

Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 85. Iss. 1

EDITORIAL BOARD

I.G. Goryacheva (editor-in-chief, Professor, RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)

V.G. Baydulov (executive secretary, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia)

J. Awrejcewicz (Professor, Politechnika Łódzka, Lodz, Poland),

N.N. Bolotnik (Professor, Corresponding RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

F.M. Borodich (Professor, Cardiff University, Cardiff, United Kingdom),

A.B. Freidin (Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),

A.M. Gaifullin (Professor, Corresponding RAS member, Central Aerohydrodynamic Institute
(TsAGI), Zhukovsky, Russia),

M.L. Kachanov (Professor, Tufts University, Medford, MA, USA),

Ju.D. Kaplunov (Professor, Keele University, Staffordshire, United Kingdom),

A.V. Karapetyan (Professor, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia),

A.A. Korobkin (Professor, University of East Anglia, Norwich, United Kingdom),

A.M. Kovalev (Professor, NASU member, Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Donetsk, Ukraine),

V.V. Kozlov (Professor, RAS member, Vice-President RAS, Moscow, Russia),

A.M. Krivtsov (Professor, Corresponding RAS member, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic
University, St. Petersburg, Russia),

A.G. Kulikovskii (Professor, RAS member, Steklov Institute of Mathematics, RAS, Moscow, Russia),

Yu.Yu. Makhovskaya (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

N.F. Morozov (Professor, RAS member, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia),

T.J. Pedley (Professor, FRS member, University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom),

F. Pfeiffer (Professor, FRS, Foreign RAS member,

Technische Universität München, Munich, Germany),

V.V. Pukhnachev (Professor, Corresponding RAS member, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics
RAS, Novosibirsk, Russia),

G. Rega (Professor, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy),

S.A. Reshmin (Professor, Corresponding RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

V.A. Sabelnikov (Professor, The French Aerospace Lab ONERA, Paris, France),

Ye.I. Shifrin (Professor, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

F.E. Udwardia (Professor, University of Southern California, Los Angeles, CA, USA),

S.E. Yakush (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

V.F. Zhuravlev (Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia),

K. Zimmermann (Professor, Technische Universität Ilmenau, Ilmenau, Germany)

Editorial advisory board: N.I. Amelkin, I.M. Anan'evskii, A.S. Andreev, V.A. Babeshko,
A.M. Formalskii, Yu.P. Gupalo, A.P. Ivanov, A.N. Kraiko, A.P. Markeev, S.A. Nazarov,
V.S. Patsko, A.G. Petrov, N.N. Rogacheva, V.V. Sazonov, A.P. Seyranian, I.A. Soldatenkov,
S.Ya. Stepanov, G.A. Tirsksii, V.N. Tkhai

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

January–February

Учредитель: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Редакция:

В.Г. Байдулов – отв. секретарь

Е.В. Есина – зав. редакцией

Адрес редакции: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245

Телефон редакции: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

На сайте Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала "Прикладная математика и механика" в каталоге Роспечати 70706

ISSN 0032-8235

Founder: Russian Academy of Sciences

The Editorial Staff:

V.G. Baydulov – executive secretary

E.V. Esina – head of Editorial office (manager editor)

The Editorial Board Address: 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia

Phone: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL : <http://pmm.ipmnet.ru>

The subscription index in Rospechat catalogue 70706

ISSN 0021-8928

СОДЕРЖАНИЕ

Блочный синтез системы слежения для двухроторной электромеханической системы при ограничениях на переменные состояния <i>А. С. Антипов, С. А. Краснова</i>	3
Анализ динамики формирования тросовой группировки из трех наноспутников с учетом их движения вокруг центров масс <i>Ч. Ван, Ю. М. Заболотнов</i>	21
Контакт с межмолекулярным взаимодействием для вязкоупругого слоя (самосогласованный подход): анализ особенностей процесса подвода/отвода индентора <i>И. А. Солдатенков</i>	44
Длительная прочность стержней, растягиваемых в агрессивной среде, при различных двухсвязных формах их поперечных сечений <i>А. М. Локощенко, Л. В. Фомин, Н. С. Ларин</i>	66
Послойный анализ напряженно-деформированного состояния нерегулярных трехслойных оболочек вращения ненулевой гауссовой кривизны <i>В. Н. Бакулин</i>	89
О последовательной сменяемости в механизмах производства больших необратимых деформаций <i>А. С. Бегун, А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. Н. Прокудин</i>	106
Приближенный анализ экструзии пористого материала типа Грина <i>Г. М. Севастьянов, А. М. Севастьянов</i>	121
Памяти Александра Ароновича Зевина (4.10.1939–26.02.2020)	135

CONTENTS

The block design of tracking system for twin-rotor electromechanical system with restrictions on state variables <i>A. S. Antipov, S. A. Krasnova</i>	3
Analysis of the dynamics of the formation of a tether group of three nanosatellites taking into account their movement around the centers of mass <i>Ch. Wang, Yu. M. Zabolotnov</i>	21
Contact with intermolecular interaction forces for a viscoelastic layer (self-consistent approach): analysis of the characteristics of the indenter approach/separation process <i>I. A. Soldatenkov</i>	44
Creep rupture strength of rods stretched in an aggressive medium at various two-connected forms of their cross sections <i>A. M. Lokoshchenko, L. V. Fomin, N. S. Larin</i>	66
Layer-by-layer stress-strain analysis of irregular sandwich shells of revolution with non-zero gaussian curvature <i>V. N. Bakulin</i>	89
On sequential change in mechanisms of production of large irreversable deformations <i>A. S. Begun, A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk, A. N. Prokudin</i>	106
Analysis of extrusion of perfectly plastic compressible material <i>G. M. Sevastyanov, A. M. Sevastyanov</i>	121

УДК 62-503.54

БЛОЧНЫЙ СИНТЕЗ СИСТЕМЫ СЛЕЖЕНИЯ ДЛЯ ДВУХРОТОРНОЙ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПЕРЕМЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ

© 2021 г. А. С. Антипов^{1,*}, С. А. Краснова^{1,**}¹ Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

*e-mail: scholess18@mail.ru

**e-mail: skrasnova@list.ru

Поступила в редакцию 05.06.2020 г.

После доработки 21.09.2020 г.

Принята к публикации 23.10.2020 г.

В качестве объекта управления рассматривается двухроторная электромеханическая система, выходные переменные которой совершают угловые перемещения в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Математическая модель механической подсистемы существенно нелинейная, включает перекрестные связи между винтами, моменты сил сухого трения и неопределенные параметры, а также на нее воздействуют внешние неконтролируемые возмущения. Математическая модель электрической подсистемы (учитываемая динамика приводов постоянного тока) аппроксимируется линейными дифференциальными уравнениями. Прямым измерениям подлежат выходные переменные, токи якорей приводов и задающие воздействия. В рамках блочного подхода разработана декомпозиционная процедура синтеза динамической обратной связи для отслеживания выходными переменными заданных сигналов с заданной точностью. Для подавления несогласованных возмущений формируются всюду ограниченные нелинейные S-образные локальные связи, которые обеспечиваются разрывными управлениями с постоянными амплитудами, что позволяет учитывать проектные ограничения на переменные состояния и управления на стадии синтеза. По измерениям угловых положений разработана процедура настройки редуцированного динамического наблюдателя угловых скоростей с S-образными корректирующими воздействиями, не требующая параметрической определенности модели объекта и ввода динамической модели внешних возмущений. Эффективность разработанного подхода подтверждена результатами моделирования в среде MATLAB-Simulink.

Ключевые слова: электромеханическая система, слежение, инвариантность, ограничения на переменные состояния, сигма-функция, наблюдатель состояния

DOI: 10.31857/S0032823521010021

Введение. Двухроторная электромеханическая система (далее TRMS — от англ. Twin Rotor MIMO System) состоит из двух перпендикулярных винтов с исполнительными устройствами на каждом из них и имеет две регулируемые координаты — углы тангажа и рысканья. В качестве задач управления рассматриваются слежение за заданными угловыми положениями либо стабилизация угловых положений на определенных уровнях. При построении алгоритмов управления TRMS возникают сложности, связанные с существенной нелинейностью математической модели объекта управления, наличием в ней перекрестных связей между винтами, а также параметрических и

внешних возмущений. TRMS предназначена для апробации авторских алгоритмов управления, учитывающих указанные особенности математической модели, с дальнейшим применением их в реальном техническом устройстве — вертолете, динамика которого во многом схожа с динамикой TRMS. И для вертолета, и для TRMS характерно наличие перекрестных связей между винтами. Отличие TRMS от вертолета состоит в том, данная система закрепляется на неподвижной опоре, ее положение регулируется изменением угловых скоростей винтов. В вертолете угловые скорости вращения винтов практически постоянны, а его положение регулируется изменением углов атаки лопастей.

Для синтеза обратной связи в TRMS широко используются нелинейные законы с попыткой обеспечить глобальную стабилизацию. Одним из распространенных подходов является линеаризация системы статической обратной связью, в частности с использованием ПИД-регуляторов [1–3]. Подход основан на компенсации составляющих модели, для его реализации требуется параметрическая определенность модели объекта, либо идентификация параметров в реальном времени, что на практике может быть затруднительно. Отдельная проблема связана с настройкой параметров ПИД-регуляторов, поэтому используются модификации данного метода [4–7], обеспечивающие большую робастность. Альтернативным подходом является метод обратного хода [8–10], который опирается на свойства пассивности систем и также способен обеспечить робастность. Эффективным подходом при наличии параметрических неопределенностей и неизвестных согласованных возмущений является разрывное управление с организацией скользящего режима. Следует отметить, что законы разрывного управления приобретают эвристический характер при их применении в механических системах в качестве управляющих моментов [11, 12]. Кроме того, их использование в механических системах с учетом динамики электрических исполнительных устройств не даст ожидаемого эффекта, так как возмущения, действующие на механическую систему, не могут быть непосредственно подавлены.

Для многих механических систем, в том числе для TRMS, характерно наличие сил сухого трения, препятствующих желаемому движению объекта. Описание моделей сухого трения представлено в [13]. Возможным подходом к управлению при наличии сухого трения является его компенсация посредством ввода динамических моделей трения и наблюдателей состояния [14–16]. Однако его реализация требует параметрической определенности модели объекта управления, наличия всех необходимых измерений и адекватного построения моделей сил трения. Другим подходом выступают силовые методы, основанные на подавлении сил сухого трения за счет выбора ресурсов управления, превышающих предельно возможные коэффициенты трения [17–19]. Этот подход будет далее использован в работе. Его реализация не требует параметрической определенности, необходимо лишь знание границ изменения параметров. В качестве недостатка использования такого подхода можно отметить излишний расход ресурсов управления, когда фактические значения параметров оказываются существенно меньше заложенных в расчетах наихудших значений.

В данной работе для TRMS рассматривается задача отслеживания выходными переменными заданных сигналов при воздействии параметрических и внешних возмущений в условиях неполных измерений и при наличии проектных ограничений на переменные состояния и управления. Задача учета проектных ограничений представляется особенно актуальной, поскольку они следуют из технических требований и соображений безопасности. Поставленная задача решается с помощью метода декомпозиции [20] в рамках блочного подхода: в механической подсистеме последовательно назначаются стабилизирующие локальные связи, которые обеспечиваются разрывными управлениями в электрической подсистеме. В стандартном блочном подходе стабилизирующие фиктивные управления выбираются в виде неограниченных линейных функций с большими коэффициентами усиления, необходимыми для подавления

возмущений [21, 22]. Однако использование линейных глубоких обратных связей на практике зачастую приводит к большой величине перерегулирования в начале переходных процессов. Предлагается принять стабилизирующие фиктивные управления в виде нелинейных S-образных сигма-функций [23–25]. Как гладкий аналог функции знака, сигма-функция позволяет обеспечить инвариантность по отношению к возмущениям с заданной точностью, а также обеспечить выполнение проектных ограничений ввиду своей ограниченности.

На практике для TRMS обычно не сложно организовать измерения угловых положений и токов якорей приводов постоянного тока, которые пересчитываются в моменты исполнительных устройств, но для реализации базового закона управления также необходимо знание угловых скоростей. В связи с этим возникает задача их оценивания, которая традиционно решается с помощью наблюдателя Луенбергера [8], а при наличии шумов в измерениях – с помощью расширенного фильтра Калмана [11, 26] и его модификаций [27]. Однако реализация данных наблюдателей требует точного знания параметров модели объекта, либо их идентификации с достаточной точностью. Кроме того, необходимо расширить пространство состояний за счет автономных динамических моделей, порождающих производные задающих сигналов и имитирующих внешние возмущения. Далее полагается, что задающие сигналы поступают в реальном времени, а их производные трактуются как неизвестные возмущения. Для оценивания угловых скоростей строится наблюдатель состояния пониженного порядка с сигмоидальными корректирующими воздействиями [23–25, 28], реализация которого не требует параметрической определенности и ввода дополнительной динамической модели внешних возмущений. Угловые скорости трактуются в виртуальной системе, записанной относительно ошибок наблюдения, как внешние ограниченные возмущения, а их оценку предоставляют сигмоидальные корректирующие воздействия.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 1 описывается модель TRMS, формализуется постановка задачи слежения. В разделе 2 представлен основной результат. В рамках блочного подхода разработан базовый закон разрывного управления, приведена процедура выбора параметров сигмоидальных локальных связей, обеспечивающих выполнение проектных ограничений. В разделе 3 представлен синтез динамического наблюдателя угловых скоростей с сигмоидальными корректирующими воздействиями. В разд. 4 представлены результаты численного моделирования разработанных алгоритмов.

1. Описание объекта управления. Постановка задачи. На рис. 1 приведена схема TRMS. Механизм состоит из основного винта 1, к которому приложены гравитационный момент M_{FG} , момент сил трения $M_{B\psi}$ и гироскопический момент M_G . К хвостовому винту 2 приложен момент сил трения $M_{B\phi}$ и момент M_R , возникающий за счет перекрестных связей между винтами. Математическая модель, соответствующая приведенной схеме, имеет вид [29]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= [(1 - K_{gy}x_3 \cos x_1)\tilde{\tau}_1 - f_1]/I_1 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= [\tilde{\tau}_2 - f_2]/I_2,\end{aligned}\tag{1.1}$$

где $x_1 = \psi$ – угол тангажа, $x_3 = \phi$ – угол рысканья (выходные, регулируемые переменные), $-\pi/2 < x_1(t) < \pi/2$, $0 \leq x_3(t) \leq 2\pi$ – допустимые области изменения угловых положений, x_2, x_4 – угловые скорости, I_1, I_2 – моменты инерции основного и хвостового винтов, K_{gy} – параметр гироскопического момента, $0 < K_{gy} < 1/(2\pi) \Rightarrow 1 - K_{gy}x_3 \cos x_1 > 0$, $f_1 = M_{FG} + M_{B\psi} + \eta_1$ – сумма моментов, приложенных к основному винту, $M_{FG} = M_g \sin x_1$, $M_{B\psi} = B_{1\psi}x_2 + B_{2\psi} \operatorname{sign} x_2$, M_g – параметр гравитационного момен-

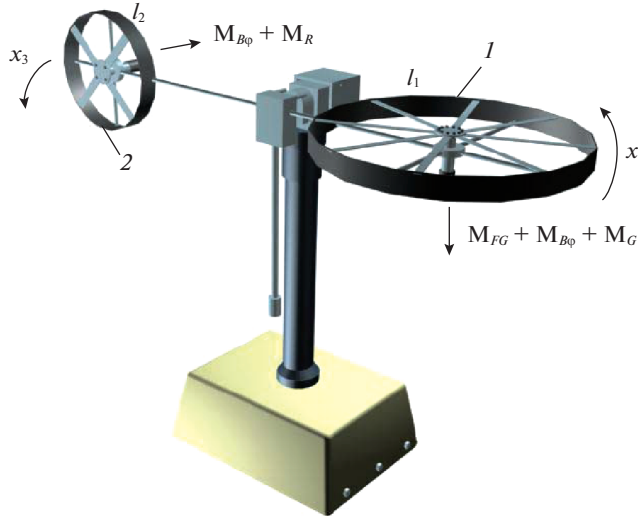


Рис. 1.

та, $B_{1\psi}$ и $B_{2\psi}$ – параметры момента силы трения, $f_2 = M_{B\phi} + \eta_2$ – сумма моментов, приложенных к хвостовому винту, $M_{B\phi} = B_{1\phi}x_4 + B_{2\phi}\text{sign}x_4$, $B_{1\phi}$ и $B_{2\phi}$ – параметры момента силы трения, η_i – часть обобщенных моментов (в том числе аэродинамических моментов и моментов, возникающих за счет перекрестных связей), трактуемых как неизвестные ограниченные возмущения, $|\eta_i(t)| \leq N_i$, $t \geq 0$, $\tilde{\tau}_i = a_i\tau_i^2 + b_i\tau_i$ – моменты, создаваемые приводами на основном и хвостовом винтах соответственно, a_i , b_i – коэффициенты передачи, $i = 1, 2$.

Учитываемая динамика электрических исполнительных устройств (приводов постоянного тока) описывается следующими уравнениями [29]:

$$\dot{\tau}_i = -\frac{T_{i0}}{T_{i1}}\tau_i + \frac{k_i}{T_{i1}}u_i; \quad i = 1, 2, \quad (1.2)$$

где τ_i – моменты сил на валу основного и хвостового двигателей; T_{i0} , T_{i1} , k_i – параметры исполнительных устройств, u_i – разрывные управления (напряжения якорей приводов), $i = 1, 2$. В уравнениях (1.1)–(1.2) все конструктивные коэффициенты положительные.

Для объекта управления (1.1)–(1.2) ставится задача синтеза закона разрывного управления в форме обратной связи, обеспечивающего отслеживание выходными переменными $x_1(t)$ и $x_3(t)$ заданных сигналов $g_1(t)$ и $g_2(t)$ с некоторой точностью

$$|e_{li}(t)| \leq \Delta_{li}; \quad i = 1, 2, \quad t > t_{li} > 0, \quad (1.3)$$

где $e_{11}(t) = x_1(t) - g_1(t)$, $e_{12}(t) = x_3(t) - g_2(t)$ – ошибки слежения, с учетом проектных ограничений на угловые скорости, моменты, развиваемые исполнительными устройствами, и управления

$$\begin{aligned} |x_2(t)| &\leq X_{21}, \quad |x_4(t)| \leq X_{22} \\ |\tau_i(t)| &\leq T_i < b_i/(2a_i) \\ |\tilde{\tau}_i(t)| &\leq \tilde{T}_i < b_i^2/(4a_i) \\ |u_i(t)| &\leq U_i; \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (1.4)$$

выполнение которых надо обеспечить в замкнутой системе.

Ограничения (1.4), обусловленные мощностью комплектных исполнительных устройств, определяют возможные рабочие режимы и точность отслеживания в установившемся режиме при действии неконтролируемых возмущений. В разделе 2 будут получены допустимые соотношения между границами проектных ограничений (1.4), а также оценки предельной достижимой точности Δ_{li} с учетом (1.4). Проблема обеспечения заданного времени сходимости t_{li} или получения его оценки в работе не рассматривается.

В рамках поставленной задачи выдвигаются следующие предположения:

1) измерениям доступны угловые положения $x_1(t)$, $x_3(t)$, задающие воздействия $g_1(t)$, $g_2(t)$ и токи якорей приводов, по которым восстанавливаются текущие значения моментов сил, создаваемых приводами $\tilde{\tau}_1(t)$, $\tilde{\tau}_2(t)$, шумы в измерениях отсутствуют;

2) генератор задающих воздействий отсутствует, их производные трактуются как ограниченные возмущения

$$|\dot{g}_i(t)| \leq G_{li}; \quad t \geq 0, \quad (1.5)$$

3) значения коэффициентов передачи a_i , b_i , $i = 1, 2$ известны, остальные конструктивные коэффициенты точно не известны, имеются только диапазоны их изменения $0 < *_{\min} \leq *(t) \leq *_{\max}$, $t \geq 0$ (здесь под символом $*(t)$ понимаются неопределенные параметры системы (1.1)–(1.2), которые могут изменяться в процессе эксплуатации), в частности $0 < \xi_{\min} \leq \xi \leq \xi_{\max}$, $\xi = 1 - K_{gy} x_3 \cos x_1$;

4) тот факт, что в замкнутой системе целенаправленно будет обеспечиваться выполнение ограничений (1.4), позволяет принять для целей анализа следующие оценки суммарных моментов

$$\begin{aligned} |f_1(x_1, x_2, t)| &\leq F_1 = M_{g,\max} + B_{l\psi,\max} X_{21} + B_{2\psi,\max} + N_1 \\ |f_2(x_4, t)| &\leq F_2 = B_{l\varphi,\max} X_{22} + B_{2\varphi,\max} + N_2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

и трактовать их как неизвестные ограниченные возмущения;

5) система (1.1)–(1.2) является управляемой, т.е. $d\tilde{\tau}_i/d\tau_i \neq 0$ [21], более конкретно:

$$2a_i \tau_i(t) + b_i > 0; \quad t \geq 0$$

Приведенное условие означает, что в подсистеме

$$\dot{\tilde{\tau}}_i = (2a_i \tau_i(t) + b_i) \left(-\frac{T_{i0}}{T_{i1}} \tau_i + \frac{k_i}{T_{i1}} u_i \right)$$

коэффициенты при истинных управлениях u_i не обращаются в нуль, следовательно, выбором u_i можно обеспечить желаемое поведение $\tilde{\tau}_i$, $i = 1, 2$.

2. Базовый закон управления. Электромеханическая система (1.1)–(1.2) имеет структуру блочной формы управляемости [21, 22], поэтому целесообразно разбить задачу синтеза управления системой 6-го порядка на 6 элементарных подзадач, которые решаются последовательным выбором стабилизирующих фиктивных, а потом и истинных управлений в каждом из уравнений. Фиктивными управлениями в уравнениях (1.1) полагаются переменные x_2 , $\tilde{\tau}_1$, x_4 и $\tilde{\tau}_2$ соответственно. С целью выполнения проектных ограничений (1.4) на стадии синтеза фиктивные управления предлагается выбирать в виде всюду ограниченных сигма-функций [23–25]:

$$\begin{aligned} x_2^* &= -m_{11} \sigma(k_{11} e_{11}), & x_4^* &= -m_{12} \sigma(k_{12} e_{12}) \\ \tilde{\tau}_1^* &= -m_{21} \sigma(k_{21} e_{21}), & \tilde{\tau}_2^* &= -m_{22} \sigma(k_{22} e_{22}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\sigma(k_{ji} e_{ji}) = \frac{2}{1 + \exp(-k_{ji} e_{ji})} - 1$ – сигма-функция.

Для системы (1.1)–(1.2) сформируем новый координатный базис относительно невязок между переменными x_2 , $\tilde{\tau}_1$, x_4 , $\tilde{\tau}_2$ и выбранными стабилизирующими фиктивными сигмоидальными управлениями (2.1):

$$\begin{aligned} e_{21} &= x_2 - x_2^* = x_2 + m_{11}\sigma(k_{11}e_{11}), & e_{22} &= x_4 - x_4^* = x_4 + m_{12}\sigma(k_{12}e_{12}) \\ e_{31} &= \tilde{\tau}_1 - \tilde{\tau}_1^* = \tilde{\tau}_1 + m_{21}\sigma(k_{21}e_{21}), & e_{32} &= \tilde{\tau}_2 - \tilde{\tau}_2^* = \tilde{\tau}_2 + m_{22}\sigma(k_{22}e_{22}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

В отличие от линейных фиктивных управлений с большими коэффициентами, которые классически используются в блочном подходе [21, 22], сигмоидальные фиктивные управления имеют по два настраиваемых параметра: $m_{ji} > 0$ — амплитуды, определяющие скорость сходимости регулируемых переменных, и $k_{ji} > 0$ — коэффициенты наклона, играющие роль больших коэффициентов и отвечающие за точность стабилизации, $j = 1, 2$, $i = 1, 2$. Производные сигма-функции, которые появятся при дифференцировании невязок (2.2), имеют рекурсивный вид $\sigma'(k_{ji}e_{ji}) = k_{ji}(1 - \sigma^2(k_{ji}e_{ji}))/2$. Графики сигма-функции с ее производной представлены на рис. 2.

Как видно из рис. 2, сигма-функция $\sigma(k_{ji}e_{ji})$ может быть условно разделена на следующие части: при $|e_{ji}| \leq 3/k_{ji}$ она близка к линейной функции, при $|e_{ji}| > 3/k_{ji}$ она близка к постоянной. В точках области определения $e_{ji} = \pm 3/k_{ji}$, принятых в качестве границ разбиения, кривизна сигма-функции достигает максимума, а функция и ее производная принимают значения

$$\sigma(\pm 3) \approx \pm 0.9, \quad \sigma'(\pm 3) \approx 0.1k_{ji} \quad (2.3)$$

В “линейной” зоне сигма-функция ограничена снизу секущей:

$$0.3k_{ji}|e_{ji}| < |\sigma(k_{ji}e_{ji})| \quad (2.4)$$

В пределе при $k_{ji} \rightarrow +\infty$ сигма-функция стремится к функции знака. Этот факт позволяет с помощью непрерывных сигмоидальных обратных связей обеспечить в замкнутой системе свойства, близкие к свойствам систем с разрывными управлениями, функционирующих в скользящем режиме. В том числе: декомпозицию общего движения на разнотемповые составляющие; инвариантность с заданной точностью по отношению к параметрическим и внешним согласованным возмущениям, которые обеспечиваются с помощью ограниченного управления [23–25].

Относительно ошибок слежения и невязок (2.2) приходим к следующей системе с локальными сигмоидальными связями:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{1i} &= e_{2i} - \dot{g}_i - m_{1i}\sigma(k_{1i}e_{1i}) \\ \dot{e}_{2i} &= [\zeta_i(e_{3i} - m_{2i}\sigma(k_{2i}e_{2i})) - f_i]/I_i + 0.5m_{1i}k_{1i}(1 - \sigma^2(k_{1i}e_{1i}))\dot{e}_{1i} \\ \dot{e}_{3i} &= (2a_i\tau_i + b_i)\left(-\frac{T_{i0}}{T_{i1}}\tau_i + \frac{k_i}{T_{i1}}u_i\right) + 0.5m_{2i}k_{2i}(1 - \sigma^2(k_{2i}e_{2i}))\dot{e}_{2i} \\ &\quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $\zeta_1 = \xi(x_1, x_3)$, $\zeta_2 = 1$; в правых частях нижних подсистем для компактности записи фигурируют производные верхних подсистем, вместо которых следует подставить соответствующие выражения.

В системе (2.5) сформируем разрывной закон управления, характерный для электрических исполнительных устройств, работающих в ключевом режиме:

$$u_i = -m_{3i} \operatorname{sign} e_{3i}; \quad m_{3i} > 0, \quad i = 1, 2 \quad (2.6)$$

Параметры фиктивных (2.1) и истинных управлений (2.6) необходимо выбрать так, чтобы обеспечить стабилизацию системы (2.5) и выполнение цели управления (1.3).

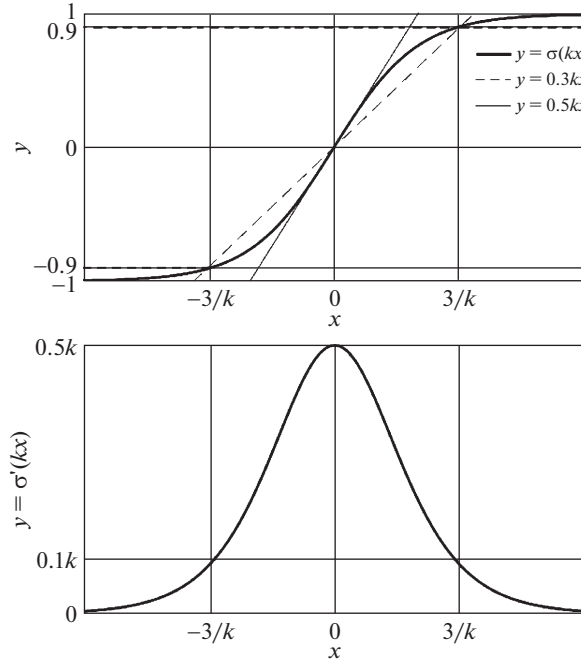


Рис. 2.

Согласно идеологии блочного подхода, выбором амплитуд истинных управлений $m_{3i} > 0$ следует обеспечить возникновение скользящих режимов на поверхностях $e_{3i} = 0$, $i = 1, 2$, а выбором амплитуд сигмоидальных фиктивных управлений $m_{ji} > 0$, $j = 1, 2$ – последовательное (снизу вверх) попадание невязок в некоторые окрестности нуля – “линейные” зоны сигмоидальных управлений:

$$\begin{aligned} e_{3i}(t) &= 0; & t > t_{3i} > 0 \\ |e_{2i}(t)| &\leq \Delta_{2i}; & t > t_{2i} > t_{3i} \\ |e_{1i}(t)| &\leq \Delta_{1i}; & t > t_{1i} > t_{2i}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Еще раз подчеркнем, что в данной работе проблема оценивания времени сходимости не рассматривается, указанные неравенства для моментов времени отражают последовательность сходимости невязок, соответствующую принципу разделения движений, реализуемого в данном подходе [21, 22].

Границы “линейных” зон, от которых зависит точность стабилизации невязок, определяются выбором коэффициентов наклона:

$$|e_{ji}| \leq 3/k_{ji} \leq \Delta_{ji} \Rightarrow k_{ji} \geq 3/\Delta_{ji}; \quad j = 1, 2, \quad i = 1, 2 \quad (2.8)$$

Для настройки амплитуд, обеспечивающих (2.7), используем второй метод Ляпунова. В качестве кандидата на функцию Ляпунова замкнутой системы (2.5)–(2.6) рассмотрим квадратичную форму в виде суммы квадратичных форм: $V = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^2 V_{ji}$, $V_{ji} = \frac{1}{2} e_{ji}^2$. Вне областей (2.8) сигма-функция близка к постоянной и находится в пределах $0.9 < |\sigma(k_{ji} e_{ji})| < 1$ (2.3), что позволяет в целях анализа вместо $m_{ji} \sigma(k_{ji} e_{ji})$ рассматривать ее нижнюю границу $0.9 m_{ji} \operatorname{sign} e_{ji}$, $j, i = 1, 2$.

С учетом (1.4)–(1.6) и обратных соотношений (2.2), а именно,

$$\begin{aligned} x_2 &= e_{21} - m_{11}\sigma(k_{11}e_{11}), & x_4 &= e_{22} - m_{12}\sigma(k_{12}e_{21}) \\ \tilde{\tau}_1 &= e_{31} - m_{21}\sigma(k_{21}e_{21}), & \tilde{\tau}_2 &= e_{32} - m_{22}\sigma(k_{22}e_{22}), \end{aligned}$$

на основе (2.5) можно дать следующие оценки для производных невязок:

$$|\dot{e}_{1i}(t)| \leq \bar{X}_{2i} = X_{2i} + G_{1i} \quad (2.9)$$

$$|\dot{e}_{2i}(t)| \leq [\zeta_{i,\max}\tilde{T}_i + F_i]/I_{i,\min} + 0.5m_{1i}k_{1i}|\dot{e}_{1i}(t)| = [\zeta_{i,\max}\tilde{T}_i + F_i]/I_{i,\min} + 0.5m_{1i}k_{1i}\bar{X}_{2i} \quad (2.10)$$

$$i = 1, 2$$

Полученные оценки достаточно консервативные, что позволяет не учитывать при синтезе возможные небольшие нарушения ограничений по угловым скоростям в начале переходных процессов и опираться на заданные значения $|x_2(t)| \leq X_{21}$, $|x_4(t)| \leq X_{22}$.

Тогда вне областей (2.8), но с учетом иерархии сходимости переменных (2.7) и оценок (2.9), (2.10), для производных квадратичной формы справедливы следующие оценки, определяющие выбор амплитуд:

$$\dot{V}_{1i} = e_{1i}\dot{e}_{1i} \leq |e_{1i}|\left(\frac{3}{k_{2i}} + G_{1i} - 0.9m_{1i}\right) < 0 \Rightarrow m_{1i} > 1.12\left(\frac{3}{k_{2i}} + G_{1i}\right) \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2i} = e_{2i}\dot{e}_{2i} &\leq |e_{2i}|\left(\frac{1}{I_{i,\max}}(-0.9\zeta_{i,\min}m_{2i} + F_i) + 0.5m_{1i}k_{1i}\bar{X}_{2i}\right) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow m_{2i} > \frac{1.12}{\zeta_{i,\min}}(F_i + 0.5I_{i,\max}m_{1i}k_{1i}\bar{X}_{2i}), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{3i} = e_{3i}\dot{e}_{3i} &\leq |e_{3i}|\left((b_i - 2a_iT_i)\left(\frac{T_{i0,\max}T_i}{T_{i1,\max}} - \frac{k_{i,\min}m_{3i}}{T_{i1,\max}}\right) + 0.5m_{2i}k_{2i}(F_{2+i} + 0.5m_{1i}k_{1i}\bar{X}_{2i})\right) < \\ &< 0 \Rightarrow m_{3i} > \frac{T_{i0,\max}T_i}{k_{i,\min}} + \frac{0.5T_{i1,\max}F_{2+i} + 0.25T_{i1,\max}m_{1i}k_{1i}\bar{X}_{2i}}{(b_i - 2a_iT_i)k_{i,\min}}m_{2i}k_{2i}; \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$i = 1, 2,$$

$$\text{где } F_3 = \frac{1}{I_{1,\min}}(\xi_{\max}\tilde{T}_1 + F_1), \quad F_4 = \frac{1}{I_{2,\min}}(\tilde{T}_2 + F_2).$$

При выборе коэффициентов наклона согласно (2.8) и амплитуд управлений согласно (2.11)–(2.13), обеспечивается желаемое поведение (2.7) замкнутой системы (2.5)–(2.6).

Фиктивные сигмоидальные управления (2.1) можно трактовать как фиктивные задающие воздействия для соответствующих переменных, на которые накладываются ограничения, для учета которых необходимо дополнительно ограничить амплитуды управлений сверху заданными константами (1.4).

Формализуем процедуру выбора параметров, обеспечивающих сходимость невязок (2.6) с учетом проектных ограничений (1.4). Используя (2.11)–(2.13) и (1.4), приходим к двойным неравенствам на выбор амплитуд:

$$\begin{aligned} c_{1i} + m_{2i}k_{2i}(c_{2i} + c_{3i}m_{1i}k_{1i}) &< m_{3i} \leq U_i \\ c_{4i} + c_{5i}m_{1i}k_{1i} &< m_{2i} \leq \tilde{T}_i \\ 1.12\left(\frac{3}{k_{2i}} + G_{1i}\right) &< m_{1i} \leq X_{2i}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \text{где } c_{1i} &= \frac{T_{i0,\max}T_i}{k_{i,\min}}, \quad c_{2i} = \frac{0.5T_{i1,\max}F_{2+i}}{(b_i - 2a_iT_i)k_{i,\min}}, \quad c_{3i} = \frac{0.25T_{i1,\max}\bar{X}_{2i}}{(b_i - 2a_iT_i)k_{i,\min}}, \quad c_{4i} = 1.12\frac{F_i}{\zeta_{i,\min}}, \quad c_{5i} = \\ &= 0.55\frac{I_{i,\max}\bar{X}_{2i}}{\zeta_{i,\min}}; \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Из третьего выражения (2.14) следует неравенство

$$k_{2i} > \frac{3}{0.9m_{li} - G_{li}}; \quad i = 1, 2 \quad (2.15)$$

Из второго и первого выражений (2.14) приходим к неравенствам

$$k_{li} < \frac{m_{2i} - c_{4i}}{c_{5i}m_{li}}, \quad k_{li} < \frac{m_{3i} - c_{li} - c_{2i}m_{2i}k_{2i}}{c_{3i}m_{li}m_{2i}k_{2i}}; \quad i = 1, 2 \quad (2.16)$$

Для возможности выполнения ограничений границы в (2.15) и (2.16) должны быть положительными, следовательно, с учетом (2.14) имеем:

$$1.12G_{li} < m_{li} \leq X_{2i} \quad (2.17)$$

$$c_{4i} < m_{2i} \leq \tilde{T}_i \quad (2.18)$$

$$m_{3i} - c_{li} - c_{2i}m_{2i}k_{2i} > 0 \Rightarrow k_{2i} < \frac{m_{3i} - c_{li}}{c_{2i}m_{2i}} \quad (2.19)$$

$$c_{li} < m_{3i} \leq U_i; \quad i = 1, 2$$

Чтобы расширить верхнюю границу выбора k_{li} во втором неравенстве (2.16) и, как следствие, повысить предельную достижимую точность (1.4), целесообразно принять максимальное допустимое значение m_{3i} :

$$m_{3i} = U_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.20)$$

Из (2.15) и (2.19) с учетом (2.20) имеем диапазон для выбора k_{2i} :

$$\frac{3}{0.9m_{li} - G_{li}} < k_{2i} < \frac{U_i - c_{li}}{c_{2i}m_{2i}}; \quad i = 1, 2 \quad (2.21)$$

В (2.21) правая граница должна превышать левую. Отсюда получим:

$$m_{2i} < \frac{(U_i - c_{li})(0.9m_{li} - G_{li})}{3c_{2i}}; \quad i = 1, 2$$

Для выполнения данного неравенства потребуем:

$$\tilde{T}_i < \frac{(U_i - c_{li})(0.9m_{li} - G_{li})}{3c_{2i}} \Rightarrow 1.12 \left(G_{li} + \frac{3c_{2i}\tilde{T}_i}{U_i - c_{li}} \right) < m_{li}; \quad i = 1, 2 \quad (2.22)$$

Таким образом, приходим к следующим ограничениям на m_{li} вместо (2.17):

$$1.12 \left(G_{li} + \frac{3c_{2i}\tilde{T}_i}{U_i - c_{li}} \right) < m_{li} \leq X_{2i}; \quad i = 1, 2 \quad (2.23)$$

Отметим, что из (2.19), (2.18) и (2.23) следуют допустимые соотношения между верхними границами проектных ограничений (1.5), которые должны быть обеспечены априори:

$$c_{li} < U_i, \quad c_{4i} < \tilde{T}_i, \quad 1.12 \left(G_{li} + \frac{3c_{2i}\tilde{T}_i}{U_i - c_{li}} \right) < X_{2i}; \quad i = 1, 2$$

При их выполнении формализуем процедуру настройки параметров обратной связи следящей системы:

1) фиксация m_{3i}^* согласно (2.20) и последовательный выбор амплитуд m_{2i}^* из (2.18) и m_{li}^* из (2.23), $i = 1, 2$;

2) выбор больших коэффициентов k_{2i}^* , близких к нижним границам (2.21), что расширяет верхнюю границу для k_{li} (2.16) в целях увеличения предельной точности ста-

билизации ошибок слежения $e_{li}(t)$. При выбранных k_{2i}^* обеспечивается точность стабилизации невязок $|e_{2i}(t)| \leq 3/k_{2i}^* \leq \Delta_{2i}^*$, $t > t_{2i}$, $i = 1, 2$;

3) выбор больших коэффициентов k_{li}^* с учетом (2.16) из диапазонов

$$0 < k_{li} < \overline{k_{li}} = \min \left\{ \frac{m_{2i}^* - c_{4i}}{c_{5i}m_{li}^*}, \frac{U_i - c_{li} - c_{2i}m_{2i}^*k_{2i}^*}{c_{3i}m_{li}^*m_{2i}^*k_{2i}^*} \right\}; \quad i = 1, 2,$$

верхние границы которых определяют предельную точность стабилизации ошибок слежения $|e_{li}(t)| < \Delta_{li}$, $t > t_{li}$: $0 < \Delta_{li} < 3/\overline{k_{li}}$. Заданная точность Δ_{li}^* может быть достигнута выбором $k_{li}^* = 3/\Delta_{li}^*$, если $\Delta_{li}^* \leq 3/\overline{k_{li}}$. В противном случае может быть достигнута лишь указанная предельная точность.

Обратим внимание на тот факт, что возможность выполнения проектных ограничений (1.4) на стадии синтеза с помощью описанной процедуры связана с тем, что за счет стабилизации невязок (2.2) фиктивные управления $x_2(t)$, $x_4(t)$, $\tilde{\tau}_1(t)$, $\tilde{\tau}_2(t)$ отслеживают ограниченные всюду сигмоидальные сигналы (2.1), амплитуда которых не превосходит верхних границ в проектных ограничениях. Однако при выбранных на основе указанной процедуры параметрах регулятора в замкнутой системе гарантируется тотальное выполнение проектных ограничений при $t \geq 0$ только на управления $u_i(t)$, $i = 1, 2$ в силу постоянных амплитуд (2.6) и на моменты $\tilde{\tau}_i(t)$, $i = 1, 2$, поскольку для невязок $e_{3i}(t)$ с помощью разрывного управления обеспечиваются аperiodические переходные процессы. Однако для невязок $e_{2i}(t)$ аperiodические переходные процессы в рамках данной процедуры не гарантированы, поэтому по угловым скоростям $x_2(t)$, $x_4(t)$, в общем случае, вначале переходного процесса возможно незначительное нарушение заданных диапазонов (что требует, по возможности, снижения амплитуд m_{11} , m_{12} на этапе синтеза). Но, как будет показано в разделе 4, величина перерегулирования будет заведомо меньше всплесков, характерных для замкнутых систем с линейными локальными связями, функционирующих в условиях неопределенности.

3. Наблюдатель угловых скоростей. Обратная связь (2.6) осуществляется по невязкам e_{3i} , $i = 1, 2$. В данном случае нельзя воспользоваться наблюдателем для непосредственного оценивания сигналов $e_{3i}(t)$ [30], так как преобразованная система (2.5) ненаблюдаема относительно выхода из-за наличия в первых двух уравнениях внешних возмущений. Поэтому переменные e_{3i} , $i = 1, 2$, которые являются функциями от ошибок слежения, угловых скоростей и моментов (2.2), будем вычислять в реальном времени по имеющимся измерениям $x_1(t)$, $x_3(t)$, $\tilde{\tau}_i(t)$ и $g_i(t)$, $i = 1, 2$. Кроме того, нам потребуются текущие значения угловых скоростей $x_2(t)$, $x_4(t)$. Операций реального дифференцирования сигналов, которые приводят к возбуждению помех и появлению запаздывания, стараются избегать на практике. Для оценивания угловых скоростей по измерениям угловых положений предлагается использовать динамический дифференциатор, который был апробирован авторами для различных мехатронных объектов [23–25]. В данной работе дополнительно представлена оценка времени, за которое обеспечивается заданная точность оценивания. Данный дифференциатор представляет собой наблюдатель пониженного порядка, построенный как реплика кинематических соотношений механической подсистемы (1.1)

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_3 = x_4$$

в виде

$$\dot{z}_1 = v_1, \quad \dot{z}_2 = v_2, \quad (3.1)$$

где z_i – переменные состояния наблюдателя, $v_i = p_i \sigma(l_i \varepsilon_i)$ – сигмоидальные корректирующие воздействия, $p_i > 0$, $l_i > 0$, $\varepsilon_1 = x_1 - z_1$, $\varepsilon_2 = x_3 - z_2$ – ошибки наблюдения,

$i = 1, 2$. Задача наблюдения сводится к задаче стабилизации ошибок наблюдения вместе с их производными. Для анализа устойчивости составим вспомогательную виртуальную систему

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= x_2 - v_1 = x_2 - p_1 \sigma(l_1 \varepsilon_1) \\ \dot{\varepsilon}_2 &= x_4 - v_2 = x_4 - p_2 \sigma(l_2 \varepsilon_2) \\ \ddot{\varepsilon}_1 &= \dot{x}_2 - 0.5 p_1 l_1 (1 - \sigma^2(l_1 \varepsilon_1)) \dot{\varepsilon}_1 \\ \ddot{\varepsilon}_2 &= \dot{x}_4 - 0.5 p_2 l_2 (1 - \sigma^2(l_2 \varepsilon_2)) \dot{\varepsilon}_2,\end{aligned}\tag{3.2}$$

в которой неизмеряемые сигналы трактуются как внешние ограниченные возмущения (1.4) с ограниченными производными

$$|\dot{x}_2(t)| \leq \tilde{X}_{21} = [\xi_{\max} \tilde{T}_1 + F_1]/I_{1,\min}, \quad |\dot{x}_4(t)| \leq \tilde{X}_{22} = [\tilde{T}_2 + F_2]/I_{2,\min}$$

Зададимся точностью стабилизации ошибок наблюдения и их производных:

$$|\varepsilon_i(t)| \leq \delta, \quad |\dot{\varepsilon}_i(t)| \leq \delta; \quad i = 1, 2\tag{3.3}$$

При выполнении (3.3) искомые оценки $x_2(t)$ и $x_4(t)$ предоставят корректирующие воздействия $v_i(t)$: $|x_2(t) - v_1(t)| \leq \delta$, $|x_4(t) - v_2(t)| \leq \delta$, $t > t_{0i}$, $0 \leq t_{0i} < t_{3i}$, $i = 1, 2$. Заданная точность (3.3) достигается за счет выбора параметров p_i и l_i , $i = 1, 2$ корректирующих воздействий.

С учетом измерений установим в наблюдателе (3.1) следующие начальные условия: $z_1(0) = x_1(0)$, $z_2(0) = x_3(0) \Rightarrow \varepsilon_i(0) = 0$, $i = \overline{1, 2}$. Тогда выбор амплитуд p_i из достаточных условий, аналогичных (2.11)–(2.13), а именно

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 \dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_1(x_2 - p_1 \sigma(l_1 \varepsilon_1)) \leq |\varepsilon_1|(X_{21} - 0.9 p_1) < 0 \Rightarrow p_1 > 1.1 X_{21} \\ \varepsilon_2 \dot{\varepsilon}_2 &= \varepsilon_2(x_4 - p_2 \sigma(l_2 \varepsilon_2)) \leq |\varepsilon_2|(X_{22} - 0.9 p_2) < 0 \Rightarrow p_2 > 1.1 X_{22}\end{aligned}\tag{3.4}$$

обеспечит нахождение ошибок наблюдения в малой окрестности нуля $|\varepsilon_i(t)| \leq 3/l_i$, $i = 1, 2$ при $t \geq 0$. Нижние оценки для выборов больших коэффициентов l_i , $i = 1, 2$ определим с помощью достаточных условий устойчивости. С учетом (2.3), (2.4) условия (3.3) будут выполнены, если

$$\begin{aligned}\varepsilon_i \dot{\varepsilon}_i &\leq |\varepsilon_i|(X_{2i} - 0.3 l_i p_i |\varepsilon_i|) < 0 \Rightarrow l_i > 3.3 X_{2i} / (p_i \delta) \\ \varepsilon_i \ddot{\varepsilon}_i &\leq |\dot{\varepsilon}_i|(\tilde{X}_{2i} - 0.1 l_i p_i |\dot{\varepsilon}_i|) < 0 \Rightarrow l_i > 10 \tilde{X}_{2i} / (p_i \delta); \quad i = 1, 2,\end{aligned}$$

откуда следует

$$l_i > \max\{3.3 X_{2i}, 10 \tilde{X}_{2i}\} / (p_i \delta); \quad i = 1, 2\tag{3.5}$$

С учетом (2.3) и оценок начальных условий $|\dot{\varepsilon}_i(0)| \leq X_{2i} + p_i$, на интервале $[0, t_{0i}]$ справедлива следующая оценка решений двух последних уравнений в (3.2):

$$|\dot{\varepsilon}_i(t)| \leq (X_{2i} + p_i) e^{-0.1 l_i p_i t_{0i}} + 10 \tilde{X}_{2i} / (l_i p_i); \quad i = 1, 2$$

Отсюда приходим к оценке времени сходимости производных $\dot{\varepsilon}_i(t)$ в заданную окрестность δ (3.3) при выбранных значениях p_i и l_i :

$$t_{0i} \leq \frac{10}{l_i p_i} \ln \frac{X_{2i} + p_i}{\delta - 10 \tilde{X}_{2i} / (l_i p_i)}; \quad i = 1, 2$$

Как видим, с ростом l_i сокращается не только ошибка оценивания (3.5), но и время оценивания, оно может быть обеспечено сколь угодно малым. Это позволяет пренебречь динамикой наблюдателя при анализе замкнутой системы с динамической обратной связью. Существенно, что рост параметров l_i в сигмоидальных корректирую-

ших воздействиях не приводит к всплескам оценочных сигналов, характерным для наблюдателей с глубокими линейными обратными связями [30].

Таким образом, текущие значения невязок (2.2) вычисляются на основе измеряемых и восстановленных сигналов:

$$\begin{aligned}\hat{e}_{2i}(t) &= v_i(t) + m_{li}\sigma(k_{li}e_{li}(t)) \\ \hat{e}_{3i}(t) &= \tilde{\tau}_i(t) + m_{2i}\sigma(k_{2i}\hat{e}_{2i}(t)); \quad i = 1, 2\end{aligned}\quad (3.6)$$

При этом базовый закон управления (2.6) реализуется в виде

$$u_i = -m_{3i}\text{sign}\hat{e}_{3i}; \quad i = 1, 2, \quad (3.7)$$

что с учетом (3.3) порождает реальный скользящий режим в малом пограничном слое поверхностей переключения.

4. Результаты моделирования. С целью верификации разработанного метода синтеза динамической обратной связи было проведено численное моделирование в среде MATLAB-Simulink. В электромеханической системе (1.1)–(1.2) были приняты следующие значения параметров [29]:

$$\begin{aligned}I_1 &= 6.8 \times 10^{-2} \text{ [кг м}^2\text{]}, \quad I_2 = 2 \times 10^{-2} \text{ [кг м}^2\text{]} \\ K_{gy} &= 0.05 \text{ [с/рад]}, \quad M_g = 0.32 \text{ [Н м]} \\ B_{1\psi} &= 6 \times 10^{-3} \text{ [Н м с/рад]}, \quad B_{2\psi} = 1 \times 10^{-3} \text{ [Н м с}^2\text{/рад]} \\ B_{1\varphi} &= 1 \times 10^{-1} \text{ [Н м с/рад]}, \quad B_{2\varphi} = 1 \times 10^{-2} \text{ [Н м с}^2\text{/рад]} \\ T_{10} &= 1, \quad T_{11} = 1.1, \quad k_1 = 1.1, \quad T_{20} = 1, \quad T_{21} = 1, \quad k_2 = 1 \\ a_1 &= 0.0135, \quad b_1 = 0.55, \quad a_2 = 0.02, \quad b_2 = 0.58\end{aligned}$$

Внешние возмущения описывались следующими периодическими функциями с главным периодом 4 с:

$$\eta_1 = \begin{cases} 0.02, & 0 \leq t \leq 2 \\ -0.02, & 2 < t \leq 4 \end{cases}, \quad \eta_2 = \begin{cases} -0.02 + M_R, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0.02 + M_R, & 2 < t \leq 4 \end{cases},$$

где момент M_R , возникающий за счет перекрестных связей между винтами, моделировался согласно [29].

Требовалось обеспечить отслеживание угловыми координатами x_1 и x_3 заданных сигналов

$$g_1(t) = 0.15 \cos t, \quad g_2(t) = 0.1 \sin(2t) + 0.1 \cos(t) + 0.2$$

с заданной точностью $\Delta_{11} = \Delta_{12} = 0.05$ в установившемся режиме при наличии следующих проектных ограничений:

$$\begin{aligned}|x_2(t)| &\leq 0.4 \text{ [рад/с]}, \quad |x_4(t)| \leq 0.4 \text{ [рад/с]} \\ |\tilde{\tau}_i(t)| &\leq 0.2 \text{ [Н м]}, \quad |u_i(t)| \leq 2.5 \text{ [В]}; \quad i = 1, 2\end{aligned}\quad (4.1)$$

На основе неравенств (2.15)–(2.19) были выбраны параметры фиктивных и истинных управлений:

$$\begin{aligned}k_{li} &= 60, \quad k_{21} = 13.86, \quad k_{22} = 23.10 \\ m_{11} &= 0.18, \quad m_{12} = 0.34, \quad m_{2i} = 0.15, \quad m_{3i} = 2.5; \quad i = 1, 2,\end{aligned}$$

а на основе неравенств (3.4), (3.5) и заданной точности оценки угловых скоростей $\delta = 0.01$ – следующие параметры наблюдателя состояния (3.1): $l_i = 60$, $p_i = 11$, $i = 1, 2$.

Численное моделирование проводилось для замкнутой системы (1.1)–(1.2), (3.1), (3.6)–(3.7) с ограниченными сигмоидальными фиктивными управлениями (2.1). Также в целях сравнения было проведено моделирование для замкнутой системы с зако-

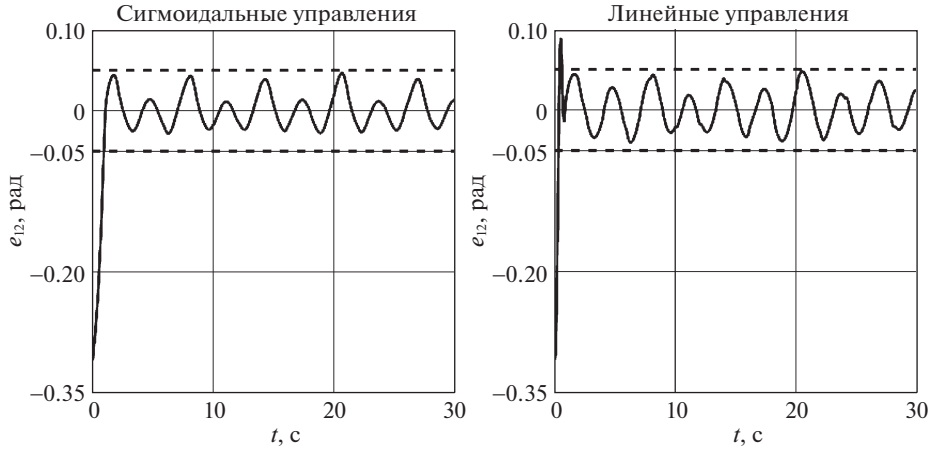


Рис. 3.

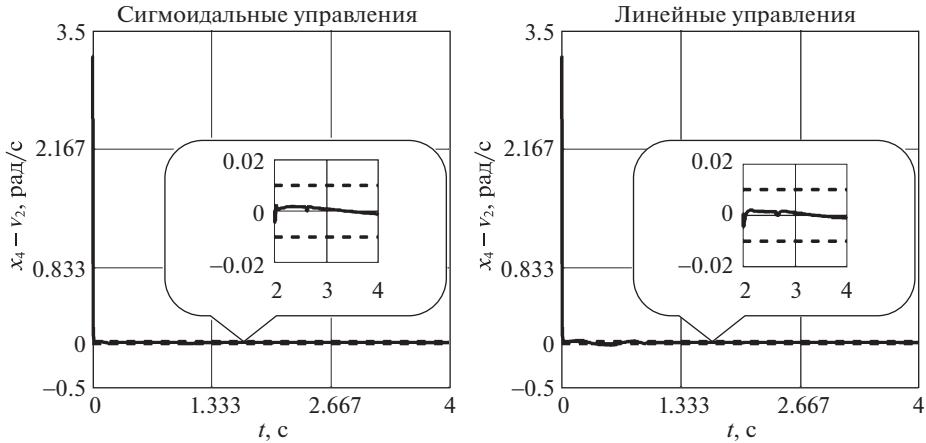


Рис. 4.

ном управления (3.7), но с классически используемыми неограниченными линейными фиктивными управлениями [21, 22]. При этом невязки между реальными и принятыми линейными фиктивными управлениями, аналогичные (3.6), имеют вид

$$\begin{aligned}\hat{e}_{21} &= v_1 + \kappa_{11}e_{11}, & \hat{e}_{22} &= v_2 + \kappa_{12}e_{12} \\ \hat{e}_{31} &= \tilde{\tau}_1 + \kappa_{21}e_{21}, & \hat{e}_{32} &= \tilde{\tau}_2 + \kappa_{22}e_{22},\end{aligned}$$

где большие коэффициенты κ_{ji} , $j = 1, 2$, $i = 1, 2$ были определены из достаточных условий так, чтобы обеспечить такую же точность, что и при выбранных параметрах сигмоидальных фиктивных управлений:

$$\kappa_{11} = 3.5, \quad \kappa_{12} = 8, \quad \kappa_{21} = 1.15, \quad \kappa_{22} = 0.5$$

Результаты моделирования представлены для угла рыскания $x_3(t)$ (для угла тангажа $x_1(t)$ – схожие результаты). На рис. 3 приведены графики ошибки слежения $e_{12}(t)$ (пунктирными линиями обозначены границы заданных ошибок). На рис. 4 приведе-

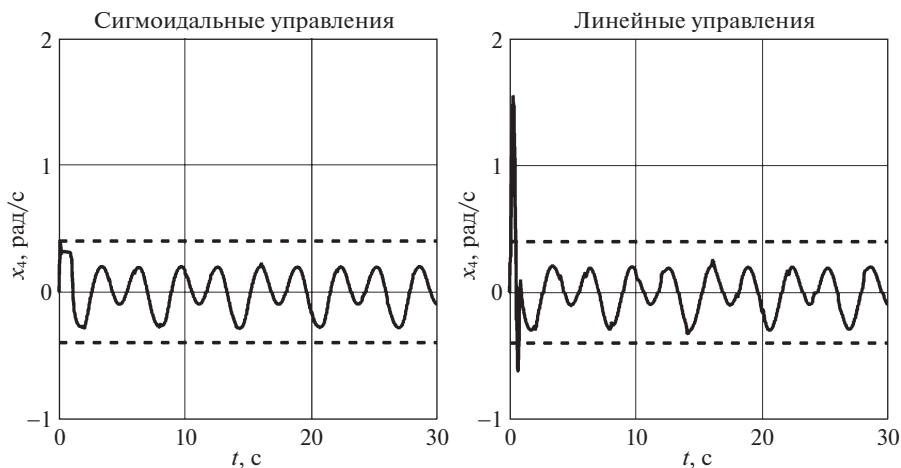


Рис. 5.

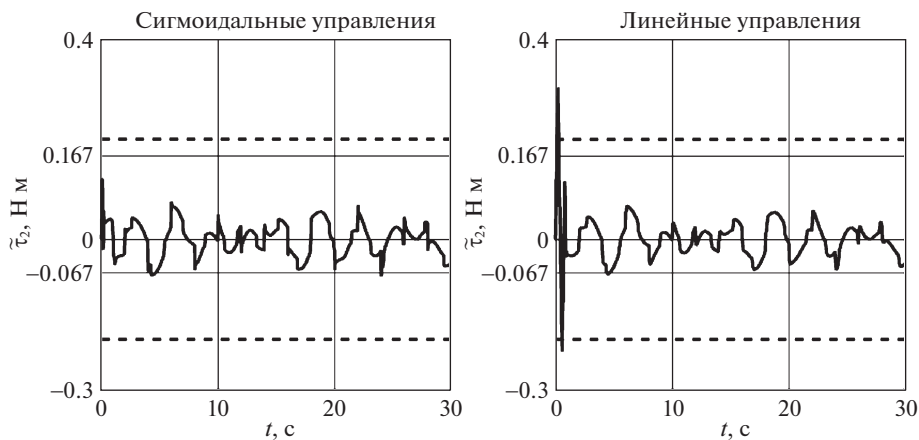


Рис. 6.

