# СОДЕРЖАНИЕ

**Том 66, номер 4, 2020**

## ФИЗИЧЕСКАЯ АКУСТИКА



## НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА



## АКУСТИКА ОКЕАНА. ГИДРОАКУСТИКА



## АТМОСФЕРНАЯ И АЭРОАКУСТИКА

## ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ



## Юбилей

АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2020, том 66, № 4, с. 351–356

## ФИЗИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

УДК 532.329

# УСЛОВИЯ ФОКУСИРОВКИ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ В ПУЗЫРЬКОВОМ КЛИНЕ


**И. К. Гималтдинов[a], *, Е. Ю. Кочанова[a]**

[a]ФГБОУ ВО "Уфимский государственный нефтяной технический университет", ул. Космонавтов 1, Уфа, 450062 Россия

*e-mail: Iljas_g@mail.ru

Поступила в редакцию 25.06.2019 г.
После доработки 06.02.2020 г.
Принята к публикации 25.02.2020 г.

Исследована динамика волн давления в плоском канале с расположенной под углом границей пузырьковой и "чистой" жидкостей. Показано, что при переходе границы водовоздушная смесь–вода отражение для волн, падающих на эту границу со стороны водовоздушной смеси, аналогично отражению от жесткой стенки, что влечет за собой интерференцию волн. Установлено, что с увеличением объемного содержания и с уменьшением радиуса пузырьков максимальное значение амплитуды давления результирующей волны на стенке увеличивается.

*Ключевые слова:* пузырьковая жидкость, волны давления, двумерность, граница водовоздушная смесь–вода, наклонная граница

**DOI:** 10.31857/S0320791920040024

## ВВЕДЕНИЕ

Пузырьковая жидкость по своим акустическим свойствам является уникальной средой [1, 2]. В частности, завесу из смеси жидкости с газовыми пузырьками можно использовать в качестве защитного слоя для подводных объектов от воздействия ударных волн, для "маскировки" при гидролокации, а также в качестве подводного звукового канала [3]. Особенности акустических свойств пузырьковой жидкости позволяют определять размеры и структуру пузырьковых "облаков", образовавшихся при выбросах газа со дна водоема [4].

Особенности отражения и преломления акустических волн при прямом падении на границу "чистой" жидкости и жидкости с пузырьками газа изучались в [5, 6], при косом падении – в работах [7, 8]. В работе [7] на основе анализа полученных аналитических решений установлено, что в случае падения акустической волны на границу раздела со стороны пузырьковой жидкости существует критический угол падения, зависящий от частоты и параметров дисперсной системы, после превышения которого волна полностью отражается от границы. Математическая модель, описывающая наклонное падение акустической волны на границу двухфазной среды, а также на слой газокапельной смеси или пузырьковой жидкости конечной толщины, представлена в работе [8]. Для случая падения низкочастотной акустической волны на границу раздела "чистого" газа и газовзвеси, а также на границу "чистой" и пузырьковой жидкости, установлены основные закономерности отражения и прохождения волны.

В данной работе исследуется динамика волн давления в двумерной области при прохождении через границу пузырьковой и чистой жидкости в случае, когда эта граница расположена под углом к направлению распространения волн. Отметим, что изучению динамики двумерных волн в области, содержащей пузырьковые зоны, посвящены работы [9, 10].

## ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим плоский канал, заполненный пузырьковой (газонасыщенной) и чистой жидкостью с границей раздела этих сред, расположенной под углом по длине канала (рис. 1).

Для описания волнового движения запишем систему макроскопических уравнений для масс, числа пузырьков, импульсов и давления в пузырьках, принимая общие допущения для пузырьковых жидкостей [9, 10]:

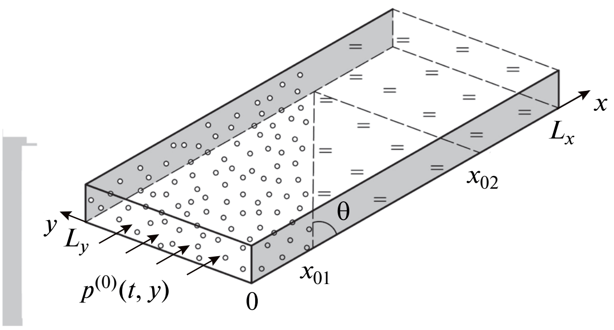


**Рис. 1.** Плоский канал с расположенной под углом θ границей пузырьковой и чистой жидкости.

$$\frac{d\rho_i}{dt} + \rho_i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \quad (i = l, g),$$
$$\frac{dn}{dt} + n\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0, \quad \rho\frac{du}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial x} = 0,$$
$$\rho\frac{dv}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial y} = 0, \quad \rho = \rho_g + \rho_l, \qquad (1)$$
$$\left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \alpha_l + \alpha_g = 1,$$
$$\rho_i = \rho_i^0\alpha_i, \quad \alpha_g = \frac{4}{3}\pi n a^3,$$

где $\rho_i^0$, $\alpha_i$, $p_l$, $n$, $a$ — соответственно плотность, объемное содержание $i$-й фазы, давление несущей жидкости, число и радиус пузырьков, $u$ и $v$ — проекции скорости на оси координат $x$ и $y$ соответственно. Нижними индексами $i = l$, $g$ отмечены параметры жидкой и газовой фаз.

При описании радиального движения будем полагать, что скорость радиального движения $w$ состоит из двух слагаемых:

$$w = w_R + w_A, \qquad (2)$$

где $w_R$ описывается уравнением Рэлея–Ламба:

$$a\frac{dw_R}{dt} + \frac{3}{2}w_R^2 + 4\nu_l\frac{w_R}{a} = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0}. \qquad (3)$$

Добавка $w_A$ определяется из решения задачи о сферической разгрузке на сфере радиуса $a$ в несущей жидкости в акустическом приближении:

$$w_A = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_g^{1/3}}. \qquad (4)$$

Уравнение для давления внутри пузырьков с учетом однородности давления записывается в виде [1]:

$$\frac{dp_g}{dt} = -\frac{3\gamma p_g}{a}w - \frac{3(\gamma - 1)}{a}q, \qquad (5)$$

где $\gamma$ — показатель адиабаты для газа, $q$ — интенсивность теплообмена или тепловой поток от жидкости к газу, отнесенный к единице площади межфазной поверхности. Интенсивность межфазного теплообмена примем в виде [1]:

$$q = \frac{\lambda_g \mathrm{Nu}(T_g - T_0)}{2a}, \qquad (6)$$

где $T_0 = \mathrm{const}$ – температура жидкости, Nu – число Нуссельта. При описании число Нуссельта задается в виде:

$$\mathrm{Nu} = \begin{cases} \sqrt{\mathrm{Pe}}, & \mathrm{Pe} \ge 100, \\ 10, & \mathrm{Pe} < 100. \end{cases} \qquad (7)$$

Для числа Пекле примем выражение:

$$\mathrm{Pe} = 12(\gamma - 1)\frac{T_0}{|T_g - T_0|}\frac{a|w|}{\kappa_g}, \qquad (8)$$

где $\kappa_g = \lambda_g/c_g\rho_{g0}$, $\lambda_g$, $c_g$ — коэффициенты температуропроводности и теплопроводности, теплоемкость газа соответственно.

Уравнение состояния для несущей фазы примем в акустическом приближении:

$$p_l = p_0 + C_l^2(\rho_l^0 - \rho_{l0}^0), \qquad (9)$$

где нижний индекс 0 относится к исходному, невозмущенному состоянию, $C_l$ — скорость звука в чистой жидкости.

Считая газ калорически совершенным, запишем уравнение Клайперона–Менделеева:

$$p_g = \rho_g^0 R T_g, \qquad (10)$$

где $R$ — газовая постоянная.

Для численного анализа задачи о распространении волн давления в двумерной области, содержащей пузырьковую зону, удобнее пользоваться системой уравнений (1)–(10), записанной в лагранжевых координатах [11]. Это, в частности, связано с тем, что в лагранжевых координатах первоначальные границы неоднородностей остаются неподвижными.

Приведем систему уравнений в лагранжевых координатах:

$$\frac{\partial p_l}{\partial t}=\frac{C_l^2\rho_l^0}{(1-\alpha_g)}\left[\frac{3\alpha_g}{a}w-\left(\frac{\alpha_g}{J}+\frac{\rho_{l0}}{J^2\rho_l^0}\right)\frac{\partial J}{\partial t}\right],$$
$$\frac{\partial \alpha_g}{\partial t}=\frac{3\alpha_g}{a}w-\frac{\alpha_g}{J}\frac{\partial J}{\partial t},$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{J\rho}\left(\frac{\partial p_l}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}-\frac{\partial p_l}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x_0}\right),\quad \frac{\partial x}{\partial t}=u,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{J\rho}\left(\frac{\partial p_l}{\partial y_0}\frac{\partial x}{\partial x_0}-\frac{\partial p_l}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial y_0}\right),\quad \frac{\partial y}{\partial t}=v,$$
$$\frac{\partial p_g}{\partial t}=-\frac{3\gamma p_g}{a}w-\frac{3(\gamma-1)}{a_0}q,\quad \frac{\partial a}{\partial t}=w=w_R+w_A,\quad (11)$$
$$\frac{\partial w_R}{\partial t}=\left[\frac{p_g-p_l}{\rho_l^0}-\frac{3}{2}w_R^2-4\nu_l\frac{w_R}{a}\right]\frac{1}{a},\quad w_A=\frac{p_g-p_l}{\rho_l^0C_l\alpha_g^{1/3}},$$
$$q=\frac{\lambda_g\mathrm{Nu}\left(T_g-T_0\right)}{2a},\quad \mathrm{Nu}=\begin{cases}\sqrt{\mathrm{Pe}}, & \mathrm{Pe}\ge 100,\\ 10, & \mathrm{Pe}<100,\end{cases}$$
$$\mathrm{Pe}=12(\gamma-1)\frac{T_0}{\left|T_g-T_0\right|}\frac{a|w|}{\kappa_g},\quad J=\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}-\frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x_0},$$
$$\frac{\partial J}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}-\frac{\partial u}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x_0}+\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial \upsilon}{\partial y_0}-\frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial v}{\partial x_0}.$$

Система уравнений (11) решается численно по явной схеме [11].

## НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Запишем условия при $t=0$ для исходного состояния системы, состоящей из областей однородной водовоздушной смеси и воды в канале, разделенных границей с наклоном:

$$u=v=0,\quad p_l=p_0,\quad p_g=p_0,\quad a=a_0,$$
$$w=0,\ \ T_g=T_0,\ \ \rho=\rho_{l0}^0\left(1-\alpha_{g0}\right),$$
$$\alpha_g=\begin{cases}\alpha_{g0}, & \left(x_0,y_0\right)\in\Omega_1,\\ 0, & \left(x_0,y_0\right)\notin\Omega_1,\end{cases}$$
$$\Omega_1=\begin{cases}0\le y_0\le L_y,\\ 0\le x_0\le x_{01}+\dfrac{y_0}{L_y}\left(x_{02}-x_{01}\right).\end{cases}$$

Инициирующее возмущение давления на границе пузырьковой жидкости ($x_0=0$) зададим в виде “ступеньки”. Соответствующее граничное условие запишется в виде:

$$p\left(t,y_0\right)=p_0+\Delta p_0\quad \text{при}\quad x_0=0.$$

На границах $y_0=0$ и $y_0=L_y$ расчетной области приняты условия как на жесткой стенке, т.е. равенство нулю нормальной компоненты скорости. На границе $x_0=L_x$ задается неотражающее граничное условие на основе импедансного соотношения [12]. Схематическая постановка задачи представлена на рис. 1.

## РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

На рис. 2 представлено распределение давления в разные моменты времени. Картинки 2а и 2б соответствуют моментам времени 1.5 и 3.5 мс. Известно [3], что при определенных параметрах пузырьковой смеси акустическое сопротивление пузырьковой жидкости может быть намного меньше этого же физического параметра для чистой жидкости. Например, для представленного на рис. 2 случая отношение соответствующих удельных сопротивлений составляет около 7.5. Таким образом, отражение от границы водовоздушная смесь-вода для волн, падающих на эту границу со стороны водовоздушной смеси, аналогично отражению от жесткой стенки. Поэтому при отражении волны от такой границы происходит увеличение амплитуды. Видно, что в момент времени 1.5 мс волна, распространяющаяся в зоне, заполненной водовоздушной смесью, имеет осцилляционную структуру. Видно также, что происходит преломление волны в область чистой жидкости, и при этом происходит увеличение амплитуды волны. Отметим, что в дальнейшем волна, отраженная от границы водовоздушная смесь—вода, распространяется в области водовоздушной смеси. Таким образом, после отражения волны от границы, разделяющей области водовоздушной смеси и воды, в области смеси распространяются две волны: отраженная и первоначальная, которая инициирована повышением давления на границе $x_0=0$. Тогда в каждой точке результирующее колебание представляет собой сумму колебаний, соответствующих каждой из складывающихся волн, т.е. происходит интерференция волн. Именно такая интерференционная картина представлена на рис. 2б. Видно, что из-за наложения падающей и отраженной волн вдоль границы, разделяющей области водовоздушной смеси и воды, происходит формирование пульсационного профиля давления с амплитудой лидирующего всплеска, намного превышающей амплитуду первоначального сигнала. Так как граница расположена под углом, то амплитуда результирующей волны при распространении вдоль границы будет увеличиваться, т.е. будет происходить фокусировка волны.

На рис. 3 представлено поле скоростей движения среды в момент времени 3.5 мс для случая, представленного на рис. 2. Анализ поля течения показывает, что формируется движение среды, направленное вдоль границы, разделяющей области однофазной и многофазной сред.

После того как результирующая волна, распространяющаяся вдоль прямой раздела, доходит

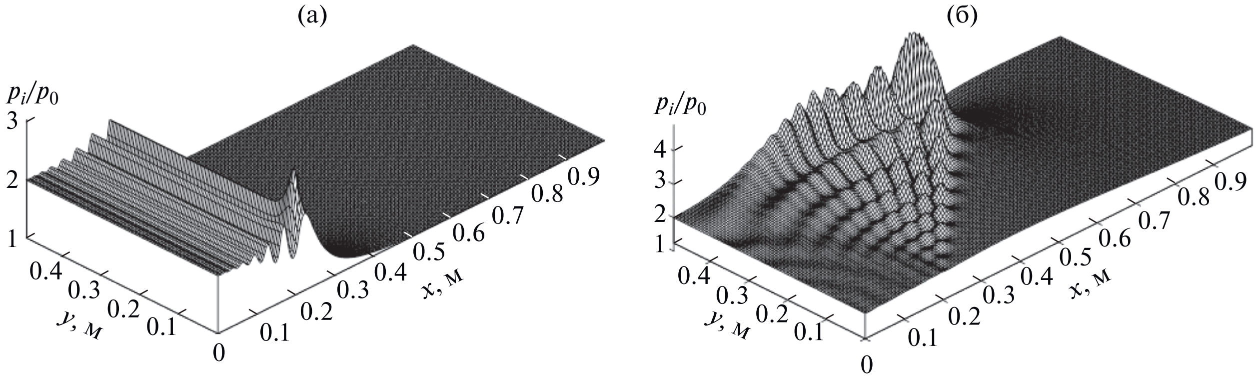


**Рис. 2.** Эпюры давления (а) – в момент времени 1.5 мс, (б) – 3.5 мс. Параметры несущей фазы (воды): $\rho_l^0 = 1000$ кг/м$^3$, $\nu_l = 10^{-6}$ м$^2$/с, $c_l = 4.2$ кДж/(кг K), $\lambda_l = 0.59$ Вт/(м K), $C_l = 1500$ м/с, $T_0 = 293$ K; газовой фазы (воздух): $\alpha_{g0} = 0.001$, $a = 1.0$ мм, $\rho_g^0 = 1.2$ кг/м$^3$, $\lambda_g = 2.59 \times 10^{-2}$ Вт/(м K), $\gamma = 1.4$, $c_g = 1.005$ кДж/(кг K). Остальные параметры расчета: $L_x = 1.0$ м, $L_y = 0.5$ м, $x_{01} = 0.2$ м, $x_{02} = 0.7$ м, $p_0 = 0.1$ МПа, $\Delta p_0 = 0.1$ МПа.

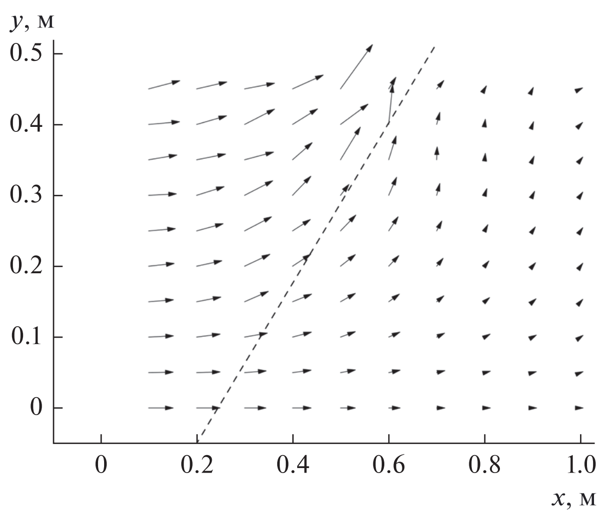


**Рис. 3.** Поле скоростей в момент времени 3.5 мс.

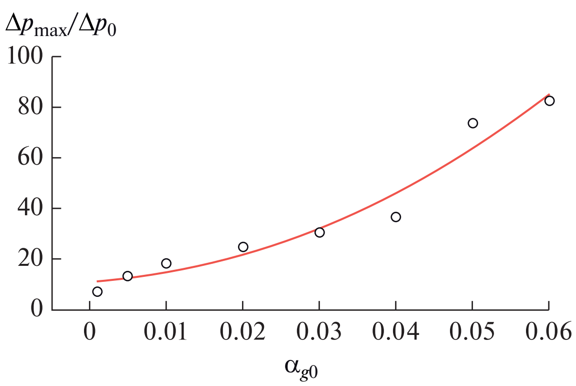


**Рис. 4.** Зависимость максимальной амплитуды воздействия на стенку результирующей волны от объемного содержания газа. Все остальные параметры такие же, как на рис. 2.

до границы $y_0 = L_y$, где ставятся условия как на жесткой стенке, т.е. нормальная компонента скорости равна нулю, происходит отражение волны. Исследуем зависимость максимального значения амплитуды давления на границе $y_0 = L_y$ от различных параметров задачи. Очевидно, максимальное значение давления будет локализовано около точки $(x_{02}, L_y)$. На рис. 4 представлена зависимость максимального значения амплитуды давления на стенке $y_0 = L_y$ от объемного содержания пузырьков. Анализ влияния удельной доли газовой фазы в области газожидкостной среды на амплитуду давления показал, что с увеличением $\alpha_{g0}$ амплитуда результирующей волны на стенке растет (рис. 4) и может быть аппроксимирована зависимостью:

$$\frac{\Delta p_{\max}}{\Delta p_0} = 10.79 + 201.7\alpha_{g0} + 17\,301.8\alpha_{g0}^2,$$

которая получена при сохранении остальных параметров, использованных в расчетах, представленных на рис. 2, 3.

На рис. 5 представлена зависимость максимальной амплитуды давления на стенке $y_0 = L_y$, отнесенной к начальной амплитуде инициирующего давления, от угла $\theta$ между границей области водовоздушной смеси и воды и нижней границей расчетной области $y_0 = 0$. Видно, что эта зависимость носит немонотонный характер и может быть аппроксимирована следующим выражением:

$$\frac{\Delta p_{\max}}{\Delta p_0} = 8.37 + 0.51\theta - 0.0066\theta^2.$$

Из рис. 5 следует, что максимальная амплитуда соответствует значению угла приблизительно

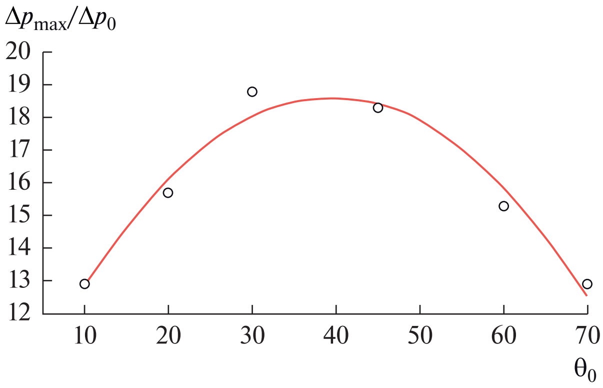


**Рис. 5.** Влияние угла наклона границы между водовоздушной средой и водой на максимальную амплитуду воздействия на стенку результирующей волны давления. Параметры расчета такие же, как на рис. 2.

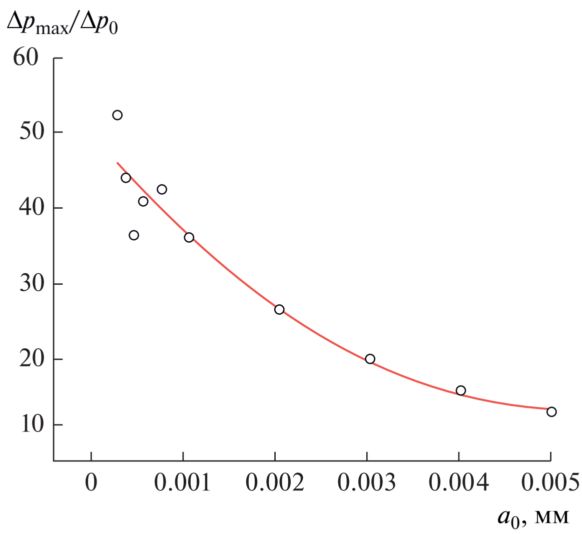


**Рис. 6.** Зависимость максимальной амплитуды воздействия на стенку результирующей волны от радиуса пузырьков. Все остальные параметры такие же, как на рис. 2.

40 градусов. Отметим, что при $\theta = 0°$ вся область будет заполнена пузырьковой смесью и очевидно, что фокусировки волны в данном случае не будет. При $\theta = 90°$ преломление волны давления на границе, разделяющей области водовоздушной смеси и воды, будет сопровождаться увеличением амплитуды, связанным только с переходом волны из акустический более мягкой среды в акустический более жесткую, но при этом не происходит наложения волн, описанного выше. Таким образом, в интервале $0° < \theta < 90°$ существует значение угла, при котором происходит максимальное увеличение амплитуды давления на стенке.

Зависимость максимальной амплитуды давления на стенке от начального радиуса пузырьков представлена на рис. 6. Из рис. 6 видно, что с увеличением радиуса пузырьков максимальная амплитуда воздействия на стенку уменьшается. Эта зависимость может быть аппроксимирована следующим соотношением:

$$\frac{\Delta p_{max}}{\Delta p_0} = 48.65 - 14117.9a_0 + 1.36a_0^2.$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована динамика волн давления в двумерной области при переходе границы между пузырьковой и “чистой” жидкостью в случае, когда эта граница расположена под углом к направлению распространения волн. Показано, что наличие наклонной границы, разделяющей области водовоздушной смеси и воды, приводит к интерференции волн в области, занятой смесью. Установлено, что при увеличении объемного содержания и уменьшении радиуса пузырьков максимальное значение амплитуды давления результирующей волны на стенке увеличивается. Обнаружено, что зависимость максимальной амплитуды давления на стенке результирующей волны при фокусировке на пузырьковом клине зависит немонотонно от угла наклона границы разделяющей области водовоздушной смеси и воды.

Работа выполнена в рамках государственного задания в сфере научной деятельности № FEUR-2020-0004 “Решение актуальных задач и исследование процессов в нефтехимических производствах, сопровождающихся течениями многофазных сред”.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
2. *Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р.* Волновая динамика газо– и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248 с.
3. *Shagapov V.Sh., Gimaltdinov I.K., Khabeev N.S., Bailey S.S.* Acoustic waves in a liquid with a bubble screen // Shock Waves. 2003. Т. 13. № 1. С. 49–56.
4. *Диденкулов И.Н., Кустов А.М., Мартьянов А.И., Прончатов-Рубцов Н.В.* Акустическая диагностика пузырьковых объектов в жидкости // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 2. С. 246–251.

5. *Karpov S., Prosperetti A., Ostrovsky L.* Nonlinear wave interactions in bubble layers // J. Acoust. Soc. Am. 2003. V. 113(3). P. 1304–1316.
6. *Baranowska A.* Theoretical studies of nonlinear generation efficiency in a bubble layer // Archives of Acoustics. 2012. V. 37. P. 287–294.
7. *Шагапов В.Ш., Сарапулова В.В.* Особенности преломления и отражения звука на границе пузырьковой жидкости // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 1. С. 40–48.
8. *Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В.* Особенности отражения акустических волн от границы или слоя двухфазной среды // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 2. С. 162–173.
9. *Галимзянов М.Н., Гималтдинов И.К., Шагапов В.Ш.* Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьки // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2002. № 2. С. 139–147.
10. *Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш., Гималтдинов И.К., Галимзянов М.Н.* Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьковые зоны // Докл. Академии наук. 2001. Т. 378. № 6. С. 763–766.
11. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные задачи газовой динамики М.: Наука, 1980. 352 с.
12. *Ильгамов М.А., Гильманов А.Н.* Неотражающие условия на границах расчетной области. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 240 с.

АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2020, том 66, № 4, с. 357–365

ФИЗИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

УДК 534.414

# РЕЗИНО-ЖИДКОСТНЫЙ РЕЗОНАТОР

© 2020 г. Л. И. Казаков*

Редакция “Акустического журнала”, Московский государственный университет, физический факультет, Ленинские горы, Москва, 119991 Россия

*e-mail: lev-kazakov@rambler.ru

Поступила в редакцию 27.03.2019 г.
После доработки 21.10.2019 г.
Принята к публикации 29.10.2019 г.

Выполнен расчет акустических характеристик резино-жидкостного резонатора, сочетающего свойства пустой полости в резине, резонатора Гельмгольца и водно-воздушного, газового пузыря в вязкоупругой среде и в оболочке, пузырька в жидкости. Уравнение вынужденных колебаний резонатора в поле звуковой волны получено применением принципа наименьшего действия. Вычислена собственная частота резонатора. Рассмотрены следующие механизмы диссипации звуковой энергии: за счет сдвиговой вязкости резины, за счет вязкости жидкости в горле, тепловые потери в воздушной камере, потери на излучение. Приведены экспериментальные данные. Обсуждены возможные применения резонатора.

*Ключевые слова:* акустические резонаторы, принцип наименьшего действия, диссипация звуковой энергии

**DOI:** 10.31857/S0320791920020033

## ВВЕДЕНИЕ

Резино-жидкостный резонатор (РЖР), показанный в разрезе на рис. 1, включает в себя: полость *1* в резине *2*; узкое горло *3*; жидкость *4*, заполняющую полость и горло; воздушную камеру *5* за горлом. Конструктивные элементы резонатора могут иметь произвольные формы. Необходима лишь малость всех его размеров в сравнении с длиной звуковой волны сжатия в резине, чтобы резонатор можно было считать сосредоточенным. Для удобства расчетов примем полость *1* сферической радиуса $R$, горло *3* – цилиндрическим радиуса $a$ и заполненным жидкостью *4* на высоту $h$. Воздушная камера *5* произвольной формы имеет объем $V_0$.

По принципу действия РЖР похож на воздушный резонатор Гельмгольца [1, с. 370], а также на водно-воздушный резонатор, предложенный В.С. Григорьевым и исследованный В.И. Сорокиным [2]. Общее у всех этих резонаторов – использование инерционных свойств жидкости в узком горле. Отличием РЖР является его выполнение в вязкоупругой “водоподобной” [1, с. 482] среде (резина, мягкие пластмассы, смолы, битумы и т.п.), в которой сосредоточены его упругость и основные потери. Таким образом, прототипами РЖР служат полость в резине и резонатор Гельмгольца.

## ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РЕЗОНАТОРА

Теория сферической полости в резине была разработана М.А. Исаковичем, а затем Д.В. Сивухиным [3]. Здесь принят (по совету Ю.М. Сухаревского) иной подход, основанный на применении принципа наименьшего действия Гамильтона–Остроградского [4, с. 10].

Из него следует уравнение движения системы в виде уравнения Лагранжа, которое в случае единственной обобщенной координаты $x(t)$ имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = F(t), \qquad (1)$$

где $L = T - E$ – функция Лагранжа; $T$ и $E$ – кинетическая и потенциальная энергии системы соответственно; $F(t)$ – внешняя обобщенная сила, действующая на систему.

Будем считать резину *2* однородной, изотропной, упругой средой, имеющей первый коэффициент Ламе $\lambda$, модуль сдвига $\mu$ и плотность $\rho$, а жидкость *4* в резонаторе – несжимаемой, вязкой, с плотностью $\rho_1$ и кинематической вязкостью $\nu_1$. Стенки горла *3* и камеры *5* полагаем жесткими.

Когда длина волны падающего звука много больше размеров резонатора, он испытывает в основном переменное давление всестороннего сжатия, его полость совершает сферически-симмет-

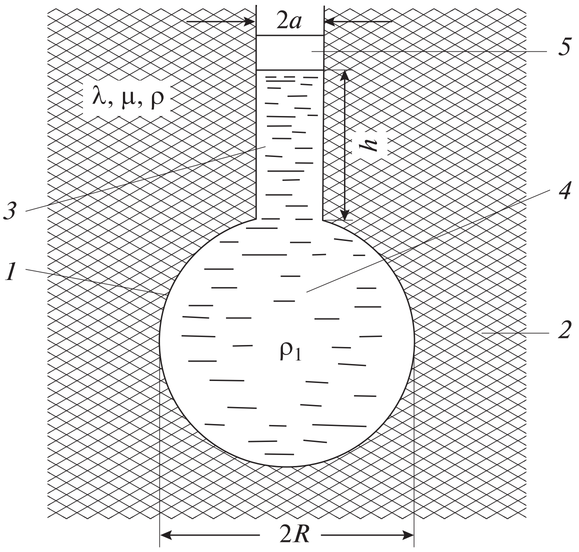


**Рис. 1.** Резино-жидкостный резонатор: *1* – полость; *2* – резина; *3* – горло; *4* –жидкость; *5* – воздушная камера.

ричные пульсационные колебания и излучает сферическую волну. Мы примем, что узкое горло и малая воздушная камера практически не нарушают сферической симметрии деформаций полости (к тому же, в ней они могут быть и размещены). Ниже учтены только объемные пульсации полости.

Вектор смещения в сферической волне чисто радиальный:

$$\mathbf{U} = U(r,t)\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Он определяется волновым уравнением [5, с. 126]

$$\Delta\mathbf{U} = \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2},$$

решение которого для расходящейся волны при гармонических колебаниях $U(r,t) = U(r)e^{-i\omega t}$ имеет вид:

$$U(r) = \frac{(1-ik_l r)e^{ik_l r}}{(1-ik_l R)e^{ik_l R}}\frac{R^2}{r^2}U(R), \tag{2}$$

где $U(R)$ – комплексная амплитуда смещения стенки полости *1*; $k_l = \dfrac{\omega}{c_l}$ – волновое число; $c_l = \sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ – скорость распространения в резине продольной звуковой волны.

Формула (2) при $k_l r \ll 1$ дает для произвольных радиальных смещений зависимость

$$U(r,t) \approx \frac{R^2}{r^2}U(R,t), \tag{3}$$

т.е. резина с любым модулем сдвига здесь подобна несжимаемой жидкости.

Полная кинетическая энергия системы складывается из кинетических энергий резины и жидкости, заполняющей полость резонатора объемом $V$ и его горло:

$$T(t) = 2\pi\rho\int_R^\infty \dot{U}(r,t)^2 r^2 dr + \frac{\rho_1}{2}\int_{V-V'}\dot{U}_1(r,t)^2 dV + T' + \frac{\pi a^2 h\rho_1}{2}\dot{\xi}^2(t). \tag{4}$$

Здесь $U_1$ – смещение в жидкости; $V'$ – малый объем жидкости, примыкающий к устью горла, где формируется присоединенная масса с кинетической энергией $T'$, учет которой эквивалентен увеличению высоты $h$ столбика жидкости в горле на некоторую величину $\Delta h$. Последнее слагаемое в (4) – это кинетическая энергия столбика жидкости, где, в силу несжимаемости жидкости,

$$\xi(t) = -\frac{4R^2}{a^2}U(R,t) \tag{5}$$

– смещение столбика. Используя (3), (5) и пренебрегая вторым слагаемым в (4) (если считать $12hR \gg a^2$), найдем:

$$T(t) \approx 2\pi\rho R^3(1+\alpha)\dot{U}(R,t)^2, \tag{6}$$

где введено обозначение:

$$\alpha = \frac{4R\tilde{h}\rho_1}{a^2\rho}. \tag{7}$$

Эффективное значение высоты жидкости в горле можно оценить:

$$\tilde{h} = h + \Delta h = h + \frac{\pi a}{4\Phi\left(\frac{a}{R}\right)}, \tag{8}$$

где

$$\Phi\left(\frac{a}{R}\right) = \left[1 - 1.41\frac{a}{R} + 0.34\left(\frac{a}{R}\right)^3 + \ldots\right]^{-1} -$$

функция Фока [6, с. 155].

Потенциальная энергия $E$ системы складывается из упругой сдвиговой энергии $E_\mu$ резины *2* вблизи полости *1* и упругой энергии $E_g$ воздуха, заключенного в камере *5* (см. рис. 1). Упругая энергия сдвига единицы объема резины равна [5, § 4]

$$\varepsilon_\mu = \mu(u_{rr}^2 + u_{\varphi\varphi}^2 + u_{\theta\theta}^2), \tag{9}$$

где при радиальной деформации резины в сферических координатах [5, с. 12]

$$u_{rr} = \frac{\partial U}{\partial r},\quad u_{\varphi\varphi} = u_{\theta\theta} = \frac{U}{r}. \tag{10}$$

Учитывая (3), (9), (10), найдем:

$$E_\mu(t) = 8\pi\mu R U^2(R,t). \tag{11}$$

Потенциальная энергия воздуха, заключенного в объеме $V_0$, равна

$$E_g(t) = \pi a^2 \int\limits_0^{\xi(t)} P_g(t) d\xi, \tag{12}$$

где $P_g(t)$ – звуковое давления в газе, $\xi(t)$ – смещение (5) жидкости в горле (положительное значение соответствует смещению внутрь воздушного объема).

Колебания газа в воздушной камере *5* представляют собой политропический процесс, близкий к адиабатическому, а состояние газа приближенно описывается уравнением $PV^q = \text{const}$, где $q \le \gamma$, $\gamma = c_p/c_v$ – отношение теплоемкостей газа. Поэтому

$$P_g(t) = \frac{qP_0}{V_0}\pi a^2 \xi(t),$$

где $P_0$ – статическое давление в газе. Подставив давление $P_g(t)$ в (12), получим:

$$E_g(t) = 8\pi R \frac{3qP_0 V}{4V_0} U^2(R,t), \tag{13}$$

где $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ – объем полости *1*. Объединяя (11) и (13), найдем полную потенциальную энергию системы:

$$E(t) = 8\pi\mu R(1+\beta) U^2(R,t), \tag{14}$$

где введено обозначение

$$\beta = \frac{3qP_0 V}{4\mu V_0}. \tag{15}$$

Используя найденные значения кинетической $T(t)$ (6) и потенциальной $E(t)$ (14) энергий, составим функцию Лагранжа системы:

$$\begin{gathered} L = T - E = 2\pi\rho R^3(1+\alpha)\dot{U}(R,t)^2 - \\ - 8\pi\mu R(1+\beta) U(R,t)^2, \end{gathered} \tag{16}$$

где $\alpha$ и $\beta$ представлены формулами (7) и (15). Обобщенной координатой в (16) служит смещение $U(R,t)$ стенки полости *1* резонатора. Подставим функцию $L$ в уравнение Лагранжа (1), где обобщенной силой следует считать $-4\pi R^2 P(t)$, $P(t)$ – звуковое давление на резонатор. В результате получим уравнение движения системы:

$$\rho R^2(1+\alpha)\frac{\ddot{U}(R,t)}{R} + 4\mu(1+\beta)\frac{U(R,t)}{R} = -P(t). \tag{17}$$

## ДИССИПАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В РЕЗОНАТОРЕ

Потери в резине *2* и в вязкой жидкости *4* обусловлены поглощением энергии в этих материалах за счет внутреннего трения. Поглощение энергии в воздушной камере *5* происходит из-за неполной адиабатичности процесса колебаний газа. Имеются еще потери на излучение сферической волны, рассеянной пульсирующей полостью *1* резонатора. Так как окружающую резонатор резину и заполняющую его жидкость можно считать несжимаемыми, то пренебрежем поглощением энергии в этих средах за счет их теплопроводностей и вторых вязкостей.

Для описания потерь используем обобщенную диссипативную функцию Рэлея [4, с. 102]. В нашем случае она имеет вид:

$$\Psi(t) = \frac{X}{2}\dot{U}^2(R,t), \tag{18}$$

где величина $X = \text{const}$ обусловлена характером преобладающих механических потерь. Функция $\Psi(t)$ определяет интенсивность диссипации энергии в системе:

$$\frac{d(T+E)}{dt} = -2\Psi(t). \tag{19}$$

Обобщенная диссипативная сила по определению равна

$$F_\psi(t) = -\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{U}} = -X\dot{U}(R,t).$$

Ее следует добавить в правую часть уравнения (1). Тогда уравнение движения (17) примет вид:

$$\begin{gathered} \rho R^2(1+\alpha)\frac{\ddot{U}(R,t)}{R} + \frac{X}{4\pi R}\frac{\dot{U}(R,t)}{R} + \\ + 4\mu(1+\beta)\frac{U(R,t)}{R} = -P(t). \end{gathered} \tag{20}$$

Будем интересоваться гармоническими вынужденными пульсациями резонатора, когда смещение стенки полости *1* можно представить в виде $U(R,t) = U(R)e^{-i\omega t}$, а звуковое давление на резонатор как $P(t) = Pe^{-i\omega t}$, где $U(R) = U$ и $P$ – комплексные амплитуды величин. Для этого случая из уравнения (20), учитывая (7) и (15), найдем:

$$\frac{U}{R} = \frac{-P}{4\mu\left(1 + \frac{3qP_0V}{4\mu V_0}\right)\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2} - i\delta\right)}, \tag{21}$$

где

$$\omega_p = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{\mu\left(1 + \frac{3qP_0V}{4\mu V_0}\right)}{\rho\left(1 + \frac{4R\tilde{h}\rho_1}{a^2\rho}\right)}} \tag{22}$$

— собственная круговая частота резонатора;

$$\delta = \frac{\omega X}{16\pi\mu(1+\beta)R} \tag{23}$$

— затухание резонатора — величина, обратная его добротности $Q = \frac{1}{\delta}$. Значение $\delta$ будет найдено при рассмотрении механизмов диссипации звуковой энергии в резонаторе.

Для вычисления параметра, определяющего поглощение $X$, далее используются известные выражения для комплексных упругих параметров резины, плотности жидкости в горле, показателя политропы газа [1, с. 405]. В формуле (21) следует заменить материальные параметры $\mu$, $\rho_1$, $q$ их комплексными значениями, мнимые части которых содержат информацию о соответствующих механизмах поглощения звуковой энергии. Результат такой замены будет тот же, что и при использовании диссипативной функции (18).

Основные потери в резонаторе — это вязкое поглощение энергии в резине, окружающей полость *1*. Модули упругости резины при гармонических колебаниях являются принципиально комплексными и частотно-зависимыми величинами. Более того, их вещественные и мнимые части взаимозависимы, поскольку связаны дисперсионными соотношениями, отражающими принцип причинности [7, §123, 8, §77]. Важнейшим для резины является комплексный динамический модуль сдвига

$$\mu^*(\omega) = \mu(\omega)[1 - i\eta(\omega)], \tag{24}$$

где $\mu(\omega)$ — модуль сдвига, $\eta(\omega)$ — коэффициент сдвиговых потерь, причем

$$|\mu^*(\omega)| \ll K, \tag{25}$$

где $K$ — модуль всестороннего сжатия. Модули сдвига разных резин отличаются друг от друга в десятки и сотни раз и лежат в пределах $\mu(\omega) = 10^5...10^8$ Па. Коэффициенты сдвиговых потерь резин обычно порядка $\eta(\omega) = 0.1...1.0$. Модули всестороннего сжатия резин примерно такие же, как у воды, и в диапазоне звуковых и ультразвуковых частот практически от частоты не зависят, т.е. они вещественны. Соотношения (24) и (25), по существу, служат определением вязкоупругих “практически несжимаемых”, “водоподобных” веществ [1, с. 446].

Усредненный по сечению удельный импеданс вязкой жидкости в трубе радиуса $a$ и длины $h$ был найден Крендаллом [9, с. 155], [6. с. 166]:

$$Z_h = i\omega\rho_1 h \frac{J_0(\kappa a)}{J_2(\kappa a)}, \tag{26}$$

где

$$\kappa = \sqrt{\frac{i\omega}{\nu_1}} \tag{27}$$

— волновое число вязкой волны в жидкости; $\nu_1$ — кинематическая вязкость жидкости; $J_0$, $J_2$ — бесселевы функции. В случае идеальной жидкости $Z_h = -i\omega\rho_1 h$. Сравнивая это с (26), найдем комплексную плотность вязкой жидкости в горле *3*:

$$\rho_1^*(\omega) = \rho_1'(\omega)[1 + i\delta_1(\omega)] = -\rho_1 \frac{J_0(\kappa a)}{J_2(\kappa a)}. \tag{28}$$

В частных случаях малых и больших длин вязких волн по сравнению с шириной горла выражение (28) упрощается. Так, при $|\kappa a| > 10$

$$\rho_1^*(\omega) \approx \rho_1\left(1 + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2\nu_1}{\omega}} + \frac{i}{a}\sqrt{\frac{2\nu_1}{\omega}}\right). \tag{29}$$

Видим, что значение комплексной плотности вязкой жидкости здесь мало отличается от ее значения для идеальной жидкости. Поглощение энергии в этом случае происходит в тонком слое у стенок горла. При $|\kappa a| < 2$ из выражения (28) следует:

$$\rho_1^*(\omega) \approx \rho_1\left(\frac{4}{3} + i\frac{8\nu_1}{a^2\omega}\right).$$

Теперь энергия поглощается по всему сечению горла (как в течении Пуазейля), а величина эффективной плотности за счет вязкости на 1/3 больше, чем в случае идеальной жидкости.

Тепловые потери в газе возможны лишь в случае, когда соседние участки газа имеют разную температуру и могут обмениваться теплом. Уравнение переноса тепла в идеальном (подчиняющемся уравнению Менделеева–Клапейрона) невязком газе отличается от случая несжимаемой жидкости [10, с. 277, (50,1)] дополнительным слагаемым:

$$\rho_g c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial t} = \kappa_g \Delta T, \tag{30}$$

где параметры газа — плотность $\rho_g$, удельную теплоемкость $c_p$, коэффициент теплопроводности $\kappa_g$ — можно считать постоянными; $T$ — температура в газе.

Наиболее интересен случай, когда длина тепловой волны много меньше линейных размеров камеры. Тогда каждый элемент $dS$ поверхности камеры $S$ можно считать плоским и рассматривать независимо от других, что позволяет рассчитать потери в камере произвольной формы. Положим $T = T_0 + dT = T_0 + T(x)e^{-i\omega t}$, $P = P_0 + dP = P_0 + P_g e^{-i\omega t}$, где $x$ – расстояние от $dS$ вглубь камеры. Из (30) найдем:

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2}+\frac{i\omega}{\chi_g}\left[T(x)-\frac{P_g}{\rho_g c_p}\right]=0, \tag{31}$$

где $\chi_g=\frac{\kappa_g}{\rho_g c_p}$ – коэффициент температуропроводности газа. Считая стенки камеры абсолютно теплопроводящими, когда $T(0) = 0$, получим решение уравнения (31):

$$T(x)=\frac{P_g}{\rho_g c_p}\left(1-e^{(i-1)\sqrt{\frac{\omega}{2\chi_g}}x}\right).$$

Выделим малый объем $v$ газа у стенки на расстоянии $x$ от нее. Пусть $dv(x,t)$ – изменение этого объема при изменении давления на $dP$ и температуры на $dT$. Дифференцируя уравнение состояния, получим: $dPv + P_0dv = m_g(c_p - c_v)dT$, где $m_g$ – масса газа. Подставив сюда $dT$, найдем:

$$\frac{dv}{dP}=-\frac{v}{\gamma P_0}\left[1+(\gamma-1)e^{(i-1)\sqrt{\frac{\omega}{2\chi_g}}\cdot x}\right].$$

Интегрируя по всему объему $V_0$ камеры, получим дифференциальное уравнение состояния газа при наличии тепловых потерь:

$$\begin{gathered}\frac{dV}{dP}=-\frac{V_0}{\gamma P_0}-\frac{(\gamma-1)S}{\gamma P_0}\int_0^\infty e^{(i-1)\sqrt{\frac{\omega}{2\chi_g}}x}dx=\\=-\frac{V_0}{\gamma P_0}\left[1+\frac{(\gamma-1)S}{2V_0\sqrt{\frac{\omega}{2\chi_g}}}+i\frac{(\gamma-1)S}{2V_0\sqrt{\frac{\omega}{2\chi_g}}}\right].\end{gathered} \tag{32}$$

Обозначим:

$$\begin{gathered}z=\frac{6V_0}{S}\sqrt{\frac{\omega}{2\chi_g}},\quad q(z)=\frac{\gamma}{1+\frac{3(\gamma-1)}{z}},\\ \delta_T(z)=\frac{1}{1+\frac{z}{3(\gamma-1)}}.\end{gathered} \tag{33}$$

Тогда (32) примет вид:

$$\frac{dV}{dP}=-\frac{V_0}{qP_0}(1+i\delta_T). \tag{34}$$

Из уравнения (34) следует, что для учета тепловых потерь в камере *5* резонатора надо в формуле (21) заменить показатель политропы $q$ его комплексным значением

$$q^*(z)=\frac{q(z)}{1+i\delta_T(z)}\approx q(z)\left[1-i\delta_T(z)\right]. \tag{35}$$

Потери на излучение найдем, положив в (21), (23) $\delta = \delta_{\text{rad}}$, $X = X_{\text{rad}}$, где

$$\delta_{\text{rad}}=\frac{\omega X_{\text{rad}}}{16\pi\mu(1+\beta)R}. \tag{36}$$

Согласно [1, с. 480] и (18), (19) мощность сферической волны, излучаемая резонатором в окружающую среду, равна:

$$J=2\bar{\Psi}_{\text{rad}}=\frac{\omega^2X_{\text{rad}}}{2}\left|U(R)\right|^2=2\pi\rho k_lR(\omega R)^3\left|U(R)\right|^2.$$

Найденное отсюда значение $X_{\text{rad}}$ подставим в (36) и получим:

$$\delta_{\text{rad}}=\frac{\omega^2k_lR}{\omega_{\text{p}}^2(1+\alpha)}. \tag{37}$$

Из формул (21), (22) с учетом (37) следует:

$$\begin{gathered}\frac{U}{R}=\\=\frac{-P}{4\mu+\frac{3P_0V}{V_0}q-\omega^2\rho R^2-\frac{4\omega^2R^3\tilde{h}}{a^2}\rho_1-i\omega^2\rho R^2k_lR}.\end{gathered} \tag{38}$$

Заменим в (38) $\mu$, $q$, $\rho_1$ их комплексными выражениями (24), (35), (28), в формуле (22) используем только вещественные части этих выражений. В результате получим:

$$\begin{gathered}\frac{U}{R}=\\=\frac{-P}{4\mu(\omega)\left[1+\beta(\omega)\right]\left\{1-\frac{\omega^2\rho R^2\left[1+\alpha'(\omega)\right]}{4\mu(\omega)\left[1+\beta(\omega)\right]}-i\delta(\omega)\right\}},\end{gathered} \tag{39}$$

где

$$\beta(\omega)=\frac{3P_0Vq(\omega)}{4\mu(\omega)V_0},\quad \alpha'(\omega)=\frac{4R\tilde{h}\rho_1'(\omega)}{\rho a^2}; \tag{40}$$

$$\begin{gathered}\delta(\omega)=\frac{1}{1+\beta(\omega)}\times\\ \times\left\{\eta(\omega)+\beta(\omega)\delta_T(\omega)+\frac{\omega^2\rho R^2\alpha'(\omega)}{4\mu(\omega)}\times\right.\\ \left.\times\,\delta_1(\omega)+\frac{\omega^2\rho R^2}{4\mu(\omega)}k_lR\right\}\end{gathered} \tag{41}$$

– затухание резонатора, включающее четыре вида потерь механической энергии. Собственная частота резонатора

$$\omega_{\text{p}}=\frac{2}{R}\sqrt{\frac{\mu(\omega_{\text{p}})(1+\beta(\omega_{\text{p}}))}{\rho(1+\alpha'(\omega_{\text{p}}))}}. \tag{42}$$

Здесь учтена инерция вязкой жидкости в горле, несколько изменяющая ее эффективную плот-

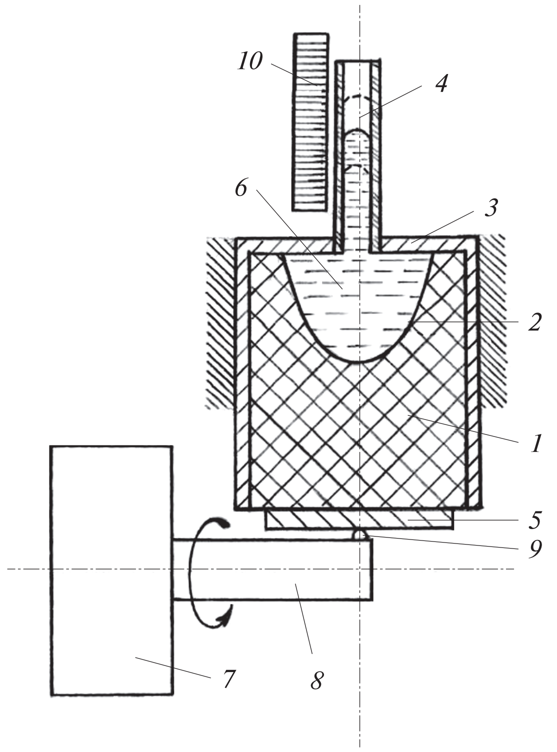


**Рис. 2.** Схема опыта: *1* – резина, ∅ 55 мм, высота 50 мм; *2* – полость, эффективный радиус 12 мм; *3* – стакан-держатель, сталь, стенки 5 мм; *4* – горло, стекло, $2a = 4.5$ мм; *5* – шайба, эбонит, ∅ 50 мм, толщина 5 мм; *6* – ртуть; *7* – патрон; *8* – стержень; *9* – выступ; *10* – шкала.

ность [10, с. 127]. Поскольку $\delta(\omega)$ играет роль лишь вблизи резонанса, в (41) можно считать $\omega = \omega_р$.

Жидкость в горле резонатора можно заменить твердым, например, металлическим поршеньком с плотностью $\rho_m$, как предложено в книге [14, с. 326, рис. 81]. В этом случае в формулах (39)–(42) следует сделать замены: $\rho_1'(\omega) \to \rho_m$,

$$\delta_1(\omega) \to \delta_m(\omega) = \frac{2\eta_l}{\omega\rho_m a d},$$

где $\eta_l = \rho_l\nu_l$ – динамическая вязкость жидкости, $d$ – ширина узкой щели между поршнем и стенками горла. Поршень может быть продолжен вглубь полости *1* для увеличения эффективного значения $\rho_m$ и дополнительного снижения частоты $\omega_р$.

Для РЖР можно пренебречь тепловыми потерями в камере и потерями на излучение по сравнению с вязкими потерями в резине и в жидкости горла. Поэтому формула (41) упростится. Так, при $|\kappa a| > 10$ согласно (29), (27), (7)

$$\delta(\omega_р) \approx \frac{\eta(\omega_р)}{1+\beta(\omega_р)} + \frac{\sqrt{2}\alpha}{(1+\alpha)|\kappa(\omega_р)a|}.$$

Задачу можно расширить, приняв, что полость *1* резонатора окружена слоем резины *2* конечной толщины $s$ и помещена в другую вязкоупругую водоподобную среду с плотностью $\rho_0$ и модулем сдвига $\mu_0$. Изменения энергий системы $T(t)$ (6) и $E(t)$ (14) сведутся к заменам в формулах (6) и (14):

$$\begin{gathered}\rho \to \rho_s = \frac{\rho s + \rho_0 R}{R+s},\\ \mu \to \mu_s = \mu + \frac{R^3}{(R+s)^3}(\mu_0 - \mu).\end{gathered} \tag{43}$$

Это приведет к таким же заменам в формуле (38), где, однако, в последнем слагаемом знаменателя (поскольку теперь излучение происходит во внешнюю среду с плотностью $\rho_0$ и волновым числом $k_{l0}$) нужны другие замены: $\rho \to \rho_0$, $k_l \to k_{l0}$. Все указанные замены следует выполнить в итоговых формулах (39)–(42), при этом (41) примет вид:

$$\begin{gathered}\delta_s(\omega) = \frac{1}{1+\beta_s(\omega)}\times\\ \times\left\{\eta_s(\omega) + \beta_s(\omega)\delta_T(\omega) + \frac{\omega^2\rho_s R^2\alpha'(\omega)}{4\mu_s(\omega)}\times\right.\\ \left.\times\,\delta_1(\omega) + \frac{\omega^2\rho_0 R^2}{4\mu_s(\omega)}k_{l0}R\right\},\end{gathered} \tag{44}$$

где

$$\eta_s(\omega) = \\ = \frac{\mu(\omega)\eta(\omega) + \dfrac{R^3}{(R+s)^3}[\mu_0(\omega)\eta_0(\omega) - \mu(\omega)\eta(\omega)]}{\mu_s(\omega)}. \tag{45}$$

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА

Как следует из формулы (42), собственная частота РЖР может быть в десятки и сотни раз меньше, чем у пустой полости в резине. Это подтверждает демонстрационный опыт, схема которого показана на рис. 2.

Резиновый цилиндр *1* с полостью *2* плотно вдавлен до упора в стакан *3*, в центре которого над полостью *2* имеется отверстие, куда плотно вставлена стеклянная трубка *4*, выполняющая роль горла резонатора. Снизу к резине приклеена эбонитовая шайба *5*. Полость *2* и частично горло *4* заполнены ртутью *6* (при 20°C $\rho_1 = 13.6 \times 10^3$ кг/м$^3$, $\nu_1 = 1.15 \times 10^{-7}$ м$^2$/с). Ртуть выбрана исключительно из-за стремления получить при заданных размерах возможно большее снижение частоты $\omega_р$. К тому же, малая кинематическая вязкость ртути позволяет пренебречь вязкими потерями в горле *4*.

В патроне *7* токарного станка зажат стержень *8* с небольшим (~2 мм) боковым выступом *9* на

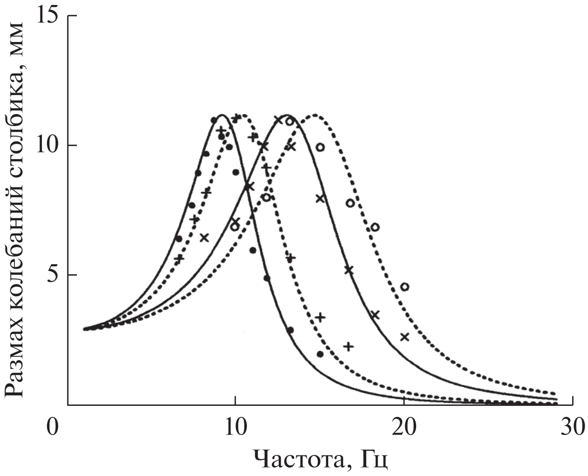


**Рис. 3.** Амплитудно-частотные характеристики РЖР при разных значениях высоты столбика ртути в горле: ● – $h = 58.5$; + – $h = 43$; × – $h = 28$; ○ – $h = 19$ мм.

конце. Стакан–держатель *3* жестко закреплен в резцедержателе суппорта станка так, что оси стакана и стержня пересекаются. При вращении патрона *7* выступ *9* периодически бьет по центру шайбы *5* и возбуждает резонатор. При этом полость *2* РЖР пульсирует с частотой оборотов, на что указывают колебания столбика ртути в горле *4*. Размах этих колебаний измерялся визуально по миллиметровой шкале *10* с точностью ~±0.5 мм. Обороты патрона устанавливались либо дискретно, либо плавно путем торможения патрона куском пенопласта. Контролировались обороты стробоскопом.

На рис. 3 приведены измеренные амплитудно-частотные характеристики РЖР при следующих значениях высоты столбика ртути в горле: $h = 58.5$, 43, 28, 19 мм. По формуле (8) найдем: $\Delta h = 1.3$ мм. При заданных параметрах формула (42) принимает вид:

$$\omega_\text{р} = \frac{a}{R}\sqrt{\frac{\mu(\omega_p)}{\rho_1 R\tilde{h}}}. \tag{46}$$

Модуль сдвига резины неизвестен, но может быть оценен с помощью формулы (46) по измерениям. Результаты вполне правдоподобны: (0.820, 0.809, 0.838, 0.804) × $10^6$ Па, разброс небольшой. Среднее значение $\mu_\text{ср} = 0.818 \times 10^6$ Па. Значение собственной частоты пустой полости при таком модуле сдвига и $\rho = 1200$ кг/м$^3$ составляет $f_\text{р} = \frac{1}{\pi R}\sqrt{\frac{\mu_\text{ср}}{\rho}} = 692$ Гц. Таким образом, частота резонатора снижена от 47 до 80 раз. Фактически это снижение еще большее, поскольку с частотой зависимость $\mu(\omega)$ возрастает. Так как согласно (46) $f_\text{р} \sim a$, то уменьшением диаметра горла можно получить дальнейшее снижение собственной частоты РЖР.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В РЖР объединены свойства нескольких акустических резонаторов: полости в резине, газового пузыря в вязкоупругой среде и в оболочке, пузырька в жидкости, резонаторов Гельмгольца и водно-воздушного. Поэтому известные основные соотношения для этих резонаторов можно получить из общих выражений (39)–(45) для РЖР путем предельных переходов. Так, положив $\rho_1 \to 0$, $\nu_1 \to 0$, $P_0 \to 0$, получим для пустой полости в безграничной резине:

$$\frac{U}{R} = \frac{-P}{4\mu(\omega)\left[1 - \frac{\omega^2\mu(\omega_p)}{\omega_p^2\mu(\omega)} - i\eta(\omega)\right]}, \quad \omega_\text{р} = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{\mu(\omega_\text{р})}{\rho}}.$$

Потерями на излучение здесь можно пренебречь, поскольку

$$k_l(\omega_\text{р})R = \frac{\omega_\text{р} R}{c_l} = 2\sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} \ll \eta.$$

Если полость в вязкоупругой среде заполнена газом (например, плавательный пузырь рыбы), то, считая в общих формулах $\rho_1 = 0$, $V_0 = V$, найдем:

$$\frac{U}{R} = \frac{-P}{4\tilde{\mu}(\omega)\left\{1 - \frac{\omega^2\tilde{\mu}(\omega_\text{р})}{\omega_\text{р}^2\tilde{\mu}(\omega)} - i\left[\frac{\eta(\omega) + \beta(\omega)\delta_T(\omega)}{1 + \beta(\omega)} + \frac{\omega^2\tilde{\mu}(\omega_\text{р})}{\omega_\text{р}^2\tilde{\mu}(\omega)} k_l R\right]\right\}},$$

где $\tilde{\mu}(\omega) = \mu(\omega)[1 + \beta(\omega)]$,

$$\omega_\text{р} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{4\mu(\omega_\text{р}) + 3P_0 q(\omega_\text{р})}{\rho}}. \tag{47}$$

Эти формулы впервые получены в работе [15]. При малых значениях $\mu$, на глубинах более 200 м $3P_0 q \gg 4\mu$. Выражение (47) для резонансной частоты радиальных адиабатических ($q \to \gamma$) колебаний газового пузырька в упругой среде получено также в работе [16].

Значение резонансной частоты объемных колебаний газового пузыря в вязкоупругой оболочке, помещенного в другую вязкоупругую среду, легко найдем из формулы (47) с помощью замен (43):

$$\omega_p = \frac{1}{R}\sqrt{\left\{4\mu(\omega_p) + 3P_0 q(\omega_p) + 4\left[\mu_0(\omega_p) - \mu(\omega_p)\right]\frac{R^3}{(R+s)^3}\right\}\frac{R+s}{\rho s + \rho_0 R}}. \quad (48)$$

Для рассматриваемого случая эта формула (дополненная учетом поверхностных натяжений на границах сред) впервые получена в работе [17, (14)].

Собственную частоту резинового “мячика” в воде найдем из (48), положив $\mu_0 = 0$:

$$\omega_p = \frac{1}{R}\times$$
$$\times\sqrt{\left\{4\mu(\omega_p)\left[1 - \frac{R^3}{(R+s)^3}\right] + 3P_0 q(\omega_p)\right\}\frac{R+s}{\rho s + \rho_0 R}},$$

откуда при $P_0 = 0$, $s = \infty$ следует резонансная частота пустой полости в резине, а при $s = 0$ – известная формула Минаэрта для газового пузырька в воде. Газовый пузырек в воде соответствует случаю: $\mu \to 0$, $\rho_1 \to 0$, $V_0 = V$, $\rho \to \rho_0$, $c_l \to c_0$. Для него имеем:

$$\frac{U}{R} = \frac{-P}{3qP_0\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2} - i\left(\delta_T(\omega) + \frac{\omega^2}{\omega_p^2}k_0 R\right)\right]},$$

$$\omega_p = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{3qP_0}{\rho_0}}$$

– формула Минаэрта, где $k_0 = \omega/c_0$; $c_0$ – скорость звука в воде; $\rho_0$ – плотность воды. В общем случае для $q$ и $\delta_T$ здесь следует использовать формулы Девина [11], [12], [13, с. 146].

Для резонаторов Гельмгольца и водно-воздушного, положив в формулах (39)–(42) $\mu \to 0$, $\rho_1 = \rho = \rho_0$, $c_l = c_0$, $\alpha \gg 1$, где $\rho_0$ – плотность воздуха (воды), $c_0$ – скорость звука в воздухе (в воде), и учитывая (5), найдем:

$$\xi_{cp} = \frac{P}{\rho_0 \tilde{h}\omega_p^2\left\{1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2} - i\left[\delta_T(\omega) + \frac{\omega^2}{\omega_p^2}\left(\delta_1(\omega) + \frac{k_0 a^2}{4\tilde{h}}\right)\right]\right\}}$$

– комплексная амплитуда среднего по сечению горла смещения жидкости;

$$\omega_p = a\sqrt{\frac{\pi q P_0}{\rho_0 \tilde{h} V_0}}.$$

Согласно Л.Я. Гутину для открытого в среду́ конца горла без фланца (поршень без экрана) можно считать $\tilde{h} = h + \frac{2a}{\pi}$ [6, с. 154].

Резино-жидкостные акустические резонаторы могут найти применение в низкочастотных звукогасящих устройствах. Например, с их помощью можно изготовить широкополосное звукопоглощающее покрытие для измерительных гидроакустических бассейнов со звуконепроницаемыми либо имеющими инерционный импеданс стенками. Оно может состоять из совокупности одиночных, настроенных на разные частоты резонаторов в оболочках, точечно размещенных на защищаемой поверхности и разделенных водными промежутками. Последние устраняют упругое взаимодействие резонаторов, что дает возможность увеличить их объемное содержание в поглотителе. Такая конструкция позволит полнее использовать резину или экономить ее расход.

Для резонаторов покрытия оптимальное значение затухания $\delta(\omega_p) \approx 1$. Регулировать величину $\delta(\omega_p)$ можно подбором вязкости жидкости. Наиболее предпочтительны для РЖР полиметилсилоксановые жидкости (ПМС) с огромным диапазоном вязкостей. Они обладают для данного применения спектром уникальных свойств: не воздействуют на резины; практически не испаряются; имеют аномально низкую (сравнительно с другими маслами) температурную зависимость вязкости; допускают получение жидкости с необходимой вязкостью путем простого смешивания ПМС разных сортов. Возможно также использование РЖР в одиночных избирательных поглотителях звука и вибраций. Малые волновые размеры РЖР этому способствуют.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Исакович М.А.* Общая акустика. Учебное пособие. М.: Наука, 1973. 495 с.
2. *Сорокин В.И.* Исследование водно-воздушных резонаторов // Акуст. журн. 1958. Т. 4. № 2. С. 187–195.
3. *Сивухин Д.В.* Дифракция плоской звуковой волны на сферической полости // Акуст. журн. 1955. Т. 1. № 1. С. 78–88.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. 4-е изд., исправл. М.: Наука, 1988. 216 с.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. 4-е изд., исправл. и дополн. М.: Наука, 1987. 248 с.
6. *Ржевкин С.Н.* Курс лекций по теории звука. М.: Изд-во МГУ, 1960. 336 с.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Часть 1. 3-е изд., дополн. М.: Наука, 1976. 584 с.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. 2-е изд., перераб. и дополн. М.: Наука, 1982. 623 с.
9. *Крендалл И.* Акустика. М.: КУБУЧ, 1934.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. 3-е изд., перераб. М.: Наука, 1986. 736 с.

11. *Pfriem H.* Zur thermischen Dämpfung in kugelsymmetrisch schwingen den Gasblasen // Akustische Zeitschrift. 1940. J. 5. S. 202–212.

12. *Devin Ch., Jr.* Survey of thermal, radiation, and viscous damping of pulsating air bubbles in water // J. Acoust. Soc. Am.1959. V. 31. № 12. P. 1654–1667.

13. *Красильников В.А., Крылов В.В.* Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 400 с.

14. *Лэмб Г.* Динамическая теория звука / Пер. с англ. под ред. Исаковича М.А. М.: ГИФМЛ, 1960. 372 с.

15. *Андреева И.Б.* О рассеянии звука газовыми пузырями рыб в глубоководных звукорассеивающих слоях океана // Акуст. журн. 1964. Т. 10. № 1. С. 20–24.

16. *Алексеев В.Н., Рыбак С.А.* Особенности поведения газовых пузырьков в биологической ткани под действием звука // Акуст. журн. 1998. Т. 44. № 3. С. 293–298.

17. *Алексеев В.Н., Рыбак С.А.* Колебания газовых пузырьков в упругих средах // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 5. С. 603–609.

*АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2020, том 66, № 4, с. 366–376*

**ФИЗИЧЕСКАЯ АКУСТИКА**

*УДК 534.2*

# МЕТОД СОЗДАНИЯ АБСОЛЮТНО ПЛОТНЫХ ФАЗИРОВАННЫХ РЕШЕТОК ДЛЯ НЕИНВАЗИВНОЙ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ ХИРУРГИИ С КОНТРОЛЕМ СТЕПЕНИ НЕРЕГУЛЯРНОСТИ РАСПОЛОЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ



**П. Б. Росницкий[a], *, О. А. Сапожников[a], Л. Р. Гаврилов[b], **, В. А. Хохлова[a]**

[a] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, ГСП-1, Ленинские горы, Москва 119991 Россия*

[b] *АО "Акустический институт им. акад. Н.Н. Андреева", ул. Шверника 4, Москва, 117036 Россия*

**e-mail: pavrosni@yandex.ru*

***e-mail: gavrilov.1938@mail.ru*

Поступила в редакцию 26.11.2019 г.
После доработки 26.11.2019 г.
Принята к публикации 25.02.2020 г.

При разработке фазированных антенных решеток для использования в неинвазивной ультразвуковой хирургии требуется обеспечить максимально возможную мощность при заданных размерах решетки. При этом необходимо учесть ограничение на максимально допустимую интенсивность ультразвука на излучающих элементах и обеспечить подавление паразитных дифракционных максимумов в структуре излучаемого поля. Указанная задача может быть решена путем нерегулярного расположения элементов при максимально возможной плотности заполнения ими поверхности решетки. В настоящей работе разработана модификация метода абсолютно плотного заполнения решеток с мозаичной непериодической структурой на основе ограничения механизма релаксации в итерационном алгоритме построения решетки. Создана компьютерной модель, позволяющая контролировать степень нерегулярности расположения элементов решетки. Проведена проверка устойчивости низкого уровня паразитных дифракционных максимумов для различных случайных реализаций расположения элементов путем создания статистического ансамбля из 500 моделей решеток. Продемонстрированы преимущества рассмотренных решеток по сравнению с существующими моделями плотных решеток.

