

---

---

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Номер 5, 2022

---

---

Гидродинамические механизмы влияния упругой связи на пропульсивную силу крылового профиля при полудетерминированных колебаниях в потоке вязкой жидкости <i>С. В. Гувернюк, Я. А. Дынников, Г. Я. Дынникова, Т. В. Малахова</i>	3
Генезис аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена в наклонных канавках на структурированных поверхностях <i>С. А. Исеев</i>	13
Развитие возмущений в круглой затопленной струе с двумя модами неустойчивости <i>К. Э. Абдульманов, Н. В. Никитин</i>	25
Устойчивость пограничного слоя при внутреннем выделении тепла и подаче газа через пористую стенку <i>С. А. Гапонов</i>	41
Влияние гравитационного расслоения фаз на оптимальные режимы водогазового воздействия на нефтяные пласты <i>А. А. Чернова, А. А. Афанасьев</i>	51
Идентификация характеристик силового аэродинамического воздействия на колеблющиеся консольно-закрепленные балки <i>А. Н. Нуриев, А. М. Камалутдинов</i>	62
Об акустическом излучении слабо заряженных капель, осциллирующих во внешнем однородном электростатическом поле <i>А. И. Григорьев, Н. Ю. Колбнева, С. О. Ширяева</i>	80
Теплообмен цилиндрического тела с каталитической поверхностью при обтекании потоком дозвуковой неравновесной воздушной плазмы <i>А. И. Брызгалов, С. А. Васильевский, А. Ф. Колесников, С. Е. Якуш</i>	94
Усеченные степенные тела как результат приближенного решения задачи Ньютона о теле с минимальным сопротивлением <i>С. А. Таковицкий</i>	113
Оценка влияния эффекта разрежения на число Пуазейля в длинном кольцевом канале при неполной аккомодации молекул газа <i>О. В. Гермидер, В. Н. Попов</i>	119
Экспериментальное исследование перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный на стреловидной пластине при переменном числе Рейнольдса <i>X. G. Lu, S. H. Yi, L. He, D. D. Gang, and H. L. Ding</i>	129
Модель динамического срыва потока с профиля, применимая при больших углах отклонения закрылка на задней кромке <i>Shi-Long Xing, He-Yong Xu</i>	141

---

---



УДК 532.3:532.5

## ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МЕХАНИЗМЫ ВЛИЯНИЯ УПРУГОЙ СВЯЗИ НА ПРОПУЛЬСИВНУЮ СИЛУ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ ПРИ ПОЛУДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ КОЛЕБАНИЯХ В ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

© 2022 г. С. В. Гувернюк<sup>a,\*</sup>, Я. А. Дынников<sup>a,\*\*</sup>,  
Г. Я. Дынникова<sup>a,\*\*\*</sup>, Т. В. Малахова<sup>a,\*\*\*\*</sup>

<sup>a</sup>МГУ им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

\*E-mail: [guv@imec.msu.ru](mailto:guv@imec.msu.ru)

\*\*E-mail: [yaroslav.dynnikov@gmail.com](mailto:yaroslav.dynnikov@gmail.com)

\*\*\*E-mail: [dyn@imec.msu.ru](mailto:dyn@imec.msu.ru)

\*\*\*\*E-mail: [tatyana.malakhova@gmail.com](mailto:tatyana.malakhova@gmail.com)

Поступила в редакцию 21.05.2022 г.

После доработки 30.05.2022 г.

Принята к публикации 30.05.2022 г.

Представлены результаты исследования колебаний профиля на упругом шарнире, совершающем поперечные синусоидальные колебания в набегающем потоке вязкой несжимаемой жидкости. Движение шарнира задано, а угловые колебания профиля происходят под действием гидродинамических и упругих сил. Задача взаимодействия тела и жидкости решается в полной сопряженной постановке. Жидкость описывается уравнениями Навье–Стокса, численное решение которых строится безсеточным методом вязких вихревых доменов. Моделирование связанного движения сплошной среды и твердого тела достигается путем решения единой линейной системы уравнений, неизвестными величинами в которой являются потоки завихренности с поверхности тела и скорость вращательного движения тела. В результате все неизвестные величины на каждом шаге по времени вычисляются одновременно, минуя традиционную процедуру расщепления шага на гидродинамическую и динамическую части с последующими итерациями. Объяснены механизмы возникновения тяги при таком движении профиля и роль в этом процессе силы присоединенных масс.

*Ключевые слова:* машущий профиль, пропульсивная сила, связанное движение тела и жидкости, упругая связь, метод вязких вихревых доменов

DOI: 10.31857/S0568528122050073

В независимых исследованиях Кноллера [1] и Бетса [2] было впервые обнаружено, что при вертикальных поступательных синусоидальных колебаниях симметричного профиля в набегающем горизонтальном потоке возникает подъемная сила и сопротивление становится отрицательным, т.е. возникает тяга. В работе [3] эффект Кноллера–Бетса исследовался экспериментально и был воспроизведен численно методом дискретных вихрей для двумерного обтекания колеблющегося профиля. В настоящее время существует большое количество работ, посвященных исследованию аэродинамики двумерных и трехмерных машущих крыльев (см., например, обзоры [4–6]). В [6] приведено около трехсот ссылок на работы, в которых численно или экспериментально исследуются структура течения и силы, действующие на профили, совершающие разнообразные комбинации поступательных и угловых колебаний. В большинстве этих работ движение профиля считается полностью детерминированным. В работах [7–13] численно и экспериментально исследуется влияние упругости профиля на подъемную силу и тягу. В этих работах возникновение тяги и подъемной силы объясняется структурой вихревых следов. Гидродинамические силы действительно тесно связаны с образованием вихрей, однако их образование скорее является индикатором этих сил, а не их причиной. В [14] показано, что при детерминированных угловых колебаниях профиля вокруг неподвижной оси основной вклад в тягу дает сила присоединенных масс.

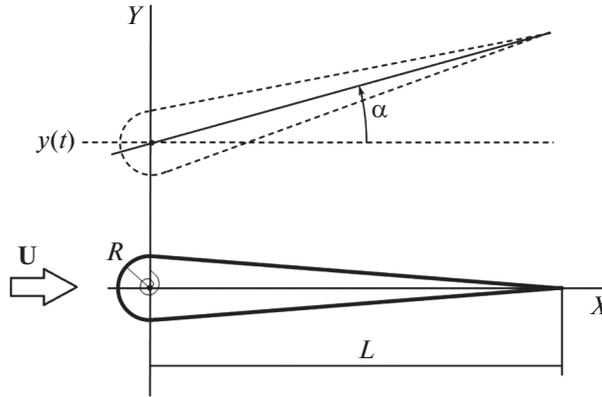


Рис. 1. Схема движения профиля.

Для адекватного учета влияния упругости на аэродинамику колеблющегося профиля необходимо решать связанную задачу взаимодействия тела и жидкости. В настоящей работе она решается с использованием бессеточного численного метода вязких вихревых доменов (ВВД-метод) [15]. Исследуются гидродинамические механизмы возникновения подъемной и пропульсивной сил.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассматривается двумерное течение вязкой несжимаемой жидкости вокруг симметричного профиля, образованного дугой окружности и двумя касательными к ней – рис. 1. Отношение радиуса дуги  $R$  к длине отрезка  $L$  равно  $R/L = 0.078$ . Профиль закреплен в упругом вращательном шарнире, ось которого находится в центре кривизны головной части профиля. Шарнир совершает поперечные колебания вдоль оси  $Y$  по закону  $y(t) = h \sin(2\pi ft)$ ,  $t > 0$ . При этом угловые перемещения профиля не заданы, а вырабатываются под действием гидродинамических сил со стороны жидкости и упругих сил в шарнире.

Течение жидкости подчиняется уравнениям Навье–Стокса, которые после применения оператора ротор записаны в форме [16]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= -\nabla(\mathbf{V}\omega), \quad \mathbf{V} = \mathbf{u} + \mathbf{V}_d, \quad \mathbf{V}_d = -\nu \frac{\nabla \omega}{\omega} \\ \omega &= \omega \mathbf{e}_z = \nabla \times \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{aligned}$$

где  $\mathbf{u}$  – скорость жидкости,  $\mathbf{V}_d$  – так называемая диффузионная скорость,  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости. На поверхности профиля ставится условие прилипания. На бесконечности течение однородно  $\mathbf{u} = \mathbf{U}$ . В начальный момент ( $t = 0$ ) реализуется мгновенный старт движения профиля из состояния покоя относительно жидкости, хорда профиля в начальный момент направлена вдоль потока, что соответствует равновесному положению шарнира в отсутствие внешних сил.

Изменение угла атаки  $\alpha$  подчиняется уравнению динамики

$$I\ddot{\alpha} = M^{\text{hinge}} + M^{\text{inertia}} + M^{\text{hydro}} \quad (1.1)$$

Здесь  $I$  – погонный момент инерции профиля,  $\mathbf{r}_0$  – координата оси шарнира.  $M^{\text{hinge}}$  – крутящий момент шарнира

$$M^{\text{hinge}} = -k\alpha$$

$k$  – коэффициент жесткости шарнира.  $M^{\text{inertia}}$  – момент силы инерции, связанной с ускоренным движением оси

$$\mathbf{M}^{\text{inertia}} = M^{\text{inertia}} \mathbf{e}_z = (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_m) \times \ddot{\mathbf{r}}_0 m$$

$m$ ,  $\mathbf{r}_m$  – масса и центр масс профиля. Момент гидродинамических сил  $M^{\text{hydro}}$  связан с потоком завихренности с поверхности  $\sigma^{\text{new}} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_d) \omega$  соотношением [15]

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{\text{hydro}} = M^{\text{hydro}} \mathbf{e}_z = \frac{\rho_f}{2} \oint_C (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 \boldsymbol{\sigma}_{\text{new}} dl + \\ + 2\ddot{\alpha} I_f \mathbf{e}_z - \ddot{\mathbf{r}}_0 \times (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_0) m_f + \mathbf{M}_w \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\rho_f$ ,  $m_f$ ,  $I_f$  – плотность, масса и момент инерции вытесненной профилем жидкости соответственно,  $M_w$  – момент силы трения. Фигурирующие в приведенных выше соотношениях параметры  $I$ ,  $m$ ,  $\mathbf{r}_m$  характеризуют инерционность профиля и в общем случае являются независимыми. Однако далее ограничимся вариантом, когда профиль инерционно симметричный и характеризуется однородной плотностью  $\rho = \text{const}$ . В этом случае параметры  $I$ ,  $m$ ,  $\mathbf{r}_m$  перестают быть независимыми и вычисляются непосредственно через  $\rho$ , например  $I = \rho \int_s (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 ds$ .

Численное моделирование выполнено с помощью программного комплекса Vvflow CFD<sup>1</sup>, основанного на методе вязких вихревых доменов (ВВД) [15]. Метод ВВД представляет собой улучшенную версию метода диффузионной скорости (ДС) [16]. Вихревые области течения моделируются набором мелких вихревых частиц (доменов), которые движутся относительно жидкости с диффузионной скоростью и сохраняющейся циркуляцией. В отличие от метода ДС в методе ВВД для вычисления диффузионной скорости используются улучшенные дискретные выражения, позволяющие адекватно описывать поведение частиц вблизи поверхностей и вычислять напряжение трения с необходимой точностью. Метод протестирован в широком диапазоне значений числа Рейнольдса [17]. Он является робастным и обладает низкой схемной вязкостью [18].

На каждом шаге по времени в узлах контура профиля образуются новые частицы, циркуляции которых  $\Gamma_k^{\text{new}}$  ( $k = 1, 2, \dots, N_k$ , где  $N_k$  – число узлов) должны обеспечивать граничные условия и выполнение уравнения движения профиля (1.1). С целью определения циркуляций новых доменов составляются уравнения на основе условия непротекания на контуре. Эти уравнения линейны относительно циркуляций  $\Gamma_k^{\text{new}}$  и скорости движения профиля. Система уравнений замыкается уравнением (1.1), которое в дискретном виде также линейно относительно  $\Gamma_k^{\text{new}}$ , так как величина  $\Gamma_k^{\text{new}}$  связана с потоком завихренности  $\sigma_k$  в  $k$ -й точке соотношением  $\Gamma_k^{\text{new}} = \sigma_k \Delta l_k \Delta t$ , где  $\Delta l_k$  – длина отрезка контура. Соответственно интеграл в выражении (1.2) аппроксимируется суммой

$$\oint_C (r - r_0)^2 \boldsymbol{\sigma}_{\text{new}} dl \approx \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=1}^{N_k} (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_0)^2 \Gamma_k^{\text{new}}$$

В результате решения указанной системы уравнений все неизвестные значения циркуляций и угловой скорости вычисляются одновременно без расщепления шага по времени на части, описывающие движение жидкости и тела, и последующих итераций, как это обычно делается при решении сопряженных задач аэрогидроупругости.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ОБСУЖДЕНИЕ

Расчеты выполнены в безразмерных параметрах:  $\bar{h} = h/L$ ,  $\bar{t} = tU/L$ ,  $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/U$ ,  $\text{Sh} = fL/U$ ,  $\text{Re} = UL/\nu$ ,  $\bar{\rho} = \rho/\rho_f$ ,  $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}/(\rho_f U^2 L^2)$ ,  $\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{M}/(\rho_f U^2 L^3)$ ,  $\bar{k} = k/(\rho_f U L^4)$ ,  $\bar{m} = m/(\rho L^3)$ . Количество узлов на контуре равнялось 1200, безразмерный шаг по времени  $\Delta \bar{t} = 0.001$ . Дальнейшее измельчение отрезков контура и шага по времени не приводило к заметным изменениям результатов.

На рис. 2 показаны вихревые следы, полученные при  $\text{Re} = 200$ ,  $\text{Sh} = 0.75$ ,  $\bar{h} = 0.5$  для различных значений жесткости пружины  $\bar{k}$ . Здесь и всюду далее  $\bar{\rho} = 1$ .

Следы асимметричны так же, как в численных и экспериментальных результатах [3, 4, 19], полученных для жестких профилей, совершающих поступательные или угловые колебания. Причины нарушения симметрии объяснены в [20] неустойчивостью реверсивной полубесконечной вихревой дорожки, образующейся за профилем, к изгибным деформациям при определенных соотношениях геометрических параметров и интенсивности вихрей. Отклонение следа может быть как в одну, так и в другую сторону. Это зависит от начальных условий, но не только. В [3]

<sup>1</sup> <https://github.com/vvflow/vvflow/>

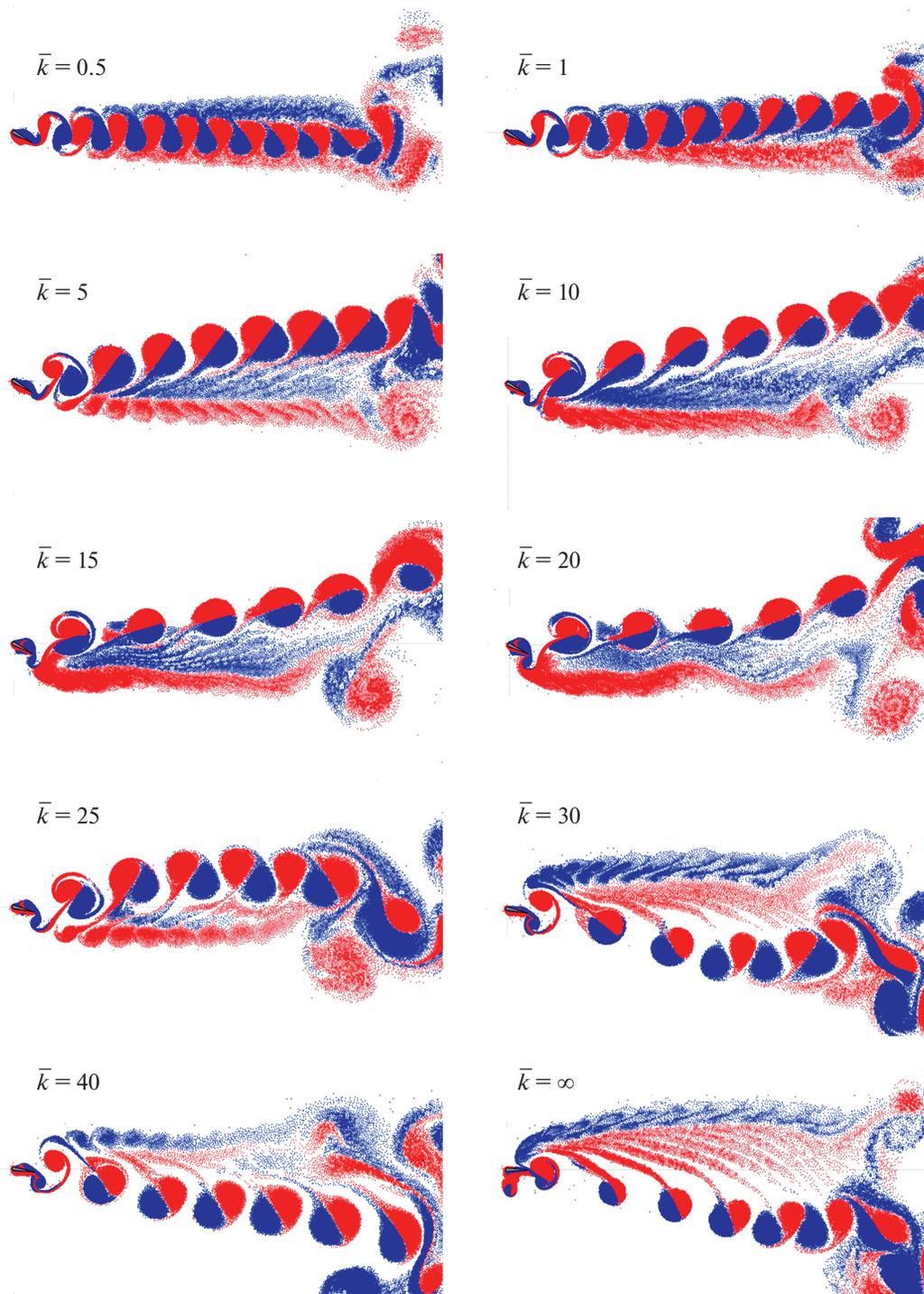
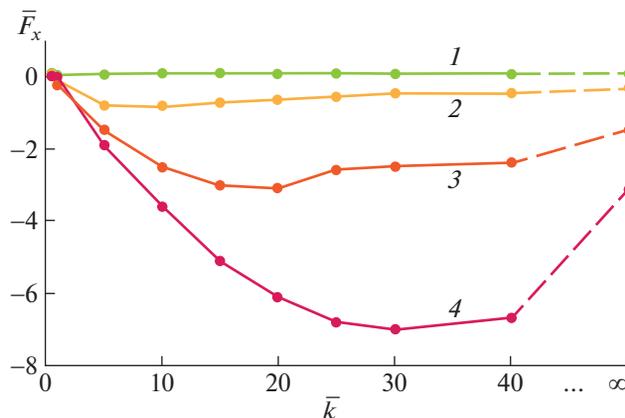


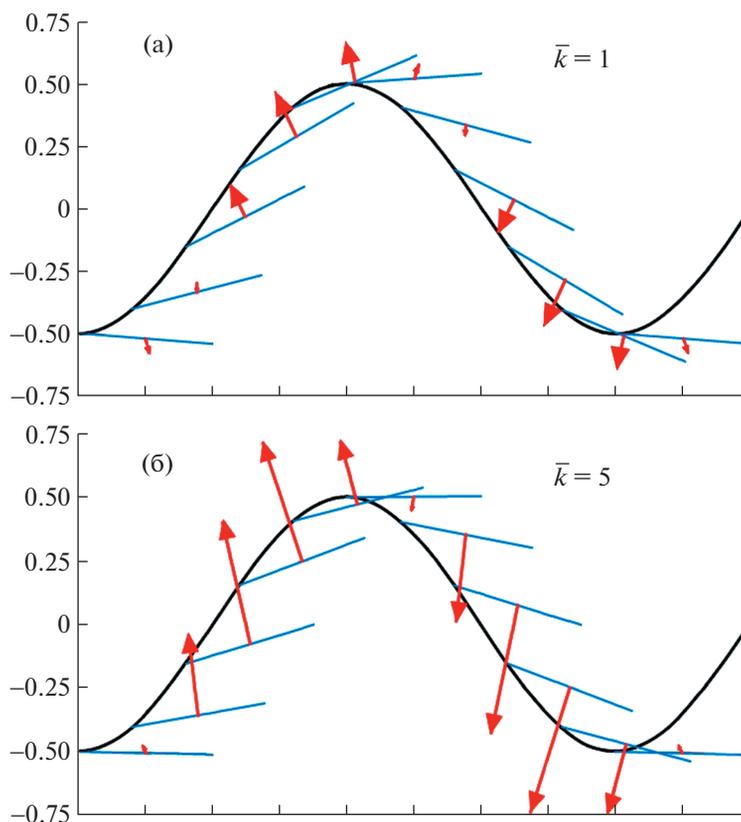
Рис. 2. Вихревые следы при  $Re = 200$ ,  $\bar{h} = 0.5$ ,  $Sh = 0.75$  и различных  $\bar{k}$ .

экспериментально наблюдалось, что направление следа может переключаться случайным образом. Это указывает на то, что относительно небольшого возмущения может быть достаточно, чтобы инициировать переключение. Бифуркационное поведение следа наблюдалось в [21] при медленном изменении частоты колебания профиля.

На рис. 3 представлены зависимости силы сопротивления от жесткости шарнира при  $\bar{h} = 0.5$ ,  $Re = 200$ , и различных значениях  $Sh$ . Отрицательная сила сопротивления представляет собой тягу (пропульсивную силу). Видно, что для фиксированной частоты существует значение  $\bar{k}$ , при котором тяга максимальна.



**Рис. 3.** Зависимость силы сопротивления от жесткости шарнира при  $\bar{h} = 0.5$ ,  $Re = 200$ : 1–4 –  $Sh = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ .



**Рис. 4.** Траектория движения оси шарнира в системе координат, связанной с набегающим потоком при  $Re = 500$ ,  $\bar{h} = 0.5$ ,  $Sh = 0.5$ : а, б –  $k = 1, 5$ . Отрезки показывают направление хорды, векторы изображают безразмерную гидродинамическую силу в масштабе 1:10.

На рис. 4 показаны полученные в расчетах векторы гидродинамических сил и положение хорды профиля при  $Re = 500$ ,  $\bar{h} = 0.5$ ,  $Sh = 0.5$  и двух значениях жесткости шарнира в системе координат, связанной с набегающим потоком. В этой системе координат скорость жидкости в бесконечно удаленной точке равна нулю, а горизонтальная скорость оси шарнира равна  $-U$ . Из рисунка видно, что направление гидродинамической силы близко к перпендикуляру к хорде. Это объясняется малой толщиной профиля и преобладанием сил давления над силами трения. Поскольку горизонтальное положение хорды в отсутствие гидродинамических сил является для

шарнира равновесным, то отклонение хорды вверх происходит, если гидродинамическая сила направлена вверх. Аналогично при отклонении хорды вниз сила направлена вниз. В обоих случаях горизонтальная составляющая гидродинамической силы направлена навстречу набегающему потоку, следовательно, сопротивление является отрицательным, т.е. имеет место тяга. При малой амплитуде и низкой частоте колебаний вклад силы давления по сравнению с силой трения уменьшается, поэтому сопротивление становится положительным, как это видно на рис. 3 при  $Sh = 0.25$ .

Из рис. 4 видно, что пропульсивная сила максимальна при движении профиля из крайних положений к средней линии траектории. Ниже показано, что это связано с влиянием силы присоединенных масс. В [22] строго доказано, что гидродинамическая сила, действующая на движущееся с ускорением тело, равна сумме двух сил  $\mathbf{F}^{\text{hydro}} = \mathbf{F}^{\text{ad}} + \mathbf{F}^{\text{st}}$ , где  $\mathbf{F}^{\text{st}}$  – сила, действующая на тело, движущееся без ускорения при том же мгновенном распределении завихренности в пространстве, а  $\mathbf{F}^{\text{ad}}$  – сила присоединенных масс, действующая на тело при движении с тем же ускорением в потенциальном потоке. Если известны значения коэффициентов присоединенных масс тела при потенциальном обтекании, эта сила может быть вычислена аналитически. В системе координат, показанной на рис. 1, справедливо выражение

$$\begin{pmatrix} F_x^{\text{ad}} \\ F_y^{\text{ad}} \\ M^{\text{ad}} \end{pmatrix} = -\Lambda \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\alpha} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{x\alpha} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{y\alpha} \\ \lambda_{\alpha x} & \lambda_{\alpha y} & \lambda_{\alpha\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\alpha} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

где тензор присоединенных масс  $\Lambda$  выражается через с тензор  $\Lambda'$ , вычисленный в связанной с профилем системе координат, как

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{x'x'} & \lambda_{x'y'} & \lambda_{x'\alpha} \\ \lambda_{y'x'} & \lambda_{y'y'} & \lambda_{y'\alpha} \\ \lambda_{\alpha x'} & \lambda_{\alpha y'} & \lambda_{\alpha\alpha} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Учитывая, что для симметричного профиля  $\lambda_{x'y'} = \lambda_{y'x'} = \lambda_{x'\alpha} = \lambda_{\alpha x'} = 0$ , и  $\lambda_{x'x'} \ll \lambda_{y'y'} \lambda_{y'\alpha} = \lambda_{\alpha y'}$ , подстановкой (2.2) в (2.1) получаем

$$\begin{aligned} F_x^{\text{ad}} &= -(\lambda_{x'x'} - \lambda_{y'y'})\ddot{y} \cos \alpha \sin \alpha + \lambda_{y'\alpha}\ddot{\alpha} \sin \alpha \approx f \sin \alpha \\ F_y^{\text{ad}} &= -(\lambda_{x'x'} \sin^2 \alpha + \lambda_{y'y'} \cos^2 \alpha)\ddot{y} - \lambda_{\alpha y'}\ddot{\alpha} \cos \alpha \approx -f \cos \alpha \\ \text{где } f &= \lambda_{y'y'}\ddot{y} \cos \alpha + \lambda_{y'\alpha}\ddot{\alpha} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из (2.3) следует, что направление силы присоединенных масс близко к нормали к хорде.

Для профиля, рассматриваемого в данной работе, коэффициенты присоединенных масс имеют следующие значения

$$\lambda_{x'x'} = 0.017, \quad \lambda_{y'y'} = 0.96, \quad \lambda_{\alpha\alpha} = 0.16, \quad \lambda_{y'\alpha} = \lambda_{\alpha y'} = 0.43$$

Подставляя эти значения в (2.3), получим

$$\begin{aligned} F_x^{\text{ad}} &= 0.943\ddot{y} \cos \alpha \sin \alpha + 0.43\ddot{\alpha} \sin \alpha \\ F_y^{\text{ad}} &= -(0.017\sin^2 \alpha + 0.96\cos^2 \alpha)\ddot{y} - 0.43\ddot{\alpha} \cos \alpha \end{aligned}$$

На рис. 5 показаны зависимости  $F_y^{\text{ad}}$  и  $y$  от времени на одном периоде при  $Re = 500$ ,  $\bar{h} = 0.5$ ,  $Sh = 0.5$ . Из рисунка видно, что вертикальная составляющая силы  $\mathbf{F}^{\text{ad}}$  в верхней части траектории положительна, а в нижней – отрицательна. Сила  $\mathbf{F}^{\text{st}}$ , зависящая от скорости в отсутствие ускорения, направлена вниз при движении вверх и вниз при обратном движении – рис. 6. В результате при движении из крайних точек траектории к средней линии эти силы сонаправлены и их модули складываются, а при движении от нее направлены в противоположные стороны, что приводит к уменьшению равнодействующей. Этим объясняется поведение пропульсивной силы в разных фазах движения. Отметим, что в отличие от результатов [14], полученных для детерминированных угловых колебаний профиля относительно неподвижной оси, вклад силы присоеди-

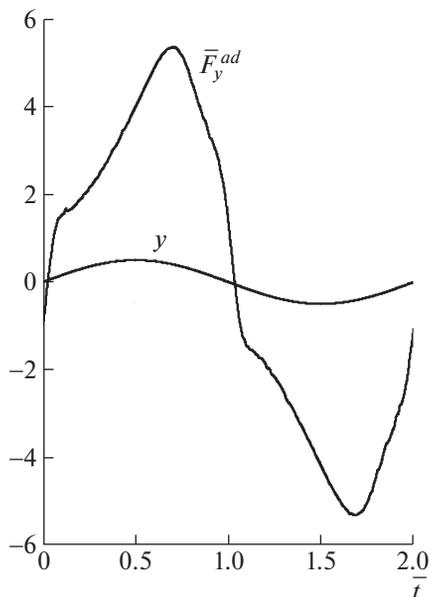


Рис. 5. Зависимости вертикальной составляющей силы присоединенных масс и ординаты оси шарнира от времени на одном периоде при  $Re = 500$ ,  $\bar{h} = 0.5$ ,  $Sh = 0.5$ .

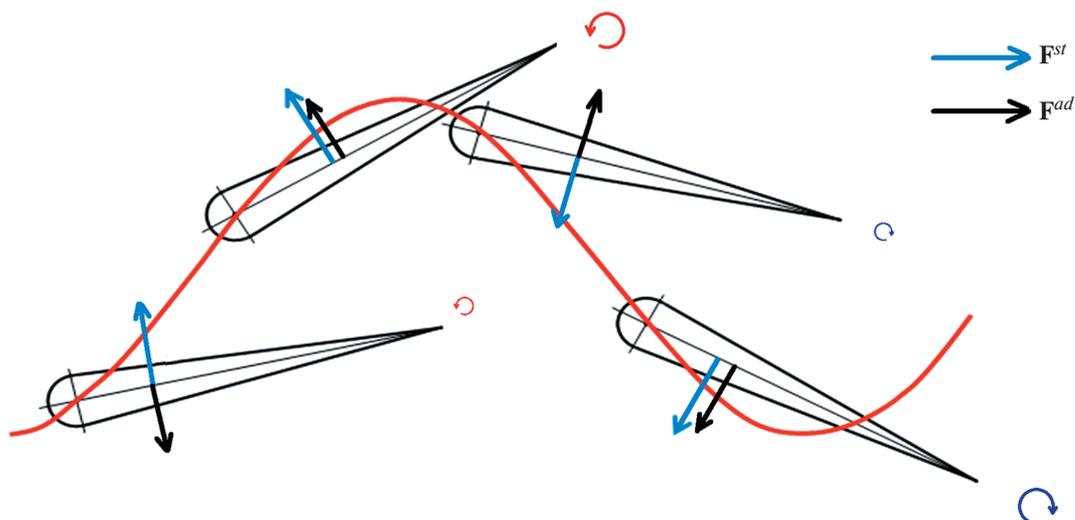


Рис. 6. Направление сил  $F^{ad}$  и  $F^{st}$  в разных фазах движения.

ненных масс в тягу при рассматриваемом в данной работе типе движения не является доминирующим.

Сравнение рис. 4а и 4б показывает, что с увеличением жесткости шарнира амплитуда изменения угла уменьшается, а модуль гидродинамической силы увеличивается. Уменьшение угла приводит к уменьшению проекции силы на ось  $X$ , а увеличение модуля силы — к ее увеличению. Эти два противоположно направленных процесса являются причиной существования оптимального значения жесткости шарнира.

Вертикальная сила в отличие от горизонтальной меняет знак во времени. Она положительна, когда ось профиля движется вниз, и отрицательна, когда ось поднимается. Если при движении вверх и вниз силы изменяются симметрично, то средняя подъемная сила равна нулю. При нарушении симметрии возникает положительная или отрицательная средняя подъемная сила.

Таблица 1

$\bar{k} \cdot$	0.5	1	5	10	15	20	25	30	40	$\infty$
$\bar{F}_y^{\text{hydro}}$	-0.01	-0.03	0.31	0.70	0.69	0.64	0.49	-1.70	-1.35	-4.7

В табл. 1 приведены значения вертикальной составляющей осредненной гидродинамической силы, соответствующие вихревым картинам на рис. 2. Как было сказано выше, направление осредненной вертикальной составляющей силы зависит от отклонения вихревого следа.

Представляется неожиданным, что средняя подъемная сила направлена в ту же сторону, что и отклонение вихревой дорожки. Однако аналогичный результат в рамках модели идеальной жидкости отмечался также в [3], где данное свойство объяснялось ненулевым значением средней циркуляции скорости вокруг профиля. При отклонении ближнего следа вверх среднее значение циркуляции, полученное в расчетах [3], отрицательно, а при отклонении вниз – положительно. Соответственно среднее значение силы Жуковского отрицательно в первом случае и положительно во втором.

На рис. 7 изображены линии тока осредненного поля скорости  $\mathbf{u}' = \langle \mathbf{u} \rangle - \mathbf{U}$  асимметричного вихревого следа, полученного при численном решении задачи, когда профиль совершает детерминированные угловые колебания около неподвижной оси с амплитудой  $\alpha_0 = 10^\circ$ , частотой  $Sh = 1.8$  при  $Re = 1000$ . Осреднение выполнено по одному периоду колебания. Как видно из рисунка, циркуляция скорости вокруг профиля положительна (против часовой стрелки). При этом вихревая дорожка за профилем отклонена вниз, т.е. в ту же сторону, что и вертикальная составляющая гидродинамической силы. Таким образом, подтверждается вывод, сделанный в работе [3].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В полной сопряженной постановке исследована задача о полудетерминированных колебаниях симметричного крылового профиля в неограниченном потоке вязкой несжимаемой жидкости в условиях, когда профиль установлен в упругом шарнире вращения, который совершает заданные поперечные по отношению к набегающему потоку гармонические колебания. Численные решения связанной задачи динамики и гидродинамики построены с помощью авторских кодов бессеточного безытерационного моделирования на основе метода вязких вихревых доменов (ВВД). Раскрыты механизмы возникновения пропульсивной силы (тяги) и подъемной силы колеблющегося профиля.

Тяга возникает благодаря корреляции направления гидродинамической силы и отклонения профиля от равновесного состояния шарнира. При этом проекция силы давления на направление набегающего потока оказывается отрицательной во всех фазах колебания. При прочих равных условиях влияние величины упругой жесткости шарнира на тягу, развиваемую колеблющимся профилем, не монотонное. Для всех сочетаний параметров задачи, при которых возникает пропульсивная сила, существует оптимальное значение жесткости пружины, доставляющее максимум тяги. Аналитически показано, что при движении шарнира от периферии к центру си-

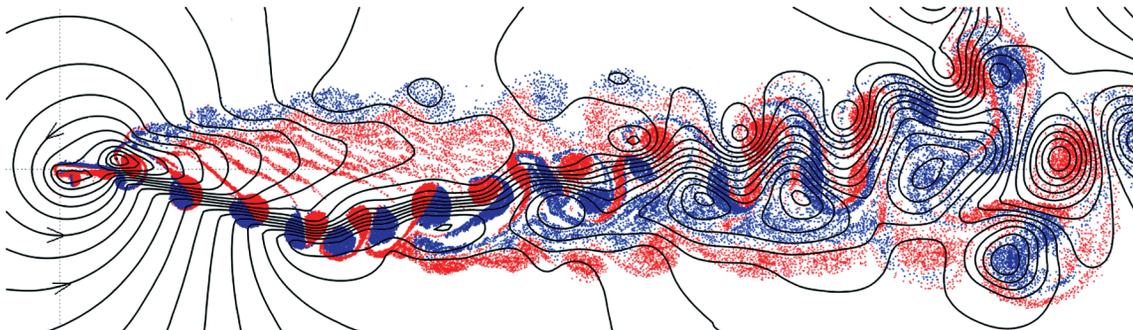


Рис. 7. Линии тока осредненного поля скорости  $\mathbf{u}' = \langle \mathbf{u} \rangle - \mathbf{U}$ .

ла присоединенных масс вносит положительный вклад в тягу профиля, а при обратном движении ослабляет ее.

Причиной возникновения средней за период колебаний подъемной силы геометрически и инерционно симметричного профиля является нарушение симметрии реверсивной вихревой дорожки, неустойчивой к изгибным деформациям. При этом осредненная по времени подъемная сила направлена в ту же сторону, что и отклонение вихревой дорожки за профилем, что объясняется ненулевым значением осредненной циркуляции скорости вокруг профиля.

Работа выполнена в рамках темы № гос. рег. АААА-А16-116021110201-2.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Knoller R.* Die Gesetze des Luftwiderstandes // Flug- und Motortech. (Wien). 1909. V. 3. № 21. P. 1–7.
2. *Betz A.* Ein Beitrag zur Erklärung des Segel uges // Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt. 1912. V. 3. № 1. P. 269–272.
3. *Jones K.D., Dohring C.M., and Platzer M.F.* Experimental and Computational Investigation of the Knoller–Betz Effect // AIAA J. 1998. V. 36. № 7. <https://doi.org/10.2514/2.505>
4. *Platzer M.F., Jones K.D.* Flapping-wing aerodynamics: progress and challenges // AIAA J. 2008. V. 46. № 9. <https://doi.org/10.2514/1.29263>
5. *Xiao Q., Zhu Q.* A review on flow energy harvesters based on flapping foils // J. Fluids Struct. 2014. V. 46. P. 174–191. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2014.01.002>
6. *Wu X., Zhang X., Tian X., Li X., Lu W.* A review on fluid dynamics of flapping foils // Ocean Eng. 2020. V. 195. 106712. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2019.106712>
7. *Brousseau P., Benaouicha M., Guillou S.* Dynamics of a Free Heaving and Prescribed Pitching Hydrofoil in a Turbulent Flow, with a Fluid-Structure Interaction Approach // Proceedings of the ASME 2018 Pressure Vessels and Piping Conference, Prague, Czech Republic, 15–19 July 2018, p. 9.
8. *Marais C., Thiria B., Wesfreid J.E., Godoy-Diana R.* Stabilizing effect of flexibility in the wake of a flapping foil // J. Fluid Mech. 2012. V. 710. P. 659–669.
9. *Zeyghami S., Zhong Q., Liu G., Dong H.* Passive Pitching of a Flapping Wing in Turning Flight // AIAA J. V. 57. № 1. P. 1–9. <https://doi.org/10.2514/1.J056622>
10. *Brousseau P., Benaouicha M., Guillou S.* Hydrodynamic Efficiency Analysis of a Flexible Hydrofoil Oscillating in a Moderate Reynolds Number Fluid Flow // Energies. 2021. V. 14. P. 4370. <https://doi.org/10.3390/en14144370>
11. *Guojun Li, Gaël Kemp, Rajeev Kumar Jaiman, and Boo Cheong Khoo.* A high-fidelity numerical study on the propulsive performance of pitching flexible plates editors-pick // Phys. Fluids. 2021. V. 33. 051901. <https://doi.org/10.1063/5.0049217>
12. *Kui Liu, Xuechao Liu, Haibo Huang.* Scaling the self-propulsive performance of pitching and heaving flexible plates // J. Fluid Mech. 2022. V. 936. <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.52>
13. *Zhang C., Huang H., Lu X.-Y.* Effect of trailing-edge shape on the self-propulsive performance of heaving flexible plates // J. Fluid Mech. 2020. V. 887, A7. <https://doi.org/10.1017/jfm.2019.1076>
14. *Гувернюк С.В., Дынников Я.А., Дынникова Г.Я., Малахова Т.В.* Вклад силы присоединенных масс в формирование пропульсивной силы машущего профиля в вязкой жидкости // Письма в ЖТФ. 2020. Т. 46. № 17. С. 14–17. <https://doi.org/10.21883/PJTF.2020.17.49886.18369>
15. *Андронов П.Р., Григоренко Д.А., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я.* Численное моделирование самовращения пластин в потоке вязкой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 5. С. 47–60.
16. *Ogami Y., Akamatsu T.* Viscous flow simulation using the discrete vortex method – the diffusion velocity method // Computers & Fluids. 1991. V. 19. № 3/4. P. 433–441. [https://doi.org/10.1016/0045-7930\(91\)90068-S](https://doi.org/10.1016/0045-7930(91)90068-S)
17. *Дынникова Г.Я.* Расчет обтекания кругового цилиндра на основе двумерных уравнений Навье–Стокса при больших числах Re с высоким разрешением в пограничном слое // ДАН. 2008. Т. 422. № 6. С. 755–757.

18. *Дынников Я.А., Дынникова Г.Я.* О вычислительной устойчивости и схемной вязкости в некоторых бес-сеточных вихревых методах решения уравнений Навье–Стокса и теплопроводности // ЖВМиМФ. 2011. Т. 51. № 10. С. 1905–1917.
19. *Godoy-Diana R., Aider J.L., Wesfreid J.E.* Transitions in the wake of a flapping foil // Phys. Rev. E. 2008. V. 77. 016308.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.77.016308>
20. *Dynnikova G.Y., Dynnikov Y.A., Guvernuyuk S.V., Malakhova T.V.* Stability of a reverse Karman vortex street // Phys. Fluids. 2021. V. 33. № 2. 024102–1–024102–10.  
<https://doi.org/10.1063/5.0035575>
21. *Cleaver D., Wang Z., Gursul I.* Bifurcating flows of plunging aerofoils at high Strouhal numbers // J. Fluid Mech. 2012. V. 708. P. 349–376.  
<https://doi.org/10.1017/jfm.2012.314>
22. *Дынникова Г.Я.* О присоединенной массе в модели вязкой несжимаемой жидкости // ДАН. 2019. Т. 488. № 5. С. 493–497.  
<https://doi.org/10.31857/S0869-56524885493-497>

УДК 532.517:4

## ГЕНЕЗИС АНОМАЛЬНОЙ ИНТЕНСИФИКАЦИИ ОТРЫВНОГО ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА В НАКЛОННЫХ КАНАВКАХ НА СТРУКТУРИРОВАННЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

© 2022 г. С. А. Исаев<sup>a,b</sup><sup>a</sup> Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, Санкт-Петербург, Россия<sup>b</sup> Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации, Санкт-Петербург, Россия

\*E-mail: isaev3612@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.04.2022 г.

После доработки 10.05.2022 г.

Принята к публикации 10.05.2022 г.

Обзор эволюции научного направления по вихревой интенсификации теплообмена на структурированных лунками энергоэффективных поверхностях представляется. Обсуждается открытое явление аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена в наклонных канавках со сферическими законцовками, связанное с интерференцией взаимодействующего с наветренным склоном входящего в канавку струйного потока и самоорганизующегося торнадоподобного вихря. Особое внимание уделяется экспериментальному подтверждению обнаруженных численно экстраординарных перепадов статического давления внутри входной части канавки и ускорения пристеночного потока над входом до скоростей, в полтора раза превышающих максимальную скорость в плоскопараллельном канале.

*Ключевые слова:* интенсификация отрывного и вторичного течения, торнадоподобные вихри, наклонные канавки

**DOI:** 10.31857/S0568528122050085

Создание структурированных энергоэффективных поверхностей представляет важную инженерную и фундаментальную научную проблему. Пассивные методы интенсификации теплообмена при нанесении на поверхности рельефов из упорядоченных элементов шероховатости позволяют значительно увеличить теплоотдачу от стенки при прокачке теплоносителя в мультимасштабных системах охлаждения. При этом гидравлические потери, определяемые перепадами полного давления, могут расти со значительным опережающим темпом. Яркий пример такого успешного метода, нашедшего широкое применение в авиационной промышленности, – накатка валиков в трубах и каналах, предложенная в открытии Г. Дрейцера и его коллектива из Московского авиационного института [1, 2]. Однако в технических системах подчас ресурсы полного давления сильно ограничены, что затрудняет применение упорядоченных выступов для интенсификации теплообмена. Альтернативой являются луночные технологии, в том числе основанные на нанесении упорядоченных траншей [3, 4], позволяющие кардинально снизить гидравлические потери и повысить теплогидравлическую эффективность, сохраняя высокий уровень теплоотдачи в микро- и макро размерных устройствах.

Долгое время технология нанесения покрытий ограничивала конструирование энергоэффективных поверхностей. Обработка металлов резанием (фрезерование), штамповка, литье стимулировали выбор простых форм лунок, а именно сферических, конических и цилиндрических. Эмпирический инженерный подход к построению структурированных поверхностей преобладал над фундаментальными научными исследованиями по изучению физических механизмов интенсификации теплообмена. Однако спектр приложений зарождающихся луночных технологий был довольно широким. Это прежде всего теплообменники (пластинчатые и трубчатые), тракты двигателей и энергетических установок (ГТУ, атомные станции и др.), в том числе системы охлаждения турбинных лопаток, воздушные конденсаторы, а в последнее десятилетие микроканалы в устройствах микроэлектроники [5–8]. Постепенно упорядоченная дискретная шероховатость на пластинах, стенках каналов и труб стала объектом внимания исследователей фундаментальных механизмов интенсификации теплообмена [9–20]. Следует отметить, что по-

явление аддитивных технологий кардинально изменило ситуацию с реализацией нанесения покрытий, позволив воссоздавать запрограммированные компьютером поверхностные рельефы. Тем не менее и в них еще пока не вполне решены проблемы создания изделий из огнестойких материалов и качества получаемых поверхностей.

Перспективная научная тематика вихревой интенсификации теплообмена на луночных рельефах сформировала международные научные школы Г. Кикнадзе [21, 22], А. Леонтьева [23, 24], Ф. Лиграни [25–30], Р. Банкера [31, 32], Б. Вайнганда [33, 34], Б. Кхо [35, 36], А. Халатова [37, 38]. Также выделились национальные научные коллективы в Корее и Китае [37–46]. Хотелось бы отметить экспериментальные [47–55] и расчетные [56, 57] работы. Подавляющее большинство перечисленных исследований посвящено интенсификации теплообмена на плоских пластинах и стенках каналов с уединенными и пакетными сферическими лунками. К ним следует добавить работы коллектива С. Исаева [58–114], посвященные в основном численным исследованиям отрывных течений и теплообмена в уединенных сферических лунках на плоской пластине и стенке узкого канала. Акцент в них, как и в работах Кикнадзе, делался на анализ самоорганизующихся струйно-вихревых структур в лунках, на определение влияния на них геометрических и режимных параметров, в особенности глубины лунки, радиуса скругления кромки и числа Рейнольдса. В работах, посвященным ансамблям лунок, в основном рассматривались традиционные ямки – лунки, сферические, конические, эллиптические небольшого удлинения, каплевидные. Ансамбли лунок подобно расположению труб в теплообменниках компоновались как коридорные и шахматные. Во втором случае, следуя Кикнадзе, центры соседних лунок составляют равнобедренный треугольник, а по предложению Лиграни в центре квадрата между соседними лунками размещается еще одна лунка. Характерная особенность рассматриваемых луночных ансамблей – высокие плотности облунения поверхностей, достигающие до 70–80%. Она связана с образованием в лунках довольно слабых возвратных течений и крайней низкой теплоотдаче в отрывных зонах, занимающих их значительную часть. Повышение теплоотдачи на облуненных поверхностях наблюдается на наветренных склонах лунок и в промежутках между лунками. Во многих исследованиях внимание обращается на генерацию асимметричных вихревых структур и интенсификацию вторичного и отрывного течения за счет формирования рельефа внутри лунок. Значительный интерес проявлен к разработке математических моделей и технологий численного моделирования [74], методов диагностики вихревых потоков и теплообмена, включая градиентную теплотрию [75, 76].

Особый интерес проявлен к исследованиям интенсификации теплообмена на структурированных пластинах и стенках каналов с нетрадиционными поверхностными вихрегенераторами – наклонными овально-траншейными лунками (ОТЛ) (рис. 1) [77]. Первоначальная идея, примененная при проектировании асимметричных лунок, заключалась в интенсификации пристеночного течения при генерации наклонных вихревых структур, что было продемонстрировано при выдуве наклонной струи в сносный поток [78]. Сначала рассматривались асимметричные лунки, составленные из половинок сферической и эллиптической лунок [59, 60], но интенсивность отрывного и вторичного течения в них оказалась невелика. В [79] предложена форма наклонной по отношению к набегающему потоку овальной лунки, составленной из двух половинок сферической лунки и соединяющей их цилиндрической вставки. Показана генерация в них устойчивых спиралевидных вихревых структур в отличие от образования периодических вихрей в глубоких сферических лунках [80–85]. Тепловая и теплогидравлическая эффективность овальных лунок на пластине и на стенке узкого канала оказалась существенно выше, чем их сферических аналогов. В проведенных исследованиях начального периода длины вставок были небольшими (не более 0.5–1 диаметра исходной сферической лунки). Помимо уединенных лунок рассматривались коридорные и шахматные ансамбли таких лунок на нагреваемой стенке узкого канала.

Прорыв в исследованиях интенсификации теплообмена при обтекании наклонных овальных лунок произошел, когда было выполнено условие постоянства площади пятна уединенной лунки на стенке узкого канала в процессе ее удлинения [86–89]. Фактически овальная лунка при большом удлинении преобразуется в канавку с полусферическими законцовками.

Анализ растекания теплоносителя по внутренней поверхности наклонной овальной лунки с большим относительным удлинением порядка 3–5, названной овально-траншейной лункой, показал, что начиная с некоторого удлинения лунка становится проточной, т.е. зона отрывного течения локализуется во входной (или головной) части наклонной ОТЛ. С увеличением относительной длины гидравлические потери на прямоугольном участке с лункой сначала возросли до максимума, а затем снизились до величины, близкой к гидравлическим потерям выбранного участка канала с эквивалентной по площади сферической лункой одинаковой глубины с ОТЛ.

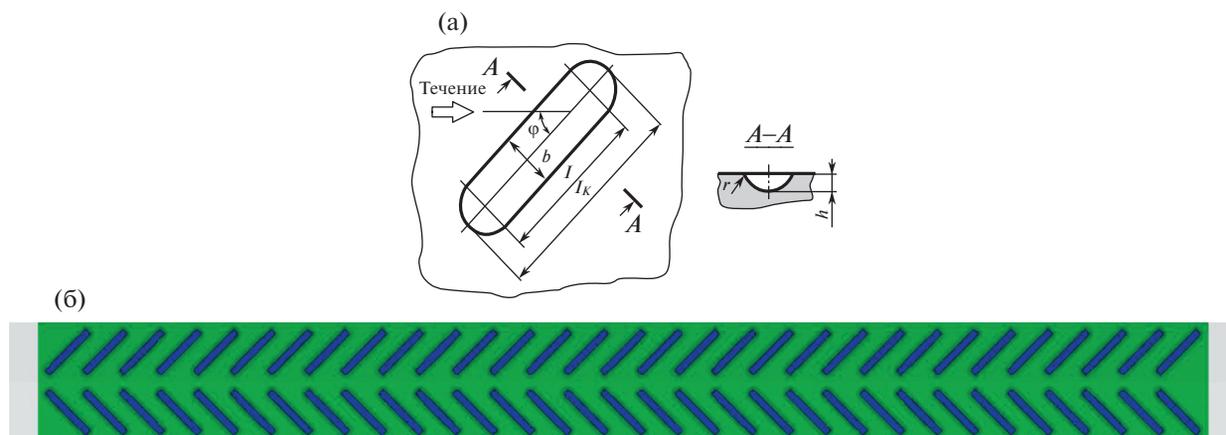
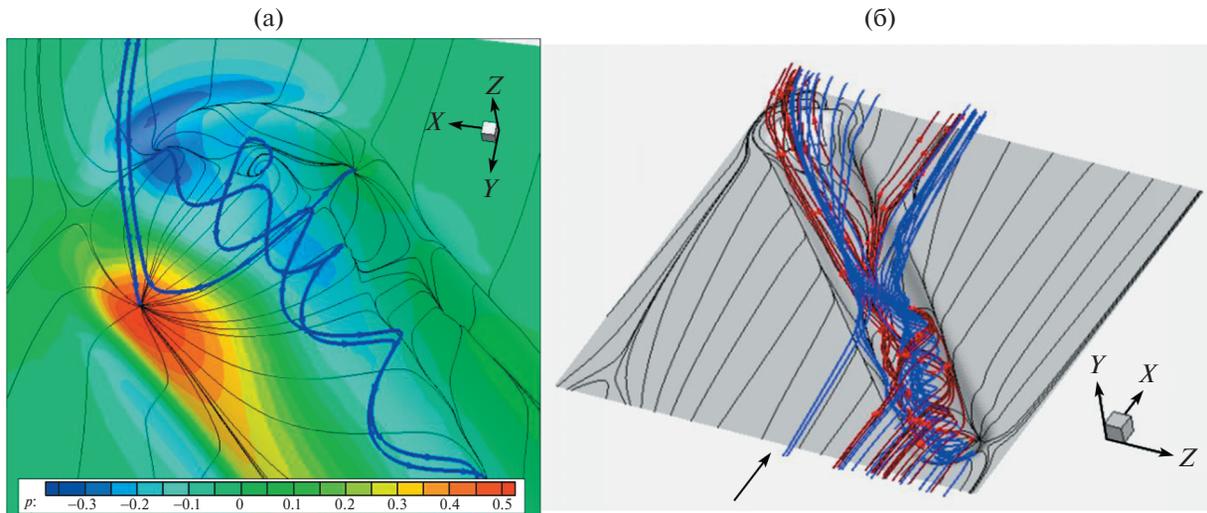


Рис. 1. Уединенные (а) и двухрядные (б) наклонные овально-траншейные лунки (ОТЛ) на плоской стенке.

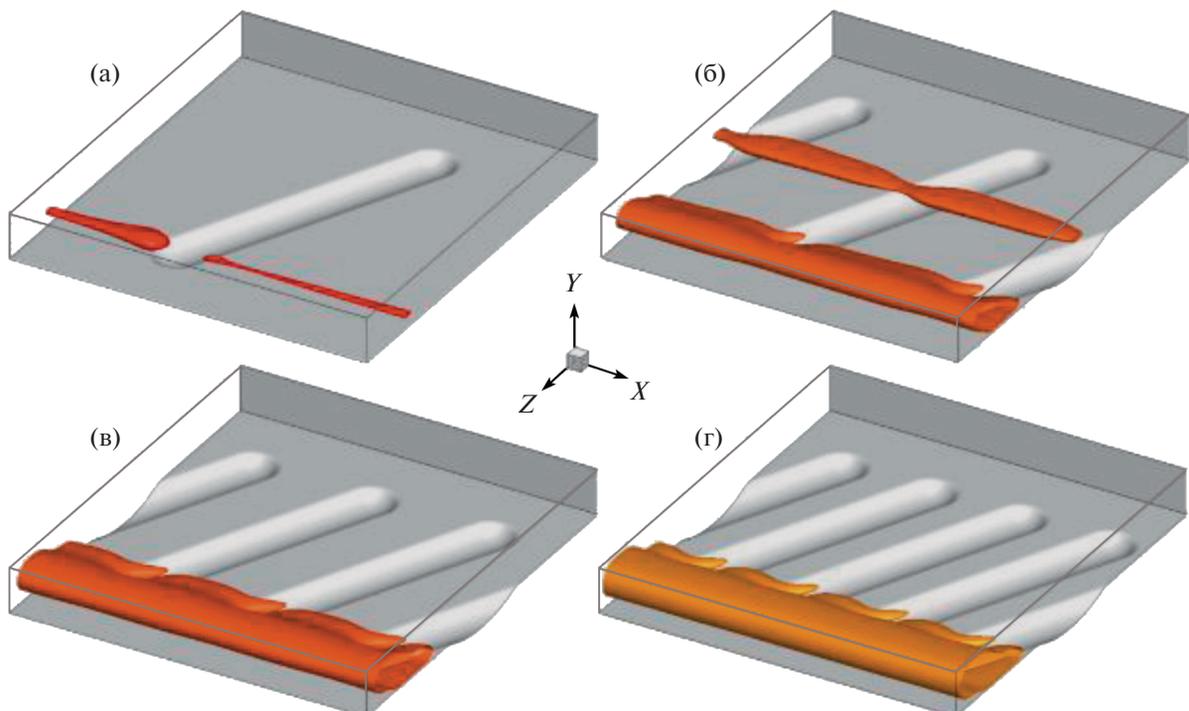
Теплоотдача на участке стенки канала с ОТЛ оказалась значительно выше, чем в случае сферического аналога. При обтекании турбулентным потоком воды уединенной ОТЛ глубиной 0.39 и углом наклона  $45^\circ$  в узком канале высотой 1 и шириной 7.5 максимальная скорость вторичного течения в лунке приблизилась к 80% от среднемассовой скорости, а минимум относительного отрицательного трения и максимум относительной теплоотдачи в зоне возвратного течения лунки составили  $-1.5$  и  $2$  соответственно.

Явление аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена во входной части наклонной ОТЛ [90–96], а также ускорение в ядре канального потока открыто численно для ламинарного и турбулентного стабилизированного течения воздуха в узких каналах с однорядными пакетами наклонных ОТЛ [97–99]. Явление связано с интерференцией входящего в лунку внешнего потока, растекающегося по ее наветренному склону, и сгенерированного во входном сферическом сегменте торнадоподобного вихря (рис. 2). В результате возник большой перепад полного давления между зонами торможения и разрежения, сопоставимый с перепадом давления в критических точках при обтекании шара или кругового цилиндра. В проведенных расчетах числа Рейнольдса, определенные по среднемассовой скорости и высоте канала, заданы равными  $10^3$  и  $10^4$ . Обычно угол наклона ОТЛ выбирался равным  $45^\circ$ . В случае турбулентного воздушного потока для разреженного пакета ОТЛ с одной лункой длиной 7.05, шириной 1.05 и глубиной 0.3 в центре периодического участка канала длиной 6 и шириной 7 на нагретой внутренней поверхности абсолютная величина минимального относительного трения увеличивается четырехкратно, а максимальная относительная теплоотдача возрастает пятикратно по отношению к соответствующим величинам в плоскопараллельном канале. Максимальная абсолютная величина скорости вторичного (поперечного) течения оказывается одного порядка с максимальной скоростью потока в плоскопараллельном канале. Для однорядных ОТЛ шириной 1, длиной 4.5 и глубиной свыше 0.25 в периодическом модуле узкого микроканала шириной 6, длиной 4 с одной наклоненной под углом  $45^\circ$  ОТЛ открыто явление ускорения ламинарного потока с полуторакратным ростом максимальной скорости в ядре потока в области над входом в наклонную ОТЛ по сравнению с максимальной скоростью в плоскопараллельном канале.

Уплотнение лунок в однорядном рельефе на периодической секции на нагретой стенке удлинением 8 в узком (9 к 1) плоскопараллельном канале рассматривается на примере размещения наклонных ОТЛ длиной 7.05, шириной 1.05 и глубиной 0.25 с радиусом скругления кромок 0.21 (рис. 3, 4) [92–95]. Расстояние между центрами лунок меняется от 2 до 8. Эффект ускорения турбулентного потока с увеличением максимальной скорости в ядре в 1.39 раза получен при плотном пакете наклоненных под углом  $65^\circ$  ОТЛ с шагом между лунками 2. В этом случае четырехкратно увеличивается максимальная абсолютная величина относительной проекции трения на направление срединного сечения ОТЛ (рис. 5, 6) и 6.5-кратно растет максимальная относительная теплоотдача (по отношению к параметрам в плоскопараллельном канале). Максимальная абсолютная величина скорости вторичного (поперечного) течения примерно на 10% превосходит величину максимальной скорости потока в плоскопараллельном канале, а такая же величина скорости рециркуляционного течения почти втрое превышает аналогичную скорость возвратного течения в сферической лунке, доходя до 0.89 от среднемассовой скорости в канале. Уплотне-



**Рис. 2.** Интерференция взаимодействующего с навстречным склоном входящей в наклонную ОТЛ струи и самоорганизующегося торнадоподобного потока (а), а также компьютерная визуализация закрученного потока в ОТЛ на участке стабилизированного течения в узком канале (б) [90].



**Рис. 3.** Сравнение изополей продольной составляющей скорости  $u$ , равной 1.3, в периодической секции канала с наклонными ОТЛ ( $\varphi = 65^\circ$ ) на нижней стенке (верхняя стенка снята) при  $H = 8$  (а); 4 (б); 2.667 (в); 2 (г).

ние лунок сопровождается увеличением перепада полного давления (свыше 1.2) между областями высокого положительного и низкого отрицательного давления. Оказывается, что наклон ОТЛ в диапазоне  $0-60^\circ$  в разреженном коридорном пакете на гидродинамическом стабилизированном участке узкого канала оказывает кардинальное воздействие на аномальную интенсификацию отрывного и закрученного потоков в лунке, приводя к 3–4-кратному снижению относительного отрицательного трения в диапазоне изменения углов от  $40^\circ$  до  $60^\circ$ , увеличению наибольшей скорости возвратного и вторичного течения до 0.8 и 1.18 по отношению к среднemasсовой скорости

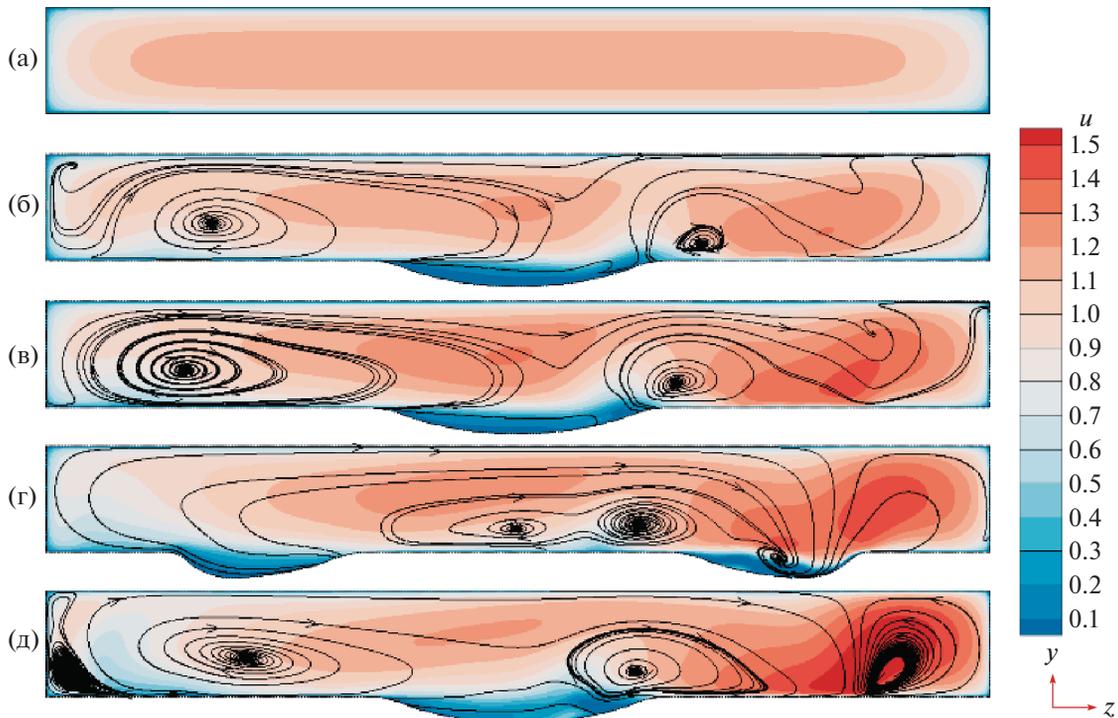


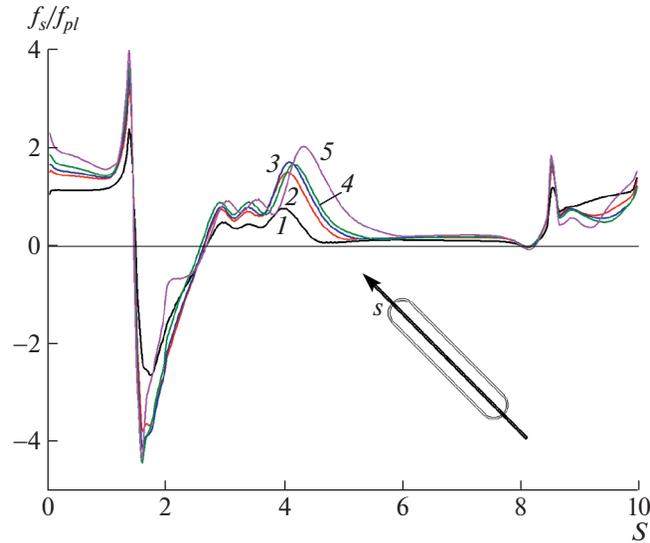
Рис. 4. Сравнение полей продольной составляющей скорости  $u$  в срединном сечении периодической секции гладкого (а) и облученного каналов при  $H = 8$  (б); 4 (в); 2.667 (г); 2 (д) с нанесенными структурами вторичных токов.

потока в канале [100–103]. В то же время до углов наклона, не превышающих  $20^\circ$ , аномальной интенсификации гидродинамических и теплообменных процессов в лунках не возникает.

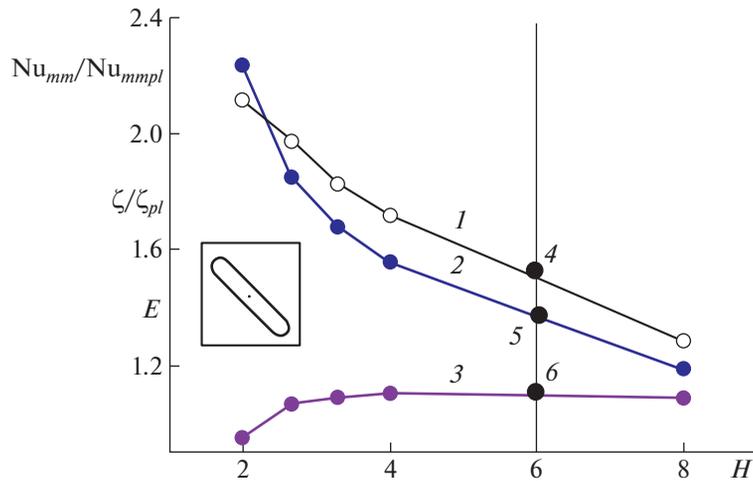
Интенсификация теплообмена в межреберном канале воздушного конденсатора с помощью коридорного пакета наклоненных под углом  $45^\circ$  ОТЛ моделируется численно при  $Re = 1000$ . При рассмотрении узкого канала высотой 1, длиной 80 и шириной 4 предпочтителен вариант с 31-й однорядной овально-траншейной лункой, имеющей глубину 0.25 (рост гидравлических потерь не превышает 46% при почти двукратном увеличении теплоотдачи по сравнению с плоскопараллельным каналом). При турбулентном режиме течения воздуха в межреберном канале с 31 ОТЛ при  $Re = 6000$  глубина лунок меняется от 0 до 0.2. Относительные гидравлические потери не превышают 70% при возрастании в 2.4 раза относительной теплоотдачи в облученном канале в сравнении с плоскопараллельным аналогом [104–107].

В [108] интенсификация теплообмена рассчитывается при турбулентном обтекании воздухом плоской пластины с однорядным пакетом из 16 ОТЛ с наклоном  $60^\circ$  на продольной секции длиной 40, шириной 4 при постановке условий симметрии на боковых границах секции пластины и при шаге лунок 2.4. ОТЛ имеет ширину 1, длину 4.5, глубину 0.2 и радиус округления 0.3. Толщина пограничного слоя на входе в секцию 0.175. Аномальная интенсификация отрывного течения и теплообмена в наклонных ОТЛ подтверждается. Экстремальные относительные величины отрицательного трения и числа Нуссельта  $(f/f_{pl})_{\min} = -3$ ,  $(Nu/Nu_{pl})_{\max} = 4$ . Относительная теплоотдача увеличивается в 1.43 раза в по сравнению с гладкой пластиной, а коэффициент лобового сопротивления растет в 2.08 раза. Однако теплогидравлическая эффективность составляет 1.12.

Обнаруженная численно аномальная интенсификация отрывного течения и теплообмена в наклонных ОТЛ на пластине и на стенке узкого канала, а также ускорение потока в узком канале с двумя  $\vee$  и  $\wedge$  – образными рядами ОТЛ экспериментально подтверждены на стендах НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Казанского научного центра РАН и Казанского национального исследовательского технического университета – Казанского авиационного института. Измеренные перепады статического давления в одиночном ОТЛ при  $Re = 6.7 \times 10^4$  и  $16.7 \times 10^4$  (рис. 7), профили скорости ускоряющегося ламинарного ( $Re = 1000$ ) и турбулентного ( $Re = 4300$ ) потоков в узком канале с двумя рядами из 26 ОТЛ каждый (рис. 8), оценка суммарных чисел Нус-



**Рис. 5.** Распределения составляющих относительного трения  $f_s$  в продольном срединном сечении наклонной ОТЛ при  $\varphi = 65^\circ$  для различных  $H$ . 1 –  $H = 8$ ; 2 – 4; 3 – 3.3; 4 – 2.667; 5 – 2.

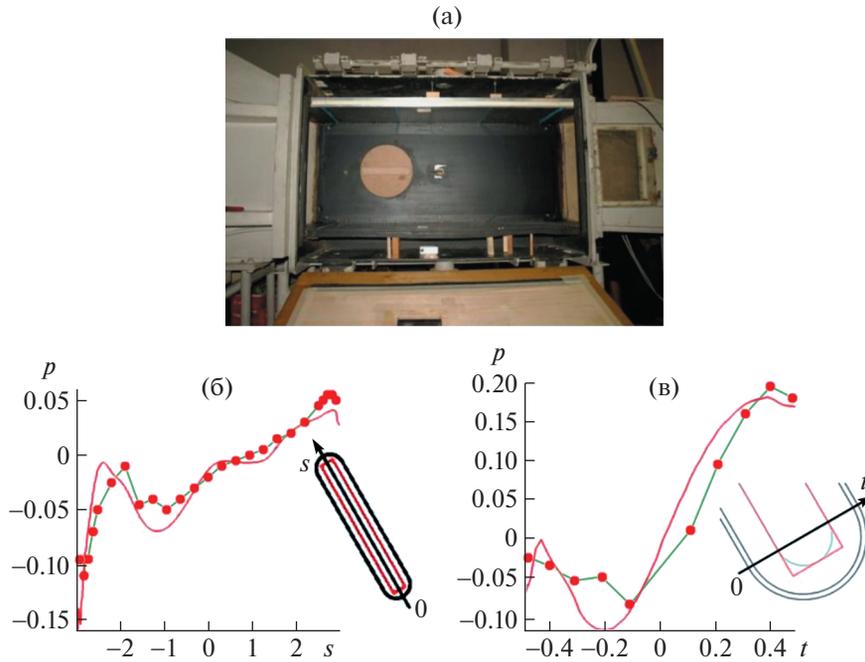


**Рис. 6.** Зависимость относительной суммарной теплоотдачи  $Nu_{mm}/Nu_{mmp}$  участка периодической секции обдуваемого канала (1, 4), относительных гидравлических потерь  $\zeta/\zeta_{pl}$  (2, 5) и теплогидравлической эффективности ( $E$ ), определенной как  $(Nu_{mm}/Nu_{mmp})/(\zeta/\zeta_{pl})$  (3, 6) от расстояния между центрами лунок  $H$ . 4–6 – данные экспериментов И.А. Попова [112].

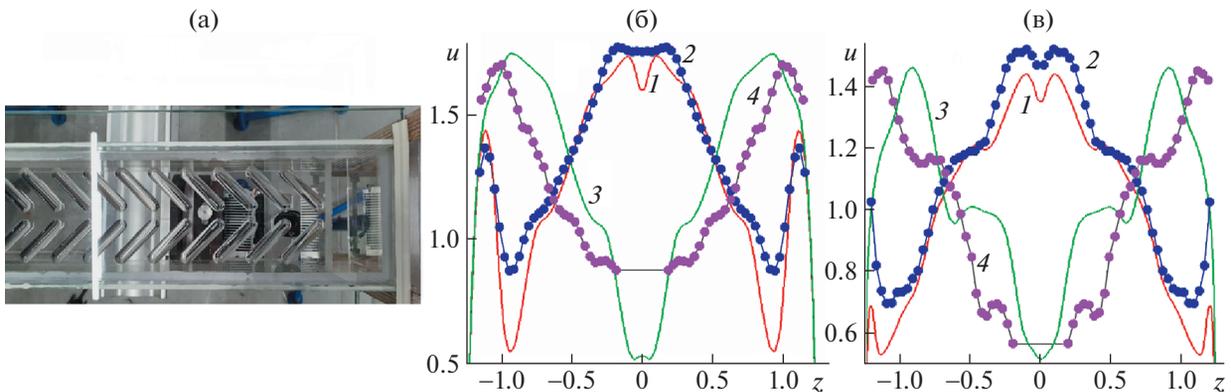
сельта на стенке канала с однорядными ОТЛ хорошо согласуются с численными прогнозами в рамках подхода RANS [109].

Анализ турбулентного обтекания ОТЛ на пластине и на стенке канала показывает, что в диапазоне углов наклона от  $25^\circ$  до  $85^\circ$  наблюдается большой перепад давления между зонами торможения на наветренном склоне и разрежения в месте, где образуется торнадоподобный вихрь [110].

Измерения поля скорости в узком канале с двумя рядами наклонных ОТД при углах наклона  $\pm 45^\circ$  и  $\pm 135^\circ$  показывают, что в ядре потока формируется сдвиговой поток с максимальной скоростью перед входом в лунку, причем ее величина превышает максимальную скорость в плоскопараллельном канале [111].



**Рис. 7.** Фотография экспериментальной установки в НИИ механики МГУ с наклонной ОТЛ на пластине при варьировании  $\varphi$  от 0 до 90° (а), сравнение расчетных (линии) и экспериментальных (точки) распределения статического давления в срединном продольном (б) и характерном поперечном (в) сечениях ОТЛ [109].



**Рис. 8.** Фотография экспериментальной установки облуенного узкого канала с плотным расположением наклонных ОТЛ (а) и сравнение расчетных (1, 3) и экспериментальных (2, 4) поперечных профилей продольной составляющей скорости  $u(z)$  при ламинарном (б –  $Re = 10^3$ ) и турбулентном (в –  $Re = 4000$ ) режимах течения [111]. 1, 2 –  $\varphi = \pm 45^\circ$ ;  $y = 0.4$ ; 3, 4 –  $(\pm 135^\circ)$ ; 0.23.

$\varphi$  – угол наклона ОТЛ,  $H$  – расстояние между центрами ОТЛ в однорядном пакете,  $u$  – продольная составляющая скорости потока,  $f_s$  – составляющая вектора трения по координате  $s$  в срединном продольном сечении ОТЛ,  $f_{pl}$  – трение на плоской стенке.

В [112, 113] представлен обзор по моделированию интенсификации теплообмена с использованием поверхностных вихрегенераторов в виде овальных лунок. Особое внимание обращено на наклонные дуговые лунки, которые позволяют снизить гидродинамические потери в облуенных каналах при незначительном уменьшении теплоотдачи по сравнению с наклонными ОТЛ.

В [114] предложенная энергоэффективная плоская поверхность образуется при нанесении однорядных зигзагообразных поперек потока (VVVVV) канавок в плотной компоновке. Рассматривается конвективный теплообмен при турбулентном обтекании продольного фрагмента пластины длиной 40 и шириной 4 с пакетом из 14 однорядных наклонных \ – образных канавок с заданием условий симметрии на боковых границах. Ширина канавок 1, глубина 0.25, радиус

скругления кромки 0.2, углы наклона 30°, 45°, 50° и 60°, шаг 2.4, число Рейнольдса  $10^4$ , толщина входного пограничного слоя 0.175. Подтверждены открытое в наклонных овально-траншейных лунках явление аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена в зигзагообразных канавках и ускорение пристеночного потока.

В целом представлены новые энергоэффективные структурированные поверхности, хорошо сочетающиеся с перспективными аддитивными технологиями.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда по гранту 22-19-00056.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kalinin E.K., Dreitser G.A., Kopp I.Z., Myakotchin A.S. Efficient surfaces for heat exchangers: fundamental and design. Begell house, 2002. 392 p.
2. Dreitser G.A. Problems in developing highly efficient tubular heat exchangers // Therm. Eng. 2006. V. 53. № 4. P. 279–287.
3. Dzyubenko B., Kuzma-Kichta Yu., Leontiev A., Fedik I., Kholpanov L. Intensification of heat and mass transfer on macro-, micro-, and nanoscales. Begell House, 2016. 630 p.
4. Rashidi S., Hormozi F., Sunden B., Mahian O. Energy saving in thermal energy systems using dimpled surface technology – A review on mechanisms and applications // Appl. Energy. 2019. V. 259. P. 1491–1547.
5. Нагога Г.П. Эффективные способы охлаждения лопаток высокотемпературных газовых турбин. М.: Изд-во МАИ, 1996. 100 с.
6. Ануров Ю.М. Эффективные методы интенсификации теплообмена в системах охлаждения лопаточных аппаратов высокотемпературных газовых турбин // Автореф. докт. дис. СПб: Компания “Энергомаш (ЮК) Лимитед”, 2005. 36 с.
7. Халатов А.А. Теплообмен и гидродинамика около поверхностных углублений (лунок). Киев: Институт технической теплотехники НАН Украины. 2005. 76 с.
8. Халатов А.А., Борисов И.И., Шевцов С.В. Теплообмен и гидродинамика в полях центробежных массовых сил. Киев: Ин-т технической теплотехники НАН Украины. 2005. 500 с.
9. Научные основы технологий XXI века / Под ред. Леонтьева А.И., Пилюгина Н.Н., Полежаева Ю.В., Поляева В.М. М.: УНПЦ “Энергомаш”, 2000. 136 с.
10. Кузма-Кичта Ю.А. Методы интенсификации теплообмена. М.: Изд-во МЭИ, 2001. 112 с.
11. Щукин А.В., Козлов А.П., Агачев Р.С., Чудновский Я.П. Интенсификация теплообмена сферическими выемками при воздействии возмущающих факторов / Под ред. акад. В.Е. Алемасова. Казань: Из-во Казан. гос. техн. ун-та, 2003. 143 с.
12. Быстров Ю.А., Исаев С.А., Кудрявцев Н.А., Леонтьев А.И. Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена в пакетах труб. СПб.: Судостроение, 2005. 398 с.
13. Попов И.А. Гидродинамика и теплообмен внешних и внутренних свободноконвективных вертикальных течений с интенсификацией. Интенсификация теплообмена / Под общ. ред. Ю.Ф. Гортышова. Казань: Центр инновационных технологий, 2007. 326 с.
14. Гортышов Ю.Ф., Попов И.А., Олимпиев В.В., Шелчков А.В., Касьяков С.И. Теплогидравлическая эффективность перспективных способов интенсификации теплоотдачи в каналах теплообменного оборудования. Интенсификация теплообмена: монография / Под общей ред. Ю.Ф. Гортышова. Казань: Центр инновационных технологий, 2009. 531 с.
15. Попов И.А., Махьянов Х.М., Гуреев В.М. Физические основы и промышленное применение интенсификации теплообмена. Интенсификация теплообмена: монография / Под общ. ред. Ю.Ф. Гортышова. Казань: Центр инновационных технологий, 2009. 560 с.
16. Соколов Н.П., Полищук В.Г., Андреев К.Д., Рассохин В.А., Забелин Н.А. Теплообмен и гидравлика в каналах с облуненными поверхностями. СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 288 с.
17. Пристенная интенсификация теплообмена при сложных граничных условиях / А.В. Щукин, А.В. Ильинков. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2014. 252 с.
18. Готовский М.А., Деменок С.Л., Медведев В.В., Сивуха С.М. Теплоотдача и сопротивление каналов с облуненными поверхностями: монография. СПб.: Страта, 2016. 206 с.
19. Теплообмен и гидродинамика в полях центробежных массовых сил. Т. 10. Перспективные схемы пленочного охлаждения / А.А. Халатов, И.И. Борисов, Ю.А. Дашевский, С.Б. Резник. Киев, Изд-во “Политехника”, 2016. 238 с.
20. Леонтьев А.И., Алексеенко С.В., Волчков Э.П. и др. Вихревые технологии для энергетики / Под общей ред. акад. А.И. Леонтьева. М.: Изд. дом МЭИ, 2017. 350 с.
21. Кикнадзе Г.И., Гачечиладзе И.А., Олейник В.Г. Поверхностная обтекания для формирования динамических структур в пограничных и пристенных слоях потоков сплошных сред. Патент № 2020304 РФ. С1 F15D1/02, F15D1/12. Россия – № 5034292/29; Оpubл. 30.09.1994.