ны графики ошибки оценивания угловой скорости $x_4(t)$ с помощью динамического дифференциатора (3.1). На рис. 5–6 представлены графики переменных состояния $x_4(t)$ и $\tilde{z}_2(t)$, на которые накладывались проектные ограничения (4.1), пунктирными линиями обозначены границы проектных ограничений.

В целях сравнительного анализа в таблице 1 представлены следующие показатели качества замкнутых систем с различными фиктивными управлениями: время пере-

Таблица 1. Показатели качества с разными фиктивными управлениями

Фиктивные управления	t_p , с	$\Delta_{e_{12}}$, рад	Δ_{l_2} , рад	Δ_{x_4} , рад/с	$\Delta_{\tilde{z}_2}$, Н·м
Сигмоидальные	0.9905	0.3090	0.0466	0.3932	0.1210
Линейные	0.6570	0.3090	0.0475	1.5497	0.3033

ходного процесса t_p — момент времени, начиная с которого достигается желаемая точность 0.05 рад, величина перерегулирования по e_{12} : $\Delta_{e_{12}} = \max |e_{12}(t)|$, достигнутая точность Δ_{12} в установившемся режиме для e_{12} , а также величины перерегулирования по переменным $x_4(t)$, $\tilde{\tau}_2(t)$.

Таким образом, из рис. 3 и табл. 1 видно, что заданная точность слежения достигается, и она примерно одинакова для алгоритмов с разными фиктивными управлениями. Из графиков рис. 4 видно, что ошибка оценивания угловой скорости с помощью корректирующего воздействия наблюдателя сходится в заданную окрестность менее чем за 0.1 с. Стоит отметить, что для алгоритма с сигмоидальными фиктивными управлениями удастся выполнить заданные ограничения на переменные состояния (4.1) благодаря выбору параметров фиктивных и истинных управлений, в то время как для алгоритма с линейными фиктивными управлениями ограничения не выполняются (см. рис. 5–6). Из табл. 1 следует, что для системы с линейными фиктивными управлениями время регулирования оказывается в 1.5 раза меньше, однако величина перерегулирования по контрольным переменным в 2.5–4 раза больше по сравнению с системой с сигмоидальными фиктивными управлениями. Последний факт позволит на практике использовать приводы меньшей мощности.

Заключение. Цель исследований состояла в синтезе системы слежения для TRMS при действии параметрических и внешних возмущений, наличии проектных ограничений на переменные состояния и управления и неполных измерениях. Поставленная цель была достигнута за счет использования блочного подхода с формированием сигмоидальных фиктивных управлений, обеспечивающих инвариантность по отношению к возмущениям с заданной точностью и выполнение проектных ограничений. Недостающие оценки угловых скоростей были получены с помощью наблюдателя пониженного порядка, не требующего параметрической определенности объекта управления и ввода динамической модели внешних возмущений. На основе результатов моделирования показано, что по сравнению с системой с линейными фиктивными управлениями, при использовании сигмоидальных управлений удастся снизить величину перерегулирования в 2.5–4 раза. Однако в рамках разработанной процедуры, в общем случае, не гарантируется тотальное выполнение ограничений по угловым скоростям вначале переходных процессов. Для их обеспечения потребуется уточнение процедуры настройки параметров регулятора с учетом области допустимых начальных условий и оценкой времени переходных процессов, что составит предмет дальнейших исследований авторов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-01-00363А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chapman J., Ilic M., King C. et al.* Stabilizing a multimachine power system via decentralized feedback linearizing excitation control // IEEE Trans. Power Syst. 1993. V. 8. № 3. P. 830–839.
2. *Wang Y., Hill D., Middleton R. et al.* Transient stability enhancement and voltage regulation of power systems // IEEE Trans. Power Syst. 1993. V. 8. № 2. P. 620–627.
3. *Spong M., Hutchinson S., Vidyasagar M.* Robot Modeling and Control. New York: Wiley, 2005. 496 p.
4. *Alyoussef F., Kaya I.* TRMS Experimental results of new nonlinear PID tuned by DE algorithm // Intern. Conf. Applied Automation and Industrial Diagnostics (ICAAID). 2019. P. 1–6.
5. *Doğruer T., Tan N.* Decoupling control of a twin rotor MIMO system using optimization method // 11th Intern. Conf. Electrical and Electronics Engineering (ELECO). 2019. P. 780–784.

6. Valluru S.K., Kumar R., Ayush M. Trajectory tracking control of TRMS using FO-PID and FOI-PD controllers: An experiment // 3rd Intern. Conf. Recent Developments in Control, Automation & Power Engineering (RDCAPE). 2019. P. 319–322.
7. Cajo R., Agila W. Evaluation of Algorithms for linear and nonlinear PID control for twin rotor MIMO system // Asia-Pacific Conf. Computer Aided System Engineering. 2015. P. 214–219.
8. Sodhi P., Kar I. Adaptive backstepping control for a twin rotor MIMO system // IFAC Proc. Vol. 2014. V. 47. № 1. P. 740–747.
9. Haruna A., Mohamed Z., Efe M.Ö. et al. Improved integral backstepping control of variable speed motion systems with application to a laboratory helicopter // ISA Trans. 2020. V. 97. P. 1–13.
10. Yang J.-H., Hsu W.-C. Adaptive backstepping control for electrically driven unmanned helicopter // Control Engng. Pract. 2009. V. 17. № 8. P. 903–913.
11. Butt S.S., Aschemann H. Multi-variable integral sliding mode control of a two degrees of freedom helicopter // IFAC-PapersOnLine. 2015. V. 48. № 1. P. 802–807.
12. Nguyen Q.V., Hyun C.-H. Multiple sliding surface control approach to twin rotor MIMO systems // Intern. J. Fuzzy Logic & Intell. Syst. 2014. V. 14. № 3. P. 171–180.
13. Зобова А.А. Обзор моделей сухого трения // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 2. С. 194–206.
14. Friendland B., Park Y.J. On adaptive friction compensation // IEEE Trans. A.C. 1992. V. 37. P. 1609–1611.
15. Feng H., Qiao W., Yin C. et al. Identification and compensation of non-linear friction for a electro-hydraulic system // Mech.&Machine Theory. 2019. V. 141. P. 1–13.
16. Hidalgo M., Garcia C. Friction compensation in control valves: Nonlinear control and usual approaches // Control Engng. Pract. 2018. V. 58. P. 42–53.
17. Bartolini G., Punta E. Second order sliding mode control of systems with nonlinear friction // Proc. IEEE Conference on Decision and Control. 2000. V. 3. P. 2192–2197.
18. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.
19. Ананьевский И.М., Ишханян Т.А. Управление платформой с осцилляторами в присутствии сухого трения // Тр. ИММ УрО РАН. 2017. Вып. 23. № 1. С. 20–26.
20. Решмин С.А. Метод декомпозиции в задаче управления лагранжевой системой с дефицитом управляющих параметров // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 1. С. 151–169.
21. Лукьянов А.Г. Блочный метод синтеза нелинейных систем на скользящих режимах // Автом. телемех. 1998. № 7. С. 14–34.
22. Уткин В.А. Инвариантность и автономность в системах с разделяемыми движениями // Автом. телемех. 2001. № 11. С. 73–94.
23. Краснова С.А., Антипов А.С. Иерархический синтез сигмоидальных обобщенных моментов манипулятора в условиях неопределенности // Проблемы управления. 2016. № 4. С. 10–21.
24. Kochetkov S.A., Krasnova S.A., Antipov A.S. Cascade Synthesis of electromechanical tracking systems with respect to restrictions on state variables // IFAC-PapersOnLine. 2017. V. 50. № 1. P. 1042–1047.
25. Антипов А.С., Краснова С.А. Управление двухроторным механизмом в условиях неполной информации // Информ. технол. вычисл. системы. 2020. № 1. С. 65–75.
26. Rao V.S., Akhila, Morales-Viviescas R.M. Extended Kalman observer based robust control of 1DOF TRMS // 12th Asian Control Conf. (ASCC). 2019. P. 521–526.
27. Rahideh A., Shaheed M.H. Constrained output feedback model predictive control for nonlinear systems // Control Eng. Practice. 2012. V. 20. № 4. P. 431–443.
28. Краснова С.А., Уткин А.В. Сигма-функция в задачах синтеза наблюдателей состояний и возмущений // Проблемы управления. 2015. № 5. С. 27–36.
29. Twin Rotor MIMO System Control Experiments 33-949S. East Sussex, UK: Feedback Instr., 2006. 39 p.
30. Антипов А.С., Краснов Д.В., Уткин А.В. Декомпозиционный синтез системы управления электромеханическими объектами в условиях неполной информации // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 4. С. 530–548.

The Block Design of Tracking System for Twin-Rotor Electromechanical System with Restrictions on State Variables

A. S. Antipov^{a,#} and S. A. Krasnova^{a,##}

^a *Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: scholess18@mail.ru*

^{##} *e-mail: skrasnova@list.ru*

A twin rotor electromechanical system is considered as a control plant, which output variables make angular movements in the vertical and horizontal planes. The mathematical model of the mechanical subsystem is essentially non-linear, contains cross couplings, moments of dry friction forces and uncertain parameters. Also, external uncontrolled disturbances act on this subsystem. The mathematical model of electrical subsystem (dynamics of electrical actuators) is approximated by linear differential equations. The output variables, currents of anchors of actuators and the given actions are the direct measurements. According to the block control principle, the procedure of decomposition synthesis of dynamic feedback is developed for the tracking of generalized coordinates for the given signals with the given accuracy. The bounded S-shaped local feedbacks are formed for the rejection of unmatched disturbances that allows us to take into account the project restrictions on the state variables and controls at the synthesis stage. Based on the measurements of the angular positions, a procedure of tuning of a reduced order dynamic observer of angular velocities with S-shaped corrective actions is developed, which does not require parametric certainty of plant model and the introduction of a dynamic model of external disturbances. The effectiveness of the developed approach is confirmed by the simulation results in the MATLAB-Simulink.

Keywords: electromechanical system, tracking, invariance, restrictions on state variables, sigma-function, state observer

REFERENCES

1. Chapman J., Ilic M., King C. *et al.* Stabilizing a multimachine power system via decentralized feedback linearizing excitation control // IEEE Trans. Power Syst., 1993, vol. 8, no. 3, pp. 830–839.
2. Wang Y., Hill D., Middleton R. *et al.* Transient stability enhancement and voltage regulation of power systems // IEEE Trans. Power Syst., 1993, vol. 8, no. 2, pp. 620–627.
3. Spong M., Hutchinson S., Vidyasagar M. Robot Modeling and Control. N.Y.: Wiley, 2005. 496 p.
4. Alyoussef F., Kaya I. TRMS Experimental results of new nonlinear PID tuned by DE algorithm // Intern. Conf. Applied Automation and Industrial Diagnostics (ICAAID), 2019, pp. 1–6.
5. Doğruer T., Tan N. Decoupling control of a twin rotor MIMO system using optimization method // 11th Intern. Conf. Electrical and Electronics Engineering (ELECO), 2019, pp. 780–784.
6. Valluru S.K., Kumar R., Ayush M. Trajectory tracking control of TRMS using FO-PID and FOI-PD controllers: An experiment // 3rd Intern. Conf. Recent Developments in Control, Automation & Power Engineering (RDCAPE), 2019, pp. 319–322.
7. Cajo R., Agila W. Evaluation of algorithms for linear and nonlinear PID control for twin rotor MIMO system // Asia-Pacific Conf. Computer Aided System Engineering, 2015, pp. 214–219.
8. Sodhi P., Kar I. Adaptive backstepping control for a twin rotor MIMO system // IFAC Proc. Vol., 2014, vol. 47, no. 1, pp. 740–747.
9. Haruna A., Mohamed Z., Efe M.Ö. *et al.* Improved integral backstepping control of variable speed motion systems with application to a laboratory helicopter // ISA Trans., 2020, vol. 97, pp. 1–13.
10. Yang J.-H., Hsu W.-C. Adaptive backstepping control for electrically driven unmanned helicopter // Control Engng. Pract., 2009, vol. 17, no. 8, pp. 903–913.
11. Butt S.S., Aschemann H. Multi-variable integral sliding mode control of a two degrees of freedom helicopter // IFAC-PapersOnLine, 2015, vol. 48, no. 1, pp. 802–807.
12. Nguyen Q.V., Hyun C.-H. Multiple sliding surface control approach to twin rotor MIMO systems // Intern. J. Fuzzy Logic & Intell. Syst., 2014, vol. 14, no. 3, pp. 171–180.

13. *Zobova A.A.* A review of models of distributed dry friction // JAMM, 2016, vol. 80, no. 2, pp. 194–206.
14. *Friendland B., Park Y.J.* On adaptive friction compensation // IEEE Trans. A.C, 1992, vol. 37, pp. 1609–1611.
15. *Feng H., Qiao W., Yin C. et al.* Identification and compensation of non-linear friction for a electro-hydraulic system // Mech.&Machine Theory, 2019, vol. 141, pp. 1–13.
16. *Hidalgo M., Garcia C.* Friction compensation in control valves: Nonlinear control and usual approaches // Control Engng. Pract., 2018, vol. 58, pp. 42–53.
17. *Bartolini G., Punta E.* Second order sliding mode control of systems with nonlinear friction // Proc. IEEE Conf. Decision and Control, 2000, vol. 3, pp. 2192–2197.
18. *Chernousko F.L., Anan'evskii I.M., Reshmin S.A.* Control Methods for Nonlinear Mechanical Systems (Metody upravleniya nelineinymi mekhanicheskimi sistemami). Moscow: Fizmatlit, 2006. 328 p. (in Russian)
19. *Anan'evskii I.M., Ishkhanyan T.A.* Control of a platform with oscillators under the action of dry friction // Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 20–26. (in Russian)
20. *Reshmin S.A.* The decomposition method for a control problem for an underactuated Lagrangian system // JAMM, 2010, vol. 74, no. 1, pp. 108–121.
21. *Loukianov A.G.* Nonlinear block control with sliding mode // Autom.&Remote Control, 1998, vol. 7, pp. 916–933.
22. *Utkin V.A.* Invariance and independence in systems with separable motion // Autom.&Remote Control, 2001, vol. 62, pp. 1825–1843.
23. *Krasnova S.A., Antipov A.S.* Hierarchical design of sigmoidal generalized moments of manipulator under uncertainty // Autom.&Remote Control, 2018, vol. 79, no. 3, pp. 554–570.
24. *Kochetkov S.A., Krasnova S.A., Antipov A.S.* Cascade synthesis of electromechanical tracking systems with respect to restrictions on state variables // IFAC-PapersOnLine, 2017, vol. 50, no. 1, pp. 1042–1047.
25. *Antipov A.S., Krasnova S.A.* Control of a twin-rotor mechanism in conditions of incomplete information // J. Inform. Technol.&Comput. Syst., 2020, no. 1, pp. 65–75. (in Russian)
26. *Rao V.S., Akhila, Morales-Viviescas R.M.* Extended Kalman observer based robust control of 1DOF TRMS // 12th Asian Control Conf. (ASCC), 2019, pp. 521–526.
27. *Rahideh A., Shaheed M.H.* Constrained output feedback model predictive control for nonlinear systems // Control Eng. Pract., 2012, vol. 20, no. 4, pp. 431–443.
28. *Krasnova S.A., Utkin A.V.* Sigma function in observer design for states and perturbations // Autom.&Remote Control, 2016, vol. 77, no. 9, pp. 1676–1688.
29. Twin Rotor MIMO System Control Experiments 33-949S. East Sussex, UK: Feedback Instruments, 2006. 39 p.
30. *Antipov A.S., Krasnov D.V., Utkin A.V.* Decomposition synthesis of the control system of electromechanical objects in conditions of incomplete information // Mech. Solids, 2019, vol. 54, no. 5, pp. 47–60.

УДК 629.7.087

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ФОРМИРОВАНИЯ ТРОСОВОЙ ГРУППИРОВКИ ИЗ ТРЕХ НАНОСПУТНИКОВ С УЧЕТОМ ИХ ДВИЖЕНИЯ ВОКРУГ ЦЕНТРОВ МАСС

© 2021 г. Ч. Ван^{1,*}, Ю. М. Заболотнов^{2,**}¹ Северо-западный политехнический университет, Сиань, КНР² Самарский национальный исследовательский университет, Самара, Россия

*e-mail: wangcq@nwpu.edu.cn

**e-mail: yumz@yandex.ru

Поступила в редакцию 30.10.2019 г.

После доработки 02.05.2020 г.

Принята к публикации 02.07.2020 г.

Анализируется динамика разворачиваемой орбитальной тросовой системы, состоящей из трех наноспутников. На первом этапе спутник, состоящий из трех секций (наноспутников) отделяется от базового космического аппарата, и совершает свободное движение по орбите с некоторой остаточной угловой скоростью. На втором этапе происходит отделение от центрального спутника двух наноспутников в противоположных направлениях, при этом формируется тросовая система, которая совершает движение вблизи вертикали. Предлагаются достаточно простые программы управления, которые реализуются без обратной связи. Оценивается влияние возмущений при отделении наноспутников на формирование системы и на движение наноспутников вокруг своих центров масс. Для анализа динамики системы используются две математические модели: одна модель построена методом Лагранжа и рассматривает спутники как материальные точки; другая модель записывается в неподвижной геоцентрической системе координат и позволяет оценить влияние возмущений на угловое движение наноспутников.

Ключевые слова: орбитальная тросовая система, разворачивание, наноспутники, управление, возмущения, угловое движение наноспутников

DOI: 10.31857/S0032823521010082

1. Введение. Тросовые группировки спутников [1–6] это нетрадиционные космические системы, основное преимущество которых состоит в возможности создания протяженных легких конструкций на орбите. Однако вопросы формирования тросовых группировок спутников на орбите, управления их движением еще недостаточно изучены и требуют дальнейшего развития. Важным классом тросовых группировок являются тросовые системы, в состав которых входят наноспутники (НС), обладающие небольшой массой и размером. Так как возможности управления такими системами ограничены, то актуальным представляется разработка достаточно простых алгоритмов управления движением тросовых группировок НС на этапах их разворачивания и функционирования. С другой стороны, использование тросов как легких механических связей между спутниками является одним из способов стабилизации движения как системы в целом (гравитационная стабилизация), так и каждого НС в отдельности при его движении вокруг своего центра масс. В последнем случае силы натяжения

тросов создают восстанавливающий момент, стабилизирующий угловое движение НС относительно направления троса [7].

При анализе движения орбитальных тросовых группировок чаще всего космические аппараты (КА), входящие в их состав, рассматривались как материальные точки [1–6]. Хотя понятно, что более полное описание движения таких систем должно включать в себя уравнения движения каждого КА вокруг своего центра масс. Детальному анализу движения КА как твердых тел в составе тросовых систем уделялось существенно меньшее внимание. В частности, можно рассматривать [8, 9] влияние колебаний троса со спускаемой капсулой (материальная точка) на свободное движение относительно центра масс базового КА, с которого разворачивалась тросовая система. Исследовалось также движение капсулы вокруг центра масс при разворачивании тросовой системы [7], причем базовый КА большой массы перемещался по неизменной орбите, и предполагалось, что система управления движением обеспечивает его ориентацию по местной вертикали. Здесь необходимо отметить, что вопросы разворачивания и свертывания космических тросовых систем являются наиболее сложными с точки зрения динамики и управления их движением [10–13], что обуславливает постоянное внимание к этому направлению исследований.

2. Описание задачи. В настоящей работе рассматривается задача формирования тросовой группировки, состоящей из трех НС, в положение, близкое к вертикальному. Ставится задача построения достаточно простых программ управления, которые могут быть реализованы без обратной связи. При этом должны выполняться ограничения на силы натяжения тросов для исключения их провисания (они должны быть натянуты, то есть положительны), на скорость выпуска тросов (устройства выпуска тросов работают только на их торможение), на угловое движение НС относительно направления тросов. Оценивается влияние возмущений при разделении НС и их массово-инерционной асимметрии на выполнение рассматриваемых ограничений. Для предварительного упрощенного анализа движения системы построена математическая модель методом Лагранжа, в которой НС рассматриваются как материальные точки. Показано, что в сочетании с этой моделью может быть использовано аналитическое решение [7], полученное методом усреднения, и предназначенное для оценки выполнения ограничений на угловое движение НС. Более полная модель пространственного движения системы записывается в неподвижной геоцентрической системе координат и служит для детального моделирования движения системы, включая процессы разделения НС. Характерной особенностью этой модели является использование кинематических уравнений углового движения НС в форме уравнений Эйлера–Пуассона [14], то есть в этом случае интегрируемыми переменными системы обыкновенных дифференциальных уравнений являются компоненты матрицы перехода от геоцентрической неподвижной к связанным с НС системам координат (матрица направляющих косинусов). Использование рассматриваемых уравнений позволяет избежать особенностей при описании углового движения НС характерных, например, для кинематических уравнений в углах Эйлера. С другой стороны, такая запись кинематических уравнений углового движения для НС позволяет избежать вычисления угловых скоростей вращения тросов относительно неподвижной геоцентрической системы координат при записи кинематических уравнений в углах Эйлера, определенных относительно направления тросов. Предлагаемые программы управления нетрудно распространить на большее число НС в группировке.

2. Математическая модель движения системы в неподвижной системе координат. Движение системы определяется в геоцентрической системе координат $OXYZ$, где плоскость OXY совпадает с плоскостью экватора, а ось OX направлена в точку весеннего равноденствия. Тогда уравнения движения центров масс НС записываются в виде

$$m_k \ddot{\mathbf{R}}_k = \mathbf{G}_k + \mathbf{T}_k - \mathbf{T}_{k-1}, \quad k = \overline{1, 3}, \quad (2.1)$$

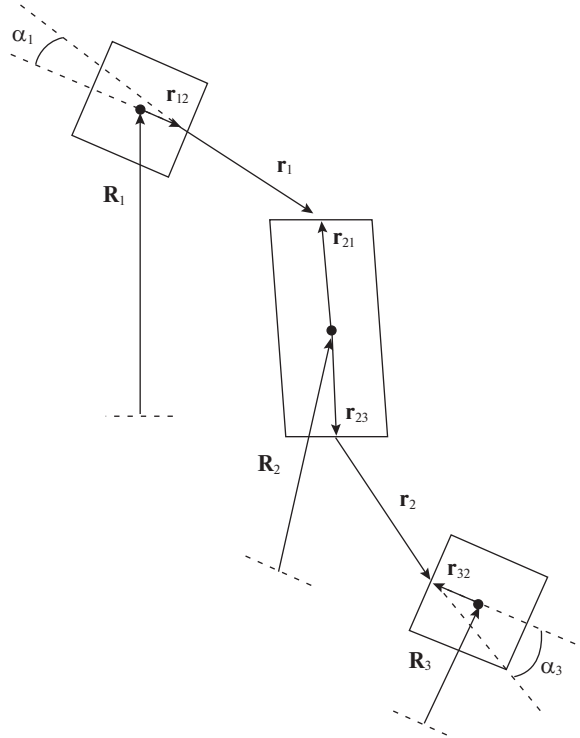


Рис. 1.

где $\mathbf{G}_k = -Km\mathbf{R}_k/R_k^3$ – гравитационные силы, K – гравитационный параметр Земли, $\mathbf{T}_k$ – силы натяжения тросов, $\mathbf{R}_k$ – радиус-вектора центров масс НС. Здесь центральный спутник имеет номер 2 и от него почти одновременно отделяются два НС в противоположных направлениях. Очевидно для концевых НС в системе (2.1) имеем $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_3 = 0$.

Силы натяжения тросов вычисляются следующим образом

$$\mathbf{T}_{1,2} = T_{1,2}\mathbf{r}_{1,2}/r_{1,2}, \quad T_{1,2} = \begin{cases} C \frac{r_{1,2} - l_{1,2}}{l_{1,2}}, & \text{при } r_{1,2} - l_{1,2} \geq 0 \\ 0, & \text{при } r_{1,2} - l_{1,2} < 0 \end{cases}, \quad (2.2)$$

где $C = ES$ – жесткость тросов, E – модуль упругости Юнга, S – площадь поперечного сечения тросов, $l_{1,2}$ – недеформированная длина тросов; $\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_{21} - \mathbf{R}_{12}$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_{32} - \mathbf{R}_{23}$ – радиус-вектора, соединяющие точки крепления тросов; $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{r}_{12}$, $\mathbf{R}_{21} = \mathbf{R}_2 + \mathbf{r}_{21}$, $\mathbf{R}_{23} = \mathbf{R}_2 + \mathbf{r}_{23}$, $\mathbf{R}_{32} = \mathbf{R}_3 + \mathbf{r}_{32}$ (рис. 1).

Процесс выпуска троса моделируется с помощью динамических уравнений [7]

$$\mu \frac{d^2 l_{1,2}}{dt^2} = T_{1,2} - F_{1,2}, \quad (2.3)$$

где коэффициент μ учитывает инерционность механизма управления, $F_{1,2}$ – управляющая (тормозящая) сила в механизме управления, которая изменяется по заданной программе.

При определении углового движения НС относительно направлений тросов используются классические динамические уравнения Эйлера, записанные в главных связанных системах координат

$$\begin{aligned} J_x^{(k)} \frac{d\omega_x^{(k)}}{dt} + \omega_y^{(k)} \omega_z^{(k)} (J_z^{(k)} - J_y^{(k)}) &= M_x^{(k)} \\ J_y^{(k)} \frac{d\omega_y^{(k)}}{dt} + \omega_x^{(k)} \omega_z^{(k)} (J_x^{(k)} - J_z^{(k)}) &= M_y^{(k)} \\ J_z^{(k)} \frac{d\omega_z^{(k)}}{dt} + \omega_x^{(k)} \omega_y^{(k)} (J_y^{(k)} - J_x^{(k)}) &= M_z^{(k)}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\omega_x^{(k)}$, $\omega_y^{(k)}$, $\omega_z^{(k)}$ – угловые скорости НС, $J_x^{(k)}$, $J_y^{(k)}$, $J_z^{(k)}$ и $M_x^{(k)}$, $M_y^{(k)}$, $M_z^{(k)}$ – моменты инерции и моменты сил в главных связанных осях, действующих на каждый НС, $k = \overline{1,3}$.

Кинематические уравнения записываются в форме уравнений Эйлера–Пуассона

$$\dot{\mathbf{e}}_{xk} = \boldsymbol{\omega}^{(k)} \times \mathbf{e}_{xk}, \quad \dot{\mathbf{e}}_{yk} = \boldsymbol{\omega}^{(k)} \times \mathbf{e}_{yk}, \quad \dot{\mathbf{e}}_{zk} = \boldsymbol{\omega}^{(k)} \times \mathbf{e}_{zk}, \quad (2.5)$$

где $\boldsymbol{\omega}^{(k)}$ – вектора угловых скоростей НС, $\mathbf{e}_{xk}$, $\mathbf{e}_{yk}$, $\mathbf{e}_{zk}$ – орты главных связанных систем координат, $k = \overline{1,3}$.

При наличии у НС инерционной асимметрии в связанной системе координат, одна из осей которой совпадает с направлением “центр масс – точка крепления троса”, используется пересчет тензоров инерции (2.1), (2.3)–(2.5)

$$J_k = U_k^* I_k U_k, \quad \mathbf{M}_k = U_k^* \mathbf{m}_k, \quad (2.6)$$

где J_k и I_k – тензоры инерции в главной связанной и связанной системах координат, U_k – матрицы собственных векторов для I_k , $(*)$ – знак транспонирования, $\mathbf{M}_k$ и $\mathbf{m}_k$ – вектора моментов сил, проекции которых записаны в разных связанных системах координат, $k = 1, 2, 3$.

Составляющие моментов $\mathbf{m}_k$, определенные в главных связанных системах координат, представляют собой суммы

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_1^{(g)} + \mathbf{m}_{12}^{(g)}, \quad \mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_2^{(g)} + \mathbf{m}_{21}^{(t)} + \mathbf{m}_{23}^{(t)}, \quad \mathbf{m}_3 = \mathbf{m}_3^{(g)} + \mathbf{m}_{32}^{(t)}, \quad (2.7)$$

где $\mathbf{m}_{1,2,3}^{(g)}$ – вектора гравитационных моментов, $\mathbf{m}_{12} = \mathbf{r}_{12} \times \mathbf{T}_1$, $\mathbf{m}_{21} = -\mathbf{r}_{21} \times \mathbf{T}_1$, $\mathbf{m}_{23} = \mathbf{r}_{23} \times \mathbf{T}_2$, $\mathbf{m}_{32} = -\mathbf{r}_{32} \times \mathbf{T}_2$ – моменты от сил натяжения тросов.

Предполагается, что концевые НС это кубы, то есть при почти однородном распределении массы внутри НС их центральный эллипсоид инерции близок к шару. Поэтому, когда концевые НС отделяются от центрального спутника, то на них действует только момент от силы натяжений троса, а гравитационным моментом пренебрегается.

Гравитационный момент, действующий на центральный спутник, определяется стандартным образом [15]

$$\mathbf{m}_2^{(g)} = 3 \frac{K}{R_2^3} (\boldsymbol{\gamma} \times J_2 \boldsymbol{\gamma}), \quad (2.8)$$

где J_2 – тензор инерции НС, $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{R}_2/R_2$ – вектор направляющих косинусов в главной связанной системе координат.

При интегрировании уравнений (2.5) должны с заданной погрешностью выполняться условия ортогональности векторов $\mathbf{e}_{xk}, \mathbf{e}_{yk}, \mathbf{e}_{zk}$ и $|\mathbf{e}_{xk}| = |\mathbf{e}_{yk}| = |\mathbf{e}_{zk}| = 1$. Для этого можно использовать алгоритм коррекции, основанный на минимизации корректирующих добавок при изменении значений компонент векторов $\mathbf{e}_{xk}, \mathbf{e}_{yk}, \mathbf{e}_{zk}$ [14], $k = \overline{1, 3}$.

Здесь необходимо отметить, что описанная математическая модель движения системы может быть использована в двух вариантах, которые существенно отличаются с точки зрения временных затрат при моделировании. В первом варианте влиянием колебаний концевых тел на натяжения тросов пренебрегается, то есть при расчете сил натяжения полагается $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_{32} = 0$. Во втором варианте приведенные выше уравнения движения используются в полной мере. Как показали результаты моделирования учет колебаний концевых тел при расчете сил натяжения как минимум на порядок увеличивает временные затраты при моделировании. Это объясняется наличием в этом случае высокочастотных продольных колебаний в тросах.

3. Математическая модель движения системы, построенная с помощью метода Лагранжа. Для предварительного анализа движения системы и выбора программы ее развертывания, для получения некоторых аналитических оценок рационально использовать упрощенные уравнения плоского движения системы, в которых механические связи (тросы) нерастяжимы, а НС – материальные точки. Для построения этой модели воспользуемся уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_c}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T_c}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} + F, \quad (3.1)$$

где T_c и Π – кинетическая и потенциальная энергии системы, $q = (l_1, l_2, \theta_1, \theta_2)$ – вектор обобщенных координат, $\dot{q}$ – соответствующий вектор обобщенных скоростей, F – вектор обобщенных непотенциальных сил. Здесь углы θ_1, θ_2 определяют положения тросов относительно оси sx_o орбитальной системы координат (рис. 2), связанной с центром масс системы; l_1, l_2 – длины тросов, связывающие центральный спутник с концевыми НС. Орбитальная правая система координат $sx_o y_o z_o$ определяется стандартным образом: ось sx_o направлена по радиус-вектору $\mathbf{R}_c$ центра масс, ось sy_o – перпендикулярно $\mathbf{R}_c$ в плоскости орбиты в сторону движения центра масс.

При развертывании системы в вектор F (3.1) входят силы натяжения тросов, которые должны изменяться по заданной программе. При записи уравнений движения в форме (3.1), тросы предполагаются нерастяжимыми.

Уравнения (3.1) описывают формирование тросовой системы в плоском случае. Это связано с громоздкостью выражений, описывающих поведение системы в пространственном случае.

Кинетическая и потенциальная энергии системы определяются стандартным образом

$$T_c = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \dot{R}_k^2, \quad \Pi_k = - \sum_{k=1}^n m_k \frac{K}{R_k}, \quad (3.2)$$

где $n = 3$, $\dot{R}_k^2 = \dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2$, $R_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$, x_k, y_k – координаты центров масс НС в геоцентрической неподвижной системе координат, связанной с орбитальной плоскостью центра масс системы.

Координаты x_k, y_k вычисляются из следующих выражений

$$x_k = x_{ok} \cos \varphi - y_{ok} \sin \varphi, \quad y_k = x_{ok} \sin \varphi + y_{ok} \cos \varphi, \quad (3.3)$$

где угол φ определяет положение орбитальной системы координат относительно геоцентрической неподвижной системы координат.

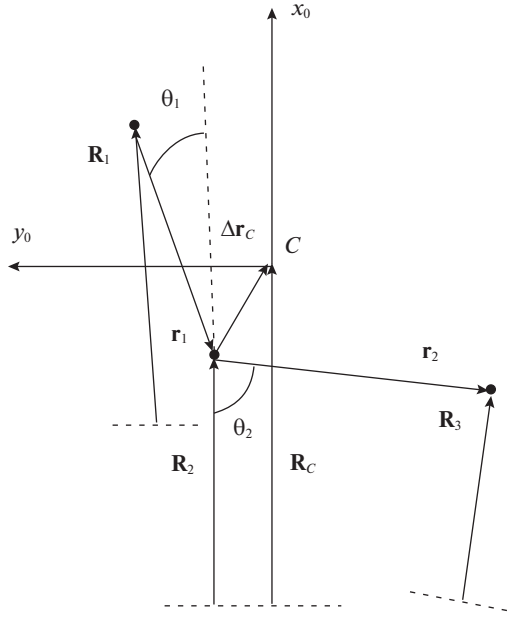


Рис. 2.

Чтобы использовать соотношения (3.3) в уравнениях (3.1) величины x_{ok} , y_{ok} необходимо выразить через обобщенные координаты. Имеют место очевидные векторные соотношения (рис. 2)

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{R}_2 + \Delta \mathbf{r}_c, \quad \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_2 + \mathbf{r}_2,$$

где при определении $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ длиной векторов $\mathbf{r}_{12}$, $\mathbf{r}_{21}$, $\mathbf{r}_{23}$, $\mathbf{r}_{32}$ пренебрегается.

Тогда, используя уравнение для положения центра масс системы $\mathbf{R}_c = \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{R}_k / m_s$ и проецируя (3.3) на оси орбитальной системы координат cx_0y_0 , получим

$$\begin{aligned} x_{o2} &= R_c + \frac{m_1 l_1 \cos \theta_1 - m_3 l_2 \cos \theta_2}{m_s}, & y_{o2} &= \frac{m_1 l_1 \sin \theta_1 - m_3 l_2 \sin \theta_2}{m_s} \\ x_{o1} &= x_{o2} + l_1 \cos \theta_1, & y_{o1} &= y_{o2} + l_1 \sin \theta_1 \\ x_{o3} &= x_{o2} - l_2 \cos \theta_2, & y_{o3} &= y_{o2} - l_2 \sin \theta_2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где m_s — масса системы.

При определении потенциальной энергии системы в гравитационном поле используется обычное допущение о том, что размеры системы много меньше, чем расстояние центра масс системы до притягивающего центра R_c . В качестве примера рассмотрим приближенное представление потенциальной энергии для первого НС. Тогда представляя функцию $1/R_1$ в виде ряда по малым параметрам $\varepsilon_{1,2}$, получим

$$\Pi_1 = -m_1 \Omega^2 R_c^2 \left(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 / 2 \right), \quad (3.5)$$

где Ω — угловая скорость движения центра масс системы по орбите,

$$\varepsilon_1 = (m_3 l_1 \cos \theta_1 + m_3 l_2 \cos \theta_2 + m_2 l_1 \cos \theta_1) / R_c m_s$$

$$\varepsilon_2 = (m_3 l_1 \sin \theta_1 + m_3 l_2 \sin \theta_2 + m_2 l_1 \sin \theta_1) / R_c m_s$$

При записи выражения (3.5) предполагается, что орбита движения центра масс системы круговая и не изменяется за время развертывания системы. Аналогично записываются приближенные выражения для энергий $\Pi_{2,3}$.

Учитывая приближенное представление для составляющих потенциальной энергии системы $\Pi_{1,2,3}$, подставляя соотношения (3.4) в уравнения Лагранжа (3.1) и проводя дифференцирование функций, получим

$$A\ddot{\xi} = B, \quad (3.6)$$

где $\ddot{\xi} = (\ddot{l}_1 \ \ddot{l}_2 \ \ddot{\theta}_1 \ \ddot{\theta}_2)$ – вектор ускорений для обобщенных координат системы, A и B – известные матрица и вектор, имеющие компоненты

$$A_{11} = A_{33}/l_1^2 = m_1(m_3 + m_2)/m_s, \quad A_{22} = A_{44}/l_2^2 = m_3(m_1 + m_2)/m_s$$

$$\begin{Bmatrix} A_{12} \\ A_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{l_1 l_2} A_{34} \\ -\frac{1}{l_2} A_{14} \end{Bmatrix} = \frac{m_1 m_3}{m_s} \begin{Bmatrix} \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \sin(\theta_2 - \theta_1) \end{Bmatrix}, \quad A_{13} = A_{24} = 0, \quad A_{ij} = A_{ji}; \quad i, j = \overline{1,4}$$

$$B_k = Q_k + F_k + R_k, \quad Q_k = -\partial\Pi/\partial q_k; \quad k = \overline{1,4}$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_{i+2} \end{Bmatrix} &= \Omega^2 \frac{\mu_{3-i}}{2m_s} \left[(m_2 + \mu_i) l_i \begin{Bmatrix} 1 + 3 \cos 2\theta_i \\ -3l_i \sin 2\theta_i \end{Bmatrix} + \mu_i l_{3-i} \begin{Bmatrix} 3 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ -l_i (3 \sin(\theta_1 + \theta_2) (-1)^{i+1} \sin(\theta_1 - \theta_2)) \end{Bmatrix} \right] \\ \begin{Bmatrix} R_i \\ R_{i+2} \end{Bmatrix} &= \frac{\mu_{3-i}}{m_s} \left[(m_2 + \mu_i) l_i (\Omega + \dot{\theta}_i) \begin{Bmatrix} \Omega + \dot{\theta}_i \\ -2l_i \end{Bmatrix} - \mu_i l_{3-i} (\Omega + \dot{\theta}_{3-i}) \begin{Bmatrix} \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ (-1)^{i+1} l_i \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{Bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \mu_i l_{3-i} (\Omega + \dot{\theta}_{3-i})^2 \begin{Bmatrix} \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ (-1)^{i+1} l_i \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{Bmatrix} \right]; \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

здесь $\mu_1 = m_3$, $\mu_2 = m_1$.

Выпуск тросов осуществляется по заданной программе, что обеспечивается программным изменением сил натяжения тросов, которые зависят от переменных состояния системы. Чаще всего программные силы натяжения $T_{1,2}$ задаются как функции времени, скорости и длины троса [16]. Для системы (3.6) в рассматриваемом случае эти зависимости зададим в виде $F_{1,2} = T_{1,2}(l_{1,2}, V_{1,2})$, $F_{3,4} = 0$. После задания программ выпуска троса система (3.6) может быть проинтегрирована любым численным методом при заданных начальных условиях.

4. Программы выпуска троса. Так как наноспутники характеризуются небольшими массой и размерами, то программы выпуска тросов должны быть по возможности более простыми и не предъявлять больших требований к механизмам управления. Наиболее простой вариант, это чтобы механизмы управления работали только на торможение троса [16] и без обратной связи. Причем программные зависимости $T_{1,2}(l_{1,2}, V_{1,2})$ должны быть построены так, чтобы они обеспечивали формирование системы заданной конфигурации, и при этом выполнялись бы ограничения на ее переменные состояния. В рассматриваемом случае тросовая группировка НС располагается в конечном состоянии вблизи вертикали, а накладываемые ограничения имеют следующий вид: 1) силы натяжения $T_{1,2}(l_{1,2}, V_{1,2}) > 0$ (тросы должны быть натянуты); 2) скорости вы-

пуска троса $V_{1,2} > 0$ (механизмы работают только на торможение); 3) при заданной конечной длине между НС $l_{1,2} = l_{\text{end}}$ скорости $V_{1,2} \approx 0$.

В связи вышесказанным предлагается следующая программа выпуска тросов

$$T_k(l_k, V_k) = -v(l_k)V_k; \quad k = 1, 2 \quad (4.1)$$

Здесь коэффициент $v_l(l_k) > 0$ обеспечивает торможение троса и задается так, чтобы разделить процесс выпуска тросов на два участка: быстрого и медленного развертывания, а именно

$$v(l_k) = \begin{cases} v_{\min} & \text{при } l_k < l_{k1} \\ v_l(l_k) & \text{при } l_{k1} \leq l_k \leq l_{k2}, \\ v_{\max} & \text{при } l_k > l_{k2} \end{cases} \quad (4.2)$$

где $k = 1, 2$, а функция $v_l(l_k)$ обеспечивает гладкое соединение участков, где она принимает постоянные значения $v_{\min}$ и $v_{\max}$ ($v_{\max} > v_{\min}$). Соединение участков осуществляется обычным полиномом пятой степени, с помощью которого можно обеспечить непрерывность первых и вторых производных функции (4.2) в точках $l_k = l_{k1}$ и $l_k = l_{k2}$.

Пример изменения функции $v(L_k)$ в зависимости от относительной величины конечного расстояния между НС l_k/l_{end} при $v_{\min} = 0.1$, $v_{\max} = 5$, $l_{k1}/l_{\text{end}} = 0.8$, $l_{k2}/l_{\text{end}} = 0.95$ приводится на рис. 3. Соотношения (4.1)–(4.2) задают программу выпуска троса, параметрами которой являются величины $v_{\min}$, $v_{\max}$, l_{k1} , l_{k2} . Эти параметры должны быть выбраны так, чтобы при заданной конечной длине троса l_{end} были выполнены перечисленные выше ограничения на переменные состояния процесса развертывания.

На рис. 4–5 показаны временные зависимости для характеристик процесса выпуска троса для одного из НС при формировании вертикальной тросовой системы, состоящей из трех НС. Зависимости, приведенные на рис. 4, соответствуют программе развертывания троса (4.1)–(4.2) с параметрами, приведенными выше (рис. 3). Другие параметры тросовой системы имеют следующие значения: $m_1 = m_3 = 2$ кг, $m_2 = 12$ кг, $l_{\text{end}} = 0.5$ км, высота круговой орбиты 500 км, относительная скорость разделения НС 0.1 м/с, угловая скорость вращения составного спутника до разделения 0.1 с⁻¹. На рис. 4–5 в качестве независимой переменной используется безразмерное время $\tau = \Omega t$. При окончании выпуска тросов $l_{1,2} = l_{\text{end}}$ их длины фиксируются.

Несмотря на относительную простоту построенной модели, в которой НС представляют собой материальные точки, на основании ее использования все же можно сделать некоторые выводы об особенностях предлагаемой программы развертывания:

1. Вне зависимости от начального положения составного НС относительно вертикали и его начальной угловой скорости (которая может изменяться в достаточно большом диапазоне) по окончании развертывания система совершает колебания относительно вертикали, с некоторой амплитудой, величина которой определяется значениями параметров программы управления.

2. На участке быстрого развертывания (после окончания переходного процесса) все НС располагаются практически на одной линии, если отделение НС осуществляется одновременно, с равными скоростями и НС имеют одинаковые массы. Как показывает анализ уравнений движения (3.6) перемещения НС по прямой, которая составляет постоянный угол с вертикалью (θ_e), обеспечивается равенством гравитационных моментов и моментов от сил Кориолиса.

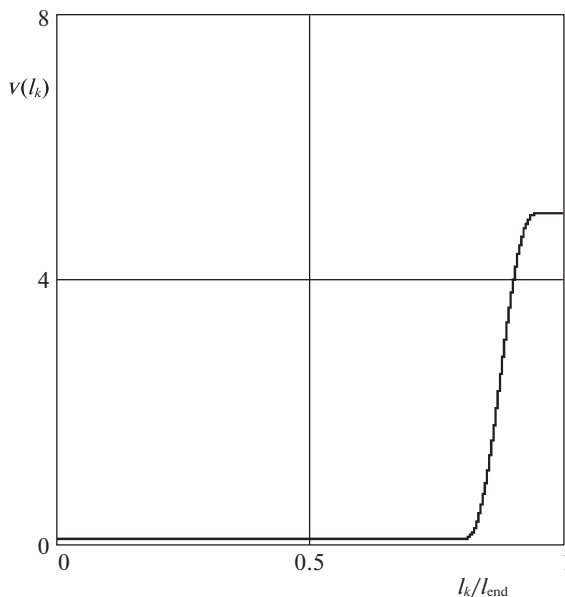


Рис. 3.

3. При переходе на участок медленного торможения скорость выпуска троса уменьшается, что приводит к колебаниям системы относительно вертикали с некоторой амплитудой, величина которой определяется значением угла θ_e .

4. Величина угла θ_e определяется значением параметра $v_{\min}$: при его увеличении амплитуда колебаний системы относительно вертикали уменьшается. Однако это соответственно увеличивает время развертывания системы.

5. Начальная скорость разделения НС может изменяться в достаточно широком диапазоне, что не влияет на выполнение перечисленных выше ограничений, а только изменяет время выпуска троса. Для приведенных исходных данных увеличение скорости разделения НС на один порядок (до 1 м/с) уменьшает время выпуска троса приблизительно в 1.5 раза, причем качественно зависимости на рис. 4–5 не изменяются.

Для последнего вывода (при изменении скорости разделения) необходимо отметить, что фазовый портрет системы на плоскости $(\theta, \dot{\theta})$ мало изменяется (рис. 6, $\theta_1 = \theta_2 = \theta$), а для траекторий концевых НС относительно вертикали изменяется лишь масштаб. В качестве примера на рис. 7 показаны траектории концевых тел после разделения НС при изменении скорости разделения от 0.1 м/с (рис. 7, а) до 1 м/с (рис. 7, б). Для рис. 7, б масштаб был увеличен в 10 раз. На рис. 7, в показаны полные траектории концевых тел при скорости разделения 0.1 м/с. Время перехода системы из режима вращения в движение вблизи вертикали без вращения является небольшим и зависит от скорости разделения НС почти линейно. При скорости разделения 0.1 м/с время переходного процесс составляет приблизительно 4 с, при скорости 1 м/с – 0.4 с.

Результаты, приведенные на рис. 4–7, относятся к случаю, когда имеется полная симметрия относительно центрального НС (по скорости разделения и ее направлению, по массам $m_1 = m_3$). Поэтому траектории концевых НС симметричны и центр масс системы совпадает с центром масс центрального НС. Малая асимметрия по указанным выше характеристикам слабо влияет на приведенные результаты. В качестве

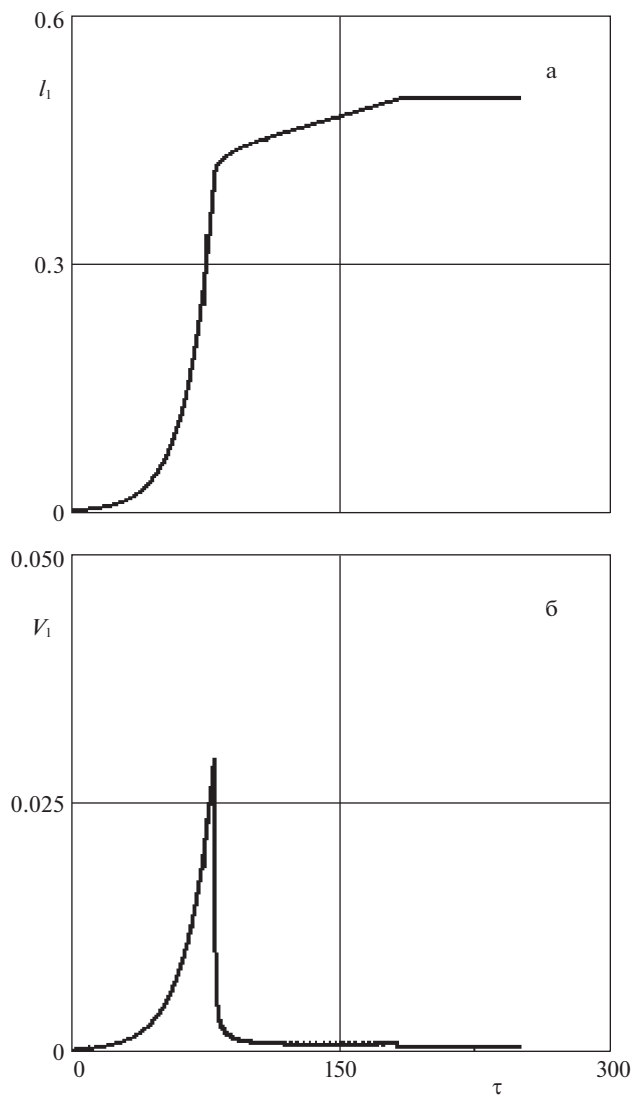


Рис. 4.

примера достаточно большой асимметрии на рис. 7, г показаны траектории концевых тел относительно центрального НС, когда масса нижнего НС в два раза больше массы верхнего НС ($m_1 = 4$ кг, $m_3 = 2$ кг). В этом случае процесс разворачивания системы происходит следующим образом, во-первых, нижняя часть тросовой системы с большим по массе НС разворачивается быстрее; во-вторых, после окончания разворачивания нижней части (когда длина троса фиксируется) имеет место возмущение траектории верхнего НС; в-третьих, изменяется угол θ_e на участке прямолинейного разворачивания (для большей нижней концевой массы он меньше). Аналогичное влияние наблюдается, если имеется асимметрия в величине скорости разделения верхнего и нижнего НС. Там, где скорость больше, разворачивание этого участка естественно осу-

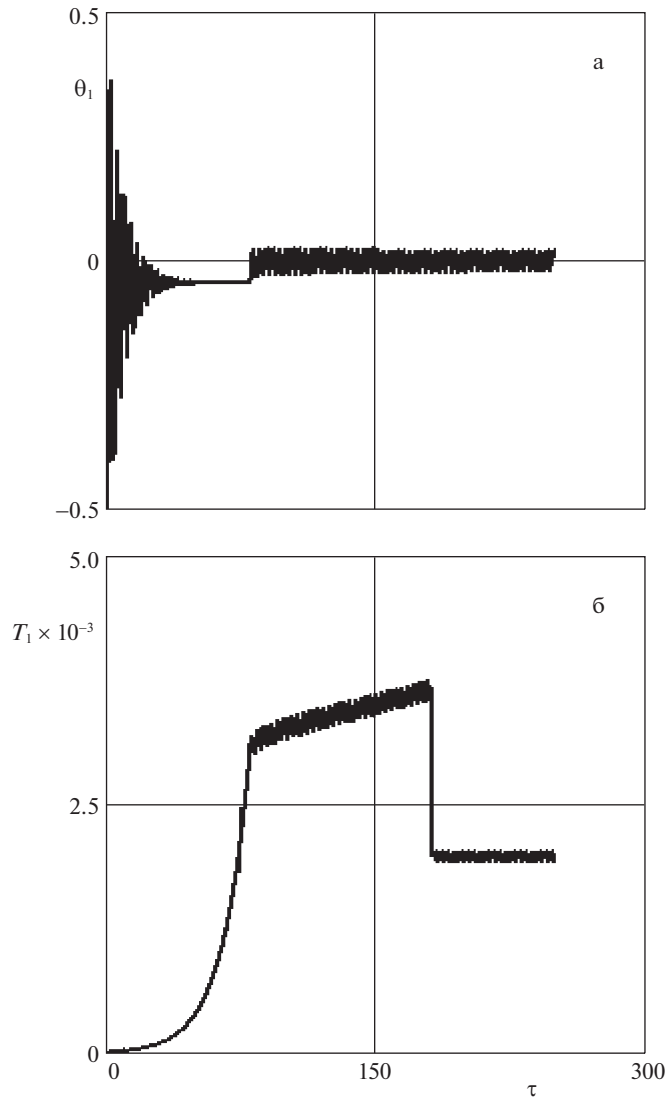


Рис. 5.

шествуется быстрее, и далее имеют место те же явления, что и при наличии асимметрии масс.

Влияние направления разделения НС по отношению к вертикали более сложное и может привести к вероятностным явлениям при движении тросовой системы. Даже если начальные углы равны $\theta_1 = \theta_2$, то и в этом случае движение системы может стать не предсказуемым. Было установлено, что существует некоторый диапазон для начальных углов $\theta_{1,2}$ такой, что если $\theta_{1,2} \notin [-\theta_{\max}, \theta_{\max}]$, то процесс перехода системы из режима вращения в режим движения вблизи вертикали включает в себя несколько оборотов системы вокруг центра масс системы. Только после этого система выходит на участок прямолинейного движения без вращения. Следовательно, существует не-

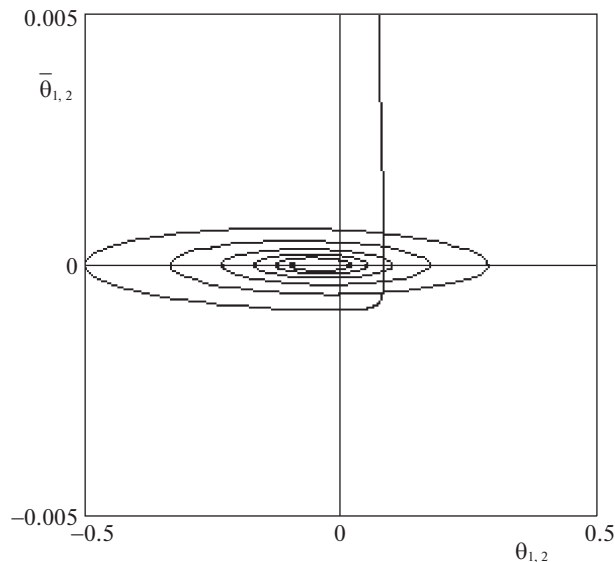


Рис. 6.

которая окрестность “седловых” точек $\theta_1 = \theta_2 = \pm\pi/2$, для которой финальное положение системы (какой НС вверху, а какой внизу) не предсказуемо, так как малое изменение начальных значений углов $\theta_{1,2}$ может привести к изменению конечного положения системы. Для исходных данных, соответствующих симметричной системе, и приведенных выше, критический угол $\theta_{\max} \approx \pi/3$. Переходный процесс, который включает в себя несколько оборотов симметричной системы относительно центра масс, показан на рис. 8, а (начальные углы $\theta_1 = \theta_2 = 70^\circ$). Для симметричной системы критическое значение $\theta_{\max}$ при увеличении начальной скорости разделения НС увеличивается, а при увеличении начальной угловой скорости вращения составного НС — уменьшается.

Если отделение НС не симметрично по направлению, то может иметь место запутывание системы, когда один НС начинает вращаться относительно центра масс системы, а другой — нет. Пример такого поведения системы приводится на рис. 8, б, где начальные углы равны $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 23^\circ$.

5. Определение движения спутников относительно центров масс. В общем случае для определения движения НС относительно своих центров масс требуется интегрирование полной системы уравнений (2.1), (2.3)–(2.5) при заданных начальных условиях. В частности, для задания начальных условий кинематических уравнений (2.5) необходимы вычисления матрицы перехода между неподвижной геоцентрической $OXYZ$ и главными связанными системами координат спутников. Для этого используется орбитальная правая система координат, связанная с центром масс s системы $sx_0y_0z_0$ (рис. 2). Матрица перехода между системами координат $OXYZ$ и $sx_0y_0z_0$ определяется стандартным образом [17] с помощью углов Ω, i, u , где Ω — долгота восходящего узла, i — наклонение орбиты, u — аргумент широты. Положение тросов относительно системы координат $sx_0y_0z_0$ в пространственном случае определяется двумя углами θ_k и β_k [7], причем, если $\beta_k = 0$, то имеет место плоский случай движения, рассмотренный

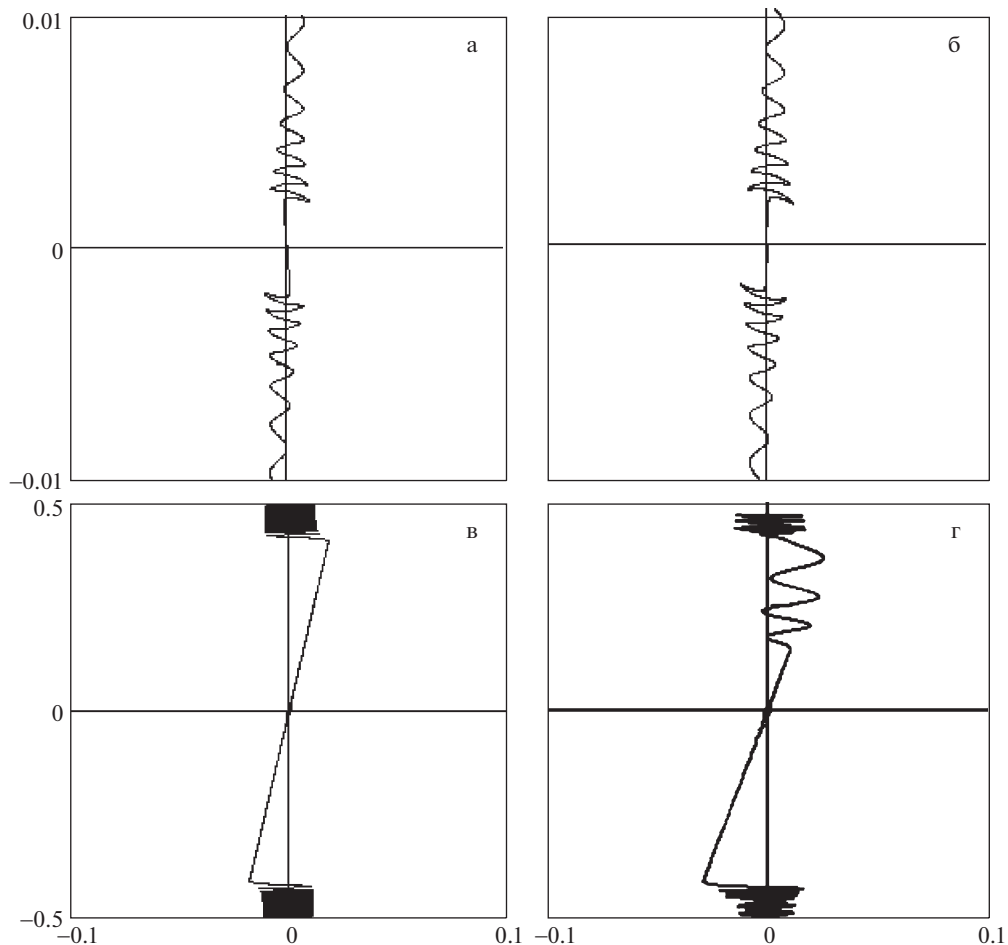


Рис. 7.

