

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Обзор вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела <i>М. В. Шитикова</i>	3
Напряженное состояние упругой плоскости с одним или несколькими включениями произвольной формы: случай одинаковых модулей сдвига <i>И. Я. Цуркис, Ю. О. Кузьмин</i>	41
Контакт гладкого индентора и двухслойного упругого полупространства с усложненными условиями на поверхности <i>Ф. И. Степанов, Е. В. Торская</i>	59
Гашение поперечных колебаний быстро вращающегося диска <i>И. В. Баничук, С. Ю. Иванова, В. С. Афанасьев</i>	68
О динамике разгрузки цилиндрического упруговязкопластического слоя при азимутальном сдвиге <i>А. А. Буренин, Е. А. Герасименко, Л. В. Ковтанюк, Г. М. Севастьянов</i>	77
Эффект запаздывания разрушения при импульсных динамических нагрузках <i>Ю. В. Петров, А. А. Уткин</i>	89
Численное моделирование усталостной долговечности конструкционных сталей при одночастотном и двухчастотном нагружении <i>И. А. Волков, Л. А. Игумнов, Д. Н. Шишулин, Е. В. Боев</i>	103
Модель для анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек с прямоугольными вырезами <i>В. Н. Бакулин</i>	122
Предельные циклы в динамике упруго закрепленного аэродинамического маятника <i>Ю. Д. Селюцкий</i>	133
Высокоточная оценка параметров колебания резонатора волнового твердотельного гироскопа с использованием методов стохастической фильтрации <i>А. Б. Шаталов, С. В. Соколов, В. А. Погорелов, И. Н. Гашененко</i>	145
Флаттер пластины со смешанными краевыми условиями произвольной формы в плане <i>С. Д. Алгазин</i>	153
О циклическом деформировании оболочки камеры сгорания жидкостного ракетного двигателя многократного действия <i>В. С. Зарубин, В. Н. Зимин</i>	157

УДК 539.3

ОБЗОР ВЯЗКОУПРУГИХ МОДЕЛЕЙ С ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА, ИСПОЛЪЗУЕМЫХ В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

© 2022 г. М. В. Шитикова^{a,b,*}

^a Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия

^b Московский государственный строительный университет, Москва, Россия

*e-mail: mvs@vgasu.vrn.ru

Поступила в редакцию 31.08.2020 г.

После доработки 09.03.2021 г.

Принята к публикации 11.03.2021 г.

Данная работа посвящена анализу научных исследований, выполненных за последние 10 лет и касающихся приложений дробного исчисления (исчисления дробного порядка) в моделях линейной вязкоупругости, используемых в динамических задачах механики деформируемого твердого тела. Дан краткий исторический обзор, отражающий вклад советских механиков в развитие наследственной механики. Проанализированы различные модели вязкоупругих материалов, построенные с помощью дробных производных, как без учета, так и с учетом объемной релаксации. Показано, что модели, в которых оператор Пуассона зависит от времени, позволяют описать свойства вязкоупругих ауксетиков, то есть материалов с отрицательными коэффициентами Пуассона. В следующей статье будет приведен обзор краевых динамических задач с использованием реологических моделей, рассмотренных в данной работе, и дана критическая оценка полученным за последнее десятилетие результатам в свете новых представлений о роли и месте дробного исчисления в инженерной практике.

Ключевые слова: дробное исчисление, вязкоупругость, реологические модели с дробными операторами, дробно-экспоненциальная функция Ю.Н. Работнова, алгебра безразмерных операторов Ю.Н. Работнова, отрицательный коэффициент Пуассона

DOI: 10.31857/S0572329921060118

1. Введение. Понятия дифференцирования и интегрирования нецелого порядка часто связывают с именами Ж. Лиувилля и Б. Римана. Но на самом деле, начиная с 1695 года, производными и интегралами дробного порядка интересовались многие выдающиеся математики: Я. Бернулли, Г. Лейбниц, Л. Эйлер, Н. Абель, Ж. Фурье, А. Грюнвальд, А.В. Летников, Н.Я. Сонин, П.А. Некрасов, М.М. Джрбашян и другие. Исторические обзоры развития дробного исчисления можно найти в работах [1–7].

В 1987 году вышла в свет монография С.Г. Самко, А.А. Килбаса и О.И. Маричева “Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения” (она была переведена на английский язык в 1993 году) [1], которая по праву считается непревзойденной энциклопедией дробного исчисления, поскольку содержит все необходимые сведения (определения, свойства, доказательства) о фактически всех известных формах дробного интегрирования и их сравнительный анализ. Во многих случаях показано не только совпадение различных форм друг с другом на тех или иных классах функций, но и совпадение их областей определения.

После 1987 года вплоть до настоящего времени опубликовано огромное количество монографий авторами из разных стран (например, [7–21]), где рассматриваются различные аспекты дробного исчисления и его приложений, библиографические списки которых можно найти в [7, 16, 21–23].

Историю использования дробного исчисления в механике следует вести с Н. Абеля [24], который в своих работах 1823 и 1826 годов в связи с задачей о таутохроне (постановка и решение этой задачи приведены в “Энциклопедии по механике сплошных сред” [25], а так же в историческом обзоре [5]) приходит к конструкциям дробной производной и дробного интеграла. Как отмечено в [1], “хотя работы Н. Абеля и не были выполнены в русле идей обобщения понятия дифференцирования, они сыграли огромную роль в их развитии”.

Впервые дробные производные находят приложение в механике сплошных сред в работах А. Геманта (1936 [26]), Ж.В. Скотт-Блэра (1944 [27]) и А.Н. Герасимова (1948 [28]), в которых вводится модель с дробной производной для описания поведения вязкой жидкости, которая в некоторой степени также обладает и упругими свойствами. Идея описания поведения твердых тел при помощи вязкоупругих моделей, которые содержат операторы дробного порядка и связывают напряжения с деформациями, принадлежит Ю.Н. Работнову [29]. В своей классической работе 1948 года (которая в 2014 году была переведена на английский язык и опубликована в журнале *Fractional Calculus and Applied Analysis* [29] в честь празднования столетнего юбилея со дня рождения академика Ю.Н. Работнова) он не только предлагает вязкоупругую модель с оператором дробного порядка для описания процессов ползучести и релаксации в твердых телах, но и показывает эквивалентность этой модели интегральному соотношению между деформацией и напряжением с ядром в виде некоторой функции, которую он обозначает через $\varepsilon_\gamma(t)$, а интегральный оператор с ε_γ -функцией – через ε_γ^* , где t – время, γ ($0 \leq \gamma < 1$) – так называемый параметр дробности. Функцию $\varepsilon_\gamma(t)$ Ю.Н. Работнов называет дробной экспонентой, поскольку при $\gamma = 1$ она переходит в обычную экспоненту. Он пишет: “Как уже отмечалось, интегральные соотношения с экспоненциальными ядрами нулевого порядка эквивалентны дифференциальным соотношениям. Аналогично интегральное соотношение с ε_γ^* -операторами произвольного порядка соответствует дифференциальному уравнению с дробными производными, которое решается при помощи ε_γ -функций”. При этом Ю.Н. Работнов замечает, что “Вряд ли целесообразно развивать эту точку зрения, поскольку дробные производные деформаций или напряжений лишены наглядного механического смысла, а вычисления удобнее вести непосредственно с интегральными операторами. Наоборот, во многих случаях целесообразно переходить от дифференциальных соотношений к интегральным”.

Функции Ю.Н. Работнова обращаются в бесконечность при $t = 0$, однако интеграл от них остается конечным, т.е. ε_γ -функции имеют интегрируемую (слабую) особенность, и следовательно, деформация в момент приложения нагрузки остается конечной. Что же касается скорости деформации, то в момент приложения нагрузки она становится бесконечно большой, что как раз и наблюдается в экспериментах на ползучесть [9]. Этот факт оправдывает использование слабосингулярных ядер $\varepsilon_\gamma(t)$ или дробных производных в реологических моделях вязкоупругих тел.

Приведенная выше статья Ю.Н. Работнова была незаслуженно забыта и пролежала невостребованной около 20 лет. Только в 1966 году появляется работа Т.Д. Шермергора [30] и в 1967 году С.И. Мешкова [31], в которых авторы, основываясь на идеях Ю.Н. Работнова и будучи его докторантами в те годы, обобщают простейшие вязкоупругие модели Фойгта, Максвелла и стандартного линейного тела, заменяя в этих моделях обычные производные по времени дробными. В 60-е годы Т.Д. Шермергор и С.И. Мешков работали в Воронежских вузах и по праву считаются основоположниками Воронежской

школы механиков, развивающей приложение дробного исчисления в механике деформируемого твердого тела и в строительной механике [32].

В 1959 году была опубликована статья Ш. Ватанабэ [33], в которой автор сначала использовал модель Скотт-Блэра для описания вязкоупругих свойств полиизобутилена, а затем записал модель Фойгта с дробной производной и применил ее для анализа свойств нейлона-6.

Параллельно и независимо от Т.Д. Шермергора [30] в Италии, на родине основоположника наследственной механики В. Вольтерра, модель Фойгта с дробной производной была приведена в работах М. Капуто (1966 [34]; 1967 [35]). Чуть позже, через четыре года, модели Максвелла и стандартного линейного тела с дробными производными появились в статьях М. Капуто и Ф. Маинарди (1971 [36, 37]).

Таким образом, анализ литературы показал, что, судя по всему, впервые модель Кельвина–Фойгта с дробной производной появилась в статье Ш. Ватанабэ [33], о которой, к сожалению, мало кто знает, и которая практически не цитировалась, вероятно, в виду того, что была напечатана в журнале японского общества текстильной промышленности (*Journal of the Textile Machinery Society of Japan*).

С тех пор интерес к вязкоупругим моделям с дробными производными и их приложениям в механике сплошных сред не ослабевает. Первые приложения моделей с дробными производными и другими операторами дробного порядка [8–10, 32, 38–40] к решению динамических задач механики деформируемого твердого тела принадлежат отечественным ученым [41–51]. Так, первая статья по гармоническим волнам, распространяющимся в вязкоупругих средах, свойства которых описываются уравнениями с дробными производными, появилась в 1968 году [41]. Анализ динамического поведения одномассовых систем с учетом сил сопротивления окружающей среды, демпфирующие свойства которой описываются различными моделями, содержащими операторы дробного порядка, приведен в работах [42–47].

Однако, с большим сожалением следует отметить, что приоритет российских механиков в развитии теории наследственной механики на основе операторов дробного порядка не всегда находит должного признания, причем не только в работах зарубежных авторов, несмотря на то, что большинство работ Ю.Н. Работнова, Т.Д. Шермергора, С.И. Мешкова, Ю.А. Россихина, изданных в 60–70-е годы прошлого столетия, были переведены на английский язык и доступны в электронном виде, поскольку снабжены DOI. Так, одна часть зарубежных исследователей (см., например, [52–57]) с завидным постоянством приписывает простейшие модели с дробными производными только М. Капуто и Ф. Маинарди [17, 34–37], другая [58–63] – американским ученым Р. Бэгли и П. Торвику, которые начали использовать модель Фойгта и модель стандартного линейного тела с дробными производными соответственно в 1979 [64] и 1983 [65] годах без упоминания работ советских исследователей [28–31, 38–51], о которых они, очевидно, не знали, хотя задача о колебаниях системы с одной степенью свободы в среде, демпфирующие свойства которой описываются моделью стандартного линейного тела с дробными производными, была опубликована в *International Journal of Engineering Science* еще в 1971 году [47]. Но что более непонятно, так это то, что и в работах российских ученых [12, 15, 19, 66–78] по каким-то причинам не цитируются пионерские статьи советских механиков [30, 31, 42–47]. Даже в учебнике по механике сплошных сред [77], изданном в 2016 году, модель стандартного линейного тела с дробными производными, приписывается М. Капуто и Ф. Маинарди.

С целью продемонстрировать вклад российских механиков в развитие наследственной механики Ю.А. Россихин опубликовал в 2010 году ретроспективную статью [32], в которой изложил свой взгляд на два параллельных пути развития дробного исчисления в механике твердого деформируемого тела: с помощью интегральных соотношений Больцмана–Вольтерра со слабо сингулярными ядрами дробного порядка и с помощью дифференциальных уравнений с дробными производными, и привел истори-

ческий обзор работ советских [8–10, 28–31, 38–51] и зарубежных [26, 27, 33–37, 79–84] ученых в приложении дробного исчисления в задачах механики, которые были опубликованы в 40–70-е годы прошлого столетия. Все основные работы сведены были в таблицу, которую мы здесь решили привести с небольшими дополнениями в виде табл. 1, поскольку ранее с ней можно было ознакомиться только в англоязычном издании. Из данных табл. 1 четко видно, какой вклад внесли российские механики.

После выхода в свет ретроспективы [32] практически все источники, приведенные в ней, были включены Ф. Маинарди в список литературы в его монографии [16]. Следует отметить, что в последнее десятилетие появился цикл работ, в которых отражено наследие российских и советских математиков и механиков, чьи исследования связаны с развитием и применением дробного исчисления [2, 4, 5, 7, 85–94].

Как в России, так и за рубежом, за последние сорок лет появилось много работ, касающихся проблем дробного исчисления, в которых не только предлагаются новые модели вязкоупругих сред с дробными производными и интегралами, но также решаются конкретные задачи прикладного характера.

По приглашению А. Leissa, главного редактора журнала *Applied Mechanics Reviews*, автор данной статьи в соавторстве с Ю.А. Россихиным сделал обзор работ по применению дробного исчисления к динамическим задачам механики твердого тела, который был опубликован в 1997 году [95]. В процессе работы над обзором [95] выяснилось, что число научных публикаций по этой тематике к началу 1996 года превысило 200 наименований. Обзор [95] не только познакомил читателей с последними на тот момент достижениями в названной области, но и показал вклад русской школы механиков в решение многих проблем, связанных с использованием дробного исчисления.

Наш второй обзор, вышедший в свет в том же журнале в 2010 году и включивший в себя 337 источников [96], показал, что если раньше объектом исследования служили в основном линейные системы с одной степенью свободы [95], то в течение первого десятилетия двадцатого века объекты изучения усложнились. Это нелинейные осцилляторы Дюффинга и Ван дер Поля, линейные и нелинейные системы с двумя степенями свободы, линейные и нелинейные системы с бесконечным числом степеней свободы: стержни, балки, пластинки и оболочки, всяческие комбинированные системы, многослойные конструкции и т.д. В этот же период были предложены и более сложные реологические модели на основе использования нескольких производных различных дробных порядков [97–100], а также модели с несколькими временами релаксации и ретардации [101, 102].

