alpha J_{n+1}(a\alpha)J_n(a\eta) - \eta J_{n+1}(a\eta)J_n(a\alpha)] + \frac{2i}{\pi}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{a}}J_n(a\alpha)b(\eta)$$
$$\alpha = z_l; \quad l = \overline{1, N}$$

Выражение (3.6) описывает решение (3.3) с точностью до множителя C^{-1}, где C характеризует поведение функции $K(\alpha)$ при $|\alpha| \to \infty$ $(K(\alpha) = C|\alpha|^{-1}[1 + O(\alpha^{-1})]$, $|\alpha| \to \infty)$, а выбранное ядро вспомогательной статической задачи имеет асимптотику $K_0(\alpha) = |\alpha|^{-1}[1 + O(\alpha^{-1})]$, $|\alpha| \to \infty$.

Описанная схема МФП для осесимметричной задачи реализована в работе [15].

На рис. 1, 2 представлены результаты расчетов амплитудных значений контактных напряжений, когда форма подошвы описывается функцией $f(r) = J_n(\eta r)$. Все параметры отнесены к толщине слоя, безразмерная частота определяется формулой $\overline{\omega}^2 = \rho\omega^2 h^2\mu^{-1}$. Характеристики слоя: $h = 1$ – толщина, плотность $\rho = 1$; коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$; модуль сдвига $\mu = 1$. Графики реальной части $q(r)$, отражающие изменения амплитуды напряжений с ростом частоты, приведены на рис. 1.

На рис. 2 представлены мнимые части амплитуды контактных напряжений. Кривым под номерами *1*, *2*, *3*, *4*, *5* соответствуют значения приведенной частоты 1.8; 2.2; 2.6; 3; 3.4 ($a = 3$, $n = 0$, $\eta = 1$).

МФП применим для любых частот колебаний. Преимуществом МФП также является правильное описание поведения решения не только во внутренних точках, но и в окрестности границ области контакта.

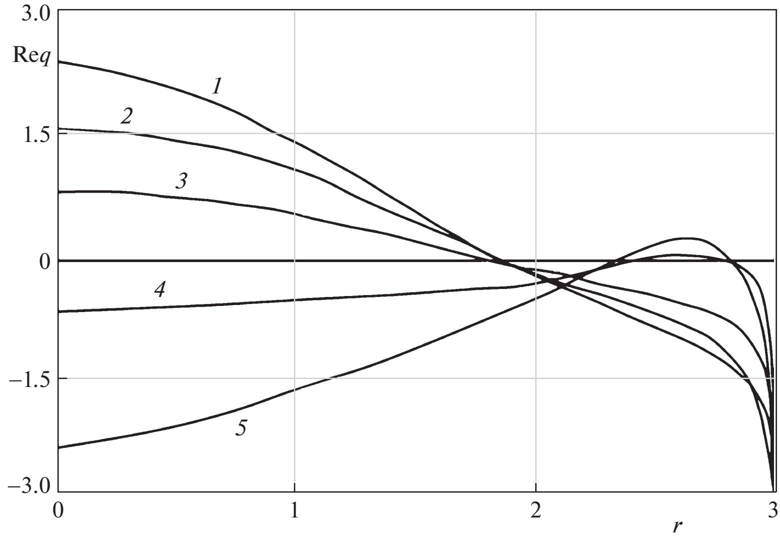

Рис. 1.

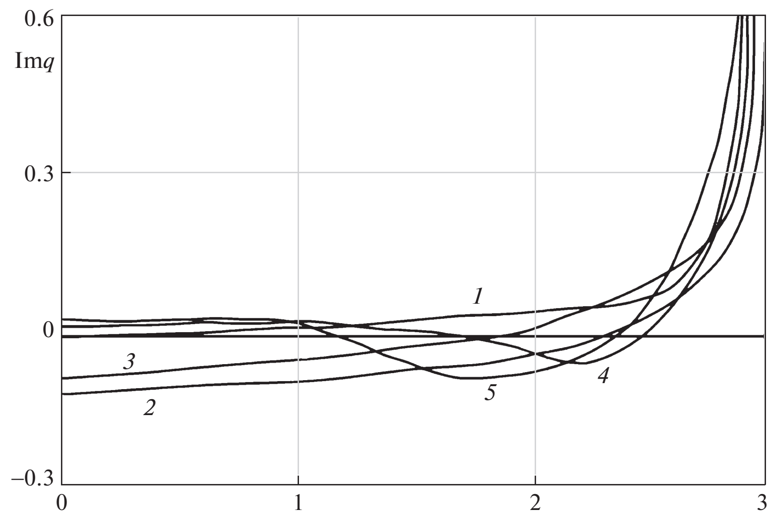

Рис. 2.

3.2. Решение ИУ осесимметричной задачи с растущим символом ядра. В контактных задачах для трещин символ ядра ИУ относительно неизвестного скачка перемещений в области дефекта имеет асимптотику $K(\alpha) = C|\alpha|[1 + O(\alpha^{-1})]$, $|\alpha| \to \infty$ [16], и ядро интегрального оператора является обобщенной функцией. В данном случае за счет выноса из обеих частей интегрального уравнения вида (3.3) дифференциального оператора можно привести ИУ к уравнению с классической функцией ядра, решение которого осуществляется в соответствии с приведенным алгоритмом МФП. При этом

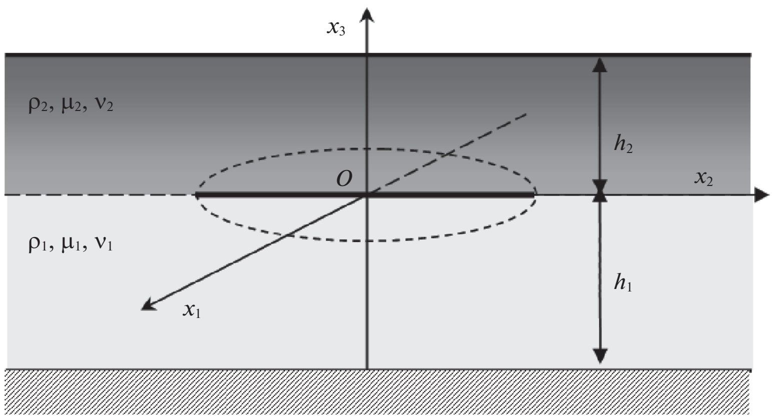

Рис. 3.

решение уравнения отыскивается в классе суммируемых функций $q(r) \in \mathbf{L}_b(0,a)$ $(b > 1)$, обращающихся в нуль на границе области трещины.

Рассмотрим в качестве примера ИУ осесимметричной задачи о возбуждении гармонических колебаний в упругой среде вибрацией берегов круглой трещины отрыва $(\Omega : x^2 + y^2 \le a^2)$. В качестве упругой среды будем рассматривать двухслойный пакет, считая, что трещина располагается в плоскости раздела физико-механических свойств (рис. 3).

Верхняя грань пакета свободна от нагрузок, нижняя – жестко защемлена, в области трещины заданы равные напряжения на противоположных ее берегах. Полагается, что в процессе колебаний берега трещины не взаимодействуют. Смешанная граничная задача может быть сведена к интегральному уравнению вида (3.1), где, для сохранения единых обозначений в ИУ, через $q(r)$ обозначено неизвестное амплитудное значение скачка перемещений в области трещины, $f(r)$ описывает амплитуду напряжения на ее берегах. Структура и свойства функции символа ядра описаны в работах [16, 17].

Будем строить решение ИУ вида (3.3), где символ ядра (3.6) – растущая функция.

Вынесем из обеих частей ИУ дифференциальный оператор вида $-L_n + l^2$, где l – некоторая константа. Получим ИУ с убывающей при $|\alpha| \to \infty$ функцией символа ядра

$$\begin{gathered}\int_0^a k_1(r,\rho)q(\rho)\rho d\rho = \int_0^a J_n(\eta\rho)\rho\int_0^\infty \frac{J_n(\alpha\rho)J_n(\alpha r)}{\alpha^2 + l^2}\alpha d\alpha d\rho + \varepsilon(r); \qquad 0 \le r \le a \\ k_1(r,\rho) = \int_0^\infty K_1(\alpha)J_n(\alpha\rho)J_n(\alpha r)\alpha d\alpha \equiv \int_0^\infty \frac{K(\alpha)}{\alpha^2 + l^2}J_n(\alpha\rho)J_n(\alpha r)\alpha d\alpha,\end{gathered} \tag{3.7}$$

$\varepsilon(r) = C_1 I_n(lr)$ – ограниченное в нуле решение модифицированного уравнения Бесселя

$$\frac{d^2\varepsilon(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varepsilon(r)}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} + l^2\right)\varepsilon(r) = 0$$

Здесь $I_n(r)$ – модифицированная функция Бесселя I рода порядка n, C_1 – константа, подлежащая определению.

Используя свойства цилиндрических функций [18] и проведя разворот контура интегрирования на всю вещественную ось, можно преобразовать правую часть (3.7) так, что ИУ примет вид

$$\int_0^a k_1(r,\rho)\,q(\rho)\,\rho d\rho = K_n(lr)\int_0^r f(\rho) I_n(l\rho)\,\rho d\rho + I_n(lr)\left[C_1 + \int_r^a f(\rho)\,K_n(l\rho)\,\rho d\rho\right], \qquad (3.8)$$

где C_1 находится из заданного на краю трещины условия $q(a) = 0$.

Значения интегралов, стоящих в (3.8) справа, нетрудно посчитать с помощью таблиц [19], в результате чего приходим к ИУ с правой частью в виде комбинации функций Бесселя $J_n(\eta r)$ и $I_n(lr)$

$$\int_0^a k_1(r,\rho)\,q(\rho)\,\rho \mathrm{d}\rho = \frac{J_n(\eta r)}{\eta^2 + l^2} +$$

$$+ I_n(lr)\left[C_1 + \frac{a}{\eta^2 + l^2}\left(\eta J_{n+1}(\eta a)\,K_n(la) - lJ_n(\eta a)\,K_{n+1}(la)\right)\right], \qquad (3.9)$$

где $K_n(r)$ – модифицированная функция Бесселя II рода (функция Макдональда).

Функция символа ядра K_1 с точностью до постоянного множителя приближается соотношением $K_1(\alpha) = K(\alpha)(\alpha^2 + l^2)^{-1} \approx K_0(\alpha)\Pi(\alpha, N)$, далее для построения решения (3.8) может быть использован алгоритм МФП с базисными функциями вида (3.4).

Решение вспомогательной задачи для среды с поглощением для ИУ с правой частью в виде $I_n(lr)$ построено в работе [17]. В силу линейности задачи решение ИУ (3.9) запишется как

$$q(r) = \frac{q_1(r)}{\eta^2 + l^2} + q_2(r)\left[C_1 + \frac{a}{\eta^2 + l^2}\left(\eta J_{n+1}(\eta a)\,K_n(la) - lJ_n(\eta a)\,K_{n+1}(la)\right)\right],$$

где $q_1(r)$ – приближенное решение ИУ для правой части в виде $J_n(\eta r)$, представляемое соотношением (3.6),

$$q_2(r) = I_n(lr)\,K^{-1}(il) + \frac{i\pi a}{2}K_0^{-1}(il)\sum_{l=1}^{N}\beta_l J_n(z_l r) G_1^*(l, z_l) -$$

$$-\frac{a\pi^2}{4}\sum_{k=1}^{N} d_k \sum_{l=1}^{N}\beta_l J_n(z_l r)\,G_2(z_l, p_k) +$$

$$+ b^*(l)\left(\frac{\exp(-B(a-r))}{\sqrt{a^2 - r^2}} + i\pi\sqrt{\frac{a\varepsilon}{2}}\sum_{l=1}^{N}\beta_l H_n^{(1)}(z_l a)\,J_n(z_l r)\right) +$$

$$+\left[i\sqrt{\frac{a\pi}{2}}\frac{\exp(-B(a-r))}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \frac{a\pi\sqrt{\pi\varepsilon}}{2}\sum_{l=1}^{N}\beta_l J_n(z_l r)\,H_n^{(1)}(z_l a)\right]\sum_{k=1}^{N}\frac{d_k}{\sqrt{B - ip_k}}H_n^{(1)}(p_k a) \qquad (3.10)$$

Здесь $b^*(l) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}I_n(al)\sqrt{B + l}$,

$$G_1^*(l, z) = [lI_{n+1}(la)\,H_n^{(1)}(za) + zI_n(la)\,H_{n+1}^{(1)}(za)](l^2 + z^2)^{-1}$$

Система для определения d_k, входящих в (3.10), принимает вид

$$\sum_{k=1}^{N} d_k\Bigg[\left(p_k H_{n+1}^{(1)}(ap_k)\,J_n(a\alpha) - \alpha H_n^{(1)}(ap_k)\,J_{n+1}(a\alpha)\right)(\alpha^2 - p_k^2)^{-1} -$$

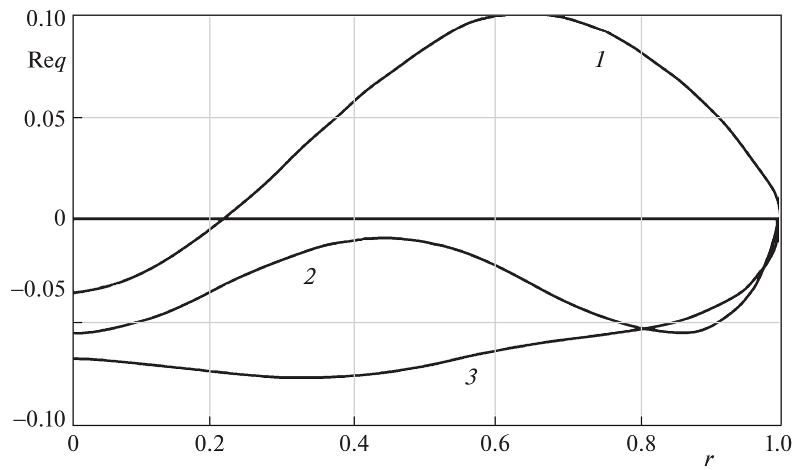

Рис. 4.

$$- 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi(B - ip_k)}}H_n^{(1)}(ap_k)J_n(a\alpha)\Bigg] = \frac{2i}{\pi}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{a}}J_n(a\alpha)b_*(l) -$$

$$-\frac{2i}{\pi}\frac{\sqrt{B^2 - l^2}}{\alpha^2 + l^2}\left[lI_{n+1}(al)J_n(a\alpha) + \alpha J_{n+1}(a\alpha)I_n(al)\right]$$

$$\alpha = z_l; \quad l = \overline{1, N}$$

Присутствующая в решении константа C_1 определяется из условия равенства нулю скачка перемещений на границе области трещины. С этой целью вычисляется предел $R = \lim\limits_{r\to a-0} q(r)\sqrt{a-r}$, соответствующий коэффициенту при корневой особенности, и приравнивается к нулю.

В работе [16] представлено решение интегральных уравнений плоской задачи для слоистого пакета при наличии интерфейсных трещин. Авторами также использован МФП, но вынос дифференциального оператора осуществлялся на этапе построения решения вспомогательной статической задачи.

На рис. 4, 5 представлены результаты расчетов для трещины отрыва на границе раздела свойств в двухслойном пакете с защемленной нижней гранью. Все безразмерные величины приведены к параметрам верхнего слоя, в качестве характерного линейного размера выбран радиус трещины, приведенная частота определяется формулой $\overline{\omega}^2 = \rho_2\omega^2a^2\mu_2^{-1}$. Параметры пакета: $h_1 = 0.6$ – толщина нижнего слоя, $h_2 = 0.4$ – толщина верхнего слоя; плотности слоев $\rho_1 = \rho_2 = 1$; коэффициенты Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$; $\mu_1/\mu_2 = 0.5$.

На рис. 4 приведены реальные, на рис. 5 – мнимые части амплитудного значения скачка перемещений на берегах трещины, к которым приложена единичная нагрузка ($a = 1$, $n = 0$, $\eta = 0$).

Кривым под номерами *1*, *2*, *3* соответствуют значения приведенной частоты 4, 5, 7. Как видно из графиков, значения мнимой части возрастают, в вещественной – убывают с ростом частоты колебаний.

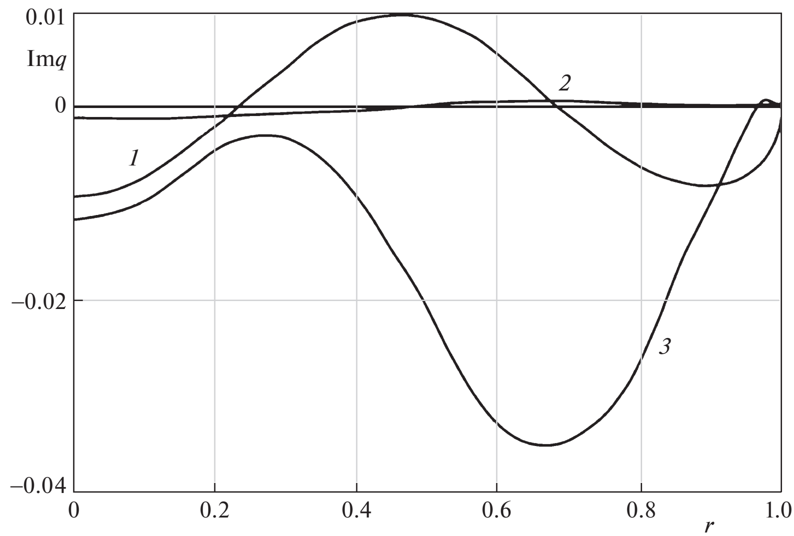

Рис. 5.

Заключение. В работе описана схема метода фиктивного поглощения решения интегральных уравнений смешанных задач механики деформируемого твердого тела для односвязной области, занимаемой штампом или дефектом. Применение нового вида вспомогательных функций продемонстрировано на примере ИУ осесимметричных задач о колебаниях штампа и трещины в упругой среде. Выбор более сложного вида базисных функций приводит к более простой форме решения. Для трещины отрыва в двухслойном пакете приведены результаты численных расчетов.

МФП может использоваться при решении ИУ задач для произвольных в плане областей штампов или дефектов (трещин и включений). Достоинство МФП состоит также в том, что область применимости полученных приближенных решений динамических задач определяется областью применения решений использованных в качестве вспомогательных статических задач.

Фрагменты работы выполнены в рамках задания ГЗ ЮНЦ РАН, проект № 01201354241 и при частичной поддержке РФФИ (проект 18-05-80008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Механика контактных взаимодействий / *Под ред. Воровича И.И., Александрова В.М.* М.: Физматлит, 2001. 672 с.
2. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
3. *Бабешко В.А.* Новый метод в теории пространственных динамических смешанных задач // Докл. АН СССР. 1978. Т. 242. Вып. 1. С. 62–65.
4. *Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Метод фиктивного поглощения в плоских динамических задачах // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 477–484.
5. *Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Об одном методе теории динамических контактных задач для круглых штампов // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 2. С. 22–28.
6. *Ватульян А.О., Овсепян В.В., Пряхина О.Д.* Контактная динамическая задача для ортотропного цилиндра // Изв. АН АрмССР. Механика. 1983. Т. 36. № 4. С. 47–55.
7. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 265 с.

8. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 248 с.
9. *Бабешко В.А., Калинчук В.В.* Метод фиктивного поглощения в связанных смешанных задачах теории упругости и математической физики для слоисто-неоднородного полупространства // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 285–292.
10. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих тел. М.: Физматлит, 2006. 272 с.
11. *Бабешко В.А., Павлова А.В.* Некоторые соотношения для решений двумерных интегральных уравнений типа свертки смешанных задач. 1987. 18 с. Деп. в ВИНИТИ 18.08.87, № 6022-В87.
12. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
13. *Бабешко В.А.* О неединственности решений динамических смешанных задач для систем штампов // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. № 6. С. 1327–1330.
14. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
15. *Капустин М.С., Павлова А.В., Рубцов С.Е., Телятников И.С.* К моделированию взаимодействия фундамента с деформируемой грунтовой средой // Эколог. вестн. научн. центров ЧЭС. 2015. № 3. С. 44–51.
16. *Кардовский И.В., Пряхина О.Д., Смирнова А.В.* Решение динамической задачи для трехслойной среды с трещинами // Изв. вузов. Сев.-Кавк. рег. Естеств. науки. 2004. № 3. С. 38–43.
17. *Павлова А.В., Телятников С.В.* Об одном методе решения динамических задач о колебаниях упругого слоя, вызванных вибрацией берегов внутренней трещины / Деп. в ВИНИТИ 07.02.95, № 354-В95, 21 с.
18. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
19. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Т. 2. Специальные функции. М.: Физматлит, 2003. 664 с.

On One Modification of the Fictitious Absorption Method

A. V. Pavlova[a,#], S. E. Rubtsov[a,##], and I. S. Telyatnikov[b,###]

[a] *Kuban State University, Krasnodar, Russia*
[b] *Federal Research Centre The Southern Scientific Centre RAS, Rostov-on-Don, Russia*
[#] *e-mail: pavlova@math.kubsu.ru*
[##] *e-mail: rub_serg@mail.ru*
[###] *e-mail: ilux_t@list.ru*

The paper describes a modification of the fictitious absorption method in terms of the basis functions choice, as well as a method for its implementation for the case when a stamp or defect has a non-convex region in the plan. In contrast to the commonly used scheme, for the introduced auxiliary component of the solution, we use the derivatives of the Dirac delta functions with the boundary set of the contact region as the carrier. We demonstrated application of a new type of auxiliary functions by the example of the integral equations for axisymmetric problems of vibrations for a stamp and a crack in an elastic medium. The choice of a more complex form for basis functions leads to a simpler form of the solution.

Keywords: integral equation, fictitious absorption method, oscillating kernel, region of complex configuration, axisymmetric problem

REFERENCES

1. Mechanics of contact interactions / *Ed. by. Vorovich I.I, Alexandrov V.M.* Moscow: Fizmatlit, 2001. 672 p. (in Russian)
2. *Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko Zh.F.* Dynamics of Inhomogeneous Linear Elastic Media. Moscow: Nauka, 1989. 344 p. (in Russian)

3. *Babeshko V.A.* A new method in the theory of spatial dynamic mixed problems // Dokl. AS USSR, 1978, vol. 242. iss. 1. pp. 62–65. (in Russian)
4. *Babeshko V.A., Pryakhina O.D.* The fictitious absorption method in plane dynamic problems // JAMM, 1980, vol. 44, iss. 3, pp. 477–484. (in Russian)
5. *Babeshko V.A., Pryakhina O.D.* On one method of the theory of dynamic contact problems for round stamps // Izv. AS USSR. Solid Mech., 1981, no. 2, pp. 22–28. (in Russian)
6. *Vatulyan A.O., Ovsepyan V.V., Pryakhina O.D.* Contact dynamic problem for an orthotropic cylinder // Izv. AS Arm. SSR. Mech., 1983, vol. 36, no. 4, pp. 47–55. (in Russian)
7. *Babeshko V.A.* Generalized Method of Factorization in Spatial Dynamic Mixed Problems of Elasticity Theory. Moscow: Nauka, 1984. 265 p. (in Russian)
8. *Vorovich I.I., Babeshko V.A., Pryakhina O.D.* Dynamics of Massive Bodies and Resonance Phenomena in Deformable Media. Moscow: Sci. World, 1999. 248 p. (in Russian)
9. *Babeshko V.A., Kalinchuk V.V.* Fictitious absorption method in coupled mixed problems of elasticity theory and mathematical physics for a layered inhomogeneous half-space // JAMM, 2002, vol. 66, no. 2, pp. 285–292. (in Russian)
10. *Kalinchuk V.V., Belyankova T.I.* Dynamic Contact Problems for Prestressed Electroelastic Bodies. Moscow: Fizmatlit, 2006. 272 p. (in Russian)
11. *Babeshko V.A., Pavlova A.V.* Some relations for solutions of two-dimensional integral equations of convolution type of mixed problems // 1987, 18 p. Dep. VINITI on 18.08.87, No. 6022-B87. (in Russian)
12. *Vorovich I.I., Alexandrov V.M., Babeshko V.A.* Non-Classical Mixed Problems of Elasticity Theory. Moscow: Nauka, 1974.455 p. (in Russian)
13. *Babeshko V.A.* On the non-uniqueness of solutions of dynamic mixed problems for systems of stamps // Dokl. AS USSR, 1990, vol. 310, no. 6, pp. 1327–1330. (in Russian)
14. *Vorovich I.I., Babeshko V.A.* Dynamic Mixed Problems of Elasticity Theory for Non-Classical Domains. Moscow: Nauka, 1979. 320 p. (in Russian)
15. *Kapustin M.S., Pavlova A.V., Rubtsov S.E., Telyatnikov I.S.* To the modeling of the interaction of the foundation with the deformed soil environment // Ecol. Bull. Res. Centers of the BSEC, 2015, no. 3, pp. 44–51. (in Russian)
16. *Kardovsky I.V., Pryakhina O.D., Smirnova A.V.* Solution of a dynamic problem for a three-layer medium with cracks // Univ. Proceed. North Caucasus. Reg. Nat. Sc., 2004, no. 3, pp. 38–43. (in Russian)
17. *Pavlova A.V., Telyatnikov S.V.* On one method for solving dynamic problems of vibrations of an elastic layer caused by vibration of the edges of an internal crack / Dep. VINITI 07.02.95, No. 354-B95, 21 p. (in Russian)
18. *Abramowitz M., Stegun I.* Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. M.: Nauka, 1979. 832 p. (in Russian)
19. *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integrals and Series, Vol. 2, Special Functions. Moscow: Fizmatlit, 2003. 664 p. (in Russian)

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 3, с. 347–357

УДК 539.3: 534.1

ВОЛНЫ ЛЯВА В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ МОНОКЛИННОЙ СРЕДЕ

© 2021 г. С. В. Кузнецов[1,2,3,*], В. Л. Мондрус[3]

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

[2] *Московский государственный технический университет им. Баумана, Москва, Россия*

[3] *Московский государственный строительный университет, Москва, Россия*

**e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru*

Поступила в редакцию 25.11.2020 г.
После доработки 03.02.2021 г.
Принята к публикации 10.02.2021 г.

Построена математическая модель для описания распространения волн Лява в слоистых анизотропных (моноклинных) средах. Для построения решения разработан модифицированный метод передаточных матриц (ПМ-метод). В замкнутом виде получены дисперсионные соотношения для сред, состоящих из одного и двух упруго анизотропных слоев контактирующих с анизотропным полупространством. Анализируются условия существования волн Лява. Исследованы волны с горизонтальной поперечной поляризацией неканонического типа.

Ключевые слова: волна Лява, поверхностная волна, анизотропия, слоистая среда

DOI: 10.31857/S0032823521030085

1. Введение. Ляв [1] показал, что при некоторых условиях в системе изотропный слой на полупространстве может распространяться поверхностная волна, имеющая горизонтальную поперечную поляризацию и экспоненциально затухающая по глубине. Наряду с волнами Рэлея, волны Лява играют важную роль в передаче сейсмической энергии и весьма часто регистрируются при сейсмической активности и взрывах.

Поле перемещений, соответствующее волне Лява может быть представлено в виде:

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{m}(C_1 e^{-ir\gamma_1 x'} + C_2 e^{ir\gamma_1 x'}) e^{ir(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - ct)} \\ \mathbf{u}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{m}(C_3 e^{ir\gamma_2 x'}) e^{ir(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - ct)},\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ относятся к перемещениям в слое и субстрате соответственно; $\mathbf{m}$ – единичная амплитуда (вектор поляризации), предполагается, что вектор $\mathbf{m}$ ортогонален к сагиттальной плоскости (последняя образована вектором $\mathbf{n}$, задающим направление распространения волнового фронта, и единичным вектором $\boldsymbol{\nu}$, нормальным к свободной поверхности); $x' \equiv \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{x}$ – координата вдоль вектора $\boldsymbol{\nu}$, в дальнейшем считается, что x' принимает отрицательные значения в полупространстве; r – волновое число; c – фазовая скорость; t – время; неизвестные (комплексные) коэффициенты C_k определяются с точностью до множителя из граничных условий на внешней плоской границе:

$$\mathbf{t}_{\boldsymbol{\nu}}\big|_{x'=h} \equiv \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{C}_1 \cdot\cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_1 = 0, \tag{1.2}$$

и контактных условий на поверхности раздела ($x' = 0$):

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{C}_1\cdot\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{C}_2\cdot\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \tag{1.3}$$

Параметры γ_k, $k = 1,2$ в (1.1) соответствуют комплексным корням уравнения Кристоффеля, это уравнение будет введено позже. В уравнениях (1.2), (1.3) $\mathbf{C}_k$, $k = 1,2$ – четырехвалентные тензоры упругости слоя и полупространства соответственно; h – толщина слоя.

Замечание 1.1. В соответствии с представлением (1.1) затухание по глубине в полупространстве обеспечивается параметром Кристоффеля γ_2 с отрицательной мнимой частью.

Следующее утверждение фактически принадлежит Ляву:

Предложение 1.1. 1) Исследуемые волны могут возникать в *изотропном* слое и контактирующим с ним *изотропном* полупространстве, в том и только том случае, когда фазовая скорость удовлетворяет условию

$$c_1^T < c < c_2^T, \tag{1.4}$$

где $c_k^T = \sqrt{\mu_k/\rho_k}$, $k = 1,2$ скорости поперечных объемных волн в слое и полупространстве соответственно, а μ_k и ρ_k соответствующие константы Ламе и плотности.

2) Дисперсионное соотношение между фазовой скоростью c и частотой ω может быть представлено в виде

$$\omega = \frac{c}{h}\left(\frac{\rho_1}{\mu_1}c^2 - 1\right)^{-1/2}\left\{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\left(\frac{1-\frac{\rho_2}{\mu_2}c^2}{\frac{\rho_1}{\mu_1}c^2 - 1}\right)^{1/2}\right) + n\pi\right\}; \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{1.5}$$

Следствие 1. а) При фиксированной частоте ω существует конечное число волн Лява, распространяющихся с различными фазовыми скоростями $c \in (c_1^T; c_2^T)$.

б) При фиксированной фазовой скорости $c \in (c_1^T; c_2^T)$ существует бесконечное число волн Лява, распространяющихся с различными частотами ω.

Следствие 2. Не существует волн Лява, если $c_1^T > c_2^T$.

В [2] было показано, что волны Лява могут распространяться в системе, состоящей из анизотропного слоя, контактирующего с полупространством, при этом предполагалось, что как слой, так и полупространство имеют ось упругой симметрии четвертого или шестого порядка, ориентированную вдоль вектора $\mathbf{m}$. Для такой системы условия распространения и дисперсионные соотношения оказывались аналогичными (1.4) и (1.5). В [3] на основе подхода [2] получены дисперсионные соотношения для трансверсально изотропного слоя и полупространства.

Для слоистых сред, состоящих из большего числа слоев, контактирующих с полупространством, не существует аналитических решений, аналогичных (1.5). Дисперсионные соотношения для волны Лява в таких средах могут быть получены численно с применением двух матричных методов, первоначально предложенных для анализа волн *Лэмба*. Эти подходы известны как метод передаточных Матриц (ПМ), иногда этот метод называют методом Томсона–Хаскелла, по имени разработчиков этого метода [4, 5]), и метод глобальной матрицы (ГМ), предложенный в [6, 7]. ПМ-метод основан на последовательном решении контактных граничных задач на интерфейсных поверхностях и построении соответствующих передаточных матриц. Ниже этот метод будет обсуждаться более подробно. ГМ-метод основан на решении обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-однородными коэффициентами, который приводит в итоге к построению специальной “глобальной” матрицы.