*Ключевые слова:* медицинская акустика, фокусированный ультразвук высокой интенсивности, многоэлементные решетки, интеграл Рэлея

**DOI:** 10.31857/S0320791920040097

## ВВЕДЕНИЕ

В современной неинвазивной хирургии, основанной на использовании высокоинтенсивного фокусированного ультразвука, широко применяются многоэлементные фазированные решетки [1, 2], излучающие элементы которых обычно располагаются на поверхности сферического сегмента [3, 4]. Для многих клинических приложений критическим фактором является необходимость достижения высокой акустической мощности решетки для обеспечения необходимых для проведения операции уровней интенсивности в фокусе. Заметные потери мощности ультразвукового пучка возникают, например, при облучении мозга через кости черепа [5–7] или при разрушении глубоко расположенных опухолей поджелудочной железы [8]. Указанные потери могут быть скомпенсированы увеличением общей мощности решетки. Принципиальным ограничением при этом является то, что интенсивность на пьезоэлектрических элементах не может превышать предельно допустимых значений, составляющих около 30–40 Вт/см$^2$ [4, 9, 10]. С учетом этого ограничения, одним из основных подходов к увеличению акустической мощности решетки заданных размеров является увеличение ее активной (излучающей) поверхности, т.е. максимизация коэффициента заполнения $\Psi = (\Sigma_{\text{акт}}/\Sigma)\times 100\%$, где $\Sigma_{\text{акт}}$ – общая площадь всех излучающих элементов, $\Sigma$ – полная площадь поверхности решетки. При создании модели решетки нужно также учитывать необходимость непериодического расположения элементов на ее поверхности для подав-

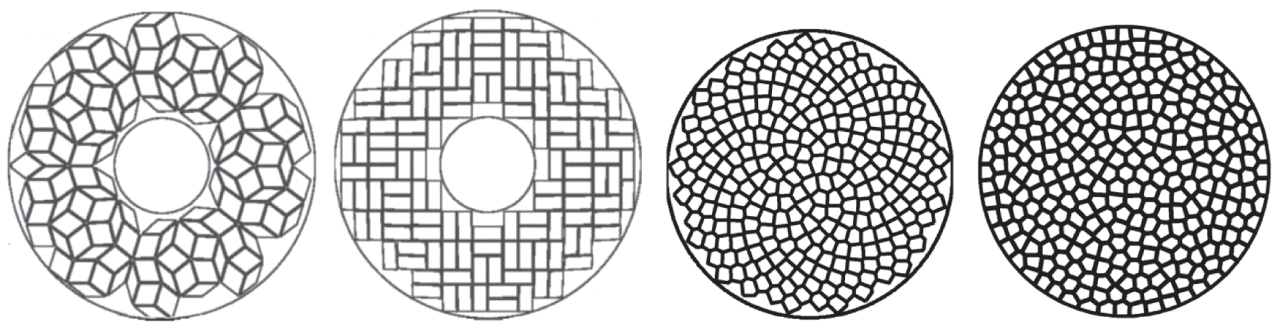


**Рис. 1.** Эскизы решеток с различными типами мозаичного заполнения элементами: (а) – мозаика Пенроуза, (б) – мозаика с прямоугольными элементами, (в) – мозаика Вороного, построенная на спирали Ферма, (г) – абсолютно плотная мозаика с ячейками равной площади.

ления побочных дифракционных максимумов поля, формирующихся при электронном перемещении фокуса [11–13]. Кроме того, важно обеспечить одинаковость площадей отдельных элементов, поскольку различия в площади усложняют согласование источников электрической мощности с элементами и ухудшают качество ультразвукового поля при электронном перемещении фокуса.

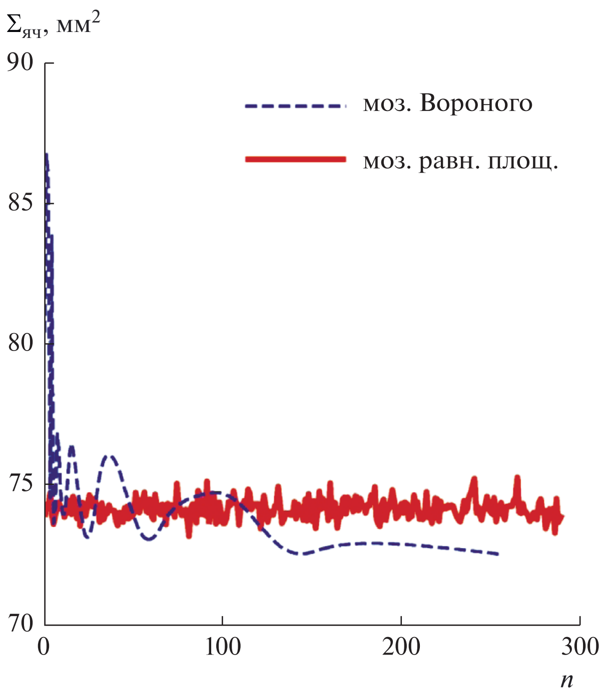


**Рис. 2.** Зависимость площади ячейки $\Sigma_{яч}$ от ее номера $n$ для разбиения поверхности решетки на ячейки мозаики Вороного, построенной на спирали Ферма (пунктирная линия), и мозаики с ячейками равной площади (сплошная линия). Обе мозаики имеют одинаковую среднюю площадь ячейки 74 мм$^2$ и построены на поверхности сферического сегмента с радиусом кривизны $F$ = 160 мм и апертурой $D$ = 160 мм. Номера ячеек $n$ упорядочены в соответствии с их удаленностью от центра сегмента.

В последнее десятилетие предпринимались различные попытки увеличения плотности заполнения поверхности решеток путем организации элементов в виде мозаик с различным замощением. В работе [14] были предложены две конфигурации решеток, основанные на мозаике Пенроуза (коэффициент заполнения $\Psi$ = 70% при зазоре 0.5 мм между элементами) и паркете апериодически расположенных прямоугольников ($\Psi$ = 71% при зазоре 0.5 мм) (рис. 1а, 1б, соответственно). Недавно была предложена модель решетки с коэффициентом заполнения около $\Psi$ = 78% при зазоре 0.5 мм между элементами (рис. 1в) [15]. Ее элементы имеют форму ячеек мозаики Вороного, расположенных на спирали Ферма, поэтому в англоязычной литературе решетка получила название Voronoi Tessellation Fermat's Spiral Array или VTFS-решетка. Такие решетки уже используются на практике [16]. Несмотря на высокую плотность заполнения VTFS-решетки, ее конструкция не обеспечивает максимально возможный коэффициент заполнения из-за пустот на периферии излучателя (рис. 1в). Кроме того, многоугольные ячейки разбиения Вороного, применяемого при построении решетки, отличаются по площади. Штриховая линия на графике рис. 2 изображает зависимость площади ячейки $\Sigma_{яч}$ от ее номера $n$, причем номера упорядочены по мере удаления центра масс ячейки от центра решетки. Видно, что максимальное различие между площадями ячеек составляет 19% от средней площади ячейки, причем наиболее сильное отличие проявляется для центральных ячеек.

В 2018 г. авторами данной работы был предложен новый класс мозаичных решеток с максимальной достижимой плотностью заполнения поверхности элементами ($\Psi$ = 100% без учета технологического зазора между элементами), т.е. абсолютно плотных решеток (рис. 1г) [17]. За основу была взята концепция случайного расположения элементов (рандомизации) [11, 18]. При этом использовалась мозаика с ячейками одинаковой площади. Равенство площадей обеспечивается специфическим алгоритмом построения мозаики, описанным в статье [19].

Рис. 2 иллюстрирует разброс площадей элементов двух плотных решеток с мозаичным расположением элементов – VTFS-решетки [15] и абсолютно плотной решетки с ячейками одинаковой площади [17]. Обе решетки имеют одинаковый внешний контур и одинаковую среднюю площадь элементов – см. рис. 1в и 1г. Благодаря отсутствию незаполненных краевых участков количество элементов во второй решетке (291) превышает количество элементов в первой (256). На рис. 2 площади элементов абсолютно плотной решетки показаны сплошной кривой, а площади элементов VTFS-решетки – штриховой линией. Заметим, что алгоритм построения мозаики с ячейками заданной площади является численным, поэтому равенство площадей элементов является приблизительным: максимальное различие между площадями ячеек составляет 2.8% от средней площади ячейки. При необходимости различие в площади может быть уменьшено до требуемого уровня путем увеличения количества точек, используемых в алгоритме разбиения (см. ниже). В отличие от мозаики с ячейками равной площади, мозаика VTFS характеризуется гораздо большим разбросом площадей элементов, особенно вдали от края. В рассмотренном примере максимальное отклонение площади элемента от средней составляет 19%.

Несмотря на то, что элементы таких абсолютно плотных решеток расположены случайным образом, наружный слой ячеек у внешней границы решетки неизбежно имеет квазикольцевую структуру, в связи с чем слои, близкие к наружному, также выстраиваются в структуру, напоминающую кольцевую. Указанный эффект частичной регулярности расположения элементов почти не проявляется у решеток с большим количеством элементов $N > 256$, однако может усиливаться при уменьшении числа элементов. На рис. 3 проявление этого побочного эффекта проиллюстрировано на распределении безразмерной амплитуды давления $p_A/p_0$ в плоскости $zy$ ($x = 0$), проходящей через ось решетки $z$. Здесь $p_0$ – давление на элементе, $x$, $y$ – оси декартовой системы координат, перпендикулярные оси решетки $z$, с началом координат в центре ее симметрии. Сравниваются VTFS-решетка (рис. 3а) и абсолютно плотная решетка (рис. 3б). При смещении фокуса от центра кривизны ($F = 160$ мм) на 30 мм вдоль оси решетки к ее поверхности побочные максимумы на оси VTFS-решетки, у которой отсутствует кольцевая

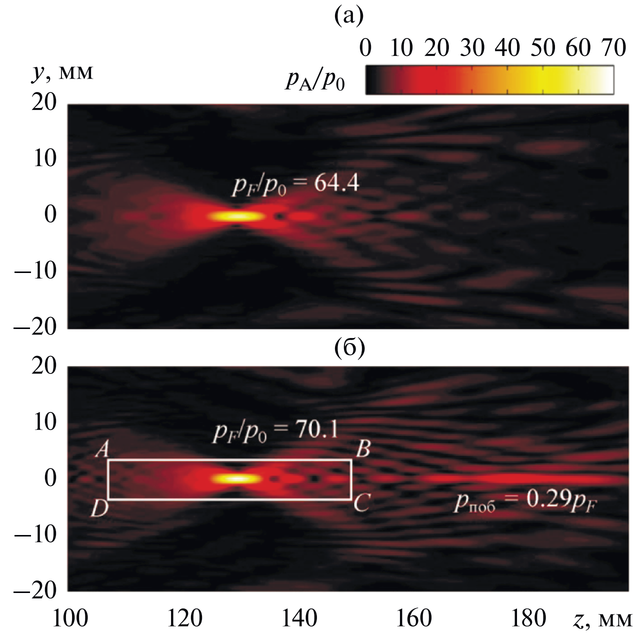


**Рис. 3.** Двумерные распределения нормированной амплитуды акустического давления $p_A/p_0$ в плоскости $zy$, содержащей ось решетки, (а) – для существующей VTFS-решетки и (б) – абсолютно плотной решетки. На обоих распределениях над фокальной областью указаны безразмерные значения амплитуды в фокусе $p_F/p_0$. На распределении (б) указана амплитуда $p_{поб}/p_0$ в самом интенсивном из побочных максимумов, расположенных вне прямоугольной окрестности фокуса ABCD. Продольный размер и положение контура ABCD выбраны так, чтобы наряду с основным фокусом внутрь него попадали два предфокальных и два постфокальных дифракционных максимума, расположенных на оси. Аналогично, поперечная граница указанного прямоугольника соответствует условию, что внутрь области ABCD с обеих сторон попадают по два боковых дифракционных максимума.

периодичность, почти не проявляются, а в поле абсолютно плотной решетки они хорошо различимы.

Целью данной работы является модификация метода создания абсолютно плотных случайных решеток для ослабления эффекта появления периодичности в расположении элементов и соответствующего уменьшения уровня побочных максимумов при электронном смещении фокуса.

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Предлагаемая модификация метода построения абсолютно плотной решетки имеет пошаговую реализацию, причем его первая часть совпадает с недавно предложенным методом [17]. Для иллюстрации сначала рассмотрим последова-

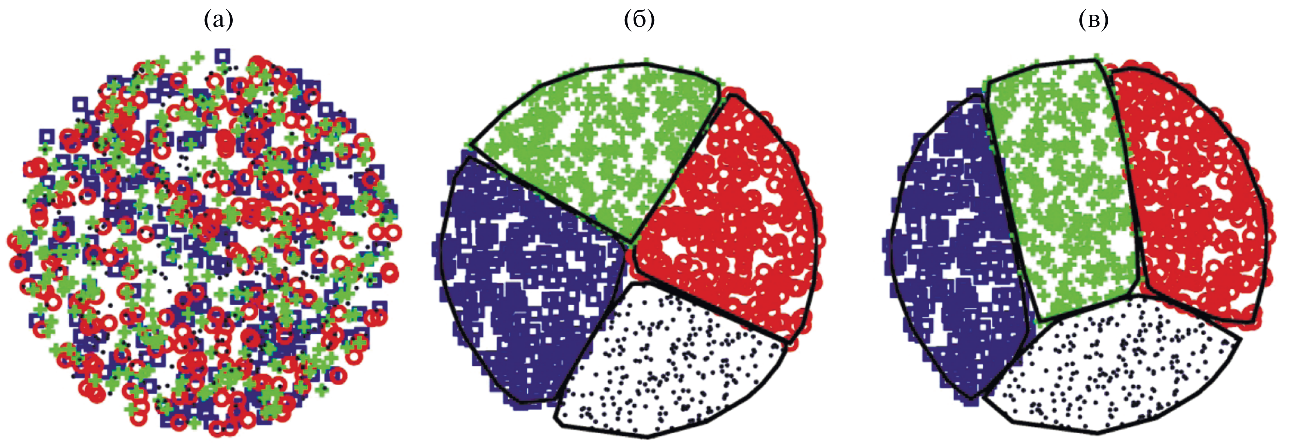


**Рис. 4.** Иллюстрация алгоритма для осуществления 100%-го заполнения поверхности решетки элементами в виде многоугольников с одинаковой площадью. Рассмотрен случай четырех элементов. Различным типом маркеров (“плюс”, “кружок”, “точка” и “квадрат”) представлены соответствующие этим элементам совокупности точек. На левом рисунке (а) показано исходное расположение точек с полным перемешиванием (0-я итерация). На центральной и правом рисунках показан конечный результат разделения совокупностей точек на ячейки: (б) – без ограничения релаксации, (в) – с ограничением релаксации на 5-й итерации.

тельность операций для уже существующего метода на примере построения четырехэлементной решетки в форме сферического сегмента:

1) Сплошная поверхность решетки заменяется набором большого числа точек, которые случайным образом набрасываются на ее поверхность равномерно по телесному углу (рис. 4а). Иными словами, вероятность попадания одной точки в некоторый элемент площади $d\Sigma$ на поверхности решетки с полной площадью $\Sigma$ определяется как $d\Sigma/\Sigma$ и не зависит от положения элемента на сфере.

2) Весь набор точек делится на $N$ классов, каждый из которых содержит $M$ точек (рис. 4а). Деление точек на классы происходит случайным образом, в связи с чем “облака точек” различных классов оказываются сильно перемешанными, при этом каждое облако плотно “накрывает” всю поверхность решетки. Данное начальное состояние считается нулевой итерацией $S = 0$. В приведенном примере $N = 4$, $M = 250$, общее количество точек $NM = 10^3$. На рис. 4а точки четырех разных классов отмечены различным типом маркеров: “плюс”, “кружок”, “точка” и “квадрат”.

3) Далее происходит итерационный процесс попарного разделения облаков точек разных классов. Наглядным образом его можно представить как разделение перемешанных в двумерном сосуде $N$ различных несмешиваемых жидкостей, каждая из которых состоит из одинакового числа $M$ частиц, стремящихся соединиться друг с другом с образованием компактных ячеек. Конечное состояние после разделения таких жидкостей (рис. 4б) как раз будет соответствовать разбиению содержимого сосуда (образа поверхности решетки) на ячейки одинакового размера. Разделение происходит следующим образом. На каждой итерации $S$ рассматриваются все возможные пары облаков точек различных классов. Для примера возьмем облака, отмеченные на рис. 4а маркерами “+” и “o”. Обозначим радиус-векторы точек первого облака в начале $S$-й итерации как $\mathbf{a}_i^S$ ($i = 1, ..., M$). Введем “центр масс” облака:

$$\mathbf{A}_S = \left(\mathbf{a}_1^S + \mathbf{a}_2^S + \ldots + \mathbf{a}_M^S\right)\Big/M, \qquad (1)$$

где $S$ – номер итерации. Аналогично, для второго облака точек введем обозначения для координат точек $\mathbf{b}_j^S$ и соответствующего центра масс $\mathbf{B}_S$ ($j = 1, ..., M$). Заметим, что при используемом определении центры масс, вообще говоря, не попадают на сферическую поверхность решетки. Поэтому дополнительно проводится проецирование центров масс на поверхность решетки вдоль направления нормали к поверхности. Получившиеся точки далее рассматриваются как центры масс. Для реализации процесса разделения облаков точек рассматриваются все возможные пары точек $(\mathbf{a}_i^S, \mathbf{b}_j^S)$. В случае если точка $\mathbf{a}_i^S$ первого облака находится в зоне влияния центра масс второго облака (соответствующий критерий см. ниже), а точка $\mathbf{b}_j^S$ – в зоне влияния центра масс первого облака, производится обмен точками. В качестве количественного критерия в работе [19] введена следующая функция принятия решения для выявления пар точек, подлежащих обмену:

$$\chi\left(\mathbf{a}_i^S, \mathbf{b}_j^S, \mathbf{A}_S, \mathbf{B}_S\right) = \rho\left(\mathbf{a}_i^S, \mathbf{A}_S\right)^2 - \rho\left(\mathbf{a}_i^S, \mathbf{B}_S\right)^2 + \\ + \rho\left(\mathbf{b}_j^S, \mathbf{B}_S\right)^2 - \rho\left(\mathbf{b}_j^S, \mathbf{A}_S\right)^2. \qquad (2)$$

Здесь $\rho(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ – расстояние между двумя точками в сферической метрике или, другими словами, длина дуги большого круга, проходящего через точки $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. При этом точка $\mathbf{a}_i^S$ приписывается второму классу, а $\mathbf{b}_j^S$ – первому. Если $\chi\left(\mathbf{a}_i^S,\mathbf{b}_j^S,\mathbf{A}_S,\mathbf{B}_S\right) > 0$, то обмен точками совершается, в противном случае обмена не происходит. Таким образом, взаимообмен между точками двух облаков в рамках $S$-й итерации завершается после перебора всех возможных пар точек $(\mathbf{a}_i^S,\mathbf{b}_j^S)$. Далее корректируется положение центров масс облаков по формуле (1), и такая же процедура обмена точками проделывается для всех других возможных пар облаков. При этом условие (2) для уже рассмотренных пар облаков в рамках данной итерации может нарушиться, но в среднем облака становятся более разделенными. Итерационный процесс продолжается ($S \to S+1 \to \ldots S_{\max}$) до тех пор, пока для всех точек произвольной пары облаков не будет выполнено условие $\chi\left(\mathbf{a}_i^{S_{\max}},\mathbf{b}_j^{S_{\max}}\right) \le 0$. Это и означает полное разделение (рис. 4б). Важно отметить, что после разделения каждое из $N$ облаков содержит одинаковое количество $M$ точек, поскольку обмен точками между облаками всегда был попарным.

4) Чтобы осуществить переход от дискретного представления облаков к непрерывному, для каждого из них строится замыкающая его выпуклая кривая (рис. 4б). В случае большого числа точек дискретизации, получившиеся сферические многоугольники как раз и являются ячейками мозаики, абсолютно плотно заполняющей поверхность решетки. По построению, каждая ячейка содержит в себе одинаковое количество $M$ точек, разбросанных случайным образом с равномерным на сфере распределением. Поэтому, согласно методу Монте-Карло, площади ячеек равны в пределе большого числа точек $M$.

На приведенном на рис. 4 примере видно, что после построения мозаики из четырех элементов возникла регулярность (и периодичность) в расположении ячеек: проведенное построение фактически привело к разделению сферической поверхности на четыре почти одинаковых сектора (рис. 4б).

Чтобы уменьшить эффект возникновения периодичности, в данной работе предлагается модифицировать шаг 3 описанного выше алгоритма, а именно изменить функцию принятия решения (2). Действительно, видно, что функция принятия решения $\chi$ зависит как от координат точек дискретизации $\mathbf{a}_i^S$ и $\mathbf{b}_j^S$, так и от положения центров масс $\mathbf{A}_S$ и $\mathbf{B}_S$, причем аргументы функции меняются на каждой итерации. При этом на каждой $S$-й итерации разбиения происходит два отдельных процесса. Первый из них – это обмен точек между группами по правилу $\chi\left(\mathbf{a}_i^S,\mathbf{b}_j^S,\mathbf{A}_S,\mathbf{B}_S\right) > 0$, что обеспечивает разделение облаков точек (будущих ячеек) между собой. Второй процесс – перемещение центров масс $\mathbf{A}_S$ для каждого из облаков в конце итерации (1), что обеспечивает движение облака как целого с финальным установлением равновесного положения на последней итерации, т.е. “релаксацию”. Именно процесс релаксации центра масс ведет к формированию ячеек, близких друг к другу по форме и периодичности финального их расположения. Действительно, ограничим релаксацию на некоторой итерации $S = S_0$, например $S_0 = 5$. Это означает, что на всех итерациях $S > S_0$ центры $\mathbf{A}_S$ и $\mathbf{B}_S$ для любой пары облаков точек не будут перемещаться, т.е. останутся в положениях $\mathbf{A}_S = \mathbf{A}_{S_0}$, $\mathbf{B}_S = \mathbf{B}_{S_0}$. Новая функция принятия решения будет иметь вид:

$$\tilde{\chi}\left(\mathbf{a}_i^S,\mathbf{b}_j^S,\mathbf{A}_S,\mathbf{B}_S\right) = \begin{cases} \chi\left(\mathbf{a}_i^S,\mathbf{b}_j^S,\mathbf{A}_S,\mathbf{B}_S\right), & S \le S_0, \\ \chi\left(\mathbf{a}_i^S,\mathbf{b}_j^S,\mathbf{A}_{S_0},\mathbf{B}_{S_0}\right), & S > S_0. \end{cases} \quad (3)$$

Такое изменение позволяет существенно уменьшить регулярность: финальная картина имеет более неоднородную пространственную структуру (рис. 4в), а ячейки разбиения сильнее отличаются по форме друг от друга. Важно отметить, что при этом выполняется условие равенства площадей, поскольку процесс обмена точками между облаками по-прежнему остается попарным.

Рассмотрим влияние введенного ограничения релаксации на возможности электронного перемещения фокуса. Сравним 256-элементную VTFS-решетку (рис. 5а) [15], абсолютно плотную решетку, построенную на основе мозаики с ячейками заданной площади без ограничения релаксации (рис. 5б) [17], и предлагаемую в данной работе абсолютно плотную решетку с ограниченной релаксацией (рис. 5в). Для корректного сравнения были выбраны одинаковые параметры решеток, соответствующие реальной VTFS-решетке: рабочая частота 1.2 МГц, радиус кривизны поверхности $F = 160$ мм и апертура $D = 160$ мм. Для всех моделей решеток была выбрана одинаковая средняя площадь элементов и введены одинаковые технологические зазоры между смежными сторонами соседних элементов (0.5 мм), которые на практике позволяют избежать электрического пробоя между элементами (рис. 5, выноски сверху) [3, 4, 16].

Обе абсолютно плотные решетки были получены с использованием одинакового количества точек дискретизации $M = 5 \times 10^5$, приходящегося на каждый элемент. При построении абсолютно плотной решетки с ограничением релаксации, ограни-

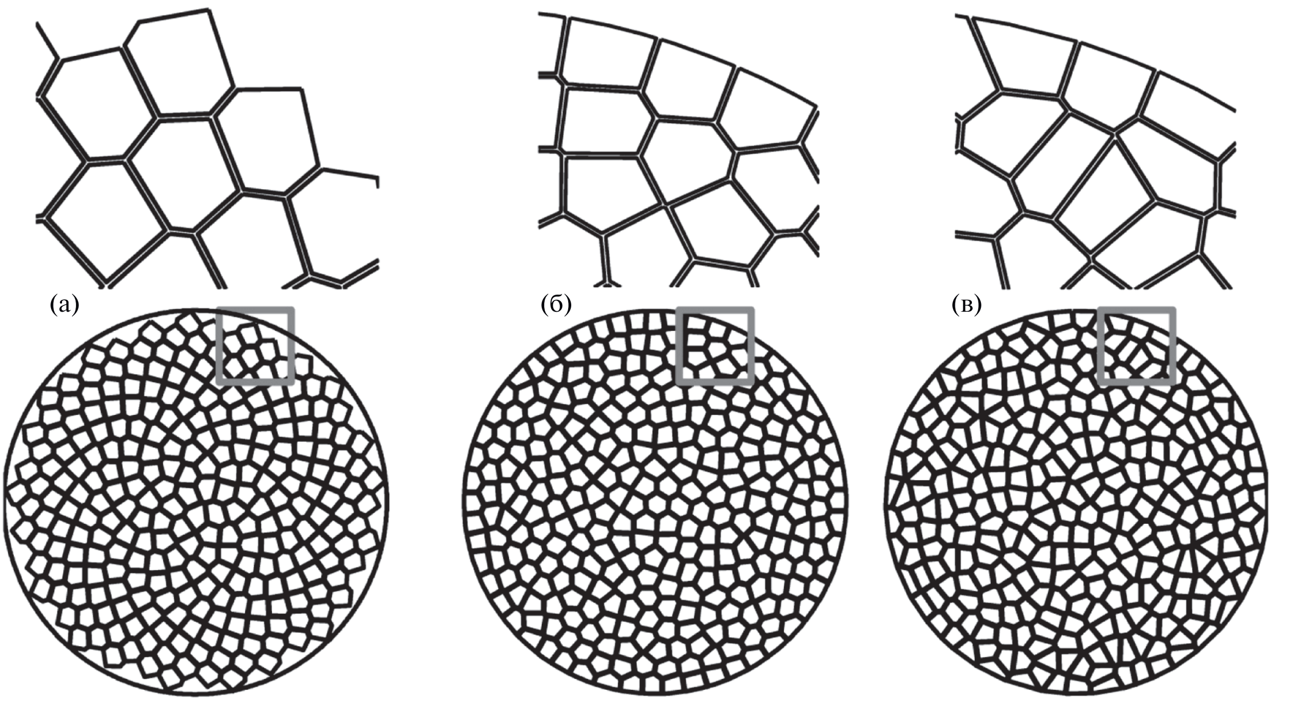


**Рис. 5.** Внешний вид решеток с различным типом разбиения. Все решетки ограничены одинаковым круглым контуром и имеют равные средние площади элементов: (а) — 256-элементная VTFS-решетка, (б) — абсолютно плотная 291-элементная решетка, построенная без ограничения релаксации, (в) — аналогичная решетка, построенная с ограничением релаксации. На выносках сверху показаны увеличенные изображения нескольких элементов решеток для лучшей визуализации формы элементов и зазоров между ними. Параметры решеток: частота $f = 1.2$ МГц, радиус кривизны $F = 160$ мм, апертура $D = 160$ мм, зазор между элементами 0.5 мм, средняя площадь элемента 66 мм$^2$.

чение было наложено на 8-й итерации ($S_0 = 8$). Для проверки надежности метода было построено 500 таких моделей абсолютно плотных решеток с различными реализациями перемешивания точек, сгенерированных псевдослучайным образом.

Для того чтобы детально оценить возможности динамической фокусировки трех решеток (рис. 5), были проведены серии расчетов при электронном смещении фокуса существующей и предложенной решеток в узлы некоторой сетки в аксиальной плоскости $zy$ ($x = 0$ мм). Амплитуды колебательной скорости на элементах решетки выбирались одинаковыми, а перемещение фокуса осуществлялось путем выбора фазы, которая рассчитывалась вдоль луча от центра масс элемента к точке фокусировки. Для каждого положения фокуса $(x_F = 0, y_F, z_F)$ рассматривались распределения амплитуды давления $p_{\text{A}}(x, y, z)$. При этом автоматически анализировались два параметра: “эффективность” и “безопасность” облучения. В соответствии с критериями, предложенными в более ранних исследованиях [13, 20], облучение считалось эффективным, когда интенсивность в смещенном фокусе превышала 50% от максимально достижимого значения, и безопасным, если интенсивность побочных максимумов составляла не более 10% от интенсивности в фокусе. При анализе эффективности облучения в аксиальной плоскости перемещение фокуса осуществлялось на сетке $110 \le z_F \le 200$ мм и $-20 \le y_F \le 20$ мм с шагами $\Delta z_F = \Delta y_F = 0.25$ мм. Анализ безопасности облучения требует большего количества операций, поэтому для него использовалась более грубая сетка $110 \le z_F \le 200$ мм и $-20 \le y_F \le 20$ мм с шагами $\Delta z_F = \Delta y_F = 2.5$ мм. Для каждого положения фокуса $(x_F = 0, y_F, z_F)$ расчет поля проводился на сетке $110 \le z \le 200$ мм и $-20 \le y \le 20$ мм с шагами $\Delta z = \Delta y = 0.25$ мм. Таким образом, необходимо было рассчитать поле 629 раз.

Как видно из рис. 5, рассмотренные ультразвуковые решетки составлены из элементов в форме сферических многоугольников. Для расчета создаваемых ими полей был использован аналитический метод, основанный на расчете интеграла Рэлея

$$p_{\text{A}}(\mathbf{r}) = -\frac{i\omega\rho_0}{2\pi}\int_{\Sigma}\frac{v_n(\mathbf{r}')\exp(ikR)}{R}d\Sigma' \qquad (4)$$

в приближении дальнего поля для каждого из элементов решетки [13, 17]. Здесь $p_{\text{A}}$ — комплексная амплитуда давления в точке $\mathbf{r}$ для гармонической волны с временной зависимостью в форме $\exp(-i\omega t)$, $i$ — мнимая единица, $\omega = 2\pi f$ — угловая частота решетки, $k = \omega/c_0$ — волновое число, $c_0$ — скорость звука, $\rho_0$ — плотность среды, $\Sigma$ — площадь активной поверхности решетки, $v_n(\mathbf{r}')$ — амплитуда нормальной компоненты колебательной скорости в точке $\mathbf{r}'$ поверхности, $d\Sigma'$ — элемент площади с центром в указанной точке, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ — расстояние от указанного элемента поверхности до точки наблюдения.

Каждый многоугольный элемент решетки, совершающий поршневые колебания с амплитудой колебательной скорости $v_0$, разбивался на подэлементы в форме прямоугольных треугольников. Поскольку характерный диаметр подэлементов много меньше радиуса кривизны решетки $F$, уже на небольших расстояниях от поверхности решетки поле каждого из них можно аппроксимировать аналитическим решением для его дальнего поля [17]:

$$p_{\text{A}} = \frac{p_0 ab \exp(ikr_0)\left[I(a,x) - I(b,y)\right]}{2\pi r_0 \left(ax/r_0 - by/r_0\right)}. \qquad (5)$$

Здесь $I(a,x) = \exp(-ikax/2r_0)\operatorname{sinc}(kax/2r_0)$, $a$ и $b$ — катеты прямоугольного треугольника, $p_0 = \rho_0 c_0 v_0$ — характерное давление на поверхности элемента, $r_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и $(x, y, z)$ — координаты точки наблюдения. Таким образом, поле каждого элемента рассчитывалось аналитически как сумма полей (5) его подэлементов. Ранее было показано, что аналитический метод позволяет увеличить скорость расчета поля на несколько порядков по сравнению с прямым численным расчетом интеграла (4) [13, 17].

## РЕЗУЛЬТАТЫ

При введении технологического зазора 0.5 мм плотность заполнения поверхности решеток элементами уменьшилась: с 87 до 78% у VTFS-решетки и со 100 до 89% у абсолютно плотных решеток. Для VTFS-решетки, содержащей 256 элементов, средняя площадь элементов, с учетом зазоров, составила $\bar{\Sigma}_{\text{эл}} = 66$ мм$^2$. Поскольку у абсолютно плотных решеток отсутствуют пустоты на периферии (рис. 5б, 5в), при той же площади элементов их количество увеличилось до $N = 291$. Использование $M = 5 \times 10^5$ точек дискретизации, приходящихся на каждый элемент абсолютно плотных решеток, обеспечило коэффициент вариации площадей элементов $\bar{\Sigma}_{\text{эл}}/\sigma_{\text{эл}} < 1\%$, что позволяет считать их практически равными. Здесь $\sigma_{\text{эл}}$ — стандартное отклонение площади элемента.

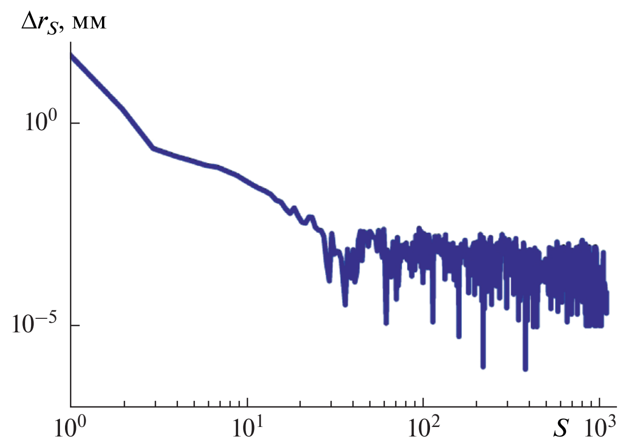


**Рис. 6.** Типичная зависимость смещения центра масс ячейки $\Delta r_S = |\mathbf{A}_S - \mathbf{A}_{S-1}|$ от номера итерации $S$ при построении мозаики с элементами равной площади без ограничения релаксации. Здесь $\mathbf{A}_S$ — радиус-вектор центра масс ячейки на $S$-й итерации. Для удобства восприятия график представлен в логарифмической шкале по обеим осям.

Ограничение на количество итераций с релаксацией ($S_0 = 8$) при построении абсолютно плотной решетки было выбрано из следующих соображений. Перед началом итеративного процесса построения решетки зафиксируем некоторое облако точек, которое впоследствии станет элементом решетки. Будем отслеживать смещение центра масс данного облака $\Delta r_S = |\mathbf{A}_S - \mathbf{A}_{S-1}|$ на каждой итерации $S$ относительно предыдущей (рис. 6). Легко заметить, что, начиная с $S = 5$, положение центра масс меняется несущественно ($\Delta r_S < 0.5$ мм), совершая незначительные колебания вплоть до последней итерации. Другими словами, положения центров масс элементов определяются на ранних итерациях, а в дальнейшем элементы лишь меняют форму, практически не меняя своего положения, все более и более скругляясь вплоть до последней итерации (рис. 5б, 5в). Таким образом, ограничение релаксации можно задавать на любой итерации, начиная с $S = 5$, причем чем раньше это будет сделано, тем более вытянутую форму будут иметь элементы. При построении решетки ограничение было установлено на итерации $S_0 = 8$, чтобы не допустить чрезмерной вытянутости элементов решетки.

Сравним сначала внешний вид решеток. Ограничение релаксации действительно позволяет значительно ослабить эффект упорядоченности элементов решетки (рис. 5в) по сравнению со случаем без ограничения релаксации (рис. 5б): элементы имеют чуть более асимметричную форму и дезориентированы без какой-либо периодичности. Для оценки степени вытянутости элементов

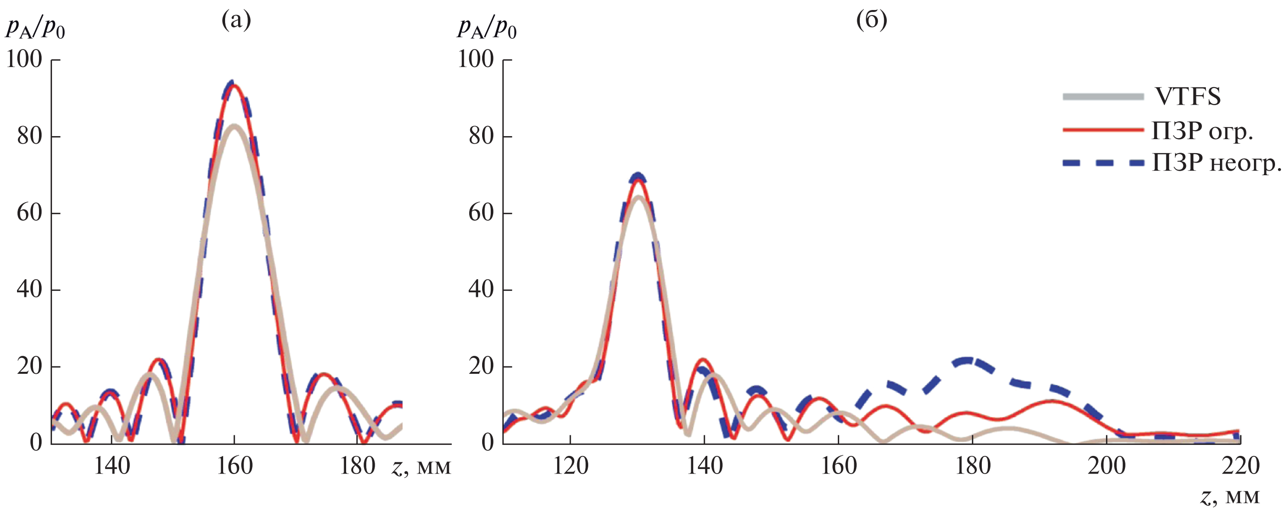


**Рис. 7.** Распределения амплитуды акустического давления $p_A$, нормированной на начальное давление $p_0$, вдоль оси симметрии решетки (оси $z$): (а) для случая фокусировки в центр кривизны и (б) для случая электронного смещения фокуса вдоль оси $z$ на 30 мм по направлению к поверхности решетки. Толстая сплошная линия соответствует VTFS-решетке, а тонкая сплошная и штриховая линии – абсолютно плотным решеткам с ограничением релаксации и без ограничения релаксации, соответственно.

введем следующий коэффициент: $\kappa = \bar{\Pi}_{эл}^2 / 4\pi\bar{\Sigma}_{эл}$, где $\bar{\Pi}_{эл}$ и $\bar{\Sigma}_{эл}$ – средние периметр и площадь элемента. Для круглого элемента, который является наиболее компактным по сравнению с элементами иной формы, $\bar{\Pi}_{эл}^2 = 4\pi\bar{\Sigma}_{эл}$, т.е. $\kappa = 1$. Вытянутые же элементы будут иметь значения $\kappa > 1$, и чем сильнее вытянут элемент, тем большее значение принимает параметр κ. Для VTFS-решетки, решетки без ограничения релаксации и решетки с ограничением релаксации величиной $S_0 = 8$ этот коэффициент имеет значения, соответственно, 1.173, 1.168 и 1.258.

Проведем далее сравнение полей, создаваемых данными тремя решетками. Вначале рассмотрим случай фокусировки в центр кривизны $F = 160$ мм, когда все элементы решеток работают синфазно. На рис. 7а представлены распределения амплитуды давления $p_A/p_0$ на оси решетки $z$, нормированные на начальное давление $p_0$ для VTFS-решетки (толстая сплошная линия) и двух абсолютно плотных решеток – решетки без ограничения релаксации (штриховая линия) и с ограничением релаксации (тонкая сплошная линия). Из распределений видно, что нормированная амплитуда давления в фокусе VTFS-решетки составляет $p_F/p_0 = 83$, тогда как у двух абсолютно плотных решеток она на 13% больше: $p_F/p_0 = 94$. Таким образом, абсолютно плотные решетки позволяют достичь на 28% большей интенсивности в фокусе, что согласуется с соотношением полезных площадей или количеством элементов решетки. Здесь мы пользуемся тем, что $I \sim p_A^2$, $I_F \sim \Sigma_{акт}^2$.

Для демонстрации степени случайности расположения элементов рассмотрим случай смещения фокуса к поверхности решеток вдоль оси пучка на 30 мм ($x_F = 0$ мм, $y_F = 0$ мм, $z_F = 130$ мм). На распределениях амплитуды (рис. 7б) можно наблюдать два побочных эффекта, связанных с дискретной структурой решеток. Амплитуда давления в фокусе уменьшается по сравнению со случаем без электронного смещения (снижение эффективности), а за фокусом образуется область побочных максимумов (снижение безопасности). В качестве количественной оценки амплитуды побочных максимумов будем рассматривать максимальную амплитуду $p_{поб}/p_F$ поля вне фокального максимума и первых двух дифракционных максимумов, прилежащих к нему (рис. 2б, контур ABCD). Как видно, амплитуда побочных максимумов для абсолютно плотной решетки с ограничением релаксации (рис. 7б, тонкая сплошная линия, $p_{поб}/p_0 = 11.7$) на 48% меньше, чем для решетки без ограничения релаксации (штриховая линия, $p_{поб}/p_0 = 22.4$). Полученные результаты подтверждают предположение о дополнительном нарушении упорядоченности расположения элементов при ограничении релаксации. VTFS-решетка (толстая сплошная линия) позволяет достичь еще более низкого уровня побочных максимумов, $p_{поб}/p_0 = 8.7$, однако при этом для нее амплитуда, $p_F/p_0 = 64$, в смещенном фокусе оказывается ниже, чем для двух абсолютно плотных решеток ($p_F/p_0 \approx 70$).

Результаты серии расчетов при электронном перемещении фокуса существующей и предложенной решеток в узлы некоторой сетки в плоскости оси решетки $zy$ ($x = 0$ мм) показаны на рис. 8. Для каждого положения фокуса анализировались уровни эффективности и безопасности облучения. Результаты представлены в виде контуров, ограничивающих области безопасного (интенсивность побочных максимумов не превышает 10% от интенсивности в фокусе, толстые линии) и эффективного (интенсивность в смещенном фокусе выше 50% от максимально достижимого значения, тонкие линии) перемещения фокуса в аксиальной плоскости $zy$. Штриховыми линиями обозначены контуры для VTFS-решетки, а сплошными линиями и линиями из точек – для абсолютно плотных решеток с ограничением и без ограничения релаксации, соответственно.

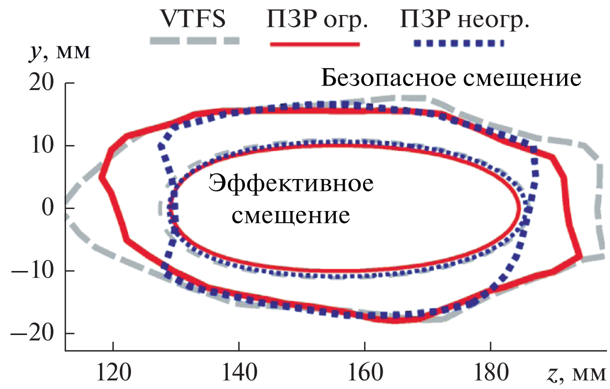


**Рис. 8.** Области электронного смещения фокуса в аксиальной плоскости $zy$, при фокусировке внутри которых облучение можно считать эффективным (тонкие линии) и безопасным (толстые линии). Штриховые линии соответствуют VTFS-решетке, сплошные линии и линии из точек – абсолютно плотным решеткам с ограничением релаксации и без ограничения релаксации, соответственно.

Видно, что область безопасного перемещения фокуса у VTFS-решетки (толстая штриховая линия) наиболее вытянута в продольном направлении с размером по оси $z$ около 87 мм. У абсолютно плотной решетки без ограничения релаксации (толстая линия из точек) она значительно уже и ее размер по оси $z$ составляет около 57 мм. Абсолютно плотная решетка с ограничением релаксации (толстая сплошная линия) имеет среднюю по размеру область длиной 76 мм. Различие решеток по длине областей безопасного перемещения фокуса объяснимо и подтверждает предположение о нарушении кольцевой структуры расположения элементов при переходе от неограниченной релаксации к ограниченной: уменьшение периодичности ведет к ослаблению побочных дифракционных максимумов, следовательно, размер области безопасного перемещения фокуса вдоль оси $z$ увеличивается. Отметим, что независимо от порога ограничения релаксации внешние элементы абсолютно плотной решетки всегда будут находиться на ее круглой границе и образовывать кольцо, поэтому решетка с ограничением релаксации имеет на 11 мм меньшую длину области безопасного перемещения фокуса, чем VTFS-решетка, которая по построению не содержит кольцевых структур. В поперечном направлении оси $y$ все три решетки имеют близкие размеры безопасной области поперечного перемещения фокуса около 35 мм шириной с локальными отклонениями до 2 мм.

Теперь рассмотрим области эффективного перемещения фокуса (тонкие линии на рис. 8), которые отличаются друг от друга не так значительно, как области безопасного перемещения фокуса. Так, у VTFS-решетки (тонкая штриховая линия) и абсолютно плотной решетки без ограничения релаксации (тонкая линия из точек) размеры области вдоль осей $z$ и $y$ составляют 58 × 22 мм и 56 × × 21 мм, соответственно. У абсолютно плотной решетки с ограничением релаксации размеры области эффективного перемещения фокуса вдоль осей $z$ и $y$ составляют 55.5 × 20 мм (тонкая сплошная линия), что на 1–2.5 мм меньше, чем у остальных решеток. Незначительную разницу в размерах областей сканирования для VTFS-решетки и абсолютно плотных решеток можно объяснить следующим образом: хотя сравниваемые решетки имеют одинаковую среднюю площадь элемента $\bar{\Sigma}_{эл}$, площади элементов VTFS-решетки отличаются друг от друга сильнее, чем площади элементов абсолютно плотных решеток (рис. 2). При этом по мере удаления от центра решетки элементы VTFS-решетки становятся меньше и, начиная со 110-го элемента, имеют меньшую площадь, чем элементы абсолютно плотной решетки. Таким образом, элементы на периферии VTFS-решетки оказываются меньше по размеру, а значит имеют более широкую диаграмму направленности, что обеспечивает чуть больший диапазон эффективного перемещения фокуса вдоль оси $z$. Таким образом, незначительный выигрыш в размерах области эффективной фокусировки у VTFS-решетки связан с неравенством площадей, которое само по себе является серьезной проблемой конструкции решетки. Абсолютно плотная решетка с ограничением релаксации имеет самый узкий размер области эффективного перемещения фокуса, поскольку ее элементы (рис. 5в) чуть более вытянуты, чем у двух других решеток. Это подтверждается величинами коэффициентов κ, описывающими степень вытянутости. Поэтому ширина диаграммы направленности у элементов решетки с ограничением релаксации будет чуть

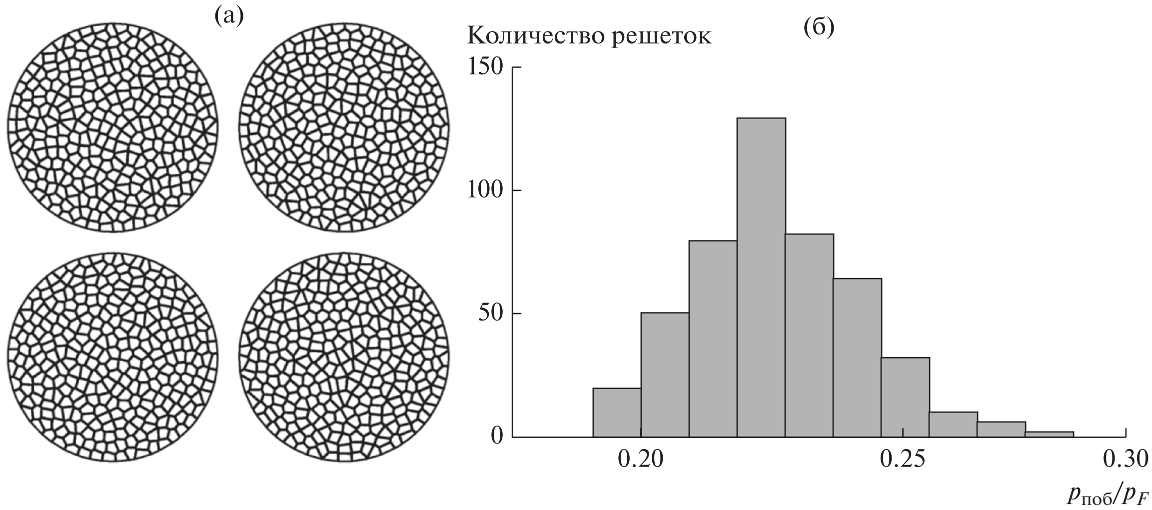


**Рис. 9.** (а) Примеры абсолютно плотных решеток с ограниченной релаксацией, которые имеют одинаковые параметры, но различную псевдослучайную реализацию расположения элементов. (б) Гистограмма распределения 500 таких решеток по амплитуде побочного максимума $p_{\text{поб}}$, нормированной на амплитуду давления в фокусе $p_F$, при смещении фокуса вдоль оси $z$ на 30 мм по направлению к поверхности решетки. Все решетки имеют одинаковые параметры: частота $f = 1.2$ МГц, радиус кривизны $F = 160$ мм, апертура $D = 160$ мм, зазор между элементами 0.5 мм, средняя площадь элемента 66 мм$^2$.

меньше, что и приводит к незначительному уменьшению размеров области эффективного перемещения фокуса.

Наконец, для каждой из решеток область безопасного и эффективного (т.е. “допустимого”) перемещения фокуса совпадает с областью эффективной фокусировки, и лишь у абсолютно плотной решетки без ограничения релаксации область безопасного перемещения фокуса пересекает область эффективного перемещения на 1 мм. Таким образом, при разработке решеток для практических целей существует достаточно широкий выбор границы релаксации $S_0$. Увеличивая $S_0 > 8$, можно подобрать такое его значение, чтобы степень скругленности элементов была оптимальной, т.е. чтобы область эффективной фокусировки была близка по размеру к максимально возможной, но оставалась при этом внутри области безопасной фокусировки.

Обсудим теперь надежность использования метода ограничения релаксации при различных реализациях случайного расположения элементов на поверхности. Действительно, в алгоритме создания модели абсолютно плотной решетки есть два источника случайности: набрасывание большого числа точек ($MN \sim 10^8$) на ее поверхность и их последующее деление на хаотически перемешанные облака точек (рис. 4а). Для примера, на рис. 9а представлены четыре решетки из проанализированного набора 500 решеток. Поскольку характер расположения элементов влияет на уровень побочных максимумов при электронном смещении фокуса, поля решеток сравнивались по степени их проявления. Как видно из рис. 8, проблемное место при появлении периодичности в расположении элементов находится на оси решетки, поскольку именно здесь область безопасного перемещения фокуса приближается к области эффективного (толстая и тонкая штрихпунктирная линия на рис. 8). Поэтому в качестве параметра сравнения рассматривался уровень побочных максимумов относительно нормированной амплитуды давления в фокусе $p_{\text{поб}}/p_F$ при перемещении фокуса в точку с координатами $x_F = 0$ мм, $y_F = 0$ мм, $z_F = 130$ мм, которая близка к границе области эффективного перемещения фокуса.

Распределение 500 решеток по параметру $p_{\text{поб}}/p_F$ показано на гистограмме, разделенной на 10 интервалов равной длины (рис. 9б). Высота каждого столбика соответствует количеству решеток, у которых параметр $p_{\text{поб}}/p_F$ попадает в заданный интервал. Видно, что распределение случайной величины $p_{\text{поб}}/p_F$ имеет характерный вид колокола. Уровень побочных максимумов $p_{\text{поб}}/p_F$ лежит в интервале $0.19 \le p_{\text{поб}}/p_F \le 0.29$, а наиболее часто встречающееся значение параметра, реализованное у 129 решеток из 500, — в интервале $0.22 \le p_{\text{поб}}/p_F \le 0.23$. Важно, что для всех решеток выполняется условие безопасности облучения. Тем не менее, при таком статистическом анализе возможен выбор наиболее удачной реализации решетки, показанной на рис. 5в, с минимальным значением параметра $p_{\text{поб}}/p_F$.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена модификация метода создания абсолютно плотных решеток со случайным расположением излучающих элементов, плотность заполнения которых составляет $\Psi = 100\%$ без учета технологических зазоров между элементами. Предложенная модификация позволяет уменьшить уровень побочных дифракционных максимумов, связанных с квазипериодичностью расположения элементов, одновременно сохраняя максимальную плотность заполнения решетки элементами. Проанализированы и продемонстрированы преимущества предложенного подхода по сравнению с существующими методами создания плотных решеток с нерегулярным расположением элементов.

Разработка алгоритма разбиения решеток выполнена при поддержке гранта РНФ № 19-12-00148, а анализ акустических полей решеток – при поддержке гранта РФФИ 19-02-00035, стипендии Президента РФ СП-2644.2018.4 и стипендии Фонда развития теоретической физики “Базис”.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гаврилов Л.Р.* Фокусированный ультразвук высокой интенсивности в медицине. М.: Фазис, 2013.
2. *Hynynen K., Jones R.M.* Image-guided ultrasound phased arrays are a disruptive technology for non-invasive therapy // Phys. Med. Biol. 2016. V. 61. P. 206–248.
3. *Kreider W., Yuldashev P.V., Sapozhnikov O.A., Farr N., Partanen A., Bailey M.R., Khokhlova V.A.* Characterization of a multi-element clinical HIFU system using acoustic holography and nonlinear modeling // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 2013. V. 60. P. 1683–1698.
4. *Khokhlova V.A., Yuldashev P.V., Rosnitskiy P.B., Maxwell A.D., Kreider W., Bailey M.R., Sapozhnikov O.A.* Design of HIFU transducers to generate specific nonlinear ultrasound fields // Phys. Procedia. 2016. V. 87. P. 132–138.
5. *Pinton G., Aubry J.-F., Fink M., Tanter M.* Effects of nonlinear ultrasound propagation on high intensity brain therapy // Medical Physics. 2011. V. 38. № 3. P. 1207–1216.
6. *Marsac L., Chauvet D., La Greca R., Boch A.-L., Chaumoitre K., Tanter M., Aubry J.-F.* Ex vivo optimisation of a heterogeneous speed of sound model of the human skull for non-invasive transcranial focused ultrasound at 1 MHz // Int. J. Hyperthermia. 2017. V. 33. № 6. P. 635–645.
7. *Thomas J.-L., Fink M.A.* Ultrasonic beam focusing through tissue inhomogeneities with a time reversal mirror: application to transskull therapy // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 1996. V. 3. P. 1122–1129.
8. *Rosnitskiy P.B., Sapozhnikov O.A., Grüll H., Khokhlova V.A.* New design of a fully populated random array for treating deep-seated tumors // Abstract Book of the 19th Int. Symp. of ISTU/5th European Symposium of EUFUS (June 13–15, 2019, Barcelona, Spain). ISTU. 2019.
9. *Cathignol D.* High intensity piezoelectric sources for medical applications: Technical aspects // Nonlinear Acoustics at the Beginning of the 21st Century (2002, Moscow, Russia). Moscow State Univ. 2002. P. 371–378.
10. *Bobkova S., Gavrilov L., Khokhlova V., Shaw A., Hand J.* Focusing of high-intensity ultrasound through the rib cage using a therapeutic random phased array // Ultrasound Med. Biol. 2010. V. 36. № 6. P. 888–906.
11. *Gavrilov L.R., Hand J.W.* A theoretical assessment of the relative performance of spherical phased arrays for ultrasound surgery and therapy // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Control. 2000. V. 41. № 1. P. 125–139.
12. *Hand J.W., Shaw A., Sadhoo N., Rajagopal S., Dickinson R.J., Gavrilov L.R.* A random phased array device for delivery of high intensity focused ultrasound // Phys. Med. Biol. 2009. V. 54. № 19. P. 5675–5693.
13. *Ильин С.А., Юлдашев П.В., Хохлова В.А., Гаврилов Л.Р., Росницкий П.Б., Сапожников О.А.* Применение аналитического метода для оценки качества акустических полей при электронном перемещении фокуса многоэлементных терапевтических решеток // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 1. С. 57–64.
14. *Raju B.I., Hall C.S., Seip R.* Ultrasound therapy transducers with space-filling non-periodic arrays // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Control. 2011. V. 58. № 5. P. 944–954.
15. *Ramaekers P., de Greef M., Berriet R., Moonen C.T.W., Ries M.* Evaluation of a novel therapeutic focused ultrasound transducer based on Fermat’s spiral // Phys. Med. Biol. 2017. V. 62. № 12. P. 5021–5045.
16. *Ramaekers P., Ries M., Moonen C.T.W., de Greef M.* Improved intercostal HIFU ablation using a phased array transducer based on Fermat’s spiral and Voronoi tesselation: A numerical evaluation // Medical Physics. 2017. V. 44. № 3. P. 1071–1088.
17. *Rosnitskiy P.B., Vysokanov B.A., Gavrilov L.R., Sapozhnikov O.A., Khokhlova V.A.* Method for designing multielement fully populated random phased arrays for ultrasound surgery applications // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Control. 2018. V. 65. № 4. P. 630–637.
18. *Goss S.A., Frizell L.A., Kouzmanoff J.T., Barich J.M., Yang J.M.* Sparse random ultrasound phased array for focal surgery // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Control. 1996. V. 43. № 6. P. 1111–1121.
19. *Balzer M., Schlömer T., Deussen O.* Capacity-constrained point distributions: A variant of Lloyd’s method // ACM Trans. on Graphics (Proc. of SIGGRAPH). 2009. V. 28. № 3. Article 86. P. 1–8.
20. *Гаврилов Л.Р., Сапожников О.А., Хохлова В.А.* Спиральное расположение элементов двумерных ультразвуковых терапевтических решеток как метод повышения интенсивности в фокусе // Известия РАН. Серия Физическая. 2015. Т. 79. № 10. С. 1386–1392.

АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2020, том 66, № 4, с. 377–390

## ФИЗИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

УДК 551.46

# ЭВОЛЮЦИЯ СТРУКТУРЫ АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ, ВЫЗВАННЫХ УДАРОМ ПАДАЮЩЕЙ КАПЛИ О ЖИДКОСТЬ

**© 2020 г. Ю. Д. Чашечкин[a], *, В. Е. Прохоров[a]**

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, просп. Вернадского 101, корп. 1, Москва, 119526 Россия*

**e-mail: chakin@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 10.12.2019 г.
После доработки 21.02.2020 г.
Принята к публикации 25.02.2020 г.

Согласованными высокоразрешающими оптическими и акустическими методами впервые синхронно зарегистрирована тонкая структура процессов, инициированных погружением свободно падающей капли воды в бассейн с дегазированной жидкостью. Основное внимание уделено анализу эволюции тонкой структуры картины течений, сопутствующих капиллярных волн и амплитудно-частотных характеристик звуковых пакетов. Последовательность акустических сигналов включает ударный импульс, возникающий при первичном контакте капли с поверхностью покоящейся принимающей жидкости, и серию последующих звуковых пакетов. Ударный импульс, который устойчиво воспроизводится в условиях данных экспериментов, имеет сложную структуру, включающую короткие интервалы высокочастотных осцилляций и более протяженные интервалы низкочастотных осцилляций. Число излучаемых звуковых пакетов и их параметры произвольно меняются от опыта к опыту при сохранении неизменными размера капли и высоты падения. В серии опытов выделены случаи одиночного и повторного излучения пакетов различного спектрального состава, а также полного их отсутствия. Анализ данных проведен с учетом влияния “двойного слоя”, заменяющего поверхность слияния жидкостей, в котором сохраняются возмущения, возникающие при преобразовании доступной потенциальной поверхностной энергии в другие формы – тепловую, возмущения давления и энергию тонких течений, активно воздействующих на газовые полости.

*Ключевые слова:* капля, энергия, течения, тонкая структуры, двойной слой, газовая полость, отрыв, резонанс, звуковой пакет, изменчивость излучения

**DOI:** 10.31857/S0320791920040012

## ВВЕДЕНИЕ

Актуальность изучения импакта свободно падающей капли – последовательности гидродинамических и акустических процессов, формирующихся в принимающей жидкости, устойчиво растет в последние годы в силу действия ряда факторов – фундаментальности темы, развития информационных технологий, способствующих совершенствованию аппаратуры, расширения числа практических приложений в механике окружающей среды и промышленности [1]. Систематическое фотографирование картины капельных течений началось в конце XIX века [2]. В двадцатые годы прошлого века стали регистрироваться сопутствующие звуковые сигналы. Измерения проводились вначале в воздушной [3], а с созданием гидрофонов – и в водной среде [4]. Совершенствование техники регистрации картин течений [5] и параметров акустических сигналов [6], развитие вычислительной техники и программирования позволяли повышать чувствительность, временное и пространственное разрешение измерительных систем, выделять все новые устойчиво воспроизводимые особенности протекающих процессов.

Доступность объекта исследований и необходимых для работы средств аудио и видео регистрации способствует расширению географии работ, которые традиционно проводятся в европейских [7, 8] и североамериканских [9] центрах, и все более активно – в Китае [10], Индии [11], Саудовской Аравии [12] и многих других странах.

Среди достижений последних лет следует отметить результаты детального изучения эволюции тонкой структуры картины распределения вещества капли в толще жидкости [13], структуры акустических сигналов при первичном контакте капель с жидкостью [14], капиллярных волн на венце [15] и на погружающейся капле [16], а также рекурренцию тонкой структуры – восстановление мелких неоднородностей картины свободной поверхности жидкости после сглаживания начальных возмущений на поверхности каверны и венца [17].

Высокоскоростная видеорегистрация картины течения, синхронизованная с регистрацией акустических сигналов, впервые позволила проследить процесс возбуждения осцилляций оторвавшейся газовой полости неправильной формы [18]. Колебания, возбуждаемые быстрым втягиванием конического остатка разорвавшейся перемычки, поддерживаются освобождением доступной потенциальной энергии в результате сокращения площади поверхности газовой полости неправильной формы при ее трансформации в сфероидальный газовый пузырь [18]. Широкий диапазон изменчивости частотных характеристик основного звукового пакета отмечен в [19] (параметры первичного ударного импульса не приводились). Условия образования больших газовых пузырей, генерирующих звуки низкой частоты, которые иногда сопровождаются группами мелких газовых пузырьков, изучены в [20].

Проведенные опыты показывают, что общая гидродинамическая картина течений и ее тонкие детали [1, 11, 15, 17], а также число и форма звучащих газовых полостей, зависящие от параметров эксперимента [1, 6, 9, 18], характеризуются значительной изменчивостью при сохранении неизменными условий опытов. В этой связи научный и практический интерес представляет согласованное детальное изучение картины течений и структуры акустического сигнала, что и является целью данной работы.

## ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

В течениях, сопровождающихся медленным изменением площади или быстрым уничтожением части свободной поверхности, в качестве одного из основных физических параметров среды используется потенциал Гиббса $G$ (свободная энтальпия)

$$dG = -sdT + VdP - S_b d\sigma + \mu_i dS_i, \qquad (1)$$

производные которого явно определяют энтропию $s = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{P,\sigma,S_i}$, плотность среды $\rho = \frac{1}{V} = \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)^{-1}_{T,\sigma,S_i}$, химический потенциал $\mu_i = \left(\frac{\partial G}{\partial S_i}\right)_{T,P,\sigma}$ раствора веществ с концентрацией $S_i$ $i$-ой компоненты, а также все другие термодинамические величины – косвенно [21, 22]. Здесь $T$ – температура, $P$ – давление, $S_b$ – площадь контактной поверхности границы раздела фаз, $\sigma$ – коэффициент поверхностного натяжения. Значения термодинамических величин характеризуют состав и физические свойства взаимодействующих сред.

Термодинамические потенциалы в неоднородной жидкости со свободной поверхностью распределены неравномерно. Экспериментальными методами (оптической и рентгеновской рефлектометрии, атомно-силовой микроскопии) установлено, что плотности, диэлектрические проницаемости, дипольные моменты в толще жидкости и в структурно выделенном приповерхностном слое толщиной порядка размера молекулярного кластера (~ $10^{-6}$ см) заметно отличаются [23, 24]. Анизотропия атомно-молекулярных взаимодействий в областях с большими градиентами термодинамических величин (в частности, на концентрационных прослойках и около свободной поверхности) приводит к формированию доступной потенциальной поверхностной энергии и химической энергии, которые могут трансформироваться в другие формы – тепловую, энергию механического течения жидкости, совершать работу по созданию новой свободной поверхности. Обмен энергией в жидкости происходит с несколькими скоростями – достаточно медленно в диссипативных (диффузионных) процессах; более быстро – в вынужденных течениях со скоростью $U$; с собственными групповыми скоростями $c_g$ при распространении волн [25] и наиболее быстро при прямом проявлении действия атомно-молекулярных процессов.

Течения жидкостей описываются системой уравнений переноса вещества, плотности, импульса и полной энергии – аналогов законов сохранения для замкнутых систем [25, 26] с физически обоснованными граничными условиями на контактных поверхностях, которые здесь для краткости не приводятся. В число основных параметров задачи входят плотность $\rho$, коэффициенты поверхностного натяжения $\sigma$ и кинематической вязкости $\nu$ воды, ускорение свободного падения $g$, диаметр $D$, площадь поверхности $S_D$, объем $V_D$ и скорость капли в момент контакта $U$. Кинетическая энергии капли $E_k = \rho V_D U^2/2$ для условий экспериментов ($0.2 < D < 0.7$ см; $100 < U < 500$ см/с) $21 < E_k < 22450$ эрг, существенно больше поверхностной энергии $E_s = \sigma S_D$: $9 < E_s < 112$ эрг. Однако плотность кинетической энергии $W_k = \rho U^2/2$, которая в данном случае $5\times10^2 < W_k < 1.25\times10^5$ эрг/см$^3$, существенно меньше, чем плотность поверхностной энергии $W_s = \sigma/\delta_s \sim 7\times10^7$ эрг/см$^3$, заключенной в слое толщиной $\delta_s \sim 10^{-6}$ см – порядка размера молекулярного кластера [23].

Поскольку величина передаваемой энергии пропорциональна массе слившейся части капли, на начальном этапе импакта основную роль играет процесс освобождения доступной потенциальной энергии, передаваемая доля которой здесь существенно превышает величину перешедшей кинетической энергии. При уничтожении свободной поверхности потенциальная энергия достаточно быстро (собственное время $\tau \sim 10^{-10}$ с) преобразуется в другие формы — возмущения давления, температуры и механического движения, которые оказываются сосредоточенными в тонком двойном слое, заменяющем исчезнувшие свободные поверхности. Толщина двойного слоя, которая при его формировании имеет масштаб порядка размера молекулярного кластера, далее растет за счет молекулярной теплопроводности и диффузии импульса, а позднее, по мере эволюции процесса — за счет перемещения мелкомасштабных компонентов течений.

С высоким рангом системы фундаментальных уравнений для слабо диссипативных сред связано существование лигаментов — тонких волокон и оболочек — компонентов периодических и нестационарных течений (классификация приведена в [26]). Отличительные свойства лигаментов — малая толщина $\delta$, значение которой определяется кинетическими коэффициентами и временем формирования $\Delta t$ или частотой волны (масштаб в поле скорости $\delta^{\nu}_{\Delta T} = \sqrt{\nu\Delta t}$, $\delta^{\nu}_{\omega} = \sqrt{\nu/\omega}$, $\omega$ — частота), и большая протяженность, которая определяется длительностью процесса [26, 27]. Они проявляются во всех нестационарных процессах, и, как только их размеры превосходят пределы пространственного разрешения инструментов, а уровень возмущения — порог чувствительности, регистрируются как тонкая структура среды.

Набор характерных масштабов процесса включает диаметр капли $D$, капиллярно-гравитационный масштаб $\delta^{\gamma}_{g} = \sqrt{\gamma/g}$ (входящий в дисперсионное уравнение коротких поверхностных волн [28]) и диссипативно-капиллярные масштабы $\delta^{\nu}_{\gamma} = \nu^2/\gamma$, $\delta^{\kappa}_{\gamma} = \kappa^2/\gamma$, $\gamma = \sigma/\rho$. Здесь $\kappa$ — коэффициент температуропроводности жидкости, $\gamma$ — нормированный на плотность коэффициент поверхностного натяжения. Поперечные размеры лигаментов, зависящие от скорости капли $U$, равны — диссипативный $\delta^{\nu}_{U} = \nu/U$ и капиллярный $\delta^{\gamma}_{U} = \gamma/U^2$.

Соответственно, одна группа собственных временны́х масштабов включает только параметры среды — $\tau^{\gamma}_{g} = \sqrt[4]{\gamma/g^3}$, $\tau^{\kappa}_{\gamma} = \kappa^3/\gamma^2$, $\tau^{\nu}_{\gamma} = \nu^3/\gamma^2$, другая — размер капли — $\tau^{d}_{\gamma} = \sqrt{D^3/\gamma}$, $\tau^{\gamma}_{\kappa} = \kappa D/\gamma$, $\tau^{\gamma}_{\nu} = \nu D/\gamma$, третья — ее скорость — $\tau^{d}_{U} = D/U$, $\tau^{U}_{g} = U/g$. Значения масштабов определяют требования к метрологическим характеристикам измерительных инструментов — размерам области регистрации, пространственному и временному разрешению.

Отношения однородных масштабов определяют традиционные безразмерные комбинации — числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = D/\delta^{\nu}_{U} = UD/\nu$, Фруда $\mathrm{Fr} = \delta^{U}_{g}/D = U^2/gD$, $\mathrm{We} = D/\delta^{\gamma}_{U} = U^2D/\gamma$, Бонда $\mathrm{Bo} = D^2/\delta^{\gamma}_{g} = gD^2/\gamma$, Онезорге $\mathrm{Oh} = \sqrt{\delta^{\nu}_{\gamma}/D} = \nu/\sqrt{\gamma D}$, которые используются при описании течений.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Опыты выполнены на стенде ЭСП, входящем в Уникальную исследовательскую установку "ГФК ИПМех РАН" [29]. Основные элементы стенда — бассейн с оптическими стеклами, осветитель — многоэлементный светодиодный прожектор с эквивалентным световым потоком 1000 лм, видеокамера "Optronis CR3000x2" (скорость видеосъемки до 20000 к/с, размер ПЗС матрицы в пикселях 256 × 256), гидрофон ГИ54 (ширина полосы 0.002–100 кГц, неравномерность 3 дБ, сквозная чувствительность 30 мВ/Па), многоканальный высокоскоростной интерфейс сбора данных (частота дискретизации до 5 МГц, разрядность 12 бит). Изучались возмущения, сопровождающие погружение свободно падающей капли воды (диаметр $0.4 < D < 0.6$ см) в бассейн с покоящейся дегазированной водой. Методика эксперимента детально изложена в [6, 18]. Обработка данных с единичными сигналами проводилась с учетом методики [30].