Встречаясь со своими русскоязычными коллегами на различных конференциях, нам с Ю.А. Россихиным приходилось не раз слышать замечание о том, что пора бы написать обзорную работу на тему использования дробного исчисления в механике на русском языке. Считая это замечание вполне справедливым, мы начали такую работу несколько лет назад, тем более, что после нашего обзора 2010 года [96] появилось огромное количество новых работ в этой области. После ухода из жизни профессора Ю.А. Россихина в 2017 году, материал для обзора на русском языке продолжал накапливаться. И последней отправной точкой для его окончательного написания послужила новая программа РФФИ под названием “Экспансия”, направленная как раз на подготовку и издание обзорных работ российских ученых. На самом деле пришло время собрать полученные за последнее десятилетие результаты, проанализировать их и дать им критическую оценку в свете новых представлений о роли и месте дробного исчисления в инженерной практике.

Следует отметить, что в данной работе (в силу ограничения объема журнальной статьи) включены только новейшие исследования, касающиеся использования дробного исчисления в динамических задачах вязкоупругости твердого деформируемого тела, причем мы не будем касаться исследований, в которых порядок дробного оператора является переменной величиной, отослав читателя к обзорам [103, 104]. Дробное ис-

Таблица 1. Исторический обзор вклада российских и зарубежных ученых в приложении дробно-исчисления в задачах механики в 40–70-е годы прошлого столетия

Простейшие модели, содержащие операторы дробного порядка	Российские исследователи	Зарубежные исследователи	Приложения моделей в динамических задачах, выполненные до 1980 года
<p>модель Ньютоновской жидкости с производной дробного порядка</p> $\sigma(t) = E_{\infty} \tau_{\varepsilon}^{\gamma} D^{\gamma} \varepsilon(t)$ $\sigma(t) = E_{\infty} \tau_{\varepsilon}^{\gamma} I^{1-\gamma} d\varepsilon(t)$	<p><i>Герасимов, 1948 [28]</i> <i>Слонимский, 1961 [39]</i></p>	<p><i>Scott Blair, 1944 [27]</i> <i>Бленд, 1960 [84]</i></p>	<p><i>Watanabe, 1959 [33]</i> <i>Stiassnie, 1979 [211]</i> <i>Герасимов, 1948 [28]</i> <i>Caputo, 1976 [83]</i></p>
<p>модель Кельвина-Фойгта</p> <p>а) в виде соотношений Больцмана–Вольтерра</p> $\varepsilon = J_0 \int_0^t \Delta_{\gamma}(-t'/\tau_{\sigma}) \sigma(t-t') dt'$ <p>б) с производной дробного порядка</p> $\sigma = E_0(\varepsilon + \tau_{\sigma}^{\gamma} D^{\gamma} \varepsilon)$	<p><i>Шермергор, 1966 [30]</i></p> <p><i>Шермергор, 1966 [30]</i></p>	<p><i>Watanabe, 1959 [33]</i> <i>Caputo, 1966 [34], 1967 [35]</i> <i>Smit and de Vries, 1970 [80]</i></p>	<p><i>Watanabe, 1959 [33]</i> <i>Caputo, 1967 [35], 1974 [82]</i> <i>Bagley and Torvik, 1979 [64]</i></p>
<p>модель Максвелла</p> <p>а) в виде соотношений Больцмана–Вольтерра</p> $\sigma = E_{\infty} \left[\varepsilon - \int_0^t \Delta_{\gamma}(-t'/\tau_{\varepsilon}) \varepsilon(t-t') dt' \right]$ <p>б) с дробной производной</p> $\sigma + \tau_{\varepsilon}^{1/2} D^{1/2} \sigma = \eta \dot{\varepsilon}$ $\sigma + \tau_{\varepsilon}^{\gamma} D^{\gamma} \sigma = E_{\infty} \tau_{\varepsilon}^{\gamma} D^{\gamma} \varepsilon$ <p>в) с интегралом дробного порядка</p> $\varepsilon = J_{\infty} (\sigma + \tau_{\varepsilon}^{-\gamma} I^{\gamma} \sigma)$	<p><i>Шермергор, 1966 [30]</i></p> <p><i>Мешков, 1967 [31]</i></p> <p><i>Шермергор, 1966 [30]</i></p>	<p><i>Gemant, 1936 [26]</i> <i>Caputo and Mainardi, 1971 [37]</i></p>	<p><i>Зеленев и др., 1970 [45]</i> <i>Россихин, 1970 [44]</i> <i>Buchen and Mainardi, 1975 [81]</i></p>
<p>модель стандартного линейного тела</p> <p>а) в виде соотношений Больцмана–Вольтерра</p> $\sigma = E_{\infty} \left[\varepsilon - \nu_{\varepsilon} \int_0^t \Delta_{\gamma}(-t'/\tau_{\varepsilon}) \varepsilon(t-t') dt' \right]$ $\varepsilon = J_{\infty} \left[\sigma + \nu_{\sigma} \int_0^t \Delta_{\gamma}(-t'/\tau_{\sigma}) \sigma(t-t') dt' \right]$	<p><i>Работнов, 1948 [29]</i></p>	<p><i>Gross, 1947 [79]</i></p>	<p><i>Розовский и Синайский, 1966 [43]</i> <i>Мешков и Россихин, 1968 [41]</i> <i>Зеленев и др., 1970 [46]</i> <i>Россихин, 1970 [44]</i> <i>Мешков и др., 1971 [47]</i> <i>Гонсовский и др., 1972 [48]</i> <i>Гонсовский и Россихин, 1972 [49], 1973 [50]</i></p>

Таблица 1. Окончание

Простейшие модели, содержащие операторы дробного порядка	Российские исследователи	Зарубежные исследователи	Приложения моделей в динамических задачах, выполненные до 1980 года
б) с производной дробного порядка $\sigma + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma \sigma = E_0(\varepsilon + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma \varepsilon)$	<i>Мешков</i> , 1967 [31]	<i>Caputo & Mainardi</i> , 1971 [36]	<i>Мешков</i> и др., 1967 [42] <i>Caputo and Mainardi</i> , 1971 [37]
в) с оператором дробного порядка $\sigma = E_\infty \left[1 - \nu_\varepsilon \frac{\tau_\varepsilon^{-\gamma} I^\gamma}{1 + \tau_\varepsilon^{-\gamma} I^\gamma} \right] \varepsilon$	<i>Работнов</i> , 1948 [29]		
обобщенная модель линейного стандартного тела $\sigma = E_\infty \left[\varepsilon - \int_0^t \sum_{j=1}^n e_j \partial_\gamma (-t'/\tau_{\varepsilon j}) \varepsilon(t-t') dt' \right]$	<i>Работнов</i> , 1966 [9]		
Оператор дробного порядка с ядром Ржаницына а) в качестве ядра ползучести $\varepsilon = J_\infty \left[1 + \nu_\sigma \left(1 + \tau_\sigma \frac{d}{dt} \right)^{-\gamma} \right] \sigma$ $\varepsilon = J_\infty \left[\sigma + \nu_\sigma \int_0^t \frac{t'^{\gamma-1} e^{-t'/\tau_\sigma}}{\tau_\sigma^\gamma \Gamma(\gamma)} \sigma(t-t') dt' \right]$ $\sigma = E_\infty \left[\varepsilon - \int_0^t e^{-t'/\tau_\sigma} \partial_\gamma (-\nu_\sigma t'/\tau_\sigma) \varepsilon(t-t') dt' \right]$	<i>Мешков</i> , 1967 [31] <i>Слонимский</i> , 1967 [39] <i>Ржаницын</i> , 1949 [8]		
б) в качестве ядра релаксации $\sigma = E_\infty \left[\varepsilon - \nu_\varepsilon \int_0^t \frac{t'^{\gamma-1} e^{-t'/\tau_\varepsilon}}{\tau_\varepsilon^\gamma \Gamma(\gamma)} \varepsilon(t-t') dt' \right]$	<i>Вульфсон</i> , 1960 [38]		
	<i>Мешков</i> и <i>Россихин</i> , 1971 [40]		<i>Россихин</i> , 1970 [44] <i>Мешков</i> и <i>Россихин</i> , 1971 [40] <i>Белов</i> и <i>Богданович</i> , 1976 [51]

числение в последние годы также с успехом используется в термоупругости [105], биомеханике [106], теории разрушения [107], гидромеханике [108]. Весьма бурно развиваются также численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений дробного порядка [59, 60, 109, 110].

В 2020 году в издательстве Springer вышла в свет трехтомная “Энциклопедия по механике сплошных сред”, в которую вошел раздел *Fractional Calculus in Continuum Mechanics* под редакцией Ю.А. Россихина и М.В. Шитиковой. Часть этих результатов [25, 111–118] найдет освещение в данной обзорной работе, которая посвящается светлой памяти российских механиков, которые стали первопроходцами в использовании дробного исчисления в механике сплошных сред, намного опередив своих зарубежных коллег: Ю.Н. Работнову, А.Н. Герасимову, М.И. Розовскому, Д.Т. Шермергору, С.И. Мешкову и Ю.А. Россихину.

2. Предварительные замечания. Прежде чем перейти к непосредственному анализу динамических задач механики деформируемого твердого тела, рассмотренных в по-

следнее десятилетие с использованием операторов дробного порядка, приведем несколько определений, которые будут использованы в дальнейшем.

2.1. Основные формы дробного интегродифференцирования, используемые в теории вязкоупругости. Существует много форм дробного интегродифференцирования, которые освещены в энциклопедической монографии [1]. Ее авторы отмечали, что “перед начинающим исследователем могут возникнуть психологические затруднения, связанные с необходимостью ориентироваться в разнообразных определениях дробного интегродифференцирования и огромном потоке публикаций”. И это действительно так. Тем более, что в течение последнего десятилетия появилось много новых определений дробных производных.

В задачах вязкоупругости используются дробные производные и дробные интегралы Римана–Лиувилля, дробные производные Вейля периодических функций, дробные производные Грюнвальда–Летникова через разности дробного порядка (что очень удобно для развития численных методов решения дифференциальных уравнений с дробными производными). Свойства всех этих перечисленных операторов дробного порядка изучены и приведены в [1].

Что же касается весьма популярной в последнее время производной Герасимова–Капуто, то (несмотря на то, что в работе А.Н. Герасимова [28] она была предложена в 1948 году, использовалась в статье Ш. Ватанабе в 1959 году [33], упоминается в монографиях Д.Р. Бленда [84] и Ю.Н. Работнова [9], изданных соответственно в 1960 и 1966 годах, и затем уже приведена в работах М. Капуто [34, 35] в 1966–1967 годах) эта форма дробной производной не была включена авторами, которые являются всемирно признанными экспертами в области дробного интегродифференцирования, в монографию [1].

Исследование свойств дробной производной Герасимова–Капуто было начато Р. Горенфлю и Ф. Маинарди [119] в 1997 году, затем в монографии И. Подлюбного [11] в 1999 году, где впервые этой форме записи было присвоено название “производная Капуто” по предложению Ф. Маинарди [119], хотя И. Подлюбный прекрасно знал работы русских ученых и включил в список источников статью А.Н. Герасимова [28]. Анализ свойств этой производной был продолжен К. Дитхельмом в 2004 году, который подробно описывает историю появления этого определения дробной производной (см. с. 51 в [13]), но написал, что сознательно оставляет название только с одной фамилией, как это было предложено Ф. Маинарди. С тех пор не только в англоязычной литературе [14, 16, 110, 119–124], но и в некоторых российских источниках [15, 66, 70, 76, 125, 126] авторы используют термин “производная Капуто”, в то время как более корректно использовать понятие “производная Герасимова–Капуто” [2, 7, 32, 127].

В последние годы появился вал статей (например, [128–134]), в которых обсуждаются теории и приложения “новых производных дробного порядка”, которые построены путем замены сингулярного ядра в производных Герасимова–Капуто или Римана–Лиувилля на несингулярное ядро. В работах [122, 124] приведен обзор существующих на данный момент определений операторов дробного порядка, начиная с классических [1, 2, 123] и заканчивая недавно предложенными [128, 129]. В [122, 135] было показано, что все новоявленные формы операторов, хотя их авторы и приписали им определение “дробные”, не отвечают критериям дробных производных. Коллектив математиков, обладающих большим опытом в исследовании операторов дробного порядка, в статье с названием “Почему дробные производные с несингулярными ядрами не должны использоваться” [136] на основе строгих математических выкладок показал, что такие производные обладают недостатками, которые должны запретить их использование. Они не удовлетворяют фундаментальной теореме дробного исчисления, поскольку не допускают существование соответствующего интеграла свертки, для которого производная является левым обратным, и значение производной в на-

чальный момент времени всегда равно нулю, что накладывает неестественное ограничение на дифференциальные уравнения и модели, где такие производные могут применяться. В частных случаях для так называемых производных Капуто–Фабрицио [126] и Атангана–Балеану [127] показано, что если это ограничение выполняется, то производная может быть просто выражена через производные целого порядка и дробную производную Герасимова–Капуто, тем самым доказывая, что эти производные не содержат в себе ничего нового.

Обзор полезных формул из теории дробного исчисления собран в справочной статье [123], поэтому ограничимся только теми, которые будут использоваться нами в дальнейшем – левосторонние (с нижним индексом “+”) и правосторонние (с нижним индексом “–“) интегралы ${}^{RL}I^\gamma$ и производные ${}^{RL}D^\gamma$ Римана–Лиувилля дробного порядка γ на отрезке $[a, b]$ ($-\infty < a < b < \infty$) [1]

$${}^{RL}I_{a+}^\gamma \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_a^t \frac{\varphi(t')}{(t-t')^{1-\gamma}} dt' \quad (t > a) \quad (2.1)$$

$${}^{RL}I_{b-}^\gamma \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_t^b \frac{\varphi(t')}{(t'-t)^{1-\gamma}} dt' \quad (x < b) \quad (2.2)$$

$${}^{RL}D_{a+}^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(t')}{(t-t')^\gamma} dt' \quad (2.3)$$

$${}^{RL}D_{b-}^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_t^b \frac{f(t')}{(t'-t)^\gamma} dt' \quad (2.4)$$

на полуоси, когда $a = 0$

$${}^{RL}I_{0+}^\gamma \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t \frac{\varphi(t')}{(t-t')^{1-\gamma}} dt' \quad (2.5)$$

$${}^{RL}I_{-}^\gamma \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_t^\infty \frac{\varphi(t')}{(t'-t)^{1-\gamma}} dt' \quad (2.6)$$

$${}^{RL}D_{0+}^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(t')}{(t-t')^\gamma} dt' \quad (2.7)$$

$${}^{RL}D_{-}^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_t^\infty \frac{f(t')}{(t'-t)^\gamma} dt' \quad (2.8)$$

и на всей оси

$${}^L I_{+}^\gamma \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{-\infty}^t \frac{\varphi(t')}{(t-t')^{1-\gamma}} dt' \quad (2.9)$$

$${}^L D_{+}^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t \frac{f(t')}{(t-t')^\gamma} dt' \quad (2.10)$$

производные Герасимова–Капуто [11, 16, 33]

$${}^{GC} D_{a+}^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_a^t \frac{f'(t')}{(t-t')^\gamma} dt' \quad (f' = df/dt) \quad (2.11)$$

$${}^{GC}D_+^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_{-\infty}^t \frac{f'(t')}{(t-t')^\gamma} dt' \quad (2.12)$$

где $\Gamma(\gamma)$ – гамма-функция.