С момента появления ГМ-метода считалось, что при численных реализациях он приводит к (численно) более устойчивым решениям, чем ПМ-метод. В дальнейшем предлагались разнообразные модификации ПМ- и ГМ-методов с целью сделать их более численно устойчивым, см. [8–14]. Проблема численной устойчивости становится особенно актуальной, когда слоистая среда состоит из большого числа слоев. В этом случае начинают сказываться преимущества ПМ-метода, поскольку порядок соответствующих матриц остается неизменным по отношению к числу слоев (в случае ГМ-метода порядок соответствующей матрицы линейно растет с числом слоев).

В связи с исследованиями распространения волн Лява необходимо отметить недавние работы [15–17] по анализу дисперсионных соотношений в средах, содержащих тонкие покрытия, а так же асимптотические методы для исследования SH-волн в трехслойных системах, содержащих слои с контрастными свойствами.

В настоящей работе развивается модифицированный ПМ-метод, основанный на использовании гиперболических функций в представлении для парциальных волн, и предназначенный как для аналитического исследования волн Лява в анизотропных средах с небольшим числом слоев (1–3), так и для численного анализа систем, содержащих большое число слоев. Далее будет показано, что представление (1.1) оказывается неверным, если в уравнении Кристоффеля появляются кратные корни. Верное представление и соответствующая модификация ПМ-метода будут даны ниже. Кроме того, ПМ-метод будет использоваться для получения разрешающих уравнений для волн с поперечной горизонтальной поляризацией, распространяющихся в слоистых пластинах со свободными и защемленными граничными поверхностями (в этом случае, в отличие от волн Лява, пластины не контактируют с полупространством).

2. Основные соотношения. Ниже как слои, так и полупространство считаются однородными и линейно гиперупругими. Уравнения движения для упругой однородной анизотропной могут быть представлены в виде:

$$\mathbf{A}(\partial_x,\partial_t)\mathbf{u} \equiv \operatorname{div}_x \mathbf{C}\cdot\cdot\nabla_x\mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = 0, \tag{2.1}$$

где четырехвалентный тензор упругости $\mathbf{C}$ предполагается положительно определенным

$$\underset{\mathbf{A}\in \mathrm{sym}(R^3\otimes R^3),\mathbf{A}\neq 0}{\forall \mathbf{A}} (\mathbf{A}\cdot\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{A}) \equiv \sum_{i,j,m,n} A_{ij}C^{ijmn}A_{mn} > 0 \tag{2.2}$$

Замечание 2.1. а) Другое замечание относится к симметрии тензора упругости. Предполагается, что все рассматриваемые среды имеют плоскости упругой симметрии, совпадающие с сагиттальной плоскостью $\mathbf{m}\cdot\mathbf{x} = 0$. Это эквивалентно принадлежности тензора упругости для всех материалов к *моноклинной* системе. Можно показать [18], что последнее влечет равенство нулю всех разложимых компонент тензора упругости, имеющих нечетное вхождение вектора $\mathbf{m}$ (в ортогональном базисе в R^3, образованном вектором $\mathbf{m}$ и любыми ортогональными векторами, принадлежащими сагиттальной плоскости). В случае моноклинной симметрии тензор упругости содержит 13 независимых разложимых компонент.

б) В дальнейшем будет показано, что моноклинная симметрия обеспечивает достаточное условие для того, чтобы поверхностные усилия на любой плоскости $\mathbf{v}\cdot\mathbf{x} = \mathrm{const}$ были коллинеарные вектору $\mathbf{m}$.

Следуя [19–21], рассмотрим более общее, чем (1.1), представление для волны Лява

$$\mathbf{m} = f(irx')e^{ir(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-ct)}, \tag{2.3}$$

где $x' = \mathbf{v}\cdot\mathbf{x}$, так же как и в представлении (1.1); f – неизвестная скалярная функция; экспоненциальный множитель в правой части (2.3) соответствует распространению волнового фронта в направлении $\mathbf{n}$ с фазовой скоростью c; r – волновое число. Подставляя представление (2.3) в уравнение (2.1) и принимая во внимание Замечание 2.1.а, получаем следующее дифференциальное уравнение

$$((\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{m})\partial^2_{x'}+(\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{n}\otimes\mathbf{m}+\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{m})\partial_{x'}+ \\ +(\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}\cdot\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{n}\otimes\mathbf{m}-\rho c^2))\times f(irx')=0 \tag{2.4}$$

Характеристическое уравнение для (2.4), известное как уравнение Кристоффеля, имеет вид

$$(\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{m})\gamma^2+(\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{n}\otimes\mathbf{m}+\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{m})\gamma+ \\ +(\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}\cdot\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{n}\otimes\mathbf{m}-\rho c^2)=0 \tag{2.5}$$

Левая часть уравнения (2.5) представляет собой полином второго порядка относительно параметров Кристоффеля γ. Таким образом, для исследуемой упругой симметрии, волна Лява в слое может состоять только из двух парциальных волн.

3. Перемещения и поверхностные усилия в полупространстве. В дальнейшем предполагается, что слоистая среда состоит из n слоев, контактирующих, если не оговорено противное, с полупространством, нижний индекс $n+1$ будет относится к полупространству. Поскольку поле перемещений в полупространстве должно затухать с глубиной, соответствующий корень уравнения (2.5) должен быть комплексным с отрицательной мнимой частью, см. Замечание 1.1.

Имеет место следующее утверждение

Предложение 3.1. Затухание по глубине в моноклинном полупространстве возможно в том и только том случае, если фазовая скорость c принадлежит (непустому) скоростному интервалу

$$c\in\left(0;\sqrt{\rho_{n+1}{}^{-1}\left(\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}\cdot\cdot\mathbf{C}_{n+1}\cdot\cdot\mathbf{n}\otimes\mathbf{m}-\frac{(\mathbf{m}\cdot\operatorname{sym}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{C}_{n+1}\cdot\mathbf{v})\cdot\mathbf{m})^2}{(\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}_{n+1}\cdot\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{m})}\right)}\right), \tag{3.1}$$

где для произвольного тензора второго ранга $\mathbf{A}$: $\operatorname{sym}(\mathbf{A})\equiv\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^t)$. Для скоростного интервала (3.1) соответствующий параметр Кристоффеля γ_{n+1} – комплексный с отрицательной мнимой частью

$$\gamma_{n+1}=-\frac{\mathbf{m}\cdot\operatorname{sym}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{C}_{n+1}\cdot\mathbf{v})\cdot\mathbf{m}}{\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}_{n+1}\cdot\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{m}}- \\ -i\sqrt{\frac{\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}\cdot\cdot\mathbf{C}_{n+1}\cdot\cdot\mathbf{n}\otimes\mathbf{m}-\rho_{n+1}c^2}{\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}_{n+1}\cdot\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{m}}-\left(\frac{\mathbf{m}\cdot\operatorname{sym}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{C}_{n+1}\cdot\mathbf{v})\cdot\mathbf{m}}{\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}_{n+1}\cdot\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{m}}\right)^2} \tag{3.2}$$

Доказательство. Непосредственный анализ корней уравнения (2.5) показывает, что эти корни комплексны при отрицательном дискриминанте, – это дает верхнюю границу в (3.1). Остается показать, что подкоренное выражение в (3.1) – положительно. Но это вытекает из анализа квадратичного полинома

$$P(x)\equiv\mathbf{m}\otimes(x\mathbf{v}+\mathbf{n})\cdot\cdot\mathbf{C}_{n+1}\cdot\cdot(\mathbf{n}+x\mathbf{v})\otimes\mathbf{m} \tag{3.3}$$

Правая часть (3.3) положительна при любых действительных x, поскольку тензор упругости положительно определен. Несуществование действительных корней этого полинома завершает доказательство, поскольку дискриминант этого полинома совпадает (с точностью до множителя $-(\rho_{n+1})^{-1/2}$) с верхней границей в (3.1). Остается заметить, что выражение (3.2) получено из решения уравнения (2.5).

Следствие 1. Параметр γ_{n+1} не может быть кратным корнем уравнения Кристоффеля (2.5).

Доказательство вытекает из условия неравенства нулю дискриминанта уравнения (3.2), что необходимо для затухания решения по глубине.

Следствие 2. Если рассматриваемый материал обладает еще одной плоскостью упругой симметрии, нормаль к которой совпадает с вектором $\mathbf{n}$ или $\mathbf{v}$ (такой материал необходимо ортотропен), то допустимый скоростной диапазон имеет вид:

$$c \in (0; c_{n+1}^T), \tag{3.4}$$

где c_{n+1}^T – скорость поперечной объемной волны, распространяющейся в направлении вектора $\mathbf{n}$, и имеющей поляризацию, совпадающую с вектором $\mathbf{m}$. Для рассматриваемого случая параметр Кристоффеля γ_{n+1} – чисто мнимый

$$\gamma_{n+1} = -i\sqrt{\frac{\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}\cdot\cdot\mathbf{C}_{n+1}\cdot\cdot\mathbf{n}\otimes\mathbf{m} - \rho_{n+1}c^2}{\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}_{n+1}\cdot\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{m}}} \tag{3.5}$$

Доказательство. Для такого материала выражение $(\mathrm{sym}(\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}\cdot\cdot\mathbf{C}_{n+1}\cdot\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{m}))$, присутствующее в (3.2), становится равным нулю, поскольку это выражение содержит нечетное число вхождений векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}$. Далее, достаточно заметить, что остающееся подкоренное выражение в (3.1) совпадает со скоростью c_{n+1}^T. Оставшаяся часть доказательства вытекает из анализа уравнения (2.5).

Представление (1.1) для полупространства дает следующее поле поверхностных усилий на плоскости $\nu\cdot\mathbf{x} = 0$:

$$\mathbf{t}_{n+1}(\mathbf{x})\big|_{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}=0} = irC_{2n+1}\left(\gamma_{n+1}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{C}_{n+1}\cdot\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{m}\right) + \left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{C}_{n+1}\cdot\cdot\mathbf{n}\otimes\mathbf{m}\right)\right)e^{ir(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-ct)} \tag{3.6}$$

Предложение 3.2. Усилия (3.6) колинеарны вектору $\mathbf{m}$.

Доказательство вытекает из предположенной моноклинной симметрии относительно вектора $\mathbf{m}$, что обеспечивает четное вхождение вектора $\mathbf{m}$ в разложимые компоненты тензора $\mathbf{C}_{n+1}$ в базисе, образованном векторами $\mathbf{m}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{n}$. Таким образом, векторы $\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{C}_{n+1}\cdot\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{m}\right)$ и $\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{C}_{n+1}\cdot\cdot\mathbf{n}\otimes\mathbf{m}\right)$ в правой части (3.6) коллинеарны вектору $\mathbf{m}$.

4. Перемещения и поверхностные усилия в слоях. В этом разделе нижний индекс k $(1 \le k \le n)$ относится к соответствующему слою.

4.1. *Некратные корни*. Для некратных корней уравнения Кристоффеля и *ортотропного* материала с главными осями упругости, совпадающими с векторами $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}$, представление (1.1) остается верным. Все же, для целей настоящего анализа, который включает в себя более общий класс моноклинной симметрии, представление (1.1) будет модифицировано следующим образом

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{m}\left(C_{2k-1}\,\mathrm{sh}(ir\alpha_k x') + C_{2k}\,\mathrm{ch}(ir\alpha_k x')\right)e^{ir(\beta_k x' + \mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - ct)}, \tag{4.1}$$

где $\gamma_k = \alpha_k + \beta_k$, и

$$\begin{gathered}\alpha_k = -i\sqrt{\frac{\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}\cdot\cdot\mathbf{C}_k\cdot\cdot\mathbf{n}\otimes\mathbf{m} - \rho_k c^2}{\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}_k\cdot\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{m}} - \left(\frac{\mathbf{m}\cdot\mathrm{sym}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{C}_k\cdot\mathbf{v})\cdot\mathbf{m}}{\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}_k\cdot\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{m}}\right)^2} \\ \beta_k = -\frac{\mathbf{m}\cdot\mathrm{sym}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{C}_k\cdot\mathbf{v})\cdot\mathbf{m}}{\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}_k\cdot\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{m}}\end{gathered} \tag{4.2}$$

Таким образом, α_k – действительный или мнимый параметр, в зависимости от значения фазовой скорости, а β_k – действителен и независим от c.

Принимая во внимание (4.1), соответствующие поверхностные усилия на плоскости $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = x'$ имеют вид

$$\begin{gathered}\mathbf{t}_k(x') = ir(((\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}_k \cdot\cdot \mathbf{v} \otimes \mathbf{m})(\alpha_k \operatorname{ch}(ir\alpha_k x') + \beta_k \operatorname{sh}(ir\alpha_k x')) + \\ + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}_k \cdot\cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}) \operatorname{sh}(ir\alpha_k x'))C_{2k-1} + ((\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}_k \cdot\cdot \mathbf{v} \otimes \mathbf{m})(\alpha_k \operatorname{sh}(ir\alpha_k x') + \beta_k \operatorname{ch}(ir\alpha_k x') + \\ + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}_k \cdot\cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}) \operatorname{ch}(ir\alpha_k x'))C_{2k})e^{ir(\beta_k x' + \mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - ct)} \end{gathered} \tag{4.3}$$

Предложение 4.1. Поверхностные усилия (4.3) коллинеарны вектору $\mathbf{m}$.

Доказательство аналогично доказательству Предложения 3.2.

Принимая во внимание (4.3) и тот факт, что $\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}_k \cdot\cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} = 0$, $\beta_k = 0$, и $\gamma_k = \alpha_k$ для ортотропного материала с осями упругой симметрии, совпадающими с векторами $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, и $\mathbf{v}$, получаем следующее выражение для поверхностных усилий

$$\mathbf{t}_k(x') = ir\gamma_k \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}_k \cdot\cdot \mathbf{v} \otimes \mathbf{m}\right)\left(C_{2k-1} \operatorname{ch}(ir\gamma_k x') + C_{2k} \operatorname{sh}(ir\gamma_k x')\right) e^{ir(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - ct)} \tag{4.4}$$

4.2. *Кратные корни*. Представление (4.1) для волн Лява в слое становится неверным, когда в уравнении Кристоффеля появляются кратные корни, см. [19, 20].

Кратные корни возникают, когда параметр α_k в (4.2) становится равным нулю, отсюда получаем

Предложение 4.2. а) Фазовая скорость, при которой появляются кратные корни, определяется следующим выражением

$$c = \sqrt{\rho^{-1}\left(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \cdot\cdot \mathbf{C}_k \cdot\cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} - \frac{(\mathbf{m} \cdot \operatorname{sym}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{m})^2}{\mathbf{m} \otimes \mathbf{v} \cdot\cdot \mathbf{C}_k \cdot\cdot \mathbf{v} \otimes \mathbf{m}}\right)} \tag{4.5}$$

б) Соответствующий параметр Кристоффеля γ_k (необходимо действительный) имеет вид

$$\gamma_k = -\frac{\mathbf{m} \cdot \operatorname{sym}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{m}}{\mathbf{m} \otimes \mathbf{v} \cdot\cdot \mathbf{C}_k \cdot\cdot \mathbf{v} \otimes \mathbf{m}} \tag{4.6}$$

в) Представление поля перемещений, отвечающее кратным корням, имеет вид

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{m}\left(C_{2k-1} + irx' C_{2k}\right) e^{ir(\gamma_k x' + \mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - ct)} \tag{4.7}$$

г) Соответствующие поверхностные усилия на плоскости $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = x'$ имеют вид

$$\begin{gathered}\mathbf{t}_k(x') = ir((\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}_k \cdot\cdot \mathbf{v} \otimes \mathbf{m})(\gamma_k C_{2k-1} + (1 + ir\gamma_k x')C_{2k}) + \\ + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}_k \cdot\cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{m})(C_{2k-1} + irx' C_{2k}))e^{ir(\gamma_k x' + \mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - ct)}\end{gathered} \tag{4.8}$$

Доказательство. Условия а) и б) вытекают из условия обращения в нуль дискриминанта в правой части (3.2). Условие в) соответствует общему решению уравнения (2.4) в случае кратных корней; см. также [19–21].

Предложение 4.3. Поверхностные усилия (4.8) коллинеарны вектору $\mathbf{m}$.

Доказательство аналогично доказательству Предложения 3.2.

5. Модифицированный ПМ-метод. Ниже развивается модификация ПМ-метода применительно к разработанному четырехмерному комплексному формализму, см. [20, 21].

5.1. Передаточные матрицы. В соответствии с Предложениями 4.1 и 4.2 скалярные амплитуды перемещений и поверхностных усилий в k-м слое на плоскости $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = x'$ могут быть представлены в виде:

$$\begin{pmatrix} u_k(x') \\ t_k(x') \end{pmatrix} = \mathbf{M}_k(x') \cdot \begin{pmatrix} C_{2k-1} \\ C_{2k} \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

где $u_k(x') \equiv \left|\mathbf{u}_k(x')e^{-ir(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-ct)}\right|$, $t_k(x') \equiv \left|\mathbf{t}_k(x')e^{-ir(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-ct)}\right|$ – соответствующие скалярные амплитуды, а $\mathbf{M}_k$ – 2×2 матрица. Принимая во внимание выражения (4.1), (4.3), (4.5) и (4.6), матрица $\mathbf{M}_k$ принимает вид

Некратные корни

$$\mathbf{M}_k(x') = ir\begin{pmatrix} (ir)^{-1}\,\mathrm{sh}(ir\alpha_k x') & (ir)^{-1}\,\mathrm{ch}(ir\alpha_k x') \\ \begin{pmatrix} (\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}_k\cdot\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{m})\times \\ \times(\alpha_k\,\mathrm{ch}(ir\alpha_k x') + \\ +\beta_k\,\mathrm{sh}(ir\alpha_k x')) + \\ +(\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}_k\cdot\cdot\mathbf{n}\otimes\mathbf{m})\,\mathrm{sh}(ir\alpha_k x') \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}_k\cdot\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{m})\times \\ \times(\alpha_k\,\mathrm{sh}(ir\alpha_k x') + \\ +\beta_k\,\mathrm{ch}(ir\alpha_k x')) + \\ +(\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}_k\cdot\cdot\mathbf{n}\otimes\mathbf{m})\,\mathrm{ch}(ir\alpha_k x') \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{ir\beta_k x'} \quad (5.2)$$

б) *Кратные корни*

$$\mathbf{M}_k(x') = ir\begin{pmatrix} (ir)^{-1} & x' \\ \begin{pmatrix} \gamma_k(\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}_k\cdot\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{m}) + \\ +(\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}_k\cdot\cdot\mathbf{n}\otimes\mathbf{m}) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (1+ir\gamma_k x')(\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}_k\cdot\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{m}) + \\ +irx'(\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}_k\cdot\cdot\mathbf{n}\otimes\mathbf{m}) \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{ir\gamma_k x'} \quad (5.3)$$

Заметим, что в соответствии с (4.2) параметр β_k в (5.2) не зависит от фазовой скорости c. Справедливо следующее утверждение:

Предложение 5.1. Вне зависимости от кратности корней, матрицы $\mathbf{M}_k$ не вырождены при любых действительных x'.

Доказательство. Во-первых, заметим, что экспоненциальные множители $e^{ir\beta_k x'}$ в (5.2) и $e^{ir\gamma_k x'}$ в (5.3) отличны от нуля при любых x'; далее, непосредственный анализ показывает, что матрицы в правых частях (5.2), (5.3) не вырождены при любых x' (определитель матрицы в (5.2) равен $-\alpha_k(\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}_k\cdot\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{m})e^{ir\beta_k x'}$ с $\alpha_k \neq 0$, поскольку корни некратные; в случае матрицы (5.3) соответствующий определитель равен $(\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}_k\cdot\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{m})e^{ir\gamma_k x'}$).

Теперь, используя матрицы $\mathbf{M}_k$, перемещения и поверхностные усилия на границе раздела между n-м слоем и полупространством могут быть представлены в терминах только коэффициентов C_1 и C_2

$$\begin{pmatrix} u_n(-h_n/2) \\ t_n(-h_n/2) \end{pmatrix} = \left(\prod_{k=2}^{n}(\mathbf{M}_k(-h_k/2)\cdot\mathbf{M}_k^{-1}(h_k/2))\right)\cdot\mathbf{M}_1(-h_1/2)\cdot\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

где h_k, $k = 1,\ldots,n$ – толщины соответствующих слоев.

5.2. Граничные условия на внешней границе. Выражения (4.3), (4.8) позволяют записать условия отсутствия касательных напряжений на внешней границе в виде первого слоя

$$t_1(h_1/2) \equiv \vec{B}_1(h_1/2)\cdot\vec{C} = 0, \quad (5.5)$$

где t_1 – соответствующая скалярная амплитуда; $\vec{B}_1(h_1/2) = (X_1(h_1/2);\ Y_1(h_1/2))$ и $\vec{C} = (C_1; C_2)$. Компоненты $X_1(h_1/2)$ и $Y_1(h_1/2)$ имеют вид

а) *Некратные корни*

$$\begin{aligned} X_1(h_1/2) &= ((\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}_1\cdot\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{m})(\alpha_1\,\mathrm{ch}(ir\alpha_1 h_1/2) + \beta_1\,\mathrm{sh}(ir\alpha_1 h_1/2)) + \\ &\quad + (\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}_1\cdot\cdot\mathbf{n}\otimes\mathbf{m})\,\mathrm{sh}(ir\alpha_1 h_1/2))ire^{ir\beta_1 h_1/2} \\ Y_1(h_1/2) &= ((\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}_1\cdot\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{m})(\alpha_1\,\mathrm{sh}(ir\alpha_1 h_1/2) + \beta_1\,\mathrm{ch}(ir\alpha_1 h_1/2)) + \\ &\quad + (\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}_1\cdot\cdot\mathbf{n}\otimes\mathbf{m})\,\mathrm{ch}(ir\alpha_1 h_1/2))ire^{ir\beta_1 h_1/2} \end{aligned} \quad (5.6)$$

б) *Кратные корни*

$$\begin{aligned} X_1(h_1/2) &= \left(\gamma_1\left(\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}_1\cdot\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{m}\right)+\left(\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}_1\cdot\cdot\mathbf{n}\otimes\mathbf{m}\right)\right)ire^{ir\gamma_1h_1/2} \\ Y_1(h_1/2) &= \left((1+ir\gamma_1h_1/2)\left(\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}_1\cdot\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{m}\right)+irh_1/2\left(\mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{C}_1\cdot\cdot\mathbf{n}\otimes\mathbf{m}\right)\right)ire^{ir\gamma_1h_1/2} \end{aligned} \tag{5.7}$$

Уравнения (5.1) позволяют выразить (с точностью до множителя) коэффициенты C_1 и C_2 в виде решения следующего уравнения

$$\vec{T}_1(h_1/2)\times\vec{C} = 0 \tag{5.8}$$

Причем, выражение (5.8) эквивалентно

$$\vec{T}_1(h_1/2) = \left(-Y_1(h_1/2); X_1(h_1/2)\right) \tag{5.9}$$

Из (5.8) видно, что двумерный вектор $\vec{T}_1(h_1/2)$ коллинеарен вектору $\vec{C}$.

5.3. Граничные условия на границе раздела *слой—полупространство*. Контактные условия на соответствующей границе раздела могут быть представлены в виде:

$$\vec{V}_n(-h_n/2)\cdot\vec{W}_{n+1}(0) = 0, \tag{5.10}$$

где, по аналогии с (5.9), имеем

$$\vec{V}_n(-h_n/2) = \left(u_n(-h_n/2),\, t_n(-h_n/2)\right) \tag{5.11}$$

Условие (5.11) необходимо дополнить контактным условием

$$\vec{W}_{n+1}(0) = \left(-t_{n+1}(0),\, u_{n+1}(0)\right) \tag{5.12}$$

В (5.12) обозначено $t_{n+1}(0) = \left|\mathbf{t}_{n+1}(0)e^{-ir(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-ct)}\right|$, а вектор $\mathbf{t}_{n+1}(0)$ определен по (3.6). Принимая во внимание (5.11), (5.12), видим, что уравнение (5.10) выражает собой колинеарность векторов $\vec{V}_n$ и $\left(u_{n+1}(0), t_{n+1}(0)\right)$, последнее эквивалентно условию коллинеарности перемещений и усилий при переходе через границу раздела компонент. В (5.12) предполагается, что в локальной системе координат для полупространства интерфейсная плоскость задается уравнением $\mathbf{v}\cdot\mathbf{x} = 0$.

5.4. Разрешающее уравнение для волн Лява. Принимая во внимание уравнения (5.4), (5.8), (5.10) и (5.12), объединенное уравнение модифицированного ПМ-метода может быть представлено в виде

$$\vec{W}_{n+1}(0)\cdot\left(\left(\prod_{k=2}^{n}\mathbf{M}_k(-h_k/2)\cdot\mathbf{M}_k^{-1}(h_k/2)\right)\cdot\mathbf{M}_1(-h_1/2)\right)\cdot\vec{T}_1(h_1/2) = 0 \tag{5.13}$$

Уравнение (5.13) представляет собой искомое разрешающее уравнение для волн Лява.

Уравнение (5.13), в частности, позволяет получить аналитическое дисперсионное выражение для трансверсально-изотропного слоя, находящегося между двумя трансверсально-изотропными полупространствами

$$\omega = -\frac{c}{|\gamma_2|\,h_2}\,\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{|\zeta_2|\left(|\zeta_3|+|\zeta_1|\right)}{|\zeta_2|^2+|\zeta_1||\zeta_3|}\right) \tag{5.14}$$

6. Численный пример. С помощью разработанного метода исследовалась дисперсия волн Лява в многослойной системе, состоящей из чередующихся упруго анизотропных слоев контактирующих с трансверсально изотропным полупространством [22]. Полупространство и слои имеют физико-механические характеристики, определяемые следующими выражениями:

Четные слои, монокристалл кремния (Si), ориентация 100

$$C_{2k}^{1212} = 79.913\ \text{ГПа},\quad \rho_{2k} = 2339.9\ \text{кг/м}^3,\quad h_{2k} = 10^{-7}\ \text{м} \tag{6.1}$$

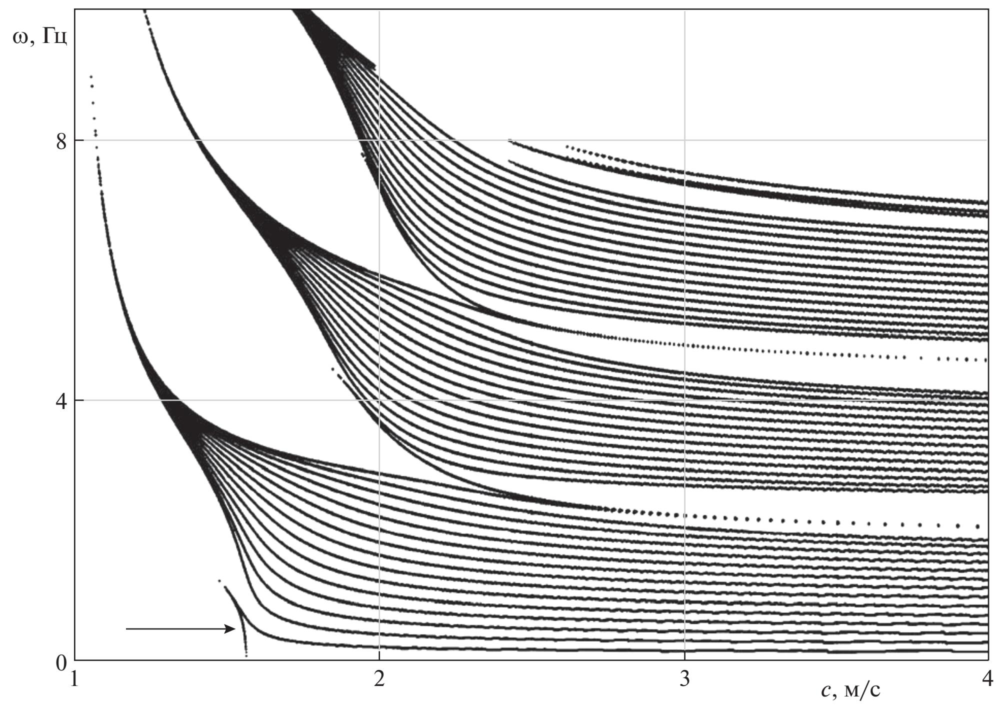

Рис. 1. Первые 25 дисперсионных кривых волн Лява в слоистой системе (6.1)–(6.3).

Нечетные слои, трансверсально изотропный карбид кремния (SiC)

$$C_{2k-1}^{1212} = 122.80 \text{ ГПа}, \quad \rho_{2k-1} = 3100 \text{ кг/м}^3, \quad h_{2k-1} = 10^{-7} \text{ м} \tag{6.2}$$

Полупространство, трансверсально изотропный нитрид кремния (Si_3N_4)

$$C_N^{1212} = 61.447 \text{ ГПа}, \quad \rho_N = 3290 \text{ кг/м}^3 \tag{6.3}$$

Для рассматриваемой 15-слойной системы (14 чередующихся слоев и контактирующее полупространство) на рис. 1 построены соответствующие дисперсионные кривые.

На рис. 1 стрелкой отмечена фундаментальная мода, имеющая нетривиальный предел фазовой скорости $\lim\limits_{\omega\to 0} c(\omega) = c_0$. Для вычисления предельной фазовой скорости c_0 применимы асимптотические методы [15–17].

Заключительные замечания. Для анизотропной слоистой среды, обладающей моноклинной симметрией, проведен анализ дисперсионных уравнений для волн Лява, с горизонтальной поперечной поляризацией. В замкнутом виде получены дисперсионные уравнения для произвольного числа слоев, контактирующих с упругим анизотропным (моноклинным) полупространством. В случае SH-волн в трехслойной трансверсально изотропной среде, по-видимому, впервые удалось получить аналитические решения для соответствующих дисперсионных уравнений.

Полученные в последнем разделе результаты могут служить объяснением появления высокочастотного волновода для волн с поперечной горизонтальной поляризацией, распространяющихся в системе ортотропный слой, находящийся между ортотропными полупространствами.