В данных опытах особенно тщательно проводилась установка осветителей, обеспечивающих наблюдение тонких возмущений свободной прозрачной жидкости — дегазированной воды. С большим различием значений коэффициента оптического преломления сред (для воздуха $n_a = 1.00027$, для воды $n_w \approx 1.33$) связаны эффекты полного внутреннего отражения, затрудняющие наблюдение тонких деталей оптических изображений течений. Как показывает анализ публикаций по теме, гладкие изображения свободной поверхности в капельных течениях [1, 2, 8, 11] существенно отличаются от ее реальной геометрии (в частности, во многих работах не идентифицировались капиллярные волны на венце и падающей капле, а также тонкая структура вершины всплеска, визуализированные в [15–17]).

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Эволюцию картины возмущений свободной поверхности, вызванных погружением капли ($D = 0.6$ см, $U = 3.7$ м/с), иллюстрирует выборка из видеозаписей (рис. 1, темное пятно в правом ниж-

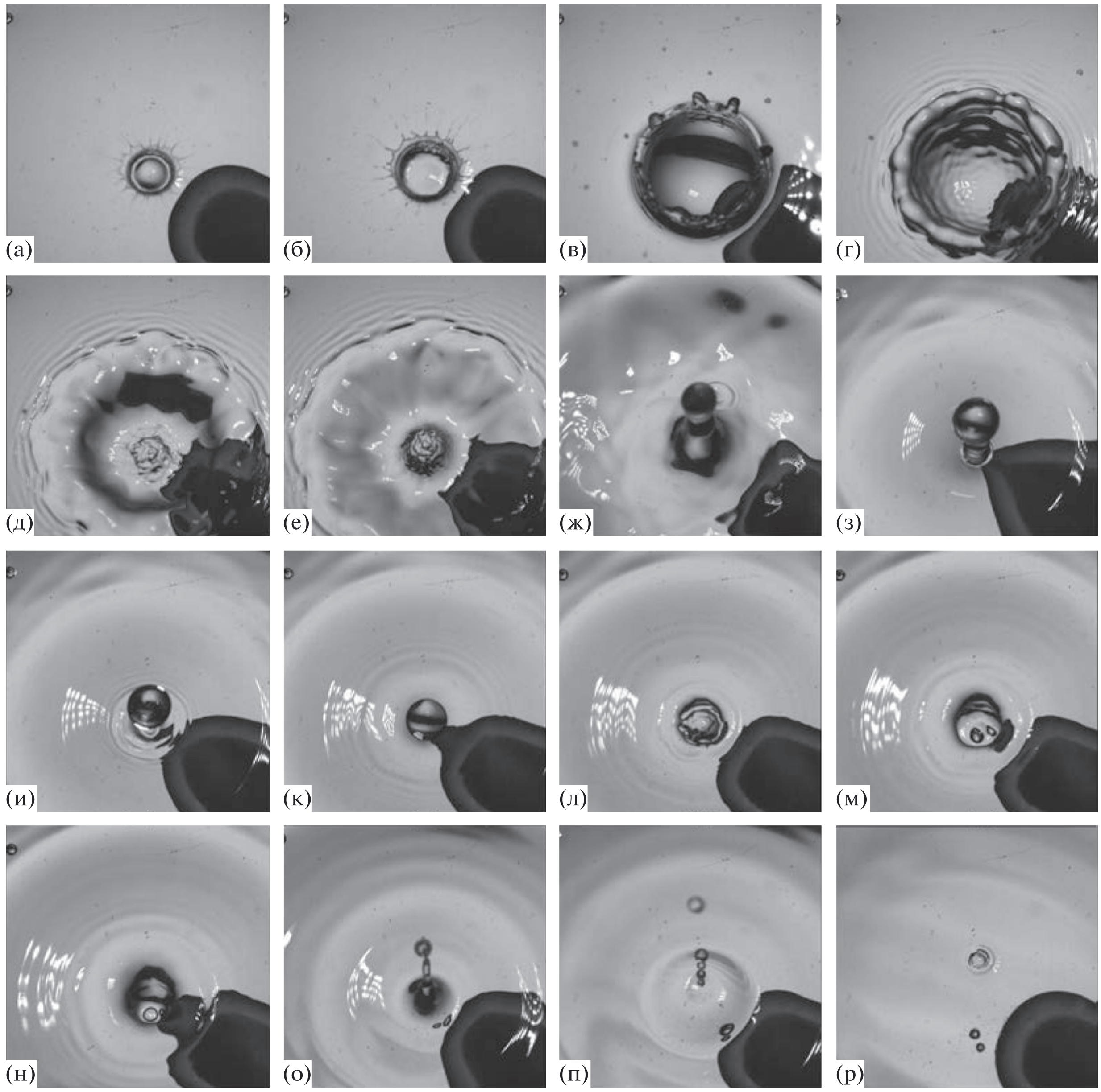


**Рис. 1.** Картины течения при соударении капли с поверхностью. Время, (а)–(р): $t$ = 0.75, 1.75, 19.3, 37.0, 47.5, 53.75, 99.75, 159, 169.5, 180.7, 188.5, 196.5, 214.0, 242.5, 270.45, 421.0 мс. $D$ = 0.6 см, $U$ = 3.7 м/с, We = 1125, Re = 22200, Fr = 233, Oh = 0.0015, Bo = 4.8.

нем углу – изображение гидрофона). Центральную часть в картине возмущений при $t$ = 0.8 мс (рис. 1а) занимает остаток погружающейся капли, линия контакта которой с принимающей жидкостью отошла от стенок растущего венца. Окружающая каплю светлая полоса – дно каверны, наружное темное кольцо – венец, с вершины которого сходит тонкая пелена ("ejecta" в англоязычной литературе [5]). Изрезанная внешняя кромка пелены заканчивается острыми тонкими струйками – спайками, с вершин которых последовательно вылетают все более крупные капельки. Спайки являются продолжениями тонких струек, которые формируются в двойном слое на дне каверны, где уничтожается свободная поверхность и капли, и принимающей жидкости. Струйки проявляются в картинах распределения коэффициента преломления при слиянии капель воды с раствором поваренной соли [31] и вещества окрашенных капель в чистой воде [32].

К моменту $t$ = 1.7 мс, когда капля полностью погрузилась, на стенках венца начинают появляться складки, пелена становится короче, а ее кромка и спайки утолщаются (рис. 1б). Соответственно, увеличился и диаметр капелек, вылетающих с вершин спайков.

Светлые пятна в правой нижней части на тени от гидрофона – каустики – зеркальные отражения отдельных элементов осветителя от наклонных поверхностей гребней и впадин коротких капиллярных волн. Сопоставление изображений на рис. 1б–1г, $t = 1.7$, 19.5, 37.0 мс соответственно, показывает, что число и размеры пятен, области их локализации определяются количеством, длиной, амплитудой и скоростью распространения волн. Длины коротких волн, окружающих венец и бегущих по невозмущенной поверхности жидкости, лежат в диапазоне $0.5 < \lambda_c < 2$ мм.

Постепенно собственные системы трехмерных капиллярных волн покрывают стенки венца и дно каверны (рис. 1г, $t = 37.0$ мс). Амплитуды волн на внутренней поверхности венца максимальны у его кромки и уменьшаются к центру дна каверны. Искаженное изображение гидрофона указывает на высокую крутизну волновых возмущений.

Со временем размеры каверны и толщина расплывающегося венца увеличиваются, на дне и стенках появляются крупномасштабные возмущения – относительно гладкие гребни и заостренные впадины. При этом существенно меняется форма дна каверны – центр впадины сменяется оголовком растущего всплеска.

В фазе формирования вершина всплеска вновь покрывается спайками – здесь “шипами” со скругленными оголовками, разделенными тонкими впадинами [17]. Резкое изменение структуры свободной поверхности связано с выходом “двойного слоя”, заменившего поверхность слияния жидкостей, в котором за счет преобразования доступной потенциальной энергии создаются микромасштабные возмущения (рис. 1д, $t = 47.5$ мс). Размеры спайков увеличиваются с ростом высоты всплеска (рис. 1е, $t = 53.8$ мс).

Когда на вершине струйки формируется капля, вся поверхность жидкости выглаживается, за исключением линии отрыва капли, в окрестности которой образуется группа коротких капиллярных волн (рис. 1ж, $t = 99.8$ мс). Одновременно капиллярные волны начинают формироваться на дне остатка каверны вокруг конического пьедестала всплеска. Со временем всплеск, боковая поверхность которого покрывается короткими капиллярными волнами, начинает погружаться и формирует новую каверну. Система световых пятен визуализирует еще одну отошедшую группу коротких капиллярных волн (рис. 1з, $t = 159$ мс).

Погружающийся всплеск, от которого отделилась капля, формирует коническую каверну, окруженную несколькими группами коротких капиллярных волн (рис. 1и, $t = 169.5$ мс). Падающая капля накрывает взволнованную поверхность и одновременно формирует из остатков воздушной прослойки во впадинах волн несколько достаточно крупных газовых пузырьков, один из которых виден у ее нижнего полюса (рис. 1к, $t = 180.7$ мс). Кромка полностью погрузившейся капли и стенки окружающей ее каверны сильно деформированы; на них видны газовые полости неправильной формы. Область течения покрыта несколькими группами капиллярных волн (рис. 1л, $t = 188.5$ мс).

Постепенно по мере заполнения каверны мелкомасштабные возмущения сглаживаются. При этом в центре течения визуализируются две газовые полости (рис. 1м, $t = 196.5$ мс). В картине течения образуется кольцевая выглаженная поверхность, диаметр которой, в соответствии с дисперсионным соотношением [28], определяется минимально возможной скоростью $c_{\min} = (4g\gamma)^{1/4} = 23$ см/с гравитационно-капиллярных волн, длина и частота которых $\lambda_{\min} = 2\pi/k_{\min} = 1.72$ см и $f_{\min} = (4g^3)^{1/4}/(2\pi) = 13.48$ Гц, где $k_{\min} = \sqrt{g/\gamma}$. В ее центре располагается остаток впадины с двумя газовыми полостями в центре (рис. 1н, $t = 214$ мс).

Схлопывание конической каверны сопровождается выбросом еще одной тонкой струйки – стримера, с вершины которого вылетает очередная капелька. На периферии течения располагается новая группа коротких капиллярных волн. При этом газовые пузырьки вытесняются за кромку конического основания струйки (рис. 1о, $t = 242.5$ мс).

Теряющий инерцию движения стример распадается на систему мелких капелек, падающих обратно в центр течения. Тонкие струйки (лигаменты) перемещают, сближают и разделяют приповерхностные газовые пузырьки (рис. 1п, $t = 270.5$ мс). При слиянии отделившейся капли с остатком узкой каверны образуется несколько газовых пузырьков (рис. 1р, $t = 421$ мс)

Анализ картины течения показывает важную роль тонкоструктурных компонентов (коротких капиллярных волн, стримера, спайков, внутренних тонких струек – лигаментов) в формировании и перемещении газовых пузырьков, деформация и разрывы которых были обнаружены ранее [32].

В записи акустических сигналов, представленной на рис. 2б, выполненной синхронно с видеорегистрацией, выборки из которой приведены на рис. 1, четко выделен первичный импульс I при $t = 0$, от которого ведется отсчет времени, как и в описании оптических изображений, где время отсчитывается от момента первичного контакта капли с поверхностью. Далее возникают короткий высокочастотный импульс II ($t = 157.2$ мс),

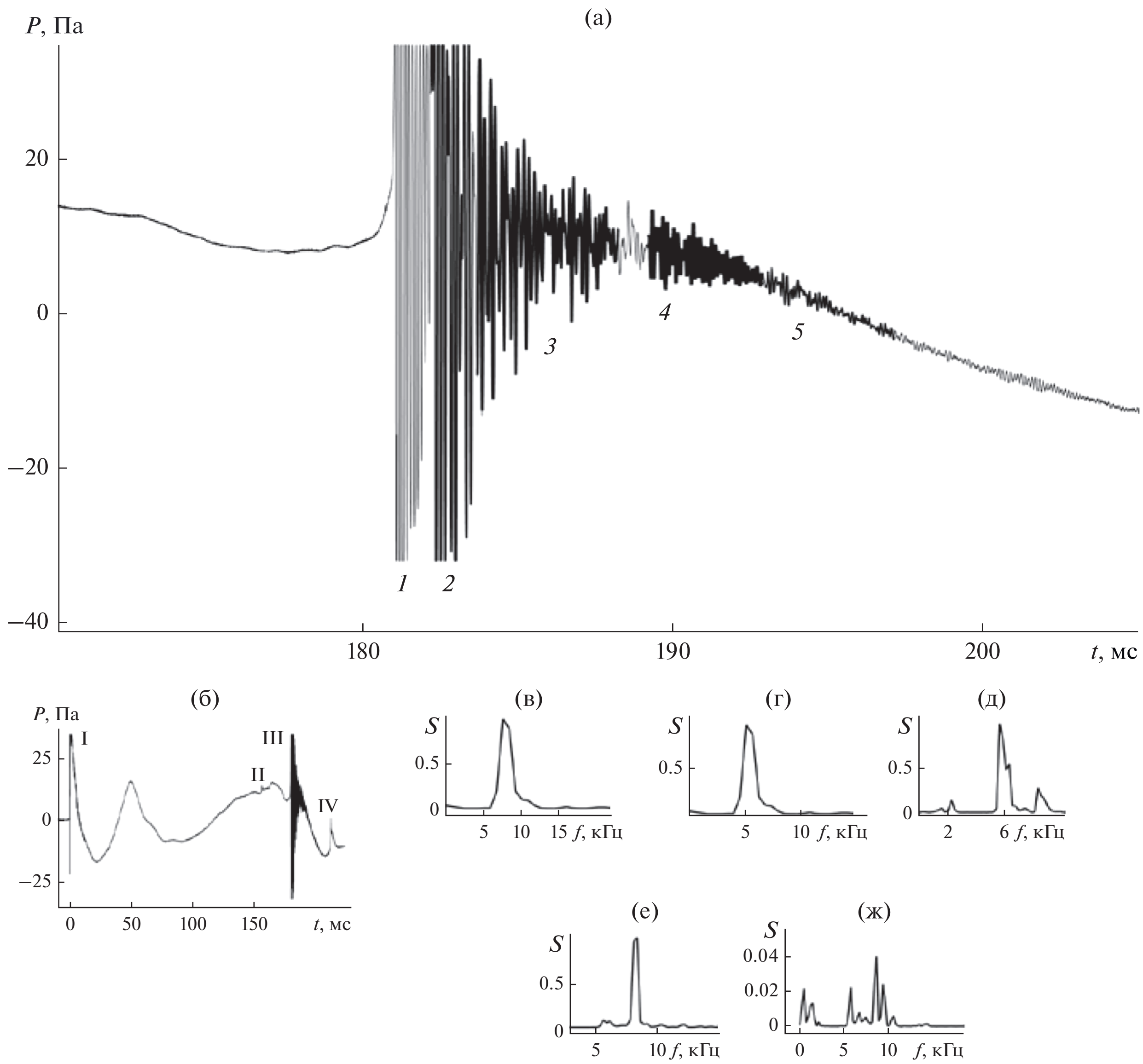


**Рис. 2.** (а) – Вариации давления в резонансном звуковом пакете и спектральные плотности его участков при ударе капли о поверхность. (б) – Полная фонограмма сигнала. Спектры сигнала на интервалах, мс: (в) – 181.1–182.1, (г) – 182.1–183.6, (д) – 183.7–188.2, (е) – 189.3–192.9, (ж) – 193.0–197.1. $D = 0.6$ см, $U = 3.7$ м/с, We = 1125, Re = 22200, Fr = 233, Oh = 0.0015, Bo = 4.8.

основной звуковой пакет III ($t = 180.1$ мс) и запаздывающий импульс IV ($t = 213.8$ мс). Структура высокочастотных сигналов I, II и IV не анализировалась, поскольку их спектр лежит за пределами верхней граничной частоты гидрофона.

Локальные минимумы на развернутом графике основного пакета (рис. 2а, $t = 181.2$ мс) разделяют 5 участков, каждый из которых характеризуется индивидуальными признаками – амплитудой, спектральным составом и длительностью звучания $\Delta t$. На начальном участке *1* ($\Delta t = 1$ мс) спектр имеет единственный максимум на частоте $f = 7.6$ кГц (рис. 2в). Амплитуда сигнала быстро спадает. Диаметр излучающего пузырька ($d_b = 0.85$ мм) соответствует частоте $f_0$ согласно известной формуле $f_0 = \frac{1}{\pi d_b}\sqrt{\frac{3\gamma_a P_0}{\rho}}$, где $\gamma_a$ – показатель адиабаты воздуха, $P_0$ – давление, равное в данном случае атмосферному [34].

В течение короткого времени происходит перестройка сигнала. На участке *2* сигнал, начинающийся с быстрого роста, плавно спадает за время $\Delta t = 1.5$ мс. Одновременно меняется его структура: частота основного максимума уменьшилась до $f = 6.1$ кГц, появился второй максимум на $f = 8.1$ кГц (рис. 2г). Эквивалентные диаметры излучающих пузырьков здесь составляют $d_b = 1.07$ и 0.81 мм.

Третий интервал звучания, который начинается при $t = 183.7$ мс, еще более продолжительный ($\Delta t = 4.5$ мс). В его спектре наблюдаются три пика – низкочастотный $f = 2.2$ кГц ($d_b = 3.0$ мм), промежуточный $f = 5.5$ кГц ($d_b = 1.18$ мм) и высокочастотный $f = 8.2$ кГц ($d_b = 0.8$ мм). После переходного интервала при $t = 183.9$ мс начинается четвертый участок, вновь содержащий практически одночастотный ($f = 8.5$ кГц, $d_b = 0.77$ мм) сигнал продолжительностью $\Delta t = 3.1$ мс. При $t = 193$ мс он быстро сменяется сложным многочастотным сигналом с выраженными спектральными пиками при $f = 0.5$, 1.4, 5.8, 8.7 и 9.4 кГц ($d_b = 13.5$, 4.5, 1.13, 0.75 и 0.7 мм). В дальнейшем регистрируются затухающие чередующиеся пакеты, разделенные зонами замирания. Быстрая перестройка амплитудно-частотных характеристик акустического сигнала указывает, что их природа обусловлена сильным влиянием тонких компонентов течения на источники звука.

В последующих опытах одновременно со звуковым пакетом регистрировалась картина возмущений в толще жидкости. Анализ видеокадров течения при $D = 0.6$ см, $U = 3.1$ м/с (рис. 3) показывает, что в двойном слое на дне каверны сформировалось два типа возмущений – капиллярные волны и короткие поперечные вихри с пологими впадинами и острыми гребнями (рис. 3б), которые придали дну и стенке каверны изрезанную форму. Положение, форма и размеры выступов и впадин быстро меняются в данной фазе процесса при $t = 37.5$ мс. В таких мелкомасштабных возмущениях могут возникать замкнутые газовые полости, которые отделяются тонкими течениями от стенок каверны. Вследствие общей симметрии течения выделенной точкой является центр дна каверны, в окрестности которого ранее были отмечены прогибы на фоне мелких вихрей [15, 19, 32].

В анализируемом течении на дне каверны появляются глубокие впадины угловатой формы (рис. 3в), одна из которых отсекается внутренними течениями и образует замкнутую газовую полость сложной формы (рис. 3г). Одна из возможных причин формирования течений – распад “двойного слоя” и последующая эволюция окрестности поверхности слияния принимающей жидкости и капли, в которой сохраняется быстро преобразованная в другие формы доступная потенциальная энергия ранее свободных поверхностей. Вследствие быстрого выделения энергия оказывается сосредоточенной в малом объеме, что обеспечивает высокую скорость микротечений, деформирующих газовые полости. Различие плотностей воздуха и жидкости обеспечивает преимущественно горизонтальное направление приповерхностных течений, источник которых – флуктуации давления – имеет скалярную природу.

Некоторое время форма отсеченной полости продолжает усложняться, на ней появляются отростки (рис. 3д). По окончании фазы активной эволюции контур начинает сглаживаться (рис. 3е), и в конечном итоге полость принимает сфероидальную форму (рис. 3ж).

В синхронной фонограмме звукового пакета (рис. 3) выражены ударный импульс I, короткий видеоимпульс II ($t = 48.7$ мс) и основной звуковой пакет III, начинающийся при $t = 166.6$ мс. Развертка ударного импульса (рис. 3з) иллюстрирует сложный характер первичного возмущения, в котором выражена высокочастотная составляющая и монотонно затухающая гармоника 5.75 кГц ($d_b = 1.13$ мм). В спектре начального участка (рис. 3и) выражены два пика – высокочастотный ($f = 66.3$ кГц) и с меньшей частотой $f = 30.1$ кГц (эффективные диаметры резонирующих газовых полостей, соответственно, $d_b = 0.22$ и 0.1 мм). На спадающем участке основного сигнала располагаются затухающие осцилляции с основной частотой 5.8 кГц (спектр на рис. 3к), соответствующей значению $d_b = 1.1$ мм.

На максимуме гидродинамического давления ($t = 48.7$ мс) в основном сигнале наблюдается короткий видеоимпульс II, вызванный спонтанным излучением неразличимого микропузырька.

В данном эксперименте излучение основного звукового пакета III, которое начинает регистрироваться одновременно с отрывом газовой полости неправильной формы от центра дна каверны (рис. 3г) при $t = 166.6$ мс, продолжается более 20 мс. Формированию высокочастотного сигнала предшествуют низкочастотные вариации фонового сигнала гидродинамической природы. Здесь основной пакет III – одночастотный (спектр на рис. 3м, $f = 2.8$ кГц, $d_b = 2.3$ мм), в отличие от случая, приведенного на рис. 2. Развертка сигнала III показана на рис. 3и, а спектр – на рис. 3л. Сигнал имеет признаки модуляции $m = \dfrac{A_m - \langle A \rangle}{\langle A \rangle}$ ($A_m$ – амплитуда в локальных максимумах пакета, $\langle A \rangle$ – осредненная (монотонная) огибающая), глубина которой составляет 10% в начале сигнала и 80% в конце. Нестационарный характер излучения звука указывает на сильную связь акустических и гидродинамических процессов на мелких масштабах порядка размера пузырька.

Изменчивость формы и рельефа излучающей газовой полости видны на рис. 3в–3е. В начальной фазе отрыва на дне полости наблюдается мелкий отросток (рис. 3в), который быстро растет со временем (рис. 3д, 3е). В конечном итоге полость принимает сфероидальную форму, диаметр

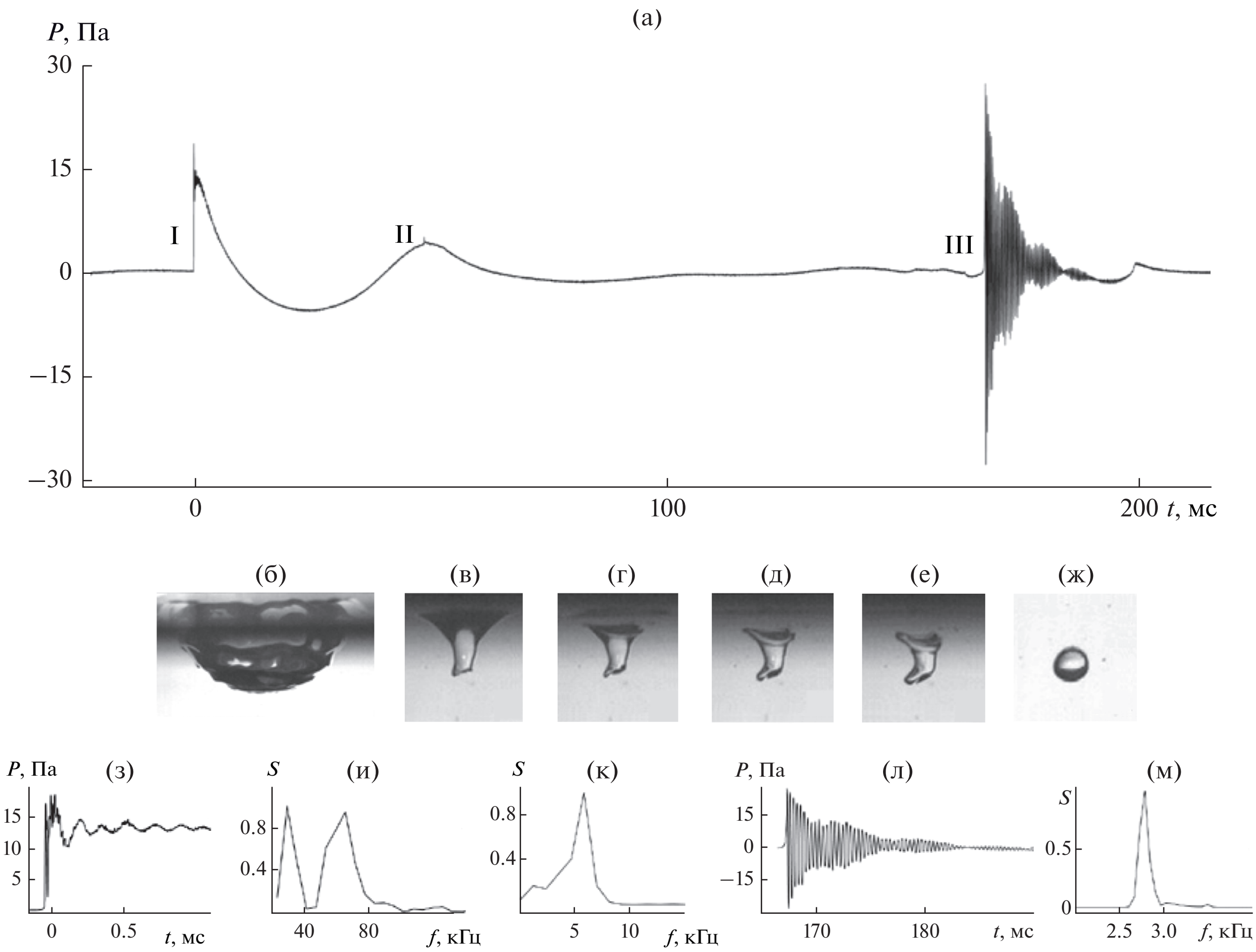


**Рис. 3.** (а) – Временная зависимость акустического давления с синхронными видеокадрами отрыва газовой полости. (б) – Каверна при $t$ = 37.5 мс, деление 5 мм, (в)–(ж) – отрывающаяся газовая полость при $t$ = 167.2, 167.7, 168.2, 168.7, 240.2 мс, деление 2 мм; (з), (и), (к) – растянутые ударный импульс и его спектры, (л) и (м) – основной пакет и его спектр. $D$ = 0.5 см, $U$ = 3.2 м/с, We = 701, Re = 16000, Fr = 209, Oh = 0.0017, Bo = 3.4.

которой на оптическом изображении (рис. 3ж) совпадает с определенным по методике [34].

С ростом скорости соударения капли $U$ картина течения усложняется, и тонкие детали структуры течения, сопутствующие излучению, становятся более выраженными. При сохранении общего характера процесса тонкие особенности течений и сопутствующие акустические сигналы показывают большую изменчивость.

В фонограмме на рис. 4 также наблюдаются три сигнала – ударный импульс I, резонансные пакеты II и III. В развертке ударного импульса I (рис. 4к) выражен фронт и последующие осцилляции на частотах $f$ = 4.3 и 5.9 кГц ($d_b$ = 1.5 и 1.1 мм, спектр на рис. 4л). Основной резонансный пакет II, развертка которого представлена на рис. 4м, также модулирован, причем максимум амплитуды наблюдается не в начальный момент, а с некоторым запаздыванием. В спектре сигнала выражена частота $f$ = 4.6 кГц ($d_b$ = 1.4 мм) и более высокочастотные боковые лепестки. После нескольких циклов спада и подъема сигнал II затухает. С паузой 35 мс возникает короткий пакет III (развертка на рис. 4о) с основной частотой $f$ = 44.3 кГц ($d_b$ = 0.15 мм, спектр на рис. 4п) на порядок превышающей частоту сигнала II.

Структурные особенности картины течения иллюстрируют выборки из видеограмм, соответствующие временам появления акустических сигналов. Резонансное излучение начинается в момент отделения газовой полости от дна растущей каверны ($t$ = 162.7 мс, рис. 4б). Газовая полость располагается на дне конической каверны ($t$ = 166 мс, рис. 4в). При $t$ = 166.2 мс (рис. 4г) звук все еще излучается, хотя газовая полость на коническом дне каверны практически исчезла из поля зрения и длительное время остается затененной остатком каверны ($t$ = 167.2 мс, рис. 4д). Одновременно справа от каверны появляется новый пу-

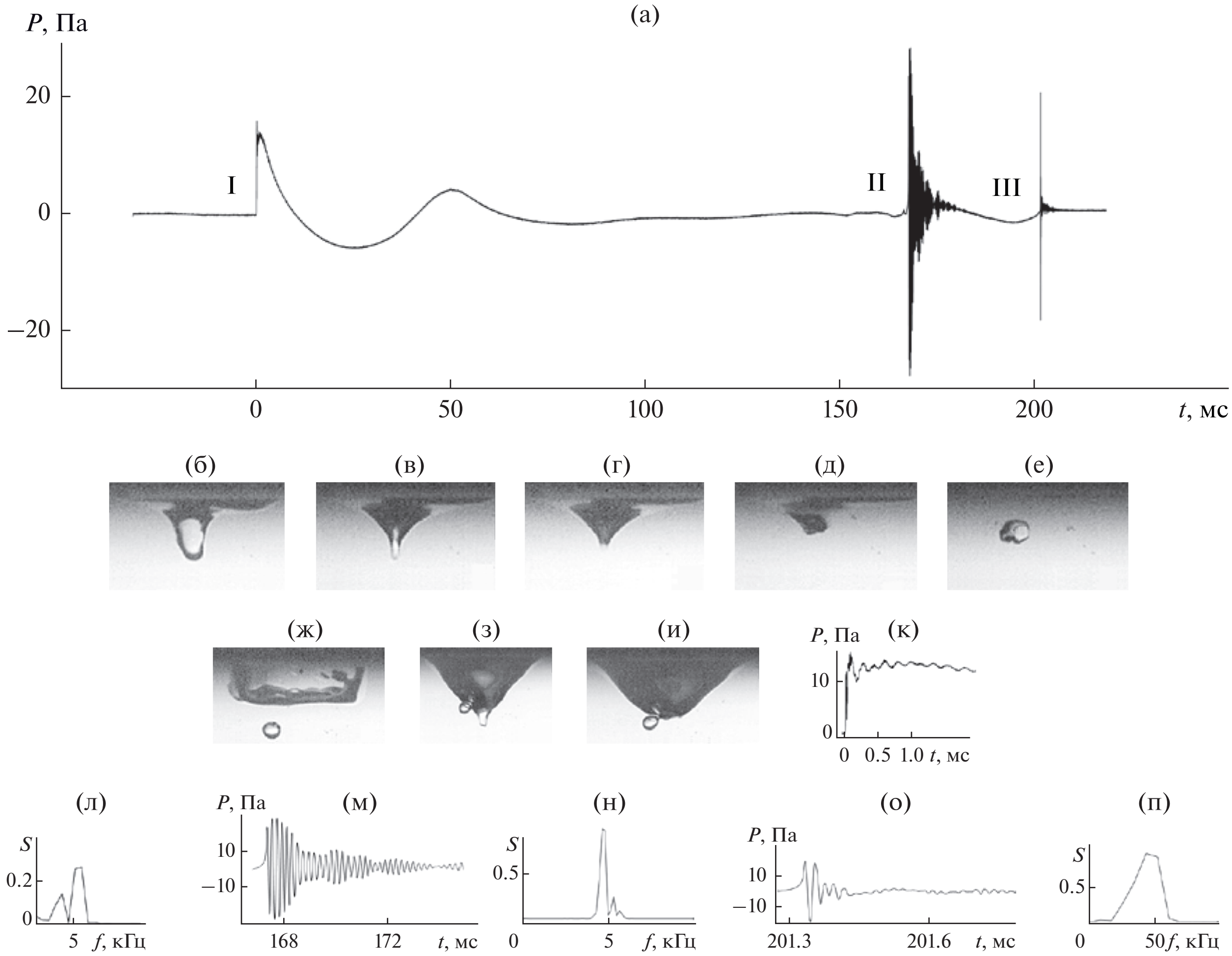


**Рис. 4.** (а) – Временная зависимость акустического давления с синхронными видеокадрами отрыва газовой полости. (б) – Каверна при $t$ = 167.2 мс, (в)–(и) – отрывающаяся газовая полость при $t$ = 166, 166.2, 167.2, 169.5, 181.5, 200.7, 202.5 мс, деление 2 мм; (к) и (л) – растянутые ударный импульс и его спектр, (м) и (н) – основной пакет II и его спектр, (о) и (п) – основной пакет III и его спектр. $D$ = 0.5 см, $U$ = 3.2 м/с, We = 701, Re = 16000, Fr = 209, Oh = 0.0017, Bo = 3.4.

зырек, не вносящий изменение в акустическое излучение.

После коллапса каверны в поле зрения остаются два пузырька ($t$ = 169.5 мс, рис. 4е). Сложность первоначальной формы большого пузырька, трансформирующегося в сфероидальный, объясняет продолжительность его звучания.

В данном опыте появление новой каверны, обусловленное возвращением очередной капли ($t$ = 181.5 мс), резко усложняет тонкую структуру микротечений в наблюдаемой области (рис. 4ж). С ее развитием ранее излучавший газовый пузырек (рис. 4е–4ж) вытесняется за пределы поля наблюдения. Сформировавшаяся газовая полость, которая видна на левой стенке цилиндрической каверны с плоским дном (рис. 4ж), переносится к дну каверны, которая переформировалась в коническую ($t$ = 200.7 мс, рис. 4з). Далее, с началом сглаживания, полость отделяется ($t$ = 202.5 мс, рис. 4и). К этому моменту приурочено начало звукового пакета III. Далее активная фаза процесса заканчивается, гидродинамические и акустические возмущения затухают.

Структурную устойчивость процесса излучения звука и сильную связь параметров сигнала с картиной течения иллюстрируют данные, приведенные на рис. 5. На фонограмме с первичным контактом капли связан ударный импульс I, последующий спад и подъем – с максимальным заглублением каверны и возвышением венца. После продолжительной паузы в момент $t$ = 146.8 мс следует группа гидродинамических возмущений давления, в конце которой возникает звуковой пакет II ($t$ =165 мс). Пакет III появляется с задержкой при $t$ = 200.4 мс.

В развертке пакета I (рис. 5к) выражен начальный импульс и высокочастотные затухающие осцилляции на спадающем участке. Основной сигнал II

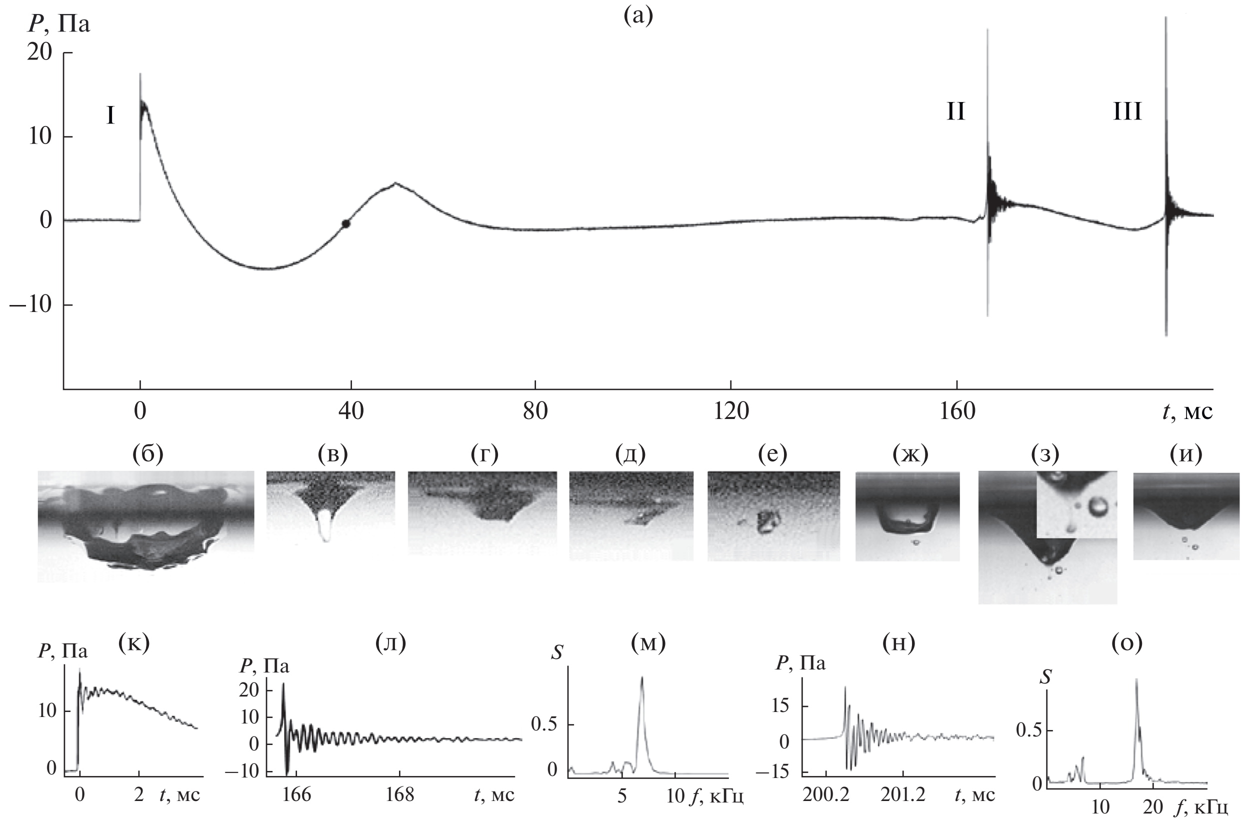


**Рис. 5.** (а) – Временная зависимость акустического давления с синхронными видеокадрами отрыва газовой полости. Деление 2 мм: (б) – каверна при $t$ = 40.2 мс, (в)–(е) – формирующаяся и отрывающаяся газовая полость при $t$ = 163.7, 165.2, 165.5, 166.2 мс; (ж)–(и): новая каверна (186.2 мс), формирование (200.5 мс, увеличенный фрагмент на (з)) и отрыв донной газовой полости (203.5 мс); (к) и (л) – растянутые ударный импульс и пакет II, (м) – спектр пакета II, (н) и (о) – растянутый пакет III и его спектр. $D$ = 0.5 см, $U$ = 3.2 м/с, We = 701, Re = 16000, Fr = 209, Oh = 0.0017, Bo = 3.4.

(развертка на рис. 5л) начинается с резкого нарастания, которое переходит в немонотонно спадающие осцилляции с основной частотой $f$ = 6.8 кГц (спектр на рис. 5м, $d_b$ = 1 мм ). На спектре к основному максимуму примыкают боковые максимумы на частотах $f$ = 4.1 и 5.5 кГц ($d_b$ = 1.6 и 1.2 мм). В резонансном пакете III также выражен нарастающий фронт, с последующими нерегулярно спадающими группами колебаний (развертка на рис. 5н). В спектре пакета III главный максимум расположен на частоте $f$ = 16.7 кГц, $d_b$ = 0.4 мм, к которому слева примыкают низкочастотные вторичные пики ($f$ = 5.1, 5.3 и 6.5 кГц, $d_b$ = 1.3, 1.2 и 1.0 мм).

Рис. 5б–5и иллюстрируют картины течений, сопутствующих наблюдаемым акустическим сигналам. В фазе коллапса ($t$ = 40.2 мс, рис. 5б, метка • на фонограмме) каверна принимает сложную форму, ее округлое дно покрывается трехмерными возмущениями – плавными впадинами и заостренными гребнями.

Падение вторичной капли, ранее вылетевшей с вершины всплеска, сопровождается образованием конической каверны, на вытянутом дне которой выделяется газовая полость (рис. 5в, $t$ = = 163.7 мс). При коллапсе основной части каверны газовая полость отсекается (светлая горизонтальная полоса на рис. 5г, $t$ = 165.2 мс), и в толще жидкости остается уплощенный газовый фрагмент угловатой формы (рис. 5д, $t$ = 165.5 мс). От него отделяется нижняя часть, которая сворачивается в компактный пузырек; основная часть трансформируется в полость неправильной формы (рис. 5е, $t$ = 166.2 мс). Далее полость стягивается в сферический пузырек, к которому стремительно приближается новая каверна с плоским дном (рис. 5ж, $t$ = 186.2 мс). В поле течений каверна трансформируется в коническую, на ее вершине формируется узкая газовая полость. Полость вытягивается, на ней образуется перетяжка, после смыкания которой образуется газовый пузырек.

В деталях течение с вытянутой полостью, тремя отделившимися и одним примыкающим к стенке каверны газовыми пузырьками, показано на рис. 5з. Именно в момент разрыва вытянутой полости и отделения пузырька начинается пакет III ($t$ = 200.5 мс). Стягивающееся к поверхности дно каверны увлекает присоединившийся пузырек,

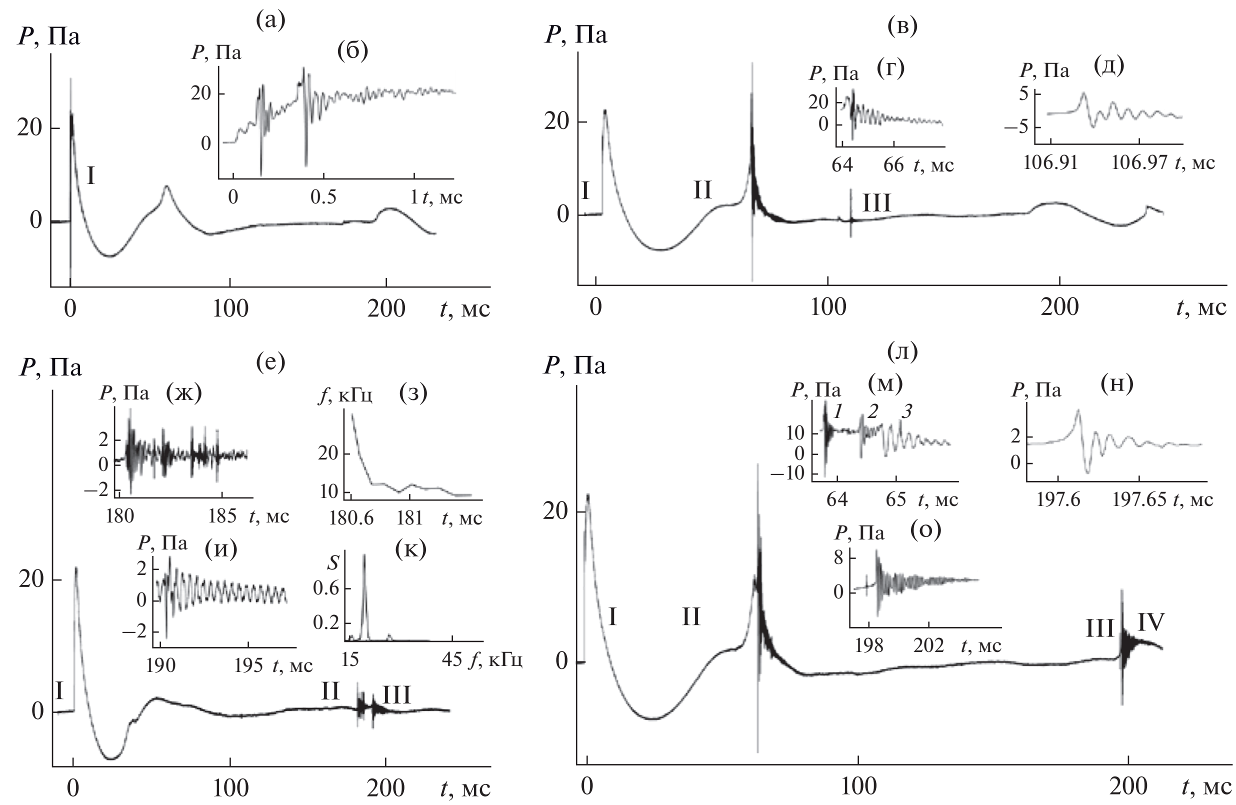

**Рис. 6.** Фонограммы повторяющихся опытов соударения капли с поверхностью при $D$ = 0.5 см, $U$ = 4.7 м/с, We = 1513, Re = 23500, Fr = 451, Oh = 0.0017, Bo = 3.4. (а) – Без резонансных пакетов, (б) – растянутый ударный импульс I, (в) – с резонансными пакетами II и III, (г) и (д) – их растянутыми фрагментами, (е) – с резонансными пакетами II и III, (ж) и (з) – растянутый пакет II и время-частотная кривая его начального участка, (и) и (к) – растянутый пакет III и его спектр, (л) – с резонансными пакетами II, III и IV и (м), (н) и (о) – их растянутыми фрагментами 1 (цифры курсивом – субпакеты основного пакета I).

оставшиеся пузыри свободно движутся в толще жидкости (рис. 5и, $t$ = 203.5 мс). С возвращением в принимающую жидкость последней вылетевшей капли излучение акустических пакетов прекращается, все гидродинамические возмущения затухают.

Подборка фонограмм, приведенная на рис. 6, иллюстрирует основные формы акустических сигналов, наблюдавшихся при сохранении неизменными условий опытов (состав контактирующих жидкостей, диаметр и конечная скорость капли). Если скорость капли при контакте превышает критическое значение $U_c = b\sqrt{\gamma/R}/2$ (для данного диапазона скорости $b \approx 4$ – эмпирическая константа процесса молекулярного слияния капли с поверхностью по инерционному сценарию [14]), в акустических возмущениях наблюдается ударный импульс, который устойчиво воспроизводился во всех реализациях в данной серии экспериментов.

На первой (рис. 6а) и во всех последующих фонограммах за ударным импульсом следуют колебания давления гидродинамической природы, отражающие локальные изменения уровня жидкости при формировании и распаде каверны, венца и всплеска. Новые низкочастотные возмущения при $t$ = 200 мс обусловлены локальными колебаниями уровня жидкости, вызванными возвращением выброшенной ранее капли.

Растянутый график первичного импульса (рис. 6б) показывает, что к его заднему фронту примыкают две группы быстро затухающих высокочастотных осцилляций с основными частотами 49.5 и 24 кГц ($d_b$ = 0.13 и 0.27 мм).

В фонограмме на рис. 6в, общая структура которой совпадает с представленной на рис. 6а, кроме ударного импульса присутствуют две группы возмущений при $t$ = 64 и 107 мс. Развертки I и III (рис. 6г, 6д) показывают их сложный – нестационарный и многочастотный характер. В сигнале II на фоне затухающего низкочастотного ($f$ = 5.4 кГц, $d_b$ = 1.2 мм) присутствуют высокочастотные ($f$ = = 48.5 кГц, $d_b$ = 0.13 мм) осцилляции с большой начальной амплитудой. Сигнал III имеет более простую форму – затухающий пакет с основной частотой $f = 108$ кГц, $d_b = 0.06$ мм. При $t = 186.3$ мс возникает группа возмущений давления гидродинамической природы вследствие осцилляций свободной поверхности при возвращении ранее выброшенной капли.

Общая структура фонограммы на рис. 6е сходна со структурой типовых сигналов, описанных в литературе [6, 9, 18, 19], в которых резонансный пакет наблюдался с задержкой порядка 200 мс, соответствующей времени возврата ранее выброшенной капли. Здесь с такой же задержкой регистрируется последовательность резонансных звуковых пакетов (рис. 6ж, $t$ = 180.5, 181.9, 182.3, 183.6, 183.9, 184.2, 184.8 мс), свойства которых существенно различаются. В первом пакете частота заполнения резко спадает со временем от 30 до 9 кГц (рис. 6з). Второй пакет (рис. 6и) из данной группы – преимущественно моночастотный (спектр на рис. 6к) с коротким высокочастотным импульсом в начальных осцилляциях. Последующие пакеты в группе II в основном также моночастотные. Еще одна группа сигналов III ($t$ = 189.9) представлена фактически одним монохроматическим пакетом.

В сигнале на рис. 6л одновременно выражены возмущения, наблюдаемые в фонограммах на рис. 6в и 6е, а именно, первичный импульс, сложный пакет в области максимума гидродинамического возвышения ($t = 63.8$ мс) и группа многочастотных пакетов при $t = 198.2$ мс.

В развертке сигнала II (рис. 6м) выражены три быстро затухающих пакета с характерными частотами $f$ = 37.6, 21.0 и 6.5 кГц, $d_b$ = 0.17, 0.31 и 1 мм. Запаздывающий пакет III – короткий высокочастотный сигнал (рис. 6н), в спектре которого представлены основная ($f = 104$ кГц, $d_b = 0.06$ мм) и боковые ($f$ = 63 и 31 кГц, $d_b$ = 0.1 и 0.2 мм) частоты. За ним с паузой 0.6 мс следует одночастотный ($f$ = = 6.2 кГц, $d_b$ = 1.05 мм) модулированный сигнал IV, развертка которого представлена на рис. 6о.

Данный эксперимент повторялся многократно, во всех реализациях сохранялся дискретный во времени характер излучения сигналов. Положение, структура и длительность сигналов произвольным образом менялись от опыта к опыту.

## ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Детальный анализ возмущений свободной поверхности жидкости (рис. 2), стенок каверн и отрывающихся газовых полостей (рис. 3–5) показывает, что хорошо изученные компоненты течений – каверна, венец, всплеск, стримеры – являются сложными объектами с быстро меняющейся геометрией. Падение капли порождает комплекс гидродинамических процессов как сравнительно крупных масштабов (порядка размера капли), так и более тонких, а именно капиллярных волн и тонких струек в толще жидкости. В теории тонким компонентам соответствуют семейства сингулярно возмущенных решений в линейных моделях и их нелинейные аналоги [26, 27].

Уничтожение свободной поверхности при погружении первичной и вторичных возвращающихся капель, которое происходит за короткие времена $\Delta t \sim 10^{-10}$ с (длительности слияния приповерхностных слоев контактирующих жидкостей в результате прямых атомно-молекулярных взаимодействий), приводит к образованию энергонасыщенного двойного слоя с выраженными тонкими компонентами течений. В данных опытах тонкие компоненты течений проявляются в форме возмущений свободной поверхности (спайки на рис. 1д, 1е). Важно отметить, что новые тонкоструктурные элементы (спайки на поверхности растущего всплеска (рис. 1д, 1е), ребристый рельеф дна каверны рис. 3б, 5б)) появляются после сглаживания первоначальных возмущений – групп капиллярных волн на каверне и венце (рис. 1г). Струйки отрывают газовые полости от каверны, дробят их на более мелкие и хаотически переносят в толще жидкости (рис. 5в–5е). Распад течения на тонкие струйки в области контакта погружающейся капли с принимающей жидкостью визуализирован в [32], эволюция образующихся полосчатых и сетчатых структур прослежена в [33].

Погружение капли сопровождается передачей кинетической энергии и импульса капли за времена порядка $\Delta t \sim 10^{-3}$ с. Появление новых и исчезновение существующих структурных компонентов (венца, всплеска, стримеров, отрывающихся и сливающихся капель) сопровождается генерацией все новых групп трехмерных капиллярных волн, искажающих свободную поверхность, которые также дополняются семействами тонких компонентов. Характерное время передачи энергии в капиллярной волне имеет порядок обратной частоты волны минимальной скорости распространения $\Delta t \sim 1/f_{\min} \approx 75$ мс. Диффузионные процессы определяют еще более продолжительное время выравнивания плотностных неоднородностей после расплывания вихревых колец, порождаемых погружением капли окрашенной жидкости [13].

Воздушные прослойки, находящиеся во впадинах, блокируются падающими каплями, контактирующими с гребнями волн, и трансформируются в замкнутые газовые полости. Отрывающиеся газовые полости увлекаются вместе с жидкостью капли в толщу жидкости (рис. 1и–1л). Отрыв от каверны и фрагментация газовой полости сопровождаются излучением звука. Наиболее часто резонансное акустическое излучение проявляется в интервале 150–200 мс, соответствующем возвращению выброшенной всплеском вторичной капли в условиях данного эксперимента. Многообразие форм газовых полостей и процессов их формирования проявляется в изменчивости свойств резонансных акустических сигналов и их невоспроизводимости при неизменных условиях опытов.

Природа первичного импульса нуждается в более детальном изучении. Здесь дополнительный вклад в излучение могут вносить как пузырьки, связанные с падающей каплей, так и мелкие пузырьки, естественно существующие в приповерхностном слое жидкости, возбуждаемые импульсами давления в двойном слое.

Изменчивость формы и динамического состояния падающей осциллирующей капли [18, 35], по поверхности которой бегут короткие капиллярные волны [36], – одна из причин многообразия параметров двойного слоя, размеров каверны, венца и всплеска, форм, размеров и скорости вылета вторичных капель, продолжительности их полета и местоположения точки возвращения на свободную поверхность, времени начала генерации и амплитудно-частотных характеристик последовательно возникающих групп капиллярных волн, и, соответственно, наступления условий формирования, размеров и форм газовых полостей, отрыв которых сопровождается излучением звука. Дискретный характер регистрируемых акустических сигналов – наличие пакетов, привязанных по времени к контакту капель с жидкостью и отрыву газовых полостей – указывает на общую природу излучения звука, включая наблюдения высокочастотных пакетов, возможные источники которых – мелкие газовые пузырьки, не разрешаемые современными оптическими инструментами.

В данных опытах наблюдались звуковые сигналы в широком диапазоне частот – от сотен герц до сотен килогерц в основных фазах течения, сопровождающихся погружением и выбросом капель. Количество наблюдаемых в условиях одного опыта газовых пузырьков с размерами от долей до нескольких миллиметров заметно превышает число регистрируемых резонансных звуковых пакетов, частота которых определяется размерами пузырька [34].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Регистрация гидроакустических сигналов выполнена синхронно со скоростной видеосъемкой картины течения на свободной поверхности и в толще жидкости в диапазоне чисел $\mathrm{Re} = 16000$–$23500$, $\mathrm{F} = 209$–$450$, $\mathrm{We} = 700$–$1500$. Подчеркнуто влияние двойного слоя, в котором сохраняются возмущения, возникающие при преобразовании в другие формы доступной потенциальной энергии исчезающих при слиянии жидкостей свободных поверхностей, на формирование быстрых тонких компонентов течений – спайков, групп коротких капиллярных волн, и традиционно изучаемых компонентов – каверны, венца, всплеска, стримера, вторичных капель.

В акустических сигналах определены свойства двух основных групп – ударного импульса и резонансных пакетов, кардинально отличающихся по степени повторяемости и стабильности временных параметров. Спектральный состав сигналов в обеих группах характеризуется изменчивостью в широком диапазоне частот. При неизменных условиях опытов наблюдаются как простые одночастотные затухающие, так и сложные сигналы с модуляцией и изменяющейся частотой.

Сопоставление картин подводных течений и акустических сигналов указывает, что процессы генерации резонансных звуковых пакетов синхронизованы с отрывом газовых полостей от каверны, формирующейся при погружении капли или их разрывом на фрагменты. Длительность звучания зависит от степени начальной неоднородности геометрии звучащей полости, постепенно трансформирующейся в гладкую сфероидальную.

В совокупности явлений, инициированных погружением свободно падающей капли в жидкость (импакте капли), представлены процессы и атомно-молекулярной, и гидродинамической природы, включающие излучение волн различной природы – акустических и капиллярных, и формирование лигаментов, собственные пространственные и временные масштабы которых существенно различаются.

Эксперименты выполнены на стенде ЭСП, входящем в Гидрофизический комплекс для моделирования гидродинамических процессов в окружающей среде и их воздействия на подводные технические объекты, а также распространения примесей в океане и атмосфере ("ГФК ИПМех РАН").

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 19-19-00598 "Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью").

Авторы глубоко благодарны рецензенту за скрупулезную рецензию, способствующую улучшению статьи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Prosperetti A., Oguz H.N.* The impact of drops on liquid surfaces and the underwater noise of rain // Annu. Rev. Fluid Mech. 1993. V. 25. P. 577–602.
2. *Worthington A.M.* The splash of the drop. Series "The romance of science" Published by Society for Promoting Christian Knowledge: N. Y.–London: E. & J.B. Young & Co. 1895.

3. *Jones A.T.* The sound of splashes // Science. 1920. V. 52. P. 295–296.

4. *Knudsen P.V.O., Alford R.S., Emling J.W.* Underwater ambient noise // J. Marine Research. 1948. V. 7. № 3. P. 410–429.

5. *Thoroddsen S.T., Etoh T.G., Takehara K.* High-speed imaging of drops and bubbles // Annu. Rev. Fluid Mech. 2008. V. 40. P. 257–285.

6. *Прохоров В.Е., Чашечкин Ю.Д.* Генерация звука при падении капли на поверхность воды // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 6. С. 792–803.

7. *Longuet-Higgins M.S.* An analytic model of sound production by raindrops // J. Fluid Mech. 1990. V. 214. P. 395–410.

8. *Eggers J., Lister J.R., Stone H.A.* Coalescence of liquid drops // J. Fluid Mech. 1999. V. 401. P. 293–310.

9. *Pumphrey H.C., Crum L.A., Bjørnø L.* Underwater sound produced by individual drop impacts and rainfall // J. Acoust. Soc. Am. 1989. V. 85. P. 1518–1526.

10. *Zhu G.-Z. Li Z.-H., Fu D.-Y.* Experiments on ring wave packet generated by water drop // Chinese Science Bulletin. 2008. V. 53. № 11. P. 1634–1638.

11. *Ray B., Biswas G., Sharma A.* Generation of secondary droplets in coalescence of a drop at a liquid–liquid interface // J. Fluid Mech. 2010. V. 655. P. 72–104.

12. *Thoraval M.-J., Takehara K., Etoh T.G., Popinet S., Ray P., Josserand C., Zaleski S., Thoroddsen S.T.* von Karman vortex street within an impacting drop // Physical Review Letters. 2012. V. 108. 264506.

13. *Чашечкин Ю.Д.* Эволюция тонкой структуры распределения вещества свободно падающей капли в смешивающихся жидкостях // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2019. Т. 55. № 3. С. 66–77.

14. *Прохоров В.Е.* Влияние молекулярных эффектов на излучение звука при низкоскоростном столкновении капли с поверхностью воды // ЖЭТФ. 2018. Т. 153. Вып. 4. С. 584–589.

15. *Чашечкин Ю.Д., Прохоров В.Е.* Гидродинамика удара капли: короткие волны на поверхности венца // Докл. Акад. наук. 2013. Т. 451. № 1. С. 41–45.

16. *Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю.* Капиллярные волны на поверхности погружающейся в жидкость капли // Докл. Акад. наук. 2015. Т. 465. № 4. С. 548–554.

17. *Чашечкин Ю.Д.* Визуализация тонкой структуры возмущений поверхности жидкости течениями, вызванными упавшей каплей // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83. № 3. С. 403–412.

18. *Чашечкин Ю.Д., Прохоров В.Е.* Акустика и гидродинамика удара капли о водную поверхность // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 1. С. 38–49.

19. *Phillips S., Agarwal A., Jordan P.* The sound produced by a dripping tap is driven by resonant oscillations of an entrapped air bubble // Scientific Reports. 2018. V. 8. № 1. P. 1–12.

20. *Deka H., Ray B., Biswas G., Dalal A., Tsai P.-H., Wang A.-B.* The regime of large bubble entrapment during a single drop impact on a liquid pool // Physics of Fluids. 2017. V. 29. № 9. 092101.

21. *Feistel R.* Thermodynamic properties of seawater, ice and humid air: TEOS-10, before and beyond // Ocean Sciences. 2018. V. 14. P. 471–502.

22. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Статистическая физика. Часть I. М.: Наука. ГРФМЛ, 1976. 584 с.

23. *Эйзенберг Д., Кауцман В.* Структура и свойства воды. Л-д: Гидрометеоиздат, 1975. 280 с.

24. *Бункин Н.Ф., Индукаев К.В., Игнатьев П.С.* Спонтанная самоорганизация газовых микропузырей в жидкости // ЖЭТФ. 2007. Т. 131. № 3. С. 539.

25. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. Теоретическая физика. Т. VI. М.: Наука, 1986. 736 с.

26. *Chashechkin Yu.D.* Singularly perturbed components of flows – linear precursors of shock waves // Math. Model. Nat. Phenom. 2018. V. 13. № 2. P. 1–29

27. *Chashechkin Yu.D.* Waves, vortices and ligaments in fluid flows of different scales // Physics & Astronomy Int. J. 2018. V. 2. № 2. P. 105–108.

28. *Кибель И.А., Кочин Н.Е., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Часть 1. М.: ГИФМ. 1963.

29. Гидрофизический комплекс для моделирования гидродинамических процессов в окружающей среде и их воздействия на подводные технические объекты, а также распространения примесей в океане и атмосфере ("ГФК ИПМех РАН): http://www.ipmnet.ru/uniqequip/gfk/#equip

30. *Копьев В.Ф., Храмцов И.В., Ершов В.В., Пальчиковский В.В.* О возможности использования единичной временной реализации для исследования шума вихревых колец // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 1. С. 49–58.

31. *Li E.Q., Thoraval M.-J., Marston J.O., Thoroddsen S.T.* Early azimuthal instability during drop impact // J. Fluid Mech. 2018. V. 848. P. 821–835.

32. *Чашечкин Ю.Д., Прохоров В.Е.* Структура первичного звукового сигнала при столкновении свободно падающей капли с поверхностью воды // ЖЭТФ. 2016. Т. 149. № 4. С. 864–875.

33. *Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю.* Полосчатые структуры в картине распределения вещества капли по поверхности принимающей жидкости // Доклады РАН. 2018. Т. 481. № 2. С. 145–150.

34. *Minnaert M.* On musical air-bubbles and the sounds of running water // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1933. V. 16. № 104. P. 235–248.

35. *Чашечкин Ю.Д., Прохоров В.Е.* Трансформации перемычки в процессе отрыва капли // Прикладная механика и техническая физика. 2016. № 3. С. 16–31.

36. *Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д.* Поверхностные колебания свободно падающей капли идеальной жидкости // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2018. Т. 54. № 2. С. 206–212.

АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2020, том 66, № 4, с. 391–400

## НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА

УДК 534.21

# ЗАКОНЫ ДИСПЕРСИИ, НЕЛИНЕЙНЫЕ УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯДЕР ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯ В СРЕДАХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА С СИЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ


**А. В. Урсулов**[a, b, *, **]

[a] *Институт естественных наук и математики, Департамент фундаментальной и прикладной физики, Екатеринбург, Россия*

[b] *Научно-исследовательский институт физики и прикладной математики, Отдел математического моделирования, ул. Мира 19, Екатеринбург, 620002 Россия*

**e-mail: AV.Ursulov@urfu.ru*

***e-mail: urandrey@yandex.ru*

Поступила в редакцию 10.12.2018 г.
После доработки 27.11.2019 г.
Принята к публикации 24.12.2019 г.

Рассмотрено интегро-дифференциальное уравнение, моделирующее среды с сильной пространственной дисперсией и нелинейностями гидродинамического типа (уравнение Уизема). Предложен способ построения ядра интегрального члена, позволяющий качественно учитывать особенности законов дисперсии линейных волн в средах с пространственной дисперсией. Подробно рассматривается случай, когда ядро содержит два независимых параметра, характеризующих его амплитуду и ширину. Получены и проанализированы законы дисперсии линейных волн, а также решения в виде уединенных волн предельной и малой амплитуды. В частности, показано, что при соответствующем выборе параметров можно получить значение угла заострения на вершине уединенной волны предельной амплитуды на поверхности слоя жидкости, равное углу Стокса.

*Ключевые слова:* пространственная дисперсия, нелинейность, уравнение Уизема, закон дисперсии, волна предельной амплитуды, угол Стокса, уединенная волна, уравнение Кортевега–де Фриза

**DOI:** 10.31857/S0320791920040103

1. Одним из важных объектов исследования в теории волн (в том числе акустических) являются волны в различных диспергирующих средах [1–13]. В широком смысле среда называется диспергирующей (средой с дисперсией), если в такой среде отклик на воздействие зависит не только от возмущения в данный момент времени в данной точке пространства, но и от возмущения в предыдущие моменты времени (временная дисперсия) в некоторой области среды, окружающей данную точку (пространственная дисперсия). Временная дисперсия приводит к зависимости функций отклика (диэлектрической или/и магнитной проницаемости, проводимости и т.д.) от частоты, поэтому она также называется частотной дисперсией. Пространственная дисперсия при распространении линейных волн обычно проявляется на достаточно высоких частотах, поэтому ее иногда называют высокочастотной дисперсией.

Учет сильной дисперсии приводит к тому, что уравнения, описывающие распространение возмущений в среде, становятся интегро-дифференциальными [1–3, 10–23]. Вообще говоря, оба вида дисперсии могут присутствовать в каждой диспергирующей среде, однако довольно часто в рамках рассматриваемой задачи удается выделить наиболее существенную из них. Временная дисперсия существенна, когда частоты распространяющихся в среде волн близки к собственным частотам колебаний среды, а также когда в среде имеются процессы типа поглощения или релаксации. В акустике сильная временная дисперсия при распространении линейных и нелинейных волн возникает, например, в релаксирующих жидкостях и газах, полимерах, биологических тканях и других сложно устроенных средах [1–3, 6, 13–23]. Образующиеся здесь интегро-дифференциальные уравнения обладают тем свойством, что содержащиеся в них интегралы ограничены сверху текущим моментом времени (либо сводятся к таковым). Последнее непосредственно следует из принципа причинности: реакция среды в текущий момент времени определяется воздействием на нее в прошлом и настоящем. Пространственная дисперсия обусловлена пространственной нелокальностью среды (влиянием всего окружения на каждую точку среды), что приводит в уравнениях к интегралам по всему объёму, занимаемому средой.

Одна из наиболее сложных проблем в анализе интегро-дифференциальных уравнений состоит в том, что часто точный вид ядра интегрального члена не известен. Точный вид ядра можно определить из микроскопического рассмотрения проблемы, что далеко не всегда возможно и выходит за рамки феноменологического подхода. С другой стороны, уравнения не могут быть решены без формального задания ядра. Поэтому возникает необходимость привлечь к моделированию ядра дополнительные физические или математические соображения. Во многих случаях про ядра интегральных членов уравнений заранее можно сказать следующее [1–5, 10–15]. В случае временной дисперсии в ядра наиболее существенный вклад дают времена, меньшие или сравнимые с характерным временем среды (например, со временем релаксации). В случае же пространственной дисперсии основной вклад в ядро вносят пространственные масштабы, меньшие или сравнимые с характерным для рассматриваемой среды размером (постоянной кристаллической решетки, длиной свободного пробега частиц, дебаевским радиусом, толщиной слоя жидкости, характерным размером зерен, диаметром поперечного сечения упругой или электропроводящей проволоки и т.д.). Дальнейшие предположения о структуре ядра могут быть получены, например, из свойств однородности и изотропности среды, однородности времени, соображений симметрии, поведения асимптотик, условий нормировки и. т.д. В случае временной дисперсии важным фактором, позволяющим судить о структуре ядра, являются соотношения Крамерса–Кронига, которые являются следствием принципа причинности [1–6]. Соотношения Крамерса–Кронига давно и активно используются в акустике [24–27]. Другие методы, широко используемые в акустике, основаны на восстановлении ядер либо из экспериментальных данных, либо из модельных представлений о внутренней динамике молекулярных или надмолекулярных структур. Такие подходы широко практикуются, например, в медицинской акустике и эластографии [15–17]. Соответствующая математическая процедура восстановления ядра описана в работах [1, 28].

В данной работе на примере конкретного нелинейного интегро-дифференциального уравнения с пространственной дисперсией (так называемого уравнения Уизема) предложен подход к моделированию ядра, основанный на выделении из него "главной" и "поправочной" частей. "Главная" часть учитывает фундаментальные требования к ядру в пределах рассматриваемой задачи (симметрии, нормировки, особенности асимптот и т.д.). Поправки же предназначены для того, чтобы учесть некоторые более тонкие свойства распространяющихся волн (например, особенности законов дисперсии). В рамках данного подхода анализируются уединенные волны на поверхности жидкости. Показано, что для волн на поверхности мелкой воды с помощью подбора параметров можно получить правильное значение угла Стокса.

2. Одним из модельных уравнений, используемых для исследования нелинейных волн в системах гидродинамического типа с сильной пространственной дисперсией, является уравнение [10–12]

$$\eta_t + \eta\eta_x + c_0 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \kappa(x - x')\eta_{x'}dx' = 0, \qquad (1)$$

где $c_0$ – скорость звука. В теории распространения волн на поверхности воды и математической физике уравнение (1) получило название уравнения Уизема. Это уравнение достаточно универсально. Оно встречается в теории поверхностных и внутренних волн в жидкости, в физике бесстолкновительной плазмы, в нелинейной оптике и т.д. [10–12, 29–37]. Уравнение (1) является интересным объектом для математических исследований, не только как нелинейное интегро-дифференциальное уравнение в частых производных, но и как уравнение, из которого при соответствующем выборе ядра $\kappa(x)$ следуют многие известные нелинейные уравнения: Бенджамина–Оно, Бюргерса, Кортевега–де Фриза (КдФ) и некоторые другие [11, 30, 37–41]. Отметим, что в уравнении (1) с формально математической точки зрения (отвлекаясь от смысла переменных $x$ и $t$) можно представить ядро $\varkappa$ в виде произведения $\kappa(x) = \theta(x)K(x)$, где $\theta(x)$ – $\theta$-функция Хэвисайда, а $K(x)$ – произвольная функция. Тогда в интегральном члене рассматриваемого уравнения верхний предел интегрирования становится переменным, равным $x$. В таком виде уравнение (1) становится подобным уравнениям, используемым для описания волн в средах с временной дисперсией. Заметим, что в этом случае уравнение (1) не совпадает с полученным в работе [14] и обобщенным в работе [15] интегро-дифференциальным уравнением (упрощенным за счет одномерности и пренебрежения вязкостью): в (1) не достает дополнительной производной в интегральном слагаемом. Как уже отмечалось, наличие переменного верхнего предела (или, что эквивалентно, $\theta$-функции в ядре) связано с действием принципа причинности, который обязан выполняться, если речь идет о времени $t$. В случае пространственной дисперсии наличие в ядре θ-функции, зависящей от пространственной переменной $x$, соответствует ситуации, когда реакция среды в данной точке пространства $x$ определяется областью, находящейся только с одной стороны от этой точки (например, слева), что представляется достаточно специфичным. Поэтому, когда речь идет о пространственной переменной $x$, будем предполагать, что интеграл в (1) берется по всей области пространства, занимаемого средой, в данном случае — в бесконечных пределах.