Мы не будем здесь останавливаться на свойствах операторов (2.1)–(2.12), так как по этому вопросу имеется обширная литература [1, 7, 11, 13, 14, 16, 120–123].

Из сравнения определений дробных производных по Риману–Лиувиллю (2.3), (2.10) и Герасимову–Капуто (2.11), (2.12) видно, что они отличаются порядком действия операций дифференцирования и интегрирования, но в случае, когда нижний предел равен $-\infty$, обе производные приводят к одинаковым результатам.

В наследственной механике важную роль играют операторы дробного порядка, определенные на всей оси, поскольку они позволяют описать процесс затухающей памяти, и операторы на полуоси, когда динамический процесс рассматривается с момента времени $t = 0$.

2.2. Несколько замечаний о терминологии. В подавляющем количестве публикаций, исследование в которых выполнены с использованием аппарата дробного исчисления, объектом анализа является система с одной степенью свободы. Это связано в основном с двумя причинами. Во-первых, система с одной степенью свободы часто используется в инженерной практике в качестве первого приближения или в качестве эталонной тестовой задачи, прежде чем перейти к рассмотрению более сложных моделей или систем со многими степенями свободы, например, простейшая модель виброизоляционной системы, гасителя колебаний или одномассовая модель высотного здания в виде невесомого стержня с присоединенной массой [96, 137, 138]. Во-вторых, изучение колебаний сложных механических систем или конструкций может быть сведено к решению системы уравнений, описывающих колебания одномассовых систем [113, 139].

Однако сейчас вместо классического понятия механическая система с одной степенью свободы [140], или одномассовая система [95, 131, 141, 142], стал весьма распространенным так называемый осциллятор (oscillator). Очевидно, что “мода” на это слово пришла из физики, где давно устоявшимися терминами являются осциллятор Дюффинга (Duffing oscillator) [143–146], осциллятор Матье (Mathieu oscillator) [147] и осциллятор Ван дер Поля (Vander Pol oscillator) [148, 149].

Но при рассмотрении дифференциальных уравнений с дробными производными, описывающих затухающие колебания системы с одной степенью свободы, появились новые термины как в англоязычных, так в русскоязычных источниках: дробный осциллятор (fractional oscillator) [67, 68, 76, 150–153], эредитарный осциллятор [154–157], фрактальный осциллятор (fractal oscillator) [158, 159], фрактальное трение [160], фрактальное уравнение [161], дробные колебания (fractional vibrations) [162, 163].

Не только у неискушенного читателя, но и у ученого со стажем подобные русские словосочетания могут вызвать вполне обоснованное недоумение. Термин дробный осциллятор перешел из англоязычной литературы как прямой перевод словосочетания fractional oscillator. Как нами уже отмечалось в обзорной работе [96], термины fractional oscillator и fractionally damped structure означают в механике использование аппарата дробного исчисления для описания сил демпфирования в разрешающих дифференциальных уравнениях движения.

С нашей точки зрения и с точки зрения механического смысла, ни дробного, ни эредитарного, ни фрактального осцилляторов в природе не существует. И вряд ли кому понятно, что такое фрактальное трение или дробные колебания. Часто подобного рода недоразумения возникают из-за неточного перевода с английского на русский и обратно. Слова fractional и fractal имеют общий корень, но имеют совершенно разный и лингвистический, и научный смысл. Прилагательное fractal имеет отношение только к фрактальным объектам, которые являются сильно нелинейными структурами, и не

могут описываться классическими дробными производными, которые, как известно, являются линейными операторами [1, 122, 127]. В использование слова fractal в контексте использования дробных производных Римана–Лиувилля и Герасимова–Капуто внесла свою “отрицательную” лепту и монография [164] с названием “Физика фрактальных операторов”, в которой только глава 2 посвящена фракталам, а остальной материал – анализу и использованию дробных производных. Так, Р.Р. Нигматуллин [165] предпринял попытку найти связь между фрактальным множеством Кантора и интегралом дробного порядка, предположив, что фрактальный размер множества Кантора совпадает с дробным порядком интеграла. Но из критической заметки Р.С. Рутмана [166] следует, что приемлемого соотношения между фракталами и дробным интегрированием или дифференцированием установлено не было. Такое же мнение изложено и в монографии И. Подлюбного [11]. В русскоязычной литературе термин фрактальный осциллятор “прижился” после опубликования в 2002 году работы [158].

Что же касается эредитарных осцилляторов [154–157], то этот термин стал появляться в русскоязычных работах после опубликования статьи В.В. Учайкина [66] в 2007 году, в которой он ввел понятие эредитарность (прямое калькирование от heredity, что в переводе с английского означает наследственность). В русской научной литературе уже существовало достаточно терминов, которыми пользовались и пользуются российские исследователи [8–10, 95] и которые нашли отражение и в западной научной литературе: затухающая память (fading memory), последствие (aftereffect), наследственная механика (hereditary mechanics), и которые, на наш взгляд, ближе и понятнее русскоязычному читателю.

2.3. О “дробной” силе инерции. В обзоре 2010 года (с. 11–13, [95]) отмечалось, что некоторые исследователи вводят в уравнения движения в описание силы инерции производные дробного порядка по времени от перемещения вместо традиционной производной второго порядка наряду с описанием сил сопротивления внешней среды при помощи дробных производных. Было показано, что поведение корней характеристических уравнений при такой постановке лишено физического смысла. К тому же совершенно непонятно, каким образом можно экспериментально определить порядок дробной производной для силы инерции, т.е. провести калибровку параметра дробности для инженерных расчетов.

С нашими представлениями о подобных задачах с “дробной силой инерции” согласуется критика, приведенная в [108, 167] при анализе задачи о свободном падении тела в атмосфере на основе дробно-дифференциального аналога уравнения Ньютона [168]. Отмечается проблема размерности коэффициента при силе инерции, так как он не совпадает с размерностью массы, что заставляет искать новые формулы для импульса, кинетической энергии и связанных с ними динамических переменных. В работе [167] также показана несостоятельность попытки Д. Балеану с соавторами [169] построить дробный аналог механики Ньютона путем введения дробной скорости и дробного импульса.

Несмотря на критический анализ, приведенный в [96, 108, 167], поток статей, где в уравнениях движения вводятся дробные силы инерции, не ослабевает [76, 151–155, 170].

Так, авторы работ [76, 151] утверждают, что они устранили “пробел” о сомнительности калибровки параметров динамической системы с силой инерции дробного порядка. Для этого ими предложена модель вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы, основанная на уравнении, в котором “учитывается диссипация энергии колебаний” за счет введения дробной производной в инерциальное слагаемое без учета “дополнительной динамической силы трения”. При этом утверждается, что порядок дробной производной в уравнении характеризует резонансные свойства осциллятора и может быть выражен через добротность. Однако, для того чтобы устранить последствия введения дробной производной в силу инерции и “уравновесить” размерность всех слагаемых в исследуемом уравнении, авторы вынуждены были

умножить упругую силу и внешнюю гармоническую силу, под воздействиями которых колеблется материальная точка, на коэффициент, имеющий дробную размерность, в качестве которого была выбрана собственная частота колебаний в степени, равной порядку дробной производной. Таким образом, было исследовано некоторое абстрактное дифференциальное уравнение дробного порядка, которое имеет мало общего с уравнением колебаний материальной точки в диссипативной среде. Позднее авторы распространили этот подход на случай колебаний консольной балки [125].

3. Модели вязкоупругости на основе операторов дробного порядка. При воздействии нагрузок тело может прийти в движение, или его различные частицы могут испытывать движение относительно друг друга, т.е. деформироваться. Деформация в результате данной нагрузки будет зависеть от свойств материала. Она может быть обратимой (упругая деформация) или необратимой (вязкая, пластическая или постоянная деформация), или может содержать как восстанавливаемую, так и остаточную части. Уравнения, описывающие свойства материала способом, который не зависит от размера или формы (то есть геометрии) тела и зависит только от его природы, называют определяющими или реологическими уравнениями состояния [171].

Первое определяющее соотношение для твердых тел было сформулировано Робертом Гуком в 1660 году, но впервые опубликовано им в 1676 году [172] сначала в виде анаграммы CEHNOSSTTUU, которую он расшифровал в 1878 году [173] в его знаменитом заявлении: "*Ut tensio, sic vis*" (каково растяжение, такова и сила). Гук отождествлял любое идеально-упругое твердое тело с пружиной, относительная деформация которой прямо пропорциональна напряжению:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.1)$$

где σ — напряжение, ε — относительная деформация пружины, E — постоянная, называемая модулем упругости и которая обладает свойством накапливать механическую энергию.

Вместо деформации твердого тела может быть рассмотрено ламинарное сдвиговое течение чисто вязкой жидкости. Определяющее уравнение для идеально-вязкой жидкости, согласно которому скорость деформации прямо пропорциональна напряжению, было впервые представлено И. Ньютоном в 1687 году [174]:

$$\sigma = \eta D\varepsilon \quad (3.2)$$

где η — постоянная, известная как коэффициент вязкости амортизатора, а D обозначает дифференцирование по времени. По аналогии с ньютоновской жидкостью, идеально-вязким элементом в теории вязкоупругости считается амортизатор, который проявляет способность рассеивать механическую энергию.

В последнее время широкое распространение получили полимерные материалы, обладающие вязкоупругими свойствами. Поведение вязкоупругих тел нельзя описать только с позиций классической теории упругости, как идеально-упругие твердые тела, или гидродинамической теории, как идеально-вязкой жидкости. Тела, для которых напряжения определяются деформациями и скоростями деформаций (или более высокими производными по времени от деформации), характеризуют процесс деформации как идеально-упругого, так и идеально-вязкого тела, поэтому они получили название вязкоупругих тел. Когда между компонентами напряжения, деформации и скоростей деформации существует линейная зависимость, то тело проявляет линейное вязкоупругое поведение [84].

Поведение материала называется вязкоупругим, если материал накапливает часть энергии деформации упруго, как потенциальную энергию, и рассеивает остальную одновременно посредством вязких сил [171]. Для того чтобы наглядно изобразить работу различных вязкоупругих материалов часто используют механические модели, состоящие из комбинации идеально-упругих и идеально-вязких элементов, соединенных между собой последовательно или параллельно [8, 84, 171, 175, 176].

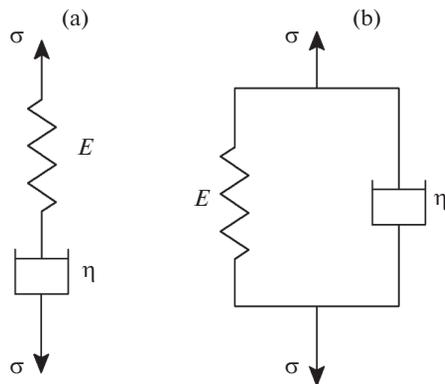


Рис. 1. (а) элемент Максвелла, (б) элемент Кельвина–Фойгта.

3.1. *Классификация классических моделей вязкоупругости.* Следует заметить, что теория вязкоупругости начала развиваться в 30-е годы 18-го столетия. Подробный обзор первых исследований, посвященных изучению свойств “не вполне упругих” твердых тел, или материалов, обладающих внутренним трением, и опубликованных с 1834 по 1933 год, был сделан Дж.Х. Томпсоном [177].

Интересно отметить, что анализ классических работ Дж. Максвелла (1867 [178]), лорда Кельвина (он же W. Thomson, 1865 [179], 1875 [180]), О.Э. Мейера (1874 [181]), В. Фойгта (1889 [182], 1892 [183]) и Г. Джеффриса (1917 [184], 1929 [185]) показал, что авторы не использовали механическую интерпретацию поведения вязкоупругих материалов в виде сочетания упругой пружины и вязкого демпфера, и, как следствие, в работах [178–185] не приведено механических схем ни элемента Максвелла (рис. 1,а), ни элемента Кельвина–Фойгта (рис. 1,б).

В 1867 году Максвелл [178] записал дифференциальное уравнение, являющееся обобщением закона (3.2) и описывающее релаксацию материала, которое можно интерпретировать с помощью последовательного соединения упругого и вязкого элементов (рис. 1,а) (в этом случае напряжение σ одинаково для пружины и амортизатора, а общая деформация ϵ равна сумме их деформаций):

$$\sigma + \tau_\epsilon D\sigma = E_\infty \tau_\epsilon D\epsilon \quad (3.3)$$

где $E_\infty = E$ – нерелаксированный, или мгновенный, модуль упругости (non-relaxed, or instantaneous, or glassy elastic modulus), $\tau_\epsilon = \eta/E_\infty$ – время релаксации (relaxation time).

Дифференциальное уравнение, обобщающее закон Гука (3.1) и описывающее упругое последствие в материале (это понятие было введено Кельвином [180], но без записи дифференциального уравнения), было представлено независимо друг от друга в работах Мейера [181], Фойгта [182, 183] и Джеффриса [184]. Несмотря на этот факт, модель в виде параллельного соединения упругого и вязкого элементов (рис. 1,б) в литературе называют элементом Кельвина–Фойгта, или моделью Фойгта, или моделью Кельвина (в этом случае деформации ϵ одинаковы, а напряжение σ равно сумме напряжений в растянутой пружине и амортизаторе):

$$\sigma = E_0 \epsilon + E_0 \tau_\sigma D\epsilon \quad (3.4)$$

где $E_0 = E$ – релаксированный, или длительный, модуль упругости (relaxed, or prolonged, or rubbery elastic modulus), $\tau_\sigma = \eta/E_0$ – время ретардации или время запаздывания [9] (retardation time, or creep time, or delayed time).