Автор (СВК) благодарит РФФИ (Грант 20-08-00419) за частичную финансовую поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Love A.E.H.* Some Problems of Geodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1911.
2. *Dieulesaint E., Royer D.* Elastic Waves in Solids. New York: Wiley, 1980.
3. *Sengupta P.R., Nath S.* Surface waves in fiber-reinforced anisotropic elastic media // Sadhana. 2001. V. 26. P. 363–370.
4. *Thomson W.T.* Transmission of elastic waves through a stratified solid medium // J. Appl. Phys. 1950. V. 21. P. 89–93.
5. *Haskell N.A.* Dispersion of surface waves on multilayered media // Bull. Seism. Soc. Am. 1953. V. 43. P. 17–34.
6. *Knopoff L.* A matrix method for elastic wave problems // Bull. Seism. Soc. Am. 1964. V. 54. P. 431–438.
7. *Mal A.K., Knopoff L.* A differential equation for surface waves in layers with varying thickness // J. Math. Anal. App. 1968. V. 21. P. 431–441.
8. *Dunkin J.W.* Computation of modal solutions in layered elastic media at high frequencies // Bull. Seism. Soc. Am. 1965. V. 55. P. 335–358.
9. *Kundu T., Mal A.K.* Elastic waves in a multilayered solid due to a dislocation source // Wave Motion. 1985. V. 7. P. 459–471.
10. *Evans R.B.* The decoupling of seismic waves // Wave Motion. 1986. V. 8. P. 321–328.
11. *Castaings M., Hosten B.* Delta operator technique to improve the Thomson–Haskell method stability for propagation in multilayered anisotropic absorbing plates // J. Acoust. Soc. Am. 1994. V. 95. P. 1931–1941.
12. *Lowe M.J.S.* Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media // IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. 1995. V. 42. P. 525–542.
13. *Mallah M., Philippe L., Khater A.* Numerical computations of elastic wave propagation in anisotropic thin films deposited on substrates // Comp. Mater. Sci. 1999. V. 15. P. 411–421.
14. *Wobst R.* The generalized eigenvalue problem and acoustic surface wave computations // Computing. 1987. V. 39. P. 57–69.
15. *Ahmad M., Nolde E., Pichugin A.V.* Explicit asymptotic modelling of transient Love waves propagated along a thin coating // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2011. V. 62(1). P. 173–181.
16. *Prikazchikova L., Aydın Y., Erbaş B., Kaplunov J.* Asymptotic analysis of an anti-plane dynamic problem for a three-layered strongly inhomogeneous laminate // Math.&Mech. Solids. 2020. V. 25(1). P. 3–16.
17. *Kaplunov J., Prikazchikova L., Alkinidri M.* Antiplane shear of an asymmetric sandwich plate // Continuum Mech.&Thermodyn. 2021. (to appear).
18. *Gurtin M.E.* The linear theory of elasticity // in: Handbuch der Physik. Bd. VIa/2. Berlin: Springer, 1972.
19. *Kuznetsov S.V.* “Forbidden” planes for Rayleigh waves // Quart. Appl. Math. 2002. V. 60. P. 87–97.
20. *Kuznetsov S.V.* Subsonic Lamb waves in anisotropic plates // Quart. Appl. Math. 2002. V. 60. P. 577–587.
21. *Kuznetsov S.V.* Surface waves of Non-Rayleigh type // Quart. Appl. Math. 2003. V. 61. P. 575–582.
22. *Djeran-Maigre I., Kuznetsov S.* Solitary SH waves in two-layered traction-free plates // Comptes Rendus Mécanique. 2008. V. 336(1–2). P. 102–107.

Love Waves in a Stratified Monocline Medium

S. V. Kuznetsov[a,b,c,#] and V. L. Mondrus[c]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*
[b] *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*
[c] *Moscow State Construction University, Moscow, Russia*
[#]*e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru*

A mathematical model has been constructed to describe the propagation of Love waves in layered anisotropic (monoclinic) media. To construct a solution, a modified Transfer Matrix method (PM-method) has been developed. In a closed form, dispersion relations are obtained for media consisting of one and two elastically anisotropic layers in contact with an anisotropic half-space. The conditions for the existence of Love waves are analyzed. Waves with horizontal transverse polarization of non-canonical type are studied.

Keywords: Love wave, surface wave, anisotropy, layered medium

REFERENCES

1. *Love A.E.H.* Some Problems of Geodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1911.
2. *Dieulesaint E., Royer D.* Elastic Waves in Solids. N.Y.: Wiley, 1980.
3. *Sengupta P.R., Nath S.* Surface waves in fiber-reinforced anisotropic elastic media // Sadhana, 2001б vol. 26, pp. 363–370.
4. *Thomson W.T.* Transmission of elastic waves through a stratified solid medium // J. Appl. Phys., 1950, vol. 21, pp. 89–93.
5. *Haskell N.A.* Dispersion of surface waves on multilayered media // Bull. Seism. Soc. Am., 1953, vol. 43, pp. 17–34.
6. *Knopoff L.* A matrix method for elastic wave problems // Bull. Seism. Soc. Am., 1964, vol. 54, pp. 431–438.
7. *Mal A.K., Knopoff L.* A differential equation for surface waves in layers with varying thickness // J. Math. Anal. App., 1968, vol. 21, pp. 431–441.
8. *Dunkin J.W.* Computation of modal solutions in layered elastic media at high frequencies // Bull. Seism. Soc. Am., 1965, vol. 55, pp. 335–358.
9. *Kundu T., Mal A.K.* Elastic waves in a multilayered solid due to a dislocation source // Wave Motion, 1985, vol. 7, pp. 459–471.
10. *Evans R.B.* The decoupling of seismic waves // Wave Motion, 1986, vol. 8, pp. 321–328.
11. *Castaings M., Hosten B.* Delta operator technique to improve the Thomson–Haskell method stability for propagation in multilayered anisotropic absorbing plates // J. Acoust. Soc. Am., 1994, vol. 95, pp. 1931–1941.
12. *Lowe M.J.S.* Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media // IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 1995, vol. 42, pp. 525–542.
13. *Mallah M., Philippe L., Khater A.* Numerical computations of elastic wave propagation in anisotropic thin films deposited on substrates // Comp. Mater. Sci., 1999, vol. 15, pp. 411–421.
14. *Wobst R.* The generalized eigenvalue problem and acoustic surface wave computations // Computing, 1987, vol. 39, pp. 57–69.
15. *Ahmad M., Nolde E., Pichugin A.V.* Explicit asymptotic modelling of transient Love waves propagated along a thin coating // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 2011, vol. 62(1), pp. 173–181.
16. *Prikazchikova L., Aydın Y., Erbaş B., Kaplunov J.* Asymptotic analysis of an anti-plane dynamic problem for a three-layered strongly inhomogeneous laminate // Math.&Mech. Solids, 2020, vol. 25(1), pp. 3–16.
17. *Kaplunov J., Prikazchikova L., Alkinidri M.* Antiplane shear of an asymmetric sandwich plate // Continuum Mech.&Thermodyn., 2021. (to appear).
18. *Gurtin M.E.* The linear theory of elasticity // in: Handbuch der Physik, Bd. VIa/2. Berlin: Springer, 1972.
19. *Kuznetsov S.V.* "Forbidden" planes for Rayleigh waves // Quart. Appl. Math., 2002, vol. 60, pp. 87–97.
20. *Kuznetsov S.V.* Subsonic Lamb waves in anisotropic plates // Quart. Appl. Math., 2002, vol. 60, pp. 577–587.
21. *Kuznetsov S.V.* Surface waves of Non-Rayleigh type // Quart. Appl. Math., 2003, vol. 61, pp. 575–582.
22. *Djeran-Maigre I., Kuznetsov S.* Solitary SH waves in two-layered traction-free plates // Comptes Rendus Mécanique, 2008, vol. 336(1–2), pp. 102–107.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 3, с. 358–369

УДК 539.3

ОПТИМАЛЬНОЕ ДЕМПФИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ПАНЕЛИ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

Н. В. Баничук[1,*], С. Ю. Иванова[1,]**

[1] Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
**e-mail: banichuk@ipmnet.ru*
***e-mail: syuivanova@yandex.ru*

Поступила в редакцию 24.12.2020 г.
После доработки 20.01.2021 г.
Принята к публикации 02.02.2021 г.

Рассматривается движение упругой панели в потоке идеальной жидкости. Предполагается, что панель совершает малые поперечные колебания и подвержена для их подавления внешним механическим воздействиям. Формулируется и решается задача оптимизации процесса демпфирования колебаний, оцениваемых квадратичным энергетическим критерием. Выведены необходимые условия оптимальности, применяемые для подавления гидроупругих колебаний на конечном интервале времени. Приводится итерационный алгоритм демпфирования колебаний, основанный на последовательном решении “прямых” задач взаимодействия движущихся жидкости и панели и сопряженных задач возвратного интегрирования однородного уравнения с последовательным определением соответствующего приближения для оптимального управления, подавляющего колебания. Развиваемый алгоритм оптимального демпфирования колебаний иллюстрируется на примере аналитического определения стабилизирующего воздействия.

Ключевые слова: гидроупругое взаимодействие, гашение колебаний, оптимизация демпфирующих воздействий

DOI: 10.31857/S0032823521020028

Проблема подавления колебаний механических систем представляет значительный теоретический и прикладной интерес. Для распределенных систем колебания и динамическая устойчивость изучались как в рамках самосопряженных (консервативных), так и несамосопряженных (неконсервативных) задач. Возникающие в этом направлении вопросы рассматривались ранее [1–3]. Значительное внимание при этом уделялось проблемам колебаний деформируемых систем, взаимодействующих с жидкостью или газом (см., например, [4–8]). Отметим здесь представляющие интерес задачи о гидроупругих взаимодействиях, основанные на точных выражениях для реакции жидкости [9–14]. Исследовались [13–19] проблемы устойчивости и оптимизации движущихся упругих и вязкоупругих материалов. В результате определялись критические величины скоростей материала и потока жидкости, а также критические значения натяжения материала, приводящие к потере устойчивости.

В данной работе на основе точного аналитического решения связанной задачи гидроупругости и использования аппроксимации реакции жидкости выведено уравнение в частных производных, описывающее колебания панели, движущейся поступательно в потоке идеальной жидкости. Приведена формулировка и исследование задачи оптимального подавления колебаний в результате приложения к панели активных демпфирующих воздействий. Решение задачи оптимизации выполняется на основе выведенных в работе необходимых условий экстремума и конечно-элементной аппроксимации дифференциального уравнения вынужденных колебаний и сопряженного однородного дифференциального уравнения. Реализация метода Галёркина сводится к интегрированию двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих функцию прогибов и сопряженную переменную. Описывается эффективный итерационный алгоритм отыскания определяющих переменных и соответствующих демпфирующих воздействий. Приводится иллюстрирующий пример аналитического решения задачи оптимального подавления колебаний.

1. Основные соотношения. Рассматривается равномерное поступательное движение со скоростью V_0 упругой панели, погруженной в поток идеальной несжимаемой жидкости, движущейся со скоростью v_∞ в направлении оси x используемой лабораторной (Эйлеровой) системы координат xOy (рис. 1). Уравнение малых поперечных колебаний движущейся панели записывается в виде [13]

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2mV_0\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \left(mV_0^2 - T\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = q_f + g_p, \tag{1.1}$$

где $w = w(x,t)$ – поперечное перемещение, m – масса, приходящаяся на единицу площади панели, T – величина натяжения, D – изгибная жесткость, $q_f = q_f(w)$ – реакция жидкости, а $g_p = g_p(x,t)$ – прикладываемое поперечное управляющее воздействие. Используя в дальнейшем безразмерные пространственную и временную координаты $x' = x/l$, $t' = t/\tau$ и безразмерную переменную $w' = w/l$ (полудлина пролета панели l и характерное время τ рассматриваются в качестве заданных размерных характерных величин), запишем, опуская штрихи у безразмерных величин, начальные и граничные условия

$$(w)_{t=0} = g_1(x), \quad \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{t=0} = g_2(x); \quad x \in [-1, 1] \tag{1.2}$$

$$(w)_{x=\pm 1} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=\pm 1} = 0; \quad t \in [0, t_f], \tag{1.3}$$

в которых t_f – безразмерное время окончания рассматриваемого процесса демпфирования колебаний, $g_1(x)$ и $g_2(x)$ – заданные начальные возмущения перемещений и их скоростей. Граничные условия (1.3) соответствуют опиранию краев панели. Выбор фиксированной в пространстве Эйлеровой системы координат объясняется удобством учета граничных условий (1.3) в фиксированных точках, так как при использовании Лагранжевой системы координат, связанной с движущейся панелью или потоком жидкости, эти условия становятся подвижными. Данная постановка соответствует движению бумажной ленты, поддерживаемой валками, в бумагоделательном производстве и др. Предполагается, что фигурирующие при формулировке динамической модели функции $g_1(x)$, $g_2(x)$ и $g_p(x,t)$ удовлетворяют условиям

$$g_1 \in H^1(-1, 1), \quad g_2 \in L^2(-1, 1)$$
$$g_p \in L^2(\Omega), \quad (x,t) \in \Omega = \{(x,t): -1 \le x \le 1,\ 0 \le t \le t_f\}$$

Влияние воздействия потока жидкости на колебания движущейся упругой панели описывается, как показано в [11–13], при помощи сингулярного интеграла, усложняющего реализацию вычислительного процесса при использовании модели (1.1)–(1.3). Учитывая необходимость многократного использования в данной работе этой моде-

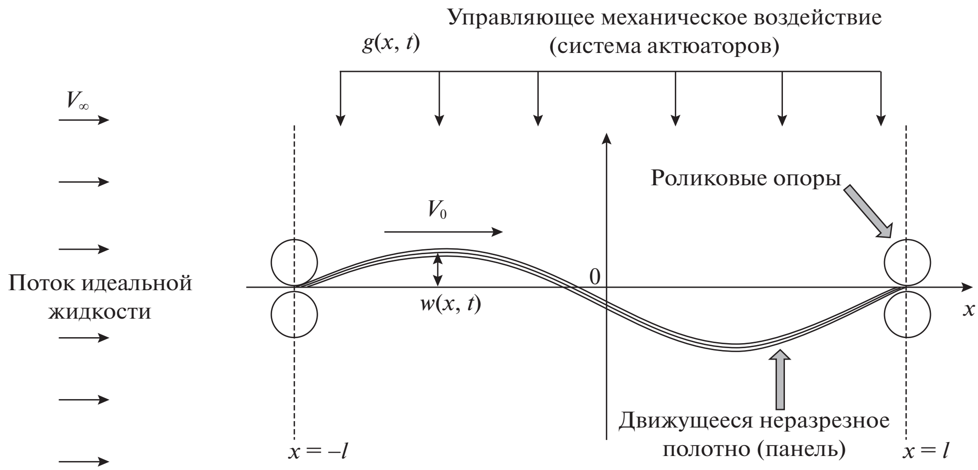

Рис. 1. Движущаяся панель в потоке жидкости.

ли, применим в дальнейшем аппроксимацию реакции жидкости следующим дифференциальным выражением [14]

$$q_f = -\rho_f \frac{\pi}{4}\left(\frac{l}{\tau^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\frac{v_\infty}{\tau}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{v_\infty^2}{l}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \quad m_a = \frac{\pi l}{4}\rho_f,$$

в котором ρ_f – плотность жидкости, а m_a – присоединенная масса жидкости. Приведенное выражение для q_f позволяет представить уравнение колебаний движущейся панели в следующем виде:

$$\frac{1}{\tau^2}(m + m_a)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2}{l\tau}(mV_0 + m_a v_\infty)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} +$$
$$+\frac{1}{l^2}\left(mV_0^2 + m_a v_\infty^2 - T\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{D}{l^4}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{1}{l}g_p; \quad (x,t) \in \Omega$$

С использованием величины $C = \sqrt{T/m}$ определим основные используемые безразмерные параметры

$$\alpha = \frac{l}{\tau C}, \quad \beta = \frac{D}{ml^2C^2} = \frac{D}{l^2T}, \quad \kappa = \frac{V_0}{C}, \quad r_m = \frac{m_a}{m}, \quad r_v = \frac{v_\infty}{V_0}, \quad \gamma = \frac{l}{m}\rho_f,$$

позволяющие придать основному уравнению гидроупругих колебаний удобную для проведения анализа безразмерную форму

$$\mathrm{L}(w) \equiv \alpha^2(1 + r_m)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\alpha\kappa(1 + r_m r_v)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} +$$
$$+\left[\kappa^2\left(1 + r_m r_v^2\right) - 1\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = g(x,t); \quad (x,t) \in \Omega \tag{1.4}$$

Заметим, что фигурирующая в правой части уравнения (1.4) безразмерная функция нагрузки $g = g(x,t)$ (функция безразмерных координат x, t) связана с исходной размерной величиной g_p следующим соотношением:

$$g(x,t) = \frac{l}{T}g_p(lx, \tau t) \tag{1.5}$$

Заметим также, что модели присоединенных масс часто используются для учета инерционных эффектов в задачах о взаимодействии элементов конструкций с жидкостью. В данной работе теория присоединенных масс применена для моделирования поведения гибких движущихся панелей. При этом предполагаются выполненными предположения о плавном обтекании движущейся панели жидкостью и о не превышении критических скоростей ($V_0 < (V_0)_{\text{cr}}$, $v_\infty < (v_\infty)_{\text{cr}}$), т.е. скоростей дивергенции и флаттера [13, 14]. При сделанных предположениях невозмущенное состояние движущейся панели является устойчивым. Точное аналитическое выражение для реакции жидкости в форме сингулярного интеграла [13, 14] аппроксимируется дифференциальным выражением, которое было получено строгим аналитическим методом и не накладывает дополнительных ограничений на параметры задачи и применимо при тех же условиях, что и исходная интегро-дифференциальная модель.

2. Задача оптимизации и условия оптимальности. Рассмотрим процесс подавления возникающих поперечных гидроупругих колебаний движущейся в потоке панели, осуществляющийся за счет прикладываемых к панели поперечных нагрузок $g = g(x,t)$ (управляющих воздействий). Качество процесса подавления колебаний оценивается значением функционала, зависящего от перемещений $w(x,t_f)$ и скоростей $\partial w(x,t_f)/\partial t$ в конечный момент времени $t = t_f$, то есть

$$J_g = \int_{-1}^{1}\left[\alpha_1 w^2 + \alpha_2\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]_{t=t_f} dx \tag{2.1}$$

Здесь $\alpha_1 \ge 0$ и $\alpha_2 \ge 0$ – заданные параметры.

На управляющее демпфирующее воздействие $g(x,t)$ наложено энергетическое ограничение в виде следующего неравенства:

$$J_\mu = \int_\Omega g^2(x,t)\,d\Omega \le M_0, \tag{2.2}$$

где $M_0 > 0$ – заданная постоянная.

Рассматриваемая задача оптимизации процесса гашения колебаний движущейся в потоке жидкости упругой панели заключается в отыскании управляющего экстремального воздействия $g(x,t)$ ($(x,t) \in \Omega$), удовлетворяющего энергетическому неравенству (2.2) и минимизирующего квадратичный функционал качества (2.1).

Для реализации процесса минимизации рассматриваемого функционала выведем необходимые условия оптимальности. Для этого воспользуемся уравнением колебаний и начально-краевыми условиями в вариациях

$$\begin{gathered}\delta \mathrm{L}(w) = \mathrm{L}(\delta w) = \alpha^2(1 + r_m)\frac{\partial^2 \delta w}{\partial t^2} + 2\alpha\kappa(1 + r_m r_v)\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial t} + \\ + \left[\kappa^2\left(1 + r_m r_v^2\right) - 1\right]\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^4 \delta w}{\partial x^4} - \delta g = 0; \quad (x,t) \in \Omega\end{gathered} \tag{2.3}$$

$$(\delta w)_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \delta w}{\partial t}\right)_{t=0} = 0; \quad x \in [-1, 1] \tag{2.4}$$

$$(\delta w)_{x=\pm 1} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}\right)_{x=\pm 1} = 0; \quad t \in [0, t_f], \tag{2.5}$$

соответствующими (1.1)–(1.3). Используем в дальнейшем также выражения для вариаций минимизируемого функционала δJ_g и ограничения (2.2), записанного предварительно в виде равенства при помощи введения вспомогательной неизвестной θ [16]

$$J_\mu - M_0 + \theta^2 = 0 \tag{2.6}$$

Будем иметь

$$\delta J_g = 2\int_{-1}^{1}\left[\alpha_1 w\delta w + \alpha_2 \frac{\partial w}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right]_{t=t_f} dx$$

$$\delta\left(J_\mu - M_0 + \theta^2\right) = 2\int_\Omega g\delta g d\Omega + 2\theta\delta\theta = 0 \tag{2.7}$$

Введем в рассмотрение сопряженную переменную $v(x,t)$, удовлетворяющую по определению граничным условиям

$$(v)_{x=\pm 1} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{x=\pm 1} = 0; \quad t\in[0,t_f], \tag{2.8}$$

совпадающим с условиями опирания, наложенными на переменную w в (1.3). Умножим затем уравнение в вариациях (2.3) на переменную v с последующим интегрированием произведения по области Ω. Используя начально-краевые условия (2.4), (2.8) и интегрирование "по частям", представим вариацию полученного интеграла в виде

$$\delta J_a = \int_\Omega v[\mathrm{L}(\delta w) - \delta g]d\Omega = \int_\Omega \{[\mathrm{L}(v)]\delta w - v\delta g\}d\Omega +$$
$$+\int_{-1}^{1}\left\{\alpha^2(1+r_m)\left[v\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) - \frac{\partial v}{\partial t}\delta w\right] + 2\alpha\kappa(1+r_m r_v)\frac{\partial v}{\partial x}\delta w\right\}_{t=t_f} dx \tag{2.9}$$

Необходимое условие оптимальности процесса демпфирования колебаний сводится к равенству нулю вариации расширенного функционала Лагранжа, то есть

$$\delta J = \delta J_g + \delta J_a + \mu\left(2\int_\Omega g\delta g d\Omega + 2\theta\delta\theta\right) = 0, \tag{2.10}$$

где μ – множитель Лагранжа. Подстановка выражений (2.7), (2.9) в уравнение (2.10) и учет произвольности вариаций δg, δw при $(x,t)\in\Omega$ и вариации $\delta\theta$ приводит к необходимому условию оптимальности

$$g(x,t) = \frac{1}{2\mu}v(x,t); \quad (x,t)\in\Omega, \tag{2.11}$$

если ограничение (2.2) выполняется со знаком строгого равенства и, следовательно, $\theta = 0$. При этом

$$\mu^2 = \frac{1}{4M_0}\int_\Omega v^2(x,t)d\Omega \tag{2.12}$$

В случае строгого неравенства в (2.2) величина вспомогательной переменной θ в (2.6) отлична от нуля, а из необходимого условия экстремума ($\mu\theta = 0$), которое получается из (2.10), следует, что $\mu = 0$.

Из условия обращения в ноль полной вариации в (2.10) также получим однородное дифференциальное уравнение для сопряженной переменной

$$\mathrm{L}(v) \equiv \alpha^2(1+r_m)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\alpha\kappa(1+r_m r_v)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t} + \left[\kappa^2\left(1+r_m r_v^2\right) - 1\right]\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0; \quad (x,t)\in\Omega, \tag{2.13}$$

удовлетворяющей условиям в конечный момент времени $t = t_f$ рассматриваемого временного интервала

$$(v)_{t=t_f} = -\frac{2\alpha_2}{\alpha^2(1+r_m)}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{t=t_f}; \quad x\in[-1,1] \tag{2.14}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{t=t_f} = \frac{2}{\alpha(1+r_m)}\left[\frac{\alpha_1}{\alpha}w + \kappa(1+r_m r_v)\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{t=t_f}; \quad x \in [-1, 1] \tag{2.15}$$

При помощи исключения зависимости от $\partial v/\partial x$ в правой части условия (2.15) получим удобное для применения условие в конечный момент времени

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{t=t_f} = \frac{2}{\alpha^2(1+r_m)}\left[\alpha_1 w - \frac{2\alpha_2(1+r_m r_v)}{\alpha(1+r_m)}\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\right]_{t=t_f}; \quad x \in [-1, 1] \tag{2.16}$$

Отметим, что условие экстремума расширенного функционала

$$\mu\theta = 0 \tag{2.17}$$

означает, что для неактивного ограничения (2.2), выполняющегося со знаком строгого неравенства, из (2.2) и (2.6) следует, что $\theta \neq 0$. Соответствующий множитель Лагранжа в этом случае должен полагаться равным нулю, как это следует из необходимого условия оптимальности (2.17). Тем самым, ограничение (2.2) в этом случае не учитывается при отыскании оптимального решения. Если же $\mu \neq 0$, то $\theta = 0$, и соответствующее ограничение является “активным”.

Таким образом, рассматриваемая задача оптимизации сводится к решению связанных начально-краевой задачи (1.2)–(1.4) и краевой задачи (2.8), (2.13) с условиями (2.14), (2.15) или (2.14), (2.16) в конечный момент времени. При этом оптимальное демпфирующее воздействие $g(x,t)$ находится с применением условий экстремума.

3. Метод решения задачи оптимизации. Для отыскания способа оптимального гашения колебаний движущейся в потоке жидкости упругой панели предложен алгоритм определения управляющих воздействий, который основывается на применении выведенных условий экстремума и решении связанных терминальными условиями уравнений, определяющих распределения прогибов $w(x,t)$ и сопряженной переменной $v(x,t)$. Итерационный алгоритм решения задачи оптимизации заключается в последовательном выполнении описанных ниже итераций и шагов.

На первом шаге первой итерации решается “прямая” задача, состоящая в интегрировании уравнения динамики (1.4) с граничными условиями (1.3) при $x = \pm 1$ и начальными условиями (1.2) при $t = 0$, описывающими начальные распределения возмущений перемещений w и скоростей $\partial w/\partial t$ при $t = 0$. На начальном этапе итерационного процесса при выполнении первого шага первой итерации в качестве демпфирующего воздействия задается некоторое неоптимальное управление $g(x,t) = g^1(x,t)$, удовлетворяющее неравенству (2.2). При выполнении последующих итераций алгоритма в качестве управляющего воздействия на первом шаге принимается воздействие, полученное из условий оптимальности на третьем шаге предыдущей итерации.

На втором шаге итерационного алгоритма с учетом найденного на первом шаге распределения $w(x,t_f)$ и соответствующих величин $\partial w(x,t_f)/\partial t$ и $\partial^2 w(x,t_f)/\partial t\partial x$, входящих в терминальные условия (2.14), (2.16), решается задача возвратного интегрирования сопряженного уравнения (2.13) с граничными условиями (2.8) и условиями (2.14), (2.16) в конечный момент времени, рассматриваемыми в качестве начальных условий при отыскании $v(x,t)$.

На третьем шаге с применением найденного на втором шаге распределения сопряженной переменной $v(x,t)$ и использованием условий экстремума (2.2), (2.6), (2.11), (2.12) и (2.17) находится текущее приближение для оптимального воздействия $g(x,t)$, прикладываемого к панели в области Ω ($(x,t) \in \Omega$). Полученное на третьем шаге итерационного процесса демпфирующее управление рассматривается далее в качестве “начального” при переходе к первому шагу следующей итерации алгоритма.

Приведем некоторые детали нахождения оптимального управления, основанного на методе Галёркина [20]. Представим искомые распределения поперечных перемещений панели $w(x,t)$ и сопряженной переменной $v(x,t)$ в виде рядов

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{n_0} q_n(t)\Psi_n(x), \quad v(x,t) = \sum_{n=1}^{n_0} s_n(t)\Psi_n(x), \tag{3.1}$$

где $q_n(t)$, $s_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots, n_0)$ – неизвестные функции времени, подлежащие определению с использованием уравнений, определяющих w и v, а $\Psi_n(x)$ – функции формы, определяемые выражениями

$$\Psi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}(x+1)\right); \quad x \in [-1, 1] \tag{3.2}$$

и удовлетворяющие граничным условиям (1.3) для w и (2.8) для v при $x = \pm 1$. Для координатных функций метода Галёркина $q_n(t)$ и $s_n(t)$ получим обыкновенные дифференциальные уравнения, подставив выражения (3.1) в соответствующие динамические уравнения (1.4), (2.13), определяющие переменные $w(x,t)$ и $v(x,t)$, и умножив получающиеся соотношения на $\Psi_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ с последующим интегрированием по $x \in [-1, 1]$. Выполняя стандартные операции, характерные для метода Галёркина [20, 21], будем иметь две системы дифференциальных уравнений, служащих для определения величин $q_n(t)$ и $s_n(t)$

$$\sum_{n=1}^{n_0}\left\{\alpha^2(1+r_m)A_{jn}\frac{d^2q_n}{dt^2} + 2\alpha\kappa(1+r_mr_v)B_{jn}\frac{dq_n}{dt} + \right.$$
$$\left. + \left(\left[\kappa^2\left(1+r_mr_v^2\right)-1\right]C_{jn} + \beta D_{jn}\right)q_n\right\} - G_j(t) = 0 \tag{3.3}$$

$$\sum_{n=1}^{n_0}\left\{\alpha^2(1+r_m)A_{jn}\frac{d^2s_n}{dt^2} + 2\alpha\kappa(1+r_mr_v)B_{jn}\frac{ds_n}{dt} + \right.$$
$$\left. + \left(\left[\kappa^2\left(1+r_mr_v^2\right)-1\right]C_{jn} + \beta D_{jn}\right)s_n\right\} = 0 \tag{3.4}$$

Коэффициенты A_{jn}, B_{jn}, C_{jn}, D_{jn} и функции $G_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ определяются выражениями

$$A_{jn} = \int_{-1}^{1}\Psi_n\Psi_j dx = \delta_{jn}$$

$$B_{jn} = \int_{-1}^{1}\Psi_j\frac{d\Psi_n}{dx}dx = \begin{cases} 0, & j = n, \\ \dfrac{nj}{n^2 - j^2}\left[(-1)^{j+n} - 1\right]; & j \neq n, \end{cases}$$

$$C_{jn} = \int_{-1}^{1}\Psi_j\frac{d^2\Psi_n}{dx^2}dx = -\left(\frac{j\pi}{2}\right)^2\delta_{jn} \tag{3.5}$$

$$D_{jn} = \int_{-1}^{1}\Psi_j\frac{d^4\Psi_n}{dx^4}dx = \left(\frac{j\pi}{2}\right)^4\delta_{jn}$$

$$G_j(t) = \int_{-1}^{1}\Psi_j(x)g(x,t)dx; \quad t \in [0, t_f],$$

а начальные условия для q_j при $t = 0$ и условия для s_j в конечный момент времени $t = t_f$ записываются в виде ($j = 1, 2, \ldots$)

$$(q_j)_{t=0} = \int_{-1}^{1} \Psi_j g_1(x)\,dx, \quad \left(\frac{dq_j}{dt}\right)_{t=0} = \int_{-1}^{1} \Psi_j g_2(x)\,dx \tag{3.6}$$

$$\begin{gathered}(s_j)_{t=t_f} = -\frac{2\alpha_2}{\alpha^2(1+r_m)}\left(\frac{dq_j}{dt}\right)_{t=t_f} \\ \left(\frac{ds_j}{dt}\right)_{t=t_f} = \frac{2}{\alpha^2(1+r_m)}\left(\alpha_1 q_j - \frac{2\alpha_2\kappa(1+r_m r_v)}{\alpha(1+r_m)}\sum_{n=1}^{n_0} B_{jn}\frac{dq_n}{dt}\right)_{t=t_f}\end{gathered} \tag{3.7}$$

4. Пример оптимизации процесса демпфирования колебаний. Проиллюстрируем процесс определения оптимального демпфирования, полагая

$$\begin{gathered}g_1(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right), \quad g_2(x) = 0; \quad x \in [-1, 1] \\ \alpha_1 = \alpha_0 > 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad n_0 = 1, \quad \Psi_1(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right)\end{gathered} \tag{4.1}$$

и ограничиваясь выполнением двух итераций. При этом рассматривается вариант итерационного процесса, когда на первом шаге первой итерации полагается $g^{(1)}(x,t) = 0$ при $(x,t) \in \Omega$; $G_1^{(1)}(t) = \int_{-1}^{1} \Psi_1 g^{(1)}(x,t) dx = 0$, $t \in [0, t_f]$ и осуществляется интегрирование уравнения

$$\frac{d^2 q_1^{(1)}}{dt^2} + a_1 q_1^{(1)} = 0, \quad a_1 = \frac{\left[\kappa^2\left(1 + r_m r_v^2\right) - 1\right] C_{11} + \beta D_{11}}{\alpha^2(1+r_m) A_{11}} \tag{4.2}$$

с начальными условиями

$$\left(q_1^{(1)}\right)_{t=0} = \int_{-1}^{1} \Psi_1 g_1(x)\,dx = 1, \quad \left(\frac{dq_1^{(1)}}{dt}\right)_{t=0} = \int_{-1}^{1} \Psi_2 g_2(x)\,dx = 0, \tag{4.3}$$

приводящее к решению

$$q_1^{(1)}(t) = \cos\left(\sqrt{a_1} t\right); \quad t \in [0, t_f] \tag{4.4}$$

Используя это решение, на втором шаге первой итерации алгоритма при возвратном интегрировании сопряженного уравнения с условиями в момент времени $t = t_f$

$$\frac{d^2 s_1^{(1)}}{dt^2} + a_1 s_1^{(1)} = 0, \quad \left(s_1^{(1)}\right)_{t=t_f} = 0, \quad \left(\frac{ds_1^{(1)}}{dt}\right)_{t=t_f} = \frac{2\alpha_1}{\alpha^2(1+r_m)}\left(q_1^{(1)}\right)_{t=t_f}$$

получим

$$\begin{gathered}s_1^{(1)}(t) = \frac{Q}{\sqrt{a_1}}\sin\left(\sqrt{a_1}(t - t_f)\right) = Q_1 \sin\left(\sqrt{a_1} t\right) + Q_2 \cos\left(\sqrt{a_1} t\right) \\ Q = \frac{2\alpha_1 \cos\left(\sqrt{a_1} t_f\right)}{\alpha^2(1+r_m)}, \quad Q_1 = \frac{Q\cos\left(\sqrt{a_1} t_f\right)}{\sqrt{a_1}}, \quad Q_2 = -\frac{Q\sin\left(\sqrt{a_1} t_f\right)}{\sqrt{a_1}}\end{gathered} \tag{4.5}$$

При этом получаемое на третьем шаге первой итерации алгоритма приближение для оптимального демпфирующего воздействия запишется в виде

$$g^{(2)} = \frac{1}{2\mu} v^{(1)}(x,t) = \frac{1}{2\mu} s_1^{(1)}(t)\Psi_1(x) = \left(\frac{2M_0}{t_f}\right)^{1/2} \sin\left(\sqrt{a_1}(t-t_f)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right) \quad (4.6)$$

Применим найденное выражение (4.6) для $g^{(2)}(x,t)$ при интегрировании уравнения колебаний

$$\begin{gathered}\frac{d^2 q_1^{(2)}}{dt^2} + a_1 q_1^{(2)} + a_2 = 0, \quad G_1^{(2)}(t) = \int_{-1}^{1} \Psi_1(x) g^{(2)}(x,t)\,dx; \quad t \in [0, t_f] \\ a_2(t) = -\frac{G_1^{(2)}(t)}{\alpha^2 A_{11}(1+r_m)} = -\frac{Q\sin\left(\sqrt{a_1}(t-t_f)\right)}{2\mu\alpha^2 A_{11}(1+r_m)}; \quad \mu = \frac{Q}{2}\left(\frac{t_f}{2M_0 a_1}\right)^{1/2}\end{gathered} \quad (4.7)$$

на первом шаге второй итерации с учетом начальных условий (4.3). Опуская промежуточные выкладки, будем иметь

$$\begin{gathered}q_1^{(2)}(t) = R_0\cos\left(\sqrt{a_1}t_f\right)\left[\sin\left(\sqrt{a_1}(t-t_f)\right) - t\sqrt{a_1}\cos\left(\sqrt{a_1}(t-t_f)\right) - \right. \\ \left. - \cos\left(\sqrt{a_1}t\right)\sin\left(\sqrt{a_1}t_f\right)\right] \\ R_0 = \alpha_1\left[2\mu\alpha^4 a_1^{3/2} A_{11}(1+r_m)^2\right]^{-1}\end{gathered} \quad (4.8)$$

Для величины, получаемой при минимизации функционала (2.1) на второй итерации, имеем

$$\left(J_g^{(2)}\right)_{t=t_f} = \alpha_1\left(q_1^{(2)}\right)^2_{t=t_f} = \alpha_1 R_0^2\cos^2\left(\sqrt{a_1}t_f\right)\left(\sqrt{a_1}t_f + \frac{1}{2}\sin\left(2\sqrt{a_1}t_f\right)\right)^2 \quad (4.9)$$

При этом получаемая на второй итерации величина оптимизируемого функционала качества процесса демпфирования колебаний достигает минимального значения

$$\left(J_g^{(2)}\right)_{t=t_f} = 0 \quad (4.10)$$

при $t_f = \pi/\left(2\sqrt{a_1}\right)$. На рис. 2 представлены зависимости функционала $J(t_f) = \left(J_g^{(2)}\right)_{t=t_f}$ от значения параметра t_f. При этом сплошная кривая соответствует значению величины $a_1 = 1$, штриховая кривая – значению $a_1 = 4$; параметры α_1 и R_0 полагались равными единице. Еще один пример, иллюстрирующий применение представленного алгоритма подавления колебаний, приведен в работе [21] для других исходных данных задачи.