Для удобства анализа в (1) выбрана калибровка, когда коэффициент перед нелинейным слагаемым равен единице. В результате величина $\eta$ в (1) имеет размерность скорости. Первое слагаемое в (1) ответственно за нестационарность процесса, второе — учитывает типичную для гидродинамических сред нелинейность, а последний (интегральный) член описывает пространственную дисперсию. Будем считать, что ядро $\kappa(x)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) в силу пространственной однородности среды зависит только от разности координат: $\kappa(x - x')$; 2) в силу изотропии среды (эквивалентности прямого и обратного направлений распространения волны) является четной функцией: $\kappa(-x) = \kappa(x)$; 3) спадает на бесконечности $\kappa(\pm\infty) = 0$; 4) нормировано на единицу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \kappa(x)dx = 1. \tag{2}$$

В общем случае ядро $\kappa(x)$ может быть получено из фазовой скорости линейной волны

$$c_f(k) = \frac{\omega(k)}{k}, \tag{3}$$

где $\omega(k)$ — закон дисперсии волны, с помощью обратного преобразования Фурье [10—12]

$$c_0\kappa(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} c_f(k)e^{ikx}dk. \tag{4}$$

При известном законе дисперсии выражение (4) определяет ядро $\kappa(x)$.

Часто ограничиваются случаем, когда закон дисперсии линейных волн имеет полиномиальный (степенной) характер

$$\omega(k) = c_0 k + \sum_{n=1}^{N} c_{2n}k^{2n+1}. \tag{5}$$

В частности, при $N = 1$ в правой части выражения (5) получаем полином третьей степени. Соответствующий закон дисперсии имеют волны в средах со слабой пространственной дисперсией. Выражению (5) соответствует ядро

$$c_0\kappa(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n c_{2n}\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\delta(x), \tag{6}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. В этом случае уравнение (1) сводится к виду

$$\partial_t\eta + c_0\partial_x\eta + \sum_{n=1}^{N}(-1)^n c_{2n}\partial_x^{2n+1}\eta + \eta\partial_x\eta = 0. \tag{7}$$

Значение $N = 1$ соответствует уравнению Кортевега—де Фриза, которое является уравнением третьего порядка. При $N > 1$ возникают различные уравнения более высоких порядков [35, 42—45].

Если закон дисперсии не является полиномиальным, то в общем случае ядро $\kappa(x)$ вычислить не удается. Иногда ядро $\kappa(x)$ удается аппроксимировать более простой функцией $\gamma(x)$ и тем самым преобразовать интегро-дифференциальное уравнение (1) в дифференциальное. Однако при такой аппроксимации может потеряться часть важной информации, содержащейся в функции

$$r(x) = \kappa(x) - \gamma(x). \tag{8}$$

Последнее может приводить к искажению характеристик исследуемых нелинейных волн, а также, например, к тому, что законы дисперсии линейных волн, соответствующие $\kappa(x)$ и $\gamma(x)$, могут существенно различаться.

Примером такой ситуации является применение уравнения (1) к исследованию слабо нелинейных волн на поверхности слоя жидкости [10—12]. В этом случае закон дисперсии линейных волн имеет вид

$$\omega = \sqrt{k\,\mathrm{th}(k)}, \tag{9}$$

где ускорение свободного падения $g$, глубина слоя $h_0$ и скорость $c_0 = \sqrt{gh_0}$ приняты равными единице: $g = h_0 = c_0 = 1$, а частота $\omega$ и волновое число $k$ считаются безразмерными. График функции (9) приведен на рис. 1.

Ядро интегрального слагаемого в (1), соответствующее закону дисперсии (9), равно

$$\kappa(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{\mathrm{th}(k)}{k}}e^{ikx}dk. \tag{10}$$

Функция (10) имеет асимптоты [10—12]

$$\kappa(x) \sim (2\pi x)^{-1/2}, \quad x \to 0, \tag{11}$$

$$\kappa(x) \sim \left(\frac{\pi^2}{2}x\right)^{-1/2}\exp\left(-\frac{\pi x}{2}\right), \quad x \to \infty. \tag{12}$$

Основываясь на (11) и (12), Уизем предложил аппроксимировать ядро $\kappa(x)$ функцией

$$\gamma(x) = \frac{\pi}{4}\exp\left(-\frac{\pi|x|}{2}\right), \tag{13}$$

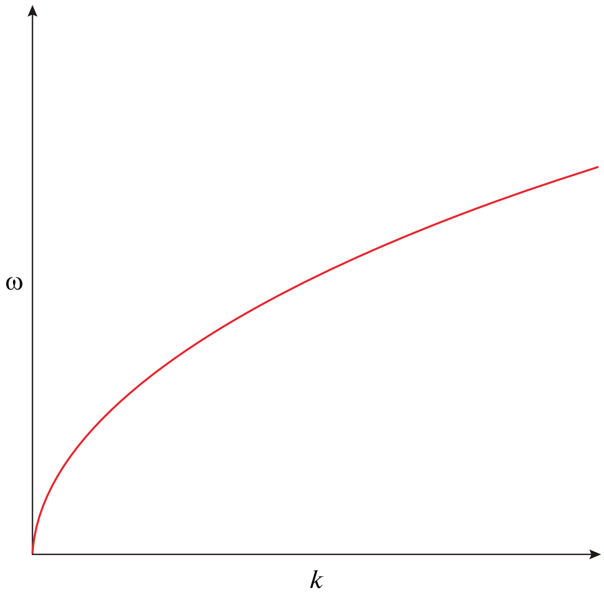


**Рис. 1.** График закона дисперсии гравитационных волн в слое жидкости (9). При увеличении волнового числа $k$ частота ω стремится к бесконечности.

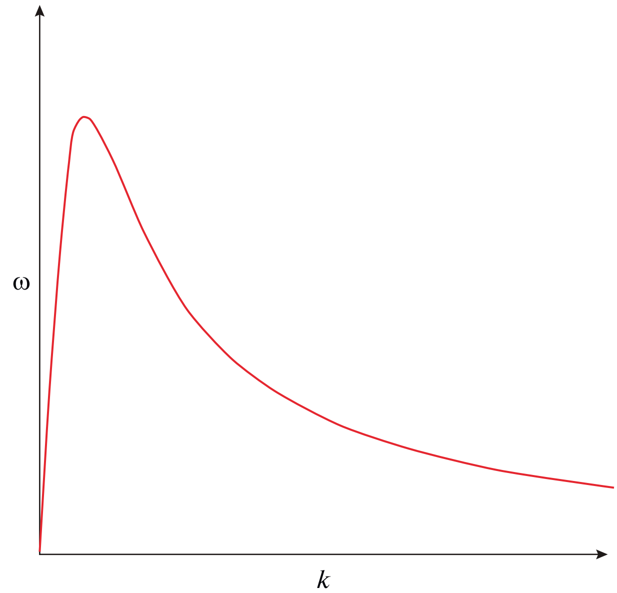


**Рис. 2.** График закона дисперсии (16). При увеличении волнового числа $k$ частота ω стремится к нулю.

которая является фундаментальным решением уравнения

$$\left(\partial_x^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\gamma(x) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \delta(x). \quad (14)$$

Подставляя в уравнение (1) вместо ядра $\kappa(x)$ выражение (13) (т.е. считая, что $\kappa(x) = \gamma(x)$) и действуя на обе части получившегося уравнения оператором $\partial_x^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$, получим дифференциальное уравнение

$$\left(\partial_x^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)(\eta_t + \eta\eta_x) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \eta_x = 0. \quad (15)$$

Линеаризуя (15), получим закон дисперсии волн, соответствующих ядру (13)

$$\omega = \frac{k}{1 + \left(\frac{2k}{\pi}\right)^2}. \quad (16)$$

График функции (16) приведен на рис. 2.

Из рис. 1 и 2 видим, что кривые дисперсии, соответствующие исходному $\kappa(x)$ (9) и аппроксимированному $\gamma(x)$ (13) ядрам, качественно совпадают только при малых $k$, а при больших $k$ существенно различаются: первая дисперсионная кривая неограниченно возрастает, а вторая – стремится к нулю. Другим недостатком указанной аппроксимации является невозможность получить значение угла заострения на вершине уединенной волны предельной амплитуды, равное углу Стокса $\vartheta_S = 2\pi/3$ [10–12]. Приведенный пример указывает на то, что необходима модификация подхода Уизема, лишенная указанных недостатков.

3. Подстановка $\kappa(x) = \gamma(x) + r(x)$ в интегральный член в (1) приводит к появлению двух интегральных слагаемых. Считаем функции $r(x)$ и $\gamma(x)$ четными. Тогда слагаемое, обусловленное функцией $r(x)$, можно представить в виде следующего бесконечного ряда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r(x - x')\eta_{x'} dx' = \partial_x \int_{-\infty}^{+\infty} r(\chi)\eta(x - \chi) d\chi = \\ = \partial_x \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n} \partial_x^{2n} \eta, \quad (17)$$

где

$$\alpha_{2n} = \frac{1}{(2n)!} \int_{-\infty}^{\infty} r(\chi)\chi^{2n} d\chi. \quad (18)$$

В результате уравнение (1) сводится к интегро-дифференциальному уравнению бесконечного порядка, которое эквивалентно тому же уравнению Уизема с ядром

$$\kappa(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_{2n} \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} \delta(x) + \gamma(x). \quad (19)$$

При известном законе дисперсии из выражений (4) и (19) можно получить функцию $\gamma(x)$. В силу обращения в нуль интегралов, содержащих производные от дельта-функций, условие нормировки (2) после подстановки в него выражения (19) дает

$$\alpha_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x)dx = 1. \quad (20)$$

Как видим, слагаемые с номерами $n \geq 1$ не дают вкладов в условие нормировки.

В выражении (17) по порядку величины

$$\alpha_{2n}\partial_x^{2n}\eta \sim \left(\frac{\ell}{\Delta}\right)^{2n}\eta, \quad (21)$$

где $\Delta$ — характерный масштаб изменения функции $\eta(x)$, $\ell$ — характерный масштаб, на котором спадает на бесконечность ядро $r(x)$. Когда функция $\eta(x)$ является гладкой по сравнению с ядром $r(x)$, величина $\Delta$ значительно превышает $\ell$:

$$\Delta \gg \ell, \quad (22)$$

соответственно, каждый последующий член ряда (17) будет по порядку величины меньше предыдущего члена в $\left(\ell/\Delta\right)^2 \ll 1$ раз. В результате, отбрасывая члены, имеющие более высокий порядок малости, ряд (17) (и, соответственно, ряд в выражении (19)) с нужной степенью точности может быть оборван на каком-либо слагаемом с номером $n = N$. В этом случае уравнение (1) принимает вид

$$\begin{gathered}\partial_t\eta + c_0\sum_{n=0}^{N}\alpha_{2n}\partial_x^{2n+1}\eta + \\ + c_0\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma(x-x')\eta_{x'}dx' + \eta\partial_x\eta = 0.\end{gathered} \quad (23)$$

Уравнению (23) отвечает закон дисперсии

$$\omega(k) = c_0 k\left(\tilde{\gamma}(k) + \sum_{n=1}^{N}(-1)^n\alpha_{2n}k^{2n}\right), \quad (24)$$

где $\tilde{\gamma}(k)$ — Фурье-образ функции $\gamma(x)$. Выражение (24) кроме полинома степени *2N* содержит также неполиномиальный вклад, определяемый функцией $\tilde{\gamma}(k)$.

Выберем ядро $\gamma(x)$ в уравнении (23) в виде

$$\gamma(x) = \beta\gamma_0(x), \quad (25)$$

где $\beta$ — произвольная постоянная, а функция

$$\gamma_0(x) = \frac{q}{2}\exp\left(-q|x|\right) \quad (26)$$

удовлетворяет уравнению

$$\left(\partial_x^2 - q^2\right)\gamma_0(x) = -q^2\delta(x). \quad (27)$$

Величина, обратная $q$, определяет характерный размер, на котором происходит спадание функции $\gamma_0(x)$.

Используя условие нормировки (20) и обозначая $\alpha_0 = -\alpha$, из (25) и (26) получаем

$$\beta = 1 + \alpha. \quad (28)$$

Как видим, в рассматриваемом случае в силу условия нормировки константа $\beta$ полностью определяется значением $\alpha$.

Подставляя выражения (25) и (26) в уравнение (23), действуя на обе части получившегося уравнения оператором $\left(\partial_x^2 - q^2\right)$, учитывая (27) и (28), получим дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered}\left(\partial_x^2 - q^2\right)\left(\partial_t\eta + c_0\sum_{n=1}^{N}\alpha_{2n}\partial_x^{2n+1}\eta + \eta\partial_x\eta\right) - \\ - \alpha c_0\partial_x^3\eta - c_0 q^2\partial_x\eta = 0.\end{gathered} \quad (29)$$

Данное уравнение содержит производные высших порядков и нелинейности вида $\eta\eta_x, \eta\eta_{xxx}$, $\eta_x\eta_{xx}$. Различные варианты такого типа уравнений обсуждаются в литературе [35, 42–45].

4. Остановимся более подробно на случае, когда в (29) слагаемым, содержащим сумму по $n$, можно пренебречь. В этом случае уравнение (29) сводится к виду

$$\left(\partial_x^2 - q^2\right)\left(\partial_t\eta + \eta\partial_x\eta\right) - \alpha c_0\partial_x^3\eta - c_0 q^2\partial_x\eta = 0. \quad (30)$$

Отметим, что уравнение (30) зависит от единственного параметра $\alpha$, который входит в него в качестве коэффициента перед третьей производной $\partial_x^3\eta$.

Уравнение (30) соответствует выбору ядра $\kappa(x)$ в виде

$$\kappa(x) = -\alpha\delta(x) + (1+\alpha)\gamma_0(x). \quad (31)$$

Функция $\kappa(x)$ (31) содержит два независимых параметра $\alpha$ и $q$, которые, соответственно, характеризуют ее амплитуду и ширину. Частный случай ядра (31) рассматривался в работе [46] при исследовании нелинейных волн в упругих средах с сильной пространственной дисперсией. Рассмотренный Уиземом случай, когда ядро аппроксимируется функцией (13), соответствует $\alpha = 0$ и $q = \frac{\pi}{2}$.

Линеаризуя (30), получим закон дисперсии $\omega(k)$, который запишем в виде

$$\omega = c_0 k\frac{1 - \alpha\left(\frac{k}{q}\right)^2}{1 + \left(\frac{k}{q}\right)^2}. \quad (32)$$

Значение $\alpha = -1$ соответствует акустическому закону дисперсии $\omega = c_0 k$. В этом случае в ядре (31) остается единственное слагаемое, равное дельта-

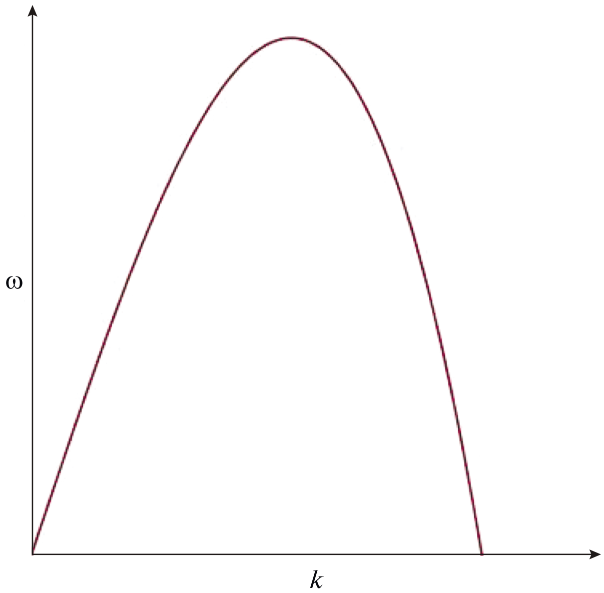


**Рис. 3.** График закона дисперсии (32) при $\alpha \geq 1$.

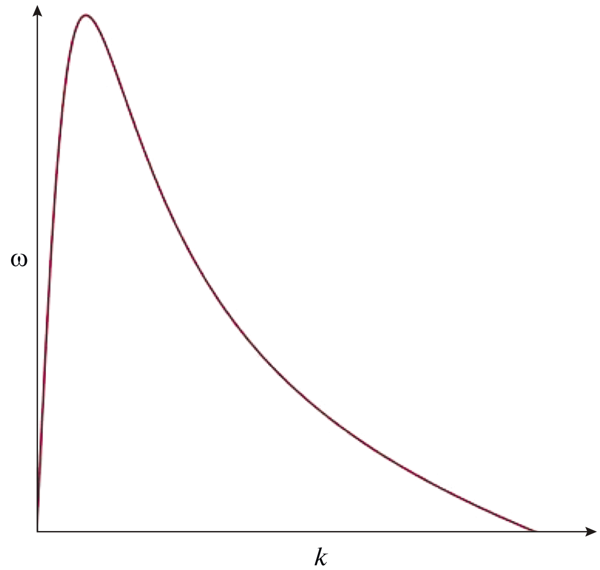


**Рис. 4.** График закона дисперсии (32) при $0 < \alpha < 1$.

функции Дирака. Экстремумы функции (32) находятся в точках, где обращается в нуль групповая скорость

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = c_0 \frac{1 - (1+3\alpha)\left(\frac{k}{q}\right)^2 + \left(\frac{k}{q}\right)^4}{\left(1 + \left(\frac{k}{q}\right)^2\right)^2}, \tag{33}$$

что достигается при значениях $k$, равных

$$k_{\pm} = q\sqrt{\frac{-(1+3\alpha) \pm \sqrt{(1+3\alpha)^2 + 4\alpha}}{2\alpha}}. \tag{34}$$

Корень $k_-$ будет вещественным при $-\frac{1}{9} \leq \alpha < 0$, а $k_+$ – при $-\frac{1}{9} \leq \alpha$. Таким образом, в области $-\frac{1}{9} \leq \alpha < 0$ имеется два вещественных корня $k_{\pm}$, отвечающих максимуму и минимуму функции $\omega(k)$, а в области $0 \leq \alpha$ – один вещественный корень, отвечающий максимуму $\omega(k)$.

Характерные графики законов дисперсии приведены на рис. 3–7 ($c_0 = 1, q = 1$). Из приведенных графиков следует, что ядро (31) описывает достаточно широкий спектр законов дисперсии. График для случая $\alpha = 0$ аналогичен графику на рис. 2. Если значение $\alpha$ неотрицательно ($\alpha \geq 0$), то, как видно из рис. 2–4, кривые дисперсии ограничены сверху. Для отрицательных значений параметра $\alpha$ ($\alpha < 0$) при больших значениях волнового числа $k$ кривые дисперсии (32) асимптотически выходят на прямую линию

$$\omega = -\alpha c_0 k, \tag{35}$$

которая изображена на рис. 5–7 пунктирной линией.

Несмотря на наличие указанной асимптоты, закон дисперсии (32) при отрицательных значениях параметра $\alpha < 0$ качественно отражает свойство функции (9) неограниченно возрастать при $k \to \infty$. Последнее позволяет сделать вывод о предпочтительности выбора ядра (31) по сравнению с ядром (13) при описании с помощью уравнения Уизема гравитационных волн в слое жидкости.

Отметим, что наличие асимптот в виде прямой линии на графике дисперсионных кривых при $\alpha < 0$ является следствием выбранного приближения, согласно которому в уравнении (29) пренебрегли членами, содержащими все высшие производные, кроме третьей. Действительно, если взять уравнение (29) полностью, то после его линеаризации получим закон дисперсии

$$\omega = c_0 k \left( \frac{1 - \alpha\left(\frac{k}{q}\right)^2}{1 + \left(\frac{k}{q}\right)^2} + \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \alpha_{2n} \left(\frac{k}{q}\right)^{2n} \right). \tag{36}$$

Поскольку выражение (36) является аппроксимацией точного закона дисперсии, то число $N$ и коэффициенты $\alpha_{2n}$ могут быть подобраны так, что (36) будет качественно правильно отражать особенности аппроксимируемого выражения при любых значениях $k$. При больших значениях волнового числа ($k \gg q$) из (36) получаем

$$\omega \approx c_0 k\left(-\alpha + \sum_{n=1}^{N}(-1)^n \alpha_{2n}\left(\frac{k}{q}\right)^{2n}\right). \quad (37)$$

Как видим, при больших $k$ закон дисперсии является полиномиальным и асимптоты в виде прямых (35) появляются только в случае, когда в выражении (37) мы пренебрегаем слагаемыми, содержащими все степени $k$, кроме первой.

5. Рассмотрим теперь стационарные нелинейные волны, удовлетворяющие уравнению (30). Считаем $\eta = \eta(\xi)$, где $\xi = x - ct$, $c$ – скорость возмущения. Тогда в целях удобства дальнейшего анализа уравнение (30) запишем для безразмерной функции $y(\xi)$:

$$\partial_\xi\left[\left(\partial_\xi^2 - q^2\right)\left(\sigma y - \frac{y^2}{2}\right) - q^2 y\right] = 0, \quad (38)$$

где

$$y = \frac{\eta}{c_\alpha}, \quad c_\alpha = (1+\alpha)c_0, \quad (39)$$

$$\sigma = 1 + \frac{\Delta c}{c_\alpha}, \quad \Delta c = c - c_0. \quad (40)$$

Рассматривая спадающие на бесконечности решения $\partial_\xi^n y(\pm\infty) = 0$, $n = 0, 1$, преобразуем уравнение (38) к виду

$$(\sigma - y)^2 y'^2 = \frac{q^2 y^2}{4}(y - y_-)(y - y_+), \quad (41)$$

где штрих означает производную по $\xi$, а

$$y_{\pm} = 2\left(\sigma - \frac{2}{3} \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}\sigma}\right). \quad (42)$$

Уравнение (41) имеет решение в виде волны предельной амплитуды [10–12], для которой

$$y_{\pm} = \sigma = \frac{4}{3}. \quad (43)$$

В этом случае уравнение (41) сводится к виду $y' = \pm q y$, а его решение запишется в форме

$$y = \frac{4}{3} e^{-\frac{q}{2}|\xi - \xi_0|}, \quad (44)$$

где $\xi_0$ – произвольная постоянная. Видим, что для волны предельной амплитуды $0 \le y \le \frac{4}{3}$, а сама волна имеет характерное заострение на гребне волны (в точке $\xi = \xi_0$) [10–12]. Возвращаясь к исходной функции $\eta(\xi)$, получаем

$$\eta(\xi) = \eta_{\pm} e^{-\frac{q}{2}|\xi - \xi_0|}, \quad (45)$$

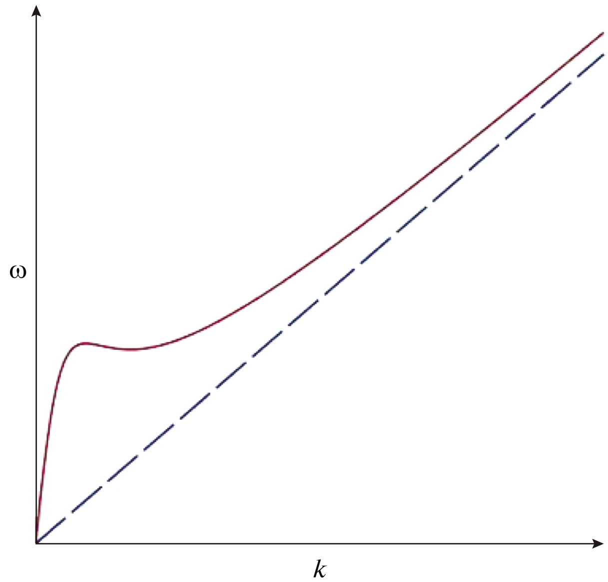


**Рис. 5.** График закона дисперсии (32) при $-\frac{1}{9} \le \alpha < 0$.

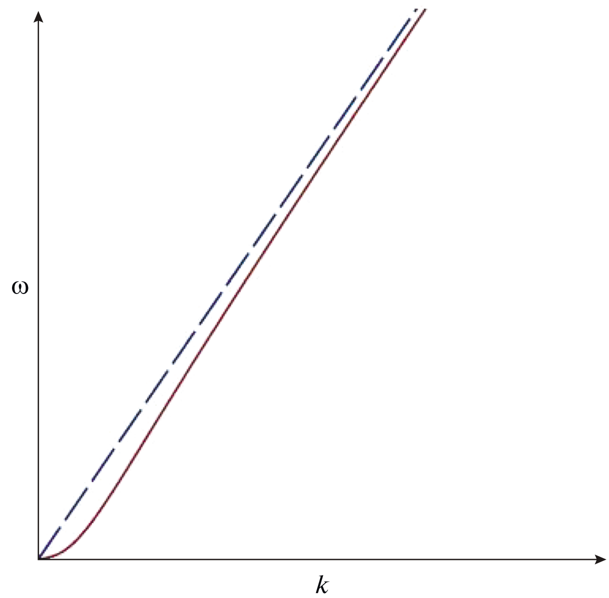


**Рис. 6.** График закона дисперсии (32) при $-1 < \alpha < -\frac{1}{9}$.

где

$$\eta_{\pm} = \frac{4}{3} c_\alpha. \quad (46)$$

Из условия $\sigma = \frac{4}{3}$ и (40) находим, что скорость волны предельной амплитуды равна

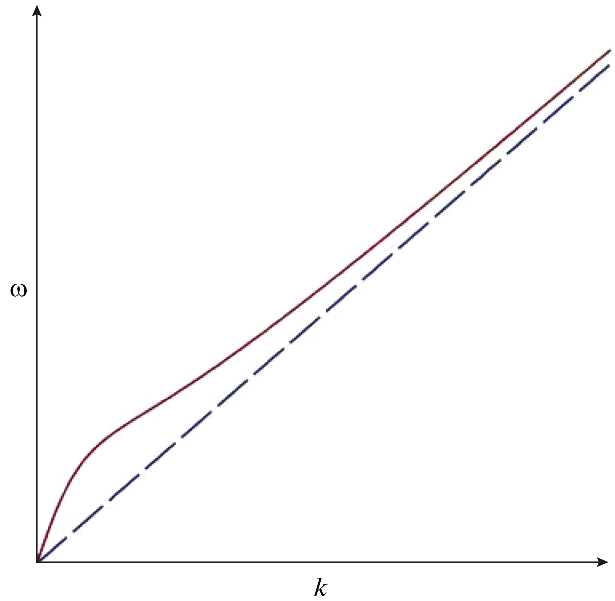


**Рис. 7.** График закона дисперсии (32) при $\alpha < -1$.

$$c = \frac{4+\alpha}{3}c_0. \qquad (47)$$

Из (46) и (47) следует, что амплитуда $\eta_\pm$ и скорость $c$ волны предельной амплитуды зависят от параметра $\alpha$. Так как $c > 0$, то волны предельной амплитуды существуют только при $\alpha > -4$. При $-4 < \alpha < -1$ имеем дозвуковую волну ($c < c_0$), отрицательная амплитуда которой ограничена снизу значением $\eta_{\min} = -4c_0$: $\eta_{\min} < \eta_\pm < 0$. Если же $\alpha > -1$, то волна будет сверхзвуковой ($c > c_0$) и иметь положительную амплитуду ($\eta_\pm > 0$).

Угол заострения на вершине волны предельной амплитуды $\vartheta$ также определяется параметром $\alpha$:

$$\vartheta = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{3}qc_0(1+\alpha)\right). \qquad (48)$$

Угол $\vartheta$ отрицателен при $-4 < \alpha < -1$, т.е. для сверхзвуковых волн положительной амплитуды, и положителен при $\alpha > -1$, т.е. для дозвуковых волн отрицательной амплитуды. Из (48) видим, что при $c_0 = 1$ и $q = \dfrac{\pi}{2}$ для волн на поверхности воды угол Стокса $\vartheta_S = 2\pi/3$ [10] соответствует значению $\alpha = \dfrac{3\sqrt{3}}{\pi} - 1 \approx 0.65$. Таким образом, с помощью подбора параметра $\alpha$ можно получить значение угла заострения для волн предельной амплитуды на поверхности слоя воды, равное углу Стокса.

6. Вблизи $\sigma = 1$ величина $y_-$ мала

$$y_- \approx 3(\sigma - 1) \ll 1, \qquad (49)$$

а $y_+ \approx \dfrac{4}{3}$. Вследствие этого при значениях $\sigma$, близких к 1, имеем $|y| \le y_- \ll \sigma < y_+$, а уравнение (41) принимает вид

$$y'^2 = \frac{1}{3}q^2y^2(y_- - y). \qquad (50)$$

Это уравнение имеет решение с профилем, характерным для односолитонного решения уравнения Кортевега–де Фриза. В результате для исходной функции $\eta(\xi)$ получаем

$$\eta(\xi) = \frac{\eta_-}{\mathrm{ch}^2\left(\dfrac{\xi - \xi_0}{\Delta}\right)}, \qquad (51)$$

где амплитуда $\eta_-$ определяется выражениями (39), (49), а ширина $\Delta$ равна

$$\Delta = \frac{2}{q\sqrt{\sigma - 1}}. \qquad (52)$$

Из полученных выражений следует, что чем ближе $\sigma$ к 1, тем меньше амплитуда солитона и больше его ширина. Учитывая (40), получаем, что ширина солитона

$$\Delta = \frac{2}{q}\sqrt{\frac{c_\alpha}{\Delta c}}, \qquad (53)$$

а его амплитуда в исходных переменных согласно (39) и (49) равна

$$\eta_- = c_\alpha y_- = 3\Delta c. \qquad (54)$$

Как видим из (53) и (54), амплитуда возмущения $\eta_-$ не зависит от параметра $\alpha$, а определяется разностью $\Delta c$ между скоростью возмущения $c$ и скоростью звука $c_0$. Ширина $\Delta$, наоборот, зависит как от $\Delta c$, так и от параметра $\alpha$. В результате получаем, что при $\alpha > -1$ мы имеем дело со сверхзвуковым солитоном ($c > c_0$) положительной амплитуды $\eta_- > 0$, а при $\alpha < -1$ — с дозвуковым ($c < c_0$) солитоном отрицательной амплитуды $\eta_- < 0$.

7. Будем считать, что профиль волны медленно изменяется в пространстве, а уравнение (30) запишем в сопровождающей (сопутствующей) системе координат [1–3]. Для этого положим $\eta = \eta(\tau, \varepsilon x)$, где $\tau = t - \dfrac{x}{c_0}$, а $\varepsilon$ — малый параметр. В нулевом порядке по $\varepsilon$ получаем

$$\partial_\theta\left(\left(\partial_\theta^2 - q^2\right)\frac{\eta^2}{2} - c_\alpha\partial_\theta^2\eta\right) = 0, \qquad (55)$$

где $\theta = c_0\tau$. Для уединенных возмущений

$$\eta(\pm\infty) = \eta_0, \quad \partial_\theta^n\eta = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (56)$$

в результате чего уравнение (55) преобразуется к виду

$$\partial_\theta^2\left(\frac{\eta^2}{2}-c_\alpha\eta\right)=\frac{q^2}{2}\left(\eta^2-\eta_0^2\right). \tag{57}$$

Положим

$$\eta=\eta_0+\eta_1,\quad z_0=\frac{\eta_0}{c_\alpha},\quad z=\frac{\eta_1}{c_\alpha}, \tag{58}$$

где функция $z$ (соответственно $\eta_1$) удовлетворяет условиям

$$z(\pm\infty)=0,\quad \partial_\theta^n z=0,\quad n=1,2,\ldots. \tag{59}$$

После несложных преобразований уравнение (57) приводится к виду

$$(s-z)^2 z'^2=\frac{q^2z^2}{4}(z-z_-)(z-z_+), \tag{60}$$

где $s=1-z_0$, штрих означает производную по $\theta$, а

$$z_\pm=\frac{2}{3}\left(1-3z_0\pm\sqrt{1+3z_0}\right). \tag{61}$$

Волнам предельной амплитуды соответствует

$$z_0=-\frac{1}{3},\quad z_\pm=\frac{4}{3}, \tag{62}$$

что приводит к решению

$$\eta(\theta)=\eta_0+\eta_\pm e^{-\frac{q}{2}|\theta-\theta_0|}. \tag{63}$$

Волна малой амплитуды возникает вблизи $z_0=0$. В этом случае

$$z_-\approx -3z_0,\quad z_+\approx\frac{4}{3}. \tag{64}$$

Считая, что $|z|\le z_-\ll 1<z_+$, получаем уравнение

$$z'^2=\frac{1}{3}q^2z^2(z_--z), \tag{65}$$

которое по форме совпадает с (50). Из (65) и (58) получаем

$$\eta(\theta)=\eta_0-\frac{3\eta_0}{\mathrm{ch}^2\left(\dfrac{\theta-\theta_0}{\Delta}\right)}, \tag{66}$$

где

$$\Delta=\frac{2}{q}\sqrt{\frac{c_\alpha}{-\eta_0}}. \tag{67}$$

Нетрудно видеть, что функции $\eta(\xi)$ и $\eta(\theta)$ связаны между собой преобразованием

$$\eta(\xi)=\eta(-\theta-\Delta ct)-\eta_0. \tag{68}$$

Для волн предельной амплитуды $\eta_0=-c_\alpha/3$, а для волн малой амплитуды $\eta_0=-\Delta c$.

Поскольку преобразование (68) не затрагивает параметров $q$ и $\alpha$, то выводы, сделанные в координатах $\xi$ о связи этих параметров со свойствами уединенных волн, остаются справедливыми также в координатах $\theta$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн (2-е изд.). М.: Наука, 1990. 432 с.
2. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
3. *Красильников В.А., Крылов В.В.* Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 400 с.
4. *Наугольных К.А., Островский Л.А.* Нелинейные волновые процессы в акустике. М.: Наука, 1990. 237 с.
5. *Агранович В.М., Гинзбург В.Л.* Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. М.: Наука, 1960. 376 с.
6. *Туров Е.А.* Материальные уравнения электродинамики. М.: Наука, 1983. 160 с.
7. *Бхатнагар П.* Нелинейные волны в одномерных диспергирующих системах. М.: Мир, 1983. 136 с.
8. *Карпман В.И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
9. *Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В.* Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 320 с.
10. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
11. *Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.* Нелинейные волны. М.: ЛЕНАНД, 2017. 312 с.
12. *Габов С.А.* Введение в теорию нелинейных волн. М.: Изд.-во МГУ, 1988. 176 с.
13. *Кельберт М.Я., Сазонов И.А.* Распространение импульсов в жидкостях. М.: Наука, 1991. 158 с.
14. *Руденко О.В., Солуян С.И., Хохлов Р.В.* Проблемы теории нелинейной акустики // Акуст. журн. 1974. Т. 20. № 3. С. 449–457.
15. *Руденко О.В.* Нелинейные интегро-дифференциальные модели для интенсивных волн в средах типа биотканей и геоструктур со сложной внутренней динамикой релаксационного типа // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 4. С. 368–375.
16. *Лобанова Е.Г., Лобанов С.В., Хохлова В.А.* Распространение встречных волн с разрывами в нелинейной среде типа биологической ткани // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 4. С. 356–367.
17. *Sarvazyan A.P., Rudenko O.V., Svanson S.D., Fowlkes J.B., Emelianov S.Y.* Shear wave elasticity imaging: a new ultrasonic technology of medical diagnostics // Ultrasound Med. & Biol. 1998. V. 24. № 9. P. 1419–1435.
18. *Кащеева С.С., Сапожников О.А., Хохлова В.А., Аверкью М.А., Крам Л.А.* Нелинейное искажение и поглощение мощных акустических волн в среде со степенной зависимостью коэффициента поглощения от частоты // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 2. С. 211–219.

19. *Васильева О.А., Лапшин Е.А., Руденко О.В.* Интенсивные импульсы в релаксирующих средах с ограниченным “временем памяти”, степенными и неаналитическими нелинейностями // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 1. С. 3–9.

20. *Полякова А.Л., Солуян С.И., Хохлов Р.В.* К вопросу о распространении конечных возмущений в релаксирующей среде // Акуст. журн. 1962. Т. 8. № 1. С. 107–112.

21. *Солуян С.И., Хохлов Р.В.* Акустические волны конечной амплитуды в среде с релаксацией // Акуст. журн. 1962. Т. 8. № 2. С. 220–227.

22. *Руденко О.В., Солуян С.И.* К вопросу о рассеянии звука на звуке // Акуст. журн. 1972. № 3. С. 421–425.

23. *Кобелев Ю.А., Островский Л.А.* Модели газожидкостной смеси, как диспергирующей среды // Нелинейная акустика. Теоретические и экспериментальные исследования. Горький, 1980. С. 143–160.

24. *Гинзбург В.Л.* Об общей связи между поглощением и дисперсией звуковых волн // Акуст. журн. 1955. Т. 1. № 1. С. 31–39.

25. *O’Donnel M., Jaynes E.T., Miller J.G.* General relationships between ultrasonic attenuation and dispersion // J. Acoust. Soc. Am. 1978. V. 63. № 6. P. 1935–1937.

26. *O’Donnel M., Jaynes E.T., Miller J.G.* Kramers-Kronig relationships between ultrasonic attenuation and phase velocity // J. Acoust. Soc. Am. 1981. V. 69. № 3. P. 696–701.

27. *Карабутов А.А., Подымова Н.Б., Соколовская Ю.Г.* Локальные соотношения Крамерса-Кронига для коэффициента затухания и фазовой скорости продольных ультразвуковых волн в полимерных композитах // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 2. С. 182–189.

28. *Андреев В.Г., Руденко О.В., Сапожников О.А., Хохлова В.А.* Подавление нелинейного затухания звуковой волны в среде, содержащей резонансный поглотитель с конечной шириной линии // Вестник Моск. Ун-та. Сер. 3: Физика. Астрономия. 1985. № 3. С. 58–62.

29. *Габов С.А.* Об уравнении Уизема // Доклады АН СССР. Сер. Математика. 1978. Т. 242. № 5. С. 993–996.

30. *Томилина Н.О.* О заострении волн, описываемых уравнением Уизема // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 3: Физика. Астрономия. 1991. Т. 32. № 2. С. 14–19.

31. *Елеонский В.М., Королев В.Г., Кулагин Н.Е.* О динамической системе, порожденной уравнением Уизема с осциллирующим ядром // Изв. Вузов “ПНД”. 1993. Т. 1. № 3. С. 72–85.

32. *Moldabayev D., Kalisch H., Dutykh D.* The Whitham equation as a model for surface water waves // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2015. V. 309. P. 99–107. arXiv:1410.8299v1

33. *Naumkin P.I., Shishmarev I.A.* Nonlinear nonlocal equations in the theory of waves // Amer. Math. Soc. 1994. 304 p.

34. *Климонтович Ю.Л.* Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. М.: Наука, 1964. 282 с.

35. *Hur V.M., Johnson M.A.* Modulational instability in the Whitham equation for water waves // Studies in Applied Mathematics. 2015. V. 134. P. 120–143. arXiv:1312.1579v2

36. *Johnson M.A., Wright J.D.* Generalized solitary waves in the gravity-capillary Whitham equation // Stud Appl Math. 2020. V. 144. P. 102–130. arXiv:1807.11469

37. *Stefanov A., Wright J.D.* Small amplitude traveling waves in the full-dispersion Whitham equation // J. Dynamics and Differential Equations. 2020. V. 32. P. 85–99. arXiv:1802.10040v1

38. *Hur V.M., Pandey A.K.* Modulational instability in the full-dispersion Camassa-Holm equation // Proc. R. Soc. A. 2017. V. 473. 20170153. arXiv:1702.08708v1

39. *Remonato F., Kalisch H.* Numerical bifurcation for the capillary Whitham equation // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2017. V. 343. № 15. P. 51–62. arXiv:1604.08324v1

40. *Ehrnström M., Wahlen E.* On Whitham’s conjecture of a highest cusped wave for a nonlocal dispersive equation // Annales de l’Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire. 2019. V. 36. № 6. P. 1603-1637. arXiv:1602.05384v1

41. *Arnesen M.N.* Non-uniform dependence on initial data for equations of Whitham type // arXiv:1602.00250v3

42. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Нелинейные уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2002. 432 с.

43. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005. 256 с.

44. *Ильичев А.Т.* Уединенные волны в моделях гидромеханики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 256 с.

45. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики. М.: МИФИ, 2008. 352 с.

46. *Памятных Е.А., Урсулов А.В.* Нелинейные уединенные волны в нелокально упругих твердых телах // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 2. С. 193–199.

АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2020, том 66, № 4, с. 401–407

## АКУСТИКА ОКЕАНА. ГИДРОАКУСТИКА

УДК 534.14;534.2

# ЛАБОРАТОРНОЕ ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН НА ШЕЛЬФЕ


**С. Н. Гурбатов[a], *, А. Е. Бычков[a], П. Н. Вьюгин[a], И. Ю. Грязнова[a], **, М. С. Дерябин[a, b], В. В. Курин[a], А. И. Хилько[a, b]**

*[a]Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (ННГУ), пр. Гагарина 23, Нижний Новгород, 603022 Россия*

*[b]Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук (ИПФ РАН), ул. Ульянова 46, Нижний Новгород, 603155 Россия*

**e-mail: gurb@rf.unn.ru*

***e-mail: gryaznova@rf.unn.ru*

Поступила в редакцию 04.12.2019 г.
После доработки 21.02.2020 г.
Принята к публикации 25.02.2020 г.

В лабораторных условиях проведено исследование вертикальной структуры коротких модовых импульсов вблизи критических толщин гидроакустических волноводов постоянной и переменной глубины с различными моделями дна.

*Ключевые слова:* масштабное физическое моделирование, межмодовая дисперсия, внутримодовая дисперсия, модовый импульс, разрешение сигнала

**DOI:** 10.31857/S0320791920040036

В последнее время все большее внимание привлекает распространение звука на континентальном шельфе, т.е. в мелком море. Велико значение задач распространения акустических волн в шельфовой зоне для хозяйственной деятельности человека, связанной с поиском и эксплуатацией шельфовых месторождений нефти и газа, использованием мелководья для размещения ветровых электростанций, а также быстро возрастающим вниманием к экологическим проблемам прибрежной зоны, в частности, проблеме "шумового" загрязнения. Океанский шельф представляет собой зону вокруг континента, простирающуюся от линии низкой воды до глубины, на которой происходит резкое увеличение уклона дна в сторону больших глубин. С точки зрения акустики, океанский шельф – это волновод, ограниченный поверхностью воды и дном. На распространение звука в таких волноводах оказывают влияние множество факторов. Наиболее существенные из них – форма профиля скорости звука и геоакустические свойства морского дна. Усилиями различных групп исследователей получено большое количество экспериментальных и теоретических результатов. Так, только в последние годы были проведены исследования на арктическом шельфе [1], шельфе Японского моря [2] и Сахалина [3].

Несмотря на полученные результаты, освоение ресурсов северного шельфа и мелководных окраинных морей требует получения еще большего информационного гидроакустического обеспечения, в том числе для решения как задач связи, так и задач подводного наблюдения. Например, трудности описания нижней границы океанического волновода возникают уже на этапе создания геоакустической модели дна. Данных о свойствах дна часто бывает недостаточно, но и имеющиеся данные могут определять слишком сложную модель дна для теоретического представления звукового поля.

Целью данной работы было проведение физического моделирования процессов распространения коротких модовых импульсов в гидроакустических волноводах постоянной и переменной глубины, моделирующих шельфовую зону, в строго контролируемых лабораторных условиях для выявления влияния отдельных параметров волноводов и условий излучения-приема на результаты измерений.

Весьма эффективной теоретической моделью описания акустических полей в шельфовой зоне Мирового океана является так называемый метод "горизонтальных лучей–вертикальных мод" [4]. Качественная картина формирования во временной области отдельных модовых импульсов волновода показана на рис. 1. Очевидно, что расстояние разрешения отдельных нормальных волн в

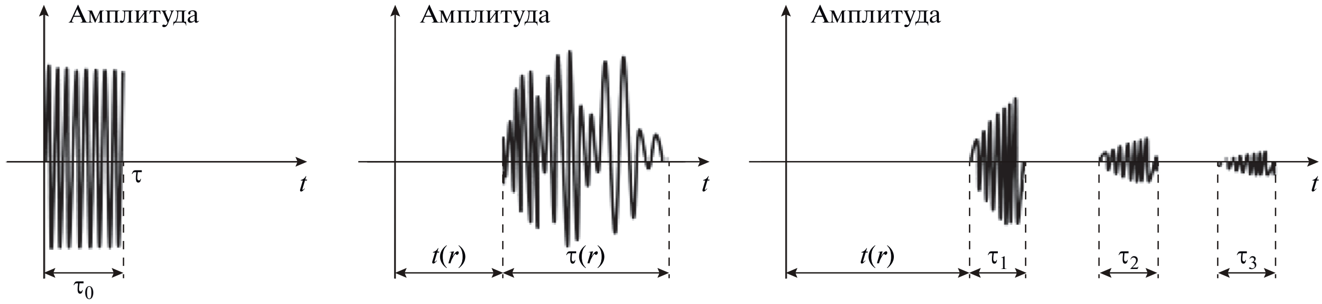


**Рис. 1.** Качественная иллюстрация метода разрешения отдельных нормальных волн в волноводе.

зависимости от длительности импульса имеет экстремум – минимум [5] (рис. 2).

Для того чтобы в ходе эксперимента уверенно регистрировать модовые импульсы нужных номеров, необходимо располагать приемный гидрофон на оптимальном расстоянии от источника и излучать сигнал оптимальной длительности. Расчет этих оптимальных расстояний и оптимальной длительности производился с помощью численных методов. Также с помощью численных методов находились времена вступления импульсов на приемный гидрофон.

Для количественного сравнения экспериментальных временных интервалов (в частности, времен вступлений модовых импульсов) с теоретическими расчетами необходимо знать значение скорости звука с максимальной точностью, для этого можно воспользоваться эмпирической формулой [6], измерив значения температуры, солености и давления:

$$c = c_0 + \Delta c(T) + \Delta c(S) + \Delta c(P) + \Delta c(T,S,P), \quad (1)$$

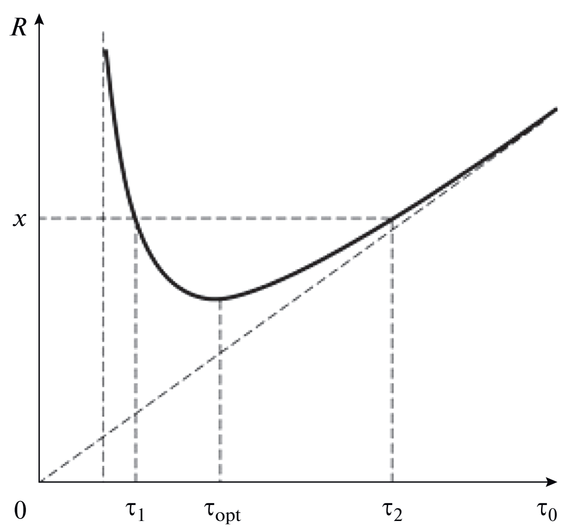


**Рис. 2.** Качественная зависимость расстояния разделения мод $R$ от начальной длительности импульса $\tau_0$.

где $c_0$ – некоторое опорное значение скорости звука, а остальные члены – поправки-приращения, учитывающие раздельное и совместное влияние различных факторов: температуры $T$ (°C), солености $S$ (‰) и гидростатического давления $P$ (Па). В данной работе скорость звука в воде рассчитывалась по формуле Вильсона [7]. Остальные поправки–приращения в выражении (1) не учитывались, так как соленость воды в лабораторной установке $S = 0$‰, а относительный вклад последнего слагаемого около 0.01%.

Для нахождения критерия разрешимости двух последовательных мод в волноводе воспользуемся способом селекции мод [8], основанном на межмодовой дисперсии, проявляющейся в различии групповых скоростей отдельных мод. Пусть точечный излучатель, расположенный в волноводе, создает радиоимпульсы длительностью $\tau_0$ с частотой заполнения $f_0$ и шириной спектра $2\Delta f_0$. Так как в среде имеет место геометрическая дисперсия, то групповая скорость зависит не только от номера моды, но и от частоты, поэтому в процессе распространения импульса происходит его разделение на импульсы по отдельным модам, связанное с межмодовой дисперсией, и уширение импульса на каждой моде из-за влияния внутримодовой частотной дисперсии. Отдельные нормальные волны разрешаются, если время прихода заднего фронта импульса, соответствующего моде $n$, меньше времени прихода переднего фронта импульса, представляющего моду $n + 1$ номера.

Кроме того, необходимо, чтобы дисперсия групповых скоростей для заданного номера $n$ из-за конечности ширины спектра излучаемого сигнала $2\Delta f_0$ была меньше дисперсии групповых скоростей для мод соседних номеров, т.е. выполнялось условие

$$\left(v_{n,f_0+\Delta f} - v_{n,f_0-\Delta f}\right) < \left(v_{n+1,f_0+\Delta f} - v_{n+1,f_0-\Delta f}\right), \quad (2)$$

где $v_n$ – групповая скорость моды с номером $n$, $f_0$ – частота заполнения сигнала.

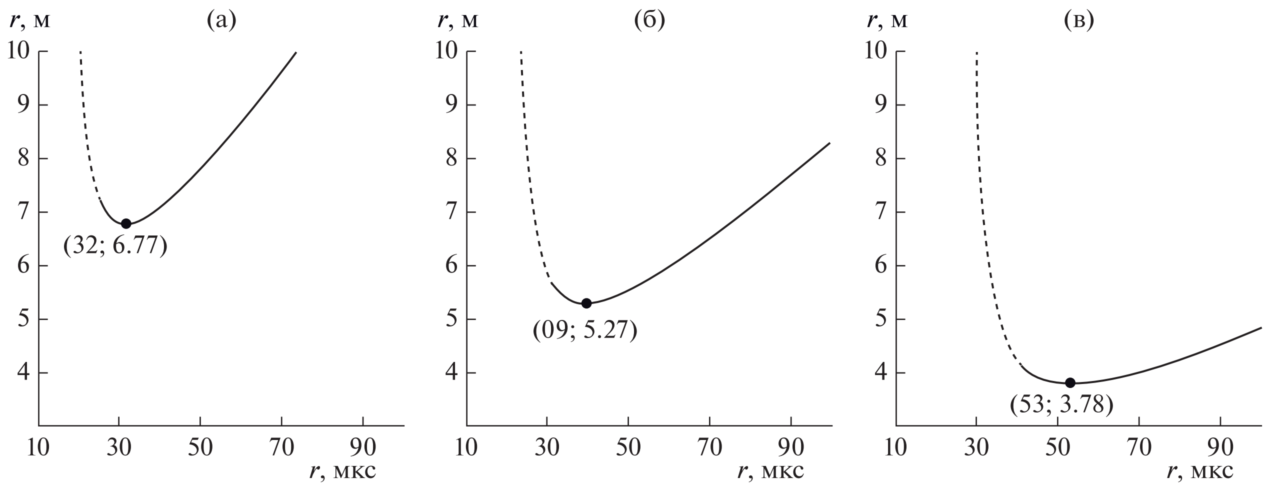


**Рис. 3.** Зависимость расстояния разрешения 1 и 2 мод от длительности импульса при различных частотах заполнения.

На рис. 2 показана качественная зависимость расстояния разделения мод $R$ от начальной длительности импульса $\tau_0$ для некоторой несущей частоты. Для того чтобы при расстояниях $x > x_{\mathrm{opt}}$ приходящие на приемник импульсы отвечали отдельным модам, величина $\tau_0$ должна удовлетворять условию $\tau_1 < \tau_0 < \tau_2$, где $\tau_1$ и $\tau_2$ определяются из равенства $x = x_{\mathrm{opt}}$. При слишком короткой длительности сигнала на источнике модовые импульсы вообще не разделяются, а при большой начальной длительности разделение происходит на расстояниях больших, чем оптимальное.

Оптимальное расстояние разрешения мод в волноводе постоянной глубины определяется условием [6]

$$\frac{r}{v_{n+1,f_0+\Delta f}} - \frac{r}{v_{n,f_0-\Delta f}} \geq \tau_0, \tag{3}$$

где $r$ – длина трассы распространения звука, $\tau_0$ – длительность излученного импульса, $\Delta f$ – полуширина спектра излучаемого сигнала. Выражение (3) говорит о том, что время прихода заднего фронта импульса моды с номером $n$ меньше времени прихода переднего фронта $n+1$-ой моды, т.е. моды разделяются.

Для примера рассмотрим волновод с постоянной скоростью звука и абсолютно мягким дном без затухания. Для вычисления оптимального расстояния нужно найти групповые скорости импульсов, зависящие от номера моды $n$:

$$v_{\mathrm{гр}n} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\pi n c}{H\omega}\right)^2}. \tag{4}$$

В итоге на основании выражений (2)–(4) составим функцию зависимости расстояния разделения мод $r$ от длительности импульса $\tau$:

$$r = \frac{c\tau}{\dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{(n+1)\pi c}{H(\omega + \Delta\omega)}\right)^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{n\pi c}{H(\omega - \Delta\omega)}\right)^2}}}, \tag{5}$$

где $c$ – скорость звука, $H$ – глубина волновода, $\omega$ – частота заполнения, $\Delta\omega$ – полуширина спектра. Формула (5) позволяет вычислить оптимальное расстояние разделения двух последовательных мод с номерами $n$ и $n+1$.

В ходе численных расчетов продемонстрировано, что функции $r(\tau)$ при некотором значении $\tau_{\min}$ имеют минимум. Значение $r(\tau_{\min})$ и есть оптимальное расстояние разрешения двух последовательных мод, а $\tau_{\min}$ – оптимальная длительность излучаемого импульса. Из рис. 3а–3в становится ясно, что для волновода глубиной $H = 36$ мм, в котором скорость звука $c = 1482$ м/с, первая и вторая моды разделяются при частоте заполнения 100 кГц на расстоянии 6.77 м, при 200 кГц – на расстоянии 5.27 м, а при 150 кГц – на расстоянии 3.78 м. Таким образом, при увеличении частоты заполнения расстояние, на котором разделяются моды, уменьшается.

Из рис. 4 следует, что при изменении параметра самого волновода, в данном случае глубины $H$, длительность импульса, при котором наблюдается минимум функции $r(\tau)$, постоянна. С ростом глубины волновода оптимальное расстояние, на котором моды разрешаются, как и следовало ожидать [5], увеличивается. Пунктиром на рис. 4 обозначены участки, где групповая скорость не имеет смысла, т.е. не выполняется условие $\tau > 2\pi/\omega$.

Для натурных экспериментов возможен другой критерий разделения принятых модовых сигналов: например, сигналы следует считать разделяющимися, если разница по времени регистра-

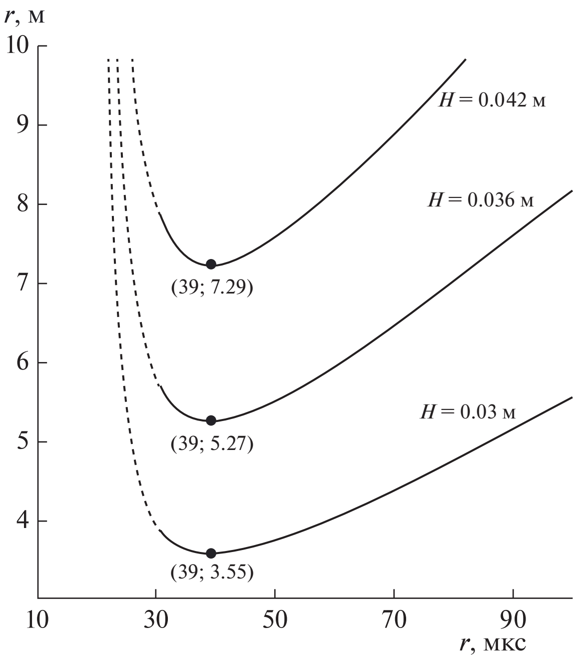


**Рис. 4.** Зависимость расстояния разрешения 1 и 2 мод от длительности импульса при различных глубинах волновода.

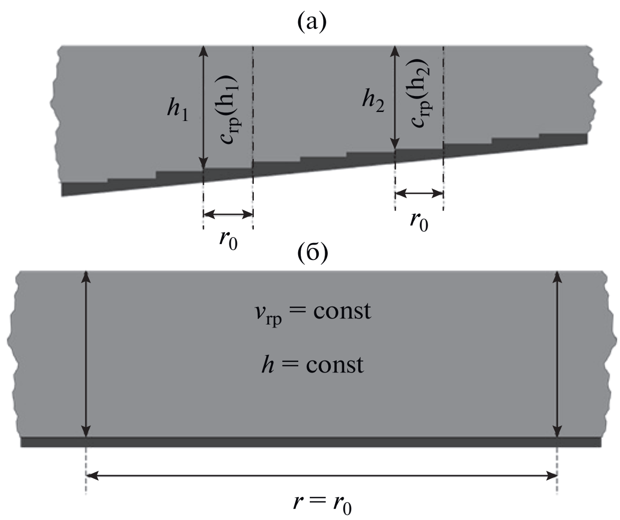


**Рис. 5.** (а) – Представление волновода переменной глубины как ступенчатого волновода. (б) – Представление волновода постоянной глубины как ступенчатого волновода с одной ступенькой.

ции максимумов их корреляционных функций примерно в три раза больше, чем ширина корреляционного пика. При этом предпочтительно излучать сигналы в виде М-последовательностей, автокорреляционная функция которых имеет минимальный уровень боковых лепестков. А под величинами $\tau_{0,1,2}$ следует понимать длительность составляющих огибающих корреляционных функций на выходе приемника.

Для описания распространения импульса в неоднородном по глубине волноводе трасса представлялась как последовательность коротких волноводов постоянной глубины $h$, длиной $r_0$, на которых групповая скорость распространения импульсов $v_{\text{гр}}$ считалась постоянной. Таким образом, волновод переменной глубины представлялся как ступенчатый волновод (рис. 5).

Общее время прохождения импульсом трассы длиной $r$ равно сумме времен прохождения всех участков длиной $r_0$: $t_{\text{общ}} = t_1 + t_2 + \ldots + t_m$, где $m = r/r_0$ – число коротких участков. Пусть $t_i$ – время прохождения одной ступеньки длиной $r_0$ импульсом моды номера $n$. Частота заполнения импульса $f_0$, длительность импульса $\tau$, угол клина $\alpha$, глубина в месте расположения источника $h_0$, $r$ – расстояние от источника до ступеньки номера $i$. Тогда несложно получить, что

$$t_i = \frac{r_0}{c_{\text{гр}}} = \frac{r_0}{c_0\sqrt{1 - \left(\dfrac{nc_0}{2h(r)(f_0 + \frac{1}{\tau})}\right)^2}} = \frac{r_0}{c_0\sqrt{1 - \left(\dfrac{nc_0}{2(h_0 - r\,\text{tg}\,\alpha)(f_0 + \frac{1}{\tau})}\right)^2}}. \quad (6)$$

Физическое моделирование проводилось на акустическом комплексе кафедры акустики Нижегородского госуниверситета. Эксперименты проводились в лабораторной ванне с заглушенными стенками длинной 500 см, шириной 65 см и глубиной 55 см, заполненной водой ($c$, $\rho$ – скорость звука и плотность воды), в которой устанавливалось подвесное дно ($c_1$, $\rho_1$ – скорость звука и плотность подложки). Дно с помощью винтов можно перемещать в вертикальной плоскости от 0 до 17 см. Фиксируя угол наклона дна установки, можно моделировать как плоский волновод, так и волновод с переменной по трассе глубиной, при этом угол наклона дна будет постоянным по всей длине трассы.

На поверхность подложки можно положить лист металла, таким образом смоделировать волновод с абсолютно жестким дном (его $c_2$, $\rho_2$ – скорость звука и плотность подложки).

Упрощенная блок-схема установки представлена на рис. 6, где также изображено взаимное расположение излучателя и приемника при проведении экспериментов. Кратко опишем работу узлов лабораторной установки. Для создания коротких импульсных сигналов прямоугольной

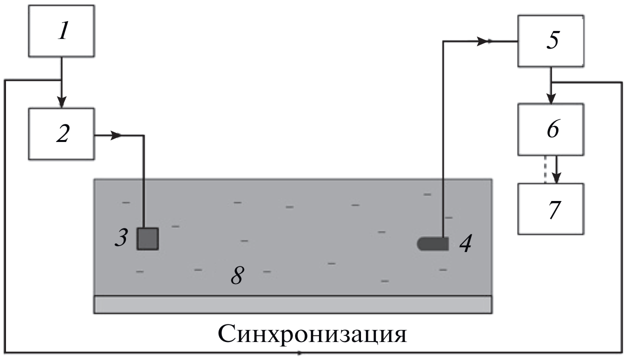


**Рис. 6.** Упрощенная блок-схема лабораторной установки для проведения эксперимента в волноводе постоянной глубины.

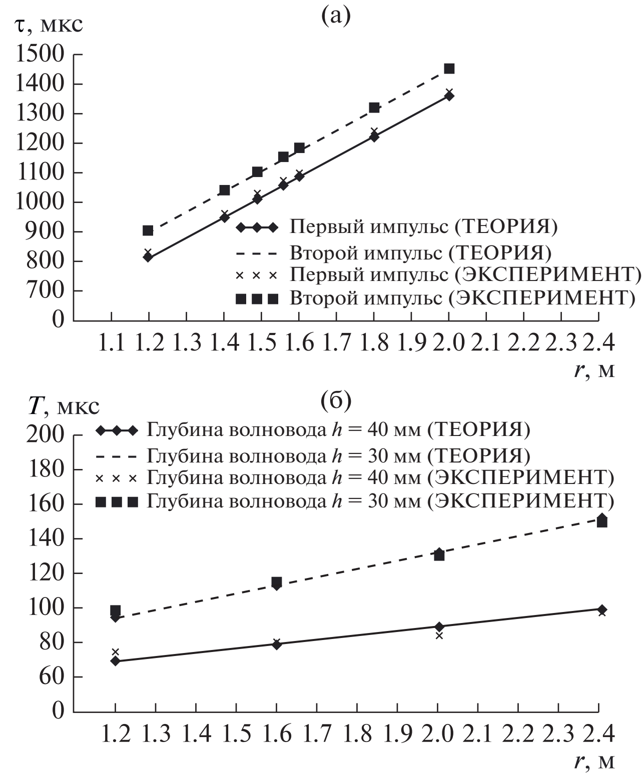


**Рис. 7.** Зависимость от длины трассы между источником и приемником (а) – времени вступления модовых импульсов и (б) – длительности принимаемого гидрофоном сигнала.

формы с высокочастотным заполнением $f_0$ используется генератор сигналов Tektronix AFG 3102. Для уменьшения уровня помех, связанных с реверберацией, которые возникают из-за ограниченности исследуемого объема, в эксперименте используется импульсный режим излучения. Длительность излучаемых прямоугольных импульсов $\tau_0$ удовлетворяет условию $f_0\tau_0 \gg 2\pi$, таким образом, обеспечивается квазимонохроматический режим излучения. Сформированный генератором прямоугольный сигнал поступает на усилитель сигналов Amplifier research Model 75A250 75Watts, а затем на излучатель сигналов PANAMETRIX A430S. Синхронизация работы всей установки обеспечивается синхронизирующим импульсом, вырабатываемым тем же генератором Tektronix AFG 3102. Пройдя через исследуемую среду, сигнал принимается гидрофоном Brüel & Kjær Type 8103. Приемник закреплен на каретке, способной перемещаться в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Принятый сигнал после усиления передается на цифровой осциллограф Tektronix DPO 4102B, где записывается на цифровой носитель для дальнейшей обработки на персональном компьютере.

Исследуемые волноводы представляли собой однородный водный слой (со скоростью звука $c$) с горизонтально или наклонно установленной подложкой (со скоростью продольных волн $c_1 = 6200$ м/с и плотностью $\rho_1 = 2720$ кг/м$^3$), угол в основании клина составлял $\alpha$, который изменялся в ходе эксперимента и принимал значения $\alpha_1 = 0.92°$, $\alpha_2 = 1.57°$, $\alpha_3 = 2.02°$. Глубина в месте расположения механоакустической части была такая же, как и в экспериментах с плоским волноводом сравнения $h_0$. Длина трассы от излучателя до приемника составляла $r$ по прямой. Так как скорость звука в воде зависит от температуры, перед каждым экспериментом производилось измерение температуры воды в установке с помощью ртутного термометра, а затем по полученному значению определялась скорость звука.

В ходе эксперимента были получены зависимости времени вступления модовых импульсов от длины трассы источник–приемник [9] и проведено их сравнение с теоретическими (рис. 7а). Параметры волновода при этом полагались следующими: глубина волновода $H = 25$ мм, температура $T = 19.8$°C, скорость звука $c_0 = 1482.48$ м/с, дно жесткое $\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$, характеристики излучаемого импульса: длительность $\tau_{имп} = 40$ мкс, частота заполнения $\nu = 100$ кГц, амплитуда давления $p_0 = 3.8$ Па.

На рис. 7б представлены теоретические зависимости длительности принимаемого сигнала от длины трассы и значения, полученные в ходе эксперимента с параметрами волновода: температура $T = 19.8$°C, скорость звука $c_0 = 1482.48$ м/с, дно мягкое $\left.p\right|_{z=0} = 0$, и параметрами акустического сигнала: длительность = 45 мкс, частота заполнения $\upsilon = 92$ кГц, амплитуда давления $p_0 = 3.8$ Па.

Итак, зная параметры волновода и параметры самого импульса на источнике, можно рассчитать оптимальное расстояние, на котором будут разре-

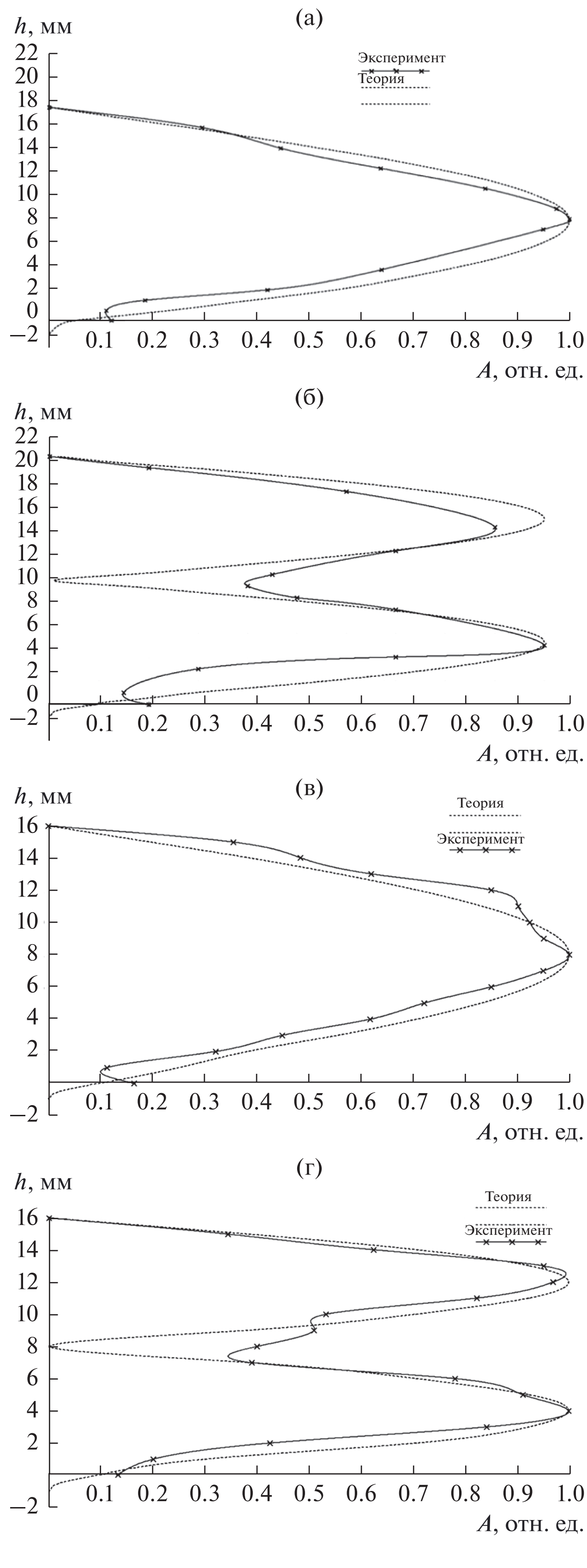


**Рис. 8.** Вертикальная структура первого (а, в) и второго (б, г) модовых импульсов в волноводах постоянной (а, б) и переменной (в, г) глубины.

шаться модовые импульсы, и предсказать оптимальную длительность этого импульса. Также с помощью программных методов можно определить времена вступления импульсов на приемный гидрофон. Но с уверенностью говорить о разделении модовых импульсов можно только после того как будет исследована вертикальная структура принимаемого сигнала. Для жидкого слоя, лежащего на жидком полупространстве, теоретический расчет предсказывает, что амплитуда волны уменьшается при заглублении в грунт по экспоненциальному закону, а распределение амплитуды в волноводе по вертикали схоже с гармонической функцией. Но в отличие от волновода с абсолютно мягкими границами, при максимальной глубине амплитуда звукового давления не будет равна 0.