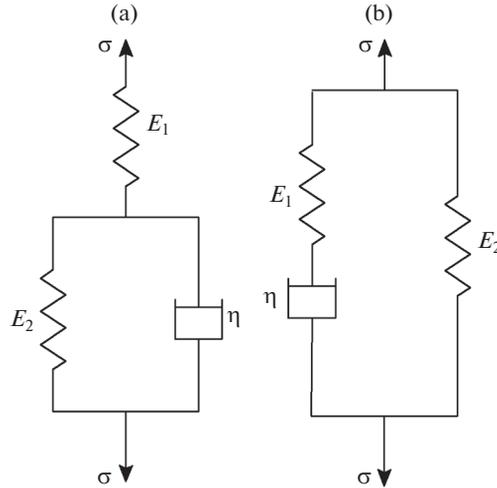


Рис. 2. Схемы моделей стандартного линейного тела: (а) модель Пойнтинга–Томсона–Ишлинского, (б) модель Зинера–Ржаницына.

Как отмечал Ю.Н. Работнов [9], в природе, вероятно, нельзя указать материалы, которые подчинялись бы уравнению (3.3) или (3.4): идеальная вязкоупругая жидкость Максвелла и идеальное вязкоупругое тело Кельвина–Фойгта представляют собой некоторые воображаемые модели, свойства которых далеки от свойств всех реальных тел.

Комбинируя пружины и вязкие сопротивления, можно получить схемы, поведение которых, по крайней мере, качественно лучше воспроизводят поведение реальных твердых тел под нагрузкой. Так, например, трехэлементные модели состоят из комбинаций соединений двух пружин и одного амортизатора или одной пружины и двух амортизаторов. В литературе встречается большое разнообразие названий данных моделей, и нет единой структуры их классификации [186]. Ограничимся далее рассмотрением моделей, которые применяются в механике деформируемого твердого тела.

Трехэлементная модель с двумя пружинами, которая называется моделью стандартного линейного твердого тела (standard linear solid model) [8, 78, 171, 187], получается присоединением пружины последовательно к модели Кельвина–Фойгта (рис. 2,а) или параллельно к модели Максвелла (рис. 2,б). В связи с этим данные модели также называют стандартными трехпараметрическими моделями Кельвина–Фойгта и Максвелла соответственно [171].

Некоторые авторы [97, 171, 188] связывают первое появление модели стандартного линейного тела с книгой Дж. Пойнтинга и Дж. Томсона [189], вышедшей в свет в 1902 году. Но если обратиться к их работе [189], то можно увидеть, что ни интегрального, ни дифференциального уравнения, описывающего поведение материала, там не приведено, а схема, предложенная Пойнтингом и Томсоном (рис. 3,а), является лишь первой попыткой “представить твердое тело в виде подходящей механической модели”, как и было замечено К. Зинером [187].

В связи с этим уместно напомнить, что дифференциальное уравнение модели стандартного линейного тела было впервые получено А.Ю. Ишлинским в 1940 году [190, 192] в виде

$$\sigma + \tau_\varepsilon D\sigma = E_0(\varepsilon + \tau_\sigma D\varepsilon) \quad (3.5)$$

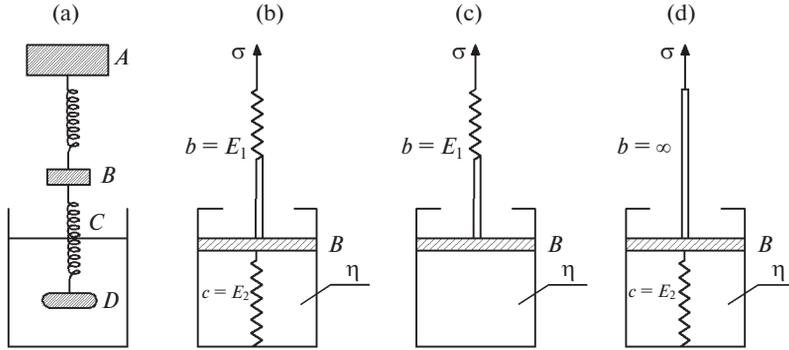


Рис. 3. Механические модели: (а) Пойнтинга–Томсона [189], (b) упруго-релаксирующее тело Ишлинского [191, 192], (с) тело Максвелла, лишенное последствия [192], (d) тело Фойгта, лишенное свойств релаксации [192].

где $E_0 = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$ – релаксированный модуль упругости модели, $E_\infty = E_1$ – нерелаксированный модуль, а $\tau_\varepsilon = \frac{\eta}{E_1 + E_2}$ и $\tau_\sigma = \frac{\eta}{E_2}$ – соответственно характерные времена релаксации и запаздывания.

Ю.Н. Работнов в своей статье 1948 года [29] называет модель (3.5) упруго-релаксирующим телом Ишлинского и, отталкиваясь именно от этой работы А.Ю. Ишлинского [190], впервые записывает модель стандартного линейного тела через оператор дробного порядка, который мы сейчас называем дробным оператором Ю.Н. Работнова.

В статье А.Ю. Ишлинского 1945 года [192] приведены схемы стандартного линейного тела (рис. 3,b), модели Максвелла (рис. 3,c) и модели Кельвина–Фойгта (рис. 3,d). Из сравнения схем, представленных на рис. 3,a и 3,b, видно, что они моделируют один и тот же процесс, поэтому первый вариант модели стандартного линейного тела в виде обобщенной модели Кельвина–Фойгта (рис. 2,a) следует называть моделью Пойнтинга–Томсона–Ишлинского.

Модель стандартного линейного твердого тела, представленную на рис. 2,b, в западной литературе приписывают К. Зинеру, считая, что уравнение данной модели впервые было записано в 1948 году в работе [187].

Однако следует отметить, что эта же модель одновременно была предложена в монографии А.Р. Ржаницына в 1949 году [8], поэтому второй вариант модели стандартного линейного тела в виде обобщенной модели Максвелла (рис. 2,b) корректно называть моделью Зинера–Ржаницына.

А.Р. Ржаницын также показал [8], что уравнение (3.5) справедливо для обеих трехэлементных схем, представленных на рис. 2, с точностью до определения характерных величин [84], которые для модели на рис. 2,b имеют вид

$$E_0 = E_2, \quad E_\infty = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}, \quad \tau_\varepsilon = \frac{\eta}{E_1}, \quad \tau_\sigma = \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \eta$$

а в работе [193] анализировалась эквивалентность обоих вариантов модели с точностью до коэффициентов.

Известно, что свойства вязкоупругого материала меняются с течением времени, при этом модуль упругости уменьшается от своего нерелаксированного (мгновенного)

значения до релаксированного (длительного), которые связаны с временами релаксации и ретардации следующим соотношением [30, 187]:

$$\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma} = \frac{E_0}{E_\infty} \quad (3.6)$$

т.е. классическая модель линейного стандартного твердого тела (3.5) представляет собой трехпараметрическую модель, физическими характеристиками которой являются мгновенный E_∞ и длительный E_0 модули упругости и время релаксации τ_ε (или время запаздывания τ_σ) независимо от того, какую схему использовать: первую на рис. 2,а или вторую на рис. 2,б. Поэтому применение уравнения (3.5) с абстрактными коэффициентами

$$\sigma + a_1 D\sigma = E\varepsilon + a_2 D\varepsilon$$

в механике твердого деформируемого тела является неприемлемым.

Сейчас название модель Зинера для уравнения (3.5) прочно укоренилось не только в зарубежной литературе [16, 52, 53, 193–201], но, к сожалению, и у некоторых российских авторов [69, 70, 74, 77], которые забывают или не знают о вкладе А.Ю. Ишлинского и А.Р. Ржаницына в становлении модели стандартного линейного твердого тела.

Дальнейшее увеличение количества элементов Максвелла и Кельвина–Фойгта приводит к усложнению модели, различные схемы подробно описаны в многочисленных источниках по вязкоупругости [52, 84, 96, 171].

3.2. Простейшие модели вязкоупругости с дробными производными. Рассмотрим простейшие модели, которые могут быть получены заменой производных целого порядка в традиционных моделях на производные дробного порядка по времени, используя определение Римана–Лиувилля (2.7)

$$D^\gamma \sigma = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\sigma(t')}{\Gamma(1-\gamma)(t-t')^\gamma} dt' \quad (3.7)$$

где принято обозначение $D^\gamma = {}^{RL}D_{0+}^\gamma$ далее по тексту, $0 < \gamma \leq 1$ – порядок дробной производной. Заметим, что $D^1 x(t) = dx/dt$, так как $\lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{(t-t')^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} = \delta(t-t')$.

Следует отметить, что выбор производной по Риману–Лиувиллю для изучения динамических задач вязкоупругости не является случайным, так как при их решении часто бывает необходимо находить резольвентные операторы и расшифровывать сложные операторные соотношения [202, 203]. Использование для этих целей других форм дробных производных, например, по Герасимову–Капуто ${}^{GC}D^\gamma$ оказывается весьма неудобным. Так, в [с. 13, 39] было показано, что для резольвентных функций (а дробно-экспоненциальная функция Работнова как раз и обладает таким свойством) справедливо равенство ${}^{RL}D_{0+}^\gamma I_{0+}^\gamma = I_{0+}^\gamma {}^{RL}D_{0+}^\gamma$, в то время, как для производной Герасимова–Капуто нет: ${}^{GC}D_{0+}^\gamma {}^{RL}I_{0+}^\gamma \neq {}^{RL}I_{0+}^\gamma {}^{GC}D_{0+}^\gamma$, другими словами, это неравенство приводит к дополнительным значительным трудностям при нахождении резольвентных операторов. Именно поэтому в дальнейшем мы будем использовать производные дробного порядка по Риману–Лиувиллю.

Модель Кельвина–Фойгта с дробной производной, предложенная в 1959 году Ш. Ватанабэ [33] и 1966 году Т.Д. Шермергором [30], имеет вид

$$\sigma = E_0 \varepsilon + E_0 \tau_0^\gamma D^\gamma \varepsilon \quad (3.8)$$

При $\gamma = 1$ модель (3.8) переходит в классическую модель вязкоупругости Кельвина–Фойгта (3.4).

Следует отметить, что в некоторых источниках [72–75] в уравнении (3.8) деформацию ε заменяют скоростью деформаций $\dot{\varepsilon}$, т.е. записывают соотношение $\sigma = E_0 \dot{\varepsilon} + E_0 \tau_\sigma^\gamma D^\gamma \dot{\varepsilon}$, которое также называют моделью Фойгта с дробной производной, что совершенно ошибочно, поскольку записанная в таком виде модель с дробной производной представляет собой параллельное соединение двух демпферов и описывает поведение вязкоупругой жидкости.

Резольвентное уравнение к уравнению (3.8) имеет вид

$$\varepsilon(t) = J_0 \frac{1}{1 + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma} \sigma(t) \quad (3.9)$$

где $J_0 = E_0^{-1}$ – длительная податливость, а оператор

$$\mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\sigma^\gamma) = \frac{1}{1 + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma} \quad (3.10)$$

– безразмерный оператор Ю.Н. Работнова [30, 92, 93, 202, 203].

Учитывая, что $D^\gamma I^\gamma = I^\gamma D^\gamma = 1$, оператор (3.10) можно представить в виде

$$\mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\sigma^\gamma) = \frac{I^\gamma \tau_\sigma^{-\gamma}}{1 - (-I^\gamma \tau_\sigma^{-\gamma})} \quad (3.11)$$

где $I^\gamma = {}^{RL}I_{0+}^\gamma$ – дробный интеграл (2.5).

Предполагая, что правая часть формулы (3.11) является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $d = -I^\gamma \tau_\sigma^{-\gamma}$, приходим к следующему соотношению:

$$\mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\sigma^\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tau_\sigma^{-\gamma(n+1)} I^{\gamma(n+1)} \quad (3.12)$$

С учетом выражения (3.12) соотношение между деформацией и напряжением (3.9) можно переписать в виде

$$\varepsilon = J_0 \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\sigma^\gamma) \sigma(t) = J_0 \int_0^t \mathfrak{E}_\gamma(t'/\tau_\sigma) \sigma(t-t') dt' \quad (3.13)$$

где

$$\mathfrak{E}_\gamma(t/\tau_\sigma) = \frac{t^{\gamma-1}}{\tau_\sigma^\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t/\tau_\sigma)^{\gamma n}}{\Gamma[\gamma(n+1)]} \quad (3.14)$$

– дробно-экспоненциальная функция Ю.Н. Работнова [29], которая при $\gamma = 1$ переходит в обычную экспоненту, а при $\gamma \rightarrow 0$ превращается в $\frac{1}{2}$ - δ -образную последовательность, поскольку $\mathfrak{E}_0(t/\tau_\sigma)$ обращается в ноль для любого t ($\Gamma(0) = \infty$), кроме значения $t = 0$, при котором $\mathfrak{E}_0(0) = \infty$, т.е.

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \mathfrak{E}_\gamma(t'/\tau_\sigma) = \frac{1}{2} \delta(t') \quad (3.15)$$

Поэтому при $\gamma = 0$, как это следует из соотношения (3.13),

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} J_0 \sigma(t) \quad (3.16)$$

а из уравнения (3.8) при $\gamma = 0$ получаем

$$\sigma(t) = 2E_0\varepsilon(t) \quad (3.17)$$

Из сравнения формул (3.16) и (3.17) вытекает, что обобщенную модель Фойгта (3.8) нельзя использовать при $\gamma = 0$.

То же самое можно сказать и об обобщенной модели Максвелла с дробными производными

$$J_\infty(\sigma + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma \sigma) = \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma \varepsilon \quad (3.18)$$

где $J_\infty = E_\infty^{-1}$ – мгновенная податливость.