выше в разд. 3. Угловое положение главных связанных систем координат НС относительно тросов определяется углами Эйлера ψ_k , α_k , ϕ_k (соответственно углы прецессии, нутации и собственного вращения). Таким образом, после задания перечисленных выше углов начальные условия для интегрирования кинематических уравнений движения (2.5) для каждого НС определяются из соотношений

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} = H_{\Omega, i, u} H_{\theta, \beta} H_{\psi, \alpha, \phi}, \quad (5.1)$$

где столбцы матрицы H есть проекции единичных векторов $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ на оси геоцентрической неподвижной системы координат $OXYZ$, $H_{\Omega, i, u}$, $H_{\theta, \beta}$, $H_{\psi, \alpha, \phi}$ – матрицы перехода между перечисленными выше системами координат.

В процессе интегрирования системы уравнений (2.1), (2.3)–(2.5) необходимо определять угловое положение НС относительно тросов. Для определения углов, опреде-

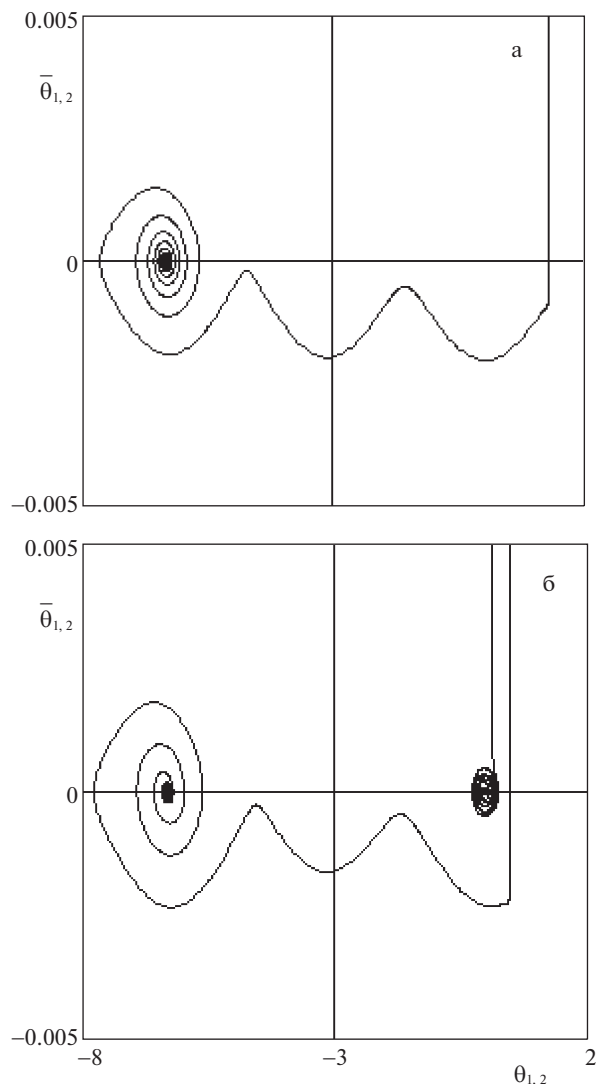


Рис. 8.

ляющих положение НС относительно тросов, необходимо ввести системы координат, связанные с плоскостями, проходящими через линию, соединяющую точки крепления тросов и их радиус-векторами. Например, пусть точка a это точка крепления троса, соединяющего первый НС со вторым, а $\mathbf{R}_{12}$ — ее радиус-вектор в геоцентрической системе координат $OXYZ$. Для этого НС введем правую систему координат $a x_a y_a z_a$. Здесь ось $a x_a$ направлена к точке крепления троса ко второму НС, ось $a z_a$ — по векторному произведению $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{R}_{12}$, где $\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_{21} - \mathbf{R}_{12}$. Используя известные проекции векторов $\mathbf{R}_{12}$, $\mathbf{R}_{21}$ в геоцентрической системе координат $OXYZ$, можно найти проекции ортов системы координат $a x_a y_a z_a$ в той же системе и, таким образом, матрицу пе-

перехода между системами координат $a x_a y_a z_a$ и $OXYZ$. В этом случае ориентация первого НС относительно вектора $\mathbf{r}_1$ (или направления троса) определяется ориентацией связанной с НС системы координат $c_1 x_1 y_1 z_1$ относительно системы координат $a x_a y_a z_a$. Здесь ось $c_1 x_1$ связанной системы координат направлена от центра масс НС к точке крепления троса. Очевидно, что угол нутации α_1 для первого НС это угол между осями $a x_a$ и $c_1 x_1$. При этом угол прецессии ψ_1 определяется через проекции единичного вектора оси $c_1 x_1$ в системе координат $a x_a y_a z_a$ следующим образом $\cos \psi_1 = e_{ya1} / \sqrt{e_{ya1}^2 + e_{za1}^2}$,

$\sin \psi_1 = e_{za1} / \sqrt{e_{ya1}^2 + e_{za1}^2}$. Естественно для НС, отличного по крайних НС, определяют-ся две совокупности углов Эйлера по отношению к двум тросам, расположенных по обим его сторонам.

Следует отметить, что при моделировании движения системы с использованием уравнений (2.1), (2.3)–(2.5) возможны случаи провисания (или ослабления) тросов. Это связано с используемым выражением для определения силы натяжения (2.2), учитывающим односторонность механической связи. В этом случае ориентация НС определяется по отношению к линии, соединяющей точки крепления троса. Естественно, алгоритмы вычисления углов Эйлера не изменяются.

6. Расчет процесса разделения наноспутников. До разделения составной НС, состоящий из нескольких секций, совершает свободное движение по орбите как твердое тело с некоторой угловой скоростью. Очевидно, что в этом случае уравнения движения составного НС представляют собой частный случай уравнений (2.1), (2.3)–(2.5). За расчетный (номинальный) случай принимается случай одновременного отделения двух НС от центрального НС. Если НС отделяются не одновременно, то расчет изменения скоростей НС может быть получен аналогично.

Рассмотрим, например, начальную фазу формирования системы, когда от составного НС отделяются два НС в противоположных направлениях. Пусть разделение НС осуществляется с относительными скоростями V_{r1} и V_{r3} . Направление векторов $\mathbf{V}_{r1}$ и $\mathbf{V}_{r3}$ определяется относительно связанной продольной оси составного НС с помощью углов $\alpha_{s1,3}$, $\beta_{s1,3}$. В этом случае в связанной системе координат составного НС получим

$$\begin{aligned} V_{rx1,3} &= V_{r1,3} \cos \alpha_{s1,3} \cos \beta_{s1,3}, & V_{ry1,3} &= V_{r1,3} \sin \alpha_{s1,3} \\ V_{rz1,3} &= -V_{r1,3} \cos \alpha_{s1,3} \sin \beta_{s1,3} \end{aligned} \quad (6.1)$$

С использованием закона сохранения импульса вычисляются скорости НС после разделения

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_c - (m_1 \mathbf{V}_{r1} + m_3 \mathbf{V}_{r3}) / m_s, \quad \mathbf{V}_{1,3} = \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_{r1,3}, \quad (6.2)$$

где $\mathbf{V}_c$ – вектор скорости центра масс составного НС до разделения.

Для определения угловых скоростей НС после разделения используется теорема об изменении кинетического момента твердого тела при ударном воздействии (см., например, [18])

$$\Delta \mathbf{K}_1 = \mathbf{r}_{12} \times \mathbf{S}_1, \quad \Delta \mathbf{K}_3 = \mathbf{r}_{32} \times \mathbf{S}_3, \quad \Delta \mathbf{K}_2 = \mathbf{r}_{21} \times \mathbf{S}'_1 + \mathbf{r}_{23} \times \mathbf{S}'_3, \quad (6.3)$$

где $\mathbf{S}_{1,3}$ – ударные импульсы, действующие на 1 и 3 спутник; $\Delta \mathbf{K}_{1,2,3}$ – приращение кинетических моментов НС, $\mathbf{S}'_{1,3} = -\mathbf{S}_{1,3}$.

Импульсы $\mathbf{S}_{1,3}$ определяются из выражений

$$\mathbf{S}_{1,3} = m_{1,3} (\mathbf{V}_{1,3} - \mathbf{V}_c) \quad (6.4)$$

Зная приращения $\Delta \mathbf{K}_{1,2,3}$ нетрудно определить изменение угловых скоростей НС после их разделения

$$\Delta \boldsymbol{\omega}_k = \mathbf{J}_k^{-1} \Delta \mathbf{K}_k; \quad k = \overline{1,3}, \quad (6.5)$$

где $\mathbf{J}_k$ — тензоры инерции спутников.

После разделения ориентация каждого НС соответствует ориентации составного НС до разделения. Приведенный алгоритм вычисления угловых скоростей НС после их разделения учитывает статическую (например, смещение точки крепления троса относительно продольной оси НС) и инерционную (отличие тензора инерции НС от диагонального) асимметрии спутников, что при их наличии приводит к возмущениям углового движения НС.

7. Анализ углового движения спутников в составе развертываемой тросовой системы. Для предварительной оценки углового движения НС можно использовать аналитические формулы, основанные на методе усреднения [7, 19]. Рассматриваемое аналитическое решение соответствует движению твердого тела вокруг неподвижной точки для случая, близкого к случаю Лагранжа, который характеризуется наличием не малого восстанавливающего момента (по сравнению с другими возмущениями) относительно неподвижной точки. Для данной задачи — это момент силы натяжения троса относительно центра масс НС. При применении данного аналитического решения спутники считаются статически и динамически симметричными, но при этом рассматривается пространственное их движение, а ограничения накладываются только на углы нутации спутников, определенные относительно тросов. Ниже показано, что решение может быть применено не только для крайних спутников [7], но и для центрального НС системы. Основное предположение, на котором основывается данное аналитическое решение, это медленное изменение восстанавливающего момента по сравнению с характерной частотой колебаний НС относительно своего центра масс. Аналитическое решение имеет вид [7]

$$a_{1,2} = a_{1,2}(0) \left(\frac{\bar{J}_x^2 \omega_x^2 / 4 + \omega_s^2(0)}{\bar{J}_x^2 \omega_x^2 / 4 + \omega_s^2} \right)^{0.25}, \quad (7.1)$$

где $a_{1,2}$ — амплитуды колебаний, соответствующие “прямой” и “обратной” прецессиям НС; $\omega_s = \sqrt{T \Delta l / J_s}$ — собственная частота плоских колебаний НС на тросе, T — сила натяжения троса, Δl — расстояние между точкой крепления троса и центром масс НС, $J_s = J_y = J_z$ — момент инерции динамически симметричного НС относительно осей связанной системы координат, $\bar{J}_x = J_x / J_s$, $a_{1,2}(0)$ и $\omega_s(0)$ — значения переменных в момент разделения спутников. При использовании формулы (7.1) предполагается, что угловая скорость $\omega_x = \text{const}$ (для исключения кручения троса можно использовать специальные шарниры).

Применение решения (7.1) требует вычисления начальных значений $a_{1,2}(0)$, $\omega_s(0)$. Значение частоты $\omega_s(0)$ вычисляется непосредственно по приведенной выше формуле. Начальные значения амплитудных характеристик определяются в пространственном случае после задания начальных угловых скоростей НС в связанной системе координат и углов их ориентации относительно троса: $\omega_{x,y,z}(0)$, $\alpha(0)$, $\psi(0)$, $\varphi(0)$. Причем углы ψ , φ могут иметь произвольные значения, например, $\psi(0) = \varphi(0) = 0$, что не влияет на определяемые амплитуды колебаний. Тогда [7]

$$a_{1,2}(0) = \sqrt{\omega_z^2(0) + (\omega_y(0) + \alpha(0) \omega_{2,1}(0))^2 / 2 \omega_\alpha(0)}, \quad (7.2)$$

где $\omega_\alpha(0) = \sqrt{\bar{J}_x^2 \omega_x^2(0) / 4 + \omega_s^2(0)}$, $\omega_{1,2}(0) = \bar{J}_x \omega_x(0) / 2 \pm \omega_\alpha(0)$.

При использовании аналитического решения (7.1) угол нутации вычисляется следующим образом $\alpha = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 \cos(\psi_1 - \psi_2)}$, где $\psi_{1,2}$ – фазы колебаний. Отсюда получается оценка для максимального и минимального угла нутации

$$a_{\max} = a_1 + a_2, \quad a_{\min} = |a_1 - a_2| \quad (7.3)$$

Аналитическое решение может быть использовано совместно с любой из описанных моделей движения (2.3)–(2.5) или (3.6), достаточно задать программу изменения сил натяжения тросов.

Применение аналитического решения показало, что оно может быть использовано для предварительной оценки амплитуд колебаний НС относительно направления троса при достаточно малых начальных угловых скоростях НС, которые возникают при их разделении. Это связано с тем, что увеличение угловых скоростей приводит соответственно к увеличению амплитуд колебаний НС, то есть к не малым углам нутации, а это являлось одним из допущений, которое использовалось при получении аналитического решения. Результаты моделирования показали, что приведенное аналитическое решение можно использовать, если углы нутации не превышают приблизительно 1.2 радиана. Кроме того, было установлено, что аналитическое решение с достаточной точностью описывает только решения, которые получаются, если при использовании математической модели (2.1)–(2.4) полагается $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_{32} = 0$, то есть не учитывается влияние колебаний концевых тел на силы натяжения в тросах. С другой стороны, аналитическое решение с достаточной точностью правильно оценивает максимум амплитуды для угла нутации, который достигается после разделения НС. При дальнейшем движении системы более точный учет колебаний концевых тел во всех случаях (авторам не удалось найти опровержения этого утверждения) вело к уменьшению амплитуд колебаний НС относительно направления тросов.

Приведенные выводы иллюстрируются зависимостями, представленными на рис. 9–10, где рис. 9, а и рис. 10, а характеризуют движение крайнего НС, а рис. 9, б и рис. 10, б – центрального НС. Рис. 9 относится к случаю, когда не полностью учитывается взаимодействие между колебаниями концевых тел и тросом, а на рис. 10 в полной мере учитывается это взаимодействие. На рис. 9 также показаны (жирными линиями) амплитудные характеристики углов нутации, полученные с помощью аналитического решения (7.3). Как следует из приведенных результатов моделирования имеет место интересный эффект стабилизации движения НС за счет взаимодействия колебаний твердых тел и троса. Причем такая стабилизация более ярко выражена для центрального НС, который имеет связь с тросами с обеих сторон. Понятно, что такой довольно сложный эффект не описывается аналитическим решением. Рис. 9–10 построены при некотором произвольном распределении угловых скоростей в момент разделения: $\omega_x(0) = 0.1 \text{ с}^{-1}$, $\omega_y(0) = -0.1 \text{ с}^{-1}$, $\omega_z(0) = 0.1 \text{ с}^{-1}$, то есть соответствуют пространственному случаю движения НС. Крайние НС представляют собой кубы с ребром 0.1 м, центральный спутник – прямоугольный параллелепипед ($0.1 \times 0.1 \times 0.6$ м). Здесь следует отметить, что очень значимым фактором, который влияет на амплитудные характеристики углового движения НС является величина относительных скоростей их отделения от центрального спутника $V_{r1,3}$. С увеличением величины этих скоростей максимальные углы нутации НС по крайней мере для симметричных НС уменьшаются. Однако это имеет свои пределы, во-первых, всегда имеются технические ограничения, во-вторых, переходный процесс в вертикальной плоскости растягивается (рис. 7, а, б), что в конечном итоге приводит к увеличению амплитуд колебаний всей системы относительно вертикали в конечном состоянии.

Влияние массово-инерционной асимметрии на движение НС относительно центра масс имеет два источника, во-первых, при разделении НС действие ударных импуль-

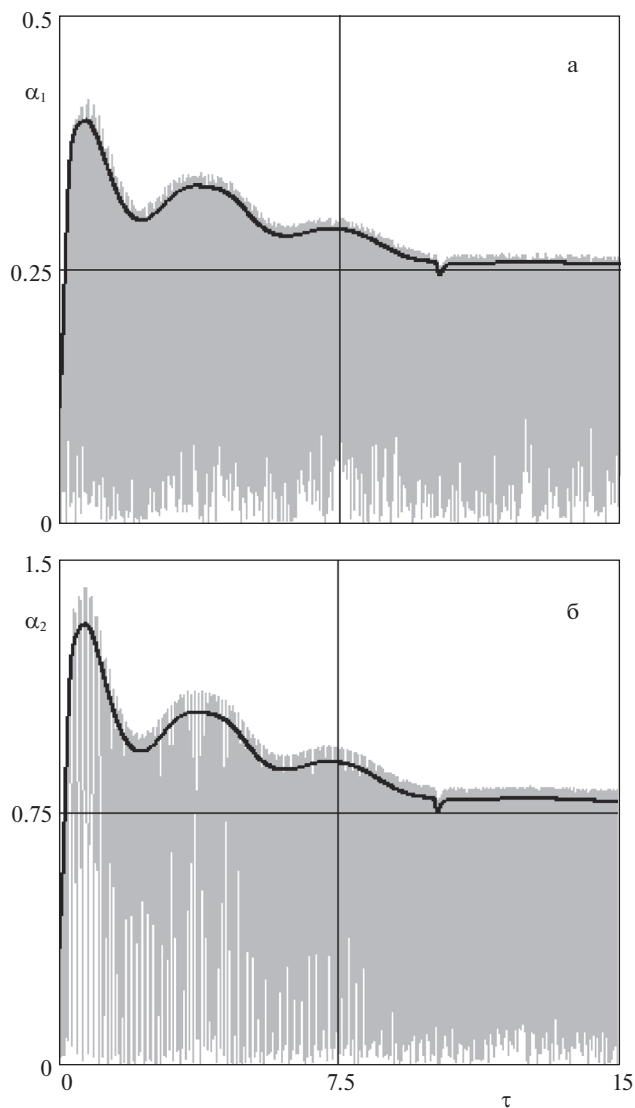


Рис. 9.

сов приводит к дополнительным возмущениям для угловых скоростей (6.3), (6.5); во-вторых, имеют место периодические возмущения для углов нутации в процессе развертывания системы. В последнем случае возможны два характерных варианта изменения амплитудных характеристик при колебаниях НС относительно тросов. Это связано с тем, что задача анализа колебаний НС относительно тросов близка к задаче о движении волчка Лагранжа с малой асимметрией вокруг неподвижной точки [20–22]. Поэтому в рассматриваемой системе также возможны проявления резонансных эффектов. Если реализуются нерезонансные случаи движения, то хотя это ведет к некоторому увеличению амплитуд колебаний углов нутации НС за счет наличия периодических возмущений, но это увеличение не является катастрофическим. Положение

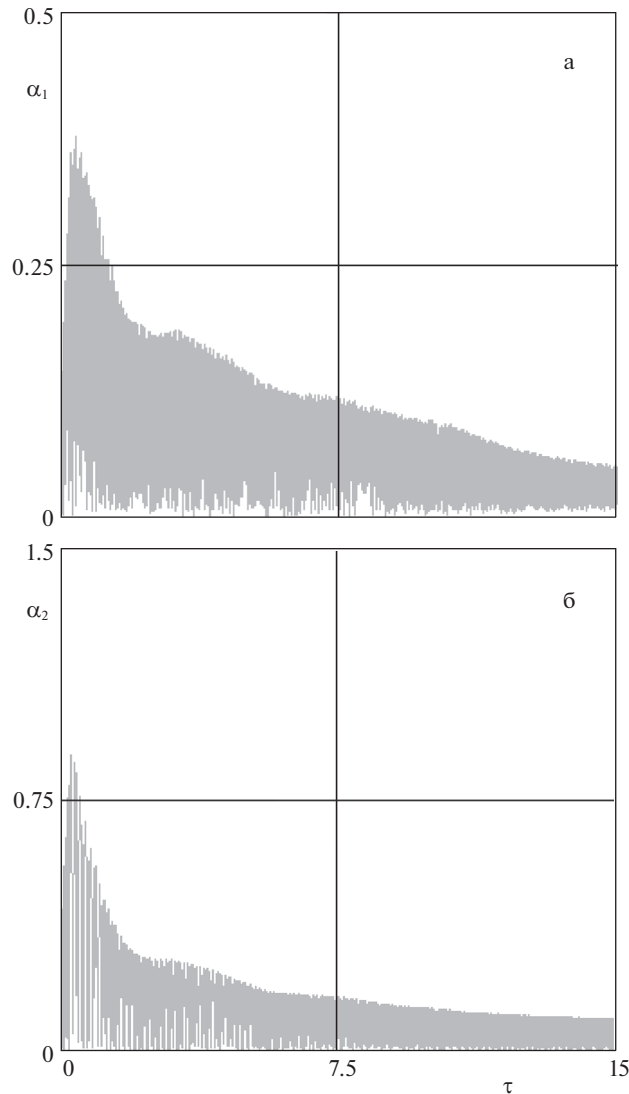


Рис. 10.

изменяется, если траектория системы проходит через резонансные области. В этом случае возможны случаи, когда в течение некоторого времени в силу действующих возмущений система “застревает” в резонансной области, то есть реализуется “захват” в резонанс. Тогда увеличение углов нутации может быть большим, что может привести к запутыванию или ослаблению тросов. Такой вариант поведения системы показан на рис. 11, где угловая скорость ω_x центрального НС пересекает резонансную кривую [20, 22] (ее отрицательную ветвь, которая показана жирной линией) $\omega_x^{(r)}(\tau) = \pm \omega_s(\tau) \sqrt{\cos \alpha_2} / \sqrt{1 - J_x^{(2)} / J_s^{(2)}}$, где $J_s^{(2)} = (J_y^{(2)} + J_z^{(2)}) / 2$. Центральный НС имеет статическую асимметрию, которая характеризуется смещением его центра масс относи-

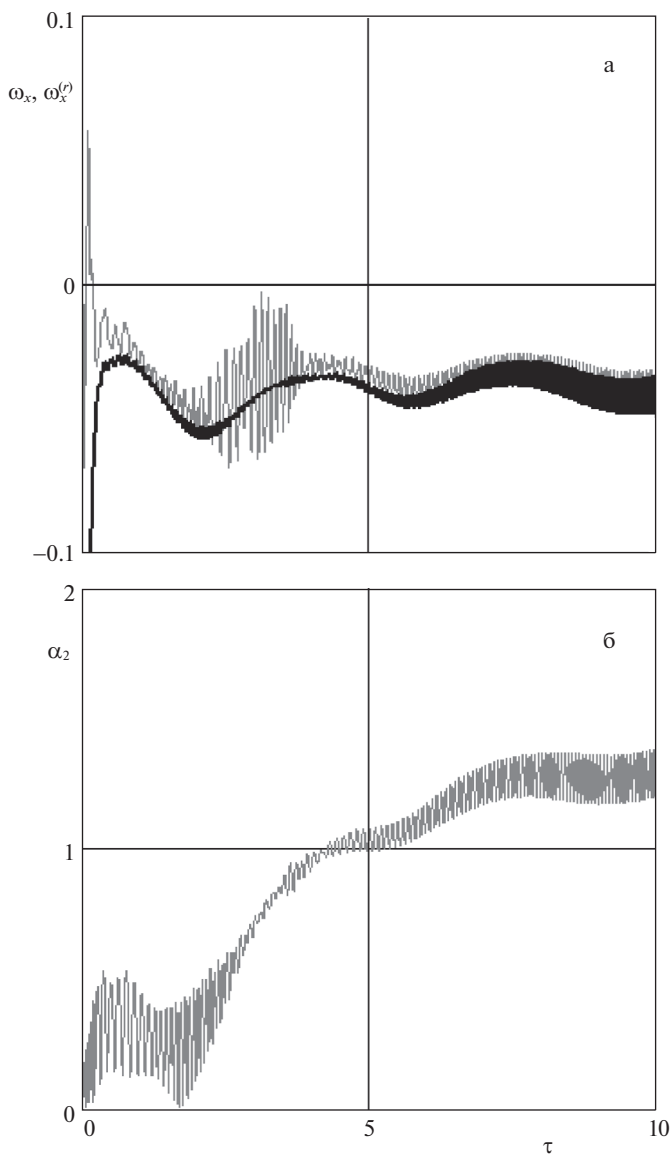


Рис. 11.

тельно продольной оси, связанной с ним системы координат $y_2/r_{23} = 0.01$, $z_2/r_{23} = -0.01$, и динамическую асимметрию $-(J_z^{(2)} - J_y^{(2)})/J_s^{(2)} = 0.1$. Конечно, рассматриваемые режимы движения НС требуют более подробного и полного изучения, так как, например, необходимо учитывать трение в специальных шарнирах, которые исключают скручивание тросов.

Заключение. На основании проведенного анализа процесса разворачивания на орбите тросовой группировки, состоящей из трех НС, можно сделать следующие выводы:

1. Предложенная программа развертывания тросовой системы при надлежащем выборе параметров обеспечивает приведение системы в состояние, близкое к вертикальному, с учетом выполнения задаваемых ограничений, в частности, на угловое движение НС.

2. Показано, что при разделении НС в направлении, близком к горизонтальному, переход системы из вращательного режима в движение вблизи вертикали может происходить после нескольких оборотов системы относительно центра масс.

3. Максимальные углы нутации НС почти всегда имеют место сразу после их разделения на начальном участке развертывания системы.

4. С увеличением относительных скоростей разделения НС амплитуды углов нутации уменьшаются, однако это приводит к увеличению амплитуд колебаний всей системы относительно вертикали после окончания ее развертывания.

5. С помощью численного моделирования установлено, что аналитическое решение, полученное ранее для вычисления амплитудных характеристик в задачах движения твердого тела, близких к случаю Лагранжа, во всех рассмотренных случаях дает верхнюю оценку для амплитуд колебаний углов нутации симметричных НС в данной задаче.

6. Взаимное влияние колебаний НС относительно центров масс и колебаний сил натяжения, как показали численные результаты, приводит к уменьшению углов нутации НС, определенных относительно направления тросов.

7. Наличие статической и динамической асимметрий НС может привести к резонансным эффектам при движении НС относительно центра масс (“захватам” в резонанс), что ведет к быстрому увеличению углов нутации НС в процессе развертывания системы.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 21-51-53002.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белецкий В.В., Левин Е.М. Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 336 с.
2. Keshmiri M. Dynamics and Control of Multy-Body Tethered Satellite Systems. PhD dissertation. Montreal: McGill Univ., 1995. 214 p.
3. Kalantzis S., Modi V., Kumar P. et al. Dynamics and control of multibody tethered systems // Acta Astron. 1998. V. 42 (9). P. 503–517.
4. Xu M., Zhu J., Tan T. et al. Equilibrium configurations of the tethered three-body formation system and their nonlinear dynamics // Acta Mech. Sinica. 2012. V. 28 (6). P. 1668–1677.
5. Avanzini G., Fedi M. Refined dynamical analysis of multi-tethered satellite formations // Acta Astron. 2013. V. 84 (2). P. 36–48.
6. Alary D., Andreev K., Boyko P. et al. Dynamics of multi-tethered pyramidal satellite formation // Acta Astron. 2015. V. 117. P. 222–230.
7. Заболотнов Ю.М., Наумов О.Н. Движение спускаемой капсулы относительно центра масс при развертывании орбитальной тросовой системы // Космич. исслед. 2012. Т. 50. Вып. 2. С. 177–187.
8. Асланов В.С. Колебания тела с орбитальной тросовой системой // ПММ. 2007. Т. 71. № 6. С. 1027–1033.
9. Асланов В.С. Влияние упругости орбитальной тросовой системы на колебания спутника // ПММ. 2010. Т. 74. № 4. С. 582–593.
10. Алпатов А.П., Белецкий В.В., Драновский В.И. и др. Динамика космических систем с тросовыми и шарнирными соединениями. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2007. 560 с.
11. Черноусько Ф.Л. Динамика свертывания космической тросовой системы // ПММ. 1995. Т. 59. № 2. С. 179–187.
12. Steindl A., Troger H. Optimal control of deployment of a tethered subsatellite // Nonlin. Dyn. 2003. V. 31. P. 257–274.

13. Заболотнов Ю.М. Управление разворачиванием орбитальной тросовой системы в вертикальное положение с малым грузом // ПММ. 2015. Т. 79. № 1. С. 37–47.
14. Шилов А.А. Оптимальная коррекция матрицы направляющих косинусов при расчетах вращения твердого тела // Уч. зап. ЦАГИ. 1977. Т. 8. № 5. С. 137–139.
15. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М: Наука, 1965. 416 с.
16. Kruijff M. Tethers in Space. Netherlands: Delta-Utec Space Res., 2011. 423 p.
17. Основы теории полета космических аппаратов // Под ред. Нариманова Г.С. М.: Машиностроение, 1972. 608 с.
18. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1990. 607 с.
19. Заболотнов Ю.М. Статистический анализ движения относительно центра масс легкой капсулы при входе в атмосферу // Космич. исслед. 2013. Т. 51. Вып. 3. С. 228–239.
20. Заболотнов Ю.М. Применение метода интегральных многообразий для анализа пространственного движения твердого тела на тросе // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 4. С. 3–18.
21. Заболотнов Ю.М. Резонансные движения статически устойчивого волчка Лагранжа при малых углах нутации // ПММ. 2016. Т. 80. № 4. С. 432–443.
22. Заболотнов Ю.М. Резонансные движения статически устойчивого волчка Лагранжа // ПММ. 2019. Т. 83. № 4. С. 615–635.

Analysis of the Dynamics of the Formation of a Tether Group of Three Nanosatellites Taking into Account Their Movement around the Centers of Mass

Ch. Wang^{a, #} and Yu. M. Zabolotnov^{b, ##}

^a Northwestern Polytechnical University, Xi'an, China

^b Samara National Research University, Samara, Russia

[#] e-mail: wangcq@nwpu.edu.cn

^{##} e-mail: yumz@yandex.ru

The dynamics of the deployed orbital tether system consisting of three nanosatellites is analyzed. In the first stage, the satellite, consisting of three sections (nanosatellites) is separated from the base spacecraft, and performs free movement in orbit with some residual angular velocity. In the second stage, two nanosatellites separate from the Central satellite in opposite directions, and a cable system is formed that moves near the vertical. Quite simple control programs that are implemented without feedback are offered. The influence of perturbations in the separation of nanosatellites on the formation of the system and on the movement of nanosatellites around their centers of mass is estimated. Two mathematical models are used to analyze the dynamics of the system: one model is constructed by the Lagrange method and considers satellites as material points; the other model is recorded in a fixed geocentric coordinate system and allows to estimate the influence of disturbances on the angular motion of nanosatellites.

Keywords: orbital tether system, deployment, nanosatellites, control, perturbations, angular motion of nanosatellites

REFERENCES

1. Beletsky V.V., Levin E.M. Dynamics of Space Tether Systems (Dinamika kosmicheskikh trosovykh sistem). Moscow: Nauka, 1990. 336 p. (in Russian)
2. Keshmiri M. Dynamics and Control of Multy-Body Tethered Satellite Systems. PhD diss. Montreal: McGill Univ., 1995. 214 p.
3. Kalantzis S., Modi V., Kumar P. et al. Dynamics and control of multibody tethered systems // Acta Astron., 1998, vol. 42, no. 9, pp. 503–517.
4. Xu M., Zhu J., Tan T. et al. Equilibrium configurations of the tethered three-body formation system and their nonlinear dynamics // Acta Mech. Sinica, 2012, vol. 28, no. 6, pp. 1668–1677.

5. *Avanzini G., Fedi M.* Refined dynamical analysis of multi-tethered satellite formations // *Acta Astron.*, 2013, vol. 84, pp. 36–48.
6. *Alary D., Andreev K., Boyko P. et al.* Dynamics of multi-tethered pyramidal satellite formation // *Acta Astron.*, 2015, vol. 117, pp. 222–230.
7. *Zabolotnov Yu.M., Naumov O.N.* Motion of a descent capsule relative to its center of mass when deploying the orbital tether system // *Cosmic Res.*, 2012, vol. 50, no. 2, pp. 177–187.
8. *Aslanov V.S.* The oscillations of a body with an orbital tethered system // *JAMM*, 2007, vol. 71, no. 6, pp. 926–932.
9. *Aslanov V.S.* The effect of the elasticity of an orbital tether system on the oscillations of a satellite // *JAMM*, 2010, vol. 74, no. 4, pp. 416–424.
10. *Alpatov A.P., Beletsky V.V., Dranovsky V.I. et al.* Dynamics of Space Systems with Tether and Hinge Connections (*Dinamika kosmicheskikh sistem s trosovymi i sharnirnymi soedineniyami*). Moscow; Izhevsk: SIC “Regular and chaotic dynamics”, 2007. 560 p. (in Russian)
11. *Chernousko F.L.* Dynamics of retrieval of a space tethered system // *JAMM*, 1995, vol. 59, no. 2, pp. 165–173.
12. *Steindl A., Troger H.* Optimal control of deployment of a tethered subsatellite // *Nonlin. Dyn.*, 2003, vol. 31, pp. 257–274.
13. *Zabolotnov Yu.M.* Control of the deployment of a tethered orbital system with a small load into a vertical position // *JAMM*, 2015, vol. 79, no. 1, pp. 28–34.
14. *Shilov A.A.* Optimal correction of the matrix of guiding cosines in calculations of rotation of a solid body // *Uch. Zapiski TsAGI*, 1977, vol. 8, no. 5, pp. 137–139. (in Russian)
15. *Beletsky V.V.* Movement of an Artificial Satellite Relative to the Center of Mass (*Dvizhenie iskusstvennogo sputnika otnositel'no centra mass*). Moscow: Nauka, 1965. 416 p. (in Russian)
16. *Kruijff M.* Tethers in Space. Netherlands: Delta-Utec Space Res., 2011. 423 p.
17. *Fundamentals of the Theory of Spacecraft Flight (Osnovy teorii poleta kosmicheskikh apparatov)* // *Ed. by Narimanov G.S.* Moscow: Mashinostroenie, 1972. 608 p. (in Russian)
18. *Nikitin N.N.* Course of Theoretical Mechanics (*Kurs teoreticheskoy mekhaniki*). Moscow: Vysshaya Shkola, 1990. 607 p. (in Russian)
19. *Zabolotnov Yu.* Statistical analysis of attitude motion of a light capsule entering the atmosphere // *Cosmic Res.*, 2013, vol. 51, no. 3, pp. 213–224.
20. *Zabolotnov Yu.M.* Application of the integral manifold method to the analysis of the spatial motion of a rigid body fixed to a cable // *Mech. Solids*, 2016, vol. 51, no. 4, pp. 371–384.
21. *Zabolotnov Yu.M.* The resonance motions of a statically stable Lagrange top at small nutation angles // *JAMM*, 2016, vol. 80, no. 4, pp. 302–310.
22. *Zabolotnov Yu.M.* Resonant motions of the statically stable Lagrange spinning top // *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 5, pp. 652–668.

УДК 539.3

**КОНТАКТ С МЕЖМОЛЕКУЛЯРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ
ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОГО СЛОЯ (САМОСОГЛАСОВАННЫЙ ПОДХОД):
АНАЛИЗ ОСОБЕННОСТЕЙ ПРОЦЕССА ПОДВОДА/ОТВОДА ИНДЕНТОРА**

© 2021 г. И. А. Солдатенков^{1,*}

¹ *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**e-mail: iasoldat@hotmail.com*

Поступила в редакцию 25.05.2020 г.

После доработки 11.09.2020 г.

Принята к публикации 06.12.2020 г.

Рассматривается контакт бесконечно протяженного плоского индентора и вязкоупругого слоя в рамках самосогласованного по Дерягину подхода с поверхностным (традиционная постановка) и объемным (уточненная постановка) приложением сил межмолекулярного взаимодействия. Получены уравнения, описывающие изменение контактного зазора во времени при таком контакте. Сформулировано условие, при котором возможно скачкообразное изменение контактного зазора во времени. Выполнены расчеты, свидетельствующие о немономонном характере зависимостей контактного зазора и давления от времени в режимах подвода и отвода индентора. Показано, что традиционная и уточненная постановки задачи могут приводить к существенно различным результатам расчета характеристик контакта индентора и вязкоупругого слоя.

Ключевые слова: контактная задача, вязкоупругость, слой, межмолекулярное взаимодействие

DOI: 10.31857/S0032823521010070

При изучении контакта деформируемых тел силы межмолекулярного взаимодействия впервые учитывались применительно к герцевскому контакту [1]. В дальнейшем был разработан ряд эффективных подходов к решению контактных задач такого типа, среди которых следует отметить подходы, использующие концепцию поверхностной энергии — модели JKR и DMT [2, 3]. Эти подходы также использовались для расчета адгезионного контакта слоистых [4–7] и вязкоупругих тел [8–11].

Строгая постановка контактной задачи, учитывающая межмолекулярное взаимодействие, предполагает существование некоторого зазора l^* между контактирующими телами. Величина этого зазора должна обеспечивать баланс сил, обусловленных контактной деформацией тел и их межмолекулярным взаимодействием (самосогласованный подход по Дерягину [12]). При таком подходе возможны постановки задачи с поверхностным (традиционная постановка [13–15]) и объемным (уточненная постановка [16–19]) приложением сил межмолекулярного взаимодействия.

Одной из характерных особенностей адгезионного контакта является возможность скачкообразного изменения его параметров. Впервые подобное изменение было теоретически описано применительно к подпружиненному контакту твердых тел при наличии сил Лондона–Ван-дер-Ваальса [20]. В дальнейшем скачкообразное изменение параметров адгезионного контакта упругих тел рассматривалось во многих исследова-

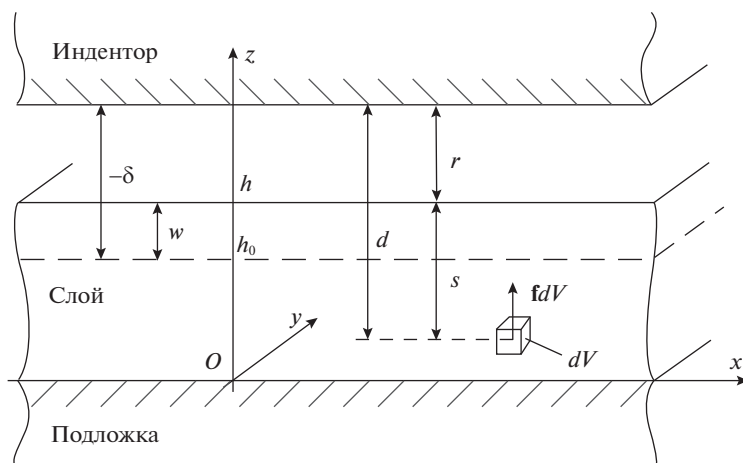


Рис. 1. Контактное взаимодействие индентора с основанием, состоящим из вязкоупругого слоя, связанного с абсолютно жесткой подложкой.

ниях, среди которых отметим работы [12–14, 21], использующие самосогласованный подход при постановке задачи.

В данной работе производится расчет контактного взаимодействия бесконечно протяженного плоского индентора с вязкоупругим слоем при наличии сил межмолекулярного взаимодействия (самосогласованный подход, традиционная и уточненная постановки задачи). Значительное внимание уделяется анализу скачкообразного изменения контактного зазора.

1. Постановка задачи. Рассмотрим контактное взаимодействие бесконечно протяженного плоского индентора и основания, состоящего из вязкоупругого слоя толщины h , связанного с подложкой (рис. 1), причем индентор и подложка являются абсолютно жесткими. Считается, что индентор и слой разделены контактным зазором r , обеспечивающим баланс сил вязкоупругого и межмолекулярного взаимодействий контактирующих тел (самосогласованный подход) [12]. Свяжем с основанием систему координат $Oxyz$, совместив ее плоскость Oxy с границей раздела слоя и подложки. Контакт индентора и слоя считается плоскопараллельным, что обуславливает зависимость всех контактных характеристик только от координаты z и времени t . Толщину слоя в недеформированном состоянии обозначим через h_0 .

Межмолекулярное взаимодействие индентора и основания определяется парными взаимодействиями их молекул (гипотеза Гамакера). Соответствующая сила F зависит от свойств пары молекул и расстояния l между ними. Существуют разные формы такой зависимости, и в дальнейшем будет использоваться известный закон Леннарда–Джонса [22]:

$$F(l) = \frac{a_1}{l^m} - \frac{a_2}{l^n}, \quad (1.1)$$

где a_1, a_2, m, n – параметры взаимодействия, причем обычно полагают $m = 7$, $n = 13$. Применительно к рассматриваемой задаче, обозначим через a_{1c}, a_{2c} параметры в законе (1.1), отвечающие взаимодействию молекул индентора и слоя, а через a_{1b}, a_{2b} – взаимодействию молекул индентора и подложки.

При определенных допущениях [14], [23, с. 205–220] суммирование парных взаимодействий молекул позволяет для каждой точки слоя рассчитать объемную силу $\mathbf{f}$, обусловленную межмолекулярным взаимодействием. Эта сила направлена вдоль оси z и зависит от расстояния $d = r + s = r + h - z$ между точкой ее приложения и индентором (рис. 1), причем толщину h слоя здесь можно заменить постоянным значением h_0 , что допустимо при малых деформациях. Таким образом, если обозначить через f_i , $i = 1, 2, 3$ компоненты объемной силы в системе координат $Ox_1x_2x_3$, то

$$f_1 = f_2 \equiv 0, \quad f_3(z, t) = f(r(t) + h_0 - z) \quad (1.2)$$

Кроме того, суммирование парных взаимодействий молекул позволяет определить силу p воздействия индентора на основание, приходящуюся на единицу площади его поверхности (верхней границы):

$$p(t) = \Phi(r(t)), \quad \Phi(r) = - \int_0^{\infty} f(r + s) ds, \quad (1.3)$$

которая в рамках самосогласованного подхода интерпретируется как контактное давление [12–14, 19].

В случае закона Леннарда–Джонса функции f и Φ имеют вид [19]

$$f(d) = \frac{b_{1\#}}{d^{m-3}} - \frac{b_{2\#}}{d^{n-3}} = \frac{b_{1\#}}{d_{e\#}^{m-3}} \left[\left(\frac{d_{e\#}}{d} \right)^{m-3} - \left(\frac{d_{e\#}}{d} \right)^{n-3} \right] \quad (1.4)$$

$$\Phi(r) = - \frac{A_{1c}}{r_{ec}^k} \left\{ \left[\left(\frac{r_{ec}}{r} \right)^k - \left(\frac{r_{ec}}{H} \right)^k \right] - \left[\left(\frac{r_{ec}}{r} \right)^l - \left(\frac{r_{ec}}{H} \right)^l \right] \right\} - \frac{A_{1b}}{r_{eb}^k} \left[\left(\frac{r_{eb}}{H} \right)^k - \left(\frac{r_{eb}}{H} \right)^l \right], \quad (1.5)$$

где $k = m - 4$, $l = n - 4$, $H = h_0 + r$,

$$b_{1\#} = \frac{2\pi N_s N_{\#} a_{1\#}}{(m-1)(m-3)}, \quad b_{2\#} = \frac{2\pi N_s N_{\#} a_{2\#}}{(n-1)(n-3)}, \quad A_{1\#} = \frac{b_{1\#}}{k}, \quad A_{2\#} = \frac{b_{2\#}}{l}$$

$$r_{e\#} = \left(\frac{A_{1\#}}{A_{2\#}} \right)^{\frac{1}{m-n}}, \quad d_{e\#} = \left(\frac{b_{1\#}}{b_{2\#}} \right)^{\frac{1}{m-n}} = \left(\frac{k}{l} \right)^{\frac{1}{m-n}} r_{e\#}$$

N_s , N_c и N_b – концентрации молекул индентора, слоя и подложки, соответственно. Символ $\#$ подразумевает индекс b (подложка) или c (слой), причем в формуле (1.4) при $d \in [r, r + h_0]$ используется индекс c , а при $d > r + h_0$ – индекс b .

Традиционная постановка контактной задачи при наличии межмолекулярного взаимодействия подразумевает, что определяемое по формуле (1.3) контактное давление прикладывается к поверхности слоя, в результате чего он деформируется [12–15]. Ниже также рассматривается уточненная постановка, в которой естественным образом предполагается, что деформация слоя порождается объемными силами (1.2), распределенными по его глубине, тогда как поверхность слоя свободна от нагрузок [16–19]. В качестве параметра нагружения слоя в обеих постановках выступает зазор r , однозначно определяющий объемную силу f_i по формуле (1.2) и контактное давление p по формуле (1.3).

Отметим, что ввиду быстрого затухания объемные силы f сконцентрированы в подповерхностной области нанометровой толщины $\sim d_{ec} \sim d_{eb}$, причем, в силу соотношения (1.3), их равнодействующая, отнесенная к элементу поверхности слоя, с точностью до знака равна p . По принципу Сен-Венана, действие таких сил на расстояниях существенно превышающих d_{ec} эквивалентно приложению контактного давления p к

поверхности слоя, что как раз отвечает традиционной постановке задачи. Таким образом, можно заключить (и это подтверждается расчетами [18, 19]), что использование уточненной постановки задачи актуально на наноуровне (масштаб $\sim d_{ec}$). На микро- или макроуровне (масштаб $\gg d_{ec}$) допустимо использование более простой традиционной постановки задачи.

В качестве контактной характеристики будем использовать внедрение δ индентора в слой, отсчитываемое от поверхности слоя в недеформированном состоянии, т.е. от уровня $z = h_0$ (рис. 1). Отметим, что внедрение δ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, причем последний случай изображен на рис. 1. Имеет место условие контакта

$$r(t) + w(t) = -\delta(t), \quad (1.6)$$

связывающее внедрение δ с зазором r и перемещением $w = h - h_0$ поверхности слоя вдоль оси z .

Считается, что до момента времени $t = 0$ взаимодействие индентора с основанием является стационарным с постоянными во времени внедрением δ^s и зазором r^s , т.е.

$$\begin{aligned} \delta(t) = \delta^s, \quad r(t) = r^s, \quad f_3(z, t) = f^s(z) = f(r^s + h_0 - z) \\ p(t) = p^s = \Phi(r^s); \quad t \leq 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

при этом выражения для объемной силы f_3 и контактного давления p получаются здесь на основе формул (1.2) и (1.3). Здесь и далее верхним индексом s обозначается стационарное состояние слоя. Вопрос определения величины r^s по заданному начальному внедрению δ^s будет рассмотрен ниже.

В момент времени $t = 0$ внедрение δ начинает изменяться некоторым заданным образом, что приводит к изменению и зазора r . Согласно формулам (1.2) и (1.3), функция $r(t)$ полностью определяет эволюцию во времени объемной силы $f_3(z, t)$ и контактного давления $p(t)$.

Деформационные свойства слоя описываются линейным законом наследственного типа [24–26]

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(z, t) = \delta_{ij} \lambda \theta(z, t) + 2\mu \epsilon_{ij}(z, t) - \\ - \delta_{ij} \int_{-\infty}^t \Lambda(t - \tau) \theta(z, \tau) d\tau - 2 \int_{-\infty}^t M(t - \tau) \epsilon_{ij}(z, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, ϵ_{ij} , σ_{ij} – компоненты тензоров деформаций и напряжений в системе координат $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $\theta = \epsilon_{kk}$, причем здесь и далее применяется правило суммирования по повторяющимся индексам. Величины λ и μ представляют собой мгновенные модули упругости (постоянные Ламе), а функции $\Lambda(t)$, $M(t)$ характеризуют вязкие свойства материала слоя и выражаются через ядра сдвиговой R_1 и объемной R_2 релаксации:

$$\Lambda(t) = \lambda R_2(t) + \frac{2}{3} \mu (R_2(t) - R_1(t)), \quad M(t) = \mu R_1(t) \quad (1.9)$$

Для построения полной системы уравнений НДС слоя соотношение (1.8) следует дополнить формулой Коши: $\epsilon_{ij}(z, t) = (u_{i,j}(z, t) + u_{j,i}(z, t))/2$ и уравнением равновесия [24, 25]:

$$\sigma_{ij,j}(z, t) + f_i(z, t) = 0, \quad (1.10)$$

в котором объемная сила f_i обусловлена межмолекулярным взаимодействием и определяется равенствами (1.2). Здесь и далее, u_i — компоненты вектора перемещений, и для записи частной производной функции используется общепринятое обозначение с запятой.

Располагая функцией $r(t)$ можно рассчитать эволюцию НДС слоя во времени [27]. В связи с этим ставится задача: при заданной зависимости внедрения δ от времени t определить изменение во времени контактного зазора r .

Далее будет рассматриваться непрерывная зависимость $\delta(t)$, отвечающая переходу слоя из начального стационарного состояния (1.7) в другое стационарное состояние, характеризуемое конечным внедрением δ_m индентора, т.е.

$$\delta(t) \in C(-\infty, \infty); \quad \delta(t) = \delta^s, \quad t \leq 0; \quad \delta(t) = \delta_m, \quad t \geq t_m, \quad (1.11)$$

где t_m — время перемещения индентора. Для такой зависимости будут рассмотрены режимы подвода индентора:

$$\dot{\delta}(t) > 0, \quad t \in (0, t_m); \quad \delta^s < \delta_m \quad (1.12)$$

и отвода индентора:

$$\dot{\delta}(t) < 0, \quad t \in (0, t_m); \quad \delta^s > \delta_m, \quad (1.13)$$

причем производная $\dot{\delta}(t)$ полагается кусочно-непрерывной при $t \in (-\infty, \infty)$.

Подобный характер изменения внедрения $\delta(t)$ позволяет допустить, что функция $r(t)$ ограничена снизу некоторой положительной величиной $r_{\min}$ и непрерывна, кроме, быть может, некоторой точки $\hat{t} > 0$, в которой она имеет разрыв первого рода (т.е. является кусочно-непрерывной):

$$0 < r_{\min} \leq r(t), \quad t \in (-\infty, \infty); \quad r(t) \in C\{(-\infty, \infty) \setminus \hat{t}\} \quad (1.14)$$

Оговоренный разрыв функции $r(t)$ при непрерывном внедрении $\delta(t)$ учитывает возможность скачкообразного изменения параметров контакта при наличии межмолекулярного взаимодействия [12–14, 21].

Кроме того, последнее равенство (1.11) позволяет допустить, что

$$r(t) \rightarrow r_m, \quad t \rightarrow \infty, \quad (1.15)$$

где r_m — значение контактного зазора в стационарном состоянии с внедрением δ_m . Вопрос определения величины r_m по заданному внедрению δ_m индентора будет рассмотрен ниже.

2. Основные уравнения. Для решения поставленной в предыдущем разделе задачи потребуются конкретизировать ядра интегральных операторов в соотношении (1.8). Не ограничивая общности рассмотрения, пренебрежем объемной ползучестью материала слоя и положим [26, с. 18]: $R_1(t) = R_0 e^{-\alpha t}$, $R_2(t) \equiv 0$, где $\alpha = 1/t_r$, t_r — время релаксации причем, из физических соображений: $0 < R_0 < \alpha$. Тогда, с учетом соотношений (1.9):

$$\left\{ \frac{\Lambda(t)}{M(t)} \right\} = \left\{ \frac{\Lambda_0}{M_0} \right\} e^{-\alpha t}, \quad \Lambda_0 = -\frac{2}{3} \mu R_0, \quad M_0 = \mu R_0 \quad (2.1)$$

Как указывалось выше, для рассматриваемого случая плоскопараллельного контакта индентора со слоем компоненты $u_i, \epsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ НДС слоя зависят только от координаты z и времени t , что приводит к равенству нулю всех этих компонент, кроме $u_3, \epsilon_{33}, \sigma_{11} = \sigma_{22}, \sigma_{33}$. При помощи равенств (1.8) и (2.1) компоненты $\sigma_{11} = \sigma_{22}, \sigma_{33}$ выражаются известным образом через поперечное (вдоль оси z) перемещение $u_3(z, t)$ слоя [27].

Подстановка таких выражений в уравнения равновесия (1.10) позволяет вывести уравнение для перемещения u_3 , из которого следует, что [27]

$$u_3(z, t) = \frac{BN_0}{\alpha} w^s(z) e^{-\beta t} - B \left[X(z, t) + BN_0 \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} X(z, \tau) d\tau \right], \quad t \geq 0, \quad (2.2)$$

где

$$B = \frac{1}{\lambda + 2\mu}, \quad B^\infty = \frac{1}{\lambda^\infty + 2\mu^\infty} = \frac{\alpha}{\beta} B, \quad N_0 = \frac{4}{3} \mu R_0, \quad \beta = \alpha - BN_0 > 0 \quad (2.3)$$

$$w^s(z) = -B^\infty X^s(z), \quad X(z, t) = \begin{pmatrix} p(t)z \\ \mathcal{R}(f_3)(z, t) \end{pmatrix}, \quad X^s(z) = \begin{pmatrix} p^s z \\ \mathcal{R}(f^s)(z) \end{pmatrix},$$

причем $\lambda^\infty, \mu^\infty$ — длительные (равновесные) модули упругости, B и B^∞ — мгновенный и длительный коэффициенты упругой податливости слоя, $w^s(z)$ — поперечное перемещение слоя в стационарном состоянии. В двух последних равенствах верхний/нижний вариант в круглых скобках отвечает традиционной/уточненной постановке задачи, а оператор $\mathcal{R}$ для произвольной функции $g(z) \in C[0, h_0]$ определяется по формуле

$$\mathcal{R}(g)(z) = \int_0^z \Omega(\xi) d\xi - \Omega(h_0)z, \quad \Omega(\xi) = \int_0^\xi g(\eta) d\eta \quad (2.4)$$

Отметим, что перемещение (2.2), как положено, удовлетворяет условию сцепления слоя с абсолютно жесткой подложкой: $u_3(0, t) = 0$. Соответствующее напряжение σ_{33} при $z = h_0$ равно нулю для уточненной постановки задачи и совпадает с отрицательным значением контактного давления p для традиционной постановки задачи. При $t = 0$ перемещение u_3 совпадает с функцией $w^s(z)$.

Введем в рассмотрение функцию $\Psi(r)$ такую, что

$$\Psi(r(t)) = \frac{1}{h_0} \mathcal{R}(f_3)(h_0, t) \quad (2.5)$$

Причем неявная зависимость правой части равенства (2.5) от времени t через функцию $r(t)$ обуславливается выражением (1.2) для компоненты f_3 объемной силы. Согласно равенствам (1.2), (2.4) и (2.5), вид функции $\Psi(r)$ зависит от формы закона парного взаимодействия молекул. В случае закона Леннард–Джонса (1.1) [19]:

$$\begin{aligned} \Psi(r) = & -\frac{A_c}{r_{ec}^k} \left\{ \left(\frac{r_{ec}}{r} \right)^k - \left(\frac{r_{ec}}{r} \right)^l - \frac{r_{ec}}{(k-1)h_0} \left[\left(\frac{r_{ec}}{r} \right)^{k-1} - \left(\frac{r_{ec}}{H} \right)^{k-1} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{r_{ec}}{(l-1)h_0} \left[\left(\frac{r_{ec}}{r} \right)^{l-1} - \left(\frac{r_{ec}}{H} \right)^{l-1} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Введем обозначение:

$$Z(r) = \begin{pmatrix} \Phi(r) \\ \Psi(r) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

используя для него прежнее правило интерпретации верхнего и нижнего вариантов. Отметим следующие свойства функции $Z(r)$:

$$Z(r) \in C^\infty(0, \infty), \quad Z(r(t)) \in C\{(-\infty, \infty) \setminus \hat{t}\} \quad (2.8)$$

первое из которых является следствием выражений (1.5) и (2.6) для функций $\Phi(r)$ и $\Psi(r)$, а второе, означающее кусочную непрерывность $Z(r(t))$ как функция времени t , обеспечивается условиями (1.14) и первым свойством (2.8). Кроме того, принимая во внимание определение (2.3) функции $X(z, t)$ и учитывая равенства (1.3), (1.7) и (2.5), можно установить, что

$$X(h_0, t) = h_0 Z(r(t)), \quad X^s(h_0) = h_0 Z(r^s) \equiv h_0 Z^s \quad (2.9)$$

Используя равенства (2.9), положим в формуле (2.2) $z = h_0$ и получим выражение для граничного перемещения $w(t) = u_3(h_0, t)$. Подставив это выражение в условие контакта (1.6), придем к следующему интегральному уравнению относительно зазора $r(t)$:

$$Bh_0 Z(r(t)) - r(t) = \delta^*(t), \quad t \in [0, \infty) \quad (2.10)$$

в котором

$$\delta^*(t) = \delta(t) - BN_0 I_z(t) \in C[0, \infty) \quad (2.11)$$

$$I_z(t) = Bh_0 \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} Z(r(\tau)) d\tau + \frac{Bh_0}{\beta} Z^s e^{-\beta t} \in C[0, \infty) \quad (2.12)$$

Указанная здесь непрерывность функции $\delta^*(t)$ обеспечивается условием (1.11) и свойством (2.12) непрерывности функции $I_z(t)$, причем это свойство является следствием допущения (2.8) [28].

Отметим некоторые свойства производной $\dot{I}_z(t)$. Дифференцирование правой части выражения (2.12) по времени t позволяет установить, что

$$\dot{I}_z(t) = Bh_0 Z(r(t)) - \beta I_z(t) = \frac{\beta}{BN_0} \left[B^\infty h_0 Z(r(t)) - r(t) - \delta(t) \right] \in C\{[0, \infty) \setminus \hat{t}\} \quad (2.13)$$

при этом второе равенство получается из первого с учетом уравнения (2.10) и указанных выше соотношений $\alpha = \beta + BN_0$, $\alpha B = \beta B^\infty$. Если функция $r(\tau)$ является гладкой на отрезке $[0, t]$, то выполняя в выражении (2.12) интегрирование по частям и подставляя результат в первое равенство (2.13), можно получить еще одно выражение для производной функции $I_z(t)$:

$$\dot{I}_z(t) = Bh_0 \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} Z'(r(\tau)) \dot{r}(\tau) d\tau, \quad \dot{r}(\tau) \in C[0, t] \quad (2.14)$$

На основе интегрального уравнения (2.10) можно вывести следующее дифференциальное уравнение относительно зазора $r(t)$:

$$\dot{r}(t) = F_z(t, r(t)), \quad t \in [0, \infty) \setminus \hat{t}, \quad (2.15)$$

в котором

$$F_z(t, r) = \frac{\delta^*(t)}{Bh_0 Z'(r) - 1} = \frac{\delta(t) - \beta \left[B^\infty h_0 Z(r) - r - \delta(t) \right]}{Bh_0 Z'(r) - 1} \quad (2.16)$$

Первое выражение (2.16) для функции $F_z(t, r)$ получается непосредственно из продифференцированного по времени t уравнения (2.10), тогда как для вывода второго выражения следует дополнительно воспользоваться выражением (2.11), предварительно исключив из него производную $\dot{I}_z(t)$ с помощью второго равенства (2.13).