22. *Кикнадзе Г.И., Гачечиладзе И.А., Алексеев В.В.* Самоорганизация смерчеобразных струй в потоках вязких сплошных сред и интенсификация теплообмена, сопровождающая это явление. М.: Издательство МЭИ, 2005. 84 с.
23. *Afanasyev V.N., Chudnovsky Y.P., Leontiev A.I., Roganov P.S.* Turbulent of friction and heat transfer characteristics of spherical cavities on a plate // *Exp. Therm. and Fluid Science.* 1993. V. 7. P. 1–8.
24. *Leontiev A.I., Kiselev N.A., Vinogradov Yu.A., Strongin M.M., Zditovets A.G., Burtsev S.A.* Experimental investigation of heat transfer and drag on surfaces coated with dimples of different shape // *Int. Journal of Thermal Sciences.* 2017. V. 118. P. 152–167.
25. *Ligrani P.M., Oliveira M.M., Blaskovich T.* Comparison of heat transfer augmentation techniques // *AIAA J.* 2003. V. 41. № 3. P. 337–362.
26. *Ligrani P.M., Harrison J.L., Mahmmod G.I., Hill M.L.* Flow structure due to dimple depressions on a channel surface // *Phys. Fluids.* 2001. V. 13. № 11. P. 3442–3451.
27. *Mahmood M.L., Ligrani P.M.* Heat transfer in a dimpled channel: combined influences of aspect ration, temperature ration, Reynolds number and flow structure // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* 2002. V. 45. P. 2011–2020.
28. *Won S., Ligrani P.* Numerical predictions of flow structure and local Nusselt number rations along and above dimpled surfaces with different dimple depths in a channel // *Numerical Heat Transfer.* 2004. V. 46 (A). P. 549–570.
29. *Burgess N.K., Ligrani P.M.* Effects of dimple depth on channel Nusselt numbers and friction factors // *Trans. ASME. J. Heat Transfer.* 2005. V. 127. P. 839–847.
30. *Xie G., Liu J., Ligrani P.M., Zhang W.* Numerical predictions of heat transfer and flow structure in a square cross-section channel with various non-spherical indentation dimples // *Numerical Heat Transfer.* 2013. V. 64 (A). P. 187–215.
31. *Bunker R., Belen’kii M.Ya., Gotovsky M.A., Fokin B.S., Isaev S.A.* Experimental and computational investigation of the hydrodynamics and heat transfer in a flat channel of variable width for smooth and intensified surfaces // *Heat Transfer Research.* 2004. V. 35. № 1–2. P. 34–43.
32. *Dees J.E., Bogard D.G., Bunker R.S.* Heat transfer augmentation downstream of rows of various dimple geometries on the suction side of a gas turbine airfoil // *J. Turbomach.* 2010. V. 132. № 3. P. 031010.
33. *Rao Y., Feng Y., Li B., Weigand B.* Experimental and numerical study of heat transfer and flow // *Journal of Heat Transfer.* 2015. V. 137. P. 031901.1–10.
34. *Zhang P., Rao Y., Li Y., Weigand B.* Heat transfer and turbulent flow structure in channels with miniature V-shaped rib-dimple hybrid structures on one wall // *Journal of Heat Transfer.* 2019. V. 141. P. 071903.1–12.
35. *Chen Y., Chew Y., Khoo B.* Enhancement of heat transfer in turbulent channel flow over dimpled surface // *Int. Journal of Heat and Mass Transfer.* 2012. V. 55. P. 8100–8121.
36. *Tay C.M., Chew Y.T., Khoo B.C., Zhao J.B.* Development of flow structures over dimples // *Experimental Thermal and Fluid Science.* 2014. V. 52. P. 278–287.
37. *Syred N., Khalatov A., Kozlov A., Shchukin A., Agachev R.* Effect of surface curvature on heat transfer and hydrodynamics within a single hemispherical dimple // *ASME Journal of Turbomachinery.* 2001. V. 123. P. 609–613.
38. *Kovalenko G.V., Terekhov V.I., Khalatov A.A.* Flow regimes in a single dimple on the channel surface // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2010. V. 51. P. 839–848.
39. *Lan J., Xie J., Zhang D.* Effect of leading edge boundary layer thickness on dimple flow structure and separation control // *Journal of Mechanical Science and Technology.* 2011. V. 25. № 12. P. 3243–3251.
40. *Choi E.Y., Choi Y.D., Lee W.S., Chung J.T., Kwak J.S.* Heat transfer augmentation using a rib-dimple compound cooling technique // *Applied Thermal Eng.* 2013. V. 51. P. 435–441.
41. *Qu H., Shen Z., Xie Y.* Numerical investigation of flow and heat transfer in a dimpled channel among transitional Reynolds numbers // *Mathematical Problems in Engineering.* 2013. ID 989237. P. 1–10.
42. *Rao Y., Li B., Feng Y.* Heat transfer of turbulent flow over surfaces with spherical dimples and teardrop dimples // *Experimental Thermal and Fluid Science.* 2015. V. 61. P. 201–209.
43. *Zhou W., Rao Y., Hu H.* An experimental investigation on the characteristics of turbulent boundary layer flows over a dimpled surface // *Journal of Fluids Engineering.* 2016. V. 138. P. 021204.1–13.
44. *Li M., Khan T.S., Al-Hajri E., Ayub Z.H.* Single phase heat transfer and pressure drop analysis of a dimpled enhanced tube // *Applied Thermal Engineering.* 2016. V. 101. P. 38–46.
45. *Li P., Zhang D., Xie Y., Xie G.* Flow structure and heat transfer of non-Newtonian fluids in microchannel heat sinks with dimples and protrusions // *Applied Thermal Engineering.* 2016. V. 94. P. 50–58.
46. *Huang Z., Li Z.-Y., Yu G.-L., Tao W.-Q.* Numerical investigations on fully-developed mixed turbulent convection in dimpled parabolic trough receiver tubes // *Applied Thermal Engineering.* 2017. V. 114. P. 1287–1299.
47. *Terekhov V., Kalinina S., Mshvidobadze Yu.* Heat transfer coefficient and aerodynamic resistance on a surface with a single dimple // *Enhanced Heat Transfer.* 1997. V. 4. P. 131–145.
48. *Chyu M.K., Yu Y., Ding H.* Heat transfer enhancement in rectangular channels with concavities // *Enhanced Heat Transfer.* 1999. V. 6. P. 429–439.

49. *Hwang S.D., Kwon H.G., Cho H.H.* Heat transfer with dimple/protrusion arrays in a rectangular duct with a low Reynolds number range // *Int. J. Heat Fluid Flow.* 2008. V. 29. P. 916–926.
50. *Mitsudharmadi H., Tay C.M.J., Tsai H.M.* Effect of rounded edged dimple arrays on the boundary layer development // *The Visualization Society of Japan J. Visualization.* 2009. V. 12. № 1. P. 17–25.
51. *Slabaugh C.D., Tran L.V., Kapat J.S.* Heat transfer in a rectangular channel with dimples applied to one wall // *J. Propulsion and Power.* 2011. V. 27. № 6. P. 1303–1314.
52. *Ranaware A.A., Patel I.H.* Experimental analysis of heat transfer enhancement over dimpled surface on one side of plate // *Int. Journal on Recent Technologies in Mechanical and Electrical Engineering.* 2017. V. 4. № 9. P. 1–5.
53. *Turnow J., Kornev N., Zhdanov V., Hassel E.* Flow structures and heat transfer on dimples in a staggered arrangement // *Int. J. Heat and Fluid Flow.* 2012. V. 35. P. 168–175.
54. *Vorayos N., Katkhaw N., Kiatsiriroat T., Nuntaphan A.* Heat transfer behavior of flat plate having spherical dimpled surfaces // *Case Stud. Therm. Eng.* 2016. V. 8. P. 370.1–7.
55. *Katkhaw N., Vorayos N., Kiatsiriroat T., Khunatorn Y., Bunturat D., Nuntaphan A.* Heat transfer behavior of flat plate having 45 ellipsoidal dimpled surfaces // *Case Stud. Therm. Eng.* 2014. V. 2. P. 67–74.
56. *Nazari S., Zamani M., Moshizi S.A.* Comparative study on the influence of depth, number and arrangement of dimples on the flow and heat transfer characteristics at turbulent flow regimes // *Heat and Mass Transfer.* 2018. V. 54. P. 2743–2760.
57. *Fazli M., Raisee M.* Computation of flow and heat transfer through channels with periodic dimple/protrusion walls using low-Reynolds number turbulence models // *Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow.* 2019. V. 29. № 3. P. 1178–1207.
58. *Isaev S.A., Kharchenko V.B., Chudnovskii Ja.P.* Calculation of a three-dimensional flow of a viscous incompressible liquid in the neighborhood of a shallow well on a flat surface // *J. Eng. Physics and Thermophys.* 1994. V. 67. № 5–6. P. 1013–1017.
59. *Isaev S.A., Leont'ev A.I., Baranov P.A.* Identification of self-organized vortexlike structures in numerically simulated turbulent flow of a viscous incompressible liquid streaming around a well on a plane // *Tech. phys. Letters.* 2000. V. 26. № 1. P. 15–18.
60. *Isaev S.A., Leont'ev A.I., Baranov P.A., Usachov A.E.* Bifurcation of vortex turbulent flow and intensification of heat transfer in a hole // *Doklady Phys.* 2000. V. 45. № 8. P. 389–391.
61. *Isaev S.A., Leontiev A.I., Metov Kh.T., Kharchenko V.B.* Modeling of the influence of viscosity on the tornado heat exchange in turbulent flow around a small hole on the plane // *J. Eng. Physics and Thermophys.* 2002. V. 75. № 4. P. 890–898.
62. *Isaev S.A., Leontiev A.I., Baranov P.A., Pyshnyi I.A., Usachov A.E.* Numerical analysis of the vortex intensification in a heat transfer in a channel with a set of deep spherical dimples on one of the walls // *Dokl. Phys.* 2002. V. 47. № 10. P. 755–757.
63. *Baranov P.A., Isaev S.A., Leontiev A.I., Mityakov A.V., Mityakov V.Yu., Sapozhnikov S.Z.* Experimental and numerical modeling of vortex heat transfer in turbulent flow past spherical dimple on a plane // *Thermophys. and aeromechanics.* 2002. V. 9. № 4. P. 497–508.
64. *Isaev S.A., Leontiev A.I., Kudryavtsev N.A., Pyshnyi I.A.* The effect of rearrangement of the vortex structure on heat transfer under condition of increasing depth of a spherical dimple on the wall of a narrow channel // *High Temp.* 2003. V.41. № 2. P. 229–232.
65. *Isaev S.A., Leont'ev A.I., Baranov P.A., Pyshnyi I.A.* Numerical analysis of the influence of the depth of a spherical hole on a plane wall on turbulent heat transfer // *J. Eng. Physics and Thermophys.* 2003. V. 76. № 1. P. 61–69.
66. *Isaev S.A., Leontiev A.I., Kiknadze G.I., Kudryavtsev N.A., Gachchiladze I.A.* Comparative analysis of the vortex heat exchange in turbulent flows around a spherical hole and two-dimensional trench on plane wall // *J. Eng. Physics and Thermophys.* 2005. V. 78. № 4. P. 749–761.
67. *Mityakov V.Yu., Mityakov A.V., Sapozhnikov S.Z., Isaev S.A.* Local heat fluxes on the surfaces of dimples. Ditches and cavities // *Therm. Eng.* 2007. V. 54. № 3. P. 200–203.
68. *Isaev S.A., Leontiev A.I., Zhdanov V.L., Kornev N.V., Hassel E.* Whirlwind-like enhancement of heat transfer on dimpled reliefs // *Heat Transfer Research.* 2008. V. 39. № 1. P. 79–90.
69. *Isaev S.A., Sapozhnikov S.Z., Mityakov V.Yu., Mityakov A.V., Mozhaiskii S.A., Usachov A.E.* Numerical analysis of the influence of the physical viscosity on the vortex heat transfer in laminar and turbulent flows around a heated plate with a shallow spherical hole // *J. Engineering Physics and Thermophysics.* 2009. V. 82. № 5. P. 847–857.
70. *Isaev S.A., Kornev N.V., Leontiev A.I., Hassel E.* Influence of the Reynolds number and the spherical dimple depth on the turbulent heat transfer and hydraulic loss in a narrow channel // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2010. V. 53. № 1–3. P. 178–197.
71. *Isaev S.A., Leontiev A.I., Shchelchkov A.V., Gul'tsova M.E.* Reconstruction of the vortex-jet structure of the separation turbulent flow in a spherical dimple on the wall of a narrow channel with increase in the depth of the dimple and intensification of the secondary flow in it // *J. Eng. Physics and Thermophys.* 2015. V. 88. № 5. P. 1304–1308.

72. *Isaev S.A., Schelchkov A.V., Leontiev A.I., Baranov P.A., Gulcova M.E.* Numerical simulation of the turbulent air flow in the narrow channel with a heated wall and a spherical dimple placed on it for vortex heat transfer enhancement depending on the dimple depth // *Int. J. Heat and Mass Transfer*. 2016. V. 94. P. 426–448.
73. *Isaev S.A., Leontiev A.I., Baranov P.A., Popov I.A., Shchelchkov A.V., Gabdrakhmanov I.P.* Numerical simulation of the intensification of the heat exchange in a plane-parallel channel with a cylindrical shallow dimple on the heated wall // *J. Eng. Physics and Thermophys.* 2016. V. 89. № 5. P. 1186–1201.
74. *Исаев С.А., Баранов П.А., Усачов А.Е.* Многоблочные вычислительные технологии в пакете VP2/3 по аэротермодинамике. Саарбрюкен: LAP LAMBERT Academic Pub., 2013. 316 с.
75. *Сапожников С.З., Митяков В.Ю., Митяков А.В.* Градиентные датчики теплового потока. СПб: Изд-во СПбГПУ, 2003. 168 с.
76. *Сапожников С.З., Митяков В.Ю., Митяков А.В.* Основы градиентной теплотометрии. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 203 с.
77. *Исаев С.А., Баранов П.А., Гортышов Ю.Ф., Леонтьев А.И., Попов И.А., Шелчков А.В., Миронов А.А., Скрыпник А.Н.* Теплообменная поверхность. Патент РФ. RU 2684303 C1, МПК F28F 3/04 (2006.01). Заявка 2018121892, 13.06.2018 опубликована 05.04.2019. Бюл. № 10.
78. *Henry F.S., Pearcey H.H.* Numerical model of boundary layer control using air-jet generated vortices // *AIAA J.* 1994. V. 32. № 12. P. 2415–2425.
79. *Isaev S.A., Leontiev A.I., Mityakov A.V., Pyshnyi I.A., Usachov A.E.* Intensification of tornado turbulent heat exchange in asymmetric holes on a plane wall // *J. Eng. Physics and Thermophysics.* 2003. V. 76. № 2. P. 266–270.
80. *Isaev S.A., Leont'ev A.I., Baranov P.A.* Simulation tornado-like enhancement of heat transfer for low-velocity motion of air in a rectangular channel with cavities. Part 1: Selection and justification of calculation methods // *Therm. Eng.* 2007. V. 54. № 3. P. 193–199.
81. *Isaev S.A., Leont'ev A.I., Baranov P.A.* Simulation tornado-like enhancement of heat transfer for low-velocity motion of air in a rectangular channel with cavities. Part 2: Results of parametric studies // *Therm. Eng.* 2007. V. 54. № 8. P. 655–663.
82. *Isaev S.A., Leontiev A.I.* Problems of simulating tornado-like heat transfer turbulent flow past a dimpled relief on a narrow channel wall // *J. Eng. Physics and Thermophys.* 2010. V. 83. № 4. P. 783–793.
83. *Turnow J., Kornev N., Isaev S., Hassel E.* Vortex mechanism of heat transfer enhancement in a channel with spherical and oval dimples // *Heat and Mass Transfer/Waerme- und Stoffuebertragung.* 2011. V. 47. № 3. P. 301–311.
84. *Isaev S.A., Leontiev A.I., Kornev N.V., Hassel E., Chudnovskii Ja.P.* Heat transfer intensification for laminar and turbulent flows in a narrow channel with one-row oval dimples // *High Temp.* 2015. V. 53. № 3. P. 375–386.
85. *Воропаев Г.А., Воскобойник А.В., Воскобойник В.А., Исаев С.А.* Визуализация ламинарного обтекания овальной лунки // *Прикладная гидромеханика.* 2009. Т. 11. № 4. С. 31–46.
86. *Isaev S.A., Leontiev A.I., Gul'tsova M.E., Popov I.A.* Transformation and intensification of tornado-like flow in a narrow channel during elongation of an oval dimple with constant area // *Tech. Phys. Lett.* 2015. V. 41. № 6. P. 606–609.
87. *Isaev S.A., Schelchkov A.V., Leontiev A.I., Gortyshov Yu.F., Baranov P.A., Popov I.A.* Tornado-like heat transfer enhancement in the narrow plane-parallel channel with the oval-trench dimple of fixed depth and spot area // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* 2017. V. 109. P. 40–62.
88. *Isaev S., Leontiev A., Chudnovsky Y., Popov I.* Vortex heat transfer enhancement in narrow channels with a single oval-trench dimple oriented at different angles to the flow // *J. Enhanced Heat Transfer.* 2018. V. 25. № 6. P. 579–604.
89. *Isaev S., Leontiev A., Chudnovsky Y., Nikushchenko D., Popov I., Sudakov A.* Simulation of vortex heat transfer enhancement in the turbulent water flow in the narrow plane-parallel channel with an inclined oval-trench dimple of fixed depth and spot area // *Energies.* 2019. V. 12. P. 1296–1–24.
90. *Isaev S., Gritckevich M., Leontiev A., Popov I.* Abnormal enhancement of separated turbulent air flow and heat transfer in inclined single-row oval-trench dimples at the narrow channel wall // *Acta Astronautica.* 2019. V. 163 (Part A). P. 202–207.
91. *Isaev S.A., Gritckevich M.S., Leontiev A.I., Popov I.A., Sudakov A.G.* Anomalous intensification of a turbulent separated flow in inclined, single-row, oval-trench dimples on the wall of a narrow channel // *High Temp.* 2019. V. 57. № 5. P. 771–774.
92. *Isaev S.A., Gritckevich M.S., Leontiev A.I., Milman O.O., Nikushchenko D.V.* NT Vortex enhancement of heat transfer and flow in the narrow channel with a dense packing of inclined one-row oval-trench dimples // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2019. V. 145. P. 118737.1–13.
93. *Isaev S.A., Gritckevich M.S., Leontiev A.I., Milman O.O., Nikushchenko D.V.* Turbulent flow acceleration and abnormal intensification of separated flow in the channel with a dense arrangement of inclined single-row oval-trench dimples // *Thermophysics and Aeromechanics.* 2019. V. 26. № 5. P. 697–702.
94. *Isaev S.A.* Thermal-hydrodynamic design of energy-efficient surfaces with inclined oval-trench vortex generators // *J. Phys. Conf. Series.* 2019. V. 1359. P. 012002.

95. *Isaev S.A., Leont'ev A.I., Nikushchenko D.V., Sudakov A.G., Usachov A.E.* Intensification of the detached flow in a single row of inclined oval trench dimples on the wall of a narrow channel // *J. Eng. Physics and Thermophysics*. 2021. V. 94. № 1. P. 151–159.
96. *Isaev S.A., Chulyunin A.Yu., Nikushchenko D.V., Sudakov A.G., Usachov A.E.* Analysis of the anomalous intensification of a separate flow and heat transfer in a stabilized section of a narrow channel with single-row, inclined, oval-trench dimples with the use of various grids and turbulence models // *High Temp*. 2021. V. 59. № 1. P. 106–114.
97. *Isaev S.A., Baranov P.A., Leontiev A.I., Popov I.A.* Intensification of a laminar flow in a narrow microchannel with single-row inclined oval-trench dimples // *Tech. Phys. Letters*. 2018. V. 44. № 5. P. 398–400.
98. *Isaev S.A., Leont'ev A.I., Mil'man O.O., Sudakov A.G., Usachov A.E., Gul'tsova M.E.* Intensification of heat exchange in laminar vortex air flow in a narrow channel with a row of inclined oval trenches // *J. Eng. Physics and Thermophysics*. 2018. V. 91. № 4. P. 963–974.
99. *Isaev S.A., Leontiev A.I., Milman O.O., Popov I.A., Sudakov A.G.* Influence of the depth of single-row oval-trench dimples inclined to laminar air flow on heat transfer enhancement in a narrow micro-channel // *Int. J. Heat and Mass Transfer*. 2019. V. 134. P. 338–358.
100. *Isaev S.A., Mazo A.B., Nikushchenko D.V., Popov I.A., Sudakov A.G.* The influence of the angle of inclination of single-row oval-trench dimples in the stabilized hydrodynamic section of a narrow channel on the anomalous intensification of the separated turbulent flow // *Tech. Phys. Letters*. 2020. V. 46. № 11. P. 1064–1067.
101. *Isaev S.A., Son E.E., Leontiev A.I., Popov I.A., Nikushchenko D.V.* Heat transfer enhancement by surface vortex generators. New basic mechanisms and industrial technologies // *The Third Conference "Problems of Thermal Physics and Power Engineering"*. *J. Phys. Conf. Series*. 2020. V. 1683. P. 022084.
102. *Isaev S., Lebiga V., Sudakov A., Nikushchenko D., Miao J.J., Chung K.M., Zinovyev V.* Structures control with the use of the throttling effect, vortex cells and surface generators – inclined oval-trench dimples // *AIP Conf. Proc.* 2021. V. 2351. P. 020002.
103. *Isaev S.A., Leontiev A.I., Nikushchenko D.V., Son E.E.* Abnormal separated flow intensification and heat transfer enhancement in single-row inclined oval-trench dimples on the narrow channel wall // *J. Phys. Conf. Series*. 2021. V. 1891. P. 012024.
104. *Isaev S.A., Leontiev A.I., Milman O.O., Nikushchenko D.V., Sudakov A.G.* The effect of anomalous intensification of the separated flow and vortex heat transfer in an inclined oval-trench dimple and the construction of energy-efficient well-structured surfaces // *AIP Conf. Proc.* 2020. V. 2211. P. 020003.
105. *Isaev S., Leontiev A., Milman O., Nikushchenko D., Egorova A.* Energy-efficient surface of air capacitors with inclined single-row oval-trench dimples and protrusions // *J. Phys. Conf. Series*. 2020. V. 1565. P. 012001.
106. *Исаев С.А., Леонтьев А.И., Мильман О.О., Никущенко Д.В., Попов И.А.* Энергоэффективные поверхности с многорядными наклонными овально-траншейными лунками для воздушных конденсаторов // *Изв. РАН. Энергетика*. 2020. № 4. С. 3–10.
107. *Isaev S.A., Popov I.A., Mikheev N.I., Guvernuyuk S.V., Nikushchenko D.V., Sudakov A.G.* Promising dimple technologies of vortex heat and mass transfer enhancement in energy and microelectronics // *J. Phys. Conf. Ser.* 2020. V. 1675. P. 012004.
108. *Isaev S.A., Son E.E., Leontiev A.I., Nikushchenko D.V., Sudakov A.G.* Effective heat transfer surfaces of tubes and plates with spiral vortex generators – inclined oval-trench dimples // *J. Phys. Conf. Series*. 2020. V. 1677. P. 012013.
109. *Isaev S.A., Guvernuyuk S.V., Mikheev N.I., Popov I.A., Nikushchenko D.V.* Numerical and experimental study of abnormal enhancement of separated turbulent flow and heat transfer in inclined oval-trench dimples on the plate and on the narrow channel wall // *J. Phys. Conf. Series*. 2021. V. 2039. P. 012009.
110. *Зубин М.А., Зубков А.Ф.* Структура отрывного обтекания цилиндрической каверны на стенке плоского канала // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 2022. № 1. С. 81–89.
111. *Isaev S.A., Popov I.A., Mikheev N.I., Guvernuyuk S.V., Zubin M.A., Nikushchenko D.V., Sudakov A.G.* Vortex heat transfer enhancement in the separated flow near structured dimpled surfaces // *J. Phys. Conf. Series*. 2021. V. 2057. P. 012002.
112. *Mironov A., Isaev S., Skrypnik A., Popov I.* Numerical and physical simulation of heat transfer enhancement using oval dimple vortex generators – Review and recommendations // *Energies*. 2020. V. 13. P. 5243.
113. *Миронов А.А., Исаев С.А., Скрыпник А.Н., Попов И.А., Гортышов Ю.Ф.* Физическое моделирование теплогидравлических характеристик каналов с овально-траншейными вихрегенераторами // *Тепловые процессы в технике*. 2020. Т. 12. № 9. С. 386–402.
114. *Isaev S.A., Leontiev A.I., Nikushchenko D.V., Kong D., Chung K.M., Sudakov A.G.* Vortex heat transfer enhancement by energy-efficient structured plates with zigzag grooves for micro- and macro-scale energy and electronic devices // *TPEAC 2021. Journal of Phys.: Conf. Ser.* 2022. V. 2150. P. 012004.

УДК 532.517.3

## РАЗВИТИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В КРУГЛОЙ ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУЕ С ДВУМЯ МОДАМИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

© 2022 г. К. Э. Абдулманов<sup>а,\*</sup>, Н. В. Никитин<sup>а,\*\*</sup><sup>а</sup> МГУ им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

\*E-mail: ke.abdulmanov@yandex.ru

\*\*E-mail: nvnikitin@mail.ru

Поступила в редакцию 31.05.2022 г.

После доработки 31.05.2022 г.

Принята к публикации 02.06.2022 г.

Численно исследуются устойчивость и нелинейное взаимодействие возмущений в круглой струе при  $Re = 2850$ . Воспроизводятся условия лабораторного эксперимента, выполненного ранее в НИИ механики МГУ. Характерная особенность изучаемой струи – наличие трех точек перегиба во входном профиле скорости, что существенно определяет свойства течения. Линейная устойчивость исследуется с использованием двух подходов: квазипараллельного и пространственного. Получено хорошее количественное согласие результатов двух подходов, а также согласие с результатами невязкой теории. Проведены численные расчеты с целью объяснения и интерпретации результатов лабораторного эксперимента, в котором обнаружено изменение протяженности зоны перехода к турбулентности в струе под действием периодических во времени осесимметричных возмущений. Показано, что осесимметричные возмущения даже значительной начальной амплитуды не приводят к переходу к турбулентности. Наблюдающийся в эксперименте переход может объясняться наличием неконтролируемых трехмерных возмущений, усиливающихся на фоне достаточно интенсивных искусственных возмущений. Проведенные в данной работе исследования подтверждают выдвинутую гипотезу. Таким образом, инициатором перехода служат трехмерные возмущения, а осесимметричные возмущения при достаточно большой амплитуде лишь ускоряют их рост. Показано, что более интенсивные трехмерные возмущения могут быть способными обеспечивать еще более быстрый переход даже при отсутствии осесимметричной составляющей.

*Ключевые слова:* открытые течения, уравнения Навье–Стокса, прямое численное моделирование, гидродинамическая неустойчивость, переход к турбулентности

DOI: 10.31857/S0568528122050097

Широкое распространение струйных течений в природных системах и технических устройствах стимулирует интерес инженеров и исследователей к изучению различных явлений, связанных с их развитием. Турбулизация струй существенно меняет, например, процессы тепло- и массообмена с окружающей средой, поэтому изучение процессов ламинарно-турбулентного перехода в струях чрезвычайно актуально, в частности, с целью поиска средств управления переходом для получения оптимальных решений и повышения эффективности технологических процессов. Процесс ламинарно-турбулентного перехода в струях существенно зависит как от уровня возмущенности потока на срезе сопла, так и от формы профиля средней скорости во входном потоке. Ламинарные струйные течения теряют устойчивость уже при очень низких числах Рейнольдса [1–3]. При больших  $Re \sim 10^3 - 10^4$  переход к турбулентности в круглых струях происходит, как правило, в непосредственной близости от среза сопла, в пределах расстояния  $1D$  ( $D$  – диаметр сопла). Несколько лет назад в стенах НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова было спроектировано и изготовлено компактное устройство создания круглых воздушных струй, обеспечивающее сохранение ламинарного течения при  $Re = U_b R / \nu < 6000$  ( $U_b$  – средняя скорость во входном потоке,  $R = D/2$ ) на расстояниях до  $\sim 6D$  при  $D = 0.12$  м [4, 5]. При этом размер устройства составляет всего около  $1.5D$ . Характерной особенностью струй, порождаемых устройством при разных значениях числа Рейнольдса, является наличие двух мод неустойчивых возмущений, существенно различающихся по скорости нарастания при распространении вниз

по потоку [6, 7]. При внесении искусственных осесимметричных возмущений обнаружено, что длина ламинарного участка струи зависит от частоты возмущения, достигая минимума при частотах, соответствующих максимальному росту малых возмущений. Обнаружено также, что внесение трехмерных искусственных возмущений приводит к существенно более быстрому переходу к турбулентности [8].

В настоящей работе проводится численное моделирование развития возмущений в круглой струе в условиях, близких к экспериментальным. Изучаются детали линейной эволюции и нелинейного взаимодействия возмущений, отвечающих разным модам неустойчивости. Дается подробное сопоставление с экспериментом.

## 1. ПОСТАНОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Рассматривается задача об истечении вязкой несжимаемой жидкости в полупространство  $\{x > 0\}$  из круглого отверстия радиусом  $R$  (срез сопла) в плоскости  $\{x = 0\}$ . Свойства окружающей среды совпадают со свойствами вытекающей струи. Нестационарное поле скорости  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  ( $t$  – время,  $\mathbf{x}$  – точка пространства) отыскивается путем численного решения уравнений Навье–Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь  $p$  – кинематическое давление,  $\nu$  – вязкость жидкости.

Задача решается в цилиндрической системе координат  $\mathbf{x} = (x, r, \theta)$  в цилиндрической расчетной области  $\{0 < x < X_m, r < R_m\}$ . Радиус расчетной области  $R_m$  значительно превышает радиус сопла. На срезе сопла задается нестационарное поле скорости (входные граничные условия):  $\mathbf{u}(x = 0, r \leq R) = \mathbf{U}_0(t, r, \theta)$ . На остальной площади входного сечения  $\{x = 0, r > R\}$  и на цилиндрической границе расчетной области  $\{x > 0, r = R_m\}$  ставятся условия непротекания и свободного проскальзывания. На выходной границе  $\{x = X_m\}$  задаются мягкие граничные условия  $\partial \mathbf{u} / \partial x = 0$ . Цель работы состоит в исследовании поведения струи на начальном участке длиной порядка  $20R$ ; для исключения влияния искусственных выходных условий на результаты расчетов в интересующей области длина расчетной области  $X_m$  выбирается существенно превышающей этот размер.

Для численного решения задачи применяется универсальный метод решения уравнений Навье–Стокса [9], использующий конечно-разностный метод пространственной дискретизации в направлениях  $x$  и  $r$  и полуявную схему интегрирования по времени. В продольном направлении используется равномерная расчетная сетка, а в радиальном – неравномерная, с экспоненциальным ростом шага сетки при  $r > R$ . Для представления искомых функций по угловой координате используются тригонометрические ряды Фурье. При варьировании сеточных параметров (размеров расчетной области  $X_m$ ,  $R_m$  и числа узлов сетки в соответствующих направлениях  $Im$ ,  $Jm$ ) установлено, что набором, достаточным для удовлетворительной точности всех вычислений при рассматриваемом числе Рейнольдса, является  $X_m = 40R$ ,  $R_m = 6R$ ,  $Im = 1024$ ,  $Jm = 128$ . Большинство представляемых ниже результатов получено при этих значениях параметров.

## 2. ОСНОВНОЕ ТЕЧЕНИЕ И ЕГО УСТОЙЧИВОСТЬ

В настоящей работе приводятся результаты исследований, соответствующих условиям эксперимента [4, 7, 8] при  $Re = 2850$  (в упомянутых работах число Рейнольдса вычисляется не через радиус, а через диаметр сопла и принимает поэтому вдвое большие значения). Профиль продольной компоненты скорости на срезе сопла  $U_0(r)$ , реализующийся при этом  $Re$ , имеет вид, представленный на рис. 1. Там же изображен профиль завихренности  $\Omega_0(r) = -dU_0/dr$ . Далее все величины приводятся в безразмерном виде; в качестве масштаба скорости берется средняя скорость  $U_b$ , а масштаба длины – радиус сопла  $R$ . Характерной особенностью рассматриваемой струи является наличие трех точек перегиба в профиле скорости  $U_0(r)$  (соответствующих трем локальным экстремумам в распределении завихренности  $\Omega_0(r)$ ). Первая точка перегиба расположена в районе  $r = 0.5$ , а пара других в районе  $r = 0.8$ . Как будет показано ниже, такой форме профиля скорости отвечают две моды неустойчивых возмущений, развивающихся по существенно различающимся законам.

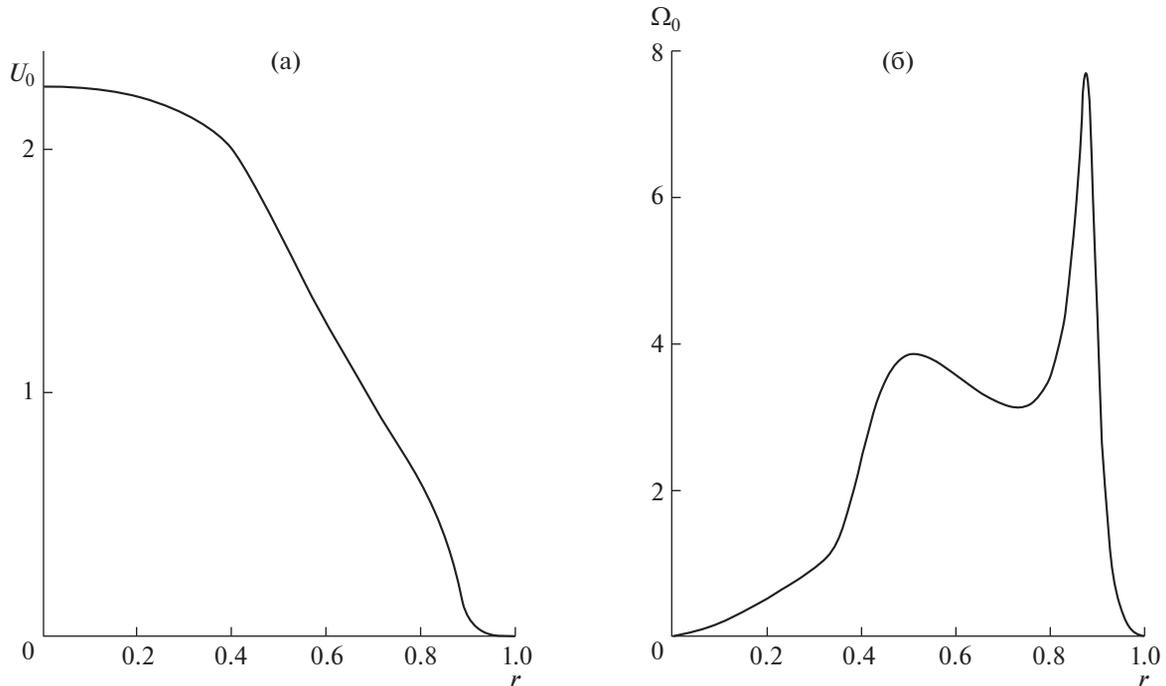
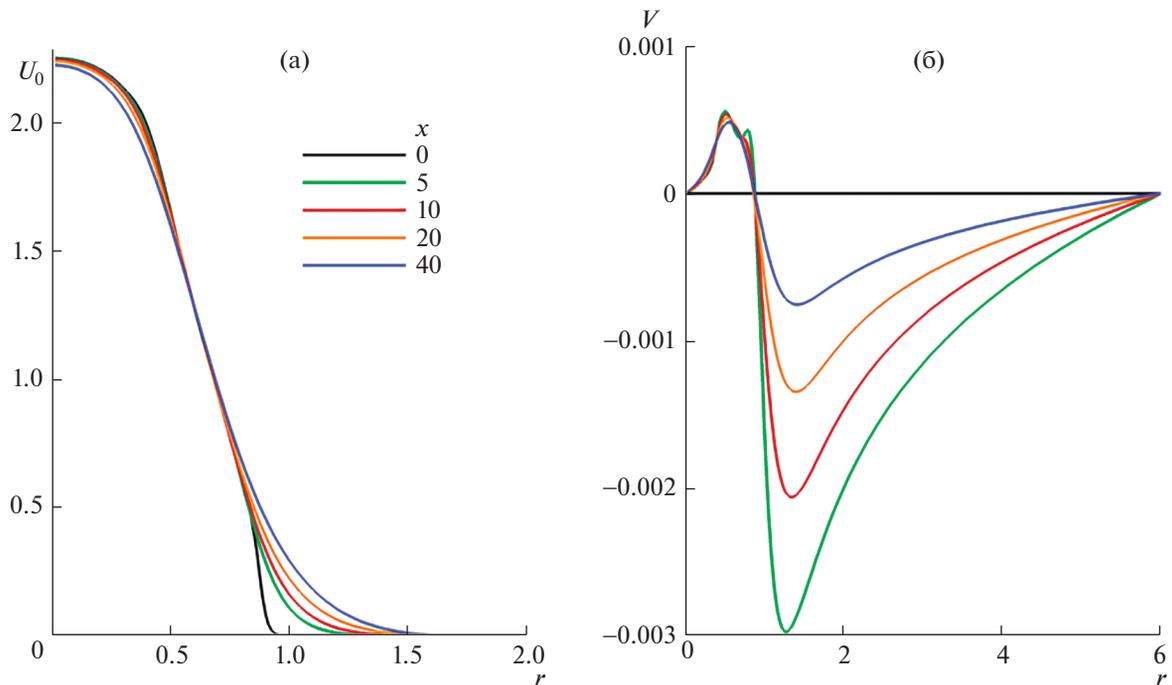


Рис. 1. Профиль скорости  $U_0(r)$  (а) и завихренности  $\Omega_0(r)$  (б) струи на срезе сопла при  $Re = 2850$ .

Для расчета основного течения  $\mathbf{u} = \mathbf{U} = (U(x, r), V(x, r), 0)$  уравнения (1.1) решаются с осесимметричным стационарным условием на входе  $\mathbf{u}(x = 0) = (U_0(r), 0, 0)$  и начальным условием  $\mathbf{u}(x > 0) = \mathbf{u}(x = 0)$ . Задача интегрируется по времени до установления стационарного решения. Профили продольной  $U(x, r)$  и радиальной  $V(x, r)$  компонент скорости основного течения на разных расстояниях  $x$  от среза сопла изображены на рис. 2. Скорость на оси струи при рассматриваемом числе Рейнольдса претерпевает лишь незначительные изменения, падение при  $x = 40$  составляет всего около 1%. Основная деформация профиля продольной компоненты наблюдается в периферийной области  $r > 0.85$ . Внешние точки перегиба, наблюдающиеся во входном течении, пропадают уже при  $x \approx 7.5$ . Соответствующие обобщенные точки перегиба, определяемые из условия  $(U'(r)/r)' = 0$  (штрих обозначает производную) и ответственные за возникновение неустойчивости в осесимметричных течениях [4], пропадают еще раньше, при  $x \approx 3.75$ . Величина радиальной компоненты скорости на всем протяжении струи остается на три порядка меньше продольной. В каждом сечении  $x$  радиальная скорость положительна в области ядра струи,  $r < 1$ , что отражает факт расширения струи. Во внешней области радиальная компонента отрицательна, что соответствует увлечению жидкости из окружающего пространства. Этот эффект максимален вблизи входного сечения и ослабевает по мере удаления от него.

При исследовании устойчивости основного течения поле скорости в (1.1) представляется в виде суммы основного течения и возмущения:  $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$ . Возмущения предполагаются малыми, и уравнения линеаризуются относительно  $\mathbf{u}'$ . Решение получающихся таким образом линейных уравнений проводилось в двух постановках. В первой, *квазипараллельной* постановке, изменение основного течения вдоль направления  $x$  учитывается лишь параметрически. Другими словами, уравнения решаются для серии основных течений вида  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(r)$ , полученных для разных значений координаты  $x$ , а членами, содержащими производные по  $x$  от компонент скорости основного течения, пренебрегается. Обоснованием применения квазипараллельного подхода является малая скорость изменения основного течения вдоль продольной координаты по сравнению с изменениями по радиусу. Во второй, более полной постановке, называемой далее *пространственной*, линеаризованные уравнения для возмущений решаются без дополнительных упрощений с определенными нестационарными граничными условиями на входе. Факт устойчивости или неустойчивости основного течения устанавливается в этом случае по характеру эволюции разных возмущений вниз по потоку.



**Рис. 2.** Профили продольной (а) и радиальной (б) компонент скорости основного течения на разных расстояниях от среза сопла.

Решение задачи устойчивости в рамках квазипараллельного подхода сводится к решению линейных уравнений, коэффициенты которых не зависят от продольной и угловой координат, а также и от времени. Решения таких уравнений можно искать в виде нормальных мод, т.е. с экспоненциальной зависимостью от указанных переменных:

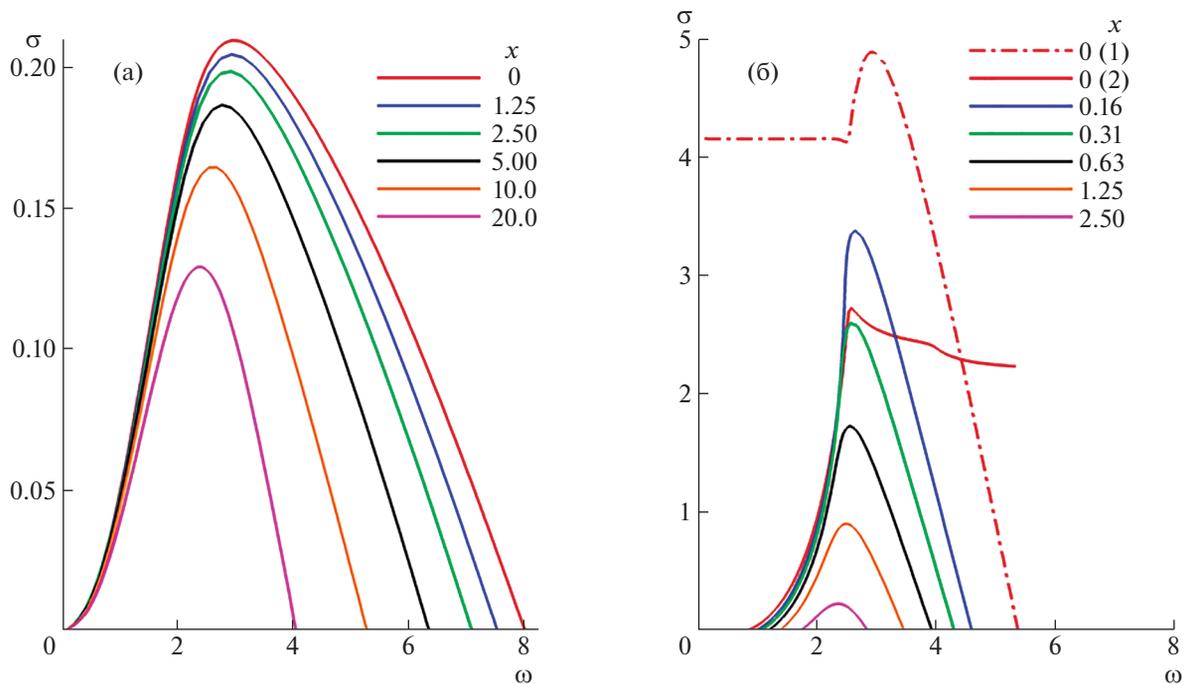
$$\mathbf{u}'(t, x, r, \theta) = \mathbf{v}'(r) \exp[i(\alpha x + n\theta - \omega t)] \quad (2.1)$$

Здесь  $n$  – целое азимутальное число,  $\alpha$  и  $\omega$  – комплексные волновое число и частота. Задача в этом случае сводится к решению задачи на собственные значения  $\mathbf{L}\mathbf{v}' = i\omega\mathbf{v}'$  для некоторого линейного дифференциального оператора  $\mathbf{L}$ , зависящего от параметров  $\alpha$  и  $n$ . После дискретизации уравнений по  $r$  получается задача на собственные значения для комплексной матрицы

$$\mathbf{A}(\alpha, n)\mathbf{v}'(r) = i\omega\mathbf{v}'(r) \quad (2.2)$$

Вектор  $\mathbf{v}'(r)$  представляет в данном случае конечномерный вектор значений компонент скорости возмущения в узлах расчетной сетки по радиальной координате.

По смыслу физической постановки задачи при каждом  $n$  требуется отыскание комплексных собственных значений  $\alpha$  как функций действительной частоты  $\omega$ . Однако матрица  $\mathbf{A}$  в (2.2) зависит от  $\alpha$  нелинейно, так что непосредственное определение  $\alpha$  при заданном  $\omega$  затруднительно. Для этой цели был разработан итерационный алгоритм, основанный на методе Ньютона. На первом этапе алгоритма для некоторого действительного  $\alpha$  с помощью QR-алгоритма определяются все (комплексные) собственные значения  $\omega$  и собственные векторы  $\mathbf{v}'(r)$  задачи (2.2). Из них отбирается решение, отвечающее растущему по времени возмущению, т.е. собственное значение  $\omega$  с положительной мнимой частью  $\omega_i$ , и соответствующий ему собственный вектор. Эти значения используются в качестве начального приближения при итерационном продвижении по параметру в сторону уменьшения  $\omega_i$  при действительном  $\alpha$ . Таким образом отыскивается одно решение с действительной частотой  $\omega$  и действительным волновым числом  $\alpha$ , т.е. собственное решение задачи (2.2), обладающее нейтральным поведением как во времени, так и в пространстве. На следующем этапе полученное нейтральное возмущение используется в качестве начального приближения для определения пространственно растущих при  $x > 0$  собственных решений, т.е. решений, соответствующих действительным  $\omega$  и комплексным  $\alpha$ , обладающим отрицательной мнимой частью  $\alpha_i$ .



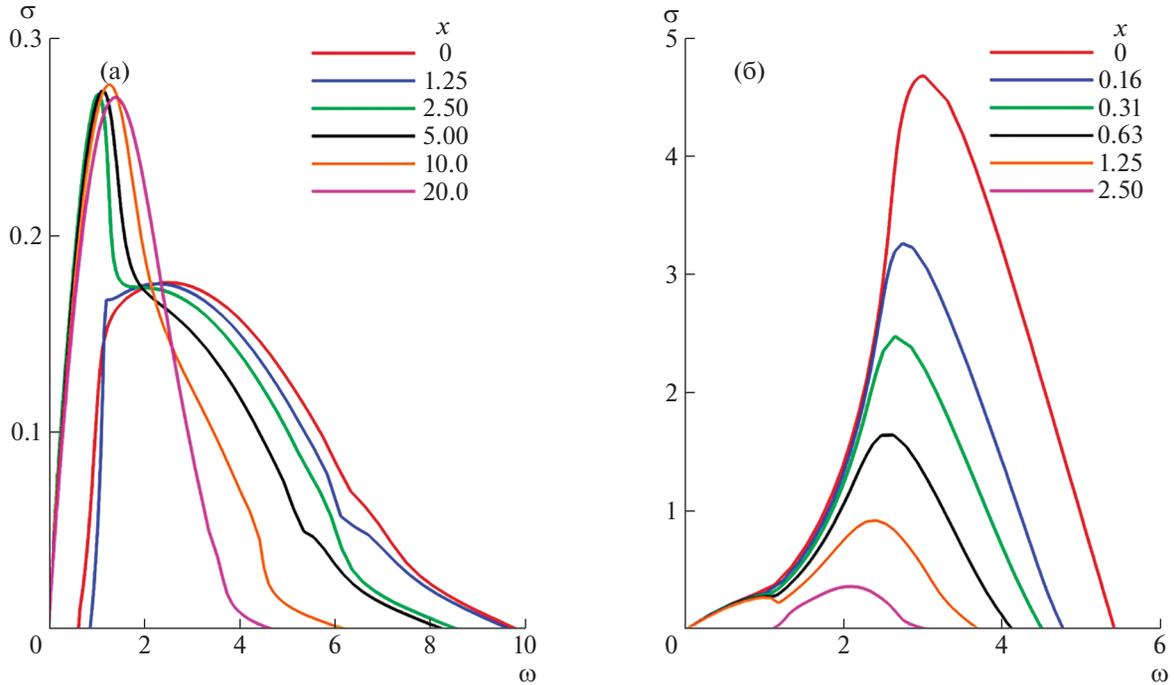
**Рис. 3.** Коэффициенты нарастания  $\sigma$  малых возмущений с азимутальным числом  $n = 0$  как функции частоты  $\omega$ , полученные в рамках квазипараллельного подхода на разных расстояниях  $x$  вниз по потоку. Внутренняя мода (а) и внешняя мода (б).

Среди осесимметричных решений ( $n = 0$ ) обнаружено две моды растущих возмущений. Одна из них связана с точкой перегиба в профилях скорости, наблюдающейся в районе  $r = 0.5$ , будем называть ее *внутренней* модой, в отличие от *внешней* моды, ассоциированной с точками перегиба в районе внешней границы струи. Коэффициенты нарастания  $\sigma = -\alpha_i$  каждой из мод в зависимости от действительной частоты  $\omega$  на разных расстояниях от среза сопла приведены на рис. 3. Внутренняя мода остается растущей на всем исследованном отрезке струи. Максимальный рост ее несколько уменьшается с ростом  $x$  от  $\sigma \approx 0.21$  при  $x = 0$  до  $\sigma \approx 0.13$  при  $x = 20$ . Соответствующая фазовая скорость остается почти постоянной  $c_r = 1.75$ , что примерно совпадает со скоростью основного течения во внутренних точках перегиба при разных  $x$ . Частота, соответствующая максимально растущему возмущению, также несколько уменьшается от  $\omega \approx 3.0$  при  $x = 0$  до  $\omega \approx 2.5$  при  $x = 20$ .

Возмущения внешней моды (рис. 3б) растут существенно быстрее, однако область их нарастания вниз по потоку ограничивается интервалом  $x < 3.2$ . На больших расстояниях от сопла внешние (обобщенные) точки перегиба в профиле скорости пропадают, и связанная с ними неустойчивая мода исчезает. Интересно, что на срезе сопла и в непосредственной близости от него до  $x \approx 0.1$  линия  $\sigma(\omega)$  не является непрерывной, а состоит из двух ветвей (линии (1) и (2) при  $x = 0$  на рис. 3б). Объяснение такому поведению зависимости  $\sigma(\omega)$  дано в [10]. Показано, что разрывное  $\sigma(\omega)$  отвечает абсолютному характеру неустойчивости течения. Скорость роста возмущений внешней моды достигает  $\sigma \approx 4.9$  при  $x = 0$ . С ростом  $x$  максимальное значение  $\sigma$  быстро уменьшается. Соответствующие частоты также уменьшаются от  $\omega \approx 2.9$  при  $x = 0$  до  $\omega \approx 2.3$  при  $x = 3.2$ , а фазовая скорость увеличивается от  $c_r \approx 0.44$  до  $c_r \approx 0.75$ .

На рис. 4 в диапазоне  $1.25 < x < 2.5$  и  $\omega < 1.25$  можно заметить взаимодействие внутренней и внешней моды, аналогичное обнаруженному в [4] взаимодействию при изменении числа Рейнольдса (см. рис. 2бб работы [4]). В отличие от случая  $n = 0$  при малых  $x$ , при  $n = 1$  это взаимодействие не приводит к абсолютной неустойчивости, поскольку происходит между двумя движущимися вниз по потоку модами.

Еще одно заметное различие между растущими возмущениями внутренней и внешней мод касается соответствующих им длин волн. Волновые числа  $\alpha_r$  для возмущений с максимальным

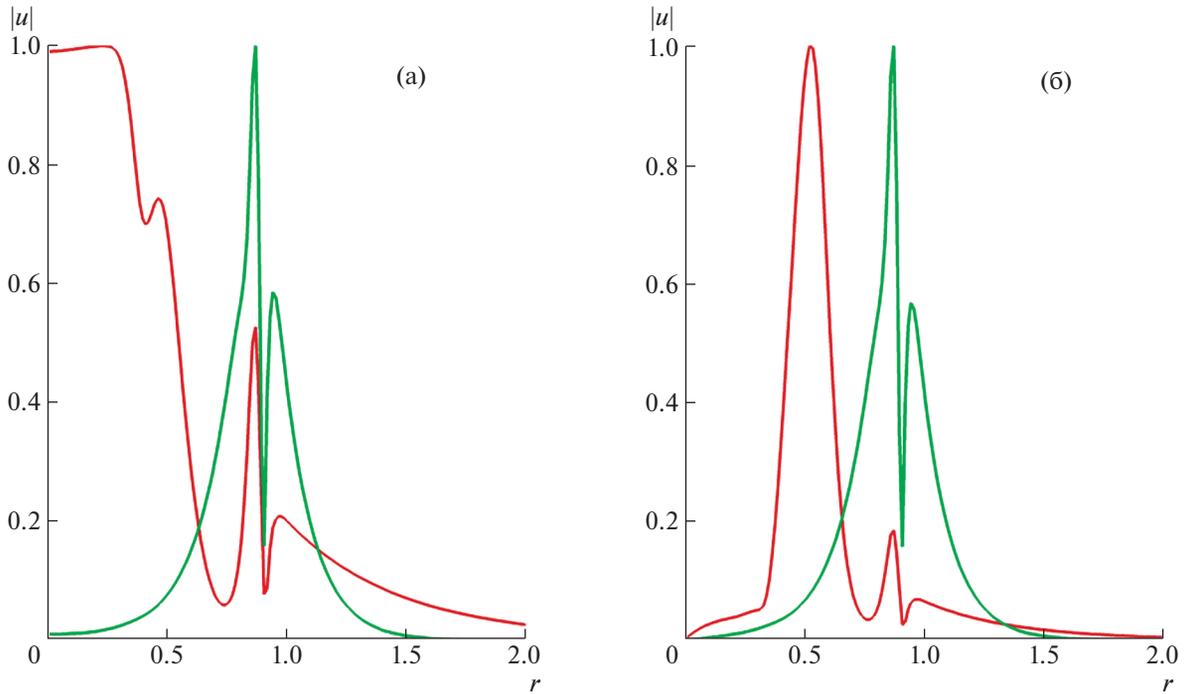


**Рис. 4.** Коэффициенты нарастания  $\sigma$  малых возмущений с азимутальным числом  $n = 1$  как функции частоты  $\omega$ , полученные в рамках квазипараллельного подхода на разных расстояниях  $x$  вниз по потоку. Внутренняя мода (а) и внешняя мода (б).

ростом внутренней моды уменьшаются с ростом  $x$  от 1.7 при  $x = 0$  до 1.4 при  $x = 20$ . Аналогичные возмущения внешней моды оказываются в 3–4 раза короче, их волновые числа изменяются от 6.7 до 3.1 на отрезке  $x$  от 0 до 3.13.

Среди растущих трехмерных возмущений, соответствующих азимутальному числу  $n = 1$ , также можно выделить внутреннюю и внешнюю моду (рис. 4). Аналогично случаю осесимметричных возмущений, трехмерные растущие возмущения внешней моды обладают на порядок большими коэффициентами роста по сравнению с возмущениями внутренней моды при малых  $x$ , однако растут лишь на ограниченном интервале  $x < 3.2$ . Растущие возмущения внутренней моды имеются на всей рассмотренной длине струи. Также можно отметить то, что как и в осесимметричном случае, растущие возмущения внешней моды в 3–4 раза короче по длине волны, чем возмущения внутренней моды. В отличие от осесимметричного случая, при  $n = 1$ , кроме показанных на рис. 4, имеются еще несколько ветвей растущих возмущений, обладающих незначительными ( $\sigma < 0.05$ ) коэффициентами нарастания.

Собственные функции, отвечающие возмущениям внутренней и внешних мод, имеют существенно различающуюся форму. Профили модуля продольной компоненты  $|u(r)|$  собственных функций, соответствующих частоте  $\omega = 3.0$ , близкой к частоте наиболее растущих возмущений при  $x = 0$ , приведены на рис. 5. Все функции нормированы с условием  $\max |u(r)| = 1$ . Собственные функции внешней моды при  $n = 0$  и  $n = 1$  имеют близкую структуру с локализацией возмущений в районе внешних точек перегиба при  $r \approx 0.9$ , где  $|u(r)|$  имеет наибольший градиент и два окружающих резких пика. Схожесть распределений при  $n = 0$  и  $n = 1$  говорит о том, что изменения собственных функций по углу при  $n = 1$  на таком большом расстоянии от оси симметрии струи не имеют большого значения. Внутренние собственные функции при  $n = 0$  и  $n = 1$ , наоборот, имеют сильно различающуюся форму. В осесимметричном возмущении доминируют колебания скорости на оси струи, а в трехмерном – в районе точки перегиба при  $r \approx 0.5$ . Влияние внутренней точки перегиба на осесимметричное возмущение ограничивается небольшой нерегулярностью в распределении  $|u(r)|$  в окрестности этой точки. Интересно, что влияние внешних точек перегиба в виде значительных пиков в профилях  $|u(r)|$  для внутренней моды выражено гораздо более отчетливо как для осесимметричных, так и для трехмерных возмущений. Отмечен-



**Рис. 5.** Профили модуля продольной компоненты  $|u(r)|$  собственной функции возмущения при  $x = 0$  и  $\omega = 3.0$  на отрезке  $r \in [0, 2]$ . Красные и зеленые линии отвечают возмущениям внутренней и внешней моды соответственно. Осесимметричные возмущения (а) и трехмерные ( $n = 1$ ) возмущения (б).

ные пики в профилях собственных функций пропадают при больших  $x$  с исчезновением внешних точек перегиба.

### 3. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАЗВИТИЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

При исследовании пространственного развития малых возмущений поле скорости представляется в виде суммы основного стационарного течения  $\mathbf{U} = (U(x, r), V(x, r), 0)$  и возмущения  $\mathbf{u}'(t, x, r, \theta)$ . Линеаризованные относительно возмущений уравнения Навье–Стокса интегрируются по времени с нулевыми начальными условиями и граничными условиями на входе в виде

$$\mathbf{u}'(t, 0, r, \theta) = a(t) \operatorname{Re}\{\mathbf{v}'(r) \exp[i(n\theta - \omega t)]\}, \quad a(t) = \begin{cases} \sin \frac{\pi t}{2t_0}, & t < t_0 \\ 1, & t \geq t_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь  $\mathbf{v}'(r)$  – собственный вектор задачи (2.2) при заданных азимутальном числе  $n$  и частоте  $\omega$ ;  $\operatorname{Re}\{\dots\}$  обозначает действительную часть комплексной величины. Амплитудный множитель  $a(t)$  обеспечивает непрерывное изменение амплитуды входного возмущения от нулевой при  $t = 0$  (что согласуется с нулевыми начальными условиями при всех  $x$ ) до единичной при  $t = t_0 \sim 1$ . В качестве нормировки собственного вектора берется условие

$$\int_0^{R_m} |\mathbf{v}'(r)|^2 r dr = 1 \quad (3.2)$$

С течением времени возмущение распространяется от входного сечения на всю протяженность расчетной области. Расчет продолжается до выхода решения при всех  $x$  на периодическое поведение с заданной во входном сечении частотой  $\omega$ . После этого параллельно с интегрированием по времени вычисляются средние по периоду колебаний величины как функции продольной координаты. На рис. 6 приведены графики изменения вдоль  $x$  средней интегральной амплитуды  $A(x)$  осесимметричных и трехмерных ( $n = 1$ ) возмущений, полученных с входными услови-

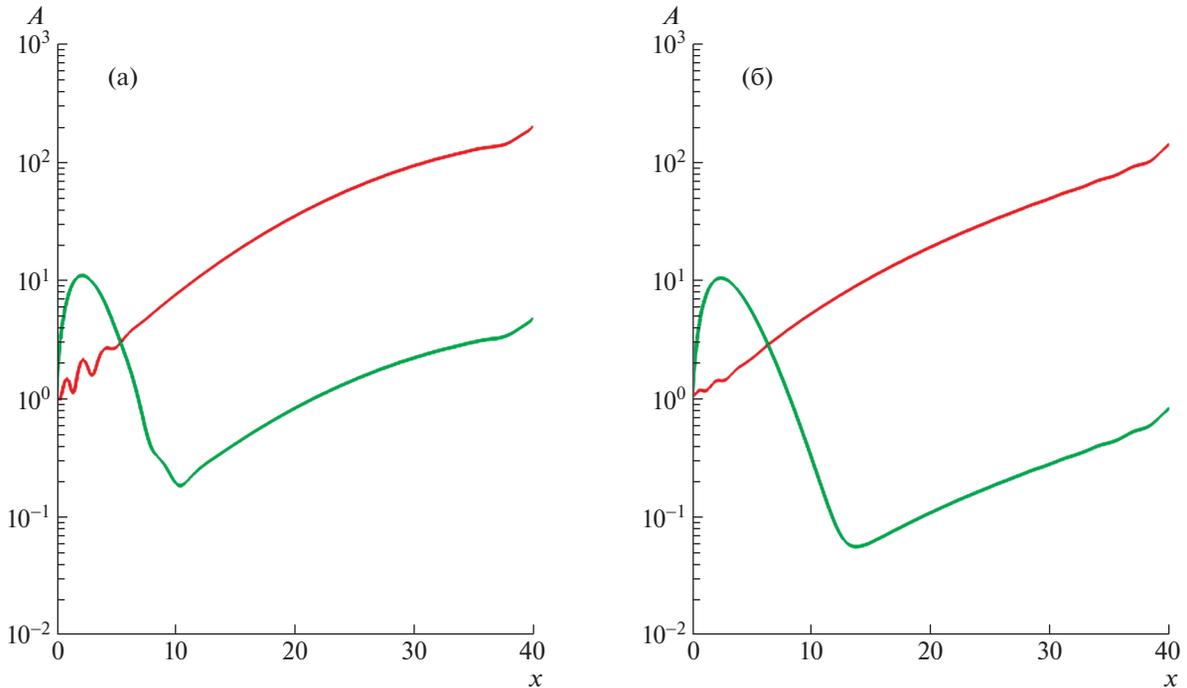


Рис. 6. Эволюция интегральной амплитуды возмущения (3.3) с частотой  $\omega = 3.0$  при  $n = 0$  (а) и при  $n = 1$  (б). Красные и зеленые линии соответствуют возмущениям внутренней и внешней моды соответственно.

ями, соответствующими внутренней и внешней собственной моде при частоте  $\omega = 3.0$ . Амплитуда  $A(x)$  определяется по формуле

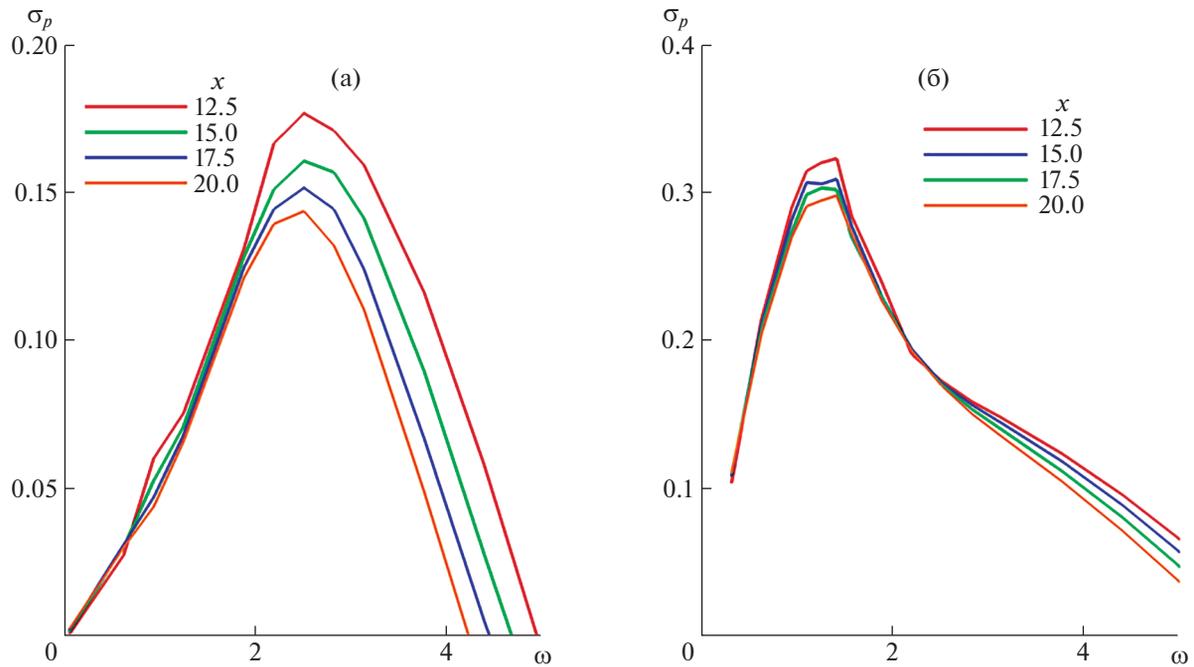
$$A^2(x) = \frac{1}{\pi T} \int_0^{R_m} r dr \int_0^T dt \int_0^{2\pi} |\mathbf{u}'(t, x, r, \theta)|^2 d\theta \quad (3.3)$$

В качестве периода осреднения по времени  $T$  берется отрезок, кратный периоду колебаний  $2\pi/\omega$ . Изменение  $A(x)$  для осесимметричных и трехмерных возмущений совершенно идентично. Амплитуда внутренней моды после нескольких небольших колебаний на начальном отрезке выходит на режим монотонного роста, продолжающегося до конца расчетной области. Рост возмущений внутренней моды согласуется с фактом неустойчивости профилей скорости основного течения к таким возмущениям при всех  $x \leq X_m$ , полученным в рамках квазипараллельного подхода.

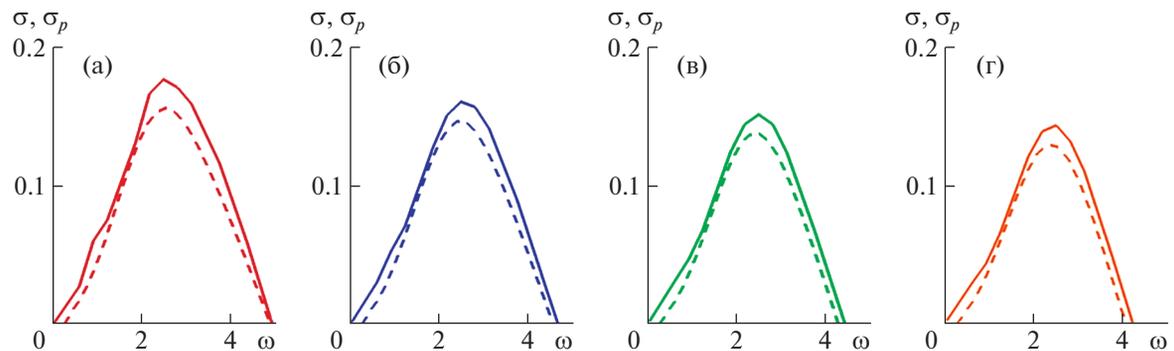
Развитие возмущений внешней моды происходит совершенно по-другому. Начальный быстрый рост амплитуды заканчивается при  $x \approx 2.5$ , после чего следует участок затухания, на котором амплитуда падает на два порядка. За пределами этого начального участка развития возмущения снова начинают расти, но уже по закону роста внутренней моды. Начальная эволюция внешней моды также согласуется с предсказанием результатов квазипараллельного подхода. Коэффициент роста таких возмущений на начальном отрезке  $x$  существенно превышает аналогичную величину для возмущений внутренней моды, однако уже при  $x > 2.5$  возмущения внешней моды при  $\omega = 3.0$  затухают, чем и вызвано уменьшение  $A(x)$  на рис. 6 при  $x > 2.5$ . Рост возмущения, аналогичный росту внутренней моды при больших  $x$  показывает, что на фоне общего затухания в возмущении выделяется составляющая, соответствующая наиболее быстро растущей внутренней моде.

Аппроксимируя линию  $A(x)$  в каждой точке  $x$  экспонентой, можно оценить локальную скорость роста возмущения как

$$\sigma_p(x) = \frac{d \ln A(x)}{dx} \equiv \frac{1}{A} \frac{dA(x)}{dx} \quad (3.4)$$



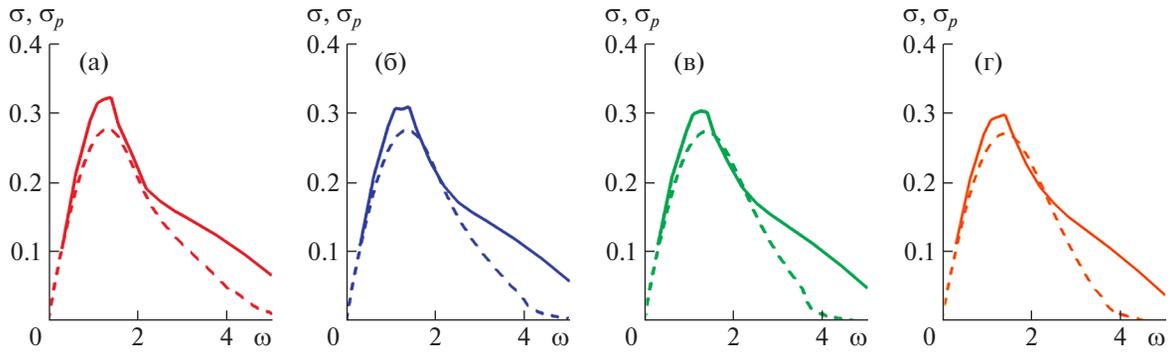
**Рис. 7.** Локальные скорости роста  $\sigma_p$  малых возмущений с азимутальным числом  $n = 0$  (а) и  $n = 1$  (б) как функции частоты  $\omega$ , полученные в рамках пространственного подхода на разных расстояниях  $x$  вниз по потоку.



**Рис. 8.** Скорости роста малых возмущений с азимутальным числом  $n = 0$ , полученные в рамках пространственного подхода  $\sigma_p$  (сплошные линии) и квазипараллельного подхода  $\sigma$  (прерывистые линии): (а) –  $x = 12.5$ , (б) –  $x = 15.0$ , (в) –  $x = 17.5$ , (г) –  $x = 20.0$ .

Полученные таким образом оценки скорости роста, рассчитанные для возмущений внутренней моды за пределами начального участка развития при разных значениях частоты  $\omega$  для  $n = 0$  и  $n = 1$ , даны на рис. 7. Приведенные зависимости для  $x \leq 20$  качественно и количественно близки к аналогичным графикам  $\sigma(\omega)$ , полученным в рамках квазипараллельного подхода (рис. 3, 4).

Более подробные сопоставления результатов квазипараллельного и пространственного подходов приведены на рис. 8, где изображены зависимости скорости роста осесимметричных возмущений внутренней моды как функции  $\omega$  для разных  $x$ , полученные в рамках обоих подходов. Аналогичные сопоставления для скорости роста трехмерных возмущений ( $n = 1$ ) даны на рис. 9. Качественное соответствие результатов двух подходов наблюдается во всех случаях. Частоты, при которых происходит максимальный рост возмущений, совпадают с хорошей точностью. Оценка скорости роста возмущений, полученная в рамках пространственного подхода при всех  $\omega$ , несколько больше оценки квазипараллельного подхода. При  $n = 0$  разница максимальных значений составляет около 10%, при  $n = 1$  – около 15%. Единственное бросающееся в глаза различие



**Рис. 9.** Скорости роста малых возмущений с азимутальным числом  $n = 1$ , полученные в рамках пространственного подхода  $\sigma_p$  (сплошные линии) и квазипараллельного подхода  $\sigma$  (прерывистые линии): (а) –  $x = 12.5$ , (б) –  $x = 15.0$ , (в) –  $x = 17.5$ , (г) –  $x = 20.0$ .

касается трехмерных возмущений и состоит в более медленном уменьшении  $\sigma_p$  при увеличении  $\omega > 2$  по сравнению с  $\sigma$ . Возможной причиной повышенной скорости роста возмущений  $\sigma_p$  при  $n = 1$  и  $\omega > 2$  является наличие нескольких ветвей растущих возмущений этого типа, что было обнаружено при использовании квазипараллельного подхода.

#### 4. НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ И ПЕРЕХОД К ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Так же, как и при исследовании пространственного развития малых возмущений, в расчетах нелинейного взаимодействия возмущений поле скорости представляется в виде суммы основного стационарного течения  $\mathbf{U} = (U(x, r), V(x, r), 0)$  и возмущения  $\mathbf{u}'(t, x, r, \theta)$ . Возмущения отыскиваются в виде конечного ряда Фурье по угловой координате:

$$\mathbf{u}'(t, x, r, \theta) = \sum_{n=0}^{N_m} \text{Re}\{\mathbf{u}'_n(t, x, r) \exp(in\theta)\} \quad (4.1)$$

Нелинейные уравнения Навье–Стокса интегрируются по времени с нулевыми начальными условиями. Граничные условия на входе задаются аналогично (3.1) в виде

$$\mathbf{u}'_n(t, 0, r) = A_n(0)a(t)\mathbf{v}'_n(r) \exp(-i\omega t) \quad (4.2)$$

Здесь  $A_n(x)$  – амплитуда соответствующей гармоники,  $\mathbf{v}'_n(r)$  – собственная функция линейной задачи устойчивости для входного течения. Как и в (3.1),  $a(t)$  – переходная функция, обеспечивающая непрерывное изменение амплитуды соответствующего входного возмущения от нулевой при  $t = 0$  до  $A_n(0)$  при  $t = t_0 \sim 1$ . Амплитуда  $A_n(x)$  определяется аналогично (3.3) путем интегрирования по  $r$  и осреднения по времени величины  $|\mathbf{u}'_n(t, x, r)|^2$ .

Расчеты проводились с  $A_n(0) = 0$  при  $n > 1$ , т.е. на входе задавались возмущения в виде комбинаций нулевой и первой угловой гармоник с разными амплитудами. Старшие гармоники в этом случае возникают при  $x > 0$  в результате нелинейных взаимодействий трехмерных возмущений. В случае, если амплитуда  $A_1(0)$  входного возмущения задается нулевой, то течение остается осесимметричными при всех  $x$ . Число учитываемых гармоник  $N_m$  варьировалось в диапазоне от 1 до 32. Обнаружено, что качественное, а в большинстве случаев и количественное поведение течения на отрезке, предшествующем переходу к турбулентному режиму, удовлетворительно воспроизводится уже начиная с  $N_m = 4$ . Большинство из представляемых ниже результатов получено при  $N_m = 8$ .

В [7] подробно описаны эксперименты, проведенные на установке НИИ механики МГУ, в которых изучалось развитие струи под действием искусственных возмущений осесимметричного вида. Возмущения вносились на расстоянии  $x = 0.32$  от среза сопла с помощью осциллирующих в осевом направлении тонких колец, расположенных соосно со струей. Использовались два кольца разного диаметра, обеспечивающих возбуждение возмущений, близких к внешней и

внутренней моде линейной устойчивости. При возбуждении внешней моды длина ламинарного участка струи заметно сокращается в определенном диапазоне частот осцилляции кольца по сравнению со случаем отсутствия возмущений (при покоящемся кольце). Максимальное сокращение ламинарного участка до примерно  $x = 5$  наблюдается при частоте, совпадающей с частотой максимально растущего возмущения, предсказываемой линейной теорией устойчивости. Напомним, что естественный переход в экспериментальных условиях при рассматриваемом числе Рейнольдса  $Re = 2850$  происходит при  $x \approx 12$ . Амплитуда линейной скорости колебаний кольца  $\Delta u'$  поддерживалась постоянной при варьировании частоты; в безразмерных величинах эта скорость составляет  $\approx 0.035$ . При используемой в настоящей работе нормировке возмущений (3.2) при  $n = 1, 2$  это соответствует  $A_n(0) \approx 10^{-2}$ .

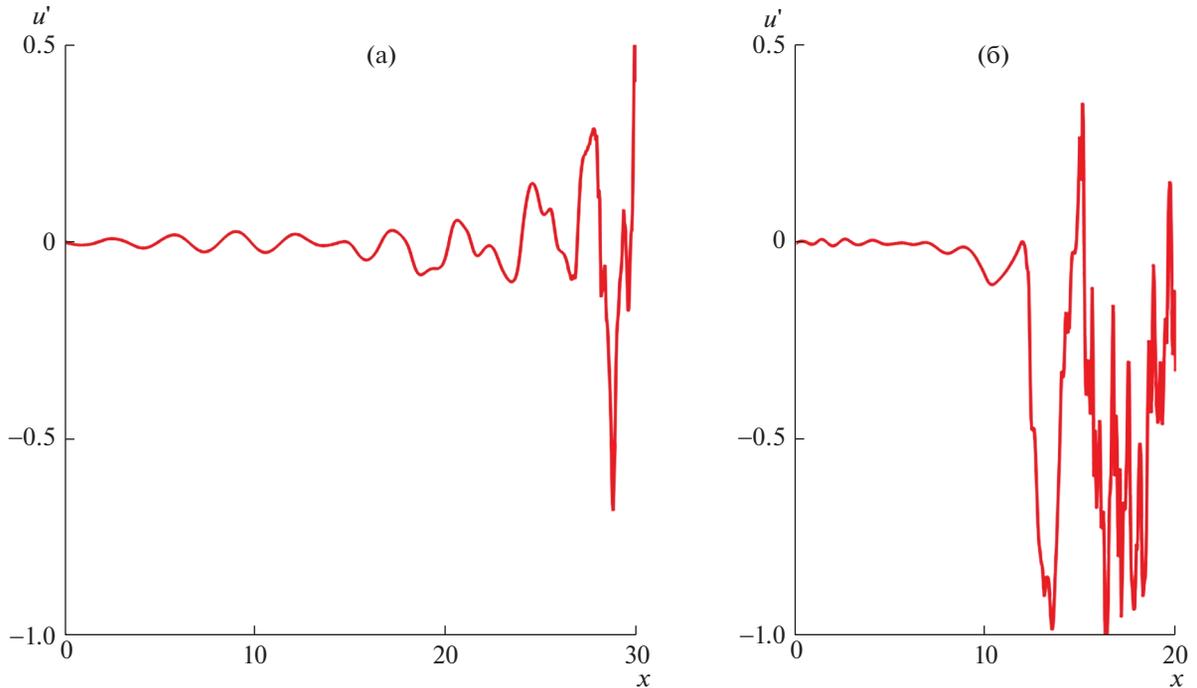
Для моделирования нелинейного развития осесимметричных возмущений достаточно ограничиться значением  $N_m = 0$  в (4.1). Расчеты проводились в диапазоне частот  $1 \leq \omega \leq 5$ , совпадающем с диапазоном максимально растущих линейных возмущений (см. рис. 3). Для воспроизведения экспериментальных условий амплитуда  $A_0(0)$  входного возмущения выбиралась равной  $10^{-2}$ . Обнаружено, что поведение возмущения внешней моды при этой амплитуде на начальном участке качественно повторяет пространственное развитие малого возмущения, приведенного на рис. 6. В силу нелинейности процесса количественные характерные значения несколько меняются. Так, при  $\omega = 3$  начальный быстрый рост амплитуды возмущения останавливается уже при  $x \sim 1$ : амплитуда за это время вырастает всего в 1.8 раза, тогда как при линейном развитии амплитуда возмущения на начальном участке увеличивается на порядок. После следует этап уменьшения амплитуды и перестройка возмущения в возмущение внутренней моды. Затем происходит близкое к линейному усиление возмущения внутренней моды до достижения  $A(x) \approx 0.03$  при  $x = 25$ , насыщение, и этап некоторой релаксации (медленного уменьшения амплитуды) до  $A \approx 0.02$  при  $x = 40$ . Колебания скорости во всех точках струи вплоть до выходного сечения остаются регулярными, с минимальным отклонением от гармонического закона.

Увеличение начальной амплитуды на порядок  $A_0(0) = 10^{-1}$  не меняет качественного поведения течения за исключением некоторых деталей. Затухание возмущения начинается сразу при  $x > 0$ , минуя отрезок начального роста. После этого так же, как и в случае меньшей начальной амплитуды, возмущение переходит в возмущение внутренней моды, несколько усиливается, в этом случае до  $A_0 \approx 0.09$  уже при  $x \approx 8$ , и переходит в этап релаксации. Поведение возмущений во времени так же остается близким к гармоническому.

При возбуждении во входном сечении возмущения внутренней моды процесс упрощается за счет отсутствия этапа перестройки возмущения внешней моды во внутреннюю. Остальное качественно сохраняется: при меньшей начальной амплитуде  $A_0(0) = 10^{-2}$  возмущения нарастают аналогично линейному росту на рис. 6, достигают максимума и релаксируют до  $A(40) \approx 0.04$ ; при  $A_0(0) = 10^{-1}$  после минимального начального роста сразу наступает этап медленного затухания до  $A(40) \approx 0.09$ .

Полученные результаты развития осесимметричных возмущений противоречат эксперименту [7]. В расчетах показано, что развитие осесимметричных возмущений приводит к установлению регулярных колебаний, тогда как в эксперименте установлен не только факт перехода к турбулентности, но и сокращение длины ламинарного участка под действием искусственного осесимметричного возмущения. Такое различие может объясняться тем, что в экспериментальных условиях, кроме искусственного возмущения, имеются трехмерные возмущения неконтролируемой природы, развитие которых на фоне искусственного осесимметричного возмущения и приводит к ускоренному переходу. В пользу этого предположения говорит и тот факт, что и при отсутствии искусственного возмущения в струе происходит переход к турбулентности, а значит, в ней присутствуют неконтролируемые возмущения.