В самом деле формулу (3.18) можно переписать в другом виде, если на правую и левую части этой формулы подействовать оператором I^γ и учесть, что $I^\gamma D^\gamma = D^\gamma I^\gamma = 1$. В результате получим [31]

$$\varepsilon(t) = J_\infty \left[\sigma(t) + \tau_\varepsilon^{-\gamma} \int_0^t \frac{t'^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \sigma(t-t') dt' \right] \quad (3.19)$$

Выражая из уравнения (3.18) величину $\sigma(t)$, имеем

$$\sigma(t) = E_\infty \frac{\tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma}{1 + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma} \varepsilon(t) = E_\infty \left(1 - \frac{1}{1 + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma} \right) \varepsilon(t) \quad (3.20)$$

Учитывая выражения (3.10) и (3.12), соотношение (3.20) можно переписать в виде

$$\sigma(t) = E_\infty \left[\varepsilon(t) - \int_0^t \partial_\gamma(t'/\tau_\varepsilon) \varepsilon(t-t') dt' \right] \quad (3.21)$$

Устремляя в соотношениях (3.19) и (3.21) γ к нулю и учитывая, что

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{t'^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} = \delta(t') \quad (3.22)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \partial_\gamma(t'/\tau_\varepsilon) = \frac{1}{2} \delta(t') \quad (3.23)$$

находим

$$\varepsilon(t) = 2J_\infty \sigma(t) \quad (3.24)$$

$$\sigma(t) = \frac{1}{2} E_\infty \varepsilon(t) \quad (3.25)$$

Иначе обстоит дело с моделью стандартного линейного тела с дробными производными, предложенной С.И. Мешковым в 1967 году [31],

$$J_0(\sigma + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma \sigma) = \varepsilon + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma \varepsilon, \quad (3.26)$$

где

$$\left(\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma} \right)^\gamma = \frac{E_0}{E_\infty} = \frac{J_\infty}{J_0} \quad (3.27)$$

Следует отметить, что формула (3.27), которая была получена в [30] и [31] из сравнения резольвентных операторов, описывающих соотношения напряжение-деформация и деформация-напряжение, является очень важной с физической точки зрения, поскольку дает связь между реологическими параметрами модели, обеспечивающую ее физическую достоверность.

Из соотношения (3.26) можно выразить напряжение $\sigma(t)$ через деформацию $\varepsilon(t)$ и, наоборот, функцию деформации $\varepsilon(t)$ через напряжение $\sigma(t)$ [92, 93, 201, 204]

$$\sigma(t) = E_0 \frac{1 + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma}{1 + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma} \varepsilon(t) = E_\infty \left(1 - \nu_\varepsilon \frac{1}{1 + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma} \right) \varepsilon(t) \quad (3.28)$$

$$\varepsilon(t) = J_0 \frac{1 + E_\infty E_0^{-1} \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma}{1 + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma} \sigma(t) = J_\infty \left(1 + \nu_\sigma \frac{1}{1 + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma} \right) \sigma(t) \quad (3.29)$$

или

$$\sigma = \bar{E}\varepsilon, \quad \bar{E} = E_\infty [1 - \nu_\varepsilon \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^\gamma)] \quad (3.30)$$

$$\varepsilon = \bar{J}\sigma, \quad \bar{J} = J_\infty [1 + \nu_\sigma \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\sigma^\gamma)] \quad (3.31)$$

где $\nu_\varepsilon = \Delta E E_\infty^{-1}$, $\nu_\sigma = \Delta J J_\infty^{-1}$, $\Delta E = E_\infty - E_0$ – дефект модуля, т.е. величина, характеризующая уменьшение упругого модуля от его нерелаксированного значения до релаксированного, и $\Delta J = J_0 - J_\infty$ – дефект податливости.

Тогда с учетом соотношений (3.10), (3.12) и (3.27) приходим к уравнениям

$$\sigma(t) = E_\infty \left[\varepsilon(t) - \nu_\varepsilon \int_0^t \mathfrak{E}_\gamma(t'/\tau_\varepsilon) \varepsilon(t-t') dt' \right] \quad (3.32)$$

$$\varepsilon(t) = J_\infty \left[\sigma(t) + \nu_\sigma \int_0^t \mathfrak{E}_\gamma(t'/\tau_\sigma) \sigma(t-t') dt' \right] \quad (3.33)$$

которые представляют собой соотношения Больцмана–Вольтерра со слабо сингулярными ядрами наследственности $\mathfrak{E}_\gamma(t'/\tau_i)$, где $i = \varepsilon$ или σ , которые затухают при $t \rightarrow \infty$, при этом резольвентные ядра остаются такими же. Только экспоненциальные ядра обладают таким свойством, поэтому ядра (3.14) называют дробно-экспоненциальными функциями Ю.Н. Работнова [29].

При $\gamma \rightarrow 0$ выражения (3.30) и (3.31) принимают соответственно вид

$$\sigma(t) = E_\infty \left(1 - \frac{1}{2} \nu_\varepsilon \right) \varepsilon(t) \quad (3.34)$$

$$\varepsilon(t) = J_\infty \left(1 + \frac{1}{2} \nu_\sigma \right) \sigma(t) \quad (3.35)$$

Учитывая, что

$$1 - \nu_\varepsilon = E_0 E_\infty^{-1} = \tau_\varepsilon^\gamma \tau_\sigma^{-\gamma}, \quad 1 + \nu_\sigma = J_0 J_\infty^{-1} = \tau_\sigma^\gamma \tau_\varepsilon^{-\gamma} \quad (3.36)$$

из соотношений (3.34) и (3.35) имеем

$$\sigma(t) = \frac{1}{2} (E_\infty + E_0) \varepsilon(t) = E \varepsilon(t) \quad (3.37)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} (J_\infty + J_0) \sigma(t) = J \sigma(t) \quad (3.38)$$

Как видно из формулы (3.27), если $\gamma = 0$, то $E = E_0 = E_\infty$ и $J = J_0 = J_\infty$, и следовательно, при $\gamma = 0$ модель стандартного линейного тела с дробными производными переходит в корректную модель чисто упругого тела.

На основании выражений (3.32) и (3.33) можно записать связь между резольвентными операторами

$$\frac{1}{1 - \nu_\varepsilon \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^\gamma)} = 1 + \nu_\sigma \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\sigma^\gamma) \quad (3.39)$$

которое является первым резольвентным тождеством Гильберта. Для того чтобы это показать, достаточно умножить выражение справа в (3.39) на знаменатель левого выражения, учесть теорему умножения операторов Работнова [93, 202]

$$\mathfrak{A}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^\gamma)\mathfrak{A}_\gamma^*(\tau_\sigma^\gamma) = \frac{\tau_\varepsilon^\gamma \mathfrak{A}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^\gamma) - \tau_\sigma^\gamma \mathfrak{A}_\gamma^*(\tau_\sigma^\gamma)}{\tau_\varepsilon^\gamma - \tau_\sigma^\gamma} \quad (3.40)$$

а также учесть формулы $\frac{\nu_\varepsilon \tau_\sigma^\gamma}{\tau_\sigma^\gamma - \tau_\varepsilon^\gamma} = \frac{\nu_\sigma \tau_\varepsilon^\gamma}{\tau_\sigma^\gamma - \tau_\varepsilon^\gamma} = 1$.

Уравнение (3.32) было записано Ю.Н. Работновым в 1948 году [29] с использованием размерного оператора дробного порядка

$$\sigma = \bar{E}\varepsilon, \quad \bar{E} = E_\infty[1 - \varkappa \mathfrak{A}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^\gamma)] = E_\infty \left[1 - \nu_\varepsilon \tau_\varepsilon^{-\gamma} \frac{1}{\tau_\varepsilon^{-\gamma} + D^\gamma} \right], \quad \varkappa = \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty \tau_\varepsilon^\gamma} \quad (3.41)$$

причем в работе показано, что это уравнение соответствует модели стандартного линейного твердого тела.

В монографии [9] Ю.Н. Работнов критикует использование модели Масквелла для решения задач механики деформируемого твердого тела, которая легко получается из уравнения (3.41) при $E_0 = 0$ и, как следствие, $\varkappa = \tau_\varepsilon^{-\gamma}$, и в своих исследованиях использовал только модель (3.41).

Однако А.М. Нахушев в своей монографии [12, § 5.2] пытался доказать, что модель Ю.Н. Работнова сводится к модели Максвелла с дробными производными, ошибочно полагая, что в уравнении (3.41) $\varkappa = \tau_\varepsilon^{-\gamma}$, так и не поняв всей философии подхода Ю.Н. Работнова. Ошибочное суждение А.М. Нахушева [12] о построенной Ю.Н. Работновым модели стандартного линейного тела в виде соотношений Больцмана–Вольтерра (3.41) с размерным оператором дробного порядка (или уравнение (3.32) с безразмерным оператором дробного порядка) было продублировано в учебнике [77, п. 12.7.4] и монографии [78, § 1.3].

Эквивалентность интегральных соотношений Больцмана–Вольтерра с сингулярным ядром в виде дробно-экспоненциальной функции Работнова и дифференциальных уравнений дробного порядка, соответствующих моделям Кельвина–Фойгта, Максвелла и стандартного линейного тела, обсуждалась в работах [30, 31] и подробно рассмотрена в обзоре [95, п. 1.3].

В статьях И. Севостьянова с соавторами [205–207] отмечается взаимосвязь параметров интегральных соотношений с дробно-экспоненциальными функциями Работнова и коэффициентов модели стандартного линейного тела, изображенной на рис. 2,а. Однако в работах [205] и [207] приведена очень странная информация о том, что дробно-экспоненциальная функция Работнова (3.14) одновременно была предложена в работах Скотт–Блэра и Коппин (1939 [208], 1943 [209]). Но тщательный анализ показал, что ни в статьях [208, 209], ни в более поздней монографии Скотт–Блэра [210], опубликованной в 1969 году, функции (3.14) нет. Скотт–Блэр сам в [210] отмечает, что он не математик и не претендует на вывод каких-либо уравнений. Стиассни М. в своей статье приводит отрывок из письма Скотт–Блэра к нему [211], в котором Скотт–Блэр отмечает, что “он интуитивно привлек дробную производную от деформации по времени в соотношение между напряжением и деформацией, чтобы описать промежуточное состояние материала между упругим и жидким”. Таким образом, называть соотношения (3.32) и (3.33) моделью с ядром Скотт–Блэра–Работнова, как это сделано в [207], представляется совершенно некорректным.

В заключение этого параграфа заметим, что более сложные модели, включающие в себя несколько производных различных порядков и/или несколько времен релаксации (ретардации), рассмотрены в работах [99–102, 212–215].

Следует отметить, что для определения параметров, входящих в реологические модели с дробными производными, включая параметр дробности (порядок дробной производной γ), за последнее десятилетие было проведено достаточно большое количество численных и натуральных экспериментов для широкого класса материалов. Обзор этих методов является предметом отдельной статьи, ограничимся перечислением работ, в которых получены наиболее значимые результаты [216–236].

3.3. *Использование моделей вязкоупругости с дробными производными для описания динамического поведения современных материалов.* Большинство опытов с вязкоупругими материалами проводятся на ползучесть, поэтому если реологическая модель записана в виде зависимости $\sigma(t)$ от $\varepsilon(t)$, то необходимо найти обратную связь, т.е. выразить $\varepsilon(t)$ через $\sigma(t)$. Эта связь позволит провести опыты на ползучесть и определить физические константы, которые входят в эти соотношения. Иначе говоря, нужно построить резольвентные операторы для каждой модели.

Хорошо известно [237, 238], что каждый изотропный упругий материал обладает только двумя независимыми константами, а все остальные выражаются через две, которые должны быть заданы или определены из экспериментов. Так, например, если известны модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν , тогда параметры Ламе λ и μ и объемный модуль K определяются следующим образом:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (3.42)$$

или в случае, когда известны модуль сдвига μ и объемный модуль K , остальные константы, E , ν и λ , находятся из соотношений

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu}, \quad \nu = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)}, \quad \lambda = \frac{3K - 2\mu}{3} \quad (3.43)$$

а при заданных параметрах Ламе λ и μ

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (3.44)$$

Точно также и в случае изотропных вязкоупругих сред, материальные свойства которых зависят от времени и описываются операторами, которые должны быть выражены через два наперед заданных (или определенных из экспериментов) оператора, используя принцип соответствия и соотношения (3.42), или (3.43), или (3.44).

Для описания таких вязкоупругих тел как балки, пластинки и оболочки наиболее часто используемыми моделями для оператора Юнга являются соотношения Кельвина–Фойгта с дробными производными (3.8), модель Максвелла с дробными производными (3.18) и модель стандартного линейного тела с дробными производными (3.26). При этом коэффициент Пуассона вязкоупругого материала считается постоянной величиной [97, 202].

Однако, как показывают экспериментальные данные [202, 239], коэффициент Пуассона вязкоупругого материала является зависящим от времени оператором ν [240–242], и только оператор объемного растяжения–сжатия K может приниматься за постоянную величину, поскольку для большинства вязкоупругих материалов он слабо меняется со временем [9, 10].

Однако модель Кельвина–Фойгта с независимым от времени коэффициентом Пуассона может использоваться только для описания динамического поведения упругих тел в вязкоупругой среде [96, 243, 244] или на вязкоупругом основании [245].

Подробный обзор “традиционных” моделей с дробными производными (“традиционными” в том смысле, что в этих моделях коэффициент Пуассона принимается постоянной величиной) приведен в [52, 95, 96].

Ниже будут рассмотрены модели с дробными производными, включающие зависящие от времени операторы Пуассона, что позволит выявить достаточно интересные свойства современных вязкоупругих материалов, в том числе ауксетичных материалов, которые обладают отрицательными коэффициентами Пуассона [246–250].

3.3.1. *Моделирование оператора Юнга E с помощью модели Кельвина–Фойгта с дробной производной без учета объемной релаксации.* Для того чтобы показать несостоятельность модели Кельвина–Фойгта, следуя [251], выберем оператор Юнга в виде

$$E = E_0[1 + (\tau_\sigma^E)^\gamma D^\gamma] \quad (3.45)$$

где τ_σ^E – время ретардации продольной деформации.

Будем считать оператор объемного расширения–сжатия K независимым от времени, тем самым пренебрегая объемной релаксацией (это предположение имеет место для вязкоупругих материалов, у которых объемная релаксация намного меньше, чем релаксация при сдвиге), т.е.

$$K = K_0 \quad (3.46)$$

откуда следует

$$\frac{E}{1 - 2\nu} = 3K_0 \quad (3.47)$$

где K_0 – некоторая константа.

Подставляя (3.45) в (3.47), находим оператор Пуассона

$$\tilde{\nu} = \nu_0 - \frac{E_0}{6K_0} (\tau_\sigma^E)^\gamma D^\gamma \quad (3.48)$$

или

$$\nu(t) = \tilde{\nu}H(t) = \nu_0 - \frac{E_0}{6K_0} (\tau_\sigma^E)^\gamma \frac{t^{-\gamma}}{\Gamma(1 - \gamma)} \quad (3.49)$$

откуда следует, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \nu H(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \nu H(t) = \nu_0 \quad (3.50)$$

где $\nu_0 = \frac{3K_0 - E_0}{6K_0}$.

Из соотношения (3.50) видно, что данная модель не имеет физического смысла, так как для реальных материалов нижнее предельное значение коэффициент Пуассона $\nu(0)$ не может принимать значение $-\infty$. Таким образом, данная модель неприемлема для реальных вязкоупругих материалов.