Решение дифференциального уравнения (2.15) ищется при начальном условии:

$$r(0) = r^s, \quad (2.17)$$

причем для построения решения в окрестности точки $\hat{t}$ разрыва используется специальная процедура, описанная ниже (раздел 4).

Уравнение (2.10) также позволяет получить соотношение, связывающее начальный r^s и конечный r_m зазоры с соответствующими внедрениями δ^s и δ_m в оговоренных выше стационарных состояниях слоя. Рассмотрим для определенности второе состояние, формирование которого, согласно допущениям (1.11) и (1.15), обуславливается асимптотиками вида $\delta(t) \rightarrow \delta_m$, $r(t) \rightarrow r_m$ при $t \rightarrow \infty$. При таком поведении функции $r(t)$ интеграл в правой части равенства (2.12) также обладает асимптотикой, которая позволяет установить, что $I_z(t) \rightarrow \beta^{-1} B h_0 Z(r_m)$ при $t \rightarrow \infty$. Осуществляя в уравнении (2.10) предельный переход $t \rightarrow \infty$ с учетом указанных асимптотик, приходим к следующему равенству:

$$r_m - B h_0 Z(r_m) = \frac{B N_0}{\beta} B h_0 Z(r_m) - \delta_m$$

Аналогичное равенство имеет место для исходного стационарного состояния с внедрением δ^s и зазором r^s . Учитывая это, а также выражение (2.3) для параметра B^∞ , получим искомое соотношение:

$$D^\infty \left(\begin{Bmatrix} r^s \\ r_m \end{Bmatrix} \right) = \left\{ \delta^s \right\}, \quad (2.18)$$

где $D^\infty(r) \equiv B^\infty h_0 Z(r) - r$. Это соотношение можно рассматривать как уравнение относительно начального r^s и конечного r_m значений контактного зазора при заданных параметрах δ^s и δ_m закона (1.11)–(1.13) внедрения индентора.

Интегральное уравнение (2.10) или эквивалентное ему дифференциальное уравнение (2.15) определяют изменение зазора r в процессе контактного взаимодействия индентора с основанием. Располагая функцией $r(t)$, можно с помощью равенства (1.6) определить граничное перемещение w , а по формулам (1.8), (2.2) и (2.3) рассчитать НДС слоя в любой момент времени t [27].

3. Общий анализ контактного взаимодействия индентора преследует своей целью выявление характерных особенностей функции $r(t)$ как решения интегрального (2.10) или дифференциального (2.15) уравнений. Эти особенности будут в дальнейшем (раздел 4) учитываться при построении численного решения дифференциального уравнения (2.15).

Укажем вначале некоторые:

3.1. *Особенности произведения $B h_0 Z(r)$, присутствующего в уравнениях (2.10) и (2.15), как функции переменной r .* Для этого отметим, что определяемые по формулам (1.5) и (2.6) функции $\Phi(r)$ и $\Psi(r)$ строятся на основе закона Леннарда–Джонса (1.1) и сохраняют присущие ему характерные особенности [22, 23] – в окрестности нуля они неограниченно возрастают, а при увеличении аргумента r проходят через локальный минимум и стремятся к нулю, оставаясь отрицательными. Очевидно, что аналогичным образом ведут себя и произведения $B h_0 \Phi(r)$ и $B h_0 \Psi(r)$. Функция $B h_0 Z(r)$, представляющая их на основе правила (2.7), схематично изображена на рис. 2.

Как будет показано ниже, поведение контактного зазора $r(t)$ в процессе взаимодействия индентора с основанием существенным образом зависит от того, какой из следующих случаев имеет место:

$$B h_0 Z'(r) \leq 1, \quad r \in (0, \infty) \quad (3.1)$$

или (рис. 2)

$$B h_0 Z'(r) < 1, \quad r \in (0, r_-) \cup (r_+, \infty); \quad B h_0 Z'(r) > 1, \quad r \in (r_-, r_+), \quad (3.2)$$

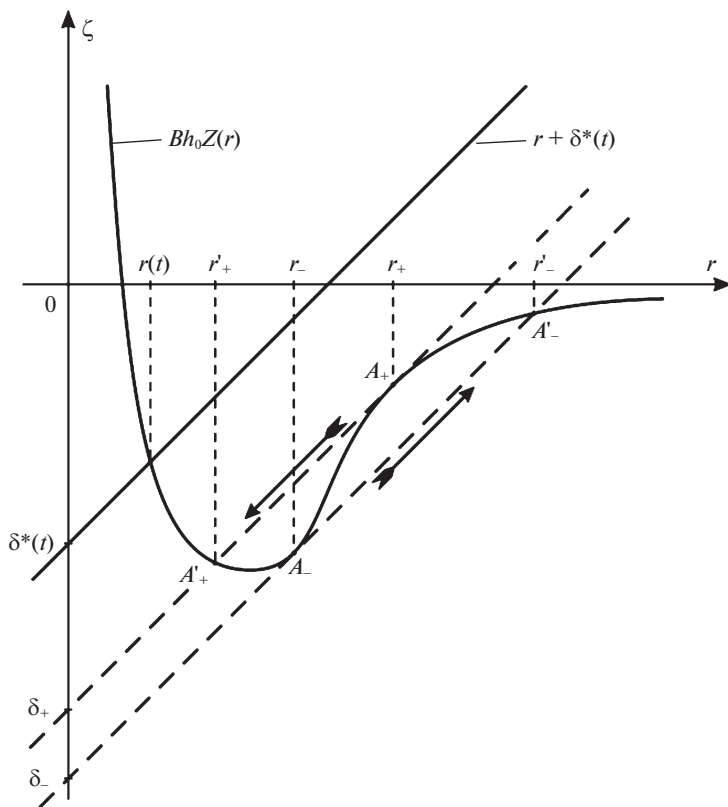


Рис. 2. Графическое представление решения уравнения (2.10).

причем в последнем случае величины r_+ , r_- определяются равенством

$$Bh_0 Z'(r_{\pm}) = 1 \quad (3.3)$$

Опишем некоторые геометрические свойства функции $Bh_0 Z(r)$ в случае (3.2).

В силу равенства (3.3), кривая $\zeta = Bh_0 Z(r)$ в точке $A_{\pm}$, имеющей координату $r_{\pm}$, касается прямой $\zeta = r + \delta_{\pm}$ (рис. 2), причем

$$\delta_{\pm} = D(r_{\pm}), \quad D(r) \equiv Bh_0 Z(r) - r \quad (3.4)$$

Кроме того, каждой точке $A_{\pm}$ кривой $\zeta = Bh_0 Z(r)$ соответствует точка $A'_{\pm}$ пересечения этой кривой с прямой $\zeta = r + \delta_{\pm}$ (рис. 2). Координата $r'_{\pm}$ точки $A'_{\pm}$ удовлетворяет равенству

$$D(r'_{\pm}) = D(r_{\pm}) \quad (3.5)$$

Принципиальное различие случаев (3.1) и (3.2) заключается в том, что в первом случае любая прямая $\zeta = r + \delta^*$ пересекает кривую $\zeta = Bh_0 Z(r)$ только в одной точке, тогда как во втором случае это имеет место только, если $\delta^* \in (-\infty, \delta_-) \cup (\delta_+, \infty)$ (рис. 2). При остальных значениях δ^* число точек пересечения может достигать трех.

Указанные свойства функции $Bh_0Z(r)$ остаются в силе и для функции $B^\infty h_0Z(r)$ при формальной замене B на B^∞ . Соответствующие формулы ниже будут помечаться символом “ ∞ ”. В частности, в случае $(3.2)^\infty$ по формулам $(3.3)^\infty$ и $(3.4)^\infty$ можно ввести рассмотрение величины $r_\pm^\infty$ и $\delta_\pm^\infty$. После этого можно установить, что любая прямая $\zeta = r + \delta^*$ пересекает кривую $\zeta = B^\infty h_0Z(r)$ только в одной точке, если (рис. 2)

$$\delta^* \in (-\infty, \delta_-^\infty) \cup (\delta_+^\infty, \infty) \quad (3.6)$$

В случае $(3.1)^\infty$ указанные линии всегда пересекаются в одной точке.

Применительно к уравнению (2.18), решение которого совпадает с координатой точки пересечения кривой $\zeta = B^\infty h_0Z(r)$ и прямой $\zeta = r + \delta^*$, $\delta^* = \begin{cases} \delta^s \\ \delta_m \end{cases}$, вышесказанное позволяет заключить, что в случае $(3.1)^\infty$ это уравнение однозначно разрешимо относительно величин r^s и r_m при любых значениях δ^s и δ_m . В случае $(3.2)^\infty$ также можно обеспечить существование однозначного решения уравнения (2.18), если воспользоваться результатом (3.6) и наложить на значения δ^s и δ_m соответствующие ограничения, а именно:

$$\begin{aligned} \delta^s < \delta_-^\infty, \quad \delta_+^\infty < \delta_m & - \text{подвод индентора} \\ \delta_+^\infty < \delta^s, \quad \delta_m < \delta_-^\infty & - \text{отвод индентора} \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.2. Анализ разрывов функции $r(t)$. Рассмотрим уравнение (2.10), и заметим, что значение его решения $r(t)$ в каждый момент времени совпадает с координатой точки пересечения кривой $\zeta = Bh_0Z(r)$ и прямой $\zeta = r + \delta^*(t)$ (рис. 2). В случае (3.1) эта точка определяется однозначно, так что при непрерывном, согласно условию (2.11), изменении во времени величины $\delta^*(t)$ соответствующая величина $r(t)$ также изменяется непрерывно. Подобное поведение функции $r(t)$ согласуется с дифференциальным уравнением (2.15), правая часть которого не имеет особенностей при наличии неравенства (3.1). С точки зрения аналитического анализа, случай (3.1) представляется тривиальным и в данном разделе рассматриваться не будет.

Однако в случае (3.2) решение $r(t)$ уравнение (2.10) может иметь разрывы. Действительно, если величина $\delta^*(t)$, монотонно возрастаая в некоторый момент времени t_+ проходит значение δ_+ , то в этот момент точка пересечения кривой $\zeta = Bh_0Z(r)$ и прямой $\zeta = r + \delta^*(t)$ должна мгновенно поменяться с A_+ на A'_+ , а соответствующее значение $r(t)$ — с r_+ на r'_+ (рис. 2). Аналогично, если величина $\delta^*(t)$, монотонно убывая в некоторый момент времени t_- проходит значение δ_- , то в этот момент точка пересечения кривой $\zeta = Bh_0Z(r)$ и прямой $\zeta = r + \delta^*(t)$ должна мгновенно поменяться с A_- на A'_- , а соответствующее значение $r(t)$ — с r_- на r'_- (рис. 2).

Таким образом, в случае (3.2) возможно скачкообразное изменение зазора $r(t)$:

$$r(t_+ - 0) = r_+, \quad r(t_+ + 0) = r'_+ - \text{скачок} \quad r_+ \rightarrow r'_+ \quad (3.8)$$

$$r(t_- - 0) = r_-, \quad r(t_- + 0) = r'_- - \text{скачок} \quad r_- \rightarrow r'_- \quad (3.9)$$

Момент времени $t_{\pm}$ скачка удовлетворяет равенству $\delta^*(t_{\pm}) = \delta_{\pm}$ и представляет собой точку $\hat{t}$ разрыва функции $r(t)$, оговоренную в условии (1.14). Здесь и далее используется общепринятая сокращенная запись пределов функции слева и справа:

$$f(a-0) \equiv \lim_{x \rightarrow a-0} f(x), \quad f(a+0) \equiv \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

Описанное выше поведение функции $r(t)$ согласуется с дифференциальным уравнением (2.15), правая часть которого, в силу первого неравенства (3.2) и равенства (3.3), имеет сингулярные особенности при $r(t) \rightarrow r_{\pm} \pm 0$. Как будет показано ниже, скачок $r_+ \rightarrow r'_+$ реализуется при подводе индентора (условие (1.12)), тогда как скачок $r_- \rightarrow r'_-$ — при его отводе (условие (1.13)).

Отметим, что значения $r_{\pm}$ и $r'_{\pm}$ можно считать известными, т.к. они являются корнями алгебраических уравнений (3.4) и (3.5). Однако значение $t_{\pm}$ заранее неизвестно и определяется в ходе решения уравнения (2.10) или (2.15) как момент достижения функцией $r(t)$ значения $r_{\pm}$.

Аналогичное рис. 2 графическое представление скачкообразного изменения контактного зазора встречается в работе [29] применительно к подпружиненному адгезионному контакту твердых тел.

Наличие скачка (3.8) или (3.9) в случае (3.2), очевидно, зависит от возможности достижения зазором $r(t)$ значения $r_{\pm}$ с течением времени. Кроме того, предполагаемый выше монотонный характер функции $\delta^*(t)$ в окрестности ее значений $\delta_{\pm}$, согласно равенствам (2.11) и (2.12), зависит от поведения функции $r(\tau)$ при $\tau \in [0, t]$. Таким образом, описанное выше скачкообразное изменение контактного зазора может быть установлено и проанализировано только путем построения соответствующей функции $r(t)$, как решения интегрального (2.10) или дифференциального (2.15) уравнения. Тем не менее, можно выявить ряд характерных особенностей скачкообразного изменения функции $r(t)$, исходя из некоторых общих допущений относительно ее свойств. Сделаем это, считая внедрение индентора гладким на отрезке $[0, t_m]$, т.е.

$$\dot{\delta}(t) \in C[0, t_m] \quad (3.10)$$

при условии, что $\dot{\delta}(0) = \dot{\delta}(0+0)$, $\dot{\delta}(t_m) = \dot{\delta}(t_m-0)$.

Предположим, что в режиме (1.12) подвода индентора функция $r(t)$ монотонно убывает, достигая значения r_+ в момент времени t_+ , когда происходит скачок $r_+ \rightarrow r'_+$ (3.8). В этом случае, при $t \in [0, t_+)$: $r_+ < r(t)$ и, следовательно, в силу первого неравенства (3.2), $Bh_0 Z'(r(t)) - 1 < 0$. Последнее неравенство и свойства (1.14), (3.10) позволяют на основе уравнения (2.15) установить непрерывность производной $\dot{r}(t)$ на промежутке $[0, t_+)$. Вышесказанное позволяет записать следующие соотношения:

$$\dot{r}(t) < 0, \quad t \in [0, t_+); \quad \dot{r}(t) \in C[0, t_+) \quad (3.11)$$

В связи со сделанным предположением о монотонном убывании функции $r(t)$ заметим, что вначале процесса подвода индентора: $\dot{r}(t) < 0$, если дополнительно к условию (1.12) допустить неравенство $0 < \dot{\delta}(0+0)$. Этот результат непосредственно следует из уравнения (2.15) с учетом уравнения (2.18) для r^s и первого неравенства (3.2) при $r = r^s > r_+$.

Аналогичным образом, предполагая, что в режиме (1.13) отвода индентора функция $r(t)$ монотонно возрастает до скачка $r_- \rightarrow r'_-$ (3.9), можно записать соотношения

$$0 < \dot{r}(t), \quad t \in [0, t_-); \quad \dot{r}(t) \in C[0, t_-) \quad (3.12)$$

Дальнейшие выкладки для краткости ограничим рассмотрением режима (1.12) подвода индентора, отметив, что они без труда переносятся на случай режима (1.13) отвода индентора.

Свойства (3.11) функции $r(t)$ позволяют использовать для производной $\dot{I}_z(t)$ на промежутке $[0, t_+)$ представление (2.14), подынтегральное выражение в котором принимает только отрицательные значения, т.к. $0 < Z'(r)$ при $r_+ < r$ (рис. 2). Таким образом, оказывается, что

$$\dot{I}_z(t) < 0, \quad t \in [0, t_+) \quad (3.13)$$

и, следовательно, с учетом выражения (2.11) и условия (1.12):

$$0 < \delta^*(t), \quad t \in [0, t_+) \quad (3.14)$$

Покажем, что неравенство (3.14) сохраняется некоторое время после скачка (3.8), т.е. имеет место предполагаемое монотонное возрастание функции $\delta^*(t)$ в окрестности ее значения δ_+ . Для этого воспользуемся выражением (2.13) и установим, что производная $\dot{I}_z(t)$ в точке $t = t_+$ имеет конечные пределы слева и справа:

$$\dot{I}_z(t_+ - 0) = Bh_0 Z(r_+) - \beta I_z(t_+), \quad \dot{I}_z(t_+ + 0) = Bh_0 Z(r'_+) - \beta I_z(t_+) \quad (3.15)$$

При записи формул (3.15) учтены соответствующие пределы (3.8) функции $r(t)$ и принято во внимание свойство (2.12) непрерывности функции $I_z(t)$. Исключая из формул (3.15) величину $I_z(t_+)$, можно получить равенство

$$\dot{I}_z(t_+ + 0) = \dot{I}_z(t_+ - 0) + [Bh_0 Z(r'_+) - Bh_0 Z(r_+)]$$

правая часть которого отрицательна, т.к. $\dot{I}_z(t_+ - 0) \leq 0$ в силу неравенства (3.13) и отрицательной является разность в квадратных скобках — это с очевидностью следует из рис. 2. Таким образом, оказывается, что предел $\dot{I}_z(t_+ + 0)$ является отрицательным и, поэтому, по известной теореме об устойчивости знака непрерывной функции [28], этим свойством производная $\dot{I}_z(t)$ обладает в некоторой окрестности точки t_+ , т.е. $\dot{I}_z(t) < 0$, $t \in (t_+, t_+ + \varepsilon)$, где ε — сколь угодно малая положительная величина. Из последнего неравенства с учетом равенства (2.11) и условия (1.12) получается требуемый результат:

$$0 < \delta^*(t), \quad t \in (t_+, t_+ + \varepsilon) \quad (3.16)$$

Проведенные выкладки позволяют также установить существование положительных односторонних пределов функции $\delta^*(t)$ в точке t_+ :

$$0 < \delta^*(t_+ \pm 0) \quad (3.17)$$

Действительно, это непосредственно следует из равенства (2.11) при учете условия (3.10) и формул (3.15).

3.3. *Характер поведения функции $r(t)$ в окрестности точки разрыва*, т.е. при $t \rightarrow t_+ \pm 0$, можно определить с помощью дифференциального уравнения (2.15), используя в нем первое выражение (2.16) для функции $F_z(t, r)$. Осуществим в этом уравнении предельный переход $t \rightarrow t_+ + 0$, учитывая второй предел (3.8). В результате установим, что

$$\dot{r}(t_+ + 0) = \frac{\delta^*(t_+ + 0)}{Bh_0 Z'(r'_+) - 1} < 0, \quad (3.18)$$

причем справедливость неравенства (3.18) обеспечивается неравенствами (3.17) и $Bh_0 Z'(r'_+) - 1 < 0$, последнее из которых имеет место в силу первого неравенства (3.2) при том, что $r'_+ < r_-$ (рис. 2). Таким образом, производная $\dot{r}(t)$, как и сама функция $r(t)$, имеет конечный предел при $t \rightarrow t_+ + 0$.

Однако получить аналогичное (3.18) выражение для $\dot{r}(t_+ - 0)$ не удастся, т.к., в силу первого предельного соотношения (3.8) и равенства (3.3), знаменатель в правой части уравнения (2.15) при $t \rightarrow t_+ - 0$ стремится к нулю слева, а сама правая часть, соответственно, к $-\infty$. Данное обстоятельство требует более детального анализа поведения функции $r(t)$ при $t \rightarrow t_+ - 0$.

Приступая к такому анализу, примем во внимание существование конечного предела $\dot{\delta}^*(t_+ - 0)$ и положим по непрерывности $\dot{\delta}^*(t_+) = \dot{\delta}^*(t_+ - 0)$, так что

$$\dot{\delta}^*(t) \in C[0, t_+]; \quad 0 < \dot{\delta}^*(t), \quad t \in [0, t_+] \quad (3.19)$$

Указанная непрерывность функции $\dot{\delta}^*(t)$ обуславливается свойствами (2.13) и (3.10) при наличии выражения (2.11), тогда как неравенство (3.19) является следствием неравенств (3.14) и (3.17).

Учитывая свойство (2.8) функции $Z(r)$, воспользуемся для ее производной формулой Тейлора [28]

$$Z'(r) = Z'(r_+) + Z''(\rho(r))(r - r_+), \quad r \in [r_+, \infty), \quad (3.20)$$

причем $\rho(r)$ некоторая функция, о которой известно только то, что $\rho(r) \in [r_+, r]$ и поэтому имеет место предельное соотношение $\rho(r_+ + 0) = r_+$. Принимая во внимание это соотношение и условие (1.14), положим по непрерывности

$$\rho(r_+) = \rho(r_+ + 0) = r_+, \quad r(t_+) = r(t_+ - 0) = r_+ \quad (3.21)$$

Отметим, что при втором допущении (3.21) и условии (1.14) функцию $r(t)$ можно считать непрерывной на отрезке $[0, t_+]$.

Введем в рассмотрение функции $Z_1(r)$ и $Z_2(t)$ такие, что

$$Z_1(r) = Z''(\rho(r)), \quad Z_2(t) = Z_1(r(t)) \quad (3.22)$$

$$Z_2(t_+) = Z_1(r_+) = Z''(\rho(r_+)) = Z''(r_+) < 0, \quad (3.23)$$

причем последние равенства имеют место в силу условий (3.21), а справедливость неравенства обуславливается выпуклостью функции $Z(r)$ в окрестности точки r_+ (рис. 2).

Определяемая равенством (3.22) функция $Z_1(r)$ непрерывна на интервале (r_+, ∞) — это следует из формулы (3.20) при условии (2.8) непрерывности производной $Z'(r)$. Кроме того, в силу равенств (3.21)–(3.23): $Z_1(r_+ + 0) = Z_1(r_+)$, т.е. функция $Z_1(r)$ непрерывна в точке r_+ справа. Таким образом, оказывается, что $Z_1(r) \in C[r_+, \infty)$.

Установленные выше свойства непрерывности функций $r(t)$ и $Z_1(r)$ обеспечивают непрерывность сложной функции $Z_1(r(t))$ при $t \in [0, t_+]$ [28], поэтому, на основе второго равенства (3.22):

$$Z_2(t) \in C[0, t_+] \quad (3.24)$$

Кроме того, согласно соотношениям (3.23): $Z_2(t_+) < 0$, так что, по известной теореме об устойчивости знака непрерывной функции [28]

$$Z_2(t) < 0, \quad t \in [t_+ - \varepsilon, t_+], \quad (3.25)$$

где ε — сколь угодно малая положительная величина.

Использование функции $Z_2(t) \equiv Z''(\rho(r(t)))$ и учет равенства (3.3) в формуле (3.20) позволяет записать выражение

$$Bh_0 Z'(r(t)) = 1 + Bh_0 Z_2(t)[r(t) - r_+],$$

с помощью которого дифференциальному уравнению (2.15) можно придать следующий вид:

$$\dot{r}(t) = \frac{K(t)}{r_+ - r(t)}, \quad (3.26)$$

где

$$K(t) \equiv \frac{-\dot{\delta}^*(t)}{Bh_0 Z_2(t)} \in C[t_+ - \varepsilon, t_+]; \quad 0 < K(t) < \infty, \quad t \in [t_+ - \varepsilon, t_+] \quad (3.27)$$

Указанные свойства функции $K(t)$ обеспечиваются соотношениями (3.19), (3.24) и (3.25).

Интегрирование уравнения (3.26) позволяет установить, что

$$0 = \frac{1}{2}[r(t) - r_+]^2 + \int_{t_+}^t K(\xi) d\xi = \frac{1}{2}[r(t) - r_+]^2 + K(\tau(t))(t - t_+), \quad (3.28)$$

причем второе равенство (3.28) получается с помощью теоремы о среднем [28], $\tau(t) \in [t, t_+]$, $\tau(t_+ - 0) = t_+$. Из этого равенства следует, что

$$r(t) = r_+ + \sqrt{2K(\tau(t))(t - t_+)}, \quad t \in [t_+ - \varepsilon, t_+], \quad (3.29)$$

при этом существует конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow t_+ - 0} K(\tau(t)) = K(t_+) = \frac{-\dot{\delta}^*(t_+ - 0)}{Bh_0 Z''(r_+)} \quad (3.30)$$

Справедливость равенств (3.30) обеспечивается соотношениями (3.23), (3.27) и предельным соотношением $\tau(t_+ - 0) = t_+$.

Поведение функции $r(t)$ в окрестности точки t_- в режиме (1.13) отвода индентора описывается аналогичными формулами:

$$\dot{r}(t_- + 0) = \frac{\dot{\delta}^*(t_- + 0)}{Bh_0 Z'(r'_-) - 1} > 0 \quad (3.31)$$

$$r(t) = r_- - \sqrt{2K(\tau(t))(t_- - t)}, \quad t \in [t_- - \varepsilon, t_-], \quad (3.32)$$

причем

$$\lim_{t \rightarrow t_- - 0} K(\tau(t)) = K(t_-) = \frac{-\dot{\delta}^*(t_- - 0)}{Bh_0 Z''(r_-)}$$

Таким образом, выражения (3.29) и (3.32) свидетельствуют о том, что перед скачком $r_{\pm} \rightarrow r'_{\pm}$ зазор $r(t)$ изменяется по корневому закону. Соответствующая скорость $\dot{r}(t)$ изменения зазора стремится к $\mp \infty$, что согласуется с описанным ранее поведением правой части дифференциального уравнения (2.15) при $t \rightarrow t_{\pm} - 0$. После скачка $r_{\pm} \rightarrow r'_{\pm}$, согласно выражениям (3.18) и (3.31), зазор $r(t)$ изменяется с конечной скоростью без каких-либо особенностей.

Выявленные особенности поведения функции $r(t)$ качественно сохраняются для объемной силы $f_3(z, t)$ и контактного давления $p(t)$, т.к. они определяются величиной зазора r через гладкие функции $f(d)$ и $\Phi(r)$ согласно формулам (1.2) и (1.3). Некоторые из этих особенностей будут продемонстрированы в следующем разделе на примерах численного решения дифференциального уравнения (2.15).

Замечание 1. Реализация случая (3.2) и, соответственно, возможность скачкообразного изменения зазора $r(t)$, зависит только от коэффициента B упругой податливости слоя, его толщины h_0 и физических параметров межмолекулярного взаимодействия, входящих в выражения (1.5), (2.6) для функции $\Phi(r), \Psi(r)$. Только от этих величин, согласно уравнениям (3.4) и (3.5), зависят начальное $r_{\pm}$ и конечное $r_{\pm}'$ значения зазора r при скачке (3.8) или (3.9). Вязкие свойства материала слоя (— параметры ядер релаксации в законе (1.8)) не оказывают влияния на возможность скачка зазора r и на его параметры $r_{\pm}$ и $r_{\pm}'$.

Замечание 2. Случай (3.1) имеет место при достаточно малых значениях коэффициента B упругой податливости слоя, отвечающих, согласно выражению (2.3), высоким значениям модулей λ, μ упругости. Напротив, случай (3.2), при котором возможны скачки (3.8) и (3.9), реализуется при достаточно малых значениях коэффициента B и низких модулях λ, μ , т.е. для мягкого слоя. Такой вывод согласуется с известным результатом о появлении скачков в адгезионном контакте упругих тел при больших значениях параметра Тейбора, характеризующего степень упругой деформации, вызванной межмолекулярным взаимодействием [12, 14, 21].

Замечание 3. При традиционной постановке задачи, используя уравнение (2.10), можно построить зависимость контактного давления p от величины $a = -\delta^*$, которая для упругого слоя (т.е. при $N_0 = 0$) совпадает с отрицательным значением внедрения δ и характеризует сближение индентора со слоем (рис. 3). В случае (3.2) эта зависимость является неоднозначной (S-образной), причем в режиме подвода и отвода индентора скачку (3.8) или (3.9) отвечает скачок $\alpha_+ \alpha'_+$ или $\alpha_- \alpha'_-$, показанный на рис. 3. Подобные зависимости контактной нагрузки от сближения тел встречается во многих исследованиях адгезионного контакта упругих тел, среди которых можно отметить работы [12, 14, 21].

4. Численный анализ контактного взаимодействия индентора с основанием выполнялся на основе решения дифференциального уравнения (2.15) относительно функции $r(t)$ с использованием численного метода Рунге—Кутты четвертого порядка точности [30]. В случае (3.1), когда правая часть уравнения (2.15) не имеет особенностей, применение этого метода не встречает затруднений. Однако в случае (3.2) при решении уравнения (2.15) возникают две проблемы, обусловленные наличием сингулярной особенности правой части этого уравнения в точке $t_{\pm}$. Укажем эти проблемы и способы их устранения на примере режима подвода индентора.

Первая проблема связана с асимптотикой $\dot{r}(t) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow t_+ - 0$ и $r(t) \rightarrow r_+ + 0$, которая имеет место согласно формуле (3.29). Подобное поведение функции $r(t)$, в частности, существенно осложняет расчет момента t_+ скачка $r_+ \rightarrow r'_+$ (3.8) этой функции. Устранить эту проблему можно, если в окрестности $t_+ - 0$ вместо искомой функции $r(t)$ использовать обратную к ней функцию $t(r)$, что допустимо при условии (3.11) монотонности функции $r(t)$. Дифференциальное уравнение для функции $t(r)$ получается непосредственно из уравнения (2.15) и имеет вид

$$t'(r) = [F_z(t(r), r)]^{-1} \quad (4.1)$$

Правая часть уравнения (4.1) не имеет особенностей в окрестности $r_+ + 0$ значений переменной r и само уравнение может быть решено методом Рунге—Кутты, например, на отрезке $[r_+, r^s]$ при начальном условии $t(r^s) = 0$. Найденное решение $t(r)$ определяет функцию $r(t)$ на отрезке $[0, t_+]$ и момент t_+ как значение $t(r_+)$.

Вторая проблема, возникающая при решении уравнения (2.15) в случае (3.2), связана с наличием скачка $r_+ \rightarrow r'_+$ (3.8) функции $r(t)$. Это не позволяет использовать единую процедуру численного решения уравнения (2.15) (или (4.1)) на всем промежутке

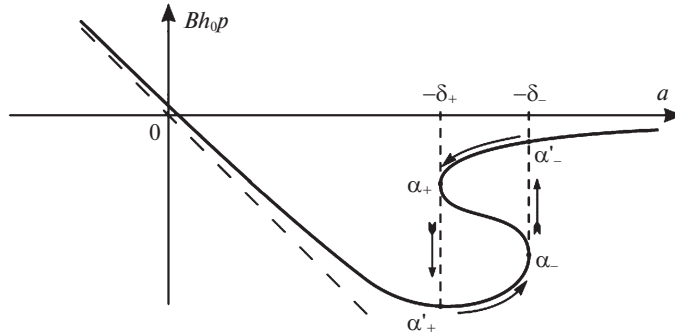


Рис. 3. Графическое представление зависимости контактного давления от сближения.

времени $[0, \infty)$ с начальным условием (2.17). Устранить проблему такого типа можно, если организовать новую процедуру численного решения уравнения (2.15) на промежутке времени $[t_+, \infty)$, т.е. после скачка $r_+ \rightarrow r'_+$, с начальным условием

$$r(t_+) = r'_+ \quad (4.2)$$

Отметим, что, согласно результатам предыдущего раздела, правая часть уравнения (2.15) не имеет особенностей в окрестности $t_+ + 0$, поэтому применение метода Рунге–Кутты для решения этого уравнения на промежутке $[t_+, \infty)$ при условии (4.2) не встречает затруднений.

Использование описанных выше процедур учета сингулярной особенности правой части дифференциального уравнения (2.15) позволяет применить к нему известную теорему существования и единственности решения [31].

Расчеты проводились при следующих значениях параметров задачи: $m = 7$, $n = 13$, $r_{ec} = 1$ нм, $r_{eb} = 0.5 r_{ec}$, $R_0 = 0.8 \text{ с}^{-1}$, $t_r = 1$ с, $h_0 = 2$ нм (тонкий слой) или $h_0 = 5$ нм (толстый слой). Кроме того, полагалось, что $A_{lc} = (6\pi)^{-1} A_H$ [12] и $A_{lb} = 10 A_{lc}$, где A_H – постоянная Гамакера, $A_H = 10^{-19}$ Дж. Были рассмотрены два варианта упругих свойств слоя: $\lambda = 1.0417$ МПа, $\mu = 1.5625$ МПа (мягкий слой) и $\lambda = 2.0833$ МПа, $\mu = 3.1250$ МПа (жесткий слой), которым отвечают значения $B = 0.24 \text{ МПа}^{-1}$ и $B = 0.12 \text{ МПа}^{-1}$ мгновенного коэффициента упругой податливости слоя.

Изменение внедрения индентора за время t_m от начального δ^s до конечного δ_m значений считалось линейным:

$$\delta(t) = \begin{cases} \delta^s, & t \leq 0 \\ \delta^s + (\delta_m - \delta^s)t/t_m, & t \in (0, t_m), \\ \delta_m, & t \geq t_m \end{cases} \quad (4.3)$$

причем $\delta^s < \delta_m$ для режима подвода индентора и $\delta^s > \delta_m$ для режима отвода индентора. При расчетах полагалось, что $t_m = 2t_r$ (быстрое перемещение индентора) или $t_m = 40t_r$ (медленное перемещение индентора),

$$\begin{aligned} \delta^s &= -4r_{ec}, & \delta_m &= 0.1r_{ec} - \text{подвод индентора} \\ \delta^s &= 0.1r_{ec}, & \delta_m &= -4r_{ec} - \text{отвод индентора} \end{aligned} \quad (4.4)$$

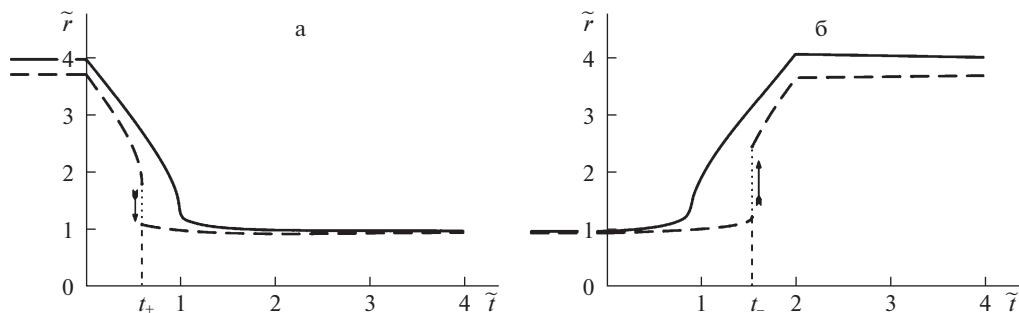


Рис. 4. Зависимости контактного зазора от времени в режиме подвода (а) и отвода (б) индентора (тонкий мягкий слой).

Выбор (4.4) значений δ^s и δ_m означает, что отвод индентора начинается из его конечного положения в режиме подвода, и за цикл “подвод—отвод” индентор возвращается в исходное положение. Кроме того, выбранные значения δ^s и δ_m удовлетворяют условию (3.7) существования однозначного решения уравнения (2.18), причем соответствующие значения r^s и r_m удовлетворяют неравенствам

$$r_+ < r^s, \quad r_m < r'_+ \text{ — подвод индентора}$$

$$r^s < r_-, \quad r'_- < r_m \text{ — отвод индентора,}$$

которые обеспечивают наличие скачка (3.8) или (3.9) в случае (3.2) (рис. 2). Согласно уравнению (2.18), добиться выполнения этих неравенств можно, если использовать достаточно малые (большие) значения δ^s и достаточно большие (малые) значения δ_m при подводе (отводе) индентора.

Зависимость контактного давления p от времени t рассчитывалась с помощью формулы (1.3) по найденному решению $r(t)$ уравнения (2.15). Отметим, что, как указывалось выше, при уточненной постановке задачи поверхность слоя свободна от нагрузок, поэтому контактное давление в классическом смысле отсутствует. Определяемая по формуле (1.3) величина p в этом случае интерпретируется как контактное давление, т.к. представляет собой силу воздействия индентора на основание, приходящуюся на единицу площади его поверхности.

Для графического представления результатов расчетов ниже используются безразмерные величины $\tilde{t} = t/t_r$, $\tilde{r} = r/r_{ec}$, $\tilde{p} = p/E_*$, $E_* = 1$ МПа. Сплошные (штриховые) линии на графиках отвечают уточненной (традиционной) постановке задачи.

На рис. 4 и 5 показаны расчетные зависимости контактного зазора и давления от времени в режиме подвода (а) и отвода (б) индентора при $B = 0.24$ МПа $^{-1}$, $h_0 = 2$ нм (тонкий мягкий слой) и $t_m = 2t_r$ (быстрое перемещение индентора). При таких значениях параметров B, h_0 для уточненной постановки задачи выполняется неравенство (3.1), тогда как для традиционной постановки задачи имеет место случай (3.2), при котором возможны скачки (3.8) (или (3.9)) в режиме подвода (отвода) индентора. Этим объясняется показанный на рис. 4 и 5 непрерывный характер функций $r(t)$ и $p(t)$ при уточненной постановке задачи (сплошные линии) и наличие у этих функций скачков при традиционной постановке задачи (штриховые линии). Выполненные расчеты подтверждают предположение (3.11), (3.12) о монотонном характере изменения функции $r(t)$ на промежутке времени $[0, t_+]$.

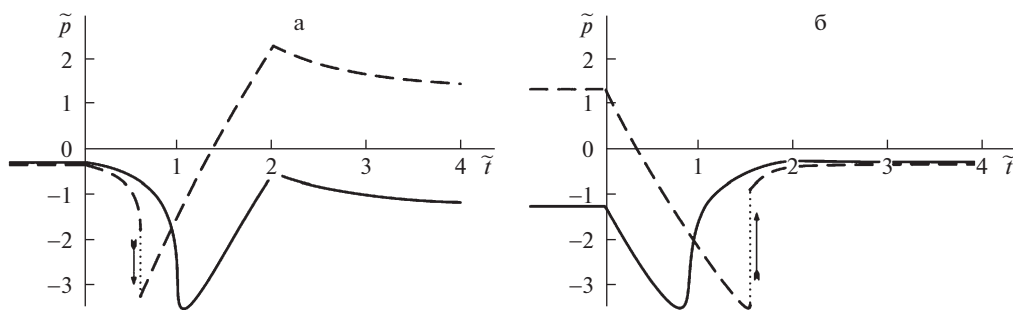


Рис. 5. Зависимости контактного давления от времени в режиме подвода (а) и отвода (б) индентора (тонкий мягкий слой).

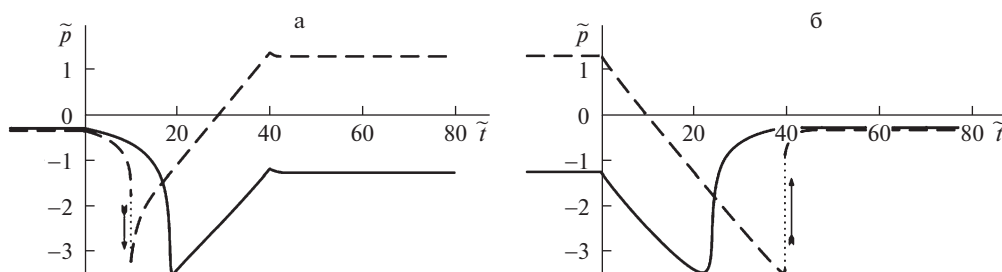


Рис. 6. Зависимости контактного давления от времени в режиме подвода (а) и отвода (б) индентора при медленном перемещении индентора (тонкий мягкий слой).

На рис. 6 показано поведение контактного давления при прежних значениях параметров B, h_0 (тонкий мягкий слой) и $t_m = 40t_r$ (медленное перемещение индентора). В данном случае, по причине медленного деформирования, слой ведет себя как упругое тело с длительными модулями $\lambda^\infty, \mu^\infty$ [24], что объясняет отсутствие на рис. 6 заметной релаксации контактного давления при $t > t_m$.

Если использовать слой той же толщины $h_0 = 2$ нм, но с более низким коэффициентом упругой податливости $B = 0.12$ МПа $^{-1}$ (тонкий жесткий слой), то для обеих постановок задачи выполняется неравенство (3.1). Соответствующие непрерывные зависимости контактного давления от времени в режимах подвода и отвода индентора при $t_m = 2t_r$ показаны на рис. 7 а и б.

Увеличение толщины слоя до значения $h_0 = 5$ нм при прежнем коэффициенте упругой податливости $B = 0.12$ МПа $^{-1}$ (толстый жесткий слой) приводит к нарушению неравенства (3.1) и реализации случая (3.2) как для уточненной, так и для традиционной постановки задачи. Соответствующие зависимости контактного давления от времени со скачком в режимах подвода (отвода) индентора при $t_m = 2t_r$ показаны на рис. 8 а и б.

Как и следовало ожидать при сделанном выборе (4.4) параметров закона (4.3) внедрения, на рисунках 4–8 начальные (конечные) значения функций $r(t)$ и $p(t)$ в режиме подвода индентора совпадают с их конечными (начальными) значениями в режиме отвода индентора.

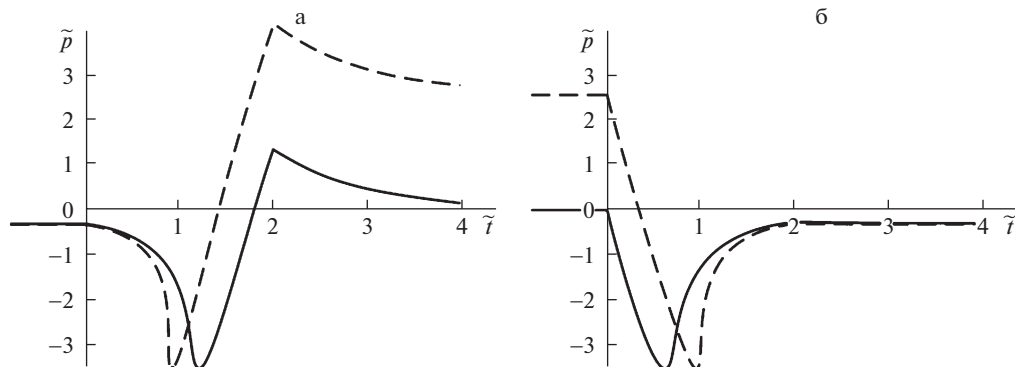


Рис. 7. Зависимости контактного давления от времени в режиме подвода (а) и отвода (б) индентора (тонкий жесткий слой).

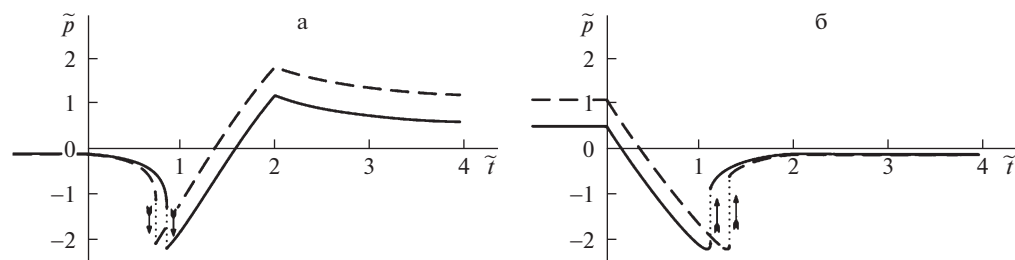


Рис. 8. Зависимости контактного давления от времени в режиме подвода (а) и отвода (б) индентора (толстый жесткий слой).

Рис. 4, 5, 7 и 8 иллюстрируют влияние параметров B и h_0 на скачкообразное поведение контактного зазора и давления. В частности, оказывается, что появлением или отсутствием скачков этих величин можно управлять путем изменения толщины h_0 слоя.

Представленные результаты свидетельствуют о том, что реализация скачкообразного поведения контактного зазора и давления зависит от используемой постановки задачи. Так, в случае тонкого мягкого слоя (рис. 4 и 5), при уточненной постановке задачи скачок функций $r(t)$ и $p(t)$ отсутствует, а при традиционной постановке задачи — присутствует.

Выводы.

1. Рассмотрен контакт бесконечно протяженного плоского индентора и вязкоупругого слоя в рамках самосогласованного по Дерягину подхода с поверхностным (традиционная постановка) и объемным (уточненная постановка) приложением сил межмолекулярного взаимодействия. Получены эквивалентные друг другу интегральное (2.10) и дифференциальное (2.15) уравнения, описывающие изменение контактного зазора r во времени при таком контакте.

2. Сформулировано условие в виде неравенств (3.2), при котором возможно скачкообразное изменение контактного зазора во времени. Реализация такого поведения зависит от используемой постановки задачи (уточненная или традиционная), упругих

свойств слоя, его толщины, параметров межмолекулярного взаимодействия, и не зависит от вязких свойств материала слоя.

3. Выявлены особенности скачкообразного поведения контактного зазора во времени. В частности, установлено, что перед скачком скорость изменения контактного зазора в режиме подвода/отвода индентора неограниченно убывает/возрастает.

4. Предложен и реализован алгоритм построения разрывного решения дифференциального уравнения (2.15), учитывающий выявленные особенности скачкообразного поведения контактного зазора во времени.

5. Выполненные расчеты свидетельствуют о немонотонном характере зависимостей контактного зазора и давления от времени в режимах подвода и отвода индентора. Показано, что традиционная и уточненная постановки задачи могут приводить к существенно различным результатам расчета характеристик контакта индентора и вязкоупругого слоя.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при финансовой поддержке РФФИ и БРФФИ в рамках научного проекта № 20-58-00007.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Derjaguin B.* Untersuchungen über die Reibung und Adhäsion, IV. Theorie des Anhaftens kleiner Teilchen // *Kolloid-Zeitschrift*. 1934. Bd.69. H.2. S.155–164.
2. *Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D.* Surface energy and the contact of elastic solids // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*. 1971. V. 324. № 1558. P. 301–313.
3. *Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Yu.P.* Effect of contact deformations on the adhesion of particles // *J. Coll. Interface Sci.* 1975. V. 53. № 2. P. 314–326.
4. *Sridhar I., Johnson K.L., Fleck N.A.* Adhesion mechanics of the surface force apparatus // *J. Phys. D. Appl. Phys.* 1997. V. 30. № 12. P. 1710–1719.
5. *Sergici A.O., Adams G.G., Müftü S.* Adhesion in the contact of a spherical indenter with a layered elastic half-space // *J. Mech. Phys. Solids*. 2006. V. 54. № 9. P. 1843–1861.
6. *Reedy E.D.* Thin-coating contact mechanics with adhesion // *J. Mater. Res.* 2006. V. 21. № 10. P. 2660–2668.
7. *Borodich F.M., Galanov B.A., Perepelkin N.V., Prikazchikov D.A.* Adhesive contact problems for a thin elastic layer: Asymptotic analysis and the JKR theory // *Math.&Mech. Solids*. 2018. V. 24. № 5. P. 1405–1424.
8. *Greenwood J.A., Johnson K.L.* The mechanics of adhesion of viscoelastic solids // *Phil. Mag. A*. 1981. V. 43. № 3. P. 697–711.
9. *Горячева И.Г., Губенко М.М., Маховская Ю.Ю.* Скольжение сферического индентора по вязкоупругому основанию с учетом сил молекулярного притяжения // *ПМТФ*. 2014. Т. 55. № 1. С. 99–107.
10. *Lin Y.Y., Hui C.Y.* Mechanics of contact and adhesion between viscoelastic spheres: An analysis of hysteresis during loading and unloading // *J. Polym. Sci. Part B: Polym. Phys.* 2002. V. 40. P. 772–793.
11. *Haiat G., Phan Huy M.C., Barthel E.* The adhesive contact of viscoelastic spheres // *J. Mech.&Phys. Solids*. 2003. V. 51. № 1. P. 69–99.
12. *Muller V.M., Yushchenko V.S., Derjaguin B.V.* On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid plane // *J. Coll. Interface Sci.* 1980. V. 77. № 1. P. 91–101.
13. *Attard P., Parker J.L.* Deformation and adhesion of elastic bodies in contact // *Phys. Rev. A*. 1992. V. 46. № 12. P. 7959–7971.
14. *Greenwood J.A.* Adhesion of elastic spheres // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1997. V. 453. № 1961. P. 1277–1297.
15. *Солдатенков И.А.* Применение метода последовательных приближений к расчету упругого контакта при наличии молекулярной адгезии // *ПММ*. 2012. Т. 76. Вып. 5. С. 734–743.
16. *McMeeking R.M.* A Maxwell stress for material interactions // *J. Coll. Interface Sci.* 1998. V. 199. № 2. P. 187–196.
17. *Sauer R.A., Li S.* A contact mechanics model for quasi-continua // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2007. V. 71. № 8. P. 931–962.

18. *He L.H.* Stress and deformation in soft elastic bodies due to intermolecular forces // *J. Mech. Phys. Solids*. 2013. V. 61. № 6. P. 1377–1390.
19. *Солдатенков И.А.* Контактная задача при объемном приложении сил межмолекулярного взаимодействия (уточненная постановка) // *ПММ*. 2013. Т. 77. Вып. 6. С. 877–893.
20. *Overbeek J.T.G., Sparnaay M.J.* Classical coagulation. London-van der Waals attraction between macroscopic objects // *Discuss. Faraday Soc.* 1954. V. 18. P. 12–24.
21. *Wu J.-J.* The jump-to-contact distance in atomic force microscopy measurement // *J. Adhesion*. 2010. V. 86. № 11. P. 1071–1085.
22. *Kaplan I.G.* Intermolecular Interactions: Physical Picture, Computational Methods and Model Potentials. Chichester: Wiley, 2006. xii + 367 p.
23. *Israelachvili J.N.* Intermolecular and Surface Forces. London: Academic, 2011. xxx + 674 p.
24. *Кристensen P.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
25. *Огибалов П.М., Ломакин В.А., Кишкин Б.П.* Механика полимеров. М.: Изд-во Московского ун-та, 1975. 528 с.
26. *Адамов А.А., Матвеев В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н.* Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с.
27. *Солдатенков И.А.* Контакт с межмолекулярным взаимодействием для вязкоупругого слоя (самосогласованный подход): расчет НДС и диссипации энергии // *ПММ*. 2020. Т. 84. № 1. С. 102–121.
28. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления (в 3-х тт.). М.: Физматлит, 2001. Т. 1. 616 с. Т. 2. 810 с.
29. *Chen Y.L., Helm C.A., Israelachvili J.N.* Molecular mechanisms associated with adhesion and contact angle hysteresis of monolayer surfaces // *J. Phys. Chem.* 1991. V. 95. № 26. P. 10736–10747.
30. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. 2-е изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 586 с.
31. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М: ГИФМЛ, 1959. 468 с.

**Contact with Intermolecular Interaction Forces for a Viscoelastic Layer
(Self-Consistent Approach): Analysis of the Characteristics of the Indenter
Approach/Separation Process**

I. A. Soldatenkov^{a, #}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: iasoldat@hotmail.com*

The contact of an infinitely extended plane indenter and a viscoelastic layer is considered in the framework of the Derjaguin self-consistent approach with the surface (traditional formulation) and bulk (refined formulation) application of intermolecular interaction forces. Equations describing the change of the contact gap in time are obtained. A condition is formulated under which a jumping change in the contact gap in time is possible. Calculations have been performed that indicate a non-monotonic character of the dependence of the contact gap and pressure on time in the regimes of the indenter approach and separation. It is shown that the traditional and refined formulations of the problem can lead to significantly different results in calculating the characteristics of the contact between the indenter and the viscoelastic layer.

Keywords: contact problem, viscoelasticity, layer, intermolecular interaction

REFERENCES

1. *Derjaguin B.* Untersuchungen über die Reibung und Adhäsion, IV. Theorie des Anhaftens kleiner Teilchen // *Kolloid-Zeitschrift*, 1934, Bd. 69. H. 2, s. 155–164.
2. *Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D.* Surface energy and the contact of elastic solids // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*, 1971, vol. 324, no. 1558, pp. 301–313.
3. *Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Yu.P.* Effect of contact deformations on the adhesion of particles // *J. Coll. Interface Sci.*, 1975, vol. 53, no. 2, pp. 314–326.

4. *Sridhar I., Johnson K.L., Fleck N.A.* Adhesion mechanics of the surface force apparatus // *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 1997, vol. 30, no. 12, pp. 1710–1719.
5. *Sergici A.O., Adams G.G., Müftü S.* Adhesion in the contact of a spherical indenter with a layered elastic half-space // *J. Mech. Phys. Solids*, 2006, vol. 54, no. 9, pp. 1843–1861.
6. *Reedy E.D.* Thin-coating contact mechanics with adhesion // *J. Mater. Res.*, 2006, vol. 21, no. 10, pp. 2660–2668.
7. *Borodich F.M., Galanov B.A., Perepelkin N.V., Prikazchikov D.A.* Adhesive contact problems for a thin elastic layer: Asymptotic analysis and the JKR theory // *Math.&Mech. Solids*, 2018, vol. 24, no. 5, pp. 1405–1424.
8. *Greenwood J.A., Johnson K.L.* The mechanics of adhesion of viscoelastic solids // *Phil. Mag. A*, 1981, vol. 43, no. 3, pp. 697–711.
9. *Goryacheva I.G., Gubenko M.M., Makhovskaya Yu. Yu.* Sliding of a spherical indenter on a viscoelastic foundation with the forces of molecular attraction taken into account // *J. Appl. Mech.&Techn. Phys.*, 2014, vol. 55, no. 1, pp. 81–88.
10. *Lin Y.Y., Hui C.Y.* Mechanics of contact and adhesion between viscoelastic spheres: An analysis of hysteresis during loading and unloading // *J. Polym. Sci. Part B: Polym. Phys.*, 2002, vol. 40, pp. 772–793.
11. *Haiat G., Phan Huy M.C., Barthel E.* The adhesive contact of viscoelastic spheres // *J. Mech.&Phys. Solids*, 2003, vol. 51, no. 1, pp. 69–99.
12. *Muller V.M., Yushchenko V.S., Derjaguin B.V.* On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid plane // *J. Coll. Interface Sci.*, 1980, vol. 77, no. 1, pp. 91–101.
13. *Attard P., Parker J.L.* Deformation and adhesion of elastic bodies in contact // *Phys. Rev. A*, 1992, vol. 46, no. 12, pp. 7959–7971.
14. *Greenwood J.A.* Adhesion of elastic spheres // *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1997, vol. 453, no. 1961, pp. 1277–1297.
15. *Soldatenkov I.A.* The use of the method of successive approximations to calculate an elastic contact in the presence of molecular adhesion // *JAMM*, 2012, vol. 76, no. 5, pp. 597–603.
16. *McMeeking R.M.* A Maxwell stress for material interactions // *J. Coll. Interface Sci.*, 1998, vol. 199, no. 2, pp. 187–196.
17. *Sauer R.A., Li S.* A contact mechanics model for quasi-continua // *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 2007, vol. 71, no. 8, pp. 931–962.
18. *He L.H.* Stress and deformation in soft elastic bodies due to intermolecular forces // *J. Mech. Phys. Solids*, 2013, vol. 61, no. 6, pp. 1377–1390.
19. *Soldatenkov I.A.* The contact problem with the bulk application of intermolecular interaction forces (a refined formulation) // *J. Appl. Math. Mech.*, 2013, vol. 77, no. 6, pp. 629–641.
20. *Overbeek J.T.G., Sparnaay M.J.* Classical coagulation. London-van der Waals attraction between macroscopic objects // *Discuss. Faraday Soc.*, 1954, vol. 18, pp. 12–24.
21. *Wu J.-J.* The Jump-to-contact distance in atomic force microscopy measurement // *J. Adhesion*, 2010, vol. 86, no. 11, pp. 1071–1085.
22. *Kaplan I.G.* Intermolecular Interactions: Physical Picture, Computational Methods and Model Potentials. Chichester: Wiley, 2006. xii + 367 p.
23. *Israelachvili J.N.* Intermolecular and Surface Forces. London: Academic, 2011. xxx + 674 p.
24. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity. An Introduction. N.Y.: Academic Press, 1971.
25. *Ogibalov P.M., Lomakin V.A., Kishkin B.P.* Mechanics of Polymers. Moscow: Moscow Univ. Press, 1975. (in Russian)
26. *Adamov A.A., Matveenko V.P., Trufanov N.A., Shardakov I.N.* Methods of Applied Viscoelasticity. Ekaterinburg: Ural Branch RAS, 2003. (in Russian)
27. *Soldatenkov I.A.* Contact with intermolecular interaction forces for a viscoelastic layer (self-consistent approach): Calculation of the stress-strain state and energy dissipation // *Mech. Solids*, 2020, vol. 55, no. 7, pp. 159–174.
28. *Fikhtengolts G.M.* Course of Differential and Integral Calculus. Vol. 1, 2. Moscow: Fizmatlit, 2001. (in Russian)
29. *Chen Y.L., Helm C.A., Israelachvili J.N.* Molecular mechanisms associated with adhesion and contact angle hysteresis of monolayer surfaces // *J. Phys. Chem.*, 1991, vol. 95, no. 26, pp. 10736–10747.
30. *Kalitkin N.N.* Numerical Methods. Saint Petersburg: BHV-Petersburg, 2011. (in Russian)
31. *Stepanov V.V.* Course of Differential Equations. Moscow: GIFML, 1959. (in Russian)

УДК 539.376

ДЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЧНОСТЬ СТЕРЖНЕЙ, РАСТЯГИВАЕМЫХ В АГРЕССИВНОЙ СРЕДЕ, ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ДВУХСВЯЗНЫХ ФОРМАХ ИХ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

© 2021 г. А. М. Локощенко^{1,*}, Л. В. Фомин^{1,3}, Н. С. Ларин^{1,2}

¹ НИИ институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

³ Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

*e-mail: loko@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 11.11.2019 г.

После доработки 30.07.2020 г.

Принята к публикации 17.10.2020 г.

Исследуется длительная прочность стержней двухсвязного поперечного сечения, растягиваемых в агрессивной среде. Рассматриваются поперечные сечения стержней, в которых формы внешнего и внутреннего контуров подобны, кроме того, площади полой (внутренней) части составляют 25% от площадей окаймляющей внешней, нагруженной части. Площади нагруженных частей сечений с различными формами совпадают. Для оценки влияния агрессивной среды на длительную прочность используется кинетическая теория Ю.Н. Работнова с двумя структурными параметрами (поврежденность материала и концентрация элементов окружающей среды в материале стержня). Для определения уровня агрессивной среды в стержнях используются приближенные решения уравнений диффузии, основанные на учете движения диффузионных фронтов от наружной и внутренней поверхностей стержней.