5. Некоторые замечания и выводы. Проведенное исследование развивает гидроупругую модель взаимодействия продольно движущейся панели и потока идеальной жидкости с учетом возникающих поперечных колебаний панели. Влияние внешней жидкой среды на упругие деформации учитывается на основе присоединенных масс. Проблема эффективного подавления поперечных колебаний за счет приложения к пластине поперечных механических воздействий сформулирована и решена с применением современной теории оптимизации систем с распределенными параметрами. С этой целью наряду с исходной задачей о вынужденных гидроупругих колебаниях движущейся в потоке панели сформулирована сопряженная динамическая задача для сопряженной переменной и выведены необходимые условия оптимальности. Эти условия и сформулированные задачи для функции состояния и сопряженной переменной позволили развить эффективный итерационный алгоритм последовательной

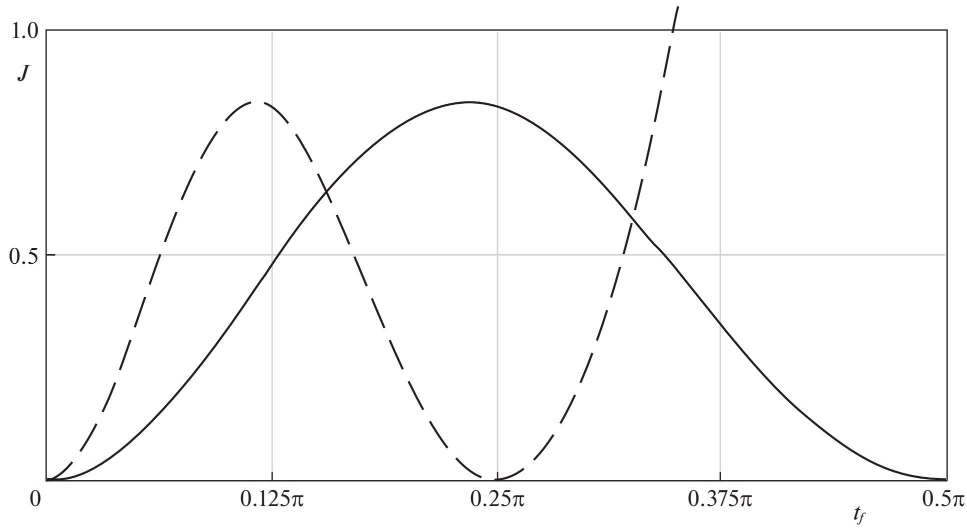

Рис. 2. Зависимость минимизируемого функционала J от параметра t_f.

оптимизации. Приведенный пример аналитического решения задачи оптимизации процесса подавления поперечных колебаний иллюстрирует разработанный алгоритм.

Для подавления гидроупругих колебаний управляющее воздействие представлялось в виде $g = g(x,t)$ с неопределенными (в общем случае) независимыми переменными x и t. Но в общем случае экстремальное управляющее воздействие может оказываться очень сложным, и его практическая реализация будет затруднительна. Принимая это во внимание, можно предложить разделенное представление $g(x,t) = e_1(x)e_2(t)$ с отдельными функциями положения x и времени t. В этом подходе раздельно представлены конкретная геометрическая реализация (взаимное расположение актьюаторов в случае применения нескольких актьюаторов и типы актьюаторов: точечные, площадные, стационарные, подвижные и др.), определяемая $e_1(x)$, и вариации действия по времени $e_2(t)$. Такое разделение делает возможным исследование и сравнение эффективности различных способов приложения демпфирующих воздействий к панели и оценивание разнообразных программ функционирования во времени, таких как релейное управление, гармоническое, ударное и другие управляющие программы подавляющих воздействий.

Заметим также, что предложенный подход подавления гидроупругих колебаний движущейся панели естественным образом обобщается на движущиеся неразрезные панели из термоупругих материалов, подверженные термомеханическим воздействиям.

Работа выполнена по теме госзадания (номер госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при частичной финансовой поддержке Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 20-08-00082а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Госиздат. Физматлит, 1961. 339 с.
2. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.

3. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Шаранюк А.В.* Динамика конструкций. Анализ и оптимизация. М.: Наука, 1989. 262 с.
4. *Frondelius T., Koivurova H., Pramila A.* Interaction of an axially moving band and surrounding fluid by boundary layer theory // J. Fluids&Struct. 2006. V. 22. № 8. P. 1047–1056.
5. *Ghayech M.H., Amabili M., Paidoussis M.P.* Nonlinear dynamics of axially moving plates // J. Sound&Vibr. 2013. V. 332. № 2. P. 391–406.
6. *Marynowski K., Kapitaniak T.* Dynamics of axially moving continua // Int. J. Mech. Sci. 2014. V. 81. P. 26–41.
7. *Damaren C.J.* Hydroelastic analysis of the floating plate optimized for maximum radiation damping // Ocean Eng. February 2010. V. 37. № 2–3. P. 252–261.
8. *Kulachenko A., Gradin P., Koivurova H.* Modeling the dynamical behav-iour of a paper web. Part I // Comp.&Struct. 2007. V. 85. P. 131–147.
9. *Баничук Н.В., Миронов А.А.* Схема струйного обтекания для исследования равновесных форм упругих пластин в потоке жидкости и задачи оптимизации // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 1. С. 83–90.
10. *Баничук Н.В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 256 с.
11. *Ashley H., Landahl M.* Aerodynamics of Wings and Bodies. New York: Dover Pub., 1965. 304 p.
12. *Lighthill J.* An Informal Introduction to Theoretical Fluid Mechanics. Oxford: Sci. Pub., 1986. 260 p.
13. *Banichuk N., Jeronen J., Neittaanmäki P. et al.* Mechanics of Moving Materials. Cham: Springer, 2014. 253 p.
14. *Banichuk N., Barsuk A., Jeronen J. et al.* Stability of Axially Moving Materials. Cham: Springer, 2020. 642 p.
15. *Chen L.-Q., Wang B.* Stability of axially accelerating viscoelastic beams: asymptotic perturbation analysis and differential quadratic validation // Eur. J. Mech. A/Solids. 2009. V. 28. № 4. P. 786–791.
16. *Banichuk N.V.* Problems and Methods of Optimal Structural Design. New York: Plenum Press, 1983. 313 p.
17. *Tang Y.-Q., Chen L.-Q.* Stability analysis and numeral confirmation in parametric resonance of axially moving viscoelastic plates with time-dependent speed // Eur. J. Mech. A: Solids. 2013. V. 37. P. 106–121.
18. *Marynowski K.* Free vibration analysis of the axially moving Levi-type viscoelastic plate // Eur. J. Mech. A/Solids. 2010. V. 29. № 5. P. 879–886.
19. *Saksa T., Jeronen J.* Dynamic analysis for axially moving viscoelastic Poynting–Thomson beams // in: Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures. Computational Methods in Applied Sciences. V. 40 / *Ed. by Neittaanmäki P. et al.* Cham: Springer, 2016. P. 131–151.
20. *Келдыш М.В.* О методе Б.Г. Галёркина для решения краевых задач // Изв. АН СССР, сер. матем. 1942. Т. 6. № 6. С. 309–330.
21. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю.* О подавлении поперечных колебаний упругой панели, продольно движущейся в потоке жидкости // Докл. РАН. 2020. Т. 492. С. 81–85.

Optimal Vibration Damping for Rectilinear Movement of Panel in Fluid Stream

N. V. Banichuk[a,#] and S. Yu. Ivanova[a,##]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: banichuk@gmail.ru*

[##] *e-mail: syuivanova@yandex.ru*

The movement of elastic panel in the stream of ideal fluid is considered. The panel is under small transverse vibrations and is under external suppression action. The problem of optimization of vibration damping is formulated and solved for the case of quadratic energetic criterion. The necessary optimality conditions for suppression of hydroelastic vibrations are derived for finite time interval. The iteration algorithm of vibration suppression based on successive solution of “direct” problems of interaction of moving fluid and panel and adjoint problems of reverse integration of homogeneous equation is presented. The corresponding approximation of optimal control suppression is determined. Then, the developed algorithm is illustrated for example of analytical determination of stabilized action.

Keywords: hydroelastic interaction, vibration suppression, optimization of damping actions

REFERENCES

1. *Bolotin V.V.* Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability. London: Pergamon Press, 1963. 324 p.
2. *Bolotin V.V.* The Dynamic Stability of Elastic Systems (Holden-Day Series in Mathematical Physics). San Francisco: Golden-Day, 1964. 451 p.
3. *Banichuk N.V., Ivanova S.Yu., Sharanyuk A.V.* Dynamics of Structures. Analysis and Optimization (Dinamika konstrukcij. Analiz i optimizaciya). Moscow: Nauka, 1989. 262 p. (in Russian).
4. *Frondelius T., Koivurova H., Pramila A.* Interaction of an axially moving band and surrounding fluid by boundary layer theory // J. Fluids&Struct., 2006, vol. 22, no. 8, pp. 1047–1056.
5. *Ghayech M.H., Amabili M., Paidoussis M.P.* Nonlinear dynamics of axially moving plates // J. Sound&Vibr., 2013, vol. 332, no. 2, pp. 391–406.
6. *Marynowski K., Kapitaniak T.* Dynamics of axially moving continua // Int. J. Mech. Sci., 2014, vol. 81, pp. 26–41.
7. *Damaren C.J.* Hydroelastic analysis of the floating plate optimized for maximum radiation damping // Ocean Eng., February 2010, vol. 37, no. 2–3, pp. 252–261.
8. *Kulachenko A., Gradin P., Koivurova H.* Modeling the dynamical behaviour of a paper web. Part I // Comp.&Struct., 2007, vol. 85, pp. 131–147.
9. *Banichuk N.V., Mironov A.A.* The stream flow scheme for investigating the equilibrium forms of elastic plates in a stream of fluid and problems of optimization // JAMM, 1979, vol. 43, no. 1, pp. 88–95.
10. *Banichuk N.V.* Optimization of Shapes of Elastic Bodies (Optimizaciya form uprugih tel). Moscow: Nauka, 1980. 256 p. (in Russian).
11. *Ashley H., Landahl M.* Aerodynamics of Wings and Bodies. N.Y.: Dover Pub., 1965. 304 p.
12. *Lighthill J.* An Informal Introduction to Theoretical Fluid Mechanics. Oxford: Sci. Pub., 1986. 260 p.
13. *Banichuk N., Jeronen J., Neittaanmäki P. et al.* Mechanics of Moving Materials. Cham: Springer, 2014. 253 p.
14. *Banichuk N., Barsuk A., Jeronen J. et al.* Stability of Axially Moving Materials. Cham: Springer, 2020. 642 p.
15. *Chen L.-Q., Wang B.* Stability of axially accelerating viscoelastic beams: asymptotic perturbation analysis and differential quadratic validation // Eur. J. Mech. A: Solids, 2009, vol. 28, no. 4, pp. 786–791.
16. *Banichuk N.V.* Problems and Methods of Optimal Structural Design. N.Y.: Plenum Press, 1983. 313 p.
17. *Tang Y.-Q., Chen L.-Q.* Stability analysis and numeral confirmation in parametric resonance of axially moving viscoelastic plates with time-dependent speed // Eur. J. Mech. A: Solids, 2013, vol. 37, pp. 106–121.
18. *Marynowski K.* Free vibration analysis of the axially moving Levi-type viscoelastic plate // Eur. J. Mech. A/Solids, 2010, vol. 29, no. 5, pp. 879–886.
19. *Saksa T., Jeronen J.* Dynamic Analysis for axially moving viscoelastic Poynting–Thomson BEAMS // in: Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures. Computational Methods in Applied Sciences, vol. 40 / *Ed. by Neittaanmäki P. et al.* Cham: Springer, 2016. pp. 131–151.
20. *Keldysh M.V.* On Galerkin's method for solving boundary value problems (O metode B.G. Galyorkina dlya resheniya kraevyh zadach) // Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., 1942, vol. 6, no. 6, pp. 309–330 (in Russian).
21. *Banichuk N.V., Ivanova S.Yu.* The suppression of transverse vibrations of an elastic panel moving axially in a fluid flow // Dokl. Phys., 2020, vol. 65, no. 5, pp. 186–189.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 3, с. 370–382

УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

М. Д. Коваленко[1,*], И. В. Меньшова[2,3,], А. П. Кержаев[2,***], Т. Д. Шуляковская[4,****]**

[1] *Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия*
[2] *Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, Москва, Россия*
[3] *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия*
[4] *Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Москва, Россия*
**e-mail: kov08@inbox.ru*
***e-mail: menshovairina@yandex.ru*
****e-mail: alex_kerg@mail.ru*
*****e-mail: 5095739@mail.ru*

Поступила в редакцию 19.11.2020 г.
После доработки 01.02.2021 г.
Принята к публикации 25.02.2021 г.

В статье приводятся готовые формулы, описывающие решения краевых задач теории упругости в прямоугольнике, у которого две противоположные стороны свободны, а на двух других заданы нормальные или касательные напряжения. Рассмотрены все случаи симметрии относительно центральных осей. Решения представляются рядами по собственным функциям Папковича–Фадля. Коэффициенты рядов определяются по простым замкнутым формулам как интегралы Фурье от заданных граничных функций. Приводится пример сравнения точного решения с решением, полученным на основе балочной теории, для достаточно узкого прямоугольника.

Ключевые слова: прямоугольник, собственные функции Папковича–Фадля, точные решения

DOI: 10.31857/S0032823521030073

1. Введение. Точные решения краевых задач теории упругости в прямоугольнике с различными граничными условиями на его сторонах – одна из наиболее известных проблем (обзоры [1, 2]). Это связано как с их практической значимостью, так и с различными вопросами теоретического характера (влияние концевых эффектов, поведение решений в окрестности сингулярных точек, оценка различных приближенных теорий и т.д. [3]).

Статья базируется на ранее полученных авторами точных решениях для полуполосы [4–8] благодаря несложному обобщению: экспоненциальные функции заменяются гиперболическими. По этой причине промежуточные выкладки опущены и сразу приводятся окончательные формулы.

Строгая постановка и решение краевых задач теории упругости в прямоугольнике в виде рядов по собственным функциям Папковича–Фадля возможны только в рамках модели с остаточными напряжениями [9] (что обусловлено базисными свойствами собственных функций). В этой модели стороны прямоугольника, непрямолинейные до деформации, становятся прямолинейными после. Поэтому граничные условия выполняются строго на прямолинейных сторонах области. Для перехода к (представленным в работе) решениям в традиционной постановке нужно в решениях, описываю-

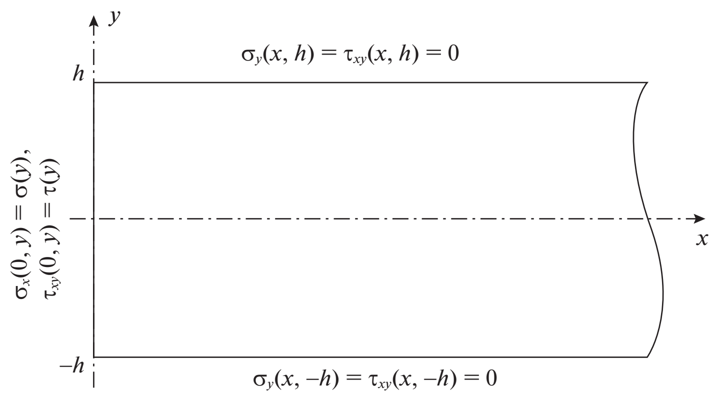

Рис. 1.

щих остаточные напряжения, определенным образом изменить знаки перед некоторыми формулами.

В противоположность этому, в классической модели Шермана [10] стороны прямоугольника, прямолинейные до деформации, остаются прямолинейными и после. Это достигается добавлением недостающего или удалением лишнего материала (создание “вкладок” [11]). Вкладками устраняются разрывы перемещений, поэтому в модели Шермана–Мусхелишвили (в отличие от модели с остаточными напряжениями) выполняются условия совместности деформаций, но при этом граничные условия ставятся на осях вкладок, совпадающих с первоначальными границами прямоугольника (эти вопросы подробно обсуждались в предыдущих статьях авторов, например, [4–8]).

Все формулы имеют одинаковую структуру (идентичную решениям Файлона–Рибьера [3]): вначале стоит коэффициент Лагранжа – аналог коэффициента Фурье в периодических решениях, затем зависящее только от переменной y отношение какой-либо собственной функции Папковича–Фадля к отвечающему ей нормирующему множителю (в периодических решениях он обычно равен единице) и, наконец, зависящее только от переменной x выражение, в которое входят гиперболические функции. Некоторая внешняя громоздкость формул обусловлена комплекснозначностью выражений.

2. Постановка задачи и общие формулы. Ниже приводятся формулы, описывающие решения краевых задач в полуполосе $\{\Pi^+: x \geq 0, |y| \leq h\}$ и в прямоугольнике $\{P: |x| \leq d, |y| \leq h\}$ (их схемы показаны на рис. 1 и 2).

Горизонтальные стороны $y = \pm h$ полуполосы и прямоугольника свободны, т.е. здесь напряжения

$$\sigma_y(x, \pm h) = \tau_{xy}(x, \pm h) = 0 \tag{2.1}$$

На торце полуполосы

$$\sigma_x(0, y) = \sigma(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = \tau(y), \tag{2.2}$$

а на торцах прямоугольника

$$\sigma_x(-d, y) = \sigma(y), \quad \tau_{xy}(-d, y) = \tau(y); \quad \sigma_x(d, y) = \pm\sigma(y), \quad \tau_{xy}(d, y) = \pm\tau(y) \tag{2.3}$$

Верхним знакам перед функциями $\sigma(y)$, $\tau(y)$ в последней строке (2.3) соответствует четно-симметричная деформация прямоугольника относительно вертикальной оси симметрии y, а нижним – нечетно-симметричная.

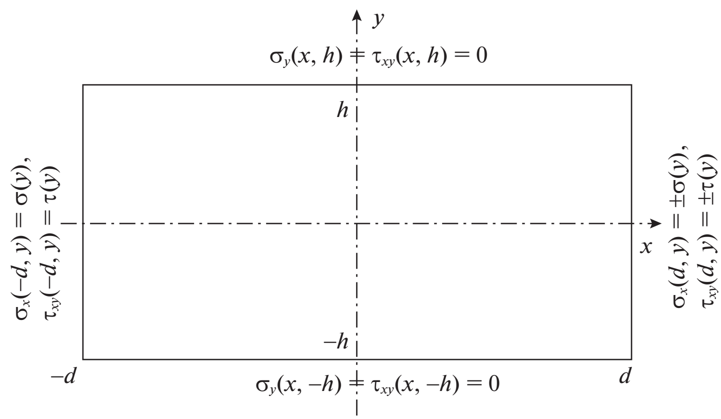

Рис. 2.

При четно-симметричной деформации полуполосы и прямоугольника относительно горизонтальной оси симметрии x функция $\sigma(y)$ должна удовлетворять требованию самоуравновешенности:

$$\int_{-h}^{h} \sigma(y)dy = 0 \tag{2.4}$$

При нечетно-симметричной деформации условия самоуравновешенности внешних нагрузок будут такими:

$$\int_{-h}^{h} \sigma(y)ydy = \int_{-h}^{h} \tau(y)dy = 0 \tag{2.5}$$

Характеристические уравнения для четно-симметричной и нечетно-симметричной деформаций относительно горизонтальной оси x имеют вид соответственно

$$L(\lambda) = \lambda h \pm \sin\lambda h \cos\lambda h = 0 \tag{2.6}$$

Нулевым корням уравнений (2.6) отвечают известные элементарные решения. Кроме этого, уравнения (2.6) имеют бесконечные наборы комплексных корней. Они расположены симметрично относительно начала координат в комплексной плоскости λ и имеют следующую асимптотику соответственно для четно-симметричной и нечетно-симметричной задач:

$$\frac{\lambda_k}{h} \approx \left(k\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{i}{2}\ln(4k\pi - \pi), \quad \frac{\lambda_k}{h} \approx \left(k\pi + \frac{5\pi}{4}\right) + \frac{i}{2}\ln(4k\pi + 5\pi) \tag{2.7}$$

Комплексным корням отвечают быстро затухающие решения в виде разложений по собственным функциям Папковича–Фадля.

Требования к гладкости граничных функций те же, что и в теории тригонометрических рядов Фурье. Это обусловлено асимптотической близостью в (2.7) чисел λ_k и $k\pi$. Помимо этого, граничные функции должны обращаться в ноль в окрестности концов отрезка $[-h, h]$ либо быть непрерывными здесь и равными нулю при $y = \pm h$. В противном случае решение краевой задачи может быть нерегулярным по Мусхелишвили [11].

Приведем группы формул, не связанных с переменной x и поэтому остающихся неизменными как для полуполосы, так и для прямоугольника (ν – коэффициент Пуассона).

2.1. Четно-симметричная деформация относительно оси x. Собственные функции Папковича–Фадля:

$$\xi(\lambda_k, y) = \left(\frac{1-\nu}{2}\sin\lambda_k h - \frac{1+\nu}{2}\lambda_k h\cos\lambda_k h\right)\cos\lambda_k y - \frac{1+\nu}{2}\lambda_k y\sin\lambda_k h\sin\lambda_k y$$

$$\chi(\lambda_k, y) = \left(\frac{1+\nu}{2}\lambda_k h\cos\lambda_k h + \sin\lambda_k h\right)\sin\lambda_k y - \frac{1+\nu}{2}\lambda_k y\sin\lambda_k h\cos\lambda_k y$$

$$s_x(\lambda_k, y) = (1+\nu)\lambda_k\left[(\sin\lambda_k h - \lambda_k h\cos\lambda_k h)\cos\lambda_k y - \lambda_k y\sin\lambda_k h\sin\lambda_k y\right] \tag{2.8}$$

$$s_y(\lambda_k, y) = (1+\nu)\lambda_k\left[(\sin\lambda_k h + \lambda_k h\cos\lambda_k h)\cos\lambda_k y + \lambda_k y\sin\lambda_k h\sin\lambda_k y\right]$$

$$t_{xy}(\lambda_k, y) = (1+\nu)\lambda_k^2(h\cos\lambda_k h\sin\lambda_k y - y\sin\lambda_k h\cos\lambda_k y)$$

Коэффициенты Лагранжа (аналоги коэффициентов Фурье) σ_k, τ_k и нормирующие множители M_k:

$$\sigma_k = \int_{-h}^{h}\sigma(y)x_k(y)dy, \quad x_k(y) = \frac{\cos\lambda_k y}{2(1+\nu)\lambda_k h\sin\lambda_k h}$$
$$\tau_k = \int_{-h}^{h}\tau(y)t_k(y)dy, \quad t_k(y) = -\frac{\sin\lambda_k y}{2(1+\nu)h\sin\lambda_k h}, \quad M_k = \cos^2\lambda_k h \tag{2.9}$$

2.2. Нечетно-симметричная деформация относительно оси x. Собственные функции Папковича–Фадля:

$$\xi(\lambda_k, y) = \left(\sin\lambda_k h - \frac{1+\nu}{2}\lambda_k h\cos\lambda_k h\right)\sin\lambda_k y + \frac{1+\nu}{2}\lambda_k y\sin\lambda_k h\cos\lambda_k y$$

$$\chi(\lambda_k, y) = -\left(\frac{1-\nu}{2}\sin\lambda_k h + \frac{1+\nu}{2}\lambda_k h\cos\lambda_k h\right)\cos\lambda_k y - \frac{1+\nu}{2}\lambda_k y\sin\lambda_k h\sin\lambda_k y$$

$$s_x(\lambda_k, y) = (1+\nu)\lambda_k[(2\sin\lambda_k h - \lambda_k h\cos\lambda_k h)\sin\lambda_k y + \lambda_k y\sin\lambda_k h\cos\lambda_k y] \tag{2.10}$$

$$s_y(\lambda_k, y) = (1+\nu)\lambda_k^2(h\cos\lambda_k h\sin\lambda_k y - y\sin\lambda_k h\cos\lambda_k y)$$

$$t_{xy}(\lambda_k, y) = (1+\nu)\lambda_k[(\sin\lambda_k h - \lambda_k h\cos\lambda_k h)\cos\lambda_k y - \lambda_k y\sin\lambda_k h\sin\lambda_k y]$$

Коэффициенты Лагранжа σ_k, τ_k и нормирующие множители M_k:

$$\sigma_k = \int_{-h}^{h}\sigma(y)x_k(y)dy, \quad x_k(y) = \frac{1}{2(1+\nu)\lambda_k^2 h}\left(\frac{\sin\lambda_k y}{\sin\lambda_k h} - y\right)$$
$$\tau_k = \int_{-h}^{h}\tau(y)t_k(y)dy, \quad t_k(y) = \frac{1}{2(1+\nu)\lambda_k h}\frac{\cos\lambda_k y}{\sin\lambda_k h}, \quad M_k = \frac{\sin^2\lambda_k h}{\lambda_k} \tag{2.11}$$

В формулах (2.9) $x_k(y)$, $t_k(y)$ – финитные части функций, биортогональных к собственным функциям $s_x(\lambda_k, y)$, $t_{xy}(\lambda_k, y)$ (2.8), соответственно. Аналогично для формул (2.11), (2.10).

Требования самоуравновешенности внешних нагрузок обусловлены самоуравновешенностью соответствующих собственных функций.

3. Решение краевой задачи для полуполосы. Решение задачи ищется в виде рядов (элементарные решения опущены):

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\xi(\lambda_k, y)e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k\xi(\bar{\lambda}_k, y)e^{\bar{\lambda}_k x}$$

$$
\begin{aligned}
V(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \chi(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x} \\
\sigma_x(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k s_x(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x} \\
\sigma_y(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k s_y(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x} \\
\tau_{xy}(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k t_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x},
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

где через $U(x,y)$, $V(x,y)$ обозначены соответственно продольное и поперечное перемещения, умноженные на модуль сдвига, a_k, $\bar{a}_k$ – неизвестные коэффициенты разложений.

Когда на торце полуполосы заданы нормальные напряжения, окончательно получим:

$$
\begin{aligned}
U(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left(\lambda_k \sigma_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k}\right) \frac{\mathrm{Im}(-\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{\mathrm{Im}\,\lambda_k} \\
V(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left(\sigma_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k}\right) \frac{\mathrm{Im}(\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{\mathrm{Im}\,\lambda_k} \\
\sigma_x(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left(\sigma_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k}\right) \frac{\mathrm{Im}(-\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{\mathrm{Im}\,\lambda_k} \\
\sigma_y(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left(\sigma_k \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k}\right) \frac{\mathrm{Im}(-\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\mathrm{Im}\,\lambda_k} \\
\tau_{xy}(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left(\sigma_k \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k}\right) \frac{\mathrm{Im}(-e^{\lambda_k x})}{\mathrm{Im}\,\lambda_k}
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Если на торце полуполосы заданы касательные напряжения, то имеем:

$$
\begin{aligned}
U(x,y) &= -\sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left(\tau_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k}\right) \frac{\mathrm{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\mathrm{Im}\,\lambda_k} \\
V(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\tau_k}{\lambda_k} \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k}\right) \frac{\mathrm{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\mathrm{Im}\,\lambda_k} \\
\sigma_x(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left(\tau_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k}\right) \frac{\mathrm{Im}(e^{\lambda_k x})}{\mathrm{Im}\,\lambda_k} \\
\sigma_y(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left(\tau_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k}\right) \frac{\mathrm{Im}(\lambda_k^2 e^{\lambda_k x})}{\mathrm{Im}\,\lambda_k} \\
\tau_{xy}(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left(\tau_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k}\right) \frac{\mathrm{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\mathrm{Im}\,\lambda_k}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Для четно-симметричной деформации полуполосы нужно воспользоваться формулами (2.8), (2.9), а для нечетно-симметричной – формулами (2.10), (2.11).