3.3.2. *Моделирование оператора сдвига μ с помощью модели Кельвин–Фойгта с дробной производной без учета объемной релаксации.* Наиболее часто оператор сдвига μ задается с помощью модели Кельвина–Фойгта с дробной производной

$$\mu = \mu_0[1 + (\tau_\sigma^\mu)^\gamma D^\gamma] \quad (3.51)$$

где μ_0 – релаксированный модуль сдвига, τ_σ^μ – время ретардации при сдвиге, при этом объемный модуль принимается постоянной величиной (3.46).

Для анализа динамического поведения вязкоупругих тел необходимо вычислить оператор Юнга. С этой целью, используя принцип соответствия Вольтерра, воспользуемся формулой

$$E = \frac{9K_0\mu}{3K_0 + \mu} \quad (3.52)$$

Сначала запишем оператор

$$3K_0 + \tilde{\mu} = (3K_0 + \mu_0)(1 + t_\sigma^\gamma D^\gamma) \quad (3.53)$$

где $t_\sigma^\gamma = \mu_0(\tau_\sigma^\mu)^\gamma(3K_0 + \mu_0)^{-1}$.

Затем найдем оператор, обратный к (3.53), т.е.,

$$(3K_0 + \tilde{\mu})^{-1} = \frac{1}{3K_0 + \mu_0} \frac{1}{1 + t_\sigma^\gamma D^\gamma} = (3K_0 + \mu_0)^{-1} \mathfrak{E}_\gamma^*(t_\sigma^\gamma) \quad (3.54)$$

Подставляя (3.51) и (3.54) в (3.52) и учитывая одну полезную формулу [250]

$$t_\sigma^\gamma D^\gamma \cdot \mathfrak{E}_\gamma^*(t_\sigma^\gamma) = \frac{t_\sigma^\gamma D^\gamma}{1 + t_\sigma^\gamma D^\gamma} = 1 - \mathfrak{E}_\gamma^*(t_\sigma^\gamma) \quad (3.55)$$

получим

$$E = 9K_0 \left[1 - \frac{E_0}{3\mu_0} \mathfrak{E}_\gamma^*(t_\sigma^\gamma) \right] \quad (3.56)$$

Теперь оператор Пуассона ν можно вычислить по формуле

$$\frac{E}{1 - 2\nu} = 3K_0 \quad (3.57)$$

Подставляя (3.56) в (3.57), находим

$$\tilde{\nu} = -1 + \frac{E_0}{2\mu_0} \mathfrak{E}_\gamma^*(t_\sigma^\gamma) \quad (3.58)$$

При изучении процесса релаксации, т.е. считая продольную деформацию в стержне постоянной, необходимо подействовать оператором E на единичную функцию Хевисайда $EH(t)$. Тогда с учетом соотношения

$$\int_0^\infty \mathfrak{E}_\gamma \left(-\frac{t-t'}{\tau_i} \right) H(t') dt' = 1 \quad (3.59)$$

получим

$$\lim_{t \rightarrow 0} EH(t) = 9K_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} EH(t) = \frac{9K_0\mu_0}{3K_0 + \mu_0} = E_0 \quad (3.60)$$

Для оператора $\tilde{\nu}H(t)$ имеем [251]

$$\lim_{t \rightarrow 0} \nu H(t) = -1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \nu H(t) = \frac{3K_0 - 2\mu_0}{2(3K_0 + \mu_0)} = \nu_0 \quad (3.61)$$

В соответствии с классической теорией упругости считается, что для традиционных материалов значение коэффициента Пуассона ν изменяется в интервале $0 < \nu \leq 0.5$. Однако, в знаменитом трактате А. Лява “Математическая теория упругости”, первое издание которого было опубликовано в Кембридже в 1892 году [237] (перевод на русский язык был сделан в 1935 году с 4-го английского издания), автор отмечает, что коэффициент Пуассона может находиться в пределах от -1 до 0.5 , обеспечивая тем самым неотрицательность модуля сдвига μ и модуля объемного сжатия K , замечая, что “отрицательные значения коэффициента ν по соображениям устойчивости не исключаются, но такие значения не были найдены ни для одного изотропного тела”.

В России в 1944 году Л.Д. Ландау и Е. Лифшиц [238] в учебнике “Механика сплошных сред” также отмечают, что “поскольку K и μ всегда положительны, то коэффициент Пуассона может меняться для различных веществ только в пределах от -1 (при $K = 0$) до 0.5 (при $\mu = 0$)”, далее замечая, что “в природе не известно тел, у которых было бы $\nu < 0$,

т.е. которые бы испытывали увеличение поперечных размеров при продольном растяжении... Хотя это и не является необходимым с точки зрения термодинамики”.

Однако, в последнее время был создан широкий спектр так называемых ауксетичных материалов [246–249], которые обладают такими необычными механическими свойствами, как отрицательный коэффициент Пуассона, при этом коэффициент Пуассона ν для изотропных ауксетиков может варьироваться в пределах интервала $-1 < \nu \leq 0.5$, а для анизотропных – и в более широком интервале [249].

Следовательно, модель (3.51) с $K = K_0 = \text{const}$ не противоречит законам термодинамики и может описывать поведение изотропных вязкоупругих ауксетиков, при этом коэффициент Пуассона изменяется от -1 до его релаксированного значения ν_0 .

3.3.3. *Моделирование оператора сдвига μ с помощью модели Максвелла.* Если для описания поведения вязкоупругих тел использовать модель Максвелла, тогда оператор сдвига μ может быть записан в виде

$$\mu = \mu_\infty \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma \cdot \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^\gamma) \quad (3.62)$$

или с учетом уравнения (3.55) в виде

$$\mu = \mu_\infty [1 - \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^\gamma)] \quad (3.63)$$

где μ_∞ – нерелаксированное значение модуля сдвига. При этом оператор объемного модуля считается постоянным, т.е.,

$$K = K_\infty \quad (3.64)$$

Используя процедуру, описанную для модели Кельвина–Фойгта, аналогичным образом получим для модели Максвелла

$$E = E_\infty [1 - \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\sigma^\gamma)] \quad (3.65)$$

$$\nu = \frac{1}{2} - \frac{E_\infty}{6K_\infty} [1 - \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^\gamma)] \quad (3.66)$$

или

$$\nu = \nu_\infty + \frac{E_\infty}{6K_\infty} \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^\gamma) \quad (3.67)$$

где

$$\nu_\infty = \frac{3K_\infty - \mu_\infty}{2(3K_\infty + \mu_\infty)}$$

Если рассмотреть процесс релаксации, тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0} EH(t) = E_\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} EH(t) = 0 \quad (3.68)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \nu H(t) = \nu_\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \nu H(t) = \frac{1}{2} \quad (3.69)$$

Из соотношений (3.69) видно, что в случае применения модели Максвелла с дробными производными коэффициент Пуассона изменяется от ν_∞ до его предельного значения 0.5, что означает, что данная модель пригодна для анализа вязкоупругих резиноподобных материалов.

3.3.4. *Моделирование оператора сдвига μ при помощи модели стандартного линейного тела с дробными производными.* Если применить модель стандартного линейного тела для описания вязкоупругих тел, тогда оператор сдвига μ имеет вид

$$\mu = \mu_0 \frac{1 + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma}{1 + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma} \quad (3.70)$$

или

$$\mu = \mu_0 \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^\gamma) + \mu_0 \frac{\tau_\sigma^\gamma}{\tau_\varepsilon^\gamma} \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma \cdot \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^\gamma) \quad (3.71)$$

Подставляя уравнение (3.55) в (3.71) и вводя обозначение

$$\mu_\infty = \mu_0 \frac{\tau_\sigma^\gamma}{\tau_\varepsilon^\gamma} \quad (3.72)$$

в результате получим [250]

$$\tilde{\mu} = \mu_\infty [1 - \nu_\mu^\varepsilon \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^\gamma)] \quad (3.73)$$

где $\nu_\mu^\varepsilon = (\mu_\infty - \mu_0)\mu_\infty^{-1}$, при этом оператор K определяется формулой (3.64).

Таким образом, для данной модели имеем

$$E = E_\infty \left[1 - M_\sigma \frac{3K_\infty}{\mu_\infty} \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\sigma^\gamma) \right] \quad (3.74)$$

$$\nu = \nu_\infty + \frac{E_\infty M_\sigma}{2\mu_\infty} \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\sigma^\gamma) \quad (3.75)$$

где

$$M_\sigma \frac{3K_\infty}{\mu_\infty} = \frac{1 - \mu_0 \mu_\infty^{-1}}{1 + \mu_0 (3K_\infty)^{-1}} < 1, \quad \frac{E_\infty M_\sigma}{2\mu_\infty} = \frac{1}{2K_\infty (1 + \mu_\infty / 3K_\infty) (1 + \mu_0 / 3K_\infty)} < 1$$

Из соотношений (3.73)–(3.75) видно, что модель стандартного линейного тела с дробными производными не только хорошо подходит для описания поведения традиционных вязкоупругих материалов [250], но и для рассмотрения изменения микроструктуры вязкоупругого материала в результате внешнего механического ударного воздействия [221].

3.3.5. *Модель Скотт–Блэра для релаксации сдвига.* Некоторые авторы предпочитают использовать простейшую модель, т.е. элемент Скотт–Блэра, для моделирования оператора сдвига

$$\mu = \mu \tau^\gamma D^\gamma \quad (3.76)$$

и предполагать отсутствие объемной релаксации, т.е. считать $K = K = \text{const}$.

В этом случае

$$3K + \mu = 3K + \mu \tau^\gamma D^\gamma = 3K \left(1 + \frac{\mu}{3K} \tau^\gamma D^\gamma \right) = 3K (1 + T^\gamma D^\gamma) \quad (3.77)$$

где $T^\gamma = \frac{\mu}{3K} \tau^\gamma$.

Тогда с учетом формулы (3.10), вязкоупругий оператор Пуассона имеет вид

$$\nu = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)} = (3K - 2\mu \tau^\gamma D^\gamma) \frac{1}{6K} \mathfrak{E}_\gamma^*(T^\gamma) = -1 + \frac{3}{2} \mathfrak{E}_\gamma^*(T^\gamma) \quad (3.78)$$

откуда следует, что

$$\nu(t) = \nu H(t) = -H(t) + \frac{3}{2} \mathfrak{E}_\gamma^*(T^\gamma) H(t) \quad (3.79)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} vH(t) = -1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} vH(t) = \frac{1}{2} \quad (3.80)$$

Из соотношений (3.80) видно, что в соответствии с данной моделью коэффициент Пуассона может изменяться в широком диапазоне: от -1 до 0.5 .

3.3.6. *Модели, учитывающие объемную релаксацию.* Учет объемной релаксации приводит к усложнению вычислений [203, 250, 251]. Так, если заданы операторы E и μ в соответствии с уравнениями (3.45) и (3.51), тогда сначала надо найти оператор K^{-1} , используя соотношение

$$J = E^{-1} = \frac{3K + \mu}{9K\mu} = \frac{1}{3}\mu^{-1} + \frac{1}{9}K^{-1} \quad (3.81)$$

откуда следует, что

$$K^{-1} = 9E^{-1} - 3\mu^{-1} = a_1 \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\sigma^E)^\gamma - a_2 \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\sigma^\mu)^\gamma \quad (3.82)$$

где $a_1 = 9E_0^{-1}$ и $a_2 = 3\mu_0^{-1}$.

Теперь можно вычислить отношение операторов (3.45) и (3.82)

$$\frac{E}{K} = E_0 [1 + (\tau_\sigma^E)^\gamma D^\gamma] [a_1 \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\sigma^E)^\gamma - a_2 \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\sigma^\mu)^\gamma]$$

или

$$\frac{E}{K} = E_0 \left[a_1 - a_2 \left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\sigma^\mu} \right)^\gamma \right] - E_0 a_2 \left[1 - \left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\sigma^\mu} \right)^\gamma \right] \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\sigma^\mu)^\gamma \quad (3.83)$$

Вычисляя оператор v по формуле

$$\frac{E}{K} = 3(1 - 2v) \quad (3.84)$$

с учетом (3.83), получим

$$v = \frac{1}{2} - \frac{E_0}{6} \left[a_1 - a_2 \left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\sigma^\mu} \right)^\gamma \right] + \frac{E_0}{6} a_2 \left[1 - \left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\sigma^\mu} \right)^\gamma \right] \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\sigma^\mu)^\gamma \quad (3.85)$$

Учитывая произведение $v(t) = \tilde{v} \cdot H(t)$, находим

$$v(0) = \frac{1}{2} - \frac{E_0}{6} \left[a_1 - a_2 \left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\sigma^\mu} \right)^\gamma \right] = -1 + \frac{E_0}{2\mu_0} \left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\sigma^\mu} \right)^\gamma \quad (3.86)$$

$$v(\infty) = \frac{1}{2} + \frac{E_0}{6} (a_2 - a_1) = -1 + \frac{E_0}{2\mu_0} = v_0 \quad (3.87)$$

Из соотношения (3.86) видно, что нижний предел значения коэффициента Пуассона $v(0)$ зависит от отношения двух времен ретардации и параметра дробности γ , в отличие от модели Кельвина–Фойгта без учета объемной релаксации, для которой $v(0) = -1$ в соответствии с (3.61).