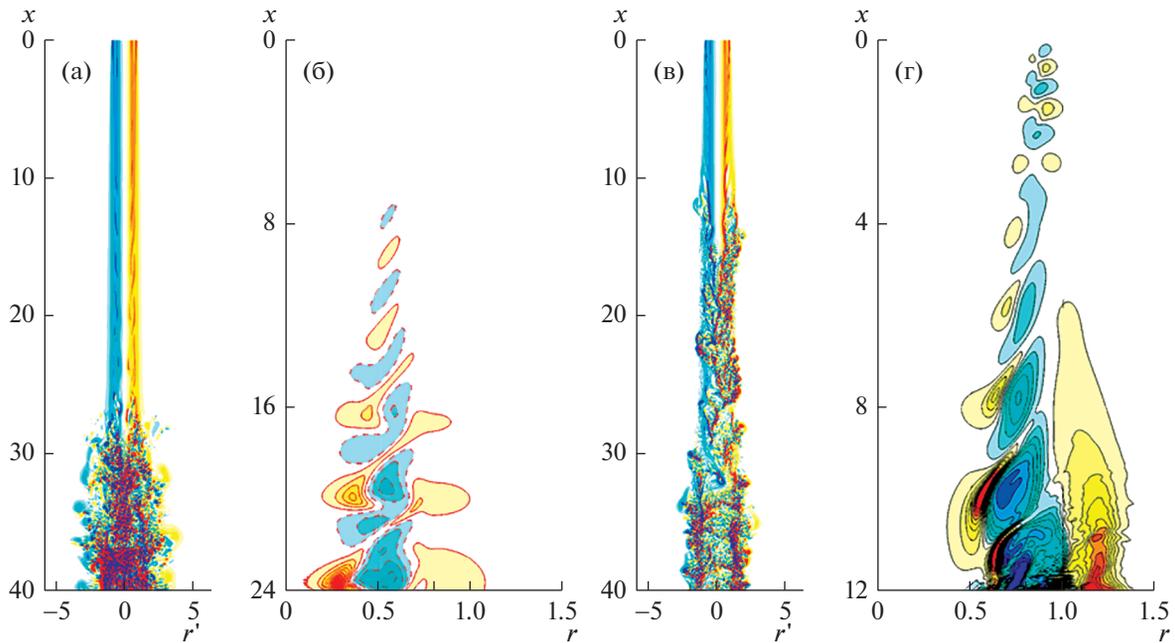
Для изучения возможности возникновения перехода к турбулентности под действием трехмерных возмущений были проведены расчеты нелинейной эволюции исходно достаточно малых возмущений,  $A_n(0) = 10^{-3}$  при  $n = 0, 1$ . Отдельно рассмотрены случаи возмущений, соответствующих внутренней и внешней моде устойчивости. Входные возмущения соответствовали частоте  $\omega = 3$ , что близко к частоте максимально растущих возмущений на начальном участке струи (см. рис. 3, 4). Возмущения внутренней моды на отрезке  $0 < x < 20$  растут в этом случае в соответствии с линейным законом развития малых возмущений (рис. 6), практически не взаимодействуя друг с другом. Осесимметричное возмущение вырастает примерно в 30 раз, трехмерное – примерно в 20 раз. Начиная с  $x = 20$ , рост амплитуды первой угловой гармоники ( $n = 1$ ) ускоряется, вероятно, под влиянием заметно подросшей к этому моменту нулевой гармоники. Обратное влияние пер-



**Рис. 10.** Изменение продольной компоненты скорости возмущения  $u'(x)$  вдоль продольной координаты при  $r = 0.5$ ,  $\theta = 0$  в некоторый фиксированный момент времени. Входные возмущения внутренней моды (а) и внешней моды (б) при частоте  $\omega = 3$  и начальных амплитудах  $A_0(0) = 10^{-3}$ ,  $A_1(0) = 10^{-3}$ .

вой гармоники на нулевую квадратичное, поэтому проявляется несколько позже, когда  $A_1$  достигает значения  $\sim 10^{-1}$ , что происходит примерно при  $x = 25$ . Появляющиеся в силу нелинейности возмущения с большими азимутальными номерами быстро нарастают при  $x > 0$ , и при  $x \approx 25$  сравниваются по порядку величины амплитуды с возмущениями, соответствующими  $n = 0$  и  $n = 1$ . В этот момент в колебаниях скорости как функции времени и продольной координаты появляются нерегулярные флуктуации большой амплитуды, что можно квалифицировать как переход к турбулентности. Изменение продольной компоненты скорости возмущения  $u'(x)$  вдоль продольной координаты при  $r = 0.5$ ,  $\theta = 0$  в некоторый фиксированный момент времени показано на рис. 10а. График ограничен координатой  $x = 30$ , при которой уже формируются нерегулярные и значительные по амплитуде колебания.

Визуализация течения показана на рис. 11а,б. На первом из них изображено мгновенное поле угловой компоненты завихренности  $\omega_\theta = \partial v/\partial x - \partial u/\partial r$  ( $u, v, w$  – компоненты вектора скорости  $\mathbf{u}$ , соответствующие осевой, радиальной и угловой координате цилиндрической системы) в плоскости ( $x, r' \geq 0, \theta = 0$ ) и поле  $-\omega_\theta$  в плоскости ( $x, r' < 0, \theta = \pi$ ). Здесь  $r' = r$  при  $r' > 0$  и  $r' = -r$  при  $r' < 0$ . В таком представлении сохраняются непрерывность и гладкость изображаемого поля при пересечении линии  $r' = 0$ . Представленная визуализация наглядно демонстрирует начало перехода к турбулентности при  $x \sim 25$ , когда в поле завихренности появляется ярко выраженная нерегулярная мелкомасштабная составляющая. При  $x > 25$  используемое пространственное разрешение по угловой координате (4.1) при  $N_m = 8$  становится недостаточным. Проверено, что увеличение числа учитываемых гармоник до  $N_m = 32$  не меняет качественно картину течения на этапе перехода, т.е. при  $x < 25$ . Таким образом, можно надеяться, что переходный этап воспроизводится в расчете верно. На рис. 11б изображено поле завихренности возмущения  $\omega'_\theta = \partial v'/\partial x - \partial u'/\partial r$  в плоскости ( $x, r, \theta = 0$ ), дающее некоторое дополнительное представление о характере развития возмущений на переходном этапе. Отметим, что на рис. 11а сохранены геометрические пропорции течения, тогда как на рис. 11б изображение растянуто в горизонтальном направлении. Видно, что возмущения на всем протяжении струи концентрируются вдоль линии  $r \approx 0.5$ , т.е. в области внутренней точки перегиба в профиле скорости основного течения. Длина волны возмущения  $\lambda_x \approx 4$  также сохраняется примерно постоянной.

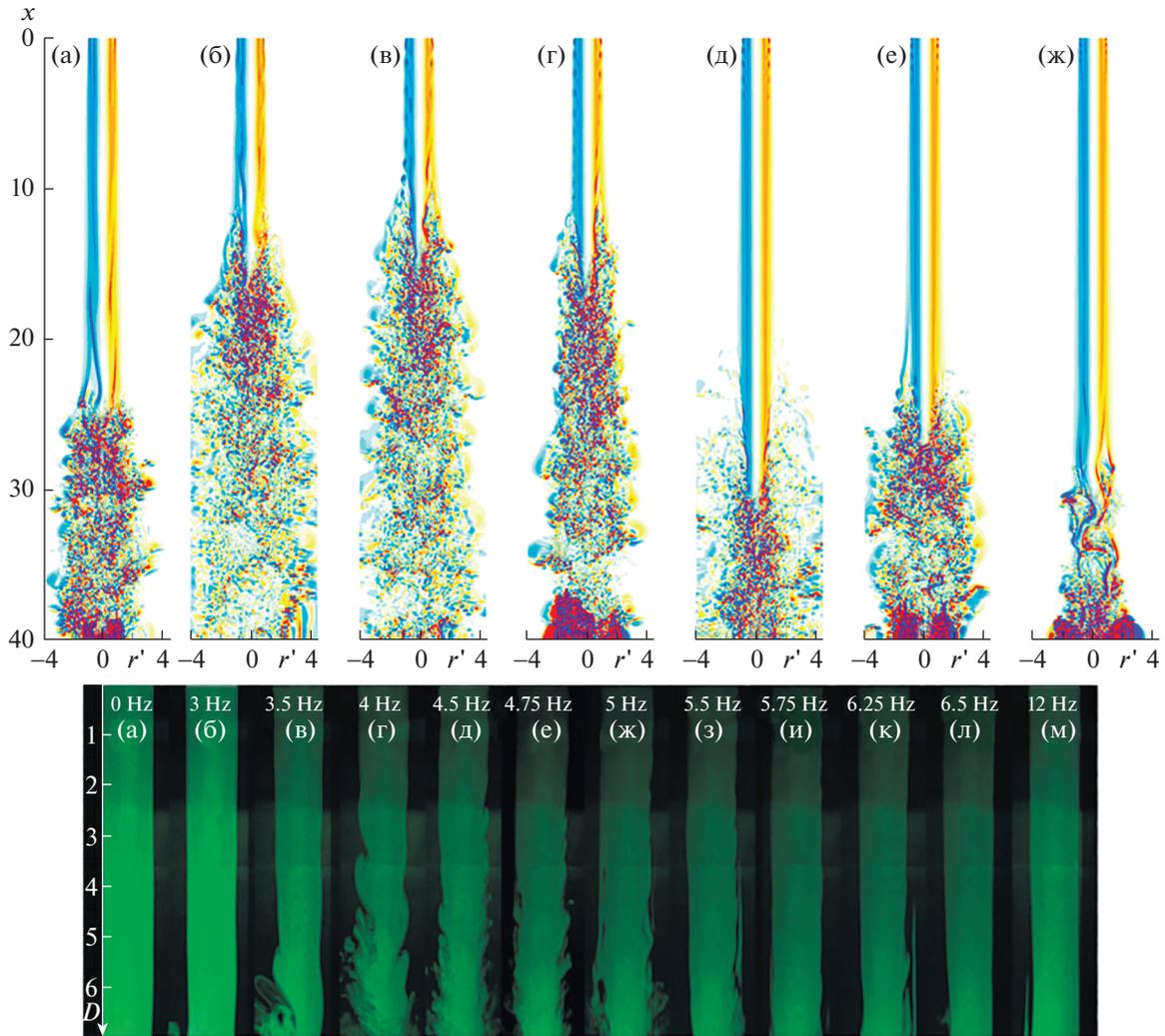


**Рис. 11.** Поле угловой компоненты завихренности  $\omega_\theta$  (а, в) и возмущения завихренности  $\omega'_\theta$  (б, г). Входные возмущения внутренней моды (а, б) и внешней моды (в, г) при частоте  $\omega = 3$  и начальных амплитудах  $A_0(0) = 10^{-3}$ ,  $A_1(0) = 10^{-3}$ .

Эволюция возмущений внешней моды устойчивости на начальном этапе также соответствует линейному поведению (рис. б). Амплитуды обеих гармоник  $n = 0, 1$  вырастают примерно на порядок на отрезке  $x < 2$ . Далее изменение  $A_1(x)$  происходит иначе, чем в линейном случае. Влияние выросшей осесимметричной составляющей возмущения приводит к более быстрому росту трехмерных компонент. Это относится не только к  $n = 1$ , которая продолжает свой рост, но и к возмущениям старших гармоник, начальная амплитуда которых была нулевой. Амплитуда осесимметричного возмущения уменьшается при  $x > 2$ , но не на два порядка, как в линейном случае, а менее, чем на порядок. Начиная с  $x \approx 5$ ,  $A_0(x)$  также начинает расти. Уже при  $x \approx 12$  в колебаниях скорости (рис. 10б) появляются мощные нерегулярные флуктуации – в течении устанавливается турбулентный режим. После завихренности, изображенной на рис. 11в,г, показывает изменение струи, происходящее на переходном участке. Возмущение, вносимое во внешнюю область струи,  $r \approx 0.85$ , постепенно смещается в сторону  $r = 0.5$  по мере эволюции вниз по потоку. Характерная длина волны возмущения увеличивается от  $x \approx 1$  на входе до  $x \approx 2$  уже при  $x = 10$ .

Проведенные вычисления показывают, что естественный переход к турбулентности, наблюдаемый в эксперименте при  $x \approx 12$ , может объясняться наличием в потоке неконтролируемых трехмерных возмущений с амплитудой  $A_n \sim 10^{-3}$ . При этом переход вызывается, вероятно, развитием возмущений внешней моды линейной устойчивости. Можно также предположить, что сокращение длины переходной области при внесении искусственных осесимметричных возмущений с амплитудой  $\sim 10^{-2}$ , наблюдавшееся в эксперименте [6, 7], вызывается не столько развитием самих осесимметричных возмущений, сколько их влиянием на скорость роста фоновых трехмерных возмущений. В пользу этого говорит отмеченный выше факт, что рост трехмерных возмущений малой амплитуды усиливается на фоне осесимметричного возмущения при достижении последней амплитуды порядка  $10^{-2}$ .

Для проверки высказанной гипотезы была проведена серия численных экспериментов, в которых начальные амплитуды возмущений внешней моды задавались в виде  $A_0(0) = 10^{-2}$  и  $A_1(0) = 10^{-3}$ . Частота возмущений обеих гармоник при этом совпадала и варьировалась в диапазоне  $1 \leq \omega \leq 5$ . Такие условия могут примерно соответствовать условиям эксперимента [6, 7] в предположении, что вместе с искусственным осесимметричным возмущением в поток вносится и менее интенсивное трехмерное возмущение той же частоты, например, вследствие неидеальности устрой-

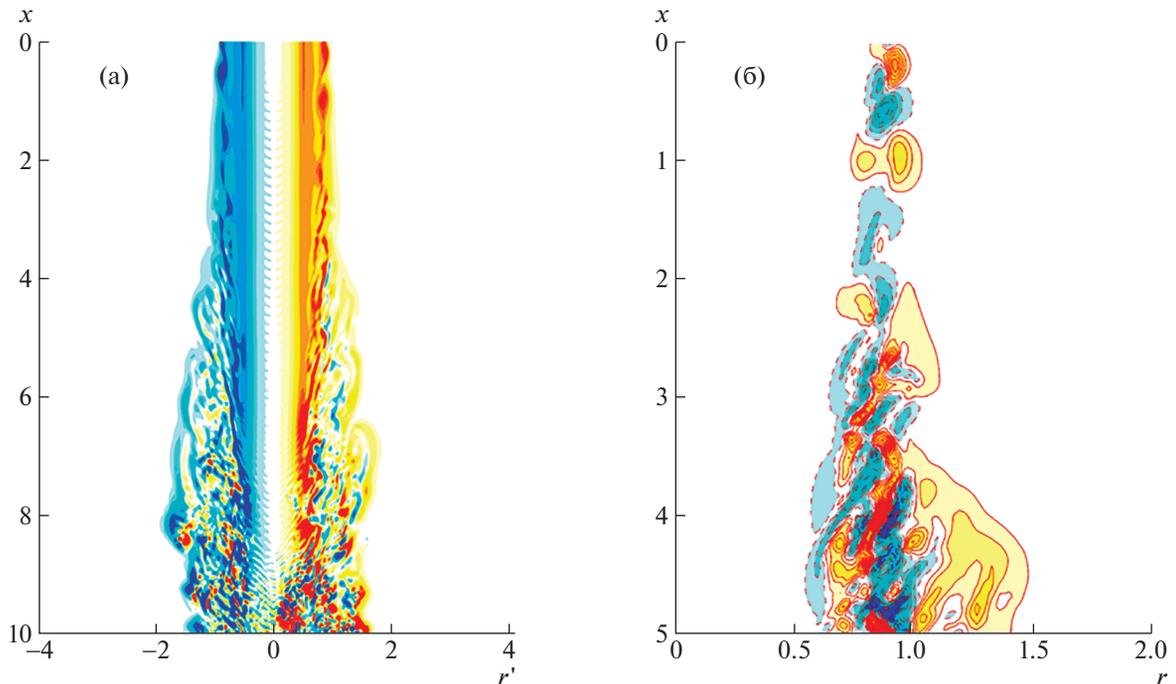


**Рис. 12.** Верхний ряд – визуализация расчетов (поле угловой компоненты завихренности): (а) –  $\omega = 1$ , (б) –  $\omega = 2$ , (в) –  $\omega = 2.5$ , (г) –  $\omega = 3$ , (д) –  $\omega = 3.5$ , (е) –  $\omega = 4$ , (ж) –  $\omega = 5$ . Нижний ряд – дымовая визуализация эксперимента: (а) –  $\omega = 0$ , (б) –  $\omega = 1.7$ , (в) –  $\omega = 2.0$ , (г) –  $\omega = 2.3$ , (д) –  $\omega = 2.6$ , (е) –  $\omega = 2.7$ , (ж) –  $\omega = 2.9$ , (з) –  $\omega = 3.1$ , (и) –  $\omega = 3.3$ , (к) –  $\omega = 3.6$ , (л) –  $\omega = 3.7$ , (м) –  $\omega = 6.9$ .

ства генерации искусственных возмущений. Визуализация полученных течений при разных частотах вносимых возмущений представлена на рис. 12. На том же рисунке дана фотография дымовой визуализации струй, полученных в эксперименте [6]. И в расчете, и в эксперименте наблюдается зависимость длины переходной области от частоты вносимого возмущения. Быстрее всего турбулентность в обоих случаях возникает при частотах  $\omega \approx 2.5\text{--}3.0$ . В этом диапазоне наблюдается максимальный рост возмущений по линейной теории.

В экспериментах вблизи зоны перехода (рис. 12) очевидно наличие трехмерных возмущений, при том что искусственно вносимые возмущения близки к осесимметричным. Данное обстоятельство согласуется с выводом о необходимости начальных малых трехмерных возмущений, которые, резко вырастая за счет нелинейного взаимодействия, в конечном счете и приводят к турбулизации. Роль осесимметричных возмущений в таком механизме – не в том, чтобы вырасти и самостоятельно турбулизовать струю, а в том, чтобы обеспечить нелинейный рост трехмерных возмущений, которые и приводят к турбулизации.

Обращает на себя внимание, что длина зоны перехода при  $\omega = 3$  и амплитудах возмущений  $A_0(0) = 10^{-2}$ ,  $A_1(0) = 10^{-3}$  лишь незначительно сокращается по сравнению с описанным выше вариантом  $A_0(0) = 10^{-3}$ ,  $A_1(0) = 10^{-3}$  (рис. 11в,г). Это может объясняться тем, что величина  $A_0 = 10^{-2}$



**Рис. 13.** Поле угловой компоненты завихренности  $\omega_\theta$  (а) и возмущения завихренности  $\omega'_\theta$  (б). Входные возмущения внешней моды при частоте  $\omega = 3$  и начальных амплитудах  $A_0(0) = 0$ ,  $A_1(0) = 10^{-2}$ .

близка к пределу линейного роста осесимметричного возмущения на начальном участке струи. Как было отмечено выше при описании развития осесимметричных возмущений, при  $A_0(0) = 10^{-2}$  рост нулевой гармоники на начальном участке составляет лишь 1.8 раза, в то время как при  $A_0(0) = 10^{-3}$  она вырастает почти на порядок. Соответственно и влияние осесимметричного возмущения на рост трехмерных возмущений в этих двух случаях близко. Отметим, что влияние это на эволюцию малых трехмерных возмущений важно. Если отказаться от осесимметричной составляющей во входном возмущении ( $A_0(0) = 0$ ,  $A_1(0) = 10^{-3}$ ), то рост трехмерных возмущений долгое время остается почти линейным, в результате длина области перехода вырастает почти до  $x = 30$ .

Следует также отметить, что характер развития течения очень зависит от начальной амплитуды трехмерного возмущения. Во всех описанных выше вариантах рассматривались малые начальные возмущения  $A_1(0) \leq 10^{-3}$ . Повышение этого уровня даже в отсутствие осесимметричной составляющей приводит к более быстрому включению нелинейных механизмов и, как результат, сокращению длины переходной области. На рис. 13 приведена аналогичная рис. 11 визуализация течения, полученного с чисто трехмерным входным возмущением, но с увеличенной амплитудой:  $A_0(0) = 0$ ,  $A_1(0) = 10^{-2}$  (показан начальный участок развития струи). Рост возмущений происходит в этом случае очень быстро, в том числе и благодаря раннему возбуждению старших угловых гармоник. Возникновение турбулентности, сопровождающееся появлением нерегулярных колебаний, происходит уже при  $x \approx 4$ . Этот результат согласуется с экспериментальными данными о быстром переходе в струе под действием искусственных трехмерных возмущений, соответствующих  $n = 1$ . Как показано в [8], длина переходной области сокращается в этом случае до 1–2 диаметров струи.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приводятся результаты численного исследования устойчивости и нелинейной эволюции возмущений в круглой струе. Воспроизводятся условия лабораторного эксперимента при  $Re = 2850$ , проведенного ранее в НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова [4–8]. Характерная особенность изучаемой струи – наличие трех точек перегиба во входном профиле скорости, что

существенно определяет свойства течения. Линейная устойчивость исследуется с использованием двух подходов: квазипараллельного и пространственного. В первом изменение основного течения вдоль потока учитывается параметрически: задача устойчивости решается для серии профилей основного течения, соответствующих разным расстояниям от входа. В пространственном подходе линеаризованные уравнения Навье–Стокса для возмущений интегрируются с учетом изменения основного течения. Получено хорошее количественное согласие результатов двух подходов, а также согласие с результатами невязкой теории [4, 7]. Основное качественное свойство устойчивости течения состоит в существовании двух мод растущих возмущений: внутренней и внешней, отвечающих внутренней ( $r \approx 0.5$ ) и паре внешних ( $r \approx 0.85$ ) точек перегиба. Скорость роста возмущений внешней моды на порядок превышает аналогичную скорость роста возмущений внутренней моды. Однако эта неустойчивость пропадает уже на ранних стадиях развития струи вместе с исчезновением внешних точек перегиба в профиле скорости основного течения. Неустойчивость к внутренним модам сохраняется на всем протяжении развития струи.

Проведены численные расчеты с целью объяснения и интерпретации результатов лабораторного эксперимента [7], в котором обнаружено изменение протяженности зоны перехода к турбулентности в струе под действием периодических во времени осесимметричных возмущений. В расчетах показано, что осесимметричные возмущения даже значительной начальной амплитуды не приводят к переходу к турбулентности. Колебания, вызываемые развитием таких возмущений, сохраняют регулярный, близкий к гармоническому, характер. Наблюдающийся в эксперименте переход к турбулентности может объясняться наличием неконтролируемых трехмерных возмущений, усиливающихся на фоне достаточно интенсивных искусственных возмущений. Проведенные в данной работе исследования подтверждают выдвинутую гипотезу. Входные возмущения в виде комбинации осесимметричного и малого трехмерного возмущения приводят к развитию турбулентности на расстоянии около 5 диаметров струи. Так же, как и в эксперименте, протяженность области перехода сокращается в тех случаях, когда частота входного возмущения близка к частоте наиболее быстро растущих возмущений по линейной теории.

В описанной картине инициатором перехода служат трехмерные возмущения, а осесимметричные возмущения при достаточно большой амплитуде лишь ускоряют их рост. Отсюда следует, что более интенсивные начальные трехмерные возмущения могут быть способными обеспечивать еще более быстрый переход даже при отсутствии осесимметричной составляющей. Последнее предположение подтверждается расчетами с трехмерными начальными возмущениями конечной амплитуды. Длина зоны перехода сокращается в этом случае до 1–2 диаметров струи, что объясняет причину быстрого перехода, полученного в экспериментах [8].

Авторы выражают признательность В.В. Веденеву за плодотворные обсуждения работы и полезные замечания по тексту статьи. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-19-00404, с использованием вычислительных ресурсов ОВК НИЦ “Курчатовский институт”, <http://computing.nrcki.ru/>.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Morris P.J.* The spatial viscous instability of axisymmetric jets // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 77. № 3. P. 511–529.
2. *Michalke A.* Survey on jet instability theory // *Prog. Aerospace Sci.* 1984. V. 21. P. 159–199.
3. Грек Г.Р., Козлов В.В., Литвиненко Ю.А. Устойчивость дозвуковых струйных течений // Учебное пособие: Новосибир. гос. ун-т. Новосибирск, 2012. 208 с.
4. *Zayko J., Teplovodskii S., Chicherina A., Vedenev V., Reshmin A.* Formation of free round jets with long laminar regions at large Reynolds numbers // *Phys. Fluids.* 2018. V. 30. P. 043603.
5. *Зайко Ю.С., Решмин А.И., Тепловодский С.Х., Чичерина А.Д.* Исследование затопленных струй с увеличенной длиной начального ламинарного участка // *Изв. РАН. МЖГ.* 2018. № 1. С. 97–106.
6. *Зайко Ю.С., Гареев Л.Р., Чичерина А.Д., Трифонов В.В., Веденев В.В., Решмин А.И.* Экспериментальное обоснование применимости линейной теории устойчивости к затопленной струе // *ДАН.* 2021. Т. 497. С. 44–48.
7. *Gareev L.R., Zayko J.S., Chicherina A.D., Trifonov V.V., Reshmin A.I., Vedenev V.V.* Experimental validation of inviscid linear stability theory applied to an axisymmetric jet // *J. Fluid Mech.* 2022. V. 934. A3.
8. *Zayko J., Teplovodskii S., Chicherina A., Trifonov V., Vedenev V., Reshmin A.* Experimental and theoretical analysis of perturbation growth in a laminar jet // *Proceedings of 9th International Symposium on Fluid-Structure Interactions, Flow-Sound Interactions, Flow-Induced Vibration & Noise.* July 8–11, 2018, Toronto, Ontario, Canada. С. FIV2018-109.
9. *Nikitin N.* Finite-difference method for incompressible Navier–Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates // *J. Comput. Phys.* 2006. V. 217. P. 759–781.
10. *Vedenev V., Zayko J.* On absolute instability of free jets // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2018. V. 1129. P. 012037.

УДК 532.526:533.6.011.55

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ ВНУТРЕННЕМ ВЫДЕЛЕНИИ ТЕПЛА И ПОДАЧЕ ГАЗА ЧЕРЕЗ ПОРИСТУЮ СТЕНКУ

© 2022 г. С. А. Гапонов<sup>а,\*</sup><sup>а</sup> Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

\*E-mail: gaponov@itam.nsc.ru

Поступила в редакцию 05.03.2022 г.

После доработки 20.05.2022 г.

Принята к публикации 20.05.2022 г.

Решена задача устойчивости дозвукового пограничного слоя в условиях подвода тепла внутрь пограничного слоя с инъекцией однородного газа через пористую пластину, частично модулирующая устойчивость пограничного слоя с диффузионным горением. Во всем диапазоне исследованных параметров наиболее растущими являются двумерные волны. Установлено, что при фиксированной норме подвода тепла с увеличением числа Рейнольдса, т.е. при удалении от передней кромки пластины, максимальная температура в пограничном слое увеличивается, что согласуется с известными экспериментами и расчетами параметров пограничного слоя с диффузионным горением. При этом зависимость максимальных по частоте степеней усиления от числа Рейнольдса немонотонна. Показано, что инъекция газа с подводом тепла дестабилизирует пограничный слой, как и в его отсутствие. С другой стороны, показана стабилизирующая роль подвода тепла и в условиях вдува газа через пористую стенку. С увеличением частоты нарастающей волны фазовая скорость стремится к скорости в обобщенной точке перегиба. Несмотря на достаточно большие величины степеней нарастания, справедливо соотношение Гастера, согласно которому пространственная степень усиления равна временной степени усиления, поделенной на групповую скорость.

*Ключевые слова:* пограничный слой, подвод тепла, пористая пластина, неустойчивость, возмущения

DOI: 10.31857/S0568528122050048

Стимулирующей задачей настоящей работы была проблема устойчивости пограничного слоя с диффузионным горением. Впервые задача диффузионного пламени в пограничном слое была сформулирована Эммонсом [1]. Исследования пограничного слоя с диффузионным горением проводились неоднократно, что отражено, например, в обзоре [2].

Менее изучена проблема устойчивости пограничного слоя с химическими реакциями. Обзор соответствующих работ, выполненных до конца 70-х гг., имеется в монографии [3]. Однако почти все работы, упомянутые в обзоре, относятся к задаче о гравитационной конвекции. Наибольшее отношение к настоящей теме имеют работы [4–6]. В [4] анализ ограничен невязким приближением, т.е. в уравнениях устойчивости пренебрегается членами, содержащими коэффициенты молекулярного переноса вещества, импульса и энергии. В [3, 5, 6] исследования проведены как в невязком приближении, так и с учетом коэффициентов переноса вещества, импульса и энергии в приближении Дана-Линя [7]. В них изучалась устойчивость в условиях диссоциации и рекомбинации кислорода и азота. Аналогичные исследования в более полной постановке проводились для гиперзвукового пограничного слоя, подробную информацию о которых можно найти в [8, 9]. Однако они касались только устойчивости течения по отношению к двумерным 2D-возмущениям, направление волнового вектора которых совпадает с направлением основного течения.

Первоначальные исследования устойчивости ламинарных течений в присутствии диффузионного пламени проводились для слоев смешения топлива и окислителя или при подаче струи топлива в окислитель, и задача решалась в пренебрежении вязкостью в уравнениях устойчивости. Подробную информацию о таких работах можно найти в обзоре [10]. В связи с этим заслуживает внимания работа [11]. В ней, по-видимому, впервые рассмотрена устойчивость струи в присутствии пламени с учетом вязкости и теплопроводности в уравнениях устойчивости. До на-

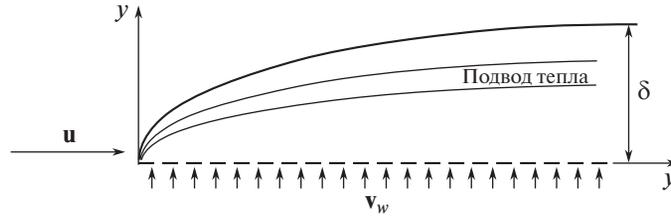


Рис. 1. Схема пограничного слоя с подводом тепла и вдувом газа через пористую стенку.

стоящего времени отсутствуют исследования по устойчивости пограничного слоя при сгорании топлива, подаваемого через проникаемую поверхность и сгорающего в потоке окислителя.

Наличие диффузионного пламени приводит к внутреннему выделению тепла и изменению состава смеси, а плотность зависит как от температуры, так и состава смеси (ее молекулярной массы). Поэтому устойчивость пограничного слоя с горением зависит от числа Маха, температурных граничных условий, смешения инородных газов и условий теплоподвода внутрь пограничного слоя. Однако во многих случаях, например, при сгорании углеводородных топлив в потоке воздуха плотность газа зависит, в основном, от температуры. Молекулярная масса смеси меняется по пограничному слою незначительно [12], ее изменением можно пренебречь. При подаче топлива через пористую стенку, обтекаемую окислителем, важным фактором, влияющим на устойчивость пограничного слоя, связан с вдуванием газа.

Важный результат работ [3, 5] состоит в том, что члены уравнений устойчивости, связанные с возмущениями источников тепла и концентраций веществ, обратно пропорциональны числу Рейнольдса, и они одного порядка с членами, учитывающими непараллельность течения. Там же показано, что в приближении локальной параллельности потока устойчивость пограничного слоя зависит только от распределения скорости и плотности основного течения. Из этого следует, что влияние возмущений источника концентраций и температуры на устойчивости пограничных слоев сравнимо с влиянием непараллельности основного течения. Слабое влияние возмущений источника тепла на устойчивость пограничного слоя без вдува было подтверждено в [13]. Поэтому при исследовании устойчивости пограничных слоев в приближении параллельного течения этими возмущениями можно пренебречь, что согласуется, кроме того, с теорией устойчивости диффузионного пламени при больших числах Дамкёлера  $Da$  (зона пламени много меньше толщины пограничного слоя) [14] и результатами [15] при конечных значениях  $Da$ . Таким образом, устойчивость диффузионного пламени в пограничном слое удовлетворительно может описываться устойчивостью течения однородного газа с подводом энергии внутрь слоя и инжекцией газа через пористую стенку.

Поэтому в данной работе распределение температуры в условиях диффузионного пламени моделируется с помощью источника тепла, а плотность обратной пропорциональностью температуре. Исследования проведены при дозвуковом обтекании пластины, число Маха  $M \ll 1$ .

## 1. ОСНОВНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

На рис. 1 показан пограничный слой с полосой ввода тепла и вдувом газа через пористую стенку.

Ламинарное течение однородного газа в пограничном слое описывается в безразмерных переменных системой уравнений [16]

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u\rho)}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho)}{\partial y} &= 0, \quad \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \rho \left( u \frac{\partial I}{\partial x} + v \frac{\partial I}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial I}{\partial y} + \mu \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) u \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \rho Q \\ \rho &= \frac{pm}{RT}, \quad I = h + \frac{u^2}{2}, \quad \mu = T^{3/2} \left( 1 + \frac{T_s}{T_e} \right) \left( T + \frac{T_s}{T_e} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $u$  и  $v$  — проекции вектора скорости на ортогональные координаты  $x$  (параллельная поверхности пластины) и  $y$  (нормальная к поверхности) соответственно,  $\rho$  — плотность,  $p$  — давле-

ние,  $T$  – температура,  $h = c_p T$  – энтальпия,  $Q$  – количество тепла введенного в единицу времени на единицу массы,  $m$  – молекулярный вес газа,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $\mu$  – динамический коэффициент вязкости,  $c_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $\text{Pr}$  – число Прандтля. Предполагается, что  $c_p$  и  $\text{Pr}$  постоянны,  $T_s = 110$  К. Система (1.1) нормализована с помощью следующих масштабов:  $v_e/u_e$  – длина,  $\mu_e$  – вязкость,  $u_e$  – скорость,  $T_e$  – температура,  $\rho_e$  – плотность,  $u_e^2$  – энтальпия,  $u_e^4 \rho_e / \mu_e$  – подвод тепла,  $u_e^2 / T_e$  – удельная теплоемкость и универсальная газовая постоянная,  $\rho_e u_e^2$  – давление. Индексом  $e$  помечены параметры на внешней границе пограничного слоя.

На поверхности пластины ( $y = 0$ )  $u = 0$ ,  $v = j/\rho_w$  ( $j$  – поток массы газа через стенку),  $T = T_w$ , а на внешней границе пограничного слоя  $u = T = 1$ .

В локальном автомодельном приближении система приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dY} \left( C \frac{d^2 f}{dY^2} \right) + \frac{f}{2} \frac{d^2 f}{dY^2} &= 0 \\ \frac{d}{dY} \left( \frac{C}{\text{Pr}} \frac{dg}{dY} \right) + \frac{f}{2} \frac{dg}{dY} &= \frac{u_e^2}{I_e} \frac{d}{dY} \left[ \left( \frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) C \frac{df}{dY} \frac{d^2 f}{dY^2} \right] - Q \frac{u_e^2}{I_e} \text{Re}_b^2 \left( \frac{\text{Re}}{\text{Re}_b} \right)^2 \\ \frac{df}{dY} = u, \quad g = \frac{u_e^2 I}{I_e}, \quad dY = \rho \frac{dy}{\text{Re}}, \quad C = \rho \mu, \quad \text{Re} = \sqrt{x} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $\text{Re}_b$  – постоянное число Рейнольдса конкретной задачи. Решение системы (1.2) зависит от  $x$  (через  $\text{Re}$ ) параметрически и должно удовлетворять граничным условиям

$$f = j \text{Re}, \quad \frac{df}{dY} = u = 0, \quad T = T_w (Y = 0); \quad u = g = 1 (Y = \infty)$$

Зависимость подвода тепла от нормальной координаты принимается в виде

$$Q \frac{u_e^2}{I_e} \text{Re}_b^2 = Au(1-u) \exp \left( - \left( \frac{y - y_f}{\Delta_f} \right)^2 \right)$$

Здесь величина  $\Delta_f$  пропорциональна ширине полосы подвода тепла, которая много меньше толщины пограничного слоя;  $y_f$  – параметр задачи, характеризующий положение полосы подвода тепла. В силу того, что основной вклад в подвод тепла осуществляется в узкой полосе, т.е. при  $y - y_f \ll 1$ , можно ограничиться первым членом разложения скорости по координате вблизи  $y_f$ , т.е. принять  $(u - u_f) \approx (du/dy)_f (y - y_f)$ , где индексом  $f$  помечены значения параметров течения при  $y = y_f$ . Тогда

$$\begin{aligned} y - y_f &\approx (u - u_f) \left( \frac{du}{dy} \right)_f^{-1} = (u - u_f) \frac{\text{Re}}{\rho_f} \left( \frac{du}{dY} \right)^{-1} \Big|_{Y=Y_f} \\ y - y_f &\approx (u - u_f) T_f(\text{Re}_b) \frac{T_f(\text{Re})}{T_f(\text{Re}_b)} \text{Re}_b \frac{\text{Re}}{\text{Re}_b} \left( \frac{du}{dY} \right)^{-1} \Big|_{Y=Y_f} \end{aligned}$$

Известно, и настоящие предварительные расчеты показывают, что  $du/dY$  слабо зависит от  $\text{Re}$ . Таким образом, можно взять

$$Q \frac{u_e^2}{I_e} \text{Re}_b^2 = Au(1-u) \exp \left( - \left( \frac{u - u_f}{\Delta} \frac{T_f(\text{Re})}{T_f(\text{Re}_b)} \frac{\text{Re}}{\text{Re}_b} \right)^2 \right) \quad (1.3)$$

Параметры  $A$ ,  $\Delta$  и  $u_f$  были выбраны таким образом, чтобы распределение температуры соответствовало профилю температуры, рассчитанному в [17] для пламени при следующих условиях. Плоская пористая пластина обтекается воздухом, а через ее поры вдувается смесь азота и водорода, массовая концентрация которого составляла 0.4%. Скорость на границе пограничного слоя составляет 5 м/с, а максимум температуры находился на высоте 3.5 мм на расстоянии 0.1 м от переднего края пластины. Расчеты в [17] были проведены при  $T_e = 293$  К,  $\text{Re}_b = 180$  и числе Ма-

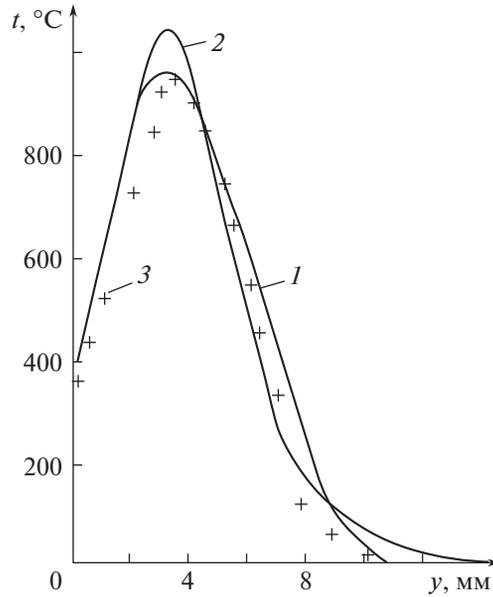


Рис. 2. Сравнение распределения температуры настоящих расчетов (1) с расчетными (2) и экспериментальными (3) данными [17].

ха  $M \ll 1$ . Наилучшее соответствие температурных профилей, полученных в [17] и в настоящих расчетах, было достигнуто при  $A = 15.25$ ,  $u_f = 0.15$ ,  $\Delta = 0.158$  (рис. 2).

На рис. 3 представлены профили скорости (рис. 3а) и температуры (рис. 3б) при числе Рейнольдса  $Re = 180$  и разных значениях параметра вдува  $j$ . Как и следовало ожидать, при вдуве в профиле скорости появляется точка перегиба, которая удаляется от поверхности пластины с увеличением  $j$ . Температура внутри пограничного слоя при этом увеличивается. Расчеты показывают, что при  $j = 0.004$  увеличение числа Рейнольдса с  $Re = 70$  до  $Re = 180$ , что равносильно смещению вниз по потоку примерно два раза, повышает максимальную температуру внутри слоя примерно на 35%, что качественно согласуется с данными по диффузионному пламени в пограничном слое, например, с экспериментами [17] и расчетами [18].

В теории “невязкой” неустойчивости особую роль играет обобщенная точка перегиба, наличие максимума или минимума в произведении плотности и завихренности  $K = \rho(du/dy) = \rho^2(du/dY)$ , наличие которых является необходимым условием неустойчивости. Изменение  $K$  по пограничному слою показано на рис. 3в. Из него видно, что с увеличением интенсивности вдува положение максимума смещается к внешней границе пограничного слоя, в то время как положение минимума остается неизменным. Сильное влияние вдува на положение максимума, обобщенной точки перегиба, может повлиять на устойчивость течения в пограничном слое.

## 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Полные динамические уравнения в безразмерном представлении имеют вид

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\text{grad}\Pi, \quad \frac{dp}{dt} + \rho \text{div}(\mathbf{v}) = 0, \quad \rho \frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt} - \text{div}(\mathbf{q}) + 2\mu \dot{S}^2 + \rho Q \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}, \quad \dot{S}_j = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \dot{S}^2 = \sum_{i,j=1}^3 \dot{S}_{ij}^2$$

$$\Pi = \left( p + \frac{2}{3} \mu \text{div} \mathbf{v} \right) E - 2\mu \dot{S}, \quad p = \rho RT, \quad \mathbf{q} = -\frac{c_p \mu}{Pr} \text{grad} T$$

Здесь тепловой поток нормирован на  $\rho_e u_e^3$ , а время на  $v_e / u_e^2$ . Нормировка других величин такая же, как и в (1.1). Любую величину  $\Phi_j$  можно представить в виде суммы основной стационарной

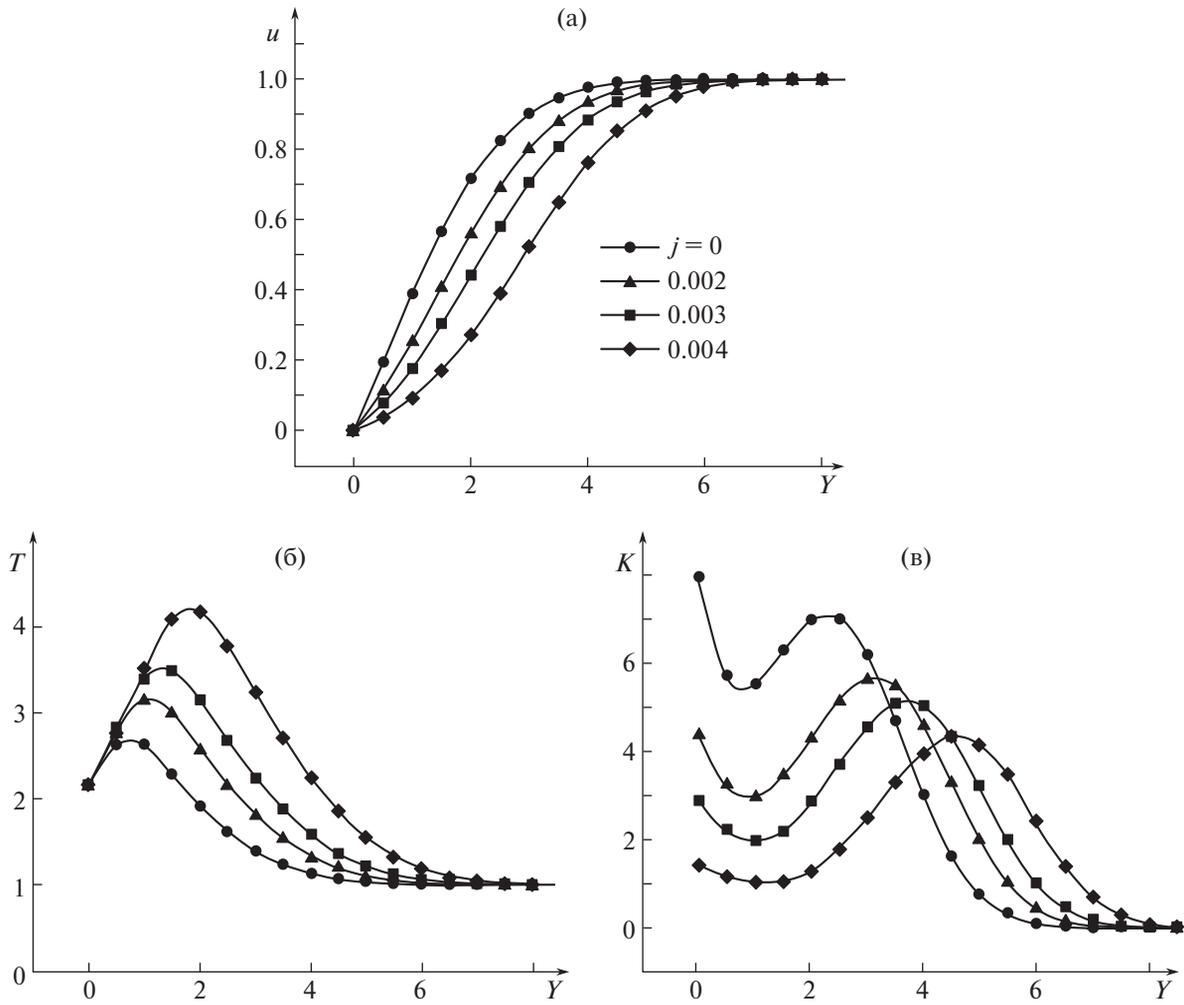


Рис. 3. Распределение скорости (а) и температуры (б) и произведения плотности на завихренность (в) в пограничном слое при  $Re = 180$  и разных величинах вдува газа.

величины и нестационарного возмущения,  $\Phi_i(t, x, y, z) = \phi_i(x, y, z) + \varepsilon \phi_{li}(t, x, y, z)$ . Линеаризация (2.1) относительно возмущений  $\phi_{li} = \phi_i^d(y) \exp[i(ax + bz - Ft)]$  приводит к линейной системе дифференциальных уравнений [19, 20], которая в приближении параллельного течения имеет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{d\phi_1^d}{dY} &= -i_c \phi_2^d + i_x \phi_5^d + i_z \phi_6^d - 2\mu_r \frac{du_w^d}{dY}, & \frac{d\phi_2^d}{dY} &= \rho \frac{dT}{dY} \phi_2^d - u_w^d - i_c T r^d \\
 \frac{d\phi_3^d}{dY} &= -i_x \phi_2^d - \frac{du}{dY} \mu_i T^d + \frac{\phi_5^d}{\mu_r}, & \frac{d\phi_4^d}{dY} &= -i_z \phi_2^d + \frac{\phi_6^d}{\mu_r} \\
 \frac{d\phi_5^d}{dY} &= i_x \phi_1^d + i_c \phi_3^d - i_T^d + \rho \frac{du}{dY} \phi_2^d, & \frac{d\phi_6^d}{dY} &= i_z \phi_1^d + (i_c - \mu_a) \phi_4^d - i_z \mu_r u_w^d \\
 \frac{d\phi_7^d}{dY} &= i\omega RT \phi_1^d + \rho \frac{dI}{dY} \phi_2^d - u_i^d + i_c u \phi_3^d + \left( i_c - \frac{\mu_a}{Pr} \right) \phi_8^d \\
 \frac{d\phi_8^d}{dY} &= -Pr \frac{du}{dY} \phi_3^d - \frac{dh}{dY} \mu_i T^d + \frac{Pr(\phi_7^d - u \phi_5^d)}{\mu_R}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

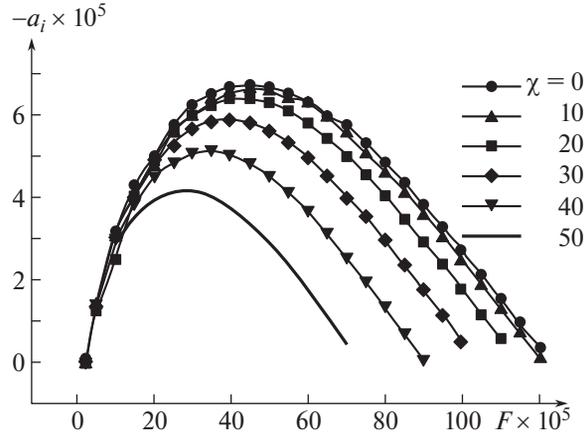


Рис. 4. Зависимость степени пространственного усиления от частотного параметра при разных углах скольжения:  $Re = 180, j = 0.004$ .

Здесь  $\phi_1^d, \phi_2^d, \phi_3^d, \phi_4^d, \phi_5^d, \phi_6^d, \phi_7^d, \phi_8^d$  – амплитуды возмущений давления; нормальной, продольной и боковой скорости; сдвиговых напряжений  $\tau_{12}, \tau_{23}$ ; теплового потока и энтальпии. Дополнительными членами системы являются

$$\begin{aligned} u_w^d &= i_x \phi_3^d + i_z \phi_5^d, & i_t^d &= i_x \mu_r u_w^d + \mu_a \phi_3^d \\ \mu_a &= (i_x^2 + i_z^2) \mu_r, & \tilde{r} &= \rho^d / \rho = g_m \phi_1^d - \rho T^d \\ T^d &= g_{m1} \phi_8^d, & i_x &= ia \operatorname{Re} T, & i_z &= ib \operatorname{Re} T \\ i_c &= \operatorname{Re} u_c = i \operatorname{Re}(ua - F), & \mu_r &= \frac{\mu \rho}{\operatorname{Re}}, & \mu_T &= \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} \\ g_m &= \gamma M^2, & g_{m1} &= (\gamma - 1) M^2, & \gamma &= c_p / c_v \end{aligned}$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты.

Система (2.2) решается с граничными условиями

$$\phi_3^d, \phi_2^d, \phi_4^d, \phi_8^d = 0 \quad (Y = 0 \text{ и } Y = \infty) \quad (2.3)$$

При заданных значениях  $M, Re, F$  и параметрах основного течения решение системы (2.2) с условиями (2.3) существует при собственном значении  $a = a_r + ia_i$ . Течение неустойчиво при отрицательном значении  $a_i$ .

На рис. 4 показаны зависимости степеней пространственного усиления возмущений от частотного параметра при  $Re = 180, j = 0.004$  и различных углах скольжения волны  $\chi = \operatorname{arctg}(b/a_r)$ .

Из представленных данных видно, что практически во всем диапазоне частот нарастающих возмущений наиболее интенсивно растут двумерные волны,  $\chi = 0$ . Поэтому ниже будут приведены результаты по устойчивости только по отношению к двумерным возмущениям.

На рис. 5 приведены значения степеней усиления в зависимости от частоты для ряда чисел Рейнольдса. Из этих данных видно, что максимальная степень усиления нарастает с ростом числа Рейнольдса при  $Re < 150$ , дальнейшее его увеличение приводит к уменьшению скорости роста возмущений. Частота наиболее растущих волн уменьшается с увеличением числа Рейнольдса, по-видимому, из-за нарастания толщины пограничного слоя с ростом  $Re = x^{1/2}$ .

На рис. 6 показана зависимость степени пространственного усиления от частотного параметра при разной подаче газа через пористую стенку при  $Re = 180$ . Как и в отсутствие подогрева [21], при подводе тепла увеличение скорости потока массы через стенку приводит к дестабилизации течения. Расчетами установлено, что критическое число Рейнольдса при  $j = 0.004$  уменьшается почти на 70% в сравнении со случаем  $j = 0$ .

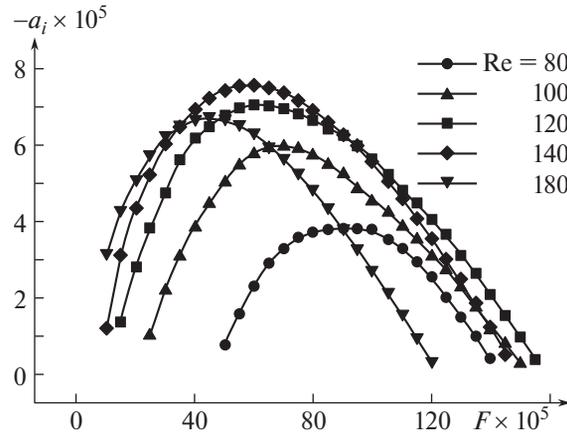


Рис. 5. Зависимость степени пространственного усиления от частотного параметра при разных числах Рейнольдса:  $j = 0.004$ ,  $\chi = 0$ .

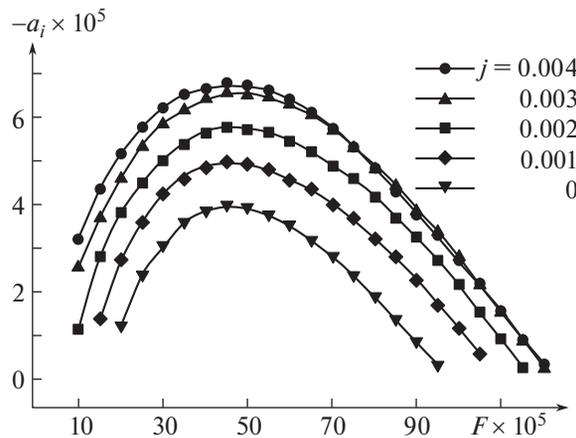
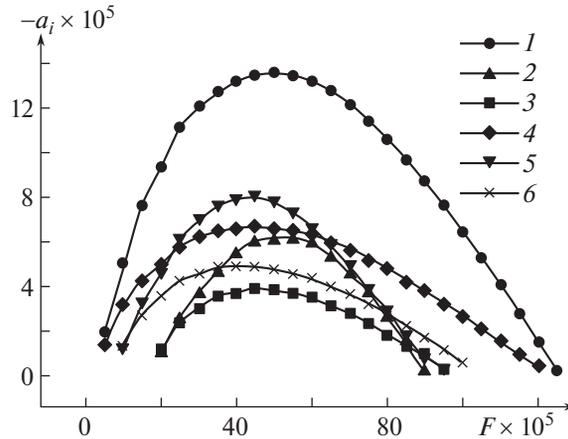


Рис. 6. Зависимость степени пространственного усиления от частотного параметра при разной подаче газа через пористую стенку:  $Re = 180$ ,  $\chi = 0$ .

Расчеты фазовой и групповой скорости от частотного параметра в неустойчивой области при  $Re = 180$ ,  $j = 0.004$  показали, прежде всего, что групповая скорость существенно превышает фазовую скорость. С увеличением частоты фазовая скорость стремится к значению скорости основного течения в положении максимума функции  $K$ . Она находится в промежутке скоростей в положении минимума и максимума  $K$  (рис. 3в,  $Re = 180$ ,  $j = 0.004$ ), где выполняется второе необходимое условие “невязкой” неустойчивости [15],  $(u - Us)(dK/dY) < 0$ , которое является обобщением критерия Фьёртофта [22]. Здесь  $Us$  – скорость, соответствующая максимуму  $K$ .

Известно [23], что при слабом усилении возмущений их пространственные и временные степени усиления связаны соотношением  $a_i \approx -F_i/C_{gr}$ , где временная степень усиления  $F_i$  – мнимая часть собственного значения  $F$  задачи (2.2), (2.3) при фиксированном реальном значении  $a$ . Специальные расчеты показали, что точное значение степени пространственного усиления практически совпадает с ее приближенной величиной даже при достаточно интенсивном росте амплитуды возмущения.

В [13, 24], при исследовании влияния подвода тепла в отсутствие подачи газа через поверхность пластины, была установлена стабилизирующая роль подогрева узкой полосы пограничного слоя. Поэтому в настоящих исследованиях также обращалось внимание на влияние подогрева на устойчивость пограничного слоя в условиях инъекции газа через пористую пластину. На рис. 7 показаны зависимости степеней усиления от частоты при разных соотношениях количества инжектируемого газа ( $j = 0.0, 0.001, 0.004$ ), как в отсутствие подвода тепла ( $Q = 0$ ), так и при подводе



**Рис. 7.** Зависимости степеней пространственного усиления от частотного параметра при разных соотношениях подачи газа через стенку и подводе тепла ( $Re = 180$ ,  $T_w = 2.16$ ,  $\chi = 0$ ): 1 –  $j = 0.004$ ,  $Q = 0.0$ ; 2 –  $j = 0.0$ ,  $Q = 0$ ; 3 –  $j = 0.0$ ,  $Q \neq 0$ ; 4 –  $j = 0.004$ ,  $Q \neq 0$ ; 5 –  $j = 0.001$ ,  $Q = 0$ ; 6 –  $j = 0.001$ ,  $Q \neq 0$ .

тепла в соответствии с соотношением (1.3). При этом все зависимости получены при одинаковой температуре стенки  $T_w = 2.16$  (640°K) и числе Рейнольдса  $Re = 180$ . Сопоставление максимумов приведенных зависимостей показывает следующее. В отсутствие подвода тепла (зависимости: 1 ( $j = 0.004$ ), 2 ( $j = 0.001$ ), 5 ( $j = 0.0$ )) вдув газа дестабилизирует течение. Подвод тепла, наоборот, стабилизирует его при нагретой пластине ( $T_w = 2.16$ ). Сопоставление зависимости 1 и 4 показывает, что в случае большого количества вдуваемого газа ( $j = 0.004$ ) подвод тепла уменьшает максимальную степень усиления более чем в два раза. Однако она все еще выше, чем в случае без подогрева и вдува газа (зависимость 2). При меньших количествах вдуваемого газа ( $j = 0.001$ ) в результате подвода тепла (зависимость 6) устойчивость пограничного слоя повышается не только в отношении случая без подвода тепла (зависимость 5), но становится более устойчивым по сравнению со случаем без инжекции и подвода тепла (зависимость 2).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках локального автомодельного приближения смоделирован профиль температуры диффузионного пламени работы [17] при массовом вдуве газа через пористую пластину  $j = (\rho v)_w / (\rho u)_\infty = 0.004$ , числе Рейнольдса  $Re = 180$  и числе Маха  $M \ll 1$ . При этом потребовался подвод тепла в соответствии с (1.3). С использованием (1.3) были рассчитаны стационарные параметры пограничного слоя и рассмотрена его устойчивость при разных значениях числа Рейнольдса и расхода вдуваемого через пористую стенку газа. Установлено, что увеличение вдуваемой массы газа через пористую стенку приводит к образованию перегибных профилей скорости. При фиксированной норме вдува увеличение числа Рейнольдса повышает максимальную температуру внутри слоя. Из этого следует рост максимальной температуры вниз по потоку, так как  $Re = x^{1/2}$ , что наблюдается при диффузионном горении, например, в экспериментах [17] и расчетах [18]. Важная функция в теории “невязкой” неустойчивости, произведении плотности и завихренности  $K$ , имеет две обобщенные точки перегиба. Одна из них соответствует минимуму, вторая максимуму  $K(Y)$ . Минимальное значение  $K$  находится на меньшем расстоянии от стенки в сравнении с положением максимума  $K$ . Положение максимума с увеличением вдува смещается к внешней границе пограничного слоя, в то время как минимум продолжает оставаться при  $Y \approx 1$ .

Впервые исследована устойчивость пограничного слоя с подводом тепла и вдувом газа при дозвуковом обтекании пластины. В результате исследований установлено, что в условиях вдува газа и внутреннего подвода тепла наиболее опасными (растущими) являются двумерные возмущения, как и в отсутствие подогрева. Существует число Рейнольдса, при котором степень усиления максимальна. С увеличением числа Рейнольдса частота наиболее растущих волн понижается из-за увеличения толщины пограничного слоя. Инжекция газа дестабилизирует пограничный слой. При параметре вдува  $j = 0.004$  критическое число Рейнольдса снижается примерно на 40% в сравнении со случаем  $j = 0$ .

Критический слой, где скорость в пограничном слое равна фазовой скорости волны ( $u = C$ ), располагается в области, соответствующей второму необходимому условию “невязкой” неустойчивости,  $(u - Us)(dK/dY) < 0$ . С увеличением частоты растущих волн фазовая скорость стремится к скорости течения в максимуме произведения плотности и завихренности, соответствующего обобщенной точке перегиба. Несмотря на довольно большие степени пространственного роста, их приближенные значения, определяемые как отношение степени временного усиления к групповой скорости, практически совпадают с точными величинами.

При нагретой пластине подвод тепла внутри пограничного слоя понижает максимальную степень роста возмущений в пограничном слое с инъекцией газа, как и в случае ее отсутствия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 22-21-00017, <https://rscf.ru/project/22-21-00017/>).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Emmons H.W.* The film combustion of liquid fuel // *Z. Math. und Mech.* 1956. V. 36. 1/2. P. 60–71.
2. *Волчков Э.П., Терехов В.И., Терехов В.В.* Структура течения, тепло- и массоперенос в пограничных слоях со вдувом химически реагирующих веществ (обзор) // *Физика горения и взрыва.* 2004. № 1. С. 3–20.
3. *Гапонов С.А., Петров Г.В.* Устойчивость пограничного слоя неравновеснодиссоциирующего газа. Новосибирск: Наука, 2013. 95 с.
4. *Shen S.F.* Effect of chemical reaction on the inviscid criterion for laminar stability of parallel flows // *Fifth Midwestern Conference on Fluid Mechanics, Ann Arbor, Michigan, University of Michigan.* 1957. P. 11–20.
5. *Петров Г.В.* Устойчивость пограничного слоя газа с химическими реакциями на каталитической поверхности // *Физика горения и взрыва.* 1974. Т. 10. № 6. С. 797–801.
6. *Петров Г.В.* Устойчивость пограничного слоя каталитически рекомбинирующего газа // *ПМТФ.* 1978. № 1. С. 40–45.
7. *Lin C.C.* The theory of hydrodynamic stability. Cambridge university press. 1955. 155 p. *Линь Ц.Ц.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ, 1958. 195 с.
8. *Han Y., Cao W.* Flat-plate hypersonic boundary-layer flow instability and transition prediction considering air dissociation // *Appl. Math. Mech.* 2019. V. 40. № 5. P. 719–736. doi.org/. <https://doi.org/10.1007/s10483-019-2480-6>
9. *Marxen O.* Hydrodynamic Stability of Hypersonic Chemically Reacting Boundary Layers I.EN-AVT-289-02%20(23).pdf
10. *Jackson T.L.* Stability of Laminar Diffusion Flames in Compressible Mixing Layers // In: *Hussaini M.Y., Kumar A., Voigt R.G. / Major Research Topics in Combustion. ICASE/NASA LaRC Ser. Springer, New York. NY.* 1992. [https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2884-4\\_8](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2884-4_8)
11. *See Y.C., Ihme M.* Effects of finite-rate chemistry and detailed transport on the instability of jet diffusion flames // *J. Fluid Mech.* 2014. V. 745. P. 647–681. <https://doi.org/10.1017/jfm.2014.95>
12. *Лукашов В.В., Терехов В.В., Терехов В.И.* Пристенные течения химически реагирующих веществ. Обзор современного состояния проблемы // *Физика горения и взрыва.* 2015. Т. 51. № 2. С. 23–36.
13. *Гапонов С.А.* Устойчивость сверхзвукового пограничного слоя при подводе тепла в его узкую полосу // *Теплофизика и аэромеханика.* 2021. Т. 28. № 3. С. 351–360.
14. *Jackson T.L., Grosch C.E.* Inviscid spatial stability of a compressible mixing layer. Part 2. The flame sheet model // *Journal of Fluid Mechanics.* 1990. V. 217. P. 391–420. <https://doi.org/10.1017/S0022112090000775>
15. *Shin D.S., Ferziger J.H.* Linear stability of the reacting mixing layer // *AIAA Journal.* 1991. V. 29 (10). P. 1634–1642. <https://doi.org/10.2514/3.10785>
16. *Dorrance W.H.* Viscous Hypersonic Flow: Theory of Reacting and Hypersonic Boundary Layers. McGraw-Hill Book Co. Inc. 1962. 334 p. *Дорренс У.Х.* Гиперзвуковые течения вязкого газа. М.: Изд-во Мир. 1966. 439 с.
17. *Volchkov E.P., Lukashov V.V., Terekhov V.V., Hanjalic K.* Characterization of the flame blow-off conditions in a laminar boundary layer with hydrogen injection // *Combustion and Flame.* 2013. V. 160. P. 1999–2008. <https://doi.org/10.1016/j.combustflame.2013.04.004>
18. *Peters N.* Analysis of a laminar flat plate boundary-layer diffusion flame // *International Journal of Heat and Mass Transfer.* 1976. V. 19. P. 385–393. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(76\)90094-6](https://doi.org/10.1016/0017-9310(76)90094-6)
19. *Петров Г.В.* Реакция сверхзвукового пограничного слоя на акустическое воздействие // *Теплофизика и аэромеханика.* 2001. № 1. С. 77–86.

20. Гапонов С.А., Юдин А.В. Взаимодействие гидродинамических внешних возмущений с пограничным слоем // Прикладная механика и техническая физика. 2002. Т. 43. № 1. С. 100–107.
21. Chen T.S., Sparrow E.M., Tsou F.K. The effect of mainflow transverse velocities in linear stability theory // Journal of Fluid Mechanics. 1971. V. 50 (04). P. 741.  
<https://doi.org/10.1017/s0022112071002866>
22. Fjortoft R. Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex // Geophys. 1950. V. 17. P. 1–52.
23. Gaster M.A. A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability // J. Fluid Mech. 1962. V. 14. Part 2. P. 222–224.  
<https://doi.org/10.1017/S0022112062001184>
24. Гапонов С.А. Влияние подвода тепла в узкую полосу пограничного слоя на его устойчивость // Прикладная механика и техническая физика. 2020. Т. 61. № 5. С. 5–13.  
<https://doi.org/10.15372/PMTF20200501>

УДК 532.546

## ВЛИЯНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО РАССЛОЕНИЯ ФАЗ НА ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ ВОДОГАЗОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА НЕФТЯНЫЕ ПЛАСТЫ

© 2022 г. А. А. Чернова<sup>a,\*</sup>, А. А. Афанасьев<sup>a,\*\*</sup><sup>a</sup> Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*E-mail: anya\_chernova\_2504@mail.ru

\*\*E-mail: afanasyev@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 23.03.2022 г.

После доработки 15.04.2022 г.

Принята к публикации 10.05.2022 г.

Исследуется водогазовое воздействие на нефтяные пласты, т.е. газовый метод увеличения нефтеотдачи, предполагающий закачку воды и углекислого газа в пласт с целью повышения нефтеотдачи. Применение такого воздействия осложняется возможностью гравитационного расслоения фаз, приводящего к неравномерному охвату пласта вытесняющими агентами. Из системы уравнений, описывающей течение воды и двухфазной углеводородной смеси, определены безразмерные параметры, характеризующие стратификацию фаз. Показано, что эффективность водогазового воздействия зависит от трех параметров подобия. Проведено параметрическое исследование оптимальных стратегий закачки воды и углекислого газа при изменении одного из критериев подобия. Построена диаграмма оптимальных стратегий водогазового воздействия. Исследованы оптимальные интервалы перфорирования нагнетательной и добывающей скважин для различных значений предложенного параметра.

*Ключевые слова:* фильтрация, водогазовое воздействие, CO<sub>2</sub>, декарбонизация, нефть, газ

**DOI:** 10.31857/S0568528122050036

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Актуальной проблемой рационального недропользования и энергетики является оптимизация добычи полезных ископаемых, в том числе нефти. Расчет показателей разработки углеводородных месторождений вызывает сложность в связи с разнообразным строением геологических пластов, многокомпонентным составом насыщающих их жидкостей и газов и фазовыми переходами [1–4]. В последние десятилетия традиционной является технология заводнения нефтяных пластов с целью поддержания высокого пластового давления. Однако для ряда месторождений эта технология является неэффективной, так как коэффициент извлечения нефти (КИН) составляет всего около 20–30% [5]. КИН – это отношение извлекаемых запасов нефти к количеству нефти, находящейся в пласте. В связи с этим актуально развитие методов увеличения нефтеотдачи (МУН), которые позволяют повысить КИН [2, 4, 5]. Одним из таких перспективных методов является водогазовое воздействие на нефтяные пласты, которое предполагает закачку не только воды, но и газа (например, углекислого газа – CO<sub>2</sub> – или метана), который хорошо растворяется в нефти, снижает ее вязкость и способствует более полному вытеснению [6, 7]. Применение CO<sub>2</sub> в качестве вытесняющего агента требует дополнительных экономических расходов, так как стоимость закачки CO<sub>2</sub> выше стоимости воды. Таким образом, с одной стороны, при закачке CO<sub>2</sub> удастся повысить КИН, но, с другой стороны, при этом появляются дополнительные расходы по сравнению с закачкой воды. В связи с этим возникает проблема – поиск баланса между прибылью от дополнительно извлеченной нефти и дополнительными расходами на закачку CO<sub>2</sub>. Также оптимизация водогазового воздействия предполагает определение газа, который эффективнее закачивать, и пропорций и объемов закачки, в которых нужно закачивать воду и газ для повышения нефтеотдачи пластов и рентабельности водогазового воздействия.

Закачка CO<sub>2</sub> в нефтяные пласты также позволяет решить актуальную современную проблему по декарбонизации энергетических систем. Антропогенный фактор, связанный с выбросом про-

дуктов горения в атмосферу, приводит к глобальному потеплению. При этом  $\text{CO}_2$  является одним из основных парниковых газов, и снижение его выбросов в атмосферу должно способствовать решению отмеченной климатической проблемы. Надежное захоронение  $\text{CO}_2$  в нефтяных пластах является одним из перспективных способов уменьшения выбросов, декарбонизации существующих энергетических систем и построения низкоуглеродной энергетики.

При закачке воды и газа в нефтяные пласты происходят сложные процессы, в частности связанные с фазовыми переходами углеводородных компонент:  $\text{CO}_2$  хорошо растворяется в нефти, снижая ее вязкость, а растворенный в нефти метан испаряется в газовую фазу, т.е. происходит обмен компонентами между фазами. Эти фазовые переходы в значительной мере определяют эффективность водогазового воздействия [5]. Интенсивность фазовых переходов и равномерный охват пласта газом могут снижаться из-за стратификации фаз. Проблема связана с тем, что при водогазовом воздействии газ, как более легкая фаза, поднимается к кровле пласта, а вода, как более тяжелая фаза, опускается к подошве пласта (рис. 1). Такое гравитационное расслоение фаз приводит к тому, что в одних областях пласта происходит вытеснение нефти только газом, а в других — только водой. Это приводит к снижению эффективности водогазового воздействия [8]. Также важно определить, где нужно перфорировать вертикальные скважины, т.е. на какой высоте их пробивать, или на какой глубине пробурить горизонтальные скважины. Например, при перфорировании вертикальной нагнетательной скважины у кровли пласта, газ потечет к добывающей скважине только вдоль кровли пласта, а области у подошвы пласта останутся не охвачены газом. Если же нагнетательная скважина перфорирована у подошвы пласта, то вода потечет только по подошве пласта, а вышележащие области пласта останутся не охвачены водой.

Гравитационное расслоение фаз ранее рассматривалось в работах [8–10]. Исследованы частные случаи водогазового воздействия в пластах с фиксированными значениями проницаемости и пористости. В статье [8] показано, что есть оптимальное отношение вертикальной к горизонтальной проницаемости, при котором достигается максимальный КИН. В данной работе рассмотрен общий случай фильтрации в пластах, характеризующихся различными пористостью и проницаемостью. Показано, что эффективность МУН характеризуется не просто отношением проницаемостей, а более сложными критериями подобия, в которые входит расстояние между скважинами, толщина пласта и другие параметры. Таким образом, данная работа обобщает проведенные ранее исследования. Также результаты данной работы имеют большую практическую значимость, так как оцениваются параметры водогазового воздействия, при которых достигается максимум рентабельности, а не КИН. При этом время разработки месторождения не фиксировано, а является неизвестной величиной. Как показано в [11] для одномерной постановки задачи, это позволяет повысить рентабельность на 10%.

Данная работа направлена на исследование влияния гравитационного расслоения фаз на эффективность водогазового воздействия. Определены безразмерные параметры, характеризующие гравитационное расслоение фаз. Проводится параметрическое исследование влияния одного из предложенных параметров и оцениваются значение КИН и экономическая рентабельность водогазового воздействия при различных режимах закачки. Также рассматриваются различные интервалы перфорирования нагнетательной и добывающей скважин и исследуется влияние этих интервалов на эффективность водогазового воздействия при различных значениях предложенного параметра.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для описания течений в пористой среде используется стандартная композиционная модель фильтрации, позволяющая рассчитывать трехфазные течения воды, нефти и газа с учетом детального моделирования компонентного состава фаз на основе уравнения состояния [6, 12]. Предполагается, что фильтрация происходит в условиях локального термодинамического равновесия при заданной пластовой температуре ( $T_0$ ), а давление во всех фазах одинаковое ( $P$ ), т.е. капиллярное давление несущественно влияет на фильтрацию. Предполагается, что в течении могут присутствовать три фазы: жидкие фазы воды и нефти, а также фаза газа. Углеводородные (УВ) компоненты могут, в зависимости от давления и температуры, находиться либо в однофазном состоянии газа или жидкости (нефти), либо в двухфазном состоянии газ–нефть. При этом вода не смешивается с УВ-компонентами, образуя отдельную фазу жидкости.

В двумерной постановке задачи изотермическая фильтрация многокомпонентной жидкости —  $n$ -компонентной УВ-смеси и воды — описывается следующей системой уравнений [6, 12]:

$$\partial_t (\phi (\rho_g c_{g(i)} s_g + \rho_o c_{o(i)} s_o)) + \nabla \cdot (\rho_g c_{g(i)} \mathbf{u}_g + \rho_o c_{o(i)} \mathbf{u}_o) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

$$\partial_t (\phi \rho_w s_w) + \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{u}_w) = 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_j = -\mathbf{K} \frac{K_{rj}}{\mu_j} (\nabla P - \rho_j \mathbf{g}), \quad j = g, o, w \quad (3)$$

$$K_{rj} = K_{rj}(s_j), \quad j = g, w, \quad K_{ro} = \frac{(s_w - s_{wc}) K_{row}(s_w) + s_g K_{rog}(s_g)}{s_w - s_{wc} + s_g} \quad (4)$$

$$\Psi = \Psi(P, T_0, \mathbf{z}), \quad \Psi = \{\rho_j, c_{j(i)}, \mu_j, \tilde{s}_j, \mathbf{x}, \mathbf{y}\}, \quad (5)$$

$$\tilde{s}_j = \frac{s_j}{1 - s_w}, \quad j = g, o, \quad \rho_w, \mu_w = \text{const}$$

$$\mathbf{z} = \{z_{(1)}, \dots, z_{(n)}\}, \quad \mathbf{x} = \{x_{(1)}, \dots, x_{(n)}\}, \quad \mathbf{y} = \{y_{(1)}, \dots, y_{(n)}\}$$

$$c_{o(i)} = \frac{x_{(i)} M_{(i)}}{\sum_{k=1}^n x_{(k)} M_{(k)}}, \quad c_{g(i)} = \frac{y_{(i)} M_{(i)}}{\sum_{k=1}^n y_{(k)} M_{(k)}} \quad (6)$$

$$s_o + s_g + s_w = 1, \quad \sum_{i=1}^n c_{j(i)} = 1, \quad j = g, o, \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^n z_{(k)} = 1, \quad \sum_{k=1}^n x_{(k)} = 1, \quad \sum_{k=1}^n y_{(k)} = 1$$

где  $\partial_t = \partial/\partial t$ ,  $\phi$  – пористость,  $\rho$  – плотность,  $c_{j(i)}$  – массовая концентрация  $i$ -й компоненты в  $j$ -й фазе,  $s$  – насыщенность,  $u$  – скорость фильтрации Дарси,

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_X & 0 \\ 0 & K_Z \end{pmatrix}$$

– тензор абсолютной проницаемости,  $K_{rj}$  – относительная проницаемость  $j$ -й фазы,  $\mu$  – динамическая вязкость,  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения,  $s_{wc}$  – неснижаемая насыщенность воды [1],  $\mathbf{z}$  – полные мольные концентрации УВ-компонент,  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  – мольные концентрации УВ-компонент в жидкой и газовой фазах,  $M$  – молярная плотность,  $n$  – количество компонент УВ-смеси. Индексы  $(i)$  and  $j$  обозначают параметры  $i$ -й компоненты и  $j$ -й фазы, а индексы  $g$ ,  $o$  и  $w$  – фазы газа, нефти и воды соответственно.

Уравнения (1) и (2) – законы сохранения массы УВ компонент и воды соответственно, а уравнение (3) – закон Дарси. Соотношения (4) задают относительные фазовые проницаемости (ОФП). Соотношения (5) – теплофизические параметры  $\Psi$ , в том числе число фаз в термодинамическом равновесии, определяющиеся в зависимости от  $P$ ,  $T_0$  и  $\mathbf{z}$ . В соответствии с [11, 13] для расчета  $\Psi$  используется кубическое уравнение состояния Соаве-Редлиха-Квонге [3, 14]. В данной работе предполагается, что вода и скелет пористой породы – несжимаемые среды. т.е.  $\rho_w$ ,  $\phi$ ,  $\mathbf{K} = \text{const}$ . Соотношения (6) – формулы пересчета от мольных к массовым концентрациям, (7) – замыкающие соотношения для насыщенностей фаз и концентраций компонент УВ-смеси.

В соотношениях (4)  $K_{ro}$  и  $K_{row}$  – ОФП нефти и воды для двухфазных течений нефть–вода при  $s_g = 0$ ,  $K_{rg}$  и  $K_{rog}$  – ОФП газа и нефти для двухфазных течений нефть–газ при  $s_w = 0$ , а ОФП нефти –  $K_{ro}$  – равна объемному среднему между  $K_{row}(s_w)$  и  $K_{rog}(s_g)$ . Предполагается, что эти функции имеют следующий вид [15]:

$$\begin{aligned}
 K_{rw}(s_w) &= \left( \frac{s_w - s_{wc}}{1 - s_{wc}} \right)^{2.25} \\
 K_{row}(s_w) &= 0.8 \left( \frac{1 - s_w - s_{or}}{1 - s_{wc} - s_{or}} \right)^{2.75} \\
 K_{rg}(s_g) &= 0.74 \left( \frac{s_g}{1 - s_{wc}} \right)^{1.8} \\
 K_{rog}(s_g) &= 0.8 \left( \frac{1 - s_g - s_{wc} - s_{or}}{1 - s_{wc} - s_{or}} \right)^{2.75}
 \end{aligned} \tag{8}$$

где  $s_{wc}$  – неснижаемая насыщенность воды, а  $s_{or}$  – остаточная насыщенность нефти.

В данной работе рассматривается упрощенная модель нефти. Предполагается, что имеются только три углеводородные компоненты: метан ( $C_1$ ), гексан ( $C_6$ ) и гексадекан ( $C_{16}$ ), которые далее будем обозначать как  $C_1$ ,  $C_6$  и  $C_{16}$  соответственно.

### 3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается двумерная постановка задачи фильтрации в области  $\Phi: 0 \leq X \leq L, 0 \leq Z \leq H$ , описывающей срез проницаемого пласта между нагнетательной и добывающей скважинами (рис. 1). Здесь  $X$  – горизонтальная координата, направленная вдоль пласта,  $Z$  – вертикальная координата, направленная вниз,  $L$  – протяженность рассматриваемого сектора пласта, а  $H$  – его толщина. В начальный момент времени ( $t = 0$ ) пористая среда насыщена нефтью заданного состава ( $z = x = \{0.0, 0.2, 0.4, 0.4\}$ ) и водой при неснижаемой насыщенности  $s_w = s_{wc} = 0.16$ . Предполагается, что компонента  $i = 1$  –  $CO_2$ ,  $i = 2$  –  $C_1$ ,  $i = 3$  –  $C_6$  и  $i = 4$  –  $C_{16}$ , т.е. нефть на 20% состоит из  $C_1$ , на 40% – из  $C_6$  и на 40% – из  $C_{16}$ . Пластовая температура  $T_0 = 93^\circ C$  предполагается постоянной. Давление в начальный момент времени имеет гидростатическое распределение:

$$P = P_0 + \int_{H/2}^Z \rho_o g dZ \quad \text{где} \quad t = 0 \tag{9}$$

где  $P_0 = 139$  бар – давление на относительной глубине  $H/2$ . Все границы непроницаемы, т.е.

$$u_{X,j} = 0 \quad \text{при} \quad X = 0, L; \quad u_{Z,j} = 0 \quad \text{при} \quad Z = 0, H \tag{10}$$

Закачка  $CO_2$  и воды и отбор нефти, газа и воды через скважины моделируются с помощью точечных источника (Inj) и стока (Prd), расположенных при  $X = 0$  и  $X = L$  соответственно. При параметрическом исследовании координата  $Z$  их положения будет изменяться. Например, положение источника и стока может соответствовать узким интервалам перфорирования вертикальных скважин. Также они могут соответствовать двум горизонтальным скважинам, расположенным параллельно друг другу вдоль оси  $Y$ , перпендикулярной  $X$  и  $Z$ . В этом случае рассматриваемая постановка задачи описывает линейное вытеснение между скважинами. Действительно, перпендикулярная скважинам плоскость  $OXZ$  соответствует области  $\Phi$ , а скважины – источнику и стоку. Через источник закачивается вода и/или  $CO_2$ , а через сток моделируется отбор воды, нефти и газа таким образом, что в его окрестности поддерживается начальное пластовое давление  $P_0$ . При этом объемный расход  $Q$  предполагается постоянным ( $Q = 1$  м<sup>3</sup>/день при пластовых условиях).