4. Решение краевой задачи для прямоугольника.

4.1. Четно-симметричная деформация относительно вертикальной оси симметрии y. Решение задачи ищется в виде рядов (элементарные решения опущены):

$$
\begin{aligned}
U(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi(\lambda_k, y) \operatorname{sh} \lambda_k x + \bar{a}_k \xi(\bar{\lambda}_k, y) \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k x \\
V(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi(\lambda_k, y) \operatorname{ch} \lambda_k x + \bar{a}_k \chi(\bar{\lambda}_k, y) \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k x \\
\sigma_x(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) \operatorname{ch} \lambda_k x + \bar{a}_k s_x(\bar{\lambda}_k, y) \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k x \\
\sigma_y(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_y(\lambda_k, y) \operatorname{ch} \lambda_k x + \bar{a}_k s_y(\bar{\lambda}_k, y) \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k x \\
\tau_{xy}(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) \operatorname{sh} \lambda_k x + \bar{a}_k t_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k x
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Когда на вертикальных сторонах прямоугольника $x = \pm d$ заданы нормальные напряжения, получим следующие конечные формулы:

$$
\begin{aligned}
U(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2\operatorname{Re}\left(\sigma_k \lambda_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k d)} \right\} \\
V(x,y) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2\operatorname{Re}\left(\sigma_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k d)} \right\} \\
\sigma_x(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2\operatorname{Re}\left(\sigma_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k d)} \right\} \\
\sigma_y(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2\operatorname{Re}\left(\sigma_k \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k d)} \right\} \\
\tau_{xy}(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2\operatorname{Re}\left(\sigma_k \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k d)} \right\}
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Когда заданы касательные напряжения, решение задачи будет таким:

$$
\begin{aligned}
U(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2\operatorname{Re}\left(\tau_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d)} \right\} \\
V(x,y) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2\operatorname{Re}\left(\frac{\tau_k}{\lambda_k} \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d)} \right\} \\
\sigma_x(x,y) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2\operatorname{Re}\left(\tau_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d)} \right\} \\
\sigma_y(x,y) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2\operatorname{Re}\left(\tau_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k^2 \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d)} \right\} \\
\tau_{xy}(x,y) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2\operatorname{Re}\left(\tau_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d)} \right\}
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

4.2. Нечетно-симметричная деформация относительно вертикальной оси симметрии y. В этом случае в формулах (4.1)–(4.3) надо гиперболические синусы заменить на гиперболические косинусы и наоборот. В результате получим следующие формулы.

Когда на сторонах $x = \pm d$ известны нормальные напряжения:

$$U(x,y) = -\sum_{k=1}^{\infty}\left\{2\,\mathrm{Re}\left(\sigma_k\lambda_k\,\frac{\xi(\lambda_k,y)}{\lambda_k M_k}\right)\frac{\mathrm{Im}(\bar\lambda_k\,\mathrm{ch}\,\bar\lambda_k d\,\mathrm{ch}\,\lambda_k x)}{\mathrm{Im}(\bar\lambda_k\,\mathrm{ch}\,\bar\lambda_k d\,\mathrm{sh}\,\lambda_k d)}\right\}$$

$$V(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{2\,\mathrm{Re}\left(\sigma_k\,\frac{\chi(\lambda_k,y)}{M_k}\right)\frac{\mathrm{Im}(\bar\lambda_k\,\mathrm{ch}\,\bar\lambda_k d\,\mathrm{sh}\,\lambda_k x)}{\mathrm{Im}(\bar\lambda_k\,\mathrm{ch}\,\bar\lambda_k d\,\mathrm{sh}\,\lambda_k d)}\right\}$$

$$\sigma_x(x,y) = -\sum_{k=1}^{\infty}\left\{2\,\mathrm{Re}\left(\sigma_k\,\frac{s_x(\lambda_k,y)}{M_k}\right)\frac{\mathrm{Im}(\bar\lambda_k\,\mathrm{ch}\,\bar\lambda_k d\,\mathrm{sh}\,\lambda_k x)}{\mathrm{Im}(\bar\lambda_k\,\mathrm{ch}\,\bar\lambda_k d\,\mathrm{sh}\,\lambda_k d)}\right\} \tag{4.4}$$

$$\sigma_y(x,y) = -\sum_{k=1}^{\infty}\left\{2\,\mathrm{Re}\left(\sigma_k\lambda_k\bar\lambda_k\,\frac{s_y(\lambda_k,y)}{\lambda_k^2 M_k}\right)\frac{\mathrm{Im}(\lambda_k\,\mathrm{ch}\,\bar\lambda_k d\,\mathrm{sh}\,\lambda_k x)}{\mathrm{Im}(\bar\lambda_k\,\mathrm{ch}\,\bar\lambda_k d\,\mathrm{sh}\,\lambda_k d)}\right\}$$

$$\tau_{xy}(x,y) = -\sum_{k=1}^{\infty}\left\{2\,\mathrm{Re}\left(\sigma_k\lambda_k\bar\lambda_k\,\frac{t_{xy}(\lambda_k,y)}{\lambda_k M_k}\right)\frac{\mathrm{Im}(\mathrm{ch}\,\bar\lambda_k d\,\mathrm{ch}\,\lambda_k x)}{\mathrm{Im}(\bar\lambda_k\,\mathrm{ch}\,\bar\lambda_k d\,\mathrm{sh}\,\lambda_k d)}\right\}$$

Когда известны касательные напряжения:

$$U(x,y) = -\sum_{k=1}^{\infty}\left\{2\,\mathrm{Re}\left(\tau_k\,\frac{\xi(\lambda_k,y)}{\lambda_k M_k}\right)\frac{\mathrm{Im}(\lambda_k\,\mathrm{sh}\,\bar\lambda_k d\,\mathrm{ch}\,\lambda_k x)}{\mathrm{Im}(\lambda_k\,\mathrm{sh}\,\bar\lambda_k d\,\mathrm{ch}\,\lambda_k d)}\right\}$$

$$V(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\tau_k}{\lambda_k}\,\frac{\chi(\lambda_k,y)}{M_k}\right)\frac{\mathrm{Im}(\lambda_k\,\mathrm{sh}\,\bar\lambda_k d\,\mathrm{sh}\,\lambda_k x)}{\mathrm{Im}(\lambda_k\,\mathrm{sh}\,\bar\lambda_k d\,\mathrm{ch}\,\lambda_k d)}\right\}$$

$$\sigma_x(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{2\,\mathrm{Re}\left(\tau_k\,\frac{s_x(\lambda_k,y)}{M_k}\right)\frac{\mathrm{Im}(\mathrm{sh}\,\bar\lambda_k d\,\mathrm{sh}\,\lambda_k x)}{\mathrm{Im}(\lambda_k\,\mathrm{sh}\,\bar\lambda_k d\,\mathrm{ch}\,\lambda_k d)}\right\} \tag{4.5}$$

$$\sigma_y(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{2\,\mathrm{Re}\left(\tau_k\,\frac{s_y(\lambda_k,y)}{\lambda_k^2 M_k}\right)\frac{\mathrm{Im}(\lambda_k^2\,\mathrm{sh}\,\bar\lambda_k d\,\mathrm{sh}\,\lambda_k x)}{\mathrm{Im}(\lambda_k\,\mathrm{sh}\,\bar\lambda_k d\,\mathrm{ch}\,\lambda_k d)}\right\}$$

$$\tau_{xy}(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{2\,\mathrm{Re}\left(\tau_k\,\frac{t_{xy}(\lambda_k,y)}{\lambda_k M_k}\right)\frac{\mathrm{Im}(\lambda_k\,\mathrm{sh}\,\bar\lambda_k d\,\mathrm{ch}\,\lambda_k x)}{\mathrm{Im}(\lambda_k\,\mathrm{sh}\,\bar\lambda_k d\,\mathrm{ch}\,\lambda_k d)}\right\}$$

Так же, как и в случае полуполосы, для четно-симметричной относительно горизонтальной оси симметрии x деформации прямоугольника нужно воспользоваться формулами (2.8), (2.9), а для нечетно-симметричной – формулами (2.10), (2.11).

5. Пример. В качестве примера рассмотрим нечетно-симметричную относительно оси y и четно-симметричную относительно оси x деформацию достаточно узкого прямоугольника, полагая $h = 1$, $d = 0.1$, толщина пластинки $b = 1$ (по умолчанию во всех вышеприведенных формулах).

Примем

$$\sigma_x(\pm d, y) = \mp\frac{1}{2}(5y^4 - 6y^2 + 1), \quad \tau_{xy}(\pm d, y) = 0, \quad \nu = \frac{1}{3} \tag{5.1}$$

Воспользовавшись формулами (4.4), (2.8), (2.9), получим решение задачи.

Сравним это решение с балочной теорией (схемы задач показаны на рис. 3).

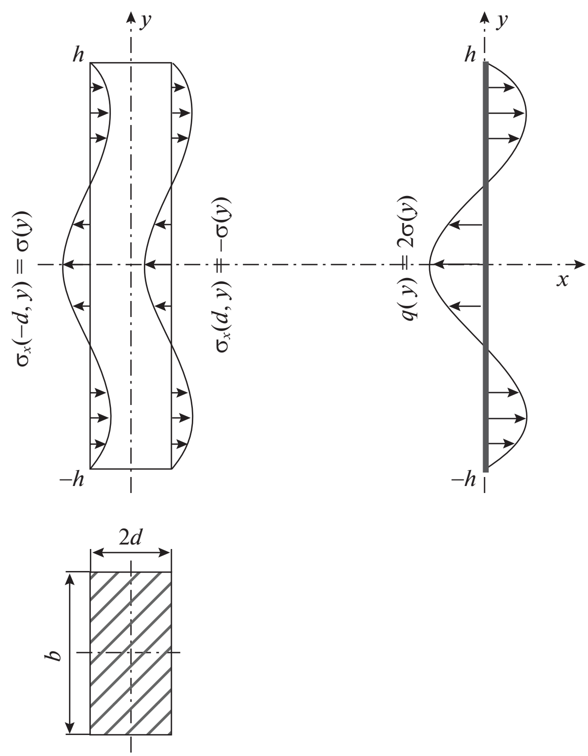

Рис. 3.

Поперечная нагрузка, изгибающий момент и перерезывающая сила соответственно равны

$$q(y) = (5y^4 - 6y^2 + 1), \quad M(y) = -\frac{1}{6}(y^2 - 1)^3, \quad Q(y) = y(y^2 - 1)^2 \tag{5.2}$$

Нормальные и касательные напряжения в балке определяются по формулам

$$\sigma_b(x, y) = \frac{M(y)}{I}x, \quad \tau_b(x, y) = \frac{6Q(y)}{b(2d)^3}(d^2 - x^2), \quad I = \frac{b(2d)^3}{12} \tag{5.3}$$

где I — момент инерции поперечного сечения балки.

Сравним точное и приближенное решения. На графиках сплошным кривым соответствует решение в прямоугольнике, а точечным — балочное решение.

На рис. 4 показаны кривые распределения нормальных напряжений $\sigma_y(-d, y)$ в прямоугольнике и $\sigma_b(-d, y)$ в балке, а на рис. 5 показаны касательные напряжения $\tau_{xy}(0, y)$ в прямоугольнике и $\tau_b(0, y)$ в балке.

На рис. 6 и 7 соответственно показаны распределения нормальных и касательных напряжений в поперечных сечениях $x = 0.5$ прямоугольника и балки.

На всех графиках соответствующие кривые практически неразличимы. Заметные различия возникают вблизи концов $y = \pm h$, где и нормальные, и касательные напряжения уже очень малы. В частности, на рис. 8 и 9 показаны соответственно нормальные и касательные напряжения в сечении $y = 0.95$. Эти различия являются проявле-

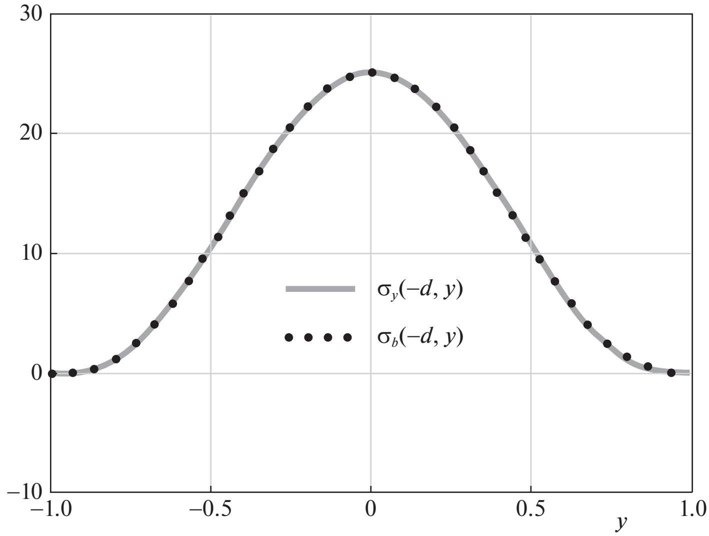

Рис. 4.

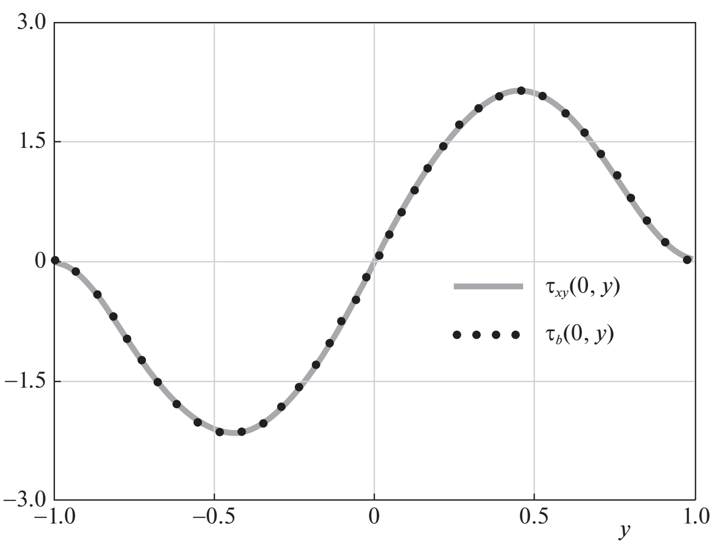

Рис. 5.

ниями, так называемых, “концевых эффектов” [3]. На расстоянии от узких торцов пластинки, равном примерно ее ширине $2d$, они практически исчезают в полном соответствии с принципом Сен-Венана [3]. Физически различия обусловлены тем, что в отличие от балочной теории, здесь перемещения $V(x,\pm 1) \neq 0$.

Заключение.

1. В статье приведены готовые точные решения краевой задачи теории упругости для прямоугольника. Горизонтальные стороны прямоугольника свободны, а на верти-

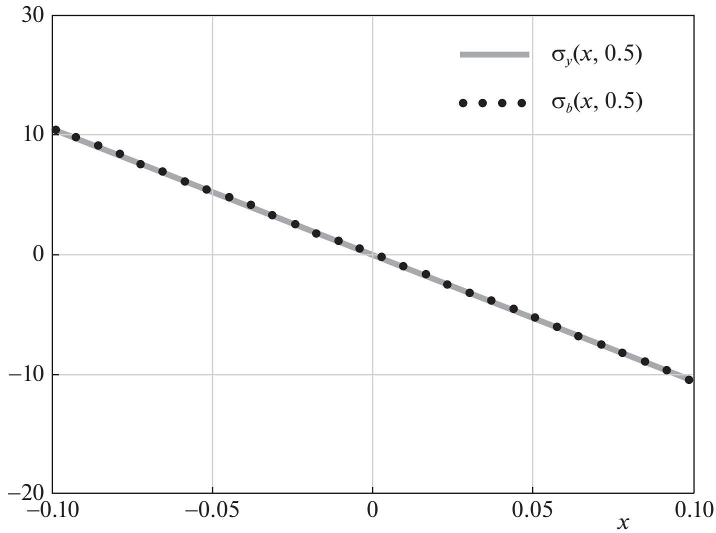

Рис. 6.

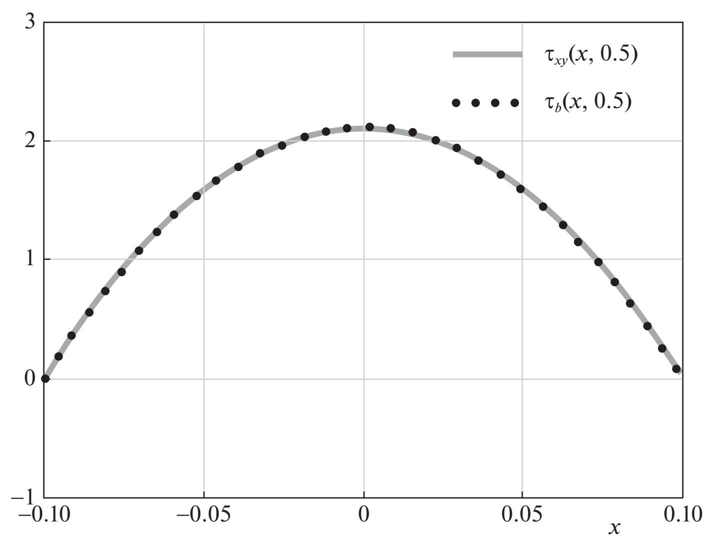

Рис. 7.

кальных заданы нормальные или касательные напряжения. Рассмотрены все случаи симметрии относительно центральных осей, комбинируя которые можно получить решения, не обладающие симметрией.

2. Добавляя к полученному решению решение, “повернутое” на 90 градусов, можно получить решения для прямоугольника с произвольными (самоуравновешенными) нагрузками на всех его сторонах.

3. Все формулы имеют одинаковую структуру: коэффициент Лагранжа, затем отношение собственной функции Папковича–Фадля к отвечающему ей нормирующему множителю и, наконец, выражение, зависящее только от переменной x.

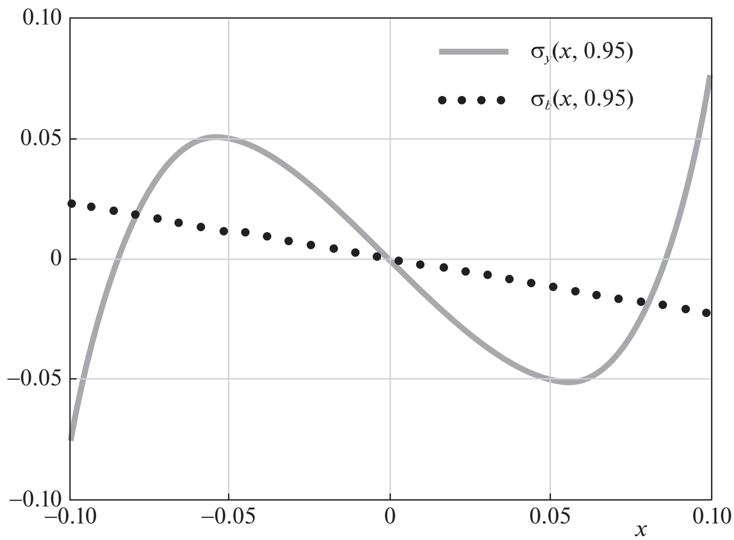

Рис. 8.

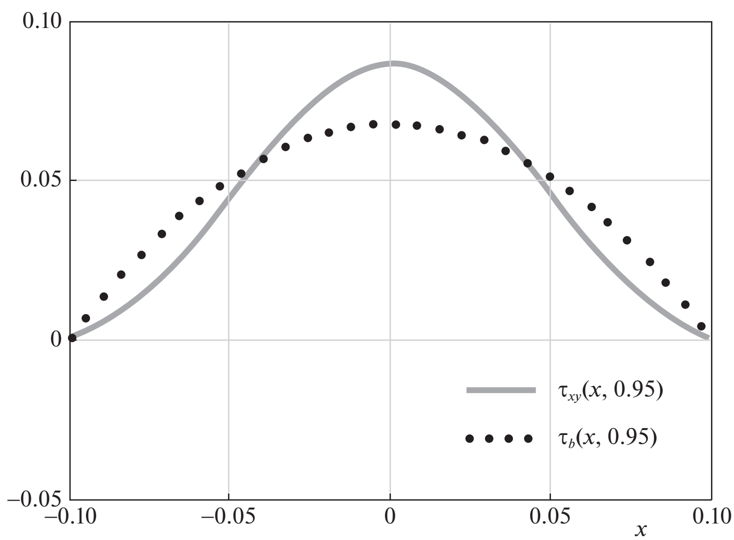

Рис. 9.

4. Формулы остаются теми же для любых (непериодических) однородных граничных условий на вертикальных сторонах прямоугольника (жесткое защемление, ребра жесткости и т.д.). Однако другими будут собственные функции Папковича–Фадля, собственные числа λ_k, нормирующие множители M_k и биортогональные функции $x_k(y), t_k(y)$.

5. Распределение напряжений в достаточно узком прямоугольнике, длина которого в десять раз больше ширины, практически не отличается от балочного решения. Су-

щественные различия имеются вблизи свободных торцов прямоугольника, где напряжения весьма малы. Эти различия обусловлены концевыми эффектами и быстро исчезают по мере удаления от торцов.

Исследование М.Д. Коваленко и И.В. Меньшовой выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Государственного фонда естественных наук Китая в рамках научного проекта № 20-51-53021. Исследование А.П. Кержаева выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-00094).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Meleshko V.V.* Selected topics in the history of two-dimensional biharmonic problem // Appl. Mech. Rev. 2003. V. 56. № 1. P. 33–85.
2. *Meleshko V.V.* Bending of an elastic rectangular clamped plate: Exact versus ‘engineering’ solutions // J. Elast. 1997. V. 48. № 1. P. 1–50.
3. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
4. *Коваленко М.Д., Шуляковская Т.Д.* Разложения по функциям Фадля–Папковича в полосе. Основы теории // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 5. С. 78–98.
5. *Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Шуляковская Т.Д.* Разложения по функциям Фадля–Папковича. Примеры решений в полуполосе // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С. 121–144.
6. *Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P.* On the exact solutions of the biharmonic problem of the theory of elasticity in a half-strip // Z. Angew. Math. Phys. 2018. V. 69. № 5. Art. 121. 30 p.
7. *Kovalenko M.D., Abrukov D.A., Menshova I.V., Kerzhaev A.P., Yu G.* Exact solutions of boundary value problems in the theory of plate bending in a half-strip: basics of the theory // Z. Angew. Math. Phys. 2019. V. 70. № 4. Art. 98. 22 p.
8. *Kerzhaev A.P., Kovalenko M.D., Menshova I.V.* Borel transform in the class W of quasi-entire functions // Complex Anal. Oper. Theory. 2018. V. 12. № 3. P. 571–587.
9. *Гольденблат И.И.* Нелинейные проблемы теории упругости. М.: Наука, 1969. 336 с.
10. *Шерман Д.И.* Об одной задаче теории упругости // Докл. АН СССР. 1940. Т. 27. № 9. С. 907–913.
11. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.

Some Solutions of the Theory of Elasticity for a Rectangle

M. D. Kovalenko[a,#], I. V. Menshova[b,c,##], A. P. Kerzhaev[b,###], and T. D. Shulyakovskaya[d,####]

[a] *Institute of Applied Mechanics RAS, Moscow, Russia*
[b] *Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics RAS, Moscow, Russia*
[c] *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*
[d] *Schmidt Institute of Physics of the Earth RAS, Moscow, Russia*
[#] *e-mail: kov08@inbox.ru*
[##] *e-mail: menshovairina@yandex.ru*
[###] *e-mail: alex_kerg@mail.ru*
[####] *e-mail: 5095739@mail.ru*

The article presents ready-made formulas describing solutions to boundary value problems of the theory of elasticity in a rectangle in which two opposite sides are free and normal or tangential stresses are given on the other two sides. All cases of symmetry with respect to the central axes are considered. The solutions are represented as series in Papkovich–Fadle eigenfunctions. The series coefficients are determined from simple closed formulas as Fourier integrals of given boundary functions. An example of comparing the exact solution with the solution obtained on the basis of the beam theory is given for a sufficiently narrow rectangle.

Keywords: rectangle, Papkovich–Fadle eigenfunctions, exact solutions

REFERENCES

1. *Meleshko V.V.* Selected topics in the history of two-dimensional biharmonic problem // Appl. Mech. Rev., 2003, vol. 56, no. 1, pp. 33–85.
2. *Meleshko V.V.* Bending of an elastic rectangular clamped plate: Exact versus ‘engineering’ solutions // J. Elast., 1997, vol. 48, no. 1, pp. 1–50.
3. *Timoshenko S.P., Goodier J.N.* Theory of Elasticity. N.Y.: McGraw-Hill, 1951. 576 p.
4. *Kovalenko M.D., Shulyakovskaya T.D.* Expansions in Fadle–Papkovich functions in a strip. Theory foundations // Mech. Solids, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 721–738.
5. *Kovalenko M.D., Menshova I.V., Shulyakovskaya T.D.* Expansions in Fadle–Papkovich functions: Examples of solutions in a half-strip // Mech. Solids, 2013, vol. 48, no. 5, pp. 584–602.
6. *Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P.* On the exact solutions of the biharmonic problem of the theory of elasticity in a half-strip // Z. Angew. Math. Phys., 2018, vol. 69, no. 5, art. 121, 30 p.
7. *Kovalenko M.D., Abrukov D.A., Menshova I.V., Kerzhaev A.P., Yu G.* Exact solutions of boundary value problems in the theory of plate bending in a half-strip: basics of the theory // Z. Angew. Math. Phys., 2019, vol. 70, no. 4, art. 98, 22 p.
8. *Kerzhaev A.P., Kovalenko M.D., Menshova I.V.* Borel transform in the class W of quasi-entire functions // Complex Anal. Oper. Theory, 2018, vol. 12, no. 3, pp. 571–587.
9. *Goldenblatt I.I.* Nonlinear Problems of the Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1969. 336 p. (in Russian)
10. *Sherman D.I.* On a problem of the theory of elasticity // Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1940, vol. 27, no. 9, pp. 907–910. (in Russian)
11. *Muskhelishvili N.I.* Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity. Groningen: Noordhoff, 1953. 708 p.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 3, с. 383–395

УДК 539.3

БЛОЧНО-ПОСЛОЙНЫЙ ПОДХОД ДЛЯ АНАЛИЗА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

© 2021 г. В. Н. Бакулин*

Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия

**e-mail: vbak@yandex.ru*

Поступила в редакцию 31.01.2021 г.
После доработки 18.03.2021 г.
Принята к публикации 29.03.2021 г.

Излагается построение модели для послойного анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) трехслойных нерегулярных цилиндрических оболочек вращения, которое заключается в том, что при необходимости стенка оболочки, в том числе заполнитель, разбивается по толщине на отдельные слои, которые затем стыкуются между собой и объединяются в блоки. Модель позволяет учесть изменение геометрических, физико-механических характеристик и параметров НДС не только по меридиональной и окружной координатам, но и по толщине оболочки и слоя заполнителя, адекватно моделировать особенности слоисто-неоднородного строения, а также учесть нарушение сплошности слоев, моментное состояние несущих слоев, трехмерное напряженно-деформированное состояние в заполнителе, различные условия закрепления и нагружения слоев. Провести такой послойный анализ для большинства реальных конструкций аналитическими методами, как правило, не удается из-за математических трудностей. Применяется блочно-послойный конечно-элементный подход. Модели послойного анализа отличаются большой размерностью, для уменьшения которой предлагается использовать эффективные функции аппроксимаций деформаций и перемещений внутри конечных элементов.

Ключевые слова: блочно-послойный подход, напряженно-деформированное состояние, трехслойные нерегулярные оболочки вращения цилиндрической формы, эффективные аппроксимации, аппроксимирующие функции обобщенных деформаций и перемещений, конечно-элементные модели

DOI: 10.31857/S0032823521030036

1. Введение. В современной технике большое применение находят трехслойные оболочки [1, 2]. Работ по построению теорий расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) неоднородных и трехслойных оболочек достаточно много. Значительно меньше моделей, позволяющих с необходимой точностью и степенью детализации провести расчет НДС трехслойных оболочек.

Одни из последних обзоров по анализу моделей для расчета слоисто-неоднородных, в том числе трехслойных оболочек приведены в работах [3, 4].

Проведенный обзор и анализ большого числа публикаций показал, что недостаточно изучено НДС в общем случае нерегулярных оболочек с учетом неоднородности оболочки, в том числе на уровне слоя заполнителя, моментного состояния несущих слоев, трехмерного напряженного состояния в слое заполнителя.

Распространенные модели часто не позволяют с необходимой точностью и степенью детализации провести расчет НДС трехслойных оболочек при учете указанных особенностей.

Поэтому построение адекватных моделей, позволяющих учесть эти и многие другие особенности является актуальной научной проблемой, имеющей важное прикладное значение.

Модели послойного анализа [5] позволяют решить многие важные задачи по расчету НДС трехслойных нерегулярных оболочек вращения. Послойный анализ заключается в том, что при необходимости стенка оболочки, в том числе заполнитель, разбивается по толщине на отдельные слои, которые затем стыкуются между собой.

Анализ многих работ показывает, что решение подобных задач с учетом указанных особенностей аналитическими методами сталкивается с большими трудностями математического характера. Для решения таких задач применяются численные методы и в первую очередь метод конечных элементов (МКЭ) [6].

Один из последних обзоров по анализу конечно-элементных моделей (КЭМ) для расчета оболочек, в том числе слоисто-неоднородной и трехслойной структуры, приведен в работе [7].

В [8] отмечается, что математические модели исследуемых систем должны обеспечивать выполнение заданных требований к информативности и точности исследований и одновременно являться “экономичными, способствуя, в частности, минимизации затрат машинного времени и памяти ЭВМ...”.

2. Постановка задачи. Модели послойного анализа [9–11] отличаются большой размерностью, зависящей от числа слоев и числа конечных элементов (КЭ), с помощью которых моделируются слои, в том числе по толщине, а также от числа степеней свободы КЭ и эффективности аппроксимирующих функций искомых параметров НДС внутри КЭ. Эффективными будем называть аппроксимации, позволяющие повысить скорость сходимости численных алгоритмов и получаемых результатов, а следовательно приводящие к уменьшению требуемого для решения задач числа КЭ, что особенно актуально при разработке и применении моделей послойного анализа оболочек слоисто-неоднородной структуры.

В представленной статье для уменьшения размерности моделей послойного анализа трехслойных нерегулярных оболочек вращения цилиндрической формы рассматривается применение в отличие от большинства работ по МКЭ, в которых аппроксимируются функции перемещений, эффективных аппроксимирующих функций обобщенных деформаций (далее будем называть АФД) для двумерных КЭ несущих слоев, построенных на основе моментной теории тонких оболочек. При этом АФД должны удовлетворять уравнениям неразрывности (совместности) деформаций [12, 13].