Ключевые слова: растягиваемые стержни, кинетическая теория, длительная прочность, форма поперечного сечения, время до разрушения, поврежденность, агрессивная окружающая среда, уравнение диффузии, диффузионный фронт

DOI: 10.31857/S0032823521010045

Введение. Высокие требования к качеству и надежности конструкций, длительное время находящихся под нагрузками при высокой температуре, приводят к необходимости проводить прогнозирование долговечности их работы с учетом различных специфических особенностей, которые могут возникать в реальной действительности. Одним из важных факторов, существенно влияющих на характеристики ползучести и длительной прочности металлов, является рабочая среда, в которой находятся исследуемые конструкции или их отдельные элементы. Результаты испытаний, как правило, показывают значительное ухудшение эксплуатационных характеристик металлов вследствие воздействия таких сред. Известные исследования влияния агрессивной окружающей среды на ползучесть и длительную прочность металлов показывают, что это влияние в основном характеризуется протекающими в металле диффузионными и коррозионными процессами [1].

Приведен [2] подробный анализ особенностей механического поведения металлов при длительном высокотемпературном нагруженном состоянии в агрессивных средах и основных феноменологических подходов, используемых при моделировании влияния окружающей среды на ползучесть и длительную прочность.

Рассматривались [3] стержни с такими односвязными поперечными сечениями, у которых минимальные размеры совпадали. При этом исследовалось влияние формы поперечного сечения стержня на концентрацию агрессивной среды в нем и на время до разрушения при одном и том же значении растягивающего напряжения. Изучались [4] стержни различной формы односвязного поперечного сечения (круг, квадрат и прямоугольники с различным соотношением сторон) при условии равенства площадей этих сечений. В отличие от [3, 4], в данной статье рассматриваются двухсвязные поперечные сечения стержней, в которых площадь полый (внутренней) части составляет 25% от площади окаймляющей внешней, нагруженной части. Также отметим, что формы внешнего и внутреннего контуров поперечных сечений подобны. Площади нагруженных частей сечений с различными формами совпадают.

1. Обзор современных работ по влиянию агрессивной среды на деформационно-прочностные характеристики материалов и элементов конструкций и их длительное разрушение. Исследование влияния агрессивной среды, вступающей как в физическое, так и в химическое взаимодействие с материалом с учетом фазовых превращений, получены авторами [5–7]. Рассматривалось развитие механико-математических моделей для описания влияния механических напряжений на кинетику химических реакций в деформируемых телах. При этом учитывается физико-химическое обоснование описываемых подходов, в частности, используются уравнения химических реакций, которые происходят на границах раздела твердых фаз (металл, оксид) и газообразных веществ. Модели учитывают влияние как внешних, так и порождаемых химическими реакциями внутренних напряжений. Исследуется влияние вида напряженного состояния, величин и знаков напряжений на протекание химических реакций. Исследуется устойчивость распространения фронта химической реакции в напряженном теле. Рассматриваются кинетика фронта реакции в окрестности концентраторов напряжений и взаимосвязи химических реакций с процессами разрушения. С учетом химической реакции, локализованной на фронте реакции в системе “деформируемое тело—газообразная компонента”, записывается баланс массы, импульса и энергии, после чего выводится выражение для производства энтропии, позволяющее естественным образом получить формулу для тензора химического сродства, с помощью которого определяются как химическое равновесие, так и кинетика фронта превращения.

Отдельный интерес представляет исследование влияния ионизирующего излучения на деформационно-прочностные характеристики материалов и элементов конструкций. Ионизирующее излучение также можно считать агрессивной средой, влияющей на физико-механические характеристики материала, подвергнутого ее влиянию. Это влияние заключается в появлении радиационных дефектов кристаллической решетки металлов и распухании металла (увеличение объема металла при воздействии на него ионизирующего излучения). Рассматриваются [8] особенности методологии построения моделей деформирования и разрушения материалов в условиях радиационного облучения с использованием теории кинетических параметров [9], а также моделей, описывающих радиационные деформации (распухание) материала [10]. Анализируются результаты экспериментов по влиянию типа и вида напряженного состояния на радиационное распухание и ползучесть материалов.

В обзоре [11] показано, что в зависимости от вида материалов радиационные среды приводят к различному изменению кратковременных и длительных механических характеристик материалов, а также к радиационному распуханию. Приводятся и анализируются экспериментальные данные о влиянии радиационного облучения на механические свойства сталей и сплавов (диаграмму деформирования, модуль упругости, предел текучести, предел прочности, ползучесть и длительную прочность). Особо обращается внимание на наличие радиационного распухания и влияние вида напряженного состояния на ползучесть и длительную прочность материалов в условиях радиационного облучения.

Рекомендуется учитывать указанные эффекты при построении моделей деформирования и разрушения материалов и конструкций в условиях радиационного облучения [10]. Авторы отмечают, что радиационное воздействие приводит к необходимости учитывать его влияние на прочностные, пластические характеристики и особенно ползучесть.

Ранее установлено [12, 13], что нейтронное облучение, кроме всего прочего, приводит к увеличению скорости ползучести, снижению длительной прочности и пластичности материала. На основе анализа экспериментальных данных предложена модель межзеренного разрушения аустенитных сталей, учитывающая влияние нейтронного облучения на длительную прочность и пластичность. Разработанные подходы применимы для прогнозирования кинетики развития трещин во времени при различных интенсивностях потока нейтронов и с учетом накопленного флюенса.

Большой вклад в развитие экспериментально-теоретического исследования влияния ионизирующего излучения на напряженно-деформированное состояние и процессы разрушения внесли ученые из Нижнего Новгорода (академик Ф.М. Митенков, профессор Ю.Г. Коротких и др.). На базе современных достижений механики поврежденной среды и механики разрушения разработаны [14] математические модели, алгоритмы и программы для расчета процессов неизотермического упругопластического деформирования и накопления усталостных повреждений в материале опасных зон оборудования и систем ядерных энергетических установок. Разработанные модели позволяют учитывать влияние на скорость процессов накопления повреждений многоосности напряженного состояния, поворота главных площадок тензоров напряжений и деформаций, учитывать нелинейное суммирование повреждений при изменении режимов нагружения.

Методика прогнозирования в исследовании [15] в основном опирается на работы С.А. Шестерикова. Постоянные, входящие в базовые уравнения, определены по результатам испытаний на ползучесть при трех уровнях напряжений. Приведены экспериментальные данные, полученные при испытаниях стали 08X16H11M3-ПД на ползучесть и длительную прочность при 600°C и 650°C. На основе этих данных вычислены средние теоретические значения предела кратковременной прочности и другие коэффициенты базовых уравнений. В указанном интервале температур для прогнозирования длительной прочности стали с учетом ее радиационного облучения использовано предположение о равенстве отношения деформации разрушения по диаграмме растяжения к деформации разрушения при ползучести для близких по составу сталей AISI 316 и 08X16H11M3-ПД. Выявлено, что радиационное облучение приводит к существенному снижению предела длительной прочности.

В завершение теоретической части обзора отметим, что различные аспекты влияния агрессивной среды на характеристики деформирования и разрушения современных металлов и сплавов рассматриваются в большом количестве монографий (среди них, например, [16–18]).

Так, например, в монографии [16] рассмотрено деформирование и разрушение металла оборудования ядерных реакторов при радиационных и термических воздействиях. Сопоставлены данные по термической и радиационной ползучести, обсуждены изменения механических свойств и распухание материала при нейтронном облучении. Рассмотрено влияние охлаждающей среды на коррозионную усталость и стресс-коррозию аустенитной стали. Проанализированы особенности циклического деформирования в условиях нейтронного облучения. Рассмотрен коррозионный рост трещин при постоянных и циклических нагрузках. Даны критерии разрушения для различных условий работы металла. Автором приведено феноменологическое описание опытных данных при термической и радиационной ползучести. Предложены кинетические уравнения для сложного нагружения, а также методика расчета нестационар-

ных задач термопластичности. Даны рекомендации по практическому использованию полученных результатов.

В монографии [17] рассматриваются вопросы моделирования поведения железобетонных элементов конструкций в условиях воздействия хлоридосодержащих сред, а в монографии [18] исследуется работоспособность конструкций в условиях высокотемпературной водородной коррозии.

Приведем вниманию читателей статьи некоторые экспериментальные работы, среди которых отметим ряд исследований, которые проведены в ЦНИИ “Прометей” (Санкт-Петербург) [19, 20]. Экспериментально были исследованы ползучесть и длительная прочность материалов и элементов конструкций оборудования атомных электростанций, находящихся в контакте с жидкометаллической агрессивной средой.

Изучены [19] вопросы длительной прочности конструкционных материалов, работающих в реакторной установке с жидкометаллическим свинцовым теплоносителем. Рабочая температура жидкометаллического теплоносителя на основе свинца превышает 500°C , т.е. находится в диапазоне температур, при которых в сталях могут интенсивно протекать процессы ползучести. Отмечается, что недостатком теплоносителей на основе свинца является их агрессивность по отношению к конструкционным материалам, мерой борьбы с этой агрессивностью является поддержание определенной концентрации кислорода в жидком теплоносителе. В результате на поверхности стали образуется оксидная пленка, предотвращающая контакт материала с жидкометаллическим теплоносителем. Приведены экспериментальные данные, полученные при длительных испытаниях образцов двух марок сталей 10X15H9C3Б и 10X9HСМФБ, а именно, приводятся данные по длительной прочности образцов этих марок стали на воздухе и в потоке жидкого свинца. В результате показано, что длительная прочность образцов, испытанных в потоке жидкого свинца, ниже длительной прочности образцов, испытанных на воздухе. Причины снижения длительной прочности в жидком свинце были выявлены в ходе металлографического анализа, который показал, что при высоком уровне напряжений на образцах имеются следы фронтальной жидкометаллической коррозии. При уменьшении уровня напряжений на образцах наблюдается плотная оксидная пленка, сплошность которой нарушается тем сильнее, чем ближе она к месту разрушения образца. Эта пленка защищает образец от агрессивного воздействия окружающей среды, причем ее толщина зависит от уровня напряжений и длительности контакта с жидким металлом.

Исследовано [20] влияние жидкометаллического свинцового теплоносителя на ползучесть хромистой мартенситной стали марки 10X9HСМФБ. При проведении испытаний на длительную прочность отмечена повышенная скорость ползучести стали в контакте с жидким свинцом при температуре 550°C по сравнению со скоростью ползучести на воздухе. В статье приводятся результаты экспериментов и их обсуждение, в рамках которого дано объяснение различного поведения кривых ползучести образцов, испытанных в контакте с жидким свинцом и на воздухе при уровне напряжений 98 МПа и 68.6 МПа. Утверждается, что данные металлографического анализа образцов, разрушенных в потоке жидкого свинца, свидетельствуют о наличии двух принципиально различных механизмов разрушения образцов в контакте со свинцовым теплоносителем. Это явление, обнаруженное в работе [19], связано с влиянием уровня напряжений на устойчивость оксидных пленок. В заключение авторы отмечают, что для повышения надежности реакторной установки с жидкометаллическим теплоносителем на основе свинца при расчете максимально допустимых напряжений в конструкциях, работающих в контакте с жидким свинцом, рекомендуется учитывать пределы ползучести конструкционных материалов, вводя ограничения по допустимой деформации на выбранной временной базе.

Помимо исследований, описывающих влияние жидкометаллической среды на длительные свойства сталей, сотрудниками ЦНИИ “Прометей” проведены исследования о влиянии этой среды на циклическую долговечность материалов.

Далее отметим работы по теме влияния агрессивной среды. Экспериментально определялось сопротивление стали стресс-коррозии в коррозионной среде (солевые пары) при медленном растяжении [21]. В обзоре [22] рассматривается влияние нейтронного облучения на величину механического напряжения, вызывающего коррозионное растрескивание. Опубликованные результаты исследований указывают на то, что увеличение дозы нейтронного облучения приводит к непрерывному понижению сопротивления стали стресс-коррозионному разрушению. Однако показано, что у предела текучести наблюдается определенное насыщение его роста с увеличением дозы облучения. Таким образом, предел коррозионного растрескивания не коррелирует с величиной предела текучести после облучения.

Отмечается [23] влияние облучения на вязкость разрушения, которое проявляется в смещении кривой вязкости разрушения после облучения в область более высоких температур. Исследуется [24] радиационное распухание 2-х марок аустенитной хромоникелевой стали. Показана и определена зависимость распухания сталей от интенсивности накопленных повреждений.

Изучается [25] низкотемпературная ползучесть под действием нейтронного облучения.

Рассматривается [26] свеллинг (распухание) аустенитной стали. Температура максимального свеллинга и скорость распухания зависят от интенсивности радиационных повреждений. Распухание проявляется после накопления определенного порога радиационных повреждений. Это пороговое значение зависит от действующего напряжения, температуры и скорости набора повреждений. Изучаются [27] растяжение и малоцикловая усталость стали при нейтронном облучении.

Оценивается [28] влияние облучения ионами Fe при 450°C для изучения подверженности растрескиванию аустенитной нержавеющей стали 304L. После облучения Fe с энергией 10 МэВ до 5 dpa (dpa – displacements per atom) было охарактеризовано и количественно определено вызванное облучением повреждение в микроструктуре наряду с измерениями нанотвердости. Облученный ионами Fe материал, напряженный до 4% в среде легкой воды в водо-водяном ядерном реакторе (PWR), обнаруживал участки зарождения трещин, которые были аналогичны тем, которые встречаются в облученных нейтронами и протонами материалах. В сравнении, облученный ионами Fe материал, подвергнутый 4%-ной пластической деформации в инертной среде аргона, не обнаружил какого-либо растрескивания, что свидетельствует о том, что локализованная деформация сама по себе недостаточна для инициирования растрескивания для условий облучения, использованных в этом исследовании.

Рассматривается [29] влияние механической обработки на инициирование коррозионного растрескивания под напряжением отожженной нержавеющей аустенитной стали типа 316L в первичной воде реактора с водой под давлением. Данный факт был исследован путем ускоренных испытаний в высокотемпературной гидрогенизированной воде. Было отмечено, что трещины от коррозии под напряжением возникают только на обработанных поверхностях с насечками обработки, перпендикулярными направлению нагрузки, и пористый внутренний оксидный слой был идентифицирован как важный фактор, способствующий возникновению трещин. Кроме того, большинство трещин заканчивались внутри приповерхностного ультрамелкозернистого слоя, вызванного механической обработкой, и вызванные механической обработкой остаточные напряжения, по-видимому, не оказали существенного влияния на возникновение трещины. Выявлена и обсуждена корреляция между зарождением трещины и поверхностными-приповерхностными элементами.

Исследование [30] посвящено окислительному поведению оболочки топлива Zry-4 в смешанных паровоздушных атмосферах. Испытания на окисление Zry-4 проводились при температурах 1373 и 1573 К. Измерение прироста веса после испытания, а также металлографическое исследование проводились для отдельного изучения кине-

тики области, где образуются нитриды, и области, свободной от нитридов. Результаты испытаний на окисление при 1273 и 1473 К, опубликованные ранее теми же авторами, также рассматриваются в обсуждении. Прибавку массы из области, свободной от нитридов, оценивали с использованием одномерной модели конечной разности диффузии кислорода и измеряли толщину металлической части окисленного образца, столбчатого оксида и стабилизированного кислородом α -Zr(O), а также доля столбчатого оксида на границе раздела оксид–металл. Результаты показывают, что нитриды образуются под защитным столбчатым оксидным слоем и что большая часть прироста массы, связанная с образованием пористых смешанных областей ZrN–ZrO₂, была связана с образованием ZrO₂ из α -Zr (O).

Прослеживается [31] эволюция микроструктуры после ползучести при облучении в нескольких аустенитных сталях, облученных до 120 дпа при температуре 320°C. Трубки под давлением с напряжениями 127–220 МПа облучали в БОР-60 до 120 дпа при 320°C. Поведение ползучести зависело как от химического состава, так и от металлургического состояния сталей. Исследовались различные стали, облученные и без нагрузки. Без механического напряжения облучение приводило к высокой плотности дислокационных линий и петель Франка и, в зависимости от типа стали происходило выделение фазы. Механическое напряжение вызывало увеличение среднего размера и плотности выпавшей фазы и, для некоторых марок сталей, увеличение среднего размера петли и уменьшение их плотности. Анизотропия плотности петли Франка или размера, вызванного механическим напряжением, не наблюдалась систематически. Микроструктура линии дислокации, по-видимому, не отличается между напряженными и ненапряженными образцами. Полостей в этих образцах не было обнаружено. В сравнении с данными этой работы, обсуждаются основные модели ползучести облучения.

Определялся [32] характер ползучести при облучении тяжелыми ионами отожженных пленок Cu толщиной 200 нм и 500 нм, характеризуется использованием на кристалле одноосных микрорастягивающихся тестовых структур. Испытания проводились при комнатной температуре с приложенным напряжением от 100 до 250 МПа и скоростью накопления повреждений 5×10^{-4} и 6.3×10^{-4} дпа с⁻¹. Преимущество метода заключается в том, что он позволяет одновременно измерять несколько десятков образцов, полностью облученных по всей их толщине. Было установлено, что механизмы пластичности являются заметно более однородными во время ползучести с учетом облучения, чем при только статической нагрузке. Закон степенной ползучести включает в себя показатель напряжения, равный 5, слабо зависящий от микроструктуры пленок. Микроструктурные наблюдения позволяют предположить, что механизм ползучести является результатом скольжения дислокаций при помощи их переползания, что объясняется простой моделью замкнутой формы.

Краткий обзор представленных исследований свидетельствует о важности учета влияния агрессивной среды на длительную прочность материалов и элементов конструкций.

2. Постановка задачи. В данной статье рассматриваются три формы поперечного сечения растягиваемых стержней: полый прямоугольник, у которого длины одной пары сторон во много раз меньше длин другой пары стороны, полый прямоугольник, длины сторон которого имеют один порядок, и кольцо. Для исследования диффузионного процесса в таких стержнях используются различные варианты уравнений диффузии: одномерное уравнение в первом случае, двумерное уравнение во втором случае и осесимметричное уравнение в третьем случае. Во всех трех случаях принимаются нулевые начальные условия и постоянные значения концентрации агрессивной среды на контурах поперечных сечений. Точные решения уравнения диффузии могут быть представлены только в виде бесконечных рядов. В данной статье рассмотрены при-

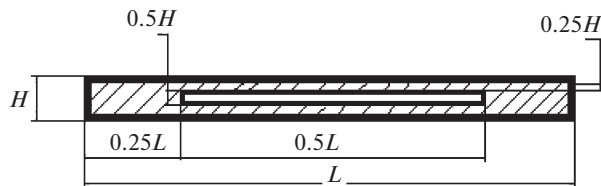


Рис. 1. Поперечное сечение длинного стержня в виде тонкого прямоугольника с отверстием.

ближенные уравнения, при этом начальное и граничные условия выполняются точно, а само уравнение удовлетворяется интегрально.

Для анализа зависимости процесса диффузии агрессивной окружающей среды от контура поперечного сечения стержня используется приближенный метод решения уравнения диффузии, основанный на введении диффузионного фронта, распространяющегося от поверхности стержня [33–35]. Такой подход позволяет разделить весь материал поперечного сечения стержня на возмущенную область (в которой среда уже проникла в материал) и невозмущенную область (в которой еще нет проникновения среды) и затем отслеживать движение границы между этими областями во времени.

3. Одномерное уравнение диффузии в декартовых координатах. Рассмотрим длинный стержень с поперечным сечением в виде тонкого прямоугольника со сторонами L и H ($L \gg H$) (рис. 1).

Выделим из средней части этого прямоугольника отверстие в виде прямоугольника со сторонами $L/2$ и $H/2$, т.е. площадь отверстия составляет 25% от площади внешнего прямоугольника. В результате поперечное сечение исходного прямоугольника состоит из двух прямоугольников со сторонами $L/4$ и H (рис. 1) и двух прямоугольников со сторонами $L/2$ и $H/4$ (рис. 1). Так как длины всех рассматриваемых прямоугольников значительно превышают их высоты, то во всех этих прямоугольниках можно рассматривать диффузионный процесс внедрения элементов окружающей среды в материал стержня как одномерный (влиянием агрессивной среды в стержень с коротких сторон его сечения можно пренебречь).

Рассмотрим диффузионный процесс в каждом из этих прямоугольников. Для концентрации c среды в материале стержня примем нулевое начальное значение, в качестве граничных условий на поверхностях широких сторон сечения стержня используется равенство концентрации c постоянному значению c_0 .

Введем безразмерные переменные

$$\bar{y} = \frac{2y}{H}, \quad \bar{t} = \frac{48D}{H^2}t, \quad \bar{c} = \frac{c}{c_0},$$

где y — поперечная координата вдоль толщины рассматриваемого прямоугольного элемента ($y = 0$ — в середине поперечного сечения), t — время, c — концентрация, c_0 — постоянная концентрация на границе материала стержня и внешней среды, D — коэффициент диффузии. Из условия симметрии рассматриваем половину сечения прямоугольного элемента по толщине. Уравнение одномерной диффузии [36, 37] в этих переменных принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{12} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{y}^2}, \quad 0 \leq \bar{t} < \infty, \quad 0 < \bar{y} < 1 \quad (3.1)$$

Начальное и граничные условия, вследствие симметрии диффузионного процесса относительно середины стержня, записываются как:

$$\bar{c}(\bar{y}, 0) = 0, \quad \bar{c}(1, \bar{t}) = 1, \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{y}}(0, \bar{t}) = 0$$

Используем приближенный метод решения уравнения диффузии (3.1), основанный на введении диффузионного фронта [35].

Зависимость концентрации $\bar{c}$ от координаты $\bar{y}$ в данной работе принимается в виде квадратного полинома, удовлетворяющего граничным и начальным условиям. При этом рассматриваются два этапа процесса диффузии: этап проникновения фронта и этап насыщения, которые разделены моментом времени $\bar{t}_0$ [33, 35].

$$\bar{c}(\bar{y}, \bar{t}) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \bar{y} \leq \bar{l}(\bar{t}) \\ \left\{ 1 - \left[(1 - \bar{y}) / (1 - \bar{l}) \right] \right\}^2 & \text{при } \bar{l}(\bar{t}) < \bar{y} \leq 1 \end{cases} \quad \text{при } 0 < \bar{t} \leq \bar{t}_0 \quad (3.2)$$

$$\bar{c}(\bar{y}, \bar{t}) = B + [1 - B](\bar{y})^2 \quad \text{при } \bar{t} > \bar{t}_0,$$

где $\bar{l}(\bar{t})$ – координата диффузионного фронта, $\bar{t}_0$ – время перехода между этапами диффузионного процесса, $B = B(\bar{t})$ – концентрация в центре поперечного сечения стержня при $\bar{t} \geq \bar{t}_0$ (на срединной линии $\bar{y} = 0$).

Неизвестные зависимости $\bar{l}(\bar{t})$ и $B(\bar{t})$ определяются из интегрального удовлетворения параболической функции $\bar{c}(\bar{y}, \bar{t})$ по (3.2) уравнению диффузии (3.1)

$$\int_0^1 \left| \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} - \frac{1}{12} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{y}^2} \right| d\bar{y} = 0 \quad (3.3)$$

Показано [35], что если в (3.3) исключить знак модуля подынтегрального выражения, то отличие полученного приближенного решения уравнения диффузии от точного решения составляет всего единицы процентов, поэтому далее при использовании уравнения (3.3) знак модуля опустим.

Подставляя (3.2) в (3.3), получим координату диффузионного фронта $\bar{l}(\bar{t})$ и концентрацию $B(\bar{t})$ в следующем виде

$$\bar{l} = 1 - \sqrt{\bar{t}}, \quad B = 1 - \exp\left(-\frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{4}\right) \quad (3.4)$$

Диффузионный фронт достигает срединной линии поперечного сечения стержня в момент времени $\bar{t}_0$, при этом $\bar{l} = 0$. На основе данного граничного условия получаем значение времени $\bar{t}_0 = 1$.

Используя соотношения для концентрации (3.2) и соотношения (3.4), получим выражения для $\bar{c}(\bar{y}, \bar{t})$ в следующем виде

$$\bar{c}(\bar{y}, \bar{t}) = \begin{cases} \left[1 - \frac{1 - \bar{y}}{\sqrt{\bar{t}}} \right]^2 & \text{при } 1 - \sqrt{\bar{t}} < \bar{y} \leq 1 \\ 0 & \text{при } 0 \leq \bar{y} \leq 1 - \sqrt{\bar{t}} \end{cases} \quad \text{при } 0 < \bar{t} \leq 1$$

$$\bar{c}(\bar{y}, \bar{t}) = 1 - (1 - \bar{y}^2) \exp\left[-\frac{1}{4}(\bar{t} - 1)\right] \quad \text{при } \bar{t} > 1$$

В дальнейшем для анализа влияния агрессивной среды на время до разрушения стержня будет использована интегрально средняя концентрация $\bar{c}_m(\bar{t})$, которая имеет вид

$$\bar{c}_m(\bar{t}) = \int_0^1 \bar{c}(\bar{y}, \bar{t}) d\bar{z} = \begin{cases} \frac{1}{3} \sqrt{\bar{t}} & \text{при } 0 < \bar{t} \leq 1 \\ 1 - \frac{2}{3} \exp\left[-\frac{1}{4}(\bar{t} - 1)\right] & \text{при } \bar{t} > 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

Здесь в выражении (3.5) учитываются две стадии диффузионного процесса. На первой стадии при $0 \leq \bar{t} \leq 1$ происходит проникновение внешней среды в материал, которое характеризуется движением диффузионного фронта. На второй стадии при

$\bar{t} \geq 1$ во всех точках рассматриваемого поперечного сечения концентрация отлична от нуля и происходит ее рост до полного насыщения.

Отсюда в случае прямоугольника со сторонами H и $L/4$ получаем:

$$\bar{c}_{m1}(t) = \begin{cases} G_1(t) = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{48D}}{H} \sqrt{t} & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{H^2}{768D} \\ G_2(t) = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{48D}}{H} \sqrt{t} & \text{при } \frac{H^2}{768D} \leq t \leq \frac{H^2}{48D} \\ G_3(t) = 1 - \frac{2}{3} \exp\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{48D}{H^2}t - 1\right)\right] & \text{при } t > \frac{H^2}{48D} \end{cases} \quad (3.6)$$

Аналогично в случае длинного прямоугольника со сторонами $L/2$ и $H/4$ ($\bar{t} = \frac{768D}{H^2}t$) имеем

$$\bar{c}_{m2}(t) = \begin{cases} G_4(t) = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{768D}}{H} \sqrt{t} & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{H^2}{768D} \\ G_5(t) = 1 - \frac{2}{3} \exp\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{768D}{H^2}t - 1\right)\right] & \text{при } t > \frac{H^2}{768D} \end{cases} \quad (3.7)$$

Зависимость интегрально среднего уровня концентрации агрессивной среды во всем сечении исходного прямоугольника с отверстием имеет вид

$$\bar{c}_m(t) = \frac{2}{3} \bar{c}_{m1}(t) + \frac{1}{3} \bar{c}_{m2}(t), \quad (3.8)$$

где $\bar{c}_{m1}(t)$ и $\bar{c}_{m2}(t)$ определяются выражениями (3.6) и (3.7) соответственно.

Таким образом, выражение для интегрально средней концентрации рассматриваемого поперечного сечения имеет вид:

$$\bar{c}_m(t) = \begin{cases} \frac{2}{3} G_1(t) + \frac{1}{3} G_4(t) & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{H^2}{768D} \\ \frac{2}{3} G_2(t) + \frac{1}{3} G_5(t) & \text{при } \frac{H^2}{768D} \leq t \leq \frac{H^2}{48D} \\ \frac{2}{3} G_3(t) + \frac{1}{3} G_5(t) & \text{при } t > \frac{H^2}{48D} \end{cases} \quad (3.9)$$

Поскольку площадь реального сечения F_{real} (площадь сечения без отверстия) составляет $F_{\text{real}} = \frac{3}{4}F$, то с учетом соотношений $F = HL$ и $\beta = H/L$ получаем $H^2 = \beta F = \frac{4}{3}\beta F_{\text{real}}$. Выражение (3.9) примет следующий вид:

$$\bar{c}_m(t) = \begin{cases} \frac{2}{3} G_1(t) + \frac{1}{3} G_4(t) & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{\beta F_{\text{real}}}{576D} \\ \frac{2}{3} G_2(t) + \frac{1}{3} G_5(t) & \text{при } \frac{\beta F_{\text{real}}}{576D} \leq t \leq \frac{\beta F_{\text{real}}}{36D} \\ \frac{2}{3} G_3(t) + \frac{1}{3} G_5(t) & \text{при } t > \frac{\beta F_{\text{real}}}{36D} \end{cases} \quad (3.10)$$

4. Двумерное уравнение диффузии в декартовых координатах. Рассмотрим поперечное сечение длинного стержня в виде прямоугольника со сторонами a и b ($b/a = \alpha$),

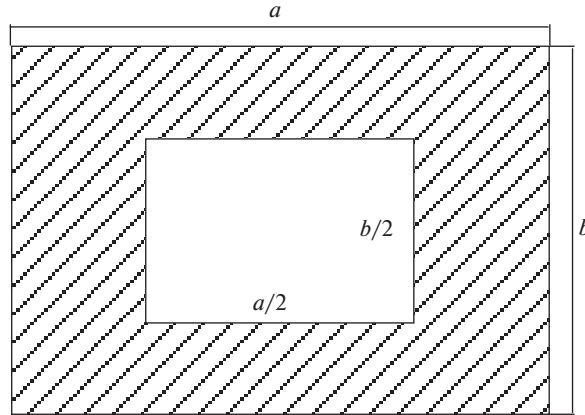


Рис. 2. Размеры поперечного сечения в виде полого прямоугольника.

из которого удалена внутренняя часть со сторонами $a/2$ и $b/2$. Из условия симметрии на рис. 2 представлена четверть рассматриваемого сечения: $0 \leq x \leq a/2$, $0 \leq y \leq b/2$, кроме точек, координаты которых удовлетворяют одновременно двум неравенствам: $a \leq 4x \leq 2a$ и $b \leq 4y \leq 2b$. Таким образом, площадь отверстия внутри сечения стержня составляет 25% от площади полного сечения. Рассматриваемое двухсвязное сечение находится в агрессивной окружающей среде.

В площади поперечного сечения S (S — площадь рассматриваемой четверти сечения двухсвязного прямоугольника с прямоугольным отверстием) выделим четыре составляющих (рис. 3):

$$\begin{aligned}
 S &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \\
 S_1 : \quad & 0 \leq y \leq l_1(t), \quad 2\frac{y}{\alpha} \leq 2x \leq a \\
 S_2 : \quad & 0 \leq x \leq l_2(t), \quad 2\alpha x \leq 2y \leq b \\
 S_3 : \quad & 4l_3(t) \leq 4y \leq b, \quad 2\frac{y}{\alpha} \leq 2x \leq a \\
 S_4 : \quad & 4l_4(t) \leq 4x \leq a, \quad 2\alpha x \leq 2y \leq b
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Области $(S_1 + S_3)$ и $(S_2 + S_4)$ разделяются отрезком OE .

Для определения концентрации агрессивной среды $c(x, y, t)$ в рассматриваемом сечении воспользуемся общеизвестным уравнением диффузии в декартовых координатах:

$$\frac{\partial c}{\partial t} - D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) = 0 \tag{4.2}$$

В качестве начального значения концентрации в рассматриваемом сечении двухсвязного прямоугольника с прямоугольным отверстием (многоугольник $OACEDBO$) примем нулевое значение

$$c(x, y, 0)|_S = 0 \tag{4.3}$$

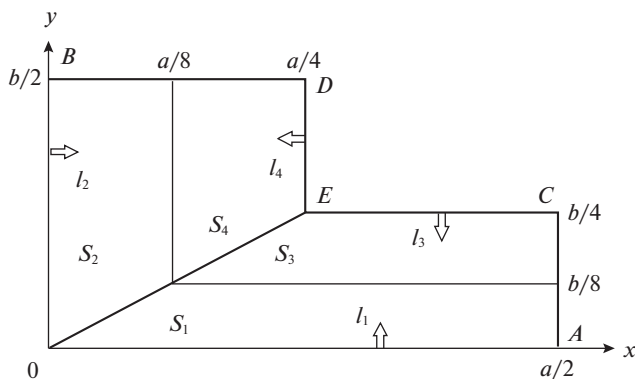


Рис. 3. Четверть сечения двухсвязного прямоугольника с прямоугольным отверстием.

В качестве граничных значений примем

$$\begin{aligned} c|_{OA} = c|_{OB} = c|_{EC} = c|_{ED} = c_0 \\ \frac{\partial c}{\partial x}|_{AC} = \frac{\partial c}{\partial y}|_{BD} = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Аналогично [38] рассмотрим вывод приближенного решения уравнения диффузии (4.2) в области S с начальным (4.3) и граничными (4.4) условиями в виде полинома второй степени по пространственным координатам с коэффициентами, зависящими от времени. При получении этого решения начальное (4.3) и граничные (4.4) условия удовлетворяются точно, а само дифференциальное уравнение (4.2) — интегрально в области S . По аналогии с разд. 3 рассматриваются две стадии диффузионного процесса. На первой стадии принимается, что в областях S_1 и S_3 перпендикулярно оси Ox от границ OA и EC внутрь поперечного сечения движутся диффузионные фронты $l_1(t)$ и $l_3(t)$ соответственно, разделяющие область $(S_1 + S_3)$ на невозмущенную и возмущенную части. При $t = t_{01}$ фронты $l_1(t)$ и $l_3(t)$ соединяются: $l_1(t_{01}) + l_3(t_{01}) = b/4$. Аналогично областям S_1 и S_3 в областях S_2 и S_4 на первой стадии перпендикулярно оси Oy от границ OB и ED внутрь поперечного сечения движутся диффузионные фронты $l_2(t)$ и $l_4(t)$ соответственно, разделяющие область $(S_2 + S_4)$ на невозмущенную и возмущенную части. В области $(S_2 + S_4)$ при $t = t_{02}$ выполняется равенство $l_2(t_{02}) + l_4(t_{02}) = a/4$. Можно показать, что $t_{01} = t_{02} = t_0$. Под $l_1, \dots, l_4$ всюду далее понимаются координаты соответствующих фронтов в осях Ox и Oy . При $t > t_0$ в многоугольнике $OACEDBO$ реализуется вторая стадия диффузионного процесса.

4.1. *Первая стадия диффузионного процесса.* Решение дифференциального уравнения (4.2) рассмотрим в таком виде:

$$c = \begin{cases} c_1(y, t) & \text{в } S_1 \\ c_2(x, t) & \text{в } S_2 \\ c_3(y, t) & \text{в } S_3 \\ c_4(x, t) & \text{в } S_4 \\ 0 & \text{в } (S_2 + S_4) \quad \text{при } l_2(t) \leq x \leq \frac{a}{4} - l_4(t) \\ 0 & \text{в } (S_1 + S_3) \quad \text{при } l_1(t) \leq y \leq \frac{b}{4} - l_3(t) \end{cases} \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} c_1(y, t) &= c_0 \left(1 - \frac{y}{l_1} \right)^2, & c_2(x, t) &= c_0 \left(1 - \frac{x}{l_2} \right)^2 \\ c_3(y, t) &= c_0 \left[1 - \frac{b - 4y}{b - 4l_3} \right], & c_4(x, t) &= c_0 \left[1 - \frac{a - 4x}{a - 4l_4} \right]^2 \end{aligned}$$

Легко показать, что предложенный вариант (4.5) приближенного решения уравнения (4.2) удовлетворяет условиям (4.3) и (4.4). Для упрощения вычислений введем две гипотезы. Во-первых, предположим, что в $(S_1 + S_3)$ скорости движения фронтов $l_1(t)$ и $l_3(t)$ по абсолютной величине равны, т.е. $l_1(t) + l_3(t) = b/4$, аналогично $l_2(t) + l_4(t) = a/4$. Во-вторых, допустим, что скорости движения фронтов от внешней поверхности поперечного сечения пропорциональны длинам соответствующих сторон сечения, т.е.

$$\frac{l_2(t)}{l_1(t)} = \alpha = \text{const}$$

В результате величины всех четырех рассматриваемых фронтов $l_1(t) - l_4(t)$ можно свести к одной определяемой функции $l_1(t)$:

$$l_1(t) = \alpha l_2(t), \quad l_3(t) = \frac{b}{4} - l_1(t), \quad l_4(t) = \frac{a}{4} - \alpha l_1(t). \quad (4.6)$$

При подстановке соотношений (4.5) в (4.2) и при дополнительном учете (4.6) получаем (далее обозначение в формулах “...” означает, что промежуточные выкладки опускаем):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2c_0} \int_{S_1} \left[\frac{\partial c}{\partial t} - D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) \right] dx dy &= \dots = \frac{(b - l_1) \dot{l}_1}{12\alpha} - \frac{D(b - l_1)}{2\alpha l_1} \\ \frac{1}{2c_0} \int_{S_2} \left[\frac{\partial c}{\partial t} - D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) \right] dx dy &= \dots = \frac{(b - l_1) \dot{l}_1}{12\alpha} - \frac{D\alpha(b - l_1)}{2l_1} \\ \frac{1}{2c_0} \int_{S_3} \left[\frac{\partial c}{\partial t} - D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) \right] dx dy &= \dots = -\frac{(b + 2l_1) \dot{l}_1}{24\alpha} - \frac{(b + 2l_1) D}{4\alpha l_1} \\ \frac{1}{2c_0} \int_{S_4} \left[\frac{\partial c}{\partial t} - D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) \right] dx dy &= \dots = -\frac{(b + 2l_1) \dot{l}_1}{24\alpha} - \frac{(b + 2l_1) D\alpha}{4l_1} \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в уравнение

$$\int_S \left[\frac{\partial c}{\partial t} - D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) \right] dx dy = 0,$$

где $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, получаем:

$$\dot{l}_1 = \frac{9b(1 + \alpha^2)}{(b - 4l_1) l_1} D \quad (4.7)$$

Введем переменные: $\hat{l}_1 = l_1/b$, $\hat{D} = D/b^2$, тогда уравнение (4.7) для определения зависимости координаты диффузионного фронта от времени запишется в виде

$$(1 - 4\hat{l}_1) \hat{l}_1 \frac{d\hat{l}_1}{dt} = 9(1 + \alpha^2) \hat{D} \quad (4.8)$$

Поскольку в начальный момент времени $t = 0$, $\hat{l}_1 = 0$, т.е. производная $d\hat{l}_1/dt$ бесконечна, перейдем в уравнении (4.8) к обратной функции и получим решение начальной задачи $t(\hat{l}_1 = 0) = 0$ в виде

$$t = K \left(\frac{\hat{l}_1^2}{2} - \frac{4}{3} \hat{l}_1^3 \right)$$

Из условия симметрии следует:

$$t_0 = t \left(\hat{l}_1 = \frac{1}{8} \right) = \frac{K}{192} \quad (4.9)$$

Далее вычислим интегрально среднюю концентрацию агрессивной среды в материале стержня в процессе первой стадии диффузионного процесса. Площадь четверти сечения двухсвязного прямоугольника с прямоугольным отверстием составляет $\frac{3}{16}ab$.

$$\frac{3}{16}ab \bar{c}_m(t) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \quad (4.10)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\hat{l}_1} \left(\frac{a-y}{2-\alpha} \right) \left(1 - \frac{y}{\hat{l}_1} \right)^2 dy = \frac{ab}{12} (2\hat{l}_1 - \hat{l}_1^2) \\ I_2 &= \int_0^{\hat{l}_2} \left(\frac{b-x}{2-\alpha x} \right) \left(1 - \frac{x}{\hat{l}_2} \right)^2 dx = \frac{ab}{12} (2\hat{l}_1 - \hat{l}_1^2) \\ I_3 &= \int_{\hat{l}_3}^{b/4} dy \int_{y/\alpha}^{a/2} \left(1 - \frac{b-4y}{b-4\hat{l}_3} \right)^2 dx = \frac{abl_1}{12} + \frac{abl_1^2}{12} \\ I_4 &= \int_{\hat{l}_4}^{a/4} \left(\frac{b}{2} - \alpha x \right) \cdot \left(1 - \frac{a-4x}{a-4\hat{l}_4} \right)^2 dx = \dots = \frac{abl_1}{12} + \frac{abl_1^2}{12} \end{aligned}$$

Подставляя $I_1 - I_4$ в (4.10), получаем $\bar{c}_m(t) = \frac{8}{3}\hat{l}_1$. Тогда учитывая решение (4.9) для момента времени $t_0 = t(\hat{l}_1 = 1/8)$ получаем

$$K_2 = \frac{b^2}{9(1+\alpha^2)D}, \quad t_0 = t \left(\frac{\hat{l}_1}{b} = \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{512} K_2, \quad \bar{c}_m(t_0) = \frac{1}{3}$$

4.2. Вторая стадия диффузионного процесса. При $t > t_0$ начинается вторая стадия диффузионного процесса, в любой точке рассматриваемого сечения концентрация агрессивной среды $c(x, y, t)$ положительна, при этом она возрастает во времени. Граничные условия на границах сечения OA , OB , EC , ED по-прежнему характеризуются постоянным значением $c = c_0$, вдоль отрезка AC : $\frac{\partial c}{\partial x}(a/2, y, t) = 0$, вдоль отрезка BD :

$\frac{\partial c}{\partial y}(x, b/2, t) = 0$, начальные значения в областях $S_1 \dots S_4$ совпадают с соответствующими функциями $c(x, y, t_0)$ в конце первой стадии. Как и ранее, будем использовать безразмерную концентрацию $\bar{c} = c/c_0$. В конце первой стадии концентрация в областях $(S_1 + S_3)$ представляет параболическую зависимость $\bar{c}$ от y

$$\bar{c}(x, y, t_0) = \left(1 - 8 \frac{y}{b}\right)^2$$

с нулевым значением $\bar{c} = 0$ вдоль отрезка $y = b/8$. Предположим, что в этих областях зависимость концентрации $\bar{c}$ от координаты y по-прежнему описывается квадратичной параболой, в которой минимальное значение $\bar{c}$, равное $B_1(t)$, реализуется при $y = b/8$: $\bar{c}(x, b/8, t) = B_1(t)$.

Представим выражение для концентрации $\bar{c}(x, y, t_0)$ в областях $(S_1 + S_3)$ в следующем виде

$$\bar{c}(x, y, t_0) = 1 - 16(1 - B_1) \frac{y}{b} + 64(1 - B_1)^2 \left(\frac{y}{b}\right)^2 \quad (4.11)$$

Очевидно, что соотношение (4.11) удовлетворяет всем начальным и граничным условиям в точной постановке. Подставив (4.11) в уравнение диффузии (4.2), получим:

$$\left(1 - 4 \frac{y}{b}\right) \dot{B}_1 = \frac{8}{b} D(1 - B_1)$$

Запишем интегральное следствие уравнения диффузии в областях $(S_1 + S_4)$:

$$\int_{(S_2+S_4)} \left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} - D \left(\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial y^2} \right) \right] dx dy = \frac{ab}{16} \dot{B}_1 - D \frac{12a}{b} (1 - B_1) \quad (4.12)$$

Представим аналогичную зависимость $\bar{c}(x, y, t)$ в области $(S_2 + S_4)$ в виде:

$$\bar{c}(x, y, t) = 1 - \frac{16}{a} (1 - B_2) x + \frac{64}{a^2} (1 - B_2) x^2$$

Легко показать, что это выражение для $\bar{c}(x, y, t_0)$ в области $(S_2 + S_4)$ при $t = t_0$ удовлетворяет всем начальным и граничным условиям. Используемые производные принимают следующий вид:

$$\int_{(S_2+S_4)} \left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} - D \left(\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial y^2} \right) \right] dx dy = \frac{ab}{16} \dot{B}_2 - D \frac{12b}{a} (1 - B_2) \quad (4.13)$$

Можно показать, что $B_1(t) = B_2(t) = B(t)$. Складывая (4.12) и (4.13), получаем интегральное следствие уравнения диффузии в виде:

$$\dot{B} = K_1 (1 - B) D, \quad \text{где} \quad K_1 = \frac{96}{b^2} (\alpha^2 + 1) D = \frac{96}{\alpha F} (\alpha^2 + 1) D$$

Его решение для начальных данных $B(t_0) = 0$ имеет вид:

$$B(t) = 1 - \exp[-K_1(t - t_0)]$$

Рассчитаем интегрально среднюю по материалу стержня концентрацию агрессивной среды во второй стадии диффузионного процесса. Имеем

$$\text{в области } (S_1 + S_3): \bar{c}(x, y, t) = 1 - 16 \left[1 - 4 \frac{y}{b} \right] \frac{y}{b} \exp[-K_1(t - t_0)]$$

$$\text{в области } (S_2 + S_4): \bar{c}(x, y, t) = 1 - 16 \left[1 - 4 \frac{x}{a} \right] \frac{x}{a} \exp[-K_1(t - t_0)]$$

Отсюда получаем среднее значение:

$$\bar{c}_m(t) = 1 - \frac{2}{3} \exp \left[-\frac{96}{\alpha F} (\alpha^2 + 1) D(t - t_0) \right] \quad (4.14)$$

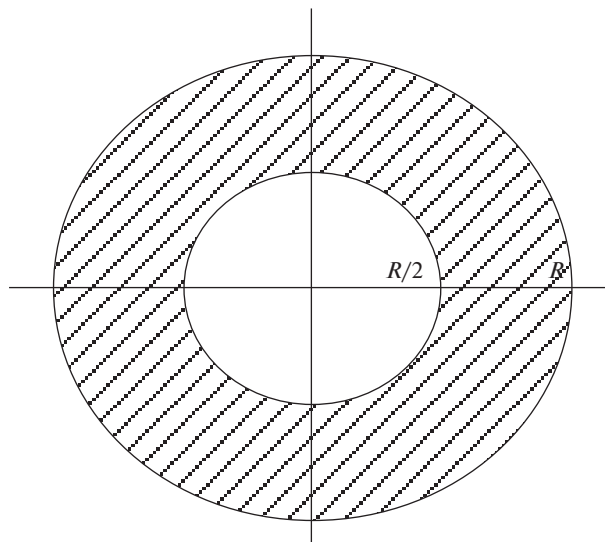


Рис. 4. Размеры поперечного сечения в виде кольца.

5. Уравнение диффузии в осесимметричной постановке. В данном разделе рассматривается осесимметричная задача о диффузии элементов окружающей среды в полый стержень, поперечное сечение которого имеет форму кольца. Внешний радиус кольца R , а внутренний радиус составляет $R/2$, при этом площадь полого отверстия в поперечном сечении стержня составляет 25 процентов от полной площади поперечного сечения стержня (рис. 4).

По-прежнему рассмотрим для концентрации c нулевое начальное условие, в качестве граничного условия на поверхностях стержня примем условие равенства концентрации c постоянному значению c_0 . Введем безразмерные переменные

$$\tilde{r} = \frac{r}{R}, \quad \tilde{t} = \frac{D_0}{R^2} t,$$

в которых уравнение диффузии принимает вид:

$$\frac{\partial \bar{c}(\tilde{r}, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} = \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \tilde{r}} \right), \quad \bar{c}(\tilde{r}, 0) = 0, \quad \bar{c}(1, \tilde{t}) = 1, \quad \bar{c}(1/2, \tilde{t}) = 1$$

Рассмотрим первую стадию диффузионного процесса. Зависимости концентрации от координаты и времени задаются в виде полиномов второй степени от координаты. В указанных зависимостях учтены зависящие от времени координаты двух диффузионных фронтов, движущихся от внутренней и внешней сторон поперечного сечения стержня в виде кольца.

$$\bar{c}(\tilde{r}, \tilde{t}) = \begin{cases} \left[\frac{\tilde{r} - \tilde{l}_1}{1/2 - \tilde{l}_1} \right]^2 & \text{при } 1/2 \leq \tilde{r} \leq \tilde{l}_1(\tilde{t}), \quad 0 < \tilde{t} \leq \tilde{t}_0 \\ 0, & \text{при } \tilde{l}_1(\tilde{t}) \leq \tilde{r} \leq \tilde{l}_2(\tilde{t}), \quad 0 < \tilde{t} \leq \tilde{t}_0 \\ \left[\frac{\tilde{r} - \tilde{l}_2}{1 - \tilde{l}_2} \right]^2 & \text{при } 1 \leq \tilde{r} \leq \tilde{l}_2(\tilde{t}), \quad 0 < \tilde{t} \leq \tilde{t}_0, \end{cases} \quad (5.1)$$

где $\tilde{l}_1(\tilde{t})$, $\tilde{l}_2(\tilde{t})$ — координаты диффузионных фронтов с внутренней и внешней сторон кольца, соответственно.

Определим функции $\tilde{l}_1(\tilde{t})$, $\tilde{l}_2(\tilde{t})$ из интегральных следствий уравнения диффузии и уравнения диффузии с весом $\tilde{r}$:

$$\int_{1/2}^1 \left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial \tilde{t}} - \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \tilde{r}} \right) \right] \tilde{r} d\tilde{r} = 0, \quad \int_{1/2}^1 \left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial \tilde{t}} - \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \tilde{r}} \right) \right] \tilde{r}^2 d\tilde{r} = 0$$

В результате получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1 + \tilde{l}_1}{12} \dot{\tilde{l}}_1 - \frac{1 + \tilde{l}_2}{6} \dot{\tilde{l}}_2 &= \frac{2\tilde{l}_1 + 1}{2\tilde{l}_1 - 1} + \frac{\tilde{l}_2 + 1}{1 - \tilde{l}_2} \\ \frac{12\tilde{l}_1^2 + 8\tilde{l}_1 + 3}{12} \dot{\tilde{l}}_1 - \frac{\tilde{l}_2^2 + \tilde{l}_2 + 4}{10} \dot{\tilde{l}}_2 &= \frac{2\tilde{l}_1^2 + \tilde{l}_1 + 2}{2\tilde{l}_1 - 1} + \frac{\tilde{l}_2^2 + \tilde{l}_2 + 4}{1 - \tilde{l}_2} \end{aligned} \quad (5.2)$$

с начальными условиями $\tilde{l}_1(0) = 1/2$, $\tilde{l}_2(0) = 1$.

Зависимости $\tilde{l}_1(\tilde{t})$, $\tilde{l}_2(\tilde{t})$ находились из системы (5.2) численно. По ним, в свою очередь, определялась зависимость концентрации от координаты и времени $\bar{c}(\tilde{r}, \tilde{t})$.

В начале второй стадии диффузионного процесса концентрация во всем стержне отлична от нуля и определена в момент окончания первой стадии при смыкании двух диффузионных фронтов. Зависимость концентрации от времени задается в виде

$$\bar{c}(\tilde{r}, \tilde{t}) = \begin{cases} B + (1 - B) \left[\frac{\tilde{r} - \tilde{l}}{1/2 - \tilde{l}} \right]^2 & \text{при } 1/2 \leq \tilde{r} \leq \tilde{l}(\tilde{t}), \quad \tilde{t} > \tilde{t}_0 \\ B + (1 - B) \left[\frac{\tilde{r} - \tilde{l}}{1 - \tilde{l}} \right]^2 & \text{при } \tilde{l}(\tilde{t}) \leq \tilde{r} \leq 1, \quad \tilde{t} > \tilde{t}_0 \end{cases} \quad (5.3)$$

где $\tilde{l}(\tilde{t})$ — координата точки соединения фронтов в конце первой стадии диффузионного процесса, соответствует минимуму концентрации по поперечному сечению полого стержня, $B(\tilde{t})$ — концентрация в указанной точке соединения фронтов.

Проводя рассуждения и выкладки, аналогичные проведенным на первой стадии, получим следующую систему дифференциальных уравнений.

$$\begin{aligned} \frac{(4\tilde{l} + 9)}{48} \dot{B} + \left[\frac{\dot{\tilde{l}}}{12} - \frac{2\tilde{l}}{(\tilde{l} - 1)(2\tilde{l} - 1)} \right] (B - 1) &= 0 \\ \frac{(4\tilde{l}^2 + 9\tilde{l} + 14)}{40} \dot{B} + \left[\frac{\dot{\tilde{l}}(8\tilde{l} + 9)}{40} + \frac{2(\tilde{l}^2 + 3\tilde{l} - 1)}{(1 - 2\tilde{l})(\tilde{l} - 1)} \right] (B - 1) &= 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Начальные условия системы (5.4) имеют следующий вид:

$$\tilde{l}(\tilde{t}_0) = 0.88, \quad B(\tilde{t}_0) = 0,$$

Величина правой части первого начального условия полагается равной значению решения системы (5.2) в момент времени $\tilde{t}_0 = 0.002$ окончания первой стадии диффузионного процесса. Второе начальное условие означает, величину концентрации в точке смыкания фронтов в конце первой стадии диффузионного процесса в момент времени $\tilde{t}_0$. Как и для первой стадии зависимости $B(\tilde{t})$, $\tilde{l}(\tilde{t})$ определялись из численного решения системы (5.4).

Интегрально средняя концентрация определяется выражением:

$$\bar{c}_m(t) = \frac{1}{F_c} \int_{R/2}^R \bar{c}(r, t) r dr,$$

где $F_c = 0.75\pi R^2$ — площадь поперечного сечения стержня в форме кольца.

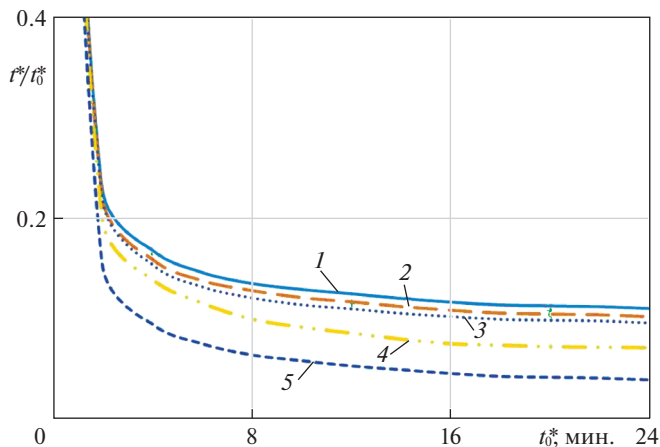


Рис. 5. Зависимость отношения времени до разрушения при наличии и отсутствии агрессивной среды t^*/t_0^* от времени до разрушения при ее отсутствии t_0^* для стержней с отверстием при различной форме внешнего контура поперечного сечения: 1 – квадратное поперечное сечение, 2 – прямоугольное поперечное сечение $\alpha = 0.85$, 3 – прямоугольное поперечное сечение $\alpha = 0.7$, 4 – поперечное сечение в виде кольца, 5 – поперечное сечение в виде тонкого прямоугольника с отверстием.

6. Длительная прочность растягиваемых стержней в агрессивной среде. Рассмотрим кинетическое уравнение, в котором скорость накопления повреждений зависит от растягивающего напряжения σ_0 (принимаяющего одно и то же значение во всех рассмотренных стержнях) и интегрально среднего уровня концентрации агрессивной среды $\bar{c}_m$ в следующем виде [9]:

$$\frac{d\omega}{dt} = A \left(\frac{\sigma_0}{1 - \omega(t)} \right)^n f(\bar{c}_m(t)), \quad \omega(0) = 0, \quad \omega(t^*) = 1 \quad (6.1)$$

t^* – время до разрушения стержня, зависимости $f(\bar{c}_m)$ – возрастающая функция, удовлетворяющая равенству $f(0) = 1$. Интегрируя (6.1), можно получить связь времени до разрушения при отсутствии и при наличии агрессивной среды (t_0^* и t^* соответственно):

$$t_0^* = \left[(n+1) A \sigma_0^n \right]^{-1} = \int_0^{t^*} f(\bar{c}_m(t)) dt \quad (6.2)$$

В случае зависимости $f(\bar{c}_m)$ с одной материальной константой можно рассматривать линейную функцию [39]:

$$f(\bar{c}_m) = 1 + k\bar{c}_m, \quad k = 9.5 \quad (6.3)$$

Подставляя полученные ранее зависимости $\bar{c}_m(t)$ в (6.3), а затем в (6.2), получаем времена до разрушения стержней различной формы в агрессивной среде.

В качестве примера рассмотрим стержни с отверстиями при различных рассматриваемых ранее в статье формах поперечных сечений с неизменной величиной площади этих сечений $F = 100 \text{ мм}^2$. Эти стержни изготовлены из α -Fe и находятся в водородной среде при температуре 500°C , в этом случае коэффициент диффузии в материале стержня равен $D = 1.02 \text{ мм}^2/\text{мин.}$ [40].

На рис. 5 приведены зависимости t^*/t_0^* от t_0^* (мин.) для рассматриваемых форм поперечного сечения. Из рис. 5 следует, что среди рассматриваемых форм поперечного

Таблица 1. Значения времен t^* и отношений времен t^*/t_0^* для рассматриваемых двухсвязных форм поперечного сечения стержня

№ п/п	Форма поперечного сечения с отверстием	Размеры внешнего контура сечения мм	M , мм	t^*/t_0^* , $t_0^* = 6$ мин.	t^*/t_0^* , $t_0^* = 16$ мин.	t^*/t_0^* , $t_0^* = 26$ мин.
1	Кольцо	$R = 15.642$	53.179	0.696	1.208	1.817
				0.116	0.075	0.070
2	Квадрат	$a = 10$	60.000	0.876	1.861	2.818
	$a = 1$	$b = 10$		0.146	0.116	0.108
3	Прямоугол.	$a = 10.541$	60.084	0.846	1.802	2.734
	$\alpha = 0.90$	$b = 9.487$		0.141	0.113	0.105
4	$\alpha = 0.85$	$a = 10.846$	60.120	0.828	1.733	2.610
		$b = 9.220$		0.138	0.311	0.100
5	$\alpha = 0.80$	$a = 11.180$	60.330	0.783	1.635	2.502
		$b = 8.944$		0.130	0.102	0.096
6	$\alpha = 0.70$	$a = 11.952$	60.957	0.741	1.592	2.392
		$b = 8.367$		0.124	0.100	0.092
7	$\alpha = 0.60$	$a = 12.910$	61.968	0.719	1.324	2.110
		$b = 7.746$		0.120	0.082	0.081
8	$\alpha = 0.04$	$a = 50.000$	156	0.408	0.613	0.794
		$b = 2.000$		0.068	0.038	0.034
9	$\alpha = 0.0225$	$a = 66.667$	202.400	0.386	0.601	0.732
		$b = 1.500$		0.064	0.038	0.028
10	$\alpha = 0.01$	$a = 100$	303	0.354	0.583	0.699
		$b = 1$		0.059	0.036	0.027
11	$\alpha = 0.0025$	$a = 200$	600.500	0.312	0.537	0.632
		$b = 0.500$		0.052	0.004	0.024

сечения стержней минимальное время до разрушения соответствует стержню с двухсвязным поперечным сечением в виде тонкого прямоугольника с отверстием.