В данной статье рассматривается закачка двух компонент: воды и  $CO_2$ . Исследуются следующие стратегии (режимы) закачки. Первая стратегия – вытеснение нефти с помощью непрерывной закачки воды. Эта стратегия обозначается символом W и применяется как традиционный вторичный метод нефтеотдачи. Вторая стратегия – непрерывная закачка  $CO_2$ , которая обозначается символом G. Следующие две стратегии включают в себя поочередную закачку воды и  $CO_2$ . Стратегия WG предполагает закачку воды определенный период времени, за которым следует период закачки газа. При этом закачка газа используется как третичный МУН, т.е. применяется к УВ-месторождению, истощенному после заводнения. Стратегия GW обратна стратегии WG.

Здесь закачка газа используется как основной (вторичный) метод нефтедобычи, а заводнение применяется после закачки газа.

Для определения экономической целесообразности водогазового воздействия необходимо рассматривать не только гидродинамику вытеснения, но и его экономические параметры. Определим чистую приведенную стоимость – сумму дисконтированных значений потока платежей, приведенных к сегодняшнему дню [11]

$$J(t) = \int_0^t \frac{R(t')}{(1+D)^{t'/t_{dp}}} dt' \quad (11)$$

где  $R$  – поток текущих денежных средств,  $D$  – ставка дисконтирования,  $t_{dp}$  – период дисконтирования и  $t'$  – переменная интегрирования. Обычно, для оценки рентабельности используются следующие значения:  $D = 0.1$  и  $t_{dp} = 1$  год [11]. В случае водогазового воздействия денежные потоки определяются в виде

$$R = r_o q_o - r_{wi} q_{wi} - r_{wp} q_{wp} - r_{gi} q_{gi} - r_{gp} q_{gp} \quad (12)$$

Здесь  $r_o q_o$  – доходы от продажи нефти,  $r_{wi} q_{wi}$  и  $r_{gi} q_{gi}$  – расходы, связанные с закачкой воды и  $\text{CO}_2$ , а  $r_{wp} q_{wp}$  и  $r_{gp} q_{gp}$  – расходы на их утилизацию при добыче, где  $r$  – стоимость закачки/отбора единицы объема,  $q_i$  и  $q_p$  – объемный расход фазы через точечный источник и сток соответственно. Все числовые значения параметров  $r$  взяты из работы [11].

Описанные стратегии будем сравнивать между собой с помощью параметра  $J$ . Задача оптимизации водогазового воздействия заключается в определении стратегии, для которой целевая функция  $J$  достигает максимума, т.е. используется следующий критерий оптимального решения:

$$J(t) \rightarrow \max, \quad 0 \leq t < \infty \quad (13)$$

#### 4. УРАВНЕНИЯ В БЕЗРАЗМЕРНОМ ВИДЕ

Закачка  $\text{CO}_2$  и воды приводит к гравитационному расслоению фаз. Газ, как более легкая фаза, поднимается к кровле пласта ( $Z=0$ ), а вода, как тяжелая фаза, опускается к подошве пласта ( $Z=H$ ). В результате происходит неравномерный охват пласта водой и газом, что может снижать эффективность водогазового воздействия (рис. 1). В этом разделе определим основные безразмерные параметры, характеризующие влияние гравитационного расслоения фаз на водогазовое воздействие.

Введем характерные масштабы течения и соответствующие безразмерные переменные в виде:

$$X = LX^*, \quad Z = HZ^*, \quad t = \frac{\phi LH(1-s_{wc})}{Q} t^* \quad (14)$$

$$P = \tilde{\rho}_o g H P^* \quad (15)$$

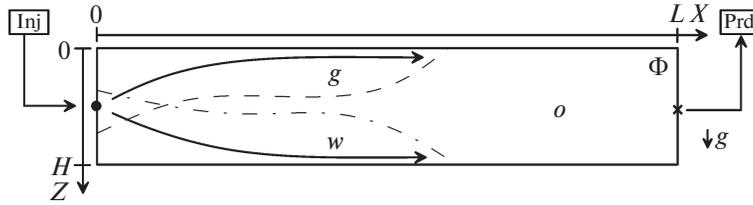
$$K_{rj} = \frac{K_{rj}^*}{1-s_{wc}} \quad (16)$$

$$\rho_j^* = \frac{\rho_j}{\rho_o}, \quad \mu_j^* = \frac{\mu_j}{\mu_o} \quad (17)$$

где параметры, обозначенные звездочкой, – безразмерные переменные. Волной отмечены параметры в начальный момент времени при давлении  $P = P_0$  и температуре  $T = T_0$ . Согласно (14) в качестве характерных длин вдоль осей  $X$  и  $Z$  взяты  $L$  и  $H$ . За характерное давление принято давление столба нефти высотой  $H$ .

Подставляя закон Дарси (3) и безразмерные переменные (14)–(17) в уравнения (1), (2) и учитывая соотношения (4)–(7), получим следующую систему уравнений в безразмерном виде:

$$\frac{\partial}{\partial t^*} (\rho_w^* s_w) - G \frac{\partial}{\partial X^*} \left( \frac{\rho_w^*}{\mu_w^*} K_{rw}^* \frac{\partial P^*}{\partial X^*} \right) - \Gamma \frac{\partial}{\partial Z^*} \left( \frac{\rho_w^*}{\mu_w^*} K_{rw}^* \left( \frac{\partial P^*}{\partial Z^*} - \rho_w^* \right) \right) = 0 \quad (18)$$



**Рис. 1.** Схема течения в профильной постановке задачи.  $X$  и  $Z$  – горизонтально и вертикально вниз направленные оси.  $Inj$  – точечный источник, через который происходит закачка  $CO_2$  и воды, а  $Prd$  – точечный сток, через который происходит отбор нефти. Символы  $o$ ,  $g$ ,  $w$  показывают области, насыщенные нефтью, газом и водой соответственно.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t^*} (\rho_g^* c_{g(i)} s_g + \rho_o^* c_{o(i)} s_o) - G \frac{\partial}{\partial X^*} \left( \frac{\rho_g^* c_{g(i)} K_{rg}^*}{\mu_g^*} \frac{\partial P^*}{\partial X^*} + \frac{\rho_o^* c_{o(i)} K_{ro}^*}{\mu_o^*} \frac{\partial P^*}{\partial X^*} \right) - \\ - \Gamma \frac{\partial}{\partial Z^*} \left( \frac{\rho_g^* c_{g(i)} K_{rg}^*}{\mu_g^*} \left( \frac{\partial P^*}{\partial Z^*} - \rho_g^* \right) + \frac{\rho_o^* c_{o(i)} K_{ro}^*}{\mu_o^*} \left( \frac{\partial P^*}{\partial Z^*} - \rho_o^* \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

где  $G$  и  $\Gamma$  – безразмерные параметры подобия

$$G = \frac{H^2 K_X \tilde{\rho}_o g}{L Q \mu_o}, \quad \Gamma = \frac{L K_Z \tilde{\rho}_o g}{Q \mu_o} \quad (20)$$

Эти два параметра связаны следующим образом:

$$G = \Gamma A^2, \quad \text{где} \quad A^2 = \frac{K_X H^2}{K_Z L^2} \quad (21)$$

Таким образом, получено три безразмерных параметра, любые два из которых являются независимыми.

Нефтяные пласты характеризуются различными значениями проницаемостей  $K_X$  и  $K_Z$ , могут иметь разную толщину  $H$ , а их разработка может вестись различной сеткой скважин с характерным расстоянием между скважинами  $L$ . Все эти параметры, также как и другие величины, например  $\rho_j$ ,  $\mu_j$ , входят в  $G$ ,  $\Gamma$  и  $A$ , а значит различные пласты характеризуются различными параметрами подобия  $G$ ,  $\Gamma$  и  $A$ . Таким образом, введение этих безразмерных величин позволяет уменьшить количество параметров, определяющих эффективность водогазового воздействия.

Граничные и начальные условия (9) и (10) в безразмерных переменных принимают вид

$$\begin{aligned} P^* = P_0^* + \int_{0.5}^{Z^*} \rho_o^* dZ^*, \quad \text{где} \quad P_0^* = \frac{P_0}{\tilde{\rho}_o g H} \\ K_{rj}^* \frac{\partial P^*}{\partial X^*} = 0, \quad j = o, w, g \quad \text{при} \quad X^* = 0, 1 \\ K_{rj}^* \left( \frac{\partial P^*}{\partial Z^*} - \rho_j^* \right) = 0 \quad \text{при} \quad Z^* = 0, 1 \end{aligned} \quad (22)$$

В данной работе оценим влияние параметра  $\Gamma$  на эффективность водогазового воздействия. Для этого проведем параметрическое исследование, зафиксировав все параметры, кроме проницаемости  $K_Z$ . Используются следующие значения параметров:  $H = 10$  м,  $L = 100$  м,  $g = 9.8$  м/с<sup>2</sup>,  $Q = 1$  м<sup>2</sup>/сут,  $K_X = 100$  мкм<sup>2</sup>,  $s_{wc} = 0.16$ ,  $s_{or} = 0.24$ . В соответствии с уравнением состояния Соаве–Редлиха–Квонга и корреляции Лоренца–Брея–Кларка [16] для расчета вязкости УВ фаз, выбранным значениям  $P_0 = 139$  бар и  $T_0 = 93^\circ\text{C}$  соответствуют следующие значения плотности и вязкости нефти:  $\tilde{\rho}_o = 716$  кг/м<sup>3</sup> и  $\mu_o = 0.324$  мПа·с. При таких параметрах  $G = 18.75$ . Подставляя эти значения в (21), получим, что  $\Gamma = \alpha \times K_Z$ , где  $\alpha = 200$  1/мкм<sup>2</sup>. Реальные значения вертикаль-

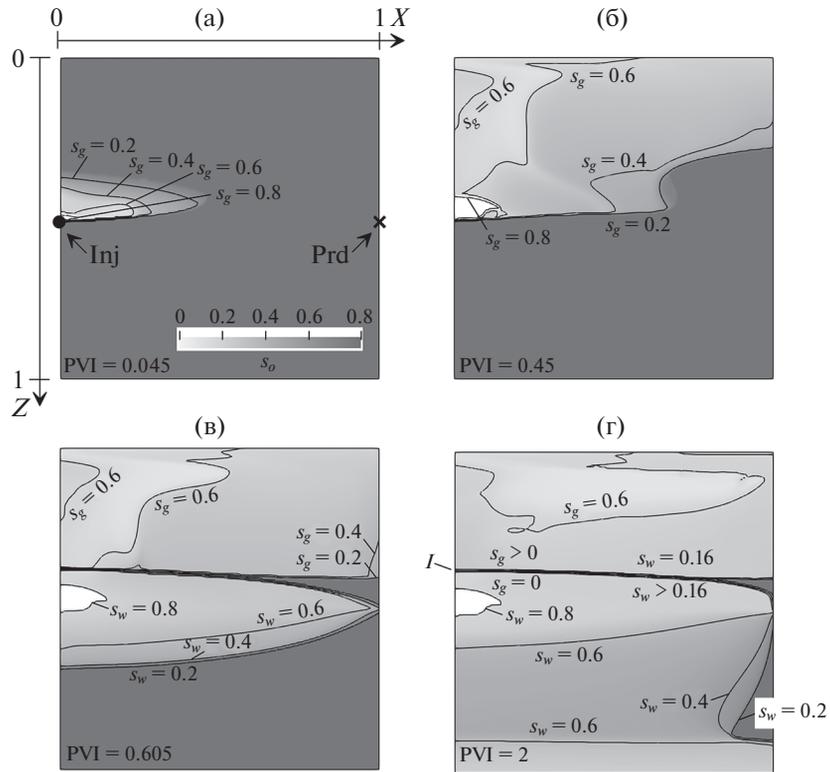


Рис. 2. Пример распределения  $s_j$  в стратегии GW при  $\Gamma = 5$ . Источник (Inj) и сток (Prd) расположены при  $Z = 0.5$ .

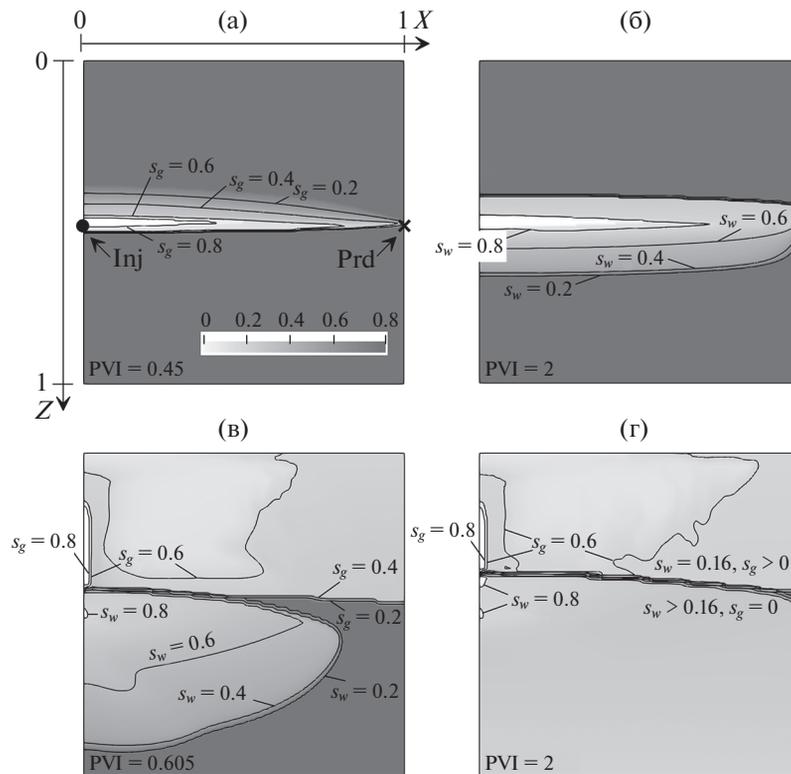


Рис. 3. Пример распределения  $s_j$  в стратегии GW при  $\Gamma = 0.5$  (а, б) и при  $\Gamma = 10$  (в, г). Источник (Inj) и сток (Prd) расположены при  $Z = 0.5$ .

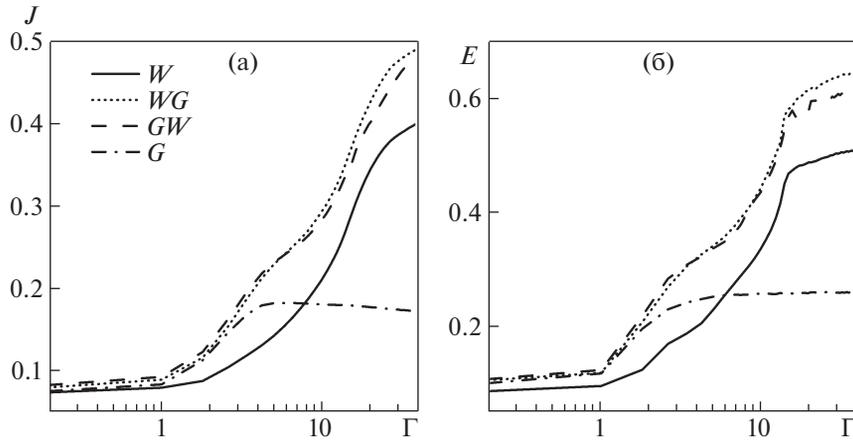


Рис. 4. Чистая приведенная стоимость (а) и коэффициент извлечения нефти (б) при  $G = 18.75$  и  $\Omega = 1$  и различных  $\Gamma$ .

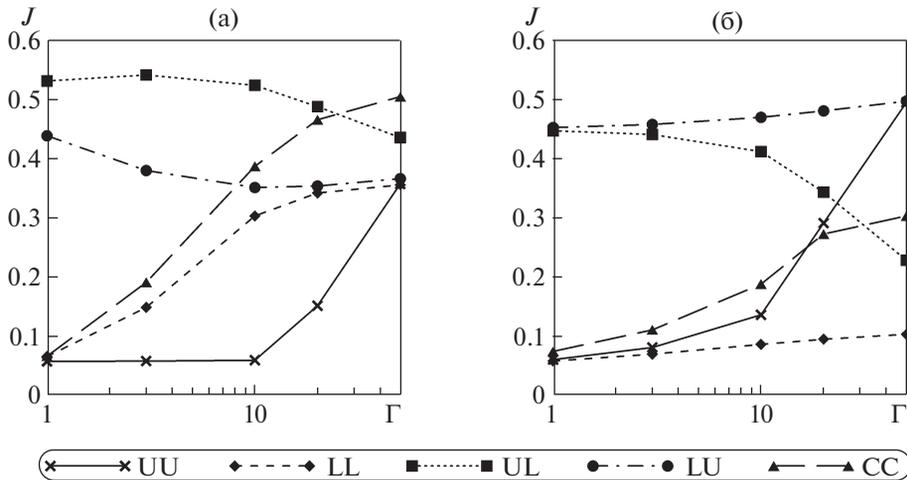


Рис. 5. Значения чистой приведенной стоимости при различных положениях источника и стока и значениях параметра  $\Gamma$  для стратегий GW (а) и WG (б) при  $G = 18.75$  и  $\Omega = 1$ .

ной проницаемости находятся в диапазоне от  $10^{-3}$  до  $0.2 \text{ мкм}^2$ , что соответствует значениям  $\Gamma$  от 0.2 до 40 и значениям  $A$  от 2.24 до 31.62.

Согласно закону Дарси (3), перепад давления между скважинами можно оценить следующим образом:

$$\Delta P = Q \frac{\mu L}{K_x} \tag{23}$$

где  $\mu$  – средняя вязкость многофазной жидкости. Согласно уравнению (23),  $\Delta P$  обратно пропорциональна  $K_x$ . В данной работе намеренно выбрано большое значение  $K_x$ , чтобы  $\Delta P$  не превышало 0.1 бар. В этом случае изменения давления не оказывают существенного влияния на фазовые равновесия, которые можно рассматривать при  $P_0$  (хотя это влияние все же учитывается при численном моделировании). Это допущение аналогично тому, что применяется при моделировании вытеснения нефти методом характеристик [2].

Введем безразмерные переменные [11]

$$PVI = \frac{Qt}{V_{hc}}, \quad PVI_{ds} = \frac{Qt_{ds}}{V_{hc}}, \quad J^* = \frac{J}{\tilde{r}_0 V_{hc}} \tag{24}$$

где  $PVI$  – количество закачанных поровых объемов,  $PVI_{ds}$  – количество закачанных поровых объемов за период дисконтирования,  $V_{hc} = (1 - s_{wc})\phi HL$  – поровый объем, изначально занятый

нефтью,  $J^*$  – безразмерная чистая приведенная стоимость,  $\tilde{r}_o$  – чистый доход от извлеченной нефти. Так как расход  $Q$  постоянен, то, согласно (24), PVI растет пропорционально времени  $t$ .

Величина  $\tilde{r}_o V_{hc}$  представляет собой валовый доход, который может быть получен только в идеализированном случае, если вся нефть будет извлечена. Такому случаю соответствует  $J^* \rightarrow 1$ . Однако  $J^* < 1$ , так как часть остаточной нефти не может быть извлечена, расходы значительны, а добыча длится годами. Таким образом,  $J^*$  характеризует долю максимальной чистой приведенной стоимости, которая может быть достигнута.

Подставляя (24) в (11), получим

$$J^* = \int_0^{PVI} \frac{R}{\tilde{r}_o Q} (1 + D)^{-\frac{PVI'}{PVI_{ds}}} dPVI' = \int_0^{PVI} \frac{R}{\tilde{r}_o Q} (\exp(1/\Omega))^{-PVI'} dPVI' \quad (25)$$

где

$$\Omega = \frac{PVI_{ds}}{\log(1 + D)} = \frac{Qt_{ds}}{V_{hc} \log(1 + D)} = \text{const} \quad (26)$$

Здесь безразмерный расход  $\Omega$  пропорционален  $Q$ , а также зависит от параметров экономической модели  $D$  и  $t_{ds}$ . Таким образом, параметр подобия  $\Omega$  характеризует как физические процессы, так и экономические параметры вытеснения.

Эффективность водогазового воздействия зависит от трех параметров подобия  $\Omega$ ,  $\Gamma$  и  $G$ . В данной работе  $\Omega = 1$  и  $G = 18.75$  зафиксированы, а  $\Gamma$  варьируется.

Ниже результаты будут представлены в безразмерных параметрах, а у всех безразмерных параметров знак \* опускается.

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ

### 5.1. Пример

Для исследования влияния параметра  $\Gamma$  на эффективность водогазового воздействия проведено численное моделирование фильтрации в рамках описанной постановки задачи. Для этого использовался комплекс программ MUFITS [17]. Рассмотрим пример стратегии GW при  $PVI_g = 0.45$  и  $PVI_w = 1.55$ , где  $PVI_g$  и  $PVI_w$  обозначают количество закачанного порового объема газа и воды соответственно. В этом разделе считаем, что источник и сток расположены при  $Z = 0.5$ . Распределение остаточной нефти, газа и воды при  $\Gamma = 5$  показано на рис. 2. Линии уровня соответствуют изолиниям насыщенности воды и газа  $s_w, s_g = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ . Цветом показано распределение насыщенности нефти.

Из рис. 2 видно, как закачанный газ постепенно, с увеличением PVI, поднимается к кровле пласта, вода опускается к подошве пласта, а нефть вытесняется и ее количество в пласте уменьшается. На этапе закачки газа, т.е. при  $PVI \leq PVI_g$  происходит накопление газа в области  $Z \leq 0.5$ , а в области  $Z > 0.5$  насыщенность нефти не изменяется. На втором этапе закачки воды, т.е. при  $PVI > PVI_g$ , вода быстро прорывается от источника к стоку вдоль горизонта  $Z \approx 0.5$ . При этом вода постепенно опускается к подошве, а  $s_w$  при  $Z > 0.5$  постепенно возрастает. Нефть же вытесняется вверх к уровню  $Z \approx 0.5$  и извлекается через сток. В результате при  $PVI = 2$  область  $Z < 0.5$  в основном охвачена вытеснением газом, а  $Z \geq 0.5$  – водой.

Для оценки влияния  $\Gamma$  на течение также рассмотрим случаи  $\Gamma = 0.5$  и  $\Gamma = 10$  для стратегии GW при  $PVI_g = 0.45$  и  $PVI_w = 1.55$  (рис. 3). При  $\Gamma = 0.5$  влияние силы тяжести мало. Это приводит к тому, что вытеснение нефти локализовано около прямой  $Z = 0.5$ . Вдоль прямой  $Z = 0.5$  нефть сначала вытесняется газом, а потом водой, а области у кровли и подошвы пласта остаются не охвачены вытесняющими агентами. При  $\Gamma = 10$  газ сразу поднимается наверх и вытесняет нефть сверху вниз, накапливаясь у кровли пласта, а вода, наоборот, опускается вниз и вытесняет нефть снизу вверх, накапливаясь у подошвы пласта. Таким образом, достигается более полный охват пласта вытесняющими агентами.

### 5.2. Оптимальные стратегии при $G = 18.75$ и различных $\Gamma$

Рассмотрим, как оптимальная в соответствии с (13) стратегия зависит от параметра  $\Gamma$  при фиксированных  $G = 18.75$  и  $\Omega = 1$ . Результаты расчетов представлены на рис. 4. Здесь каждое значение на линии соответствует оптимизационному расчету, в котором определялись продолжительность периодов закачки ( $PVI_g$  и  $PVI_w$ ), позволяющих достичь максимального значения функции  $J$ . При численной оптимизации использовались градиентные и безградиентные методы, описанные в [13].

На рис. 4а показано изменение значения чистой приведенной стоимости ( $J$ ), а на рис. 4б – изменение значения КИН ( $E$ ) в зависимости от параметра  $\Gamma$ . При любых значениях  $\Gamma$  заводнение пласта ( $W$ ) не является эффективной стратегией, так как линия, соответствующая  $W$ , лежит ниже одной из линий, соответствующей другой стратегии. При малых  $\Gamma \leq 2$  значения  $J$  и  $E$  для стратегий  $G$ ,  $WG$  и  $GW$  приблизительно совпадают. При  $\Gamma \approx 2$  стратегия  $G$  является еще эффективной, но при  $\Gamma > 2$  стратегия  $G$  уже не самая эффективная. При  $2 \leq \Gamma \leq 7$  выше всех лежит линия, соответствующая стратегии  $GW$ , а при  $\Gamma > 7$  самая эффективная стратегия –  $WG$ , т.е. закачка сначала воды, а затем  $CO_2$ , так как  $E$  и  $J$  при такой стратегии достигают своих максимальных значений. Стоит отметить, что при любых значениях  $\Gamma$  стратегии  $WG$  и  $GW$  имеют приблизительно одинаковые значения  $J$  и  $E$ .

Заметим, что построенные решения, удовлетворяющие (13), также имеют высокие значения КИН, большие, чем в случае раздельной закачки воды и газа отдельно. При больших значениях параметра  $\Gamma$  применение водогазового воздействия позволяет достичь больших значений  $J$  и  $E$ . Это связано с тем, что коэффициент охвата при росте  $\Gamma$  становится больше, т.е. при маленьких  $\Gamma$  вытеснение происходит только из узкой области вдоль прямой линии, соединяющей источник и сток, а если  $\Gamma$  большое, то газ течет вверх, а вода вниз, т.е. вытеснением охватываются области, лежащие выше и ниже источника и стока. Таким образом, чем больше воздействие силы тяжести, тем применение водогазового воздействия более эффективно. Во многом это связано с тем, что перфорации моделируются точечными источником и стоком. Если перфорировать вертикальную скважину по всей толщине пласта, то такого эффекта не должно наблюдаться, но в данной работе такой случай не рассматривается.

### 5.3. Оптимальные интервалы перфорирования скважин

Важной задачей при применении водогазового воздействия является выбор интервалов перфорирования для нагнетательной и добывающей скважин. Несомненно, что правильный выбор этих интервалов может повысить эффективность водогазового воздействия на нефтяные пласты. В данном разделе рассматривается влияние интервалов перфорирования скважин на максимум целевой функции  $J$ .

Обозначим аббревиатурой АВ расположение интервалов перфорирования, где  $A = U, C, L$  и  $B = U, C, L$  соответствуют положениям источника и стока соответственно. Здесь  $U, C, L$  – интервалы перфорирования у кровли пласта ( $Z = 0$ ), по середине пласта ( $Z = 0.5$ ) и у подошвы пласта ( $Z = 1$ ) соответственно. Например,  $LU$  обозначает, что нагнетательная скважина перфорирована у подошвы пласта, а добывающая – у кровли.

При  $\Gamma = 1, 3, 10, 20$  и различных положениях источника и стока рассчитаны оптимальные режимы закачки воды и  $CO_2$ . Рассмотрены только две стратегии закачки:  $GW$  и  $WG$ , т.е. согласно рис. 4, две наилучшие стратегии при  $G = 18.75$  и  $\Omega = 1$ . Количество закачанных поровых объемов воды и  $CO_2$  взяты из раздела 5.1. Результаты расчетов приведены на рис. 5. Для стратегии  $GW$  при малых значениях  $\Gamma$  ( $\Gamma \leq 20$ ) наибольшие значения чистой приведенной стоимости достигаются при перфорировании нагнетательной скважины у кровли пласта, а добывающей – у подошвы пласта (случай  $UL$ ), а при больших значениях  $\Gamma$  ( $\Gamma > 20$ ) – при перфорировании обеих скважин в центре пласта (случай  $CC$ ). Для стратегии  $WG$  при любых значениях  $\Gamma$  самым эффективным перфорированием является перфорирование нагнетательной и добывающей скважин у подошвы и у кровли пласта соответственно (случай  $LU$ ). Однако при малых  $\Gamma$  эффективно также перфорирование скважин, наоборот, у подошвы и у кровли соответственно ( $UL$ ), а при больших  $\Gamma$  – перфорирование и нагнетательной, и добывающей скважин у кровли пласта ( $UU$ ). Также отметим, что если сравнивать эти графики между собой, то максимальные значения чистой приведенной стоимости достигаются при использовании стратегии  $GW$ .

Предположим, что месторождение, характеризующееся значениями  $G = 18.75$  и  $\Omega = 1$ , уже разрабатывалось в рамках традиционной технологии заводнения. Тогда применение к такому месторождению газового МУНа можно интерпретировать как применение стратегии WG. То есть если закачка  $\text{CO}_2$  применяется как третичный метод нефтедобычи, то нагнетательную скважину стоит перфорировать у кровли пласта, а добывающую – у подошвы. Если же разработка месторождения начинается с закачки газа, то нужно выбирать другие интервалы перфорирования, а именно при  $\Gamma \leq 20$  нагнетательную скважину стоит перфорировать у подошвы пласта, а добывающую – у кровли, а при  $\Gamma > 20$  обе скважины следует перфорировать при  $Z = 0.5$ . Получается, что выбор интервалов перфорирования зависит от того, на какой стадии разработки месторождения применяется закачка  $\text{CO}_2$ .

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследовано влияние гравитационного расслоения фаз на эффективность водогазового воздействия на нефтяные пласты. Показано, что эффективность воздействия характеризуется тремя параметрами подобия  $\Gamma$ ,  $G$  и  $\Omega$ , которые зависят от толщины пласта и его проницаемости, начальных значений вязкости и плотности нефти, расхода закачиваемой смеси и экономических показателей. Стратификация фаз существенно влияет на оптимальные режимы водогазового воздействия на нефтяные пласты. Так, при  $\Omega = 1$  и  $G = 18.75$  закачка только воды неэффективна. Непрерывная закачка газа эффективна только при малых  $\Gamma \approx 1$ , а для больших значений  $\Gamma$  самая эффективная с экономической точки зрения стратегия – поочередная закачка воды и газа. Исследованы оптимальные интервалы перфорирования нагнетательной и добывающей скважин. Показано, что при  $\Gamma \leq 20$  наиболее эффективная с экономической точки зрения стратегия GW при интервалах перфорирования нагнетательной скважины – у кровли пласта, а добывающей – у подошвы. Если  $\Gamma > 20$ , обе скважины нужно перфорировать в центре пласта. Однако выбор интервалов перфорирования скважин зависит от истории разработки месторождения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-80009).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dake L.P.* Fundamentals of Reservoir Engineering. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Co, 1978. 462 p.
2. *Orr F.M.* Theory of gas injection processes. Holte, Denmark: Tie-Line Publications, 2007. 381 p.
3. *Брусиловский А.И.* Фазовые превращения при разработке месторождений нефти и газа. М.: Грааль, 2002. 575 с.
4. *Восков Д.В., Ентов В.М.* К задаче о вытеснении нефти смесями газов // Изв. РАН МЖГ. 2001. № 2. С. 112–121.
5. *Сургучев М.Л.* Вторичные и третичные методы увеличения нефтеотдачи. М.: Недра, 1985. 308 с.
6. *Афанасьев А.А., Веденеева Е.А.* Исследование эффективности закачки газа и воды в нефтяной пласт // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 5. С. 46–55.
7. *Чернова А.А., Афанасьев А.А.* Расчет оптимальных составов закачиваемого газа, повышающих нефтеотдачу пластов // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2021. Т. 22 (2). С. 922.
8. *Namani M., Kleppe J.* Investigation of The Effect of Some Parameters in Miscible WAG Process Using Black-Oil and Compositional Simulators // Society of Petroleum Engineers. 2011. SPE-143297-MS.
9. *Bermudez L., Johns R.T., Parakh H.* Parametric investigation of WAG floods above the MME // SPE Journal. 2007. V. 12. P. 224–234.
10. *Pritchard D., Nieman R.* Improving Oil Recovery Through WAG Cycle Optimization in a Gravity-Override-Dominated Miscible Flood // in SPE/DOE Enhanced Oil Recovery Symposium, Society of Petroleum Engineers, 1992.
11. *Afanasyev A., Andreeva A., Chernova A.* Influence of oil field production life on optimal  $\text{CO}_2$  flooding strategies: Insight from the microscopic displacement efficiency // Netherlands: Elsevier BV. Journal of Petroleum Science and Engineering. V. 205. 108803.
12. *Coats K.H.* An equation of state compositional model // Soc. Petrol. Eng. J. 1980. V. 20. P. 363–376.
13. *Afanasyev A., Andreeva A., Chernova A.* Numerical optimisation of  $\text{CO}_2$  flooding using a hierarchy of reservoir models // Advances in Geosciences. 2021. V. 56. P. 19–31.
14. *Redlich O., Kwong J.N.S.* On the thermodynamics of solutions. V. An equation of state. Fugacities of gaseous solutions // Chemical Reviews. 1949. V. 44. P. 233–244.
15. *Kenyon D., Behie A.* Third SPE Comparative Solution Project: Gas Cycling of Retrograde Condensate Reservoirs // Journal of Petroleum Technology. 1987. V. 39. P. 981–997.
16. *Lohrenz J., Bray B.G., Clark C.R.* Calculating Viscosities of Reservoir Fluids From Their Compositions // Journal of Petroleum Technology. 1964. V. 16. P. 1171–1176.
17. MUFITS. Reservoir Simulation Software. [Электронный ресурс]. 2013–2022. URL: <http://www.mufits.org/> (дата обращения: 10.03.2022).

УДК 532.58:534-13

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК СИЛОВОГО АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА КОЛЕБЛЮЩИЕСЯ КОНСОЛЬНО-ЗАКРЕПЛЕННЫЕ БАЛКИ

© 2022 г. А. Н. Нуриев<sup>a,\*</sup>, А. М. Камалутдинов<sup>b,\*\*</sup><sup>a</sup> Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия<sup>b</sup> Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, Казань, Россия

\*E-mail: Artem.Nuriev@kpfu.ru

\*\*E-mail: amkamalutdinov@mail.ru

Поступила в редакцию 08.01.2022 г.

После доработки 05.03.2022 г.

Принята к публикации 05.03.2022 г.

Проводится экспериментальное и численное исследование взаимодействия длинных упругих балок с жидкостью в резонансных режимах колебания. Экспериментально изучаются затухающие изгибные колебания консольно-закрепленных тест-образцов в воздухе. С помощью МЭМС гироскопа регистрируются угловые скорости движения свободного конца консоли, с помощью дымовой визуализации проводится наблюдение течений в окрестности балки, индуцированных колебаниями. Строится квазиплоская математическая модель взаимодействия балка–жидкость, позволяющая по измеряемым логарифмическому декременту колебаний и относительному изменению частоты оценить силовое аэрогидродинамическое воздействие на балку. Проводится прямое трехмерное численное моделирование движения жидкости около консоли. По результатам численных и экспериментально-теоретических исследований выполняется анализ структуры течений и аэрогидродинамических сил, индуцированных колебаниями балки при разных параметрах колебаний. Исследуется применимость квазиплоской модели взаимодействия.

*Ключевые слова:* упругие колебания, нелинейное гидродинамическое воздействие, экспериментальная методика измерения, изгибные колебания, силы сопротивления, силы присоединенных масс

DOI: 10.31857/S0568528122050103

Упругие колебания балки в жидкости – это комплексный процесс, в рамках которого динамически деформируемое тело в каждой своей точке взаимодействует с вязкой средой, индуцируя в ней нелинейные течения (или изменяя их). Индуцированные течения, в свою очередь, влияют на частоту, амплитуду, профиль и другие параметры колебаний, а также могут возбуждать вторичные резонансы. Учет подобного взаимодействия имеет большое значение при проектировании широкого спектра инженерных конструкций, начиная от морских донных трубопроводов и нефтедобывающих платформ [1, 2], крыльев самолетов и топливных баков ракет [3–5], и заканчивая микроустройствами типа головок атомных резонансных микроскопов и “лабораторий на чипе” [6–8]. Настоящая работа посвящена исследованию резонансных изгибных колебаний длинных тонких балок в жидкости в диапазоне малых и умеренных чисел Рейнольдса.

В основе большинства традиционных подходов к изучению колебаний удлиненных балочных конструкций в жидкости лежит квазиплоская модель взаимодействия [9–15], согласно которой аэродинамическое воздействие, оказываемое на каждое сечение балки, можно считать результатом его плоского обтекания. Объединение этой модели с классической теорией колебания балок позволяет установить интегральные связи между параметрами колебания балки и гидродинамическими силами, действующими на нее со стороны жидкости (см., например, [9, 16]). Эта модель широко применяется для предсказания параметров колебания балки по данным двумерных расчетов обтекания колеблющегося цилиндрического тела с аналогичным профилем поперечного сечения [10, 17].

Квазиплоскую модель взаимодействия можно [14, 18] использовать и для получения обратных зависимостей, позволяющих определять характеристики силового аэродинамического воздействия на балку по экспериментально измеренным параметрам колебания. Развитие и апробация такого обратного метода проводятся в настоящем исследовании. Экспериментальная часть метода базируется на измерении перемещений свободного конца дюралюминиевой консоли при колебаниях, вызванных начальным отклонением образца из состояния равновесия. Использование дюрала в качестве материала для изготовления тест-образцов (в силу низких собственных демпфирующих свойств этого материала, практически не зависящих от амплитуды колебаний) позволяет разделять вклады внешнего аэродинамического и внутреннего механического воздействий в демпфирование. В настоящей работе проводится новая серия экспериментов, в рамках которых колебания консоли регистрируются трехосным МЭМС (микроэлектромеханические системы) гироскопом. Конечная точность определения гидродинамических сил, действующих на балку, обратным методом зависит от степени выполнимости квазидвумерной модели взаимодействия. Работы по исследованию границ применимости квазидвумерной гипотезы достаточно немногочисленны. В работе [11] с помощью трехмерного моделирования динамики жидкости около балок авторами установлено, что для консолей с соотношением  $L/b \geq 3$  (где  $L$  и  $b$  – длина и ширина консоли) при малых амплитудах колебания  $KC = 2\pi A/b < 0.3$  (где  $A$  – амплитуда колебания свободного конца консоли) трехмерные эффекты, в том числе сход вихрей со свободного конца балки, оказывают минимальное влияние на распределение аэродинамических сил вдоль балки.

При больших и умеренных амплитудах колебания  $1 \leq KC \leq 6$  трехмерные течения около колеблющихся консолей исследовались в [19]. Показано, что в этом диапазоне амплитуд поперечные течения начинают преобладать над продольными для балок с соотношением сторон  $L/b \geq 10$ . Однако оценки демпфирующих сил, полученные в данной работе для бесконечно тонких пластин, оказывались существенно выше экспериментальных оценок [14]. В действительности это может объясняться различной формой поперечных сечений, так как даже в плоском приближении в зависимости от геометрических характеристик оценки коэффициента сопротивления  $C_D$  могут отличаться более чем 1.6 раза [20].

Для определения всех характерных особенностей взаимодействия балка–жидкость во второй части работы проводится прямое численное моделирование обтекания консоли с параметрами, идентичными экспериментальным. На базе полученных данных выполняется сравнение моделируемых и экспериментально наблюдаемых (с помощью метода дымовой визуализации) картин течения, анализируется применимость квази-двумерной гипотезы и проводится идентификация ключевых параметров гидродинамического воздействия.

## 1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ БАЛОК В ВОЗДУХЕ

### 1.1. Регистрация колебаний с помощью МЭМС гироскопа

В ходе экспериментов проводились измерения затухающих колебаний, вызванных начальным отклонением свободного конца консоли из состояния равновесия. Схема проведения эксперимента представлена на рис. 1. Для регистрации колебаний балки применялся трехосный датчик МЭМС гироскопа MPU-6500 [21], обеспечивающий регистрацию угловых скоростей в диапазоне  $\pm 2000$  град/сек с частотой обновления до 8 КГц и точностью до 0.05 град/сек. Передача данных с датчика на рабочую станцию осуществлялась с помощью цифрового протокола I2C 400 КГц.

В качестве тест-образцов использовались дюралюминиевые балки толщиной  $h = 1.7$  мм, шириной  $b = 20, 30$  мм со стрелой вылета  $L$ , изменяемой от 150 до 450 мм. Все образцы для эксперимента изготавливались из дюралюминия А1-2024. В ходе обработки с ребер балок снималась фаска, в результате все торцы приобретали характерную треугольную форму (см. рис. 1, фотография торца выполнена с помощью микроскопа).

Датчик МЭМС гироскопа наклеивался непосредственно на тест-образец в окрестности свободного конца вдоль горизонтальной оси симметрии. Показания датчика содержат 3 угловые скорости ( $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ ) относительно системы координат  $x_M, y_M, z_M$ , жестко связанной с балкой (рис. 1).

Форма тест-образца в условиях рассматриваемой заделки и способа возбуждения колебаний препятствует возникновению  $\Omega_y$ , составляющей угловой скорости, что имеет подтверждение в настоящих экспериментах. Характерные временные зависимости угловых скоростей  $\Omega_x, \Omega_z$ , соответствующих изгибной и крутильной составляющим колебаний балки, представлены на рис. 2.

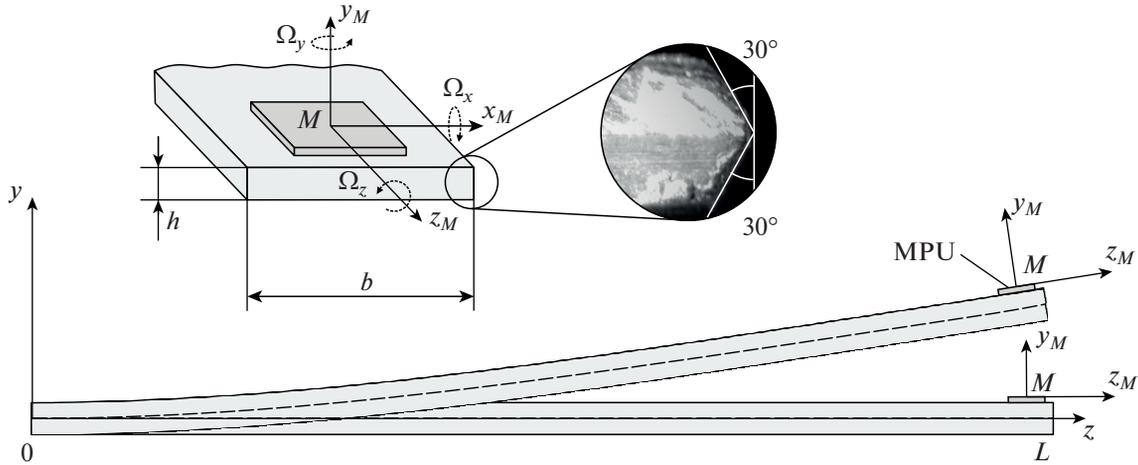


Рис. 1. Схема установки МЭМС гироскопа (MPU) на балку.

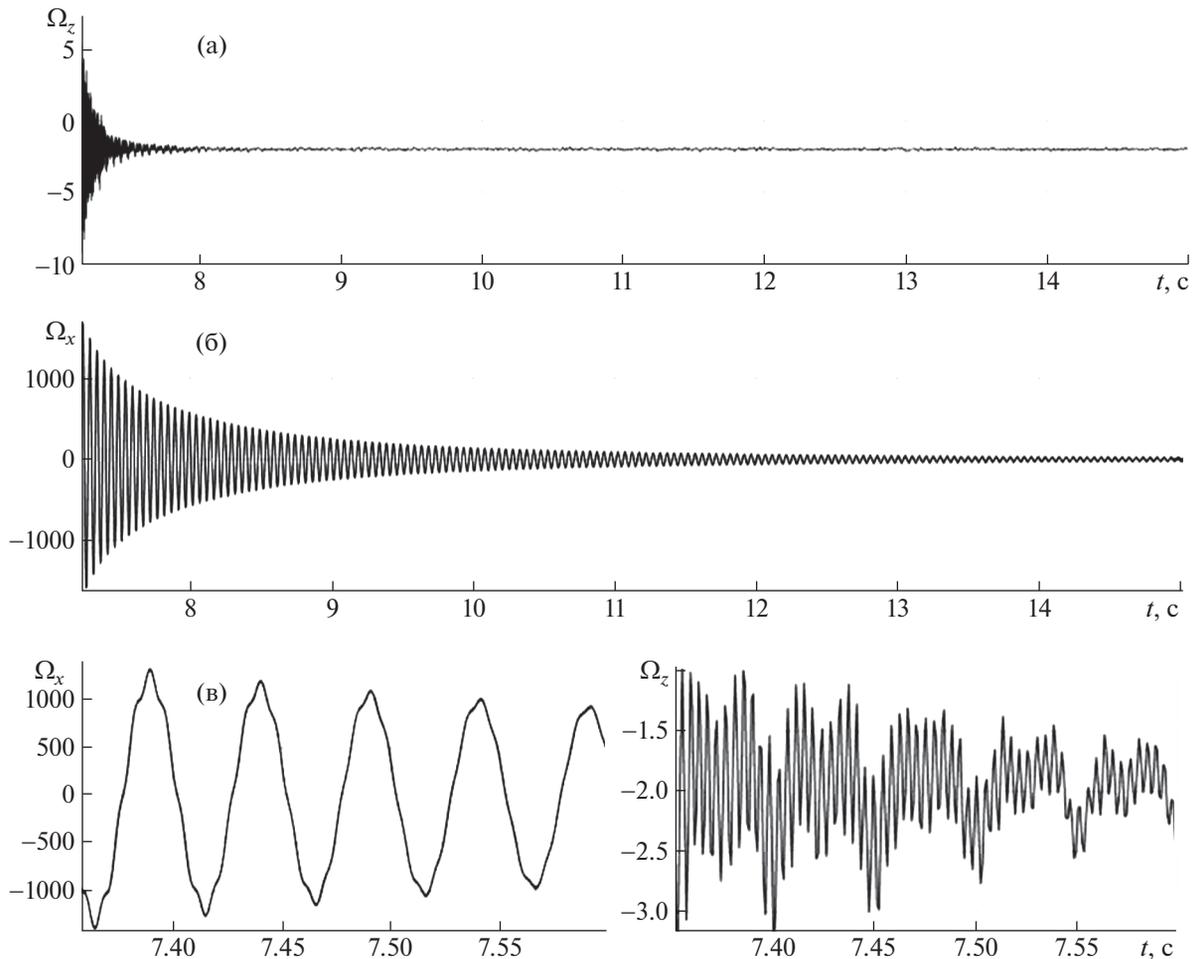


Рис. 2. Изменение угловых скоростей колеблющейся балки шириной 30 мм со стрелой вылета 180 мм: а–г –  $\Omega_x, \Omega_y$ .

Как видно, наличие ненулевых угловых скоростей фиксируется по  $x, z$ -осям гироскопа. Регистрируемые сигналы имеют различный частотный спектр, что, в частности, позволяет достаточно точно откалибровать позицию датчика на балке.

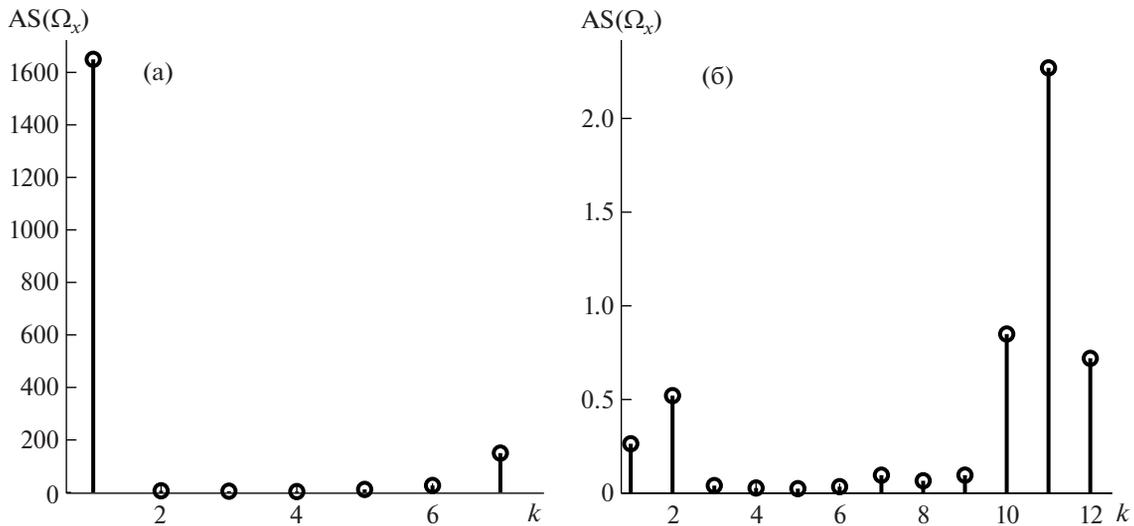


Рис. 3. Амплитудный спектр сигналов  $\Omega_x$  (а),  $\Omega_z$  (б).  $k$  – номер гармоники ( $k = 1$  – соответствует первой собственной частоте колебаний балки).

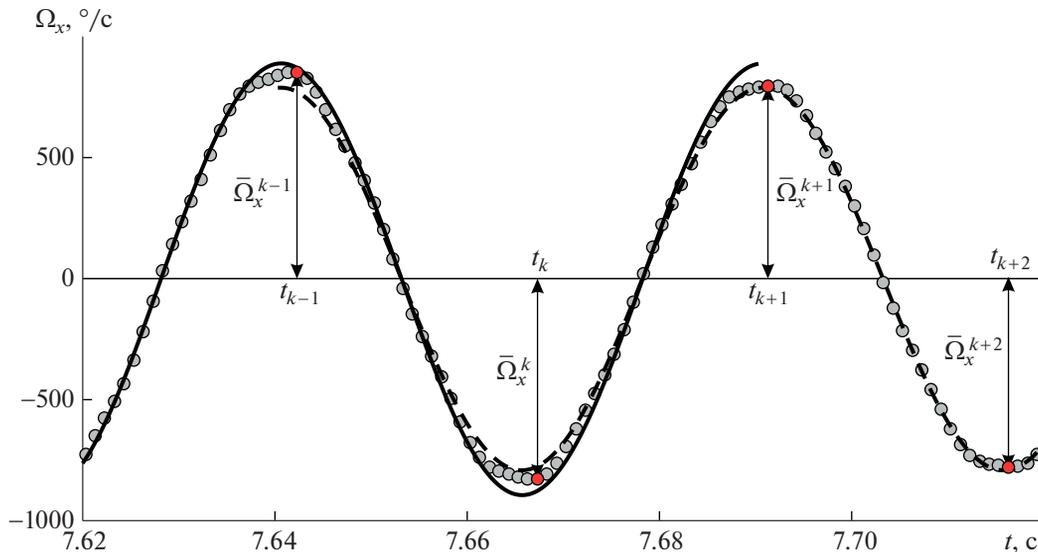
### 1.2. Изгибные колебания

Изгибные колебания являются основным типом движения, вызванным начальным отклонением балки из состояния равновесия. Характерный амплитудный спектр сигнала  $\Omega_x$  (соответствующего изгибным колебаниям) представлен на рис. 3а. Абсолютно доминирующей здесь является основная изгибная мода колебаний балки. Помимо нее в сигнале выделяется одна дополнительная гармоника (в рассматриваемом на рис. 2 случае в 7 раз превышающая основную), соответствующая второй собственной частоте изгибных колебаний балки. Ее появление связано с условиями начального отклонения консоли. Профиль балки в начальном деформированном состоянии не полностью совпадает с профилем колебания по первой изгибной моде. Амплитуда дополнительной гармоники в предельном случае (при максимальных амплитудах колебания) не превышает 10% от амплитуды основной гармоники  $\Omega_x$ , с течением времени это соотношение быстро уменьшается из-за высокой скорости затухания дополнительной составляющей. При переходе к углам поворота и перемещениям вклад дополнительной гармоники уменьшается кратно отношению (основной и дополнительной) частот (см. разд. 2.1), по этой причине он может не учитываться при расчете логарифмического декремента колебаний балки.

### 1.3. Вторичные крутильные колебания

Ненулевые значения другой компоненты угловой скорости  $\Omega_z$ , регистрируемые в зоне больших амплитуд отклонения консоли от состояния равновесия, свидетельствуют о сопутствующих изгибу крутильных колебаниях балки. Анализ амплитудного спектра  $\Omega_z$  указывает на наличие в нем трех основных составляющих (рис. 3б): первой (изгибной) моды, удвоенной изгибной частоты и высокочастотной компоненты.

Регистрируемая первая мода в сигнале  $\Omega_z$  не имеет отношения к крутильным колебаниям балки. Как показывают простые оценки, погрешность установки гироскопа, состоящая в повороте датчика относительно оси  $z_M$  на угол порядка одной десятой градуса, приводит к разложению реальной изгибной угловой скорости  $\Omega(t)$  по осям гироскопа в следующих пропорциях  $[0.999998\Omega(t), 0, 0.00175\Omega(t)]$ . Именно контроль за величиной этой компоненты в сигнале позволяет калибровать положение датчика гироскопа на балке. Высокочастотная компонента сигнала  $\Omega_z$  совпадает с собственной частотой крутильных колебаний балки и вероятнее всего вносится в результате начальных возмущений, связанных с отклонением консоли из состояния равновесия. Возникновение удвоенной изгибной частоты в сигнале  $\Omega_z$  может быть вызвано внешним гидродинамическим воздействием или геометрическими нелинейностями закона колебания балки



**Рис. 4.** Угловая скорость  $\Omega_x(t)$  (круглые маркеры), аппроксимации  $\Omega_x^{Appr}(t)$ , построенные на отрезках  $[t_{k-1}, t_{k+2}]$  (пунктирная линия) и  $[t_{k-3}, t_k]$  (сплошная линия).

(см., например, [22, 23]). Все крутильные оставляющие более чем на два порядка меньше изгибных и поэтому не могут оказывать существенного воздействия на изгибные колебания.

#### 1.4. Экспериментальная визуализация течений около балки

Для исследования гидродинамических эффектов при относительно больших амплитудах колебания балки проведены вспомогательные эксперименты по визуализации режимов обтекания. Для наблюдения за течением около средней части балки с помощью генератора аэрозолей осуществлялся ввод рассеивающих частиц (дыма). Частицы подсвечивались с помощью лазера, образующего световую завесу в плоскости, ортогональной оси балки. Видеофиксация течения производилась с помощью высокоскоростной камеры с частотой до 960 кадров в секунду. Описание наблюдаемых гидродинамических течений представлено в разд. 4.

## 2. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ И ХАРАКТЕРИСТИК СИЛОВОГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

### 2.1. Алгоритм обработки данных

Рассмотрим более подробно изгибные колебания балки, происходящие по основной моде. Под действием гидродинамических сил и внутреннего демпфирования амплитуда  $A(t)$  таких колебаний медленно затухает, а основная частота  $\omega$  слабо изменяется со временем  $t$  вблизи собственной частоты  $\omega_0$ .

Для выделения основных параметров таких колебаний из сигнала  $\Omega_x(t)$ , регистрируемого гироскопом, был разработан следующий алгоритм:

1. Проводится поиск локальных максимумов и минимумов зависимости  $\Omega_x(t)$   $\bar{\Omega}_x^1, \bar{\Omega}_x^2, \dots$  (см. рис. 4) и соответствующих им значений времени  $t_1, t_2, \dots$  в окнах, размер которых определяется по теоретической оценке периода колебания балки ( $2\pi/\omega_0$ ).

2. На отрезках  $[t_{k-1}, t_{k+2}]$  выполняется построение гармонической аппроксимации  $\Omega_x^{Appr}(t)$

$$\Omega_x^{Appr}(t) = \varepsilon_k + \Omega_x^k \sin(\omega_k t + t_{0k})$$

где параметры  $(\epsilon_k, \Omega_x^k, \omega_k, t_{0k})$  определяются из условия минимизации среднеквадратичного отклонения  $\Omega_x^{Appr}$  от  $\Omega_x$  на рассматриваемых отрезках. В качестве начального приближения для решения  $(\epsilon_k, \Omega_x^k, \omega_k, t_{0k})$  используются следующие значения  $(0, 0.5(\bar{\Omega}_x^k - \bar{\Omega}_x^{k+1}), 2\pi/(t_{k+2} - t_k), 0)$ .

3. Полученная аппроксимация используется для расчета амплитуды изгибных колебаний свободного конца консоли

$$A_k = \text{tg}(|\Omega_x^k|/\omega_k) \Big/ \frac{dW}{dz}(L)$$

где  $W$  – профиль изгибных колебаний, который определяется по формуле (2.3).

4. Вычисляются логарифмический декремент колебаний (ЛДК)  $\delta(t) = -2\pi\omega_0^{-1}A^{-1}(dA/dt)$  и относительное изменение частоты  $\gamma(t) = (\omega_0 - \omega)/\omega_0$  балки как функции от времени. На основании этих зависимостей для каждого эксперимента в диапазоне реализующихся в нем амплитуд колебаний строятся зависимости  $\delta(A)$ ,  $\gamma(A)$ .

Первые два шага алгоритма направлены на выделение основной моды изгибных колебаний. Процедура начального определения периодов колебания (шаг 1) здесь реализована по локальным максимумам и минимумам функции, что позволяет справляться с проблемой “дрейфа нуля” [21], сопутствующей работе гироскопа. Коррекция на движение нуля заложена и в гармонической аппроксимации (шаг 2, коэффициент  $\epsilon_k$ ). Детали обработки данных на 4 шаге представлены в разделах 2.2, 2.3.

## 2.2. Определение логарифмического декремента колебаний

Для определения ЛДК необходимо проводить вычисление производной  $d(\ln(A))/dt$ . При этом функция амплитуды найдена только как последовательность значений  $A_k$ . Для построения гладкой зависимости  $\ln(A(t))$  по точкам  $A_k$  строится сплайн-аппроксимация. Поскольку искомая функция имеет достаточно простой вид в исследуемом диапазоне, ее можно с высокой точностью аппроксимировать сплайном 4 степени, построенным на 3 отрезках. Коэффициенты такого сплайна определяются с помощью метода наименьших квадратов. Определение узлов сплайна с целью минимизации результирующей погрешности также проводится итерационно.

## 2.3. Определение относительного изменения частоты

Динамическое изменение частоты колебаний определяется действующими на консоль присоединенными массами воздуха. В проводимых экспериментах плотность материала балок существенно превышала плотность воздуха, что делало влияние присоединенных масс на процесс колебания весьма незначительным. В результате относительное изменение частоты колебаний во всех проводимых экспериментах не превышало 1.5% – рис. 5.

При определении относительного изменения частоты по формуле  $\gamma(t) = (\omega_0 - \omega)/\omega_0$  погрешность определения собственной частоты балки в вакууме  $\omega_0$  должна быть минимальной, иначе действие присоединенных масс становится неразличимым.

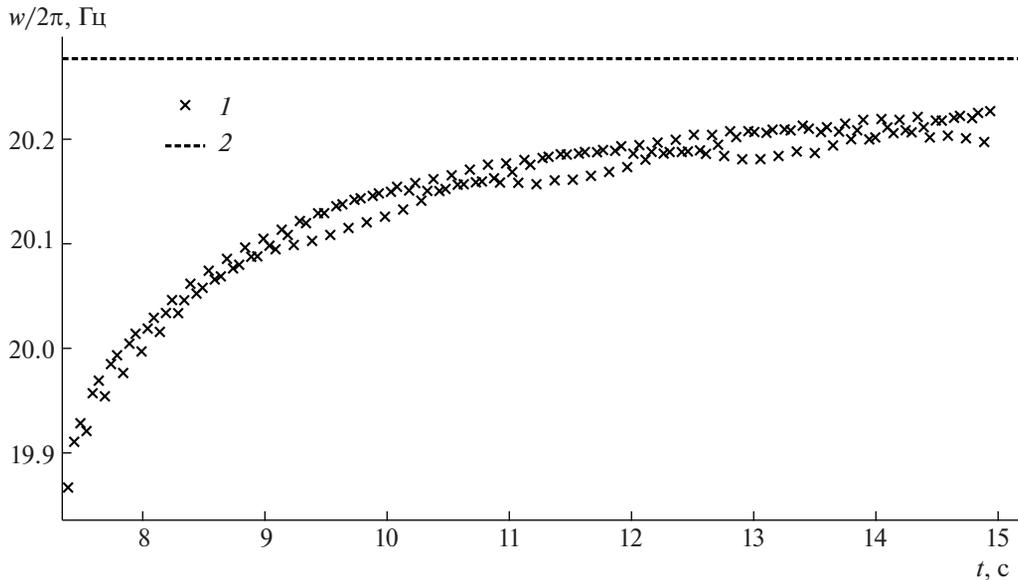
Предлагаемый метод определения  $\omega_0$  основан на выделении соответствующей составляющей из экспериментально определяемой собственной частоты балки при малых амплитудах колебания. Для этого используются теоретические оценки сил присоединенных масс. Результирующую формулу для вычисления  $\omega_0$  можно записать в виде

$$A \rightarrow 0: \quad \omega_0 = \omega(1 - \gamma)^{-1}, \quad \gamma = \frac{\pi \rho_a b}{8 \rho h} C_M^0$$

Значение  $C_M^0$  для тонкой балки определяется по формуле [11]

$$C_M^0 = 1.02 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} (3.07) \left( \frac{b^2 \omega_0}{2\pi v} \right)^{-1/2}$$

где  $v$  – это кинематическая вязкость жидкости.



**Рис. 5.** Изменение частоты колебаний с течением времени: 1 – экспериментальные данные для случая  $L = 180$  мм,  $b = 30$  мм; 2 – теоретическая оценка резонансной частоты в вакууме.

#### 2.4. Расчет аэродинамических сил, действующих на балку, по параметрам изгибных колебаний

Структура найденных в эксперименте зависимостей  $\gamma(A)$ ,  $\delta(A)$  определяется действующими на консоль внешними аэродинамическими силами ( $P$ ) и внутренним демпфированием ( $H$ ). Для установления соответствующих взаимосвязей рассмотрим уравнение колебания консоли. Принимая положения классической теории изгиба балок, колебание консоли в сопротивляющейся среде может быть описано следующим уравнением

$$\rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{E h^3 b}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} = F(z, t) = H(z, t) + P(z, t) \quad (2.1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z}(0, t) = 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}(L, t) = 0, \quad \frac{E h^3 b}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial z^3}(L, t) - M_g \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}(L, t) = 0 \end{aligned}$$

отвечающими жесткой заделке при  $z = 0$  и свободному концу  $z = L$  с сосредоточенной массой  $M_g$ . Здесь  $t$  – время,  $z$  – продольная координата балки;  $w$  – смещение средней линии балки в направлении оси  $y$ ;  $\rho$ ,  $E$  – эффективные плотность ( $\rho \approx 2700$  кг/м<sup>3</sup>) и модуль Юнга ( $E \approx 70$  ГПа) материала балки,  $M_g$  – масса датчика гироскопа.

Поскольку гидродинамические и внутренние демпфирующие силы малы по сравнению с упругой силой, в первом приближении можно положить  $H = P = 0$ . В этом случае основная мода колебаний примет вид

$$w(z, t) = A W(\xi) \cos(\omega t), \quad \xi = z/L \quad (2.2)$$

Постоянные  $A$  и  $\omega = \omega_0$  представляют амплитуду и собственную частоту основной моды. Профиль  $W$  колебаний описывается формулой

$$\begin{aligned} W(\xi) &= \frac{1}{2} (\cosh k \xi - \cos k \xi) + \zeta_r (\sinh k \xi - \sin k \xi) \\ \zeta_r &= \frac{\sin k - \sinh k + k \frac{M_g}{\rho b h L} (\cos k - \cosh k)}{\cos k - \cosh k - k \frac{M_g}{\rho b h L} (\sin k - \sinh k)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $k$  – наименьший положительный корень характеристического уравнения

$$1 + \cos k \cosh k + k \frac{M_g}{\rho b h L} (\cos k \sin k - \sin k \cosh k) = 0$$

приближенное решение которого для случая  $s = M_g / \rho b h L \ll 1$  может быть найдено как

$$k \approx k_0(1 - s + \alpha s^2), \quad k_0 = 1.875, \quad \alpha = 2.3765$$

Частота собственных колебаний балки при этом (без учета воздействия демпфирующих сил) выражается следующим образом [24, 25]

$$\omega_0 = k^2 \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho}}$$

Наличие малых сил в правой части уравнения (2.1) приводит к тому, что амплитуда колебаний  $A$  и собственная частота  $\omega$  не остаются постоянными, а медленно изменяются со временем. Эти изменения можно описать с помощью следующих зависимостей [14–16, 26]

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2\pi}{\rho h b A \omega^2} \{ \sin(\omega t) \langle FW \rangle \} / \langle W^2 \rangle \\ \gamma &= \frac{1}{\rho h b A \omega^2} \{ \cos(\omega t) \langle FW \rangle \} / \langle W^2 \rangle \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь и далее угловыми скобками обозначено усреднение по пространственной координате  $z$ , а фигурными скобками – усреднение по времени.

Далее будем полагать, что относительное изменение частоты балки полностью определяется аэродинамическим воздействием, а логарифмический декремент колебаний представляется в виде суммы гидродинамической  $\delta_p$  и механической  $\delta_H$  составляющих ( $\delta = \delta_p + \delta_H$ ), отвечающих воздействию на колебательный процесс соответствующих компонент силы. При этом механическая составляющая демпфирования для исследуемого случая (дюралюминиевых балок) не зависит от амплитуды колебаний консоли [27–29].

Для проведения оценки аэродинамических сил примем гипотезу о квазидвумерном течении, согласно которой аэродинамические силы в каждом сечении  $z = \text{const}$  балки можно найти, рассматривая гармонические колебания бесконечно длинной жесткой пластины в вязкой среде с текущей амплитудой  $A(z)$ . Также используем аппроксимацию Морисона [30] для разделения сил сопротивления и сил присоединенных масс

$$P \approx -\frac{\pi}{4} \rho_a b^2 C_M \frac{dU}{dt} - \frac{1}{2} \rho_a b C_D |U| U \quad (2.5)$$

Здесь  $U(z, t) = \partial w / \partial t$  – скорость движения балки в данном сечении,  $\rho_a$  – плотность воздуха,  $C_M$  – локальные коэффициенты присоединенных масс,  $C_D$  – локальный коэффициент аэродинамического сопротивления.

Подставляя (2.5) в (2.4) и учитывая (2.2), мы получим следующие уравнения

$$\delta - \delta_H = \delta_p = \frac{\rho_a b^4 A \langle C_D W^3 \rangle}{\rho h^3 b \langle W^2 \rangle}, \quad \gamma = \frac{\pi \rho_a b \langle C_M W^2 \rangle}{8 \rho h \langle W^2 \rangle} \quad (2.6)$$

связывающие между собой ЛДК и коэффициент аэродинамического сопротивления, а также относительное изменение частоты и коэффициент присоединенных масс колеблющейся балки. Используя подход, предложенный в [14], из (2.6) можно получить следующие приближенные формулы для определения гидродинамических коэффициентов

$$\begin{aligned} C_D &= \frac{11.56}{A} \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} + \frac{9}{32} \frac{\rho}{\rho_a} \frac{h}{b} A^{-8/3} b \frac{d}{dA} (A^{8/3} (\delta(A) - \delta(0))) \\ C_M &= \frac{3}{\pi} \frac{\rho}{\rho_a} \frac{h}{b} A^{-5/3} \frac{d}{dA} (A^{8/3} \gamma(A)) \end{aligned}$$

Они позволяют по экспериментально определенным  $\delta$ ,  $\gamma$  найти  $C_D$ ,  $C_M$  в каждом сечении (см. подробнее в [14]). Результаты вычисления  $C_D$ ,  $C_M$  представлены в разд. 4.

### 3. ТРЕХМЕРНОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ БАЛКИ В ЖИДКОСТИ

#### 3.1. Математическая постановка задачи

В качестве второго инструмента для исследования движения балки в жидкости используется прямое численное моделирование. Рассматривается обтекание тонких балок длиной  $L$ , шириной  $b$  и толщиной  $h$  с профилем в форме усеченного прямоугольника (аналогично экспериментальным образцам; рис. 1), совершающих вынужденные изгибные колебания в вязкой несжимаемой жидкости по первой моде с фиксированной амплитудой. Задача решается в безразмерных переменных. Нормировка пространственных координат, времени и скорости проводится на  $b$ ,  $bU_0^{-1}$ ,  $-U_0$  соответственно. Система уравнений движения жидкости около балки записывается в следующем виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \times \nabla U = -\nabla p + \frac{1}{KC\beta} \nabla^2 U$$

$$\nabla \times U = 0$$

Здесь  $U = (u_x, u_y, u_z)$  – безразмерная скорость,  $p$  – безразмерное давление,  $KC = KC_{loc}(l)$  – безразмерная амплитуда колебания свободного конца балки,  $l = L/b$  – безразмерная длина балки. Безразмерная частота  $\beta$  и безразмерная амплитуда колебания сечения  $KC_{loc}$  определяются как

$$KC_{loc}(z) = 2\pi \frac{U_{loc}(z)}{b\omega} = 2\pi \frac{A_{loc}(z)}{b}, \quad \beta = \frac{b^2\omega}{2\pi\nu} \quad (3.1)$$

где  $A_{loc}(z), U_{loc}(z) = A_{loc}(z)\omega$  – амплитуда колебаний и амплитуда скорости колебаний поперечного сечения  $z = \text{const}$ .

В декартовой системе координат, начало которой расположено на неподвижном конце балки, ось  $Oz$  совмещена с осью балки, находящейся в нейтральном положении, оси  $Ox, Oy$  направлены вдоль осей симметрии ее поперечного сечения (см. рис. 1).

Для описания изгибных колебаний консольной балки в жидкости будем использовать классическую теорию Эйлера–Бернулли. Полагая (как и при обработке экспериментальных данных), что гидродинамические силы, действующие на балку, значительно меньше сил упругости, будем задавать профиль колебаний согласно (2.2).

Моделирование движения жидкости около балки будем проводить в ограниченной области, представляющей собой прямоугольный параллелепипед с соотношением сторон  $(l_x, l_y, l_z) = (35, 35, 55)$ . Положение балки в области определим следующим образом: балка будет расположена по центру области в плоскости  $xOy$ ; по оси  $Oz$  она будет смещена относительно центра так, что ее зафиксированный конец будет находиться на расстоянии  $l_z/5$  от границы области. Внешние границы области будем считать непроницаемыми, на балки зададим условия прилипания.

#### 3.2. Численное моделирование

Для решения задачи использована численная модель, предложенная в работе [19] и реализованная с использованием программных библиотек открытого пакета OpenFOAM. Для дискретизации расчетной области использовались динамически перестраиваемые сетки, узлы которых жестко связаны с точками на поверхности балки (см. рис. 6). Вычисление скоростей движения узлов сетки проводилось на основе решения уравнения Лапласа с переменным в области коэффициентом диффузии. На внешней границе скорости движения узлов считались нулевыми, на балки определялись из (2.2). Коэффициент диффузии выбирался обратно пропорциональным квадрату расстояния от балки для минимизации деформаций сетки в окрестности балки, где их влияние наиболее чувствительно.

Исходное разбиение области проводилось в нейтральном положении балки. Для всех расчетных случаев оно выполнялось однотипно. Число ячеек расчетных сеток составляло  $N \approx 3.3 \times 10^6$ .

Дискретизация уравнения движения жидкости в области проводилась с помощью метода конечных объемов. Дискретные значения составляющих скорости и дискретные давления локализовались в центрах ячеек расчетных сеток. Для вычисления объемных интегралов по контрольному объему использовалась общая процедура Гаусса. Для аппроксимации градиента давления в расчетах применялась линейная интерполяция. В диффузионных слагаемых при дискретизации

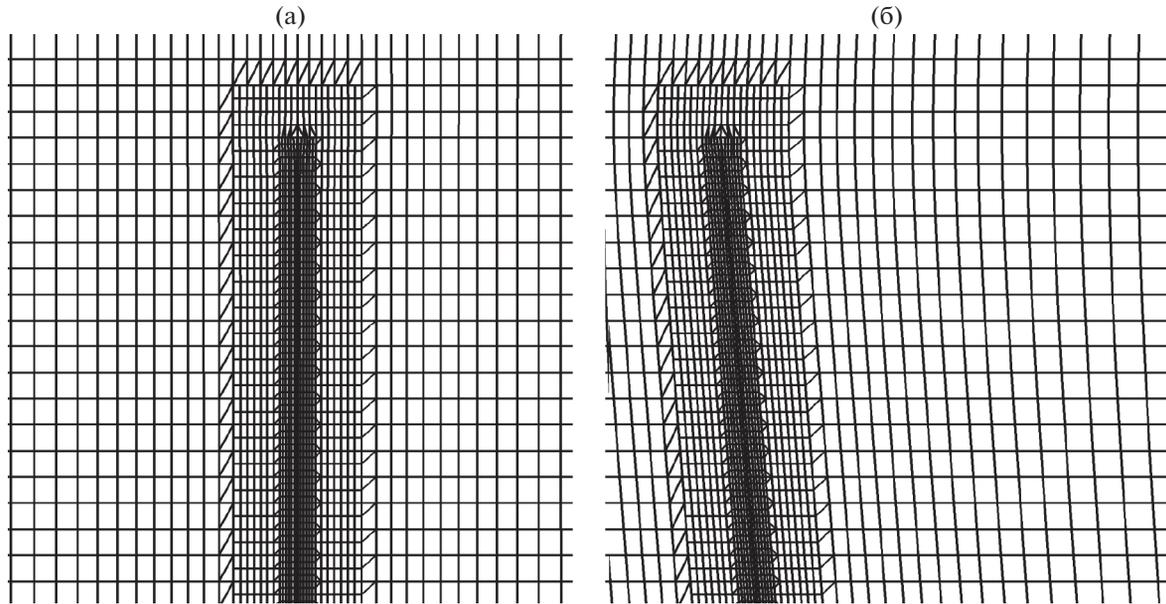


Рис. 6. Характерная структура исходной (а) и деформированной (б) сетки в окрестности свободного конца балки (плоскость  $yOz$ ).

ции оператора Лапласа нормальные градиенты скорости на поверхности ячейки аппроксимировались с помощью симметричной схемы второго порядка с поправкой на неортогональность [31].

Для дискретизации системы уравнений по времени использовалась неявная схема Эйлера. Шаг по времени во всех расчетах выбирался из условия – максимальное число Куранта не превышает единицы. Решение дискретизированной задачи проводилось с помощью метода PIMPLE (который является комбинацией алгоритмов PISO и SIMPLE). Решение системы уравнений для давления выполнялось на основе метода сопряженных градиентов (PCG) с геометро-алгебраическим многосеточным предобуславливателем (GAMG). Системы уравнений для компонент скорости решаются методом бисопряженных градиентов (PBiCG) с предиктором на основе неполной LU факторизации. Расчеты выполнялись распределенным образом по технологии MPI с применением метода декомпозиции области решения.

## 4. РЕЗУЛЬТАТЫ

### 4.1. Гидродинамика течений около балки

Наиболее полную информацию о структуре течений, индуцированных колебаниями, дает трехмерное численное моделирование. Расчеты проводилось для балок с длиной  $l = 20$  и соотношением сторон  $\Delta = h/b = 0, 0.1, 0.2$ , совершающих колебания с безразмерной частотой  $\beta = 200, 430$  и амплитудой  $KC = 1, 2, 6$ .

Для выявления областей преобладания поперечных или продольных потоков исследуем соотношение скоростей соответствующих течений. На рис. 7 изображены графики функции  $u_z^{norm}(z)$ , определяющей отношение максимальных осредненных (по периоду) поперечных и продольных скоростей в сечениях вдоль балки

$$u_z^{norm}(z) = \max_{x,y} \langle |u_z| \rangle / \max_{x,y} \langle \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \rangle, \quad 0 \leq z \leq l$$

Введенная таким образом функция  $u_z^{norm}(z)$  является индикатором ключевых типов течения: значения  $u_z^{norm} \ll 1$  указывают на доминирующее поперечное течение,  $u_z^{norm} \sim 1$  – на развитое трехмерное течение,  $u_z^{norm} \gg 1$  – на преобладающее продольное течение.

Как можно видеть на рис. 7, продольная составляющая всегда отлична от нуля. Она сильно возрастает на концах консоли (по отношению к поперечным составляющим), где течение фак-

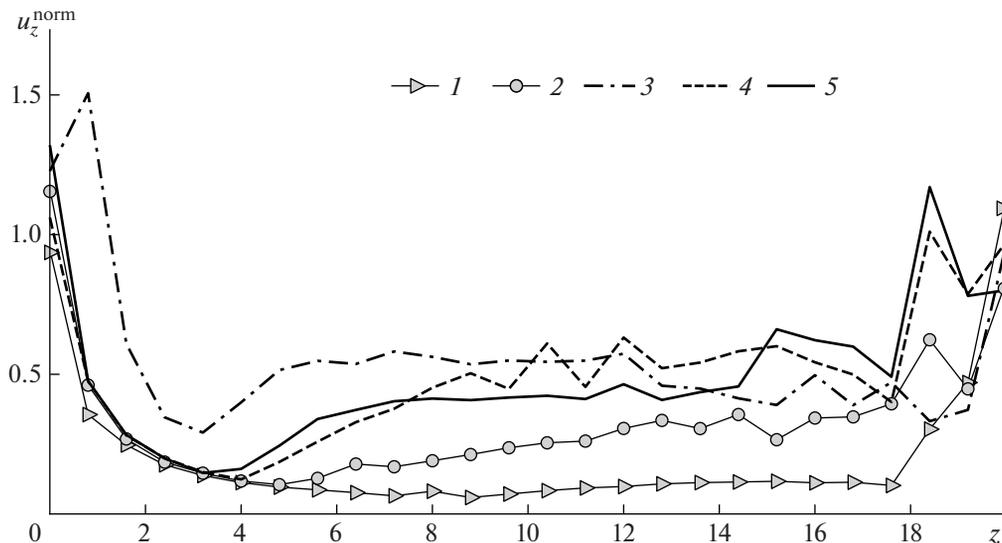


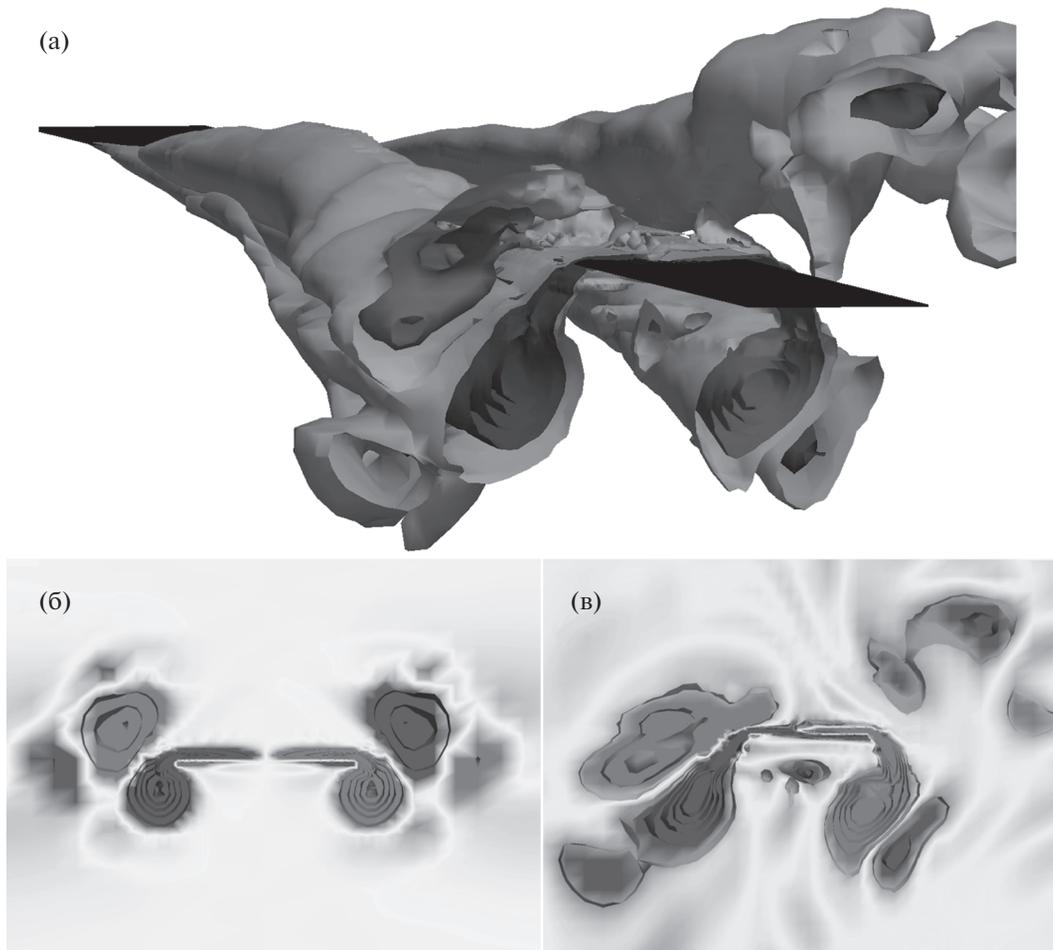
Рис. 7. Отношение максимальных продольных и поперечных скоростей в сечениях: 1–5 –  $(\beta, \Delta, KC) = (200, 0, 1), (430, 0, 2), (430, 0, 6), (430, 0.2, 6), (200, 0.1, 6)$ .