Для того, чтобы использовать хорошо разработанные алгоритмы метода перемещений МКЭ, интегрированием геометрических соотношений, связывающих выражения деформаций с перемещениями, при полученных АФД находим аппроксимирующие функции перемещений (АФП) КЭ несущих слоев.

Эти функции будем применять для построения АФП трехмерных КЭ слоя заполнителя. При построении модели КЭ слоя заполнителя трехслойных нерегулярных цилиндрических оболочек вращения используем соотношения для трехмерного тела в цилиндрических координатах. При этом алгоритм построения модели основывается на предложенном блочном конечно-элементном подходе [14, 15].

Следует отметить, что получение или выбор аппроксимаций искомых функций внутри КЭ, является важным этапом построения конечно-элементных моделей [16], так как от этого в конечном итоге зависит скорость сходимости численных процедур и получаемых результатов, а, следовательно, размерность КЭМ. При большой размерности задач растут погрешности вычислений, необходимые ресурсы ЭВМ, время расчета. Как отмечалось выше, особенно важен этот этап при уточненном послойном анализе, когда слой заполнителя моделируется и по толщине необходимым числом КЭ.

Очевидно, что наиболее эффективными будут аналитические решения, принятые в качестве аппроксимаций искомых функций внутри КЭ [17–21]. Но получить такие аппроксимации и построить на их основе модели удалось только для решения осесимметричных задач трехслойных цилиндрических оболочек и задач по расчету НДС слоистых круговых стержней.

3. Алгоритм построения конечно-элементной модели для анализа НДС несущих слоев. Как правило, на практике наиболее распространены трехслойные оболочки с тонкими и жесткими несущими слоями и толстым, но менее жестким заполнителем. Для исследования напряженно-деформированного состояния в тонких и жестких несущих слоях рассмотрим модель естественной кривизны, построенную на основе классической теории моментных оболочек вращения. В тех случаях, когда гипотезы Кирхгофа–Лява будут несправедливы, НДС в несущих слоях можно исследовать с помощью представленной в разделе 4 модели заполнителя, построенной с использованием соотношений для трехмерного тела в цилиндрических координатах.

Считая справедливыми гипотезы Кирхгофа–Лява для тонких моментных несущих слоев, запишем вектор обобщенных деформаций (далее деформации) $\varepsilon_i^c = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma, æ_1, æ_2, \chi\}^T$, который связан с вектором перемещений точек срединной поверхности несущих слоев $\boldsymbol{\delta}_i^{\text{c}} = \{u, v, w\}^T$ (рис. 1), соотношениями Коши [12] (индексы, соответствующие номеру слоя, у коэффициентов векторов и матриц указывать не будем)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^{\text{c}} = \mathbf{B}_i^{\text{c}}\boldsymbol{\delta}_i^{\text{c}} \tag{3.1}$$

$$B_i^{\text{c}} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & R^{-1}\partial/\partial\varphi & R^{-1} \\ R^{-1}\partial/\partial\varphi & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & -\partial^2/\partial x^2 \\ 0 & R^{-2}\partial/\partial\varphi & -R^{-2}\partial^2/\partial\varphi^2 \\ 0 & R^{-1}\partial/\partial x & -R^{-1}\partial^2/\partial x\partial\varphi \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

где $i = 1, 2, 3$ номер слоя, считая от внутренней поверхности трехслойной цилиндрической оболочки, индекс “с” означает, что слой является несущим.

Тогда для внутреннего несущего слоя $i = 1$, для внешнего несущего слоя $i = 3$.

Если проинтегрировать соотношения (3.1) при нулевых значениях деформаций, то получим перемещения как твердого тела, записанные с помощью шести неопределенных коэффициентов α_1, ..., α_6, являющихся константами интегрирования.

Учет перемещений как твердых тел (ПТТ) является важным требованием к аппроксимациям функций перемещений оболочечных конечных элементов [22–26]. Такой учет значительно повышает скорость сходимости получаемых численных решений. Покажем это на примере решения задачи С.П. Тимошенко [27] (рис. 2) о прогибе цилиндрической оболочки при действии самоуравновешенных диаметрально противоположных сосредоточенных радиальных сил P, приложенных по середине длины оболочки и направленных к ее оси.

На рис. 2 приведены графики прогиба цилиндрической оболочки в точке приложения самоуравновешенных диаметрально противоположных радиальных сил P в зависимости от числа решаемой системы уравнений N. При этом на КЭ разбивается одна восьмая симметричная часть оболочки. На рис. 2 принято следующее обозначение $\overline{w} = -wDl/PR^3$, где w – прогиб; D, l, R, h – цилиндрическая жесткость, длина, радиус, толщина оболочки соответственно. Цифрами показаны решения наиболее распро-

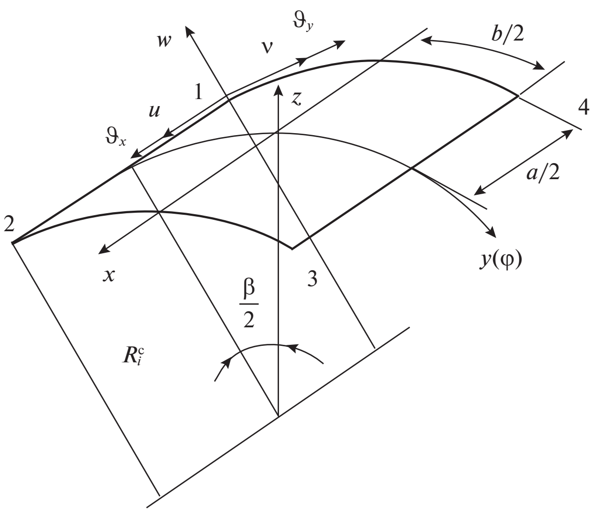

Рис. 1.

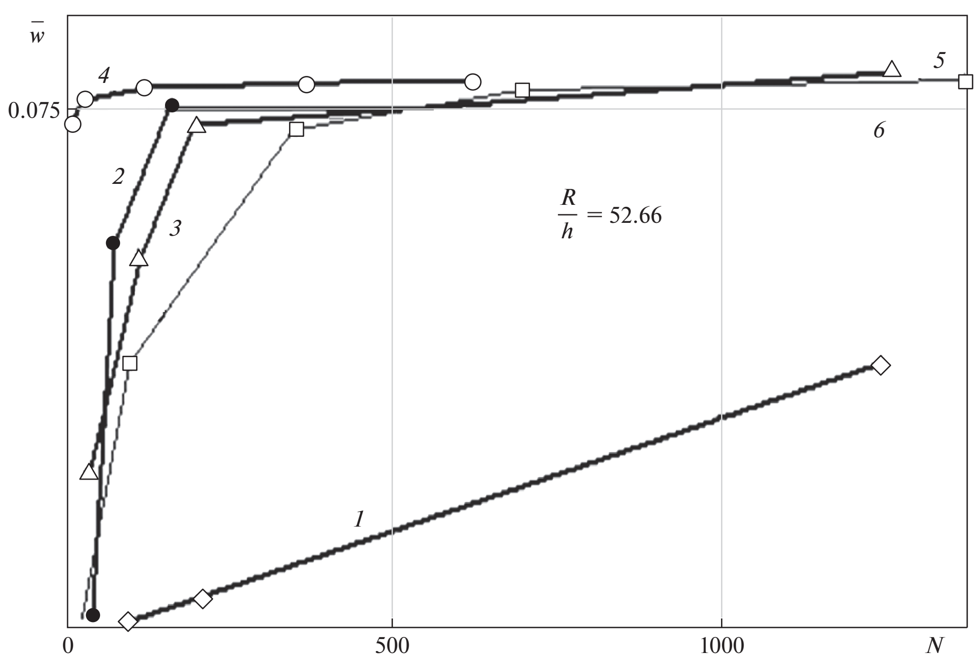

Рис. 2.

страненных КЭ с различными аппроксимациями [28]: *1* – АФП без учета перемещений как твердого тела (КЭ с 24 степенями свободы); *2* – АФП-КЭ с 48 степенями свободы; *3* – АФП с учетом перемещений как твердого тела (КЭ с 24 степенями свободы) [29]; *4* – рассматриваемые аппроксимации обобщенных деформаций и перемещений

(КЭ с 20 степенями свободы); *5* – АФП-КЭ с 20 степенями свободы оболочки вращения нулевой кривизны [5, 10]; *6* – аналитическое решение С.П. Тимошенко [27].

Как видно из анализа графиков (рис. 2) не учет перемещений как твердого тела в АФП (кривая *1*) приводит к очень низкой скорости сходимости численных результатов.

Для исследования НДС тонких моментных несущих слоев трехслойной в общем случае нерегулярной цилиндрической оболочки вращения рассмотрим двумерный КЭ (рис. 1). За узловые параметры в четырех угловых точках КЭ примем три линейных перемещения u, v, w точек срединной поверхности и два угла поворота нормали к срединной поверхности относительно осей координат в осевом и кольцевом направлениях. Таким образом, в каждом из четырех узлов будет по пять степеней свободы и КЭ несущих слоев будет иметь двадцать степеней свободы.

В дальнейшем функции, аппроксимирующие обобщенные деформации и перемещения, будем записывать через неопределенные коэффициенты α. Число неопределенных коэффициентов равно числу степеней свободы КЭ.

Так как при записи перемещений как твердого тела задействованы шесть неопределенных коэффициентов α_1, ..., α_6, то при получении АФД для рассматриваемого КЭ несущих слоев можно использовать оставшиеся четырнадцать неопределенных коэффициентов α_7, ..., α_{20}.

В соответствии с рассматриваемым подходом проводится аппроксимация обобщенных деформаций полиномами, которые выбираются, исходя из предполагаемого характера изменения параметров НДС. То есть обобщенные деформации, соответствующие превалирующим видам предполагаемого НДС, например, изгиб в какой-либо плоскости, или растяжение, или др. виды НДС аппроксимируются полиномами более высоких порядков.

Распределим четырнадцать неопределенных коэффициентов α_7, ..., α_{20} между обобщенными деформациями при записи их с помощью полиномов и добавим функции для удовлетворения уравнениям неразрывности (совместности) деформаций [12]

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2\varepsilon_2}{\partial x^2} + \frac{æ_1}{R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\varepsilon_1}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2\gamma}{\partial x\partial\gamma} = 0 \\
\frac{\partial\chi}{\partial x} - \frac{1}{R}\frac{\partial æ_1}{\partial\varphi} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\varphi} - \frac{1}{R}\frac{\partial\gamma}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial æ_2}{\partial x} - \frac{1}{R}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi} = 0
\end{gathered} \tag{3.3}$$

После определения добавленных функций совместным интегрированием уравнений неразрывности деформаций (3.3) и проведения математических операций получим выражение для вектора деформаций

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^{\mathrm{c}} = \boldsymbol{\Omega}_i^{\mathrm{c}}\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{c}}, \tag{3.4}$$

где $\boldsymbol{\Omega}_i^{\mathrm{c}}$ – матрица (6 × 20) (табл. 1), $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{c}}$ – вектор неопределенных коэффициентов.

Так как аппроксимирующие функции деформаций КЭ несущих слоев записаны с помощью четырнадцати неопределенных коэффициентов α_7, ..., α_{20}, то первые шесть столбцов матрицы $\boldsymbol{\Omega}_i^{\mathrm{c}}$ имеют нулевые коэффициенты аппроксимации и в табл. 1 они не показаны.

Аппроксимирующие функции перемещений, вызванные деформированием КЭ, определяются интегрированием соотношений (3.1) при заданных (полученных) выражениях аппроксимирующих функций деформаций (3.4).

Таблица 1. Матрица аппроксимирующих функций деформаций конечного элемента несущих слоев $\mathbf{\Omega}_i^{\text{c}}$ (6 × 20) (столбцы матрицы 7–20)

$$
\mathbf{\Omega}_i^{\text{c}} = \begin{pmatrix}
1 & \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & x & 0 & -\dfrac{x^2}{2R} & -\dfrac{x^3}{6R} & -\dfrac{x^2\varphi}{2R} & -\dfrac{x^3\varphi}{6R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & \varphi & x\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & \varphi & x\varphi & 0 \\
0 & -\dfrac{x}{R^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{x}{R} & \dfrac{x^2}{2R} & 0 & R\varphi & 0 & R\dfrac{\varphi^2}{2} & 1
\end{pmatrix}
$$

Полные АФП складываются из перемещений как твердых тел и перемещений, вызванных деформированием элемента. Полученные таким образом полные функции, аппроксимирующие перемещения, будут выглядеть следующим образом

$$
u = \alpha_2 R\cos\varphi + \alpha_4 R\sin\varphi + \alpha_5 + \alpha_7 x + \alpha_8 x\varphi + \alpha_{11} R\varphi -
$$

$$
- \alpha_{17}\frac{1}{2}R^3\varphi^2 + \alpha_{19}R^3\varphi\left(1 - \frac{1}{6}\varphi^2\right) - \alpha_{20}R^2\varphi
$$

$$
v = (\alpha_1 + \alpha_2 x)\sin\varphi - (\alpha_3 + \alpha_4 x)\cos\varphi + \alpha_6 - \frac{\alpha_8}{2R}x^2 + \alpha_{16}R^2\varphi + \alpha_{17}R^2 x\varphi +
$$

$$
+ \frac{1}{2}\alpha_{18}R^2\varphi^2 + \alpha_{19}R^2 x\left(\frac{\varphi^2}{2} - 1\right) + \alpha_{20}Rx
$$

$$
w = -(\alpha_1 + \alpha_2 x)\cos\varphi - (\alpha_3 + \alpha_4 x)\sin\varphi + R\alpha_9 + R\alpha_{10}x -
$$

$$
-\frac{1}{2}x^2\alpha_{12} - \frac{1}{6}\alpha_{13}x^3 - \frac{1}{2}\alpha_{14}x^2\varphi - \frac{1}{6}\alpha_{15}x^3\varphi - R^2\alpha_{16} - R^2\alpha_{17}x - R^2\alpha_{18}\varphi - R^2\alpha_{19}x\varphi
$$

или в матричном виде

$$
\boldsymbol{\delta}_i^{\text{c}} = \mathbf{T}_i^{\text{c}}\boldsymbol{\alpha}_i^{\text{c}}, \tag{3.5}
$$

где $\mathbf{T}_i^{\text{c}}$ (3 × 20) – матрица аппроксимирующих функций перемещений КЭ несущих слоев трехслойной цилиндрической нерегулярной оболочки.

Получив зависимости для вектора обобщенных деформаций КЭ несущих слоев (3.4) и, зная физические соотношения (закон Гука) для несущих слоев, легко записать выражения для усилий и моментов через вектор неопределенных коэффициентов, а затем через вектор узловых перемещений.

Матрица жесткости КЭ несущих слоев определяется аналогично [18] из условия минимума полной потенциальной энергии (вариационный принцип Лагранжа) [12]. Дальнейшее решение задачи осуществляется с помощью процедур метода перемещений.

Исторически сложилось так, что на примере решения задачи С.П. Тимошенко [27] проводится сравнение скорости сходимости получаемых численных результатов и эффективности аппроксимаций КЭ круговых цилиндрических оболочек (рис. 2). Сопоставление скорости сходимости численных результатов (рис. 2), показало эффективность (высокую скорость сходимости полученных решений, что позволило уменьшить необходимое для расчета число КЭ) рассматриваемой модели (рис. 2, кривая *4*) по сравнению с распространенными КЭ других авторов.

Рассмотренный подход хорош тем, что выбор аппроксимирующих функций деформаций является более наглядным, позволяет осознанно, исходя из предполагаемого характера изменения параметров НДС, задать порядок аппроксимирующих полиномов АФД и сохранить преимущества метода перемещений (универсальность, алгоритмичность и др.) без потери точности при вычислении напряжений. Кроме того, при аппроксимации деформаций проще удовлетворять требованиям, предъявляемым к АФП (учет перемещений как твердых тел, критерий постоянства деформаций).

Достоверность, сходимость и точность результатов, полученных с помощью рассмотренной модели, и эффективность КЭ несущих слоев подтверждена и другими исследованиями [28].

Рассмотренная модель хорошо зарекомендовала себя при исследовании напряженно-деформированного состояния ортотропных композитных цилиндрических оболочек с прямоугольными в плане вырезами, когда приходится применять мелкие сетки разбиений.

4. Алгоритм построения блочной модели для расчета НДС в слое заполнителя. Блочная модель для анализа НДС в слое заполнителя строится из трехмерных конечных элементов естественной кривизны.

Особенностью построения оболочечного трехмерного конечного элемента слоя заполнителя является выбор внутренней и внешней цилиндрических поверхностей этого КЭ в качестве узловых и применение рассмотренных аппроксимирующих функций перемещений конечного элемента несущих слоев для построения КЭ слоя заполнителя. Такой подход позволяет избежать разрыва перемещений на цилиндрических поверхностях контакта конечных элементов несущих слоев и заполнителя, который наблюдается при применении двумерных и трехмерных оболочечных КЭ для моделирования соответственно моментных несущих слоев и слоя заполнителя, если они построены с использованием различных аппроксимирующих функций перемещений.

Одним из требований при расчете оболочек и пластин МКЭ является требование, чтобы не было разрыва искомых параметров по линиям сопряжения конечных элементов, а в рассматриваемом случае при использовании различных аппроксимирующих функций перемещений будут разрывы по двум поверхностям контакта КЭ несущих слоев и заполнителя. Оценка погрешности решения при таком разрыве является отдельной сложной задачей.

Для избежания разрыва аппроксимирующих функций перемещений на указанных поверхностях контакта КЭ несущих слоев и заполнителя в соответствии с предложенным подходом у КЭ слоя заполнителя на цилиндрических поверхностях выбирается столько же узлов, сколько их у конечного элемента несущих слоев, и в качестве узловых параметров и аппроксимирующих функций используются те же обобщенные перемещения и аппроксимирующие функции, что и у КЭ несущих слоев трехслойных оболочек. То есть, у КЭ заполнителя (КЭЗ) будет восемь узлов, находящихся в угловых точках КЭ.

При этом аппроксимирующие функции перемещений КЭ несущих слоев приводятся к соответствующей цилиндрической поверхности стыковки с КЭ слоя заполнителя с помощью матриц перехода аналогично [22]. Векторы перемещений КЭ несущих слоев на поверхностях стыковки с КЭ слоя заполнителя будем обозначать чертой вверху – $\overline{\delta}_i^c$.

Рассмотрим алгоритм построения аппроксимирующих функций перемещений оболочечного конечного элемента слоя заполнителя. Местную систему координат оболочечного КЭ заполнителя расположим на срединной поверхности КЭ с началом координат, находящихся на пересечении линий, отстоящих на одинаковом расстоянии от продольных и торцевых граней этих конечных элементов.

Учет изменения свойств и параметров НДС по толщине слоя заполнителя осуществляется путем разбиения заполнителя на необходимое число КЭ, которые объединяются в блок, стыкуемый с КЭ несущих слоев. В соответствии с предложенным подходом построения трехмерного КЭ слоя заполнителя вектор перемещений

$\boldsymbol{\delta}_{ij}^{\mathrm{f}} = \{u, v, w\}^T$ (для слоя заполнителя $i = 2$ и этот индекс в дальнейшем не указывается, j – номер КЭЗ по толщине слоя заполнителя, считая от его внутренней поверхности, f соответствует тому, что КЭ принадлежит заполнителю) запишем через векторы перемещений внутренней $\boldsymbol{\delta}_j^1$ и внешней $\boldsymbol{\delta}_j^2$ цилиндрических поверхностей КЭЗ

$$\boldsymbol{\delta}_j^{\mathrm{f}} = \boldsymbol{\delta}_j^1\varphi_j^1 + \boldsymbol{\delta}_j^2\varphi_j^2, \tag{4.1}$$

где $\varphi_j^1 = (1 - 2z_j/h_j)/2$; $\varphi_j^2 = 1 - \varphi_j^1$, z_j^{f} – нормальная к срединной поверхности конечного элемента заполнителя координата, h_j^{f} – толщина КЭЗ.

Запишем в векторной форме условия стыковки КЭЗ по толщине слоя заполнителя при построении блочной модели

$$\begin{gathered}
\text{для} \quad j = 1 \quad \boldsymbol{\delta}_1^1 = \overline{\boldsymbol{\delta}}_1^c; \quad \boldsymbol{\delta}_1^2 = \boldsymbol{\delta}_2^1 \\
\text{для} \quad j = 2,\ldots,m-1 \quad \boldsymbol{\delta}_j^1 = \boldsymbol{\delta}_{j-1}^2; \quad \boldsymbol{\delta}_j^2 = \boldsymbol{\delta}_{j+1}^1 \\
\text{для} \quad j = m \quad \boldsymbol{\delta}_m^1 = \boldsymbol{\delta}_{m-1}^2, \quad \boldsymbol{\delta}_m^2 = \overline{\boldsymbol{\delta}}_3^{\mathrm{c}}
\end{gathered} \tag{4.2}$$

Зная аппроксимирующие функции перемещений КЭ несущих слоев (3.5), с помощью зависимостей (4.1), (4.2), получим аппроксимирующие функции перемещений конечных элементов слоя заполнителя, выраженные через вектор неопределенных коэффициентов $\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{f}}$

$$\boldsymbol{\delta}_j^{\mathrm{f}} = \mathbf{T}_j^{\mathrm{f}}\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{f}}, \tag{4.3}$$

где $\mathbf{T}_j^{\mathrm{f}}$ – матрица аппроксимирующих функций перемещений конечных элементов слоя заполнителя.

При построении модели КЭ слоя заполнителя используем соотношения для трехмерного тела в цилиндрических координатах. Подставляя выражения (4.3) в геометрические соотношения, связывающие деформации с перемещениями, получим зависимости для компонент вектора обобщенных деформаций КЭ слоя заполнителя

$$\varepsilon_{ij}^{\mathrm{f}} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{13}\}^{\mathrm{T}}, \quad \text{записанные через вектор} \quad \boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{f}}.$$

Получив эти зависимости для вектора обобщенных деформаций КЭ слоя заполнителя и зная для него физические соотношения (закон Гука), записываются выражения для напряжений в этих КЭЗ через вектор $\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{f}}$. Матрица жесткости (МЖ) КЭ слоя заполнителя определяется аналогично [18] из условия минимума полной потенциальной энергии (вариационный принцип Лагранжа) [12].

Из полученных МЖ трехмерных КЭ слоя заполнителя с помощью вычислительных программ формируется общая матрица жесткости блока указанных КЭЗ, к которой затем добавляются МЖ двумерных КЭ моментных несущих слоев. Из этих блоков строится глобальная матрица жесткости трехслойной в общем случае нерегулярной цилиндрической оболочки вращения.

Рассмотренная модель хорошо зарекомендовала себя при исследовании НДС трехслойных цилиндрических ортотропных (композитных) оболочек с прямоугольными в плане вырезами.

5. Численный пример. Исследование изменения напряжений по толщине слоя заполнителя проиллюстрировано на трехслойной цилиндрической оболочке вращения с шарнирно опертыми ортотропными несущими слоями из конструкционного стеклопластика: $E_1^{\mathrm{c}} = 2.1 \times 10^{10}$ Па; $E_2^{\mathrm{c}} = 2.2 \times 10^{10}$ Па; $\mu_1^{\mathrm{c}} = 0.1$; $\mu_2^{\mathrm{c}} = 0.105$; $G_{12}^{\mathrm{c}} = 3.5 \times 10^{10}$ Па;

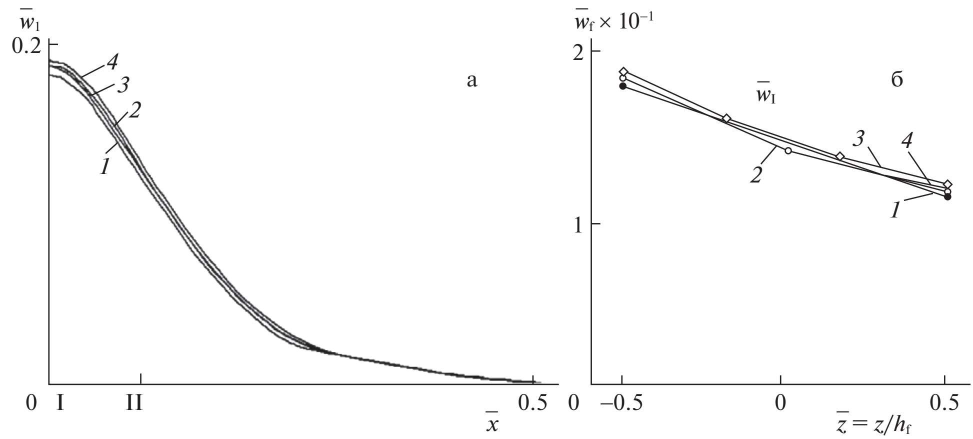

Рис. 3.

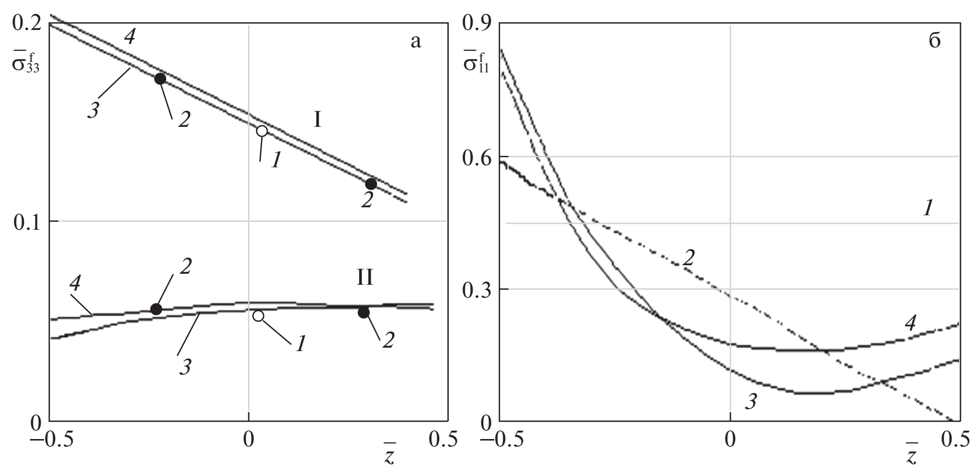

Рис. 4.

$h_1^c = h_3^c = 0.00375$ м; $L/R_{вн} = 0.223$; $p/G_{13}^f = 0.2$; и заполнителем типа пенополиуретана $E_{11}^f = E_{22}^f = E_{33}^f = 127.8 \times 10^5$ Па; $G_{12}^f = G_{13}^f = G_{23}^f = 50 \times 10^5$ Па; $h^f = 0.0425$ м.

На оболочку изнутри действует кольцевая радиальная равномерная поперечная нагрузка p, приложенная в середине пролета оболочки на участке с длиной площадки $0.07L$.

Изменение прогибов w_1/H (H – толщина пакета слоев) для внутреннего несущего слоя в осевом направлении показано на рис. 3а. Безразмерная продольная координата отсчитывается от середины оболочки. Максимальные прогибы отмечаются в районе приложения нагрузки на середине оболочки (на рисунках обозначено римской цифрой I, находящейся в начале системы координат на рис. 3а). По толщине заполнителя эти прогибы изменяются почти линейно (рис. 3б). Цифрами *1*, *2*, *3*, *4* обозначено разбиение заполнителя по толщине на один, два, три рассмотренных КЭЗ и 10 осесимметричных КЭ [17, 18].

Наибольшими являются напряжения – σ_{33}^f в зоне I (место приложения нагрузки – на середине оболочки). По толщине заполнителя они изменяются почти линейно (рис. 4а).

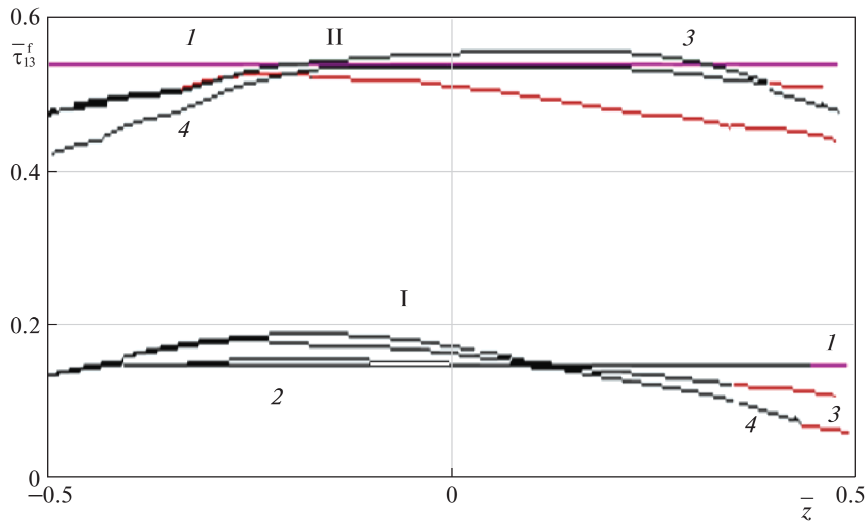

Рис. 5.

Эти напряжения почти на порядок выше других напряжений в заполнителе. Наибольшая нелинейность по толщине слоя заполнителя отмечена для напряжений $\bar{\sigma}_{11}^{f}$ в зоне II – на расстоянии $\sim L/10$ от середины оболочки (зона максимальных $\tau_{13}^{\max}$) (рис. 4б). На рис. 5 приведено распределение поперечных сдвиговых напряжений по толщине заполнителя.

Исследуемые параметры приведены в безразмерном виде $\bar{w} = w/H$, $\bar{\sigma} = \sigma/p$. На рис. 3б, 4, 5 показано изменение этих параметров по толщине заполнителя.

Заключение. Рассмотрено построение модели для послойного анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) трехслойных нерегулярных цилиндрических оболочек вращения, при котором стенка оболочки, в том числе заполнитель моделируется по толщине конечными элементами, которые затем стыкуются между собой и объединяются в блоки. Модель позволяет учесть изменение свойств и параметров НДС как по меридиональной и окружной координатам, так и по толщине оболочки и слоя заполнителя, адекватно моделировать особенности слоисто-неоднородного строения, моментное состояние несущих слоев, трехмерное напряженно-деформированное состояние в заполнителе, а также учесть нарушение сплошности слоев, различные условия их закрепления и нагружения. Для уменьшения размерности модели блочно-послойного анализа применены эффективные функции аппроксимаций деформаций и перемещений.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПРИМ РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бакулин В.Н., Образцов И.Ф., Потопахин В.А.* Динамические задачи нелинейной теории многослойных оболочек: Действие интенсивных термосиловых нагрузок, концентрированных потоков энергии. М.: Наука. Физматлит, 1998. 464 с.

2. *Bakulin V.N.* Investigation of the influence of the cutout dimensions on the stress-strain state of three-layer shells with load-bearing layers of composite materials // J. Phys. Conf. Ser.: Mater. Sci.&Engng. 2020. V. 714. P. 012002.