В табл. 1 приведены значения времен t^* и отношений t^*/t_0^* для всех рассмотренных форм поперечного сечения при трех значениях t_0^* (6, 16 и 26 мин.). Из табл. 1 следует, что в прямоугольниках независимо от величины t_0^* большему значению длины контура поперечного сечения прямоугольника M соответствует меньшее значение t^* . Это означает, что увеличение длины контура поперечного сечения прямоугольника M приводит к уменьшению времени до разрушения t^* соответствующего стержня. Так, среди сечений в виде прямоугольников с различными комбинациями сторон время до разрушения стержней убывает при возрастании величины периметра поперечного сечения. Это верно, как для односвязных областей [4], так и для двухсвязных.

Заключение. С помощью приближенного решения уравнений диффузии определяются характеристики диффузионного процесса в стержнях при различных формах их двухсвязных поперечных сечений (круг, квадрат и прямоугольники с различным соотношением сторон). Для определения влияния агрессивной среды на длительную прочность растягиваемых стержней используется вариант кинетической теории Ю.Н. Работнова. Вычисления показывают, что наименьшее время до разрушения реализуется в прямоугольных стержнях с минимальной толщиной b (при $\alpha = b/a = 0.0025$)

среди рассмотренных. При принятом равенстве площадей рассматриваемых поперечных сечений и равенстве растягивающих напряжений стержень с прямоугольным поперечным сечением с минимальной толщиной является стержнем с поперечным сечением, имеющим максимальный периметр контура.

Показано, что среди сечений в виде полых прямоугольников с различными комбинациями сторон ($\alpha = 0.0025-0.9$) время до разрушения стержней убывает с уменьшением α и, как следствие, с возрастанием величины периметра поперечного сечения M .

Приведенные выводы по зависимостям времен до разрушения от периметра для стержней с поперечными сечениями в виде полых прямоугольников естественны вследствие подобия наружного и внутреннего контуров сечений.

Полученные результаты времен до разрушения подобных друг другу полых поперечных сечений стержней не подтверждаются для сечений в виде полого квадрата и кольца, рассматриваемых в статье. Данный факт авторы статьи объясняют отсутствием подобия контуров этих сечений. При принятом равенстве площадей всех рассматриваемых в статье типов поперечных сечений и равенстве растягивающих напряжений время до разрушения стержня с поперечным сечением в виде полого квадрата ($\alpha = 1$) превышает время до разрушения кольца той же площади. Для рассматриваемых времен до разрушения в нейтральных условиях (6, 16 и 26 мин.) это превышение составляет от 25 до 55 процентов и увеличивается с ростом времени до разрушения. При этом длина периметра сечения в виде полого квадрата также превышает длину периметра кольца. Данный факт авторы статьи объясняют особенностями диффузионного процесса в углах сечения в виде полого квадрата.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00062).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Локощенко А.М., Фомин Л.В. Моделирование поведения материалов и элементов конструкций, находящихся под воздействием агрессивных сред (обзор) // Пробл. прочн. пластичн. 2018. Т. 80. № 2. С. 145–179.
2. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов в агрессивных средах (обзор) // Физ.-хим. мех. матер. 2001. № 4. С. 27–41.
3. Локощенко А.М., Фомин Л.В. Влияние формы поперечного сечения растягиваемых стержней на длительную прочность в присутствии агрессивной окружающей среды // ПМТФ. 2016. С. 35–44.
4. Ларин Н.С., Локощенко А.М., Фомин Л.В. Зависимость времени до разрушения стержней, растягиваемых при ползучести в присутствии агрессивной среды, от формы односвязного поперечного сечения // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 5. С. 59–69.
5. Вильчевская Е.Н., Фрейдин А.Б., Морозов Н.Ф. Кинетика фронта химической реакции в центрально-симметричных задачах механохимии // Докл. РАН. 2015. Т. 461. № 5. С. 525–529.
6. Фрейдин А.Б. О тензоре химического сродства при химических реакциях в деформируемых материалах // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 3. С. 35–69.
7. Фрейдин А.Б., Вильчевская Е.Н., Королев И.К. О фазовых превращениях в области неоднородности материала. Ч. 2. Взаимодействие трещины с включением, претерпевающим фазовое превращение // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 5. С. 32–42.
8. Овчинников И.И., Овчинников И.Г., Богина М.Ю. Моделирование деформирования и разрушения материалов в условиях радиационного облучения с учетом влияния вида напряженного состояния. Сообщ. 1. Об учете влияния радиационного облучения при построении моделей деформирования в радиационных условиях с применением теории структурных параметров // Интернет-ж. Науковедение. 2013. № 2. <http://publ.naukovedenie.ru>
9. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
10. Овчинников И.Г., Овчинников И.И., Богина М.Ю., Матора А.В. Модели и методы, используемые при расчете и моделировании поведения конструкций, подвергающихся воздействию

- радиационных сред // Интернет-ж. Науковедение. 2013. № 2.
<http://publ.naukovedenie.ru>
11. Овчинников И.Г., Богина М.Ю., Матора А.В. Влияние радиационных сред на механические характеристики материалов и поведение конструкций (обзор) // Интернет-ж. Науковедение. 2012. № 4.
<http://publ.naukovedenie.ru>
 12. Марголин Б.З., Гуленко А.Г., Курсевич И.П., Бучатский А.А. Прогнозирование длительной прочности аустенитных материалов при нейтронном облучении // Вопр. материал. 2005. № 2 (42). С. 163–186.
 13. Марголин Б.З., Бучатский А.А., Гуленко А.Г. и др. Новый метод прогнозирования сопротивления циклическому нагружению при вязкоупругопластическом деформировании и нейтронном облучении // Пробл. проч. 2008. № 6. С. 5–24.
 14. Митенков Ф.М., Большухин М.А., Козин А.В., Коротких Ю.Г., Панов В.А., Пахомов В.А., Пичков С.Н. Технология эксплуатационного мониторинга ресурса оборудования и систем ЯЭУ // Пробл. прочн. пластич. 2012. Вып. 74. С. 68–77.
 15. Демидов А.С., Кашелкин В.В., Кашистанов А.Д., Яковлев В.А. Прогнозирование механических свойств реакторной стали 08Х16Н1МЗ-ПД в условиях ползучести без учета и с учетом радиационного облучения // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2015. № 2. С. 18–26.
 16. Хажинский Г.М. Поведение металла ядерных реакторов. М.: Спутник+, 2018. 233 с.
 17. Овчинников И.Г., Раткин В.В., Землянский А.А. Моделирование поведения железобетонных элементов конструкций в условиях воздействия хлоридосодержащих сред. СГТУ. Саратов. 2000. 232 с.
 18. Овчинников И.Г., Хвалько Т.А. Работоспособность конструкций в условиях высокотемпературной водородной коррозии. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2003. 176 с.
 19. Кудрявцев А.С., Марков В.Г., Лаврухин В.С. Длительная прочность стали в жидкометаллическом теплоносителе на основе свинца // Вопр. материал. 2006. № 4(48). С. 89–94.
 20. Кудрявцев А.С., Кашистанов А.Д., Марков В.Г., Лаврухин В.С. Прочность хромистой мартенситной стали в теплоносителе на основе свинца // Вопр. материал. 2007. № 1(49). С. 78–82.
 21. Chiang M.F., Hsu H.H., Young M.C., Huang J.Y. Mechanical degradation of cold-worked 304 stainless steel in salt spray environments // J. Nucl. Mater. 2012. V. 422. P. 58–68.
 22. Chopra O.K., Rao A.S. A review of irradiation effects on LWR core internal materials – IASCC susceptibility and crack growth rates of austenitic stainless steels // J. Nucl. Mater. 2011. V. 409. P. 235–256.
 23. Fukuya K. Current understanding of radiation-induced creep of light water reactor structural materials // J. Nucl. Mater. 2013. V. 50. P. 213–254.
 24. Garner F.A., Makenas B.J., Chastain S.A. Swelling and creep observed in AISI 304 fuel pin cladding from three MOX fuel assemblies irradiated in ERB-II // J. Nucl. Mater. 2011. V. 413. P. 53–61.
 25. Garnier J., Brechet Y., Delnondedieu M., Pokor C., Dubuissison P., Renault A., Averty X., Massoud J.P. Irradiating creep of SA 304L and CW 316 stainless steels: Mechanical behavior and microstructural aspects. Part I. Experimental results // J. Nucl. Mater. 2011. V. 413. P. 63–69.
 26. Gurovich B.A., Kuleshova E.A., Frolov A.S., Maltsev D.A., Prikhodko K.E., Fedotova S.V., Margolin B.Z., Sorokin A.A. Investigation of high temperature annealing effectiveness for recovery of radiation-induced structural changes and properties of 18Cr-10Ni-Ti austenitic stainless steels // J. Nucl. Mater. 2015. V. 465. P. 565–581.
 27. Materna-Morris E., Möslang A., Schneider H.-C. Tensile and low cycle fatigue properties of EUROFER97-steel after 16.3 dpa neutron irradiation at 523, 623 and 723K // J. Nucl. Mater. 2013. V. 442. P. 562–566.
 28. Gupta J., Hure J., Tanguy B., Laffont L., Lafont M.-C., Andrieu E. Evaluation of stress corrosion cracking of irradiated 304L stainless steel in PWR environment using heavy ion irradiation // J. Nucl. Mater. 2016. V. 476. P. 82–92.
 29. Litao Chang M., Grace Burke, Fabio Scenini. Stress corrosion crack initiation in machined type 316L austenitic stainless steel in simulated pressurized water reactor primary water // Corrosion Sci. 2018. V. 138. P. 54–65.
 30. Negyesi M., Masaki Amaya. The effect of nitride formation on the oxidation kinetics of Zry-4 fuel cladding under steam-air atmospheres at 1273–1573 K // J. Nucl. Mater. 2019. V. 524. P. 263–277.

31. Renault-Laborne A., Garnier J., Malaplate J., Gavoille P., Sefta F., Tanguy B. Evolution of micro-structure after irradiation creep in several austenitic steels irradiated up to 120 dpa at 320°C // J. Nucl. Mater. 2016. V. 475. P. 209–226.
32. Lapouge P., Onimus F., Coulombier M., Raskin J.-P., Pardoën T., Bréchet. Y. Creep behavior of sub-micron copper films under irradiation // Acta Mater. 2017. V. 131. P. 77–87.
33. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов в агрессивных средах. М.: МГУ, 2000. 178 с.
34. Локощенко А.М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. М.: Моск. гос. индустр. ун-т., 2007. 264 с.
35. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
36. Будаков Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: ГИТТЛ, 1956. 684 с.
37. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1968. 112 с.
38. Кулагин Д.А. Метод приближенного решения двумерного уравнения диффузии // Научн. тр. III Международного семинара “Современные проблемы прочности” (20–24.IX.1999. Старая Русса). НовГУ. Великий Новгород. 1999. Т. 2. С. 114–117.
39. Фомин Л.В. Описание длительной прочности растягиваемых стержней прямоугольного и круглого поперечных сечений в высокотемпературной воздушной среде // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2013. № 3(32). С. 87–97.
40. Гельд П.В., Рябов Р.А. Водород в металлах и сплавах. М.: Металлургия, 1974. 364 с.

Creep Rupture Strength of Rods Stretched in an Aggressive Medium at Various Two-Connected Forms of Their Cross Sections

A. M. Lokoshchenko^{a,#}, L. V. Fomin^{a,c}, and N. S. Larin^{a,b}

^a Research Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

^b Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

^c Samara State Technical University, Samara, Russia

[#]e-mail: loko@imec.msu.ru

The creep rupture strength of two-connected cross-section rods stretched in an aggressive medium is investigated. Cross sections of the rods are considered in which the shapes of the external and internal contours are similar, in addition, the area of the hollow (internal) part is 25% of the area of the bordering external, loaded part. The areas of the loaded parts of sections with different shapes coincide. To assess the influence of an aggressive medium on creep rupture strength, the Rabotnov's kinetic theory It works with two structural parameters (material damage and concentration of environmental elements in the core material). To determine the level of aggressive medium in the rods, approximate solutions of the diffusion equation are used, based on the motion of diffusion fronts from the outer and inner surfaces of the rods.

Keywords: stretched rods, creep rupture strength, cross-sectional shape, time to fracture, damage, aggressive medium, diffusion equation, diffusion front

REFERENCES

1. Lokoshchenko A.M., Fomin L.V. Modeling the behavior of materials and structural elements exposed to aggressive media (review) // Probl. Strength & Plasticity, 2018, vol. 80, no. 2, pp. 145–179. (in Russian)
2. Lokoshchenko A.M. Creep and Long-Term Strength of Metals in Corrosive Media (Review) // Materials Sci., 2001, vol. 37, pp. 559–572.
3. Lokoshchenko A.M., Fomin L.V. Influence of the cross-sectional shape of tensile bars on their creep rupture strength in a corrosive medium // J. Appl. Mech.&Tech. Phys. 2016. vol. 57, pp. 792–800.

4. *Larin N.S., Lokoshchenko A.M., Fomin L.V.* Dependence of the time before fracture of the rods, stretched during creep in the presence of an aggressive medium, on the shape of a simply connected cross section // *Mech. Solids*, 2019, no. 5, pp. 59–69. (in Russian).
5. *Vilchevskaya E.N., Freidin A.B., Morozov N.F.* Kinetics of the chemical reaction front in spherically symmetric problems of mechanochemistry // *Dokl. Phys.*, 2015, vol. 60, pp. 175–179.
6. *Freidin A.B.* On the chemical affinity tensor for chemical reactions in deformable materials // *Mech. Solids*, 2015, vol. 50, pp. 260–285.
7. *Vilchevskaya E.N., Korolev I.K., Freidin A.B.* On phase transitions in a domain of material inhomogeneity. II. Interaction of a crack with an inclusion experiencing a phase transition // *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, pp. 683–691.
8. *Ovchinnikov I.I., Ovchinnikov I.G., Bogina M.Yu.* Modeling of deformation and fracture of materials under radiation exposure, taking into account the influence of the type of stress state. Report 1. On taking into account the effect of radiation exposure when constructing strain models under radiation conditions using the theory of structural parameters // *Internet J. Naukovedenie*, 2013, no. 2, <http://publ.naukovedenie.ru>. (in Russian)
9. *Rabotnov Yu.N.* Creep Problems in Structural Members. North-Holland, Amsterdam. 1969.
10. *Ovchinnikov I.G., Ovchinnikov I.I., Bogina M.Yu., Matora A.V.* Models and methods used in the calculation and modeling of the behavior of structures exposed to radiation media. // *Internet J. Naukovedenie*, 2013, no. 2, <http://publ.naukovedenie.ru>. (in Russian)
11. *Ovchinnikov I.G., Bogina M.Yu., Matora A.V.* The influence of radiation media on the mechanical characteristics of materials and the behavior of structures (review) // *Internet J. Naukovedenie*, 2012, no. 4, <http://publ.naukovedenie.ru>. (in Russian)
12. *Margolin B.Z., Gulenko A.G., Kursevich I.P., Buchatsky A.A.* Prediction of the long-term strength of austenitic materials under neutron irradiation // *Probl. Mater. Sci.*, 2005, no. 2 (42), pp. 163–186. (in Russian)
13. *Margolin B.Z., Buchatskii A.A., Gulenko A.G. et al.* A method for predicting fracture resistance of material in cyclic loading under viscoelastoplastic deformation and neutron irradiation conditions // *Strength Mater.*, 2008, vol. 40, pp. 601–614.
14. *Mitenkov F.M., Bolshukhin M.A., Kozin A.V., Korotkikh Yu.G., Panov V.A., Pakhomov V.A., Pichkov S.N.* Technology of operational monitoring of the resource of equipment and systems NPP // *Probl. Strength&Plasticity*, 2012, iss. 74, pp. 68–77. (in Russian)
15. *Demidov A.S., Kashelkin V.V., Kashtanov A.D., Yakovlev V.A.* Prediction of the mechanical properties of 08Kh16N11MZ-PD reactor steel under creep conditions without and taking into account radiation exposure // *BMSTU Bull. Ser. Engng.*, 2015, no. 2, pp. 18–26. (in Russian)
16. *Khazhinsky G.M.* Behavior of Metal Nuclear Reactors. Moscow: Sputnik +, 2018. 233 p. (in Russian)
17. *Ovchinnikov I.G., Ratkin V.V., Zemlyansky A.A.* Modeling the Behavior of reinforced Concrete Structural Elements under the Influence of Chloride-Containing Environments. Saratov: Saratov State Techn. Univ., 2000. 232 p. (in Russian)
18. *Ovchinnikov I.G., Khvalko T.A.* The Performance of Structures in Conditions of High-temperature Hydrogen Corrosion. Saratov: Saratov State Techn. Univ., 2003. 176 p. (in Russian)
19. *Kudryavtsev A.S., Markov V.G., Lavrukhin V.S.* Long-term strength of steel in a lead-based liquid metal coolant // *Probl. Mater. Sci.*, 2006, no. 4 (48), pp. 89–94. (in Russian)
20. *Kudryavtsev A.S., Kashtanov A.D., Markov V.G., Lavrukhin V.S.* Strength of chromium martensitic steel in a lead-based coolant // *Probl. Mater. Sci.*, 2007, no. 1 (49), pp. 78–82. (in Russian)
21. *Chiang M.F., Hsu H.H., Young M.C., Huang J.Y.* Mechanical degradation of cold-worked 304 stainless steel in salt spray environments // *J. Nucl. Mater.*, 2012, vol. 422, pp. 58–68.
22. *Chopra O.K., Rao A.S.* A review of irradiation effects on LWR core internal materials – IASCC susceptibility and crack growth rates of austenitic stainless steels // *J. Nucl. Mater.*, 2011, vol. 409, pp. 235–256.
23. *Fukuya K.* Current understanding of radiation-induced creep of light water reactor structural materials // *J. Nucl. Mater.*, 2013, vol. 50, pp. 213–254.
24. *Garner F.A., Makenas B.J., Chastain S.A.* Swelling and creep observed in AISI 304 fuel pin cladding from three MOX fuel assemblies irradiated in ERB-II // *J. Nucl. Mater.*, 2011, vol. 413, pp. 53–61.

25. *Garnier J., Brechet Y., Delnondedieu M., Pokor C., Dubuissison P., Renault A., Averty X., Massoud J.P.* Irradiating creep of SA 304L and CW 316 stainless steels: Mechanical behavior and microstructural aspects. Part I. Experimental results // *J. Nucl. Mater.*, 2011, vol. 413, pp. 63–69.
26. *Gurovich B.A., Kuleshova E.A., Frolov A.S., Maltsev D.A., Prikhodko K.E., Fedotova S.V., Margolin B.Z., Sorokin A.A.* Investigation of high temperature annealing effective-ness for recovery of radiation-induced structural changes and properties of 18Cr-10Ni-Ti austenitic stainless steels // *J. Nucl. Mater.*, 2015, vol. 465, pp. 565–581.
27. *Materna-Morris E., Möslang A., Schneider H.-C.* Tensile and low cycle fatigue properties of EUROFER97-steel after 16.3 dpa neutron irradiation at 523, 623 and 723K // *J. Nucl. Mater.*, 2013, vol. 442, pp. 562–566.
28. *Gupta J., Hure J., Tanguy B., Laffont L., Lafont M.-C., Andrieu E.* Evaluation of stress corrosion cracking of irradiated 304L stainless steel in PWR environment using heavy ion irradiation // *J. Nucl. Mater.*, 2016, vol. 476, pp. 82–92.
29. *Litao Chang M., Grace Burke, Fabio Scenini.* Stress corrosion crack initiation in machined type 316L austenitic stainless steel in simulated pressurized water reactor primary water // *Corrosion Sci.*, 2018, vol. 138, pp. 54–65.
30. *Negyesi M., Masaki Amaya.* The effect of nitride formation on the oxidation kinetics of Zry-4 fuel cladding under steam-air atmospheres at 1273–1573 K // *J. Nucl. Mater.*, 2019, vol. 524, pp. 263–277.
31. *Renault-Laborne A., Garnier J., Malaplate J., Gavaille P., Sefta F., Tanguy B.* Evolution of micro-structure after irradiation creep in several austenitic steels irradiated up to 120 dpa at 320°C // *J. Nucl. Mater.*, 2016, vol. 475, pp. 209–226.
32. *Lapouge P., Onimus F., Coulombier M., Raskin J.-P., Pardoën T., Bréchet. Y.* Creep behavior of sub-micron copper films under irradiation // *Acta Mater.*, 2017, vol. 131, pp. 77–87.
33. *Lokoshchenko A.M.* Creep and Creep Rupture of Metals in Aggressive Environments. Moscow: Moscow State Univ., 2000. 178 p. (in Russian)
34. *Lokoshchenko A.M.* Modeling of Creep and Creep Rupture of metals. Moscow.: Moscow State Industry Univ., 2007. 264 p. (in Russian)
35. *Lokoshchenko A.M.* Creep and Long-Term Strength of Metals. N.Y.: CISP. CRC Press, 2018. 545 p.
36. *Budak B.M., Samarsky A.A., Tikhonov A.N.* Collection of Problems in Mathematical Physics. Moscow: GITTL, 1956. 684 p. (in Russian)
37. *Smirnov M.M.* Problems in the Equations of Mathematical Physics. Moscow: Nauka, 1968. 112 p. (in Russian)
38. *Kulagin D.A.* A method for the approximate solution of the two-dimensional diffusion equation // *Sci. Proc. III Intern. Sem. “Modern Problems of Strength” (20-24.IX.1999. Staraya Russa).* Novgorod State University. Velikiy Novgorod. 1999. Vol. 2. pp. 114–117. (in Russian)
39. *Fomin L.V.* Description of the creep rupture strength of tensile rods with rectangular and circular cross-sections at high-temperature air media // *Bull. Samara State Techn. Univ. Ser. Phys.-Math. Sci.*, 2013, no. 3 (32), pp. 87–97. (in Russian)
40. *Geld P.V., Ryabov R.A.* Hydrogen in Metals and Alloys. Moscow: Metallurgy, 1974. 364 p. (in Russian)

УДК 539.3

ПОСЛОЙНЫЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ НЕНУЛЕВОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

© 2021 г. В. Н. Бакулин*

*Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия***e-mail: vbak@yandex.ru*

Поступила в редакцию 27.02.2020 г.

После доработки 17.08.2020 г.

Принята к публикации 17.10.2020 г.

Рассматривается построение оболочечной модели для послойного анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных нерегулярных оболочек вращения двойной кривизны. Построение модели проводится на основе блочного конечно-элементного подхода. При этом рассматривается два типа оболочечных конечных элементов (КЭ) двойной кривизны — двумерный КЭ несущих слоев и трехмерный КЭ заполнителя. Проводится сравнительный анализ результатов расчета по приведенным алгоритмам с применением конечных элементов несущих слоев с аналитическим и конечно-элементным решениями, полученными с использованием программного комплекса ANSYS на задаче деформирования однослойной сферической оболочки под действием самоуравновешенных сил. В качестве примера решена задача об исследовании влияния сквозных и несквозных прямоугольных в плане вырезов на напряженно-деформированное состояние трехслойной оболочки вращения двойной кривизны.

Ключевые слова: послойный анализ, напряженно-деформированное состояние, трехслойные нерегулярные оболочки, двойная кривизна, модели, конечные элементы, блок, сквозные и несквозные вырезы

DOI: 10.31857/S0032823521010033

1. Введение. Краткий обзор конечно-элементных моделей. Слоисто-неоднородные, в том числе трехслойные оболочки находят растущее применение в конструкциях летательных аппаратов (ЛА) и др. современной техники [1–3]. Оболочки вращения двойной кривизны сферической, оживальной и др. форм используются в качестве элементов конструкций корпусов двигателей ЛА, головных частей и других агрегатов.

Анализ большого числа публикаций, посвященных моделям для расчета слоисто-неоднородных, в том числе трехслойных оболочек, проведен в ряде обзоров, некоторые из последних обзоров приведены в работах [4–7].

Провести расчет большинства реальных конструкций аналитическими методами, как правило, не удастся из-за математических трудностей, что приводит к необходимости разрабатывать и применять модели на основе численных методов и особенно метода конечных элементов (МКЭ) [8, 9], позволяющего с необходимой степенью детализации проводить расчетные исследования.

Некоторые конечно-элементные модели (КЭМ) слоистых, в том числе трехслойных нерегулярных оболочек, рассматривались в монографиях [10–14] и других работах. В ряде этих и других работ модели построены на гипотезах, применяемых к пакету

слоев. Наиболее распространенной из таких моделей является модель Тимошенко [11, 15, 16].

Построение конечно-элементных моделей для анализа НДС трехслойных нерегулярных оболочек на основе гипотезы ломаной линии рассматривалось в [10, 17] и многих других работах.

Для расчета многослойных оболочек вращения при произвольном нагружении использован объемный шестигранный конечный элемент с узловыми неизвестными в виде перемещений и их производных с разработкой соотношений между векторами узловых величин на границе раздела слоев материалов [18].

Цикл работ [19–22] посвящен векторной интерполяции полей перемещений в конечно-элементных расчетах оболочек и решению проблемы учета смещений конечного элемента как жесткого целого с помощью этого подхода. В монографиях [19, 20] обобщен материал этих научных исследований и рассмотрено использование метода конечных элементов в расчетах композиционных инженерных конструкций, а также изучена формулировка метода перемещений в расчетах тонких оболочек при учете физической и геометрической нелинейностей.

Излагается [21] алгоритм конечно-элементного расчета напряженно-деформированного состояния оболочек вращения с учетом деформаций поперечного сдвига на основе четырехугольного элемента при различных вариантах отсчета угла наклона нормали в процессе деформирования.

Проведено [22] сравнение эффективности использования конечных элементов различной мерности при анализе напряженно-деформированного состояния тонких оболочек. Представлены результаты при использовании двумерного элемента дискретизации в форме четырехугольного фрагмента срединной поверхности и трехмерного элемента в виде восьмиугольного шестигранника. В качестве узловых варьируемых параметров выбирались компоненты вектора перемещения и их первые производные. Функции формы для обоих типов элементов дискретизации были представлены произведениями полиномов Эрмита третьей степени. На примере расчета защемленной по торцам цилиндрической оболочки показано, что двумерная постановка в расчетах тонких оболочек является адекватной и позволяет получать приемлемые результаты при оптимальных затратах машинного времени.

Рассмотрен [23] метод решения задач теории упругости для толстых и тонких оболочек в пространственной постановке. Метод основан на концепции отсчетных поверхностей внутри оболочки. Согласно этому методу в теле оболочки вводятся N отсчетных поверхностей, параллельных срединной поверхности и расположенных в узлах многочлена Чебышёва, для того чтобы выбрать векторы перемещений этих поверхностей $u^1, u^2, \dots, u^N$ в качестве искомым функций. Такой выбор искомым функций позволяет представить разрешающие уравнения предложенной теории оболочек высокого порядка в достаточно компактной форме и получить деформационные соотношения, которые корректно описывают перемещения оболочки как жесткого тела [23].

Предложен [24] эффективный гибридно-смешанный четырехузловой оболочечный элемент. Рассматривалась [25] модель послойного анализа трехслойных нерегулярных конических оболочек.

Разработке и применению многосеточных конечных элементов (МНКЭ) посвящены работы [26–28]. Многосеточные КЭ проектируются в локальных декартовых системах координат на основе мелких (базовых) разбиений оболочек, которые учитывают их неоднородную и микрон неоднородную структуру, сложную форму, сложный характер нагружений и закреплений. Напряженно-деформированное состояние в многосеточных конечных элементах описывается уравнениями трехмерной задачи теории упругости без введения дополнительных кинематических и статических гипотез, что позволяет использовать МНКЭ для расчета оболочек любой толщины.

Показана [26, 27] техника построения в криволинейных системах координат лагранжевых полиномов, которые эффективны при проектировании многосеточных конечных элементов оболочечного типа. Перемещения в конечных элементах, формирующих МНКЭ, аппроксимируются степенными и лагранжевыми полиномами различных порядков. Расчет напряженно-деформированного состояния с помощью предлагаемых многосеточных конечных элементов порождает сходящиеся последовательности приближенных решений и приводит к снижению порядка системы алгебраических уравнений метода конечных элементов, что обеспечивает существенную экономию ресурсов ЭВМ при небольших временных затратах. Приведен пример расчета трехслойной подкрепленной цилиндрической оболочки с применением трехсеточного конечного элемента оболочечного типа, который значительно уменьшает объем используемой памяти ЭВМ в сравнении с базовой конечно-элементной моделью. Это позволяет проводить расчеты композитных цилиндрических оболочечных конструкций больших размеров. Приведено сравнение полученных результатов с решением данной задачи в программном комплексе ANSYS [26, 27].

Отмечено [28], что основные достоинства многосеточных конечных элементов состоят в том, что они образуют дискретные модели, размерность которых в 10^2 – 10^6 раз меньше размерности базовых моделей, и порождают решения с малой погрешностью. Представлены примеры расчетов четырех- и трехслойных овальных оболочек различной толщины и формы при равномерном и локальном нагружениях с применением 3-сеточных КЭ. Сравнительный анализ полученных решений с решениями, построенными с помощью программного комплекса ANSYS, показывает высокую эффективность предлагаемых многосеточных конечных элементов в расчетах многослойных овальных оболочек.

Рассматривается [29] конечный элемент несущих слоев для построения модели послойного анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических нерегулярных оболочек вращения. Проводится сравнение с конечными элементами других авторов.

При построении моделей конечных элементов важным является получение или выбор аппроксимаций искомых функций (перемещений, деформаций, напряжений). Это особенно актуально при послойном анализе [30, 31] напряженно-деформированного состояния слоисто-неоднородных, в том числе трехслойных нерегулярных оболочек.

Отмечалась актуальность проблемы построения эффективных конечно-элементных моделей [10, 11, 26, 27, 32, 33].

Наиболее эффективными при построении моделей конечных элементов являются аппроксимации искомых функций, построенные на основе аналитических решений [34–38]. Но получить аппроксимации перемещений с помощью аналитических решений удалось только для осесимметричных трехслойных цилиндрических оболочек и слоистых круговых стержней [34–38].

Эффективными также являются аппроксимации функций обобщенных деформаций [39–45]. Сложность и особенность оболочечных конечных элементов, построенных на основе аппроксимации функций обобщенных деформаций, заключается в необходимости удовлетворения этих функций уравнениям неразрывности (совместности) деформаций [46]. Получить такие аппроксимации и построить эффективные конечно-элементные модели удалось для незамкнутых круговых трехслойных цилиндрических оболочек в работах [40, 41, 43–45, 47].

Для повышения скорости сходимости численных результатов важным требованием к аппроксимациям функций перемещений оболочечных конечных элементов является учет b как твердых тел [10, 11, 17, 19, 25, 29, 43–45, 47–51].

2. Постановка задачи. В представленной статье рассматривается построение оболочечной модели для послойного анализа напряженно-деформированного состояния

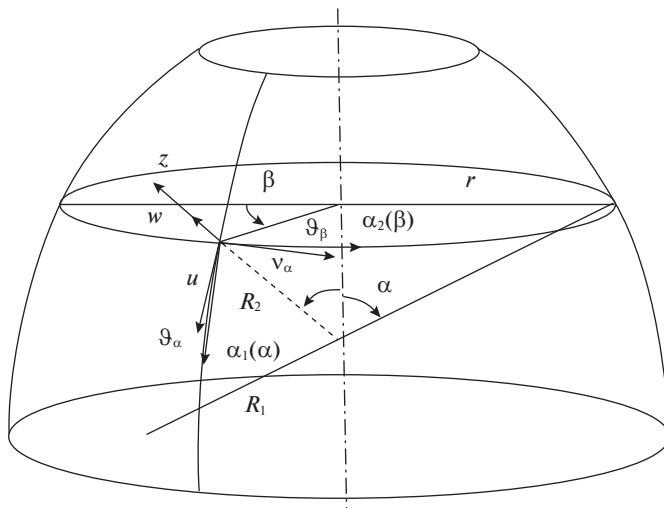


Рис. 1.

трехслойных нерегулярных оболочек вращения ненулевой гауссовой кривизны на основе блочного конечно-элементного подхода [52]. При этом блоки будут строиться из двух типов конечных элементов (КЭ) двойной кривизны, которые точно моделируют геометрию рассматриваемых оболочек [53]. Для моделирования напряженно-деформированного состояния в несущих слоях будем использовать двумерный КЭ, построенный на основе моментной теории тонких оболочек, к которым применимы гипотезы Кирхгофа–Лява. Напряженно-деформированное состояние в слое заполнителя будем моделировать необходимым для достижения требуемой точности и степени детализации числом трехмерных конечных элементов толстостенной оболочки вращения ненулевой гауссовой кривизны.

3. Модель для исследования напряженно-деформированного состояния в несущих слоях. Будем считать справедливыми для несущих слоев гипотезы Кирхгофа–Лява, тогда для моделирования напряженно-деформированного состояния в несущих слоях будем использовать двумерный конечный элемент естественной кривизны, построенный на основе моментной теории тонких оболочек вращения ненулевой гауссовой кривизны (рис. 1). На рис. 1 R_1 , R_2 (R_2 показан пунктиром) – главные радиусы кривизны срединной поверхности несущего слоя трехслойных оболочек вращения двойной кривизны.

Конечный элемент несущих слоев образован сечением оболочки двумя плоскостями, перпендикулярными оси вращения, и двумя плоскостями, проходящими через ось оболочки. Узловыми параметрами являются три перемещения точек срединной поверхности и углы поворота нормали к срединной поверхности относительно осей α_1 (α) и α_2 (β) (рис. 1) в четырех угловых точках конечного элемента.

Компоненты линейной составляющей вектора обобщенных деформаций (далее деформаций) несущего слоя

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^c = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma, \varkappa_1, \varkappa_2, \chi\}^T$$

связаны с компонентами вектора перемещений точек срединной поверхности

$$\boldsymbol{\delta}_i^c = \{u, v, w\}^T$$

соотношениями [54]

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^c = \mathbf{B}_i^c \boldsymbol{\delta}_i^c$$

$$\mathbf{B}_i^c = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_l} \frac{\partial}{\partial \alpha} & 0 & \frac{1}{R_l} \\ \frac{\cos \alpha}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \beta} & \frac{\sin \alpha}{r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \beta} & \frac{1}{R_l} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\cos \alpha}{r} & 0 \\ \frac{1}{R_l^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} & 0 & -\frac{1}{R_l^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \\ \frac{\cos \alpha}{R_l r} & \frac{\sin \alpha}{r^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \beta} & -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{\cos \alpha}{R_l r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{1}{R_l r} \frac{\partial}{\partial \beta} & \frac{\sin \alpha}{R_l r} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{r^2} & -\frac{1}{R_l r} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\cos \alpha}{r^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

где $i = 1, 2, 3$ номер слоя, начиная с внутренней поверхности оболочки, индекс “с” означает, что слой – несущий. Для внутреннего несущего слоя $i = 1$, для внешнего несущего слоя $i = 3$. Система координат находится на срединной поверхности конечного элемента.

Запишем вектор перемещений КЭ несущих слоев

$$\boldsymbol{\delta}_i^c = \boldsymbol{\delta}_c^0 + \boldsymbol{\delta}_c^d, \quad (3.2)$$

где $i = 1, i = 3$, $\boldsymbol{\delta}_c^0$ – вектор перемещений конечного элемента как твердого тела, компоненты которого находятся интегрированием соотношений (3.1) при нулевых значениях деформаций [17, 25, 29, 39, 40, 47, 49, 50, 52] и записываются с помощью шести неопределенных коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_6$, являющихся константами интегрирования; $\boldsymbol{\delta}_c^d$ – вектор перемещений, вызванных деформированием конечного элемента.

Компоненты вектора $\boldsymbol{\delta}_c^d$ записываются с помощью оставшихся после учета перемещений КЭ как твердого тела четырнадцати неопределенных коэффициентов $\alpha_7, \dots, \alpha_{20}$.

Таким образом будем иметь

$$\boldsymbol{\delta}_i^c = \mathbf{T}_i^c \boldsymbol{\alpha}_i^c, \quad (3.3)$$

где $\mathbf{T}_i^c$ (3×20) – матрица аппроксимирующих функций перемещений конечного элемента несущих слоев (табл. 1), $\boldsymbol{\alpha}_i^c$ – вектор неопределенных коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_{20}$.

Если подставить координаты узлов конечного элемента в (3.3) и в формулы для углов поворота нормали к срединной поверхности вокруг координатных осей α_1 (α) и α_2 (β) (рис. 1) $\vartheta_\alpha = \frac{\partial w}{r \partial \beta} - \frac{v}{r} \sin \alpha$; $\vartheta_\beta = -\frac{\partial w}{R_l \partial \alpha} + \frac{u}{R_l}$, записанные с помощью (3.3) через $\alpha_1, \dots, \alpha_{20}$, будем иметь следующие зависимости для конечных элементов несущих слоев трехслойной в общем случае нерегулярной оболочки вращения двойной кривизны

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i^c &= \mathbf{C}_i^c \boldsymbol{\alpha}_i^c \\ \boldsymbol{\alpha}_i^c &= (\mathbf{C}_i^c)^{-1} \mathbf{q}_i^c \end{aligned} \quad (3.4)$$

Таблица 1. Матрица $(\mathbf{T}_i^c)^T$ аппроксимирующих функций перемещений конечного элемента несущих слоев, записанная с помощью вектора неопределенных коэффициентов

n	1	2	3
m			
1	$c_1 c$	$-s_1$	sc_1
2	$s_1 c$	c_1	ss_1
3	$c_1 k_1$	$-sc_1 R_1^0$	$-cc_1 k_0$
4	$s_1 k_1$	$cc_1 R_1^0$	$-cs_1 k_0$
5	s	0	$-c$
6	0	k	0
7	α	0	0
8	β	0	0
9	$\alpha\beta$	0	0
10	0	β	0
11	0	$\alpha\beta$	0
12	0	0	$\alpha\beta$
13	0	0	α^2
14	0	0	β^2
15	0	0	$\alpha^2\beta$
16	0	0	$\alpha\beta^2$
17	0	0	α^3
18	0	0	β^3
19	0	0	$\alpha^3\beta$
20	0	0	$\alpha\beta^3$

Здесь $c = \cos \alpha$, $s = \sin \alpha$, $c_1 = \cos \beta$, $s_1 = \sin \beta$, R_1^0 — радиус кривизны R_1 в начале местной системы координат конечного элемента несущих слоев, $k_0 = r_0 - R_1^0 \sin \alpha_0$, r_0 — радиус окружности в плоскости перпендикулярной оси оболочки и проходящей через начало местной системы координат КЭ несущих слоев, α_0 — угловая координата начала местной системы координат КЭ несущих слоев.

Тогда (3.3) с учетом (3.4) будет иметь вид

$$\delta_i^c = \mathbf{F}_i^c \mathbf{q}_i^c, \quad (3.5)$$

где $\mathbf{F}_i^c = \mathbf{T}_i^c (\mathbf{C}_i^c)^{-1}$ — матрица функций формы конечного элемента несущих слоев.

С учетом (3.1), (3.5) запишем вектор ε_i^c через α_i^c и, используя физические соотношения (закон Гука) для несущих слоев, получим зависимости для усилий и моментов по алгоритмам, аналогичным приведенным в работе [38]. Матрицы жесткости конечных элементов несущих слоев трехслойной в общем случае нерегулярной оболочки вращения двойной кривизны определяются подобно [38].

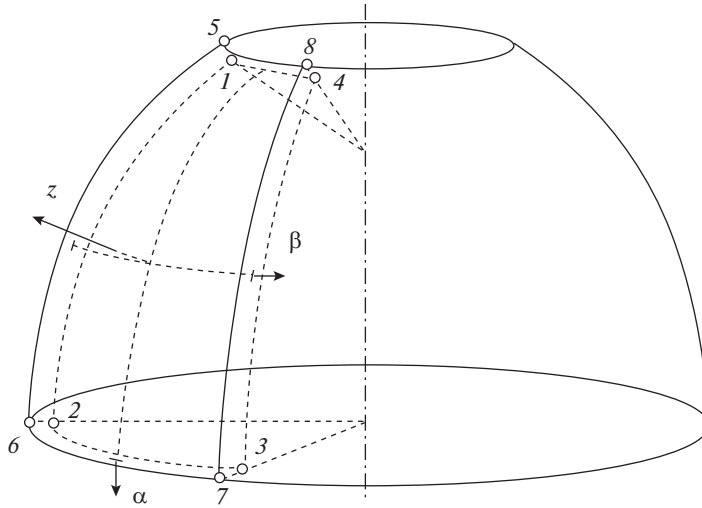


Рис. 2.

4. Модель для исследования напряженно-деформированного состояния в слое заполнителя. Как уже отмечалось выше, слой заполнителя может моделироваться по толщине необходимым числом конечных элементов. Это позволяет учесть изменение геометрических характеристик, физико-механических свойств и параметров напряженно-деформированного состояния не только по меридиональной и окружной координатам, но и по толщине слоя заполнителя.

Рассмотренные аппроксимирующие функции перемещений конечного элемента несущих слоев применим для построения КЭ слоя заполнителя трехслойных нерегулярных оболочек вращения двойной кривизны.

Для этого аппроксимирующие функции перемещений КЭ несущих слоев приводятся к соответствующей поверхности стыковки с заполнителем аналогично [11, 55].

В качестве узловых выберем обе криволинейные поверхности трехмерного конечного элемента слоя заполнителя (рис. 2) (внутренняя поверхность с узлами 1–4 и внешняя криволинейная поверхность с узлами 5–8).

На поверхностях стыковки КЭ несущих слоев и заполнителя у конечных элементов слоя заполнителя на криволинейных поверхностях выбирается столько же узлов, сколько их у конечных элементов несущих слоев, и в качестве узловых параметров и аппроксимирующих функций используются те же обобщенные перемещения и аппроксимирующие функции, что и у КЭ несущих слоев трехслойных нерегулярных оболочек вращения двойной кривизны. Такой подход позволил избежать разрыва перемещений на поверхностях контакта конечных элементов несущих слоев и заполнителя трехслойной нерегулярной оболочки вращения.

Так как изменение геометрических, физико-механических характеристик и параметров напряженно-деформированного состояния по толщине слоя заполнителя учитывается моделированием требуемым числом конечных элементов, то в этих КЭ можно применить линейную аппроксимацию перемещений по толщине.

Выполнив все указанное в этом разделе 4, получим выражение вектора перемещений для конечного элемента слоя заполнителя $\delta_{ij}^f = \{u, v, w\}^T$ (у КЭ слоя заполнителя $i = 2$) через вектор неопределенных коэффициентов α_{ij}^f .

Рассматривая слой заполнителя как толстостенную оболочку вращения двойной кривизны и используя соотношения для трехмерного тела в криволинейных координатах [56], запишем

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^f = \mathbf{B}_{ij}^f \boldsymbol{\delta}_{ij}^f, \quad (4.1)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^f = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}\}^T$ – вектор деформаций,

$$\mathbf{B}_{ij}^f = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} & 0 & \frac{1}{R_1} \\ \frac{\cos \alpha}{r} & \frac{\partial}{r \partial \beta} & \frac{\sin \alpha}{r} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \beta} & \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\cos \alpha}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\sin \alpha}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \beta} \\ \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{R_1} & 0 & \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \end{bmatrix},$$

где индекс f говорит о том, что рассматривается слой заполнителя, j – номер КЭ в слое заполнителя по толщине, считая от внутренней поверхности заполнителя, $r = R_2 \sin \alpha$, R_1, R_2 – главные радиусы кривизны срединной поверхности конечного элемента слоя заполнителя.

С помощью выражений (4.1), записанных через вектор неопределенных коэффициентов, и соотношений физического закона, получаются зависимости для напряжений в конечных элементах слоя заполнителя, записанные также через вектор неопределенных коэффициентов подобно работе [57]. Затем определяется матрица жесткости КЭ слоя заполнителя также, как это сделано в работе [38] для конечных элементов несущих слоев трехслойной цилиндрической оболочки.

На основе вычисленных коэффициентов матриц жесткости конечных элементов моментных несущих слоев и трехмерных конечных элементов заполнителя с помощью вычислительных программ проводится построение общей матрицы жесткости блока [52], состоящего из указанных КЭ, для трехслойной в общем случае нерегулярной оболочки вращения двойной кривизны.

5. Тестовая задача. Проводится сравнительный анализ результатов расчета по приведенным алгоритмам с аналитическим и конечно-элементным решениями, представленными в работе [58] для задачи деформирования сферической оболочки с параметром $R/h = 100$ (R, h – радиус и толщина оболочки) под действием распределенных по дугам окружности самоуравновешенных сил q с равнодействующей P [58]. Результаты конечно-элементного решения [58] с использованием программного комплекса ANSYS с помощью конечного элемента типа упругая оболочка для сетки КЭ, которая последовательно сгущалась до получения установившихся значений внутренних силовых факторов [58].

На основе проведенного расчета с помощью рассмотренного конечного элемента несущих слоев на рис. 3 представлен график сходимости прогиба. $w^* = Ehw/qR$ (E – модуль упругости) в центре дуги приложения сил в зависимости от значения плотности конечно-элементной сетки t в меридиональном направлении при угловом размере КЭ в окружном направлении, равном 1 градусу.

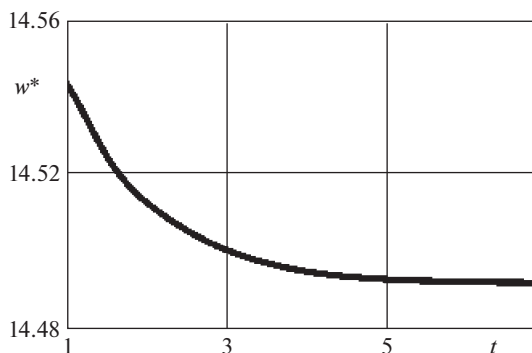


Рис. 3.

Плотность конечно-элементной сетки t определяется по методике, изложенной в работе [59]. При этом $t = 5$ соответствует угловому размеру КЭ, равному ~ 0.8 градуса, а $t = 8$ — угловому размеру КЭ, равному 0.5 градуса.

Как показали полученные результаты расчета с помощью конечного элемента несущих слоев и представленные данные [58], наибольшими являются значения меридиональных напряжений, которые определяются преимущественно величиной изгибающего момента M_1 .

В таблице 2 сопоставлены результаты конечно-элементного расчета при плотности сетки в меридиональном направлении, соответствующей угловому размеру КЭ равному 0.5 градуса, при угловом размере КЭ в окружном направлении равном 1 градусу с аналитическим решением (АП) [58], а также полученным с использованием программного комплекса ANSYS в наиболее напряженной точке в центре дуги приложения сил ($90^\circ; 0$) для двух значений параметра γ (угол полудуги в градусах). Здесь и в работе [58] $q_0 = P/\pi R$.

Видно, что результаты получены с достаточным уровнем точности. Решение с помощью рассмотренного КЭ с уровнем точности, аналогичным полученному в работе [58], достигается на вдвое более крупной сетке, а погрешность $\delta\%$ при этом, как видно из таблицы, в два раза меньше, чем в [58].

6. Численный пример. Исследование напряженно-деформированного состояния трехслойной оживальной оболочки, ослабленной сквозными и несквозными вырезами. Как уже отмечалось выше, при послойном анализе рассматриваемый подход позволяет моделировать напряженно-деформированное состояние трехслойных в общем случае нерегулярных оболочек вращения, в том числе ослабленных сквозными и несквозными (когда сплошность нарушена не во всех слоях) вырезами.

Таблица 2. Сравнительный анализ результатов расчета с аналитическим и конечно-элементным решениями, представленными в работе [58] для задачи деформирования сферической оболочки

$\gamma, ^\circ$	$M_1/(q_0 h)$				
	МКЭ		АП	$\delta, \%$ МКЭ	
	автор	[58]		автор	[58]
20	6.9	6.6	6.8	1.45	2.9
10	15.88	15.3	15.7	1.1	2.5

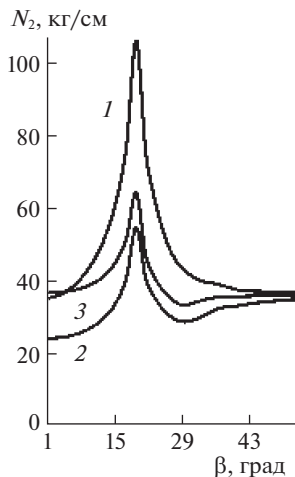


Рис. 4.

Рассмотрим задачу исследования влияния сквозных и несквозных прямоугольных в плане противоположно расположенных вырезов (углы раствора $\alpha_B = 10^\circ$ и $\beta_B = 40^\circ$), находящихся на расстоянии 30 см от большего основания, на напряженно-деформированное состояние трехслойной оживальной оболочки с шарнирно опертыми стеклопластиковыми несущими слоями (на торце меньшего диаметра разрешено осевое перемещение) и заполнителем из пенопласта при равномерном внутреннем давлении $p = 1 \text{ кг/см}^2$.

Параметры трехслойной оживальной оболочки:

$$R_1 = 1.7 \text{ м}, \quad R_2 = 1 \text{ м}, \quad L = 1.7 \text{ м}, \quad h_1 = h_3 = 0.1 \text{ см}, \quad h_f = 4.9 \text{ см},$$

где R_1 — главный радиус кривизны срединной поверхности внешнего несущего слоя, R_2 — наружный радиус большего (нижнего) основания.

Физико-механические характеристики слоев трехслойной оживальной оболочки:

$$E_1^1 = E_1^3 = 2.1 \times 10^4 \text{ МПа}, \quad E_2^1 = E_2^3 = 1.9 \times 10^4 \text{ МПа}; \quad G_{12}^1 = G_{12}^3 = 0.36 \times 10^4 \text{ МПа};$$

$$\mu_2^1 = \mu_2^3 = 0.1; \quad E_{11}^f = E_{22}^f = E_{33}^f = 24 \text{ МПа}; \quad G_{13}^f = G_{23}^f = G_{12}^f = 10 \text{ МПа}.$$

Индекс сверху означает: 1, 3 — внутренний и внешний несущие слои соответственно, f — заполнитель.

На рис. 4 приведены графики изменения мембранных усилий в окружном направлении N_2 во внутреннем несущем слое вблизи края выреза с меньшим диаметром в сечении В-В (плоскость В-В перпендикулярна оси оболочки и проходит на расстоянии половины длины конечного элемента от края выреза с меньшим диаметром).

На графиках сквозные вырезы обозначены цифрой 1, цифрами 2 и 3 — несквозные вырезы. При этом цифра 2 соответствует варианту, когда вырез находится только во внутреннем несущем слое, а цифра 3 — во внутреннем несущем слое и заполнителе.

Отсчет β происходит от плоскости симметрии, которая делит вырез пополам. Наблюдаемый краевой эффект у выреза быстро затухает при удалении от него.

Наибольшими являются мембранные усилия в окружном направлении N_2 во внутреннем несущем слое в окрестности угловых точек сквозных вырезов (рис. 4). Они на 15% больше, чем эти усилия во внешнем слое.

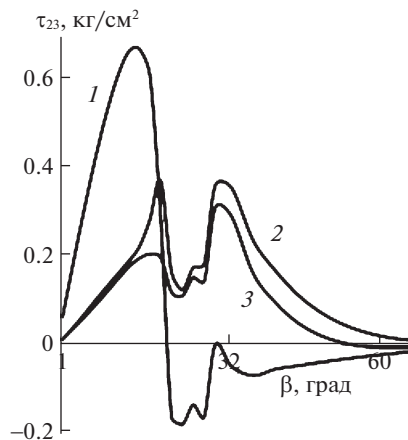


Рис. 5.

При несквозных вырезах усилия N_2 в слоях значительно уменьшаются. Такая же закономерность наблюдается и для мембранных усилий в меридиональном направлении N_1 — они $\sim$ в 1.3 раза меньше N_2 . Мембранные напряжения в несущих слоях более, чем в 2.5 раза превышают моментные напряжения.

Для сквозных вырезов наибольшими в заполнителе являются напряжения поперечного сдвига τ_{23} в районе угловых точек вырезов (рис. 5), которые более, чем в 2 раза превышают напряжения поперечного сдвига τ_{13} и почти в 2.7 раза поперечные нормальные напряжения σ_{33} . Наибольшие значения напряжений σ_{33} наблюдаются в районе середины края выреза с меньшим диаметром.

Для несквозных вырезов наибольшими являются напряжения в районе середины края выреза с меньшим диаметром для варианта 3. При этом τ_{13} незначительно превышает σ_{33} и более, чем в 2 раза τ_{23} .

Приведенные результаты могут быть использованы при проектировании трехслойных отсеков оживальной формы со сквозными и несквозными прямоугольными в плане вырезами.

Заключение. Рассмотрена модель для уточненного послойного анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) трехслойных нерегулярных оболочек вращения двойной кривизны, позволяющая учесть изменение геометрических характеристик, физико-механических свойств и параметров НДС не только по меридиональной и окружной координатам, но и по толщине оболочки и слоя заполнителя. Построение модели проводится на основе блочного конечно-элементного подхода. Рассмотрен алгоритм построения конечного элемента заполнителя. Проведен сравнительный анализ результатов расчета по приведенным алгоритмам с применением конечных элементов несущих слоев с аналитическим и конечно-элементным решением с использованием программного комплекса ANSYS на задаче деформирования однослойной сферической оболочки под действием самоуравновешенных сил.

В качестве примера решена задача об исследовании влияния сквозных и несквозных прямоугольных в плане вырезов на напряженно-деформированное состояние трехслойной оживальной оболочки со стеклопластиковыми несущими слоями и заполнителем из пенопласта.

Автор выражает благодарность В.В. Репинскому за помощь в проведении расчетов.

Работа выполнена в рамках государственного задания, номер государственной регистрации темы АААА-А19-119012290177-0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бакулин В.Н., Образцов И.Ф., Потопахин В.А. Динамические задачи нелинейной теории многослойных оболочек: Действие интенсивных термосиловых нагрузок, концентрированных потоков энергии. М.: Наука. Физматлит, 1998. 464 с.
2. Бакулин В.Н., Острик А.В. Комплексное действие излучений и частиц на тонкостенные конструкции с гетерогенными покрытиями. М.: Физматлит, 2015. 280 с.
3. Bakulin V.N. Investigation of the Influence of the Cutout Dimensions on the Stress-strain State of Three-layer Shells with Load-bearing Layers of Composite Materials // J. Phys. Conf. Ser.: Materials Sci.&Engng. 2020. V. 714. P. 012002.
4. Аннин Б.Д., Волчков Ю.М. Неклассические модели теории пластин и оболочек // ПМТФ. 2016. Т. 57. № 5. С. 5–14.
5. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Пути развития теории упругих многослойных пластин и оболочек // Вестн. Тамбовского гос. тех. унив. 2005. Т. 11. № 2. С. 439–448.
6. Григоренко Я.М., Григоренко А.Я. Статические и динамические задачи для анизотропных неоднородных оболочек с переменными параметрами и их числовым решением (обзор) // Прикл. мех. 2013. Т. 49. № 2. С. 3–70.
7. Паймушин В.Н. Теория среднего изгиба подкрепленных на контуре трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем // Мех. композ. матер. 2017. Т. 53. № 1. С. 3–26.
8. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М.: Высшая школа, 1985. 392 с.
9. Бате К.-Ю. Методы конечных элементов. М.: Физматлит, 2010. 1024 с.
10. Бакулин В.Н. Метод конечных элементов для исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек. М.: ЦНИИ информации, 1985. 140 с.
11. Бакулин В.Н., Рассоха А.А. Метод конечных элементов и голографическая интерферометрия в механике композитов. М.: Машиностроение, 1987. 312 с.
12. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 263 с.
13. Пискунов В.Г., Вериженко В.Е., Присяжнюк В.К. и др. Расчет неоднородных пологих оболочек и пластин методом конечных элементов. Киев: Вища школа, 1987. 200 с.
14. Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига: Зинатне, 1988. 284 с.
15. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 392 с.
16. Каледин В.О., Аульченко С.М., Миткевич А.Б. и др. Моделирование статики и динамики оболочечных конструкций из композиционных материалов. М.: Физматлит, 2014. 196 с.
17. Бакулин В.Н., Репинский В.В. Конечно-элементные модели деформации однослойных и трехслойных конических оболочек // Матем. модел. 2001. Т. 13. № 6. С. 39–46.
18. Киселев А.П., Гуреева Н.А., Киселева Р.З. Расчет многослойной оболочки с использованием объемного конечного элемента // Изв. ВолгГТУ. Волгоград. 2010. № 4. С. 125–128.
19. Николаев А.П., Клочков Ю.В., Киселев А.П., Гуреева Н.А. Векторная интерполяция полей перемещений в конечно-элементных расчетах оболочек. Волгоград: ФГБОУ ВПО Волгоградский ГАУ “Нива”, 2012. 264 с.
20. Николаев А.П., Киселев А.П., Гуреева Н.А., Киселева Р.З. Расчет композиционных инженерных конструкций на основе метода конечных элементов. Волгоград: Нива, 2016. 128 с.
21. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Ищанов Т.Р. Конечно-элементный анализ НДС оболочек вращения с учетом деформаций поперечного сдвига // Строит. мех. инж. констр. и сооруж. 2016. № 5. С. 48–56.
22. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Соболевская Т.А., Клочков М.Ю. Сравнительный анализ эффективности использования конечных элементов различной мерности при анализе НДС тонких оболочек // Строит. мех. инж. констр. и сооруж. 2018. Т. 14. № 6. С. 459–466.