Было проведено физическое моделирование процессов распространения акустических сигналов при различных параметрах волноводов и различных характеристик излучаемых импульсов. Для примера на рис. 8а, 8б представлено сравнение экспериментальных и теоретических данных о вертикальной структуре первого (рис. 8а) и второго (рис. 8б) модовых импульсов в волноводе постоянной глубины со следующими параметрами: глубина волновода $H_0 = 21$ мм, длина трассы $r = 60$ см, температура $T = 19°$C, скорость звука $c_0 = 1479.94$ м/с, дно – акустически мягкое, длительность $\tau_{имп} = 60$ мкс, частота заполнения $f_0 = 100$ кГц, амплитуда давления $p_0 = 3.8$ Па.

Схожая картина вертикальных структур модовых импульсов была получена и для волновода переменной глубины (рис. 8в, 8г). При этом глубина вблизи излучателя составляла $h_0 = 55$ мм, глубина вблизи приемника $h = 16$ мм, угол раствора клина $\alpha = 1.5°$, длина трассы $r = 150$ см, температура $T = 19.8°$C, скорость звука $c_0 = 1482.48$ м/с, дно мягкое, длительность $\tau_{имп} = 40$ мкс, частота заполнения $f_0 = 100$ кГц, амплитуда давления $p_0 = 3.8$ Па.

Приемное анализирующее устройство давало возможность исследовать вертикальную структуру поля в каждом из импульсов и тем самым идентифицировать моды. В ходе эксперимента показано, что вертикальные распределения давления во втором принимаемом импульсе действительно соответствуют второй распространяющейся моде данного волновода. Расхождение с теорией заметно лишь вблизи нижней границы волновода, что может быть объяснено тем, что принимающий гидрофон не точечный, а имеет конечные размеры, следовательно, принимаемый им сигнал интегрируется по всему его поперечному сечению. Кроме того, тот факт, что расхождение между теорией и экспериментом для наклонного дна заметней по сравнению с ровным дном, может объясняться перекачкой энергии из одной моды в другую, что имеет место в гидроакустических волноводах с изменяющимися по трассе распространения параметрами.

Таким образом, в ходе данной работы удалость теоретически получить зависимость оптимального расстояния разрешения от длительности сигнала при различных параметрах как самого сигнала, так и волновода. Было также изучено распространение сигнала в клиновидном волноводе, получены зависимости длительности импульса на приемнике в горле клина от параметров волновода и сигнала. Выяснено, что для отчетливого временного разрешения двух последовательных импульсов, приходящих в точку приема, соответствующих двум модам волновода последовательных номеров, необходимо выполнение критерия разрешимости. Было теоретически получено выражение этого критерия для коротких модовых импульсов в волноводах постоянной глубины с различными типами дна. На основе теоретически полученных результатов разработана математическая модель распространения коротких модовых импульсов в волноводах постоянной и переменной глубины. В ходе экспериментальной части работы проведено измерение амплитуды сигнала на трассах различной длины при фиксированном заглублении приемника и определена длительность излученного сигнала на приемнике в каждом случае, а также проведены измерения амплитуды принимаемых последовательных модовых импульсов при различных заглублениях приемника. Получено хорошее соответствие выдвинутой теоретической модели экспериментальным результатам по физическому масштабному моделированию распространения коротких модовых импульсов в шельфовой зоне океана.

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности (№ 3.5672.2017/8.9).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Волков М.В., Григорьев В.А., Луньков А.А., Петников В.Г.* О возможности применения вертикальных приемных антенн для звукоподводной связи на арктическом шельфе // Акуст. журн. 2019. Т. 65. С. 332–342.
2. *Моргунов Ю.Н., Буренин А.В., Безответных В.В., Голов А.А.* Распространение импульсных псевдослучайных сигналов из шельфа в глубокое море в зимних гидрологических условиях Японского моря // Акуст. журн. 2017. Т. 63. С. 646–650.
3. *Рутенко А.Н., Гриценко В.А., Ковзель Д.Г., Манульчев Д.С., Фершалов М.Ю.* Методика оценки параметров измеренных на Сахалинском шельфе акустических импульсов для многофакторного анализа их влияния на серых китов // Акуст. журн. 2019. Т. 65. С. 662–674.
4. *Барридж Р., Вайнберг Г.* Горизонтальные лучи и вертикальные моды / В кн. Распространение волн и подводная акустика. Под ред. Келлера Дж.Б. и Пападакиса Дж.С. М.: Мир, 1980. С. 76–125.
5. *Бычков А.Е., Курин В.В.* О выделении нормальных волн в маломодовых акустических волноводах / Труды XX научной конференции по радиофизике, посвященной 110-летию со дня рождения Г.С. Горелика, ННГУ. 2016. С. 260–261.
6. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
7. *Wilson W.D.* Extrapolation of the equation for the speed of sound in sea water // J. Acoust. Soc. Am. 1962. V. 34. № 6. P. 866.
8. *Гончаров В.В., Зайцев В.Ю., Куртепов В.М., Нечаев А.Г., Хилько А.И.* Акустическая томография океана. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1997. 256 с.
9. *Бычков А.Е., Грязнова И.Ю., Дерябин М.С., Курин В.В., Хилько А.И.* Физическое моделирование распространения звука в шельфовой зоне Мирового океана // Труды XXXII сессии РАО. М.: Геос, 2019. С. 1191–1196.

*АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2020, том 66, № 4, с. 408–419*

## АКУСТИКА ОКЕАНА. ГИДРОАКУСТИКА

*УДК 534.345;34.231.1*

# ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ЗВУКОВОГО ДАВЛЕНИЯ И ФАЗОВЫЕ СКОРОСТИ В МЕЛКОМ МОРЕ: РАСЧЕТ И ЭКСПЕРИМЕНТ

**© 2020 г. Г. Н. Кузнецов[a], *, А. Н. Степанов[a, b]**

[a] *Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, ул. Вавилова 38, Москва, 119991 Россия*

[b] *Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Московское шоссе 34, Самара, 443086 Россия*

**e-mail: skbmortex@mail.ru*

Поступила в редакцию 03.04.2019 г.
После доработки 07.02.2020 г.
Принята к публикации 25.02.2020 г.

Выполнено исследование интерференционной структуры амплитуд звукового давления, продольных проекций градиентов фазы и рассчитанных фазовых скоростей в плоскопараллельном волноводе. Установлено, что значения фазовой скорости поля звукового давления и эффективных фазовых скоростей в зонах интерференционных максимумов, рассчитанных различными методами, достаточно стабильны и хорошо согласуются между собой и с экспериментальными данными. Показано, что на частотах, для которых антенна расположена в зонах интерференционных максимумов, использование модели эквивалентной плоской волны и эффективных фазовых скоростей вместо скорости звука в воде уменьшает погрешность оценки пеленга.

*Ключевые слова:* продольные проекции градиентов фазы, фазовая скорость, эффективная фазовая скорость, интерференционные максимумы, сравнение теоретических и экспериментальных зависимостей

**DOI:** 10.31857/S032079192004005X

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Эффективность работы протяженных многоэлементных антенн, установленных стационарно или буксируемых в мелком море, определяется отношением сигнал/помеха на каждом (одиночном) приемнике и когерентностью поля вдоль апертуры антенны [1]. Значение отношения сигнал/помеха рассчитывается с учетом реальных зависимостей “аномалии распространения” [1–3], которая определяется характеристиками волновода, геометрией расположения приемников и источников, частотой звука и влиянием ряда других факторов. Когерентность поля также зависит от перечисленных выше параметров, но с учетом случайного характера принимаемых сигналов и условий распространения. Эти вопросы, в частности, структура пространственной корреляции поля на апертуре антенны и возможности согласованной фильтрации исследованы в [4, 5]. Вариация пространственных откликов – характеристик направленности (ХН) в зависимости от свойств волновода рассмотрена в [6]. В серии работ [5, 7–9] выполнен анализ возможности построения ХН в многомодовом волноводе и способов учета дисперсионных характеристик при несогласованной и согласованной с передаточной функцией волновода обработке. В [10] в дополнение к горизонтальным антеннам выполнен анализ ХН на выходе вертикальных антенн. В частности, обращается внимание на существенную зависимость структуры ХН от угла прихода лучей и частоты звука. Установлена возможность расщепления ХН или появления дополнительного усиления сигнала на выходе антенны при учете когерентности сигналов, пришедших на апертуру антенны по разным лучам. Аналогичные результаты – смещение оценок пеленга и расщепление ХН – обнаружены в откликах и горизонтальных антенн [11, 12]. Установлено, что эти смещения, особенно при косых углах падения фронта волны, связаны с погрешностью аппроксимации градиента фазы на апертуре антенны. Показано, что смещения пеленгов удается устранить или уменьшить, если фазовые задержки между каналами производить с использованием не скорости звука в воде $c_0$, а “эффективной фазовой скорости” (ЭФС), которая в рамках модели эквивалентной плоской волны позволяет достаточно точно рассчитать или аппроксимировать экспериментальные зависимости градиентов фазы – но не во всем пространстве, а только в зонах интерференционных максимумов (ИМА). Причем эти аппроксимации справедливы при описании градиента фазы звукового давления (ЗД) как вдоль апертуры антенны, так и при их расчете вдоль трассы движения источника или трассы распространения сигнала [11, 12]. Отметим, что в ближней френелевской зоне пеленгования для оценки возможных смещений пеленга необходимо использовать модовую модель, учитывающую направленность излучения мультипольными источниками [13].

Рассмотрим задачу пеленгования источников в мелком море с использованием низкочастотных горизонтальных антенн более подробно. Для этого исследуем зависимости градиентов фазы, локальных значений фазовых скоростей и ЭФС от частоты и расстояния, а также выполним сравнение расчетных и экспериментальных данных на разных частотах и при различных расстояниях между буксируемым излучателем и приемной системой. С этой целью выполним имитационную и реальную буксировку узкополосных излучателей вдоль радиальных направлений. Но предварительно обсудим влияние амплитудного и фазового распределения звукового поля на апертуре антенны на ХН и погрешность пеленгования.

## 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ НАПРАВЛЕННОСТИ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ АНТЕННЫ

Рассмотрим работу горизонтальной протяженной антенны, которая имеет длину $L = 400$ м и состоит из 64 элементов. Такие антенны применяют в шельфовой зоне, например, при "оконтуривании" месторождений нефти или газоконденсата, а также при решении различных гидрофизических и гидроакустических задач, например, при реконструкции параметров осадочных слоев морского дна [14]. Покажем, что интерференция ЗД, которая формируется на апертуре антенны при "косых" углах, из-за вариации амплитуд и фаз сигнала существенно изменяет свойства ХН по сравнению со свободным пространством.

В связи с большим различием характеристик грунта в различных акваториях Мирового океана здесь и далее в других разделах расчеты выполнены для двух моделей дна, типичных для морей, примыкающих к берегам России. Первая модель соответствует жесткому грунту: продольная скорость звука в грунте $c_l = 2000$ м/с, относительная плотность $\rho = 1.8$ и коэффициент поглощения $\tilde{\alpha} = 0.02$; вторая модель – более мягкому грунту: $c_l = 1650$ м/с, $\rho = 1.4$ и $\tilde{\alpha} = 0.02$. В качестве примера изучим структуру поля на апертуре антенны при расстоянии от центра антенны до источника $r = 5$ км, пеленге на источник $\alpha_0 = 45°$, глубине волновода $h = 100$ м и глубине источника $z_0 = 50$ м. Анализ выполним для приемных антенн, буксируемых в слое воды ($z = 50$ м), и стационарных донных антенн ($z = 100$ м). На рис. 1 для приведенных выше первой и второй моделей грунта и $z = 50$ м представлены распределения вдоль апертуры антенны амплитуды поля ЗД (рис. 1а) и ЭФС (рис. 1б), рассчитанной по формуле (2) (см. следующий раздел), для сигнала с частотой $f_0 = 52$ Гц, для которой антенна находится в зоне ИМА (кривые *1*), и сигнала на частоте $f_0 = 54.5$ Гц, для которой центр антенны находится в зоне глубокого минимума ЗД (кривые *2*). Штрихпунктирной линией (прямая *3*) отмечено значение $c_0$.

Из анализа рис. 1 следует, что поле на апертуре антенны существенно неоднородное, и даже небольшие изменения частоты и условий приема сигналов заметно изменяют распределения амплитуд и фаз сигнала на апертуре. Видно, что в зонах ИМА величина ЭФС превышает значение $c_0$ и достаточно стабильна. Напротив, в зонах интерференционных минимумов фазовая скорость изменяется непредсказуемым образом.

На рис. 2 изображены ХН (отклики антенны) для частоты 52 Гц, обозначенные $D(\alpha_0)$, где $\alpha_0$ – пеленг на источник. Прием производится также в середине волновода. Распределения амплитуд ЗД и фазовых скоростей представлены на рис. 1 (кривые *1*). Сплошной линией на рис. 2 изображена ХН в свободном пространстве с $c_0 = 1450$ м/с, пунктирной – в волноводе, когда распределение амплитуд и фаз сигнала на апертуре антенны рассчитано с использованием известной передаточной функции волновода, а для фазирования антенны используется значение $c_0$. Видно, что из-за несоответствия градиентов фазы на апертуре возникает смещение основного максимума. Штрихпунктирной линией изображена ХН антенны в волноводе, когда исходное распределение амплитуд и фаз было таким же, а для фазирования антенны использовано среднее в зоне ИМА значение ЭФС, равное 1540 м/с. При этом практически удается устранить смещение пеленга $\alpha_0$ на источник и уменьшить боковое поле.

На рис. 3 для тех же условий распространения изображены аналогичные ХН, но для частоты $f_0 = 54.5$ Гц. Видно, что для данной частоты по сравнению с ХН в свободном пространстве (сплошная линия) наблюдается расщепление основного максимума ХН антенны (пунктирная кривая), что не позволяет выполнять однозначное пеленгование источников. По существу, антенна разделилась на две части, выполняющие пеленгование независимо – каждая со своими градиентами фазы и своим фазовым центром.

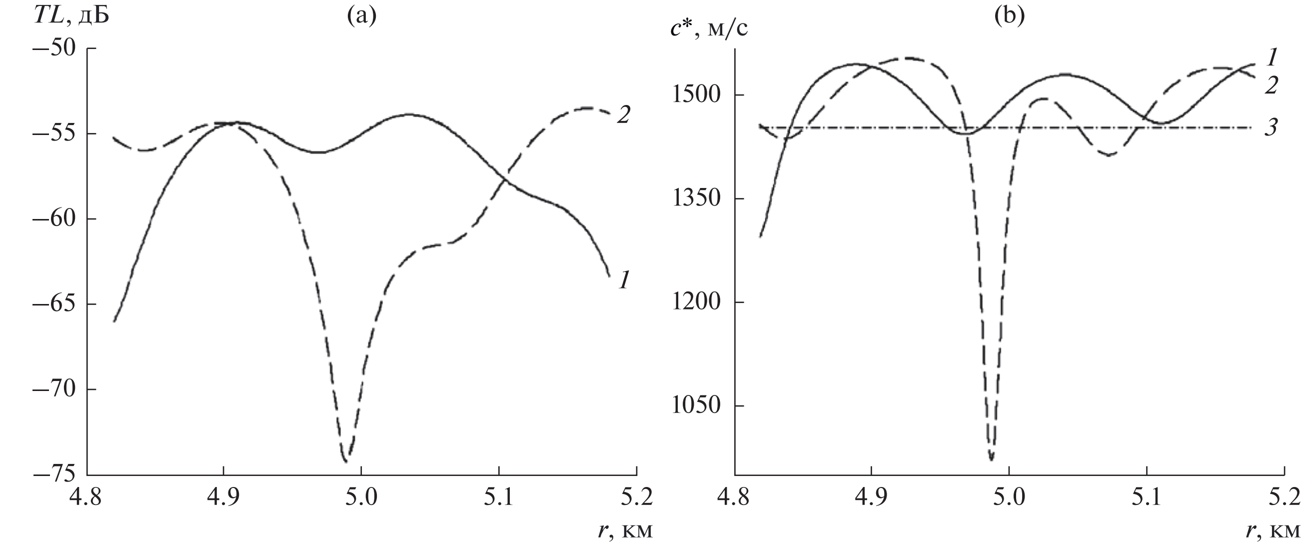


**Рис. 1.** Распределения на апертуре антенны (а) – амплитуды звукового давления и (б) – ЭФС. Прием в середине волновода. Кривые *1* – частота $f_0$ = 52 Гц (вторая модель дна), кривые *2* – $f_0$ = 54.5 Гц (первая модель дна), прямая *3* – значение скорости звука в воде.

Таким образом, одна и та же антенна при косых углах пеленгования может формировать в волноводе даже на близких частотах существенно различающиеся ХН. Если на выбранной частоте зона ИМА "накрывает" апертуру антенны – ХН формируется с малым уровнем бокового поля, но со смещением ориентации максимума (пеленга). Как показали расчеты, для "мягких" грунтов смещение умеренное – несколько градусов, до 5°–6°. Для "жестких" – смещение может доходить до 8°–12° и более, что не допустимо. В этом случае для устранения смещения рекомендуется использовать не $c_0$, а ЭФС. Очевидно, что данный вывод справедлив только при косых углах падения волны на апертуру антенны [11, 12], но именно эти углы используют буксируемые антенны при наблюдении акустической обстановки в кормовых аспектах. При нормальном и близких к нормальному углах падения смещения пеленга, естественно, отсутствуют или не велики. Важно, что для широкополосных сигналов в спектре всегда имеются частотные составляющие, для которых на апертуре антенны формируются зоны ИМА – именно это обеспечивает принципиальную возможность пеленгования источников по всем направлениям.

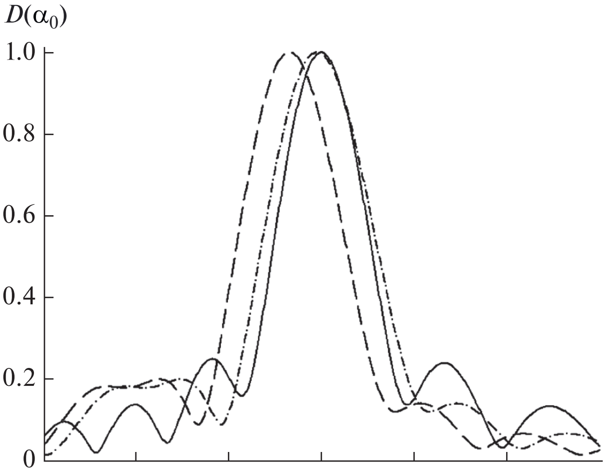


**Рис. 2.** ХН антенны, $f_0$ = 52 Гц.

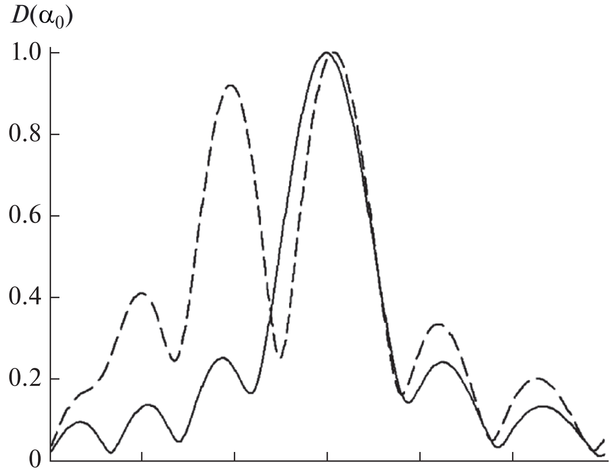


**Рис. 3.** ХН антенны, $f_0$ = 54.5 Гц.

**Таблица 1.** Сравнение фазовых скоростей в зонах максимумов ЗД

| № отсчета | $\omega/(\partial\varphi/\partial r)$ | $\omega/\lvert\mathrm{grad}\,\varphi\rvert$ | $c^*$, м/с | $c^{k*}$, м/с | $\Delta c_1$, % | $\Delta c_2$, % |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 1507.05 | 1487.27 | 1493.73 | 1493.05 | 0.89 | 0.42 |
| 81 | 1509.86 | 1498.73 | 1494.70 | 1493.97 | 1.01 | 0.27 |
| 171 | 1505.88 | 1492.07 | 1495.78 | 1494.99 | 0.68 | 0.24 |
| 254 | 1511.79 | 1511.59 | 1497.05 | 1496.20 | 0.98 | 0.97 |
| 344 | 1505.26 | 1500.07 | 1498.29 | 1497.37 | 0.43 | 0.12 |
| 430 | 1515.74 | 1500.80 | 1499.82 | 1498.83 | 1.06 | 0.01 |
| 517 | 1508.65 | 1508.57 | 1501.29 | 1500.23 | 0.49 | 0.48 |
| 603 | 1519.87 | 1519.80 | 1502.98 | 1501.85 | 1.12 | 1,11 |
| 690 | 1507.55 | 1506.83 | 1504.76 | 1503.55 | 0.18 | 0.13 |
| 774 | 1516.00 | 1509.19 | 1506.31 | 1505.04 | 0.64 | 0.19 |
| 856 | 1507.42 | 1506.88 | 1504.77 | 1503.56 | 0.17 | 0.14 |
| 944 | 1519.80 | 1519.76 | 1502.99 | 1501.86 | 1.11 | 1.11 |

## 3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ ОЦЕНКИ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ

В волноводе бегущая волна распространяется в горизонтальном направлении. Значения скорости ее распространения зависят от скоростей мод, образованных в волноводе при заданных граничных условиях. Фазовая интерференция мод формирует распределения градиентов фазы вдоль радиальных направлений, а также вдоль апертуры произвольно ориентированной антенны. С использованием измеренного или рассчитанного по сумме мод пространственного распределения горизонтальных проекций градиента фазы формально можно определить значения фазовой скорости в любой точке пространства.

В вертикальной плоскости формируются стоячие волны. В случае формирования и учета вытекающих квазимод [15] некоторая часть звуковой энергии уходит в дно. В общем случае частные производные от фазы в горизонтальной и вертикальной плоскости образуют полный градиент фазы ЗД, угол скольжения которого относительно горизонтали определяется соотношением амплитуд горизонтальной и вертикальной производных. С целью прогноза характеристик бегущих волн, образованных “захваченными” модами [16], рассмотрим вначале характеристики горизонтальной проекции градиентов фазы.

*Аналитические оценки.* Для оценки значений ЭФС, необходимых для точного пеленгования, можно использовать приближенные аналитические выражения или выполнять прямой расчет соответствующих проекций градиентов фазы. В [17] показано, что для мелкого моря при определении зависимостей от расстояния и частоты горизонтальных проекций градиентов фазы узкополосных сигналов можно использовать выражение для средневзвешенных значений горизонтальных проекций волновых чисел

$$k^* = \sum_{l=1} p_l^2 k_l \Big/ \sum_{l=1} p_l^2\,, \tag{1}$$

где $k_l$ – горизонтальная проекция волнового вектора и $p_l$ – амплитуда $l$-й нормальной волны. В [11, 12] для зон ИМА используется эмпирическое понятие “эффективной фазовой скорости” как средневзвешенной фазовых скоростей нормальных волн

$$c^* = \sum_{l=1} p_l^2 c_l \Big/ \sum_{l=1} p_l^2\,, \tag{2}$$

где $c_l$ – фазовая скорость $l$-й нормальной волны. Сравним результаты расчета ЭФС по формулам (1) и (2). Пусть $\omega$ – частота звуковых колебаний и $c^{k*} = \omega/k^*$ – фазовая скорость, рассчитанная по (1). Найдем оценку абсолютной разности $\Delta = \lvert c^* - c^{k*}\rvert$ эффективных скоростей $c^*$ и $c^{k*}$. Так как $k_l = \omega/c_l$, то из (1) следует, что

$$c^{k*} = \frac{\omega\sum\limits_{l=1} p_l^2}{\sum\limits_{l=1} p_l^2 k_l} = \frac{\omega\sum\limits_{l=1} p_l^2}{\sum\limits_{l=1} p_l^2 \omega/c_l} = \frac{\sum\limits_{l=1} p_l^2}{\sum\limits_{l=1} p_l^2/c_l}.$$

Откуда после несложных преобразований получим искомую абсолютную разность:

$$\begin{gathered}\Delta = \lvert c^* - c^{k*}\rvert = \left|\frac{\sum\limits_{l=1} p_l^2 c_l}{\sum\limits_{l=1} p_l^2} - \frac{\sum\limits_{l=1} p_l^2}{\sum\limits_{l=1} p_l^2/c_l}\right| = \\ = \frac{\sum\limits_{l=1}\sum\limits_{j>l} p_l^2 p_j^2 (c_l - c_j)^2 \big/ (c_l c_j)}{\sum\limits_{l=1}\sum\limits_{j=1} p_l^2 p_j^2 / c_l}.\end{gathered} \tag{3}$$

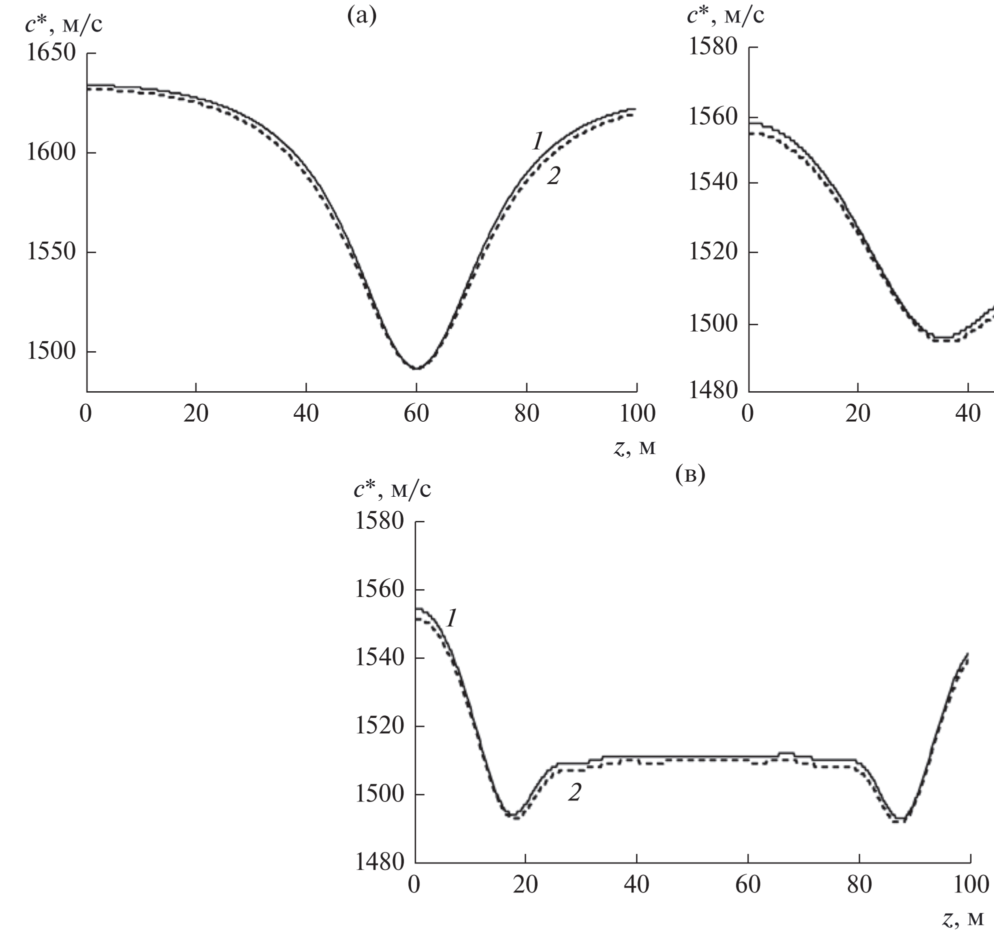


**Рис. 4.** Зависимости ЭФС от глубины источника на частотах (а) – 25, (б) – 50 и (в) – 100 Гц; кривые *1* и *2* рассчитаны по формулам (1) и (2).

Пусть в мелководном волноводе $c_{\max}$ – максимальная фазовая скорость нормальных волн, присутствующих в представлении (3). С учетом того, что для любой нормальной волны ее фазовая скорость удовлетворяет неравенству $c_0 < c_l \le c_{\max}$, из соотношения (3) очевидным образом может быть получено ограничение сверху для абсолютной разности $\Delta$:

$$\Delta \le c_{\max}\left(\frac{c_{\max}}{c_0} - 1\right)^2 \frac{\sum_{l=1}\sum_{j>l} p_l^2 p_j^2}{\sum_{l=1}\sum_{j=1} p_l^2 p_j^2},$$

из которого следует неравенство $\Delta \le c_{\max} \times (1 - c_{\max}/c_0)^2 / 4$.

Путем прямых компьютерных расчетов установлено, что фактическая относительная разность $\delta = \Delta / c_0 = (c^* - c^{k*}) / c_0$, как правило, не превышает 1%. Этот вывод подтверждается рис. 4, на котором сравниваются рассчитанные по формулам (1) и (2) зависимости ЭФС и оценки относительной разности скоростей $\delta$ от глубины источника. Расчеты выполнены для придонного приема в волноводе Пекериса с мягким грунтом.

Графики на рис. 4а получены для горизонтального расстояния от источника 5 км и частоты 25 Гц, при этом установлено, что относительная разность ЭФС не превышает 0.26%. На рис. 4б показаны аналогичные зависимости для расстояния 20 км и частоты 50 Гц. Для этих условий максимальная относительная разность ЭФС равна 0.19%. А для графиков на рис. 4в (расстояние 20 км и частота 100 Гц), максимальная относительная разность значений ЭФС 0.17%. Иными словами, величины ЭФС, рассчитанные двумя методами, практически совпадают. Поэтому далее при анализе используется эффективная скорость $c^*$, которая рассчитывается по более простому и наглядному соотношению (2).

Заметим, что как $c^*$, так и $c^{k*}$ существенно зависят от глубины источника $z_0$ – вблизи поверхностей раздела, особенно у свободной поверхности, ЭФС значительно превышает величину $c^*$ в середине

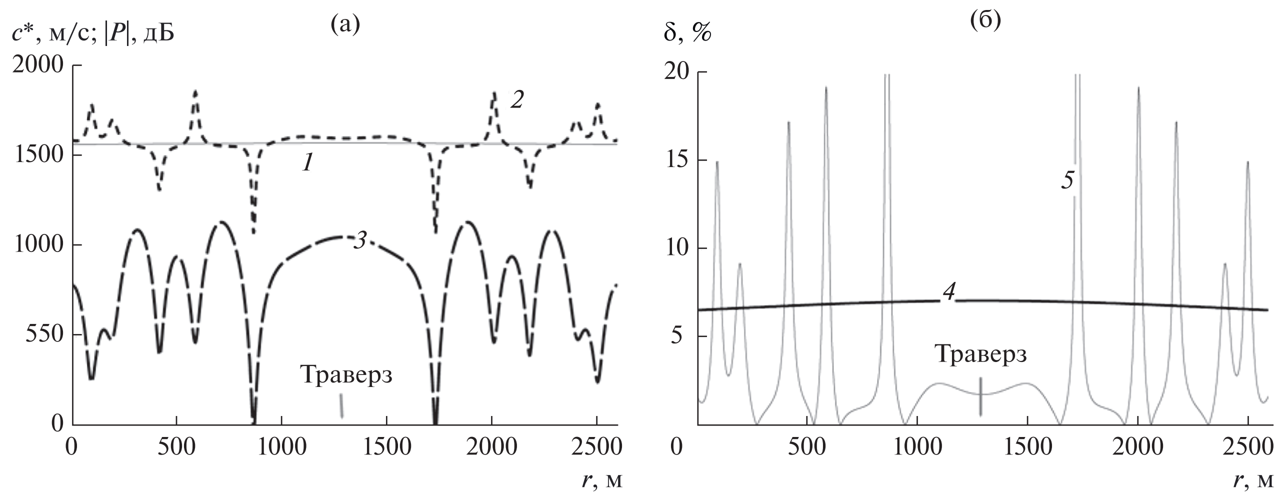


**Рис. 5.** (а) – Сравнение рассчитанных значений ЭФС $c^*$ и фазовых скоростей $c_1^*$ на горизонтальной трассе и (б) – относительные отклонения этих фазовых скоростей от величины $c_0$ и друг от друга. Обозначения кривых указаны в тексте.

волновода. Этот вопрос представляется достаточно важным и, по нашему мнению, требует специального исследования.

Отметим также, что даже для мягкого грунта все значения ЭФС, в том числе в середине волновода (см. рис. 4), превышают величину $c_0$ на 5–12%. Отсюда следует, что прогноз градиентов фазы на апертуре антенны, если его выполнять с использованием $c_0$, приведет к большим ошибкам фазового распределения и, как отмечалось выше, – смещению оценки пеленга.

*Сравнение значений фазовой скорости ЗД, ЭФС и скорости звука $c_0$ в воде.* Как и ранее, будем считать волновод плоскопараллельным и однородным. По определению фазовую скорость ЗД можно получить путем расчетной или экспериментальной оценки горизонтальной проекции градиента фазы [18, 19]

$$c_1^* = \omega / (\partial\varphi / \partial r), \tag{4}$$

где φ – фаза ЗД. Покажем, что в зонах ИМА эффективные фазовые скорости $c^*$, вычисленные по приближенным соотношениям (1) и (2), и фазовые скорости $c_1^*$, вычисленные по горизонтальной проекции градиентов фазы (4), достаточно близки. Но можно показать, что в отдельных зонах ИМА при когерентном суммировании, прежде всего, мод только низких или только высоких номеров, локальные градиенты фазы из-за различия фазовых скоростей отдельных мод могут различаться – как вдоль трассы буксировки излучателя, так и вдоль трассы распространения сигналов. Как следствие, могут различаться фазовые скорости суммарного поля ЗД. В зонах, где синфазно сложились наиболее энергонесущие моды и сформировались глобальные максимумы, фазовая скорость будет соответствовать ЭФС, рассчитанной по (1) или (2). Но в зонах интерференционных минимумов из-за различия проекций градиентов фазы всегда будут наблюдаться существенные отличия $c_1^*$ от $c^*$ или $c^{k*}$. Отметим, что в зонах интерференционных максимумов фазовая скорость будет соответствовать ЭФС прежде всего на расстояниях, на которых различные моды еще “не разбежались”. Покажем это.

На рис. 5а изображены зависимости от расстояния $r$ ЭФС $c^*$ – кривая *1* и фазовой скорости $c_1^*$ – кривая *2*. Отмасштабированная и сдвинутая по вертикали зависимость от расстояния амплитуды звукового давления $|P|$ представлена кривой *3*. Видно, что в зонах ИМА фазовая скорость $c_1^*$ существенно сближается с почти постоянной величиной ЭФС $c^*$, которая примерно на 6.5% превышает значение $c_0$.

На рис. 5б показаны рассчитанные вдоль той же самой трассы относительные отклонения ЭФС $c^*$ от $c_0$: $\delta_1 = 100(c^* - c_0)/c_0$ – кривая *4*, и отклонения фазовых скоростей $c_1^*$ от ЭФС $c^*$, отнесенные к $c_0$: $\delta_2 = \left|c_1^* - c^*\right|/c_0$ – кривая *5*.

Расчеты в этом имитационном эксперименте выполнены в волноводе Пекериса толщиной 53 м со скоростью звука в воде $c_0$ = 1450 м/с. Параметры грунта: $m$ = 1.9, $n$ = 0.9, коэффициент поглощения 0.009. Принятая модовая модель волновода позволила вычислить амплитуды и фазовые скорости каждой нормальной волны, которые далее использованы для расчета значений ЭФС. Кривые на рис. 5 получены при имитации букси-

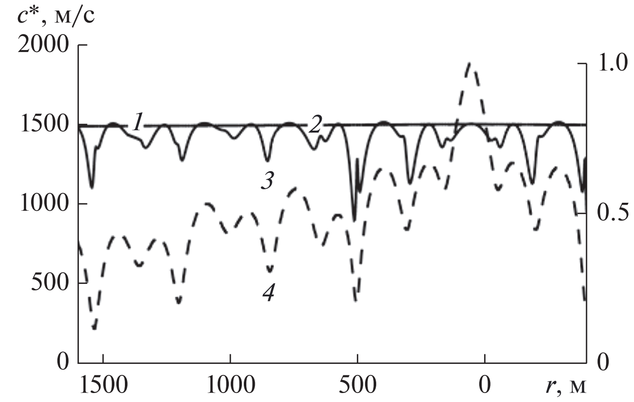


**Рис. 6.** Зависимости фазовых скоростей и амплитуды ЗД от расстояния на частоте 117 Гц.

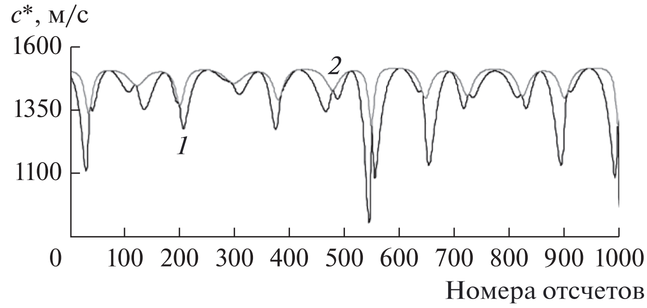


**Рис. 7.** Зависимости фазовых скоростей от расстояния; кривая *1* – вычисление по полному градиенту фазы, кривая *2* – вычисление по горизонтальной компоненте градиента фазы.

ровки тонального источника на глубине $z_0 = 25$ м вдоль радиальной трассы длиной 2500 м. Излучался сигнал на частоте 100 Гц. Приемник находился вблизи дна на глубине $z = 52.5$ м.

Отметим, что в зонах интерференционных минимумов значения фазовой скорости $c_1^*$ существенно отличаются от величины ЭФС $c^*$ – в большую или меньшую сторону. Данный результат является очевидным в связи с большой изменчивостью и непредсказуемостью градиентов фазы в зонах интерференционных минимумов [19]. Но эти вариации градиентов фазы не имеют значения, так как отношение сигнал/помеха в зонах интерференционных минимумов минимально и для обнаружения сигналы в этих зонах не используются.

Отметим также, что при кажущемся хаосе локализация зон интерференционных минимумов имеет строгое физическое обоснование: глубокие минимумы ЗД располагаются в непосредственной близости от фазовых полюсов [20]. Неглубокие минимумы располагаются на удалении от полюсов (выше или ниже, в зависимости от горизонтов расположения приемников и излучателей [21]). Знак производной фазы и, соответственно, отклонения фазовых скоростей зависят от направления, в котором выполняется “обход” полюса. Резкие отклонения фазовых скоростей от среднего значения в большую или меньшую сторону (рис. 5а и др.) соответствуют этим знакам.

Из рис. 4 и 5 следует, что в зонах ИМА фазовая скорость $c^*$, рассчитанная с использованием вычисленных характеристик мод, практически совпадает с фазовой скоростью $c_1^*$, рассчитанной по горизонтальной проекции градиента фазы. Например, для глубины 25 м в зонах ИМА $c^* \cong c_1^*$ и $\delta_2 = 0.88\%$, т.е. меньше 1%. При этом относительные отклонения ЭФС $c^*$ от скорости звука $c_0$ в зонах ИМА не менее $\delta_1 \sim 6.5\%$.

*Оценка зависимостей модуля градиента фазы.* Сравним оценки фазовых скоростей, полученные с помощью горизонтальной проекции градиента фазы ЗД, с оценками с использованием модуля полного градиента. Оценки выполним на частоте 117 Гц для плоского изоскоростного волновода Пекериса глубиной 100 м при скорости звука в воде 1450 м/с, плотности грунта 1470 кг/м$^3$ и скорости звука в грунте 1500.0 м/с. Фазовая скорость рассчитывалась четырьмя способами: по формулам (1) и (2), по горизонтальной проекции градиента фазы поля ЗД $c_{Tg}^* = \omega/(\partial\varphi/\partial r)$, а также по модулю полного градиента фазы $c_T^* = \omega/|\mathrm{grad}\varphi|$. На рис. 6 представлены зависимости от расстояния фазовых скоростей: $c^*(r)$, $c^{k*}(r)$, $c_T^*(r)$ – кривые *1*–*3* соответственно, а также отмасштабированный и сдвинутый по вертикали график амплитуды ЗД, отнесенной к максимальной величине амплитуды (кривая *4*).

Видно, что в зонах ИМА фазовая скорость, рассчитанная через градиент фазы ЗД, стремится к значениям ЭФС, рассчитанным по формулам (1) и (2) с учетом суперпозиции нормальных волн в волноводе, и превышает величину $c_0$ на 50 м/с.

На рис. 7 для волновода с мягким грунтом сравниваются фазовые скорости суммарного поля ЗД, рассчитанные по формулам $c_{Tg}^* = \omega/(\partial\varphi/\partial r)$ (кривая *1*) и $c_T^* = \omega/|\mathrm{grad}\varphi|$ (кривая *2*).

Для сравнения с данными в таблице, на рис. 7 по оси абсцисс указаны не горизонтальные расстояния, а номера отсчетов. Общий интервал расстояний, как и на рис. 6, равен 2.5 км. Видно, что максимальные значения фазовых скоростей практически равны, но вариации минимальных значений фазовых скоростей, рассчитанных через модуль полного градиента фазы, заметно превышают вариации фазовых скоростей, рассчитанных через горизонтальную проекцию градиента фазы.

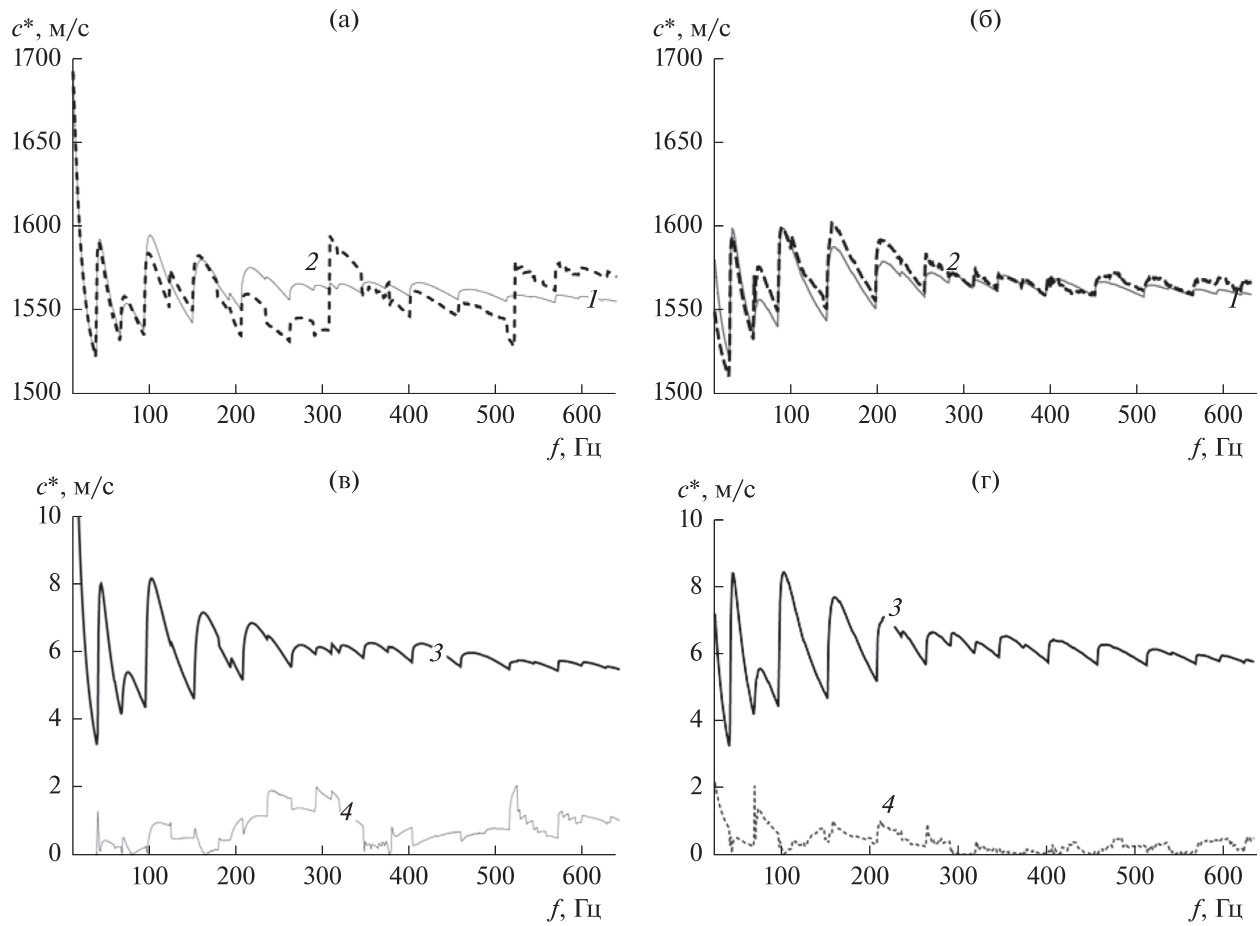


**Рис. 8.** (а), (б) – Сравнение эффективной фазовой скорости $c^*$ (кривые *1*) и фазовой скорости $c_1^*$ (кривые *2*) на разных частотах и (в), (г) – отклонения в процентах этих скоростей от скорости звука в воде (кривые *3*) и отклонения друг от друга (кривые *4*), нормированные на скорость звука в воде.

В таблице приведены значения фазовых скоростей, вычисленных на частоте 117 Гц четырьмя способами в зонах ИМА вдоль трассы буксировки излучателя. В шестой и седьмой колонках приведены относительные разности между ЭФС $c^*$, определенными по соотношению (2), и фазовых скоростей, которые вычислены по горизонтальной проекции градиента фазы $c_{Tg}^*$: $\Delta c_1 = \left|c_{Tg}^* - c^*\right| / c^*$, а также между ЭФС $c^*$, рассчитанными по соотношению (2), и фазовыми скоростями, вычисленными по модулю полного градиента фазы $c_T^*$: $\Delta c_2 = \left|c_{Tg}^* - c^*\right| / c^*$.

Из таблицы следует, что оценки фазовых скоростей в зонах максимумов ЗД по модулю полного градиента фазы лучше согласуются с вычислениями по приближенным формулам, чем вычисления по горизонтальной компоненте градиента фазы. Различие ЭФС, рассчитанных по формулам (1) и (2), порядка или менее 0.1%.

## 4. ЗАВИСИМОСТИ ЭФС ОТ ЧАСТОТЫ И РАССТОЯНИЯ ДО ИСТОЧНИКА

На рис. 8 для “мягкого” грунта представлены зависимости ЭФС и фазовой скорости от частоты. Слева (рис. 8а, 8в) изображены частотные зависимости ЭФС $c^*$ (кривая *1*) и фазовой скорости $c_1^*$ (кривая *2*), рассчитанные в зонах глобальных максимумов амплитуды звукового давления, которые выбраны вдоль трассы движения источника. Справа (рис. 8б, 8г) – аналогичные зависимости, рассчитанные с помощью усреднения фазовых скоростей по всем зонам локальных ИМА звукового давления вдоль трассы движения источника. Отметим, что при расчете усредненной фазовой скорости частота пространственной дискретизации выбиралась по Котельникову с учетом масштаба интерференционной структуры.

Из анализа результатов на рис. 8 следует, что частотные зависимости ЭФС и фазовой скорости имеют сложную – изрезанную структуру. На низких и средних частотах при малом числе нормаль-

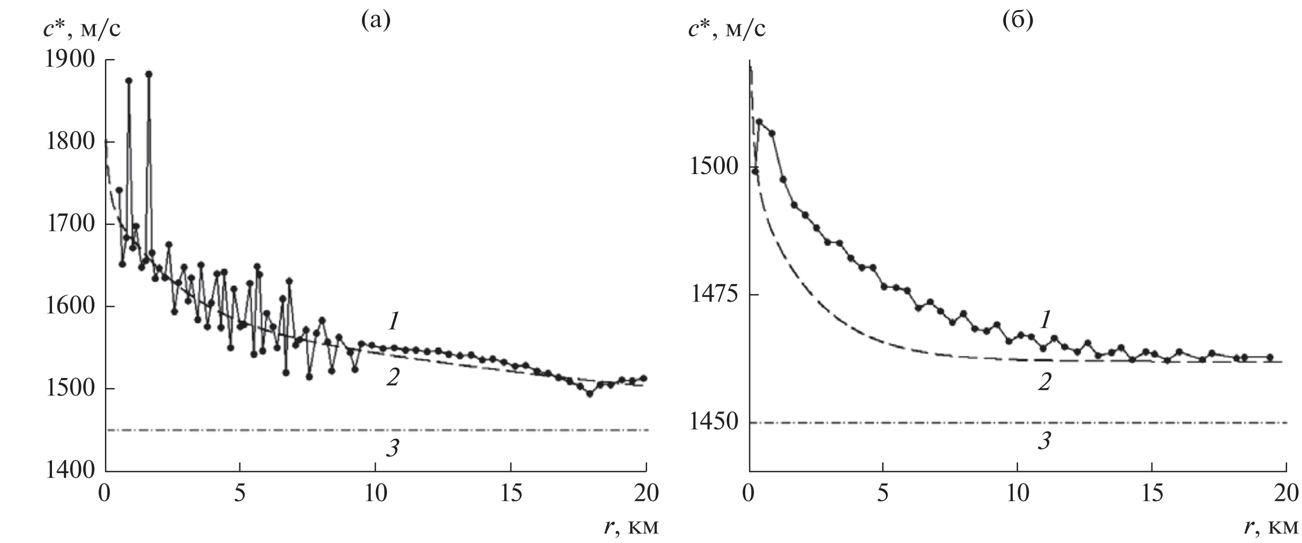


**Рис. 9.** Зависимости ЭФС и фазовой скорости от расстояния для двух моделей грунта.

ных волн наблюдаются резкие “скачки”, соответствующие частотам, вблизи которых в волноводе при увеличении частоты формируются очередные – “новые” моды. Следует отметить, что эта тенденция зависимостей фазовых скоростей от частоты – как при расчете с использованием ЭФС в зонах глобальных ИМА, так и при усреднении фазовой скорости по всем зонам локальных ИМА звукового давления вдоль трассы движения источника – является общей, но значения фазовых скоростей и ЭФС после усреднения фазовых скоростей по нескольким зонам ИМА существенно сблизились. Видно также, что при росте частоты и увеличении числа мод зависимости от частоты сглаживаются и стремятся к постоянному значению. Но даже асимптотические значения ЭФС и фазовых скоростей на высоких частотах превышают величину $c_0$.

Аналогичное приближение к постоянной величине наблюдается и при увеличении расстояния до источника. Покажем это. На рис. 9а для донной антенны ($z = 100$ м) представлены зависимости ЭФС и фазовых скоростей от расстояния для частоты 50 Гц в волноводе с “жестким” грунтом. Точки (кривая *1*) соответствуют значениям, рассчитанным в зонах ИМА по продольной проекции градиентов фазы давления. Пунктирная кривая *2* вычислена по формуле (2), а штрихпунктирная прямая *3* для величины $c_0$, равной 1450 м/с. При расчетах характеристик мод учитывалось их затухание. На рис. 9б представлены зависимости ЭФС и фазовых скоростей от расстояния также для частоты 50 Гц, но для глубины приема $z = 50$ м, вычисленные для второй модели грунта. Обозначения кривых *1*–*3* те же, что и на рис. 9а.

Из сравнения зависимостей на рис. 9, полученных для двух глубин приема сигналов и двух моделей грунта, следует, что в зонах ИМА оценки ЭФС по формуле (2) удовлетворительно согласуются с результатами прямых расчетов значений фазовой скорости по соотношению (4). Это позволяет в равной мере использовать для прогноза градиентов фазы в зонах ИМА и оценки ЭФС любой из разработанных методов.

Видно также, что при увеличении расстояния и уменьшении числа мод точность аппроксимации возрастает. Жесткому дну (модель 1) соответствуют бóльшие величины ЭФС, поскольку увеличиваются фазовые скорости отдельных мод. Увеличение ЭФС в случае приема донной антенной (см. рис. 9а) объясняется повышением вклада мод, имеющих вблизи дна большие фазовые скорости. Но для всех волноводов – с мягким или жестким грунтом – при увеличении расстояния между приемником и источником наблюдается медленное уменьшение величины ЭФС, что необходимо учитывать при оптимизации алгоритмов обнаружения и пеленгования. Причина – при увеличении расстояния моды высоких номеров затухают интенсивнее, чем моды первых номеров. Как следствие, уменьшаются фазовые скорости оставшихся мод и ЭФС для суммарного поля.

## 5. СРАВНЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ФАЗОВЫХ СКОРОСТЕЙ В МЕЛКОМ МОРЕ

Для отработки методики оценки фазовых скоростей и ЭФС в морских условиях и сравнения экспериментальных и расчетных значений выполнена буксировка по радиальному галсу излу-

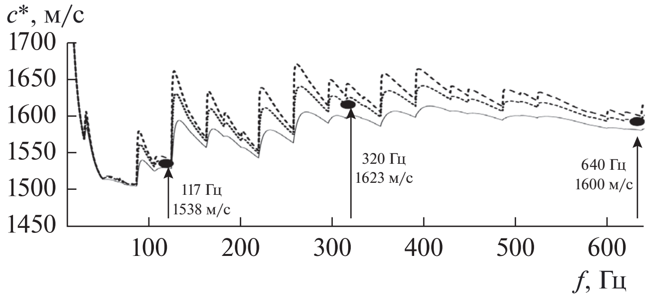


**Рис. 10.** Зависимости ЭФС от частоты, рассчитанные по (2): *1* – расстояние 1540 м; *2* – 50 м; *3* – 770 м. Диапазон частот от 10 до 640 Гц. Точками обозначены рассчитанные по (4) экспериментальные значения фазовой скорости. Стрелки указывают значения частоты излучаемого сигнала и расстояния до излучателя.

чающего комплекса, включающего три электродинамических тональных излучателя с частотами 117, 320 и 640 Гц. Одновременно для непрерывной оценки расстояния между приемными элементами и буксируемым излучателем на едином каркасе с электродинамическими излучателями буксировался широкополосный импульсный пьезокерамический излучатель. Импульсные сигналы излучались в полосе частот от 2.5 до 7.5 кГц [19, 22].

Прием сигналов выполнялся на четыре разнесенных в пространстве векторно-скалярных модуля. Сигналы принимались в системе единого времени одновременно на приемные каналы векторно-скалярных модулей и на контрольный гидрофон, установленный вблизи излучателей. Это позволило с использованием методики [23] измерить геометрию антенны после морской постановки и траекторию буксировки излучателей относительно приемников. С использованием этих данных и учетом непрерывно измеряемых расстояний до источника и оценок разностей фаз на опорном гидрофоне в точке излучения и в точках приема вычислялись горизонтальные проекции градиента фазы и оценивались значения фазовых скоростей по формуле (4).

Отметим, что при буксировке тональных излучателей на каждой частоте вдоль трассы наблюдалась естественная интерференционная структура, содержащая зоны интерференционных максимумов и минимумов. Эти зависимости использовались для расчета амплитуд и фазовых скоростей мод и далее – оценки параметров модели грунта, идентификация которой в результате акустической калибровки произведена в том же районе работ [22]. При оценке ЭФС использовались амплитуды и фазовые скорости мод, вычисленные с учетом экспериментально определенных в районе работ параметров грунта. Значения ЭФС рассчитывались в диапазоне частот от 10 до 640 Гц с шагом 1 Гц для трех конкретных интервалов расстояний: траверзного расстояния, середины галса (650 м) и предельного расстояния (1600 м) (рис. 10, кривые *1*–*3*). На каждой частоте для заданных расстояний рассчитывались по соотношению (2) значения $c^*$, а в зонах ИМА, взятых вблизи этих же расстояний вдоль экспериментальной трассы буксировки, по соотношению (4) вычислены значения $c_1^*$. Расчеты выполнены на частотах излучаемых сигналов – 117, 320 и 640 Гц (точки над стрелками). Но поскольку зоны ИМА на разных частотах удалены от приемной системы на разные расстояния, то и вычислены значения $c_1^*$ на близких, но различающихся расстояниях (указаны на стрелках).

Отметим, что экспериментально найденные значения фазовых скоростей и рассчитанные на указанных частотах значения ЭФС оказываются достаточно близкими. Этот результат подтверждает вывод о принципиальной возможности измерения или расчета ЭФС не только с использованием выделенных мод или модели передаточной функции волновода (формулы (1) и (2)), но и непосредственно по градиентам фазы, вычисленным по экспериментальным данным [18, 19]. Видно также, что значения относительных отклонений ЭФС от величины $c_0$ при увеличении частоты в среднем уменьшаются от 12 до 6% или более, причем наибольшие изменения – от максимальной до минимальной ЭФС наблюдаются на низких частотах для сигналов с одной нормальной волной. При увеличении частоты и формировании дополнительных мод на средних частотах, как и на рис. 8, обнаруживаются скачки ЭФС – на частотах, вблизи которых появляются новые моды. При еще большем увеличении частоты влияние отдельных мод заметно уменьшается и ЭФС стремится к асимптотическому значению, которое стабилизируется вблизи значения, превышающего $c_0$ на 5–8%. Важно, что на низких частотах значения ЭФС от расстояния практически не зависят, так как на малых расстояниях моды первых номеров ослабляются незначительно.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В мелком море при косых углах падения волны на антенну из-за дисперсионных характеристик нормальных волн формируются оценки пеленга со смещениями относительно истинного направления на источник. Использование модели эквивалентной плоской волны в зонах ИМА позволяет частично учесть усредненные дисперсионные характеристики волновода и, в случае применения ЭФС вместо скорости звука в воде, ввести поправку на погрешность пеленгования источников. Это особенно важно при углах падения волны более 35°–45°. Пеленгование в этом случае выполняется только на частотах, для которых формируются ИМА и зона ИМА "покрывает апертуру антенны".

Значения ЭФС могут быть рассчитаны в рамках модовой модели волновода или с использованием экспериментальных данных после выполнения акустической калибровки, позволяющей построить передаточную функцию волновода. Этот способ предполагает теоретическую или экспериментальную оценку градиента фазы тональных сигналов вдоль апертуры антенны или вдоль участка радиального галса, образованного буксировкой излучателя в районе работ.

Значения ЭФС в зонах ИМА достаточно стабильны и превышают $c_0$ на 5–12%. Причем при расположении источника или приемника вблизи свободной поверхности значения ЭФС заметно возрастают. В зонах интерференционных минимумов наблюдаются произвольные и непредсказуемые значения градиентов фазы [12, 19] и пеленгование невозможно.

Для различных расстояний и частот расчеты по формулам (1) и (2) дают практически совпадающие значения ЭФС, которые в зонах глобальных ИМА отличаются не более чем на 1–1.5% от фазовых скоростей, рассчитанных по градиентам фазы. Отсюда следует, что для расчетов и прогноза значений ЭФС можно пользоваться всеми тремя методами. Поэтому для экспериментальной оценки величины ЭФС нет необходимости выделять моды и рассчитывать значения ЭФС по формулам (1) и (2) – их величины на различных частотах можно рассчитать путем прямых измерений градиента фазы в зонах ИМА, например, при буксировке излучателя по радиальному галсу и использовании опорного сигнала. Аналогичные измерения можно произвести путем оценки градиента фазы на апертуре протяженной горизонтальной донной или буксируемой линейной антенны.

ЭФС имеет сложную зависимость от частоты и на низких частотах ее значения резко (скачком) увеличиваются при увеличении частоты и появлении новых мод. На средних частотах, когда количество мод велико, появление новой моды слабо влияет на величину ЭФС. Значения ЭФС в среднем уменьшаются при возрастании расстояния, так как при этом уменьшается вклад мод с высокими номерами.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы "Акустика мелкого моря, нелинейная акустическая диагностика, нелинейная динамика волн" (номер государственной регистрации АААА-А18-118021390174-1) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00941).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Урик Р.Дж.* Основы гидроакустики. Л.: Судостроение, 1978.
2. Акустика океана / Под ред. Бреховских Л.М. М.: Наука, 1974.
3. *Корякин Ю.А., Смирнов С.А., Яковлев Г.В.* Корабельная гидроакустическая техника: Состояние и актуальные проблемы. СПб.: Наука, 2004. 410 с.
4. *Сазонтов А.Г., Малеханов А.И.* Согласованная пространственная обработка сигналов в подводных звуковых каналах (обзор) // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 2. С. 233–253.
5. *Лабутина М.С., Малеханов А.И., Смирнов А.В.* Моделирование выигрыша антенной решетки в океаническом волноводе в условиях приема многомодового сигнала на фоне модовых помех // Ученые записки физ. факультета Моск. унив. 2017. № 5. С. 1750121.
6. *Бурдуковская В.Г., Петухов Ю.В., Хилько А.И.* Работа линейной и кольцевой горизонтальных антенн в мелком море // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 6. С. 729–735.
7. *Елисеевнин В.А.* О работе горизонтальной линейной антенны в мелком море // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 1. С. 44–49.
8. *Tolstoy A., Diachok O., Frazer L.N.* Acoustic tomography via matched field processing // JASA. 1991. V. 89. P. 1119–1127.
9. *Елисеевнин В.А.* Определение направления на источник в волноводе с помощью горизонтальной линейной антенны // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 2. С. 208–211.
10. *Кузнецов Г.Н., Щекин И.Е.* Структура отклика вертикальной антенны в плоскопараллельном водном слое // Труды X Всесоюз. акуст. конференции (секция PIV-9). М., 1983. С. 94–98.
11. *Кузнецов Г.Н., Лебедев О.В.* Пеленгование низкочастотных источников в волноводе гидроакустическими станциями с протяженными буксируемыми или бортовыми антеннами // Гидроакустика. 2013. Вып. 17(1). С. 114–121.
12. *Кузнецов Г.Н., Лебедев О.В.* О возможности применения модели с эквивалентной плоской волной для повышения точности пеленгования низкочастотных сигналов в мелком море // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 5. С. 628–638.
13. *Степанов А.Н.* Модовое представление поля направленного излучателя в волноводе // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 2. С 291–292.
14. *Гринюк А.В., Кравченко В.Н., Лазарев В.А., Малеханов А.И., Петухов Ю.В., Романова В.И., Хилько А.И.* Реконструкция параметров осадочных слоев морского дна мелкого моря с использованием широкополосных сейсмоакустических источников // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 3. С. 354–362.
15. Акустика океана / Под ред. Де Санто Дж. М.: Мир, 1982. С. 111.
16. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1972. С. 222.
17. *Грачев Г.А., Кузнецов Г.Н.* О средней скорости изменения фазы акустического поля вдоль плоского волновода // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 2. С. 266–268.
18. *Грачев Г.А., Кузнецов Г.Н., Розенберг А.В.* Инвариантная скорость распространения импульсных

сигналов в многомодовых океанических волноводах // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302. № 5. С. 1225–1228.

19. *Белова Н.И., Кузнецов Г.Н., Степанов А.Н.* Экспериментальное исследование интерференционной и фазовой структуры потока мощности от локальных источников в мелком море // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 3. С. 318–329.

20. *Журавлев В.А., Кобозев И.К., Кравцов Ю.А.* Потоки энергии в окрестности дислокаций фазового поля волнового фронта // ЖЭТФ. 1993. Т. 104. № 5(11). С. 3769–3783.

21. *Елисеевнин В.А., Тужилкин Ю.И.* Поток акустической мощности в волноводе // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 6. С. 781–788.

22. *Белов А.И., Кузнецов Г.Н.* Оценка шумности движущихся источников на основе идентификации акустической модели морского дна // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 6. С. 722–734.

23. *Kuznetsov G.N., Alekseev V.I., Glebova G.M.* Positioning of horizontal–vertically developed multielement arrays and vector-scalar modules // Phys. Vibr. 2001. V. 9. № 4. P. 235–241.

АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2020, том 66, № 4, с. 420–436

## АКУСТИКА ОКЕАНА. ГИДРОАКУСТИКА

УДК 534.286

# ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ВНУТРЕННЕГО И ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ НА ДИСПЕРСИЮ И ЗАТУХАНИЕ ЗВУКА В НЕКОНСОЛИДИРОВАННЫХ МОРСКИХ ОСАДКАХ

© 2020 г. В. А. Лисютин[a, *], О. Р. Ластовенко[a]

[a]Севастопольский государственный университет, ул. Университетская 33, Севастополь, 299053 Россия

*e-mail: vlisiutin@mail.ru

Поступила в редакцию 04.12.2019 г.
После доработки 10.02.2020 г.
Принята к публикации 24.02.2020 г.

Проанализировано влияние внутреннего и вязкого трения на распространение звука в неконсолидированных морских осадках. Приводятся основные положения GS (Grain Shearing) теории межгранулярного трения M. Buckingham'a. Согласно GS теории, осадки рассматриваются как однофазная среда, затухание звука объясняется только внутренним трением, а вязкой диссипацией пренебрегается. Представлена модификация GS теории, заключающаяся в преобразовании ее в двухфазную. Вместо однофазного уравнения состояния применяется уравнение состояния двухфазной среды, выведенное ранее в работе И.А. Чабан. Подстановка этого уравнения состояния в дисперсионное уравнение GS теории приводит к квадратному уравнению, корни которого дают волновые числа двух типов волн – быстрой и медленной волн в неконсолидированной среде с внутренним трением (GS + EC, Grain Shearing + Effective Compressibility). Результаты, даваемые модифицированной теорией, сравниваются с результатами экспериментальных измерений, взятых из открытых источников. Показывается, что существенная дисперсия скорости звука на средних частотах обусловлена консервативным влиянием жидкости, а затухание – совместным диссипативным влиянием внутреннего и вязкого трения. Выявляются типы сред и частотные диапазоны, в которых затухание определяется преимущественно силами внутреннего либо вязкого трения.

*Ключевые слова:* неконсолидированные морские осадки, дисперсия фазовой скорости, коэффициент затухания, тангенс угла потерь, межгранулярное трение, деформационное упрочнение, вязкое трение

**DOI:** 10.31857/S0320791920040061

## ВВЕДЕНИЕ

Одним из важнейших объектов исследования в акустике мелкого моря являются дно и морские осадки [1–18]. Дно мелкого моря имеет сложную вертикальную структуру, в которой особо можно выделить переходный слой неконсолидированных осадков типа песка, ила, глины, смеси разнообразных обломочных материалов [1]. В переходном слое с ростом глубины и геостатического давления происходит уплотнение осадков, увеличивается физическое взаимодействие между гранулами, вследствие чего возникают значительные вертикальные градиенты акустических характеристик [1, 2].

В неконсолидированных осадках могут распространяться упругие волны двух типов: продольная (компрессионная, $p$-волна) и поперечная (сдвиговая, $s$-волна) [1, 2, 15]. Акустическими характеристиками этих волн являются фазовые скорости, коэффициенты затухания и их частотные зависимости.

В акустике мелкого моря в первом приближении сдвиговую волну считают нераспространяющейся (жидкое дно), скорость звука в дне не зависящей от частоты, а коэффициент затухания – прямо пропорциональным частоте $\omega = 2\pi f$, что позволяет представлять волновое число в дне в виде [1]

$$k_p = \frac{\omega}{c_p} - i\alpha_p = \frac{\omega}{c_p}(1 - i\beta_p), \tag{1}$$

где $c_p$ – скорость звука; $\alpha_p$ – коэффициент затухания, Нп/м; $\beta_p$ – постоянный тангенс угла потерь или постоянная добротность $Q$, $\beta_p = \frac{\alpha_p c_p}{\omega} = \frac{1}{2Q}$ (временной множитель в (1) принимается в виде $\exp(i\omega t)$). Предположение о постоянной добротности дает возможность экстраполировать результаты измерений, выполненных на частотах сотни килогерц, в область низких частот. Такая модель осадков и дна хорошо соответствует основной модели волновода мелкого моря – волноводу Пекериса. Модель Пекериса и в настоящее время используется наиболее часто [3–6], поскольку дно в виде поглощающего полупространства требует минимальных априорных знаний и является осреднением всех слоев вместе с внутренними градиентами [7].

Следующие по сложности модели дна – слоистые, когда с ростом глубины проявляются поперечно-упругие свойства осадков, но их акустические характеристики принимаются независящими от частоты ($c_{p,s}$ = const, $\beta_{p,s}$ = const) [7–9], и пористо-вязкоупругие [9–13]. В последнем случае частотные зависимости коэффициента затухания и фазовых скоростей волн вычисляются либо в рамках теории Био-Столла [9–11, 13], либо GS или VGS теории M. Buckingham'a [9, 12, 13].

При расчетах звуковых полей на тональной частоте и правильном выборе величины потерь представления дна в виде жидких слоев вполне достаточно [3–7]. Ситуация меняется, когда ставится задача инверсии акустических и физических характеристик дна и требуются расчеты в широкой полосе частот. Здесь правильное отображение частотных зависимостей скорости звука и затухания имеет важное значение [8–14].

В сухих гранулированных средах, как установлено экспериментально, коэффициент затухания (α, дБ/м = 8.69α, Нп/м) оказывается пропорциональным первой степени частоты, $\alpha_p = \alpha_{p0} f^{\varepsilon}$, $\varepsilon = 1$ – показатель затухания ($\alpha_{p0} = \dfrac{2\pi 8.69\beta_p}{c_p}$ – отнесенный к единице частоты коэффициент затухания, дБ/м/Гц). Измерения в водонасыщенных средах подтверждают пропорциональность коэффициента затухания $\alpha \sim \omega^1$ для сред с низкой проницаемостью, но обнаруживают отклонения от закона $\alpha \sim \omega^1$ для сред с высокой проницаемостью [15]. Сложная частотная зависимость затухания предполагает как минимум два физических механизма потерь. Основной, присущий как сухим, так и насыщенным средам получил название "внутреннее трение", второй – вязкая диссипация при движении поровой жидкости относительно гранул. Внутреннее трение дает прямо пропорциональную зависимость, вязкое трение – отклонения от прямой пропорциональности в определенном диапазоне частот [15]. Вязкое трение может проявляться в большей или меньшей степени в зависимости от возможности существования тех или иных течений в пространстве пор.