3. *Аннин Б.Д., Волчков Ю.М.* Неклассические модели теории пластин и оболочек // ПМТФ. 2016. Т. 57. № 5. С. 5–14.
4. *Григолюк Э.И., Куликов Г.М.* Пути развития теории упругих многослойных пластин и оболочек // Вестн. Тамбов. гос. тех. унив. 2005. Т. 11. № 2. С. 439–448.
5. *Бакулин В.Н.* Уточненная модель послойного анализа трехслойных нерегулярных конических оболочек // Докл. РАН. 2017. Т. 472. № 3. С. 272–277.
6. *Стренг Г., Фикс Д.* Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 392 с.
7. *Бакулин В.Н.* Послойный анализ напряженно-деформированного состояния нерегулярных трехслойных оболочек вращения ненулевой гауссовой кривизны // ПММ. 2021. Т. 85. № 1. С. 90–106.
8. *Образцов И.Ф.* О некоторых перспективных прикладных проблемах механики, имеющих народнохозяйственное значение // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 3–9.
9. *Бакулин В.Н.* Эффективная модель послойного анализа трехслойных нерегулярных оболочек вращения цилиндрической формы // Докл. РАН. 2018. Т. 478. № 2. С. 148–152.
10. *Бакулин В.Н.* Модель для уточненного расчета напряженно-деформированного состояния трехслойных конических нерегулярных оболочек вращения // ПММ. 2019. Т. 83. № 2. С. 315–327.
11. *Bakulin V.N.* Model for layer-by-layer analysis of the stress-strain state of three-layer irregular shells of revolution of double curvature // Mech. Solids. 2020. V. 55. № 2. P. 248–257.
12. *Балабух Л.И., Колесников К.С., Зарубин В.С. и др.* Основы строительной механики ракет. М.: Высшая школа, 1969. 494 с.
13. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1951. 344 с.
14. *Бакулин В.Н.* Блочная конечно-элементная модель для послойного анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек с нерегулярной структурой // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 4. С. 66–73.
15. *Бакулин В.Н.* Блочная конечно-элементная модель послойного анализа трехслойных в общем случае нерегулярных оболочек вращения двойной кривизны // Докл. РАН. 2019. Т. 484. № 1. С. 35–40.
16. *Постнов В.А., Хархурим И.Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974. 341 с.
17. *Образцов И.Ф., Бакулин В.Н.* Уточненные модели для исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек // Докл. РАН. 2006. Т. 407. № 1. С. 36–39.
18. *Бакулин В.Н.* Конечно-элементная модель для анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек // Матем. моделир. 2006. Т. 18. № 1. С. 3–9.
19. *Бакулин В.Н.* Неклассические уточненные модели в механике трехслойных оболочек // Вестн. Нижегород. унив. им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4. Ч. 5. С. 1989–1991.
20. *Бакулин В.Н.* Уточненные модели послойного анализа трехслойных нерегулярных оболочек // Всероссийская научно-техн. конф. “Механика и математическое моделирование в технике”. Сб. матер. М. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана 2016. С. 278–281.
21. *Каледин В.О., Шпиталь С.В.* Выбор расчетной схемы при исследовании осесимметричного краевого эффекта в трехслойных цилиндрических оболочках с легким заполнителем // Механ. композ. матер. 1993. № 5. С. 657–665.
22. *Бакулин В.Н., Рассоха А.А.* Метод конечных элементов и голографическая интерферометрия в механике композитов. М.: Машиностроение, 1987. 312 с.
23. *Кантин Г.* Смещение криволинейных элементов как жесткого целого // Ракетн. техн. космон. 1970. № 7. С. 84–88.
24. *Железнов Л.П., Кабанов В.В.* Функции перемещений конечных элементов оболочки вращения как твердых тел // Изв. РАН. МТТ. 1990. № 1. С. 131–136.
25. *Бакулин В.Н.* Уточненная модель для расчета напряженно-деформированного состояния трехслойных конических оболочек вращения // Вестн. МАИ. 2011. Т. 18. № 2. С. 211–218.
26. *Bakulin V.N.* Layer-by-layer analysis of the stress-strain state of three-layer shells with cutouts // Mech. Solids. 2019. V. 54. № 3. P. 448–460.
27. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.

28. *Bakulin V.N.* An effective model of bearing layers for layer-by-layer analysis of the stress and strain state of irregular cylindrical sandwich shells of revolution // Mech. Solids. 2020. V. 55. № 3. P. 786–796.
29. *Cantin G., Glagh R.W.* A curved cylindrical shell finite element // AIAA J. 1968. V. 6. № 6.

Block-Layer Approach for the Analysis of the Stress-Strain State of Three-Layer Irregular Cylindrical Shells of Rotation

V. N. Bakulin[a,#]

[a] *Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*
[#] *e-mail: vbak@yandex.ru*

The construction of a model for the layer-by-layer stress-strain analysis of irregular cylindrical sandwich shells of revolution, in which the shell wall, including the core, is modeled in thickness by finite elements, which are then joined together and combined into blocks is considered. The model makes it possible to take into account the variation in the properties and parameters of the stress and strain state both in the meridional and circumferential coordinates and across the thickness of the shell and the core layer, to adequately model the features of the laminated inhomogeneous structure, the bending state of the bearing layers, the three-dimensional stress and strain state in the core, and also to take into account the discontinuity of the layers, various conditions for their fixing and loading. To reduce the dimension of the block-layer analysis model, effective functions of approximation of deformations and displacements are used.

Keywords: layer-by-layer analysis, stress and strain state, irregular cylindrical sandwich shells of revolution, models, finite element, block

REFERENCES

1. *Bakulin V.N., Obraztsov I.F., Potopakhin V.A.* Dynamic Problems on Nonlinear Theory of Multilayered Shells: Effect of Intense Thermal Power Loads, Concentrated Energy Fluxes. (Dinamicheskie zadachi nelineinoi teorii mnogosloinykh obolochek: Deistvie intensivnykh termosilovykh nagruzok, kontsentrirovannykh potokov energii) Moscow: Fizmatlit, 1998. 464 p. (in Russian)
2. *Bakulin V.N.* Investigation of the influence of the cutout dimensions on the stress-strain state of three-layer shells with load-bearing layers of composite materials // J. Phys. Conf. Ser.: Mater. Sci.&Engng., 2020, vol. 714, pp. 012002.
3. *Annin B.D., Volchkov Yu.M.* Nonclassical models of the theory of plates and shells // J. Appl. Mech.&Techn. Phys., 2016, vol. 57, no. 5, pp. 769–776.
4. *Grigolyuk E.I., Kulikov G.M.* Ways of development of the theory of elastic multilayer plates and shells // Trans. TSTU, 2005, vol. 11, no. 2, pp. 439–448.
5. *Bakulin V.N.* A corrected model of level-by-level analysis of three-layer irregular conical shells // Dokl. Phys., 2017, vol. 62, no. 1, pp. 37–41.
6. *Strang G., Fix G.J.* An Analysis of the Finite Element Method. N.J.: Prentice-Hall, 1973. 392 p.
7. *Bakulin V.N.* Layer-by -layer stress-strain analysis of irregular sandwich shellsof revolution with non-zero gaussian curvature // Mech. Solids, 2021, vol. 56, no. 4, pp. 411–417.
8. *Obraztsov I.F.* Certain prospective practical problems of mechanics of importance to the national economy // Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela, 1982, no. 4, pp. 3–9.
9. *Bakulin V.N.* An efficient model for layer-by-layer analysis of sandwich irregular cylindrical shells of revolution // Dokl. Phys., 2018, vol. 63, no. 1, pp. 23–27.
10. *Bakulin V.N.* A model for refined calculation of the stress-strain state of sandwich conical irregular shells // Mech. Solids, 2019, vol. 54, no. 5, pp. 786–796.
11. *Bakulin V.N.* Model for layer-by-layer analysis of the stress-strain state of three-layer irregular shells of revolution of double curvature // Mech. Solids, 2020, vol. 55, no. 2, pp. 248–257.
12. *Balabukh L.I., Kolesnikov K.S., Zarubin V.S. et al.* Foundations of the Structural Mechanics of Rockets. Moscow: Vysshaya Shkola, 1969. 494 p. (in Russian)

13. *Novozhilov V.V.* Theory of Thin Shells. (Teoriya tonkikh obolochek) Leningrad: Sudpromgiz, 1951. 344 p. (in Russian)
14. *Bakulin V.N.* Block based finite element model for layer analysis of stress strain state of three-layered shells with irregular structure // Mech. Solids, 2018, vol. 53, no. 4, pp. 411–417.
15. *Bakulin V.N.* Block finite-element model of layer-by-layer analysis of the stress–strain state of three-layer generally irregular shells of double-curvature revolution // Dokl. Phys., 2019, vol. 64, no. 1, pp. 9–13.
16. *Postnov V.A., Kharkhurim I.Ya.* The Finite Element Method in the Calculations of Ship Structures. Leningrad: Shipbuilding, 1974. 341 p.
17. *Obraztsov I.F., Bakulin V.N.* Updated models for studies of the stressed-strained state of sandwich cylindrical shells // Dokl. Phys., 2006. vol. 51, no. 3, pp. 128–131.
18. *Bakulin V.N.* Finite-element model for analysis of stress-strained state of sandwich shells // Mat. Modelir., 2006, vol. 18, no. 1, pp. 3–9.
19. *Bakulin V.N.* Non-classical refined models in the mechanics of three-layer shells // Vestn. Nizhny Novgorod Univ., 2011, no. 4, part 5, pp. 1989–1991.
20. *Bakulin V.N.* Refined models of layer-by-layer analysis of three-layer irregular shells // Conf. "Mechanics and Mathematical Modeling in Engineering", Sb. mater. Moscow: BMSTU, 2016. pp. 278–281.
21. *Kaledin, V.O., Shpital' S.V.* The way for selecting the design model under researching axially symmetric boundary effect in three-layered cylindrical shells with light filler material // Mech. Compos. Mater., 1993, no. 5, pp. 657–665.
22. *Bakulin V.N. and Rassokha A.A.* Finite Elements Method and Holographic Interferometry for Mechanics of Composites. (Metod konechnykh elementov i golograficheskaya interferometriya v mekhanike kompozitov) Moscow: Mashinostroenie, 1987. 312 p. (in Russian)
23. *Cantin G.* Rigid body motions in curved finite elements // AIAA J., 1970, vol. 63, no. 7, pp. 12–52.
24. *Zheleznov L.P., Kabanov V.V.* Relocation functions for finite elements of rotational shell as rigid bodies // Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela, 1990, no. 1, pp. 131–136.
25. *Bakulin V.N.* Refined model for calculating stress-strain state of three-layer conical rotational shells // Vestn. Mosk. Aviats. Inst., 2011, vol. 18, no. 2, pp. 211–218.
26. *Bakulin V.N.* Layer-by-layer analysis of the stress-strain state of three-layer shells with cutouts // Mech. Solids, 2019, vol. 54, no. 3, pp. 448–460.
27. *Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S.* Theory of Plates and Shells. N.Y.: McGraw-Hill, 1959. 635 p.
28. *Bakulin V.N.* An effective model of bearing layers for layer-by-layer analysis of the stress and strain state of irregular cylindrical sandwich shells of revolution // Mech. Solids, 2020, vol. 55, no. 3, pp. 786–796.
29. *Cantin G., Glagh R.W.* A curved cylindrical shell finite element // AIAA J., 1968, vol. 6, no. 6, pp. 82–88.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 3, с. 396–408

УДК 539.3

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА

© 2021 г. А. О. Ватульян[1,2,*], С. А. Нестеров[2,]**

[1] *Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия*

[2] *Южный математический институт – филиал ВНЦ РАН, Владикавказ, Россия*

**e-mail: aovatulyan@sfedu.ru*

***e-mail: 1079@list.ru*

Поступила в редакцию 02.02.2021 г.
После доработки 18.03.2021 г.
Принята к публикации 25.03.2021 г.

Сформулирована обратная задача об идентификации термомеханических характеристик конечного функционально-градиентного цилиндра по дополнительной информации, измеренной на внешней поверхности цилиндра на конечном временном интервале. Термоупругие характеристики считаются переменными по радиальной координате. Торцы цилиндра теплоизолированы и находятся в условиях скользящей заделки. Прямая задача после применения преобразования Лапласа решена на основе метода разделения переменных и метода пристрелки. Численное решение обратной задачи построено с помощью итерационного процесса, на каждом этапе которого решается интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода.

Ключевые слова: обратная задача термоупругости, интегральное уравнение, функционально-градиентные материалы, конечный цилиндр, идентификация, метод пристрелки

DOI: 10.31857/S0032823521030115

1. Введение. В ходе анализа прочности различных элементов конструкций цилиндрической формы, находящихся в условиях термосилового нагружения, приходится решать задачи, связанные с нахождением полей температуры, перемещений и напряжений. Обычно такие расчеты проводят для однородных или слоистых термоупругих материалов. Однако в настоящее время все шире стали применяться функционально-градиентные материалы (FGM), которые изготавливают из-за необходимости оптимизировать термомеханические свойства конструкций [1, 2]. Однако технология изготовления FGM с заданными свойствами является многоступенчатой и поэтому требует на последнем этапе диагностики реальных свойств изделия. При этом материальные характеристики из-за неоднородности материалов могут быть определены только неразрушающими методами контроля, опирающимися на аппарат коэффициентных обратных задач (КОЗ).

К настоящему времени выполнено довольно много исследований по решению КОЗ теплопроводности [3, 4] и теории упругости [5–9] для тел цилиндрической формы. При этом наиболее распространенным методом решения КОЗ является построение функционала невязки и его минимизация каким-либо из градиентных методов [10–12] или генетическим алгоритмом [13]. Для некоторых материалов необходимо учитывать связанность полей и решать КОЗ термоупругости [14, 15].

В [16] для решения нелинейной КОЗ термоупругости на основе итерационного процесса были получены линеаризованные операторные уравнения в трансформантах Лапласа. С использованием этого подхода после перехода от трансформант Лапласа к оригиналам была проведена идентификация термомеханических характеристик [17, 18] и преднапряженного состояния [19, 20] бесконечного длинного полого цилиндра при задании информации о граничных полях на конечном временном интервале. При этом восстанавливалась только одна из термомеханических характеристик, остальные полагались известными. Однако для разработки теоретических основ неразрушающего контроля FGM тел цилиндрической формы при наличии радиальной неоднородности после изготовления более адекватной является модель цилиндра конечной длины. В работе [21] приведена постановка КОЗ конечного цилиндра в трансформантах Лапласа (это соответствует ситуации, когда дополнительная информация задана на полубесконечном интервале) в случае, когда торцы цилиндра теплоизолированы и находятся в условиях скользящей заделки, что позволяет при решении прямой задачи использовать метод разделения переменных. Для решения КОЗ на основе итерационного процесса операторные уравнения в трансформантах, полученные в [16] для произвольного конечного тела, упрощены и приведены к системе операторных уравнений для конечного цилиндра.

Однако постановка КОЗ в трансформантах требует информации на полубесконечном временном интервале, что создает сложности при реализации на практике, т.к. дополнительную информацию можно измерить на временном отрезке до выхода процесса на стационарный режим.

Данная работа посвящена постановке и решению КОЗ термоупругости для конечного цилиндра при задании информации на конечном временном интервале. Решение прямой задачи в трансформантах построено так же, как в [21]. Обращение преобразования Лапласа основано на методе разложения оригинала в ряд по смещенным многочленам Лежандра. В [21] получена система операторных уравнений в трансформантах, в правые части и ядра которых входят только нулевые гармоники радиальных перемещений и температуры. В данной работе, в дополнение к системе операторных уравнений, приведенных в [21], получена система операторных уравнений в трансформантах, в правые части и ядра которых входят гармоники радиальных перемещений и температуры при $n = 1, 2, \ldots$. Путем обращения операторных уравнений в трансформантах получены уравнения в оригиналах для восстановления теплофизических характеристик. Применен поэтапный итерационный процесс реконструкции двух характеристик. Даны практические рекомендации по выбору наиболее информативных временных интервалов для съема дополнительной информации.

2. Постановка задачи об идентификации термомеханических характеристик конечного FGM-цилиндра. Рассмотрим задачу для конечного термоупругого цилиндра, торцы которого теплоизолированы и находятся в условиях скользящей заделки, а термомеханические характеристики являются переменными только радиальной координаты. Цилиндр имеет высоту $2h$, внутренний радиус r_1, внешний радиус r_2. На внутренней поверхности цилиндра, свободной от механических нагрузок, поддерживается нулевая температура. На внешней поверхности цилиндра действует одна из двух типов нагрузки: 1) нормальная механическая нагрузка с амплитудой p^0; 2) тепловой поток с амплитудой q^0. Начально-краевая задача термоупругости после перехода к безразмерным параметрам и функциям по формулам

$$\xi_1 = \frac{r}{r_2}, \quad \xi_2 = \frac{z}{r_2}, \quad \xi_0 = \frac{r_1}{r_2}, \quad \beta_0 = \frac{h}{r_2}, \quad U = \frac{u_r}{r_2}, \quad V = \frac{u_z}{r_2}, \quad W = \frac{\gamma_0 \theta}{\lambda_0}$$

$$\tau = \frac{t}{r_2}\sqrt{\frac{\lambda_0}{\rho_0}},\quad \delta_0 = \frac{\gamma_0^2 T_0}{c_0\lambda_0},\quad \Omega_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{\lambda_0},\quad \Omega_{\varphi\varphi} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\lambda_0},\quad \Omega_{rz} = \frac{\sigma_{rz}}{\lambda_0},\quad \Omega_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{\lambda_0}$$

$$\bar\lambda = \frac{\lambda}{\lambda_0},\quad y_0 = \frac{\mu_0}{\lambda_0},\quad \bar\mu = \frac{\mu}{\mu_0},\quad \bar\rho = \frac{\rho}{\rho_0},\quad \bar\gamma = \frac{\gamma}{\gamma_0},\quad \bar k = \frac{k}{k_0},\quad \bar c = \frac{c}{c_0}$$

$$\chi_0 = \frac{p^0}{\lambda_0},\quad \omega_0 = \frac{q^0 r_2\gamma_0}{k_0\lambda_0}$$

имеет вид [21]:

$$\frac{\partial\Omega_{rr}}{\partial\xi_1} + \frac{\partial\Omega_{zr}}{\partial\xi_2} + \frac{\Omega_{rr}-\Omega_{\varphi\varphi}}{\xi_1} = \bar\rho\frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial\Omega_{zr}}{\partial\xi_1} + \frac{\partial\Omega_{zz}}{\partial\xi_2} + \frac{\Omega_{zr}}{\xi_1} = \bar\rho\frac{\partial^2 V}{\partial\tau^2} \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{\xi_1}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\bar k(\xi_1)\xi_1\frac{\partial W}{\partial\xi_1}\right) + \bar k(\xi_1)\frac{\partial^2 W}{\partial\xi_2^2} = \bar c(\xi)\frac{\partial W}{\partial\tau} + \delta_0\bar\gamma(\xi)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\xi_1\partial\tau} + \frac{1}{\xi_1}\frac{\partial U}{\partial\tau} + \frac{\partial^2 V}{\partial\xi_2\partial\tau}\right) \tag{2.3}$$

$$V(\xi_1,\pm\beta_0,\tau) = 0,\quad \Omega_{rz}(\xi_1,\pm\beta_0,\tau) = 0,\quad \frac{\partial W}{\partial\xi_2}(\xi_1,\pm\beta_0,\tau) = 0 \tag{2.4}$$

$$\Omega_{rr}(\xi_0,\xi_2,\tau) = 0,\quad \Omega_{rz}(\xi_0,\xi_2,\tau) = 0,\quad W(\xi_0,\xi_2,\tau) = 0 \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered}\Omega_{rr}(1,\xi_2,\tau) = \chi_0 S(\xi_2)G_1(\tau),\quad \Omega_{rz}(1,\xi_2,\tau) = 0\\ -\bar k(1)\frac{\partial W}{\partial\xi_1}(1,\xi_2,\tau) = \omega_0 R(\xi_2)G_2(\tau)\end{gathered} \tag{2.6}$$

$$W(\xi_1,\xi_2,0) = U(\xi_1,\xi_2,0) = \frac{\partial U}{\partial\tau}(\xi_1,\xi_2,0) = V(\xi_1,\xi_2,0) = \frac{\partial V}{\partial\tau}(\xi_1,\xi_2,0) = 0 \tag{2.7}$$

Здесь λ_0, μ_0 ρ_0, γ_0, k_0, c_0 – характерные величины.

Прямая задача термоупругости заключается в определении функций $W = W(\xi_1,\xi_2,\tau)$, $U = U(\xi_1,\xi_2,\tau)$, $V = V(\xi_1,\xi_2,\tau)$ из (2.1)–(2.7) при известных термомеханических характеристиках $\bar\lambda$, $\bar\mu$, $\bar\rho$, $\bar\gamma$, $\bar k$, $\bar c$.

В обратной задаче требуется определить термомеханические характеристики $\bar\lambda$, $\bar\mu$, $\bar\rho$, $\bar\gamma$, $\bar k$, $\bar c$ из (2.1)–(2.7) по дополнительной информации, измеренной на внешней боковой поверхности цилиндра:

$$U(1,\xi_2,\tau) = f(\xi_2,\tau);\quad \tau\in[a,b] \tag{2.8}$$

$$W(1,\xi_2,\tau) = g(\xi_2,\tau);\quad \tau\in[c,d] \tag{2.9}$$

3. Исследование прямой задачи термоупругости. Применим преобразование Лапласа по τ к уравнениям (2.1)–(2.6), с учетом начальных условий (2.7). Полученная задача в трансформантах решается на основе метода разделения переменных [21]. Для этого полагаем:

$$\tilde{U}(\xi_1,\xi_2,p)=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{a}_n(\xi_1,p)\cos(\nu_n\xi_2)$$
$$\tilde{V}(\xi_1,\xi_2,p)=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{b}_n(\xi_1,p)\sin(\nu_n\xi_2) \tag{3.1}$$
$$\tilde{W}(\xi_1,\xi_2,p)=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{d}_n(\xi_1,p)\cos(\nu_n\xi_2);\quad \nu_n=\frac{n\pi}{\beta_0}$$

Тогда граничные условия (2.4) выполняются тождественно. Полагаем, что функции $S(\xi_2)$ и $R(\xi_2)$ – четные, тогда их можно представить в виде:

$$S(\xi_2)=\sum_{n=0}^{\infty}s_n\cos(\nu_n\xi_2),\quad R(\xi_2)=\sum_{n=0}^{\infty}r_n\cos(\nu_n\xi_2), \tag{3.2}$$

где коэффициенты разложения имеют вид

$$s_n=\int_{-\beta_0}^{\beta_0}S(\xi_2)\cos(\nu_n\xi_2)d\xi_2,\quad r_n=\int_{-\beta_0}^{\beta_0}R(\xi_2)\cos(\nu_n\xi_2)d\xi_2$$

Компоненты тензора напряжений σ, распишем в виде:

$$\tilde{\Omega}_{rr}=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}_{1n}\cos(\nu_n\xi_2),\quad \tilde{\Omega}_{zr}=\tilde{\Omega}_{rz}=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}_{2n}\sin(\nu_n\xi_2) \tag{3.3}$$

$$\tilde{\Omega}_{\varphi\varphi}=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}_{3n}\cos(\nu_n\xi_2),\quad \tilde{\Omega}_{zz}=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}_{4n}\cos(\nu_n\xi_2) \tag{3.4}$$

Здесь

$$\tilde{R}_{1n}=(\bar{\lambda}+2y_0\bar{\mu})\tilde{a}_n'+\bar{\lambda}\left(\frac{\tilde{a}_n}{\xi_1}+\nu_n\tilde{b}_n\right)-\bar{\gamma}\tilde{d}_n,\quad \tilde{R}_{2n}=y_0\bar{\mu}(\tilde{b}_n'-\nu_n\tilde{a}_n)$$
$$\tilde{R}_{3n}=\frac{\bar{\lambda}+2y_0\bar{\mu}}{\xi_1}\tilde{a}_n+\bar{\lambda}(\tilde{a}_n'+\nu_n\tilde{b}_n)-\bar{\gamma}\tilde{d}_n,\quad \tilde{R}_{4n}=(\bar{\lambda}+2y_0\bar{\mu})\nu_n\tilde{b}_n+\bar{\lambda}\left(\tilde{a}_n'+\frac{1}{\xi_1}\tilde{a}_n\right)-\bar{\gamma}\tilde{d}_n$$

Тогда с учетом введенных обозначений, получим набор линейных систем дифференциальных уравнений относительно искомых функций $\tilde{a}_n$, $\tilde{b}_n$, $\tilde{d}_n$, $\tilde{Q}_n$, $\tilde{R}_{1n}$, $\tilde{R}_{2n}$. Решение системы уравнений при заданных функциях $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\rho}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{k}$, $\bar{c}$ получено численно с помощью метода пристрелки [21] для любого численного значения параметра преобразования Лапласа p.

Для нахождения оригиналов функций $F(\tau)$ по их трансформантам $\tilde{F}(p)$ нужно применить обратное преобразование Лапласа, т.е. вычислить контурный интеграл:

$$F(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\tilde{F}(p)e^{p\tau}dp \tag{3.5}$$

Воспользуемся численным обращением преобразования Лапласа на основе метода разложения оригинала в ряд по смещенным многочленам Лежандра. Смещенные многочлены Лежандра P_n^* отличаются от многочленов Лежандра P_n тем, что область их определения сведена к отрезку [0, 1] вместо обычного [−1, 1], т.е. $P_n^*(x)=P_n(2x-1)$. Смещенные многочлены Лежандра имеют вид:

$$P_n^*(x)=(-1)^n\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}\frac{(n+s)!}{n!\,s!}x^s \tag{3.6}$$

Согласно [25] разложение функции $F(\tau)$ по смещенным многочленам Лежандра имеет вид:

$$F(\tau) = \sum_{s=0}^{\infty} (2s+1) a_s P_s^*(e^{-\tau}) \tag{3.7}$$

В [25] получено выражение для коэффициентов разложения a_s через известные коэффициенты $c_i^{(s)}$ многочленов P_s^* и значения изображения $\tilde{F}(p)$ в целых точках $p = 0,1,2,\dots$ в виде $a_s = \sum_{i=0}^{s} c_i^{(s)} \tilde{F}(i)$.

На конкретных примерах в системе Maple проведено тестирование процедуры обращения преобразования Лапласа. Выяснено, что для того, чтобы погрешность вычисления оригиналов для времени $\tau \geq 0.01$ не превосходила 1% достаточно ограничиться 80 членами ряда в разложении (3.7), используя при этом параметр digits = 60, характеризующий повышенную точность вычислений.

Верификация предложенного метода решения прямой задачи (2.1)–(2.7) была проведена на примере FGM, свойства которого принимают свойства Ni при $\xi_1 = \xi_0$ и свойства TiC при $\xi_1 = 1$. Материальные характеристики композиции Ni–TiC имеют вид [23]: $E_{\mathrm{Ni}} = 2.06 \times 10^{11}$ Па, $\nu_{\mathrm{Ni}} = 0.3$, $\rho_{\mathrm{Ni}} = 8890$ кг/м^3, $\alpha_{\mathrm{Ni}} = 13.3 \times 10^{-6}$ К$^{-1}$, $k_{\mathrm{Ni}} =$ $= 90$ Вт/(м К), $c_{\mathrm{Ni}} = 439.5$ Дж(кг К), $E_{\mathrm{TiC}} = 3.2 \times 10^{11}$ Па, $\nu_{\mathrm{TiC}} = 0.3$, $\rho_{\mathrm{TiC}} = 4940$ кг/м^3, $\alpha_{\mathrm{TiC}} = 7.4 \times 10^{-6}$ К$^{-1}$, $k_{\mathrm{TiC}} = 25$ Вт/(м К), $c_{\mathrm{TiC}} = 134$ Дж(кг К).

Для моделирования свойств FGM в работе используются законы вида [7, 24]: $\bar{a}(\xi_1) = \bar{a}_{\mathrm{Ni}} + (\bar{a}_{\mathrm{TiC}} - \bar{a}_{\mathrm{Ni}}) \left(\frac{\xi_1 - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^l$, $l = 1,2,\dots$. Полагая в расчетах $\lambda_0 = \mu_0 = 10^{11}$ Па, $\gamma_0 = 10^6$ Па/К, $\rho_0 = 10^4$ кг/м^3, $k_0 = 10^2$ Вт/(м К), $c_0 = 10^4$ Дж(кг К), $h = 0.5$ м, $r_1 = 0.2$ м, $r_2 = 0.25$ м, $p^0 = 10^{11}$ Па, $q^0 = 10^7$ Вт/м^2, $T_0 = 300$ К, получим следующие законы изменения безразмерных термомеханических характеристик:

$$\bar{\mu}(\xi_1) = 0.79 + 0.44\,(5\xi_1 - 4)^l, \quad \bar{\lambda}(\xi_1) = 1.19 + 0.66\,(5\xi_1 - 4)^l$$

$$\bar{\gamma}(\xi_1) = 2.74 - 0.37\,(5\xi_1 - 4)^l, \quad \bar{\rho}(\xi_1) = 0.89 - 0.4\,(5\xi_1 - 4)^l$$

$$\bar{k}(\xi_1) = 0.9 - 0.65\,(5\xi_1 - 4)^l, \quad \bar{c}(\xi_1) = 0.44 - 0.3\,(5\xi_1 - 4)^l$$

Здесь $l = 1,2,\dots$ – показатель неоднородности.

Проведено сравнение полученного решения для материала Ni– TiC с решением в конечно-элементном пакете FlexPDE при значении показателя неоднородности $l = 1$. Выяснено, что для того, чтобы погрешность вычисления распределения перемещений U, V и температуры W по координате ξ_1 при $\xi_2 = 0$, $\tau = 0.2$ не превосходила 1% достаточно ограничиться 5 членами ряда в разложениях (3.1).

При решении КОЗ важно, чтобы изменение восстанавливаемых функций отражалось на измеряемой в эксперименте дополнительной информации. На рис. 1 показан график изменения безразмерной температуры W от τ в точке $(\xi_1, \xi_2) = (1, 0)$ при нагружении тепловым потоком $Q(1, \xi_2, \tau) = \left(1 - \left(\frac{\xi_2}{2} \right)^2 \right) H(\tau)$ FGM цилиндра с различными показателями неоднородности: $l = 1$ (сплошная линия) и $l = 2$ (точки).

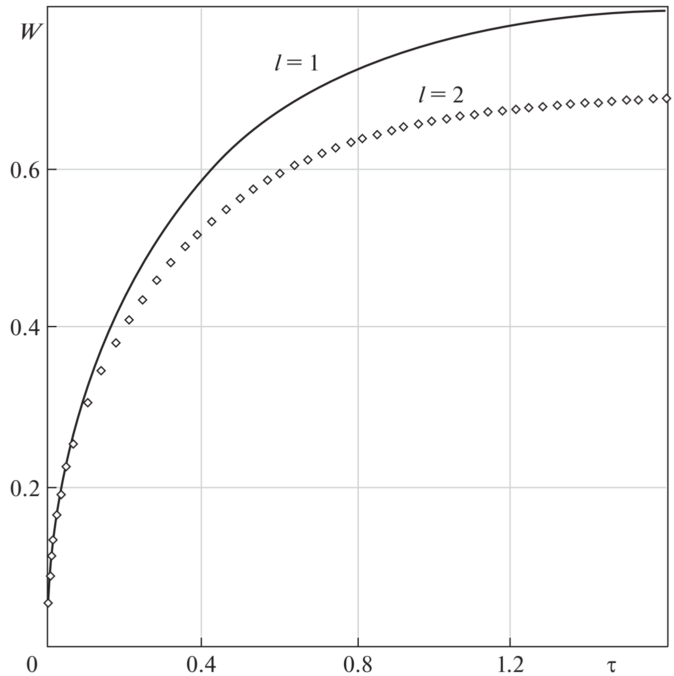

Рис. 1. Изменение безразмерной температуры W от τ в точке (1, 0) при различных показателях законов неоднородности FGM-цилиндра.