Однако заметим, что когда $\left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\sigma^\mu} \right)^\gamma \rightarrow 0$, то из (3.86) следует, что $v(0) \rightarrow -1$. Это означает, что рассматриваемая модель может использоваться для моделирования ауксетичных мате-

Таблица 2. Предельные значения коэффициента Пуассона $\nu(t) = \nu \cdot H(t)$ для материалов, вязкоупругие свойства которых описываются различными моделями с дробными операторами

Тип модели с дробной производной	$\nu(t) _{t \rightarrow 0}$	$\nu(t) _{t \rightarrow \infty}$
1) модель Кельвина–Фойгта $E = E_0[1 + (\tau_\sigma^E)^\gamma D^\gamma]$, $K = K_0 = \text{const}$ $\nu = \nu_0 - \frac{E_0}{2K_0} (\tau_\sigma^E)^\gamma D^\gamma$	$-\infty$	ν_0
2) модель Скотт–Блэра $\mu = \mu \tau^\gamma D^\gamma$, $K = K = \text{const}$ $\nu = -1 + \frac{3}{2} \mathfrak{z}_\gamma^*(T^\gamma)$	-1	$\frac{1}{2}$
3) модель Кельвина–Фойгта $\mu = \mu_0[1 + (\tau_\sigma^\mu)^\gamma D^\gamma]$, $K = K_0 = \text{const}$ $\nu = -1 + \frac{E_0}{2\mu_0} \mathfrak{z}_\gamma^*(\tau_\sigma^\mu)^\gamma$	-1	ν_0
4) модель Максвелла $\mu = \mu_\infty[1 - \mathfrak{z}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^\gamma)]$, $K = K_\infty = \text{const}$ $\nu = \nu_\infty + \frac{E_\infty}{6K_\infty} \mathfrak{z}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^\gamma)$	ν_∞	$\frac{1}{2}$
5) модель стандартного линейного тела $\mu = \mu_0 \frac{1 + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma}{1 + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma}$, $K = K_\infty = \text{const}$, $\nu = \nu_\infty + \frac{E_\infty M_\sigma}{2\mu_\infty} \mathfrak{z}_\gamma^*(\tau_\sigma^\gamma)$	ν_∞	ν_0
6) модель Кельвина–Фойгта с учетом объемной релаксации $E = E_0[1 + (\tau_\sigma^E)^\gamma D^\gamma]$, $\mu = \mu_0[1 + (\tau_\sigma^\mu)^\gamma D^\gamma]$, $\nu = \frac{1}{2} - \frac{E_0}{6} \left[a_1 - a_2 \left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\sigma^\mu} \right)^\gamma \right] + \frac{E_0}{6} a_2 \left[1 - \left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\sigma^\mu} \right)^\gamma \right] \mathfrak{z}_\gamma^*(\tau_\sigma^\mu)^\gamma$	$-1 + \frac{E_0}{2\mu_0} \left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\sigma^\mu} \right)^\gamma$	ν_0
7) модель Кельвина–Фойгта с учетом объемной релаксации $\mu = \mu_0[1 + (\tau_\sigma^\mu)^\gamma D^\gamma]$, $K = K_0[1 + (\tau_\sigma^K)^\gamma D^\gamma]$, $\nu = -1 + \frac{9K_0}{6K_0 + 2\mu_0} \mathfrak{z}_\gamma^*(T^\gamma)$	-1	ν_0
8) модель Максвелла с учетом объемной релаксации $\mu = \mu_\infty[1 - \mathfrak{z}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^{\mu\gamma})]$, $K = K_\infty[1 - \mathfrak{z}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^{K\gamma})]$, $\nu = \frac{1}{2} - \frac{E_\infty}{6K_\infty} \left\{ 1 + \left[\frac{T_1^\gamma}{(\tau_\varepsilon^K)^\gamma} - 1 \right] \mathfrak{z}_\gamma^*(T_1^\gamma) \right\}$	ν_∞	-1
9) модель стандартного линейного тела с учетом объемной релаксации $\mu = \mu_0 \frac{1 + (\tau_\sigma^\mu)^\gamma D^\gamma}{1 + (\tau_\varepsilon^\mu)^\gamma D^\gamma}$, $\lambda = \lambda_0 \frac{1 + (\tau_\sigma^\lambda)^\gamma D^\gamma}{1 + (\tau_\varepsilon^\lambda)^\gamma D^\gamma}$, $\nu = \nu_\infty[1 + M_1 \mathfrak{z}_\gamma^*(T_1^\gamma) + M_2 \mathfrak{z}_\gamma^*(T_2^\gamma)]$	ν_∞	ν_0

риалов до тех пор, пока $\left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\sigma^\mu} \right)^\gamma \rightarrow \frac{2\mu_0}{E_0}$, т.е. $\nu(0) \rightarrow 0$. Для величин $\left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\sigma^\mu} \right)^\gamma \geq \frac{2\mu_0}{E_0}$, $\nu(0) \geq 0$,

что соответствует традиционным вязкоупругим материалам.

Аналогично можно рассмотреть модели с другим сочетанием заданных операторов. В табл. 2 приведены различные модели с дробными производными и соответствующие им предельные значения коэффициентов Пуассона. Так, например, если оператор сдвига задать с помощью модели Максвелла, тогда коэффициент Пуассона меняется от своего не-

релаксированного значения $v(0) = v_\infty$ до $v(\infty) = -1$ (модель 8 в табл. 2). Другими словами, материал может с течением времени приобретать ауксетичные свойства.

4. Заключение. Данная работа посвящена анализу научных исследований, касающихся приложений дробного исчисления (исчисления дробного порядка) в моделях вязкоупругости, которые используются в динамических задачах механики деформируемого твердого тела. Дан анализ различных моделей вязкоупругости, построенных с использованием производных дробного порядка, без учета и с учетом объемной релаксации. Показано, что модели, в которых оператор Пуассона зависит от времени, позволяют описать свойства вязкоупругих ауксетиков, то есть материалов с отрицательными коэффициентами Пуассона. В следующей обзорной статье будет приведен анализ краевых динамических задач с использованием реологических моделей, рассмотренных в данной работе.

Благодарности. Автор выражает благодарность всем своим соавторам, которые принимали участие в работах, перечисленных в списке литературы, и прежде всего Заслуженному деятелю науки Российской Федерации, профессору Россихину Ю.А., который в девяностые годы прошлого столетия ввел меня в загадочный мир дробного исчисления и показал его необычные возможности при решении разнообразных динамических задач вязкоупругости. Он без всякого сомнения является и соавтором данной обзорной работы.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-11-50211_Экспансия, конкурса поддержки для подготовки и издания научных обзорных статей. Обзор содержит результаты исследований, проведенных за последние десять лет при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 10-01-92004-ННС, 14-08-92008-ННС, 17-01-00490, 20-01-00443, 20-51-00008_Бел_а, 20-31-70035_Стабильность, а также при выполнении государственного задания в сфере науки Министерства науки и образования РФ, проекты № 0706-2020-0024, FZGM-2020-0007.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с. = *Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives and Some of Their Applications.* Gordon & Breach Sci. Publishers, 1993.
2. Ситник С.М., Шишкينا Э.Л. О двух классах операторов обобщенного дробного интегро-дифференцирования (с коротким историческим обзором) // Итоги науки. 2020. = *Shishkina E.L., Sitnik S.M. On two classes of generalized fractional operators (with short historical survey of fractional calculus)* // arXiv:2006.09893. 31 p. (English annotation, Russian text).
3. *Debnath L. A brief historical introduction to fractional calculus* // Int. J. Math. Educ. Sci. Tech. 2004. P. 35. № 4. P. 487–501.
4. *Rogosin S., Dubatovskaya M. Letnikov vs. Marchaud: A survey on two prominent constructions of fractional derivatives* // Mathematics. 2018. V. 6. № 1. PaperID 3.
5. *Valério D., Machado J.T., Kiryakova V. Some pioneers of the applications of fractional calculus* // Fract. Calc. Appl. Anal. 2014. V. 17. № 2. P. 552–578.
6. *Capelas de Oliveira E. A bit of history / Chapter 1 in “Solved Exercises in Fractional Calculus”* // Book Series: Studies in Systems, Decision and Control. V. 240. P. 1–15. Berlin: Springer, 2019.
7. *Shishkina E., Sitnik S. Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics.* London: Academic Press, 2020. 592 p.
8. *Ржаницын А.П. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени.* М.: Гостехиздат, 1949.
9. *Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций.* М.: Наука, 1966. 752 с. (2-изд. М.: Наука, 2014). = *Rabotnov Yu.N. Creep Problems in Structural Members.* Amsterdam: North-Holland, 1969.
10. *Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел.* М.: Наука, 1977. 384 с. = *Rabotnov Yu.A. Elements of Hereditary Solid Mechanics.* Moscow: Nauka, 1980.

11. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and some of their Applications. London: Academic Press, 1999. 340 p.
12. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
13. *Diethelm K.* The Analysis of Fractional Differential Equations. An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Heidelberg: Springer, 2004. 247 p.
14. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 2006.
15. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с. = *Uchaikin V.V.* Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Springer, 2013. V. 1, 2.
16. *Mainardi F.* Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models. London: Imperial College Press, 2010. 314 p.
17. *Ortigueira M.D.* Fractional Calculus for Scientists and Engineers. Heidelberg: Springer, 2011. 152 p.
18. *Herrmann R.* Fractional Calculus. An Introduction for Physicists. Singapore: World Scientific, 2011. 261 p.
19. *Тарасов В.Е.* Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. М.–Ижевск: РХД, 2011. 568 с. = *Tarasov V.E.* Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. Berlin: Springer, 2010.
20. *Atanacković T.M., Pilipović S., Stanković B., Zorica D.* Fractional Calculus with Applications in Mechanics: Wave Propagation, Impact and Variational Principles. London: Wiley, 2014. 406 p.
21. *Gorenflo R., Mainardi F., Rogosin S.* Mittag-Leffler function: properties and applications. De Gruyter, 2019.
22. *Machado J.T., Kiryakova V., Mainardi F.* Recent history of fractional calculus // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2011. V. 16. P. 1140–1153.
23. *Sun H.G., Zhang Y., Baleanu D., Chen W., Chen Y.Q.* A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2018. V. 64. P. 213–231.
24. *Abel N.H.* Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies // Gesammelte Mathematische Werke. 1881. V. 1. P. 10–27.
25. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Classical beams and plates in a fractional derivative medium, Impact response // Encyclopedia of Continuum Mechanics. Berlin: Springer, 2020. V. 1. P. 294–305.
26. *Gemant A.* A method for analyzing experimental results obtained from elasto-viscous bodies // Phys. 1936. V. 7. P. 311–317.
27. *Scott Blair G.W.* Analytical and integrative aspects of the stress-strain-time problem // J. Sci. Instrum. 1944. V. 21. № 5. P. 80–84.
28. *Герасимов А.Н.* Обобщение линейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения // ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 3. С. 251–260.
29. *Работнов Ю.Н.* Равновесие упругой среды с последствием // ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 1. С. 53–62. = Equilibrium of an elastic medium with after-effect // Fract. Calculus Appl. Anal. 2014. V. 17. № 3. P. 684–696.
30. *Шермергор Д.Т.* Об использовании операторов дробного дифференцирования для описания упруго-наследственных свойств материалов // ПМТФ. 1966. № 6. С. 118–121. = *Shermergor D.T.* On the use of fractional differentiation operators for the description of elastic-aftereffect properties of materials // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1966. V. 7. № 6. P. 85–87.
31. *Мешков С.И.* Описание внутреннего трения в наследственной теории упругости при помощи ядер, имеющих слабую сингулярность // ПМТФ. 1967. № 4. С. 147–151. = *Meshkov S.I.* Description of internal friction in the memory theory of elasticity using kernels with a weak singularity // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1967. V. 8. № 4. P. 100–102.
32. *Rossikhin Yu.A.* Reflections on two parallel ways in progress of fractional calculus in mechanics of solids // Appl. Mech. Rev. 2010. V. 63. № 1. Paper ID 010701.
33. *Watanabe S.* An approach to visco-elastic behaviors with a mathematical method // Journal of the Textile Machinery Society of Japan. 1959. V. 5. Issue 2. P. 10–13.
34. *Caputo M.* Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent // Annali di Geophysica. 1966. V. 19. P. 383–393.

35. *Caputo M.* Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent – II // *Geophys. J. R. Astron. Soc.* 1967. V. 15. № 5. P. 529–539.
36. *Caputo M., Mainardi F.* A new dissipation model based on memory mechanism // *Pure Appl. Geophys.* 1971. V. 91. № 1. P. 134–147.
37. *Caputo M., Mainardi F.* Linear models of dissipation in anelastic solids // *Riv. Nuovo Cimento.* 1971. V. 1. № 2. P. 161–198.
38. *Вульфсон С.З.* Температурные напряжения в бетонных массивах с учетом ползучести бетона // *Изв. АН СССР. Механика.* 1960. № 1. С. 162–165.
39. *Слонимский Г.Л.* О законах деформации высокоэластичных полимерных тел // *ДАН СССР.* 1961. Т. 140. № 2. = *Slonimsky G.L.* Laws of mechanical relaxation processes in polymers // *Journal of Polymer Science: Part C.* 1967. № 16. P. 1667–1672.
40. *Мешков С.И., Россихин Ю.А.* О температурной зависимости коэффициентов затухания динамической системы с сингулярным ядром наследственности // *ИФЖ.* 1971. Т. 21. № 2. С. 377 = *Meshkov S.I., Rossikhin Yu.A.* Temperature dependence of the damping coefficients for a dynamical system with a singular kernel // *J. Eng. Phys. Thermophys.* 1971. V. 21. № 2. P. 1090.
41. *Мешков С.И., Россихин Ю.А.* О распространении звуковых волн в наследственно упругой среде // *ПМТФ.* 1968. № 5. С. 89–93 = *Meshkov S.I., Rossikhin Yu.A.* Propagation of acoustic waves in a hereditarily elastic medium // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 1968. V. 9. № 5. P. 589–592.
42. *Мешков С.И., Пачевская Г.Н., Постников В.С.* Поведение материала при большой интенсивности диссипативных процессов // *Физика и химия обработки материалов.* 1967. № 2. С. 135–137.
43. *Розовский М.И., Синайский С.Е.* Колебания осциллятора, обладающего наследственной ползучестью // *ПММ.* 1966. Т. 30. № 3. С. 584–589 = *Rozovskii M.I., Sinaiskii S.E.* Vibrations of an oscillator with residual creep // *J. Appl. Math. Mech.* 1967. V. 30. № 3. P. 696–703.
44. *Россихин Ю.А.* Динамические задачи линейной вязкоупругости, связанные с исследованием ретардационно-релаксационных спектров. Дисс. канд-та физ.-мат. наук. Воронеж, 1970. 124 с.
45. *Зеленев В.М., Мешков С.И., Россихин Ю.А.* Затухающие колебания упруго-наследственных систем со слабо-сингулярными ядрами // *ПМТФ.* 1970. № 2. С. 104–108. = *Zelenev V.M., Meshkov S.I., Rossikhin Yu.A.* Damped vibrations of hereditary-elastic systems with weakly singular kernels // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 1970. V. 11. № 2. P. 290–293.
46. *Зеленев В.М., Мешков С.И., Россихин Ю.А.* О влиянии параметра сингулярности \mathcal{E}_γ -функции на затухающие колебания наследственно-упругих систем // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1970. № 3. С. 115–117. = *Zelenev V.M., Meshkov S.I., Rossikhin Yu.A.* Effect of the \mathcal{E}_γ -function singularity parameters on the damped vibrations of elastic systems with aftereffect // *Mech. Solids.* 1970. V. 5. № 3. P. 92–94.
47. *Meshkov S.I., Pachevskaja G.N., Postnikov V.S., Rossikhin Yu.A.* Integral representation of \mathcal{E}_γ -functions and their application to problems in linear viscoelasticity // *Int. J. Eng. Sci.* 1971. V. 9. P. 387–398.
48. *Гонсовский В.Л., Мешков С.И., Россихин Ю.А.* Удар вязкоупругого стержня о жесткую преграду // *Прикл. мех.* 1972. Т. 8. № 10. С. 71–76 = *Gonsovskii V.L., Meshkov S.I., Rossikhin Yu.A.* Impact of a viscoelastic rod onto a rigid target // *Sov. Appl. Mech.* 1972. V. 8. № 10. P. 1109–1113.
49. *Гонсовский В.Л., Россихин Ю.А.* О распространении импульсивной нагрузки в вязкоупругой среде // *Труды научно-исслед. ин-та математики ВГУ. Воронеж: ВГУ, 1972. Вып. 6.* С. 63–66.
50. *Гонсовский В.Л., Россихин Ю.А.* О волнах напряжений в вязкоупругой среде с сингулярным ядром наследственности // *ПМТФ.* 1973. № 4. С. 184–186 = *Gonsovskii V.L., Rossikhin Yu.A.* Stress waves in a viscoelastic medium with a singular hereditary kernel // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 1973. V. 14. № 4. P. 595–597.
51. *Белов М.А., Богданович А.Е.* Численное обращение преобразования Лапласа методом асимптотического расширения интервала в динамических задачах вязкоупругости // *Мех. полимеров.* 1976. № 5. С. 864–870 = *Belov M.A., Bogdanovich A.E.* Numerical inversion of Laplace transform by the method of asymptotic extension of the interval in dynamic viscoelasticity problems // *Mech. Compos. Mater.* 1976. V. 12. № 5. P. 762–768.
52. *Mainardi F., Spada G.* Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology // *Eur. Phys. J. Special Topics.* 2011. V. 193. P. 133–160.