Наиболее известная теория распространения упругих волн в морских осадках – теория Био-Столла и ее современные модификации [16–18]. В теории Био-Столла осадки рассматриваются как двухфазная среда, в которой зерна минералов консолидированы упругим скелетом, а поровая жидкость подвижна. Затухание объясняется вязкостью флюида и внутренним трением. Для учета внутреннего трения к упругим константам приписывается малая комплексная часть. При этом на частоте согласования соотношение между действительными и мнимыми частями упругих модулей оказывается верным, а на высоких частотах – нарушенным, доминирует вязкое затухание, пропорциональное $\omega^{1/2}$, что противоречит экспериментальным данным. Модификации теории Био-Столла [16–18] сохраняют положение о упругом скелете, развивая взятую из геофизики (обзор в [19]) идею о локальных "сквирт" потоках. Итог – теории EB (Extended Biot) [16, 17] и BIMGS [18], согласно которым упругие модули скелета полагаются зависящими от частоты.

В начале нынешнего века M. Buckingham разработал GS (Grain Shearing) и VGS (Viscous Grain Shearing) теории, объясняющие распространение и затухание упругих волн в осадках межгранулярным трением [20, 21]. Трение придает среде продольную и поперечную жесткость, но и в тоже время вызывает потери энергии. В GS теории осадки рассматриваются как однофазная среда, и вязкие потери не учитываются. Частотная зависимость коэффициента затухания оказывается ~$\omega^1$, что соответствует экспериментам только на высоких частотах [20]. В VGS теории вязкое трение "симулируется" подобным жидкости реологическим элементом [21]. Симуляция вязкого трения не позволяет устанавливать связь между акустическими характеристиками деформационных волн и физическими характеристиками среды. Дисперсионные кривые VGS теории показывают хорошее совпадение с экспериментом на средних и высоких частотах в случаях, когда вязкость жидкости невелика.

В настоящей работе предлагается модификация GS теории – преобразование ее в двухфазную с подключением вязкого трения. Проводится сопоставление результатов модифицированной GS теории с некоторыми экспериментальными данными. Выявляются диапазоны частот и типы сред, в которых определяющую роль оказывает либо внутреннее, либо вязкое трение. Представляемая статья является уточнением и развитием работ [22, 23].

## 1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

### *1.1. Среда без дисперсии*

В самой верхней части переходного слоя морские осадки практически представляют собой суспензию – самые верхние частицы прижаты к нижележащим только собственным весом. Скорость звука в суспензии с пористостью $P$ определяется формулой Вуда [2]:

$$c_0 = \sqrt{\frac{K_0}{\rho_0}}, \quad (2)$$

где $K_0$ – объемный модуль упругости среды (суспензии),

$$\frac{1}{K_0} = \frac{P}{K_f} + \frac{1-P}{K_g}, \quad (3)$$

$$\rho_0 = P\rho_f + (1-P)\rho_g \quad (4)$$

– равновесная плотность среды; $K_f$, $K_g$, $\rho_f$, $\rho_g$ – модули упругости и плотности жидкости и твердой фазы соответственно; $K_f = \rho_f c_f^2$, $c_f$ – скорость звука в поровой жидкости.

Ф. Гассман предложил идею упругого скелета, консолидирующего упругие зерна. В модели Гассмана скорости распространения продольных $c_p$ и поперечных $c_s$ волн выражаются формулами [2]:

$$c_{p0} = \sqrt{\frac{K + 4/3\mu}{\rho_0}}, \quad c_{s0} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}, \quad (5)$$

где $K = K_0 + \dfrac{K_b(K_g - K_0)^2}{K_g^2 - K_b K_0}$ – объемный модуль флюидонасыщенной среды [20]; $K_b$, $\mu$ – вещественные объемный и сдвиговый модули упругости скелета. Формулы (5) применимы только на низких частотах, когда скелет и флюид колеблются вместе. Если при возрастании частоты жидкая фаза имеет возможность проскальзывать относительно скелета, возникает дисперсия скорости и диссипация энергии.

Э. Гамильтон [24], предполагая отсутствие дисперсии и взяв за основу уравнения (5), считает объемный и сдвиговый модули комплексными, с не зависящей от частоты добавкой, что дает $\alpha \sim \omega^1$. Величины вещественных и мнимых частей вязкоупругих модулей определяются инверсией экспериментальных данных и, в отличие от (5), модули Гамильтона будут соответствовать высокой частоте измерений.

### *1.2. Основные положения и результаты GS теории*

Центральная идея в GS теории – деформационное упрочнение гранул и особый процесс релаксации механического напряжения. Модель частицы – шероховатая сфера, реологическая модель межгранулярного контакта – последовательно соединенные пружина и демпфер, сопротивление которого возрастает в процессе деформации.

Явление деформационного упрочнения, отражающее нелинейные свойства микронеоднородных сред, было отмечено, экспериментально исследовано, подтверждено и качественно объяснено в работах [25–27] наличием дефектов на контактирующих поверхностях, вследствие чего они имеют повышенную мягкость по сравнению с основным минералом гранул. Смешивание мелких и крупных гранул приводит к возрастанию нелинейности среды в целом.

Согласно GS теории, комплексные фазовые скорости $\tilde{c}_{p,s} = \dfrac{\omega}{k_{p,s}}$ продольной и поперечной волн можно представить в виде:

$$\tilde{c}_p = \sqrt{\frac{K_0 + \gamma(i\omega t_0)^n}{\rho_0}}, \quad \tilde{c}_s = \sqrt{\frac{\gamma_s(i\omega t_0)^m}{\rho_0}}, \quad (6)$$

где $\gamma$, $\gamma_s$ – модули композитной и сдвиговой межгранулярной жесткости, Па; $n$, $m$ – продольный и поперечный показатели деформационного упрочнения (стресс-релаксации), отражающие величину нелинейности среды, $0 < n < 1$, $0 < m < 1$; $t_0 = 1$ с – константа релаксации, восстанавливающая правильную физическую размерность [20, 21]. Четыре параметра $\gamma$, $\gamma_s$, $n$, $m$ характеризуют межгранулярное взаимодействие на микроуровне, и могут быть определены только путем инверсии экспериментальных данных.

Вещественные скорости $c_{p,s}$ и коэффициенты затухания $\alpha_{p,s}$ могут быть получены из комплексных как $c_{p,s} = \left(\mathrm{Re}(\tilde{c}_{p,s}^{-1})\right)^{-1}$, $\alpha_{p,s} = -\omega \mathrm{Im}(\tilde{c}_{p,s}^{-1})$, Нп/м.

Результат GS теории – затухание $\alpha_p \sim \omega^{1+n/2}$, слабая дисперсия, что не соответствует некоторым экспериментальным данным на средних частотах.

## 2. ПОДКЛЮЧЕНИЕ ТЕЧЕНИЙ ФЛЮИДА К GS ТЕОРИИ

### *2.1. Уравнение состояния двухфазной неконсолидированной среды*

В дальнейшем среда предполагается макроскопически однородной, изотропной, безграничной и полностью водонасыщенной.

Как видно из первого уравнения (6), в рамках GS теории неконсолидированная среда составлена из несущей суспензии с добавкой межгранулярного трения. Обобщим первое уравнение (6), предполагая далее заменить уравнение состояния, и, нормируя упругости и жесткости на $c_0$, представим его в виде

$$\tilde{c}_p^2 = c_0^2\left(\frac{K_u}{\rho_0 c_0^2} + \chi D\right), \quad (7)$$

где $K_u$ – искомый ниже объемный модуль упругости среды, $\chi = \dfrac{\gamma}{\rho_0 c_0^2}$ – безразмерный относительный коэффициент межгранулярного трения [20],

$D = (i\omega t_0)^n$ – дисперсионный член внутреннего трения. Если содержание жидкости в представительном объеме среды постоянно, то $K_u = K_0$.

Положим теперь, что жидкость подвижна относительно гранул. При компрессии среды с межгранулярным трением возможны два типа движения жидкости. Первый тип: жидкость по сквозным порам будет перетекать из области повышенного давления в область пониженного – это "глобальное течение Био", интенсивность которого прямо связана с проницаемостью среды. Второй тип: флюид, заключенный в щелях между гранулами, будет вытесняться в более емкую часть порового пространства, что соответствует локальным – "сквирт" потокам [16–18]. Интенсивность локальных потоков не имеет прямой связи с проницаемостью среды.

Вычислим сжимаемость двухфазной среды, пренебрегая трением между частицами. Следуя вначале работе [28], рассмотрим плоскую продольную волну $p = p_0\exp(i\omega t - ik_p x)$, распространяющуюся вдоль оси $X$, и колеблющиеся в акустическом поле шероховатые гранулы, едва соприкасающиеся друг с другом своими наиболее выступающими и наиболее мягкими частями. Выделим кубический объем $V_u$ среды с размером $l$, малым по сравнению с длиной волны, но большим по сравнению с сечением пор. Часть жидкости ($=\Delta V_f$) будет выжиматься из выделенного объема ($=V_u$) и сжимаемость среды будет иметь вид:

$$K_u^{-1} = \frac{1}{p}\frac{\Delta V_u}{V_u} = \left(\frac{P}{K_f} + \frac{1-P}{K_g}\right) + \frac{1}{p}\frac{\Delta V_f}{V_u}. \qquad (8)$$

Вычислим объем выжатой жидкости $\Delta V_f$, предполагая пока, что поры имеют цилиндрическое сечение с постоянным радиусом и не пересекаются [28].

Решая уравнение Навье–Стокса [28], можно получить формулу для средней по сечению поры относительной скорости течения флюида:

$$u_{av} = \frac{p_0 k_p(\rho_g - \rho_f)}{\omega\rho_g\rho_f}\left(1 - \frac{2J_1(i^{3/2}w)}{i^{3/2}wJ_0(i^{3/2}w)}\right), \qquad (9)$$

где

$$w = \sqrt{\frac{a^2\rho_f}{\eta}}\,\omega, \qquad (10)$$

$J_{0,1}$ – функции Бесселя, $a$ – радиус пор, $\eta$ – динамическая вязкость жидкости, Па с. Обозначим функцию частотной коррекции в (9)

$$F_C(w) = 1 - \frac{2J_1(i^{3/2}w)}{i^{3/2}wJ_0(i^{3/2}w)}. \qquad (11)$$

Вычислим объем флюида, протекающий по одной из пор: $\Delta V_0 = \pi a^2 u_{av} T = \pi a^2 u_{av}\dfrac{l}{c_p} = \dfrac{\pi a^2 u_{av} l k_p}{\omega}$. Тогда, считая, что в выделенном объеме заключено $N$ пор, последнее слагаемое в (8) можно записать как $\dfrac{1}{p}\dfrac{\Delta V_f}{V_u} = -\dfrac{k_p^2}{\omega^2}\dfrac{(\rho_g - \rho_f)}{\rho_g\rho_f}\dfrac{\pi a^2 lN}{V_u}F_C$. Подставляя это выражение в (8), получаем сжимаемость неконсолидированной среды в виде

$$K_u^{-1}(\omega) = \frac{1}{K_0} - \frac{k_p^2}{\omega^2}APF_C(w), \qquad (12)$$

где $A = \dfrac{(\rho_g - \rho_f)}{\rho_g\rho_f}, P = \dfrac{\pi a^2 lN}{V_u}$ – геометрическая пористость среды. Формула (12) была получена ранее в работе И.А. Чабан [28].

Однако поровое пространство реальной среды имеет структуру сети, состоящей из последовательно-параллельно включенных отрезков с различным поперечным сечением [29, 30]. Внутри широких пор между крупными гранулами располагаются мелкие частицы, сужающие или вообще закупоривающие проходное сечение. Стенки пор не жесткие, а образованы отдельными колеблющимися гранулами. В такой среде возможны и глобальные, и локальные потоки. Долю объема среды, в которой возможно течение Био, будем называть эффективной пористостью и обозначать $\phi$ [19, 31].

Свяжем эффективную пористость с проницаемостью, сравнивая стационарный закон Дарси $\varphi u_{av} = -\dfrac{\kappa_0}{\eta}\dfrac{\partial p}{\partial x}$ с формулой Пуазейля $u_{av} = -\dfrac{a^2}{b\eta}\dfrac{\partial p}{\partial x}$ [2], что дает

$$\varphi = \frac{b\kappa_0}{a^2}, \qquad (13)$$

где $\kappa_0$ – статическая проницаемость среды, м$^2$; $b$ – коэффициент, зависящий от геометрии порового пространства, для прямых труб $b = 8$.

При выводе (12) предполагалось, что все поры ориентированы вдоль направления распространения плоской волны. На самом деле ориентация пор равновероятна в трех направлениях. Внутри пор, перпендикулярных к направлению распространения волны, движения флюида не будет, поэтому второе слагаемое в (12) следует дополнить коэффициентом $S_v$, имеющим смысл обратной извилистости пор, величина которого для изотропной среды принимается здесь $S_v = 1/3$.

Заменяя в (12) геометрическую пористость на эффективную, получаем:

$$K_u^{-1} = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} - S_v A \frac{1}{\tilde{c}_p^2} \phi F_C(w). \quad (14)$$

Формула (14) представляет двухфазное уравнение состояния, связывающее акустическое давление и сжимаемость неконсолидированной среды.

### *2.2. Дисперсионное уравнение для продольной волны*

Подставляя (14) в (7), после преобразований имеем квадратное уравнение:

$$\left(\frac{\tilde{c}_p}{c_0}\right)^4 - \left(\frac{\tilde{c}_p}{c_0}\right)^2 (1 + \chi D + S_v \phi \rho_0 A F_C) + S_v \phi \rho_0 A \chi D F_C = 0. \quad (15)$$

Корни (15) равны $\left(\frac{\tilde{c}_p}{c_0}\right)^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, где $a = 1$, $b = -(1 + \chi D + S_v \phi \rho_0 A F_C)$, $c = S_v \phi \rho_0 A \chi D F_C$, и дают квадраты относительных фазовых скоростей двух типов волн – быстрой и медленной.

Следует отметить, что замена $K_0$ на $K_u$ не эквивалентна двум раздельным уравнениям движения для твердой и жидкой фаз, поскольку пренебрегает изменением плотности среды в результате инерционного взаимодействия между гранулами и флюидом. Уравнение (15) включает две консервативно-диссипативные компоненты дисперсии: “GS” – внутреннее трение, действующее во всем диапазоне частот, и “Compressibility” – компрессионную дисперсию – вязкое трение, проявляющееся в ограниченном диапазоне частот. Уравнение, аналогичное (15), было получено с использованием иного подхода и в работе [23]. Представленную модифицированную GS теорию будем называть далее GS + EC, Grain Shearing + Effective Compressibility.

Проанализируем полученное решение. Исключим возможность движения флюида, положив $\phi = 0$. Тогда $b = -(1 + \chi D)$, $c = 0$, $K_u = K_0$, и формула (15) переходит в (6). Если плотность гранул равна плотности флюида, среда представляет взвесь, гранулы и флюид колеблются с одинаковой скоростью и амплитудой. Тогда $A = 0$ и (15) переходит в (6). Если же эти невесомые гранулы друг за друга никак не зацепляются, то $\chi = 0$, и (15) переходит в формулу Вуда (2). Сомножитель $A$ отражает отсутствие скелета и возможность превращения неконсолидированной среды в суспензию при равенстве плотностей компонент. Этот сомножитель принципиально отличает GS + EC модель от расширенных версий [16–18] теории Био.

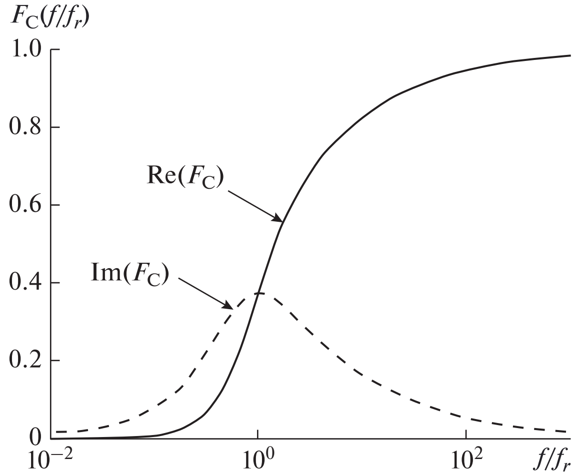


**Рис. 1.** Частотные зависимости действительной и мнимой частей функции коррекции.

Для подразделения всего диапазона частот на “низкие”, “средние” и “высокие” частоты определим в (10) переходную частоту

$$f_r = \frac{\eta}{a^2 \rho_f}, \quad (16)$$

тогда (10) принимает вид $w = \sqrt{2\pi \frac{f}{f_r}}$. На рис. 1 показаны действительная и мнимая части функции коррекции $F_C(w)$ в зависимости от относительной частоты $f/f_r$.

На низких ($f \ll f_r$) частотах $\mathrm{Re}(F_C) \to 0$, $\mathrm{Im}(F_C) \to 0$, $K_u \approx K_0$, поры проницаемы для жидкости. В этом случае $b = -(1 + \chi D)$, $c \approx 0$, GS + EC модель снова переходит в GS теорию, проявляется только внутреннее трение, $\alpha \sim \omega^1$. На средних ($f \approx f_r$) частотах величина $\mathrm{Im}(F_C)$, характеризующая относительное межфазное ускорение и соответственно вязкие силы, максимальна. На высоких ($f \gg f_r$) частотах $\mathrm{Im}(F_C) \to 0$, межфазное ускорение стремится к нулю, поры вследствие инерции жидкости непроницаемы. На очень низких, сейсмических частотах дисперсией можно пренебречь, считая $D = 1$, тогда

$$c_{p0} = \sqrt{\frac{K_0 + \gamma}{\rho_0}}. \quad (17)$$

Следует обратить внимание на принципиальную разницу между микропараметрами трения, устанавливаемыми в рамках GS и GS + EC теорий. Предполагая, что $n = m$, M. Buckingham определяет $\gamma = \gamma_p + 4/3\gamma_s$, где $\gamma_p$ – модуль продольной жесткости [20]. Суммарная жесткость ($\gamma_p + 4/3\gamma_s$) инвертируется по формулам GS теории [21] без симуляции вязкого трения. Композитная

GS +EC жесткость $\gamma$ вычисляется как результат решения уравнения (15) вместе с вкладом порового флюида, поэтому $\gamma_{GSEC}$ и $(\gamma_p + 4/3\gamma_s)_{GS}$ друг с другом не сопоставляются. Кроме того, результаты инверсий показывают, что $n \neq m$, взаимодействие гранул друг с другом и с жидкостью при сжатии и при сдвиге существенно различается [22].

Корень (15) со знаком минус соответствует медленной волне Био. В быстрой волне частички среды колеблются так, что фазы сжатия твердой (гранул и скелета) и жидкой компонент совпадают, в медленной волне колебания скелета и флюида противофазны. В неконсолидированной среде нет дальнодействующих упругих сил, возвращающих твердую фазу к положению равновесия, поэтому медленная "волна" – это осциллирующие потоки флюида, направленные от большего порового давления к меньшему. Наблюдать распространение медленной волны можно, наступив ногой на мелкий водонасыщенный песок.

## 3. СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ GS + EC МОДЕЛИ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

### *3.1. Входные параметры GS + EC модели*

При проведении инверсий возникает проблема "уникальности" – является ли восстановленный набор параметров единственным. Для последующего анализа отобраны результаты инструментальных измерений, где наблюдается существенная дисперсия фазовой скорости – только в этом случае благодаря консервативно-диссипативной связи между скоростью звука и затуханием возможна более или менее однозначная (в пределах входных неопределенностей) инверсия параметров среды.

Входными параметрами, определяющими скорость звука и затухание, являются модуль композитной межгранулярной жесткости $\gamma$ и показатель стресс-релаксации $n$ соответственно. Эти параметры восстанавливаются инверсией экспериментальных данных. Величины $\gamma$ и $n$ зависят от важного и спорного [32–34] параметра – модуля упругости гранул $K_g$, определяющего суспензионную скорость звука (2), а совместно с композитной жесткостью $\gamma$ – нижнюю границу фазовой скорости $c_{p0}$ (17). Как следствие, от величины $K_g$ зависит "вертикальный размах" и "крутизна" дисперсионной кривой. Приведенные ниже результаты инверсий в основном получены при общепринятых, "исторических" [32] значениях $K_g$. Прямые измерения $K_g$, описанные в работе [33], выполнены в условиях "чистой" среды. Реальное морское дно всегда содержит включения, которые могут быть более сжимаемы по сравнению с гранулами песка.

Наклон, форма дисперсионной кривой, отклонение коэффициента затухания от закона $\alpha_p \sim f^1$ определяется эффективной пористостью $\phi$ – внутренним параметром модели GS + EC, связывающим акустические и физические характеристики среды. Величина $\phi$ характеризует и состояние среды – чем меньше разница между статической пористостью $P$ и эффективной $\phi$, тем ближе среда к суспензии. Наоборот, $\phi = 0$ соответствует плотным мелкодисперсным осадкам типа мусора с низкой гидравлической проницаемостью.

Показатель стресс-релаксации $n$ и эффективная пористость $\phi$ оказывают конкурирующее влияние на показатель $\varepsilon$ в степенном законе затухания $\alpha_p \sim f^{\varepsilon}$. В рамках GS теории $\varepsilon \approx 1 + n/2$, с увеличением неупругости межгранулярного взаимодействия наклон графика $\alpha_p(f)$ растет. Наоборот, увеличение интенсивности вязких сил и эффективной пористости уменьшает $\varepsilon$ и угол наклона графика $\alpha_p(f)$.

Трудно подобрать точное определение для характерного размера пор. Р.Д. Столл связывает размер пор со средним размером гранул и считает $a = d/7 = 0.142d$. M. Kimura в работе [35] заключает, что $a = (0.125...0.167)d$.

Уникальные оценки можно получить, измеряя частотную зависимость проницаемости и определяя по соответствующему графику переходную частоту (16). Согласно результатам, приведенным в работе [36], для шариков диаметром $d = 0.5$ мм при гармонической прокачке воды релаксационная частота $f_r = 216$ Гц. Тогда, обращая (16), получаем $a = d/7.35$. Результаты оптических измерений в тех же шариках дают эффективный радиус пор $a = d/7$, радиус горла (суженной части пор) – $d/12$ [36].

Поставим в соответствие реальной среде с гранулами разнообразных размеров среду из стеклянных шариков диаметром $d_e$ с равной статической проницаемостью. Пористость среды из шариков не зависит от их размера и при случайной упаковке равна $P_0 = 0.363$ [19]. Обращая формулу Козени–Кармана $\kappa = \frac{1}{180}\frac{P^3}{(1-P)^2}d^2$ и измерив проницаемость среды, можно вычислить эквивалентный диаметр шариков:

$$d_e = 39\sqrt{\kappa_0}, \tag{18}$$

тогда

$$a = d_e/7.35 = 0.136d_e. \tag{19}$$

После инверсии, зная $\gamma$, $n$, $\phi$, вклад внутреннего трения в дисперсию и затухание может быть вычислен, полагая в (15) $\phi = 0$, а вклад вязкого трения – полагая $n = 0$.

**Таблица 1.** Входные и инвертированные характеристики среды. Стеклянные шарики в воде и в силиконовом масле

| Входные параметры | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Диаметр, *d*, мм | $\rho_g$, кг/м$^3$ | $K_g$, Па | $\rho_f$, кг/м$^3$ | $K_f$, Па | $\eta$, Па с | *P* | $\kappa$, м$^2$ |
| Вода | 0.4 | 2500 | $3.8 \times 10^{10}$ [33] | 1000 | $2.23 \times 10^9$ | $1 \times 10^{-3}$ | 0.384 | $11 \times 10^{-11}$ |
| Масло | | | | 968 | $9.68 \times 10^8$ | $98 \times 10^{-3}$ | 0.36 | $8.43 \times 10^{-11}$ |

| Инвертированные параметры | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $K_0$, Па | $\alpha_0$, дБ/м/кГц | $\gamma$, Па | *n* | *a*, мкм | $\phi$ |
| Шарики + вода | $5.28 \times 10^9$ | 0.12 (200 кГц) | $1.9 \times 10^8$ | 0.06 | 54 (*d*/7.35) | 0.3 |
| Шарики + масло | $2.57 \times 10^9$ | 0.85 | $1.02 \times 10^4$ | 0.67 | 54 (*d*/7.35) | 0.345 |

*3.2. Стеклянные шарики в различных жидкостях*

Рассмотрим результаты измерений скорости и затухания в эксперименте с модельной средой – стеклянными шариками в воде и в силиконовом масле [21, 37]. Этот интересный эксперимент был специально задуман для проверки GS и Био-Столла теорий. Поскольку вязкость силиконового масла в 100 раз больше чем вязкость воды, ожидалось, что переходная частота (16), где зависимость затухания меняется с $\sim f^2$ на $\sim f^{1/2}$, сдвинется вверх и окажется внутри диапазона измерений.

Входные и инвертированные параметры приведены в табл. 1, графики $c_p(f)$, $\alpha_p(f)$, $\beta_p(f)$ и двух дисперсионных компонент – внутреннего и вязкого трения – на рис. 2. Алгоритм инверсии был настроен на лучшее соответствие между экспериментальными точками и графиком тангенса угла потерь (1) $\beta_p(f)$. Для сравнения показаны так же и дисперсионные кривые теорий GS и Био-Столла (GS, B-S). На рис. 2б, 2в, 2г зависимость $\alpha_p(f)$ теории Био-Столла совпадает с вязкой компонентой затухания.

Как видно из рис. 2б, частотная зависимость затухания следует закону $\alpha_p \sim f^1$ во всем диапазоне, из чего в работе [37] был сделан вывод, что теория Био-Столла не подтверждается, затухание определяется не вязким, а внутренним трением. Однако, теория Био-Столла дает хорошее соответствие с измерениями скорости звука, что свидетельствует о правильном воспроизведении вязкой компоненты дисперсии.

С другой стороны, не подтверждается и GS теория – линии $c_p(f)$ и $\alpha_p(f)$ пересекают экспериментальные тренды, т.е. только внутренним трением объяснить постоянную добротность среды вместе с существенной дисперсией скорости тоже невозможно. Соответствие не становится лучше и в рамках VGS теории [21, стр. 1497].

Рассмотрим, что показывает GS + EC модель. Сопоставление графиков компонент скорости и затухания убеждает, что только суммарным влиянием внутреннего и вязкого трения можно объяснить и постоянную добротность, и дисперсию скорости. Вязкое и внутреннее трение в данном эксперименте сложились так, что дисперсия скорости в основном обусловлена консервативным влиянием флюида, внутреннее трение проявляется только на верхней границе частотного диапазона измерений – рис. 2а. Влияние же внутренней и вязкой компонент затухания (рис. 2б, 2в, 2г) случайно разделилось пополам – до середины диапазона измерений в основном вязкое трение, выше середины – внутреннее, но в сумме получилось $\alpha \sim f^1$, $\beta \approx$ const.

Инверсия возвращает низкое значение межгранулярной жесткости, высокое значение деформационного упрочнения и высокую эффективную пористость – существенно нелинейное взаимодействие между гранулами в вязкой среде. Физически это можно объяснить любрикацией поверхностей гранул маслом, вязкость которого уменьшает внутреннее трение, но в то же время препятствует вытеснению этого флюида из межгранулярной щели.

В работе [23] приведены аналогичные дисперсионные кривые, восстановленные при рекомендованном [21, 37] значении упругости гранул $K_g = 7 \times 10^{10}$ Па. В этом случае межгранулярная жесткость оказывается предельно низкой, $\gamma = 192$ Па, а показатель деформационного упрочнения – предельно высоким, $n = 0.98$.

Рассмотрим заполнение пор водой. Скорость звука в пределах доверительного интервала практически постоянна, частотная зависимость затухания следует закону $\alpha \sim f^1$, $\beta \approx$ const, с угадываемым трендом к снижению, соответствующему стремлению к постоянной добротности. Считая теперь известным размер пор, применим для вычисления эффективной пористости формулу (13). Как видно из рис. 2, дисперсия скорости звука обусловлена в основном упругостью жидкости, а

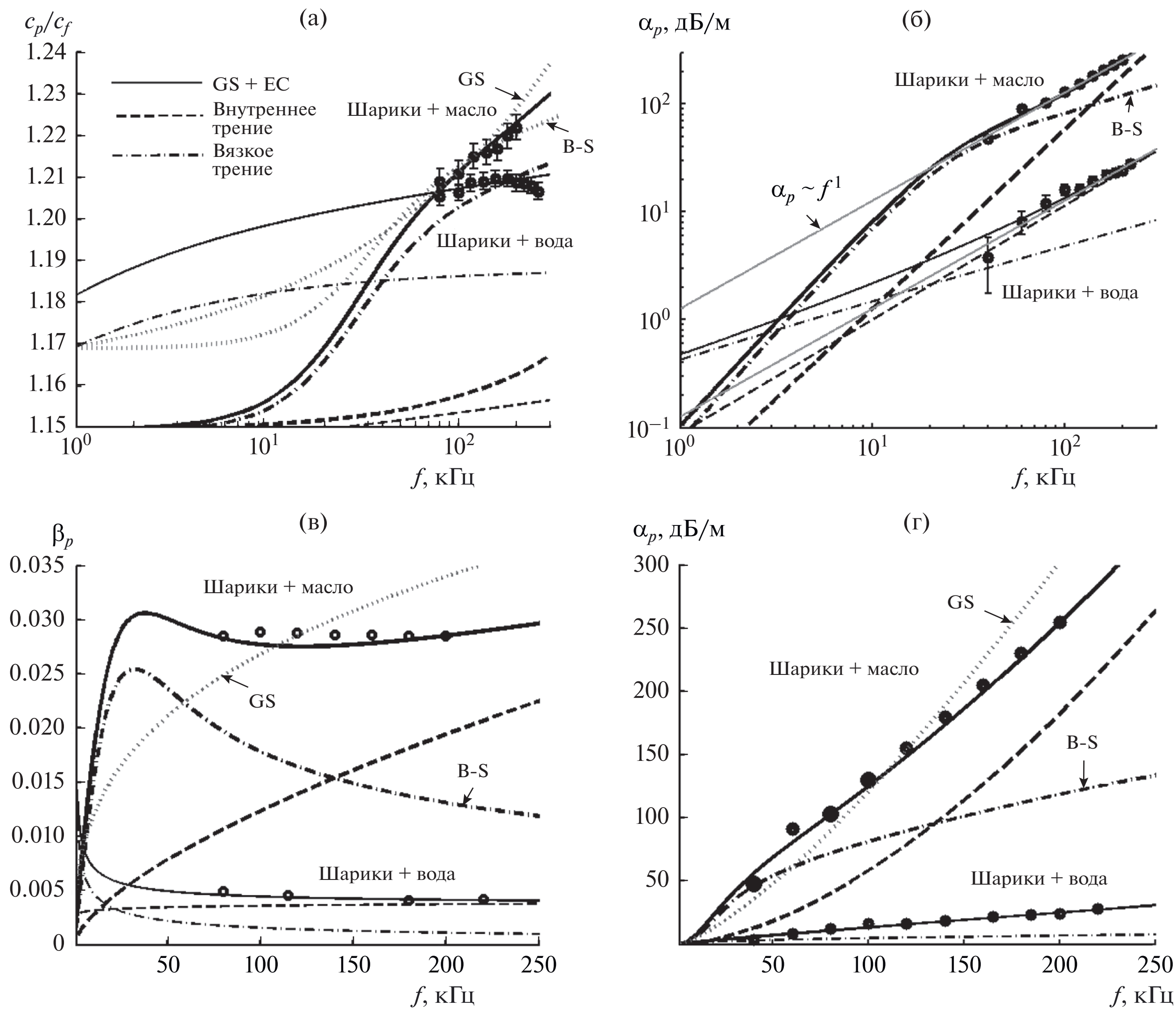


**Рис. 2.** Результаты эксперимента “стеклянные шарики в воде и в силиконовом масле”. (а) – Частотные зависимости относительной скорости звука; (б) и (г) – коэффициента затухания; (в) – тангенса угла потерь и двух дисперсионно-диссипативных компонент – вязкого и внутреннего трения

затухание – внутренним трением. Отклонение теоретической зависимости от закона $\alpha \sim f^1$ на самой низкой частоте не больше доверительного интервала. Высокая межгранулярная жесткость и малая величина показателя деформационного упрочнения характеризуют среду как упругую.

### *3.3. Слабоуплотненное и суспензионное состояние среды*

Рассмотрим еще один необычный случай: очень крупный и очень мелкий коралловый песок Гавайских островов. Данные взяты из [38]. Измерения выполнены на месте, глубина погружения датчиков измерительной системы в песок – 10...20 см.

Гранулы кораллового (карбонатного) песка угловаты, пронизаны сквозными и тупиковыми отверстиями, некоторые имеют форму плоских спиральных пружинок [2]. Статическая пористость такого песка не будет согласована с его проницаемостью.

Входные и инвертированные параметры приведены в табл. 2, экспериментальные точки и графики – на рис. 3. Вязкость воды далее везде взята $\eta = 1 \times 10^{-3}$ Па с. Измерения проводились в диапазоне 20–100 кГц, что соответствует длине волны 8...1.6 см. На низких частотах длина волны сопоставима с глубиной погружения измерительной системы в песок, и, как видно из рис. 3, экспериментальные точки $\alpha_p(f)$ имеют хаотическое расположение, не укладывающееся ни в какой за-

**Таблица 2.** Входные и инвертированные характеристики среды. Коралловый песок Гавайских островов

| Входные параметры | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Диаметр, $d$, мм | $\rho_g$, кг/м$^3$ | $K_g$, Па | $\rho_f$, кг/м$^3$ | $K_f$, Па | $P$ | κ*, м$^2$ |
| Крупный | 0.75 | 2750 | $7.4 \times 10^{10}$ | 1023 | $2.38 \times 10^9$ | 0.45 | $3.5 \times 10^{-11}$ |
| Мелкий | 0.069 | | | | | 0.56 | $0.34 \times 10^{-11}$ |

* Не измерялась инструментально, а определена в [38] по наилучшему соответствию с моделью Био-Столла

| Инвертированные параметры | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $K_0$, Па | $\alpha_0$, дБ/м/кГц | $\gamma$, Па | $n$ | $a$, мкм | $\phi$ |
| Крупный | $5.09 \times 10^9$ | 0.75 (100 кГц) | 60216 | 0.623 | 24 ($d$/31) | 0.32 |
| Мелкий | $4.14 \times 10^9$ | 0.62 (100 кГц) | 196 | 0.99 | 17 ($d$/4) | 0.24 |

кон. С ростом частоты постепенно выстраивается зависимость, где $\alpha_p \sim f^{\varepsilon}$, $\varepsilon \geq 1$.

Ажурное строение гранул кораллового песка и малая глубина погружения датчиков порождают сложный закон дисперсии. Из сопоставления графиков внутренней и вязкой компонент фазовой скорости видно, что, как и в предыдущем случае, дисперсия скорости обусловлена консервативным действием жидкости. Наоборот, основная причина затухания в среде – внутреннее трение. Вязкое трение проявляется на самых низких частотах и "путает" закон $\alpha_p(f)$, отклоняя его в сторону $\sim f^{1/2}$. Еще более интересно, что вязкие компоненты затухания для крупного и мелкого песка одинаковы, размер пор сопоставим, проницаемости же различаются на порядок. Эти факты показывают, что на высоких частотах жидкость не двигается относительно гранул, а на низких частотах вязкое трение будет обусловлено не глобальными, а локальными, "сквирт" потоками.

Инверсия возвращает очень низкие значения межгранулярной жесткости и предельно высокий показатель деформационного упрочнения (мелкий песок). Физически, такое состояние среды можно представить как мягкое, но невязкое, когда ажурное строение гранул способствует их высокой начальной контактной сжимаемости, но двойная пористость, с другой стороны, препятствует истечению флюида и увеличивает нелинейность среды в целом.

Следующий пример показывает противоположный результат. Актуальной и поныне является задача о распространении звука в концентрированных суспензиях, где кроме вязкого трения,

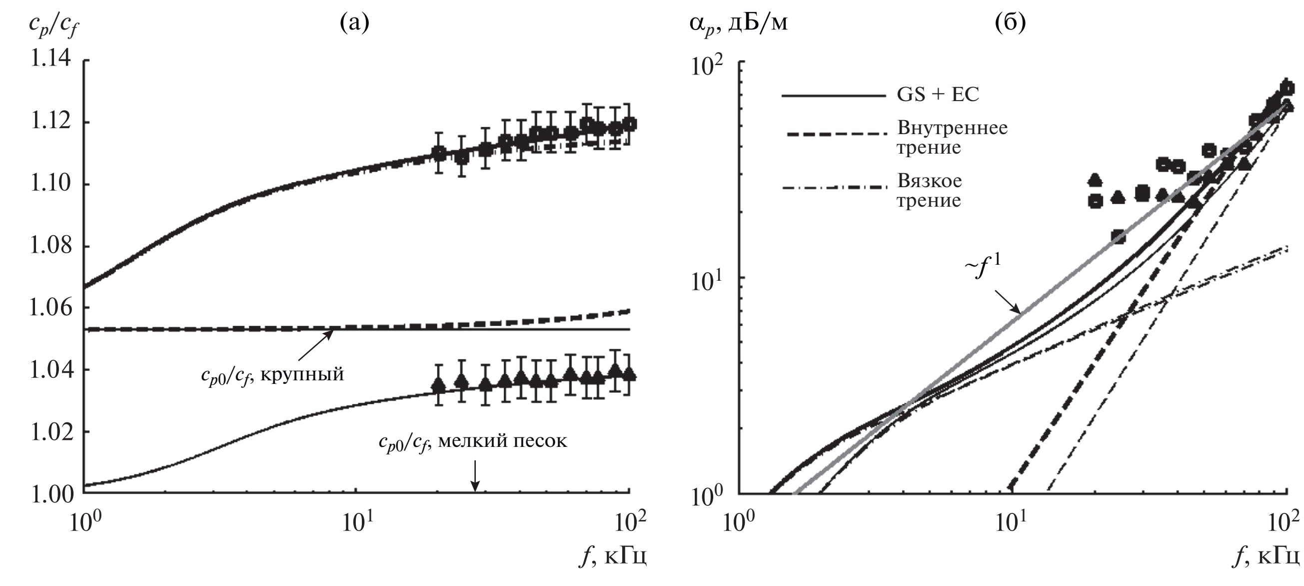


**Рис. 3.** Результаты эксперимента "коралловый песок Гавайских островов". Частотные зависимости скорости звука, коэффициента затухания и двух дисперсионно-диссипативных компонент – вязкого и внутреннего трения.

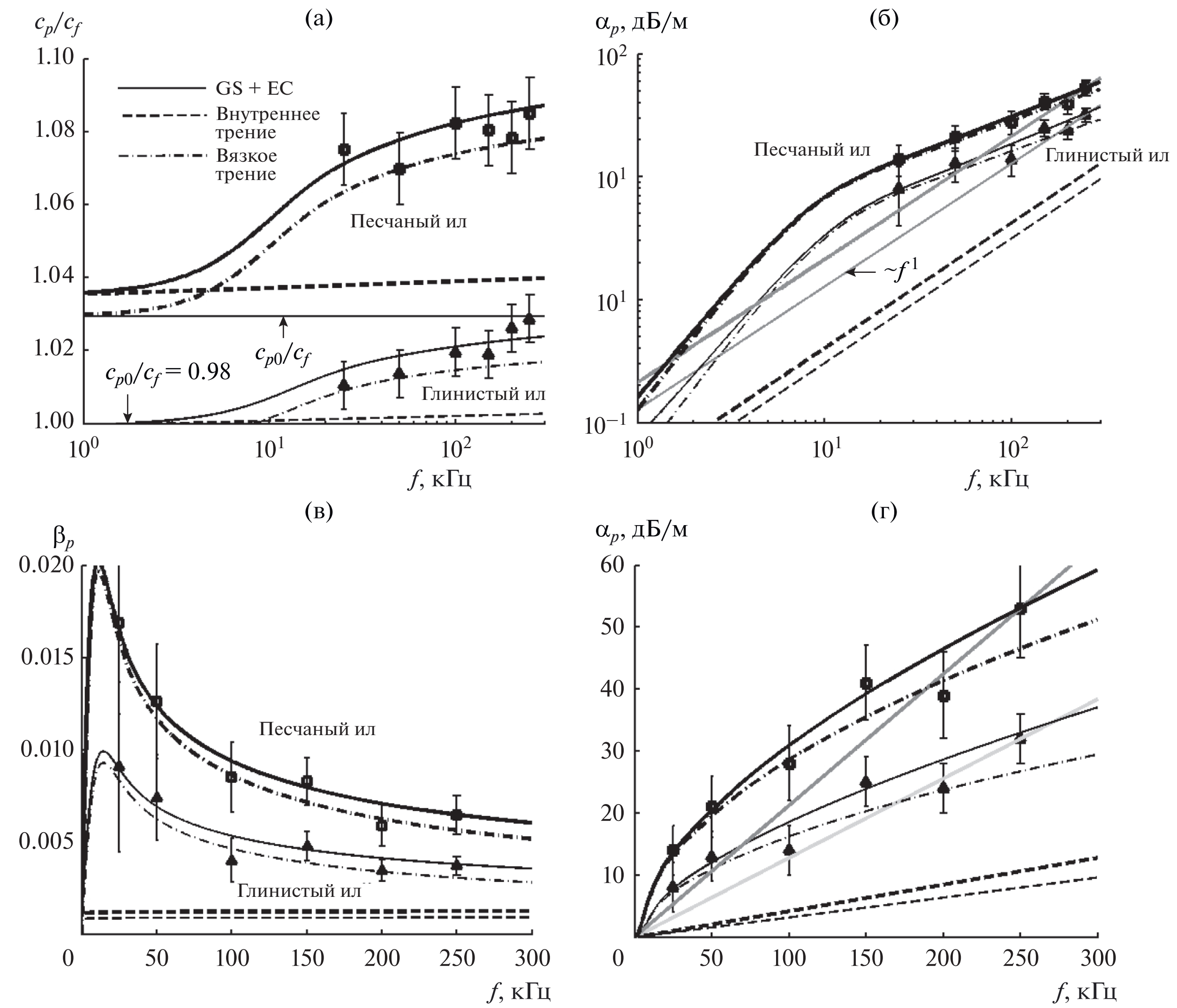


**Рис. 4.** Результаты эксперимента “глинистый ил” (clayey silt) и “песчаный ил” (sandy silt). (а) – Частотные зависимости относительной скорости звука; (б) и (г) – коэффициента затухания; (в) – тангенса угла потерь и двух дисперсионно-диссипативных компонент – вязкого и внутреннего трения.

постепенно проявляется и трение между частицами. Данные взяты из [39], где лабораторно измерялись скорость звука и затухание в средах типа “**глинистый ил**” и “**песчаный ил**”. Экспериментальные точки и дисперсионные кривые представлены на рис. 4, входные и инвертированные данные – в табл. 3.

Как видно, зависимость $\alpha_p(f)$ на высоких частотах не следует закону $\alpha \sim f^1$. Среда представляет собой не уплотненные внешним давлением осадки, а концентрированную суспензию, характерную для самой верхней, пограничной части илистого дна.

В обоих случаях во всем диапазоне частот определяющий вклад вносит вязкое трение. Результаты инверсии показывают высокую межгранулярную жесткость вместе с низкими показателями деформационного упрочнения. Такое сочетание микропараметров трения свидетельствует о практически упругом, линейном взаимодействии между гранулами. В этом единственном случае упругость гранул $K_g = 3.2 \times 10^{10}$ Па не подходит для моделирования, поскольку дает слишком высокую суспензионную скорость звука, при которой уравнения (15) не решаются.

### 3.4. Влияние неоднородностей среды

Немалую трудность для обобщения результатов экспериментальных измерений составляют гидродинамическая, пространственная изменчивость и неоднородность состава самой среды.

Сравним результаты трех измерений, выполненных “на месте” St. Andrews Bay [21] и Currituck

**Таблица 3.** Входные и инвертированные характеристики среды. Глинистый ил и песчаный ил

| Входные параметры | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Диаметр, $d$, мм | $\rho_0$, кг/м$^3$ | $\rho_g$, кг/м$^3$ | $\rho_f$, кг/м$^3$ | $K_f$, Па | $P$ | |
| Глин. ил | $2.8 \times 10^{-2}$ | 1520 | 2385 | 1023 | $2.395 \times 10^9$ | 0.635 | |
| Песч. ил | $7.97 \times 10^{-2}$ | 1790 | 2683 | | | 0.538 | |
| Инвертированные параметры | | | | | | | |
| | $K_0$, Па | $K_g$, Па | $\alpha_0$, дБ/м/кГц | $\gamma$, Па | $n$ | $a$, мкм | $\phi$ |
| Глин. ил | $3.31 \times 10^9$ | $1.0 \times 10^{10}$ | 0.13 | $2.1 \times 10^8$ | 0.016 | 8.2 ($d$/3.4) | 0.2 |
| Песч. ил | $4.17 \times 10^9$ | $3.0 \times 10^{10}$ | 0.21 | $2.8 \times 10^8$ | 0.02 | 9.3 ($d$/4.1) | 0.34 |

**Таблица 4.** Входные и инвертированные характеристики среды. Точки St. Andrews Bay и Currituck Sound

| Входные параметры | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Диаметр, $d$, мм | $\rho_g$, кг/м$^3$ | $K_g$, Па | $\rho_f$, кг/м$^3$ | $c_f$, м/с | $P$ | |
| St. Andrews Bay | 0.22 | 2653 | $3.2 \times 10^{10}$ | 1023 | 1523.6 | **0.379** | |
| Currituck Sound, 0.8 м | | 2633 | | 998 | 1490.1 | 0.44 | |
| Currituck Sound, 2.3 м | 0.14 | 2562 | | | | 0.67 | |
| Инвертированные параметры | | | | | | | |
| | $c_0$, м/с | $\alpha_0$, дБ/м/кГц | $\gamma$, Па | $n$ | $P$ | $a$, мкм | $\phi$ |
| St. Andrews Bay | 1656 | 0.3 | $2.36 \times 10^7$ | 0.192 | **0.380** | 17($d$/13) | 0.11 |
| Currituck Sound, 0.8 м | 1571 | 0.3 | $7.1 \times 10^7$ | 0.06 | 0.44 | 13($d$/17) | 0.44 |
| | 1557 | | $0.1 \times 10^7$ | 0.364 | | 24($d$/9) | |
| Currituck Sound, 2.3 м | 1453 | 0.55 | $1.6 \times 10^7$ | 0.2 | 0.67 | – | 0 |

Sound, мелководная и глубоководная точки [40, 41]. Дно в первых двух локациях состоит из хорошо сортированного среднего песка, глубина водного слоя соответственно десятки метров и 0.8 м, погружение датчика внутрь осадков до 2.5 и 0.3 м. В глубоководной (2.3 м) точке Currituck Sound песок мелкий и заиленный. Входные и инвертированные параметры – в табл. 4, экспериментальные точки и графики – на рис. 5.

Удивительно, но измерения, выполненные в различное время, в разных местах, разными методами, показывают на высоких частотах совпадающий результат – одинаковую относительную скорость и одинаковое приведенное затухание – $\alpha_{p0} = 0.3$ дБ/м/кГц. Состояния среды и дисперсионные кривые, однако, разные. В мелководной точке Currituck Sound высокая пористость, песок находится в неуплотненном состоянии, с большим размером пор. Принимая результаты инверсии St. Andrews Bay за основное состояние, можно видеть, что возмущенное состояние показывает значительно меньшую межгранулярную жесткость, но большее деформационное упрочнение. На средних частотах причина затухания – вязкое трение, внутреннее трение мало. С увеличением частоты внутреннее трение быстро растет и на 80 кГц "догоняет" внутреннее трение в основном состоянии, превышая здесь вязкое трение. В итоге внутреннее трение на частоте 80 кГц в точках St. Andrews Bay и Currituck Sound оказывается одинаковым.

Неоднозначность инверсии в возмущенной точке Currituck Sound отражается в существовании альтернативного результата, показывающего суспензионное состояние среды (на рис. 5б – верхняя линия на графике коэффициента затухания и на рис. 5а –нижняя линия на графике скорости звука). Возможно, расположенные ближе или дальше от верхней границы осадков зерновые наборы обладают своими уникальными дисперсионными свойствами, воспринимаемыми как инструментальные ошибки.

Расположение экспериментальных точек глубоководной локации Currituck Sound с заилен-

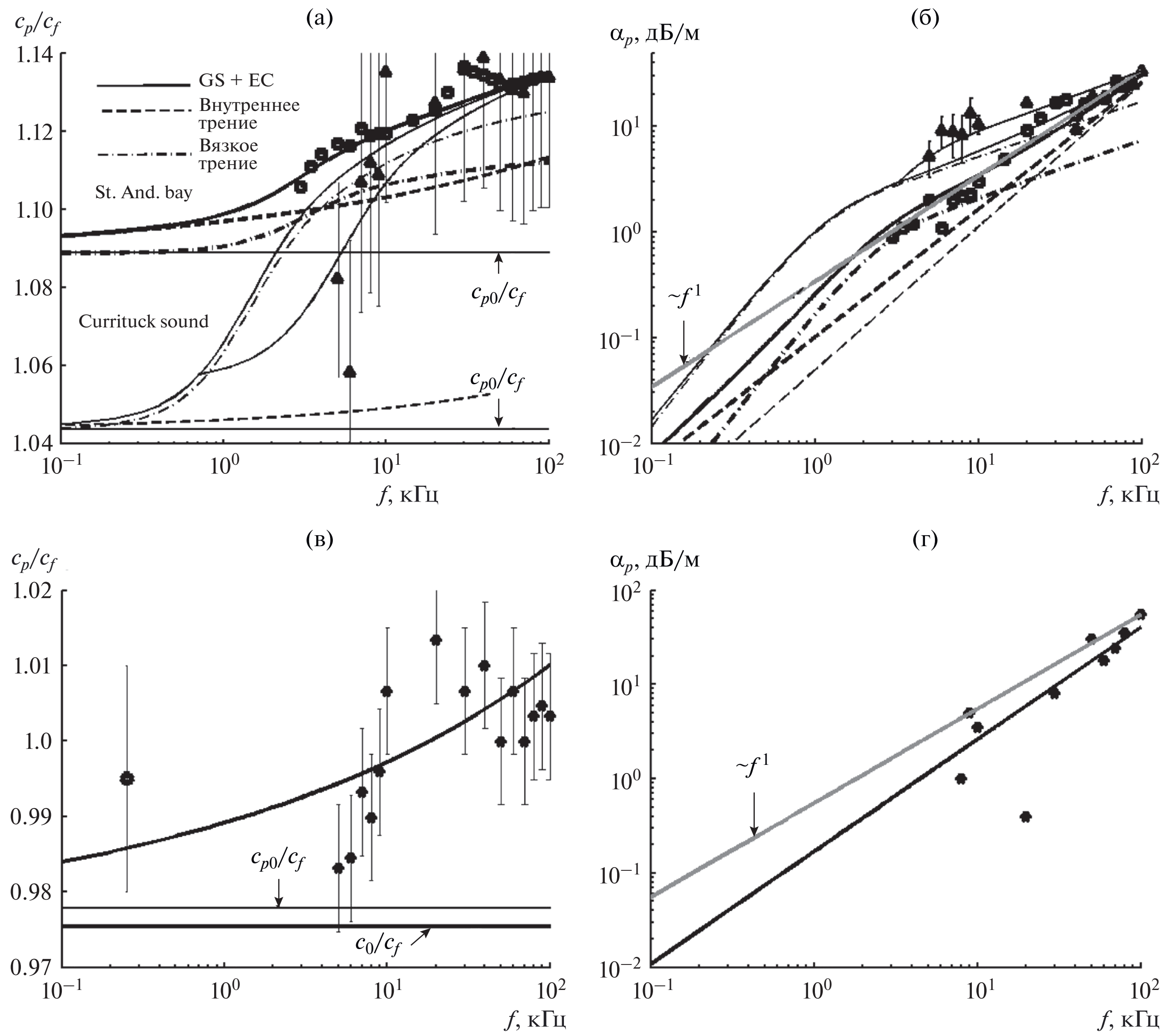


**Рис. 5.** (а) и (б) – Результаты экспериментов “Точки St. Andrews Bay и Currituck Sound, мелководная”; (в) и (г) – “Currituck Sound, глубоководная”. (а) и (в) – Частотные зависимости относительной скорости звука; (б) и (г) – коэффициента затухания и двух дисперсионно-диссипативных компонент – вязкого и внутреннего трения.

ным песком (рис. 5в, 5г) и результат инверсии показывают, что вязкие силы здесь могли проявиться только как случайные возмущения некоторой части среды, накладывающиеся на основное внутреннее трение, определяющее и дисперсию и затухание. Заметим, что скорость звука в дне оказывается меньше чем в воде.

### *3.5. Осредненные микропараметры трения. Неопределенность пористости*

Проанализируем результаты измерений, полученные в **морских экспериментах** St. Andrews Bay, SAX-99, TREX-13 [21, 34, 42]. Скорость звука и затухание измерялись в разное время, в разных местах различными системами и способами. В первых двух точках песок чистый, а в точке Transition 1 [42] – замусоренный. Входные и восстановленные параметры – в табл. 5, точки и графики – на рис. 6. На самых низких частотах добавлены результаты волноводных инверсий, приведенные в работах [43–46].

Обратим вначале внимание на экспериментальные точки на рис. 6а–6в – частотные зависимости скорости звука и коэффициента затухания. Как видно, все измерения показывают на высоких частотах одинаковое затухание – $(0.3 \pm 0.1)$ дБ/м/кГц, но существенно различающуюся скорость звука.

Из сопоставления величин $K_0$ и $\gamma$ (табл. 1–3) следует, что во всех случаях $K_0 \gg \gamma$, объемный мо-

**Таблица 5.** Входные и инвертированные характеристики среды. Эксперименты SAX99, St. Andrews Bay, TREX-13

Входные параметры

| | Диаметр, $d$, мм | $\rho_g$, кг/м$^3$ | $K_g$, Па | $\rho_f$, кг/м$^3$ | $c_f$, м/с | $P$ | $\kappa$, м$^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| SAX99 | 0.38 [21] 0.29...0.56 [29] | 2690 | $3.2 \times 10^{10}$ | 1023 | 1530.1 | $0.372 \pm 0.0073$ [29] | $2.5 \times 10^{-11}$ [21] $(3.3 \pm 0.6) \times 10^{-11}$ [29] |
| TREX-13 Transition 1 | 0.4 | | | 1030 | 1528 | **0.4** | – |

Инвертированные параметры

| | Экв. диаметр, $d_e$, мм ($7.35a$) | $c_0$, м/с | $\kappa$, м$^2$ $(d_e/39)^2$ | $\gamma$, Па | $n$ | $a$, мкм | $P$, $\phi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| SAX99 | 0.176 | 1662 | $2.02 \times 10^{-11}$ | | | 23.8 | 0.372, 0.23 |
| St. Andrews Bay | 0.124 | 1656 | $1.01 \times 10^{-11}$ | $2.36 \times 10^7$ | 0.192 | 17 | **0.380**, 0.11 |
| TREX-13 | 0.11 | 1633 | $0.80 \times 10^{-11}$ | | | 15 | **0.40**, 0.14 |

дуль упругости среды является подавляющим фактором влияния на скорость звука. Основную неопределенность величины $K_0$ дает неопределенность пористости – формулы (2)–(4). Кажущаяся изменчивость межгранулярной жесткости [21] (влияющей в основном на скорость) вместе с показателем стресс-релаксации (влияющим в основном на затухание) является *компенсатором* изменчивости скорости звука из-за неопределенности пористости. Этот вывод следует из равенства величин коэффициентов затухания звука на высоких частотах, где проявляется *только* межгранулярное трение.

Вряд ли пористость среды, даже составленной из стеклянных шариков, может быть измерена с точностью более двух цифр, что подтверждает разброс значений, приведенных в работе [35]. Измерения SAX99 показывают, что уже и вторая цифра пористости является сомнительной [47]. Увеличение пористости на 0.01, от 0.37 до 0.38 дает приращение $K_0$ на $1.24 \times 10^8$ Па, скорости $c_0$ на 11 м/с, изменяет $\gamma$ на $2.32 \times 10^7$ Па (что сопоставимо с самой величиной – табл. 5), меняет $n$ от 0.2046 до 0.1634.

Примем за основу результаты измерений SAX99 [21, 29, 34, 46] и будем считать здесь эту среду эталонной. Поскольку скорость звука в измерениях SAX99 наибольшая, возьмем наименьшее значение пористости – 0.372 [29]. Параметры согласования: 400 кГц, скорость звука 1785 м/с, затухание $0.3 \times 400$ дБ/м – рис. 6в. Восстановленные по этим входным параметрам величины $\gamma$ и $n$ будем считать осредненными для дна, показывающего на высоких частотах удельное затухание $(0.3 \pm 0.1)$ дБ/м/кГц и типичную частотную зависимость затухания (что исключает рассмотренный выше случай Currituck Sound). Приведенные на рис. 6а–6в графики построены, подбирая только три свободных параметра: объемную пористость $P$, размер пор $a$, эффективную пористость $\phi$. Как видно из табл. 5, восстановленная пористость соответствует указанной во входных параметрах (TREX-13 в табл. 5 и St.An.Bay в табл. 4 и табл. 5, выделено жирным) с погрешностью в третьей цифре. Из рис. 5б видно, что вклад внутреннего трения в суммарное затухание во всех случаях одинаковый, вязкого – разный, изменяющийся пропорционально эффективной пористости.

Обратим внимание на совпадение результатов наших инверсий, основанных на разнообразных инструментальных измерениях, с результатами волноводных инверсий на самых низких частотах. Частотная зависимость затухания для эксперимента SW2006 [45] почти совпадает с зависимостью St. Andrews Bay и Transition 1. Результаты волноводных инверсий [46], ориентированные на модель Пекериса, показывают несколько большую крутизну зависимости $\alpha_p(f)$, такую, что экспериментальные точки в диапазоне 30–50 Гц располагаются ниже линии TREX13, вдоль вязкой компоненты затухания SAX99, а в диапазоне 600–1000 Гц – между линиями TREX13 и SAX99 (рис. 6б).

В табл. 5 приведены результаты реверсного определения физических параметров осадков – эквивалентного диаметра гранул и проницаемости с помощью формул (18), (19). Сопоставление размера пор, восстановленного по дисперсионной кривой, с измеренным оптическими методами (35–40 мкм [29, 30]) и с измеренной статической проницаемостью соответствует смыслу переходной частоты (16) – в крупных порах характер те-

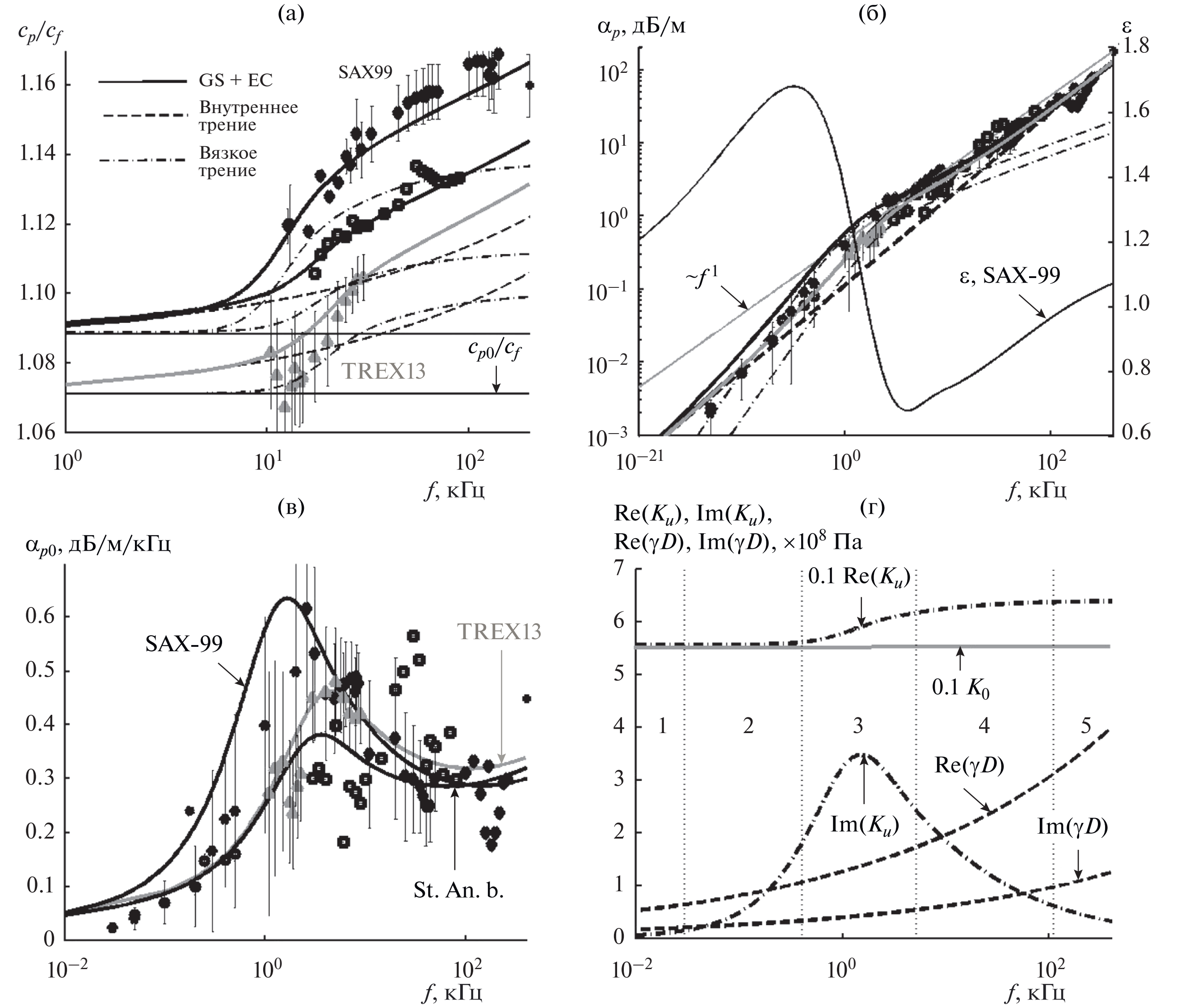


**Рис. 6.** Результаты экспериментов “SAX99, St. Andrews Bay, TREX-13 (Transition 1)”. (а) – Частотные зависимости относительной скорости звука; (б) – коэффициента затухания и (в) – степенного показателя затухания, приведенного коэффициента затухания $\alpha_{p0} = \alpha_p/f$; (г) – консервативной и диссипативной частей модуля упругости среды и модуля межгранулярного взаимодействия.

чения уже существенно отличается от пуазейлевского.

На рис. 6г показаны частотные зависимости консервативной и диссипативной частей модуля упругости среды Re($K_u$), Im($K_u$) и модуля межгранулярного взаимодействия Re(γ$D$), Im(γ$D$). Консервативные части управляют дисперсией скорости звука, диссипативные – затуханием. На рис. 6б ось справа – частотная зависимость показателя затухания ε, если записать степенной закон в виде, аналогичном [46]: $\alpha_p = C(f)f^{\varepsilon}$, $C(f) \neq \alpha_{p0}$. Показатель вычислен по формуле: $\varepsilon = \dfrac{\partial\alpha_p/\partial f}{\alpha_{p0}}$. Эти параметры восстановлены для точки SAX99.

Анализируя и сопоставляя теперь все графики на рис. 2–6, можно по соотношению между силами внутреннего и вязкого трения выделить характерные диапазоны частот и типы сред.

1) Очень низкие, сейсмические частоты. Re($K_u$) ≈ $K_0$, Re($K_u$) ≫ Re(γ$D$) – добавка скорости за счет внутреннего трения мала, Im($K_u$) < Im(γ$D$) – внутреннее трение много больше вязкого. Слабая дисперсия за счет роста Re(γ$D$). Мягкая среда вследствие легкого вытеснения флюида.

На этих частотах дисперсионные кривые GS + EC и VGS [21] теории принципиально различаются. Согласно VGS теории, при $f \to 0$, $c_p(f) \to c_0$, $\alpha_p \sim f^2$ – внутреннее трение “исчезает”, всякая среда обращается в суспензию. Согласно GS + EC (и теории

Био-Столла), $c_p(f) \to c_{p0}$, $\alpha_p \to f^1$ – проявляется только внутреннее трение.

2) Частоты ниже релаксационной. Этот участок – в окрестности первой точки пересечения графиков $\mathrm{Im}(K_u)$ и $\mathrm{Im}(\gamma D)$ – рис. 6г. Здесь упругость среды $\mathrm{Re}(K_u)$ возрастает, $\mathrm{Re}(K_u) \gg \mathrm{Re}(\gamma D)$, $\mathrm{Im}(K_u) \approx \mathrm{Im}(\gamma D)$. Скорость звука увеличивается, показатель затухания $\varepsilon$ приближается к двум. Силы вязкого и внутреннего трения сопоставимы.

3) Частота в окрестности релаксационной (максимум $\mathrm{Im}(K_u)$). Величина дисперсии $\partial c_p/\partial f$ максимальна, $\mathrm{Im}(K_u) > \mathrm{Im}(\gamma D)$, вязкое трение больше внутреннего, тангенс угла потерь и удельное затухание максимальны. В этой области в средах с разнообразным гранулометрическим составом вязкие силы могут проявиться как эпизодический возмущающий фактор. Показатель $\varepsilon$ уменьшается от максимума и становится меньше единицы. Характер течения в порах меняется.

4) Частота выше релаксационной. Участок в окрестности второй точки пересечения графиков $\mathrm{Im}(K_u)$ и $\mathrm{Im}(\gamma D)$ – рис. 6г. Упругость среды $\mathrm{Re}(K_u)$ уже почти постоянна, дисперсия скорости звука $\partial c_p/\partial f$ резко уменьшается, показатель затухания возрастает от минимума и приближается к единице. Вязкие силы становятся меньше сил внутреннего трения.

5) Высокие частоты. Здесь $\mathrm{Re}(K_u) \approx \mathrm{const}$, $\mathrm{Im}(K_u) \ll \mathrm{Im}(\gamma D)$. Слабая дисперсия, затухание $\alpha_p \sim f^1$.

6) Очень высокие частоты, граница применимости GS + EC теории. Длина волны сравнима с размером гранул, вследствие рассеяния возрастает затухание, скорость звука уменьшается.

## ВЫВОДЫ

Пограничная область переходного слоя дна толщиной десятки сантиметров показывает сложные и изменчивые дисперсионные характеристики. В “очень мелком море” с глубинами 0.5–6 м приливы, волны, штормы, судоходство нарушают покой пограничного слоя, и он приобретает диссипативные свойства суспензии. На глубинах десятки метров упомянутые факторы уже не оказывают влияния, состояние пограничного слоя уплотненное, и на высоких частотах $\alpha_p \sim f^1$.

При восстановлении микропараметров трения по результатам инструментальных измерений наиболее надежный, воспроизводимый параметр – величина коэффициента затухания (дБ/м/кГц) на высоких (200–400 кГц) частотах. Скорость звука изменчива, поскольку сильно зависит от неопределенности пористости.

Во всех рассмотренных случаях GS + EC теория явилась эффективным и гибким инструментом для анализа механики взаимодействия между неконсолидированной средой и жидкостью. Согласно представленной модели, механизм вязкой дисперсии в неконсолидированной среде реализуется следующим образом. Компрессия приводит к истечению флюида из мелких пор и щелей между гранулами сквозь крупные сквозные поры, что увеличивает сжимаемость среды на низких частотах. С ростом частоты характер течения в сквозных порах постепенно меняется, их проницаемость уменьшается, поры “запираются”, гранулы и жидкость колеблются вместе. Флюиду, заключенному в щелях, деваться некуда, что приводит к возрастанию упругости среды и скорости звука. Так проявляется консервативное влияние жидкости. Вязкое трение дает вклад в диапазоне средних частот, когда флюид еще мобилен, но и вязкие силы уже достаточно велики. На высоких частотах вязкие силы могут проявляться как возмущения скорости и затухания за счет движения флюида в самых мелких порах, где еще сохраняется пуазейлевское течение. Такой механизм взаимодействия фаз известен как локальные “сквирт” потоки (BISQ, BIot SQuirt), и в этой части наша модель сходится с представлениями EB (Extended Biot) моделей.

Проведенный анализ соотношений между силами внутреннего и вязкого трения относился только к продольной волне. Однако, отклонения затухания от закона $\alpha \sim f^1$ обнаружены, хотя и в меньшей степени, и для сдвиговой волны [2, 15–17]. Совместный анализ результатов измерений акустических характеристик продольной и сдвиговой волн является принципиально важным для углубления понимания механики взаимодействия между неконсолидированной средой и флюидом.

Работа выполнена в лаборатории теоретических основ перспективных методов исследования шельфа СевГУ при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-42-920001.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Katsnelson B., Petnikov V., Lynch J.* Fundamentals of shallow water acoustics. New York, Dordrecht, Heildelberg, London: Springer, 2012.
2. *Jackson D.R., Richardson M.D.* High-Frequency Seafloor Acoustics. New York: Springer, 2007.
3. *Григорьев В.А., Луньков А.А., Петников В.Г.* Затухание звука в мелководных акваториях с газонасыщенным дном // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 1. С. 90–100.
4. *Григорьев В.А., Кацнельсон Б.Г., Lynch J.F.* Определение эффективных параметров дна мелкого моря по спектрам широкополосных сигналов в условиях гидродинамической изменчивости // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 3. С. 330–340.
5. *Белов А.И., Кузнецов Г.Н.* Оценка акустических характеристик поверхностных слоев морского дна с использованием четырехкомпонентных векторно-скалярных приемников // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 2. С. 194–202.