тически становится полностью трехмерным. Вне зоны концевых эффектов среднее по длине значение  $u_z^{norm}$  изменяется от 0.1 для  $KC = 1$ , где можно уверенно говорить о квази-двумерном характере течения, до 0.5 для  $KC = 6$ , где преобладание поперечных потоков не столь однозначно выражено. Рассмотрим структуру течений около средней части балки для последнего случая.

Трехмерная картина течения и визуализация движения жидкости в поперечных сечениях для случая  $KC = 6$ ,  $\beta = 200$  приведены на рис. 8 а (трехмерная анимация представлена в [32]). Несмотря на наличие достаточно большой продольной скорости, около средней части балки наблюдаются те же ключевые режимы течения, как и при колебаниях абсолютно жестких пластин: симметричный режим (рис. 8б) и циклический диагональный режим обтекания (рис. 8в). Их подробное описание представлено в работе [20]. Отметим, что границы этих режимов в двумерном и трехмерном случаях смещены относительно друг друга в параметрической плоскости. Циклический диагональный режим обтекания при высокоамплитудных колебаниях балки ( $KC = 6$ ) наблюдается в области  $1.5 < KC_{loc} < 5.5$ , при колебаниях жестких пластин его нижняя граница находится существенно выше: по данным численных исследований [20], около бесконечно длинных пластин он локализуется при  $KC_{loc} \geq 4$ ; по данным экспериментов [33], для конечных пластин он наблюдается при  $KC_{loc} > 7$ . Формирование диагонального режима около средней части балки в области низких локальных амплитуд подтверждается и экспериментальными наблюдениями, проведенными в настоящей работе.

На рис. 9, 10 представлены сопоставления результатов трехмерного моделирования и картин течения, полученных с помощью дымовой визуализации экспериментов. Локальная безразмерная амплитуда колебаний в рассматриваемом сечении равна  $KC_{loc} \approx 2.5$ . На рис. 9 экспериментальная картина (а) и визуализация расчета (б) выполнены с одинаковой перспективой. В компьютерной визуализации балка изображена сеткой. На рис. 9а балка расположена таким же образом, как и на рис. 9б. По концентрации частиц дыма и положению изоповерхностей завихренности на рисунках можно наблюдать характерный для диагонального режима отрыв вихревых пар с торцов балки, которые формируются каждые полупериода и удаляются в разные стороны от балки под углом 45–60 градусов к оси колебания. Слева и справа на рисунках находятся вихревые пары, оторвавшиеся соответственно в последнем и предпоследнем полупериодах. Заметим, что в эксперименте балка закрывает крупную вихревую структуру, расположенную ниже нее.

Серия фотографий, полученных в рамках эксперимента, и картины течений, построенных по данным численного моделирования, демонстрирующие момент отрыва вихрей с одного из торцов, представлены на рис. 10. Помимо изолиний завихренности, визуализация численных результатов здесь также проведена с помощью невесомых частиц (картины течения в этом случае



**Рис. 8.** Визуализация трехмерной структуры течения по данным 3D расчетов для  $KC = 6$ ,  $\beta = 200$  около средней части балки в момент времени  $t/T - T_0 = 0$ : (а) – изоповерхности  $z$ -компоненты завихренности в области  $0 \leq z \leq 15.1$ ; (б, в) – изолинии  $z$ -компоненты завихренности в сечениях  $z = 7.4$  (симметричный режим) и  $15.1$  (диагональный режим).

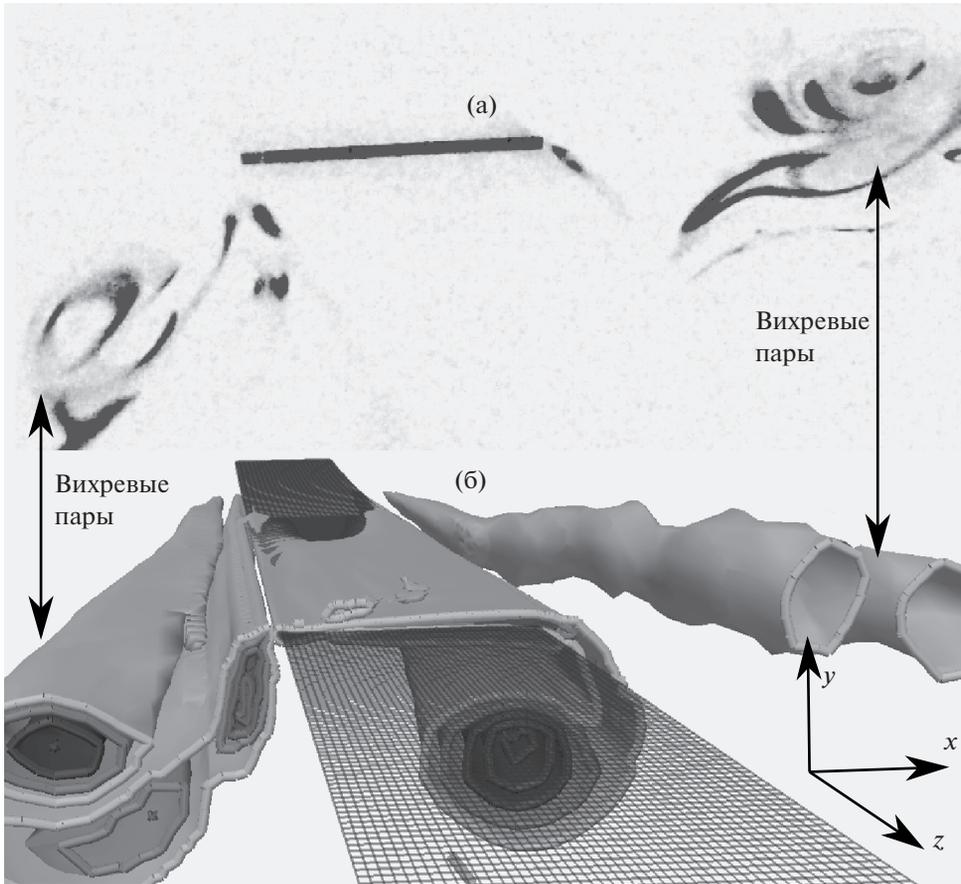
представлены в ортогональной проекции), которые выпускались в непосредственной близости к поверхности балки. Этот метод наиболее близок дымовой визуализации, используемой в экспериментах. Сравнивая их результаты, можно отметить, что численное моделирование достаточно хорошо воспроизводит реальную динамику течения.

#### 4.2. Коэффициенты сил сопротивления и сил присоединенных масс

Графики изменения коэффициентов аэродинамических сил ( $C_D$ ,  $C_M$ ), действующих на колеблющуюся балку в каждом сечении, в зависимости от локальной амплитуды колебаний  $KC_{loc}$  изображены на рис. 11, 12.

Оценки  $C_D$ , полученные в разных источниках с использованием различных методов, традиционно имеют большой разброс. Даже для жестких пластин (см., например, [33, 35]), в области двумерных течений, классические экспериментальные оценки отличаются более чем в 1.6 раза. Как отмечено в [20], при одних и тех же параметрах колебания ( $KC_{loc}$ ,  $\beta$ ) у пластин с одинаковой толщиной, но разной формой торцов, значения  $C_D$  могут отличаться более чем на 10%.

Данные, представленные на рис. 11а, отображают результаты измерений  $C_D$  балки, полученные в ходе обработки экспериментальных измерений затухающих колебаний тест-образцов, а также численные и экспериментальные результаты измерения  $C_D$  жестких пластин, полученные

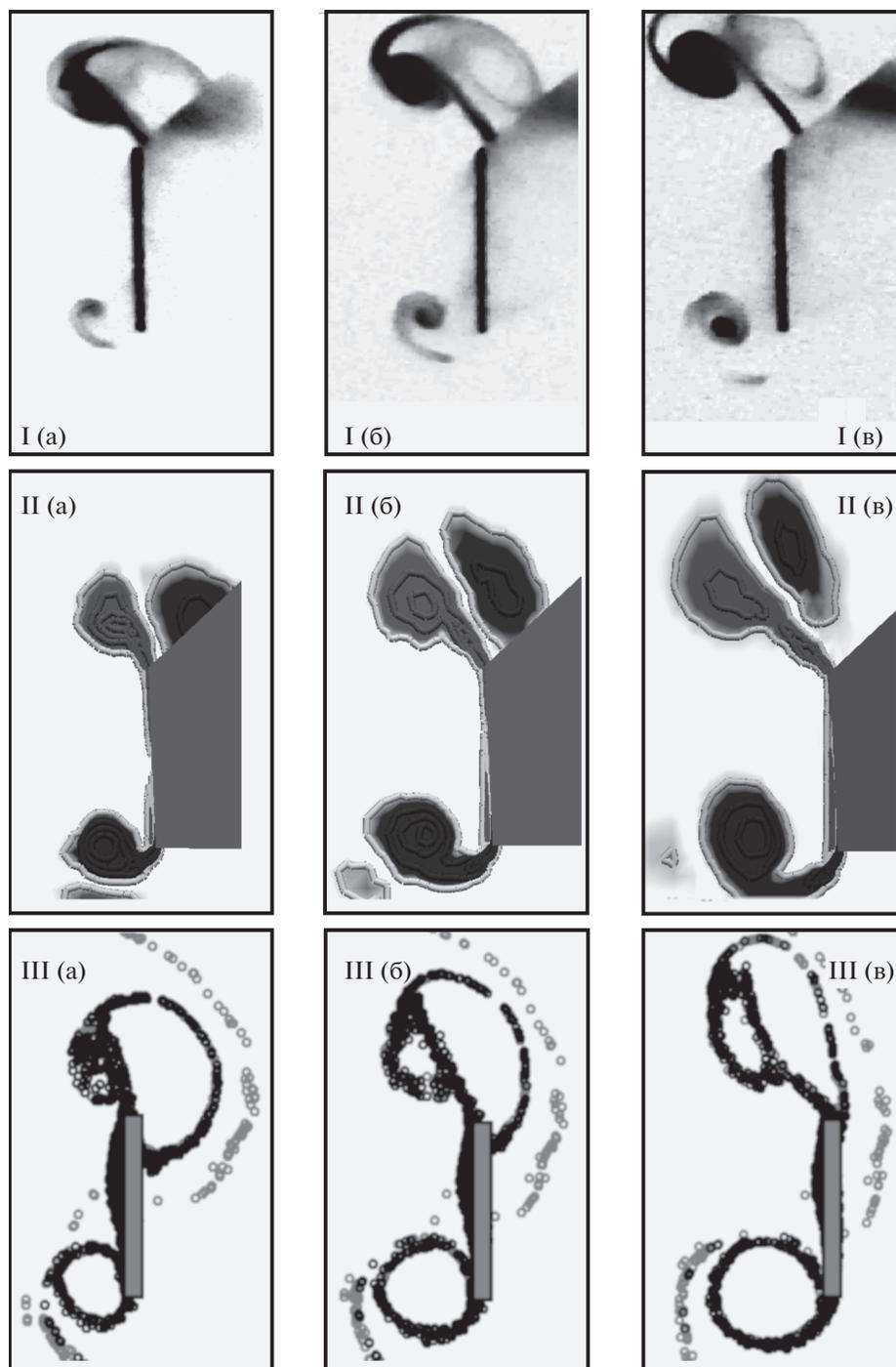


**Рис. 9.** Сопоставление (а) экспериментально наблюдаемой картины течения (дымовая визуализация) с (б) результатами численного моделирования (изоповерхности завихренности). Безразмерная локальная амплитуда колебаний в сечении  $KC_{loc} \approx 2.5$ , момент времени  $t/T - T_0 = 0.16$ .

в работах [20, 33–35]. Как можно видеть, результаты настоящего исследования при  $KC_{loc} > 1.5$  достаточно хорошо согласуются с экспериментальными результатами [33, 34], полученными в том же диапазоне безразмерных частот  $100 < \beta < 2000$  для пластин с соотношением толщины и ширины  $0.05 < \Delta \leq 0.2$ . При больших  $KC_{loc}$  все полученные зависимости  $C_D(KC_{loc})$  имеют приблизительно одно и то же асимптотическое поведение, которое можно описать функцией  $C_D \approx 12.86KC_{loc}^{-0.58}$  (т.е. значение коэффициента сопротивления практически не зависит от безразмерной частоты). Заметим также, что значения  $C_D$  в этом диапазоне достаточно хорошо согласуются и с данными двумерного численного моделирования [20] (полученными для пластин с аналогичными геометрическими характеристиками).

В диапазоне малых амплитуд  $KC_{loc} < 1.5$  значение коэффициента сопротивления существенно зависит от параметра  $\beta$ . При  $KC_{loc} < 0.5$  коэффициент сопротивления выходит на малоамплитудную асимптотику [10]:  $C_D \approx 28.97/(KC_{loc}\sqrt{\beta})$ . При  $0.5 < KC_{loc} < 1.5$  и  $\beta < 500$  результаты, полученные при обработке данных с разных тест образцов, имеют некоторый разброс: так, результаты настоящей серии экспериментов лежат в среднем на 20% ниже, чем результаты [14]. Это может объясняться разной длиной и толщиной образцов. При  $\beta > 500$  настоящие результаты достаточно хорошо согласуются с данными [14].

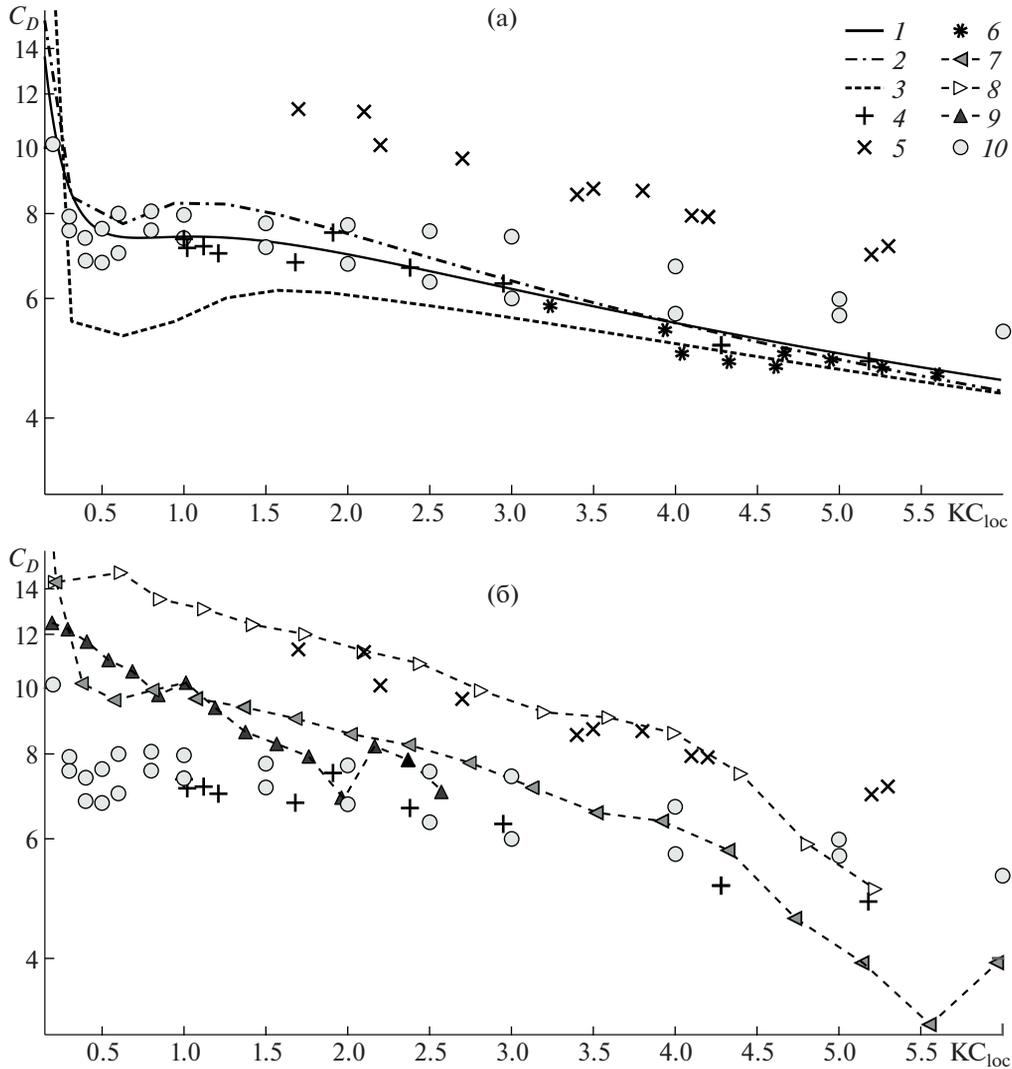
На рис. 11б представлены зависимости  $C_D(KC_{loc})$ , полученные при трехмерном численном моделировании и двумерном расчете [20]. Как можно видеть, данные для бесконечно тонкой балки ожидаемо лежат в среднем на 20% выше (что хорошо согласуется с оценками [20]) данных для балки с относительной толщиной  $\Delta = 0.1$ . Для случая  $\Delta = 0.1$  наибольшие отклонения  $C_D$  от плоской теории [20] возникают в зонах концевых эффектов (для  $KC = 6$  это  $KC_{loc} \leq 0.5$  и



**Рис. 10.** Сопоставление экспериментально наблюдаемой картины течения I (дымовая визуализация) с результатами численного моделирования, визуализированными с помощью изолиний  $z$ -компоненты поля завихренности II (в той же перспективе, что и на фотографиях) и с помощью невесомых частиц III (в ортогональной проекции). Безразмерная локальная амплитуда колебаний  $KC_{loc} \approx 2.5$ , моменты времени  $t/T - T_0 =$  (а) 0.92, (б) 1, (в) 1.08.

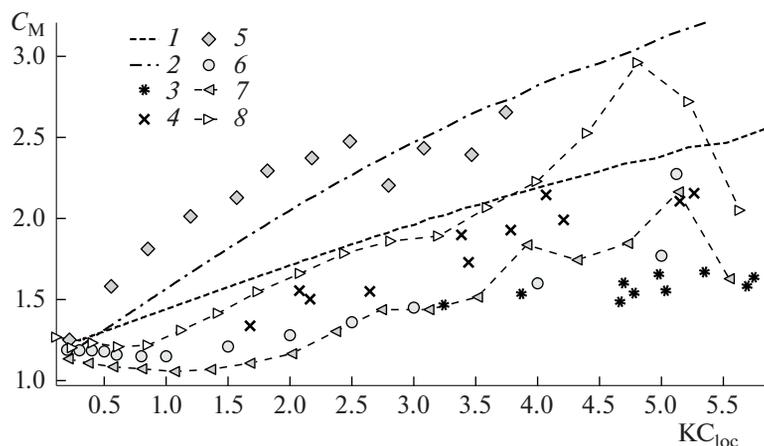
$KC_{loc} > 4.5$ ). В средней части балки разница между оценками  $C_D$  двумерных и трехмерных расчетов составляет в среднем не более 15%.

Значения коэффициента инерциальных сил  $C_M$  для квазиплоской и трехмерной моделей также хорошо совпадают (см. рис. 12) в широком диапазоне  $KC_{loc}$ , влияние концевых эффектов для



**Рис. 11.** Кривые зависимостей локального коэффициента сопротивления  $C_D$  от безразмерной амплитуды колебаний: а – экспериментальные данные, б – численные данные: 1 – экспериментальные результаты [14] для балки при  $\beta \approx 250$ ,  $\Delta = 0.1$ ; 2 – экспериментальные результаты для  $\beta = 969$ ,  $\Delta = 0.06$ ,  $l = 8.9$ ; 3 – экспериментальные результаты для  $\beta = 257$ ,  $\Delta = 0.06$ ,  $l = 17.6$ ; 4 – экспериментальные данные [34] для жесткой пластины; 5 – экспериментальные результаты [35] для жесткой пластины; 6 – экспериментальные результаты [33] для жесткой пластины при  $188 \leq \beta \leq 1685$ ,  $\Delta = 0.2$ ; 7 – данные 3D численного моделирования при  $KC = 6$ ,  $\beta \approx 200$ ,  $\Delta = 0.1$ ; 8 – результаты [19] 3D моделирования при  $\beta = 430$ ,  $\Delta \sim 0$ ; 9 – данные 3D численного моделирования при  $KC = 3$ ,  $\beta \approx 430$ ,  $\Delta = 0.1$ ; 10 – результаты [20] 2D моделирования при  $\beta \approx 200$ ,  $0.1 \leq \Delta \leq 0.2$ .

коэффициента присоединенных масс достаточно сильно выражается только около свободного конца балки. При  $KC_{loc} \leq 0.5$  зависимость  $C_M(KC_{loc})$  выходит на малоамплитудную асимптотику [10]. Экспериментальные оценки  $C_M$ , полученные при умеренных значениях безразмерной частоты  $\beta < 500$ , также ложатся достаточно близко с численными данными (они хорошо совпадают с результатами для тонких пластин). При больших значениях  $\beta$  значения коэффициента присоединенных масс, полученные по результатам обработки экспериментов, оказываются выше расчетных. Это может быть результатом неточного учета свойств материала. Поскольку аэродинамическое влияние на резонансную частоту дюралевой балки очень мало, для более точной оценки коэффициента присоединенных масс описанным методом необходимо проводить эксперименты в более плотной среде (или с другим материалом образцов).



**Рис. 12.** Кривые зависимостей коэффициента присоединения масс от безразмерной амплитуды колебаний для разных значений безразмерной частоты: 1 – экспериментальные данные для  $\beta = 257$ ; 2 – экспериментальные данные для  $\beta = 704$ ; 3 – результаты [33] для жесткой пластины при  $188 \leq \beta \leq 1685$ ,  $\Delta = 0.2$ ; 4 – результаты [35]; 5 – результаты [13]; 6 – результаты [20] при  $\beta = 200$ ,  $\Delta = 0.1$ ; 7 – результаты численного моделирования при  $KC = 6$ ,  $\beta = 200$ ,  $\Delta = 0.1$ ; 8 – результаты [19] при  $\beta = 430$ ,  $\Delta \sim 0$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено исследование взаимодействия между балкой и жидкостью, когда упругие силы, вызывающие резонансный рост амплитуды колебаний, много больше внешних аэрогидродинамических (случай колебания металлических тонких балок в воздухе). В этих условиях внешние течения не могут изменить мгновенный профиль колебаний балки, но оказывают существенное влияние на амплитуду колебаний и изменяют резонансную частоту в ходе продолжительного воздействия. Изменение амплитуды колебаний и частоты, в свою очередь, приводит к перестроению внешних течений, т.е. изменению силового гидродинамического воздействия на балку.

Экспериментально и численно исследована структура взаимодействия между балкой и жидкостью. Для ее описания была предложена квазиплоская модель, в рамках которой были установлены прямые и обратные зависимости между параметрами колебаний длинных балок и локальными силовыми аэродинамическими характеристиками течений около них. С помощью этой модели проводилась обработка экспериментальных данных, результаты которой сопоставлялись с данными прямого численного моделирования обтекания балок. С помощью трехмерного численного моделирования и визуализации движения жидкости в экспериментах было показано, что течения в сечениях, ортогональных оси балки (за исключением окрестности ее концов), в действительности имеют структуру, аналогичную плоским течениям, наблюдаемым при колебаниях жестких пластин. Оценки локальных коэффициентов гидродинамических сил, полученные в трехмерных расчетах (в области квазиплоских течений) и в экспериментах, в среднем также оказываются достаточно хорошо согласованы с оценками  $C_D$ ,  $C_M$  для плоских течений.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 19-38-60023) и Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета (“ПРИОРИТЕТ-2030”).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tao L., Thiagarajan K.* Low KC flow regimes of oscillating sharp edges. II hydrodynamic forces // *Appl. Ocean Res.* 2003. V. 25. № 2. P. 53–62.
2. *Tao L., Thiagarajan K.* Low KC flow regimes of oscillating sharp edges. I vortex shedding observation // *Appl. Ocean Res.* 2003. V. 25. № 1. P. 21–35.
3. *Келдыш М.В.* Вибрации на самолете. М.: Бюро нов. техн. НКАП, 1942. 56 с.
4. *Бужинский В.А.* Колебания тел с острыми кромками в несжимаемой маловязкой жидкости и некоторые задачи гидродинамики космических аппаратов: Дис. ... д-ра. физ.-мат. наук: 01.02.05 К., 2003. 178 с.

5. Бужинский В.А. Вихревое демпфирование колебаний жидкости в резервуарах с перегородками // ПММ. 1998. Т. 62. № 2. С. 235.
6. Zhu H., Zhang P., Zhong Z., Xia J., Rich J., Mai J., Su X., Tian Z., Bachman H., Rufo J., Gu Y., Kang P., Chakrabarty K., Witelski T.P., Huang T.J. Acoustohydrodynamic tweezers via spatial arrangement of streaming vortices // Science Advances. 2021, V. 7. № 2. P. eabc7885.
7. Semati A., Amani E., Saffaraval F., Saffar-Avval M. Numerical simulation of oscillating plates at the visco-inertial regime for bio-inspired pumping and mixing applications // Phys. Fluids 2020 V. 32. №. 10. P. 101906.
8. Sader J.E., Porfiri M. Nonlinear hydrodynamic damping of sharp-edged cantilevers in viscous fluids undergoing multi-harmonic base excitation // J. Appl. Phys. 1998. V. 84. № 1. P. 64.
9. Aureli M., Porfiri M. Low frequency and large amplitude oscillations of cantilevers in viscous fluids // Appl. Phys. Lett. 2010. V. 96. № 16. P. 164102.
10. Aureli M., Porfiri M., Basaran M.E. Nonlinear finite amplitude vibrations of sharp-edged beams in viscous fluids // J. Sound Vib. 2012. V. 331. № 7. P. 1624–1654.
11. Phan C.N., Aureli M., Porfiri M., Basaran M.E. Finite amplitude vibrations of cantilevers of rectangular cross sections in viscous fluids // J. Fluids Struct. 2013. V. 40. P. 52–69.
12. Facci A.L., Porfiri M. Nonlinear hydrodynamic damping of sharp-edged cantilevers in viscous fluids undergoing multi-harmonic base excitation // J. Appl. Phys. 2012. V. 112. № 12. P. 124908.
13. Bidkar R.A., Kimber M., Raman A., Bajaj A.K., Garimella S.V. Nonlinear aerodynamic damping of sharp-edged flexible beams oscillating at low Keulegan–Carpenter numbers // J. Fluid Mech. 2009. V. 634. P. 269–289.
14. Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Nuriev A.N. Evaluation of aerodynamic forces acting on oscillating cantilever beams based on the study of the damped flexural vibration of aluminium test samples // J. Sound Vib. 2018. V. 421. P. 334–347.
15. Егоров А.Г., Камалутдинов А.М., Нуриев А.Н., Паймушин В.Н. Экспериментальное определение демпфирования колебаний пластины вязкой жидкостью // Доклады РАН. 2017. Т. 474. № 2. С. 172–176.
16. Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Nuriev A.N., Paimushin V.N. Theoretical-experimental method for determining the parameters of damping based on the study of damped flexural vibrations of test specimens 2. aerodynamic component of damping // Mech. Compos. Mater. 2014. V. 50. № 3. P. 267–278.
17. Камалутдинов А.М., Нуриев А.Н. Гидродинамическое демпфирование колебаний балок вблизи экрана // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 5. С. 61–75.
18. Камалутдинов М.А. Теоретико-экспериментальное исследование аэродинамических свойств колеблющейся пластины: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04, 01.02.05 К., 2017. 142 с.
19. Nuriev A.N., Kamalutdinov A.M., Zaitseva O. Hydrodynamics around long vibrating beams // J. Fluids Struct. 2021 V. 101. № 103203.
20. Nuriev A.N., Kamalutdinov A.M., Egorov A.G. A numerical investigation of fluid flows induced by the oscillations of thin plates and evaluation of the associated hydrodynamic forces // J. Fluid Mech. 2019. V. 874. P. 1057–1095.
21. MPU-6500 Product Specification Revision 1.3 <http://3cfeqx1hf82y3xcoull08ihx-wpengine.netdna-ssl.com/wp-content/uploads/2020/06/PS-MPU-6500A-01-v1.3.pdf>
22. Камалутдинов А.М., Паймушин В.Н. Уточненные геометрически нелинейные уравнения движения удлиненной пластины стержневого типа // Известия вузов. Математика, 2016. № 9. С. 84–89.
23. Egorov A.G., Affane B. Instability Regions in Flexural-Torsional Vibrations of Plates // Lobachevskii J. Math. 2020. № 41. P. 1167–1174.
24. Rao S.S. Vibration of continuous systems. NY: John Wiley & Sons, 2007. P. 816.
25. Erturk A., Inman D.J. Piezoelectric energy harvesting. NY: John Wiley & Sons, 2011. P. 416.
26. Егоров А.Г., Камалутдинов А.М., Паймушин В.Н., Фирсов В.А. Теоретико-экспериментальный метод определения коэффициента аэродинамического сопротивления гармонически колеблющейся тонкой пластины // ПМТФ. 2016. Т. 57. № 2 (336). С. 96–104.
27. Guild F.J., Adams R.D. A new technique for the measurement of the specific damping capacity of beams in flexure // J. Phys. E: Sci. Instr. 1981 V. 14. № 3. P. 355.
28. Adams R.D. The damping characteristics of certain steels, cast Irons and other metals // J. Sound Vib. 1972. V. 23. № 2. P. 199–216.
29. Zhang J., Perez R.J., Lavernia E.J. Documentation of damping capacity of metallic, ceramic and metal-matrix composite materials // J. Mater. Sci. 1993. V. 28. № 9. P. 2395–2404.
30. Morison J.R., Johnson J.W., Schaaf S.A. The Force Exerted by Surface Waves on Piles // J. Pet. Technol. 1950. V. 2. P. 149–154.

31. *Jasak H.* Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows: Phd thesis. Department of Mechanical Engineering Imperial College of Science, Technology and Medicine 1996. 394 p.
32. Hydrodynamics in OpenFOAM (2020) 3D visualization of the fluid flow around a flexurally vibrating beam [Результат 3D моделирования] // YouTube. 23 сентября. (<https://www.youtube.com/watch?v=7q7RJFPh-pQg> ab\_channel=HydrodynamicsinOpenFOAM). Просмотрено: 18.08.2021
33. *Singh S.* Forces on Bodies in Oscillatory Flow: Phd thesis. University of London 1979. 367 p.
34. *Bearman P.W., Downie M.J., Graham J.M.R., Obasaju E.D.* Forces on cylinders in viscous oscillatory flow at low Keulegan-Carpenter numbers // J. Fluid Mech. 1985. V. 154. P. 337–356.
35. *Keulegan G.H., Carpenter L.H.* Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid // J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol. 1958. V. 60. № 5. P. 423–440.

УДК 532.59: 534.2: 537.2

## ОБ АКУСТИЧЕСКОМ ИЗЛУЧЕНИИ СЛАБО ЗАРЯЖЕННЫХ КАПЕЛЬ, ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ВО ВНЕШНЕМ ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

© 2022 г. А. И. Григорьев<sup>a,\*</sup>, Н. Ю. Колбнева<sup>b,\*\*</sup>, С. О. Ширяева<sup>b,\*\*\*</sup><sup>a</sup> *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*<sup>b</sup> *Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия*

\*E-mail: grigorai@mail.ru

\*\*E-mail: kolbneva-nata@yandex.ru

\*\*\*E-mail: shir@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 15.04.2022 г.

После доработки 19.05.2022 г.

Принята к публикации 20.05.2022 г.

В асимптотических расчетах первого порядка малости по безразмерной амплитуде осцилляций и равновесной деформации, слабо заряженных капель естественного происхождения в слабом внешнем электрическом поле рассчитывается интенсивность акустического излучения от них и ширина диапазона частот, на который это излучение приходится. Расчеты проводятся на модели идеальной несжимаемой электропроводной жидкости. Показано, что акустическое излучение жидко-капельного аэрозоля естественного происхождения: облаков и туманов приходится на ультразвуковой диапазон частот, а акустическое излучение от дождя идет в звуковом диапазоне, и такое звуковое излучение может быть слышимым. Граница по радиусу капель между ультразвуковым и звуковым акустическими излучениями зависит от физических характеристик среды и капли и может смещаться как в одну сторону, так и в другую.

*Ключевые слова:* осциллирующая капля, электростатическое поле, акустическое излучение

DOI: 10.31857/S0568528122050061

Проблема изучения акустического излучения от капли, осциллирующей в газовой среде во внешнем электростатическом поле, представляет интерес в связи с многочисленными приложениями в геофизике, физике атмосферного электричества, физике аэродисперсных систем, акустической левитации капель для получения высокочистых веществ [1–8]. Проблема акустического излучения от осциллирующей капли важна также для обработки результатов метеорологических исследований атмосферы методом ее акустического зондирования.

Следует отметить, что при конструировании электроакустических левитаторов, а также в вычислениях, связанных с акустическим зондированием атмосферы, капля в акустическом поле моделируется твердым шариком без внутренних степеней свободы [9]. Это представляется весьма грубым.

В связи со сказанным, рассмотрим некоторые общие закономерности акустического излучения от капли, пользуясь простейшей моделью идеальной несжимаемой электропроводной жидкости и законом сохранения энергии, предложенной в [10], и успешно примененной к изучению электромагнитного излучения при осцилляциях заряженной капли [11, 12].

Речь идет о простейшей цепочке рассуждений: в идеальной несжимаемой жидкости рассеяние энергии невозможно и дисперсионное уравнение задачи об осцилляциях капли имеет только вещественные корни. Тем не менее в задаче об акустическом (электромагнитном, если на капле есть заряд) излучении от осциллирующей капли идеальной несжимаемой жидкости, находящейся в сжимаемой среде, частота осцилляций оказывается комплексной. Мнимая же часть частоты отвечает за затухание осцилляций, невозможное в идеальной жидкости. Вывод один: часть энергии осцилляций уносится излучением: электромагнитным [10] (если капля заряжена или осциллирует в электростатическом поле) или акустическим [12]. Зная декремент затухания

осцилляций капли, несложно рассчитать интенсивность ее акустического (электромагнитного) излучения [12].

### 1. ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим слабо заряженную сферическую каплю равновесного радиуса  $R$  идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с массовой плотностью  $\rho_1$ , коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ , подвешенную в конвективном облаке в суперпозиции гравитационного  $\mathbf{g}$ , внутриоблачного коллинеарного  $\mathbf{g}$  однородного электростатического поля напряженностью  $\mathbf{E}_0$  и восходящего потока воздуха. Внешнюю среду (воздух) будем считать сжимаемым идеальным диэлектриком с массовой плотностью  $\rho_2$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{ex}$ . Положим, что в воздухе звук распространяется со скоростью  $v$ . Температуру капли и внешней среды будем считать неизменной, а объём жидкой фазы капли – постоянным. В дальнейших рассуждениях малым зарядом капли будем пренебрегать (он нужен только для того, чтобы обеспечить неподвижность капли).

В соответствии с [13, 14] капля, находящаяся во внешнем электростатическом поле, принимает вытянутую вдоль поля  $\mathbf{E}_0$  примерно сфероидальную форму с эксцентриситетом  $e$ . Примем, что ось  $z$  (ось симметрии капли) направлена в сторону, противоположную гравитационному полю  $\mathbf{g}$ .

Задачу будем решать в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$ , начало которой поместим в центре масс капли. Полярный угол  $\theta$  отсчитывается от  $\mathbf{E}_0$ , а азимутальный угол  $\varphi$  в дальнейшем не используется ввиду осевой симметрии капли.

Примем, что на поверхности жидкости существует капиллярное волновое движение с амплитудой  $\sim \sqrt{\kappa T / \sigma}$ , где  $\kappa$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура, порождаемое уже тепловым движением молекул жидкости [15], которое создает малое возмущение  $\xi(\theta, t)$  равновесной поверхности капли. Для большинства реальных жидкостей, включая жидкие металлы, тепловая амплитуда капиллярных волн не превышает десятых долей нанометра.

### 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Уравнение возмущенной поверхности капли представим в виде

$$r(\theta, t) = r(\theta) + \xi(\theta, t), \tag{2.1}$$

где  $r(\theta)$  – равновесная форма капли. Примем также, что амплитуда капиллярного волнового возмущения  $\xi(\theta, t)$  много меньше радиуса невозмущенной капли  $\max|\xi| \ll R$ . Отношение  $\max|\xi|/R$  примем в качестве малого параметра  $\epsilon \equiv |\xi|/R \ll 1$  задачи.

Пусть движение жидкости в капле и движение внешней среды бесконечно малой амплитуды, порождаемое капиллярным волновым движением на границе раздела сред, является потенциальным. Тогда поля скоростей безвихревого движения в капле и среде  $\mathbf{V}_j(r, \theta, t)$  определится функциями гидродинамических потенциалов  $\psi_j(r, \theta, t)$   $\mathbf{V}_j(r, \theta, t) = \nabla \psi_j(r, \theta, t)$  [16], (индексом  $j = 1$  отмечаются величины, относящиеся к капле,  $j = 2$  – к среде). При этом потенциалы скоростей внутри и вне капли, а также возмущение поверхности капли имеют один порядок малости  $\psi_j(r, \theta, t) \sim \xi(\theta, t) \sim \epsilon$ , поскольку именно зависящая от времени деформация поверхности генерирует капиллярное волновое движение.

Принимая каплю идеальным проводником, для которого характерное время распределения индуцированных внешним электрическим полем зарядов много меньше характерного гидродинамического времени колебаний поверхности капли, электрическое поле вокруг капли будем считать квазистационарным. В этом случае электрическое поле характеризуется электрическим потенциалом  $\Phi(r, \theta, t)$ , определяемым напряженностью поля  $\mathbf{E}$  на основе соотношения:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \Phi(r, \theta, t)$  [17].

Математическая формулировка задачи о расчете спектра капиллярных осцилляций незаряженной капли, во внешнем электростатическом поле, и генерации акустического излучения, состоит из уравнений Лапласа для потенциала поля скоростей движения жидкости в капле  $\psi_1(r, \theta, t)$

и электростатического потенциала  $\Phi(r, \theta, t)$ , а также волнового уравнения для потенциала поля скоростей движения внешней среды  $\psi_2(r, \theta, t)$

$$\Delta\psi_1(r, \theta, t) = 0, \quad \Delta\Phi(r, \theta, t) = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_2(r, \theta, t)}{\partial t^2} - \Delta\psi_2(r, \theta, t) = 0 \quad (2.3)$$

и граничных условий

$$r \rightarrow 0: \psi_1(r, \theta, t) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty: \Phi(r, \theta, t) \rightarrow -E_0 r \cos \theta \quad (2.4)$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t) \quad \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial \theta} \quad (2.5)$$

$$P_1(r, \theta, t) - P_2(r, \theta, t) + P_E(r, \theta, t) - P_\sigma(r, \theta, t) = 0 \quad (2.6)$$

$$\Phi(r, \theta, t) = \Phi_s(t) \quad (2.7)$$

Граничное условие для волнового уравнения (2.3) на бесконечности имеет вид  $r \rightarrow \infty$ :

$$\frac{\partial \psi_2(r, \theta, t)}{\partial r} + ik\psi_2(r, \theta, t) = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (2.8)$$

Сформулированную задачу дополним интегральными условиями

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad \int_V \mathbf{r} r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

$$V = [0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n}(\theta, t), \nabla \Phi) dS = q, \quad S = [r = r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi] \quad (2.10)$$

В выражениях (2.4)–(2.10) соотношения (2.4) есть граничные условия в центре капли и на бесконечности; (2.5), (2.6) – кинематическое и динамическое условия на ее возмущенной поверхности; (2.7) – условие постоянства электрического потенциала на поверхности идеально электропроводной капли; (2.8) – условие излучения Зоммерфельда [18]; (2.9) – условия постоянства полного объема капли и неподвижности ее центра масс; (2.10) – условие неизменности полного заряда капли.

Так же в (2.4)–(2.10) введены обозначения  $\Phi_s(t)$  – постоянное значение электрического потенциала на поверхности капли,  $k = \text{Re} \omega_n / v$  – волновое число,  $q$  – малый ( $\sim O(\varepsilon^2)$ ) заряд капли,  $o$  и  $O$  – символы порядка малости [19],  $P_j = P_{0j} - \rho_j \partial \psi_j(r, \theta, t) / \partial t$  – давления внутренней ( $j = 1$ ) и внешней ( $j = 2$ ) среды на поверхность капли,  $P_{0j}$  – постоянные давления в капле и среде,  $P_E = \varepsilon_{ex} (\nabla \Phi)^2 / 8\pi$  – давление электрического поля на поверхность капли,  $P_\sigma = \sigma (\nabla_s \cdot \mathbf{n}(\theta, t))$  – давление капиллярных сил,  $\nabla_s$  – поверхностный оператор “набла”,  $\mathbf{n}(\theta, t)$  – единичный вектор нормали к возмущенной поверхности капли, вычисляемый как

$$\mathbf{n}(\theta, t) = \frac{\nabla(r - r(\theta, t))}{\left| \nabla(r - r(\theta, t)) \right|_{r=r(\theta, t)}} \quad (2.11)$$

Сформулированную задачу (2.2)–(2.11) будем решать стандартными методами теории возмущений в линейном приближении по безразмерной амплитуде осцилляций  $\varepsilon$  [19]. Для этого искомые функции разложим в ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon$  с точностью до слагаемых первого порядка

$$\xi(\theta, t) = \xi^{(1)}(\theta, t) + O(\varepsilon^2), \quad \psi_j(r, \theta, t) = \psi_j^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2)$$

$$\Phi(r, \theta, t) = \Phi^{(0)}(r, \theta) + \Phi^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2)$$

$$P_j(r, \theta, t) = P_j^{(0)}(r, \theta) + P_j^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2)$$

$$P_E(r, \theta, t) = P_E^{(0)}(r, \theta) + P_E^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2)$$

$$P_\sigma(r, \theta, t) = P_\sigma^{(0)}(r, \theta) + P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2)$$

где  $\Phi^{(0)}(r, \theta)$  – электростатический потенциал у поверхности равновесной капли,  $\Phi^{(1)}(r, \theta, t)$  – добавка к электростатическому потенциалу, связанная с осцилляциями поверхности капли. Верхний индекс в скобках указывает на порядок малости по  $\varepsilon$ .

Подставляя эти разложения в исходную систему уравнений (2.2)–(2.10) и приравнивая слагаемые одного порядка малости по  $\varepsilon$ , получим задачи нулевого и первого порядков.

### 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА ПО $\varepsilon$

Для отыскания равновесного электрического потенциала  $\Phi^{(0)}(r, \theta)$  и равновесной формы поверхности капли  $r(\theta)$  решим электрогидродинамическую задачу нулевого порядка по  $\varepsilon$ , получающуюся из (2.2)–(2.10) группировкой слагаемых  $\sim \varepsilon^0$

$$\Delta \Phi^{(0)}(r, \theta) = 0$$

$$r \rightarrow \infty: \Phi^{(0)}(r, \theta) \rightarrow -E_0 r \cos \theta$$

$$r = r(\theta): P_1^{(0)}(r, \theta, t) - P_2^{(0)}(r, \theta, t) + P_E^{(0)}(r, \theta, t) - P_\sigma^{(0)}(r, \theta, t) = 0$$

$$\Phi^{(0)}(r, \theta) = \text{const};$$

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad \int_V \mathbf{r} \times r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0$$

$$V = [0 \leq r \leq r(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n}_0(\theta), \nabla \Phi^{(0)}(r, \theta)) dS = 0, \quad S = [r = r(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]$$

где  $\mathbf{n}_0(\theta)$  – от нормали к равновесной поверхности капли  $r(\theta)$ .

Из приведенной выше задачи несложно найти

$$\Phi^{(0)}(r, \theta) = E_0 \left[ r P_1(\mu) \left( \frac{R^3}{r^3} - 1 \right) + \frac{2R^3}{5r^2} e^2 \left( P_1(\mu) + \frac{3R^2}{2r^2} P_3(\mu) \right) \right] \quad (3.1)$$

$$r(\theta) = R \left( 1 + \frac{1}{3} e^2 P_2(\mu) \right) + O(e^4), \quad e^2 = \frac{9\varepsilon_{ex} E_0^2 R}{16\pi\sigma} \quad (3.2)$$

где  $P_n(\mu)$  – осесимметричный полином Лежандра  $n$ -го порядка [20];  $e$  – эксцентриситет капли;  $n$  – целое положительное число;  $\mu \equiv \cos \theta$ . В (3.1), (3.12) соотношение (3.1) определяет равновесный электростатический потенциал невозмущенной капли, (3.2) – равновесную форму невозмущенной капли.

### 4. РЕШЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ ПО $\varepsilon$

Для определения линейной поправки к потенциалу электрического поля  $\Phi^{(1)}(r, \theta, t)$ , связанного с капиллярным волновым движением поверхности капли, сформулируем электрическую задачу в первом порядке малости по  $\varepsilon$

$$\Delta \Phi^{(1)}(r, \theta, t) = 0 \quad (4.1)$$

$$r \rightarrow \infty: \Phi^{(1)}(r, \theta, t) \rightarrow 0 \quad (4.2)$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \Phi(r, \theta, t) = \Phi_s(t) \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n}, \nabla \Phi) dS = 0, \quad S = [r = r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi] \quad (4.4)$$

Из решения уравнения Лапласа (4.1) при выполнении условия ограниченности (4.2) получим электрический потенциал, представленный в виде ряда по полиномам Лежандра

$$\Phi^{(1)}(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n r^{-(n+1)} P_n(\mu) \quad (4.5)$$

где  $P_n(\mu)$  – полином Лежандра  $n$ -го порядка [20],  $n$  – целое число,  $\mu \equiv \cos \theta$ .

Функцию волнового возмущения  $\xi(\theta, t)$  с гармонической временной зависимостью отдельных слагаемых возьмем в виде  $\xi(\theta, t) \sim \exp(i\omega_n t)$  [21]

$$\xi(r, \theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} M_n \exp(i\omega_n t) P_n(\mu) \quad (4.6)$$

Здесь минимальное значение индекса суммирования  $n = 2$  определяется исключением радиальных пульсаций и поступательного движения капли в линейном приближении по  $\varepsilon$ . В выражениях (4.5), (4.6) действительные амплитудные коэффициенты  $F_n$ ,  $M_n$  имеют первый порядок малости.

Подставим разложение (4.5) в условие (4.3) постоянства электрического потенциала на поверхности капли и с учетом интегрального условия сохранения заряда капли (4.4) и соотношений (2.1), (4.6) определим амплитудные коэффициенты  $F_n$  в (4.5), при помощи которых запишем электрический потенциал  $\Phi^{(1)}(r, \theta, t)$  в виде

$$\Phi^{(1)}(r, \theta, t) = E_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} [l_1 M_{n-1} \exp(i\omega_{n-1} t) + l_2 M_{n+1} \exp(i\omega_{n+1} t) + e^2 (l_3 M_{n-3} \exp(i\omega_{n-3} t) + l_4 M_{n-1} \exp(i\omega_{n-1} t) + l_5 M_{n+1} \exp(i\omega_{n+1} t) + l_6 M_{n+3} \exp(i\omega_{n+3} t))] P_n(\mu) \quad (4.7)$$

$$l_1 = \frac{3n}{2n-1}, \quad l_2 = \frac{3(n+1)}{2n+3}, \quad l_3 = \frac{3n(n-2)(n-1)(n+1)}{2(2n-5)(2n-3)(2n-1)}$$

$$l_4 = \frac{n(50n^4 + n^3 - 103n^2 + 39n - 27)}{10(4n^2 - 9)(2n-1)^2}$$

$$l_5 = \frac{(n+1)(50n^4 + 321n^3 + 621n^2 + 278n - 180)}{10(4n^2 + 8n - 5)(2n+3)^2}, \quad l_6 = \frac{3(n+5)(n+3)(n+2)(n+1)}{2(2n+7)(2n+5)(2n+3)}$$

## 5. РЕШЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ ПО $\varepsilon$ . ВЫВОД ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Математическая формулировка гидродинамической части решаемой задачи первого порядка малости по безразмерной амплитуде осцилляций  $\varepsilon$  имеет вид

$$\Delta \psi_1(r, \theta, t) = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_2(r, \theta, t)}{\partial t^2} - \Delta \psi_2(r, \theta, t) = 0 \quad (5.2)$$

$$r \rightarrow 0: \psi_1(r, \theta, t) \rightarrow 0 \quad (5.3)$$

$$r \rightarrow \infty: \frac{\partial \psi_2(r, \theta, t)}{\partial r} + ik \psi_2(r, \theta, t) = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (5.4)$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial \theta} \quad (5.5)$$

$$P_1^{(1)}(r, \theta, t) - P_2^{(1)}(r, \theta, t) + P_E^{(1)}(r, \theta, t) - P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t) = 0 \quad (5.6)$$

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0, \quad \int_V \mathbf{r} r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \mathbf{0}$$

$$V = [0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n}, \nabla \Phi) dS = 0, \quad S = [r = r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к возмущенной поверхности капли (2.1), и имеет согласно (2.11) вид

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \left( \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r(\theta) + \xi(\theta, t)) \mathbf{e}_\theta \right) \left( 1 + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r(\theta) + \xi(\theta, t)) \right]^2 \right)^{-1/2} \Big|_{r(\theta) + \xi(\theta, t)} = \\ &= \left( \mathbf{e}_r + \frac{1}{r(\theta) + \xi(\theta, t)} \frac{\partial (r(\theta) + \xi(\theta, t))}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \right) \left\{ 1 + \left[ \frac{1}{r(\theta) + \xi(\theta, t)} \frac{\partial (r(\theta) + \xi(\theta, t))}{\partial \theta} \right]^2 \right\}^{-1/2} = \mathbf{n}(\theta, t) \\ \mathbf{e}_r &= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}, \quad \mathbf{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k}. \end{aligned}$$

В выписанной задаче первого порядка малости: (5.4) — условие Зоммерфельда, (5.5) — кинематическое граничное условие на поверхности капли; (5.6) — динамическое граничное условие, поправки к давлениям, связанные с возмущением поверхности капли, определяются соотношениями  $r = R$ :

$$P_j^{(1)}(r, \theta, t) = -\rho_j \left[ \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial t} + \frac{1}{3} e^2 R \frac{\partial^2 \psi_j(r, \theta, t)}{\partial r \partial t} P_2(\mu) \right], \quad (j = 1, 2) \quad (5.7)$$

$$P_E^{(1)}(r, \theta, t) = -\frac{3\epsilon_{ex} E_0^2}{4\pi} \left[ 6E_0 P_1(\mu) \frac{\xi(r, \theta)}{R} + \frac{\partial \Phi_1(r, \theta, t)}{\partial r} \right] P_1(\mu) \quad (5.8)$$

$$P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t) = \frac{\sigma}{R} \left[ -\left( 1 - \frac{2}{3} e^2 P_2(\mu) \right) (2 + \hat{L}) \frac{\xi(\theta, t)}{R} + \frac{2}{3} e^2 \frac{\xi(\theta, t)}{R} \hat{L} P_2(\mu) \right] \quad (5.9)$$

$$\hat{L} \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

Подставим в (5.8) уравнения для волнового возмущения (4.6) и поправки к электрическому потенциалу (4.7) и в результате несложных преобразований получим электрическое давление первого порядка малости по  $\epsilon$

$$P_E^{(1)} = \frac{9\epsilon_{ex} E_0^2}{4\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} [M_{n-2} \exp(i\omega_{n-2}t) T_1 + M_n \exp(i\omega_n t) T_2 + M_{n+2} \exp(i\omega_{n+2}t) T_3] P_n(\mu) \quad (5.10)$$

$$T_1 = \frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-3)(2n-1)}, \quad T_2 = \frac{n(4n^3 + 2n^2 - 6n - 1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}, \quad T_3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)}$$

Из формулы (5.9) с учетом функции (4.6) найдем линейную по малому параметру  $\epsilon$  поправку к давлению капиллярных сил

$$\begin{aligned} P_\sigma^{(1)} &= \frac{\sigma}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} [M_n \exp(i\omega_n t) T_4 + \\ &+ e^2 (M_{n-2} \exp(i\omega_{n-2}t) T_5 + M_n \exp(i\omega_n t) T_6 + M_{n+2} \exp(i\omega_{n+2}t) T_7)] P_n(\mu) \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$T_4 = (n-1)(n+2), \quad T_5 = -\frac{2}{3} (4 + (n-2)(n-1)) K_{2,n-2,n}$$

$$T_6 = -\frac{2}{3} (4 + n(n+1)) K_{2,n,n}, \quad T_7 = -\frac{2}{3} (4 + (n+2)(n+3)) K_{2,n+2,n}$$

Примем, что гидродинамические потенциалы  $\psi_j(r, \theta, t)$  зависят от времени  $t$  гармонически:  $\psi_j(r, \theta, t) \sim \exp(i\omega_n t)$ . С учетом данных рассуждений волновое уравнение (5.2) приведем к однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \psi_2(r, \theta, t) + k^2 \psi_2(r, \theta, t) = 0 \quad (5.12)$$

Потенциал поля скоростей течения жидкости в капле  $\psi_1(r, \theta, t)$ , являющийся решением уравнения Лапласа (5.1), удовлетворяющий условию ограниченности в центре масс капли (5.3), запишем в виде разложения по осесимметричным полиномам Лежандра

$$\psi_1(r, \theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} A_n \exp(i\omega_n t) r^n P_n(\mu) \quad (5.13)$$

Решение уравнения (5.12) для потенциала скоростей акустического поля при выполнении условия излучения на бесконечности (5.4) представим в виде

$$\psi_2(r, \theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \exp(i\omega_n t) h_n^{(2)}(kr) P_n(\mu) \quad (5.14)$$

где  $h_n^{(2)}(z)$  – сферическая функция Бесселя третьего рода [22].

Заметим, что в разложениях (5.13), (5.14) коэффициенты  $A_n, B_n$  имеют первый порядок малости по безразмерной амплитуде осцилляций.

Подстановка разложений (4.6), (5.13), (5.14) в кинематическое граничное условие при  $j = 1, 2$ , позволяет найти коэффициенты  $A_n, B_n$  в (5.13), (5.14), выраженные через действительные амплитуды  $M_n$ , которые дают решение для потенциалов  $\psi_1(r, \theta, t), \psi_2(r, \theta, t)$  в виде

$$\psi_1(r, \theta, t) = R \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n \left[ \frac{i\omega_n}{n} M_n \exp(i\omega_n t) + \right. \quad (5.15)$$

$$\left. + e^2 (i\omega_{n-2} M_{n-2} \exp(i\omega_{n-2} t) T_8 + i\omega_n M_n \exp(i\omega_n t) T_9 + i\omega_{n+2} M_{n+2} \exp(i\omega_{n+2} t) T_{10}) \right] P_n(\mu)$$

$$T_8 = -\frac{1}{3n(n-2)} ((n-2)(n-3) K_{2,n-2,n} - \alpha_{2,n-2,n}), \quad T_9 = -\frac{1}{3n^2} (n(n-1) K_{2,n,n} - \alpha_{2,n,n})$$

$$T_{10} = -\frac{1}{3n(n+2)} ((n+2)(n+1) K_{2,n+2,n} - \alpha_{2,n+2,n})$$

$$\psi_2(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n^{(2)}(kr)}{\partial_r(h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} [i\omega_n M_n \exp(i\omega_n t) + \quad (5.16)$$

$$+ e^2 (i\omega_{n-2} M_{n-2} \exp(i\omega_{n-2} t) T_{11} + i\omega_n M_n \exp(i\omega_n t) T_{12} + i\omega_{n+2} M_{n+2} \exp(i\omega_{n+2} t) T_{13})] P_n(\mu)$$

$$T_{11} = \frac{1}{3} \left( -R \frac{\partial_{r^2}^2(h_{n-2}^{(2)}(kr))}{\partial_r(h_{n-2}^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} K_{2,n-2,n} + \frac{1}{R} \frac{h_{n-2}^{(2)}(kR)}{\partial_r(h_{n-2}^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \alpha_{2,n-2,n} \right)$$

$$T_{12} = \frac{1}{3} \left( -R \frac{\partial_{r^2}^2(h_n^{(2)}(kr))}{\partial_r(h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} K_{2,n,n} + \frac{1}{R} \frac{h_n^{(2)}(kR)}{\partial_r(h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \alpha_{2,n,n} \right)$$

$$T_{13} = \frac{1}{3} \left( -R \frac{\partial_{r^2}^2(h_{n+2}^{(2)}(kr))}{\partial_r(h_{n+2}^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} K_{2,n+2,n} + \frac{1}{R} \frac{h_{n+2}^{(2)}(kR)}{\partial_r(h_{n+2}^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \alpha_{2,n+2,n} \right)$$

$$K_{m,k,n} = [C_{k0,m0}^{n0}]^2, \quad \alpha_{m,k,n} = -\sqrt{m(m+1)k(k+1)} C_{m0,k0}^{n0} \times C_{m-1,k1}^{n0}$$

где  $C_{mk,lp}^{nq}$  – коэффициенты Клебша–Гордана [20], отличные от нуля при условии  $|m-l| \leq n \leq m+l$ ,  $m+l+n$  – четное и  $k+p=q$ .

Подставляя потенциалы поля скоростей (5.15), (5.16) в (5.7), найдем поправки первого порядка малости к давлениям внутренней и внешней для капли сред

$$P_1^{(1)} = \rho_1 R \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\omega_n^2}{n} M_n \exp(i\omega_n t) + e^2 (\omega_{n-2}^2 M_{n-2} \exp(i\omega_{n-2} t) T_8^+ + \omega_n^2 M_n \exp(i\omega_n t) T_9^+ + \omega_{n+2}^2 M_{n+2} \exp(i\omega_{n+2} t) T_{10}^+) \right] P_n(\mu) \quad (5.17)$$

$$T_8^+ = T_8 + \frac{1}{3} K_{2,n-2,n}, \quad T_9^+ = T_9 + \frac{1}{3} K_{2,n,n}, \quad T_{10}^+ = T_{10} + \frac{1}{3} K_{2,n+2,n}$$

$$P_2^{(1)} = \rho_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\partial_r(h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \{ \omega_n^2 M_n \exp(i\omega_n t) h_n^{(2)}(kR) + e^2 (\omega_{n-2}^2 M_{n-2} \exp(i\omega_{n-2} t) T_{11}^+ + \omega_n^2 M_n \exp(i\omega_n t) T_{12}^+ + \omega_{n+2}^2 M_{n+2} \exp(i\omega_{n+2} t) T_{13}^+) \} P_n(\mu) \quad (5.18)$$

$$T_{11}^+ = T_{11} \times h_{n-2}^{(2)}(kR) + \frac{1}{3} R \times \partial_r(h_{n-2}^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R} K_{2,n-2,n}$$

$$T_{12}^+ = T_{12} \times h_n^{(2)}(kR) + \frac{1}{3} R \times \partial_r(h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R} K_{2,n,n}$$

$$T_{13}^+ = T_{13} \times h_{n+2}^{(2)}(kR) + \frac{1}{3} R \times \partial_r(h_{n+2}^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R} K_{2,n+2,n}$$

В итоге из условия баланса давлений (5.6) в любой точке на возмущенной поверхности сферической капли с учетом (5.10), (5.11), (5.17), (5.18), пренебрегая взаимодействием различных мод осцилляций, найдем дисперсионное уравнение задачи

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{R^3} \frac{n(n-1)(n+2)}{\rho_1 - n\rho_2 T_0^+} \left( 1 + e^2 \left( T_0 - \frac{\rho_1 T_9^- - n\rho_2 T_{12}^-}{\rho_1 - n\rho_2 T_0^+} \right) \right) \quad (5.19)$$

$$T_0 = -\frac{2n(2n^4 + 29n^3 + 24n^2 - 23n - 2)}{3(n-1)(n+2)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$

$$T_0^+ = \frac{h_n^{(2)}(kR)}{R \cdot \partial_r(h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \quad T_9^- = \frac{(n+1)(n+3)}{3(2n-1)(2n+3)}$$

$$T_{12}^- = \frac{1}{3} \left( \left( 1 - \frac{\partial_r^2(h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}}{\partial_r(h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \right) \frac{h_n^{(2)}(kR)}{\partial_r(h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} K_{2,n,n} + \frac{1}{R^2} \left( \frac{h_n^{(2)}(kR)}{\partial_r(h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \right)^2 \alpha_{2,n,n} \right)$$

Входящую в уравнение (5.19) сферическую функцию Бесселя  $h_n^{(2)}(z)$  для целого значения индекса представим в виде степенного ряда [22, 23]

$$h_n^{(2)}(z) = \frac{1}{z} \exp(-iz) \sum_{m=0}^n i^{m+1} \frac{(2n-m)!}{(n-m)! m!} \frac{1}{(2z)^{n-m}}, \quad z = kr \quad (5.20)$$

Аналогично тому, как это было проделано в [11, 24], при малом значении аргумента  $z$  ( $z \ll 1$ ) для функций  $T_0^+(z)$ ,  $T_{12}^-(z)$  получим следующие асимптотики

$$T_0^+(z) \approx -\frac{n+1}{n^2} + i \left( \frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 z^{2n+1} \quad (5.21)$$

$$T_{12}^-(z) = -\frac{1}{3} \left( \frac{1}{n+1} K_{2,n,n} - \frac{1}{(n+1)^2} \alpha_{2,n,n} \right) \quad (5.22)$$

Решение дисперсионного уравнения имеет комплексный вид, поэтому запишем его как  $\omega_n = \omega'_n + i\omega''_n$ , где мнимая часть  $\omega''_n$  имеет смысл декремента затухания из-за потерь механической энергии осцилляций капли на излучение продольных акустических волн. С учетом малости мнимой части по сравнению с реальной частью ( $\omega''_n \ll \omega'_n$ ) для квадрата частоты осцилляций капли будет справедливо соотношение

$$\omega_n^2 \approx \omega_n'^2 + 2i\omega_n'\omega_n'' \quad (5.23)$$

Сопоставляя выражения (5.19), (5.23) и учитывая (5.21), (5.22), найдем реальную  $\omega'_n$  и мнимую  $\omega''_n$  части дисперсионного уравнения для малого аргумента  $z_0 = kR$  в виде

$$\omega_n'^2 = \frac{\sigma}{R^3 \rho_1} \frac{n(n-1)(n+2)}{\kappa} \left( 1 + e^2 \left( T_0 - \left( T_9^- - \frac{\rho_2}{\rho_1} T_{12}^- \right) \kappa^{-1} \right) \right), \quad \kappa \equiv 1 + \frac{n+1}{n} \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (5.24)$$

$$\omega_n'' = \frac{\sigma \rho_2}{R^3 \rho_1^2} n^2 (n-1)(n+2) \left( \frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 z_0^{2n+1} \frac{1}{2\omega_n'} \quad (5.25)$$

Подставим в (5.25) решение для реальной части частоты осцилляций и при  $z_0 = \omega_n R/v$  получим декремент затухания  $n$ -й моды капиллярных осцилляций капли, связанный с генерацией акустических волн  $\eta_*$ , в виде

$$\eta_* = \frac{\sigma^{n+1}}{R^{n+2} v^{2n+1} \rho_1^{n+1}} n^{n+2} (n-1)^{n+1} (n+2)^{n+1} \frac{1}{2} \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( \frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 \times \\ \times \kappa^{-n} \left( 1 + e^2 \left( T_0 - \left( T_9^- - n \frac{\rho_2}{\rho_1} T_{12}^- \right) \kappa^{-1} \right) \right)^n$$

В частности, если плотность внешней среды много меньше плотности внутренней среды ( $\rho_2 \ll \rho_1$ ), декремент затухания для второй (основной) моды капиллярных осцилляций капли примет вид

$$\eta = \frac{14.2 \sigma^3 \rho_2}{R^4 v^5 \rho_1^4} (1 - 1.2e^2)^2 \quad (5.26)$$

На рис. 1а–б по (26) приведены кривые, иллюстрирующие зависимость декремента затухания  $\eta$  от размера капли  $R$ . Видно, что с ростом радиуса равновеликой сферической капли величина  $\eta$  весьма быстро снижается: при увеличении размера капли в три раза декремент затухания уменьшается на два порядка. Из (5.26) нетрудно видеть, что декремент затухания линейно зависит от плотности внешней среды, и что возрастание скорости звука в окружающей среде приводит к быстрому уменьшению декремента затухания.

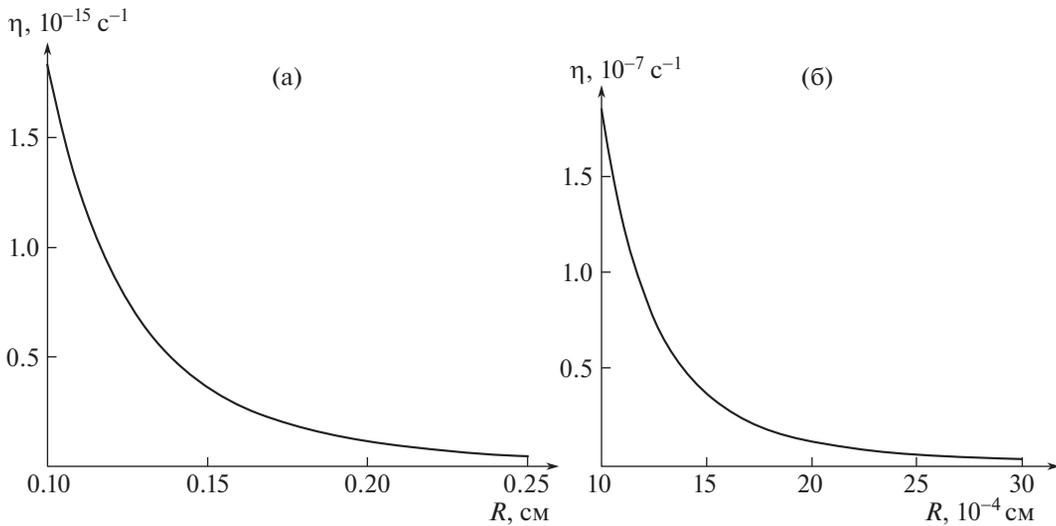
На рис. 2а–б приведены зависимости частот акустических волн по (5.24) с использованием (5.21)–(5.22): а) для крупных капель (капель дождя) и б) для мелких, облачных. Видно, что дождевые капли при осцилляциях излучают акустические волны в диапазоне частот, воспринимаемых человеческим ухом, а облачные капли – в ультразвуковой области.

## 6. ИНТЕНСИВНОСТЬ АКУСТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

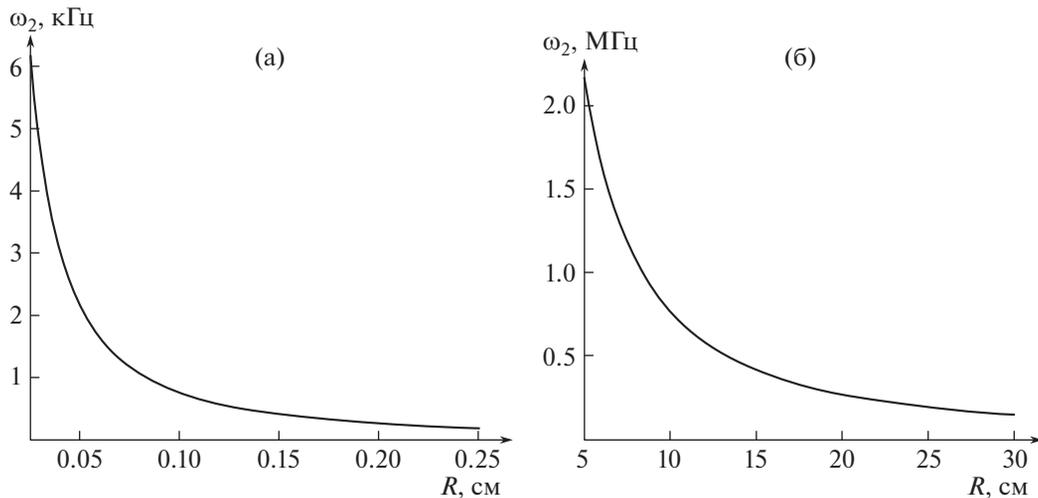
Интенсивность полного звукового излучения осциллирующей капли, когда длина излучаемой акустической волны велика по сравнению с радиусом капли  $\lambda \gg R$ , определяется известным выражением [18]

$$I = \rho_2 v \oint_S \overline{V_2^2} dS \quad (6.1)$$

где  $\overline{V_2^2}$  – среднее значение квадрата скорости движения частиц внешней среды в звуковой волне, а интегрирование производится по возмущенной поверхности капли, определяемой выражением (2.1).



**Рис. 1.** Зависимость декремента затухания  $\eta$  дождевой незаряженной капли, осциллирующей в однородном электростатическом поле, от радиуса капли  $R$ :  $n = 2$ ,  $\epsilon_{ex} = 1$ ,  $\sigma = 73$  дин/см,  $E_0 = 0.17$  СГСЭ,  $M_n = 0.1 \cdot R$ ,  $\rho_1 = 1$  г/см<sup>3</sup>,  $\rho_2 = 1.3 \times 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup>,  $\nu = 3.3 \times 10^4$  см/с; а) дождевая капля, б) облачная капля.



**Рис. 2.** Зависимость частоты осцилляций  $\omega_2$  капли от ее радиуса: параметры те же, что на рис. 1; а) – дождевая капля, б) – облачная капля.

Скорость движения внешней среды  $\mathbf{V}_2(r, \theta, t) = \text{Re}(\nabla \psi_2(r, \theta, t))$  задается нормальной составляющей к поверхности осциллирующей капли и содержит лишь радиальную компоненту

$$\mathbf{V}_2(r, \theta, t) = \text{Re}\left(\frac{\partial \psi_2(r, \theta, t)}{\partial r} \mathbf{e}_r\right) \tag{6.2}$$

Для нахождения потенциала  $\psi_2(r, \theta, t)$  в дальней области акустического поля (для расстояний, больших длины звуковой волны  $r \gg \lambda$ ) сферическая функция Бесселя  $h_n^{(2)}(z)$  в (5.20) при больших значениях аргумента  $z \gg 1$  имеет асимптотическое представление:

$$h_n^{(2)}(z) \approx i^{n+1} \frac{1}{z} \exp(-iz), \quad z = kr \gg 1, \tag{6.3}$$

В уравнении (5.16) найдем асимптотическое поведение функции  $\partial_z(h_n^{(2)}(z))$  для малого аргумента  $z \ll 1$

$$\partial_z(h_n^{(2)}(z)) \approx -i \frac{(2n)!(n+1)}{2^n n!} \frac{1}{z^{n+2}} \exp(-iz), \quad z = z_0 = kR \ll 1 \quad (6.4)$$

Используя полученные асимптотики (6.3), (6.4), при условии  $R \ll r$  потенциал скорости в окружающей каплю среде приобретет вид

$$\begin{aligned} \Psi_2(r, \theta, t) = & - \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} \frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)} \frac{k^n R^{n+2}}{r} \exp(-ikr) [\omega'_n M_n \exp(i\omega'_n t) + \\ & + e^2 (\omega'_{n-2} M_{n-2} \exp(i\omega'_{n-2} t) T'_{11} + \omega'_n M_n \exp(i\omega'_n t) T'_{12} + \omega'_{n+2} M_{n+2} \exp(i\omega'_{n+2} t) T'_{13})] P_n(\mu) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Заметим, что на больших расстояниях  $r$  от осциллирующей капли в волновой зоне акустического излучения потенциал поля скоростей  $\Psi_2(r, \theta, t)$  представлен суперпозицией расходящихся сферических волн с амплитудами, убывающими с расстоянием  $r$  по закону  $\sim 1/r$ .

В итоге, подставляя потенциал (6.5) в (6.2), при  $R \ll r$  для скорости движения частиц внешней среды имеем

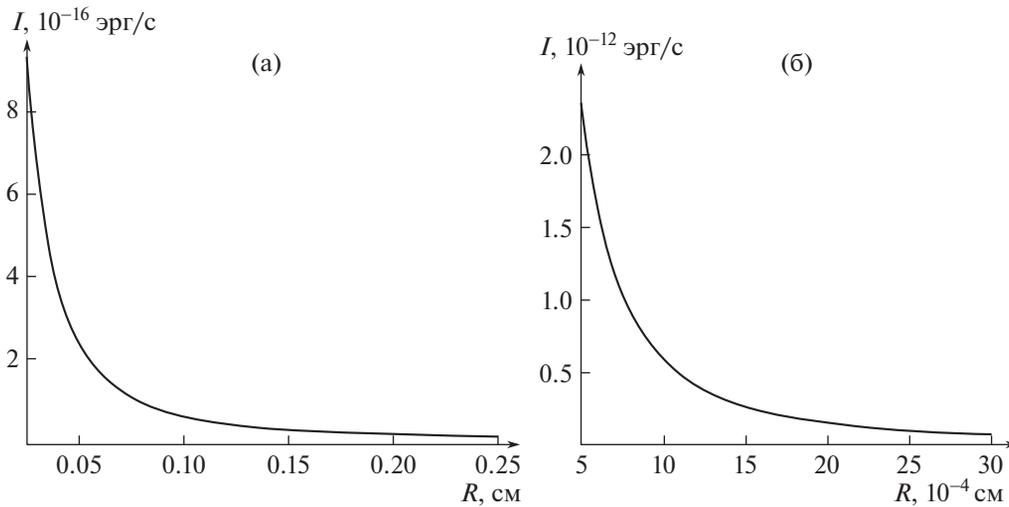
$$\begin{aligned} \mathbf{V}_2(r, \theta, t) = & \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+2} \frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)} R^{n+2} k^{n+1} \frac{1}{r} \exp(-ikr) [\omega'_n M_n \exp(i\omega'_n t) + \\ & + e^2 (\omega'_{n-2} M_{n-2} \exp(i\omega'_{n-2} t) T'_{11} + \omega'_n M_n \exp(i\omega'_n t) T'_{12} + \omega'_{n+2} M_{n+2} \exp(i\omega'_{n+2} t) T'_{13})] P_n(\mu) \mathbf{e}_r \\ T'_{11} = \text{Re } T_{11} \approx & \frac{1}{3} (n-1) \left( (n-1) \left( \frac{2}{(n-2)^2} + \frac{1}{n-3} \right) K_{2,n-2,n} - \frac{1}{(n-2)^2} \alpha_{2,n-2,n} \right) \\ T'_{12} = \text{Re } T_{12} \approx & \frac{1}{3} (n+1) \left( (n+1) \left( \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n-1} \right) K_{2,n,n} - \frac{1}{n^2} \alpha_{2,n,n} \right) \\ T'_{13} = \text{Re } T_{13} \approx & \frac{1}{3} (n+3) \left( (n+3) \left( \frac{2}{(n+2)^2} + \frac{1}{n+1} \right) K_{2,n+2,n} - \frac{1}{(n+2)^2} \alpha_{2,n+2,n} \right) \end{aligned} \quad (6.6)$$

В общей формуле для интенсивности звукового излучения (6.1) среднее значение квадрата скорости движения внешней для капли среды вычислим в виде  $\overline{|V_2|^2} = |V_2|^2 / 2$ . Скалярно умножая выражение (6.6) на комплексно сопряженное ему, получим

$$\begin{aligned} \overline{V_2^2(r, \theta, t)} = & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} i^{n+2} (-i)^{m+2} \frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)} \frac{2^m m!}{(2m)!(m+1)} R^{n+2} R^{m+2} k^{n+1} k^{m+1} \frac{1}{r^2} \times \\ & \times [\omega'_n M_n + e^2 (\omega'_{n-2} M_{n-2} T'_{11} + \omega'_n M_n T'_{12} + \omega'_{n+2} M_{n+2} T'_{13})] P_n(\mu) P_m(\mu) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Подставляя (6.7) в (6.1) и учитывая свойство ортогональности полиномов Лежандра [22], в формуле (6.1) рассчитаем интеграл по поверхности возмущенной капли  $S = [r = r(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]$ . В итоге интенсивность акустического излучения незаряженной осциллирующей сфероидальной капли примет вид

$$\begin{aligned} I = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi}{2n+1} \left( \frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)} \right)^2 \rho_2 v R^{2n+4} k^{2n+2} \times \\ & \times \left[ \omega'_n M_n + e^2 (\omega'_{n-2} M_{n-2} T'_{11} + \omega'_n M_n T'_{12} + \omega'_{n+2} M_{n+2} T'_{13}) \right]^2 \end{aligned} \quad (6.8)$$



**Рис. 3.** Зависимость интенсивности акустического излучения  $I$  незаряженной капли, осциллирующей в однородном электростатическом поле, от радиуса капли  $R$ : параметры те же, что на рис. 1; а) – дождевая капля; излучение в звуковом диапазоне частот, б) – облачная капля; излучение ультразвуковое.

С учетом выражения для волнового числа:  $k = \omega'_n/v$ , аналитическое выражение (6.8) преобразуется к виду

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi}{2n+1} \left( \frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)} \right)^2 \rho_2 R^{2n+4} \frac{\omega_n^{2n+2}}{v^{2n+1}} \times [\omega_n^2 M_n + e^2 (\omega'_{n-2} M_{n-2} T'_{11} + \omega'_n M_n T'_{12} + \omega'_{n+2} M_{n+2} T'_{13})]^2 \quad (6.9)$$

где частота  $n$ -й колебательной моды капли  $\omega'_n$  определяется (5.24).

Используя выражение (6.9), оценим величину интенсивности акустического излучения жидко-капельных систем естественного и искусственного происхождения.

Источником акустического излучения в конвективных облаках являются в основном мелкие осциллирующие капли с радиусами от 3 до 30 мкм и концентрацией в облаке  $\sim 10^3 \text{ см}^{-3}$ , на долю которых приходится большая часть воды, содержащейся в облаке [25, 26]. Максимальную концентрацию имеют капли радиусом 3–7 мкм [25]. Осцилляции внутриоблачных капель большой амплитуды объясняются микрофизическими внутриоблачными процессами: разрушением крупных капель в результате аэродинамического сопротивления, столкновения с более мелкими каплями, а также капиллярной электростатической неустойчивости и электрического взаимодействия с соседними частицами. Натурные измерения колебаний дождевых капель показали, что капли могут осциллировать с амплитудами, достигающими десятков процентов их радиусов [27, 28]. Для характерных значений напряженности внутриоблачного электрического поля величина параметра Тейлора  $w = 16\pi e^2/9$ , определяющего электрогидродинамическую устойчивость капли по отношению к индуцированному внешним электрическим полем заряду, много меньше критического значения  $w_{кр}$ , при котором капля распадается [13, 14].

На рис. 3а–б приведем результаты оценки интенсивности акустического излучения единичной капли, осциллирующей на основной моде  $n = 2$  во внешнем электростатическом поле напряженностью  $E_0 = 0.17 \text{ СГСЭ}$  ( $\sim 2 \times 10^{-4} E_{0кр}$ , где  $E_{0кр}$  – критическое для электростатического распада капли на более мелкие значение напряженности поля, при  $R = 3 \text{ мкм}$  и  $\sim 7 \times 10^{-4} E_{0кр}$  при  $R = 30 \text{ мкм}$ ). Амплитуду осцилляций капли примем  $M_n = 0.1R$ . Характеристики капли и внешней среды:  $\epsilon_{ex} = 1$ ,  $\sigma = 73 \text{ дин/см}$ ,  $\rho_1 = 1 \text{ г/м}^3$ ,  $\rho_2 = 1.3 \times 10^{-3} \text{ г/м}^3$ ,  $v = 3.3 \times 10^4 \text{ см/с}$ . По формуле (6.9) найдено, что при радиусе капли  $R = 3 \text{ мкм}$  интенсивность звукового излучения составила  $I \sim 7 \times 10^{-12} \text{ эрг/с}$  на частоте  $\omega_2 \approx 5 \text{ МГц}$ . Для радиуса  $R = 8 \text{ мкм}$  получено  $I \sim 9 \times 10^{-13} \text{ эрг/с}$  на частоте

те  $\omega_2 \approx 1$  МГц, а при  $R = 30$  мкм величина интенсивности излучения составила  $I \sim 7 \times 10^{-14}$  эрг/с на частоте  $\omega_2 \approx 147$  кГц.