23. Куликов Г.М., Плотникова С.В. Решение трехмерных задач для толстых упругих оболочек на основе метода отсеченных поверхностей // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 4. С. 54–64.
24. Kulikov G.M. Finite element modeling of laminated and functionally graded shells // Виртуальное моделирование, прототипирование и промышленный дизайн. Матер. II Междунар. науч.-но-практической конференции. 2016. С. 395–397.
25. Бакулин В.Н. Уточненная модель послойного анализа трехслойных нерегулярных конических оболочек // Докл. РАН. 2017. Т. 472. № 3. С. 272–277.
26. Матвеев А.Д., Гришанов А.Н. Трехмерные композитные многосеточные конечные элементы оболочечного типа // Изв. АлтГУ. 2017. № 4. С. 120–125.
27. Левин В.Е., Олегин И.П., Гришанов А.Н. Расчет подкрепленных композитных цилиндрических оболочек с применением многосеточных конечных элементов // Научн. вестн. НГТУ. 2018. Т. 71. № 2. С. 85–100.
28. Pustovoi N.V., Grishanov A.N., Matveev A.D. Multi-grid finite elements in calculations of multilayer oval cylindrical shells // Sib. J. Sci.&Technol. 2019. V. 20. № 2. P. 174–182.
29. Бакулин В.Н. Эффективная модель несущих слоев для послойного анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических нерегулярных оболочек вращения // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 3. С. 69–79.
30. Бакулин В.Н. Модель для уточненного расчета напряженно-деформированного состояния трехслойных конических нерегулярных оболочек вращения // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 2. С. 315–327.
31. Бакулин В.Н. Блочная конечно-элементная модель для послойного анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек с нерегулярной структурой // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 4. С. 66–73.
32. Бакулин В.Н. Неклассические уточненные модели в механике трехслойных оболочек // Вестн. Нижегородского ун-ва. им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4. Ч. 5. С. 1989–1991.
33. Образцов И.Ф. О некоторых перспективных прикладных проблемах механики, имеющих народнохозяйственное значение // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 3–9.
34. Бакулин В.Н., Каледин В.О. Конечный элемент круговой арки с конечной сдвиговой жесткостью // Мех. композ. матер. 1988. № 5. С. 915–919.
35. Образцов И.Ф., Бакулин В.Н. Уточненные модели для исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек // Докл. РАН. 2006. Т. 407. № 1. С. 36–39.
36. Каледин В.О., Шпиталь С.В. Выбор расчетной схемы при исследовании осесимметричного краевого эффекта в трехслойных цилиндрических оболочках с легким наполнителем // Мех. композ. матер. 1993. № 5. С. 657–665.
37. Бакулин В.Н. Аппроксимации для моделирования напряженно-деформированного состояния слоистых цилиндрических оболочек // Матем. модел. 2004. Т. 16. № 6. С. 101–105.
38. Бакулин В.Н. Конечно-элементная модель для анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек // Матем. модел. 2006. Т. 18. № 1. С. 3–9.
39. Ashwell D.G., Sabir A.B. A new cylindrical shell finite element, based on simple independent strain functions // Intern. J. Mech. Sci. 1972. V. 14. № 3. P. 171–183.
40. Бакулин В.Н., Демидов В.И. Трехслойный конечный элемент естественной кривизны // Изв. вузов. Машиностроение. 1978. № 5. С. 5–10.
41. Бакулин В.Н. Построение аппроксимаций для моделирования напряженно-деформированного состояния несущих слоев и слоев наполнителя трехслойных неосесимметричных цилиндрических оболочек // Матем. модел. 2006. Т. 18. № 8. С. 101–110.
42. Sabir A.B. Strain-based finite elements for the analysis of cylinders with holes and normally intersecting cylinders // Nucl. Engng.&Design. 1983. V. 76. № 2. P. 111–120.
43. Бакулин В.Н. Эффективные модели для уточненного анализа деформированного состояния трехслойных неосесимметричных цилиндрических оболочек // Докл. РАН. 2007. Т. 414. № 5. С. 613–617.
44. Бакулин В.Н. Построение аппроксимаций и моделей для исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных неосесимметричных цилиндрических оболочек // Матем. модел. 2007. Т. 19. № 12. С. 118–128.

45. Бакулин В.Н. Тестирование конечно-элементной модели, предназначенной для исследования напряженно-деформированного состояния слоистых нерегулярных оболочек // Матем. модел. 2009. Т. 21. № 8. С. 121–128.
46. Балабух Л.И., Колесников К.С., Зарубин В.С. и др. Основы строительной механики ракет. М.: Высшая школа, 1969. 494 с.
47. Бакулин В.Н. Эффективная модель послойного анализа трехслойных нерегулярных оболочек вращения цилиндрической формы // Докл. РАН. 2018. Т. 478. № 2. С. 148–152.
48. Кантин Г. Смещение криволинейных элементов как жесткого целого // Ракетная техника и космонавтика. 1970. № 7. С. 84–88.
49. Железнов Л.П., Кабанов В.В. Функции перемещений конечных элементов оболочки вращения как твердых тел // Изв. РАН. МТТ. 1990. № 1. С. 131–136.
50. Репинский В.В. Эффективные конечные элементы для расчета устойчивости тонких анизотропных оболочек вращения // Вопр. оборон. техн. Сер. 15. Вып. 1 (117). 1997. С. 3–7.
51. Ключков Ю.В. Учет жестких смещений конечного элемента в неявном виде на основе использования векторной интерполяции перемещений // Вест. РУДН. 2002. С. 123–127.
52. Bakulin V.N. Block finite-element approach to building refined models of layer-by-layer analysis of the stress-strain state of three-layer irregular shells // J. Phys. Conf. Ser. 2019. V. 1392. P. 012065.
53. Бакулин В.Н. Блочная конечно-элементная модель послойного анализа трехслойных в общем случае нерегулярных оболочек вращения двойной кривизны // Докл. РАН. 2019. Т. 484. № 1. С. 35–40.
54. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1951. 344 с.
55. Бакулин В.Н., Каледин В.О., Рассоха А.А. Анализ термоупругих напряжений в слоистых оболочках двоякой кривизны // Мех. композ. матер. 1987. № 6. С. 1028–1033.
56. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
57. Бакулин В.Н. Послойный анализ напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек с вырезами // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 2. С. 131–145.
58. Виноградов Ю.И., Константинов М.В. Расчет сферического бака при локальном воздействии // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 2. С. 109–120.
59. Бакулин В.Н., Инфлянскас В.В. Оценка локальных параметров сетки в конечно-элементных задачах // Вычисл. мех. сплошн. сред. 2013. Т. 6. № 1. С. 70–77.

Layer-by-Layer Stress-Strain Analysis of Irregular Sandwich Shells of Revolution with Non-Zero Gaussian Curvature

V. N. Bakulin^{a, #}

^a Institute of Applied Mechanics of RAS, Moscow, Russia

[#] e-mail: vbak@yandex.ru

We consider the development of a shell model for layer-by-layer stress-strain analysis of doubly curved irregular sandwich shells of revolution, which consists in the fact that, if necessary, the wall of the shell, including the core, is divided across the thickness into separate layers, which are then joined together. This allows us to take into account the change in the geometric, physical and mechanical characteristics and the stress and strain state parameters not only along the meridional and circumferential coordinates, but also across the thickness of the shell and the core layer, that is, more adequately simulate the features of the laminated-inhomogeneous structure, as well as the discontinuity of the layers, the bending state of the facesheet layers, three-dimensional stress and strain state of the core, various conditions of fixing and loading of the layers. Conducting a layer-by-layer analysis for most real structures by analytical methods, as a rule, fails due to mathematical difficulties. The development of a model for the layer-by-layer stress-strain analysis of doubly curved irregular sandwich shells of revolution is carried out on the basis of a block finite element approach. In this case, two types of finite elements (FE) of natural curvature are considered: two-dimensional bending FE of the facesheets and three-dimensional FE of the core, which is a thick-walled shell. A finite element model of the core is presented. A comparison of the results obtained

via the above algorithms using finite elements of facesheets with analytical and finite element solution by the ANSYS software package for the problem of deformation of a single-layer spherical shell under the action of self-balanced forces is carried out. As an example, the problem of studying the effect of through and blind rectangular cutouts on the stress and strain state of a doubly curved sandwich shell of revolution is solved.

Keywords: layer-by-layer analysis, stress and strain state, irregular sandwich shells, double curvature, models, finite element, block, through and blind rectangular cutouts

REFERENCES

1. *Bakulin V.N., Obratsov I.F., Potopakhin V.A.* Dynamic Problems on Nonlinear Theory of Multilayered Shells: Effect of Intense Thermal Power Loads, Concentrated Energy Fluxes. (Dinamicheskie zadachi nelineinoi teorii mnogosloinykh obolochek: Deistvie intensivnykh termosilovykh nagruzok, kontsentrirrovannykh potokov energii) Moscow: Fizmatlit, 1998. 464 p. (in Russian)
2. *Bakulin V.N., Ostrik A.V.* Complex Effect of Emissions and Particles onto Thin-Walled Structures with Heterogeneous Coatings (Kompleksnoe deistvie izlucheni i chastits na tonkostennye konstruksii s geterogennymi pokrytiyami). Moscow: Fizmatlit, 2015. 280 p. (in Russian)
3. *Bakulin V.N.* Investigation of the influence of the cutout dimensions on the stress-strain state of three-layer shells with load-bearing layers of composite materials // J. Phys. Conf. Ser.: Mater. Sci.&Engng., 2020, vol. 714, pp. 012002.
4. *Annin B.D., Volchkov Yu.M.* Nonclassical models of the theory of plates and shells // J. Appl. Mech.&Techn. Phys., 2016, vol. 57, no. 5, pp. 769–776.
5. *Grigolyuk E.I., Kulikov G.M.* Ways of development of the theory of elastic multilayer plates and shells // Trans. TSTU, 2005, vol. 11, no. 2, pp. 439–448.
6. *Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya.* Static and dynamic problems for anisotropic inhomogeneous shells with variable parameters and their numerical solution. (Review) // Int. Appl. Mech., 2013, vol. 49, no. 2, pp. 123–193.
7. *Paimushin V.N.* Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour // Mech. Compos. Mater., 2017, vol. 53, no. 1, pp. 3–26.
8. *Obratsov I.F., Savel'ev L.M., Khazanov Kh.S.* Finite Element Method in the Problems of Structural Mechanics of Flying Vehicles (Metod konechnykh elementov v zadachakh stroitel'noi mekhaniki letatel'nykh apparatov) Moscow.: Vysshaya shkola, 1985. 392 p. (in Russian)
9. *Bathe K.* Finite Element Procedures. New Jersey: Prentice Hall, 1996 0-13-301458-4.
10. *Bakulin V.N.* Finite Elements Method for Investigating Stress-Strain State of Three-Layered Cylindrical Shells (Metod konechnykh elementov dlya issledovaniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya trekhslonnykh tsilindricheskikh obolochek). Moscow: Center of Scientific and Technical Information, 1985. 140 p. (in Russian)
11. *Bakulin V.N., Rassokha A.A.* Finite Elements Method and Holographic Interferometry for Mechanics of Composites (Metod konechnykh elementov i golograficheskaya interferometriya v mekhanike kompozitov). Moscow: Mashinostroenie, 1987. 312 p.
12. *Piskunov V.G., Verizhenko V.E., Prisyazhnyuk V.K. et al.* Calculation of Heterogeneous Shallow Shells and Plates with the Help of Finite Elements Method (Raschet neodnorodnykh pologikh obolochek i plastin metodom konechnykh elementov). Kiev: Vishcha Shkola, 1987. 200 p.
13. *Rikards R.B.* Finite Elements Method for Theory of Shells and Plates (Metod konechnykh elementov v teorii obolochek i plastin). Riga: Zinatne, 1988. 284 p.
14. *Kaledin V.O., Aulchenko S.M., Mitkevich A.B. et al.* Modeling Statics and Dynamics of Shell Structures Made of Composite Materials Fizmatlit, Moscow, 2014. 196 p. (in Russian)
15. *Bakulin V.N., Krivtsov V.S., Rassokha A.A.* Algorithm for deriving the finiteelement stiffness matrix for an anisotropic shell // Russ. Aeron., 1983, no. 4, pp. 14–18.
16. *Bakulin V.N., Kaledin V.O., Rassokha A.A.* Analysis of thermoelastic stresses in layered shells of double curvature // Mech. Compos. Mater., 1987, no. 6, pp. 1028–1033.
17. *Bakulin V.N., Repinsky V.V.* Finite-element models of deformation of single-layer and three-layer conical shells // Mat. Modelir., 2001, vol. 13, no. 6, pp. 39–46.
18. *Kiselev A.P., Gureeva N.A., Kiseleva R.Z.* Analysis of a multilayer shell using a three-dimensional finite element // Izvestia VSTU, 2010, no. 4, pp. 125–128.

19. *Nikolaev A.P., Klochkov Yu.V., Kiselev A.P. et al.* Vector Interpolation of Displacement Fields in Finite Element Analysis of Shells (Vektornaya interpolatsiya polei peremeshchenii v konechno-elementnykh raschetakh obolochek). Volgograd: Volgograd State Agrarian Univ., 2012. 264 p. (in Russian)
20. *Nikolaev A.P., Kiselev A.P., Gureeva N.A. et al.* Analysis of Composite Engineering Structures Based on the Finite Element Method (Raschet kompozitsionnykh inzhenernykh konstrukttsii na osnove metoda konechnykh elementov). Volgograd: Volgograd State Agrarian Univ., 2016. 128 p. (in Russian)
21. *Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Ischanov T.R.* Finite element analysis of stress-strain state of shells of revolution with taking into account the strain of transversal shearing // Struct. Mech. Engng. Constr.&Buildings, 2016, no. 5, pp. 48–56.
22. *Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Sobolevskaya T.A. et al.* Comparative analysis of efficiency of use of finite elements of different dimensionality in the analysis of the stress-strain state of thin shells // Struct. Mech. Engng. Constr.&Buildings, 2018, vol. 14, no. 6, pp. 459–466.
23. *Kulikov G.M., Plotnikova S.V.* Solution of three-dimensional problems for thick elastic shells by the method of reference surfaces // Mech. Solids, 2014, vol. 49, no. 4, pp. 403–412.
24. *Kulikov G.M.* Finite element modeling of laminated and functionally graded shells // Virtual Simulation, Prototyping and Industrial Design. Proc. II Intern. Sci.&Pract. Conf., 2016, pp. 395–397.
25. *Bakulin V.N.* A Corrected model of level-by-level analysis of three-layer irregular conical shells // Dokl. Phys., 2017, vol. 62, no. 1, pp. 37–41.
26. *Matveev A.D., Grishanov A.N.* Three-dimensional composite multigrid finite shell-type elements // Izv. Altai State Univ., 2017, no. 4, pp. 120–125.
27. *Levin V.E., Olegin I.P., Grishanov A.N.* Calculation of reinforced composite cylindrical shells using multigrid finite elements // Bull. Novosibirsk State Techn. Univ., 2018, no. 2 (71), pp. 85–100.
28. *Pustovoi N.V., Grishanov A.N., Matveev A.D.* Multi-grid finite elements in calculations of multilayer oval cylindrical shells // Sib. J. Sci.&Technol., 2019, vol. 20, no. 2, pp. 174–182.
29. *Bakulin V.N.* An effective model of bearing layers for layer-by-layer analysis of the stress and strain state of irregular cylindrical sandwich shells of revolution // Mech. Solids, 2020, vol. 55, no. 3, pp. 786–796.
30. *Bakulin V. N.* A Model for refined calculation of the stress-strain state of sandwich conical irregular shells // Mech. Solids, 2019, vol. 54, no. 5, pp. 786–796.
31. *Bakulin V.N.* Analysis of the influence of rectangular cutouts on the stress-strain state of three-layer shells // 18th Intern. Conf. Aviation and Cosmonautics – 2019. Abstracts. Moscow State Institute of Aviation, Moscow, 2019, pp. 435–436.
32. *Bakulin V.N.* Non-classical refined models in the mechanics of three-layer shells // Vestn. Nizhny Novgorod Univ., 2011, no. 4, part 5, pp. 1989–1991.
33. *Obraztsov I.F.* Certain prospective practical problems of mechanics of importance to the national economy // Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela, 1982, no. 4, pp. 3–9.
34. *Bakulin V.N., Kaledin V. O.* Finite element of a round arch with finite shear rigidity // Mech. Compos. Mater., 1989, no. 24, pp. 701–706.
35. *Obraztsov I.F., Bakulin V.N.* Updated models for studies of the stressed-strained state of sandwich cylindrical shells // Dokl. Phys., 2006, vol. 51, no. 3, pp. 128–131.
36. *Kaledin V.O., Shpital' S.V.* The way for selecting the design model under researching axially symmetric boundary effect in three-layered cylindrical shells with light filler material // Mech. Compos. Mater., 1993, no. 5, pp. 657–665.
37. *Bakulin V.N.* Approximations for modelling of layer cylindrical shells // Mat. Modelir., 2004, vol. 16, no. 6, pp. 101–105.
38. *Bakulin V.N.* Finite-Element Model for Analysis of Stress-Strained State of Sandwich Shells shells // Mat. Modelir., 2006, vol. 18, no. 1, pp. 3–9.
39. *Ashwell D.G., Sabir A.B.* A new cylindrical shell finite element, based on simple independent strain functions // Intern. J. Mech. Sci., 1972, vol. 14, no. 3, pp. 171–183.
40. *Bakulin V.N., Demidov V.I.* Three-layered finite element with natural curvature // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mashinost., 1978, no. 5, pp. 5–10.

41. *Bakulin V.N.* Construction of approximations for modeling the stress strain state of carrier layers and filler layers of three-layer nonaxisymmetric cylindrical shells // *Mat. Modelir.*, 2006, vol. 18, no. 8, pp. 101–110.
42. *Sabir A.B.* Strain-based finite elements for the analysis of cylinders with holes and normally intersecting cylinders // *Nucl. Engng. & Design*, 1983, vol. 76, no. 2, pp. 111–120.
43. *Bakulin V.N.* Effective models for the refined analysis of the deformed state of three-layer nonaxisymmetric cylindrical shells // *Dokl. Phys.*, 2006, vol. 52, no. 6, pp. 330–334.
44. *Bakulin V.N.* Construction of approximations and models for the study of sss three-layer nonaxisymmetric cylindrical shells // *Mat. Modelir.*, 2006, vol. 19, no. 12, pp. 118–128.
45. *Bakulin V.N.* Testing a finite element model designed to study the stress strain state of layered irregular shells // *Mat. Modelir.*, 2009, vol. 21, no. 8, pp. 121–128.
46. *Balabukh L.I., Kolesnikov K.S., Zarubin V.S. et al.* Foundations of the Structural Mechanics of Rockets. Moscow: Vysshaya Shkola, 1969. 494 p. (in Russian)
47. *Bakulin V.N.* An efficient model for layer-by-layer analysis of sandwich irregular cylindrical shells of revolution // *Dokl. Phys.*, 2018, vol. 63, no. 1, pp. 23–27.
48. *Cantin G.* Rigid body motions in curved finite elements // *AIAA*, 1970, vol. 63, no. 7, pp. 12–52.
49. *Zheleznov L.P., Kabanov V.V.* Relocation functions for finite elements of rotational shell as rigid bodies // *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela*, 1990, no. 1, pp. 131–136.
50. *Repinskii V.V.* Effective finite elements for calculating stability of thin anisotropic rotational shells // *Vopr. Oboron. Tekh., Ser. 15*, 1997, no. 1 (117), pp. 3–7.
51. *Klochkov Yu.V.* Consideration of rigid displacements of the finite element in an implicit form based on the use of vector interpolation of displacements // *RUDN J.*, 2002, pp. 123–127.
52. *Bakulin V.N.* Block finite-element approach to building refined models of layer-by-layer analysis of the stress-strain state of three-layer irregular shells // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1392, pp. 012065.
53. *Bakulin V.N.* Block finite-element model of layer-by-layer analysis of the stress–strain state of three-layer generally irregular shells of double-curvature revolution // *Dokl. Phys.*, 2019, vol. 64, no. 1, pp. 9–13.
54. *Novozhilov V.V.* Theory of Thin Shells (Teoriya Tonkikh Obolochek). Leningrad: Sudpromgiz, 1951. 344 p. (in Russian)
55. *Bakulin V.N.* A Model for refined calculation of the stress-strain state of sandwich conical irregular shells // *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 5, pp. 786–796.
56. *Vasiliev V.V.* Mechanics of Structures Made of Composite Materials (Mekhanika Konstruktsii Iz Kompozitsionnykh Materialov). Moscow: Mashinostroenie, 1988. 272 p. (in Russian)
57. *Bakulin V.N.* Layer-by-layer analysis of the stress-strain state of three-layer shells with cutouts // *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 3, pp. 448–460.
58. *Vinogradov Yu.I., Konstantinov M.V.* Analysis of a spherical tank under a local action // *Mech. Solids*, 2016, vol. 51, no. 2, pp. 223–233.
59. *Bakulin V.N., Infilianskas V.V.* Determination of local mesh parameters in finite element problems // *Comput. Contin. Mech.*, 2013, vol. 6, no. 1, pp. 70–77.

УДК 539.3

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ СМЕНЯЕМОСТИ В МЕХАНИЗМАХ ПРОИЗВОДСТВА БОЛЬШИХ НЕОБРАТИМЫХ ДЕФОРМАЦИЙ© 2021 г. А. С. Бегун^{1,*}, А. А. Буренин^{2,**}, Л. В. Ковтанюк^{1,***}, А. Н. Прокудин^{2,****}¹ Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия² Институт машиноведения и металлургии Хабаровского ФИЦ ДВО РАН,
Комсомольск-на-Амуре, Россия*e-mail: ustinova@iacp.dvo.ru**e-mail: burenin@iacp.dvo.ru***e-mail: lk@iacp.dvo.ru****e-mail: sunbeam_85@mail.ru

Поступила в редакцию 25.05.2020 г.

После доработки 23.09.2020 г.

Принята к публикации 25.09.2020 г.

Следуя формализму термодинамики обратимая и необратимая составляющие полных деформаций принимаются в качестве термодинамических параметров состояния процесса деформирования. Определения их даются формулированием соответствующих дифференциальных уравнений их изменения (переноса), потоковые слагаемые которых задают взаимовлияние этих термодинамических параметров в процессе деформирования. Источник в уравнении переноса определяется двумя механизмами производства необратимых деформаций: вязким (ползучесть) и пластическим (пластическое течение). Упругопластические границы оказываются местом, где механизм производства необратимых деформаций меняется с вязкого на пластический и при разгрузке наоборот.

Необратимые деформации не разделяются на деформации ползучести и деформации пластического течения, только достигнутые первые оказываются начальными значениями для последующего роста вторых в новых условиях пластического течения. При разгрузке смена происходит в обратном порядке. В качестве примера рассмотрена задача о росте необратимых деформаций в условиях вискозиметрического деформирования цилиндрического слоя.

Ключевые слова: упругость, ползучесть, пластическое течение, большие деформации, вискозиметрическое деформирование

DOI: 10.31857/S003282352006003X

Теория пластического течения материалов [1–4] уже в своем основании, в отличие от деформационной теории пластичности [5, 6], требует разделения полных деформаций на обратимую (упругую) и необратимую (пластическую) составляющие. В опытах полные деформации можно измерить, а их составляющие неизмеримы, потому вводятся гипотетически. Когда деформации принимаются малыми, то аддитивное разделение их на составляющие не встречает возражений. При больших деформациях положение усложняется принципиально. Подобным разделением требуется обеспечить геометрическую непротиворечивость строящейся кинематики, что оказалось непростой задачей. После многочисленных предложений, оказавшихся ошибочными именно по такой причине, был предложен подход [7], обеспечивающий геометрическую

безупречность в построении кинематики больших упругопластических деформаций. В основе такого подхода лежит предложение обеспечить взаимно однозначное соответствие каждому деформированному состоянию упругопластического тела другое его состояние, где обратимые деформации отсутствуют совершенно. Достигается последнее состояние снятием усилий с каждого элементарного объема поделенного таким способом тела при дальнейшем предельном переходе при стремлении к бесконечности числа разбиений, когда элементарные объемы стремятся к нулю. Очевидно, что такое предельно разгруженное состояние недостижимо и остается гипотетическим. Более того, возникают сомнения в единственности такого разгруженного состояния. Известно, что разгрузочное состояние в упругопластическом теле может зависеть от пути процесса разгрузки в пространстве напряжений. На таком пути могут возникать повторные (обратные) пластические течения [8] с изменением в уровне и распределении накопленных необратимых деформаций. Следовательно, и предельное разгрузочное состояние может быть различным. Несмотря на обозначенные проблемы, данный подход широко применяется в научной литературе [9–11]. Из большого числа публикаций отметим лишь некоторые [12–17].

В.П. Мясников предложил использовать при создании теории больших деформаций формализм термодинамики [18]. Если уже приходится объявлять в качестве термодинамических параметров состояния упругопластического тела не полные деформации, а их составляющие, то для последних следует записать дифференциальные уравнения их изменения (переноса). Тогда потоковые слагаемые в этих уравнениях обязаны будут указать взаимовлияние обратимых и необратимых деформаций в их изменениях, а источники задать (посредством формулирования для них определяющих законов) причины, заставляющие изменяться такие введенные термодинамические параметры. Возможной конкретизации дифференциальных уравнений переноса для обратимых и необратимых деформаций посвящена публикация [19], подробно воспроизведенная позже в [20]. Данные дифференциальные уравнения следует рассматривать в качестве определения как необратимых, так и обратимых деформаций. Более того с их помощью определяются и скорости изменения таких составляющих полных деформаций, что в иных условиях оказывается самостоятельной задачей как, например, [9], возникающая проблема “выбора” объективной производной именно с целью задания скоростей необратимых деформаций. Введение в математическую модель дифференциальных уравнений переноса обратимых и необратимых деформаций позволило получить решения, включая точные, целого ряда краевых задач теории больших упругопластических и упруговязкопластических деформаций не только при активном нагружении, но и при последующей разгрузке с расчетом остаточных напряжений. Ряд таких решений составили содержание монографии [20]. Из последних публикаций отметим [21–25].

Любой материал необходимо изначально наделен и упругими, и вязкими, и пластическими свойствами. Только с целью упрощения математического аппарата при моделировании конкретных технологических операций некоторыми из таких свойств пренебрегают в зависимости от того, насколько такие свойства проявляются в процессе деформирования. В общем случае упругие и вязкие свойства проявляются непосредственно с началом процесса, а пластические заметны при достижении напряжениями некоторого предельного своего значения. В теории пластического течения полагается, что течение начинается при выходе напряженных состояний на поверхность нагружения (поверхность текучести) в пространстве напряжений. Производство необратимых деформаций задается как вязкими, так и пластическими свойствами деформируемого материала. Следовательно, такие деформации начинают расти непосредственно с началом процесса деформирования за счет проявления вязких свойств материала. Часто данный рост необратимых деформаций называют ползучестью [26]. Как правило, это медленный процесс накопления необратимых деформаций. Но как только напряже-

ния достигают поверхности нагружения начинается более быстрый процесс роста необратимых деформаций, называемый процессом пластического течения. Таким образом упругопластические границы оказываются местом, где меняется механизм производства необратимых деформаций с медленного механизма ползучести на более быстрый механизм пластического течения и наоборот при разгрузке. Деформации ползучести и деформации пластического течения не различаются. Это один и тот же введенный термодинамический параметр, названный необратимыми деформациями. Различие их задается только механизмом их производства при деформировании: либо он задается вязкостью — ползучесть, либо пластичностью — течение.

На упругопластических границах, где механизм производства необратимых деформаций за счет внешнего воздействия на деформируемое тело меняется, необходимо обеспечить непрерывность в росте необратимых деформаций. Это может потребовать согласованности законов ползучести с законами пластического течения, что может оказаться непростой задачей. Примеры решения такой задачи приведены в [22–25], при этом в [22–24] в качестве пластического потенциала выбрано условие пластического течения Треска–Сен-Венана, а в [25] условие Мизеса. В качестве закона ползучести принимается степенной закон Нортон [26]. Здесь укажем еще один пример решения задачи о последовательном накоплении необратимых деформаций со сменой в механизме их производства.

1. Определяющие соотношения. В качестве термодинамических параметров, задающих состояние деформируемого твердого тела, принимаем обратимые $\mathbf{e}$ и необратимые $\mathbf{p}$ деформации. В соответствии с [19, 20] уравнения их изменения постулируем в форме:

$$\begin{aligned}\frac{D\mathbf{e}}{Dt} &= \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} - \frac{1}{2}((\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{z})) \\ \frac{D\mathbf{p}}{Dt} &= \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}\end{aligned}\quad (1.1)$$

В уравнениях (1.1) принята система пространственных координат Эйлера и введены обозначения:

$$\begin{aligned}\frac{D\boldsymbol{\tau}}{Dt} &= \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{r}; \quad \mathbf{r} = -\mathbf{r}^T = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{z}; \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}) \\ \mathbf{z} &= A^{-1} \left(B^2 (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + B (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}^2 - \mathbf{e}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}^2 - \mathbf{e}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e} \right) \\ \mathbf{v} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v})\end{aligned}\quad (1.2)$$

$$A = 8 - 8J_1 + 3J_1^2 - J_2 - \frac{1}{3}J_1^3 + \frac{1}{3}J_3, \quad J_1 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{e}, \quad J_2 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{e}^2, \quad J_3 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{e}^3$$

Здесь $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ — векторы перемещений и скоростей перемещений, $\boldsymbol{\tau}$ — произвольный тензор второго ранга. Последний служит конкретизации объективной производной по времени (первое равенство в системе (1.2)). Только в этом случае уравнения переноса (1.1) оказываются геометрически непротиворечивыми. Заметим, что при равенстве нулю существенно нелинейной части $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{e}, \boldsymbol{\varepsilon})$ тензора поворота, введенная объективная производная совпадает с производной Яумана. С другой стороны, наличие $\mathbf{z} \neq 0$ связывает тензоры $\mathbf{e}$ и $\mathbf{p}$ в их изменениях, задавая взаимовлияние обратимых и необратимых деформаций в процессе деформирования. Тензор $\boldsymbol{\gamma}$ в уравнениях (1.1), являясь источником в уравнении изменения необратимых деформаций, следует называть скоростью производства необратимых деформаций. При $\boldsymbol{\gamma} = 0$ компоненты тензора $\mathbf{p}$ изменяются также, как и при жестком движении тела, объективная производ-

ная оказывается равной нулю. Именно такое положение позволяет считать тензор $\mathbf{p}$ в качестве тензора необратимых деформаций, он может быть неизменен при разгрузке и при деформировании, предвещающем пластическое течение. Как раз такая цель преследовалась ранее [19, 20] при записи дифференциальных уравнений изменений (переноса) для тензоров обратимых $\mathbf{e}$ и необратимых $\mathbf{p}$ деформаций (1.1) при конкретизации термодинамического подхода к построению теории больших упругопластических деформаций, предлагаемого [18].

Если принять (1.1) в качестве определений для обратимых и необратимых деформаций, то для тензора полных деформаций Альманси следует:

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} + \mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{e}^2 - \mathbf{e} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{e} \quad (1.3)$$

Согласно (1.3) тензор $\mathbf{e}$ оказывается лишь главной линейной частью полного тензора обратимых деформаций $\mathbf{s} = \mathbf{e} - \frac{1}{2}\mathbf{e}^2$. Но именно с помощью данного тензора $\mathbf{e}$ удалось записать геометрически безупречное дифференциальное определение тензора обратимых деформаций (1.1).

Введение тензора $\mathbf{e}$ служит еще одному обстоятельству. Если принять, как это принято в большинстве публикаций, посвященных созданию численных методов расчетов больших упругопластических деформаций [11, 12], что термодинамический потенциал, являющийся свободной энергией, определяется только консервативной составляющей процесса деформирования, то есть

$$\psi = \psi(\mathbf{e}, T) = e(\mathbf{e}, s) - sT, \quad (1.4)$$

где e, s — плотности распределения внутренней энергии и энтропии, то следствием закона сохранения энергии можно получить [20] обобщение формулы Мурнагана для среды, где присутствуют и обратимые и необратимые деформации в виде

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{e}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{e}) \quad (1.5)$$

При равенстве нулю необратимых деформаций $\mathbf{p} \equiv 0$ из соотношений (1.3) и (1.5) следует классическая формула Мурнагана, широко используемая в нелинейной теории упругости

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{d}} \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{d}) \quad (1.6)$$

Предположение (1.4) о независимости свободной энергии от необратимых деформаций является только гипотезой, но оно существенно упрощает дальнейшие вычисления. Более того, оно распространяет на теорию больших деформаций известное положение классической модели Прандтля—Рейса о том, что упругие деформации задают напряжения в деформируемом материале. Данной гипотезой процесс деформирования разделяется на консервативный, задаваемый термодинамическим потенциалом (в нашем случае свободной энергией (1.4)) и диссипативный, задаваемый определяющими законами, которые должны определить связь источника γ в уравнении переноса необратимых деформаций с напряжениями. Изменяющиеся в процессе деформирования напряжения, как следствие внешнего воздействия на материал, являются причиной изменения необратимых деформаций.

Следствием закона сохранения энергии вместе с формулой Мурнагана (1.5) является [20, 23] также уравнение баланса энтропии s

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{j} - T^{-2} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} T + T^{-1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\gamma} \quad (1.7)$$

$$\mathbf{j} = \rho s \mathbf{v} + T^{-1} \mathbf{q}$$

Здесь $\mathbf{q}, \mathbf{j}$ — потоки тепла и энтропии. Последние слагаемые правой части задают производство энтропии за счет неравновесного процесса теплопроводности и необратимого деформирования соответственно. В рассматриваемом случае изотермического деформирования важным остается последнее слагаемое в (1.7). Он требует задания определяющего закона, который связывал бы термодинамический поток $\boldsymbol{\gamma}$ с термодинамической силой $\boldsymbol{\sigma}$. Для замыкания математической модели деформирования, таким образом, наряду с уравнением движения (равновесия) следует записать определяющие законы, то есть конкретизировать зависимости $\psi = \psi(\mathbf{e})$ и $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\sigma})$. Задание функциональной зависимости $\psi = \psi(\mathbf{e})$ определяет консервативный (упругий) механизм деформирования. В зависимости от требований ставящейся задачи он может быть любым. В частности, можно принять квадратичную зависимость от двух первых инвариантов $\mathbf{e}$ со следованием после дифференцирования в (1.5) или в (1.6) линейных соотношений закона Гука.

При задании определяющего закона $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\sigma})$ следует учитывать, что производство энтропии в (1.7) задается как за счет вязких свойств деформирования (ползучесть), так и пластических (пластическое течение). Деформации ползучести и пластического течения неразделимы, являясь одновременно необратимыми деформациями. Источник $\boldsymbol{\gamma}$ в уравнении изменения их, являясь скоростью изменения необратимых деформаций, может быть, разным в зависимости от того, происходит ли процесс ползучести или пластического течения. Главное отличие в росте необратимых деформаций за счет вязких свойств деформируемого материала от их роста в условиях пластического течения заключается в том, что процесс ползучести начинается с момента начала процесса нагружения, а пластическое течение только при выходе напряженных состояний на поверхность нагружения, когда выполняются условия пластического течения. При разгрузке наоборот: пластическое течение прекращается, но ползучесть материала продолжается. Следовательно, упругопластические границы оказываются местом, где меняется механизм производства необратимых деформаций с вязкого (ползучесть) на пластический (течение) при активном процессе деформирования и наоборот при разгрузке. Можно положить, что в условиях пластического течения вязкие свойства материала проявляются в форме причины, тормозящей быстрый процесс пластического течения.

Определяющие законы в области пластического течения, в области, предвещающей течение, и в области разгрузки должны быть разными. Важно, однако, чтобы с помощью этих законов возможно было бы обеспечить непрерывность необратимых деформаций на упругопластических границах. В качестве одного из простейших примеров укажем следующий подход. Положим, что первоначально необратимые деформации в теле растут за счет ползучести материала. В качестве закона ползучести примем степенной закон Нортона

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^V = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad V(\Sigma) = B \Sigma^n \quad (1.8)$$

В соотношениях (1.8) $\boldsymbol{\varepsilon}^V$ — скорость деформаций ползучести, B, n — постоянные материала. В качестве аргумента Σ потенциала ползучести при использовании далее классических условий пластического течения удобно принять

$$\Sigma = \max |\sigma_i - \sigma_j| \quad (1.9)$$

$$\Sigma = \max |\sigma_i - \sigma|; \quad \sigma = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \sigma \quad (1.10)$$

$$\Sigma = \sqrt{\frac{3}{2}} \left((\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2 \right)^{1/2} \quad (1.11)$$

В предыдущих соотношениях σ_i — главные значения тензора напряжений. Очевидно, что Σ принимается в виде (1.9), (1.10), (1.11) при использовании в качестве условия пластического течения условия Треска, условия максимальных приведенных напряжений и условия Мизеса соответственно.

Если принять условия принципа максимума Мизеса [1–4], то пластическое течение отвечает ассоциированному с поверхностью нагружения $f(\sigma, \xi) = 0$ закону течения

$$\dot{\gamma} = \dot{\xi} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad f(\sigma, \xi) = 0, \quad \lambda > 0, \quad \dot{\xi} = \dot{\epsilon}^p - \dot{\epsilon}_0^v \quad (1.12)$$

Здесь $\dot{\epsilon}^p$ — скорость пластических деформаций; $\dot{\epsilon}_0^v$ — скорость деформаций ползучести в момент прихода в некоторую точку материала упругопластической границы. Данная скорость роста необратимых деформаций оказывается начальным значением для их последующего роста, но уже в условиях пластического течения. Далее, только с целью определенности, в качестве поверхности нагружения $f(\sigma, \xi) = 0$ будем использовать боковую поверхность наклонной призмы Треска в пространстве главных напряжений с учетом вязкого сопротивления пластическому течению

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max |\xi_k|, \quad (1.13)$$

где ξ_k — главные значения тензора ξ , k — предел текучести материала, η — коэффициент вязкого сопротивления пластическому течению.

Зависимость $\psi = \psi(\mathbf{e})$, для конкретизации соотношений ставящейся в рассматриваемой конкретной краевой задачи, принимаем в виде

$$\begin{aligned} \rho\psi(\mathbf{e}) = W(J_1, J_2) = -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b - \mu)J_1J_2 - \chi J_1^3 \\ J_1 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{s}, \quad J_2 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{s}^2 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Материал таким способом принимается несжимаемым ($\rho = \text{const}$). μ — модуль сдвига, b, χ — упругие модули более высокого порядка. С учетом принимаемого условия несжимаемости материала соотношение (1.5) следует переписать в виде

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{e}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{e}) \quad (1.15)$$

Здесь p — неизвестная добавка в гидростатическое давление. Заметим еще раз, что принятие конкретных зависимостей вида (1.8)–(1.14) никак не ограничивает в принятии любых иных законов упругости, ползучести и пластичности.

2. Постановка задачи. Считаем, что материал, деформационные и прочностные свойства которого подчинены зависимостям предыдущего пункта, заполняет слой между жесткими цилиндрическими поверхностями. В системе цилиндрических координат r, θ, z его размеры $r_0 \leq r \leq R$ позволяют записать граничные условия

$$\begin{aligned} \omega(R, t) = \omega_R(t), \quad \theta(R, t) = \theta_R(t) = \int_0^t \omega_R(\xi) d\xi \\ \omega(r_0, t) = 0, \quad p(r, 0) = \sigma_0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Согласно соотношениям (2.1) на граничных поверхностях слоя $r = r_0$ и $r = R$ выполняется условие жесткого сцепления (прилипания); $\omega_R = \omega_R(t)$ — задаваемая функ-

ция угловой скорости вращения поверхности $r = R$; до момента $t = 0$ времени начала процесса деформирования материал слоя покоится: $\sigma_0 = \text{const}$ — задаваемая постоянная. Принимаемая геометрия задачи и условие несжимаемости материала слоя существенно упрощают кинематические зависимости

$$\begin{aligned} u_r &= r(1 - \cos \theta), \quad u_\varphi = r \sin \theta, \quad v_\varphi = r \frac{\partial \theta}{\partial t} = r\omega, \quad \omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \\ d_{r\varphi} &= \frac{1}{2} r \theta_{,r}, \quad d_{rr} = -2d_{r\varphi}^2, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} r \omega_{,r}, \quad \theta_{,r} = \frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad \omega_{,r} = \frac{\partial \omega}{\partial r} \\ \omega_{r\varphi} &= -\varepsilon_{r\varphi} - \omega, \quad r_{\varphi r} = \omega + \frac{2\varepsilon_{r\varphi}(e_{\varphi\varphi} - 1)}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} e_{rr} + e_{\varphi\varphi} &= -e_{r\varphi}^2, \quad p_{rr} + p_{\varphi\varphi} = -2p_{r\varphi}^2, \quad e_{rr} = p_{\varphi\varphi} - \frac{3}{2}e_{r\varphi}^2 - 2e_{r\varphi}p_{r\varphi} \\ \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} &= \gamma_{\varphi\varphi} - 2\gamma_{r\varphi}p_{r\varphi} + 4\varepsilon_{r\varphi}p_{r\varphi}(e_{\varphi\varphi} - 1)(e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2)^{-1} \end{aligned}$$

Распределения угловой скорости $\omega = \omega(r, t)$ и угла поворота $\theta = \theta(r, t)$ по слою в каждый момент времени оказываются основными искомыми неизвестными задачи. Полагаем, что вращение поверхности $r = R$ является ускоренным $\omega_R = \alpha^2 t$ до некоторого момента времени $t = t_1$, равномерным в промежутке времени $t_1 \leq t \leq t_2$, замедленным $\omega_R = \alpha^2 t_2 - \beta^2(t - t_2)$ до полной остановки при $t = t_3$.

После интегрирования второго из уравнений равновесия

$$\sigma_{rr,r} = r^{-1}(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}), \quad \sigma_{r\varphi,r} = -2r^{-1}\sigma_{r\varphi} \quad (2.3)$$

найдем

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{c(t)}{r^2}, \quad e_{r\varphi} = \frac{c(t)}{2\mu r^2} \quad (2.4)$$

Для компонент тензора напряжений, исходя из (1.14) и (1.15), запишем

$$\begin{aligned} \sigma_{r\varphi} &= 2\mu e_{r\varphi} \\ (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})\sigma_{r\varphi}^{-1} &= (e_{rr} - e_{\varphi\varphi})e_{r\varphi}^{-1} \\ \sigma_{rr} &= -p + 2(b + \mu)e_{rr} + 2be_{\varphi\varphi} + \mu e_{r\varphi}^2 \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -p + 2(b + \mu)e_{\varphi\varphi} + 2be_{rr} + \mu e_{r\varphi}^2 \\ \sigma_{zz} &= -p + 2b(e_{rr} + e_{\varphi\varphi}) - 2\mu e_{r\varphi}^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

При записи соотношений (2.5) слагаемые порядка выше второго по $e_{r\varphi}$ опущены. Функция времени $c(t)$ определяется при выполнении граничных условий (2.1).

Непосредственно с началом деформирования в слое накапливаются необратимые деформации в форме деформаций ползучести. В рассматриваемом случае, следуя (1.8), (1.9), (2.2), (2.4), (2.5), получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^v &= Bn2^{n-1} \frac{c^{n-1}(t)}{r^{2n-2}}, \quad \varepsilon_{rr}^v = -\varepsilon_{\varphi\varphi}^v = \frac{e_{rr} - e_{\varphi\varphi}}{e_{r\varphi}} \frac{\varepsilon_{r\varphi}^v}{2} \\ p_{r\varphi}(r, t) &= Bn2^{n-1} \frac{c_1(t)}{r^{2n-2}}, \quad c_1(t) = \int_0^t c^{n-1}(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из зависимостей (2.2) с учетом соотношений (2.4) и (2.6) следует дифференциальное уравнение для $\theta(r, t)$. Разрешая последнее для рассматриваемого момента времени, получим распределение для угла поворота в этот момент времени

$$\theta(r, t) = \theta_R(t) - \frac{c(t)}{2\mu} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right) - \frac{Bn2^{n-1}}{n-1} c_1(t) \left(\frac{1}{r^{2n-2}} - \frac{1}{R^{2n-2}} \right) \quad (2.7)$$

Выполняя граничное условие (2.1) на стенке $r = r_0$, получаем дифференциальное уравнение для $c = c(t)$

$$\frac{dc}{dt} = \dot{c}(t) = \frac{2\mu\omega_R(t)}{r_0^{-2} - R^{-2}} - \frac{\mu Bn2^n}{n-1} c^{n-1}(t) \frac{r_0^{2-2n} - R^{2-2n}}{r_0^{-2} - R^{-2}} \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) следует проинтегрировать при условии $c(0) = 0$. С помощью (2.6) из (2.2) исключаются неизвестные до этого компоненты тензора источника необратимых деформаций $\gamma_{r\varphi} = \varepsilon_{r\varphi}^V$ и $\gamma_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^V$. Полученная система уравнений замкнута и позволяет рассчитывать изменение напряженных и деформированных состояний, включая рост необратимых деформаций, до той поры пока не выполняется условие пластического течения.

Расчеты показывают, что впервые при условии пластического течения (1.13) выполняется на границе $r = r_0$ слоя в форме $\sigma_{r\varphi} = k$. С этого момента времени от граничной поверхности $r = r_0$, отделяясь, продвигается по слою упругопластическая граница $r = h(t)$, формируя область пластического течения $r_0 \leq r \leq h(t)$. В области $h(t) \leq r \leq R$ необратимые деформации продолжают свой рост в форме деформаций ползучести. Справедливыми остаются в этой области зависимости (2.4), но в них $c(t)$ следует заменить на новую неизвестную (требующую своего определения) функцию времени $c_2(t)$. Аналогично в (2.6) $c_1(t)$ меняется на $c_3(t) = c_1(t_0) + \int_{t_0}^t c_2^{n-1}(\xi) d\xi$.

В области пластического течения $r_0 \leq r \leq h(t)$ в соответствии с (1.12) и (1.13) запишем

$$\varepsilon_{r\varphi}^p(r, t) = \frac{1}{\eta} \left[\frac{c_2(t)}{r^2} - k \right] + Bn2^{n-1} k^{n-1} \quad (2.9)$$

Требование непрерывности на упругопластической границе скоростей изменения необратимых деформаций сводится к условию

$$c_2(t) = k h^2(t) \quad (2.10)$$

Из зависимостей (2.2) с учетом соотношений (2.9) следует дифференциальное уравнение для $w(r, t)$, интегрирование которого при условии $w(r_0, t) = 0$ приводит к зависимости

$$\omega(r, t) = \frac{\dot{c}_2(t)}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{2}{\eta} \left[\frac{c_2(t)}{2} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) - k \ln \frac{r}{r_0} \right] + Bn2^n k^{n-1} \ln \frac{r}{r_0} \quad (2.11)$$

Условие равенства угловых скоростей (2.11) и (2.7) на продвигающейся упругопластической границе $r = h(t)$ приводит к дифференциальному уравнению для функции $h(t)$

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) = & \frac{1}{h(t) \left(r_0^{-2} - R^{-2} \right)} \left[\frac{\mu\omega_R(t)}{k} - \frac{\mu}{\eta} \left(\frac{h^2(t)}{r_0^2} - 1 - 2 \ln \frac{h(t)}{r_0} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\mu Bn2^{n-1} k^{n-2}}{n-1} \left(1 - \frac{h^{2n-2}(t)}{R^{2n-2}} \right) - \mu Bn2^n k^{n-2} \ln \frac{h(t)}{r_0} \right], \end{aligned} \quad (2.12)$$

$h(t_0) = r_0$

Интегрируя соотношение (2.9), найдем

$$p_{r\varphi}(r, t) = Bn2^{n-1} \frac{c_3(t_\xi(r))}{r^{2n-2}} + \frac{c_4(r, t)}{\eta r^2} + \left(Bn2^{n-1} k^{n-1} - \frac{k}{\eta} \right) (t - t_\xi(r))$$

$$c_4(r, t) = \int_{t_\xi(r)}^t c_2(\xi) d\xi$$
(2.13)

Здесь $t_\xi(r)$ — момент времени, являющийся моментом прихода к точкам материала с координатой r упругопластической границы $r = h(t)$.

Определив в зависимостях (2.2) компоненту скоростей необратимых деформаций с помощью соотношений (2.6) или (2.9), после некоторых тождественных преобразований запишем

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^p(r, t) = -\varepsilon_{rr}^p(r, t) = \frac{\varepsilon_{r\varphi}^p(e_{\varphi\varphi} - e_{rr})}{2e_{r\varphi}} + \frac{\bar{\varepsilon}_{r\varphi}^v}{2} \left(\frac{\bar{e}_{\varphi\varphi} - \bar{e}_{rr}}{\bar{e}_{r\varphi}} - \frac{e_{\varphi\varphi} - e_{rr}}{e_{r\varphi}} \right)$$

$$\frac{\partial p_{\varphi\varphi}(r, t)}{\partial t} = \left(\frac{k}{\eta} - \frac{c_2(t)}{\eta r^2} \right) \frac{p_{\varphi\varphi} - e_{r\varphi}^2}{e_{r\varphi}} + \left(\frac{\dot{c}_2(t)}{2\mu r^2} + \frac{c_2(t)}{\eta r^2} - \frac{k}{\eta} + Bn2^{n-1} k^{n-1} \right) \times$$

$$\times \frac{4p_{r\varphi} \left[p_{\varphi\varphi} - \frac{1}{2} e_{r\varphi}^2 - 2e_{r\varphi} p_{r\varphi} + 1 \right]}{e_{r\varphi}^2 + 2} + Bn2^{n-1} k^{n-1} \left[\bar{e}_{r\varphi} + 2\bar{p}_{r\varphi} - \frac{\bar{p}_{\varphi\varphi}}{\bar{e}_{r\varphi}} - 2p_{r\varphi} \right]$$
(2.14)

Здесь кинематические параметры деформирования являются функциями r и t ($e_{r\varphi} = e_{r\varphi}(r, t)$, $p_{r\varphi} = p_{r\varphi}(r, t)$), а в случае, когда же они снабжены чертой сверху — функциями только переменной r ($\bar{e}_{r\varphi} = \bar{e}_{r\varphi}(r) = \bar{e}_{r\varphi}(r, t_\xi(r))$). Зависимости (2.9)–(2.14) позволяют рассчитать процесс пластического течения в области $r_0 \leq r \leq h(t)$ и продвижение упругопластической границы $r = h(t)$. Деформирование в области $h(t) < r \leq R$ подчинено соотношениям (2.2)–(2.8).

Полученные зависимости остаются справедливыми после того как скорость вращения граничной жесткой поверхности $r = R$ становится постоянной $\omega_R = \alpha^2 t_1$. Следует только отметить, что развитие области пластического течения замедляется. Заметно уменьшается скорость продвижения $\dot{h}(t)$ упругопластической границы.

С момента $t = t_2$ вращение замедляется: $\omega_R = \alpha^2 t_2 - \beta^2(t - t_2)$. Упругопластическая граница $r = m(t)$ начинает свое движение в обратную сторону. Закон ее продвижения задается тем же дифференциальным уравнением (2.12), где следует заменить $h(t)$ на $m(t)$ и принять в качестве начального условия $m(t_2) = r_m$, где r_m — радиус максимального продвижения упругопластической границы. В области $m(t) \leq r \leq r_m$, где пластическое течение прекратилось, интегрированием (2.9) находим

$$p_{r\varphi}(r, t) = \frac{c_4(r, t_\xi(r))}{\eta r^2} + \left(Bn2^{n-1} k^{n-1} - \frac{k}{\eta} \right) (t_\xi(r) - t_\xi(r)) + Bn2^{n-1} \frac{c_5(r, t)}{r^{2n-2}},$$

$$c_5(r, t) = c_3(t_\xi(r)) + \int_{t_\xi(r)}^t c_2^{n-1}(\xi) d\xi$$
(2.15)

В решениях (2.15), как и ранее, $t_\xi(r)$ — момент прихода в точку с координатой r упругопластической границы $r = m(t)$. В момент времени $t = t_3$ ($m(t_3) = r_0$) область

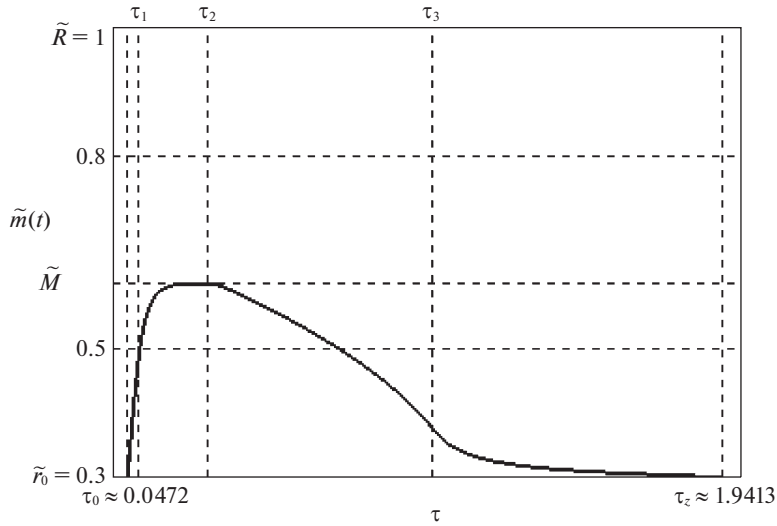
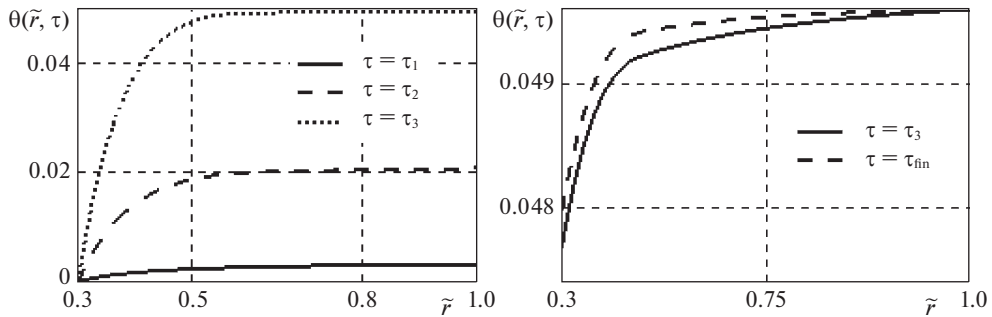


Рис. 1. Упругопластическая граница.

Рис. 2. Изменение угла поворота θ в разные моменты времени.

пластического течения исчезает и во всем слое необратимые деформации изменяются в соответствии с законом ползучести.

Напряжения в слое вычисляем в соответствии с (2.3)–(2.5) после того, как компоненты упругих деформаций будут вычислены.

Приведем некоторые результаты расчетов. С этой целью вводились безразмерные переменные: $\tilde{r} = r/R$, $\tau = \alpha t$, $\tilde{h}(\tau) = h(t)/R$. Постоянные задачи задавались следующими:

$$k/\mu \approx 0.00245, \quad \tilde{r}_0 = 0.3, \quad b/\mu = 4, \quad \alpha/\beta = 3, \quad B\mu^{n-1}/\alpha = 3.5; \quad n = 3 \\ \alpha\eta/\mu = 0.05, \quad \sigma_0/\mu \approx 0.0021, \quad \tau_1 = 0.08, \quad \tau_2 = 0.3$$

На рис. 1 представлена граница пластической области в своем изменении в течение всего процесса деформирования. На рис. 2 представлена зависимость угла поворота θ от времени. Величины $\theta(\tilde{r}, \tau_3)$ и $\theta(\tilde{r}, \tau_{fin})$ показаны в отдельных графиках поскольку

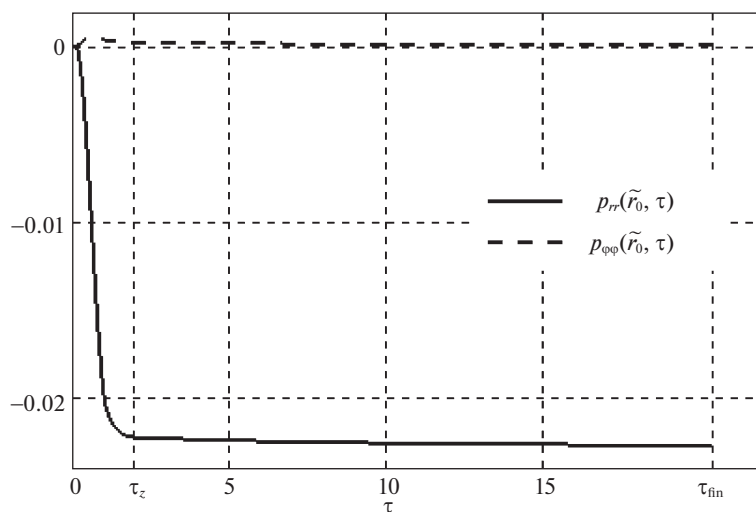


Рис. 3. Необратимые деформации при $\tilde{r} = \tilde{r}_0$ (компоненты p_{rr} и $p_{\phi\phi}$).

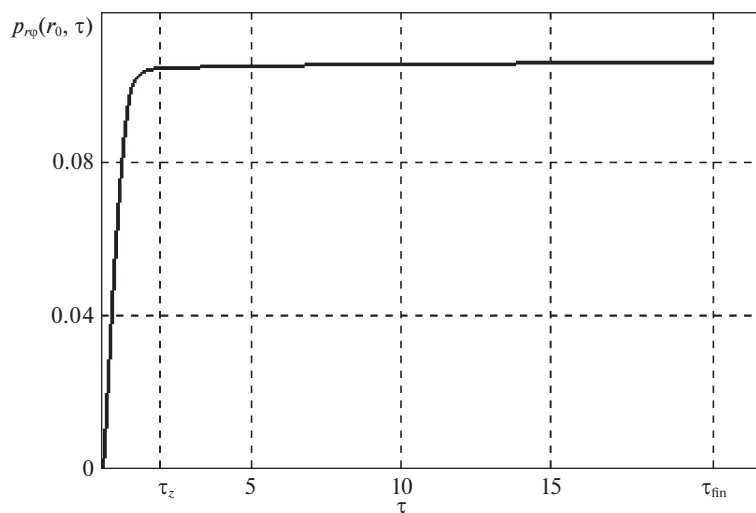


Рис. 4. Компонента $p_{r\phi}$ тензора необратимых деформаций при $\tilde{r} = \tilde{r}_0$.

их значения являются достаточно близкими. На рис. 3 и 4 изображено изменение необратимых деформаций со временем на внутренней граничной поверхности $\tilde{r} = \tilde{r}_0$.

Для сравнения полученных результатов воспользуемся работой [27], в которой аналогичная задача решена с учетом вязких свойств материала только на стадии пластического течения. Установлено, что без учета ползучести материала, пластическое течение начинается раньше, при этом область вязкопластического течения развивается немного дальше. Также учет ползучести материала показывает, что при остановке цилиндра релаксация напряжений занимает на порядок больше времени.

Заключение. Каждый материал изначально наделен и упругими, и вязкими, и пластическими свойствами. Эти свойства по-разному проявляют себя в процессе деформирования. Упругие и вязкие свойства проявляют себя непосредственно с начала процесса, а пластические после достижения напряжениями поверхности текучести в пространстве напряжений. Поскольку и вязкость, и пластичность приводят к производству необратимых деформаций, то необходимо на упругопластических границах учитывать изменения в механизме такого производства. При этом необратимые деформации обязаны быть непрерывными в условиях смены механизма их производства на упругопластических границах. Задача обеспечения данной непрерывности при начале пластического течения на нагружающей упругопластической границе или при его завершении на разгружающей поверхности может оказаться совсем не простой.