6. *Григорьев В.А., Петников В.Г., Шатравин А.В.* Звуковое поле в мелководном волноводе арктического типа с дном, содержащим газонасыщенный осадочный слой // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 4. С. 389–405.
7. *Григорьев В.А., Петников В.Г., Росляков А.Г., Терехина Я.Е.* Распространение звука в мелком море с неоднородным газонасыщенным дном // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 3. С. 342–358.
8. *Гринюк А.В., Кравченко В.Н., Лазарев В.А., Малеханов А.И., Петухов Ю.В., Романова В.И., Хилько А.И.* Реконструкция параметров осадочных слоев морского дна мелкого моря с использованием широкополосных сейсмоакустических источников // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 3. С. 354–362.
9. *Camin H.J., Isakson M.J.* A comparison of sediment reflection coefficient measurements to elastic and poroelastic models // J. Acoust. Soc. Am. 2006. V. 120. № 5. P. 2437–2449.
10. *Bonomo A.L., Chotiros N.P., Isakson M.J.* On the validity of the effective density fluid model as an approximation of a poroelastic sediment layer // J. Acoust. Soc. Am. 2015. V. 138. № 2. P. 748–757.
11. *Schock S.G.* A Method for estimating the physical and acoustic properties of the sea bed using chirp sonar data // IEEE J. Ocean. Eng. 2004. V. 29. № 4. P. 1200–1217.
12. *Holland C.W., Dettmer J.* In situ sediment dispersion estimates in the presence of discrete layers and gradients // J. Acoust. Soc. Am. 2013. V. 133. № 1. P. 50–61.
13. *Bonomo A.L., Isakson M.J.* A comparison of three geoacoustic models using Bayesian inversion and selection techniques applied to wave speed and attenuation measurements // J. Acoust. Soc. Am. 2018. V. 143. № 4. P. 2501–2513.
14. *Rakotonarivo S., Legris M., Desmare R., Sessarego J.-P., Bourillet J.-F.* Forward modelling sediment characterization using chirp sonars // Geophysics. 2011. V. 76. № 4. P. T91–T99.
15. *Kibblewhite A.C.* Attenuation of sound in marine sediments: a review with emphasis on new low frequency data // J. Acoust. Soc. Am. 1989. V. 86. № 2. P. 716–738.
16. *Chotiros N.P.* Acoustics of the Seabed as a Poroelastic Medium. Springer Briefs in Oceanography, 2017. 99 p.
17. *Chotiros N.P., Isakson M.J.* Shear wave attenuation and micro-fluidics in water-saturated sand and glass beads // J. Acoust. Soc. Am. 2014. V. 135. № 6. P. 3264–3279.
18. *Kimura M.* Frame bulk modulus of porous granular marine sediments // J. Acoust. Soc. Am. 2006. V. 120. № 2. P. 699–710.
19. *Mavko G., Mukerji T., Dvorkin J.* The Rock Physics Handbook. Tools for Seismic Analysis of Porous Media. Cambridge university press, 2009. 511 p.
20. *Buckingham M.J.* Wave propagation, stress relaxation, and grain-to-grain shearing in saturated, unconsolidated marine sediments // J. Acoust. Soc. Am. 2000. V. 108. № 6. P. 2796–2815.
21. *Buckingham M.J.* On pore-fluid viscosity and the wave properties of saturated granular materials including marine sediments // J. Acoust. Soc. Am. 2007. V. 122. №. 3. P. 1486–1501.
22. *Лисютин В.А.* Простая акустическая модель неконсолидированных морских осадков с внутренним и вязким трением // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2018. Т. 15. № 3. С. 39–51.
23. *Лисютин В.А.* Обобщенная реологическая модель неконсолидированных морских осадков с внутренним трением и эффективной сжимаемостью // Морской гидрофизический журнал. 2019. Т. 35. № 1. С. 85–100. Lisyutin V.A. Generalized rheological model of the unconsolidated marine sediments with internal friction and effective compressibility // Physical Oceanography [e-journal]. 2019. V. 26(1). P. 77–91. https://doi.org/10.22449/1573-160X-2019-1-77-91 https://doi.org/10.22449/0233-7584-2019-1-85-100
24. *Hamilton E.L.* Compressional wave attenuation in marine sediments // Geophysics. 1972. V. 37. № 4. P. 620–646.
25. *Машинский Э.И.* Процессы микропластичности в осадочных породах и физическая нелинейность в области сейсмических деформаций. Автореферат дис. докт. геол.-минералог. наук: 04.00.22. Новосибирск, 1999. 32 с.
26. *Зайцев В.Ю., Назаров В.Е.* О линейной частотной зависимости коэффициента поглощения упругих волн в микронеоднородных твердых телах // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 5. С. 622–627.
27. *Зайцев В.Ю., Назаров В.Е., Шульга А.Е.* О диссипативных и дисперсионных свойствах микронеоднородных сред // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 3. С. 348–355.
28. *Чабан И.А.* Затухание звука в грунтах и горных породах // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 2. С. 362–369.
29. *Reed A.H., Briggs K.B., Lavoie D.L.* Porometric properties of siliciclastic marine sand: A comparison of traditional laboratory measurements with image analisis and effective medium modeling // IEEE J. Ocean. Eng. 2002. V. 27. № 3. P. 581–592.
30. *Reed A.H., Thompson K.E., Briggs K.B., Willson C.S.* Physical pore properties and grain interactions of SAX04 sands // IEEE J. Ocean. Eng. 2010. V. 35. № 3. P. 488–501.
31. *Urumović K., Urumović Sr.K.* The referential grain size and effective porosity in the Kozeny-Carman model // Hydrol. Earth Syst. Sci. 2016. 20. P. 1669–1680.
32. *Chotiros N.P.* Response to: Comments on "Biot model of sound propagation in water-saturated sand" [J. Acoust. Soc. Am. 103, 2723–2725 (1998)] // Acoust. Soc. Am. 1998. V. 103. №. 5. P. 2726–2729.
33. *Richardson M.D., Williams K.L., Briggs K.B., Thorsos E.I.* Dynamic measurement of sediment grain compressibility at atmospheric pressure: acoustic applications // IEEE J. Ocean. Eng. 2002. V. 27. № 3. P. 593–601.
34. *Williams K.L., Jackson D.R., Thorsos E.I., Tang D., Schock S.G.* Comparison of sound speed and attenuation measured in a sandy sediment to predictions based on the Biot theory of porous media // IEEE J. Ocean. Eng. 2002. V. 27. № 3. P. 413–428.
35. *Kimura M.* Prediction of tortuosity, permeability, and pore radius of water-saturated unconsolidated glass beads and sands // J. Acoust. Soc. Am. 2018. V. 143. № 5. P. 3154–3168.

36. *Glover P.W.J., Walker E., Ruel J., Tardif E.* Frequency-dependent streaming potential of porous media. Pt. 2. Experimental measurement of unconsolidated materials // Int. J. Geophysics. V. 2012. Article ID 728495. P. 1–17.
37. *Hefner B.T., Williams K.L.* Sound speed and attenuation measurements in unconsolidated glass-bead sediments saturated with viscous pore fluids // J. Acoust. Soc. Am. 2006. V. 120. № 5. P. 2538–2548.
38. *Nosal E.-M., Tao C., Baffi S., Wilkens R.H.* Compressional wave speed dispersion and attenuation in carbonate sediments, Kaneohe Bay, Oahu, Hi // IEEE J. of Ocean. Eng. 2008. V. 33. № 4. P. 367–374.
39. *Wang J., Liu B., Kan G., Li G., Zheng J., Meng X.* Frequency dependence of sound speed and attenuation in fine-grained sediments from 25 to 250 kHz based on a probe method // Ocean Engineering. 2018. V. 160. P. 45–53.
40. *Lee K.M., Ballard M.S., McNeese A.R., Muir T.G., Wilson P.S.* In situ measurements of acoustic properties in Currituck Sound and comparison to models // J. Acoust. Soc. Am. 2016. V. 140. № 5. P. 3593–3606.
41. *Ballard M.S., Costley R.D., Sagers J.D., Lee K.M., McNeese A.R., Hathaway K.K., Wilson P.S., Smith E.W.* A comparison between directly measured and inferred wave speeds from an acoustic propagation experiment in Currituck Sound // J. Acoust. Soc. Am. 2018. V. 143. № 1. P. 237–247.
42. *Yang J., Tang D.* Direct measurement of sediment sound speed and attenuation in the frequency band of 2–8 kHz at the target and reverberation experiment site // IEEE J. Ocean. Eng. 2017. V. 42. № 4. P. 1102–1109.
43. *Белов А.И., Кузнецов Г.Н.* Пространственное затухание различных составляющих звуковых полей в водном слое и в осадках мелкого моря // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 6. С. 614–622.
44. *Bevans D.A., Buckingham M.J.* Estimating the sound speed of a shallow-water marine sediment from the head wave excited by a low-flying helicopter // J. Acoust. Soc. Am. 2017. V. 142. № 4. P. 2273–2287.
45. *Wan L., Badiey M., Knobles D.P.* Geoacoustic inversion using low frequency broadband measuremetnts from L-shaped arrays in the Shallow Water 2006 Experiment // J. Acoust. Soc. Am. 2016. V. 140. № 4. P. 2358–2373.
46. *Zhou J.-X., Zhang X.-Z., Knobles P.* Low-frequency geoacoustic model for the effective properties of sandy seabottoms // J. Acoust. Soc. Am. 2009. V. 125. № 5. P. 2847–2866.
47. http://www.apl.washington.edu/programs/SAX99/SAX99/coremeas.html (дата обращения 19.10.2019).

АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2020, том 66, № 4, с. 437–445

## АКУСТИКА ОКЕАНА. ГИДРОАКУСТИКА

УДК 542.34

# ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ КООРДИНАТ ДВИЖУЩЕГОСЯ ШУМОВОГО ИСТОЧНИКА В МЕЛКОМ МОРЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ СИГНАЛОВ

© 2020 г. С. А. Пересёлков[a, b, *], В. М. Кузькин[a, **], Г. Н. Кузнецов[a], Д. Ю. Просовецкий[b], С. А. Ткаченко[b]

[a]Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук, ул. Вавилова 38, Москва, 119991 Россия

[b]Воронежский государственный университет, Университетская пл. 1, Воронеж, 394006 Россия

*e-mail: pereselkov@yandex.ru

**e-mail: kumiov@yandex.ru

Поступила в редакцию 07.08.2019 г.
После доработки 21.02.2020 г.
Принята к публикации 25.02.2020 г.

Приведены результаты высокочастотного эксперимента по локализации движущегося шумового источника с использованием цилиндрической малогабаритной векторно-скалярной антенны. Использовалась частотно-временная обработка, согласованная с интерференционной картиной, формируемой источником. Восстановлены временные зависимости пеленга, скорости, удаленности и глубины источника. Дано качественное и количественное объяснение экспериментальным данным на основе модельной двухлучевой интерферограммы, образованной прямым лучом и лучом, отраженным от свободной поверхности.

*Ключевые слова:* интерферограмма, голограмма, высокочастотный диапазон, локализация, шумовой источник, натурный эксперимент, моделирование

**DOI:** 10.31857/S0320791920040085

## ВВЕДЕНИЕ

Обнаружение и оценка координат источников по их шумовому полю является одной из актуальных проблем пассивной гидроакустики [1]. В настоящее время для ее решения в низкочастотном диапазоне (десятки и сотни герц), когда применимо модовое описание структуры поля, разработан и успешно апробирован интерферометрический метод локализации шумового источника [2–8]. В его основе лежат механизмы межмодовой интерференции и волноводной дисперсии, обусловливающие формирование частотно-временной (пространственной) интерференционной картины (интерферограммы) [9–11]. В отличие от традиционной согласованной со средой обработки [12, 13] интерферометрическая обработка позволяет реализовать одновременно обнаружение источника и определение его параметров (пеленг, расстояние, глубина, скорость). При этом она может быть реализована в отсутствие знаний о передаточной функции волновода [7, 8], что значительно расширяет ее область применения. В настоящее время, на примере интенсивных внутренних волн, экспериментально показана возможность применения интерферометрии для восстановления передаточной функции невозмущенного волновода и диагностики временной изменчивости океанической среды [14, 15].

В области высокочастотного (килогерцового) диапазона интерферометрическая обработка применяется впервые и нуждается в экспериментальной проверке, так как изменяется механизм формирования интерферограммы. Если в области низких частот физико-математические принципы, лежащие в основе локализации малошумных источников, ясны [2–4], то остается открытым вопрос: насколько успешно этот метод может применяться в высокочастотном диапазоне?

В настоящей работе представлены результаты обработки высокочастотного эксперимента по локализации движущегося шумового источника в окрестности траверса, когда одновременно изменяются расстояние и пеленг. Прием осуществлялся на цилиндрическую вертикальную векторно-скалярную антенну (далее антенна). Изложен алгоритм интерферометрической обработки шумового поля и на его основе получены временные оценки параметров источника. Теоретически

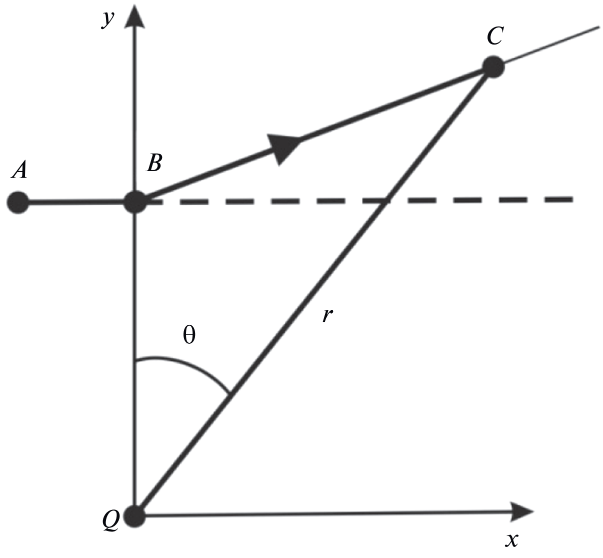


**Рис. 1.** Геометрия задачи: $Q$ – одиночный приемник, $\theta$ – пеленг, $r$ – горизонтальное расстояние между источником и приемником (вид сверху).

проанализирована динамика модельной двухлучевой интерферограммы, адекватно передающей основные свойства экспериментальной интерферограммы.

## РЕЗУЛЬТАТЫ НАТУРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Цель эксперимента заключалась в проверке работоспособности интерферометрического метода локализации шумового источника в высокочастотной области. Эксперимент проводился в мелководной акватории с глубиной волновода $H \sim 87$ м и скоростью звука, практически не зависящей от глубины, $c \sim 1400$ м/с. Обрабатывался сигнал с одиночного приемника антенны, расположенного на глубине $z_q = 30$ м. Интерферограмма источника регистрировалась в полосе $\Delta f = 1$–$15$ кГц. Длительность принимаемой шумовой реализации $\delta t = 0.2$ с. Входное отношение сигнал/помеха (по мощности) $q \sim 8$. Априорная информация о гидрофизических характеристиках акватории отсутствовала.

Схема движения источника относительно антенны в окрестности траверса показана на рис. 1. Оси $x$ и $y$ векторно-скалярного приемника (далее приемника) $Q$ совпадают с положительными направлениями системы координат. Из начальной точки $A$ источник приближался к приемнику, проходил точку $B$ траверса и далее от нее удалялся по направлению к точке $C$. После прохождения точки $C$ источник совершал петлеобразные траектории (на рис. 1 они не отображены). Горизонтальное расстояние от источника до антенны обозначено $r$, пеленг – $\theta$.

На рис. 2 приведена экспериментальная интерферограмма $I_e(f,t) = |P(f,t)|^2$ скалярной компоненты (давление $P$) поля источника. С целью повышения контрастности и информативности на ней вырезано среднее значение. В момент времени $t = 10$ с, отвечающий прохождению точки траверса, частотный масштаб изменчивости интерферограммы оценивается как $\Lambda = 404$ Гц. При удалении от точки траверса частотный масштаб возрастает, что, естественно, приводит к увеличению ширины интерференционной полосы. При этом он практически от частоты не зависит. Временной масштаб $D$ изменчивости интерферограммы с возрастанием частоты уменьшается и увеличивается с возрастанием времени наблюдения (расстояния). В точке траверса, например, на частоте $f = 3.5$ кГц он равен $D = 2.9$ с. Крутизна интерференционных полос в области траверса возрастает со временем и частотой, и по мере удаления от нее уменьшается. Данные закономерности характерны до момента времени $t' \sim 70$ с, т.е. по истечении 60 с после удаления от точки траверса. Для значений $t > t'$ интерферограмма носит осциллирующий характер, вызванный многократным изменением направления движения источника (см. рис. 8).

Спектральные плотности, получаемые двукратным преобразованием Фурье интерферограммы $I(\omega,t)$ скалярной компоненты поля,

$$F_i(\tilde{\nu},\tau) = \int\limits_{t_i-\frac{\Delta t}{2}}^{t_i+\frac{\Delta t}{2}} \int\limits_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} I(\omega,t)\exp[i(\tilde{\nu}t-\omega\tau)]\,dt\,d\omega, \quad (1)$$

которые условно назовем голограммой, для двух моментов времени $t_i = 10$ и 50 с представлены на рис. 3. Здесь $\tilde{\nu} = 2\pi$, $\omega = 2\pi f$, $\tau$ и $t$ – циклическая частота, время голограммы и интерферограммы соответственно; $\Delta t$ и $\Delta\omega$ – время наблюдения и ширина спектра, $\omega_0$ – средняя частота спектра. Интерферограммы и голограммы различных компонент векторно-скалярного поля и их комбинаций когерентны и различаются помехоустойчивостью [3]. Изображение источника на голограмме локализовано в форме двух фокальных пятен, зеркально перевернутых относительно начала координат. Одно из них, лежащее во втором и третьем квадрантах, можно рассматривать как мнимое изображение источника, второе, лежащее в первом и четвертом квадрантах, – как действительное изображение. Число фокальных пятен определяет число лучей, формирующих интерферограмму: каждое фокальное пятно обусловлено интерференцией двух лучей. В экспери-

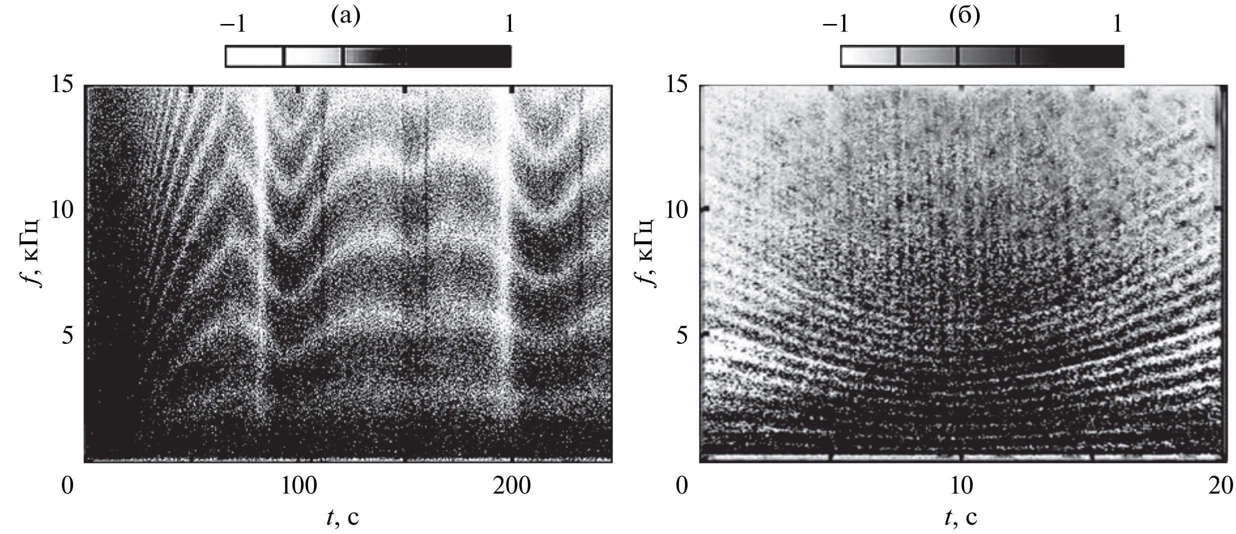


**Рис. 2.** (а) – Экспериментальная нормированная интерферограмма и (б) – ее фрагмент в области траверса.

менте на голограммах в различные моменты времени наблюдался один ярко выраженный максимум. Следовательно, интерферограмма на всей траектории источника в основном формировалась двумя энергонесущими лучами, в качестве которых можно принять прямой луч и отраженный от верхней границы, $z = 0$. Координаты положений максимумов фокальных пятен: $\tau = 2.4$ мс, $\nu = 0$ Гц – момент времени $t_i = 10$ с; $\tau = 0.9$ мс, $\nu = -0.2$ Гц – $t_i = 50$ с. Этим моментам времени соответствуют частотные масштабы $\Lambda = 404$ Гц; $\Lambda = 2.5$ кГц (см. рис. 2).

Для оценки направления на источник применялся интерферометрический метод пеленгования, основанный на отношении очищенных от помех интерферограмм

$$\frac{G(f,t_i)}{R(f,t_i)} = \sin\theta(t_i),\quad \frac{U(f,t_i)}{R(f,t_i)} = \cos\theta(t_i) \qquad (2)$$

в фиксированные моменты времени $t_i$, где $R = V_r V_r^*$, $G = V_x V_r^*$ [7]. Верхний индекс звездочка "*" означает комплексное сопряжение. Здесь $V_{x,y}$ – горизонтальные проекции вектора колебательной скорости, $V_r = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$. При обработке очищение интерферограмм от помехи не требовалось, так как входное отношение сигнал/помеха было достаточно большим для отчетливого наблюдения локализованных полос. На рис. 4 экспериментальная зависимость пеленга от времени $\theta(t)$ изображена сплошной линией, пунктиром – модельная зависимость в предположении движения источника вдоль прямой, параллельной оси $x$ (см. рис. 1, пунктир). Мелкомасштабные осцилляции обусловлены колебаниями антенны в вертикальной плоскости, крупномасштабные осцилляции – изменением траектории движения источника.

Определение параметров источника осуществлялось с использованием согласованной обработки по отношению к интерферограмме, формируемой движущимся источником. Горизонтальное расстояние до приемника $r$, глубина $z$ и скорость $w$ оценивались как координаты основного максимума трехмерной взаимокорреляционной функции экспериментальной $I_e$ и модельной $I_m$ интерферограмм

$$E(r_*, z_*, w_*) = \sum_k \sum_i I_e(f_k, t_i)\, I_m^*(f_k, t_i), \qquad (3)$$

т.е. $\max E(r_*, z_*, w_*) = E(r, z, w)$. Варьируемые (подбираемые) величины обозначены нижним индексом звездочка (*). При обработке (3) априори считалось, что источник расположен на глубине $1 \le z \le 70$ м, удален от приемника на $50$ м $\le r \le 3$ км, скорость $2 \le w \le 35$ м/с. Перебор параметров проводился с шагом: расстояние – $\delta r = 25$ м, глубина – $\delta z = 0.5$ м, скорость – $\delta w = 1$ м/с. Шаг дискретизации по частоте $\delta f = 0.5$ Гц, по времени $\delta t = 2$ с. Обработка проводилась во временном интервале $\Delta t = 20$ с и полосе частот $\Delta f = 1$–$15$ кГц.

Отметим, что ранее в килогерцовом диапазоне с применением двух- и многолучевой моделей поля, используя многоэлементные приемные вертикальную или горизонтальную антенны, основываясь на алгоритме традиционной согласованной обработки, экспериментально показана возможность оценки глубины и расстояния излу-

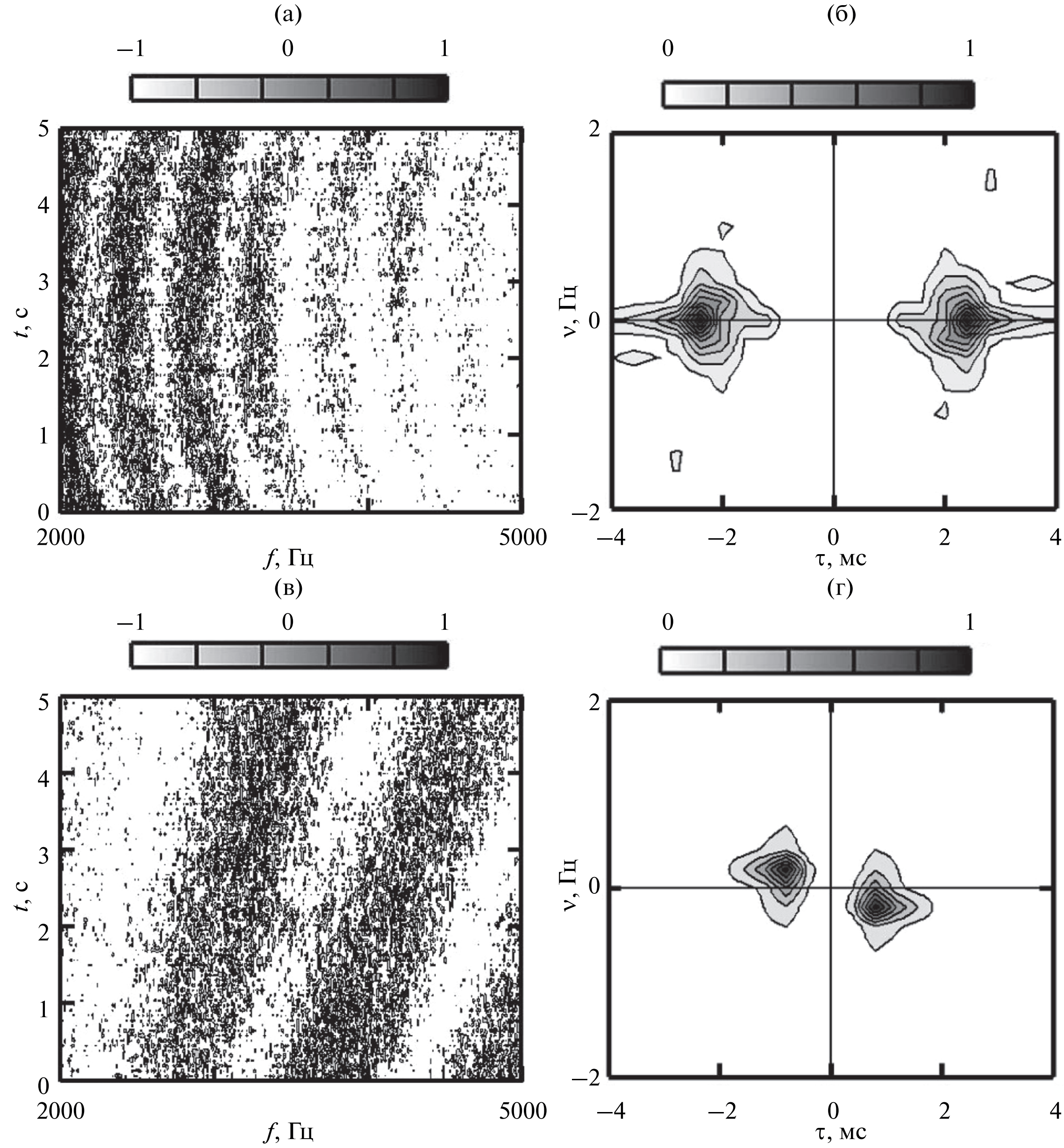


**Рис. 3.** (а, в) – Нормированные интерферограммы и (б, г) – голограммы в различные моменты времени $t_i$: (а, б) $t_i = 10$ с; (в, г) $t_i = 50$ с.

чателя от антенны [16–18], однако, источник был неподвижным.

Для отслеживания временного восстановления параметров источника использовалось каскадное вычисление взаимокорреляционной функции. В начальный момент времени $t_0 = 0$ осуществлялась обработка (3) во временном интервале $\Delta t = 20$ с. В момент времени $t_1 = t_0 + \delta t'$ проводилась следующая обработка в течение времени $\Delta t$, $\delta t' = 5$ с, и т.д. В результате за время наблюдения $T = 275$ с получено $N = \left[(T - \Delta t)/\delta t'\right] + 1 = 52$ оценок параметров источника.

Модельная интерферограмма $I_m(f,t)$ (рис. 5), адекватно передающая основные свойства экспериментальной интерферограммы, строилась на основе интерференции полей двух лучей с использованием лучевой программы. При этом предполагалось, что в зоне траверса источник двигался по прямолинейной траектории.

Для иллюстрации на рис. 6 изображены двумерные разрезы нормированной трехмерной взаимокорреляционной функции (3) для двух моментов времени. Нормированные восстановленные параметры источника обозначены сверху прямой линией. Скорость нормирована на значение 30 м/с; расстояние и глубина нормированы на значение 87 м. По результатам моделирования параметры источника оцениваются как $r = 189$ м, $z = 10.9$ м, $w = 27.6$ м/с для $t_i = 10$ с; $r = 1049$ м, $z = 12.8$ м, $w = 26.9$ м/с для $t_i = 50$ с. За время наблюдения $T = 0{-}275$ с были обработаны интерферограммы для всех временных интервалов и с использованием алгоритма (3) восстановлены временные зависимости параметров источника $z(t)$, $r(t)$, $w(t)$.

На рис. 7 показана нормированная зависимость глубины $z(t)$. Как видно, во время эксперимента глубина источника изменялась в пределах ~1.5 м (в основном, при поворотах) и в среднем оценивается как $z = 11.4$ м.

С использованием зависимостей $\theta(t)$ и $r(t)$ вычислены координаты источника

$$X(t) = r(t)\sin\theta(t), \quad Y(t) = r(t)\cos\theta(t) \tag{4}$$

и траекторная зависимость $Y(X)$, представленные на рис. 8. Из него следует, что точка траверса была удалена от антенны на расстояние $r = 188$ м. Данная оценка близка к оценке, полученной из рис. 6. После прохождения точки траверса источник также перемещался прямолинейно, но по прямой, не параллельной оси $x$. В момент времени $t' \sim 70$ с источник начинал совершать петлеобразные траектории.

Скорость источника $w$ на временном интервале $\Delta t$ определялась как

$$w(\Delta t) = \frac{\sqrt{X^2(\Delta t) + Y^2(\Delta t)}}{\Delta t}. \tag{5}$$

Нормированная временная зависимость $w(t)$ отображена на рис. 9. Видно, что на поворотах не только изменяется глубина, но и уменьшается скорость. Как следствие, зависимость скорости от времени имеет сложный изрезанный характер. Восстановленные координаты источника соответствуют реальным значениям, погрешность не превышает 10%.

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНТЕРФЕРОГРАММЫ

Задача теоретического рассмотрения состояла в том, чтобы разобраться, как характеристики интерферограммы (или положения максимумов фокальных пятен голограммы) связаны с параметрами движущегося источника. Обсудим это на простом примере удаления источника от точки траверса $B$ по прямолинейной траектории параллельно оси $x$ с постоянной скоростью $w$ и на фиксированной глубине $z$ (рис. 1, пунктир). Допустим, что коэффициент отражения от свободной поверхности не зависит от частоты, угла падения и равен −1.

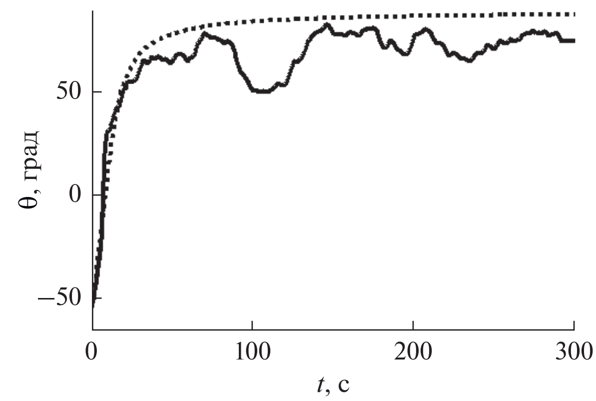


**Рис. 4.** Временная зависимость пеленга $\theta(t)$: сплошная линия – эксперимент, пунктир – моделирование.

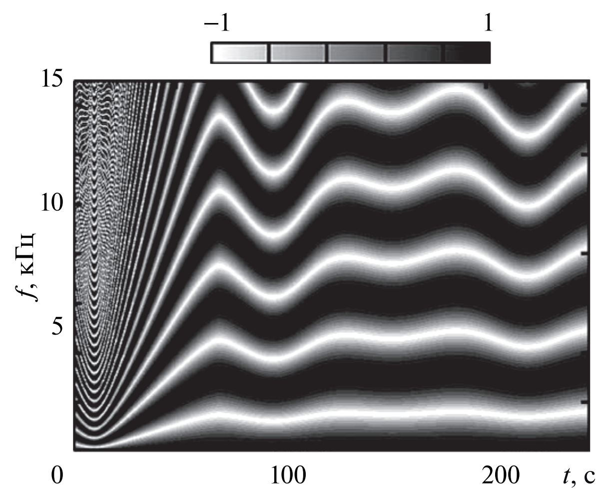


**Рис. 5.** Нормированная модельная интерферограмма.

Рассмотрим для примера зону, в которой источник начинал движение из точки траверса в сторону удаления от приемника. Тогда двухлучевая интерферограмма принимает вид [19]

$$I_t(t) = \frac{2W^2}{\bar{R}^2(t)}\cos\Phi(\omega,t), \tag{6}$$

где

$$\Phi(\omega,t) = \eta\frac{\omega}{r(t)}. \tag{7}$$

Здесь $\eta = 2z_q z/c$, $c$ – скорость звука, $z_q$ – глубина приемника; $r(t) = \sqrt{r_0^2 + (wt)^2}$ – горизонтальное

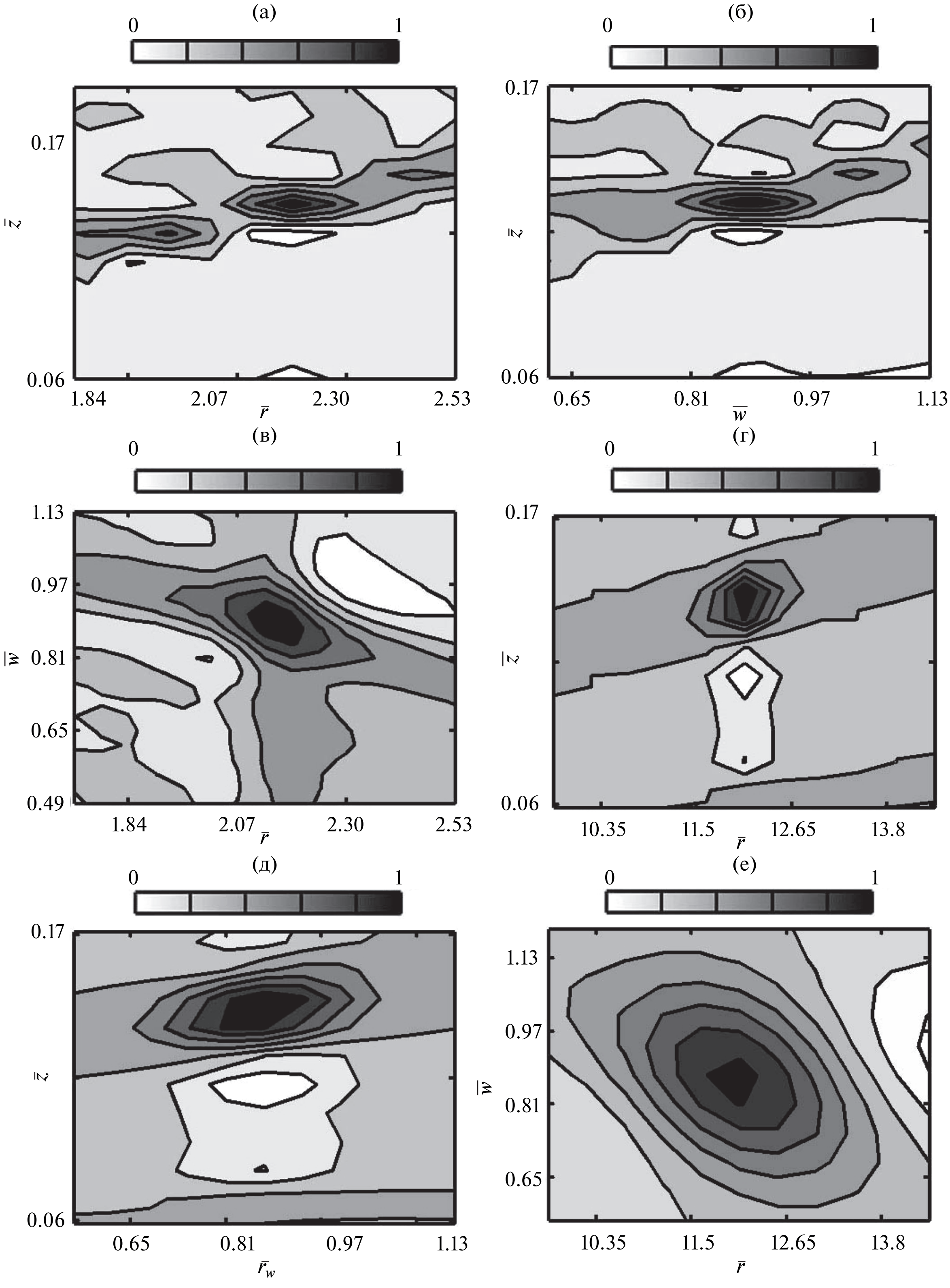


**Рис. 6.** Двумерные нормированные коэффициенты корреляции экспериментальной и модельной интерферограмм для двух моментов времени $t_i$. (а, г) – Глубина–расстояние, $t_i = 10,\ 50$ с. (б, д) – Глубина–скорость, $t_i = 10,\ 50$ с. (в, е) – Скорость–расстояние, $t_i = 10, 50$ с.

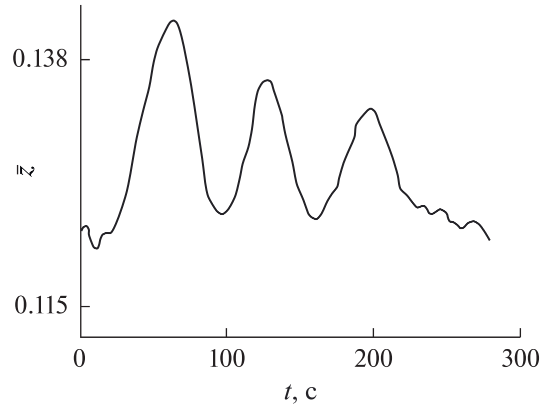


**Рис. 7.** Зависимость нормированной глубины $z$ источника от времени $t$.

расстояние от приемника до источника в момент времени $t$, $r_0$ – расстояние в начальный момент времени $t = 0$ от точки траверса до приемника; $\bar{R}(t) = \sqrt{r^2(t) + z_q^2}$; $W^2$ – коэффициент, характеризующий мощность излучения. Принимая в среднем глубину источника $z = 11$ м, имеем $= 0.47$ м с.

Кривая интерференционных максимумов определяется условием

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f} df + \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt = 0. \tag{8}$$

Используя (7), из (8) для производной кривой постоянной фазы получаем

$$\frac{df}{dt} = \frac{fw^2 t}{r^2(t)}. \tag{9}$$

Отсюда следует, что крутизна интерференционных полос в области траверса возрастает при увеличении времени, частоты, скорости источника и по мере удаления от точки траверса уменьшается. Подобный результат зарегистрирован и в эксперименте. Решая дифференциальное уравнение (9) при начальном условии $f(0) = f_0$, находим уравнение кривой интерференционных максимумов поля источника

$$f(t) = \frac{f_0}{r_0} r(t). \tag{10}$$

Частотный масштаб изменчивости интерферограммы в момент времени $t$, как следует из (7), равен

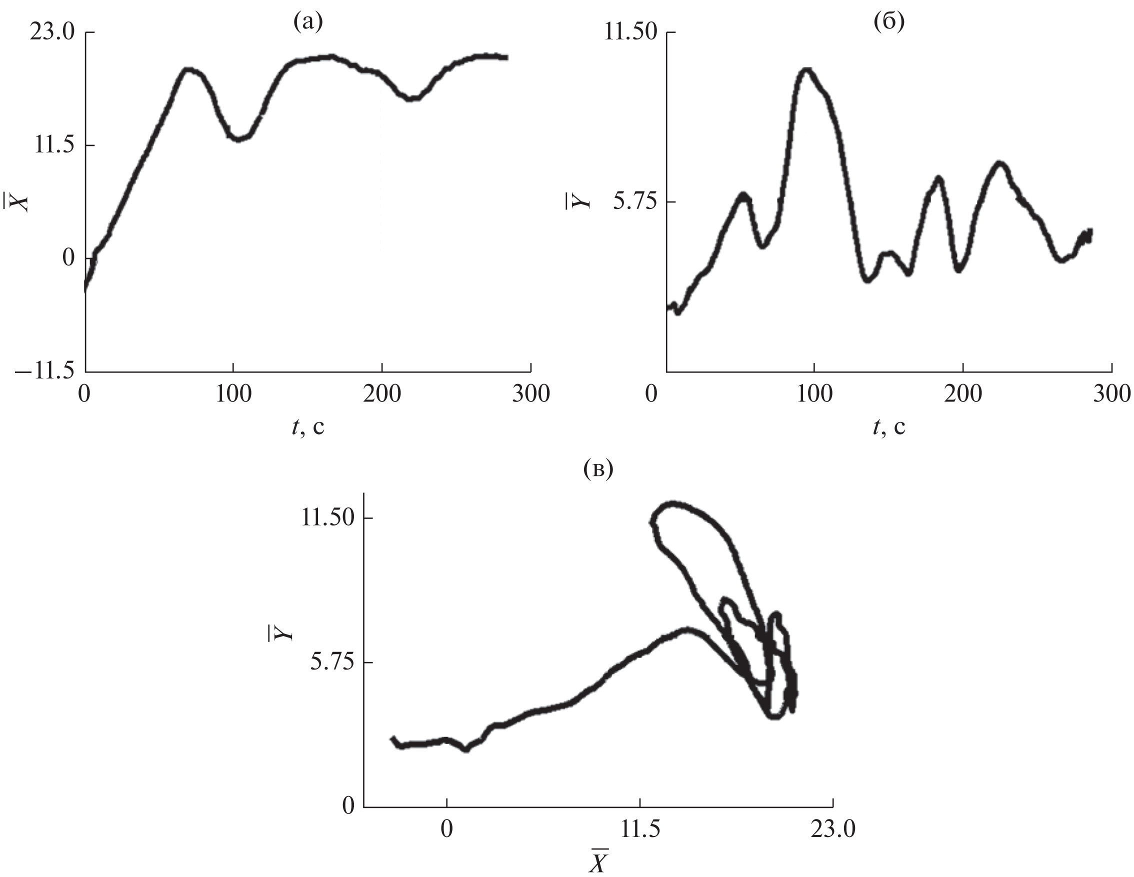


**Рис. 8.** Траекторные нормированные зависимости: (а) $X(t)$; (б) $Y(t)$; (в) $Y(X)$.

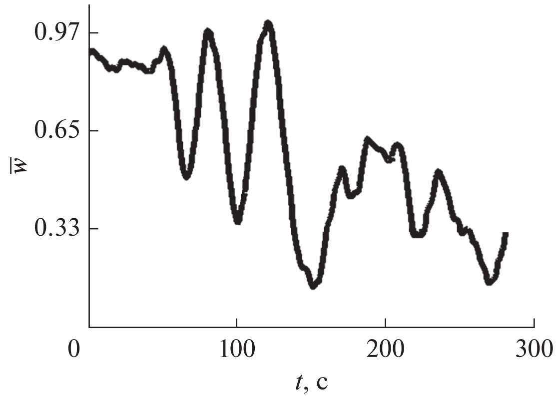


**Рис. 9.** Нормированная временная зависимость скорости движения источника $w(t)$.

$$\Lambda(t) = \frac{r(t)}{\eta}, \tag{11}$$

так что он возрастает с возрастанием скорости источника и удалением от приемника, уменьшается с увеличением заглубления и не зависит от частоты. Подобные закономерности наблюдались и в эксперименте. Например, в точке траверса ($r_0 = 189$ м) получаем $\Lambda(0) = 402$ Гц, что согласуется с экспериментальным значением $\Lambda = 404$ Гц. Если ширину интерференционной полосы $\Delta f(t)$ определить как ширину, в пределах которой фаза (7) меняется на $\pi/2$, то $\Delta f(t) = \Lambda(t)/4$. Величина $\Delta\tau$, обратная частотному масштабу, $\Delta\tau = 1/\Lambda$, представляет собой разность времен прихода прямого и отраженного от свободной поверхности лучей.

Временной масштаб $D$ изменчивости интерферограммы, как следует из (7), определяется условием

$$\frac{1}{r(t)} - \frac{1}{r(t+D)} = \frac{1}{\eta f}. \tag{12}$$

Аналитического решения эта задача не имеет, поэтому обратимся к тем результатам, которые можно извлечь из (12) в некоторых предельных случаях.

**1.** Пусть $r_0^2 \gg (wt)^2$, т.е. рассматривается окрестность точки траверса, когда радиальная скорость равна нулю. Тогда, как следует из (12),

$$D = -t + \sqrt{t^2 + a}, \tag{13}$$

где $a = 2r_0^3 / fw^2$. На практике можно ограничиться более слабым неравенством $r_0^2 \geq 3(wt)^2$. Для условий эксперимента данное приближение реализуется уже при $t \leq 4$ с. В точке траверса $t = 0$ имеем

$$D(0) = \sqrt{2}\frac{r_0\sqrt{r_0}}{\sqrt{\eta f w}}. \tag{14}$$

Для полученных оценок ($r_0 = 189$ м, $\eta = 0.47$ м с), задаваясь частотой $f = 3.5$ кГц, имеем $D(0) = 3.3$ с, что близко к экспериментальному значению $D = 2.9$ с.

**2.** Пусть $r_0^2 \ll (wt)^2$, т.е. расстояние от источника до приемника больше траверсного расстояния. В этом случае, согласно (12),

$$D(t) = \frac{bt^2}{1 - bt}, \tag{15}$$

где $b = w/\eta f$. С ростом времени слагаемое $bt$ растет и при значении $t_{cr} = 1/b$ временной масштаб становится бесконечным, так что локализация интерференционных полос производится вдоль горизонтальных линий. Предельному значению $t_{cr}$ отвечает удаление источника от антенны $r_{cr} = f$. Задаваясь значениями $\eta = 0.47$ м с, $f = 3.5$ кГц, получаем: $t_{cr} = 60$ с, $r_{cr} = 1.64$ км. Данный эффект наблюдается на экспериментальной (см. рис. 2а) и модельной (см. рис. 5) интерферограммах и полностью согласуется с известными характеристиками поля для модели, когда справедлив эффект Ллойда [20].

Очевидным условием наблюдаемости интерферограммы является требование, чтобы ширина спектра $\Delta f$ хотя бы в несколько раз превышала частотный масштаб $\Lambda(t)$ (11). В качестве критерия наблюдаемости интерферограммы примем неравенство

$$\Delta f \geq 2\frac{r(t)}{\eta}, \tag{16}$$

которое эквивалентно условию, что наблюдается одна и более интерференционных полос. Ширина спектра ограничивает удаление источника от приемника, при этом максимальное удаление, соответствующее условию реализации одной полосы, оценивается как

$$r_{\max}(t) = \frac{1}{2}\Delta f \eta, \tag{17}$$

так что с увеличением полосы анализа и заглубления источника максимальное удаление возрастает. Для условий эксперимента $r_{\max} = 3.29$ км.

Можно показать также, что координаты максимума фокального пятна на голограмме (1), отвечающие действительному изображению источника, в точке траверса равны $\tau = \eta/r_0$, $\nu = 0$. Для оценок $\eta = 0.47$ мс, $r_0 = 189$ м получаем $\tau = 2.5$ мс, что близко к экспериментальному значению $\tau = 2.4$ мс (см. рис. 3).

Таким образом, модельная интерферограмма адекватно передает основные свойства экспериментальной интерферограммы до момента времени, когда источник начал совершать петлеобразные траектории.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложен высокочастотный интерферометрический метод локализации шумового источника, использующий сигнал с одного из одиночных приемников антенны. В основе метода лежит частотно-временная обработка шумовых сигналов, согласованная с интерферограммой, формируемой движущимся источником. Модельная интерферограмма строилась на основе интерференции полей двух лучей: прямого и отраженного от свободной поверхности лучей. Метод апробирован на данных натурного эксперимента. По результатам обработки восстановлены временные зависимости пеленга, расстояния до антенны, скорости и глубины источника.

Двухлучевая модельная интерферограмма не требует знаний о параметрах дна и устойчива к поверхностному волнению, поэтому предложенная согласованная обработка оказалась работоспособной, позволив получить правильные временные зависимости параметров шумового источника. Совокупная картина фокальных пятен голограммы позволяет определять число лучей, формирующих поле, в различных акваториях. С удалением источника от приемника число лучей может увеличиваться, что будет приводить к усложнению интерференционной картины волнового поля. Если фокальные пятна не перекрываются, то на голограмме можно будет вырезать отдельные фокальные пятна и по отношению к ним реализовать обратное двукратное преобразование Фурье. Это даст возможность работать с двухлучевой интерферограммой, устойчивой по отношению к вариациям параметров дна.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (№ 19-08-00941, № 19-29-06075). Научно-исследовательская работа Д.Ю. Просовецкого поддержана грантом Президента РФ (№ МК-933.2019.8).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корякин Ю.А., Смирнов С.А., Яковлев Г.В.* Корабельная гидроакустическая техника: состояние и актуальные проблемы. СПб.: Наука, 2004. 410 с.
2. *Кузнецов Г.Н., Кузькин В.М., Пересёлков С.А.* Спектрограмма и локализация источника звука в мелком море // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 4. С. 406–418.
3. *Казначеев И.В., Кузнецов Г.Н., Кузькин В.М., Пересёлков С.А.* Интерферометрический метод обнаружения движущегося источника звука векторно-скалярным приемником // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 1. С. 33–45.
4. *Kuz'kin V.M., Kuznetsov G.N., Pereselkov S.A., Grigor'ev V.A.* Resolving power of the interferometric method of source localization // Phys. Wave Phenom. 2018. V. 26. № 2. P. 150–159.
5. *Kuz'kin V.M., Pereselkov S.A., Kuznetsov G.N., Kaznacheev I.A.* Interferometric direction finding by a vector-scalar receiver // Phys. Wave Phenom. 2018. V. 26. № 1. P. 63–73.
6. *Kaznacheeva E.S., Kuznetsov G.N., Kuz'kin V.M., Lyakhov G.A., Pereselkov S.A.* Measurement capability of the interferometric method of sound source localization in the absence of data on the waveguide transfer function // Phys. Wave Phenom. 2019. V. 27. № 1. P. 73–78.
7. *Kuznetsov G.A., Kuz'kin V.M., Lyakhov G.A., Pereselkov S.A., Prosovetskiy D.Yu.* Direction finding of a noise sound source // Phys. Wave Phenom. 2019. V. 27. № 3. P. 237–241.
8. *Кузькин В.М., Пересёлков С.А., Рыбянец П.В., Ткаченко С.А.* Реализация адаптивного интерферометрического метода локализации источника звука. Ч. I // Вестн. ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2019. № 4. С. 19–29.
9. *Чупров С.Д.* Интерференционная структура звукового поля в слоистом океане / Акустика океана. Современное состояние. М.: Наука, 1982. С. 71–82.
10. *Орлов Е.Ф.* Интерференционная структура широкополосного звука в океане / Проблемы акустики океана. М.: Наука, 1984. С. 85–93.
11. *Орлов Е.Ф., Шаронов Г.А.* Интерференция звуковых волн в океане. Владивосток: Дальнаука, 1998. 195 с.
12. *Baggeroer A.B., Kuperman W.A., Mikhalevsky P.N.* An overview of matched field methods in ocean acoustics // IEEE. J. Oceanic Eng. 1993. V. 18. № 4. P. 401–423.
13. *Сазонтов А.Г., Малеханов А.И.* Согласованная пространственная обработка сигналов в подводных звуковых каналах (обзор) // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 2. С. 233–253.
14. *Kuz'kin V.M., Pereselkov S.A., Zvyagin V.G., Malykhin A.Yu., Prosovetskiy D.Yu.* Intense internal waves and their manifestation in interference patterns of received signals on oceanic shelf // Phys. Wave Phenom. 2018. V. 26. № 2. P. 160–167.
15. *Badiey M., Kuz'kin V.M., Lyakhov G.A., Pereselkov S.A., Prosovetskiy D.Yu., Tkachenko S.A.* Intense internal waves and their manifestation in interference patterns of received signals on oceanic shelf. Part II // Phys. Wave Phenom. 2019. V. 27. № 4. P. 313–319.
16. *Вировлянский А.Л., Казарова А.Ю., Кенигсбергер Г.В., Колодиев О.В., Коротин П.И., Любавин Л.Я., Моисеенков В.И., Орлов Д.А., Потапов О.А., Турчин В.И.* Эксперимент по оценке координат источника звука на шельфе черного моря // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 1. С. 1–9.
17. *Аверьянов А.В., Глебова Г.М., Кузнецов Г.Н., Смирнов Н.М.* Экспериментальная оценка пространственных координат источника шумового сигнала // Гидроакустика. 2013. Вып. 17 (1). С. 54–60.
18. *Полканов К.И., Кузнецов Г.Н., Михнюк А.Н., Смирнов Н.М.* Использование буксируемого векторно-скалярного модуля и согласованной фильтрации для однозначной оценки координат широкополосного источника в пассивном режиме // Гидроакустика. 2015. Вып. 24 (4). С. 36–51.
19. *Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. М.: Наука, 2007. 370 с.
20. *Урик Р.Дж.* Основы гидроакустики. Пер с англ. Л.: Судостроение, 1978. 448 р.

АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2020, том 66, № 4, с. 446–452

## АТМОСФЕРНАЯ И АЭРОАКУСТИКА

УДК 534.2

# РАСЧЕТНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ И АЭРОАКУСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЕНТИЛЯТОРА[1]

© 2020 г. А. С. Муравейко*

*ООО "НУМЕКА", ул. Маршала Говорова 35А, Санкт-Петербург, 198095 Россия*

**e-mail: a.muraveiko@numeca.ru*

Поступила в редакцию 01.04.2019 г.
После доработки 06.02.2020 г.
Принята к публикации 25.02.2020 г.

Проведено газодинамическое моделирование течения в модельном вентиляторе Advanced Noise Control Fan в пакете NUMECA FINE/Turbo и проведено сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными. Смоделирован тональный шум вентилятора для двух вариантов геометрий (14 и 13 лопаток в спрямляющем аппарате) в FINE/Acoustics и проведено сопоставление расчетных и экспериментальных параметров.

*Ключевые слова:* газодинамика, аэроакустика, моделирование, ступень вентилятора, нелинейный гармонический метод, эксперимент

**DOI:** 10.31857/S0320791920040073

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время ужесточение требований по шуму для гражданских самолетов приводит к необходимости проводить оценку акустических характеристик элементов самолета на ранних стадиях проектирования. Численные методы широко применяются для определения шума авиационных двигателей и их компонентов, в частности — вентиляторов [1–3]. Для корректного моделирования акустических полей в вычислительных пакетах необходима трехмерная CFD модель, хорошо согласующаяся с экспериментальными данными. Поэтому на первом этапе выполнено создание подобной модели.

Акустические процессы являются нестационарными, поэтому моделирование газодинамических задач необходимо проводить в нестационарной постановке. Таким образом, наиболее корректным является применение вихреразрешающих методов, но это весьма затратно с точки зрения вычислительных ресурсов и неоправданно с точки зрения времени счета для прикладных задач. Поэтому для определения тонального шума вентилятора использован упрощенный подход моделирования нестационарных явлений в турбомашинах — нелинейный гармонический метод (Nonlinear Harmonic Method — NLH [4, 5]), реализованный в пакете NUMECA FINE/Turbo. Решение задачи аэроакустики проведено в ПО FINE/Acoustics.

В работе создана трехмерная газодинамическая модель модельного вентилятора - Advanced Noise Control Fan (ANCF) [6]. Ступень вентилятора специально разработана в NASA для изучения акустических явлений и исследования влияния различных конструктивных особенностей на характеристики шума. В состав установки входит рабочее колесо (16 лопаток, $R_{\text{перифер}} = 0.61$ м) и спрямляющий аппарат. Количество лопаток спрямляющего аппарата варьируемое, оно равно 14 для газодинамического эксперимента. Для исследования шума было исследовано два варианта: 13 и 14 лопаток в спрямляющем аппарате. Рассматривался режим 1800 об./мин, расход в изучаемой точке — 56.8 кг/с. Трехмерная геометрическая модель предоставлена Dr. Daniel L. Sutliff из NASA Glenn Research Center.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 1 показана трехмерная модель вентилятора и меридиональный вид расчетной области и проточной части.

[1] Статья подготовлена по материалам доклада на 7-ой всероссийской конференции "Вычислительный эксперимент в аэроакустике", 17–22 сентября 2018 года, г. Светлогорск Калининградской области, http://ceaa.imamod.ru/.

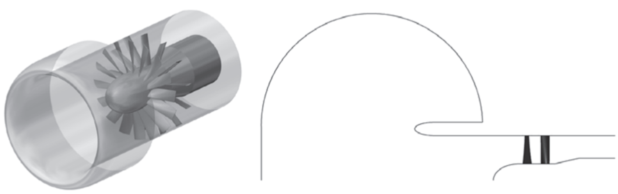

**Рис. 1.** Трехмерная модель вентилятора и меридиональный вид расчетной области.

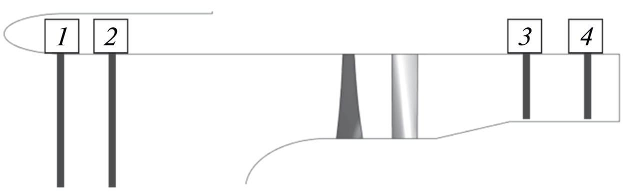


**Рис. 2.** Схема экспериментальных замеров.

Вычислительная сетка сгенерирована в автоматическом сеточном генераторе AutoGrid5 v. 11.2. Сетка – блочно-структурированная, гексагональная, некоторые параметры ее качества представлены в табл. 1. Величина y+ по твердым поверхностям не превышала 1.5.

Трехмерные газодинамические расчеты выполнены в ПО NUMECA FINE/Turbo v.11.2. Решались осредненные по Рейнольдсу и Фавру уравнения Навье–Стокса методом конечных объемов, для замыкания системы уравнений использовались модели турбулентности $k$–ε [7] и SST [8, 9] с подключением расширенного пристеночного моделирования.

Экспериментальные данные взяты из [10] и [11]. В газодинамическом эксперименте проведены измерения статического и полного давлений в различных сечениях, а также измерялись углы потока за спрямляющим аппаратом. Схема замеров представлена на рис. 2. Начиная со входа в установку, проводятся замеры следующих газодинамических параметров:

1) статическое давление на стенках по периметру входного канала;

2) статическое и полное давления гребенками по 6 трубочек, 8 гребенок по окружности;

3) углы потока термоанемометром;

4) статическое и полное давления гребенками по 6 трубочек, 8 гребенок по окружности.

В 4-м сечении по замерам полного и статического давления вычислено поле осевой компоненты скорости.

Для расчетов с использованием двух моделей турбулентности проведено сопоставление газодинамических параметров с экспериментальными (рис. 3, 4). Поле полного давления хорошо согласуется с экспериментальными данными. Характер распределения статического давления для обоих вариантов расчета незначительно отличается от экспериментального (различия менее 0.08%).

Проведено сопоставление поля осевой компоненты скорости, полученной в эксперименте и расчетах. Экспериментальное поле осевой компоненты скорости представлено на рис. 5, а рас-

**Таблица 1.** Параметры качества вычислительной сетки

| | Количество ячеек (млн) | Минимальный угол скошенности (градусы) | Максимальное отношение сторон | Максимальный коэффициент роста |
|---|---|---|---|---|
| Ротор с осевым входным участком сетки | 4.573 | 19 | 1692 | 2.6 |
| Спрямляющий аппарат | 2.603 | 34 | 1675 | 1.7 |
| Свободная область перед ступенью (сектор сферы) | 1.508 | 13 | 3424 | 1.4 |
| ИТОГО | 8.684 | 13 | 3424 | 2.6 |

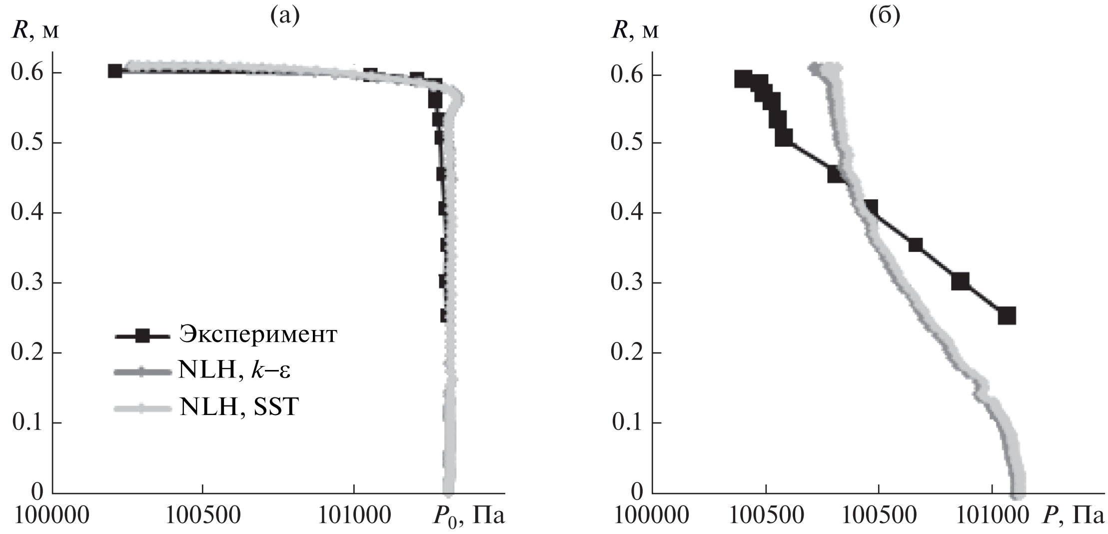


**Рис. 3.** Осредненные профили полного и статического давления в сечении *2.* (а) – полное давление, (б) – статическое давление.

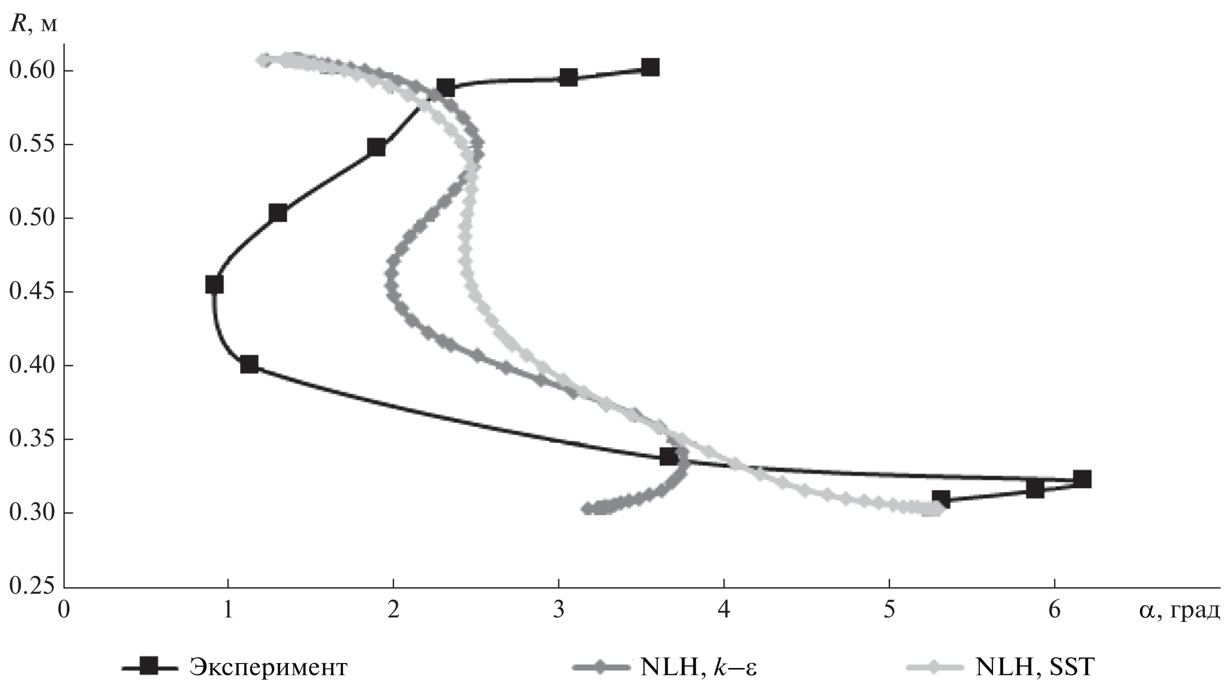


**Рис. 4.** Осредненный профиль угла потока в сечении *3.*

четные поля – на рис. 6. Можно заметить, что в эксперименте, в отличие от расчета, максимум скорости находится вблизи периферии, а вот окружная неравномерность выглядит подобной. Если проанализировать течение, то расчетные результаты выглядят корректно и физически осмысленно, т.к. сечение *4* находится за подъемом втулки, а значит, там должна присутствовать зона ускорения из-за течения вдоль выгнутой поверхности (рис. 7).

На основе результатов трехмерных газодинамических расчетов проведено моделирование тонального шума вентилятора. Это возможно, так как задача решалась с использованием нелинейного гармонического метода, позволяющего мо-

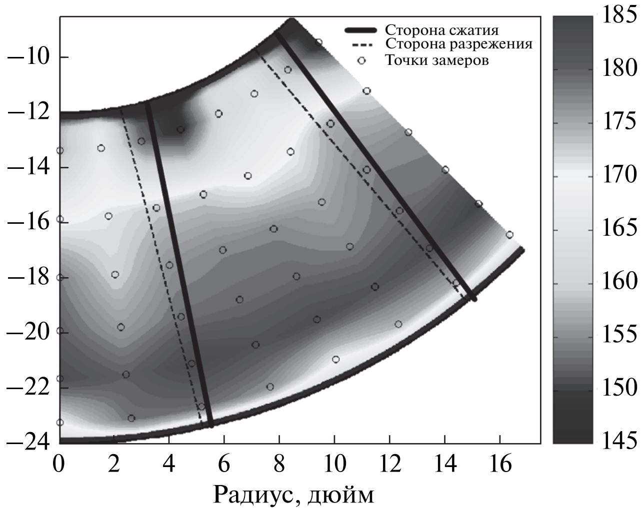


**Рис. 5.** Экспериментальное поле осевой компоненты скорости в четвертом сечении. Единицы измерения – фт/с (0.3048 м/с).

делировать нестационарные явления, связанные с взаимодействием ротор–статор. Моделирование шума выполнено в ПО FINE/Acoustics v.7.1.

Данные по эксперименту взяты из [5, 10, 11] и предоставлены Dr. Daniel L. Sutliff из NASA Glenn Research Center. Шум измерялся с помощью массива микрофонов, по 15 микрофонов на переднюю и заднюю полусферы. Микрофоны располагались по окружности радиусом 3.6576 м (12 футов) (рис. 8). Сопоставление с экспериментом проведено для вариантов, где в спрямляющем аппарате 14 лопаток и 13 лопаток.

Моделирование аэроакустики выполнено в ПО FINE/Acoustics v. 7.1. Из газодинамического решения, выполненного NLH методом, передаются поля газодинамических осредненных и гармонических параметров, связанные с частотами следования лопаток ротора: амплитуды, вещественные и мнимые части полей. В рассматриваемом случае задавались частоты 480, 960 и 1440 Гц. После переноса из газодинамического решения необходимых полей параметров на излучающую поверхность используется метод граничных элементов в осесимметричной постановке для получения акустических параметров в интересующих нас точках (микрофонах). Количество ячеек вычислительной сетки выбрано таким образом, чтобы обеспечивать 6 ячеек на длину волны для частоты 1500 Гц.

Для варианта с 14-ю лопатками получены следующие результаты. На основе решения газодинамической задачи двумя моделями турбулентности получен уровень звукового давления в точках замеров. Сопоставление текущих результатов с экспериментом и с результатами, полученными NUMECA International [3], показано на рис. 9. Ноль градусов соответствует микрофону, расположенному на оси вращения.