Интегральная мощность акустического излучения ансамбля мелких осциллирующих капель в облаке диаметром 10 км будет уже в  $5 \times 10^{20}$  раз больше излучения от одной капли. Принимая для оценки по порядку величины, что все облачные капли имеют одинаковый размер  $R = 30$ , получим излучение  $I_{in} \sim 3 \times 10^7$  эрг/с на ультразвуковой частоте от 147 кГц.

Согласно [29], с. 427, радиусы капель осадков изменяются от  $R = 0.01$  см до  $R = 0.35$  см. При радиусах капель в диапазоне:  $0.01 \leq R \leq 0.025$  см, осадки называются “моросью”, при  $0.025 \leq R \leq 0.35$  см – “дождем”. Капли более крупных размеров разрушаются из-за лобового сопротивления воздуха.

По формуле (6.9) рассчитаем интенсивность акустического излучения дождевых капель при тех же характеристиках, что и выше. Получено, что для дождевой капли с размером  $R = 0.025$  см интенсивность излучения равна  $I \sim 1 \times 10^{-15}$  эрг/с при  $\omega_2 \approx 6$  кГц. Для более крупной капли  $R = 0.25$  см звуковое излучение  $I \sim 1 \times 10^{-17}$  эрг/с на частоте  $\omega_2 \approx 0.2$  кГц, а для самой большой капли с  $R = 0.35$  см интенсивность излучения порядка  $I \sim 5 \times 10^{-18}$  эрг/с при частоте осцилляций второй моды  $\omega_2 \approx 0.1$  ГГц.

Примем, что в дожде концентрация капель с радиусом  $R = 0.025$  см, равна  $0.3 \text{ см}^{-3}$ , и тогда несложно получить, что интегральное акустическое излучение на границе пространства объемом  $1 \text{ км}^3$ , занятого ливневым дождем, будет иметь интенсивность  $I \sim 3 \times 10^{-1}$  эрг/с на частоте  $\approx 6$  кГц, а для капель радиусом  $R = 0.25$  см при той же концентрации интегральное излучение идет с интенсивностью  $I \sim 3 \times 10^{-3}$  эрг/с на частоте  $\approx 0.2$  ГГц волн. Полагая для простоты, что дождь идет в кубическом пространстве с характерным линейным размером, в 1 км получим, что через любую грань куба в единицу времени выходит излучение, интенсивностью в шесть раз меньшее. Тогда плотность потока энергии  $J_{in} \sim 10^{-11}$  эрг/с · см<sup>2</sup> ( $R = 0.025$  см) и  $J_{in} \sim 10^{-13}$  эрг/с · см<sup>2</sup> ( $R = 0.25$  см). Излучение такой интенсивности на несколько порядков величины меньше, чем может зарегистрировать ухо человека. Чтобы увеличить интенсивность излучения в проведенных оценках, можно взять большую амплитуду осцилляций и больший объем пространства, занятого дождем; можно увеличить величину заряда на капле и величину внутриоблачного (или приземного для дождевых капель) электрического поля, все это можно проделать, не выходя за рамки данных натурных метеорологических измерений [26].

Собственно говоря, при принятых выше условиях граница между ультразвуковыми и звуковыми волнами по размеру капель приходится примерно на  $R = 0.01135$  см с интенсивностью излучения порядка  $I \sim 5 \times 10^{-15}$  эрг/с с частотой осцилляций второй моды  $\omega = 20$  кГц. По классификации [25] такие капли можно отнести к крупным облачным каплям, концентрация которых в грозовом облаке не превосходит  $1 \text{ см}^{-3}$ .

С увеличением номера моды осцилляций капли  $n$  на единицу интенсивность звукового излучения снижается примерно на два порядка.

Интересно, что если сравнить мощности акустического и электромагнитного излучений от единичной незаряженной капли, осциллирующей в электростатическом поле в грозовом облаке, можно сделать заключение, что интенсивность звукового излучения на 17–18 порядков величины выше полной интенсивности электромагнитного излучения при тех же характеристиках электропроводной капли [24].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В линейном приближении по безразмерной амплитуде осцилляций и равновесной деформации капли слабым внешнем электрическом поле найдена интенсивность акустического излучения от жидко-капельных объектов естественного происхождения: капель туманов, облаков, дождя. Выяснилось, что туманы и облака излучают акустические волны достаточно большой интенсивности в ультразвуковом диапазоне частот, а вот даже мелкие дождевые капли генерируют при своих осцилляциях акустические волны из звукового диапазона частот с интенсивностью на два-три порядка величины более слабые, чем может зафиксировать ухо человека. Граница между ультразвуковым излучением капель и звуковым проходит в области размеров, чуть больших чем  $R = 100$  мкм. При определении такой границы принималось, что капли несут весьма малый за-

ряд, влияние которого на частоты акустического излучения весьма мало, а амплитуда осцилляций равна одной десятой радиуса капли. Если в оценках взять амплитуды осцилляций в пять-шесть раз больше (как это фиксируется в натуральных наблюдениях) и учесть наличие на каплях существенного электрического заряда, то граница между ультразвуковыми и звуковыми акустическими волнами может быть сдвинута в область меньших размеров. При этом интенсивность излучения будет повышена до различаемого человеческим ухом в силу того, что концентрация капель в облаке увеличивается с уменьшением их размера.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598 “Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью”, <https://rscf.ru/project/19-19-00598/>).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей) Теория звука. Т. II. М.: Гостехтеориздат, 1955. 476 с.
2. Грин Х., Лейн В. Аэрозоли – пыли, дымы и туманы. Л.: Изд. Химия, 1969. 428 с.
3. Качурин Л. Г. Физические основы воздействия на атмосферные процессы. Л.: Гидрометеоздат, 1990. 463 с.
4. Тулайкова Т. В., Мищенко А. В., Амирова С. Р. Акустические дожди. М.: Физматкнига, 2010. 160 с.
5. Little C. G. On the detectability of fog, Cloud, Rain, and Snow by Acoustic Echo-Sounding Methods // J. Atm. Sci. 1972. V. 29. P. 748–755.
6. Can Ruan, Fei Xing, Yue Huang, Xinyi Yu, Jiacheng Zhang, Yufeng Yao. The Influence of Acoustic Field Induced by HRT on Oscillation Behavior of a Single Droplet // Energies. 2017. V. 10. № 48. P. 1–15.
7. Trinh E. H., Holt R. G., Thiessen D. B. The dynamics of ultrasonically levitated drops in an electric field // Phys. Fluids. 1996. V. 8. № 1. P. 43–61.
8. Karlsen J. T., Bruus H. Acoustic Tweezing and Patterning of Concentration Fields in Microfluidics // Phys. Rev. Appl. 2017. V. 7. № 034017. P. 1–10.
9. King L. V. On the Acoustic Radiation Pressure on Spheres // Can. J. Res. 1934. V. 3. P. 212–216.
10. Калечиц В. И., Нахутин И. Е., Полуэктов П. П. О возможном механизме радиоизлучения конвективных облаков // ДАН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1344–1347.
11. Богатов Н. А. Электромагнитное поле, генерируемое капиллярными колебаниями капель // Сборник тезисов докладов VI Междунар. конф. “Солнечно-земные связи и физика предвестников землетрясений”. Петропавловск-Камчатский, ДВО РАН, 2013. С. 10–12.
12. Ширяева С. О., Григорьев А. И. Заряженная капля в грозовом облаке. Ярославль: Изд. ЯрГУ им. П. Г. Демидова, 2008. 535 с.
13. Taylor G. I. Disintegration of water drops in an electric field // Proc. Roy. Soc. 1964. V. A280. P. 383–397.
14. Григорьев А. И., Ширяева С. О., Белавина Е. И. Равновесная форма заряженной капли в электрическом и гравитационном полях // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 27–34.
15. Френкель Я. И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
18. Лепендин Л. Ф. Акустика. М.: Высшая школа, 1978. 448 с.
19. Найфе А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
20. Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 436 с.
21. Cheng K. J. Capillary oscillations of drop in an electric field // Phys. Lett. 1985. V. A112. № 11. P. 392–396.
22. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
23. Градштейн И. С. Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1963. 1108 с.
24. Григорьев А. И., Колбнева Н. Ю., Ширяева С. О. Дипольное электромагнитное излучение заряженной капли, осциллирующей в однородном электростатическом поле // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 2. С. 62–76.
25. Мазин И. П., Шмистер С. М. Облака. Строение и физика образования. Л.: Гидрометеоздат, 1983. 280 с.
26. Мазин И. П., Хргиан А. Х., Имянитов И. М. Облака и облачная атмосфера. Справочник. Л.: Гидрометеоздат, 1989. 647 с.
27. Стерлядкин В. В. Натурные измерения колебаний капель осадков // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1988. Т. 24. № 6. С. 613–621.
28. Beard K. V., Tokay A. A field study of small raindrop oscillations // Geophysical research letters. 1991. V. 18. № 12. P. 2257–2260.
29. Тверской П. Н. Курс метеорологии. Физика атмосферы. Л.: Гидрометеоздат, 1962. 700 с.

УДК 533.6.011.8

## ТЕПЛООБМЕН ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА С КАТАЛИТИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПРИ ОБТЕКАНИИ ПОТОКОМ ДОЗВУКОВОЙ НЕРАВНОВЕСНОЙ ВОЗДУШНОЙ ПЛАЗМЫ

© 2022 г. А. И. Брызгалов<sup>а</sup>, С. А. Васильевский<sup>а</sup>, А. Ф. Колесников<sup>а</sup>, С. Е. Якуш<sup>а,\*</sup><sup>а</sup> Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*E-mail: yakush@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 11.05.2022 г.

После доработки 20.05.2022 г.

Принята к публикации 20.05.2022 г.

Исследованы стационарные дозвуковые течения неравновесной воздушной плазмы около цилиндрического тела с плоским торцом и теплообмен в условиях, характерных для испытаний материалов в ВЧ-плазматроне ВГУ-4 ИПМех РАН. Представлена двумерная вычислительная модель, позволяющая производить расчеты осесимметричного обтекания тел с учетом детальной кинетики частично ионизованного и диссоциированного воздуха. Проведены численные расчеты стационарных обтеканий и тепловых потоков к водоохлаждаемому цилиндрическому телу диаметром 50 мм, на переднем торце которого установлен проточный калориметр. Расчеты проведены для серии экспериментов на установке ВГУ-4 с различными металлическими тепловоспринимающими стенками калориметров (медь, серебро, золото, ниобий, тантал, бериллий, молибден). Получены характеристики течения и распределения концентраций компонент в расчетной области и вблизи поверхностей с различной каталитичностью по отношению к гетерогенной рекомбинации атомов кислорода и азота. Рассчитаны радиальные распределения кондуктивной и рекомбинационной составляющих теплового потока, а также суммарного теплового потока на поверхности обтекаемого тела. Продемонстрирован эффект сверхравновесного нагрева, приводящий к возникновению высоких тепловых потоков вблизи границы раздела материалов с сильно различающейся каталитической активностью. Сравнение с экспериментальными данными показало, что вычислительная модель позволяет предсказывать тепловые потоки на обтекаемых каталитических поверхностях с точностью не хуже 10%.

*Ключевые слова:* ВЧ-плазматрон, воздушная плазма, каталитическая поверхность, дозвуковой поток, теплообмен, численная модель, валидация

DOI: 10.31857/S0568528122050024

Термохимическая стойкость, каталитические свойства материалов и покрытий в условиях аэродинамического нагрева определяются в потоках плазмы, создаваемых при помощи высокочастотных индукционных плазматронов [1–3], в разрядном канале которых плазма создается за счет высокочастотного разряда мощностью от нескольких киловатт до сотен киловатт [4–6]. Преимущества индукционных плазматронов по сравнению с дуговыми включают возможность получения плазмы высокой чистоты в широком диапазоне расходов газа, при этом вкладываемая в плазму мощность может достигать сотен киловатт. В последнее время, наряду с традиционной схемой организации газового разряда с коаксиальным индуктором, реализованы также тандемные схемы, применяются схемы с модуляцией индукционных токов, а область применения индукционных плазматронов, наряду с испытаниями теплозащитных материалов, включает синтез наночастиц, алмазов, модификацию поверхностей и другие технологические приложения [4].

Неотъемлемой частью изучения взаимодействия плазмы с веществами и материалами на современном этапе служит численное моделирование, позволяющее восстановить детальную картину процесса и получить многие характеристики, недоступные для прямого экспериментального измерения. Примерами численного моделирования течений плазмы в разрядных каналах ВЧ-плазматронов и струйного обтекания моделей служат работы [7–13]. В зависимости от режима

работы плазматрона применяются как равновесные [9], так и неравновесные [10, 12] модели плазмы, учитывающие конечную скорость реакций и термическую неравновесность. Достаточно эффективным оказался подход [7, 8], при котором течение в индукционном канале и обтекание тела рассчитываются на основе моделей равновесной плазмы, а эффекты неравновесности учитываются в пограничном слое вблизи передней критической точки тела путем решения соответствующей одномерной задачи.

Одной из важных характеристик теплозащитных покрытий является их каталитическая активность по отношению к рекомбинации атомов, кардинально влияющая на тепловые потоки к поверхности. Для определения коэффициентов каталитической рекомбинации требуются проведение численных расчетов для условий экспериментов на ВЧ-плазматронах и подбор значений этих коэффициентов, обеспечивающих наилучшее согласие рассчитанных и измеренных тепловых потоков [14].

Несмотря на достаточно длительную историю развития вычислительных моделей и экспериментальных методов в области взаимодействия плазмы с материалами, многие аспекты до сих пор остаются недостаточно изученными. Примером может служить эффект сверхравновесного нагрева вблизи скачка каталитической активности, приводящий к значительному возрастанию тепловых потоков на высококatalитических участках поверхности тела [16–18].

В настоящей работе представлена вычислительная модель течения химически неравновесной воздушной плазмы, реализованная в двумерном программном коде IPG2D. Адекватность математической модели и ее программной реализации подтверждена результатами валидационных расчетов обтеканий медной водоохлаждаемой модели диаметром 50 мм, имеющей на переднем торце датчик теплового потока с лицевой поверхностью, выполненной из ряда металлов с различной каталитической активностью. Показано хорошее совпадение с результатами недавних экспериментов, проведенных в плазматроне ВГУ-4 ИПМех РАН [14] для четырех режимов работы плазматрона и семи типов датчиков теплового потока с охлаждаемой металлической поверхностью.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

### 1.1. Определяющие уравнения

Рассматривается течение воздушной плазмы, содержащей  $N_p$  компонент (включая атомы, молекулы, ионы и электроны). Система определяющих уравнений имеет вид

$$\frac{\partial \rho y_i}{\partial t} + \nabla (\rho y_i (\mathbf{U} + \mathbf{V}_i)) = \dot{\omega}_i, \quad i = 1, \dots, N_p \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) = -\nabla P + \nabla \Pi \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla ((E + P)\mathbf{U}) = \nabla \mathbf{q}_T \quad (1.3)$$

Здесь  $t$  – время,  $\rho$  – плотность,  $y_i$  – массовые доли компонент ( $\sum_{i=1}^{N_p} y_i = 1$ ),  $\mathbf{U}$  – скорость,  $P$  – давление,  $\mathbf{V}_i$  – диффузионная скорость  $i$ -й компоненты,  $\dot{\omega}_i$  – массовая скорость ее производства в единице объема,  $\Pi$  – тензор вязких напряжений,  $E$  – плотность полной энергии,  $\mathbf{q}_T$  – вектор теплового потока.

Замыкание системы уравнений (1.1)–(1.3) осуществляется на основе уравнения состояния идеального газа

$$P = \rho R^0 T \sum_{i=1}^{N_p} \frac{y_i}{\mu_i} \quad (1.4)$$

где  $T$  – температура,  $R^0 = 8.314$  Дж/моль·К – универсальная газовая постоянная,  $\mu_i$  – молярная масса  $i$ -й компоненты. Для каждой компоненты заданы температурные зависимости удельной энтальпии (включающей теплоту образования компоненты)  $h_i(T)$  и теплоемкости  $c_{p,i}(T)$  по табличным данным [19].

Соответствующие характеристики газовой смеси находятся как

$$h(T) = \sum_{i=1}^{N_p} y_i h_i(T), \quad c_p(T) = \sum_{i=1}^{N_p} y_i c_{p,i}(T), \quad e^{\text{int}} = h - \frac{P}{\rho}$$

где  $e^{\text{int}}$  – удельная внутренняя энергия смеси. Плотность полной энергии смеси, входящая в уравнение (1.3), определяется как

$$E = \rho \left( e^{\text{int}} + \frac{1}{2} |\mathbf{U}|^2 \right)$$

Тензор вязких напряжений в уравнении импульса (1.2) имеет ньютоновский вид

$$\mathbf{\Pi} = \eta \left( \nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T - \frac{2}{3} \mathbf{I} (\nabla \times \mathbf{U}) \right) \quad (1.5)$$

где  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости,  $\mathbf{I}$  – единичный тензор.

Диффузионные потоки компонент в уравнениях (1.1) выражены через диффузионные скорости  $\mathbf{V}_i$ , которые находятся из соотношений Стефана–Максвелла с учетом амбиполярного поля в ионизованном газе. Используется однетемпературное приближение (температуры электронов и тяжелых частиц равны между собой); эффектами бародиффузии и термодиффузии пренебрегается. Система уравнений для определения диффузионных скоростей имеет вид [20]

$$\sum_{j=1, j \neq e}^{N_p} \frac{x_i x_j}{D_{ij}} (\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_i) + \frac{x_i x_e}{D_{ie}} \mathbf{V}_e = \mathbf{d}_i \quad (1.6)$$

$$- \sum_{j=1, j \neq e}^{N_p} \frac{x_e x_j}{D_{ej}} \mathbf{V}_e = \mathbf{d}_e \quad (1.7)$$

где  $x_i$  – мольные доли компонент,  $D_{ij}$  – бинарные коэффициенты диффузии, здесь и ниже индекс  $e$  относится к электрону. В правой части (1.6) и (1.7) стоят диффузионные термодинамические силы, имеющие вид

$$\mathbf{d}_i = \nabla x_i + (x_i - y_i) \nabla \ln P - e x_i \frac{\mathbf{E}_{amb}}{k_B T} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{d}_e = \nabla x_e + x_e \nabla \ln P + e x_e \frac{\mathbf{E}_{amb}}{k_B T} \quad (1.9)$$

Здесь  $\mathbf{E}_{amb}$  – амбиполярное электрическое поле,  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $e$  – заряд электрона. Система уравнений (1.6)–(1.9) дополняется условиями электрической нейтральности плазмы, амбиполярности (отсутствия электрического тока) и равенства нулю суммы диффузионных потоков всех компонент

$$\sum_{j=1, j \neq e}^{N_p} e_j x_j - e x_e = 0$$

$$\sum_{j=1, j \neq e}^{N_p} e_j x_j \mathbf{V}_j - e x_e \mathbf{V}_e = 0$$

$$\rho \sum_{i=1}^{N_p} y_i \mathbf{V}_i = 0$$

( $e_j$  – заряд тяжелых компонент, отличный от нуля только для ионов).

Тепловой поток  $\mathbf{q}_T$  в уравнении энергии (1.3) включает в себя кондуктивную и рекомбинационную составляющие

$$\mathbf{q}_T = \mathbf{q}_C + \mathbf{q}_R = -\lambda \nabla T + \rho \sum_{i=1}^{N_p} y_i h_i \mathbf{V}_i \quad (1.10)$$

В настоящей работе расчеты проводятся для плазмы с температурой не выше 9100 К, что позволяет не учитывать перенос тепла излучением [21–23].

## 1.2. Коэффициенты переноса

Расчет коэффициентов вязкости  $\eta$  и теплопроводности  $\lambda$  многокомпонентной осуществляется по полуэмпирическим формулам, полученным на основе минимизации функционала квадратов отклонений приближенных значений от коэффициентов переноса, вычисляемых по формулам молекулярно-кинетической теории Чепмена–Энскога во втором приближении для вязкости и в третьем – для теплопроводности [24]

$$\eta = C_1(T) \sum_{i=1}^{N_p} \frac{x_i \sqrt{\mu_i}}{x_i \bar{\Omega}_{ii}^{(2,2)} F_{ii}^{(1)} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N_p} x_k \bar{\Omega}_{ik}^{(2,2)} F_{ik}^{(1)} \sqrt{\frac{2\mu_k}{\mu_i + \mu_k}}} \quad (1.11)$$

$$\lambda^{tr} = C_2(T) \sum_{i=1}^{N_p} \frac{x_i / \sqrt{\mu_i}}{x_i \bar{\Omega}_{ii}^{(2,2)} F_{ii}^{(2)} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N_p} x_k \bar{\Omega}_{ik}^{(2,2)} F_{ik}^{(2)} \sqrt{\frac{2\mu_k}{\mu_i + \mu_k}}} C_{ik} \quad (1.12)$$

где

$$C_1(T) = 8.387 \times 10^{-6} \sqrt{T}, \quad C_2(T) = 0.2615 \sqrt{T}, \quad C_{ik} = \frac{3.75\mu_i^2 + 5\mu_i\mu_k + 1.25\mu_k^2}{(\mu_i + \mu_k)^2}$$

Здесь  $\lambda^{tr}$  – теплопроводность, обусловленная поступательными степенями свободы,  $F_{ij}^{(1)}$ ,  $F_{ij}^{(2)}$  – матрицы размером  $N_p \times N_p$  постоянных коэффициентов порядка единицы [24]. При наличии в газе молекул вклад внутренних степеней свободы в коэффициент теплопроводности  $\lambda$  учитывается введением поправки Эйкена

$$\lambda = \lambda^{tr} + \lambda^{int}, \quad \lambda_i^{int} = \rho \frac{\mu_i}{\bar{\mu}} c_v^{int} D_{ii}$$

$$\lambda^{int} = \sum_{m=1}^{N_p} \lambda_m^{int} \left( 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{N_p} \frac{x_k D_{mk}}{x_m D_{mk}} \right)^{-1}$$

Здесь  $c_v^{int}$  – теплоемкость, обусловленная внутренней энергией молекул,  $\bar{\mu} = \sum_{i=1}^{N_p} x_i \mu_i$  – средняя молярная масса смеси,  $D_{ij}$  – бинарные коэффициенты диффузии, которые вычисляются согласно молекулярно-кинетической теории [25]

$$D_{ij} = \frac{3}{16} \frac{\sqrt{2\pi k_B^3 T^3 / \mu_{ij}}}{P \pi \sigma_{ij}^2 \bar{\Omega}_{ij}^{(1,1)}} \quad (1.13)$$

где  $\mu_{ij} = \mu_i \mu_j / (\mu_i + \mu_j)$  – приведенная молярная масса,  $\sigma_{ij}$  – эффективный диаметр столкновения.

Интегралы столкновений  $\bar{\Omega}_{ij}^{(1,1)}$  и  $\bar{\Omega}_{ij}^{(2,2)}$ , входящие в формулы (1.11)–(1.13), вычислялись по аппроксимирующим формулам из работы [26].

## 1.3. Кинетическая схема

Массовые скорости обратимых химических реакций для компонент газовой смеси, входящие в правые части уравнений сохранения (1.1), вычисляются как

$$\dot{\omega}_i = \mu_i \sum_{r=1}^{N_r} v_i^r \left( k_r^f \prod_{j \in \text{rea}} c_j^{v_j^r} - k_r^r \prod_{j \in \text{prod}} c_j^{v_j^r} \right) \quad (1.14)$$

где  $c_i = \rho u_i / \mu_i$  – мольные концентрации компонент,  $v_i^r$  – стехиометрический коэффициент  $i$ -й компоненты в  $r$ -й реакции,  $N_r$  – общее число реакций,  $k_r^f$  и  $k_r^r$  – константы скорости прямой и

обратной реакций, соответственно, произведения концентраций в (1.14) берутся по исходным реагентам (*rea*) и по продуктам (*prod*) в *r*-й обратимой реакции соответственно. Константа скорости прямой реакции записывается в аррениусовском виде  $k_f = AT^b \exp(-E_a/R^0T)$ , где  $A$  – предэкспоненциальный множитель,  $b$  – показатель степени в температурном факторе,  $E_a$  – энергия активации. Константа скорости обратной реакции находится через константу равновесия, включающую термодимические данные компонент.

Для диссоциированного и однократно ионизованного воздуха использовалась кинетическая схема [27], предложенная для моделирования кинетики плазмы у поверхности космических аппаратов. Другие кинетические схемы, также применимые в данной задаче, можно найти в [28].

Рассматриваются следующие  $N_p = 11$  компонент:  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $O$ ,  $N$ ,  $NO$ ,  $O_2^+$ ,  $N_2^+$ ,  $O^+$ ,  $N^+$ ,  $NO^+$ ,  $e^-$ . Протекающие между ними 32 реакции представлены в табл. 1, где предэкспоненциальный множитель  $A$  приведен для мольных концентраций  $c_i$ , выраженных в моль/см<sup>3</sup>, для энергии активации отношение  $E_a/R^0$  измеряется в градусах Кельвина.

#### 1.4. Граничные условия

Постановка граничных условий соответствует условиям экспериментов по теплообмену в плазмотроне ВГУ-4 ИПМех РАН, включая испытания [14], используемые ниже для валидационных расчетов.

Рассматривается обтекание цилиндрической водоохлаждаемой модели потоком низкотемпературной плазмы, создаваемой в разрядном канале плазмотрона при помощи высокочастотного газового разряда. Из канала плазма поступает в барокамеру через круглое отверстие диаметром  $D_{in}$ . На переднем торце модели, находящемся на расстоянии  $z_m = 60$  мм от входного отверстия, закреплен круглый датчик теплового потока диаметром  $D_s$ , внешняя поверхность которого выполнена из испытываемого материала. В экспериментах [14] передняя кромка модели имела скругление (т.н. евромодель), которое не учитывалось в настоящих численных расчетах.

На входном участке нижней границы расчетной области,  $0 \leq r \leq R_{in} = D_{in}/2$ ,  $z = 0$ , задается поток плазмы с известными радиальными распределениями продольной скорости  $v_{in}(r)$  и температуры  $T_{in}(r)$ , рассчитанными программой Alpha (см. [14]) для заданного массового расхода газа  $Q$ , статического давления  $P_s$  и мощности  $N_{ap}$  ВЧ-генератора (считается, что вкладываемая в плазму мощность составляет 60% от этой величины). Радиальная компонента скорости на входе принималась нулевой,  $u_{in}(r) = 0$ . Химический состав плазмы  $x_{i,in}(r)$  во входном сечении считается равновесным и соответствующим статическому давлению в барокамере  $P_s$  и локальной температуре плазмы  $T_{in}(r)$ .

Граничные условия на выходной границе задаются методом характеристик, обеспечивая свободный выход потока с постоянным давлением на бесконечности [29]. При возникновении обратных токов, направленных внутрь расчетной области, втекающий газ соответствует равновесному воздуху при температуре  $T = 300$  К.

На боковой ( $r = R_b = D_b/2$ ) и нижней (вне входного отверстия,  $R_{in} < r \leq R_b$ ) границах расчетной области, соответствующих твердым границам барокамеры, ставятся граничные условия прилипания  $u = v = 0$  и задается постоянная температура  $T_b$ . Стенки барокамеры считаются химически нейтральными, поэтому для всех компонент смеси на них задаются нулевые диффузионные потоки.

На поверхности водоохлаждаемой модели температура считается заданной и равной  $T_w$ , для скорости выполняются условия прилипания  $u_w = v_w = 0$ . Поверхность считается каталитической, выполненной из двух разных материалов: на плоском переднем торце модели центральную часть занимает круглый датчик теплового потока диаметром  $D_s$ , поверхность которого характеризуется эффективным коэффициентом каталитической рекомбинации  $\gamma_w$ , вне датчика поверхность характеризуется эффективным коэффициентом  $\gamma_{w0} = 1$  (что соответствует медной охлаждаемой поверхности модели, используемой в экспериментах [14]).

Боковая поверхность модели, с целью упрощения вычислений, считается суперкаталитической, химический состав газа на ней постоянен и соответствует недиссоциированному воздуху (тепловые потоки к такой стенке приблизительно на 10% больше, чем потоки к полностью каталитической стенке).

Таблица 1

№	Реакция	$A$	$b$	$E_a/R^0$
Реакции диссоциации				
1	$O_2 + N = 2O + N$	$3.600 \times 10^{18}$	-1	59500
2	$O_2 + NO = 2O + NO$	$3.600 \times 10^{18}$	-1	59500
3	$O_2 + O = 2O + O$	$9.000 \times 10^{19}$	-1	59500
4	$O_2 + O_2 = 2O + O_2$	$3.240 \times 10^{19}$	-1	59500
5	$O_2 + N_2 = 2O + N_2$	$7.200 \times 10^{18}$	-1	59500
6	$N_2 + N = 2N + N$	$4.085 \times 10^{22}$	-1.5	113000
7	$N_2 + NO = 2N + NO$	$1.900 \times 10^{17}$	-0.5	113000
8	$N_2 + O = 2N + O$	$1.900 \times 10^{17}$	-0.5	113000
9	$N_2 + O_2 = 2N + O_2$	$1.900 \times 10^{17}$	-0.5	113000
10	$N_2 + N_2 = 2N + N_2$	$4.700 \times 10^{17}$	-0.5	113000
11	$NO + N = 2N + O$	$7.800 \times 10^{21}$	-1.5	75500
12	$NO + NO = N + O + NO$	$7.800 \times 10^{21}$	-1.5	75500
13	$NO + O = N + 2O$	$7.800 \times 10^{21}$	-1.5	75500
14	$NO + O_2 = N + O + O_2$	$3.900 \times 10^{20}$	-1.5	75500
15	$NO + N_2 = N + O + N_2$	$3.900 \times 10^{20}$	-1.5	75500
Реакции Зельдовича				
16	$NO + O = O_2 + N$	$3.200 \times 10^9$	1	19700
17	$N_2 + O = NO + N$	$7.000 \times 10^{13}$	0.0	38000
Ионные реакции				
18	$O + O_2^+ = O_2 + O^+$	$2.920 \times 10^{18}$	-1.1	28000
19	$N_2 + N^+ = N_2^+ + N$	$2.020 \times 10^{11}$	0.81	13000
20	$O + NO^+ = NO + O^+$	$3.630 \times 10^{15}$	-0.6	50800
21	$N_2 + O^+ = N_2^+ + O$	$3.400 \times 10^{19}$	-2.0	23000
22	$O_2 + NO^+ = NO + O_2^+$	$1.800 \times 10^{15}$	0.17	33000
23	$N + NO^+ = NO + N^+$	$1.000 \times 10^{19}$	-0.93	61000
Реакции ассоциативной ионизации				
24	$N + O = NO^+ + e^-$	$1.400 \times 10^6$	1.5	31900
25	$O + O = O_2^+ + e^-$	$1.600 \times 10^{17}$	-0.98	80800
26	$N + N = N^+ + e^-$	$1.400 \times 10^{13}$	0.0	67800
Реакции ионизации электронным ударом				
27	$O + e^- = O^+ + e^- + e^-$	$3.600 \times 10^{31}$	-2.91	158000
28	$N + e^- = N^+ + e^- + e^-$	$1.100 \times 10^{32}$	-3.14	169000
Реакции ионизации ударом тяжелых частиц				
29	$O_2 + N_2 = NO + NO^+ + e^-$	$1.380 \times 10^{20}$	-1.84	141000

Таблица 1. Окончание

№	Реакция	$A$	$b$	$E_a/R^0$
30	$\text{NO} + \text{N}_2 = \text{N}_2 + \text{NO}^+ + e^-$	$2.200 \times 10^{15}$	-0.35	108000
Ионно-молекулярные реакции				
31	$\text{O} + \text{NO}^+ = \text{O}_2 + \text{N}^+$	$1.340 \times 10^{13}$	0.31	77270
32	$\text{O}_2 + \text{NO} = \text{NO}^+ + \text{O}_2 + e^-$	$8.800 \times 10^{16}$	-0.35	108000

Таким образом, эффективный коэффициент каталитической рекомбинации  $\gamma_w$  терпит разрыв на торце модели при  $r = R_s = D_s/2$ . Отметим, что в экспериментах и расчетах [14] определялся эффективный коэффициент каталитической рекомбинации  $\gamma_w$ , который принимался одинаковым для атомов кислорода и азота. Такой же подход использован и в настоящих расчетах.

Постановка граничных условий на каталитических поверхностях осуществляется следующим образом. Диффузионная скорость атомов  $i$ -го типа (кислород, азот), участвующих в каталитических реакциях  $\text{O} + \text{O} \rightarrow \text{O}_2$  и  $\text{N} + \text{N} \rightarrow \text{N}_2$  на стенке, определяются как

$$V_i^w = \frac{2\gamma_w}{2 - \gamma_w} \sqrt{\frac{R^0 T_w}{2\pi\mu_i}} \quad (1.15)$$

Диффузионные скорости молекулярных компонент, направленные от стенки, находятся из равенства нулю суммарного мольного потока каждого элемента:  $x_{\text{O}_2}^w V_{\text{O}_2}^w = -\frac{1}{2} x_{\text{O}}^w V_{\text{O}}^w$ ,  $x_{\text{N}_2}^w V_{\text{N}_2}^w = -\frac{1}{2} x_{\text{N}}^w V_{\text{N}}^w$  (знак плюс означает направление диффузионного потока компоненты к стенке, минус – от стенки). Для остальных компонент, не участвующих в гетерогенных реакциях, диффузионная скорость на стенке равна нулю.

Химический состав газа на стенке можно найти, подставляя выражения для диффузионных скоростей  $V_i^w$  в уравнения Стефана–Максвелла, при этом считается, что газ на стенке не ионизованный (отсутствуют ионы и электроны). Тогда задача сводится к решению системы уравнений (1.6) в следующем виде

$$-\frac{\partial x_i}{\partial \xi}\Big|_w = \sum_{j=1}^{N_p} \frac{x_i^w x_j^w (V_j^w - V_i^w)}{D_{ij}} \quad (1.16)$$

где  $\xi$  – координата, отсчитываемая вдоль нормали к поверхности, направленной от границы в газовый поток. Производная по нормали от мольной концентрации, стоящая в левой части (1.16), находится путем аппроксимации по схеме заданного порядка точности (например, схема первого порядка точности имеет вид  $\partial x_i / \partial \xi|_w \approx (x_i^f - x_i^w) / \delta$ , где  $x_i^f$  – мольная доля  $i$ -й компоненты в потоке на расстоянии  $\delta$  от стенки). В отличие от решения системы Стефана–Максвелла (1.6) здесь диффузионные скорости считаются известными из (1.15), а мольные доли на поверхности находятся как решение системы нелинейных уравнений (1.16), квадратичной по искомым переменным.

После вычисления  $x_i^w$  можно определить массовые доли  $y_i^w$  на стенке, из (1.4) найти плотность  $\rho_w$ , затем вычислить теплопроводность  $\lambda_w$  и найти по (1.10) полный тепловой поток на стенке  $q_w$ , включая его кондуктивную  $q_w^C$  и рекомбинационную  $q_w^R$  составляющие. В скалярной записи тепловой поток имеет вид

$$q_w = q_w^C + q_w^R = \lambda_w \frac{\partial T}{\partial \xi}\Big|_w + \rho_w \sum_{i=1}^{N_p} y_i^w h_i(T_w) V_i^w \quad (1.17)$$

Здесь положительный знак теплового потока означает передачу тепла от газа к поверхности (напомним, что координата  $\xi$  отсчитывается вдоль нормали от поверхности тела в область газового потока).

## 2. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Аппроксимация системы уравнений (1.1)–(1.3) осуществляется на декартовой сетке с переменным шагом по каждому направлению, задаваемым по закону геометрической прогрессии со знаменателем  $\sim 0.9$ . Сетка строится так, что границы цилиндрического образца, датчика теплового потока и входного отверстия точно совпадают с одной из сеточных линий, что позволяет поставить граничные условия, не рассматривая пересечения границ разного типа.

Для конвективных потоков использована схема HR-SLAU [30, 31], принадлежащая семейству AUSM+ [32, 33], в котором используется масштабирование стабилизирующих членов в потоках импульса по локальному числу Маха. Это позволяет избежать внесения чрезмерной схемной вязкости при переходе от сверхзвуковых течений к существенно дозвуковым, что делает схему пригодной для расчета течений с произвольными числами Маха. Достоинство схемы HR-SLAU2 [30, 31] состоит в отсутствии необходимости задавать некоторое характерное число Маха, выбор которого может влиять на результаты и быть неочевидным для многих течений.

Аппроксимация тензора вязких напряжений (1.5) осуществлялась по стандартной центрально-разностной схеме второго порядка точности, градиенты температуры и концентраций на границах ячеек аппроксимировались по двухточечной схеме. В пристеночных ячейках градиенты температуры и скорости на стенке аппроксимировались без использования фиктивных ячеек, как разность граничного значения и значения в центре ячейки, деленная на половину размера ячейки.

Для получения стационарного решения уравнений (1.1)–(1.3) использовался метод установления, состоящий в интегрировании по псевдовремени до достижения сходимости с заданной точностью. Для повышения эффективности расчета реализована неявная схема интегрирования, состоящая в линеаризации уравнений и решении возникающей системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса–Зейделя с приближенной факторизацией матрицы коэффициентов на нижнюю и верхнюю треугольные матрицы для ее эффективного обращения (LU-SGS). Для обеспечения высокой эффективности метода вычисление якобианов потоков производится приближенно, путем замены их диагональными матрицами, элементы которых представляют собой сумму максимальных собственных числа “невязких” и “вязких” потоков [34]. В результате удается полностью исключить матричные операции, обеспечив абсолютную устойчивость линейного этапа решения уравнений и возможность проведения расчетов с числом Куранта порядка  $10^2$ – $10^4$  [30, 35].

Важную роль для обеспечения устойчивости схемы играет неявная аппроксимация источников членов (1.14) в уравнениях неразрывности компонент (1.1). Как показано в [36], для устойчивой аппроксимации скоростей реакции  $\dot{\omega}_i$  достаточно использовать лишь диагональные элементы якобиана, представив источниковый член в линеаризованном виде как  $\dot{\omega}_i^{(n+1)} = \dot{\omega}_i^{(n)} + (\partial \dot{\omega}_i / \partial q_i)^{(n)} \Delta q_i$ . Здесь верхний индекс означает номер итерации,  $q_i = \rho y_i$ ,  $\Delta q_i = q_i^{(n+1)} - q_i^{(n)}$ , причем частные производные скорости  $i$ -й реакции по  $q_i$  практически всегда неотрицательны (за исключением автокаталитических реакций, отсутствующих в используемой здесь кинетической схеме). Таким образом, неявная аппроксимация скоростей реакций сводится к добавлению неотрицательной величины  $-(\partial \dot{\omega}_i / \partial q_i)^{(n)}$  к диагональному элементу матрицы коэффициентов при  $\Delta q_i$ , что обеспечивает устойчивость решения даже с большим шагом по времени.

Отметим, что описанная процедура численного решения стационарных уравнений может быть также использована в качестве метода получения решения на одном шаге по физическому времени при решении истинно нестационарных задач методом двойных шагов по времени [29]. В этом случае более точное решение может быть получено методом расщепления по времени с выделением в отдельный подшаг решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений химической кинетики, для которых применяется метод интегрирования жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта возможность реализована в разработанной программе с применением известного метода VODE [37].

Вычислительная модель реализована в программе IPG2D на языке программирования FORTRAN-95. Верификация кода осуществлялась решением ряда тестовых задач газовой динамики и вязких течений (распад газодинамического разрыва, сверхзвуковое обтекание прямоугольного выступа в канале), подтвердивших возможность проведения расчетов в широком диапазоне чисел Маха единым вычислительным модулем. Результаты валидации модуля расчета нестационарной химической кинетики представлены в работе [38].

Таблица 2

№	$P_{s_0}$ , ГПа	$N_{ap}$ , кВт	Материал	$\gamma_w$	$q_w^{exp}$ , Вт/см <sup>2</sup>	$q_w^{max}$ , Вт/см <sup>2</sup>	$q_w^{av}$ , Вт/см <sup>2</sup>	$\chi$ , %	$\epsilon^{max}$ , %	$\epsilon^{av}$ , %	
1	50	45	Ag	1.0	158.96	153.72	152.34	0.9	-3.3	-4.2	
2			Cu	0.52	158.54	153.20	151.58	1.1	-3.4	-4.4	
3			Nb	$8.0 \times 10^{-3}$	109.95	106.85	103.14	3.6	-2.8	-6.2	
4			Au	$7.6 \times 10^{-3}$	108.74	105.82	102.14	3.6	-2.7	-6.1	
5		Ta	$4.5 \times 10^{-3}$	94.76	96.82	93.22	3.9	2.2	-1.6		
6		Be	$4.4 \times 10^{-3}$	94.46	96.49	92.89	3.9	2.1	-1.7		
7		Mo	$2.2 \times 10^{-3}$	80.72	88.37	84.97	4.0	9.5	5.3		
8		64	Ag	1.0	221.00	203.84	203.22	0.3	-7.8	-8.0	
9			Cu	0.47	220.05	202.76	201.79	0.5	-7.9	-8.3	
10			Nb	$1.0 \times 10^{-2}$	153.94	142.27	137.81	3.2	-7.6	-10.5	
11			Au	$9.4 \times 10^{-3}$	149.75	140.46	136.02	3.3	-6.2	-9.2	
12			Ta	$6.1 \times 10^{-3}$	131.83	128.91	124.75	3.3	-2.2	-5.4	
13			Be	$5.0 \times 10^{-3}$	125.40	124.36	120.34	3.3	-0.8	-4.0	
14			Mo	$2.6 \times 10^{-3}$	104.68	112.85	109.27	3.3	7.8	4.4	
15			45	Ag	0.11	145.74	154.13	150.98	2.1	5.8	3.6
16		Cu		1.0	147.37	156.60	154.16	1.6	6.3	4.6	
17		Nb		$4.1 \times 10^{-3}$	121.40	117.36	112.28	4.5	-3.3	-7.5	
18		Au		$3.0 \times 10^{-3}$	118.63	113.32	108.28	4.6	-4.5	-8.7	
19		Ta		0	106.65	98.42	93.67	5.1	-7.7	-12.2	
20		Be		0	105.45	98.39	93.67	5.0	-6.7	-11.2	
21		Mo		0	99.70	98.38	93.67	5.0	-1.3	-6.0	
22		100		64	Ag	0.17	217.15	209.78	206.47	1.6	-3.4
23			Cu		1.0	218.95	212.16	209.54	1.3	-3.1	-4.3
24			Nb		$6.8 \times 10^{-3}$	179.01	162.42	155.715	4.3	-9.3	-13.0
25			Au		$4.8 \times 10^{-3}$	171.35	154.63	147.86	4.6	-9.8	-13.7
26			Ta		$1.9 \times 10^{-4}$	143.19	126.18	120.19	5.0	-11.9	-16.1
27			Be		$5.1 \times 10^{-5}$	142.06	124.96	119.03	5.0	-12.0	-16.2
28			Mo		0	133.61	124.49	118.58	5.0	-6.8	-11.2

### 3. ГЕОМЕТРИЯ И ПАРАМЕТРЫ РАСЧЕТОВ

В работе [14] на плазмотроне ВГУ-4 ИПМех РАН в потоках диссоциированного воздуха получены экспериментальные данные по тепловым потокам на водоохлаждаемых датчиках с тепловоспринимающими поверхностями из семи металлов (меди, серебра, тантала, бериллия, ниобия, золота, молибдена). В этой же работе на основе известной методики ИПМех РАН [7, 8] были определены эффективные коэффициенты каталитической рекомбинации  $\gamma_w$ .

В настоящей работе проведено численное моделирование осесимметричного обтекания цилиндрической модели с плоским носком неравновесной воздушной плазмой для четырех режимов работы плазмотрона ВГУ-4, представленных в табл. 2. При этом расчеты проведены для перчисленных выше семи металлических поверхностей датчиков, используя полученные в [14]

значения  $\gamma_w$ . В табл. 2 также приведены экспериментальные значения теплового потока  $q_w^{\text{exp}}$  [14], остальные колонки табл. 2 содержат рассчитанные значения тепловых потоков, которые анализируются ниже.

Расчеты проведены для геометрических характеристик, соответствующих экспериментам [14]. Диаметр барокамеры составлял  $D_b = 800$  мм, в продольном направлении расчетная область занимала длину  $H_b = 200$  мм. Воздушная плазма вытекала из разрядного канала диаметром  $D_{in} = 80$  мм, цилиндрическая модель имела диаметр  $D_m = 50$  мм (в экспериментах использовалась евромодель, имеющая радиус скругления кромки 11.5 мм, это скругление не учитывалось в расчетах). Расстояние от источника плазмы до модели составляло  $H_m = 60$  мм, датчик теплового потока имел диаметр  $D_s = 13.8$  мм.

Параметры плазмы во входном сечении рассчитывались по равновесной модели на основе программы Alpha [14], при этом массовый расход воздуха соответствовал экспериментальному значению  $Q = 2.4$  г/с. На рис. 1 показаны радиальные распределения температуры, скорости и мольной доли отдельных компонент на выходе из разрядного канала при четырех режимах работы плазмотрона, представленных в табл. 2, эти распределения использовались в качестве граничных условий на входной границе при расчете программой IPG2D.

Температура поверхности водоохлаждаемой модели и датчика теплового потока составляла  $T_w = 300$  К, температура стенок барокамеры считалась равной  $T_b = 300$  К. Эффективный коэффициент каталитической рекомбинации  $\gamma_w$  на тепловоспринимающей поверхности датчика в каждом расчете задавался в соответствии с табл. 2, на остальной поверхности медной водоохлаждаемой модели он был постоянным и равным  $\gamma_{w0} = 1$ .

Расчеты проводились в прямоугольной области размером  $400 \times 200$  мм на неравномерных расчетных сетках, содержащих  $136 \times 156$  ячеек. Сетка сгущалась в радиальном направлении к границе датчика теплового потока (минимальный радиальный размер ячейки у границы  $r = R_s$  составлял  $10^{-4}$  м), к границе входного отверстия  $r = R_{in}$  ( $1.6 \times 10^{-4}$  м) и к боковой поверхности образца  $r = R_m$  ( $2.5 \times 10^{-4}$  м). В осевом направлении сетка сгущалась к переднему торцу образца, минимальный размер ячейки у поверхности составлял  $5 \times 10^{-5}$  м. Типичное число Куранта в расчетах составляло 2000.

## 4. РЕЗУЛЬТАТЫ

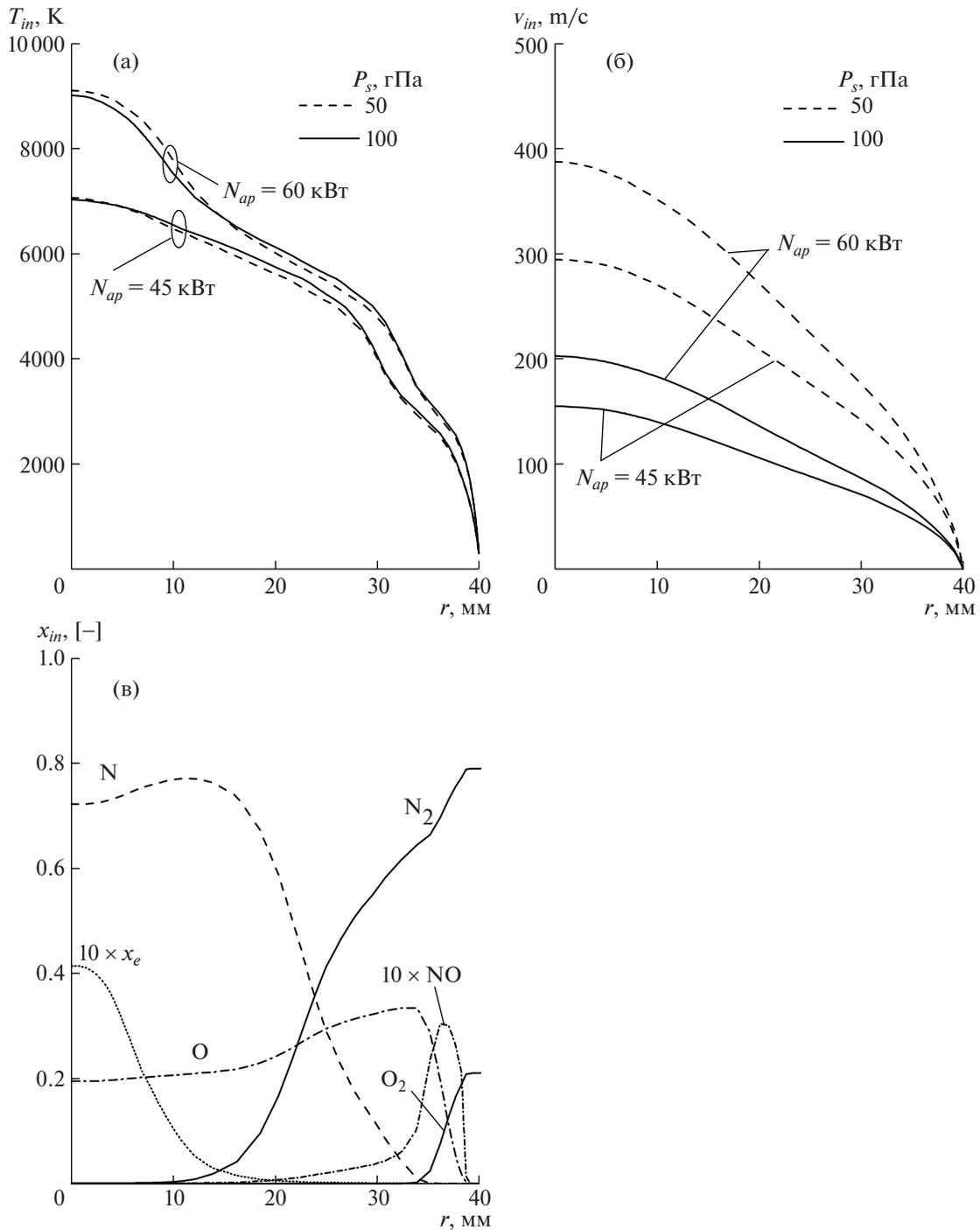
### 4.1. Обтекание образца

Рассмотрим сначала общую картину обтекания образца, используя в качестве примера вариант 24 из табл. 2, соответствующий датчику теплового потока, выполненному из ниобия, давление в барокамере 100 гПа, мощность ВЧ-генератора  $N_{ap} = 64$  кВт.

На рис. 2а—г приведены поля температуры  $T$  и линии тока, мольные доли атомарного кислорода  $x_O$ , атомарного азота  $x_N$  и окиси азота  $x_{NO}$ , демонстрирующие натекание струи плазмы на модель, растекание вдоль лобовой поверхности, дальнейшее течение вдоль цилиндрической образующей модели. Хорошо видна более быстрая рекомбинация атомов азота по сравнению с атомами кислорода. Окись азота образуется в основном на внешней границе струи плазмы, а также в погранслое вблизи холодной поверхности тела.

Наиболее значительные проявления неравновесных физико-химических процессов в плазме происходят вблизи поверхности модели и датчика теплового потока, как вследствие резкого охлаждения газа, так и вследствие влияния гетерогенных каталитических реакций. Эти процессы протекают в тонком погранслое на поверхности модели, причем наибольший интерес представляют распределения концентраций и температуры вдоль переднего торца.

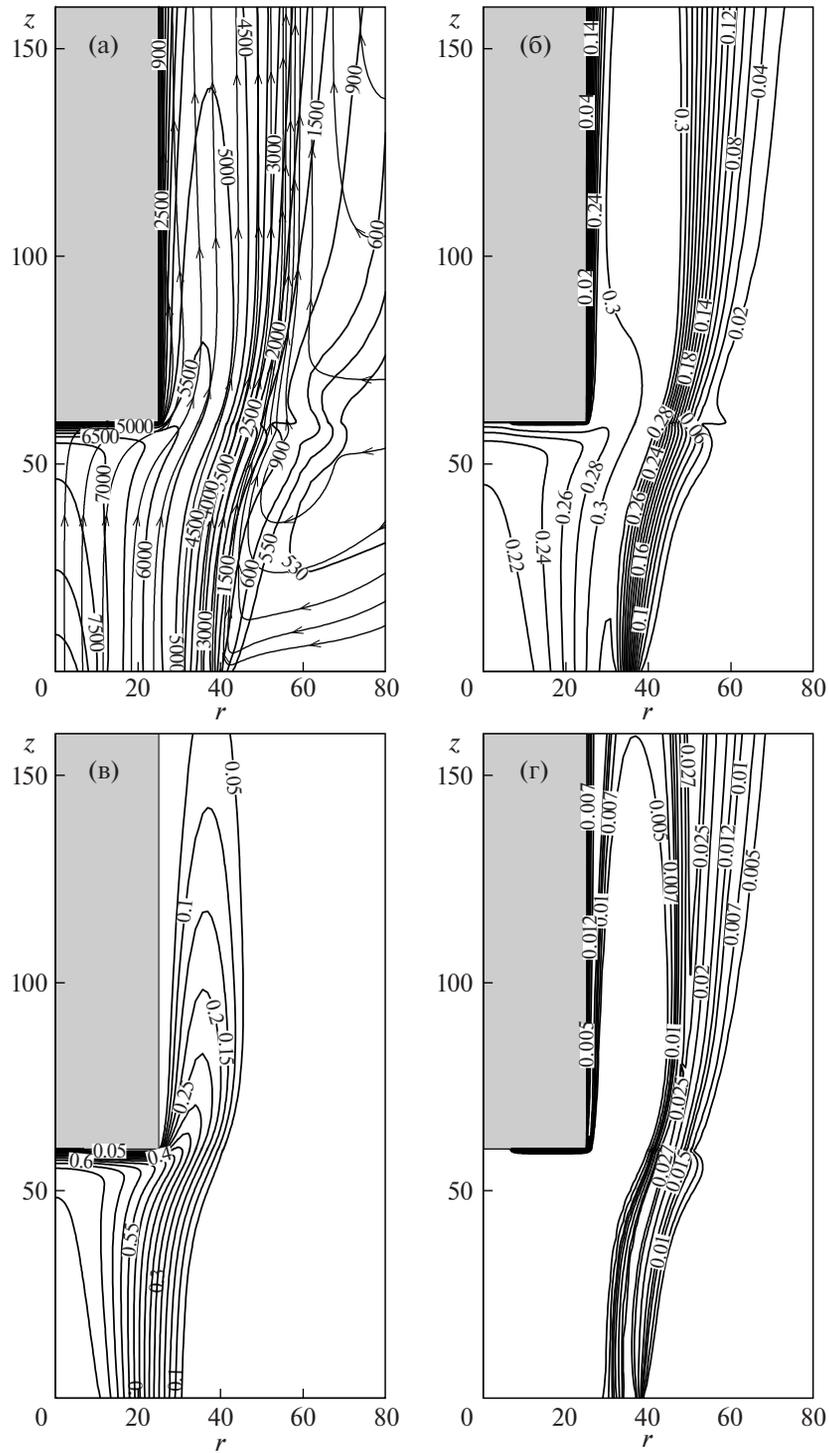
На рис. 3а—г укрупненно показаны распределения температуры и мольных долей  $O$ ,  $O_2$  и  $NO$  вблизи передней поверхности модели, при этом для ясности масштаб по осевой координате выбран значительно большим, чем по радиальной. Видна сильная неравномерность концентраций, обусловленная большой разницей в каталитических свойствах материала датчика (в пределах до радиуса  $R_s = 6.9$  мм) и медной поверхности модели.



**Рис. 1.** Радиальные распределения во входном сечении источника, расчет программой Alpha [14]: (а) – температура; (б) – входная скорость; (в) – мольные доли компонент для  $P_s = 50$  гПа,  $N_{ap} = 64$  кВт.

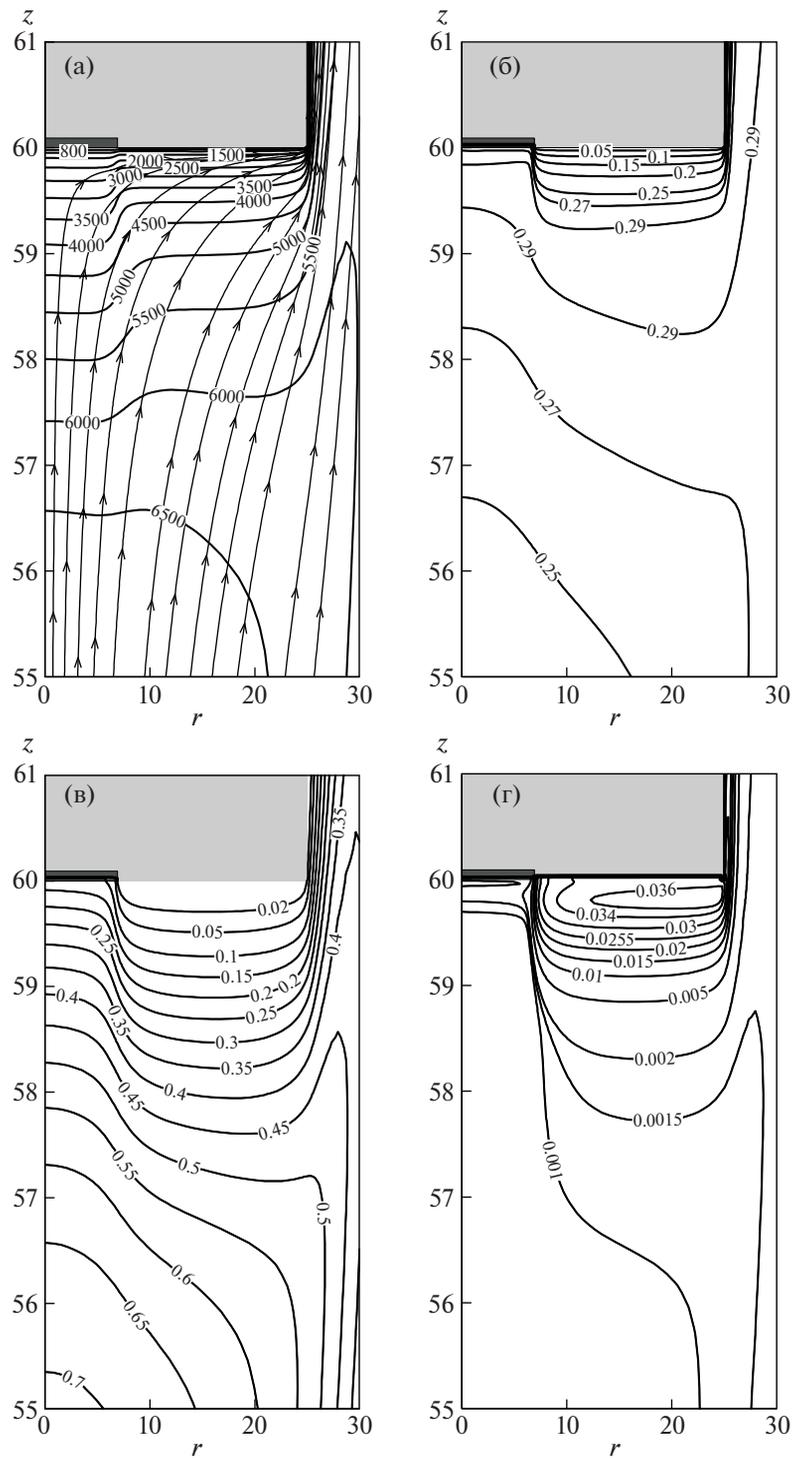
#### 4.2. Тепловой поток на поверхности образца

Рассмотрим теперь рассчитанные тепловые потоки на поверхности медной модели и датчиков, использованных в экспериментах. На рис. 4а,б построены радиальные распределения теплового потока  $q_w(r)$  для двух режимов работы плазмотрона, соответствующих мощности  $N_{ap} = 64$  кВт и давлениям в барокамере  $P_s = 50$  гПа (варианты 8–14 из табл. 2) и 100 гПа (вари-



**Рис. 2.** Обтекание образца потоком плазмы: (а) – температура и линии тока; (б) – мольная доля O; (в) мольная доля N; (г) – мольная доля NO.

анты 22–28). Область радиусом  $R_s$  соответствует тепловоспринимающей поверхности датчика теплового потока из соответствующего металла, граница с поверхностью медной модели обозначена вертикальной штриховой линией. На обоих графиках выделяются гладкие кривые (Ag для 50 гПа и Cu для 100 гПа), соответствующие постоянному значению  $\gamma_w = 1$  вдоль всей поверхно-



**Рис. 3.** Характеристики плазмы вблизи переднего торца модели (укрупненный масштаб по оси  $z$ ): (а) температура и линии тока; (б) мольная доля O; (в) мольная доля N; (г) мольная доля NO. На поверхности модели обозначено положение датчика теплового потока.

сти, они соответствуют обтекаемому телу с однородной высококatalитической поверхностью (референсный случай).

Распределения тепловых потоков, представленные на рис. 4, показывают, что для низкокatalитических образцов тепловой поток  $q_w$  терпит разрыв в точке  $R_s$  (на границе раздела материалов

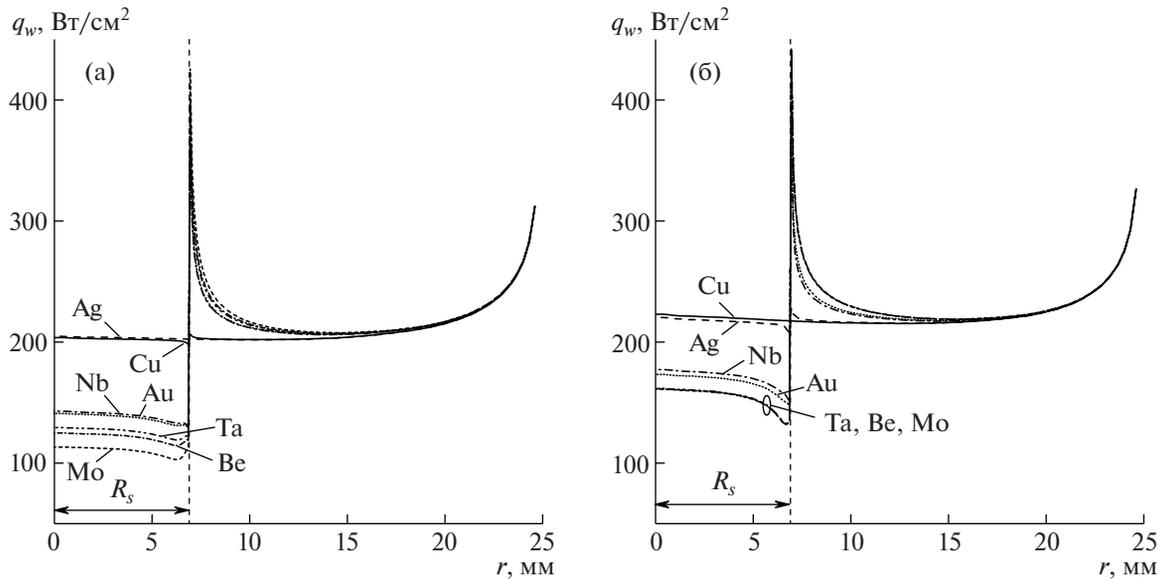


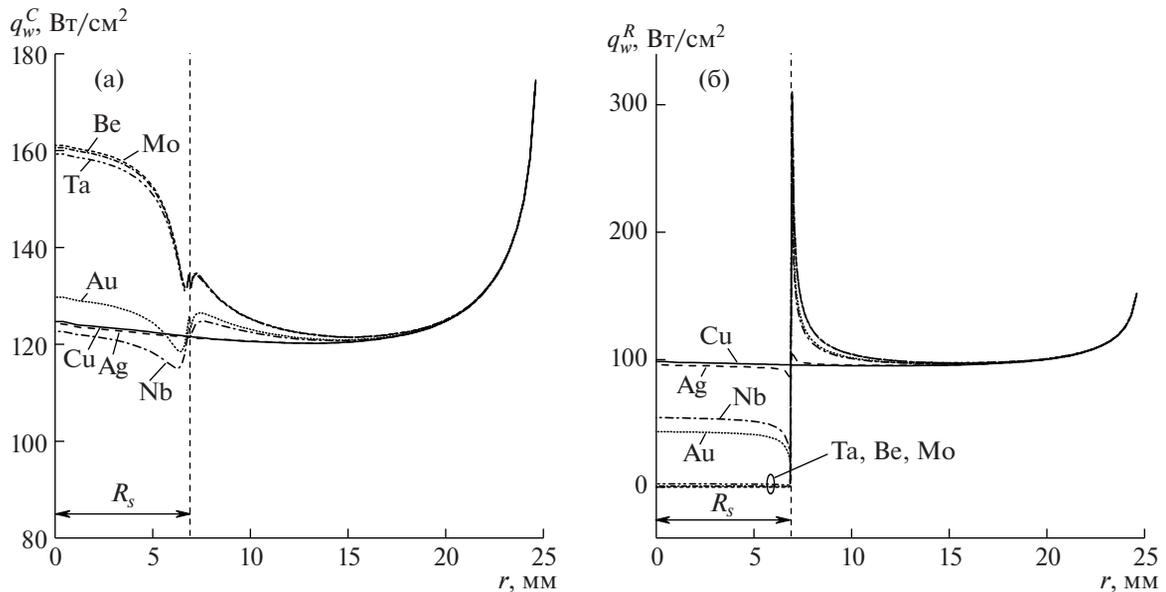
Рис. 4. Распределения теплового потока по переднему торцу модели при  $N_{ap} = 64$  кВт: (а) – давление 50 гПа; (б) – 100 гПа.

поверхности), при этом со стороны испытываемого материала тепловой поток уменьшается к границе, а при переходе к высокотемпературной поверхности – резко возрастает, при этом значительно превышая референсный поток для однородной высокотемпературной поверхности. Данный эффект, известный как сверхравновесный нагрев [16–18], требует внимания при создании теплозащитных покрытий, поскольку его результатом является интенсивный локальный разогрев высокотемпературных участков поверхности на границе с низкотемпературными. Причиной резкого локального увеличения теплового потока является вынос атомарного кислорода и азота из пограничного слоя, примыкающего к низкотемпературной поверхности, как за счет течения газа, так и за счет продольных диффузионных потоков.

Более детальный анализ сверхравновесного нагрева у границы раздела поверхностей приведен на рис. 5, где для режима  $N_{ap} = 64$  кВт,  $P_s = 100$  гПа (варианты 22–28) построены радиальные распределения кондуктивной (а) и рекомбинационной (б) составляющих теплового потока, см. (1.17). Можно выделить следующие особенности поведения тепловых потоков.

Для случая равномерной высокотемпературной поверхности  $\gamma_w = 1$  (Cu) кондуктивная и рекомбинационная составляющие дают сравнимый вклад в суммарный тепловой поток (порядка 120 и 100 Вт/см<sup>2</sup> соответственно). Понижение каталитичности образца до значения  $\gamma_w = 0.17$  (Ag) практически не сказывается на  $q_w^C$ : в передней критической точке кондуктивный тепловой поток снижается со 124.7 до 124.2 Вт/см<sup>2</sup>. Рекомбинационный тепловой поток  $q_w^R$  в передней критической точке снижается с 98.4 до 96.0 Вт/см<sup>2</sup>, при этом вблизи границы раздела он падает до 84.9 Вт/см<sup>2</sup> со стороны образца, вырастая до 107.3 Вт/см<sup>2</sup> со стороны медной модели (референсный поток  $q_w^R$  на границе раздела поверхностей равен 95.8 Вт/см<sup>2</sup>).

При более сильном уменьшении каталитичности поверхности датчика обе компоненты теплового потока меняются более существенно. Так, в случае ниобиевого покрытия ( $\gamma_w = 6.8 \times 10^{-3}$ )  $q_w^C$  в передней критической точке уменьшается до 122.7 Вт/см<sup>2</sup>, затем он падает по направлению к границе раздела до 115.0 Вт/см<sup>2</sup>, возрастая по другую сторону границы до 124.8 Вт/см<sup>2</sup>. Для золота ( $\gamma_w = 4.8 \times 10^{-3}$ ) наблюдается рост кондуктивного теплового потока в передней критической точке по сравнению с референсным случаем до 129.8 Вт/см<sup>2</sup>, минимальное и максимальное значения  $q_w^C$  вблизи границы раздела составляют 118.5 и 126.5 Вт/см<sup>2</sup> соответственно. Более существенное возрастание  $q_w^C$  отмечается для трех покрытий с наименьшей каталитичностью (тантал,



**Рис. 5.** Кондуктивная (а) и рекомбинационная (б) составляющие теплового потока на переднем торце модели при различной каталитичности образца,  $N_{ap} = 64$  кВт,  $P_s = 100$  гПа.

бериллий, молибден): кондуктивные потоки для этих покрытий практически совпадают, достигая в передней критической точке  $159.3\text{--}161.0$  Вт/см<sup>2</sup>, вблизи границы раздела имеется слабая немонотонность, однако по всей поверхности кондуктивный тепловой поток превышает поток для референсного случая.

Значительно большее влияние каталитичность поверхности датчика оказывает на рекомбинационный тепловой поток  $q_w^R$ , см. рис. 5б. Этот поток, ожидаемо, уменьшается на поверхности материала с уменьшением  $\gamma_w$ : так, в передней критической точке рекомбинационная составляющая теплового потока составляет  $54.5$  (Nb),  $43.5$  (Au),  $23.9$  (Ta),  $6.5$  (Be) и  $0$  (Mo) Вт/см<sup>2</sup>. Вблизи границы раздела поверхностей тепловой поток  $q_w^R$  достигает минимума со стороны низкокatalитичного покрытия, составляя  $27.3$  (Nb),  $21.4$  (Au),  $11.1$  (Ta),  $3.9$  (Be) и  $0$  (Mo) Вт/см<sup>2</sup>. Однако по другую сторону границы раздела наблюдается обратная зависимость: рекомбинационный тепловой поток  $q_w^R$  резко возрастает за счет выделения тепла при рекомбинации атомов, поступающих со стороны низкокatalитичного участка поверхности, достигая в максимуме  $233.3$  (Nb),  $250.4$  (Au),  $307.6$  (Ta),  $310.0$  (Be) и  $310.7$  (Mo) Вт/см<sup>2</sup>.

Таким образом, расчеты демонстрируют существенные различия в поведении тепловых потоков к поверхностям использованных датчиков из различных металлов. Следует отметить, что высокие значения тепловых потоков вследствие сверхравновесного нагрева реализуются локализованно (в расчетах острый максимум наблюдается в пределах одной сеточной ячейки с радиальным размером  $0.1$  мм), далее тепловой поток спадает на характерных размерах порядка  $1\text{--}2$  мм (см. рис. 4).

При определении каталитической активности материалов по результатам испытаний в ВЧ-плазмотронах важную роль играет вопрос о равномерности распределения теплового потока по поверхности датчика. Экспериментальная процедура, основанная на измерении теплоотвода от водоохлаждаемого датчика по нагреву протекающей через него воды, по сути, является методом определения среднего теплового потока  $q_w^{av}$ , связанного с локальным потоком  $q_w$  соотношением

$$q_w^{av} = \frac{1}{\pi R_s^2} 2\pi \int_0^{R_s} q_w(r) r dr \quad (4.1)$$

С другой стороны, применяемый в [14] метод нахождения эффективного коэффициента каталитической рекомбинации  $\gamma_w$  путем решения одномерных уравнений для неравновесного по-

граничного слоя конечной толщины вдоль оси симметрии (программа Gamma) обеспечивает соответствие экспериментальному значению (4.1) теплового потока в передней критической точке при заданных параметрах на внешней границе пограничного слоя. Точность такого подхода можно оценить по результатам проведенных в настоящей работе двумерных расчетов.

Неравномерность потока по площади датчика можно охарактеризовать количественно, сравнивая средний поток  $q_w^{av}$  с максимальным тепловым потоком  $q_w^{max}$ , достигаемым в передней критической точке  $r = 0$ . Количественной мерой степени неравномерности теплового потока служит величина  $\chi = (q_w^{max} - q_w^{av}) / q_w^{av}$  (поскольку тепловой поток уменьшается к границе образца, эта величина положительна).

Рассчитанные значения максимального и среднего теплового потока приведены для каждого варианта в табл. 2, здесь же рассчитана степень неравномерности потока  $\chi$  (в процентах). Видно, неравномерность теплового потока возрастает с уменьшением каталитической активности поверхности, т.е. с ростом скачка в каталитических свойствах между испытываемым образцом материала и медной моделью. Однако даже в предельном случае некаталитического материала степень неравномерности не превышает 5%. Это свидетельствует в пользу правомерности использования интегрального теплового потока, измеряемого в экспериментах, для характеристики локального аэродинамического нагрева тела. Приведенные в табл. 2 оценки степени неравномерности теплового потока могут быть учтены в дальнейшем для более точной интерпретации экспериментальных результатов и определения эффективного коэффициента каталитической рекомбинации  $\gamma_w$ .

Отметим, что приведенные выше результаты по неравномерности теплового потока вблизи скачка каталитической активности материала получены для случая постоянной температуры поверхности (водоохлаждаемая модель). Для неохлаждаемых моделей сверхравновесный нагрев будет приводить также к возникновению локальных областей с повышенной температурой. Для адекватного расчета температуры поверхности при этом требуется учет не только радиационных теплотерь, но и теплопередачи в твердом теле, т.е. решение сопряженной задачи. Примером решения сопряженных задач тепломассобмена при аэродинамическом нагреве тел в высокоскоростных потоках служат работы [39, 40].

#### 4.3. Сравнение с экспериментом

Для валидации разработанной вычислительной модели сравним полученные в расчетах для разных материалов и режимов работы плазматрона тепловые потоки с экспериментальными данными (табл. 2). Следует отметить, что использованные в расчетах эффективные коэффициенты каталитической рекомбинации  $\gamma_w$  взяты из [14], где они находились при помощи одномерной вычислительной программы Gamma, осуществляющей расчет течения неравновесного диссоциированного воздуха вдоль оси симметрии от внешней границы пограничного слоя до передней критической точки. В настоящей работе аналогом соответствующего значения теплового потока является максимальный тепловой поток  $q_w^{max}$ , который и используется ниже для сравнения с экспериментом. Количественной мерой согласования рассчитанных и измеренных значений является относительное отклонение расчета от эксперимента  $\epsilon^{max} = (q_w^{max} - q_w^{exp}) / q_w^{exp}$ . В то же время более адекватным по физическому смыслу является сопоставление с  $q_w^{exp}$  рассчитанного среднего теплового потока  $q_w^{av}$ , соответствующее относительное отклонение имеет вид  $\epsilon^{av} = (q_w^{av} - q_w^{exp}) / q_w^{exp}$ .

В табл. 2 для каждого варианта приведены значения относительных отклонений  $\epsilon^{max}$  и  $\epsilon^{av}$ . Среднеквадратичное значение для этих  $\epsilon^{max}$  составляет  $\langle \epsilon^{max} \rangle = (N^{-1} \sum_{i=1}^N (\epsilon_i^{max})^2)^{1/2} = 6.5\%$  (здесь  $N = 28$  — число вариантов в табл. 2). Аналогично вычисленное среднеквадратичное значение для  $\epsilon^{av}$  составляет  $\langle \epsilon^{av} \rangle = 8.6\%$ .

Для более наглядного представления полученных результатов на рис. 6 показано сопоставление данных на графике, где каждая точка отвечает одному из вариантов табл. 2. По оси абсцисс отложено экспериментальное значение теплового потока, по оси ординат — рассчитанное значение  $q_w^{max}$ . При таком представлении идеальное совпадение с экспериментом достигается на диа-

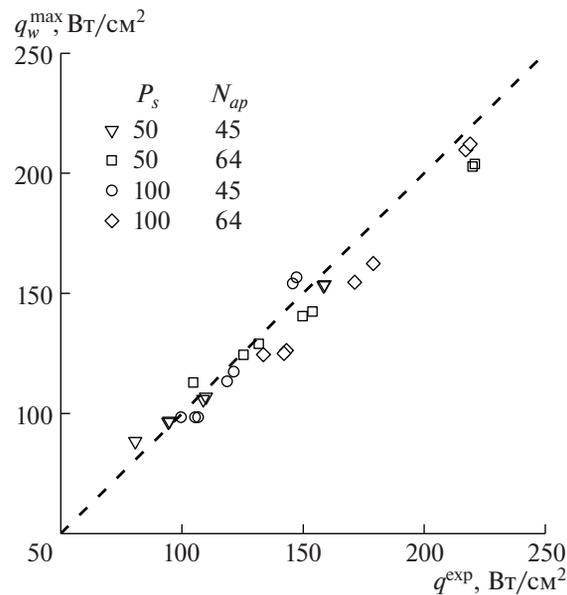


Рис. 6. Сравнение рассчитанных тепловых потоков с экспериментальными данными [14].

гонали (штриховая прямая), тогда как разброс точек характеризует их случайное и систематическое отклонение.

Из рис. 6 следует, что в целом достигнуто хорошее согласие результатов расчетов с данными экспериментальных измерений. Точки сконцентрированы вдоль штриховой прямой без видимого систематического отклонения. Для более высоких тепловых потоков (свыше 150 Вт/см<sup>2</sup>) точки идут ниже диагонали, что означает превышение измеренных тепловых потоков над рассчитанными. Эти отличия могут быть обусловлены влиянием обсуждавшейся выше неравномерности распределения теплового потока по поверхности датчика и вкладом излучения плазмы в теплообмен [21–23]. Кроме того, они могут свидетельствовать о необходимости корректировки рассчитанных значений эффективного коэффициента каталитической рекомбинации для соответствующих режимов работы ВЧ-плазмотрона.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные результаты валидационных расчетов теплообмена дозвуковых потоков воздушной плазмы с металлами, имеющими различную каталитическую активность по отношению к поверхностной рекомбинации атомов кислорода и азота, подтверждают, что разработанный компьютерный код IPG2D обеспечивает высокую точность предсказания тепловых потоков на каталитических поверхностях, обтекаемых потоком неравновесной плазмы. Среднеквадратичное отклонение рассчитанных тепловых потоков от экспериментальных данных составляет 6.5–8.6%.

Отличительной чертой настоящей вычислительной модели является учет химической неравновесности в дозвуковых потоках многокомпонентной плазмы воздуха. Это позволило изучить сверхравновесный нагрев на границе участков с различной каталитической активностью датчиков тепловых потоков и водоохлаждаемой модели, используемых в ИПМех РАН для исследований теплообмена. Кроме того, полученные в двумерных расчетах результаты позволили оценить неравномерность распределения теплового потока на поверхности датчика, которая не превышает 5%, что подтверждает правомерность используемой в ИПМех РАН методики определения эффективного коэффициента каталитической рекомбинации.

Проведение дальнейших экспериментальных исследований теплообмена на высокотемпературных материалах позволит расширить валидационную базу для кода IPG2D. В дальнейшем представленная вычислительная модель будет использована для расчета тепловых потоков к неохлаждаемым образцам и моделям, а также для определения каталитических характеристик новых материалов при высоких температурах поверхности.