Здесь на основе определения обратимой и необратимой составляющих полных деформаций формулированием для них, следуя формализму термодинамики, соответствующих дифференциальных уравнений их изменения (переноса) предпринята попытка постановки данной фундаментальной проблемы современной механики. Необратимые деформации не разделяются на вязкие (деформации ползучести) и пластические. Все различие в них связывается с разным заданием источника в уравнениях переноса. В качестве иллюстрации такого подхода рассмотрен конкретный пример о вискозиметрическом деформировании цилиндрического слоя. Определяющими уравнениями, задающими источники в уравнениях переноса, выбраны простейшие. Вязкие свойства полагаются связанными степенным законом Нортонa, а пластические ассоциированы с кусочно-линейной поверхностью, обобщающей условие максимальных касательных напряжений. Подчеркнем, что это только выбор. Препятствий иному выбору не существует, необходимо только, чтобы оставалась возможность обеспечить непрерывность необратимых деформаций на упругопластической границе. Последнее оказывается таким образом фундаментальной задачей феноменологической механики деформируемых тел. Общего решения данной задачи, по-видимому, получить невозможно. Ее разрешением приходится заниматься в каждом конкретном случае при задании конкретных определяющих законов. Рассмотренный пример разрешения такой задачи, кроме самостоятельного значения в качестве новой задачи теории больших деформаций, служит демонстрацией того, что такие задачи могут иметь свое решение.

Авторы посвящают настоящую публикацию светлой памяти своих Учителей Геннадия Ивановича Быковцева и Вениамина Петровича Мясникова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
2. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
3. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
4. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
5. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упруго-пластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986. 232 с.
6. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Физматлит, 2013. 320 с.
7. Lee E.H. Elastic-plastic deformation at finite strains // J. Appl. Mech. 1969. V. 36. № 1. P. 1–6.
8. Буренин А.А., Ковтаниук Л.В., Полоник М.В. Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругопластической среды // Докл. РАН. 2000. Т. 375. № 6. С. 767–769.
9. Левитас В.И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наукова думка, 1987. 232 с.
10. Димитриенко Ю.И. Нелинейная механика сплошной среды. М.: Физматлит, 2009. 624 с.

11. Голованов А.И., Султанов Л.У. Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. Казань: Изд-во КГУ, 2009. 465 с.
12. Naghdi P.M. A critical review of the state of finite plasticity // J. Appl. Phys. 1990. V. 41. P. 315–394.
13. Simo J.C. A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part I. Continuum formulation // Comput. Meth. in Appl. Mech.&Engng. 1988. V. 66. № 2. P. 199–219.
14. Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A. A consistent finite elastoplasticity theory combining additive and multiplicative decomposition of the stretching and deformation gradient // Int. J. Plasticity. 2000. V. 16. № 2. P. 143–177.
15. Pietryga M.R., Reese S., Vladimirov I.N. Anisotropic finite elastoplasticity with nonlinear kinematic and isotropic hardening and application to sheet metal forming // Int. J. Plasticity. 2010. V. 26. № 5. P. 659–687.
16. Shutov A.V., Ihlemann J. Analysis of some basic approaches to finite strain elasto-plasticity in view of reference change // Int. J. Plasticity. 2014. V. 63. P. 183–197.
17. Shutov A.V., Larichkin A.Yu., Shutov V.A. Modelling of cyclic creep in the finite strain range using a nested split of the deformation gradient // ZAMM. 2017. V. 97. № 9. P. 1083–1099.
18. Мясников В.П. Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.
19. Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтаныук Л.В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 2. С. 199–201.
20. Буренин А.А., Ковтаныук Л.В. Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.
21. Буренин А.А., Ковтаныук Л.В., Панченко Г.Л. Неизотермическое движение упруговязкопластической среды в трубе в условиях изменяющегося перепада давления // Докл. РАН. 2015. Т. 464. № 3. С. 284–287.
22. Бегун А.С., Буренин А.А., Ковтаныук Л.В. Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов // Докл. РАН. 2016. Т. 470. № 3. С. 275–278.
23. Бельх С.В., Буренин А.А., Ковтаныук Л.В., Прокудин А.Н. Об учете вязких свойств материалов в теории больших упругопластических деформаций // Чебышевский сб. 2017. Т. 18. № 3(63). С. 108–130.
24. Prokudin A.N., Firsov S.V. Antiplane strain of hardening elastoviscoplastic medium // J. Siberian Federal Univ. – Math.&Phys. 2018. V. 11. № 4. P. 399–410.
25. Буренин А.А., Галимзянова К.Н., Ковтаныук Л.В., Панченко Г.Л. О согласовании механизмов роста необратимых деформаций полого шара при всестороннем сжатии // Докл. РАН. 2018. Т. 482. № 4. С. 403–406.
26. Локощенко А.М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. М.: МГИУ, 2007. 264 с.
27. Буренин А.А., Ковтаныук Л.В., Устинова А.С. Об учете упругих свойств неньютоновского материала при его вискозиметрическом течении // ПМТФ. 2008. Т. 49. № 2. С. 143–151.

On Sequential Change in Mechanisms of Production of Large Irreversible Deformations

A. S. Begun^{a,#}, A. A. Burenin^{b,##}, L. V. Kovtanyuk^{a,###}, and A. N. Prokudin^{b,####}

^a Institute of Automation and Control Processes, FEB RAS, Vladivostok, Russia

^b Institute of machinery and metallurgy, Khabarovsk Federal Research Center FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia

[#]e-mail: ustanova@iacp.dvo.ru

^{##}e-mail: burenin@iacp.dvo.ru

^{###}e-mail: lk@iacp.dvo.ru

^{####}e-mail: sunbeam_85@mail.ru

Following the formalism of thermodynamics, the reversible and irreversible components of the total deformations are accepted as thermodynamic parameters of the state of the defor-

mation process. Their definitions are given by formulating the corresponding differential equations of their change (transport), the flux terms of which determine the mutual influence of these thermodynamic parameters during deformation. The source in the transport equation is determined by two mechanisms for producing irreversible deformations: viscous (creep) and plastic (plastic flow). The elastic-plastic boundaries turn out to be a place where the mechanism of the production of irreversible deformations changes from viscous to plastic and vice versa during unloading. Irreversible deformations are not divided into creep and plastic flow deformations, only the former achieved are the initial values for the subsequent growth of the latter under the new plastic flow conditions. When unloading, the shift occurs in the reverse order. As an example, the problem of the growth of irreversible strains under the conditions of viscometric deformation of a cylindrical layer is considered.

Keywords: elasticity, creep, plastic flow, large strains, viscometric deformation

REFERENCES

1. Bykovcev G.I., Ivlev D.D. Plasticity Theory. Vladivostok: Dal'nauka, 1998. 528 p.
2. Ishlinskij A.Yu., Ivlev D.D. Mathematical Theory of Plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2001. 704 p.
3. Kachanov L.M. Fundamentals of the Theory of Plasticity. Moscow: Nauka, 1969. 420 p.
4. Ivlev D.D. Theory of Ideal Plasticity. Moscow: Nauka, 1966. 232 p.
5. Pozdeev A.A., Trusov P.V., Nyashin Yu.I. Large Elastic-Plastic Deformations: Theory, Algorithms, Applications. Moscow: Nauka, 1986. 232 p.
6. Markin A.A., Sokolova M.Yu. Thermomechanics of Elastoplastic Deformation. Moscow: Fizmatlit, 2013. 320 p.
7. Lee E.H. Elastic-plastic deformation at finite strains // J. Appl. Mech., 1969, vol. 36, no. 1, pp. 1–6.
8. Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Polonik M.V. The possibility of reiterated plastic flow at the overall unloading of an elastoplastic medium // Dokl. Phys., 2000, vol. 45, no. 16, pp. 694–696.
9. Levitas V.I. Large Elastoplastic Deformations of Materials at High Pressure. Kiev: Naukova Dumka, 1987. 232 p.
10. Dimitrienko Yu.I. Nonlinear Continuum Mechanics. Moscow: Fizmatlit, 2009. 624 p.
11. Golovanov A.I., Sultanov L.U. Mathematical Models of Computational Nonlinear Solid Mechanics. Kazan: Izdatel'stvo KGU, 2009. 465 p.
12. Naghdi P.M. A critical review of the state of finite plasticity // J. Appl. Phys., 1990, vol. 41, pp. 315–394.
13. Simo J.C. A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part I. Continuum formulation // Comput. Meth. in Appl. Mech. & Engng., 1988, vol. 66, no. 2, pp. 199–219.
14. Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A. A consistent finite elastoplasticity theory combining additive and multiplicative decomposition of the stretching and deformation gradient // Int. J. Plasticity, 2000, vol. 16, no. 2, pp. 143–177.
15. Pietryga M.R., Reese S., Vladimirov I.N. Anisotropic finite elastoplasticity with nonlinear kinematic and isotropic hardening and application to sheet metal forming // Int. J. Plasticity, 2010, vol. 26, no. 5, pp. 659–687.
16. Shutov A.V., Ihlemann J. Analysis of some basic approaches to finite strain elasto-plasticity in view of reference change // Int. J. Plasticity, 2014, vol. 63, pp. 183–197.
17. Shutov A.V., Larichkin A.Yu., Shutov V.A. Modelling of cyclic creep in the finite strain range using a nested split of the deformation gradient // ZAMM, 2017, vol. 97, no. 9, pp. 1083–1099.
18. Myasnikov V.P. The equations of motion of elastoplastic materials at large deformations // Vestn. DVO RAN, 1996, no. 4, pp. 8–13.
19. Burenin A.A., Bykovcev G.I., Kovtanyuk L.V. A simple model of finite strain in an elastoplastic medium // Dokl. Phys., 1996, vol. 41, no. 3, pp. 127–129.
20. Burenin A.A., Kovtanyuk L.V. Large Irreversible Deformations and Elastic Aftereffect. Vladivostok: Dal'nauka, 2013. 312 p.
21. Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L. Nonisothermal motion of an elastoviscoplastic medium through a pipe under a changing pressure drop // Dokl. Phys., 2015, vol. 60, no. 9, pp. 419–422.

22. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V.* Large irreversible deformations under conditions of changing mechanisms of their formation and the problem of definition of plastic potentials // *Dokl. Phys.*, 2016, vol. 61, no. 9, pp. 463–466.
23. *Belyh S.V., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Prokudin A.N.* On account of viscous properties of materials in the theory of large elastoplastic strains // *Chebyshevskij sb.*, 2017, vol. 18, no. 3(63), pp. 109–130.
24. *Prokudin A.N., Firsov S.V.* Antiplane strain of hardening elastoviscoplastic medium // *J. Sib. Fed. Univ. – Math.&Phys.*, 2018, vol. 11, no. 4, pp. 399–410.
25. *Burenin A.A., Galimzyanova K.N., Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L.* Matching growth mechanisms of irreversible deformation of a hollow sphere under uniform compression // *Dokl. Phys.*, 2018, vol. 63, no. 10, pp. 407–410.
26. *Lokoshchenko A.M.* Modeling of Creep and Long-Term Strength of Metals. Moscow: MGIU, 2007. 264 p.
27. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Ustinova A.S.* Accounting for the elastic properties of a non-Newtonian material under its viscosimetric flow // *J. Appl. Mech.&Techn. Phys.*, 2008, vol. 49, no. 2, pp. 277–284.

УДК 539.374

**ПРИБЛИЖЕННЫЙ АНАЛИЗ ЭКСТРУЗИИ ПОРИСТОГО
МАТЕРИАЛА ТИПА ГРИНА**© 2021 г. Г. М. Севастьянов^{1,*}, А. М. Севастьянов^{2,**}¹ Институт машиноведения и металлургии ХФИЦ ДВО РАН,
Комсомольск-на-Амуре, Россия² Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет,
Комсомольск-на-Амуре, Россия

*e-mail: akela.86@mail.ru

**e-mail: mamiia20@mail.ru

Поступила в редакцию 17.03.2020 г.

После доработки 29.07.2020 г.

Принята к публикации 25.09.2020 г.

Рассмотрено стационарное движение идеально-пластического сжимаемого материала в сходящемся коническом канале. Полагается выполнение условия текучести Грина и ассоциированного с ним закона пластического течения. На поверхности контакта материала со стенкой канала считается выполненным закон максимального трения. Тензор напряжений Коши как функция локальной плотности среды определяется решением обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения первого порядка, а установление пространственного распределения плотности сводится к отысканию определенного интеграла. Для произвольного вида функциональных коэффициентов модели Грина получены аналитические зависимости, которые задают двустороннюю оценку плотности и давления в канале. Проведено сравнение аналитических результатов с имеющимися экспериментальными данными.

Ключевые слова: жестко-пластический анализ, пористые материалы, условие пластичности Грина, экструзия, пластическая сжимаемость

DOI: 10.31857/S0032823520060090

Введение. Установившиеся течения пластических сред в сходящихся плоских или осесимметричных каналах исследуются с помощью математической теории пластичности уже почти столетие. Эти задачи моделируют широко распространенную технологическую операцию — прямую экструзию. Таким способом могут быть обработаны полимеры, металлы, различные материалы органического происхождения. Цели такой обработки могут быть различными: получение длинномерного изделия с сечением, отличным по площади от сечения заготовки; упрочнение заготовки (в т.ч. поверхностное); компактификация пористых материалов. Во многих практических приложениях разгрузка материала после экструзии не является предметом первостепенного интереса, и для оценки наиболее важных параметров процесса (необходимое давление и приобретенная деформация) используется жестко-пластический анализ. Первая известная работа, посвященная этой теме — исследование Надая [1]. В этой работе было найдено напряженное состояние пластического материала при течении в плоском щелевом канале с сужением при условии текучести Мизеса. Соответствующее этому напряженному состоянию поле скорости позже получил Хилл [2]. Первое решение для осесимметричного канала было получено Соколовским [3]. Для общего случая по-

верхности текучести, не зависящей от среднего напряжения, Шилд [4] получил систему обыкновенных дифференциальных уравнений, задающих решение осесимметричной задачи экструзии идеально-пластического материала. В этой же работе приведено и полное решение в рамках гипотезы Хаара–Кармана (для напряженного состояния, соответствующего одному из ребер призмы Треска). Среди других работ, посвященных течению несжимаемой среды, отметим также [5–8].

Аналогичные задачи для сжимаемых сред в целом сложнее. Поверхности текучести для пластически сжимаемых сред в наиболее простом виде задаются функциями, которые включают среднее напряжение и содержат две материальные константы. Среди них широко известны пирамида Мора–Кулона, поверхности Мизеса–Шлейхера, Друкера–Прагера, а также поверхность, соответствующая эллиптическому условию текучести Грина [9] с постоянными коэффициентами. Известно, что указанные выше классические двухконстантные условия текучести в ассоциированной формулировке пластического течения приводят к результатам, плохо согласующимся с экспериментальными данными в части предсказанного изменения объема. Тем не менее, именно для этих условий известны замкнутые решения в сферической геометрии (пригодные, среди прочего, для описания движения материала в осесимметричном сужающемся абсолютно гладком канале). Здесь укажем работы [10] (условие Мизеса–Шлейхера), [11] (условия Мора–Кулона и Друкера–Прагера), а также [12]. В последней работе использовано условие Грина с постоянными коэффициентами, которое приводит к статической определимости задачи о радиальной деформации полый сферы.

В более сложных моделях неизохорной пластичности используются функциональные коэффициенты при инвариантах тензора напряжений в уравнении поверхности текучести (пластические модули), явно зависящие от безразмерной относительной плотности пористого материала. К числу таких относятся модель Гурсона [13], а также ряд моделей типа Грина [14–19], нашедших применение для описания прессования порошков и деформирования различных пористых тел. Из указанных моделей наиболее часто используются эмпирическая модель [15] и полученная вариационными методами модель [18]. Для модели Гурсона известно приближенное аналитическое решение (первого порядка аппроксимации по пористости) о движении среды в коническом канале без трения [20]. Для модели Грина задача о движении среды в коническом канале сведена [21] к интегрированию связанной системы из двух дифференциальных уравнений первого порядка, получены численные результаты. В этой работе было рассмотрено течение в канале с шероховатыми стенками (сухое трение по закону Кулона–Амонтона), использована приближенная постановка задачи по методу Хилла. Известно также полное аналитическое решение задачи в той же постановке, но с использованием обобщения критерия Треска на некомпактные материалы [22]. Другие варианты подобного обобщения есть в работе [23].

Условия текучести в модели Грина и в модели Гурсона при нулевой пористости переходят в условие Мизеса, и в этом смысле являются его обобщением для некомпактных материалов. Возникает естественный вопрос – может ли пластическое течение, описываемое этими моделями, перейти в течение несжимаемого материала Мизеса при некоторой конечной степени редукции канала? Этот вопрос не исследовался ни в одной из указанных работ. Тем не менее, несложно сделать вывод, что решение [20] не допускает перехода к полному уплотнению пористого материала, а решение [22] допускает переход материала в состояние несжимаемости, в котором пластические свойства материала описываются моделью Треска, однако только при определенном условии на пластические модули. В настоящей работе получены в аналитическом виде такие условия для модели Грина.

В большинстве указанных выше работ рассматривались либо течения несжимаемой среды в каналах с шероховатыми стенками, либо течения сжимаемых сред в гладких каналах. Из известных аналитических результатов единственный раз [22] рассмотрено

течение сжимаемой среды при наличии кулоновского трения, при этом использовано кусочно-линейное условие текучести, приводящее к статически определимой задаче. В настоящей работе рассматривается стационарное пластическое течение сжимаемой среды с гладким условием текучести в условиях максимального трения на контактной поверхности. Получены приближенные аналитические решения проблемы, которые представляют собой двустороннюю оценку решения.

1. Постановка задачи и математическая модель процесса. Рассмотрим медленное стационарное движение пористого материала через конический канал с углом развертки $2\varphi_0$ (рис. 1, а). Задача об экструзии через цилиндрический канал (рис. 1, б) также может быть рассмотрена в указанной постановке, если предположить, что границей мертвой зоны материала является коническая поверхность [24]. В последнем случае угол развертки этой поверхности неизвестен и может быть установлен либо экспериментально, либо аналитически из условия минимума рассеянной энергии деформации. Будем пренебрегать обратимыми деформациями среды, считая, что пористый материал деформируется пластически только в сужающейся части канала, где полагается выполненным условие текучести Грина

$$\Phi = (\sigma/\sigma_s)^2 + (\tau/\tau_s)^2 - 1 = 0, \quad (1.1)$$

и ассоциированный закон течения

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \Lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (1.2)$$

где функции безразмерной относительной плотности среды $\tau_s(\rho)$ и $\sigma_s(\rho)$ есть сдвиговой и объемный пластические модули; $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши, $\sigma = \text{tr } \boldsymbol{\sigma}/3$ — среднее напряжение, τ — интенсивность касательных напряжений, $\tau^2 = (\text{tr } \boldsymbol{\sigma}^2)/2 - (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2/6$; Λ — скалярный пластический множитель; $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор скорости деформации, $2\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \otimes \mathbf{v})^T + (\nabla \otimes \mathbf{v})$, $\mathbf{v}$ — скорость точек среды, ∇ — оператор Гамильтона.

Ассоциированный с поверхностью текучести (1.1) закон (1.2) позволяет, после необходимых преобразований [25], получить связь тензоров $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\tau_s} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon} + \vartheta \mathbf{1} \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}^2 + \vartheta \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}^2}}, \quad (1.3)$$

где $\mathbf{1}$ — единичный тензор, $\vartheta = (\sigma_s/\tau_s)^2/2 - 1/3$.

Безразмерная плотность среды связана со скоростью материальных точек уравнением неразрывности, которое в стационарном случае имеет вид

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.4)$$

Введем сферическую систему координат $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta)$ с центром в вершине O конической поверхности S (рис. 1). Сферическая поверхность $r = r_0$ соответствует входу в канал, $r = r_1$ — выходу из канала. Будем предполагать, что движение материала радиальное в сферической системе координат, что соответствует данным экспериментов, например, [26].

Компоненты тензора скорости деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$ имеют вид

$$\varepsilon_{rr} = dv_r/dr, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\theta\theta} = v_r/r \quad (1.5)$$

Согласно соотношениям (1.3) и (1.5) тензор напряжений Коши диагональный с компонентами σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}$.

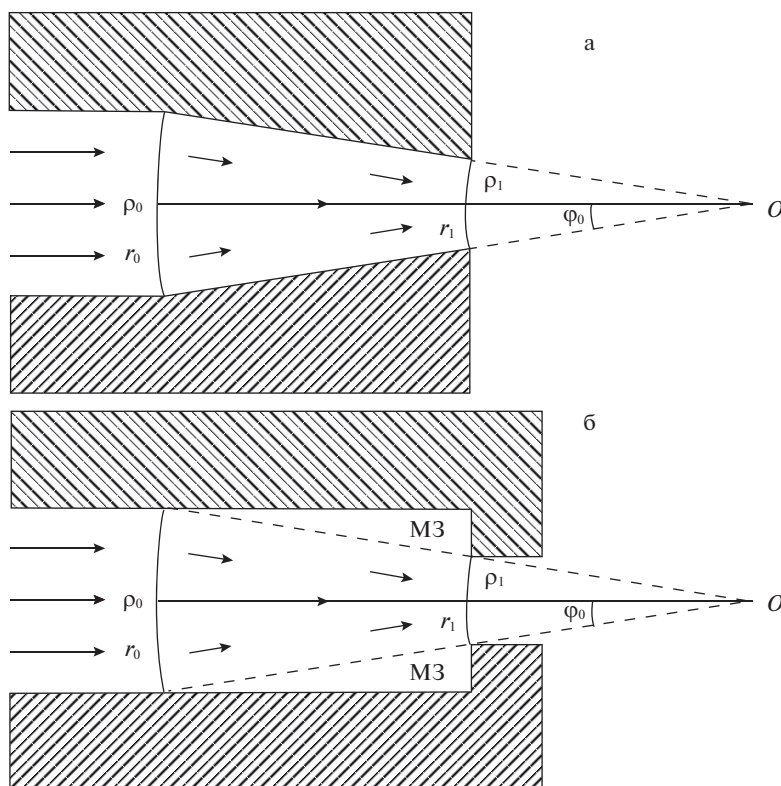


Рис. 1. Схема процесса экструзии через конический (а) и цилиндрический (б) канал; МЗ – мертвая зона материала.

Используем приближенное уравнение равновесия [22]

$$r \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + 2(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \gamma \cot\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) \tau = 0. \quad (1.6)$$

Здесь $\gamma = 0$ соответствует гладкому каналу, $\gamma = 1$ – шероховатому; τ – максимальное касательное напряжение, допустимое условием пластичности (1.1). Полагается, что влияние силы трения в шероховатом канале ограничивается слоем малой толщины вблизи контактной поверхности. В этой пристеночной зоне происходит интенсивное сдвиговое деформирование, касательное напряжение в этой области близко к своему максимально возможному значению и быстро убывает с удалением от стенок канала.

2. Двусторонняя оценка решения. Обозначим $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = \Delta \geq 0$. С учетом связи (1.3) и $\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi} \geq 0$ имеет место соотношение

$$\Delta^2 = \frac{3\tau_s^2}{1 + \Re^2}, \quad \Re = -\frac{\sqrt{3}\sigma_s \varepsilon_{rr} + 2\varepsilon_{\varphi\varphi}}{2\tau_s \varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}} \geq 0. \quad (2.1)$$

В области пластического течения выполняется условие (1.1), следовательно, учитывая $\Delta = \sqrt{3}\tau$ и $\sigma = \sigma_{rr} - 2\Delta/3 < 0$, имеем

$$\sigma_{rr} = \frac{2}{3} \Delta - \sigma_s \left(1 - \left(\frac{\Delta}{\sqrt{3} \tau_s} \right)^2 \right)^{1/2} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \tau_s - \sigma_s \mathfrak{N} \right) (1 + \mathfrak{N}^2)^{-1/2}, \quad (2.2)$$

давление $|\sigma_{rr}|$ ограничено сверху величиной σ_s , максимальное значение реализуется при $\mathfrak{N} \rightarrow +\infty$, чему соответствует состояние гидростатического сжатия.

Уравнение (1.4) позволяет получить соотношение $v_r \rho r^2 = \text{const}$. Тогда

$$\frac{\varepsilon_{rr} + 2\varepsilon_{\varphi\varphi}}{\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}} = \frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \left(3 + \frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right)^{-1} \quad (2.3)$$

Уравнение (1.6) с учетом соотношений (2.1), (2.2) и (2.3) замыкается относительно плотности и принимает вид:

$$\rho \frac{d\mathfrak{N}}{d\rho} = - \left(1 + \mathfrak{N}^2 \right) \left[\frac{\alpha}{\mathfrak{N}} + \left(\mathfrak{N} \rho \frac{d\sigma_s}{d\rho} - \rho \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{d\tau_s}{d\rho} \right) \left(\sigma_s + \frac{2}{\sqrt{3}} \tau_s \mathfrak{N} \right)^{-1} \right] \quad (2.4)$$

$$\alpha = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{3}} \text{ctg} \frac{\varphi_0}{2}$$

Пространственное распределение плотности с учетом соотношений (2.1) и (2.3) определяется уравнением вида:

$$\int_{\rho(r_{BC})}^{\rho} \left(1 + \frac{\sqrt{3} \sigma_s}{2 \tau_s} \frac{1}{\mathfrak{N}} \right) \frac{d\rho}{\rho} = -3 \ln \frac{r}{r_{BC}} \quad (2.5)$$

Краевое условие для уравнения (2.5) заключается в задании локальной плотности на сферической поверхности $r = r_{BC}$. Краевое условие для замыкания (2.4) может быть получено из соотношения (2.2) по значению давления на входе или выходе канала. Наиболее простым является случай, когда давление и плотность заданы на одной и той же сферической поверхности.

Имеет место следующая двусторонняя оценка правой части уравнения (2.4):

$$0 \geq - \left(1 + \mathfrak{N}^2 \right) \frac{\alpha}{\mathfrak{N}} \geq - \left(1 + \mathfrak{N}^2 \right) \left[\frac{\alpha}{\mathfrak{N}} + \left(\mathfrak{N} \rho \frac{d\sigma_s}{d\rho} - \rho \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{d\tau_s}{d\rho} \right) \left(\sigma_s + \frac{2}{\sqrt{3}} \tau_s \mathfrak{N} \right)^{-1} \right] \geq$$

$$\geq - \left(1 + \mathfrak{N}^2 \right) \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{N}} + \mathfrak{N} \frac{\rho}{\sigma_s} \frac{d\sigma_s}{d\rho} \right)$$

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\rho \frac{d\mathfrak{N}}{d\rho} = - \left(1 + \mathfrak{N}^2 \right) \frac{\alpha}{\mathfrak{N}} \quad (2.6)$$

соответствует модели Грина с постоянными коэффициентами $\sigma_s = \text{const}$, $\tau_s = \text{const}$. Таким образом, известное решение [12] является предельным для общего условия Грина с коэффициентами модели, зависящими от плотности, в том смысле, что оно составляет одну из границ двусторонней оценки, которая представлена в настоящей работе. Уравнение (2.6) имеет решение

$$\mathfrak{N} = \left(C \rho^{-2\alpha} - 1 \right)^{1/2} \quad (2.7)$$

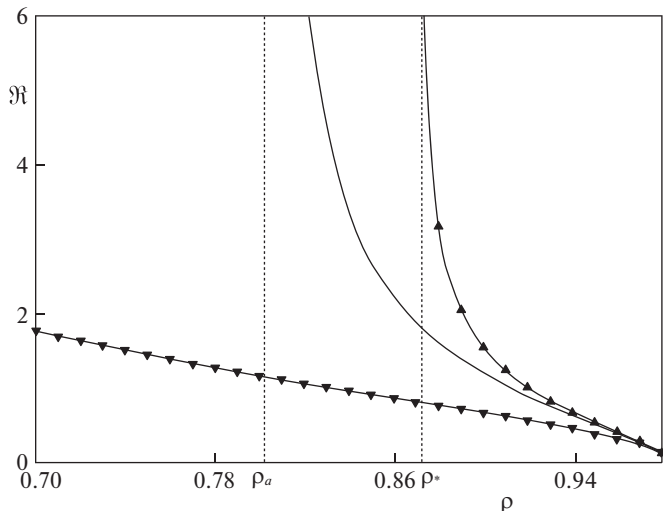


Рис. 2. Функция $\Re(\rho)$: $\blacktriangle$ – по (2.8), $\blacktriangledown$ – по (2.7), сплошная линия – численное интегрирование (2.4). Использована модель [17] и параметры $\rho_1 = 0.98$, $\gamma = 1$ (закон максимального трения), $\varphi_0 = \pi/6$.

Нелинейное дифференциальное уравнение

$$\rho \frac{d\Re}{d\rho} = - \left(1 + \Re^2 \right) \left(\frac{\alpha}{\Re} + \Re \frac{\rho}{\sigma_s} \frac{d\sigma_s}{d\rho} \right)$$

линеаризуется заменой зависимой переменной $\sigma_s^2 / (1 + \Re^2)$ и имеет решение

$$\Re = \left(\left(1 + 2\alpha\sigma_s^{-2}\rho^{2\alpha} \int_C^{\rho} \sigma_s^2 \rho^{-(2\alpha+1)} d\rho \right)^{-1} - 1 \right)^{1/2} \quad (2.8)$$

В выражениях (2.7), (2.8) C – константы интегрирования.

3. Достаточные условия уплотнения до заданной плотности. Далее мы будем рассматривать следующий вариант постановки задачи: на выходе из канала задано целевое значение плотности, при этом противодавление в канале отсутствует: $\rho(r_1) = \rho_1$, $\sigma_{rr}(\rho_1) = 0$. Отсюда, согласно соотношению (2.2)

$$\Re_1 = \Re(\rho_1) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\tau_s(\rho_1)}{\sigma_s(\rho_1)} \quad (3.1)$$

На рис. 2 приведен график численного решения уравнения (2.4), а также графики аналитических оценок (2.7) и (2.8) при краевом условии (3.1). Используются функциональные коэффициенты [18] модели Грина

$$\left(\frac{\sigma_s}{\kappa} \right)^2 = \frac{4}{3} \frac{\rho^2}{1 - \rho}, \quad \left(\frac{\tau_s}{\kappa} \right)^2 = \frac{3\rho^2}{5 - 2\rho},$$

где κ – предел текучести на сдвиг материала каркаса.

У верхней оценки (2.8) скорости изменения $\mathfrak{N}(\rho)$ присутствует качественная особенность, которая характерна и для решения исходного уравнения (2.4), а именно — наличие вертикальной асимптоты $\rho = \rho_*$, где ρ_* есть корень уравнения

$$\mathfrak{N}_1^2 (1 + \mathfrak{N}_1^2)^{-1} \rho_1^{-2\alpha} \sigma_s^2 (\rho_1) + 2\alpha \int_{\rho_*}^{\rho_1} \sigma_s^2 \rho^{-(2\alpha+1)} d\rho = \rho_*^{-2\alpha} \sigma_s^2 (\rho_*)$$

Поскольку точная асимптота $\rho = \rho_a$ решения (2.4), соответствующая $\sigma_{rr} = -\sigma_s$, неизвестна, то значение ρ_* может быть использовано как верхняя оценка ρ_a . Пористый материал с начальной плотностью $\rho \geq \rho_*(\alpha, \rho_1)$ гарантированно можно подвергнуть обработке прямой экструзией в канале с заданной характеристикой α до заданной плотности ρ_1 . При этом для определения достаточной степени редукции канала $x_* = \ln(r_0/r_1)$, $x_* = x_*(\alpha, \rho_1)$ следует воспользоваться уравнением (2.5) с функцией $\mathfrak{N}(\rho)$ в виде (2.7) с учетом краевого условия (3.1):

$$x_* = \frac{1}{3} \int_{\rho_*}^{\rho_1} \left(1 + \frac{\sqrt{3} \sigma_s}{2 \tau_s} \left((\mathfrak{N}_1^2 + 1) \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^{2\alpha} - 1 \right)^{-1/2} \right) \frac{d\rho}{\rho}$$

На рис. 3, а и б приведены изолинии $\rho_*(\phi_0, \rho_1)$. На рис. 4, а и б приведены изолинии $x_*(\phi_0, \rho_1)$. Пористые материалы с низкой начальной плотностью могут быть обработаны в шероховатом канале с большим углом развертки (в предельном случае — в абсолютно гладком канале с произвольным углом развертки, чему соответствует $\alpha = 1$) при достаточно высоких значениях степени редукции.

Замечание (возможность полного уплотнения). Так как $\lim_{\rho \rightarrow 1} \sigma_s = +\infty$, то на сферической поверхности, на которой произошло полное уплотнение материала, при конечном противодавлении согласно соотношению (2.2) должно выполняться $\mathfrak{N} = 0$. При этом выражение $\sigma_s \mathfrak{N} (1 + \mathfrak{N}^2)^{-1/2}$ должно быть конечным. Тогда используя верхнюю оценку (2.8), имеем

$$0 < \lim_{\rho \rightarrow 1} 2\alpha \rho^{2\alpha} \int_C^{\rho} \sigma_s^2 \rho^{-(2\alpha+1)} d\rho < \lim_{\rho \rightarrow 1} \sigma_s^2 \mathfrak{N}^2 (1 + \mathfrak{N}^2)^{-1} < +\infty$$

Последнее соотношение по признаку Абеля требует

$$0 < \int_C^1 \sigma_s^2 d\rho < +\infty, \quad \forall C \in (0, 1]$$

Из известных моделей типа Грина этому условию удовлетворяют только модели [9, 19], где объемный пластический модуль имеет вид $(\sigma_s/\kappa)^2 = 4/3 \ln^2(1 - \rho)$.

4. Сравнение с экспериментальными данными. Известны [24] экспериментальные данные о процессе экструзии заготовки из спеченного порошка меди через канал, схематично представленный на рис. 1, б. В серии экспериментов для трех различных значений изменения площади поперечного сечения заготовки зафиксированы угол мертвой зоны материала и значение относительной плотности на выходе из канала, а также давление экструзии (см. табл. 1). Начальная относительная плотность материала в эксперименте $\rho_0 = 0.9$.

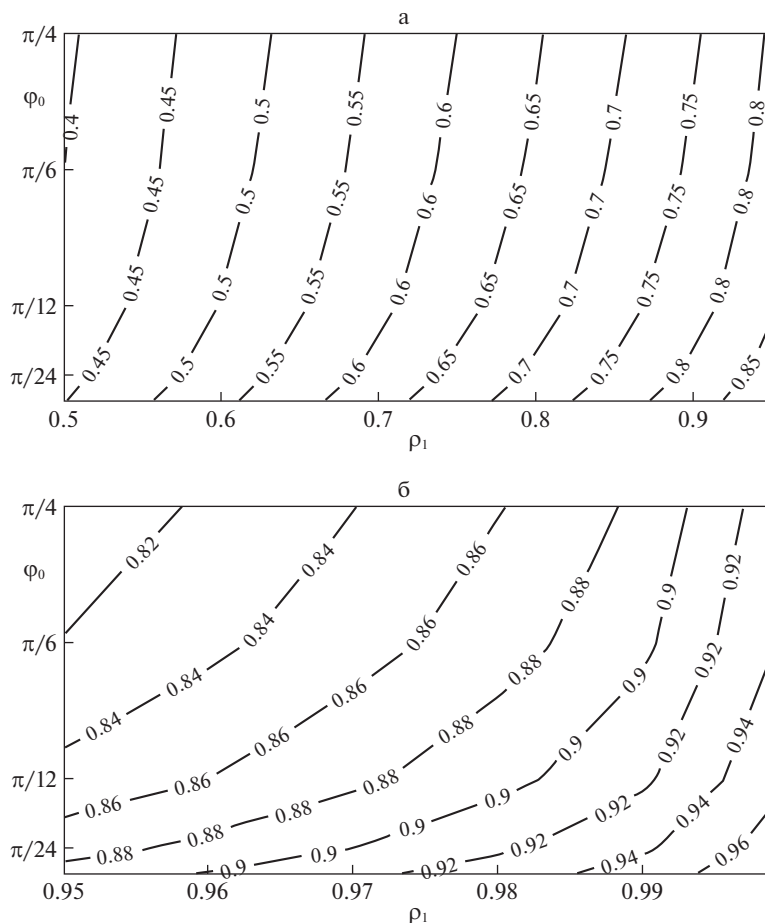


Рис. 3. Изолинии $\rho_*(\varphi_0, \rho_1)$ – плотность материала на входе в шероховатый канал с полным углом развертки $2\varphi_0$, достаточная для его уплотнения до заданной величины плотности ρ_1 на выходе из канала.

На рис. 5 и 6 приведено сравнение указанных экспериментальных данных с численным решением (2.4), а также с аналитическими оценками (2.7) и (2.8). В расчетах в качестве исходных данных использованы экспериментальные значения φ_0 , ρ_0 и ρ_1 ; расчетное значение $1 - (\eta_1/\eta_0)^2$ получено по (2.5), расчетное значение $-(\sigma_{rr}/\kappa)|_{\rho=\rho_0}$ получено по формуле (2.2).

Таблица 1

$1 - (\eta_1/\eta_0)^2$	φ_0	ρ_1	$-(\sigma_{rr}/\kappa) _{\rho=\rho_0}$
0.19	30°	0.936	0.68–0.72
0.36	48°	0.958	1.05–1.13
0.51	58°	0.977	1.42–1.58

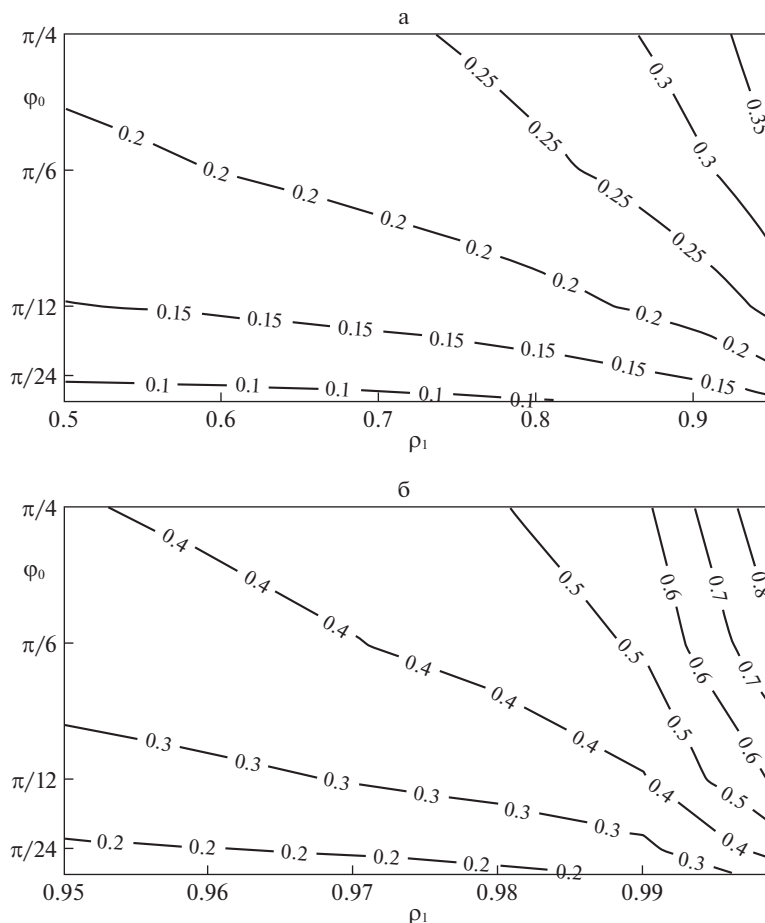


Рис. 4. Изолинии $x_*(\varphi_0, \rho_1)$ – степень редукции $\ln(\rho_0/\rho_1)$ шероховатого канала с полным углом развертки $2\varphi_0$, достаточная для уплотнения пористого материала, который на входе в канал имеет плотность $\rho_*(\varphi_0, \rho_1)$, до заданной величины плотности ρ_1 на выходе из канала.

Численное решение достаточно точно соответствует экспериментальным данным, при этом аналитическая оценка (2.8) хорошо аппроксимирует численное решение. Аналитическая оценка (2.7) дает близкие результаты для изменения площади поперечного сечения заготовки, однако, по всей видимости, не может быть использована для оценки давления экструзии с достаточной точностью.

Заключение. Рассмотрено стационарное течение сжимаемой среды с условием пластичности Грина в коническом канале с шероховатыми (с выполнением на контактной поверхности законом максимального трения) или гладкими стенками. Полученные результаты также остаются справедливыми для экструзии через цилиндрический канал с резко меняющимся сечением.

Исходная задача сведена к интегрированию одного нелинейного ОДУ и вычислению определенного интеграла. Получены двусторонние оценки решения этой системы уравнений и проведено их сравнение с экспериментальными результатами для ве-

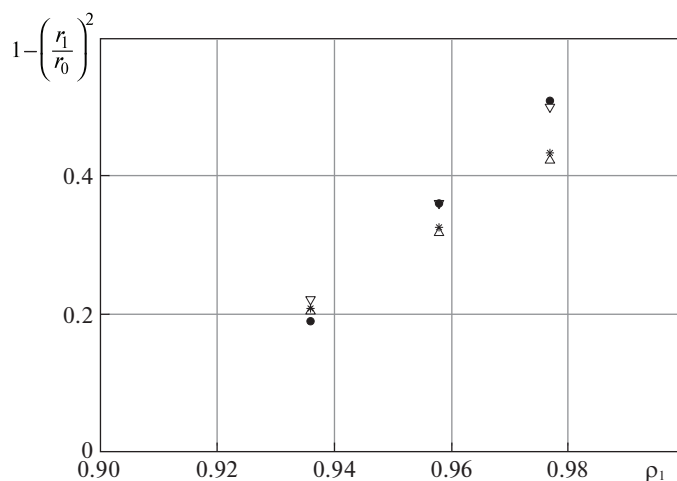


Рис. 5. Изменение площади поперечного сечения заготовки: ● — экспериментальные данные [24], * — численный расчет, ▽ — с использованием аналитической оценки (2.7), Δ — с использованием аналитической оценки (2.8).

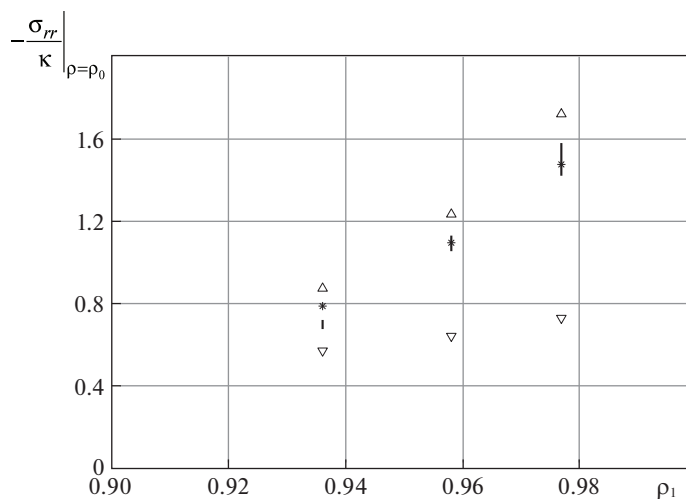


Рис. 6. Давление экструзии: ■ — экспериментальные данные [24], * — численный расчет, ▽ — с использованием аналитической оценки (2.7), Δ — с использованием аналитической оценки (2.8).

личины давления экструзии и изменения площади поперечного сечения заготовки при заданной начальной и конечной пористости заготовки. Нижняя оценка давления, соответствующая постоянным пластическим модулям модели Грина, плохо согласуется с экспериментальными данными, в то время как верхняя оценка приемлемо описывает эксперимент.

Аналитические результаты могут быть использованы для оценки угла мертвой зоны материала в цилиндрическом канале посредством минимизации рассеянной мощности деформирования.

Полученная в работе аналитическая оценка подвижной особой точки системы уравнений процесса позволяет указать для произвольной модели типа Грина, какой выбор начального значения пористости материала и степени редукции канала гарантировано должен обеспечить уплотнение материала до заданной остаточной пористости. Проведенный анализ показывает, в частности, что полное уплотнение материала в коническом канале может быть реализовано только в рамках моделей с логарифмическим ростом объемного пластического модуля.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00189.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nadai A.* Über die Gleit- und Verzweigungsflächen einiger Gleichgewichtszustände bildsamer Massen und die Nachspannungen bleibend verzerrter Körper // *Zeitschrift für Physik*. 1924. V. 30. P. 106–138.
<https://doi.org/10.1007/BF01331828>
2. *Hill R.* *Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford: The Clarendon Press, 1950.
3. *Соколовский В.В.* Плоское и осесимметричное равновесие пластической массы между жесткими стенками // *ПММ*. 1950. Т. 14. Вып. 1. С. 75–92.
4. *Shield R.T.* Plastic flow in a converging conical channel // *J. Mech.&Phys. Solids*. 1955. V. 3. P. 246–258.
[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(55\)90035-1](https://doi.org/10.1016/0022-5096(55)90035-1)
5. *Ivlev D.D., Romanov A.V.* On the generalization of Prandtl's solution in spherical coordinates // *JAMM*. 1982. V. 46. № 5. P. 697–699.
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(82\)90021-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(82)90021-1)
6. *Alexandrov S., Barlat F.* Modeling axisymmetric flow through a converging channel with an arbitrary yield condition // *Acta Mechanica*. 1999. V. 133. P. 57–68.
<https://doi.org/10.1007/BF01179010>
7. *Bonitskaya O.V., Krasavin R.V., Markin A.A.* The steady axisymmetric flow of ideally plastic materials in a conical channel // *JAMM*. 2010. V. 74. № 4. P. 494–500.
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.09.016>
8. *Georgiyevskii D.V.* Extrusion of a plastic material from a circular sector with a small apex angle and a sink at the vertex // *JAMM*. 2013. V. 77. № 1. P. 109–114.
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.04.014>
9. *Green R.J.* A plasticity theory for porous solids // *Int. J. Mech. Sci.* 1972. V. 14. P. 215–224.
[https://doi.org/10.1016/0020-7403\(72\)90063-X](https://doi.org/10.1016/0020-7403(72)90063-X)
10. *Monchiet V., Kondo D.* Exact solution of a plastic hollow sphere with a Mises – Schleicher matrix // *Int. J. Engng. Sci.* 2012. V. 51. P. 168–178.
<https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2011.10.007>
11. *Thore P., Pastor F., Pastor J., Kondo D.* Closed-form solutions for the hollow sphere model with Coulomb and Drucker – Prager materials under isotropic loadings // *Comptes Rendus Mecanique*. 2009. V. 337. P. 260–267.
<https://doi.org/10.1016/j.crme.2009.06.030>
12. *Shen W.Q., Shao J.F., Dormieux L., Kondo D.* Approximate criteria for ductile porous materials having a Green type matrix: Application to double porous media // *Comput. Mater. Sci.* 2012. V. 62. P. 189–194.
<https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2012.05.021>
13. *Gurson A.L.* Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I – Yield criteria and flow rules for porous ductile media // *Trans. ASME. J. Engng. Mater.&Technol.* 1977. V. 99. P. 2–15.
<https://doi.org/10.1115/1.3443401>
14. *Kuhn H.A., Downey C.L.* Deformation characteristics and plasticity theory of sintered powder materials // *Int. J. Powder Metallurgy*. 1971. V. 7. № 1. P. 15–25.
15. *Shima S., Oyane M.* Plasticity theory for porous metals // *Int. J. Mech. Sci.* 1976. V. 18. P. 285–291.
[https://doi.org/10.1016/0020-7403\(76\)90030-8](https://doi.org/10.1016/0020-7403(76)90030-8)

16. *Corapcioglu Y., Uz T.* Constitutive equations for plastic deformation of porous materials // *Powder Technol.* 1978. V. 21. № 2. P. 269–274.
[https://doi.org/10.1016/0032-5910\(78\)80095-3](https://doi.org/10.1016/0032-5910(78)80095-3)
17. *Skorokhod V.V., Turchinskii L.I.* Condition of plasticity of porous bodies // *Soviet Powder Metallurgy and Metal Ceramics.* 1978. V. 17. № 11. P. 880–883.
<https://doi.org/10.1007/BF00792461>
18. *Ponte Castaneda P.* The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites // *J. Mech.&Phys. Solids.* 1991. V. 39. № 1. P. 45–71.
[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(91\)90030-R](https://doi.org/10.1016/0022-5096(91)90030-R)
19. *Michel J.C., Suquet P.* The constitutive law of nonlinear viscous and porous materials // *J. Mech.&Phys. Solids.* 1992. V. 40. № 4. P. 783–812.
[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(92\)90004-L](https://doi.org/10.1016/0022-5096(92)90004-L)
20. *Durban D., Mear M.E.* Asymptotic solution for extrusion of sintered powder metals // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1991. V. 58. P. 582–584.
<https://doi.org/10.1115/1.2897226>
21. *Alexandrov S., Chesnikova O., Pirumov A.* An approximate solution for axisymmetric extrusion of porous material // *J. Technol. Plasticity.* 2007. V. 32. № 1–2. P. 13–27.
22. *Alexandrov S.E., Druyanov B.A.* Investigating the process of the steady extrusion of a compacted material // *J. Appl. Mech.&Techn. Phys.* 1990. V. 31. № 4. P. 645–649.
<https://doi.org/10.1007/BF00851344>
23. *Revil-Baudard B., Cazacu O.* Role of the plastic flow of the matrix on yielding and void evolution of porous solids: Comparison between the theoretical response of porous solids with Tresca and von Mises matrices // *Mech. Res. Commun.* 2014. V. 56. P. 69–75.
<https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2013.11.008>
24. *Oh H.-K., Phark J.-W.* A study of the axi-symmetric forward extrusion of porous metal through a square die // *J. Mech. Working Technol.* 1987. V. 15. P. 119–130.
[https://doi.org/10.1016/0378-3804\(87\)90029-5](https://doi.org/10.1016/0378-3804(87)90029-5)
25. *Itskov M.* Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers. With Applications to Continuum Mechanics. Cham: Springer, 2015.
26. *Crosta G.B., Powers P.S., Savage W.Z.* A study of flow development in mass movements of granular materials // *Dept. of the Interior, U.S. Geological Survey. Open file report* 91–383. 1991.

Approximate Analysis of Extrusion Process for Green Type Porous Material

G. M. Sevastyanov^{a,#} and A. M. Sevastyanov^{b,##}

^a *Institute of Machinery and Metallurgy of KhFRC FEBRAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia*

^b *Amur State University of Humanities and Pedagogy, Komsomolsk-on-Amur, Russia*

[#]*e-mail: akela.86@mail.ru*

^{##}*e-mail: mamiia20@mail.ru*

The stationary motion of an ideally plastic compressible material in a converging conical channel is considered. It is assumed that the material obeys Green yield condition and normality rule. It is assumed that the maximum friction law is fulfilled on the contact surface of the material with the channel wall. The Cauchy stress tensor as a function of the local density of the medium is determined by solving an ordinary nonlinear differential equation of the first order, and finding the density is reduced to calculating a definite integral. Analytical dependences, which specify a two-sided estimate of the density and pressure in the channel, are obtained for an arbitrary plastic moduli. The analytical results are compared with the available experimental data.

Keywords: rigid-plastic analysis, porous materials, Green yield condition, extrusion, plastic compressibility

REFERENCES

1. *Nadai A.* Über die Gleit- und Verzweigungsflächen einiger Gleichgewichtszustände bildsamer Massen und die Nachspannungen bleibend verzerrter Körper // *Zeitschrift für Physik*, 1924, vol. 30, pp. 106–138.
<https://doi.org/10.1007/BF01331828>
2. *Hill R.* Mathematical Theory of Plasticity. Oxford: The Clarendon Press, 1950.
3. *Sokolovskiy V.V.* Plane and axisymmetric equilibrium of plastic mass between rigid walls // *JAMM*, 1950, vol. 14, no. 1, pp. 75–92. (in Russian)
4. *Shield R.T.* Plastic flow in a converging conical channel // *J. Mech.&Phys. Solids*, 1955, vol. 3, pp. 246–258.
[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(55\)90035-1](https://doi.org/10.1016/0022-5096(55)90035-1)
5. *Ivlev D.D., Romanov A.V.* On the generalization of Prandtl's solution in spherical coordinates // *JAMM*, 1982, vol. 46, no. 5, pp. 697–699.
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(82\)90021-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(82)90021-1)
6. *Alexandrov S., Barlat F.* Modeling axisymmetric flow through a converging channel with an arbitrary yield condition // *Acta Mechanica*, 1999, vol. 133, pp. 57–68.
<https://doi.org/10.1007/BF01179010>
7. *Bonitskaya O.V., Krasavin R.V., Markin A.A.* The steady axisymmetric flow of ideally plastic materials in a conical channel // *JAMM*, 2010, vol. 74, no. 4, pp. 494–500.
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.09.016>
8. *Georgiyevskii D.V.* Extrusion of a plastic material from a circular sector with a small apex angle and a sink at the vertex // *JAMM*, 2013, vol. 77, no. 1, pp. 109–114.
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.04.014>
9. *Green R.J.* A plasticity theory for porous solids // *Int. J. Mech. Sci.*, 1972, vol. 14, pp. 215–224.
[https://doi.org/10.1016/0020-7403\(72\)90063-X](https://doi.org/10.1016/0020-7403(72)90063-X)
10. *Monchiet V., Kondo D.* Exact solution of a plastic hollow sphere with a Mises – Schleicher matrix // *Int. J. Engng. Sci.*, 2012, vol. 51, pp. 168–178.
<https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2011.10.007>
11. *Thore P., Pastor F., Pastor J., Kondo D.* Closed-form solutions for the hollow sphere model with Coulomb and Drucker – Prager materials under isotropic loadings // *Comptes Rendus Mecanique*, 2009, vol. 337, pp. 260–267.
<https://doi.org/10.1016/j.crme.2009.06.030>
12. *Shen W.Q., Shao J.F., Dormieux L., Kondo D.* Approximate criteria for ductile porous materials having a Green type matrix: Application to double porous media // *Comput. Mater. Sci.*, 2012, vol. 62, pp. 189–194.
<https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2012.05.021>
13. *Gurson A.L.* Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I – Yield criteria and flow rules for porous ductile media // *Trans. ASME. J. Engng. Mater.&Technol.*, 1977, vol. 99, pp. 2–15.
<https://doi.org/10.1115/1.3443401>
14. *Kuhn H.A., Downey C.L.* Deformation characteristics and plasticity theory of sintered powder materials // *Int. J. Powder Metallurgy*, 1971, vol. 7, no. 1, pp. 15–25.
15. *Shima S., Oyane M.* Plasticity theory for porous metals // *Int. J. Mech. Sci.*, 1976, vol. 18, pp. 285–291.
[https://doi.org/10.1016/0020-7403\(76\)90030-8](https://doi.org/10.1016/0020-7403(76)90030-8)
16. *Corapcioglu Y., Uz T.* Constitutive equations for plastic deformation of porous materials // *Powder Technol.*, 1978, vol. 21, no. 2, pp. 269–274.
[https://doi.org/10.1016/0032-5910\(78\)80095-3](https://doi.org/10.1016/0032-5910(78)80095-3)
17. *Skorokhod V.V., Turchinskii L.I.* Condition of plasticity of porous bodies // *Soviet Powder Metallurgy and Metal Ceramics*, 1978, vol. 17, no. 11, pp. 880–883.
<https://doi.org/10.1007/BF00792461>
18. *Ponte Castaneda P.* The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites // *J. Mech.&Phys. Solids*, 1991, vol. 39, no. 1, pp. 45–71.
[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(91\)90030-R](https://doi.org/10.1016/0022-5096(91)90030-R)

19. *Michel J.C., Suquet P.* The constitutive law of nonlinear viscous and porous materials // *J. Mech.&Phys. Solids*, 1992, vol. 40, no. 4, pp. 783–812.
[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(92\)90004-L](https://doi.org/10.1016/0022-5096(92)90004-L)
20. *Durban D., Mear M.E.* Asymptotic solution for extrusion of sintered powder metals // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, 1991, vol. 58, pp. 582–584.
<https://doi.org/10.1115/1.2897226>
21. *Alexandrov S., Chesnikova O., Pirumov A.* An approximate solution for axisymmetric extrusion of porous material // *J. Technol. Plasticity*, 2007, vol. 32, no. 1–2, pp. 13–27.
22. *Alexandrov S.E., Druyanov B.A.* Investigating the process of the steady extrusion of a compacted material // *J. Appl. Mech.&Techn. Phys.*, 1990, vol. 31, no. 4, pp. 645–649.
<https://doi.org/10.1007/BF00851344>
23. *Revil-Baudard B., Cazacu O.* Role of the plastic flow of the matrix on yielding and void evolution of porous solids: Comparison between the theoretical response of porous solids with Tresca and von Mises matrices // *Mech. Res. Commun.*, 2014, vol. 56, pp. 69–75.
<https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2013.11.008>
24. *Oh H.-K., Phark J.-W.* A study of the axi-symmetric forward extrusion of porous metal through a square die // *J. Mech. Working Technol.*, 1987, vol. 15, pp. 119–130.
[https://doi.org/10.1016/0378-3804\(87\)90029-5](https://doi.org/10.1016/0378-3804(87)90029-5)
25. *Itskov M.* Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers. With Applications to Continuum Mechanics. Cham: Springer, 2015.
26. *Crosta G.B., Powers P.S., Savage W.Z.* A study of flow development in mass movements of granular materials // Dept. of the Interior, U.S. Geological Survey. Open file report 91–383. 1991.

**ПАМЯТИ АЛЕКСАНДРА АРОНОВИЧА ЗЕВИНА
(4.10.1939–26.02.2020)**



26 февраля 2020 года после непродолжительной болезни ушел из жизни доктор физико-математических наук, профессор, автор многочисленных публикаций в нашем журнале Александр Аронович Зевин.

За время своей научной деятельности он получил замечательные результаты при решении локальных и нелокальных задач качественной теории нелинейных дифференциальных уравнений и теории устойчивости.

В частности, им были выведены нелокальные уточненные оценки областей устойчивости параметрических колебаний. Для нелинейных гамильтоновых систем с параметрическим возбуждением им предложен нелокальный метод качественного исследования существования и устойчивости семейств параметрических колебаний, рождающихся из положения равновесия. Для случая критических частот параметрического резонанса им были обобщены известные теоремы Рэля и Журавлева о поведении частот собственных колебаний при изменении жесткости и инерции.

В работах А.А. Зевина получены важные результаты, относящиеся к нелокальным проблемам существования и устойчивости периодических решений гамильтоновых систем, включая так называемые нелинейные нормальные формы колебаний, что позволило обобщить известные результаты А.М. Ляпунова и его последователей. Его исследования, посвященные симметризации функционалов, нашли применение при решении различных задач механики. Отметим также работы, относящиеся к системам с запаздыванием, системам с обратной связью, а также по локализации колебаний, в

частности, по локализации периодических колебаний в дискретных нелинейных системах.

Профессор А.А. Зевин был удостоен премии им. академика НАН Украины А.Н. Динника.

Память о профессоре А.А. Зевине останется в наших сердцах. Его талант, преданность науке и идеи будут вдохновлять не одно поколение ученых, а начатые им исследования найдут продолжение в работах учеников и коллег.

Коллеги Александра Ароновича Зевина, редколлегия и коллектив редакции журнала “Прикладная математика и механика”, выражают глубокие и искренние соболезнования родным и близким А.А. Зевина.