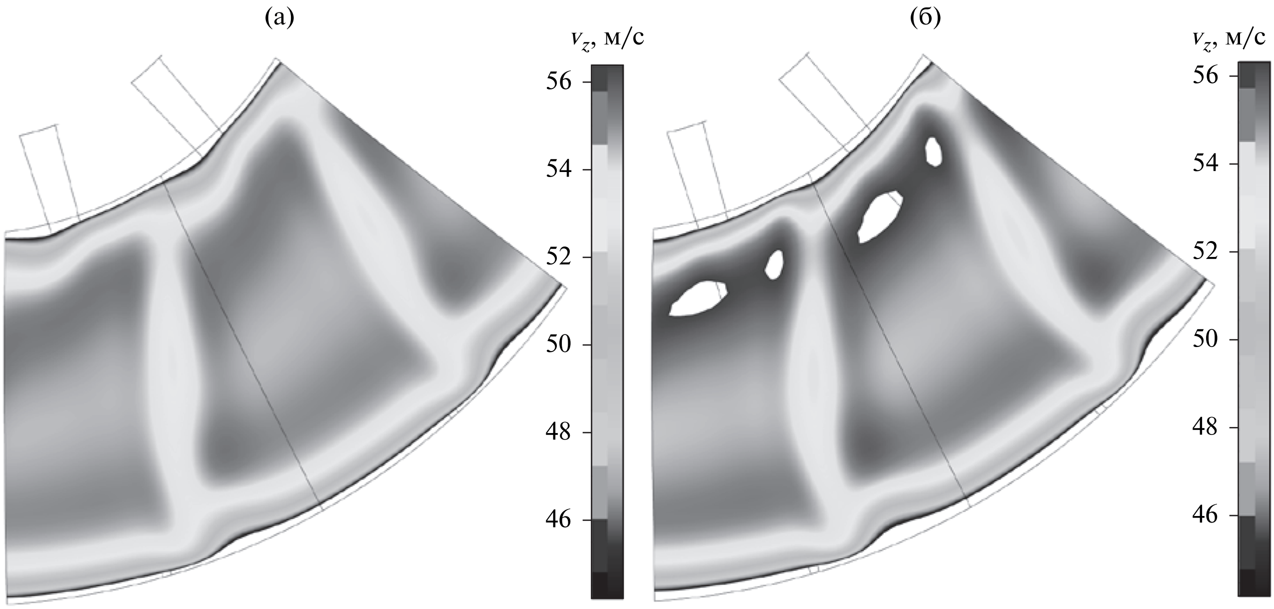


**Рис. 6.** Расчетное поле осевой компоненты скорости в четвертом сечении: (а) – $k$–ε модель, (б) – SST модель. Единицы измерения – м/с.

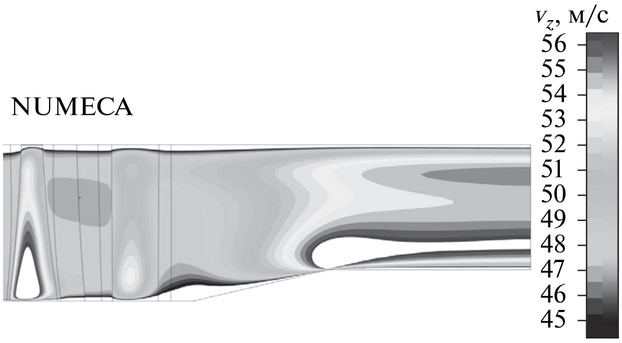


**Рис. 7.** Осредненное поле осевой компоненты скорости в выходном канале.

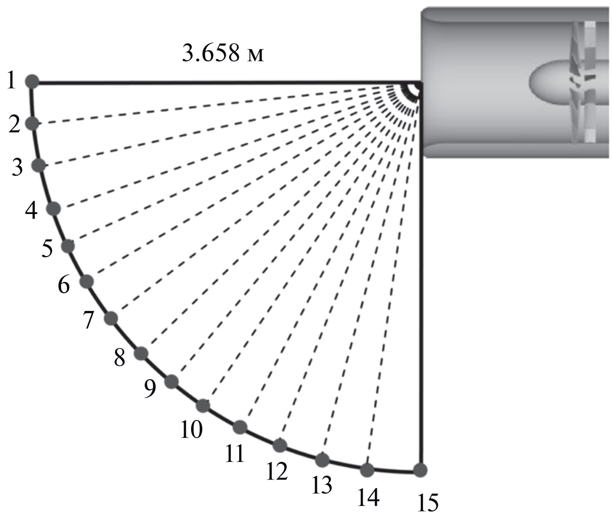


**Рис. 8.** Схема расположения микрофонов в передней полусфере.

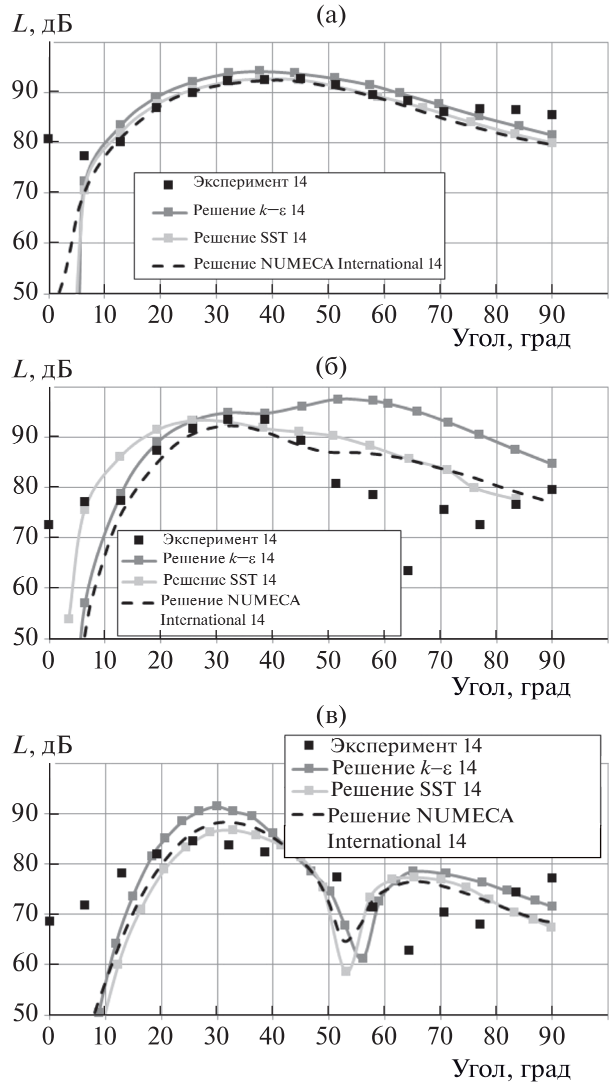


**Рис. 9.** Уровни звукового давления, полученные на основе различных моделей, для случая 14 лопаток в спрямляющем аппарате: (а) – для первой частоты следования лопаток ротора, (б) – для второй частоты следования лопаток ротора, (в) – для третьей частоты следования лопаток ротора.

Если сравнивать два полученных решения, то решение на основе SST модели ближе к максимальным экспериментальным значениям для всех трех частот. Для третьей частоты обе модели видят локальный экстремум, но при этом его положение не соответствует экспериментальному: он смещен примерно на 10 градусов. Можно заметить, что около нуля градусов ни один из расчетов не воспроизводит экспериментальные результаты, это связано с осесимметричной постановкой аэроакустической задачи.

Сопоставление изменения уровня звукового давления при изменении количества лопаток в спрямляющем аппарате отображено на рис. 10 для SST модели и на рис. 11 для $k$–$\varepsilon$ модели. Решение на основе $k$–$\varepsilon$ модели ближе к эксперименту для второй частоты, а решение на основе SST модели ближе для третьей, для первой оба варианта показывают схожее изменение. Об изменении характера кривых при изменении количества направляющих лопаток сказать сложно, так как качественный характер распределений существенно различается.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы получена трехмерная вычислительная модель ступени вентилятора, хорошо со-

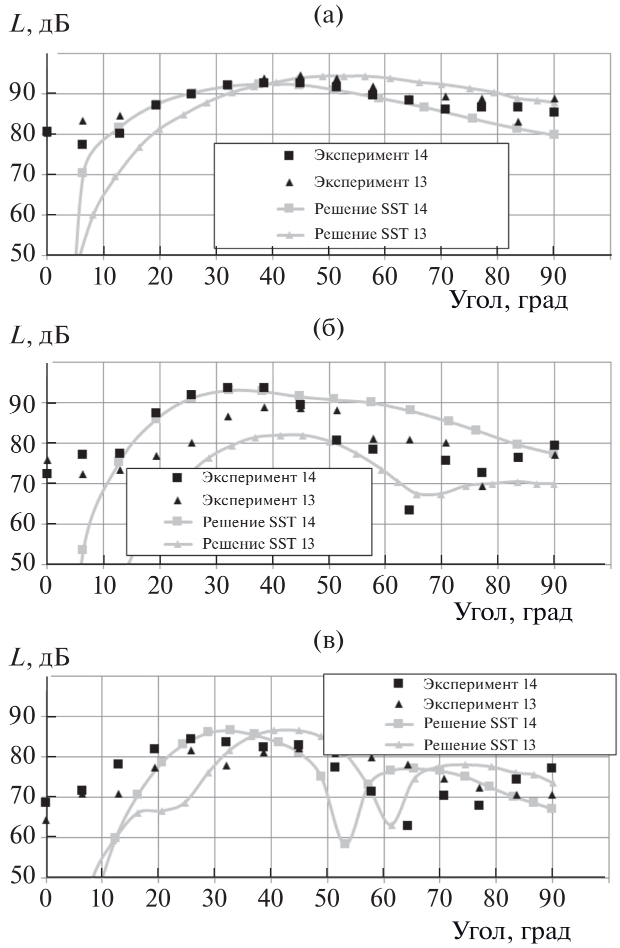


**Рис. 10.** Изменение уровня звукового давления при изменении количества лопаток в спрямляющем аппарате для SST модели: (а) – для первой частоты следования лопаток ротора, (б) – для второй частоты следования лопаток ротора, (в) – для третьей частоты следования лопаток ротора.

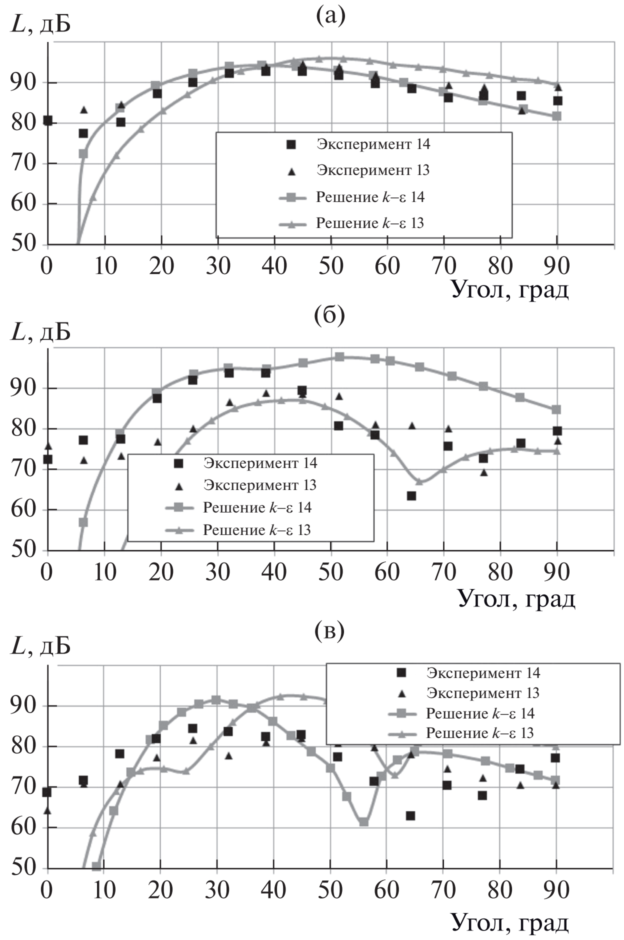


**Рис. 11.** Изменение уровня звукового давления при изменении количества лопаток в спрямляющем аппарате для $k$–ε модели: (а) – для первой частоты следования лопаток ротора, (б) – для второй частоты следования лопаток ротора, (в) – для третьей частоты следования лопаток ротора.

гласующаяся с экспериментальными данными по распределениям полного и статического давления на входе в ступень.

Заметные различия наблюдаются в распределении углов в сечении за ступенью. Скорее всего, их можно объяснить погрешностями при измерении углов или допущениями, принятыми в RANS постановке, так как распределения зависят от выбранной модели турбулентности.

Экспериментальные результаты поля осевой компоненты скорости в сечении за ступенью вызывают сомнения в их корректности. Но качественный характер распределения расчетных полей практически не зависит ни от метода решения задачи, ни от выбранной модели турбулентности. С учетом геометрических особенностей тракта расчетные результаты выглядят корректнее.

Исследовано влияние количества лопаток в спрямляющем аппарате на характеристики шума. Уровень звукового давления, полученный на основе $k$–ε модели, ближе к эксперименту для второй частоты, а решение на основе SST модели ближе для третьей, для первой частоты оба варианта показывают близкие значения. Можно говорить о хорошем соответствии эксперименту только для определенного диапазона углов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пятунин К.Р., Архарова Н.В., Ремизов А.Е.* Опыт моделирования шума вентиляторов авиационных двигателей методом граничных элементов // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 4. С. 495–504.
2. *Копьев В.Ф., Остриков Н.Н., Яковцев М.А., Ипатов М.С., Кругляев А.Е., Сидоров С.Ю.* Излучение звука из открытого конца канала, моделирующего

воздухозаборник авиадвигателя в статических условиях и в потоке // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 1. С. 59–73.

3. *Ferrante P., di Francescantonio P., Hoffer P.-A., Vilmin S., Hirsch Ch.* Integrated "CFD–Acoustic" computational approach to the simulation of the aircraft fan noise // ASME Turbo Expo 2014: Turbine Technical Conference and Exposition. V. 2A. Turbomachinery. Düsseldorf, Germany. June 16–20, 2014.
4. *He L., Ning W.* Efficient approach for analysis of unsteady viscous flows in turbomachines // AIAA J. 1998. V. 36. № 11.
5. *Vilmin S., Lorrain E., Hirsch Ch.* Unsteady flow model across the rotor/stator interface using the nonlinear harmonic method // ASME paper GT-2006-90210. 2006.
6. *Loew R.A., Lauer J.T., McAllister J., Sutliff D.L.* The advanced noise control fan // NASA/TM—2006-214368; AIAA 2006–3150. Nov 2006.
7. *Hakimi N.* Preconditioning methods for time dependent Navier–Stokes equations, application to environmental and low speed flows / Ph.D. Thesis. December 1997. Dept. of Fluid Mechanics, Vrije Universiteit Brussel, Pleinlaan 2, B-1050, Belgium.
8. *Menter F.R.* Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA J. 1994. V. 32. № 8. P. 1598–1605.
9. *Menter F.R., Kuntz M. and Langtry R.* Ten years of industrial experience with the SST turbulence model // Turbulence, Heat and Mass Transfer 4. Eds. Hanjalic K., Nagano Y., Tummers M. Begell House, Inc., 2003. P. 625–632
10. *McAllister J., Loew R.A., Lauer J.T., Sutliff D.L.* The advanced noise control fan baseline measurements // AIAA Paper. 2009. № 2009-0624.
11. *Richard F., Bozak Jr.* The advanced noise control fan aerodynamic performance // NASA/TM—2009-215807. 2009.

АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2020, том 66, № 4, с. 453–462

## ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ

УДК 544.638+534.1

# О МЕТОДЕ ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ОСНОВАННОМ НА ЭЛЕКТРОКИНЕТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЯХ

© 2020 г. Б. П. Шарфарец[a], *, В. Е. Курочкин[a], **, В. А. Сергеев[b], Ю. В. Гуляев[c]

[a] Институт аналитического приборостроения Российской академии наук, ул. Ивана Черных 31–33, Санкт-Петербург, 198095 Россия

[b] АО "АКВАМАРИН", Баррикадная ул. 17, Санкт-Петербург, 198097 Россия

[c] Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова Российской академии наук, ул. Моховая 11, стр. 7, Москва, 125009 Россия

*e-mail: sharb@mail.ru

**e-mail: lavrovas@yandex.ru

Поступила в редакцию 04.09.2019 г.
После доработки 16.12.2019 г.
Принята к публикации 24.12.2019 г.

Предложены в линейном и нелинейном приближении (ламинарный режим) физическая и математическая модели для описания механизма функционирования нового вида акустического преобразователя. Кратко даны сведения о таком электрокинетическом явлении, как электроосмос. Приведены необходимые уравнения для описания акустических полей, вызываемых электрокинетическими явлениями: наличием двойного электрического слоя и приложенного суммарного электрического поля, состоящего из постоянного поля и поля, несущего акустическую информацию. Уравнения рассматриваются для жидкости в круговом цилиндрическом капилляре применительно к расчету гидродинамики стационарного электроосмотического процесса и гармонического акустического процесса. Теоретически, на вычислительной модели и экспериментально показано, что учет нелинейности стационарного процесса приводит, в отличие от линейного стационарного процесса, к перекачке энергии постоянного электрического поля в акустическое поле, вызываемого переменным электрическим полем. Полученные результаты при некоторых ограничениях верны для широкого класса пористых структур. Экспериментально для бумажной мембраны в качестве капиллярно-пористой структуры с помощью накачки получено усиление первой гармоники акустического давления от 5.9 до 28 раз для различных значений амплитуды переменного электрического поля. Полученные в работе теоретические и экспериментальные результаты позволяют решить приоритетную научно-техническую проблему проектирования и создания акустических излучателей нового типа.

*Ключевые слова:* электроакустическое преобразование, линейный и нелинейный режим течения жидкости, электрокинетические явления, гидродинамика электроосмоса, акустика электроосмоса, накачка энергии

**DOI:** 10.31857/S0320791920030053

## ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] предложен оригинальный способ электроакустического преобразования, основанный на подходе, заключающемся в том, что к пористому телу, заполненному жидкостью или газом, подается сумма постоянного напряжения и переменного напряжения, связанного с амплитудой акустического сигнала. Этот подход отличается от стандартного электрокинетического преобразования, основанного на явлении электроосмоса и изложенного, например, в работе [2] или обзорах [3, 4] (см., также библиографию в этих работах), тем, что существенную роль в электроакустическом преобразовании играет обязательное наличие наряду с переменной (акустической) составляющей прикладываемого к жидкости напряжения еще и постоянного напряжения (называемого в дальнейшем напряжением накачки). Причиной накачки, как будет показано в работе, является нелинейность возникающей гидродинамической части задачи. Аналогичные явления возникают при изучении нелинейных течений жидкости вблизи диэлектрических и идеально поляризованных частиц при воздействии на них внешнего электрического поля [5], но в этом случае нелинейность возникает в электрической части физической модели проблемы.

Отметим, что отдаленно похожие процессы в смысле одновременного воздействия постоянных и переменных магнитных или электрических полей описаны в работах [6, 7]. Так, при создании магнитогидродинамического генератора псевдозвука, описанного в работе [6], показано, что при возбуждении в некотором объеме периодических движений проводящей жидкости, помещенной в постоянное магнитное поле, при прохождении через эту жидкость переменного тока возникают звуковые волны вследствие отражения от границ объема псевдозвуковых течений, возбуждаемых МГД генератором. Течение жидкости при этом рассмотрено в рамках линейной системы уравнений Эйлера. В работе [7] описан вибрационный преобразователь, вынуждающее усилие в котором создается системой катушек с переменным током, магнитное поле которых поляризуется полем постоянных магнитов и взаимодействует с индуцированными в системе токами.

Приведенное в [1] описание принципа действия преобразователя никак не увязано с электрогидродинамикой (ЭГД), предметом которой является данная проблематика. Кроме того, никак не учтено такое электрокинетическое явлением, как электроосмос, неизбежно возникающий при подаче разности потенциалов к пористому телу, наполненному жидкостью, где на границе раздела фаз имманентно присутствует двойной электрический слой (ДЭС), в котором нарушается электронейтральность жидкости.

В настоящей работе подробно излагаются детали, предложенных кратко в [8] физической и математической моделей, описывающих принцип действия этого электроакустического преобразователя на примере одиночного цилиндрического капилляра, заполненного жидкостью. Уравнения движения жидкости здесь рассматриваются и на основе линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса, изложенной в [8], и на основе ее нелинейной версии применительно к ламинарному движению жидкости.

Учитывая пограничный характер научных явлений, лежащих в основе принципа действия рассматриваемого акустического преобразователя, целесообразно изложить основные положения такой неакустической дисциплины, как электроосмос.

## СТАЦИОНАРНЫЙ ЭЛЕКТРООСМОС

К настоящему времени теория стационарного электроосмоса устоялась и опубликована в солидном количестве источников, из которых упомянем работы [9–11]. Электроосмос является одним из электрокинетических явлений, т.е. явлений, происходящих в системах, содержащих капилляры или пористые мембраны, размещенные в электролите при наложении электрического поля, и обратных им эффектов [12, с. 534]. Основную роль в электрокинетических явлениях играет ДЭС, формирующийся на границе раздела фаз, одна из которых должна обязательно быть жидкой или газообразной, и его поляризация. Таким образом, электроосмос – это движение жидкости (газа) через капилляры или пористые среды при наложении внешнего электрического поля. В силу различных причин безотносительно к тому, присутствует или нет внешний электрический потенциал, на поверхности раздела твердой и жидкой (газообразной) фаз образуется ДЭС (см., например, [9, глава 1; 10, глава 7]). На поверхности твердой фазы образуется слой потенциал-определяющих ионов одного знака, имеющий молекулярные размеры. Вследствие законов электростатики противоионы в жидкости при контакте с твердой фазой притягиваются к твердой границе; ионы жидкости, заряженные одноименно заряду границы, отталкиваются от границы. Часть противоионов (адсорбционная плотная, неподвижная часть ДЭС) остаются неподвижными даже при движении жидкости. Остальные противоионы и коионы остаются подвижными и образуют подвижную (диффузную) часть ДЭС. Область, где касаются адсорбционный и диффузный слои, называется поверхностью скольжения, которая получается несколько отодвинутой от реальной границы. Диффузный слой имеет толщину, равную дебаевской длине $\lambda_D$. Подвижная часть ДЭС за небольшое время переходного процесса приходит к стационарной концентрации. Концентрации противоионов и коионов в ДЭС и значение образовавшегося распределения электрического потенциала $\varphi$ в ДЭС связаны между собой распределением Больцмана [9, с. 15]. Потенциал $\varphi$ вектора электрической напряженности является электрической характеристикой ДЭС. Выделяют несколько характерных потенциалов, важнейшим из которых является электрокинетический потенциал (дзета-потенциал или $\zeta$-потенциал; во избежание путаницы в обозначениях с динамической вязкостью дзета-потенциал далее обозначаем $\tilde{\zeta}$), соответствующий поверхности скольжения. Часть диффузного слоя не является электронейтральной, что в конечном итоге и приводит к движению жидкости под воздействием стороннего электрического поля, т.е. к явлению электроосмоса.

В ДЭС формируется электростатическое поле, электрический потенциал $\varphi$ которого при заданном распределении свободных зарядов удовлетворяет уравнению Пуассона [9, с. 16; 10, с. 220]

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho_{el}}{\varepsilon\varepsilon_0} \text{ (в СИ)}, \quad \Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho_{el}}{\varepsilon} \text{ (в СГСЭ)}. \quad (1)$$

Здесь $\varepsilon_0$ – электрическая постоянная; $\varepsilon$ – относительная диэлектрическая проницаемость среды; $\rho_{el}$ – объемная плотность электрического заряда. В случае, когда тепловая энергия превосходит электрическую энергию [10, с. 97; 11, с. 147] $Ze\zeta \ll k_B T$ ($Z$ – заряд иона в единицах заряда протона; $k_B$ – постоянная Больцмана; $T$ – абсолютная температура; $e$ – элементарный электрический заряд (заряд протона)), уравнение (1) переходит в линейное уравнение Дебая–Хюккеля $\Delta\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda_D^2}\varphi(\mathbf{r})$. Длина Дебая определяется выражением [10, с. 97; 11, с. 147] $\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 k_B T}{2(Ze)^2 c_0}}$, где $c_0$ – равновесная концентрация ионов вне ДЭС. Решение $\varphi(\mathbf{r})$, полученное из уравнения Дебая–Хюккеля, позволяет рассчитать объемную плотность электрического заряда $\rho_{el}$ из уравнения (1), например, в СИ в виде $\rho_{el} = -\varepsilon\varepsilon_0\Delta\varphi$.

## УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ. ЛИНЕЙНЫЙ СЛУЧАЙ

Поскольку здесь рассматриваются акустические процессы, закон сохранения импульса принимаем в виде уравнения Навье–Стокса для движения вязкой сжимаемой однородной жидкости [13, с. 73]

$$\begin{gathered}\rho_\Sigma\left(\frac{\partial\mathbf{v}_\Sigma}{\partial t} + (\mathbf{v}_\Sigma\nabla)\mathbf{v}_\Sigma\right) = \\ = -\nabla p_\Sigma + \eta\Delta\mathbf{v}_\Sigma + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\nabla\nabla\mathbf{v}_\Sigma + \rho_{el}\mathbf{E}_\Sigma.\end{gathered} \quad (2)$$

В (2) учтено внешнее электрическое поле [10, с. 309; 11, с. 141] напряженностью $\mathbf{E}_\Sigma = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}$, где постоянное электрическое поле $\mathbf{E}_0 = \text{const}$ модулируется коллинеарным ему электрическим вектором $\mathbf{E}$, зависящим от времени ($\mathbf{E}\times\mathbf{E}_0 = 0$). В (2) $\eta$, $\zeta$ – динамическая и объемная вязкости соответственно; $p_\Sigma$ – давление, $\mathbf{v}_\Sigma$ – вектор скорости в среде; $\rho_\Sigma$ – плотность среды. Величины, помеченные индексом $\Sigma$, обозначают поля, возбужденные полем $\mathbf{E}_\Sigma$. Пометим поля, вызванные электрическим полем $\mathbf{E}_0$, нижним индексом 0: $p_0$, $\mathbf{v}_0$. Кроме того, обозначим через $\rho_0$ невозмущенное значение плотности, имеющее место в том числе и при воздействии только стационарного поля $\mathbf{E}_0$. Соответственно, акустические поля обозначим через $\mathbf{v}$, $p$, $\rho$.

Если принять допущение о том, что скорости процессов $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}$ соответствуют малым значениям числа Рейнольдса $\mathrm{Re} \ll 1$, то в (2) можно пренебречь конвективным членом [13, с. 89], что делает уравнение (2) линейным

$$\rho_\Sigma\frac{\partial\mathbf{v}_\Sigma}{\partial t} = -\nabla p_\Sigma + \eta\Delta\mathbf{v}_\Sigma + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\nabla\nabla\mathbf{v}_\Sigma + \rho_{el}\mathbf{E}_\Sigma. \quad (3)$$

Поскольку в этом случае справедлив принцип суперпозиции, то можно записать $\rho_\Sigma = \rho_0 + \rho$, $p_\Sigma = p_0 + p$, $\mathbf{v}_\Sigma = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}$.

При описании стационарного электроосмоса пользуются усеченной версией уравнения (3) [9, с. 33; 10, с. 220]

$$\eta\Delta\mathbf{v}_0 + \rho_{el}\mathbf{E}_0 = 0, \quad (4)$$

которое формально следует из (3) при выполнении условий $\nabla p_0 = 0$, $\frac{\partial\mathbf{v}_0}{\partial t} = 0$. Уравнение (4) описывает стационарное электроосмотическое течение под воздействием постоянного электрического поля $\mathbf{E}_0$ при рассмотрении баланса электрических сил и сил трения.

Далее рассматриваем случай кругового цилиндрического капилляра. Отличным от нуля решением (4) при условии $\mathbf{v}_0|_{r=a} = 0$ для капилляра с осью, совпадающей с $Oz$, и $\mathbf{E}_0 = (0, 0, E_0)$, является составляющая $v_{0z}(r)$ скорости $\mathbf{v}_0$ [10, с. 220; 11, с. 161]

$$v_{0z}(r) = E_0\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\eta}\zeta\left(1 - \frac{I_0(r/\lambda_D)}{I_0(a/\lambda_D)}\right). \quad (5)$$

Здесь $a$ – радиус поверхности скольжения; $I_0$ – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Асимптотика (5) при $r \to 0$ называется электроосмотической скоростью и равна $U_0(r) = E_0\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\eta}\zeta = \text{const}$. Известно, что при выполнении соотношения $\lambda_D \ll a$, практически для всех $r \in [0, a)$ будет справедливо соотношение $v_{0z}(r) \approx U_{eo}$. [11, с. 162].

На долю возмущенного решения приходится остающаяся часть уравнения (3), которое с точностью до акустических величин второго порядка малости имеет следующий вид

$$\rho_0\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \eta\Delta\mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\nabla\nabla\mathbf{v} + \rho_{el}\mathbf{E}. \quad (6)$$

К уравнению движения (6) необходимо добавить линеаризованное уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho_0\nabla\mathbf{v}=0. \qquad (7)$$

Принимая среду баротропной, выписываем уравнение состояния в линеаризованном виде

$$p=\left(\frac{\partial p_\Sigma}{\partial\rho_\Sigma}\bigg|_{\rho_\Sigma=\rho_0}\right)\rho=c^2\rho, \qquad (8)$$

где $c$ – скорость звука в среде. Система (6)–(8) представляет собой замкнутую систему линейных уравнений акустики для однородной, вязкой, баротропной среды.

Принимая представление вектора скорости $\mathbf{v}$ в виде суммы потенциальной $\mathbf{v}_l$ и соленоидальной $\mathbf{v}_t$ частей

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_l+\mathbf{v}_t,\quad \mathbf{v}_l=\nabla\Phi,\quad \mathbf{v}_t=\nabla\times\mathbf{\Psi},\quad \nabla\mathbf{\Psi}=0, \qquad (9)$$

где $\Phi$ и $\mathbf{\Psi}$ – соответственно скалярный и векторный потенциалы поля скоростей $\mathbf{v}$, и подставляя (9) в уравнение (6), получаем

$$\left[\rho_0\frac{\partial\mathbf{v}_l}{\partial t}+\nabla p-\left(\zeta+\frac{4}{3}\eta\right)\Delta\mathbf{v}_l-\rho_{\text{el}}\mathbf{E}\right]+ \\ +\left[\rho_0\frac{\partial\mathbf{v}_t}{\partial t}-\eta\Delta\mathbf{v}_t\right]=0. \qquad (10)$$

В (10) учтено, что $\mathbf{E}=-\nabla\psi$ – потенциальный вектор, где $\psi$ – скалярный потенциал поля $\mathbf{E}$. Из (10) получаем для потенциального течения

$$\rho_0\frac{\partial\mathbf{v}_l}{\partial t}=-\nabla p+\left(\zeta+\frac{4}{3}\eta\right)\Delta\mathbf{v}_l+\rho_{\text{el}}\mathbf{E} \qquad (11)$$

и соленоидального течения

$$\rho_0\frac{\partial\mathbf{v}_t}{\partial t}=\eta\Delta\mathbf{v}_t. \qquad (12)$$

Подстановка в (11), (12) значений для $\mathbf{v}_l$ и $\mathbf{v}_t$ из (9) преобразует их к виду

$$\rho_0\frac{\partial\Phi}{\partial t}=-p+\left(\zeta+\frac{4}{3}\eta\right)\Delta\Phi-\rho_{\text{el}}\psi, \\ \rho_0\frac{\partial\mathbf{\Psi}}{\partial t}=\eta\Delta\mathbf{\Psi}. \qquad (13)$$

Далее при условии, что глубина проникновения вязких волн $\delta$ мала, соленоидальным течением пренебрегаем (см., например, [14, с. 63]).

По предположению векторы $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{E}$ направлены вдоль оси $Oz$ ($\mathbf{E}_0=(0,0,E_0)$, $\mathbf{E}=(0,0,E)$) и вектор $\mathbf{E}$, вызывающий акустические колебания, имеет гармоническую зависимость от времени $E=\bar{E}e^{-i\omega t}$, где $\bar{E}=\text{const}$ – амплитуда колебаний. Тогда потенциал $\psi$ вектора $\mathbf{E}$ определяется из соотношения $\nabla\psi=\frac{\partial\psi}{\partial z}=-\bar{E}e^{-i\omega t}$. Интегрируя последнее равенство, имеем при условии $\psi(0)=\psi(z)|_{z=0}=0$

$$\psi=-z\bar{E}e^{-i\omega t}. \qquad (14)$$

Преобразуем уравнение (13). Для этого воспользуемся условием непрерывности (7) и соотношением $p=c^2\rho$. Получаем $\frac{\partial p}{\partial t}=-\rho_0c^2\nabla\mathbf{v}$ или через скалярный потенциал $\frac{\partial p}{\partial t}=-\rho_0c^2\Delta\Phi$. В гармоническом случае, сохраняя те же обозначения для амплитуд, для амплитуды давления $p$ получаем

$$p=\frac{\rho_0c^2}{i\omega}\Delta\Phi. \qquad (15)$$

С учетом (14) и (15) выражение (13) для гармонического сигнала примет вид

$$-i\omega\rho_0\Phi=-\frac{\rho_0c^2}{i\omega}\Delta\Phi+ \\ +\left(\zeta+\frac{4}{3}\eta\right)\Delta\Phi+\rho_{\text{el}}z\bar{E}. \qquad (16)$$

В круговом капилляре в дебаевском приближении справедливо выражение [11, с. 149] $\rho_{\text{el}}(r)=-\frac{\varepsilon\varepsilon_0\tilde{\zeta}}{\lambda_D^2}\frac{I_0(r/\lambda_{\text{D}})}{I_0(a/\lambda_{\text{D}})}$. С учетом этого уравнение (16) преобразуется к виду

$$\left\{\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]+k^2\right\}\Phi= \\ =-\frac{ik^2}{\omega\rho_0}\frac{\varepsilon\varepsilon_0\tilde{\zeta}}{\lambda_D^2}\frac{I_0(r/\lambda_{\text{D}})}{I_0(a/\lambda_{\text{D}})}\bar{E}z. \qquad (17)$$

Здесь $k=\frac{\omega}{c}\Big/\left(1-i\omega\left(\zeta+\frac{4}{3}\eta\right)\Big/\rho_0c^2\right)^{1/2}$ – волновое число потенциальных волн.

Таким образом, для амплитуды скалярного потенциала скорости $\Phi$ получено неоднородное уравнение Гельмгольца (17). Правая часть этого уравнения, как и скорость (5) в случае стационарного электроосмоса, пропорциональна амплитуде электрического потенциала $\bar{E}$ и величине $\tilde{\zeta}$-потенциала и обратно пропорциональна величине динамической вязкости $\eta$, а также, в отличие от стационарного электроосмоса, еще и объемной вязкости $\zeta$. Кроме того, $\Phi$, как и в стационарном случае, пропорциональна произведению диэлектрической проницаемости среды и электрической постоянной $\varepsilon\varepsilon_0$. Разумеется, эти зависимости в силу линейности уравнения (17) сохраняются для скорости потока $\mathbf{v}$.

Формально при сделанных выше допущениях задача считается решенной, если определен скалярный потенциал $\Phi$. Скалярный потенциал определяется выражением (17). Вектор колебательной скорости $\mathbf{v}=\mathbf{v}_l$ определяется после этого из (9). Поле давления определяется из (15). В случае пренебрежения вихревым течением на скалярный потенциал $\Phi$ на поверхности скольжения можно наложить краевое условие $\mathbf{v}|_a \approx \mathbf{v}_l|_a = \nabla\Phi|_a = 0$. Краевые условия для стационарного электроосмоса приведены в [9, с. 34; 10, с. 218].

## УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ. НЕЛИНЕЙНЫЙ СЛУЧАЙ, ЛАМИНАРНЫЙ РЕЖИМ

Далее снимается допущение о возможности линеаризации уравнения (2), но сохраняется допущение о ламинарности потоков жидкости в рассматриваемом процессе.

За основу вновь берется уравнение движения Навье–Стокса (2). Примем, что стационарное электрическое поле много больше переменного $|\mathbf{E}_0| \gg |\mathbf{E}|$. Число Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\mathbf{v}_0}$ для скорости $\mathbf{v}_0$ уже не считаем пренебрежимо малым, и конвективным членом слева в (2) для скорости $\mathbf{v}_0$ пренебрегать нельзя. Уравнение (4) в этом случае приводится к виду (как и выше, полагаем величину стационарного давления постоянной $\nabla p_0 = 0$)

$$\rho_0(\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{v}_0 = \eta\Delta\mathbf{v}_0 + \rho_{\mathrm{el}}\mathbf{E}_0. \qquad (18)$$

Вычтем из уравнения (2) для суммарных полей уравнение движения из (18) для стационарного потока. Получившееся уравнение для акустических полей линеаризуем. В результате получаем линеаризованную версию уравнения Навье–Стокса для акустических полей (см. также рассуждения в работе [13, § 26])

$$\begin{gathered}\rho_0\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}_0\cdot\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}_0\right) = \\ = -\nabla p + \eta\Delta\mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\nabla\nabla\mathbf{v} + \rho_{\mathrm{el}}\mathbf{E}.\end{gathered} \qquad (19)$$

К уравнению движения (19) следует добавить линеаризованное уравнение непрерывности (7).

Как и выше, рассматриваем безвихревое акустическое движение. Тогда, после подстановки выражения $\mathbf{v} = \nabla\Phi$ в уравнение (19), получаем уравнение для потенциала $\Phi$

$$\begin{gathered}\rho_0\left(\frac{\partial\nabla\Phi}{\partial t} + (\mathbf{v}_0\nabla)\nabla\Phi + (\nabla\Phi\nabla)\mathbf{v}_0\right) = \\ = -\nabla p + \eta\Delta\nabla\Phi + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\nabla\Delta\Phi - \rho_{\mathrm{el}}\nabla\psi.\end{gathered} \qquad (20)$$

Из (20) после простых преобразований получаем

$$\rho_0\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + 2(\mathbf{v}_0\nabla\Phi)\right) = -p + \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)\Delta\Phi - \rho_{\mathrm{el}}\psi. \qquad (21)$$

Выражение (21) следует из (20), если учесть, что скорость $\mathbf{v}_0$ электроосмотического течения потенциальна [9, с. 38] и в члене $(\nabla\Phi\nabla)\mathbf{v}_0$ из (20) сделать замену $\mathbf{v}_0 = \nabla\Phi_0$, а затем опустить во всех членах (21) правый оператор градиента $\nabla$.

Рассматриваем далее гармонический процесс с множителем $e^{-i\omega t}$ (амплитуды полей вновь обозначаем теми же буквами). Вектора $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{E}$ по прежнему являются коллинеарными и направлены вдоль оси $Oz$ ($\mathbf{E}_0 = (0, 0, E_0)$, $\mathbf{E} = (0, 0, E)$), а модуль вектора $\mathbf{E}$ имеет гармоническую зависимость от времени $E = \bar{E}e^{-i\omega t}$, где $\bar{E} = \mathrm{const}$. Тогда амплитуда потенциала $\psi$ вектора $\mathbf{E}$ равна $\psi = -\bar{E}z$. После подстановки амплитуды давления и потенциала в (21) имеем в гармоническом случае

$$\begin{gathered}\rho_0(-i\omega\Phi + 2(\mathbf{v}_0\nabla\Phi)) = \\ = -\frac{\rho_0 c^2}{i\omega}\Delta\Phi + \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)\Delta\Phi + \rho_{\mathrm{el}}\bar{E}z,\end{gathered}$$

или, используя введенное в (17) волновое число,

$$\Delta\Phi + k^2\Phi = \frac{2k^2}{i\omega}(\mathbf{v}_0\nabla\Phi) - \frac{k^2}{i\omega\rho_0}\rho_{\mathrm{el}}\bar{E}z. \qquad (22)$$

Уравнение (22) представляет собой подобие неоднородного уравнения Гельмгольца относительно скалярного потенциала $\Phi$ акустической составляющей осмотической скорости $\mathbf{v}$, однако, с тем отличием, что в правую часть уравнения (22) входит искомая величина $\nabla\Phi$. Решение таких уравнений сводится к линейному интегральному уравнению с ядром, представляющим собой функцию Грина соответствующего уравнения Гельмгольца, которое здесь подробно не рассматривается. Проделаем лишь качественное рассуждение, касающееся того, что справа в (22) стоит скалярное произведение $(\mathbf{v}_0\nabla\Phi)$ вектора стационарной осмотической скорости $\mathbf{v}_0$ и вектора $\nabla\Phi$, а следовательно, искомое решение $\Phi$ скалярного потенциала акустической составляющей осмотической скорости $\mathbf{v}$ прямо пропорционально модулю $|\mathbf{v}_0|$ скорости $\mathbf{v}_0$ стационарного осмотического течения. Поскольку имеет место линейная связь между потенциалом $\Phi$ и скоростью $\mathbf{v}$, а также давлением $p$ (см. (9) и (15)), то при росте амплитуды $|\mathbf{v}_0|$ будет расти и акустическое давление $p$ и модуль $|\mathbf{v}|$ акустической составляющей осмотической скорости, а следовательно, и интенсивность звука $I \sim p|\mathbf{v}|$.

Подставляя в (22) соответствующее значение для $\rho_{\mathrm{el}}(r)$, получаем

$$\left\{\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]+k^2\right\}\Phi = = \frac{k^2}{i\omega}\left(2(\mathbf{v}_0\nabla\Phi)+\frac{1}{\rho_0}\frac{\varepsilon\varepsilon_0\tilde{\zeta}I_0(r/\lambda_{\mathrm{D}})}{\lambda_D^2 I_0(a/\lambda_{\mathrm{D}})}\bar{E}z\right). \quad (23)$$

Выражение (23) отличается от выражения (17) только стоящим справа членом $\frac{2k^2}{i\omega}(\mathbf{v}_0\nabla\Phi)$, появившимся в результате учета нелинейности в уравнении Навье–Стокса (2). Таким образом, с ростом числа Рейнольдса для скорости стационарного электроосмотического потока $\mathbf{v}_0$ уравнения движения для стационарного потока и нестационарного акустического потока перестают быть несвязанными, как в линейном случае при получении уравнения (17). Это выражается в появлении в уравнениях (22), (23), описывающих акустический поток $\mathbf{v}$, члена $\frac{2k^2}{i\omega}(\mathbf{v}_0\nabla\Phi)$, непосредственно связанного со скоростью $\mathbf{v}_0$ стационарного электроосмотического потока. В этом и состоит возможность увеличения мощности акустического процесса за счет энергии стационарного процесса, т.е. возникает эффект накачки энергии из стационарного потока в энергию акустического процесса.

Остановимся на оценке члена $\frac{2k^2}{i\omega}(\mathbf{v}_0\nabla\Phi)$ в выражении (23). Стационарная электроосмотическая скорость $\mathbf{v}_0$ является решением уравнения (18), которое отличается от уравнения, рассматриваемого в классическом электроосмосе (см., например в [9, с. 33, 34]

$$\eta\Delta\mathbf{v}_0 + \rho_{\mathrm{el}}\mathbf{E}_0 = 0. \quad (24)$$

Уравнение (18) преобразуется в (24) при пренебрежении конвективным членом $\rho_0(\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{v}_0$. Это возможно при условии $|\rho_0(\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{v}_0| \ll |\rho_{\mathrm{el}}\mathbf{E}_0|$. Если это условие справедливо, то можно воспользоваться оценкой для скорости $\mathbf{v}_0$ при условии $a \gg \lambda_{\mathrm{D}}$ [11, с. 161, 162]: $\mathbf{v}_0 \approx U_{eo}\mathbf{e}_z$, где $U_{eo}$ – электроосмотическая скорость; $E_0 = |\mathbf{E}_0|$; $\mathbf{e}_z$ – единичный орт оси $Oz$, совпадающей с осью капилляра. С учетом приведенных рассуждений уравнение (23) переписывается в следующем виде

$$\left\{\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]+k^2\right\}\Phi = = \frac{k^2}{i\omega}\varepsilon\varepsilon_0\tilde{\zeta}E_0\left(\frac{2}{\eta}(\mathbf{e}_z\nabla\Phi)+\frac{1}{\rho_0}\frac{I_0(r/\lambda_{\mathrm{D}})}{\lambda_D^2 I_0(a/\lambda_{\mathrm{D}})}\frac{\bar{E}}{E_0}z\right), \quad (25)$$

из которого видна зависимость процесса от его основных физических параметров, т.е. величин $\omega, c, \eta, \zeta, \varepsilon, \varepsilon_0, \tilde{\zeta}, E_0, \bar{E}, \rho_0, a$ и $\lambda_{\mathrm{D}}$.

При решении задачи (25) следует наложить специфичные для электроосмотических задач краевые условия (см., например, [9, с. 33, 34; 10, с. 220]). После вычисления потенциала $\Phi$ вектор колебательной скорости и давления определяются стандартно, как описано выше. Плотность определяется из условия баротропности жидкости $\rho = \frac{p}{c^2}$.

**Замечание 1.** Уравнения (3) и (10) описывают процессы линейной акустики. В случае, когда нельзя пренебречь нелинейным слагаемым $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$, опущенным слева в (19), уравнение (25) трансформируется к нелинейному, что, в частности, объясняет появление кратных гармоник, которые в процессе эксперимента и сигнализируют о возникновении нелинейности акустического процесса.

## МОДЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для проверки рассмотренной теории был проведен модельный эксперимент в вычислительном пакете COMSOL. В качестве пористой структуры был выбран круговой стеклянный капилляр, заполненный воздухом с параметрами: радиус капилляра 10 мкм, длина капилляра 0.1 мм, амплитуда переменной разности потенциалов сохранялась в эксперименте постоянной $U = 1000$ В (переменное напряжение $u(t)$ определялось так $u(t) = U\sin(2\pi 1000t)$), частота 1000 Гц, дзета-потенциал был принят равным 100 мВ.

На сетке фиксированных значений постоянного напряжения $U_{0i}$, $i = \overline{1,N}$ решалась задача расчета уровня акустического давления $p = f(U_{0i}, U = \mathrm{const})$ на торце капилляра в случае наиболее общего уравнения движения (2). На рис. 1 представлены зависимости $p_i(t) = f(U_{0i}, U = \mathrm{const})$ при дискретной вариации величины $U_{0i}$ в интервале $i \in \overline{1,N}$. С правой стороны рисунка отдельно приведены дискретные значения $U_{0i}$. Из рис. 1 видно, что начиная с некоторых значений $U_{0i}$, функции давления $p_i(t)$ становятся нелинейными вследствие нелинейности задачи (2), на что указывает отклонение их формы от синусоидальной. Кроме того, видна прямая зависимость амплитуд колебаний $p_i(t)$ от величины амплитуды накачки $U_{0i}$.

Далее с помощью разложений в ряд Фурье кривых $p_i(t)$ были получены амплитуды $p_{1i}$ пер-

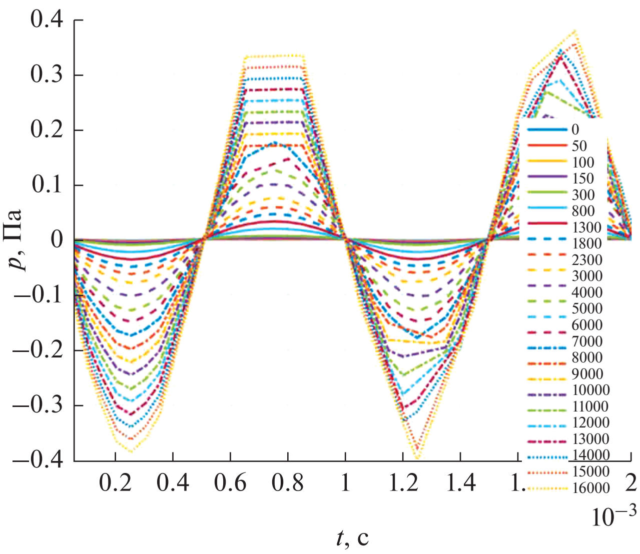


**Рис. 1.** Поведение результирующего акустического давления $p$ на торце капилляра в зависимости от времени $t$ при различных напряжениях накачки $U_0$ при значении величины амплитуды переменного напряжения $U = 1000$ В. Значения $U_0$, В приведены в правой стороне графика.

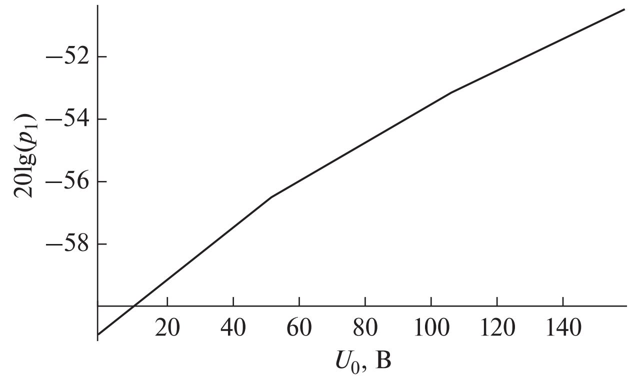


**Рис. 2.** Зависимость величины $20\lg(p_1)$ от напряжения накачки $U_0$ в интервале $U_0 \in [0, 150]$ В при значении величины амплитуды переменного напряжения $U = 1000$ В. Здесь $p_1$ – первая гармоника давления $p$ (см. рис. 1).

вых гармоник функций $p_i(t)$. На рис. 2, 3 приведены в режиме линейной интерполяции зависимости величины $20\lg(p_1)$ от напряжения накачки $U_0$ в интервале соответственно $U_0 \in [0,150]$ и $U_0 \in [0,16\,000]$ В при значении величины амплитуды переменного напряжения $U = 1000$ В. Здесь $p_1$ – первая гармоника давления $p(t)$.

**Замечание 2.** Полученный выше теоретически и на модельном эксперименте результат, заключающийся в том, что в нелинейном режиме при подаче постоянного и переменного электрических полей к электродам электроакустического преобразователя происходит перекачка энергии от постоянного электрического поля непосредственно к энергии акустического поля, был получен применительно к пористой структуре в виде кругового капилляра. Прежде чем переходить к описанию натурных экспериментов, приведем условия, когда эти результаты можно экстраполировать на достаточно широкий класс пористых структур. В § 2.2 работы [9] показано подобие системы уравнений электроосмотического течения применительно к капиллярно-пористой среде со сколь угодно сложной геометрией внутренней поверхности системе уравнений для простейших случаев границ (плоскость, плоский слой, капилляр) при выполнении следующих условий:

1. толщина двойного слоя достаточно мала, а радиусы кривизны внутренней поверхности пор больше некоторой величины, значительно превышающей длину Дебая $\lambda_D$, обычно принимаемую за толщину ДЭС;

2. минимальный линейный размер пор существенно превышает толщину двойного слоя.

В экспериментах, описанных ниже, в качестве капиллярно-пористой структуры используется писчая бумага. Согласно [15, с. 67], средний радиус пор бумаги составляет от 20–30 нм для мелованной бумаги, 270 нм для газетной бумаги и до 450 нм для фильтровальной бумаги. Для обычной писчей бумаги средний радиус пор лежит внутри интервала (30 нм, 270 нм). Порядок величины длины Дебая составляет $\lambda_D \sim 10$ нм [11, с. 47]. Таким

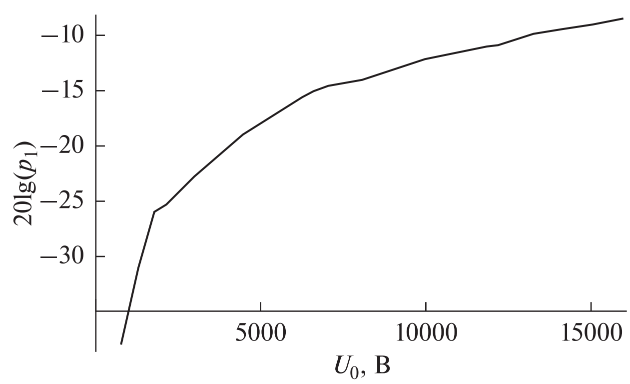


**Рис. 3.** Зависимость величины $20\lg(p_1)$ от напряжения накачки $U_0$ в интервале $U_0 \in [0, 16\,000]$ В при значении величины амплитуды переменного напряжения $U = 1000$ В. Здесь $p_1$ – первая гармоника давления $p$ (см. рис. 1).

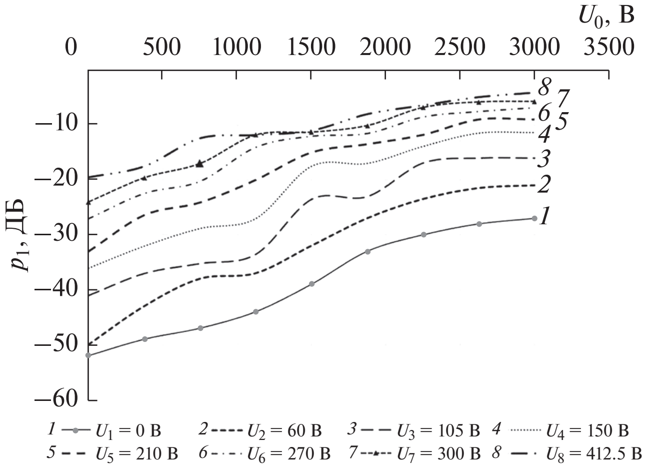


**Рис. 4.** Амплитуда давления первой гармоники $p_1$ в некоторой фиксированной точке волновой зоны излучателя в зависимости от изменения напряжения накачки $U_0$ при дискретных постоянных значениях $U$ (кривые *1*–*8*; маркеры на кривых *1* и *7* служат для идентификации кривых).

образом, для обычной писчей бумаги выполняются условия подобия, описанные в замечании 2.

## НАТУРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для проверки описанной теории был проведен ряд экспериментов. В качестве излучающей системы использовалась расположенная в воздушной среде пачка писчей бумаги постоянной толщины $\Delta$ (15 листов толщиной по ~ 0.1 мм каждый) формата А4, помещенная между двумя соразмерными бумаге перфорированными алюминиевыми пластинами-электродами. К электродам подводились постоянное $\mathbf{E}_0$ и гармоническое $\mathbf{E}$ электрические поля, направленные по нормали к электродам. При постоянной величине $\Delta$ далее вместо полей $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{E}$ оперируем соответствующими величинами приложенных к электродам разностей потенциалов $U_0$ и $Ue^{-i\omega t}$. Частота колебаний переменного электрического поля в опытах составляла $f = 3$ кГц. В волновой зоне описываемого преобразователя в точке на оси, проходящей нормально к его центру, был установлен микрофон, измерявший излучаемое давление, которое фиксировалось на анализаторе спектра в условных дБ[1].

В процессе экспериментов был получен ряд зависимостей давления первой гармоники давления $p_1$ на входе микрофона от напряжения накачки $p_1 = f_i(U_0, U_i)$ при фиксированных значениях величины амплитуды гармонической составляющей электрического поля $U = U_i$, $i = \overline{1,8}$, равных соответственно $U_1 = 30$ В; $U_2 = 60$ В; $U_3 = 105$ В; $U_4 = 150$ В; $U_5 = 210$ В; $U_6 = 270$ В; $U_7 = 300$ В; $U_8 = 412.5$ В. Кривые зависимостей $p_1 = f_i(U_0, U_i)$ представлены на рис. 4 под соответствующими номерами. На приведенных графиках значения уровня первой гармоники давления $p_1$ в дБ являются относительными, показывающими только соотношение его амплитуд в процессе эксперимента при различных значениях амплитуд $U$ и $U_0$. Напряжение накачки $U_0$ при фиксированной величине $U = U_i$, $i = \overline{1,8}$ варьировалось на дискретном множестве точек от 20 до 3000 В с переменным шагом: 30 В на интервале $U_0 \in [20, 500]$ В и с шагом 100 В на интервале $U_0 \in (500, 3000]$ В.

Из рис. 4 следует, что кривые $p_1 = f_i(U_0, U_i = \text{const})$ имеют сходный характер поведения в зависимости от напряжения накачки $U_0$ (т.е. от величины осмотической скорости $\mathbf{v}_0$, пропорциональной величине $U_0$): вначале все кривые достаточно монотонно возрастают с ростом величины $U_0$. В интервале значений $U_0 \in [2600, 3000]$ В наступает режим насыщения.

Фаза нарастания давления $p_1$ с ростом накачки $U_0$ прогнозировалась выше в теоретической части работы. Фаза насыщения давления $p_1$ с ростом напряжения накачки требует дополнительного пояснения. Участок насыщения кривых $p_1 = f_i(U_0, U_i = \text{const})$ можно объяснить тремя факторами. Во-первых, суммарная энергия при входе в нелинейный режим излучения начинает перераспределяться от первой гармоники акустических колебаний к появляющимся кратным гармоникам. Это отчетливо проявилось и при проведении модельного эксперимента в вычислительном пакете, что выразилось во все большем отклонении формы акустического давления $p$ от синусоидальной при росте напряжения накачки $U_0$. Во-вторых, как будет показано в следующей работе авторов, при некоторых значениях $U_0$, зависящих от размера пор, ламинарный режим течения жидкости (газа) в порах преобразователя переходит в турбулентный режим течения, который сопровождается появлением паразитных широкополосных пульсационных шумов, на что также идут затраты энергии. В-третьих, как показано в работе [16], с ростом $U_0$ возрастают диссипативные поте-

[1] Отсутствие привязки к конкретной величине, относительно которой оценивалась измеряемая величина, не меняет, как известно, характера соответствующей зависимости, а приводит лишь к ее сдвигу по оси ординат.

ри в теле преобразователя. Этим и объясняется поведение представленных на рисунке кривых.

Из результатов эксперимента, представленных на рис. 4, следует, что величины давления без накачки $p_1 = f_i(U_0, U_i)$ при $U_0 = 0$ (т.е. соответствующие значения давления $p_1$ на оси $U_0 = 0$ для $i = \overline{1,8}$) при фиксированных значениях $U_i$ по мере увеличения накачки $U_0$ возрастают по-разному. Рост составляет от 15.4 дБ при $U_i = 412.5$ В (в 5.9 раза) до 29 дБ при $U_i = 60$ В (в 28.2 раза). Эти результаты с учетом замечания 2 подтверждают теоретические прогнозы данной работы.

**Замечание 3.** Сравнение результатов модельного (рис. 2) и натурного (рис. 4) экспериментов в совпадающем интервале напряжения накачки $U_0 \in [0,150]$ В показывает, что при изменении напряжения накачки в этом интервале амплитуда давления растет на ~ 10.4 дБ для модельного эксперимента и на 1-3 дБ для натурного эксперимента. Объяснить это можно следующим образом. При проведении модельного эксперимента задавалось возможное верхнее предельное значение электрокинетического потенциала $\tilde{\zeta} = 0.1$ В (интервал принимаемых значений на практике составляет $\tilde{\zeta} \in [0.001, 0.1]$ В [15, с. 320]). Как видно из выражения (25), снижение величины дзета-потенциала в 2 раза до $\tilde{\zeta} = 0.05$ В по сравнению с принятым в модельном эксперименте влечет к уменьшению скалярного потенциала $\Phi$ и связанного с ним линейно давления $p$ на ~ 6 дБ. Реально в натурном эксперименте дзета-потенциал вероятно был еще меньше, однако в настоящей работе он специально не измерялся.

**Замечание 4.** Получение идентичных результатов качественной зависимости величины первой гармоники давления $p_1$, получаемого в преобразователе, от величины напряжения накачки $U_0$ при разных частотах переменного напряжения (соответственно 1000 и 3000 Гц для модельного и натурного экспериментов) лишь подчеркивает общий характер предложенной теоретической модели процесса.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложены в линейном и нелинейном приближении (ламинарный режим движения жидкости) необходимые уравнения и краевые условия для описания акустических полей, вызываемых электрокинетическими явлениями: наличием двойного электрического слоя и приложенного электрического поля, являющегося суммой постоянного поля и электрического поля, несущего акустическую информацию. Уравнения рассматриваются применительно к цилиндрическому капилляру.

В линейном режиме электроосмотических явлений наличие стационарного электроосмоса не оказывает влияния на протекание электроосмоса, вызванного переменным электрическим полем. В нелинейном ламинарном режиме происходит перекачка энергии постоянного электрического поля в энергию акустического поля. Результаты модельного эксперимента на капилляре качественно подтверждают верность проведенных теоретических исследований. Различие степени накачки в модельном и натурном экспериментах можно объяснить меньшим значением дзета-потенциала в натурном эксперименте.

Результаты натурного эксперимента на такой нетривиальной пористой структуре, как бумага, также подтверждают верность развитой в работе для кругового капилляра теории в части ее основного прогноза — возникновения процесса перекачки энергии постоянного электрического поля в акустическую энергию и демонстрируют правомерность ее экстраполяции на сложные пористые структуры. В натурном эксперименте усиление первой гармоники давления с помощью накачки составляло для различных значений переменного давления от 5.9 до 28 раз. В модельном эксперименте, в отличие от натурного эксперимента не происходит режима насыщения даже при изменении напряжения накачки до величины 16000 В. Причины этого будут вскрыты в следующей публикации авторов.

Полученные результаты могут быть использованы при проектировании и оптимизации преобразователей нового типа.

Авторы благодарны С.П. Дмитриеву и С.Г. Телятнику за содействие в проведении экспериментов.

Работа выполнена в ИАП РАН в рамках Государственного задания 075-00780-20-00 по теме № 0074-2019-0013 Министерства науки и высшего образования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shishov S.V., Andrianov S.A., Dmitriev S.P., Ruchkin D.V.* Method of converting electric signals into acoustics oscillations and an electric gas-kinetic transducer. United States Patent # US 8,085,957,B2. Dec. 27, 2011.
2. *Касимзаде М.С., Халилов Р.Ф., Балашов А.Н.* Электрокинетические преобразователи информации. М.: Энергия, 1973. 136 с.
3. *O'Brien R.W.* Electro-acoustic effects in a dilute suspension of spherical particles // J. Fluid Mech. 1988. V. 190. P. 71–86.

4. *Hunter R.J.* Review. Recent developments in the electroacoustic characterization of colloidal suspensions and emulsions // Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects. 1998. V. 14. P. 37–65.
5. *Мурцовкин В.А.* Нелинейные течения вблизи поляризованных дисперсных частиц // Коллоидн. журн. 1996. Т. 58. № 3. С. 358–367.
6. *Данилян А.В., Дорофеев Д.Л., Наскидашвили В.И., Пахомов Г.В., Зон Б.А.* Магнитогидродинамический генератор псевдозвука // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 5. С. 694–696.
7. *Гладилин А.В., Пирогов В.А., Голямина И.П., Кулаев Ю.В.* Вибрационный преобразователь с магнитной левитацией // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 3. С. 409–415.
8. *Курочкин В.Е., Сергеев В.А., Шарфарец Б.П., Гуляев Ю.В.* Теоретическое обоснование нового метода электроакустического преобразования. Линейное приближение // Докл. Акад. наук. 2018. Т. 483. № 3. С. 265–268.
9. *Духин С.С., Дерягин Б.В.* Электрофорез. М.: Наука, 1976. 332 с.
10. *Ньюмен Дж.* Электрохимические системы. М.: Мир, 1977. 464 с.
11. *Bruus H.* Theoretical Microfluidics. Oxford University Press, 2008. 346 p.
12. Физическая энциклопедия. Т. 5. М.: БРЭ, 1998. 760 с.
13. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
14. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
15. *Шахкельдян Б.Н., Загаринская Л.А.* Полиграфические материалы. М.: “Книга”, 1988. 328 с.
16. *Шарфарец Б.П.* О диссипации энергии в электроосмотическом процессе // Научное приборостроение. 2019. Т. 29. № 3. С. 30–40.
17. *Глинка Н.Л.* Общая химия. Л.: Химия. 702 с.

АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2020, том 66, № 4, с. 463–464

ЮБИЛЕЙ

# ЛЕОНИД ЕВГЕНЬЕВИЧ СОБИСЕВИЧ (К 90-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)

Собисевич Леонид Евгеньевич родился 27 апреля 1930 года в селе Малый Бобрик Краснопольского района Сумской области. В 1955 году окончил первым с отличием и Золотой медалью Высшее Военно-Морское училище инженеров оружия и Приказом Министра Военно-морского флота Советского Союза был оставлен в очной адъюнктуре. Проходил службу в училищах ВМФ и научно-исследовательских институтах Министерства обороны СССР, последовательно занимая должности младшего научного сотрудника, старшего научного сотрудника, начальника лаборатории (в/ч 26923). С 1975 года он переходит на должность члена Секции прикладных проблем при Президиуме РАН, а с 1989 года – становится главным научным сотрудником Лаборатории прикладной геофизики и вулканологии ИФЗ им. О.Ю. Шмидта РАН. Все эти годы Леонид Евгеньевич не прерывал связи с ЦНИИ Гидроприбор, участвуя в совместных НИР и ОКР. Как представитель Заказчика он принимал участие в морских испытаниях ряда изделий, которые успешно были приняты.

В 1962 году Собисевич Л.Е. защитил кандидатскую диссертацию, а в 1965 году ему присвоено ученое звание старшего научного сотрудника. В эти годы военный ученый активно развивает научное направление, связанное с созданием нового класса специальных информационно-измерительных систем. В своей первой монографии Леонид Евгеньевич выполнил обобщение теоретических и экспериментальных данных, отражающих физические явления и процессы, возникающие при истечении высокотемпературных турбулентных струй газа в жидкость. В это же время им публикуется серия статей, отражающих результаты натурных экспериментальных исследований тонкой структуры геофизических полей в слоистых неоднородных средах, обусловленных эксплуатацией ряда объектов ВВС и ВМФ.

В 1973 году Собисевич Л.Е. успешно защитил докторскую диссертацию, в которой решил проблему гидроакустической совместимости специализированных средств и систем ВМФ при комплексном использовании в операциях на морских театрах. Ученое звание профессора по кафедре “Морские информационно-измерительные системы” присвоено ему в 1981 году.

Профессор Собисевич Л.Е. является известным ученым в области прикладной геофизики и гидрофизики, включая такие разделы как:

– Теория и методы экспериментальных исследований геофизических и гидрофизических (акустических, гидроакустических, сейсмических, гидродинамических и электромагнитных) полей.

– Мониторинг волновых процессов, генерируемых в литосфере и других геосферах в результате внешних и внутренних воздействий, с учетом эволюции локализованных неоднородных структур, активно влияющих на изменение окружающей среды.

– Построение технологии аппаратурного мониторинга сейсмической активности, вариаций наклонов и деформаций земной поверхности, составляющих магнитного поля Земли, атмосферного давления, вторых производных гравитационного потенциала, приливного фактора и температуры окружающей среды с целью получения натурных данных о короткопериодных перестройках в окружающей среде.

Большой цикл работ, посвященный изучению гидрофизических полей летательных аппаратов различного назначения, обобщен в его монографии, которая была издана еще в 1986 году и является до настоящего времени основополагающим научным трудом по проблеме в целом. К этому периоду относятся и работы по снижению шумности нового класса механизмов – “несоосных винтовых”. Эта работа выполнялась совместно с ЦНИИ Гидроприбор. На базе этих устройств в 1980–1988 гг. создан новый тип бесшумных прецизионных приборов, которые по своим основным характеристикам далеко превосходят известные зарубежные системы.

За комплекс специальных работ и успешную подготовку научных кадров высшей квалификации Леонид Евгеньевич был удостоен почетного звания “Заслуженный деятель науки и техники РФ”, а в 1998 году ему была присуждена Государственная премия Совета Министров.

Собисевич Л.Е автор более 170 научных работ и изобретений общим объемом более 350 печатных листов, из которых 126 работ, в том числе 8 оригинальных монографий, опубликованы уже после зашиты докторской диссертации. К основным достоинствам научных публикаций следует отнести ясность изложения исследуемых вопросов и четкую направленность на решение актуальных прикладных проблем геофизики и гидрофизики с использованием современных математических и экспериментальных методов. Он является автором или соавтором ряда разработанных геофизических и гидрофизических методов, приборов и систем, что отмечено 23 авторскими свидетельствами на изобретения и патентами.

Профессор Собисевич Л.Е. всегда уделяет большое внимание использованию научных результатов, как в народном хозяйстве, так и в интересах повышения обороноспособности России, консультируя ученых, связанных с созданием новых видов вооружения и военной техники, организуя и непосредственно участвуя в исследованиях на созданных геофизических полигонах. Основные его изобретения реализованы в конкретных образцах вооружения, в космической и авиационной технике, технике ВМФ, а использование предложенных теоретических методов позволило повысить эффективность современных геофизических приборных комплексов, ряда образцов вооружения и военной техники.

В своей педагогической деятельности профессор Собисевич Л.Е. стремится всегда передать своим ученикам, аспирантам, курсантам и студентам многолетний опыт экспериментатора, широко используя в лекционных курсах результаты полевых наблюдений. Он разработал и прочитал новый курс лекций по теории гидрофизических полей летательных аппаратов на приборостроительном факультете Ленинградского кораблестроительного института. В рамках этого курса подготовлен и издан ряд учебных пособий, которые высоко оценены научной общественностью. Много внимания уделяет Собисевич Л.Е. и подготовке специалистов высшей квалификации. За два десятилетия им создана научная школа из военных и гражданских специалистов, 12 из которых под его руководством стали кандидатами, а 4 – докторами наук. Леонид Евгеньевич – член специализированных советов по защите докторских диссертаций и научно-технических советов ОИФЗ РАН, ГНИЦ ПГК при Кубанском госуниверситете Минобразования России, НИИ Погранвойск.

В настоящее время Собисевич Л.Е ведет напряженную научно-исследовательскую и научно-организационную деятельность. В течение последних восьми лет он возглавляет работы по проблеме, связанной с созданием нового поколения мобильных информационно-измерительных комплексов (систем) экспериментальной геофизики на базе высоких конверсионных технологий, успешно ведет работы с ЦНИИ Гидроприбор и другими организациями, регулярно организует и проводит комплексные экспедиции в сейсмоопасные регионы России.

Наряду с важнейшими прикладными работами, Л.Е. Собисевичу принадлежит множество новых идей и фундаментальных научных результатов, часть из которых опубликована в Акустическом журнале.

Леонид Евгеньевич – один из немногих ныне живущих участников Великой Отечественной войны. Будучи юношей, он воевал в Белоруссии в составе партизанского отряда, перенес немало лишений и трудностей в жизни. Несмотря на это, он сумел сохранить оптимизм и кипучую энергию. Ученики, коллеги и друзья желают Леониду Евгеньевичу как можно дольше сохранять его жизнелюбие и творческую активность. Хорошего Вам здоровья и многих лет жизни!