Работа выполнена в рамках Госзадания № АААА-А20-120011690135-5 при частичной поддержке гранта РФФИ № 19-31-90114.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gordeev A.N., Kolesnikov A.F., Yakushin M.I.* An induction plasma application to “Buran’s” heat protection tiles ground tests // *SAMPE J.* 1992. V. 28. № 3. P. 27–31.
2. Конвективный теплообмен летательных аппаратов / Под ред. Землянского Б.А. М.: Физматлит, 2014, 377 с.
3. *Власов В.И., Залогин Г.Н., Землянский Б.А., Кнотько В.Б.* Методика и результаты экспериментального определения каталитической активности материалов при высоких температурах // *Изв. РАН. МЖГ.* 2003. № 5. С. 178.
4. *Tanaka Y.* Recent development of new inductively coupled thermal plasmas for materials processing // *Adv. Phys. X.* 2021. V. 6. № 1. P. 1867637.
5. *Massuti-Ballester B., Pidan S., Herdrich G., Fertig M.* Recent catalysis measurements at IRS // *Advances in Space Research.* 2015. V. 56. Iss.4. P. 742.
6. *Massuti-Ballester B., Marynowski T., Herdrich G.* New inductively heated plasma source IPG7 // *Front. Appl. Plasma Technol.* 2013. V. 6. P. 2–6.
7. *Васильевский С.А., Колесников А.Ф.* Численное исследование течений и теплообмена в индукционной плазме высокочастотного плазматрона. Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Сер. Б. Т. VII-1. Математическое моделирование в низкотемпературной плазме. Ч. 2 / Под ред. Ю.П. Попова. М.: ЯНУС-К, 2008. С. 220–234.
8. *Васильевский С.А., Гордеев А.Н., Колесников А.Ф.* Локальное моделирование аэродинамического нагрева поверхности затупленного тела в дозвуковых высокоэнтропийных потоках воздуха: теория и эксперимент на ВЧ-плазматроне // *Изв. РАН. МЖГ.* 2017. № 1. С. 160–167.
9. *Onda K., Tanaka Y., Akashi K., Nakano Y., Ishijima T., Uesugi Y., Sueyasu S., Watanabe S., Nakamura K.* Numerical thermofluid simulation on tandem type of induction thermal plasmas with and without current modulation in a lower coil // *J. Phys. D. Appl. Phys.* 2020. V. 53. P. 165201.
10. *Сахаров В.И.* Численное моделирование термически и химически неравновесных течений и теплообмена в недорасширенных струях индукционного плазматрона // *Изв. РАН. МЖГ.* 2007. № 6. С. 157–168.
11. *Гордеев А.Н., Колесников А.Ф., Сахаров В.И.* Экспериментальное и численное исследование теплообмена высокоэнтропийных недорасширенных струй воздуха с цилиндрическими моделями // *Изв. РАН. МЖГ.* 2018. № 5. С. 125–133.
12. *Yu M., Takahashi Y., Kihara H., Abe K., Yamada K., Abe T.* Numerical investigation of flow fields in inductively coupled plasma wind tunnels // *Plasma Sci. Technol.* 2014. V. 16. P. 930–940.
13. *Власов В.И., Залогин Г.Н., Ковалев Р.В.* Численное моделирование течения различных плазмообразующих газов в тракте ВЧ-плазматрона // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике.* 2018. Т. 19. № 4. С. 2–23.
14. *Васильевский С.А., Гордеев А.Н., Колесников А.Ф., Чаплыгин А.В.* Тепловой эффект поверхностного катализа в дозвуковых струях диссоциированного воздуха: эксперимент на ВЧ-плазматроне и численное моделирование // *Изв. РАН. МЖГ.* 2020. № 5. С. 137–150.
15. *Баронец П.Н., Колесников А.Ф., Кубарев С.Н., Першин И.С., Труханов А.С., Якушин М.И.* Сверхравновесный нагрев поверхности теплозащитной плитки в дозвуковой струе диссоциированного воздуха. // *Изв. РАН. МЖГ.* 1991. № 3. С. 144–150.
16. *Stewart D., Gokcen T., Sepka S., Leiser D., Resin M.* Development of a catalytic coating for a Shuttle flight experiment // 10<sup>th</sup> AIAA/ASME Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference. AIAA Paper. 2010. P. 4321.
17. *Chazot O., Panerai F., Muylaert J. M., Thoemel J.* Catalysis phenomena determination in plasmatron facility for flight experiment design // 48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, AIAA Paper. 2010. P. 1248.
18. *Чаплыгин А.В.* Экспериментальное исследование эффекта сверхравновесного нагрева поверхности в дозвуковой струе диссоциированного воздуха // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике.* 2021. Т. 22. № 2. <http://chemphys.edu.ru/issues/2021-22-2/articles/929/>
19. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. Спр. изд. в 4-х т. / Под ред. Глушко В.П. М.: Наука, 1979.
20. *Колесников А.Ф.* Соотношения Стефана–Максвелла для амбиполярной диффузии в двухтемпературной плазме с приложением к задаче об ионно-звуковой волне // *Изв. РАН. МЖГ.* 2015. № 1. С. 170–181.

21. Суржиков С.Т., Шувалов М.П. Анализ радиационно-конвективного нагрева четырех типов спускаемых космических аппаратов // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2014. Т. 15. № 4. <http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-4/articles/237/>
22. Суржиков С.Т. Пространственная задача радиационной газовой динамики командного модуля Аполлон-4 при сверхорбитальном входе в атмосферу. // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 2. С. 149–160.
23. Суржиков С.Т. Тепловое излучение газов и плазмы. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 544 с.
24. Андриатис А.В., Жлуктов С.А., Соколова И.А. Транспортные коэффициенты смеси воздуха химически неравновесного состава // Математическое моделирование. 1992. Т. 4, № 1. С. 44–64.
25. Гирифельдер Дж., Кермисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. Пер. с англ. М.: Изд-во Ин. лит., 1961. 929 с.
26. Laricchiuta A., Bruno D., Capitelli M. High temperature Mars atmosphere. Part I: Transport cross sections // The European Physical Journal D. 2009. V. 54. P. 607–612.
27. Dunn M.G., Kang S.W. Theoretical and Experimental Studies of Reentry Plasmas. NASA Contract. Reports., NASA CR-2232, 1973.
28. Суржиков С.Т. Компьютерная аэрофизика спускаемых космических аппаратов. Двухмерные модели. 2018. М.: Физматлит. 543 с.
29. Blazek J. Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications. 3rd ed. Amsterdam, London, New York, Oxford, Paris, Shannon, Tokyo: Elsevier, 2015.
30. Kitamura K., Hashimoto A. Reduced dissipation AUSM-family fluxes: HR-SLAU2 and HR-AUSM+-up for high resolution unsteady flow simulations // Comput. Fluids. 2016. V. 126. P. 41–57.
31. Kitamura K., Shima E., Fujimoto K., Wang Z.J. Performance of low-dissipation Euler fluxes and preconditioned LU-SGS at low speeds // Commun. Comput. Phys. 2011. V. 10. P. 90–119.
32. Liou M.S. A sequel to AUSM, Part II: AUSM+-up for all speeds // J. Comput. Phys. 2006. V. 214. P. 137–170.
33. Liou M.S. The evolution of AUSM schemes // Def. Sci. J. 2010. V. 60. P. 606–613.
34. Jameson A., Turkel E. Implicit schemes and LU decompositions // Math. Comput. 1981. V. 37. P. 385–397.
35. Борисов В.Е., Давыдов А.А., Кудряшов И.Ю. Параллельная реализация неявной схемы на основе метода LU-SGS для моделирования трехмерных турбулентных течений // Математическое моделирование. 2014. Т. 26. № 10. С. 64–78.
36. Peles O., Turkel E. Acceleration methods for multi-physics compressible flow // J. Comput. Phys. 2018. V. 358. P. 201–234.
37. Brown P.N., Byrne G.D., Hindmarsh A.C. VODE: A variable-coefficient ODE solver // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1989. V. 10. P. 1038–1051.
38. Брызгалов А.И. Численное моделирование течения термически и химически неравновесного воздуха за фронтом ударной волны // Вестник МГТУ им. Баумана. 2021. Т. 96. № 3. С. 94–111.
39. Зинченко В.И., Гольдин В.Д., Зверев В.Г. Численное моделирование влияния материалов тепловой защиты на характеристики сопряженного теплообмена при пространственном обтекании затупленных тел // Теплофизика высоких температур. 2018. Т. 56. № 5. С. 747–755.
40. Зинченко В.И., Гольдин В.Д. Решение задачи о сопряженном нестационарном теплообмене при сверхзвуковом обтекании затупленного по сфере конуса под углом атаки // Инженерно-физический журнал. 2020. Т. 93. № 2. С. 431–442.

УДК 533.6.013.128

## УСЕЧЕННЫЕ СТЕПЕННЫЕ ТЕЛА КАК РЕЗУЛЬТАТ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЬЮТОНА О ТЕЛЕ С МИНИМАЛЬНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

© 2022 г. С. А. Таковицкий<sup>a,b,\*</sup><sup>a</sup> Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия<sup>b</sup> Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

\*E-mail: c.a.t@tsagi.ru

Поступила в редакцию 30.03.2022 г.

После доработки 10.05.2022 г.

Принята к публикации 10.05.2022 г.

Получено приближенное решение задачи Ньютона о теле, движение которого вызывает наименьшее сопротивление со стороны окружающей среды. Решение основано на допущении о тонкости тела и определяет класс оптимальных осесимметричных носовых частей, затупленных по торцу и имеющих образующую со степенной зависимостью радиуса от продольной координаты. Сопоставление с точным решением показало, что отличие по сопротивлению не превышает 1% при удлинении тела выше 1.4.

*Ключевые слова:* задача Ньютона, аэродинамическое сопротивление, усеченное степенное тело, торец, осесимметричная носовая часть

DOI: 10.31857/S0568528122050115

Одно из важнейших направлений совершенствования сверхзвуковых летательных аппаратов состоит в построении осесимметричных носовых частей фюзеляжей, имеющих близкие к минимальным значения волнового сопротивления (задача Ньютона). Первые результаты решения задачи, отвечающей заданному удлинению носовой части, были получены на основе локальной модели, использующей для связи геометрических параметров и газодинамических функций формулу Ньютона [1, 2]. Установлен ряд особенностей оптимальных форм, которые в значительной мере повлияли на характер дальнейших исследований. Позднее пришло понимание того, что передний торец является участком краевого экстремума, причем как из ограничения на длину носовой части, так и из ограничения по применимости формулы Ньютона для давления [3–6].

Для практических приложений интересным оказалось приближенное решение, обоснованное для носовых частей большого удлинения в предположении стремления к нулю производной  $r'$  радиуса по продольной координате. Оптимальная образующая описывается степенной зависимостью радиуса от продольной координаты  $r \sim x^n$  с показателем степени, равным  $n = 3/4$  [7, 8]. Численные параметрические исследования и экспериментальные испытания тел со степенной образующей показали, что теоретическое значение  $n$  завышено. Экстремальное значение показателя степени увеличивается с ростом числа Маха, но не превосходит  $n = 0.71$  [9]. При использовании высших приближений к точному решению подтверждено возрастание  $n$  при увеличении удлинения [10].

Для получения более точных аналитических решений можно использовать усложненные локальные модели взаимодействия тела с окружающей средой. Одной из таких моделей является локальная линеаризация связи между газодинамическими функциями течения и геометрическими параметрами тела. В отличие от стандартного подхода, выполняемого для возмущений, создаваемых телом, помещенным в поток, в случае локальной линеаризации рассматривается окрестность элемента оптимизируемой поверхности с местными параметрами течения. Выделяется плоскость, задаваемая скоростью и нормалью к элементу, и устанавливаются линейные соотношения, связывающие изменение газодинамических функций с изменением геометрических параметров. Таким образом, модель взаимодействия тела с окружающей средой усложняет-

ся, оставаясь локальной. При решении задачи Ньютона в рамках локальной линеаризации был установлен класс носовых частей, близких к оптимальным аэродинамическим формам по значениям волнового сопротивления. Эти тела затуплены по торцу и имеют образующую со степенной зависимостью радиуса от продольной координаты [11, 12].

Форма усеченных степенных тел полностью определяется заданием двух параметров – относительного размера переднего торца и показателя степени. На основе полученного аналитического решения проведены параметрические исследования в рамках модели Эйлера в широком диапазоне изменения числа Маха и удлинения и найдены оптимальные значения основных геометрических параметров [13]. В рамках локальной модели Ньютона аэродинамические характеристики усеченных степенных тел исследованы в [14]. Оптимальные значения геометрических параметров определены для случаев, соответствующих невязкому течению, течению с постоянным коэффициентом трения, ламинарным пограничным слоем, турбулентным пограничным слоем. Результаты исследования в рамках моделей, соответствующих высокоскоростному потоку разреженного газа, представлены в [15]. Теоретический анализ и численные расчеты подтвердили, что усеченные степенные тела незначительно уступают оптимальным телам по значениям волнового сопротивления.

До настоящего момента оставалось неизвестным, что усеченные степенные тела являются приближенным решением задачи Ньютона. Этот результат оказался пропущенным. Данная статья восполняет пробел в теоретическом анализе задачи Ньютона и определяет место усеченных степенных тел посредством сопоставления с известными решениями по геометрическим параметрам и аэродинамическому сопротивлению.

## 1. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЬЮТОНА

Рассматривается задача построения осесимметричной носовой части, имеющей минимальное волновое сопротивление в случае заданного значения удлинения  $\lambda = L/(2R)$  ( $L$  и  $R$  – длина и радиус основания тела). В общем случае допускается, что тело может быть затуплено по торцу. Образующая тела представляется зависимостью радиуса  $r$  от продольной координаты  $x$ . Согласно модели Ньютона коэффициент давления на поверхности тела зависит только от угла  $\theta$  наклона контура тела относительно вектора скорости невозмущенного потока

$$c_p = 2 \sin^2 \Theta, \quad \operatorname{tg} \Theta = r'$$

Здесь  $r'$  – производная радиуса.

Следуя [2], запишем коэффициент сопротивления тела в виде суммы слагаемых, соответствующих переднему торцу и боковой поверхности

$$c_x = \frac{8\lambda^2}{L^2} \left[ r_0^2 + \int_0^L \frac{2rr'^3}{1+r'^2} dx \right] \quad (1.1)$$

Здесь  $r_0$  – радиус переднего торца. При вычислении  $c_x$  сопротивление отнесено к скоростному напору и площади основания.

Решением вариационной задачи  $c_x = \min$  является носовая часть, образующая которой представляется параметрическими зависимостями продольной координаты и радиуса от производной радиуса

$$\begin{cases} x = \frac{r_0}{4} \left( \frac{1}{r'^2} + \frac{3}{4r'^4} + \ln r' - \frac{7}{4} \right) \\ r = \frac{r_0(1+r'^2)^2}{4r'^3} \end{cases} \quad (1.2)$$

Неизвестные значения параметров  $r_0$  и  $r'$  при  $x = L$  однозначно определяются заданным значением удлинения тела. Характерными особенностями оптимальной носовой части являются затупление по торцу, равенство  $45^\circ$  угла наклона образующей в месте стыковки торца и боковой поверхности, формирование элементами единой образующей оптимальных тел для разных значений удлинения, независимость решения от числа Маха.

При увеличении удлинения радиус переднего торца и производная радиуса в плоскости основания предельно уменьшаются. Данная особенность позволила решить задачу Ньютона в упро-

щенной постановке для тел большого удлинения [7, 8]. В рамках допущений:  $r_0 = 0$  и  $r' \ll 1$ , минимизируемая функция (1.1) представляется следующим интегралом

$$c_x = \frac{8\lambda^2}{L^2} \int_0^L 2rr'^3 dx \quad (1.3)$$

В этом случае образующая тела с минимальным сопротивлением задается степенной зависимостью радиуса от продольной координаты с показателем степени, равным  $3/4$

$$r = \frac{L}{2\lambda} \left( \frac{x}{L} \right)^{0.75} \quad (1.4)$$

В данном решении потеряна характерная особенность оптимальной носовой части – затупление по торцу. Поэтому степенные тела (1.4) значительно уступают оптимальным телам (1.2) по значениям волнового сопротивления. Например, при  $\lambda = 1$  отличие превышает 5%.

Устранить указанный недостаток можно, отказавшись от условия  $r_0 = 0$ . Предполагая, что  $r' \ll 1$ , формулируем задачу Ньютона (1.1) в упрощенной постановке

$$c_x = \frac{8\lambda^2}{L^2} \left[ r_0^2 + \int_0^L 2rr'^3 dx \right] \quad (1.5)$$

Функция  $r(x)$ , минимизирующая функционал (1.5), находится стандартным образом. Поскольку основная функция  $F = 2rr'^3$  не содержит в явном виде независимую переменную  $x$ , для уравнения Эйлера существует первый интеграл

$$-F + r'F_{r'} = \text{const} \quad (1.6)$$

Условие трансверсальности, связанное с варьированием радиуса переднего торца, сводится к равенству

$$-F_{r_0} + 2r_0 = 0 \quad (1.7)$$

Решению дифференциального уравнения (1.6) соответствует зависимость радиуса от продольной координаты с двумя неизвестными константами  $A$  и  $B$

$$r = (Ax + B)^{0.75} \quad (1.8)$$

Из условия трансверсальности (1.7) устанавливаем значение производной радиуса в сечении  $x = 0$

$$r'_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (1.9)$$

Константы  $A$  и  $B$  в (1.8) определяются из условия (1.9) и заданного значения удлинения тела. Можно представить образующую зависимость с одним параметром  $r_0$ , значение которого определяется решением уравнения четвертой степени

$$\begin{cases} r = r_0 \left( 1 + \frac{4x}{3\sqrt{3}r_0} \right)^{0.75} \\ \left( \frac{r_0}{R} \right)^{4/3} + \frac{8\lambda}{3\sqrt{3}} \left( \frac{r_0}{R} \right)^{1/3} - 1 = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Для тел большого удлинения справедлива следующая оценка зависимости относительного размера переднего торца от удлинения

$$\frac{r_0}{R} = \left( \frac{3\sqrt{3}}{8\lambda} \right)^3$$

С другой стороны, по аналогии с точным решением (1.2), образующую усеченного степенного тела можно представить параметрическими зависимостями продольной координаты и радиуса от производной радиуса

$$\begin{cases} x = \frac{r_0}{4\sqrt{3}} \left( \frac{1}{r'^4} - 9 \right) \\ r = \frac{r_0}{3\sqrt{3}r'^3} \end{cases} \quad (1.11)$$

Как и в случае точного решения, неизвестные значения параметров  $r_0$  и производной  $r'$  в сечении  $x = L$  однозначно определяются заданным значением удлинения тела. При этом сохраняются все характерные особенности оптимальной носовой части, перечисленные выше.

## 2. СОПОСТАВЛЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО И ТОЧНОГО РЕШЕНИЙ

Очевидно, что все три рассмотренных решения сближаются по мере увеличения удлинения носовой части. Поэтому образующие носовой части Ньютона, усеченного степенного тела и степенного тела сопоставлены при умеренных значениях удлинения  $\lambda = 0.5, 1, 2$  на рис. 1. Видно, что усеченные степенные тела имеют больший размер переднего торца и меньшие значения производной  $r'$  в одинаковых поперечных сечениях. Степенное тело характеризуется наибольшим углом наклона образующей в месте стыковки с донным торцом. Согласование с точным решением полностью нарушается при  $\lambda < 1$ .

Для степенных тел известна аналитическая зависимость коэффициента сопротивления от удлинения, определенная по соотношению (1.3) и справедливая в диапазоне средних и больших значений удлинения

$$c_x = \frac{27}{64\lambda^2}$$

Получим точный результат для коэффициента сопротивления степенного тела на основе соотношения (1.1). В данном случае

$$r' = \frac{3}{8\lambda} \left(\frac{L}{x}\right)^{0.25}, \quad rr'^3 = \frac{27}{512\lambda^3} R, \quad c_x = \frac{27}{64\lambda^2 L} \int_0^L \frac{1}{1+r'^2} dx$$

После интегрирования приходим к окончательному результату

$$c_x = \frac{27}{64\lambda^2} \left\{ 1 - \frac{9}{32\lambda^2} + \frac{81}{2048\lambda^4} \ln \left( 1 + \frac{64\lambda^2}{9} \right) \right\} \quad (2.1)$$

Нулевому значению удлинения соответствует значение  $c_x = 2$ .

Для носовой части Ньютона и усеченного степенного тела явные зависимости коэффициента сопротивления от удлинения записать невозможно. Однако, следуя параметрическим представлениям (1.2) и (1.11), на основе соотношения (1.1) можно выразить  $c_x$  через производную радиуса в плоскости основания тела.

Для носовой части Ньютона получено

$$c_x = \frac{r'^6}{(1+r'^2)^4} \left\{ \frac{3}{r'^4} + \frac{10}{r'^2} + 17 - 4 \ln r' + 2r'^2 \right\} \quad (2.2)$$

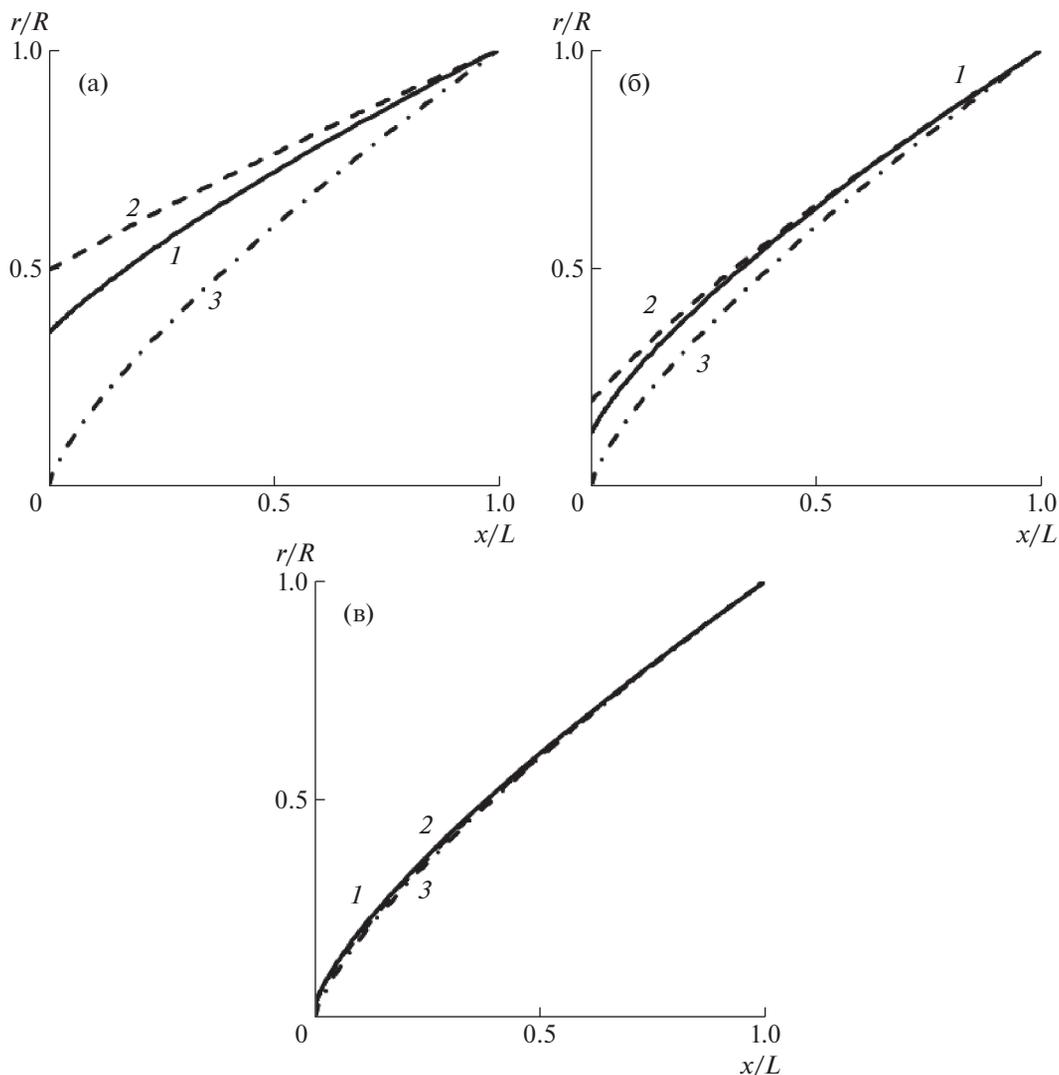
В случае усеченного степенного тела коэффициент сопротивления определяется следующим соотношением

$$c_x = 3r'^6 \left\{ \frac{1}{r'^4} - \frac{2}{r'^2} + 15 + 2 \ln \frac{1+r'^2}{4r'^2} \right\} \quad (2.3)$$

Соотношения (2.2) и (2.3) дополняют соотношения (1.2) и (1.11) соответственно. Приняв радиус переднего торца равным единице, и постепенно уменьшая значения производной, находим значение коэффициента сопротивления и удлинения, которое вычисляется по соотношению между  $x$  (длина тела) и  $y$  (радиус основания).

Нулевому значению удлинения соответствуют значения производной  $r' = 1$  (носковая часть Ньютона) и  $r' = 1/3^{0.5}$  (усеченное степенное тело). В этом предельном случае оба решения, (2.2) и (2.3), совпадают и дают значение  $c_x = 2$ . Оптимальным телом является диск.

Сопоставление построенных носовых частей по величине сопротивления, рассчитанного по соотношениям (2.1), (2.2) и (2.3), продемонстрировано на рис. 2. Аэродинамическое сопротивление тел, соответствующих приближенным решениям оптимизационной задачи, отнесено к сопротивлению носовой части Ньютона равного удлинения.

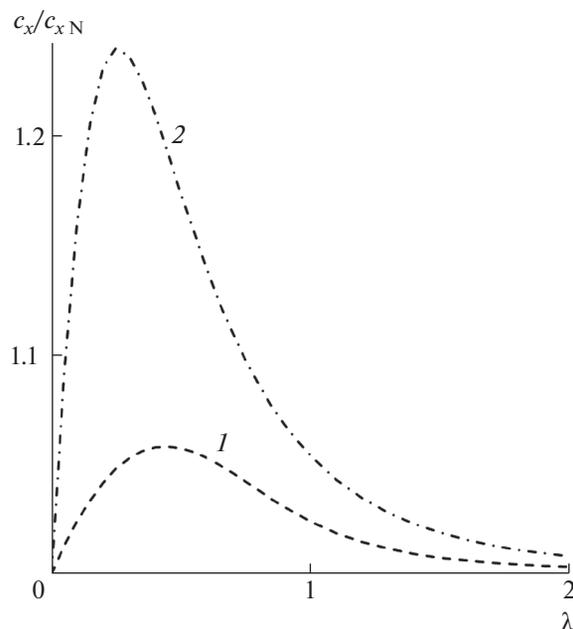


**Рис. 1.** Сопоставление образующих при (а–в)  $\lambda = 0.5, 1, 2$ : 1 – носовая часть Ньютона; 2 – усеченное степенное тело; 3 – степенное тело.

По мере уменьшения удлинения коэффициент сопротивления степенных тел монотонно возрастает (2.1). Уже при  $\lambda = 0.7$  степенные тела уступают оптимальным телам более 11%. Наибольший проигрыш по сопротивлению составляет больше 24% и достигается при  $\lambda \approx 0.25$ .

Усеченные степенные тела имеют заметно лучшие характеристики. При  $\lambda \geq 1.4$  отличие по волновому сопротивлению от носовой части Ньютона меньше 1%. Максимальное отличие не превышает 5.9% и получается при  $\lambda \approx 0.45$ . Ограниченное возрастание погрешности обусловлено тем, что полученные в точной и приближенной постановках задачи предельные решения, соответствующие телу нулевого и бесконечно большого удлинения, совпадают. Следует добавить, что найденное двухпараметрическое представление приближенного решения позволяет выполнять прямую численную оптимизацию в рамках более точных моделей течения и таким образом учесть дополнительные условия (например, влияние числа Маха). Для точного решения задачи Ньютона такая возможность отсутствует.

Таким образом, можно заключить, что усеченные степенные тела незначительно уступают носовой части Ньютона по значениям волнового сопротивления во всем диапазоне удлинений. Это подтверждает важность найденного приближенного решения задачи Ньютона как дополни-



**Рис. 2.** Превышение волнового сопротивления по отношению к носовой части Ньютона ( $c_{xN}$ ): 1 – усеченное степенное тело; 2 – степенное тело.

тельного обоснования целесообразности исследования и использования в практических приложениях усеченных степенных тел.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eggers A.J.Jr., Resnikoff M.M., Dennis D.H.* Bodies of revolution having minimum drag at high supersonic air speeds // *NACA. Report N 1306.* 1957. 12 p.
2. *Эггерс А.* Нетонкие тела вращения минимального волнового сопротивления // *Теория оптимальных аэродинамических форм.* М.: Мир, 1969. С. 260–274.
3. *Крайко А.Н.* Об определении тел минимального сопротивления при использовании законов сопротивления Ньютона и Буземана // *ПММ.* 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 484–495.
4. *Гонор А.Л., Черный Г.Г.* Формы нетонких тел минимального волнового сопротивления // *Теория оптимальных аэродинамических форм.* М.: Мир, 1969. С. 379–395.
5. *Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Пьянков К.С., Тилляева Н.И.* Осесимметричные головные части заданного удлинения, оптимальные или близкие к оптимальным по волновому сопротивлению // *ПММ.* 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 795–828.
6. *Крайко А.Н.* Задача Ньютона о построении оптимальной головной части обтекаемого тела. История решения // *ПММ.* 2019. Т. 83. Вып. 5–6. С. 734–748.
7. *Miele A.* Slender shapes of minimum drag in Newtonian flow. *ZFW.* 1963. V. 11. № 5.
8. *Миеле А.* Тонкие тела минимального волнового сопротивления // *Теория оптимальных аэродинамических форм.* М.: Мир, 1969. С. 203–215.
9. *Аэромеханика сверхзвукового обтекания тел вращения степенной формы* / Под ред. Г.Л. Гродзовского. М.: Машиностроение, 1975. 183 с.
10. *Васильченко В.И., Притуло М.Ф.* Высшие приближения к точному решению задачи обтекания тела вращения сверхзвуковым потоком газа // *Тр. ЦАГИ.* 1975. Вып. 1666. С. 29–41.
11. *Таковицкий С.А.* Аналитическое решение в задаче построения осесимметричных носовых частей минимального волнового сопротивления // *Изв. РАН. МЖГ.* 2006. № 2. С. 157–162.
12. *Таковицкий С.А.* Оптимизационные задачи сверхзвуковой аэродинамики. М.: Наука, 2015. 236 с.
13. *Иванюшкин Д.С., Таковицкий С.А.* Носовые части минимального волнового сопротивления с передним торцом и степенной образующей // *Уч. зап. ЦАГИ.* 2009. Т. XL. № 5. С. 35–40.
14. *Takovitskii S.A.* Axisymmetric forebodies having minimum drag in supersonic flow // *AIAA AVIATION Forum.* June 15–19, 2020. <https://doi.org/10.2514/6.2020-3120>.
15. *Горелов С.Л., Нгуен В.Л.* Затупленное осесимметричное тело минимального сопротивления в гиперзвуковом потоке разреженного газа // *Тр. МФТИ.* 2021. Т. 13. № 1. С. 96–107.

УДК 533.72

## ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ЭФФЕКТА РАЗРЕЖЕНИЯ НА ЧИСЛО ПУАЗЕЙЛЯ В ДЛИННОМ КОЛЬЦЕВОМ КАНАЛЕ ПРИ НЕПОЛНОЙ АККОМОДАЦИИ МОЛЕКУЛ ГАЗА

© 2022 г. О. В. Гермидер<sup>а,\*</sup>, В. Н. Попов<sup>а,\*\*</sup><sup>а</sup> Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, Архангельск, Россия

\*E-mail: o.germider@narfu.ru

\*\*E-mail: v.popov@narfu.ru

Поступила в редакцию 12.04.2022 г.

После доработки 15.05.2022 г.

Принята к публикации 15.05.2022 г.

В зависимости от значений параметра разрежения, отношений радиусов цилиндров, образующих длинный кольцевой канал, и коэффициентов аккомодации тангенциального импульса молекул газа на стенках канала предложен метод вычислений значений числа Пуазейля. В промежуточном режиме течения газа данные значения получены с использованием полиномиальной аппроксимации Чебышева на основе линеаризованного модельного кинетического уравнения Шахова с зеркально-диффузными граничными условиями Максвелла. Приведен анализ полученных результатов в окрестности гидродинамического режима течения газа со скольжением и проведено их сравнение с аналогичными результатами, найденных в рамках БГК модели.

*Ключевые слова:* число Пуазейля, течения газа в каналах, коэффициент аккомодации тангенциального импульса молекул газа

DOI: 10.31857/S056852812205005X

Развитие методов математического моделирования процессов, протекающих в прямых микро- и наноканалах, является одним из главных направлений исследований, проводимых в последнее время в области динамики разреженного газа [1–4]. Гидравлические диаметры этих каналов могут варьироваться от десятков нанометров до десятков миллиметров, что приводит к тому, что течение газа в условиях, когда средняя длина свободного пробега молекул газа сравнима с характерным размером поперечного сечения канала ( в частности, с гидравлическим диаметром) не может быть описано на основе уравнений динамики сплошных сред [5]. Для исследования гидродинамических закономерностей течения газа в длинном канале, образованном двумя коаксиальными цилиндрами, введем число Пуазейля  $P_0$ , определяемое как произведение коэффициента трения Дарси  $f_d$  на число Рейнольдса  $Re$  [6, 7]. Как отмечено в [8], выбранная конфигурация сечения канала представляет интерес как с прикладной, так и с теоретической точек зрения. В постановочной части работа близка к [8] и [9]. Течение газа в канале обусловлено градиентом давления в продольном направлении. В представленной работе в отличие от [8] и [9] в качестве основного уравнения, описывающего кинетику массопереноса, используется линеаризованная S модель (уравнение Шахова) [10], которая при переходе к гидродинамическому режиму дает корректное значение числа Прандтля в отличие от модели БГК. Граничные условия обобщены на случай с несовпадающими значениями коэффициентов аккомодации тангенциального импульса молекул газа на стенках канала. Проводится сравнительный анализ с результатами из [9] и результатами в режиме течения со скольжением, которые получены в явном виде с использованием уравнения Навье–Стокса. Значения числа Пуазейля находятся с применением полиномиальной аппроксимации Чебышева [11, 12] в широком диапазоне изменения параметра разрежения в зависимости от значений коэффициентов аккомодации тангенциального импульса молекул газа на цилиндрах и гидравлического диаметра канала. Модификация метода коллокации [12] выполнена путем использования свойств конечных сумм полиномов Чебышева, произведения Кронекера при построении матрицы системы алгебраических уравнений.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим течение разреженного газа в длинном канале, образованном двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами  $R_1'$  и  $R_2'$  ( $R_1' < R_2'$ ), под действием заданного градиента давления, направленного вдоль оси канала  $z'$ . Считаем, что цилиндры поддерживаются при постоянной температуре. Коэффициенты аккомодации тангенциального импульса молекул газа на внутреннем и внешнем цилиндрах обозначим соответственно  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Канал соединяет два резервуара, давления в которых обозначим  $p_1'$  и  $p_2'$  соответственно. Полагаем, что  $p_2' < p_1'$  и длина канала  $L' \gg D_h'$ , где  $D_h' = 2(R_2' - R_1')$  – гидравлический диаметр [7]. Состояние газа в точке  $\mathbf{r}'$  определяем функцией распределения молекул газа  $f'(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ , где  $\mathbf{v}$  – молекулярная скорость газа. В качестве масштабов длины, скорости, вектора потока тепла, концентрации, температуры, функции распределения выберем соответственно величины:  $D_h'$ ,  $\beta^{-1/2}$ ,  $p_0'\beta^{-1/2}$ ,  $n_0'$ ,  $T_0'$ ,  $n_0'\beta^{3/2}$ , где  $\beta = m'/(2k_B T_0')$ ,  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $m'$  – масса молекул газа,  $n_0'$ ,  $T_0'$  – концентрация, температура газа в некоторой точке, принятой за начало координат;  $p' = n'k_B T'$ . Тогда для безразмерных величин имеем следующие соотношения

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}'}{D_h'}, \quad R_1 = \frac{R_1'}{D_h'}, \quad R_2 = \frac{R_2'}{D_h'}, \quad f = \frac{f'}{n_0'\beta^{3/2}}$$

$$\mathbf{C} = \beta^{1/2}\mathbf{v}, \quad \mathbf{u} = \beta^{1/2}\mathbf{u}', \quad \mathbf{q} = \frac{\beta^{1/2}}{p_0'}\mathbf{q}', \quad n = \frac{n'}{n_0'}, \quad T = 1$$

Число Пуазейля  $P_0$  определяем как произведение коэффициента трения Дарси  $f_d$  на число Рейнольдса  $Re$  [6, 7]

$$P_0 = f_d Re = -\frac{2G_p p_0' D_p' \beta^{1/2}}{\mu \bar{u}_z} \quad (1.1)$$

где  $\mu$  – динамическая вязкость газа,  $\bar{u}_z$  – среднее значение функции  $u_z$ .

Полагаем, что модуль безразмерного градиента давления  $G_p$  является малым по величине. Учитывая осесимметричный характер течения газа в канале, введем цилиндрические координаты  $\mathbf{r} = (\rho, r_\phi, r_z)$  в конфигурационном пространстве и  $\mathbf{C} = (C_\perp, C_\psi, C_z)$  в пространстве скоростей. В линейном приближении получим

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = f_0(C)(1 + G_p(z + h(\rho, \mathbf{C}))), \quad f_0(C) = \pi^{-3/2} \exp(-C^2) \quad (1.2)$$

Здесь  $f_0$  – безразмерный абсолютный максвеллиан. Используя (1.2), представляем  $\bar{u}_z$  в виде разложения по  $G_p$

$$\bar{u}_z = -G_p \bar{U}_z, \quad \bar{U}_z = -\frac{2}{R_2'^2 - R_1'^2} \int_{R_1'}^{R_2'} U_z(\rho) \rho d\rho \quad (1.3)$$

$$U_z(\rho) = \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2) C_z h(\rho, \mathbf{C}) d^3\mathbf{C}$$

Подставляя (1.3) в (1.1) и учитывая, что в случае модели жестких сфер для параметра разреженности  $\delta$  выполняется соотношение [5]:

$$\delta = \frac{D_p' p' \beta^{1/2}}{\mu}$$

получаем

$$P_0 = \frac{2\delta}{\bar{U}_z}$$

Введем функции  $Z_1 = Z_1(\rho, \zeta, C_\perp)\bar{\tau}$  и  $Z_2 = Z_2(\rho, \zeta, C_\perp)$

$$Z_1(\rho, \zeta, C_\perp) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-C_z^2) C_z h(\rho, \mathbf{C}) dC_z$$

$$Z_2(\rho, \zeta, C_\perp) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-C_z^2) C_z^3 h(\rho, \mathbf{C}) dC_z$$

Компоненты  $U_z$  и  $q_z$  записываем через функции  $Z_1$  и  $Z_2$  как

$$\begin{pmatrix} U_z \\ W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-C_\perp^2) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \begin{pmatrix} C_\perp Z_1 \\ C_\perp^3 Z_1 \\ C_\perp Z_2 \end{pmatrix} d\zeta dC_\perp$$

$$q_z = W_1 + W_2 - \frac{5}{2} U_z$$

Функцию  $Z_1$  находим из линеаризованной модели кинетического уравнения Шахова [12]

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial Z_1}{\partial \rho} \zeta + \frac{\partial Z_1}{\partial \zeta} \frac{(1-\zeta^2)}{\rho} \right) C_\perp + \delta Z_1(\rho, \zeta, C_\perp) + \frac{1}{2} = \\ & = \delta \left( U_z(\rho) + \frac{2(1-\text{Pr})}{5} q_z(\rho) (C_\perp^2 - 1) \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\left( \frac{\partial Z_2}{\partial \rho} \zeta + \frac{\partial Z_2}{\partial \zeta} \frac{(1-\zeta^2)}{\rho} \right) C_\perp + \delta Z_2(\rho, \zeta, C_\perp) + \frac{3}{4} = \delta \left( \frac{3}{2} U_z(\rho) + \frac{3(1-\text{Pr})}{5} q_z(\rho) C_\perp^2 \right) \quad (1.5)$$

где  $\text{Pr}$  – число Прандтля. Значение  $\text{Pr} = 2/3$  соответствует S модели. При  $\text{Pr} = 1$  система уравнений (1.4) и (1.5) переходит в БГК модель.

В качестве граничного условия на цилиндрах используем модель зеркально-диффузного отражения Максвелла [5]. В этом случае имеем

$$Z_j(R_j, \zeta, C_\perp) = (1 - \alpha_i) Z_j(R_j, -\zeta, C_\perp), \quad (-1)^i \zeta < 0, \quad i, j = 1, 2 \quad (1.6)$$

## 2. РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Неизвестные функции  $Z_1(\rho, \zeta, C_\perp)$  и  $Z_2(\rho, \zeta, C_\perp)$ , где  $\rho \in [R_1, R_2]$ ,  $C_\perp \in [0, +\infty)$  и  $\zeta \in [-1, 1]$ , раскладываем в ряды по полиномам Чебышева первого рода  $T_{k_i}$  и ограничиваясь в этих рядах членами с номерами  $k_i \leq n_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) [11], получаем

$$Z_j(\rho, \zeta, C_\perp) = \mathbf{T}_1(x_1) \otimes \mathbf{T}_2(x_2) \otimes \mathbf{T}_3(x_3) \mathbf{A}_j, \quad j = 1, 2 \quad (2.1)$$

где  $x_1 = (2\rho - R_2 - R_1)/(R_2 - R_1)$ ,  $x_2 = \zeta$ ,  $x_3 = (C_\perp - 1)/(C_\perp + 1)$ ,  $\mathbf{T}_i$  – матрица размером  $1 \times n'_i$  ( $n'_i = n_i + 1, i = \overline{1, 3}$ ):

$$\mathbf{T}_i(x_i) = (T_0(x_i) T_1(x_i) \dots T_{n'_i-1}(x_i) T_{n'_i}(x_i))$$

$\mathbf{A}_j$  – матрицы размером  $n'_1 n'_2 n'_3 \times 1$ :

$$\mathbf{A}_j = (a_{000}^{(j)} a_{001}^{(j)} \dots a_{n'_1 n'_2 n'_3 - 1}^{(j)} a_{n'_1 n'_2 n'_3}^{(j)})^T, \quad j = 1, 2$$

через  $\mathbf{T}_1(x_1) \otimes \mathbf{T}_2(x_2)$  обозначено произведение Кронекера двух матриц [13].

В качестве точек коллокации в (1.4) и (1.5) для  $x_i$  выберем нули  $T_{n'_i}(x_i)$  на отрезке  $[-1, 1]$  [11]:

$$x_{i,k_i} = \cos \xi_i, \quad \xi_i = \frac{\pi(2n_i - 2k_i + 1)}{2(n_i + 1)}, \quad k_i = \overline{0, n_i}, \quad i = \overline{1, 3} \quad (2.2)$$

Для нахождения значений полиномов Чебышева и производных от полиномов Чебышева в точках (2.2) воспользуемся геометрическим определением  $T_{j_i}(x_i) = \cos(j_i \arccos x_i)$ , где  $x_i \in [-1, 1]$  [11]. Тогда

$$T_{j_i}(x_{i,k_i}) = \cos j_i \xi_i, \quad \frac{dT_{j_i}(x_{i,k_i})}{dx_i} = \frac{j_i \sin j_i \xi_i}{|\sin \xi_i|}, \quad j_i, \quad k_i = \overline{0, n_i}, \quad i = 1, 2 \quad (2.3)$$

Подставляя (2.1)–(2.3) в (1.4), приходим к системе  $n'_1 n'_2 n'_3$ -уравнений, в которой заменяем уравнения с  $x_{1,0}, x_{2,k_2}$  ( $k_2 = n'_2/2, n_2$ ) на уравнения, вытекающие из граничного условия (1.6) для функции  $Z_1$  при  $x_2 > 0$ :

$$\mathbf{T}_1(-1) \otimes (\mathbf{T}_2(x_{2,k_2}) - (1 - \alpha_1)\mathbf{T}_2(x_{2,n_2-k_2})) \otimes \mathbf{T}_3(x_{3,k_3})\mathbf{A}_1 = 0, \quad k_3 = \overline{0, n_3}$$

с  $x_{1,n_1}, x_{2,k_2}$  ( $k_2 = 0, n'_2/2 - 1$ ) на уравнения (2.4) для  $x_2 < 0$ :

$$\mathbf{T}_1(1) \otimes (\mathbf{T}_2(x_{2,k_2}) - (1 - \alpha_2)\mathbf{T}_2(x_{2,n_2-k_2})) \otimes \mathbf{T}_3(x_{3,k_3})\mathbf{A}_1 = 0, \quad k_3 = \overline{0, n_3}$$

Здесь и ниже считаем, что  $n_2$  – нечетное число. Аналогично в системе  $n'_1 n'_2 n'_3$ -уравнений, полученной подстановкой точек (2.3) в (1.5), на уравнения, вытекающие из граничного условия (1.6) для функции  $Z_2$ .

Учитывая, что в точках (2.3) имеют место равенства [11]:

$$\begin{aligned} \frac{2}{n'_i} \sum_{k_i=0}^{n_i} T_{l_i}(x_{k_i}) T_{j_i}(x_{k_i}) &= \gamma_{l_i} \delta_{l_i, j_i}, \\ \frac{2}{n'_i} \sum_{k_i=0}^{n_i} T_{k_i}(x_{l_i}) T_{k_i}(x_{j_i}) &= \delta_{l_i, j_i}, \quad l_i, j_i = \overline{0, n_i}, \quad i = \overline{1, 3} \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $\delta_{l_i, j_i}$  – символ Кронекера; параметр  $\gamma_{l_i}$  равен 2, если  $l_i = 0$ , иначе  $\gamma_{l_i} = 1$ , под  $\sum_{k_i=0}^{n_i}$  понимаем конечную сумму, в которой первое слагаемое умножается на 1/2, выразим коэффициенты в (2.1) через значения функций  $Z_1$  и  $Z_2$ , вычисленные в точках (2.3). Обозначая

$$\mathbf{Z}_i = (Z_{i,000}, Z_{i,001} \dots Z_{n_1 n_2 n_3 - 1} Z_{i, n_1 n_2 n_3})^T, \quad Z_{i, k_1 k_2 k_3} = Z_i(\rho_{k_1}, C_{\perp, k_2}, \zeta_{k_3}), \quad i = 1, 2$$

имеем  $\mathbf{A}_i = 8(n'_1 n'_2 n'_3)^{-1} \mathbf{J}' \otimes \mathbf{H}' \otimes \mathbf{G}' \mathbf{Z}_i$ , ( $i = 1, 2$ ), где  $\mathbf{J}'$ ,  $\mathbf{H}'$  и  $\mathbf{G}'$  – транспонированные матрицы  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{G}$ , в которых первая строка умножается на 1/2, а  $J_{k_1+1, j_1+1} = T_{j_1}(x_{1, k_1})$ ,  $H_{k_2+1, j_2+1} = T_{j_2}(x_{2, k_2})$ ,  $G_{k_3+1, j_3+1} = T_{j_3}(x_{3, k_3})$ ,  $j_i, k_i = \overline{0, n_i}$ ,  $i = \overline{1, 3}$ . Используя полученное выражение для  $\mathbf{A}$ , приходим к системам матричных уравнений относительно  $\mathbf{Z}_i$ , решения которых находим LU-методом.

На основе полученных элементов матрицы  $\mathbf{Z}_1$  восстанавливаем  $U_z(\rho)$

$$U_z(\rho) = \frac{8}{n'_1 n'_2 n'_3} \mathbf{T}_1 \left( \frac{2\rho - R_2 - R_1}{R_2 - R_1} \right) \mathbf{J}' \otimes \mathbf{B} \mathbf{Z}_1$$

где  $\mathbf{B}$  – блочная  $1 \times n'_2 n'_3$ -матрица, состоящая из  $n'_2$ -одинаковых блоков  $\mathbf{K} \mathbf{G}'$  размером  $1 \times n'_3$ ,

$$\mathbf{K} = 2 \int_{-1}^1 \frac{1+x_3}{(1-x_3)^3} \mathbf{T}_3(x_3) \exp \left( -\frac{(1+x_3)^2}{(1-x_3)^2} \right) dx_3 \quad (2.5)$$

Для вычисления интеграла (2.5) применяем рекуррентные соотношения [11]

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_i(x) = 2xT_{i-1}(x) - T_{i-2}(x), \quad i \geq 2$$

Находим значение  $\bar{U}_z$  по формуле (1.3) и подставляем его в (1.1). Таким образом, число Пуазейля  $P_0$  зависит от параметра разрежения газа  $\delta$ , отношения радиусов цилиндров  $r = R'_1/R'_2$  и ко-

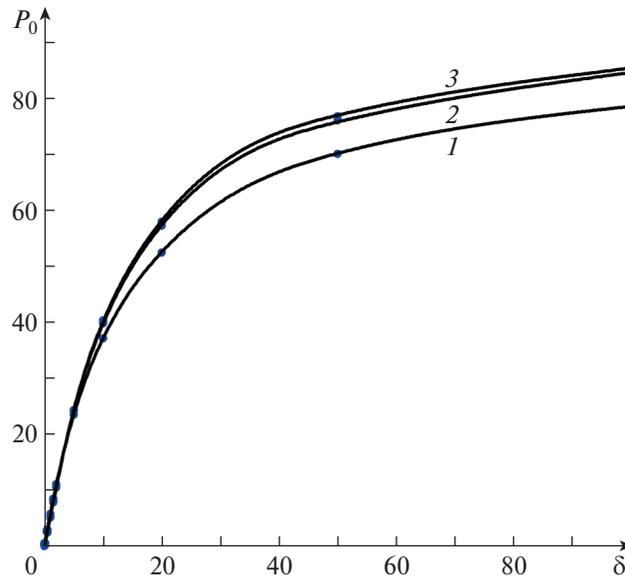


Рис. 1. Графики функции  $P_0(\delta)$ :  $\alpha = 1$ ,  $Pr = 1$ ,  $r = 0.1, 0.5, 0.9$  (1–3).

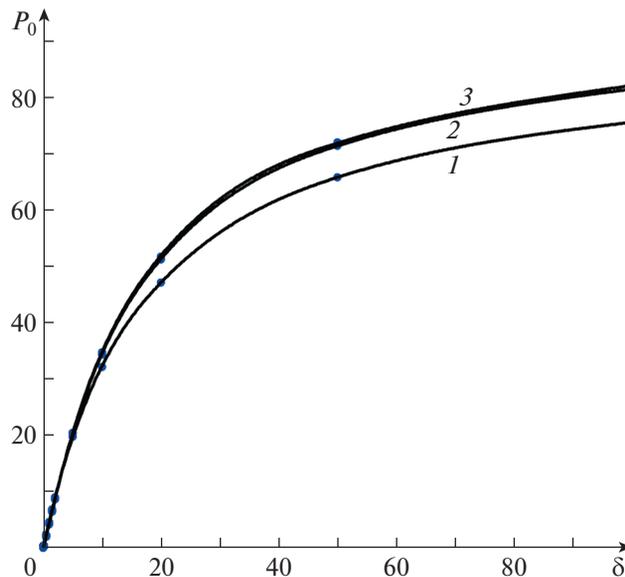


Рис. 2. Графики функции  $P_0(\delta)$ :  $\alpha = 0.85$ ,  $Pr = 1$ ,  $r = 0.1, 0.5, 0.9$  (1–3).

эффицентов аккомодации тангенциального импульса молекул газа на стенках канала  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Здесь выразили безразмерные радиусы цилиндров  $R_1$  и  $R_2$  через  $r$

$$R_1 = \frac{r}{2(1-r)}, \quad R_2 = \frac{1}{2(1-r)}$$

Полученные результаты вычислений  $P_0$  представлены графически на рис. 1–4. В случае  $Pr = 1$  на рис. 1 и 2 кривые 1, 2 и 3 построены с применением кубической сплайн-интерполяции для отношения радиусов цилиндров 0.1, 0.5, 0.9 при совпадающих коэффициентах аккомодации тангенциального импульса молекул газа на внешнем и внутреннем цилиндрах  $\alpha = \alpha_{1,2} = 1$  (рис. 1) и  $\alpha = 0.85$  (рис. 2). Наблюдается возрастание числа Пуазейля с ростом отношения радиусов ци-

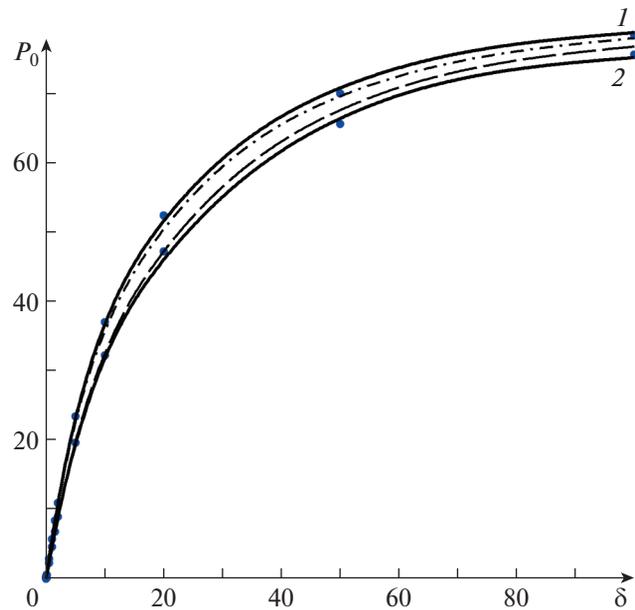


Рис. 3. Зависимость  $P_0(\delta)$ :  $r = 0.1$ ,  $Pr = 2/3$ ,  $\alpha = 1, 0.85$  (1, 2).

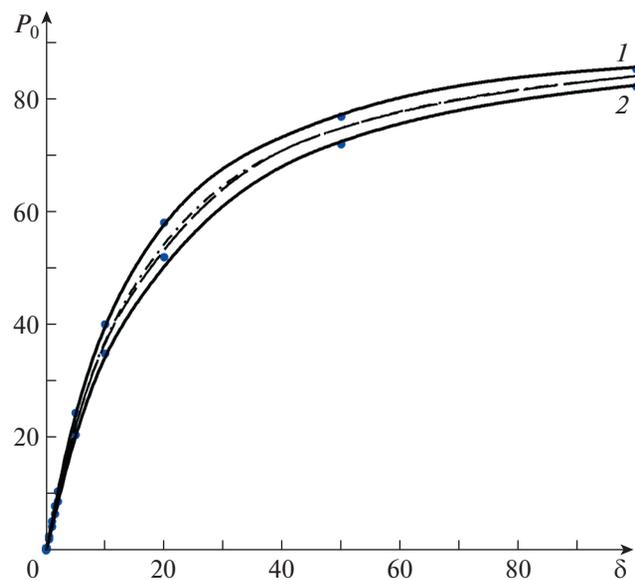


Рис. 4. Зависимость  $P_0(\delta)$ :  $r = 0.9$ ,  $Pr = 2/3$ ,  $\alpha = 1, 0.85$  (1, 2).

линдров и параметра разряжения. Существенное сближение с кривой 3 происходит при уменьшении значения  $\alpha$ . Точками показаны значения  $P_0$  из [9]. Наблюдается хорошее согласие полученных результатов в настоящей работе с [9] (погрешность менее 2%). На рис. 3 и 4 сплошными линиями 1 ( $\alpha = 1$ ) и 2 ( $\alpha = 0.85$ ) проиллюстрирована зависимость  $P_0(\delta)$  для  $r = 0.1$  и  $r = 0.9$  при  $Pr = 2/3$ . Кривая, построенная штриховой линией, соответствует значениям  $\alpha_1 = 1$  и  $\alpha_2 = 0.85$ , штрихпунктирной –  $\alpha_1 = 0.85$  и  $\alpha_2 = 1$ . С увеличением значений  $\delta > 20$  наблюдается сближение этих кривых. Точками на рис. 3 и 4 показаны значения  $P_0$  при  $Pr = 1$ . Видно, что результаты, основанные на решении уравнения БГК и S-модели, согласуются между собой.

## 3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В гидродинамическом режиме течения ( $\delta^{-1} \ll 1$ ) массовую скорость газа можно восстановить на основе решения уравнения Навье–Стокса для одноатомного газа

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dU_z(\rho)}{d\rho} \right) = -\delta \quad (3.1)$$

с граничным условием прилипания на цилиндрах  $U_z(R_i) = 0$  ( $i = 1, 2$ ). В этом случае получаем выражение  $U_z$ , которое соответствует [14]:

$$U_z(\rho) = \frac{\delta}{4} \left( R_1^2 \ln \frac{R_2}{\rho} + R_2^2 \ln \frac{\rho}{R_1} - \rho^2 \right) \left( \ln \frac{R_2}{R_1} \right)^{-1} \quad (3.2)$$

В этом случае, подставляя (3.2) в (1.3) и используя (1.1), имеем

$$P_0 = \frac{64(1-r)^2 \ln r}{(\ln r - 1)r^2 + \ln r + 1}$$

При  $r \rightarrow 0$  получаем  $P_0 = 64$ , которое соответствует цилиндрическому каналу [7]. При  $r \rightarrow 1$  приходим к значению  $P_0 = 96$ , которое имеет место при течении газа в плоском канале [7].

Покажем, что в пределе ( $\delta^{-1} \ll 1$ ) массовая скорость газа  $U_z(\rho)$ , полученная на основе уравнения (1.4), принимает вид (3.2). Действительно, в этом случае, ограничиваясь нулевым приближением относительно  $\delta^{-1}$  в уравнении (1.4), имеем

$$Z_1(\rho, \zeta, C_{\perp}) = U_z(\rho) + \frac{2(1-\text{Pr})}{5} q_z(\rho)(C_{\perp}^2 - 1) \quad (3.3)$$

Умножим левую и правую части уравнения (3.3) на  $C_{\perp} \exp(-C_{\perp}^2)$  и проинтегрируем в пределах от 0 до  $+\infty$ . В результате получаем

$$2 \int_0^{+\infty} Z_1(\rho, \zeta, C_{\perp}) C_{\perp} \exp(-C_{\perp}^2) dC_{\perp} = U_z(\rho) \quad (3.4)$$

Откуда следует, что функция  $Z_1 = U_z$ , определяемая выражением (3.2), является решением уравнения (3.4) и удовлетворяет граничным условиям (1.5). При фиксированных значениях  $r$  максимум функции  $P_0(\delta)$  достигается в гидродинамическом пределе. Для отношения радиусов цилиндров 0.1 и 0.9 максимальные значения  $P_0(\delta)$  равны соответственно 89.4 и 96, т.е. происходит существенный сдвиг значений  $P_0(\delta)$  от 64, которое определяет течение газа в цилиндрическом канале, в сторону плоского течения.

В режиме течения со скольжением тангенциальная массовая скорость газа пропорциональна ее нормальному градиенту вблизи стенок канала [5]. Следуя [9] и [5], запишем граничные условия скольжения в виде

$$U_z(R_i) = (-1)^{i+1} \frac{\sigma_p}{\delta} \frac{dU_z}{d\rho}(R_i), \quad i = 1, 2 \quad (3.5)$$

Здесь  $\sigma_p$  – безразмерный коэффициент вязкого скольжения. Для диффузного рассеяния ( $\alpha_{1,2} = 1$ ) в рамках модели S коэффициент  $\sigma_p$  равен 1.018 [15] и 1.06 в рамках модели БГК [5], для зеркально-диффузного отражения Максвелла при  $\alpha = \alpha_{1,2}$  коэффициент  $\sigma_p$  может быть получен по формуле [15]:

$$\sigma_p(\alpha) = \frac{2-\alpha}{\alpha} (\sigma_p(1) - 0.1211(1-\alpha))$$

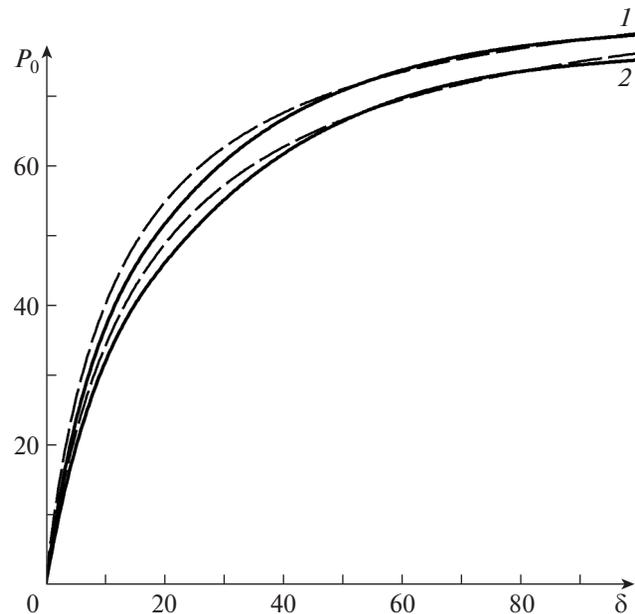


Рис. 5. Графики зависимости  $P_0(\delta)$ :  $r = 0.1$ ,  $\alpha = 1, 0.85$  (1, 2) в рамках S модели и на основе уравнения Навье–Стокса.

Решение уравнение Навье–Стокса (3.1) с граничными условиями скольжения (3.5) находим аналитически

$$\begin{aligned}
 U_z(\rho) = & \frac{1}{4} \left( \left( \rho^2 \ln r - R_1^2 \ln \frac{\rho}{R_2} - R_2^2 \ln \frac{R_1}{\rho} \right) R_1 R_2 \delta^2 + \right. \\
 & \left. + (R_1 + R_2) \rho^2 \sigma_p \delta + 2(R_2^2 - R_1^2) \sigma_p^2 + \right. \\
 & \left. + \left( R_1^3 + R_2^3 - R_1^2 R_2 \ln \frac{R_2}{\rho^2} - R_1 R_2^2 \ln \frac{R_1}{\rho^2} \right) \sigma_p \delta \right) (\sigma_p (R_1 + R_2) - \delta R_1 R_2 \ln r)^{-1}
 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (1.3), согласно (1.1) получаем

$$P_0 = \frac{64\delta(\delta r \ln r + (2r^2 - 2)\sigma_p)(1 - r)^2}{\beta} \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned}
 \beta = & r\delta(\delta + 8\sigma_p)((r^2 + 1) \ln r - r^2 + 1) + \\
 & + 2\sigma_p\delta(r^4 - 4r^2 \ln r - 1) + 16(r^4 - 2r^3 + 2r - 1)\sigma_p^2
 \end{aligned} \quad (3.8)$$

На рис. 5 и 6 сплошными линиями 1 ( $\alpha = 1$ ) и 2 ( $\alpha = 0.85$ ) показаны результаты вычислений  $P_0(\delta)$  для  $r = 0.1$  и  $r = 0.9$  в рамках линеаризованной S модели. Штриховыми линиями построены кривые по формуле (3.7) при  $\sigma_p = 1.018$ . Видно, что результаты вычислений числа Пуазейля для отношения радиусов цилиндров 0.1 (кривая 1) и 0.9 (кривая 2) в представленной работе приближаются к результатам гидродинамики со скольжением при  $\delta > 20$ . Отклонение не превосходит 5.6% при  $\delta$  и 1.5% при  $\delta = 40$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан алгоритм вычисления значений числа Пуазейля в промежуточном режиме течения газа между двумя длинными цилиндрами на основе решения линеаризованного кинетиче-

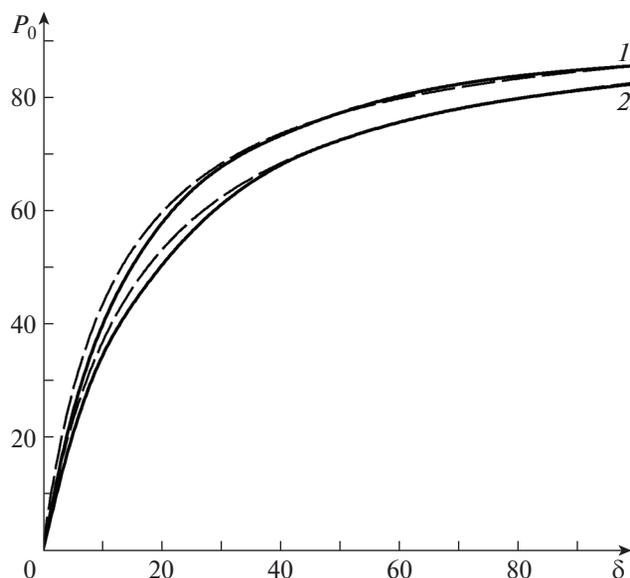


Рис. 6. Графики зависимости  $P_0(\delta)$ :  $r = 0.9$ ,  $\alpha = 1, 0.85$  (1, 2) в рамках S модели и на основе уравнения Навье–Стокса.

ского уравнения Шахова с использованием полиномиальной аппроксимации Чебышева. Проведен анализ влияния отношения радиусов цилиндров, параметра разрежения и коэффициентов аккомодации тангенциального импульса молекул газа на стенках канала на значения числа Пуазейля. Установлено, что с ростом отношения радиусов цилиндров, параметра разрежения и значений коэффициентов аккомодации тангенциального импульса молекул газа на стенках канала происходит монотонное возрастание числа Пуазейля. Максимальное значение этого числа характеризует свойства плоского течения газа, обусловленного действием постоянного продольного градиента давления, в гидродинамическом пределе. Полученные результаты могут быть использованы для численного моделирования массопереноса при течении газа в канале, образованного двумя коаксиальными цилиндрами, и для объяснения особенностей этого процесса.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ambrus V.E., Sharipov F., Sofonea V.* Comparison of the Shakhov and ellipsoidal models for the Boltzmann equation and DSMC for ab initio -based particle interactions // *Computers and Fluids*. 2020. V. 211. 104637.
2. *Boscarino S., Cho S.Y.* On the order reduction of semi-Lagrangian methods for BGK model of Boltzmann equation // *Applied Mathematics Letters*. 2022. V. 123. 107488.
3. *Rovenskaya O.I.* Numerical analysis of surface roughness effects on the Poiseuille flow caused by a small pressure drop // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2017. V. 110. P. 817–826.
4. *Valougeorgis D., Vasileiadis N., Titarev V.* Validity range of linear kinetic modeling in rarefied pressure driven single gas flows through circular capillaries // *European Journal of Mechanics / B Fluids, Special Issue on Non-equilibrium Gas Flows*. 2017. V. 64. P. 2–7.
5. *Шарипов Ф.М., Селезнев В.Д.* Движение разреженных газов в каналах и микроканалах. Екатеринбург: УрО РАН, 2008.
6. *Liu C., Yanga J., Ni Yu.* A multiplicative decomposition of Poiseuille number on rarefaction and roughness by lattice Boltzmann simulation // *Computers and Mathematics with Applications*. 2011. V. 61. P. 3528–3536.
7. *Kandlikar S.G., Garimella S., Li D., Colin S., King M.R.* Heat Transfer and Fluid Flow in Minichannels and Microchannels. Oxford: Elsevier Ltd., 2006.
8. *Шахов Е.М.* Течение разреженного газа между коаксиальными цилиндрами под действием градиента давления // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2003. Т. 43. № 7. С. 1107–1116.
9. *Breyiannis G., Varoutis S., Valougeorgis D.* Rarefied gas flow in concentric annular tube: Estimation of the Poiseuille number and the exact hydraulic diameter // *European Journal of Mechanics B/Fluids*. 2008. V. 27. P. 609–622.

10. *Шахов Е.М.* Об обобщении релаксационного кинетического уравнения Крука // Изв. АН СССР, МЖГ. 1968. № 5. С. 142–145.
11. *Mason J., Handscomb D.* Chebyshev polynomials. Florida: CRC Press, 2003.
12. *Гермидер О.В., Попов В.Н.* Неизотермическое течение разреженного газа в длинном цилиндрическом канале при произвольных перепадах давления и температуры // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 3. С. 125–140.
13. *Liu S., Trenkler G.* Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and Other Matrix Products // International Journal of Information and Systems Sciences. 2008. V. 4 № 1. P. 160–177.
14. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Fluid Mechanics. New York: Pergamon. 1989.
15. *Graur I., Sharipov F.* Non-isothermal flow of rarefied gas through a long pipe with elliptic cross section // Microfluid Nanofluid. 2009. V. 6. P. 267–275.

УДК 533.06.011

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДА ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ТУРБУЛЕНТНЫЙ НА СТРЕЛОВИДНОЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ЧИСЛЕ РЕЙНОЛЬДСА

© 2022 г. X. G. Lu<sup>a,\*,\*\*</sup>, S. H. Yi<sup>a</sup>, L. He<sup>a</sup>, D. D. Gang<sup>a</sup>, and H. L. Ding<sup>a</sup><sup>a</sup> National University of Defense Technology, College of Aerospace Science and Engineering, Changsha, Hunan, China

\*E-mail: luxiaoge18@163.com

\*\*E-mail: luxiaoge11@nudt.edu.cn

Поступила в редакцию 23.11.2021 г.

После доработки 21.12.2021 г.

Принята к публикации 21.12.2021 г.

Экспериментальное исследование процесса перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный проведено на плоской пластине с углом стреловидности передней кромки  $45^\circ$  в гиперзвуковой  $M = 6.0$  малозумной аэродинамической трубе. Исследованы мгновенные тонкие структуры течения в пограничном слое на стреловидной пластине при различных числах Рейнольдса в плоскостях поперек потока (по размаху пластины) с использованием метода рассеяния на наночастицах лазерным ножом (Nano-tracer Planar Laser Scattering, NPLS). В эксперименте число Рейнольдса на единицу длины (единичное число Рейнольдса) изменялось от  $1.04 \times 10^7$  до  $2.61 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ . Проанализированы характеристики пространственно-временной эволюции пограничного слоя, переходящего из ламинарного в турбулентный. Полученные результаты показывают, что с ростом числа Рейнольдса передний фронт ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое на наветренной стороне стреловидной пластины “опережает расписание”, а плоскость перехода в общем случае параллельна передней кромке пластины с углом стреловидности  $45^\circ$ . Основная причина того, что турбулентность в пограничном слое развивается на коротком расстоянии, состоит во влиянии поперечного течения. Вместе с исследованием полосчатой структуры поперечного течения в изображениях, полученных при визуализации течения методом рассеяния на наночастицах лазерным ножом, изучены характеристики волны поперечного течения и проанализировано влияние волны поперечного течения в пограничном слое на ламинарно-турбулентный переход.

*Ключевые слова:* гиперзвуковые течения, ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое, стреловидная плоская пластина, визуализация потока, поперечное течение

DOI: 10.31857/S0568528122030100

Проблема ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое является классической проблемой, которая долгие годы преследовала исследователей, и до сих пор остается горячей темой в области гидродинамики. Исследования ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое при условиях гиперзвукового течения имеют большое общенаучное и прикладное инженерное значение. Они широко используются во многих инженерных приложениях, таких как течение в двигателях гиперзвуковых летательных аппаратов и обтекание руля направления гиперзвуковых самолетов. Такие исследования оказывают важное влияние на ключевые темы аэродинамики, аэродинамический нагрев и запуск двигателя гиперзвуковых летательных аппаратов. В [1] было указано, что при переходе пограничного слоя из ламинарного в турбулентный сопротивление из-за поверхностного трения и величина теплового потока на поверхности самолета обычно увеличиваются, значения коэффициента трения и коэффициента теплопередачи в турбулентном потоке намного превышают соответствующие значения в ламинарном течении. В общем случае считается, что состояние развития течения в пограничном слое на поверхности летательного аппарата непосредственно влияет на сопротивление поверхностного трения и тепловую защиту самолета. Для гиперзвукового, особенно для плоского летательного аппарата, имеются многочисленные разновидности поверхностей руля направления или крыльев с раз-

личными структурами и функциями, которые могут обеспечить самолету высокое аэродинамическое качество, высокую маневренность, оптимальную схему управления и т.д. Когда самолет летит на большой скорости, после прохождения набегающего гиперзвукового поля течения, характеристики развития потока в пограничном слое на фюзеляже и крыльях самолета и разделение взаимодействия между ударной волной и пограничным слоем непосредственно влияют на поверхностные тепловые и аэродинамические характеристики поверхностей руля направления или крыльев. В теоретических и экспериментальных исследованиях руль направления и другие элементы самолета часто упрощаются до стреловидных плоских пластин для их анализа и исследования.

Как известно, на ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое воздействуют многие факторы. В [2] были подытожены специфические факторы такого рода, которые включают в себя уровень свободного шума, затупление передней кромки объекта, перетоки, число Маха, число Рейнольдса на единицу длины набегающего потока, температуру стенок, угол атаки, шероховатость поверхности объекта и т.д. Модели, такие как стреловидное крыло и стреловидная пластинка, позволили достичь определенных результатов исследований при условиях небольших скоростей. В [3] были выполнены исследования трехмерного пограничного слоя на плоской пластине с углом обратной стреловидности в  $45^\circ$  при наличии искусственных возмущений. Начальный рост возмущений был измерен с помощью термоанемометрии. Было представлено экспериментальное исследование взаимодействия в потоке, индуцированном стреловидным затупленным килем. Однако в случае течения на большой скорости характеристики пограничного слоя сильно изменяются из-за существования эффекта сжимаемости и физические величины, такие как скорость, температура и плотность, имеют большие градиенты и сложные пульсации, которые увеличивают нелинейность и случайность рассматриваемого течения. В [4] измерения интенсивности поверхностного теплопереноса и фотосъемка шлирен-методом были использованы для изучения турбулентного интерференционного поля течения при условиях гиперзвукового ламинарного и турбулентного пограничного слоя. Было представлено экспериментальное исследование интерференционного течения, индуцированного стреловидным затупленным килем. В [5, 6] было проведено детальное экспериментальное исследование эффекта линии перехода и угла атаки на устойчивость пограничного слоя на конусе и затупленном конусе в гиперзвуковой аэродинамической трубе. Однако по мере развития исследований было найдено, что турбулентность не является полностью случайной. Открытие квазиупорядоченной структуры турбулентности дает возможность изучения ее механизма [7]. Однако такие исследования главным образом все еще фокусируются на условиях несжимаемого течения, тогда как в условиях сжимаемого потока структура турбулентности, характерный масштаб, перемежаемость и мода ламинарно-турбулентного перехода иные, по этой причине необходимо выполнить еще много соответствующих исследований [8, 9]. Для гиперзвукового пограничного слоя в [10] были выполнены экспериментальные исследования с использованием метода рэлеевского рассеяния при числе Маха, равном 8.0, и проанализировано влияние чисел Рейнольдса и Маха на структуру турбулентного пограничного слоя. Было найдено, что основным фактором, который влияет на турбулентную фрактальную структуру и перемежаемость, является скорее число Рейнольдса, чем число Маха. В сравнительно небольшом количестве экспериментальных исследований, например, в [11, 12], было указано, что основная исследовательская работа в последние годы была сфокусирована на развитии и использовании метода прямого численного моделирования применительно к течению в гиперзвуковом пограничном слое.

Гиперзвуковой пограничный слой на стреловидной плоской пластине характеризуется большими числами Рейнольдса и Маха и сильной сжимаемостью. По этой причине выдвигаются более высокие требования к техническому обеспечению экспериментальных исследований и для дальнейших исследований требуется экспериментальное оборудование с более высоким пространственно-временным разрешением. В [13] экспериментальное изучение взаимодействия между рулем направления и плоской пластиной проведено с помощью измерения распределения давления на стенках модели и с использованием метода шлирен-фотографии. В [14] изучена неустойчивость турбулентного отрыва, индуцированного затупленной передней кромкой, и были проанализированы характеристики низкочастотных колебаний крупномасштабных структур в области отрыва. В [15] плоская лазерно-индуцированная флуоресценция (planar laser induced fluorescence (PLIF)) использована для исследования поля отрывного течения перед задней частью пластины с затупленной передней кромкой и структура поля течения и получены характеристики распределения потока тепла вблизи поверхности руля направления. В [16] проведены экспериментальные и численные исследования на руле направления с обратной стреловидностью на плоской пластине, распределение потока тепла на поверхности плоской пластины изме-

рено с использованием технологии жидкокристаллического термического формирования изображений и получены экспериментальные данные с высоким пространственным разрешением. Одновременно с помощью визуализации методом масляной пленки и методом полос были получены результаты по распределению линий тока и основного течения на стенке, при этом результаты экспериментов хорошо согласуются с результатами численного моделирования.

Используя традиционные оптические методы, такие как метод полос и теневой метод, трудно провести тонкие измерения из-за интегральных характеристик этих методов. Хотя метод рэлеевского рассеяния в [17, 18] и плоская лазерно-индуцированная флуоресценция (PLIF technique) в [19, 20] имеют более высокое разрешение, но в них все еще имеются некоторые изъяны, такие как низкое отношение сигнала к уровню шума и усложненный метод градуирования. Метод маркера частиц имеет характеристики полномасштабного измерения и высокое отношение сигнала к уровню шума. Трассировка наночастиц при хорошей способности к отслеживанию частиц позволяет реализовать измерения тонкой структуры. Метод рассеяния на наночастицах лазерным ножом (NPLS technique) представляет собой методику тонкого зондирования поля течения, независимо развиваемой исследовательской группой авторов настоящей работы. Ее пространственное разрешение достигает микрона, временное разрешение до 6 нс, разрешение корреляций по времени до 200 нс. Испытание было проведено для сверхзвукового поля течения. В [21, 22] были достигнуты плодотворные результаты исследования. В [23] получено тонкоструктурное изображение визуализации течения для области взаимодействия между рулем направления с обратной стреловидностью и турбулентным пограничным слоем в набегающем гиперзвуковом потоке при использовании метода рассеяния на наночастицах лазерным ножом (NPLS technique), и проанализировано влияние зависимости от угла обратной стреловидности, высоты прорези в руле направления и других факторов в поле течения перед рулем направления. Это обеспечило основу оптимального дизайна поверхности руля на правления летательного аппарата. В [24] проведено экспериментальное исследование плоской пластины в виде дельтаобразного крыла и получена тонкая структура пристеночного пограничного слоя для разных вертикальных расстояний от стенки с использованием метода рассеяния на наночастицах лазерным ножом (NPLS technique).

В настоящем эксперименте исследован процесс ламинарно-турбулентного перехода в гиперзвуковом пограничном слое на стреловидной плоской пластине и изучены характеристики волн поперечного течения в пограничном слое на основе изображений течения, полученных при его визуализации методом рассеяния на наночастицах лазерным ножом.

## 1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБОРУДОВАНИЕ И МЕТОДИКА ИСПЫТАНИЙ

### 1.1. Гиперзвуковая малозумная аэродинамическая труба и экспериментальная модель

Экспериментальное исследование ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое на стреловидной пластинке с затупленной передней кромкой с углом стреловидности  $45^\circ$  было проведено на базе гиперзвуковой  $M = 6.0$  малозумной аэродинамической трубе (рис. 1) в Аэродинамической лаборатории Национального университета оборонных технологий [25]. Внешний размер сопла аэродинамической трубы составляет  $260 \times 260$  мм. Длина экспериментальной секции равна 600 мм. Единичное число Рейнольдса диапазона рабочих режимов аэродинамической трубы лежит в интервале от  $2.0 \times 10^6$  до  $5.0 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ . Эффективное время работы установки более 30 с, для калибровки турбулентности в свободном потоке в аэродинамической трубе используется высокочастотный датчик пульсационного давления KuliteXSE-062-30A, уровень пульсаций ниже 5%. Основные параметры поля течения в аэродинамической трубе приведены в табл. 1.

Экспериментальная модель представляет собой стреловидную плоскую пластину с углом стреловидности  $45^\circ$ , радиусом затупления передней кромки 5 мм и шероховатостью поверхности 15 мкм. Размеры модели показаны на рис. 2.

### 1.2. Система рассеяния на наночастицах лазерным ножом (NPLS) для гиперзвуковых аэродинамических труб

На рис. 3 приведена схема системы рассеяния на наночастицах лазерным ножом [25–27]. Ее основные компоненты включают в себя CCD-камеру с междустрочной передачей, синхронный контроллер, лазер с двойной полостью на алюмоиттриевом гранате, легированном неодимом, генератор наночастиц и компьютерную систему. Разрешение CCD-камеры составляет  $2048 \times 2048$  пиксел, уровень яркости выходного изображения равен 4096, и минимальный временной

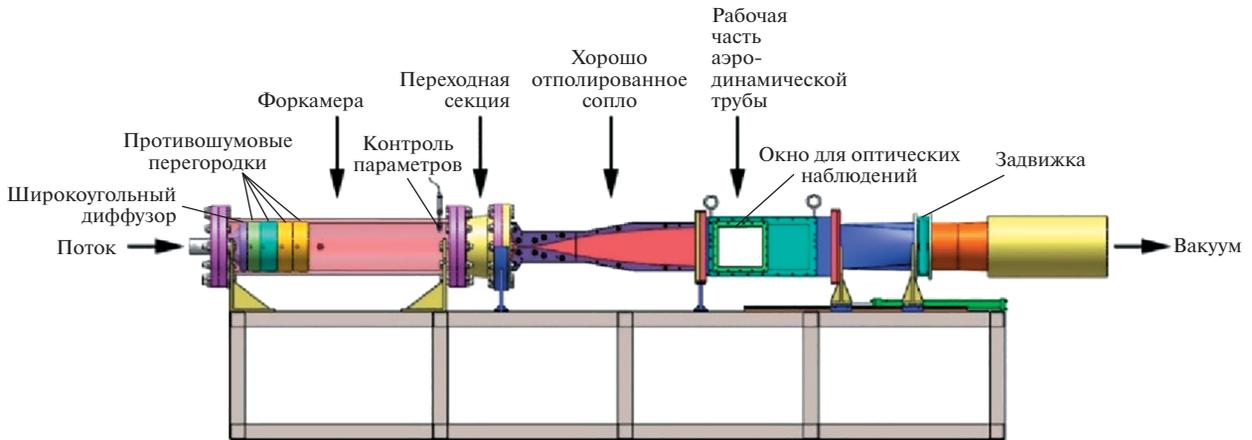


Рис. 1. Фотография гиперзвуковой малозумной аэродинамической трубы.