Из рис. 1 видно, что переменные свойства материала могут существенно влиять на граничные физические поля и их можно идентифицировать по дополнительной информации.

4. Схема решения обратной задачи термоупругости для цилиндра. КОЗ термоупругости (2.1)–(2.9) является нелинейной задачей. Построим ее решение на основе итерационного процесса, на каждом этапе которого решаются линеаризованные операторные уравнения или системы уравнений. Предположим, что функции $f(\xi_2,\tau)$, $g(\xi_2,\tau)$ в формулах (2.8), (2.9) допускают разложения в ряды: $f(\xi_2,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\tau)\cos(\nu_n\xi_2)$, $g(\xi_2,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\tau)\cos(\nu_n\xi_2)$.

Отметим, что при $n = 0$ система операторных уравнений для решения КОЗ термоупругости конечного цилиндра в трансформантах Лапласа, полученная в [21], имеет вид:

$$\int_{\xi_0}^{1}\left[\overline{\lambda}^{(m)}\left(\tilde{a}_0'^{(m-1)}+\frac{\tilde{a}_0^{(m-1)}}{\xi_1}\right)^2+2\overline{\mu}^{(m)}g_0\left(\tilde{a}_0'^{(m-1)^2}+\left(\frac{\tilde{a}_0^{(m-1)}}{\xi_1}\right)^2\right)+p^2\overline{\rho}^{(m)}\tilde{a}_0^{(m-1)^2}\right]-$$

$$-2\delta_0\overline{\gamma}^{(m)}\left(\tilde{a}_0'^{(m-1)}+\frac{\tilde{a}_0^{(m-1)}}{\xi_1}\right)\tilde{d}_0^{(m-1)}\xi_1 d\xi_1 = s_0\chi_0\tilde{G}_1(p)\left(\tilde{f}_0(p)-\tilde{a}_0^{(m-1)}(1,p)\right) \qquad (4.1)$$

$$\int_{\xi_0}^{1}\left[\overline{k}^{(m)}\tilde{d}_0'^{(m-1)^2}+p\overline{c}^{(m)}\tilde{d}_0^{(m-1)^2}+2p\delta_0\overline{\gamma}^{(m)}\left(\tilde{a}_0'^{(m-1)}+\frac{\tilde{a}_0^{(m-1)}}{\xi_1}\right)\tilde{d}_0^{(m-1)}\right]\xi_1 d\xi_1 =$$

$$= r_0\omega_0\tilde{G}_2(p)\left(\tilde{g}_0(p)-\tilde{d}_0^{(m-1)}(1,p)\right), \quad p\in[0,\infty) \qquad (4.2)$$

В правые части выражений (4.1), (4.2) входят трансформанты $\tilde{f}_0(p)$, $\tilde{g}_0(p)$, которые имеют вид: $\tilde{f}_0(p) = \int_{-\beta}^{\beta} \tilde{f}(\xi_2, p) d\xi_2$, $\tilde{g}_0(p) = \int_{-\beta}^{\beta} \tilde{g}(\xi_2, p) d\xi_2$.

Выполняя действия, аналогичные [21], получим системы операторных уравнений в трансформантах для различных гармоник $n = 1, 2, \ldots$ при каждом значении параметра $p \in [0, \infty)$:

$$\int_{\xi_0}^{1} \bar{\lambda}^{(m)} \left(\tilde{a}_n'^{(m-1)} + \frac{\tilde{a}_n^{(m-1)}}{\xi_1} + \nu_n \tilde{b}_n^{(m-1)} \right)^2 + 2\bar{\mu}^{(m)} g_0 \left(\tilde{a}_n'^{(m-1)^2} + \left(\frac{\tilde{a}_n^{(m-1)}}{\xi_1} \right)^2 + (\nu_n \tilde{b}_n^{(m-1)})^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} (\tilde{b}_n'^{(m-1)} - \nu_n \tilde{a}_n^{(m-1)})^2 \right) + p^2 \bar{\rho}^{(m)} \left(\tilde{a}_n^{(m-1)^2} + b_n^{(m-1)^2} \right) -$$

$$- 2\delta_0 \bar{\gamma}^{(m)} \left(\tilde{a}_n'^{(m-1)} + \frac{\tilde{a}_n^{(m-1)}}{\xi_1} + \nu_n \tilde{b}_n^{(m-1)} \right) \tilde{d}_n^{(m-1)} \xi_1 d\xi_1 = s_n \chi_0 \tilde{G}_1(p) (\tilde{f}_n(p) - \tilde{a}_n^{(m-1)}(1, p)) \qquad (4.3)$$

$$\int_{\xi_0}^{1} \left[\bar{k}^{(m)} \left(\tilde{d}_n'^{(m-1)^2} + \nu_n^2 \tilde{d}_n^{(m-1)^2} \right) + p \bar{c}^{(m)} \tilde{d}_n^{(m-1)^2} + \right.$$

$$\left. + 2p\delta_0 \bar{\gamma}^{(m)} \left(\tilde{a}_n'^{(m-1)} + \frac{\tilde{a}_n^{(m-1)}}{\xi_1} + \nu_n \tilde{b}_n^{(m-1)} \right) \tilde{d}_n^{(m-1)} \right] \xi_1 d\xi_1 = r_n \omega_0 \tilde{G}_2(p) (\tilde{g}_n(p) - \tilde{d}_n^{(m-1)}(1, p)) \qquad (4.4)$$

$$p \in [0, \infty)$$

Выражения (4.1)–(4.4) представляют собой системы интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода относительно поправок $\bar{\lambda}^{(m)}$, $\bar{\mu}^{(m)}$, $\bar{\rho}^{(m)}$, $\bar{\gamma}^{(m)}$, $\bar{k}^{(m)}$, $\bar{c}^{(m)}$ безразмерных термомеханических характеристик при известных значениях функций $\tilde{a}_n^{(m-1)}$, $\tilde{b}_n^{(m-1)}$, $\tilde{d}_n^{(m-1)}$, найденных путем решения прямой задачи (2.1)–(2.7) на $(m-1)$-й итерации. В правые части (43), (44) входят трансформанты $\tilde{f}_n(p)$, $\tilde{g}_n(p)$, которые имеют вид: $\tilde{f}_n(p) = \int_{-\beta}^{\beta} \tilde{f}(\xi_2, p) \cos(\nu_n \xi_2) d\xi_2$, $\tilde{g}_n(p) = \int_{-\beta}^{\beta} \tilde{g}(\xi_2, p) \cos(\nu_n \xi_2) d\xi_2$.

На основе системы операторных уравнений (4.1)–(4.4) можно организовать итерационный процесс для определения искомых характеристик. Итерационный процесс стартует с выбора начальных приближений, которые определяются в классе линейных функций исходя из априорной информации о значениях искомых характеристик только на внешней и внутренней границах, которые могут быть определены из экспериментов или заданы технологическим процессом [21]. Далее уточняются законы изменения термомеханической характеристики путем нахождения поправок из решения систем операторных уравнений 1-го рода в оригиналах, полученного на основе обращения систем уравнений в трансформантах (4.1)–(4.4).

Поскольку решение интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода вида (4.1)–(4.4) является некорректной задачей, то для его регуляризации применяется метод Тихонова А.Н. с автоматическим выбором параметра регуляризации согласно алгоритму, описанному в [26]. Аппроксимация поправок осуществлялась с помощью сплайнов 4-го порядка.

Зашумление входной информации моделировалось с помощью соотношения

$$f_\alpha(\tau) = f(\tau)(1 + \alpha\psi), \qquad (4.5)$$

где α – величина зашумления, ψ – случайная величина с равномерным законом распределения на отрезке $[-1, 1]$.

Выход из итерационного процесса осуществляется по предельному числу итераций, равному 20.

5. Результаты вычислительных экспериментов. Особенности идентификации неоднородных механических характеристик конечного цилиндра подробно исследованы в [9]. В данном параграфе представлены результаты вычислительных экспериментов по реконструкции теплофизических характеристик в классах степенных и экспоненциальных функций, которыми наиболее часто моделируются законы изменения функционально-градиентных материалов. Цилиндр нагружается тепловым потоком $Q(1,\xi_2,\tau) = \omega_0(1-(\xi_2/\beta_0)^2)H(\tau)$. Механические характеристики цилиндра $\overline{\rho}(\xi_1)$, $\overline{\mu}(\xi_1)$, $\overline{\lambda}(\xi_1)$ полагаются известными и равными законам, рассмотренным в параграфе 2, с показателем неоднородности $l = 2$. В расчетах принято: $\xi_0 = 0.8$, $\delta_0 = 0.1$, $y_0 = 1$, $\beta_0 = 2$, $\omega_0 = 1$.

Для одновременной идентификации теплофизических характеристик $\overline{\gamma}(\xi_1)$, $\overline{k}(\xi_1)$ и $\overline{c}(\xi_1)$ необходимо решить систему 3 интегральных уравнений, состоящих из обращенных в оригиналы уравнения (4.2) и двух уравнений (4.4) при $n = 1$ и $n = 2$, из-за чего возникают большие вычислительные проблемы. Возможности предлагаемого подхода проверим на решении упрощенной обратной задачи о реконструкции двух функций.

В первой серии экспериментов восстанавливались функции $\overline{\gamma}(\xi_1)$ и $\overline{k}(\xi_1)$ при известной $\overline{c}(\xi_1)$. В этом случае, полагая в уравнениях (4.2), (4.4) $\overline{c}^{(m)} = 0$, получим систему уравнений для нахождения поправок функций $\overline{\gamma}^{(m)}$ и $\overline{k}^{(m)}$. Однако, проведенные расчеты показали, что значение ядра при поправке $\overline{k}^{(m)}$ значительно больше, чем при $\overline{\gamma}^{(m)}$. Поэтому предложен поэтапный процесс идентификации теплофизических характеристик.

На первом этапе для всех итераций полагаем $\overline{\gamma}^{(m)} = 0$, что означает равенство коэффициента температурных напряжений выбранному начальному приближению. Далее на каждой итерации определялись поправки $\overline{k}^{(m)}$ как решение интегрального уравнения, полученного путем обращения уравнения в трансформантах (4.2) при $\overline{c}^{(m)} = \overline{\gamma}^{(m)} = 0$:

$$\int_{\xi_0}^{1} \overline{k}^{(m)} M_1(\xi_1,\tau)\xi_1 d\xi_1 = r_0\omega_0(g_0(\tau) - d_0^{(m-1)}(1,\tau)); \quad \tau \in [c,d], \tag{5.1}$$

где ядро уравнения (5.1) имеет вид: $M_1(\xi_1,\tau) = \int_0^\tau \frac{\partial d_0^{(m-1)}(\xi_1,\tau_1)}{\partial \xi_1} \frac{\partial^2 d_0^{(m-1)}(\xi_1,\tau-\tau_1)}{\partial \xi_1 \partial \tau_1} d\tau_1$.

На втором этапе фиксируется найденная функция $\overline{k}(\xi_1)$. Тогда, полагая поправки $\overline{k}^{(m)} = 0$, на каждой последующей итерации определяются поправки $\overline{\gamma}^{(m)}$ как решение интегрального уравнения, полученного путем обращения уравнения в трансформантах (4.2) при $\overline{c}^{(m)} = \overline{k}^{(m)} = 0$:

$$2\delta_0 \int_{\xi_0}^{1} \overline{\gamma}^{(m)} M_2(\xi_1,\tau)\xi_1 d\xi_1 = r_0\omega_0(g_0(\tau) - d_0^{(m-1)}(1,\tau)); \quad \tau \in [c,d], \tag{5.2}$$

где ядро уравнения (5.2) имеет вид: $M_2(\xi_1,\tau) = \int_0^\tau \left(\frac{\partial^2 a_0^{(m-1)}(\xi_1,\tau_1)}{\partial \xi_1 \partial \tau_1} + \frac{1}{\xi_1} \frac{\partial a_0^{(m-1)}(\xi_1,\tau_1)}{\partial \tau_1} \right) \frac{\partial d_0^{(m-1)}(\xi_1,\tau-\tau_1)}{\partial \tau_1} d\tau_1$.

Во второй серии экспериментов восстанавливались функции $\bar{k}(\xi_1)$ и $\bar{c}(\xi_1)$ при известной $\bar{\gamma}(\xi_1)$. В этом случае, полагая в уравнениях (4.2), (4.4) $\bar{\gamma}^{(m)} = 0$, получим систему уравнений для нахождения поправок функций $\bar{c}^{(m)}$ и $\bar{k}^{(m)}$. Из-за того, что значение ядра при поправке $\bar{k}^{(m)}$ значительно больше, чем при $\bar{c}^{(m)}$, применен, как и в ходе первой серии экспериментов, поэтапный процесс идентификации теплофизических характеристик. На первом этапе для всех итераций полагая $\bar{c}^{(m)} = 0$, находим поправки $\bar{k}^{(m)}$ из решения интегрального уравнения (5.1). На втором этапе, полагая $\bar{k}^{(m)} = 0$, на каждой последующей итерации определяются поправки $\bar{c}^{(m)}$ как решение интегрального уравнения, полученного путем обращения уравнения в трансформантах (4.2) при $\bar{\gamma}^{(m)} = \bar{k}^{(m)} = 0$:

$$\int_{\xi_0}^{1} \bar{c}^{(m)} M_3(\xi_1, \tau)\xi_1 d\xi_1 = r_0\omega_0(g_0(\tau) - d_0^{(m-1)}(1, \tau)); \quad \tau \in [c, d], \tag{5.3}$$

где ядро уравнения (5.3) имеет вид:

$$M_3(\xi_1, \tau) = \int_0^{\tau} \frac{\partial d_0^{(m-1)}(\xi_1, \tau_1)}{\partial \tau_1} \frac{\partial d_0^{(m-1)}(\xi_1, \tau - \tau_1)}{\partial \tau_1} d\tau_1$$

Исходя из характера изменения дополнительной информации, был найден наиболее информативный временной отрезок для ее съема. В работе входная информация измерялось на временном отрезке $[c, d] = [0.1, 0.8]$ в 8 равноотстоящих точках. При этом погрешность восстановления монотонных функций при отсутствии зашумления входной информации не превышала 8%. Наибольшая погрешность реконструкции функций $\bar{\gamma}(\xi_1)$ и $\bar{c}(\xi_1)$ возникала в окрестности $\xi = \xi_0$, что связано с особенностью ядер интегральных уравнений (5.2), (5.3). Они обращаются в нуль при $\xi = \xi_0$ в соответствии с граничным условием (2.5).

В ходе вычислительных экспериментов выяснено, что погрешность реконструкции теплофизических характеристик возрастает с увеличением величины зашумления α. Так, зашумление входной информации $f(\tau)$ в 2% приводит к увеличению максимальной погрешности реконструкции монотонных функций до 17%. Выяснено влияние параметра термомеханической связанности δ_0 на результаты реконструкции теплофизических характеристик. Реконструкция коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости оказалась успешной при любом значении параметра связанности $0.01 \le \delta_0 \le 0.5$. В то же время реконструкция коэффициента температурного напряжения оказалась возможна только при параметре связанности $\delta_0 \ge 0.16$.

На рисунках ниже сплошной линией показан точный закон, штриховой линией – начальное приближение, точками – восстановленный закон.

На рис. 2 представлены результаты реконструкции убывающих функций $\bar{k}(\xi_1) = 80e^{-5.2\xi_1}$ (рис. 2а) и $\bar{\gamma}(\xi_1) = 100e^{-6.1\xi_1}$ (рис. 2б). Начальные приближения: $\bar{k}^{(0)}(\xi_1) = -4.05\xi_1 + 4.49$, $\bar{\gamma}^{(0)}(\xi_1) = -2.87\xi_1 + 3.12$. При отсутствии зашумления входной информации максимальная погрешность реконструкции $\bar{k}(\xi_1)$ не превысила 2%, а $\bar{\gamma}(\xi_1)$ – 7%.

На рис. 3 представлены результаты реконструкции возрастающих функций $\bar{k}(\xi_1) = -9.3\xi_1^2 + 14.8\xi_1 - 3.18$ (рис. 3а) и $\bar{c}(\xi_1) = 6.4\xi_1^2 - 10.2\xi_1 + 5.1$ (рис. 3б). Начальные приближения: $\bar{k}^{(0)}(\xi_1) = 2.2\xi_1 - 0.97$, $\bar{c}^{(0)}(\xi_1) = 1.32\xi_1 - 0.02$. При отсутствии зашумления входной информации погрешность реконструкции $\bar{k}(\xi_1)$ не превысила 3%, а $\bar{c}(\xi_1)$ – 8%.

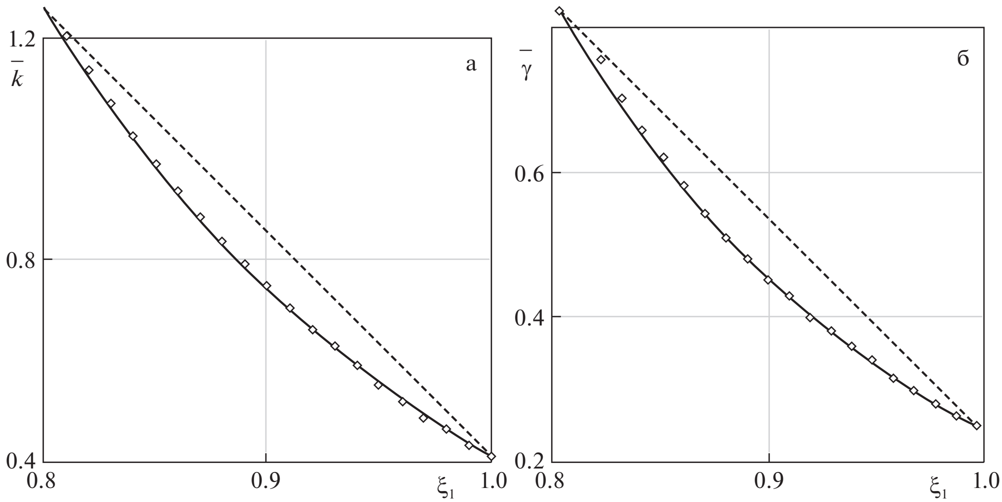

Рис. 2. Результат реконструкции функций: $\bar{k}(\xi_1) = 80e^{-5.2\xi_1}$ (а), $\bar{\gamma}(\xi_1) = 100e^{-6.1\xi_1}$ (б).

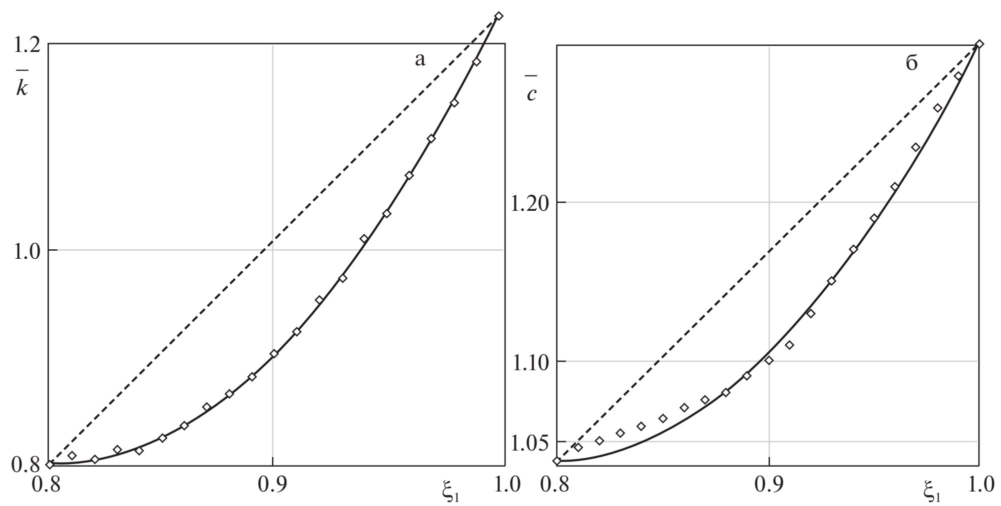

Рис. 3. Результат реконструкции функций: $\bar{k}(\xi_1) = -9.3\xi_1^2 + 14.8\xi_1 - 3.18$ (а); $\bar{c}(\xi_1) = 6.4\xi_1^2 - 10.2\xi_1 + 5.1$ (б).

Заключение. Приведена постановка КОЗ об идентификации термомеханических характеристик для конечного неоднородного в радиальном направлении цилиндра на конечном временном интервале при граничных условиях в виде скользящей заделки и теплоизоляции на торцах. Решение нелинейной КОЗ построено на основе итерационного процесса, на каждом шаге которого решается линеаризованное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода. Вычислительные эксперименты показали, что монотонные законы изменения теплофизических характеристик восстанавливаются с погрешностью, не превышающей 8%.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ № 075-15-2019-1928 и Южного математического института – филиала ВНЦ РАН, г. Владикавказ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Birman V., Byrd L.W.* Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // Appl. Mech. Rev. 2007. V. 60. P. 195–216.
2. *Wetherhold R.C., Seelman S., Wang J.* The use of functionally graded materials to eliminated or control thermal deformation // Compos. Sci. Tech. 1996. № 56. P. 1099–1104.
3. *Chen W.L., Chou H.M., Yang Y.C.* An inverse problem in estimating the space – dependent thermal conductivity of a functionally graded hollow cylinder // Composites: Pt. B. 2013. V. 50. P. 112–119.
4. *Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A.* On reconstruction of thermalphysic characteristics of functionally graded hollow cylinder // Appl. Math. Model. 2016. V. 40. Iss. 4. P. 271–279.
5. *Geymonat G., Pagano S.* Identification of mechanical properties by displacement field measurement: a variational approach // Meccanica. 2003. V. 38. P. 535–545.
6. *Avril S., Pierron F.* General framework for the identification of constitutive parameters from full-field measurements in linear elasticity // Int. J. Solids Struct. 2007. V. 44. P. 4978–5002.
7. *Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Mnukhin R.M., Nedin R.D.* Identification of the Lamé parameters of an inhomogeneous pipe based on the displacement field data // Europ. J. Mech. A/Solids. 2020. V. 81. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.103939
8. *Vatulyan A.O., Bogachev I.V., Nedin R.D., Yavruyan O.V.* Identification of inhomogeneous elastic properties of isotropic cylinder // ZAMM J. Appl. Math. Mech. / Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2016. V. 97(3). P. 358–364.
9. *Dudarev V.V., Vatulyan A.O., Mnukhin R.M., Nedin R.D.* Concerning an approach to identifying the Lame parameters of an elastic functionally graded cylinder // Math. Meth. Appl. Sci. 2020. P. 1–10. https://doi.org/10.1002/mma.6428
10. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
11. *Hao D.N.* Methods for Inverse Heat Conduction Problems. Frankfurt/Main: Peter Lang, 1998. 249 p.
12. *Kabanikhin S.I., Hasanov A., Penenko A.V.* A gradient descent method for solving an inverse coefficient heat conduction problem // Num. Anal. Appl. 2008. № 1. P. 34–45.
13. *Raudensky M., Woodbary K.A., Kral J.* Genetic algorithm in solution of inverse heat conduction problems // Num. Heat Transfer. Pt. B: Fundamentals. 1995. V. 28. P. 293–306.
14. *Ломазов В.А.* Задачи диагностики неоднородных термоупругих сред. Орел: Из-во ОрелГТУ, 2002. 168 с.
15. *Lukasievicz S.A., Babaei R., Qian R.E.* Detection of material properties in a layered body by means of thermal effect // J. Thermal Stresses. 2003. V. 26. № 1. P. 13–23.
16. *Ватульян А.О., Нестеров С.А.* Коэффициентные обратные задачи термомеханики. Ростов-на-Дону; Таганрог: Изд-во Южного федерального университета, 2019. 146 с.
17. *Vatulyan A.O., Nesterov S.A.* About the specifics of identification thermomechanical characteristics of functionally graded hollow cylinder // Mater. Phys.&Mech. 2015. V. 23. P. 71–75.
18. *Ватульян А.О., Нестеров С.А.* К определению неоднородных термомеханических характеристик трубы // Инж.-физ. ж. 2015. Т. 88. № 4. С. 951–959.
19. *Ватульян А.О., Нестеров С.А.* Об особенностях идентификации неоднородного предварительно напряженного состояния в термоупругих телах // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 1. С. 103–110.
20. *Vatulyan A.O., Nesterov S.A.* On some features of identification of inhomogeneous prestressed state of thermoelastic hollow cylinder with coating // Mater. Phys.&Mech. 2019. V. 42. P. 54–64.
21. *Ватульян А.О., Нестеров С.А.* О задаче идентификации термомеханических характеристик конечного функционально-градиентного цилиндра // Изв. Саратовского ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21. Вып. 1. С. 35–47.
22. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
23. *Vatulyan A., Nesterov S., Nedin R.* Regarding some thermoelastic models of “coating-substrate” system deformation // Continuum Mech. Thermodyn. 2020. V. 32. P. 1173–1186.
24. *Reddy J.N.* Analysis of functionally graded plates // Int. J. Num. Meth. Eng. 2000. V. 47(1–3). P. 663–684.

25. *Крылов В.И., Скобля Н.С.* Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М.: Наука, 1974. 224 с.
26. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 230 с.

Determination of the Thermomechanical Characteristics of a Functionally-Graded Finite Cylinder

A. O. Vatulyan[a,b,#] and S. A. Nesterov[b,##]

[a] *Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia*
[b] *Southern Mathematical Institute of VSC RAS, Vladikavkaz, Russia*
[#] *e-mail: aovatulyan@sfedu.ru*
[##] *e-mail: 1079@list.ru*

The inverse problem of identifying the thermomechanical characteristics of a finite functional gradient cylinder from additional information measured on the outer surface of the cylinder at a finite time interval is formulated. The thermoelastic characteristics are considered to be variable in the radial coordinate. The ends of the cylinder are heat-insulated and are in the conditions of sliding sealing. The direct problem after applying the Laplace transform is solved on the basis of the method of separation of variables and the method of targeting. The numerical solution of the inverse problem is constructed using an iterative process, at each stage of which the Fredholm integral equation of the 1st kind is solved.

Keywords: inverse problem of thermoelasticity, integral equation, functionally-graded materials, finite cylinder, identification, shooting method

REFERENCES

1. *Birman V., Byrd L.W.* Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // Appl. Mech. Rev., 2007, vol. 60, pp. 195–216.
2. *Wetherhold R.C., Seelman S., Wang J.* The use of functionally graded materials to eliminated or control thermal deformation // Compos. Sci. Tech, 1996, no. 56, pp. 1099–1104.
3. *Chen W.L., Chou H.M., Yang Y.C.* An inverse problem in estimating the space – dependent thermal conductivity of a functionally graded hollow cylinder // Composites: Pt. B, 2013, vol. 50, pp. 112–119.
4. *Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A.* On reconstruction of thermalphysic characteristics of functionally graded hollow cylinder // Appl. Math. Model., 2016, vol. 40, iss. 4, pp. 271–279.
5. *Geymonat G., Pagano S.* Identification of mechanical properties by displacement field measurement: a variational approach // Meccanica, 2003, vol. 38, pp. 535–545.
6. *Avril S., Pierron F.* General framework for the identification of constitutive parameters from full-field measurements in linear elasticity // Int. J. Solids Struct. 2007, vol. 44, pp. 4978–5002.
7. *Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Mnukhin R.M., Nedin R.D.* Identification of the Lamé parameters of an inhomogeneous pipe based on the displacement field data // Europ. J. Mech. A/Solids, 2020, vol. 81. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.103939
8. *Vatulyan A.O., Bogachev I.V., Nedin R.D., Yavruyan O.V.* Identification of inhomogeneous elastic properties of isotropic cylinder // ZAMM J. Appl. Math. Mech. / Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik, 2016, vol. 97(3), pp. 358–364.
9. *Dudarev V.V., Vatulyan A.O., Mnukhin R.M., Nedin R.D.* Concerning an approach to identifying the Lame parameters of an elastic functionally graded cylinder // Math. Meth. Appl. Sci., 2020, pp. 1–10. https://doi.org/10.1002/mma.6428.
10. *Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Rumyantsev S.V.* Extreme Methods of Solving Ill-Posed Problems. (Ekstremal'nyye metody resheniya nekorrektnykh zadach) Moscow: Nauka, 1988. 288 p. (in Russian)
11. *Hao D.N.* Methods for Inverse Heat Conduction Problems. Frankfurt/Main: Peter Lang, 1998. 249 p.
12. *Kabanikhin S.I., Hasanov A., Penenko A.V.* A gradient descent method for solving an inverse coefficient heat conduction problem // Num. Anal. Appl., 2008, no. 1, pp. 34–45.

13. *Raudensky M., Woodbary K.A., Kral J.* Genetic algorithm in solution of inverse heat conduction problems // Num. Heat Transfer. Pt. B: Fundamentals, 1995, vol. 28, pp. 293–306.
14. *Lomazov V.A.* Diagnostics Problems for Inhomogeneous Thermoelastic Media. (Zadachi diagnostiki neodnorodnykh termouprugikh sred) Orel: OrelGTU, 2002. 168 p. (in Russian).
15. *Lukasievicz S.A., Babaei R., Qian R.E.* Detection of material properties in a layered body by means of thermal effect // J. Thermal Stresses, 2003, vol. 26, no. 1, pp. 13–23.
16. *Vatulyan A.O., Nesterov S.A.* Coefficient Inverse Problems of Thermomechanics. (Koeffitsiyentnyye obratnyye zadachi termomekhaniki) Rostov-on-Don; Taganrog: SFU Publ., 2019. 146 p. (in Russian).
17. *Vatulyan A.O., Nesterov S.A.* About the specifics of identification thermomechanical characteristics of functionally graded hollow cylinder // Mater. Phys. Mech., 2015, vol. 23, pp. 71–75.
18. *Vatul'yan A.O., Nesterov S.A.* On determination of inhomogeneous thermomechanical characteristics of a pipe // J. Engng. Phys.&Thermophys., 2015, vol. 88, no. 4, pp. 984–993.
19. *Vatul'yan A.O., Nesterov S.A.* Certain aspects of identification of the inhomogeneous prestressed state in thermoelastic bodies // JAMM, 2017, vol. 81, no. 1, pp. 71–76.
20. *Vatulyan A.O., Nesterov S.A.* On some features of identification of inhomogeneous prestressed state of thermoelastic hollow cylinder with coating // Mater. Phys. Mech., 2019, vol. 42, pp. 54–64.
21. *Vatulyan A.O., Nesterov S.A.* On the identification problem of the thermomechanical characteristics of the finite functionally graded cylinder // Izv. Saratov Univ. Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics. 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 35–47. (in Russian)
22. *Nowacki W.* Dynamic Problems of Thermoelasticity. (Dinamicheskiye zadachi termouprugosti) Moscow: Mir, 1970. 256 p. (in Russian)
23. *Vatulyan A., Nesterov S., Nedin R.* Regarding some thermoelastic models of “coating-substrate” system deformation // Continuum Mech. Thermodyn., 2020, vol. 32, pp. 1173–1186.
24. *Reddy J.N.* Analysis of functionally graded plates // Int. J. Num. Methods Eng., 2000, vol. 47(1–3), pp. 663–684.
25. *Krylov V.I., Skoblya N.S.* Approximate Fourier Transform and Laplace Transform Inversion Methods. (Metody priblizhennogo preobrazovaniya Furye i obrashcheniya preobrazovaniya Laplasa) Moscow: Nauka, 1974. 224 p. (in Russian)
26. *Tikhonov A.N., Goncharskiy A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G.* Numerical Methods for Solving Ill-Posed Problems. (Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach) Moscow: Nauka, 1990. 230 p. (in Russian)