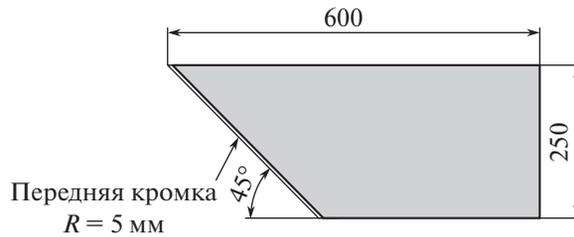


Рис. 2. Фотография стреловидной плоской пластины с углом стреловидности  $45^\circ$ .

интервал между двумя изображениями 200 нс. Пучок лазерного излучения имеет длину волны 532 нм, время одиночного импульса 6 нс, энергию импульса 350 мДж и толщину пучка в самом узком месте менее 1 мм.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И АНАЛИЗ

### 2.1. Тонкая структура течения в плоскости поперек потока по размаху пластины на стреловидной плоской пластине

Выберем декартову систему координат (рис. 4). Начало системы координат (точка  $O$ ) находится на пересечении вертикального направления к потоку и центральной поверхности передней кромки пластины, положительное направление оси  $x$  совпадает с направлением потока, положительное направление оси  $y$  параллельно вертикали к плоскости стреловидной пластины, направление, перпендикулярное плоскости  $x$ – $y$ , которое указывает на начальную точку стреловидной пластины, определяет положительное направление оси  $z$  и плоскость  $x$ – $z$  представляет собой плоскость пограничного слоя. На рис. 4 схематически изображена экспериментальная установка для измерений в плоскости поперек потока по размаху пластины.

Таблица 1. Условия в потоке

№ теста	$Ma_\infty$	$T_0$ , К	$\rho_\infty$ , кг м $^{-3}$	$U_\infty$ , м · с $^{-1}$	$\mu$ , Па · с	$Re$ , м $^{-1}$
Случай I	6.0	450	0.041	891.2	$3.43 \times 10^{-6}$	$1.04 \times 10^7$
Случай II	6.0	450	0.064	891.2	$3.43 \times 10^{-6}$	$1.67 \times 10^7$
Случай III	6.0	450	0.080	891.2	$3.43 \times 10^{-6}$	$2.08 \times 10^7$
Случай IV	6.0	450	0.101	891.2	$3.43 \times 10^{-6}$	$2.61 \times 10^7$

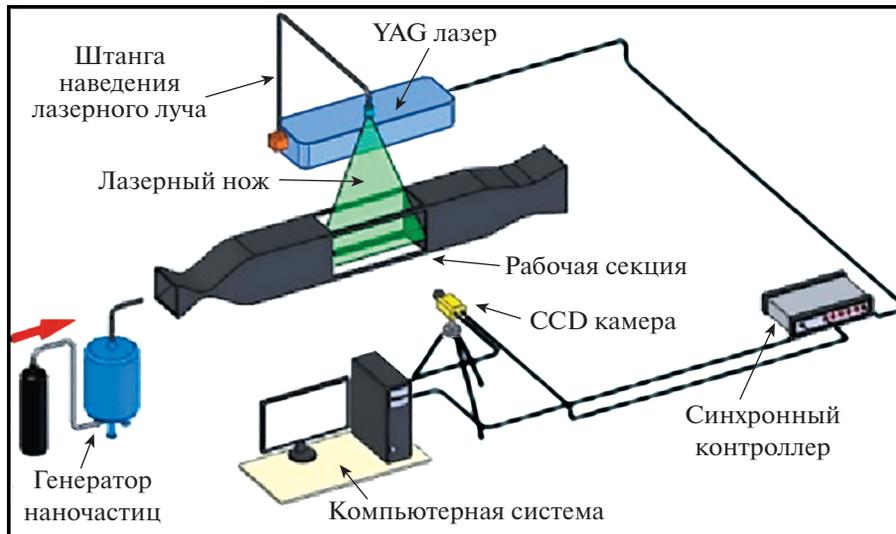


Рис. 3. Диаграмма экспериментальной системы по рассеянию на наночастицах лазерным ножом (NPLS technique).

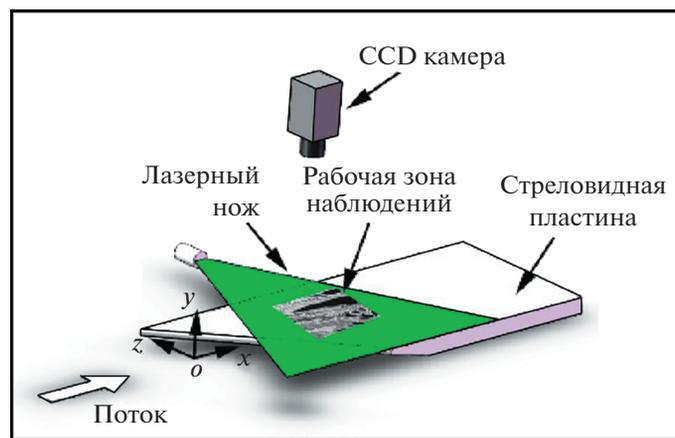
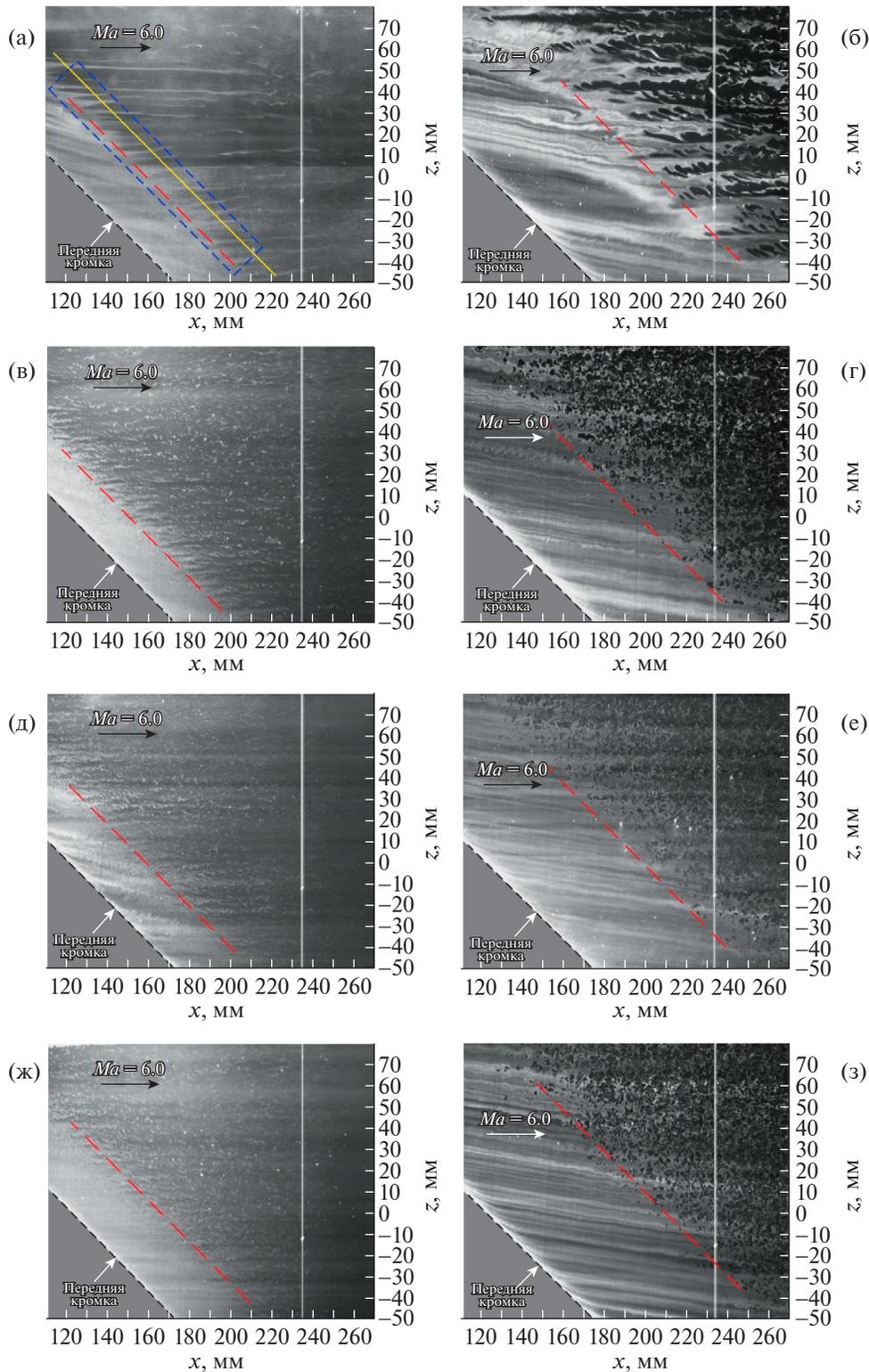


Рис. 4. Схематическое изображение измерений в плоскости поперек потока, а на модели стреловидной плоской пластины.

На рис. 5а–5з представлены изображения, полученные методом рассеяния на наночастицах лазерным ножом, структуры пограничного слоя в плоскости поперек потока (по размаху пластины) для модели гладкой плоской пластины со стреловидной затупленной передней кромкой при различных числах Рейнольдса и угла атаки модели  $\alpha = 0^\circ$ . Пространственное разрешение всех изображений равно 69 мкм/пиксел, поток направлен слева направо. Поле зрения изображения является центральной плоскостью стреловидной плоской пластины при  $x = 110\text{--}270$  мм, расстояние просвечивания по размаху пластины плоскостью лазерного ножа  $Z = -50\text{--}80$  мм. В табл. 1 расстояние по высоте лазерного ножа от верхней поверхности стреловидной пластины в каждом испытании равно  $y = 1.2$  и  $2.5$  мм соответственно. Имеются белые вертикальные линии вблизи  $x = 235$  мм на изображениях визуализации течения поперек потока по размаху пластины, которые были вызваны внезапным сверхнасыщением изображения в течение эксперимента, что приводит к пиксельному повреждению CCD-камеры, и изображение было напрямую воспроизведено как белая зона. Однако эта зона не влияет на анализ экспериментальных данных, поэтому эта часть поврежденных данных не удалялась при фактической обработке данных. Из всех изображений, приведенных на рис. 5а–5з, можно видеть, что для модели плоской пластины со стреловидной затупленной передней кромкой фронт ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое на стенке в основном параллелен стреловидной передней кромке и заметные полосы



**Рис. 5.** Структура течения на стреловидной плоской пластине в плоскости по размаху в случаях I–IV. (а) Случай I:  $Re = 1.04 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ ,  $y = 1.2 \text{ мм}$ ; (б) Случай II:  $Re = 1.04 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ ,  $y = 2.5 \text{ мм}$ ; (в) Случай III:  $Re = 1.67 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ ,  $y = 1.2 \text{ мм}$ ; (г) Случай IV:  $Re = 1.67 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ ,  $y = 2.5 \text{ мм}$ ; (д) Случай:  $Re = 2.08 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ ,  $y = 1.2 \text{ мм}$ ; (е) Случай III:  $Re = 2.08 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ ,  $y = 2.5 \text{ мм}$ ; (ж) Случай:  $Re = 2.61 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ ,  $y = 1.2 \text{ мм}$ ; (з) Случай IV:  $Re = 2.61 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ ,  $y = 2.5 \text{ мм}$ .

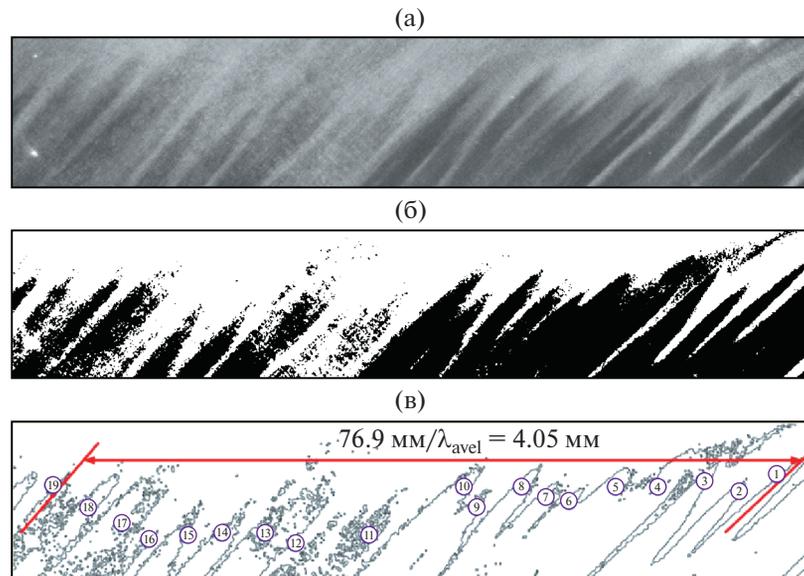
ламинарного течения могут наблюдаться при малых числах Рейнольдса, например, случай I, случай II и случай III.

В экспериментах единичное число Рейнольдса изображений на рис. 5а и 5б равно  $1.04 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ . Из этих изображений можно видеть, что когда высота лазерного ножа над поверхностью пластины равна  $y = 1.2 \text{ мм}$ , заметные полосы ламинарного течения могут быть видны в пограничном слое на стреловидной плоской пластине в области измерений. Параллельное расстояние между передней кромкой полос ламинарного течения и стреловидной передней кромкой равно  $26.9 \text{ мм}$  и заметные полосы ламинарного течения и частные структуры турбулентности можно наблюдать в задней области измерений. Однако пограничный слой не полностью развился в турбулентный пограничный слой. В общем случае считается, что ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое на стреловидной плоской пластине главным образом находится под воздействием поперечного течения и полосчатая структура перед ним полностью развивается в турбулентный пограничный слой, рассматриваемый как полоса поперечного течения, т.е. волна поперечного течения. Согласно измерениям положения полосы на изображении, угол между волной поперечного течения и стреловидной передней кромкой на рис. 5а около  $42.8^\circ$ . Когда высота лазерного ножа равна  $y = 2.5 \text{ мм}$ , структура поля течения не может быть видна в передней области модели, как показано на рис. 5б. Это происходит из-за того, что пограничный слой в передней области модели все еще ламинарный и высота  $y = 2.5 \text{ мм}$  превосходит толщину ламинарного пограничного слоя, поэтому структура течения в белой зоне отсутствует. На рис. 5а можно видеть только часть структуры турбулентного течения в заднем сечении зоны наблюдений. С точки зрения структуры течения, стреловидный плоский пограничный слой в области измерений имеет заметные полосчатые характеристики вдоль направления течения. Однако, из-за большей высоты лазерного ножа, часть области измерений превосходит толщину пограничного слоя и можно видеть меньше информации о пограничном слое. Более того, то, что видно на изображении, не похоже на регулярную полосчатую структуру, изображенную на рис. 5а, а скорее напоминает вихревую структуру с трехмерными характеристиками.

В экспериментах единичное число Рейнольдса изображений на рис. 5в и 5г равно  $1.67 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ . Из этих изображений можно видеть, что когда высота плоскости лазерного ножа равняется  $y = 1.2 \text{ м}$ , можно наблюдать заметную переходную структуру в стреловидном плоском пограничном слое в области измерений, а также хорошо заметны зона ламинарного течения, структура с крупномасштабными вихрями и структура с полностью раздробленными маленькими вихрями. Близко отстоящая полоса поперечного течения также может быть видна перед зоной перехода и параллельное расстояние между передней кромкой полосы поперечного течения и стреловидной передней кромкой равно  $19.8 \text{ мм}$ . Когда высота плоскости лазерного ножа равна  $y = 2.5 \text{ мм}$ , можно видеть крупные вихревые структуры после турбулентного перехода в стреловидном плоском пограничном слое в области измерений. Однако, как только плоскость лазерного ножа смещается выше, на изображении можно видеть только область после ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое, и ламинарная структура больше не видна в области наблюдений.

В экспериментах единичное число Рейнольдса изображений на рис. 5д и 5е равно  $2.08 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ . Из этих изображений видно, что пограничный слой может переходить из ламинарного в турбулентный, когда высота плоскости лазерного ножа равна  $y = 1.2 \text{ мм}$ , и наблюдаемое параллельное расстояние между передней кромкой поля течения и стреловидной фронтальной кромкой пластины равняется  $30.4 \text{ мм}$ . По сравнению с зоной перехода на той же высоте при единичном числе Рейнольдса, равном  $1.67 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ , расстояние между передним фронтом поля течения и стреловидной кромкой увеличивается. Это происходит из-за того, что толщина пограничного слоя, которая соответствует плотности на стенке, постепенно уменьшается вслед за увеличением числа Рейнольдса. По этой причине, на той же высоте пустая зона перед зоной перехода относительно увеличивается в размерах, и видно меньше информации о поле течения. Область ламинарного течения перед зоной турбулентного перехода не может быть ясно выделена. Когда высота плоскости лазерного ножа равна  $y = 2.5 \text{ мм}$ , можно наблюдать структуру в виде раздробленных вихрей в задней части стреловидной плоской пластины, но никакой заметной структуры потока не видно в передней области. По сравнению с меньшими значениями числа Рейнольдса, в области измерений вихревая структура более раздробленная. Это указывает на то, что область ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое является полностью развитой в турбулентное состояние после увеличения числа Рейнольдса.

В экспериментах единичное число Рейнольдса изображений на рис. 5ж и 5з равно  $2.61 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ . Из этих изображений видно, что параллельное расстояние между передней кромкой наблюдаемой области поля течения и стреловидной передней кромкой равно  $33.9 \text{ мм}$ , когда высота плос-



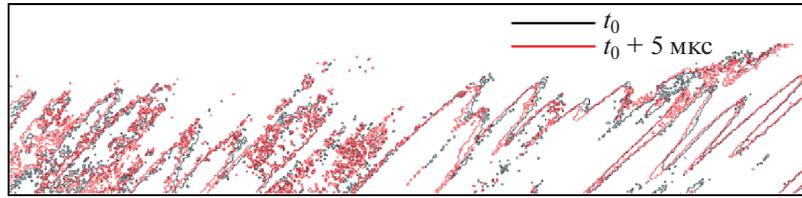
**Рис. 6.** Анализ волны поперечного течения на стреловидной пластине с затупленной передней кромкой ( $Re = 1.04 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ ). (а) Исходное NPLS изображение (увеличенное изображение частичной полосы поперечного течения на рис. 5а); (б) Бинарное изображение рис. 6а; (в) Результат выделения краев на рис. 6б.

кости лазерного ножа равна  $y = 1.2 \text{ мм}$ , и вихревая структура более раздробленная, когда высота плоскости лазерного ножа равна  $y = 2.5 \text{ мм}$ . Хотя положение ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое находится намного выше по потоку, потому что пограничный слой тоньше, можно видеть меньше информации о вихревой структуре, по сравнению с ситуацией, в которой число Рейнольдса равно  $2.08 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ .

## 2.2. Анализ характеристик поперечного течения на стреловидной плоской пластине по изображениям, полученным методом рассеяния на наночастицах лазерным ножом

Очевидно, что для стреловидной плоской пластины на ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое влияет поперечное течение. В согласии с полосой поперечного течения, возникающей на изображениях визуализации течения в поперечной плоскости по размаху пластины при угле атаки  $\alpha = 0^\circ$  у стреловидной плоской пластины с затупленной передней кромкой, в данной работе характеристики волны поперечного течения на некоторых изображениях выделяются и анализируются отдельно.

В соответствии с экспериментальными результатами, полученными в плоскости поперек потока по размаху пластины (рис. 5а–5з), на рис. 6 анализируются волны поперечного течения в плоскости по размаху пластины на основе результатов экспериментов, полученных методом рассеяния на наночастицах лазерным ножом на стреловидной гладкой модели пластины с затупленной передней кромкой при экспериментальном единичном числе Рейнольдса, равном  $1.04 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ , и угле атаки модели  $\alpha = 0^\circ$ . Рисунок 6а представляет собой увеличенное изображение некоторых полос поперечного течения, расположенных внутри прямоугольника, выделенного голубыми пунктирными линиями на рис. 5а. Рисунок 6б является изображением выделенного участка на рис. 6а после его бинаризации. В соответствии с полученным бинарным изображением выделение краев использовано для получения более тонкой структуры внешнего контура полосы поперечного течения (результат изображен на рис. 6в). В соответствии с пространственным разрешением получения изображений можно вычислить, что расстояние в пространстве между центральными линиями двух полос поперечного течения, отмеченных красными сплошными линиями на рис. 6в, равно  $L_1 = 76.9 \text{ мм}$ . Число полос поперечного течения в выбранном интервале отмечено на изображении ( $n_1 = 19$ ) в соответствии с идентификацией изображения на рис. 6в после выделения краев и для волны поперечного течения средняя длина волны при условиях эксперимента, согласно статистическому расчету, равна  $\lambda_{avel} = L_1/n_1 = 4.05 \text{ мм}$ .



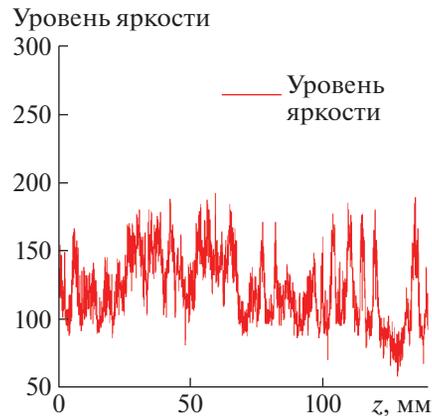
**Рис. 7.** Зависящий от времени анализ изображения на стреловидной пластине с затупленной передней кромкой ( $Re = 1.04 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ ).

На рис. 7 также приведены результаты проведенного выделения краев по двум кадрам изображений, полученных методом рассеяния на наночастицах лазерным ножом, относящихся к рис. 6а. На рис. 7 изображение в виде черной кромки соответствует результатам в момент времени  $t_0$ , а изображение в виде красной кромки дает результаты в момент времени  $t_0 + 5 \text{ мкс}$ . Как можно видеть из результатов на рис. 7, на временном интервале длиной 5 мкс структура волны поперечного течения главным образом перемещается параллельно вниз по потоку вдоль направления течения и деформация по размаху пластины очень мала. В соответствии со смещением нескольких полосок поперечного течения как функции времени, общее расстояние перемещения волны поперечного течения равно  $S_1 = 0.4 \text{ мм}$ , откуда можно вычислить скорость распространения волны поперечного течения:  $v_1 = 80 \text{ м/с}$ , и статистическая длина волны поперечного течения, вычисленная из предыдущего расчета, равна  $\lambda_{avel} = 4.05 \text{ мм}$ . Эти расчеты могут быть проведены на основе формулы (1), приведенной ниже, при использовании характеристической частоты развития волны поперечного течения, равной  $f_1 = 19.7 \text{ КГц}$

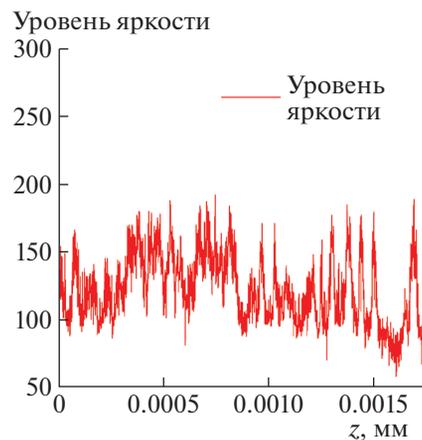
$$f = \frac{v}{\lambda}. \tag{1}$$

На временном интервале  $\Delta t = 5 \text{ мкс}$  вихрь поперечного течения главным образом перемещается параллельно и структурная деформация мала. Согласно гипотезе Тейлора можно считать, что на очень коротком временном интервале структура в виде волны поперечного течения только перемещается параллельно и изменения плотности могут быть охарактеризованы в соответствии с уровнем яркости изображения. Чтобы изучить характеристики области частот волны поперечного течения на основе визуализации течения, был выделен уровень яркости изображения вдоль желтой сплошной линии на рис. 5а и была получена кривая яркости изображения, приведенная на рис. 8. В соответствии с пространственным распределением яркости и средней скоростью параллельного перемещения волны поперечного течения, вычисленной выше, пространственные координаты яркости были конвертированы в зависимость от времени для получения пульсационной кривой яркости изображения на коротком временном интервале (рис. 9). Распределение спектральной плотности мощности получено расчетом энергетического спектра. Как изображено на рис. 10, характеристическая частота волны поперечного течения может быть прочитана из данных по энергетическому спектру на частоте 23.7 кГц, который аналогичен результату, вычисленному при распознавании изображения, т.е. характеристики поперечного течения можно изучить на основе изображений, полученных методом рассеяния на наночастицах лазерным ножом.

Изображения визуализации течения, приведенные на рис. 5в и 5д и полученные при единичных числах Рейнольдса  $1.67 \times 10^7$  и  $2.08 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ , соответственно, могут быть проанализированы таким же образом, как изображение, обработанное на рис. 5а. В соответствии с результатами расчетов течения на стреловидной плоской пластине с затупленной передней кромкой, когда экспериментальное число Рейнольдса равно  $1.67 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ , общее расстояние перемещения волны поперечного течения равно  $S_1 = 2.01 \text{ мм}$ , откуда можно вычислить скорость распространения волны поперечного течения, которая таким образом составляет  $v_1 = 402 \text{ м/с}$ . Согласно статистической длине волны, рассчитанной для волны поперечного течения, и равной  $\lambda_{avel} = 4.7 \text{ мм}$ , может быть вычислена характеристическая частота развития волны поперечного течения  $f_1 = 85.5 \text{ кГц}$ . Когда экспериментальное число Рейнольдса равно  $2.08 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ , общее расстояние перемещения волны поперечного течения равно  $S_1 = 2.64 \text{ мм}$ , откуда можно вычислить скорость распространения волны поперечного течения, которая таким образом составляет  $v_1 = 528 \text{ м/с}$ . Согласно статистической длине волны, рассчитанной для волны поперечного течения, и равной



**Рис. 8.** Выделение уровня яркости на стреловидной пластине с затупленной передней кромкой ( $Re = 1.04 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ ).

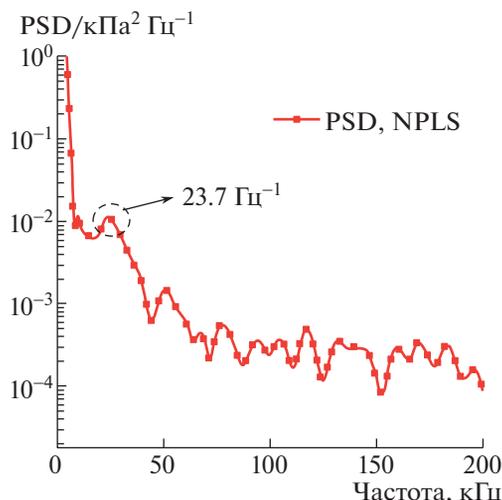


**Рис. 9.** Временной сигнал уровня яркости на стреловидной пластине с затупленной передней кромкой ( $Re = 1.04 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ ).

$\lambda_{avel} = 4.75$  мм, может быть вычислена характеристическая частота развития волны поперечного течения  $f_1 = 111.2$  кГц. По сравнению с экспериментальным числом Рейнольдса  $1.04 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ , с ростом числа Рейнольдса расстояние между полосами поперечного течения возрастает незначительно и число полос поперечного течения на единицу длины убывает, т.е. статистическая длина волны соответствующих полос поперечного течения выросла, скорость распространения волн поперечного течения, очевидно, также выросла и соответствующая характеристическая частота также возрастает.

## ВЫВОДЫ

В настоящем исследовании изображения плоского пограничного слоя на стреловидной пластине с затупленной передней кромкой получены с высоким разрешением, когда течение в пограничном слое трансформируется из ламинарного в турбулентное. Эксперименты проведены при различных числах Рейнольдса с помощью измерений поля течения с высоким разрешением во времени и по пространству, визуализации течения выполнены методом рассеяния на наночастицах лазерным ножом (NPLS technique). Получена тонкая структура поля течения во время развития пограничного слоя. Таким образом, завершено исследование механизма и законов ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое. В соответствии с экспериментальными результатами, полученными методом рассеяния на наночастицах лазерным ножом, найдено, что фронт ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое на гладкой плоской пластине со



**Рис. 10.** Спектральная функция уровня яркости на стреловидной пластине с затупленной передней кромкой ( $Re = 1.04 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ ). PSD – спектральная плотность мощности; NPLS – результаты, полученные методом рассеяния на наночастицах лазерным ножом.

стреловидной затупленной передней кромкой параллелен передней кромке стреловидной плоской пластины. Более того, при малых значениях числа Рейнольдса при угле атаки  $0^\circ$  можно наблюдать заметные полосы поперечного течения, но никаких полосчатых структур не наблюдается, когда число Рейнольдса возрастает до некоторого значения в рассмотренном диапазоне. При том же угле атаки и росте числа Рейнольдса положение ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое на подветренной стороне продвигается вверх по потоку. С помощью анализа полос поперечного течения на изображениях по размаху пластины, полученных методом рассеяния на наночастицах лазерным ножом, с числом Рейнольдса, изменяющимся в диапазоне от  $1.04 \times 10^7$  до  $2.08 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$  при нулевом угле атаки, найдено, что при экспериментальных условиях диапазон длины волны, рассчитанной для волн поперечного течения, лежит в пределах от 4.05 до 4.75 мм и соответствующий диапазон частот волны поперечного течения лежит в пределах от 19.7 до 111.2 кГц. С ростом числа Рейнольдса расстояние между полосами поперечного течения увеличивается незначительно и число полос поперечного течения на единицу длины убывает, т.е. статистическая длина волны соответствующих полос поперечного течения возрастает, скорость распространения волн поперечного течения также растет, как и соответствующая характеристическая частота.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа поддержана Национальным планом базовых исследований и развития Китая (грант № 2019YFA0405300), Главным научно-исследовательским планом Национального Фонда естественных наук Китая (гранты №№ 91752102 и 11832018) и Национальным проектом исследования и развития главных научных инструментов Китая (грант № 11527802). Авторы выражают искреннюю благодарность за эту поддержку.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Liu X.L., Yi S.H., Niu H.B., Lu X.G. Influence of laser-generated perturbations on hypersonic boundary-layer stability // Acta Phys. Sin. 2018. V. 67. № 21.
2. Zhong X.L. Direct numerical simulation of 3-D hypersonic boundary layer receptivity to free stream disturbances // The 36th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, American Institute of Aeronautics and Astronautics. 1998.
3. Wu Y.J., Ming X. Experimental Study of Initial Disturbance Growth for Cross Flow Instability // ACTA Aerodynamica Sinica. 2000. V. 18. № 1. P. 62–67.
4. Li S.X., Ma J.K., Guo X.G. Experimental Study of Hypersonic Interaction Flow Induced by High Sweep Fin Model // Physics of Gases. 2016. V. 1. № 3. P. 1–5.

5. *Stetson K.F., Thompson E.R., Donaldson J.C., Siler L.G.* Laminar boundary layer stability experiments on a cone at Mach 8, Part 1: Sharp cone // AIAA Paper 83-1761. 1983.
6. *Stetson K.F., Thompson E.R., Donaldson J.C., Siler L.G.* Laminar boundary layer stability experiments on a cone at Mach 8, Part 2: Blunt Cone // AIAA Paper 84-0006. 1984.
7. *Kline S.J., Reynolds W.C., Schranb F.A., Runstadler P.W.* The structure of turbulent boundary layer // Journal of Fluid Mechanics. 1967. V. 30. № 4. P. 741–774.
8. *Theodorsen T.* Mechanism of turbulence, Proceedings of the second Midwestern conference on fluid mechanics // Ohio State University. USA, 1952.
9. *Head M.R., Bandyopadhyay P.R.* New aspects of turbulent boundary-layer structure // J. Fluid Mech. 1981. V. 107. P. 297–338.
10. *Baumgartner M.L., Erbland P.J., Etz M.R., Yalin A.B., Muzas K., Smits A.J., Lempert W.R., Miles R.B.* Structure of a Mach 8 Turbulent Boundary Layer // In: 35th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit Reno. NV, 1997.
11. *Martin M.P.* Direct numerical simulation of hypersonic turbulent boundary layers. Part 1. Initialization and comparison with experiments // J. Fluid Mech. 2007. V. 570. P. 347–364.
12. *Li X.L., Fu D.X., Ma Y.W.* Assessment of the compressible turbulence model by using the DNS data // Chin. J. Theor. Appl. Mech. 2012. V. 44. № 2.
13. *Li Y.L., Li S.X.* Investigation of interactive hypersonic laminar flow over blunt fin // Journal of Astronautics. 2007. V. 28. № 6. P. 1472–1477.
14. *Wang S.F., Wang Y.* Turbulent separation features induced by blunt fins in hypersonic flow // Acta Aeronautica et Astronautica Sinica. 1996. V. 17. № 7. P. 2–7.
15. *Fox J.S., O'Byrne S., Houwing A.P.* Fluorescence visualization of hypersonic flow establishment over a blunt fin // AIAA J. 2001. V. 39. № 7. P. 1329–1337.
16. *Tutty O.R., Roberts G.T., Schuricht P.H.* High-speed laminar flow past a fin–body junction // J. Fluid Mech. 2013. V. 737. P. 19–55.
17. *Smith M.W., Smits A.J.* Visualization of the structure of supersonic turbulent boundary layers // Exper. in Fluids. 1995. V. 18. № 4. P. 288–302.
18. *Smith M.W., Smits A.J., Miles R.B.* Cinematic visualization of coherent density structures in a supersonic turbulent boundary layer // Opt. Lett. 1988. P. 14916.
19. *Danehy P.M., Wilkes J.A., Alderfer D.W., Jones S.B., Robbins A., Patry D., Schwartz R.* Planar laser-induced fluorescence (PLIF) investigation of hypersonic flow fields in a Mach 10 wind tunnel // AIAA Paper. 2006. P. 2006–3442.
20. *Bathel B.F., Danehy P.M., Inman J.A., David A. Scott B.* PLIF Visualization of Active Control of Hypersonic Boundary Layers Using Blowing // AIAA Paper. 2008. P. 2008–4266.
21. *He L., Yi S.H., Tian L.F., Chen Z., Zhu Y.Z.* Simultaneous density and velocity measurements in a supersonic turbulent boundary layer // Chin. Phys. 2013. V. 22. № 2. P. 328–334.
22. *Zhu Y.Z., Yi S.H., Chen Z., Ge Y., Wang X.H., Fu J.* Experimental investigation on aero-optical aberration of the supersonic flow passing through an optical dome with gas injection // Acta Phys. Sin. 2013. № 8. P. 259–266.
23. *Gang D.D.* Low noise experimental investigation on supersonic/hypersonic boundary layer transition and flow over blunt fins. Changsha: National University of Defense Technology. 2017.
24. *Niu H.B., Yi S.H., Liu X.L., Lu X.G., Gang D.D.* Experimental investigation of boundary layer transition over a delta wing at  $Ma = 6$  // Chinese Journal of Aeronautics. 2020. V. 33. № 7. P. 1889–1902.
25. *Сяогэ Лу, Шихэ И, Линь Хэ, Сяолин Лю, Хайбо Ню.* Экспериментальное исследование перехода в гиперзвуковом пограничном слое на пластине при угле скольжения  $45^\circ$  // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 1. С. 113–123.
26. *Zhao Y.X., Yi S.H., Tian L.F., Cheng Z.Y.* Supersonic flow imaging via nanoparticles // Sci. China, Ser. E. 2009. V. 52. № 12. P. 3640–3648.
27. *He L., Yi S.H., Lu X.G.* Experimental study on the density characteristics of a supersonic turbulent boundary layer // Acta Phys. Sin. 2017. V. 66. № 2. P. 025701.

УДК 533.6

## МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОГО СРЫВА ПОТОКА С ПРОФИЛЯ, ПРИМЕНИМАЯ ПРИ БОЛЬШИХ УГЛАХ ОТКЛОНЕНИЯ ЗАКРЫЛКА НА ЗАДНЕЙ КРОМКЕ

© 2022 г. Shi-Long Xing<sup>a</sup>, He-Yong Xu<sup>a,\*</sup><sup>a</sup> National Key Laboratory of Science and Technology on Aerodynamic Design and Research,  
Northwestern Polytechnical University, Xi'an, P.R. China

\*E-mail: xuheiyong@nwpu.edu.cn

Поступила в редакцию 30.11.2021 г.

После доработки 20.12.2021 г.

Принята к публикации 21.12.2021 г.

Предложена модель динамического срыва потока с профиля с закрылком на задней кромке, основанная на нейронной сети с долгосрочной кратковременной памятью (LSTM). В модели рассматриваются нелинейные аэродинамические силы, вызванные большим углом отклонения закрылка. Использован численный метод, основанный на нестационарных, осредненных по Рейнольдсу уравнениях Навье–Стокса (URANS). Рассчитаны коэффициенты аэродинамических сил, действующих на профиль при различных законах отклонения закрылка в ходе движения по тангажу. Результаты показывают, что максимальное значение коэффициента подъемной силы может уменьшиться на 15.4%, а максимальные значения коэффициента сопротивления и момента тангажа могут уменьшиться на 34.8 и 31.8% соответственно. Посредством закрылка можно эффективно снизить нагрузку, испытываемую профилем от момента тангажа при динамическом срыве вихрей. Полученные данные по коэффициентам аэродинамических сил использованы для обучения модели. Результаты, полученные на основе модели, показывают, что она в состоянии достаточно точно определить характеристики динамического срыва потока с профиля. Обсуждается влияние гиперпараметров нейронной сети с долгосрочной кратковременной памятью на предсказательные возможности модели. Последние тем выше, чем больше количество шагов по времени в реализации и количество входных параметров.

*Ключевые слова:* интеллектуальный ротор, закрылок на задней кромке, динамический срыв потока, нейронная сеть, долгосрочная кратковременная память

DOI: 10.31857/S0568528122030161

Нестационарное поле течения у несущего винта вертолета в поступательном горизонтальном полете чрезвычайно сложно. В результате совместного действия вращения лопасти и поступательного полета имеют место сильные изменения числа Маха по размаху лопасти. Таким образом, при различных углах азимута у лопасти могут иметь место течения нескольких различных типов. В концевой области на опережающей лопасти имеет место трансзвуковое течение с ударными волнами, а на отступающей лопасти возникает обратное течение, сопровождающееся срывом потока. Нестационарный след, состоящий из сошедших следов и концевых вихрей, создает очень сложные аэродинамические нагрузки на лопасти несущего винта. Нестационарные аэродинамические силы взаимодействуют с длинными и гибкими лопастями, создавая большие вибрационные нагрузки и шум [1]. Вибрационные нагрузки распространяются внутрь корпуса, приводя к вибрациям в различных точках последнего. Вибрации корпуса снижают уровень комфорта пилота и пассажиров и сокращают усталостную выносливость механических, структурных и электронных компонентов. Шум также является важным фактором при проектировании вертолетов [2]. В настоящее время имеются разработки по активному управлению вибрациями и снижению шума несущего винта, основанные на концепции интеллектуального несущего винта.

Благодаря быстрому развитию интеллектуальных материалов, имеет место значительный прогресс в развитии интеллектуальных роторов, основанных на таких материалах [3]. Использование таких роторов представляет собой своего рода технологию активного управления несущим винтом вертолета, где интеллектуальная конструкция, изготовленная из интеллектуальных ма-

териалов, действует, как актуатор. Интеллектуальная конструкция заставляет закрылок отклоняться таким образом, чтобы достичь снижения вибрации и шума при улучшении рабочих характеристик. Интеллектуальный несущий винт, рассматриваемый ниже, использует закрылок на задней кромке. Благодаря потенциальным возможностям интеллектуального несущего винта в подавлении вибраций и шумов и улучшении рабочих характеристик, он завоевал одно из центральных мест в исследованиях технологий несущих винтов вертолетов [4]. В настоящее время исследования по интеллектуальным несущим винтам в основном сосредоточены на снижении вибраций и шума от взаимодействия лопасти и вихрей в диапазоне относительно малых скоростей [2]. В будущем такие исследования будут развиваться в направлении снижения вибраций и шума во всем диапазоне параметров полета, т.е. и в условиях высоких скоростей и больших нагрузок. Для традиционных вертолетов с основным несущим винтом и хвостовым ротором отступающая лопасть находится под большим углом атаки, чем опережающая, чтобы уравновесить момент крена в поступательном полете. В условиях высоких скоростей и больших нагрузок, благодаря большому углу атаки, на отступающей лопасти разовьется динамический срыв потока. Под динамическим срывом понимается явление задержки срыва за пределы статического угла атаки срыва вследствие нестационарного движения несущих поверхностей [5]. Динамический срыв приводит к чрезмерным нагрузкам на лопасти при тангаже. Он является одним из факторов, ограничивающих область полетных режимов вертолета. Согласно имеющимся данным исследований, для эффективного уменьшения нагрузки на профиль, создаваемой моментом тангажа в ходе динамического срыва потока, требуется большой (больше чем  $10^\circ$ ) угол отклонения закрылка [6–8]. Разумно предположить, что относительно большой угол отклонения закрылка требуется и для снижения вибрационной нагрузки на ротор, вызванной динамическим срывом вихря. Поскольку при конструировании и испытании новых конфигураций в начальной стадии этого процесса важную роль играет численное моделирование, возникает необходимость создания модели динамического срыва потока, которая могла бы с достаточной точностью рассчитать аэродинамические силы, действующие на профиль при больших углах отклонения закрылка.

В большинстве опубликованных работ по интеллектуальным несущим винтам вертолетов снижение вибраций и шума и улучшение рабочих характеристик анализируются без учета динамического срыва потока [4, 9–12]. Лишь в небольшом числе исследований этот фактор включен в рассмотрение [13–15]. В этих работах аэродинамические силы, действующие на закрылок, рассчитываются в линейном приближении [16–19]. Нелинейные аэродинамические силы, создаваемые большими углами отклонения закрылка, не рассматриваются и поэтому предложенные методики в состоянии рассчитать силы, действующие на профиль, лишь когда закрылок отклонен на малый угол (менее  $5^\circ$ ). Модель динамического срыва потока с профиля, разработанная в настоящей работе и основанная на нейронной сети с долгосрочной кратковременной памятью, пригодна для вычислений при больших углах отклонения закрылка. Проведено обучение данной модели и выполнена оценка ее точности и устойчивости (robustness) на основании полученных при ее помощи результатов. Анализируется влияние гиперпараметров сети на предсказательную точность модели. Этот анализ сосредоточен на влиянии количества шагов по времени и входных переменных в конкретной реализации на точность результатов.

## 1. ОСОБЕННОСТИ ЗАКРЫЛКА И ЗАКОН ЕГО ДВИЖЕНИЯ

Рассматривается профиль SC1095 при числе Маха набегающего потока 0.302 и числе Рейнольдса, вычисленном по длине хорды,  $3.89 \times 10^6$ . Профиль совершает движение тангажа относительно линии четвертой хорд по следующему закону

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_m \cdot \sin(\omega t - \pi/2) \quad (1.1)$$

где  $\alpha_0$  и  $\alpha_m$  – среднее значение угла тангажа, равное  $9.92^\circ$ , и амплитуда колебаний по тангажу, равная  $9.90^\circ$  соответственно [20]. Для описания колебаний профиля по тангажу обычно используют приведенную частоту  $\kappa$ , определяемую следующим образом

$$\kappa = \omega c / 2V_\infty \quad (1.2)$$

где  $c$  – длина хорды, а  $V_\infty$  – скорость набегающего потока. Длина хорды профиля равна 0.61 м, а приведенная частота  $\kappa = 0.148$ .

На рис. 1а представлена схематическая картина отклонения закрылка на задней кромке; здесь  $c$  – длина хорды профиля, а длина хорды закрылка равна  $0.3c$ . Отклонение закрылка происходит по синусоидальному закону вокруг оси вращения закрылка. Угол отклонения  $\delta$  отрицателен, ко-

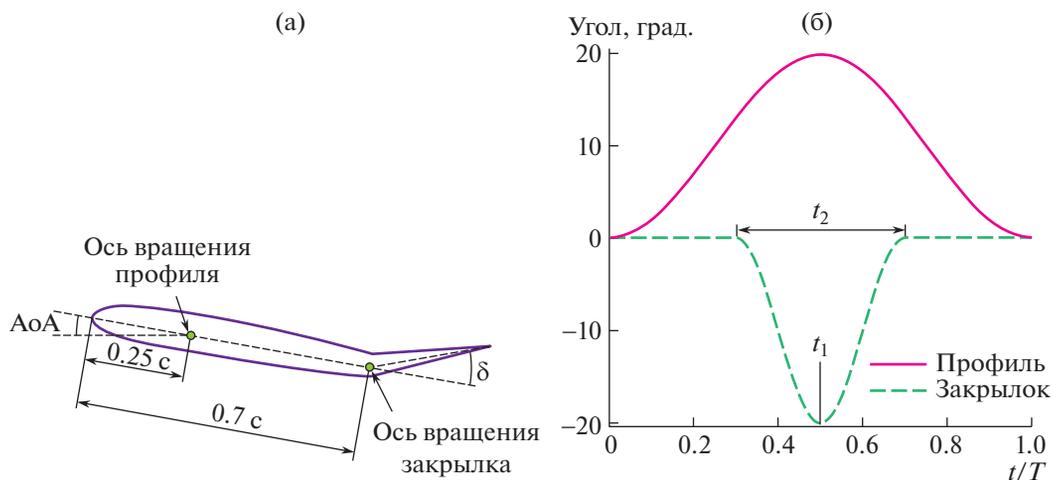


Рис. 1. Схематическое изображение степеней свободы закрылка (а) и законы движения профиля и закрылка.

гда закрылок отклоняется вверх. При численном моделировании просвет между профилем и закрылком не принимается во внимание. На рис. 1б представлены законы движения профиля и закрылка в течение одного цикла движения по тангажу. Здесь  $t/T$  — безразмерное время в пределах цикла,  $t_1$  — момент времени, когда угол отклонения закрылка имеет минимальное значение  $\delta_{\min}$  и  $t_2$  — интервал времени, в течение которого происходит отклонение закрылка.

## 2. МЕТОД ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЯ

При моделировании нестационарного поля течения около профиля численно решаются нестационарные, осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса (URANS) для сжимаемого газа. Для замыкания системы уравнений используется модель турбулентности Спаларта–Аллараса. Уравнения дискретизируются при помощи метода конечных объемов. Конвективные члены дискретизируются по схеме AUSM+ -up, а вязкие потоки по центральной схеме Джеймсона второго порядка. Интегрирование по физическому времени осуществляется посредством метода двойного времени. Интегрирование по псевдовремени использует неявную схему Гаусса–Зейделя с нижней и верхней прогонкой (LU-SGS), которая может эффективно увеличивать шаг по времени, повышая эффективность расчетов. В нестационарных расчетах используется алгоритм деформации сетки, основанный на радиальной базисной функции. Этот алгоритм в различных условиях порождает много низкокачественных сеток, особенно когда закрылок отклонен на большой угол. Помимо алгоритма деформации сетки, основанного на радиальной базисной функции, расчеты на динамической сетке используют алгоритм сглаживания сетки, предложенный в работе [21], гарантирующий высокое качество сеток при всех условиях. Метод численного моделирования течения проверялся в работе [22].

## 3. МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОГО СРЫВА ПОТОКА, ИСПОЛЬЗУЮЩАЯ НЕЙРОННУЮ СЕТЬ С ДОЛГОСРОЧНОЙ КРАТКОВРЕМЕННОЙ ПАМЯТЬЮ

Нейронная сеть с долгосрочной кратковременной памятью (LSTM) была предложена в 1997 г. в работе [23]. Она представляет собой один из видов рекуррентных нейронных сетей и позволяет преодолеть проблемы устойчивости, свойственные обычным рекуррентным нейросетям, таким как исчезновение и взрыв градиента [24]. Центральной идеей, на которой основана архитектура LSTM, является ячейка памяти, которая может сохранять свое состояние во времени, и нелинейные блоки селекции, управляющие потоками информации, направленными внутрь и из ячейки [25]. Распространенная на всю временную область, LSTM нейросеть может рассматриваться как многослойная нейронная сеть. При наличии достаточного количества шагов по времени соответствующая LSTM нейросеть может рассматриваться как глубокая нейронная сеть. Архитектура ячейки LSTM показана на рис. 2а. Она состоит из различных структур затвора и является основным модулем LSTM нейросети [25]. Ячейка памяти  $C_t$  предназначена для хранения инфор-

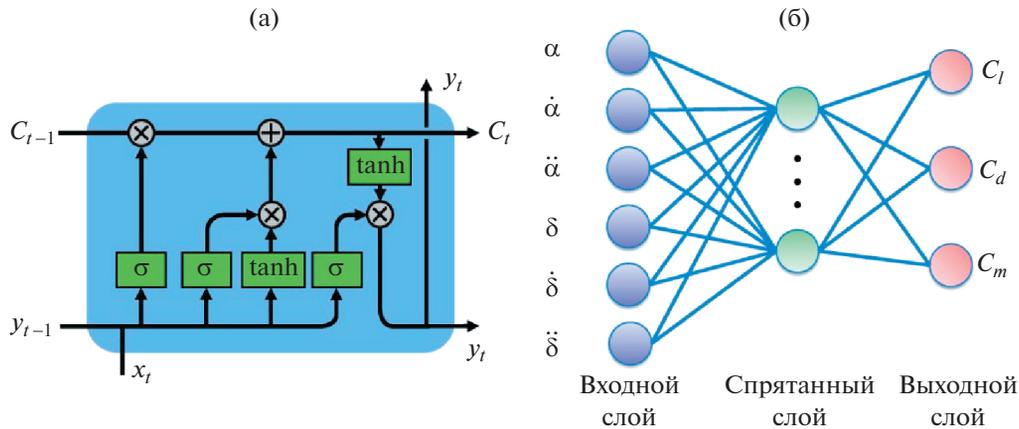


Рис. 2. Архитектура ячейки долговременной краткосрочной памяти (а) и схематическая диаграмма базовой модели (б).

мации в LSTM; это означает, что выходные данные с текущего шага по времени содержат входную информацию предыдущих шагов по времени. Специальные структуры затвора, как затвор входа  $i_t$ , затвор выхода  $o_t$  и забывающий затвор  $f_t$ , управляют распространением информации в нейросети. Функция активации и гиперболический тангенс выражаются следующим образом

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (3.1)$$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (3.2)$$

где  $\sigma$  – функция активации отдельных затворов, определенная на интервале от 0 до 1 и определяющая количество информации, проходящее через затворы, а  $\tanh$  используется для осуществления нелинейного преобразования после входа. Полный процесс расчетов с использованием LSTM нейросети выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} f_t &= \sigma(W_f \cdot [y_{t-1}, x_t] + b_f) \\ i_t &= \sigma(W_i \cdot [y_{t-1}, x_t] + b_i) \\ o_t &= \sigma(W_o \cdot [y_{t-1}, x_t] + b_o) \\ \tilde{C} &= \tanh(W_C \cdot [y_{t-1}, x_t] + b_C) \\ C_t &= f_t * C_{t-1} + i_t \times \tilde{C} \\ y_t &= o_t \cdot \tanh \cdot C_t \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $W_f, W_i, W_o, W_C$  и  $b_f, b_i, b_o, b_C$  – веса и отклонения LSTM нейросети соответственно.

На рис. 2б показана базовая модель динамического срыва потока, основанная на LSTM нейросети. Входной слой состоит из шести входных переменных, включая угол атаки, скорость изменения угла атаки, ускорение угла атаки, угол отклонения закрылка, скорость изменения угла отклонения закрылка и ускорение угла отклонения закрылка. Скрытый слой состоит из 90 ячеек LSTM. Выходной слой включает в себя коэффициенты подъемной силы, сопротивления и момента тангажа. В качестве функции потерь при определении коэффициентов аэродинамических сил используется среднеквадратичная ошибка. Программирование, обучение и тестирование LSTM нейросети проводились при помощи открытой библиотеки Keras. Коэффициенты аэродинамических сил рассчитывались на основе уравнений URANS при различных законах движения закрылка. Значения  $\delta_{\min}$  были  $0, -5^\circ, -10^\circ, -15^\circ$  и  $-20^\circ$ . Значения  $t_1$  были 0.4, 0.5 и 0.6. Значения  $t_2$  были 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 и 1.0. Кривые изменения нестационарных аэродинамических коэффициентов получены при 59 различных законах движения профиля. Важной

проблемой при машинном самообучении является предварительная обработка данных. Качество массивов данных сильно влияет на обучение модели. Поэтому данные отдельных реализаций нормализуются, чтобы исключить выходящие из общего ряда данные, которые могли бы замедлить процесс обучения модели или даже привести к отсутствию сходимости [26]. Эти реализации подразделяются на используемые при обучении и при тестировании. Процесс обучения состоит из двух этапов: расчет в прямом направлении и обратное распространение ошибки во времени. В прямом расчете определяются значения на выходном слое. Различия между значениями, полученными при помощи модели и в гидродинамическом расчете, представляют собой ошибки модели. Алгоритм обратного распространения ошибки во времени передает ошибки модели назад во временной области и обновляет веса и отклонения модели. Для минимизации ошибки обучения и устранения минимальных локальных значений используется оптимизатор Adam с соответствующей скоростью обучения.

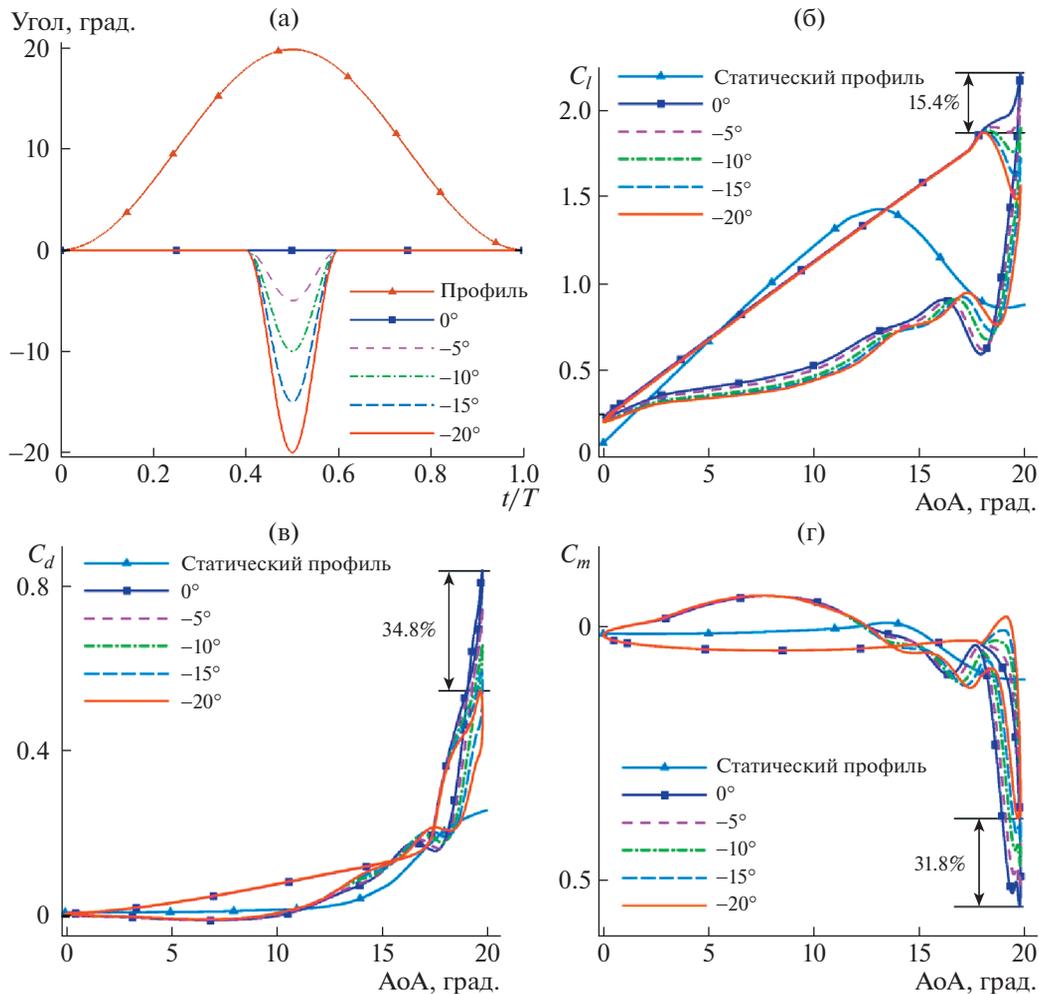
## 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

### 4.1. Влияние отклонения закрылка вверх на динамический срыв потока

На рис. 3а представлены зависимости от времени угла атаки профиля и угла отклонения закрылка в течение одного цикла движения по тангажу при различных минимальных углах отклонения закрылка;  $t_1 = 0.5$ ,  $t_2 = 0.2$ , а  $\delta_{\min}$  принимает значения  $0$ ,  $-5^\circ$ ,  $-15^\circ$  и  $-20^\circ$ . На рис. 3б–3г проведено сравнение коэффициентов аэродинамических сил, действующих на профиль, при различных значениях  $\delta_{\min}$ . По сравнению со случаем статического профиля, динамический срыв потока с профиля задерживается, а угол атаки, соответствующий срыву, возрастет, благодаря быстрому движению профиля вверх. По сравнению со случаем статического профиля, максимальный коэффициент подъемной силы выше, также как и коэффициенты сопротивления и момента тангажа. Когда  $\delta_{\min} = -20^\circ$ , максимальный коэффициент подъемной силы динамического профиля уменьшается на 15.4%, а максимальные коэффициенты сопротивления и момента тангажа уменьшаются на 34.8 и 31.8% соответственно. Это показывает, что закрылок на задней кромке может, благодаря динамическому срыву, эффективно снизить нагрузку, создаваемую моментом тангажа. Чем больше угол отклонения закрылка вверх, тем сильнее эффект уменьшения нагрузки, создаваемой моментом тангажа.

### 4.2. Коэффициент подъемной силы статического профиля при различных углах отклонения закрылка

В предыдущем разделе обсуждалось уменьшение нагрузки, создаваемой моментом тангажа, при помощи закрылка на задней кромке. Результаты показывают, что пиковое значение коэффициента момента тангажа значительно уменьшается, когда  $\delta_{\min} = -20^\circ$ . Согласно общим гидродинамическим представлениям, обширная отрывная область появляется вблизи задней кромки профиля, когда угол отклонения закрылка равен  $-20^\circ$ , а угол атаки равен нулю. Появление обширной отрывной зоны приводит к нелинейному изменению коэффициента подъемной силы. На рис. 4 представлены зависимости коэффициента подъемной силы статического профиля от угла отклонения закрылка. Когда угол отклонения больше  $-10^\circ$ , а угол атаки равен нулю, коэффициент подъемной силы растет линейно с углом отклонения. При углах отклонения, меньших  $-10^\circ$ , коэффициент подъемной силы нелинейно увеличивается с углом отклонения; при этом у задней кромки профиля возникает зона отрыва потока. Когда угол отклонения закрылка равен  $-20^\circ$ , эта область отрыва становится весьма обширной. Когда угол отклонения закрылка меньше  $-15^\circ$ , а угол атаки равен  $5^\circ$ , коэффициент подъемной силы нелинейно увеличивается с углом отклонения. Из поведения двух кривых на рис. 4 следует, что коэффициент подъемной силы изменяется нелинейно, после того как угол между закрылком и набегающим потоком превысит  $10^\circ$ . В настоящей работе принимается, что закрылок находится в состоянии большого отклонения, когда он отклонен вверх более чем на  $10^\circ$ , т.е. угол отклонения закрылка меньше, чем  $-10^\circ$ . Соответствующие данные из предыдущего раздела показывают, что уменьшение нагрузки, создаваемой моментом тангажа, требует больших углов отклонения закрылка. Существующие модели аэродинамических сил, создаваемых закрылком, будучи основаны на линейных допущениях, не способны точно рассчитать нелинейные аэродинамические силы при больших углах отклонения закрылка. Соответствующие модели динамического отрыва также не могут точно рассчитать аэродинамические силы, действующие на профиль. Таким образом, возникает необходимость



**Рис. 3.** Законы движения профиля и закрылка при различных минимальных значениях угла отклонения закрылка (а) и сравнение коэффициентов аэродинамических сил: подъемной силы (б), сопротивления (в) и момента тангажа (г).

разработки модели динамического срыва потока с учетом нелинейного характера аэродинамических сил, возникающих при больших углах отклонения закрылка.

#### 4.3. Расчет коэффициентов аэродинамических сил, действующих на профиль

На рис. 5 проведено сравнение коэффициентов аэродинамических сил, действующих на рассматриваемый профиль, полученных согласно данной модели и в гидродинамическом расчете. Кривые для коэффициента подъемной силы имеют в целом одинаковый наклон. Максимальное значение коэффициента подъемной силы в модели несколько ниже, чем в гидродинамическом расчете. Пик коэффициента сопротивления, определенный по модели, хорошо согласуется с данными гидродинамического расчета. Пик коэффициента момента тангажа, определенный по модели, ниже, чем определенный в гидродинамическом расчете. Все эти данные свидетельствуют о том, что модель динамического срыва, основанная на LSTM нейросети, в состоянии эффективно предсказывать значения коэффициентов аэродинамических сил в случае динамического срыва потока.

#### 4.4. Влияние количества шагов по времени в реализации

На рис. 6 приведены законы движения профиля и закрылка, на которых тестируется модель, и зависимость среднеквадратичной ошибки (RMSE) от количества шагов по времени, а также

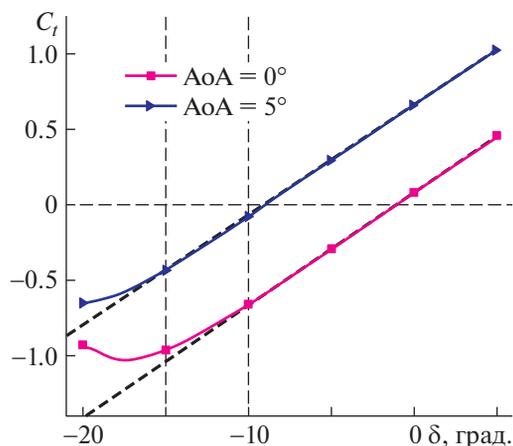


Рис. 4. Зависимость коэффициента подъемной силы профиля от угла отклонения закрылка.

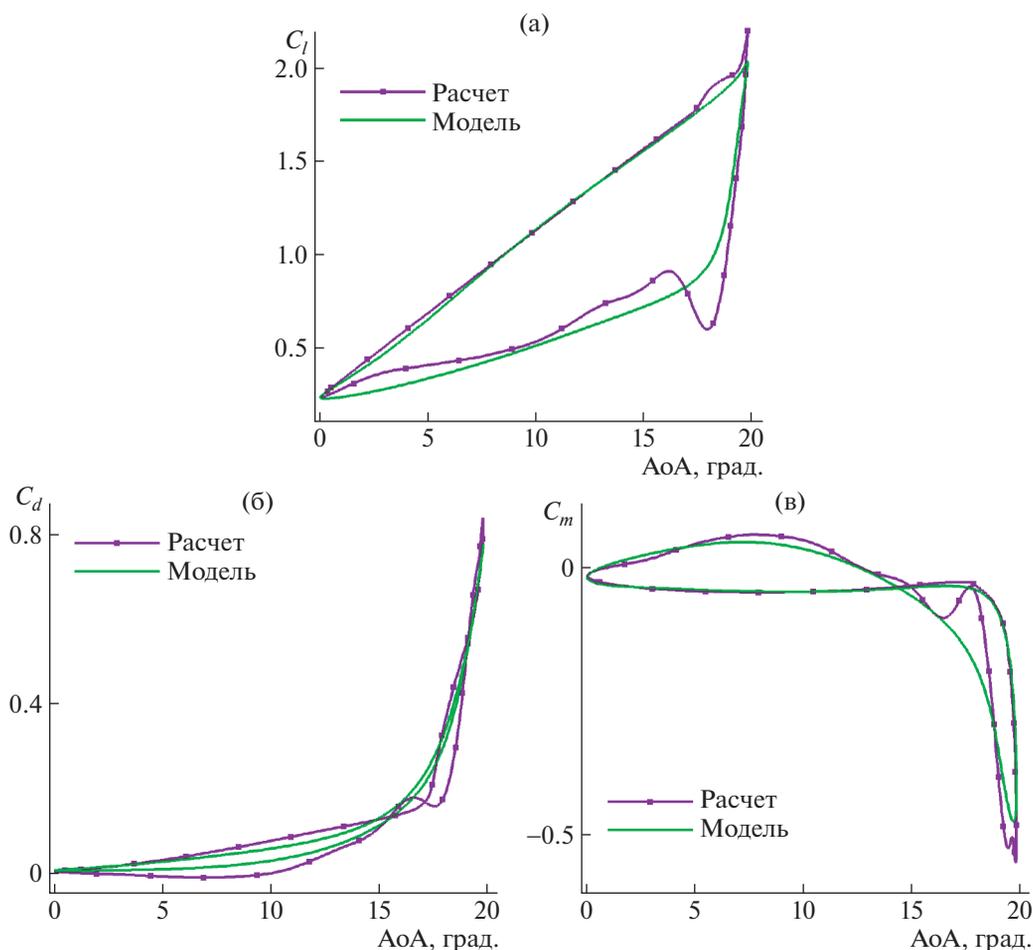
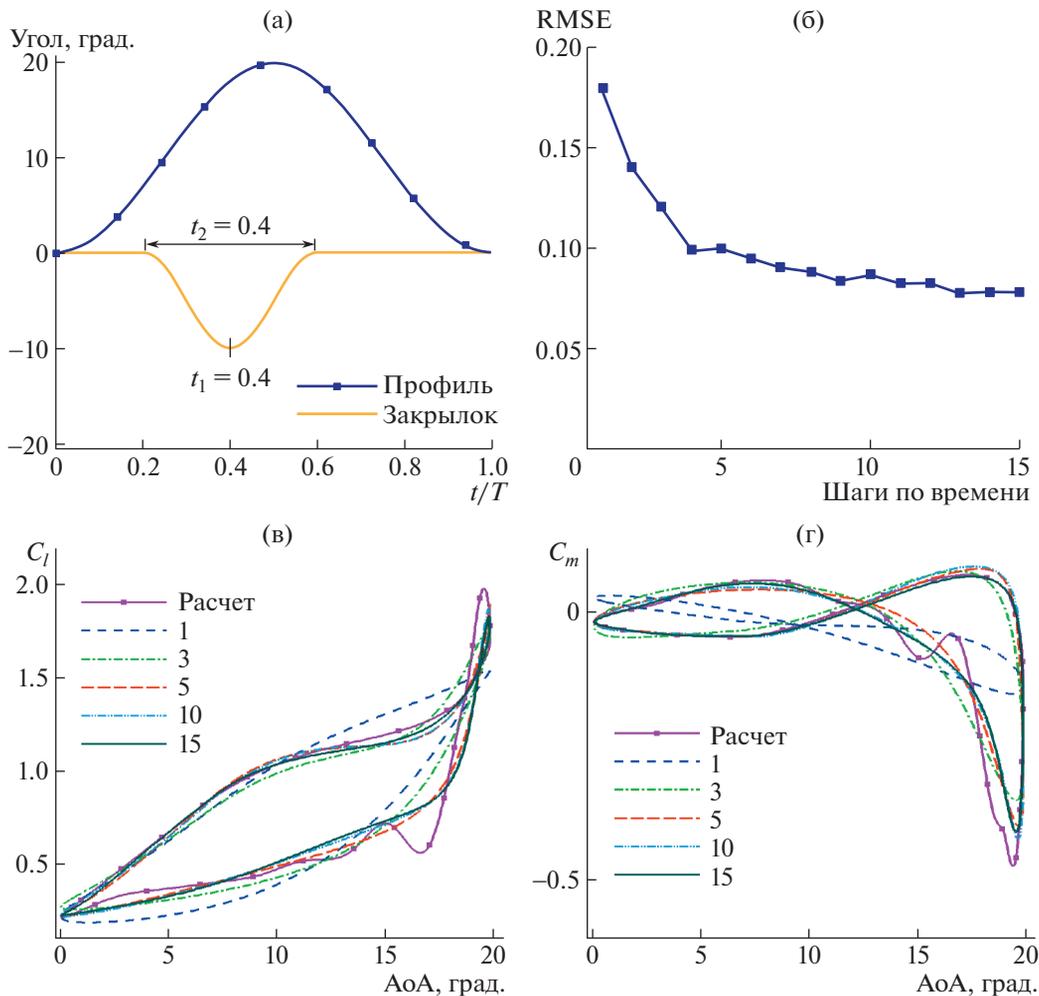


Рис. 5. Сравнение коэффициентов аэродинамических сил, определенных по модели и в гидродинамическом расчете. Коэффициенты подъемной силы (а), сопротивления (б) и момента тангажа (в).

сравниваются аэродинамические коэффициенты, полученные согласно модели и в гидродинамическом расчете. Проанализировано влияние количества шагов по времени  $in\ a\ sample$  на результаты модели; как видно, ошибка модели непрерывно уменьшается с увеличением числа шагов по времени. Когда это число равно единице, ошибка модели весьма велика, а значения ко-

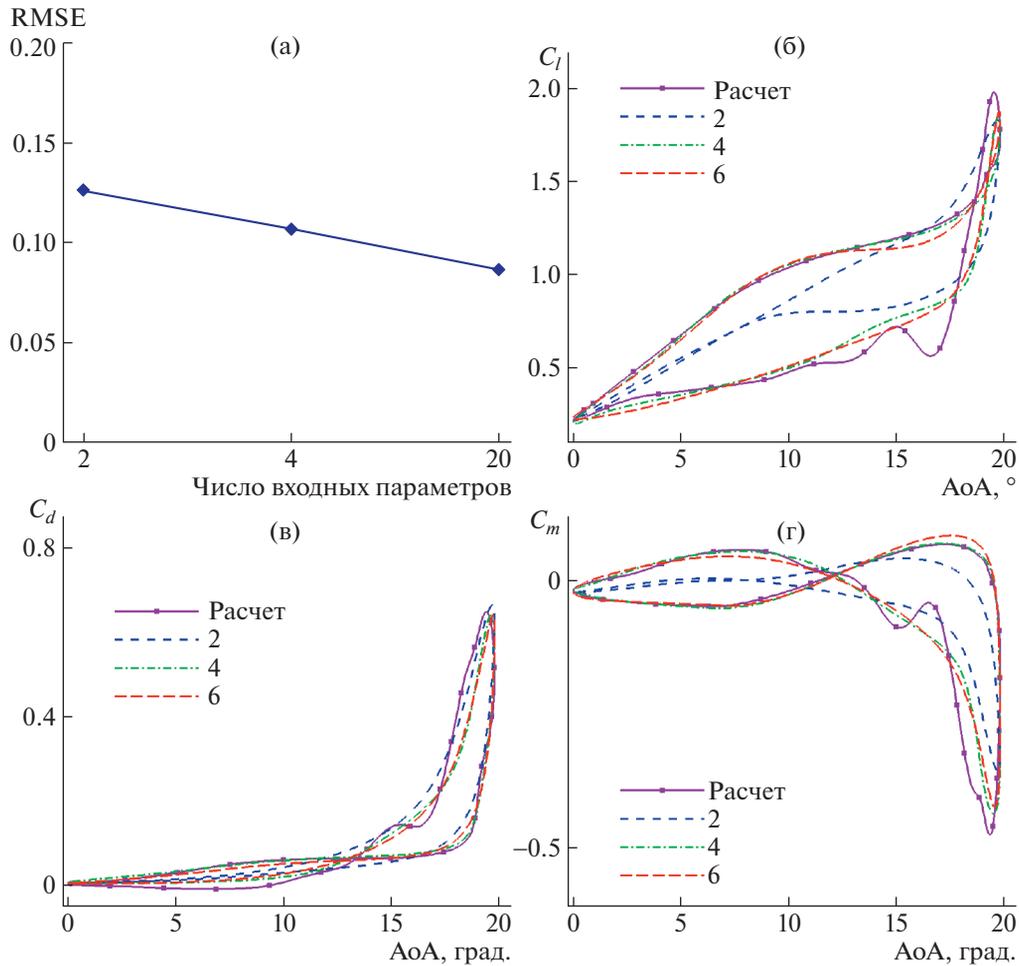


**Рис. 6.** Законы движения, выбранные при тестировании модели (а), среднеквадратичная ошибка (RMSE) модели (б) и сравнение коэффициентов подъемной силы (в) и момента тангажа (г) при различном числе шагов по времени в модели.

эффицентом момента тангажа, предсказываемые моделью, существенно отличаются от значений, полученных в гидродинамическом расчете. При количестве шагов по времени, большем чем 4, модельные значения коэффициентов аэродинамических сил почти идентичны расчетным.

#### 4.5. Влияние входных переменных

В настоящем разделе анализируется влияние количества входных параметров на точность предсказаний модели. Соответствующие законы движения профиля и закрылка построены на рис. 6а. Схематическая диаграмма базовой модели представлена на рис. 26. Когда количество входных параметров равно 2, этими параметрами являются угол атаки профиля и угол отклонения закрылка. Когда количество входных параметров равно 4, они также включают скорости изменения угла атаки и угла отклонения закрылка. Наконец, когда количество входных параметров равно 6, они включают и ускорения угла атаки и угла отклонения закрылка. Как следует из рис. 7а, ошибка предсказаний модели убывает с увеличением числа входных параметров. Предсказанные моделью значения коэффициентов аэродинамических сил значительно изменяются при различных количествах входных данных (рис. 7б–7г). Когда в качестве входных параметров используются лишь угол атаки профиля и угол отклонения закрылка, модель не в состоянии предсказать петлю гистерезиса в поведении коэффициента подъемной силы. Когда число вход-



**Рис. 7.** Ошибки предсказаний модели (RMSE) при различном количестве входных переменных (а) и сравнение коэффициентов аэродинамических сил: подъемной силы (б), сопротивления (в) и момента тангажа (г).

ных параметров больше или равно 4, т.е., когда входная информация является пространственной, модель точно предсказывает аэродинамические коэффициенты профиля.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численно исследовано влияние отклонения вверх закрылка, расположенного на задней кромке профиля, на динамический срыв потока. Отклонение закрылка на большой угол может эффективно снизить нагрузку, создаваемую моментом тангажа при динамическом срыве потока. При незначительном уменьшении максимального коэффициента подъемной силы профиля максимальные значения коэффициентов сопротивления и момента тангажа уменьшаются значительно. Коэффициент подъемной силы растет нелинейно при увеличении угла отклонения закрылка, после того как закрылок оказывается в состоянии большого отклонения для статических профилей. Однако существующие модели аэродинамических сил, создаваемых закрылком, основаны на линейных предположениях. Отсюда следует необходимость разработки модели динамического срыва потока, учитывающей нелинейный характер аэродинамических сил при больших углах отклонения закрылка. Такая модель могла бы в будущем использоваться как инструмент для аккуратного исследования и проектирования интеллектуальных роторов. В связи с этим в работе построена модель динамического срыва потока, основанная на нейронной сети с краткосрочной долговременной памятью. Полученные результаты показывают, что данная модель может достаточно точно предсказывать значения коэффициентов аэродинамических сил при движении тангажа. Анализ гиперпараметров нейронной сети показывает, что на точность предсказаний модели большое влияние оказывает выбранное число шагов по времени.

Чем больше число шагов в реализации и чем больше количество входных параметров, тем выше точность предсказанных результатов.

Работа частично поддержана Национальным фондом естественных наук Китая (грант № 11972306), Головной лабораторией аэродинамики роторов (грант № RAL20200102-2) и проектом 111 Китая (B17037). Авторы благодарят Центр высокопроизводительных вычислений Северо-западного Политехнического Университета за предоставленные вычислительные услуги.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Johnson W.* Helicopter theory. Dover Publ., 1980.
2. *Friedmann P.P.* On-blade control of rotor vibration, noise, and performance: just around the corner? // *J. Amer. Helicopter Soc.* 2014. V. 59. № 4.
3. *Chopra I.* Review of state of art of smart structures and integrated systems // *AIAA J.* 2002. V. 40. № 11. P. 2145–2187.
4. *Straub F.K., Anand V.R., Lau B.H., Birchette T.S.* Wind tunnel test of the smart active flap rotor // *J. Amer. Helicopter Soc.* 2018. V. 63. № 1. P. 16.
5. *McCroskey W.J.* The phenomenon of dynamic stall // *Tech. Rep. NASA-TM-81264*, 1981.
6. *Feszty D., Gillies E.A., Vezza M.* Alleviation of airfoil dynamic stall moments via trailing-edge-flap flow control // *AIAA J.* 2004. V. 42. № 1. P. 17–25.
7. *Raiola M., Discetti S., Ianiro A., Samara F., Avallone F., Ragni D.* Smart rotors: dynamic-stall load control by means of an actuated flap // *AIAA J.* 2018. V. 56. № 4. P. 1388–1401.
8. *Samara F., Johnson D.A.* Dynamic stall on pitching cambered airfoil with phase offset trailing edge flap // *AIAA J.* 2020. V. 58. № 7. P. 2844–2856.
9. *Patt D.A.* Simultaneous BVI noise and vibration reduction in rotorcraft using actively-controlled flaps and including performance considerations / Univ. Michigan, PhD Thesis, 2004.
10. *Kody F., Corle E., Maughmer M.D., Schmitz S.* Higher-harmonic deployment of trailing-edge flaps for rotor-performance enhancement and vibration reduction // *J. Aircraft.* 2016. V. 53. № 2. P. 333–342.
11. *Salazar D., Kottapalli S., Hagerty B.* Boeing smart rotor full-scale wind tunnel test data report / *NASA TM-2016-216048*, 2016.
12. *Tan J.F., Sun Y.M., Wang H.W., Lin C.L.* New approach for aerodynamic and aeroacoustic analysis of actively controlled flaps rotor // *J. Aircraft.* 2018. V. 55. № 6. P. 2191–2202.
13. *Depailler G., Friedman P.P.* Alleviation of dynamic stall induced vibrations in helicopter rotors using actively controlled flaps / *AIAA Paper No. 1431*, 2002.
14. *Liu L., Friedmann P.R., Kim I., Bernstein D.S.* Rotor performance enhancement and vibration reduction in presence of dynamic stall using actively controlled flaps // *J. Amer. Helicopter Soc.* 2008. V. 53. № 4. P. 338–350.
15. *Wang R., Xia P.Q.* Control of dynamic stall of helicopter rotor blades // *Sci China-Technol Sci.* 2013. V. 56. № 1. P. 171–180.
16. *Hariharan N., Leishman J.G.* Unsteady aerodynamics of a flapped airfoil in subsonic flow by indicial concepts // *J. Aircraft.* 1996. V. 33. № 5. P. 855–868.
17. *Myrtle T.F., Friedmann P.P.* Application of a new compressible time domain aerodynamic model to vibration reduction in helicopters using an actively controlled flap // *J. Amer. Helicopter Soc.* 2001. V. 46. № 1. P. 32–43.
18. *Peters D.A., Hsieh M.C.A., Torreto A.* A state-space airloads theory for flexible airfoils // *J. Amer. Helicopter Soc.* 2007. V. 52. № 4. P. 329–342.
19. *Andersen P.B., Gaunaa M., Bak C., Hansen M.H.* A dynamic stall model for airfoils with deformable trailing edges // *Wind Energy.* 2009. V. 12. № 8. P. 734–751.
20. *McCroskey W.J., Mcalister K.W., Carr L.W.* An experimental study of dynamic stall on advanced airfoil sections. Volume 1: Summary of the experiment, 1982.
21. *Canann S.A., Tristano J.R., Staten M.L.* An approach to combined Laplacian and optimization-based smoothing for triangular, quadrilateral, and quad-dominant meshes. 2000.
22. *Xing S.L., Xu H.Y., Ma M.S., Ye Z.Y.* Inflatable leading edge-based dynamic stall control considering fluid-structure interaction // *Int. J. Aerosp. Eng.* 2020. 2020:28.
23. *Hochreiter S., Schmidhuber J.* Long short-term memory // *Neural Comput.* 1997. V. 9. № 8. P. 1735–1780.
24. *Li W.J., Laima S.J., Jin X.W., Yuan W.Y., Li H.* A novel long short-term memory neural-network-based self-excited force model of limit cycle oscillations of nonlinear flutter for various aerodynamic configurations // *Nonlinear Dyn.* 2020. V. 100. № 3. P. 2071–2087.
25. *Greff K., Srivastava R.K., Koutnik J., Steunebrink B.R., Schmidhuber J.* LSTM: A search space Odyssey // *IEEE. Trans. Neural Netw. Learn. Syst.* 2017. V. 28. № 10. P. 2222–2232.
26. *Wu C.L., Chau K.W., Fan C.* Prediction of rainfall time series using modular artificial neural networks coupled with data-preprocessing techniques // *J Hydrol.* 2010. V. 389. № 1-2. P. 146–167.