53. Rogosin S., Mainardi F. George William Scott Blair – the pioneer of fractional calculus in rheology // Communications in Applied and Industrial Mathematics. 2014. V. 6. № 1 -e681. 20 p.
54. Łabędzki P., Pawlikowski R., Radowicz A. On fractional forced oscillator // AIP Conf. Proc. 2019. V. 2077, PaperID 020036.
55. Bahraini S.M.S., Eghtesad M., Farid M., Ghavanloo E. Large deflection of viscoelastic beams using fractional derivative model // J. Mech. Sci. Technol. 2013. V. 27. № 4. P. 1063–1070.
56. Bouzidi S., Bechir H., Brémand F. Phenomenological isotropic visco-hyperelasticity: a differential model based on fractional derivatives // J. Eng. Math. 2016. V. 99. P. 1–28.
57. Freundlich J. Vibrations of a simply supported beam with a fractional derivative order viscoelastic material model – supports movement excitation // AIP Conf. Proc. 2012. V. 1493. P. 383–388.
58. Freundlich J. Vibrations of a simply supported beam with a fractional derivative viscoelastic material model – supports movement excitation // Shock Vibr. 2013. V. 20. P. 1103–1112.
59. Galucio A.C., Deü J.F., Ohayon R. Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators // Comput. Mech. 2004. V. 33. P. 282–291.
60. Cortés F., Elejabarrieta M.J. Homogenised finite element for transient dynamic analysis of unconstrained layer damping beams involving fractional derivative models // Comput. Mech. 2007. V. 40. P. 313–324.
61. Freundlich J. Transient vibrations of a fractional Kelvin–Voigt viscoelastic cantilever beam with a tip mass and subjected to a base excitation // J. Sound Vibr. 2019. V. 438. P. 99–115.
62. Freundlich J. Dynamic response of a simply supported viscoelastic beam of a fractional derivative type to a moving force load // J. Theor. Appl. Mech. 2016. V. 54. № 4. P. 1433–1445.
63. Liu Q.X., Liu J.K., Chen Y.M. A second-order scheme for nonlinear fractional oscillators based on Newmark- β algorithm // ASME J. Comput. Nonlinear Dyn. 2018. V. 13. PaperID 084501.
64. Bagley R., Torvik P.J. A generalized derivative model for an elastomer damper // Shock Vibr. Bul. 1979. V. 49. № 2. P. 135–143.
65. Bagley R.L., Torvik P.J. Fractional calculus – a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures // AIAA J. 1983. V. 21. P. 741–748.
66. Учайкин В.В. Дробно-дифференциальная модель динамической памяти // Вестник РФ-ФИ. 2007. 14 с. http://rfbr.ru/rffi/ru/journal/o_14984
67. Огородников Е.Н., Яшагин Н.С. Вынужденные колебания дробных осцилляторов // Матем. моделирование и краев. задачи. 2008. Ч. 1. С. 215–221.
68. Огородников Е.Н., Радченко В.П., Яшагин Н.С. Реологические модели вязкоупругого тела с памятью и дифференциальные уравнения дробных осцилляторов // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Серия: физ.-мат. науки. 2011. № 1. С. 255–268.
69. Огородников Е.Н., Радченко В.П., Унгарова Л.Г. Математические модели нелинейной вязкоупругости с операторами дробного интегро-дифференцирования // Вестник Пермского нац. исслед. политех. ун-та. Механика. 2018. № 3. С. 147–161.
70. Огородников Е.Н. Об одном классе дробных дифференциальных уравнений математических моделей динамических систем с памятью // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Серия: физ.-мат. науки. 2013. № 1. С. 245–252.
71. Огородников Е.Н., Радченко В.П., Унгарова Л.Г. Математическое моделирование наследственно упругого деформируемого тела на основе структурных моделей и аппарата дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Серия: физ.-мат. науки. 2016. Т. 20. № 1. С. 167–194.
72. Zvyagin V., Orlov V. On strong solutions of fractional nonlinear viscoelastic model of Voigt type // Math. Methods Appl. Sci. V. 44. P. 11768–11782 (2021). <https://doi.org/10.1002/mma.6359>
73. Zvyagin V., Orlov V. Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2018. V. 38. № 12. P. 6327–6350.
74. Звягин В.Г., Орлов В.П. О разрешимости начально-краевой задачи для одной модели вязкоупругости с дробными производными // Сиб. мат. жур. 2018. Т. 59. № 6. С. 1351–1369.
75. Псху А.В., Рехвиашвили С.Ш. Анализ вынужденных колебаний дробного осциллятора // Письма в ЖТФ. 2019. Т. 45. Вып. 1. С. 34–37.
76. Учайкин В.В. Механика. Основы механики сплошных сред. СПб.: Издательство “Лань”, 2018. 860 с.

77. *Баженов В.Г., Игумнов Л.А.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
78. *Gross B.* On creep and relaxation // *J. Appl. Phys.* 1947. V. 2. № 2. P. 212–221.
79. *Smit W., de Vries H.* Rheological models containing fractional derivatives // *Rheol. Acta.* 1970. V. 9. P. 525–534.
80. *Buchen P.W., Mainardi F.* Asymptotic expansions for transient viscoelastic waves // *J. de Mecanique.* 1975. V. 14. № 4. P. 597–608.
81. *Caputo M.* Vibrations of an infinite viscoelastic layer with a dissipative memory // *J. Acoust. Soc. Am.* 1974. V. 56. P. 897–904.
82. *Caputo M.* Vibrations of an infinite plate with a frequency independent Q // *J. Acoust. Soc. Am.* V. 1976. V. 60. P. 634–639.
83. *Bland D.R.* The Theory of Linear Viscoelasticity. New York: Pergamon Press, 1960 = *Бленд Д.* Теория линейной вязкоупругости. М.: Мир, 1965. 199 с.
84. *Новоженова О.Г.* Советские пионеры дробного интегро-дифференцирования. I. А.Н. Герасимов. Биография // Тез. докл. 2-й межд. конф. “Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций”. М.: Столица, 2016. С. 110–111.
85. *Новоженова О.Г.* Советские пионеры дробного интегро-дифференцирования. II. М.И. Розовский. Обзор работ // Тез. докл. 2-й межд. конф. “Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций”. М.: Столица, 2016. С. 113–115.
86. *Новоженова О.Г.* Советские пионеры дробного интегро-дифференцирования. III. Д.Т. Шермергор. Об асимметрии релаксационного спектра // Тез. докл. 4-й межд. конф. “Живучесть и конструкционное материаловедение”. М.: Изд-во Института компьютерных исследований, 2018. С. 190–192.
87. *Новоженова О.Г.* Биография и научные труды А.Н. Герасимова. О линейных операторах, упруго-вязкости, элевтерозе и дробных производных. М.: “Перо”, 2018. 235 с.
88. *Novozhenova O.G.* Life and science of Alexey Gerasimov, one of the pioneers of fractional calculus in Soviet Union // *Fract. Calc. Appl. Anal.* 2017. V. 20. № 3. P. 790–809.
89. *Novozhenova O.G.* Soviet pioneers of fractional calculus and its applications. II. Moses Rozovskiy // *Int. J. Appl. Math.* 2018. V. 31. № 3. P. 325–332.
90. *Новоженова О.Г.* Описание асимметричных релаксационных спектров вязкоупругих материалов и диэлектриков // *Мех. композит. мат.* 2019. Т. 55. № 6. С. 1185–1202. = *Novozhenova O.G.* Describing the asymmetric relaxation spectra of viscoelastic materials and dielectrics // *Mech. Comp. Mat.* 2020. V. 55. № 6. P. 819–832.
91. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* The simplest models of viscoelasticity involving fractional derivatives and their connectedness with the Rabotnov fractional order operators // *Int. J. Mech.* 2014. V. 8. № 1. P. 62–72.
92. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Centennial jubilee of Academician Rabotnov and contemporary handling of his fractional operator // *Fract. Calculus Appl. Anal.* 2014. V. 17. № 3. P. 674–683.
93. *Rogosin S., Dubatovskaya M.* Mkhitar Djrbashian and his contribution to Fractional Calculus // *Fract. Calculus Appl. Anal.* 2020. V. 23, Issue 6. P. 1797–1809.
94. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids // *Appl. Mech. Rev.* 1997. V. 50. № 1. P. 15–67.
95. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results // *Appl. Mech. Rev.* 2010. V. 63. № 1. Paper ID 010801.
96. *Schiessel H., Metzler R., Blumen A., Nonnenmacher T.F.* Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions // *J. Phys. A: Math Gen.* 1995. V. 28. P. 6567–6584.
97. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Analysis of dynamic behaviour of viscoelastic rods whose rheological models contain fractional derivatives of two different orders // *ZAMM.* 2001. V. 81. № 6. P. 363–376.
98. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Analysis of the viscoelastic rod dynamics via models involving fractional derivatives or operators of two different orders // *The Shock Vibr. Digest.* 2004. V. 36. № 1. P. 3–26.
99. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Comparative analysis of visco-elastic models involving fractional derivatives of different orders // *Fract. Calculus Appl. Anal.* 2007. V. 10. № 2. P. 111–121.

100. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Free damped vibrations of a viscoelastic oscillator based on Rabotnov's model // *Mech. Time-Dependent Mat.* 2008. V. 12. № 2. P. 129–149.
101. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Shcheglova T.A.* Analysis of free vibrations of a viscoelastic oscillator via the models involving several fractional parameters and relaxation/retardation times // *Comp. Math. Appl.* 2010. V. 59. № 5. P. 1727–1744.
102. *Samko S.* Fractional integration and differentiation of variable order: an overview // *Nonlinear Dyn.* 2013. V. 71. P. 653–662.
103. *Patnaik S., Hollkamp J.P., Semperlotti F.* Applications of variable-order fractional operators: a review // *Proc. R. Soc. A.* 2019. V. 476. PaperID 0498.
104. *Povstenko Yu.* Fractional calculus in thermoelasticity // *Encyclopedia of Continuum Mechanics.* Berlin: Springer, 2020. V. 2. P. 953–961.
105. *Bosiakov S.* Fractional calculus in biomechanics // *Encyclopedia of Continuum Mechanics.* Berlin: Springer, 2020. V. 2. P. 946–953.
106. *Kaminsky A.A., Selivanov M.F., Chornoivan Yu.O.* Fractional-order operators in fracture mechanics // *Encyclopedia of Continuum Mechanics.* Berlin: Springer, 2020. V. 2. P. 982–989.
107. *Учайкин В.В.* Дробно-дифференциальные модели в гидромеханике // *Известия вузов. ПНД.* 2019. Т. 27. Вып. 1. С. 5–40.
108. *Diethelm K.* Numerical methods for the fractional differential equations of viscoelasticity // *Encyclopedia of Continuum Mechanics.* Berlin: Springer, 2020. V. 3. P. 1927–1938.
109. *Baleanu D., Diethelm K., Scalas E., Trujillo J.J.* Fractional calculus: models and numerical methods. 2nd ed. Singapore: World Scientific, 2017. 400 p.
110. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Vibrations of suspension bridges, Fractional derivative model // *Encyclopedia of Continuum Mechanics.* Berlin: Springer, 2020. V. 3. P. 2688–2696.
111. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Collision of two spherical shells, Fractional operator models // *Encyclopedia of Continuum Mechanics.* Berlin: Springer, 2020. V. 1. P. 324–332.
112. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Thin bodies embedded in fractional derivative viscoelastic medium, Dynamic response // *Encyclopedia of Continuum Mechanics.* Berlin: Springer, 2020. V. 3. P. 2512–2518.
113. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Fractional operator models of viscoelasticity // *Encyclopedia of Continuum Mechanics.* Berlin: Springer, 2020. V. 2. P. 971–982.
114. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Vibrations of viscoelastic rods, Fractional operator models // *Encyclopedia of Continuum Mechanics.* Berlin: Springer, 2020. V. 3. P. 2696–2715.
115. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Wave propagation in viscoelastic rods, Fractional operator models // *Encyclopedia of Continuum Mechanics.* Berlin: Springer, 2020. V. 3. P. 2740–2756.
116. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Fractional derivative Timoshenko beams and Uflyand-Mindlin plates, Impact response of // *Encyclopedia of Continuum Mechanics.* Berlin: Springer, 2020. V. 2. P. 962–971.
117. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Linear and nonlinear vibrations, Fractional oscillators // *Encyclopedia of Continuum Mechanics.* Berlin: Springer, 2020. V. 2. P. 1476–1491.
118. *Gorenflo R., Mainardi F.* Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order / *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics.* Wien, Springer, 1997. P. 223–276.
119. *de Oliveira E.C., Machado J.A.T.* A review of definitions for fractional derivatives and integrals // *Math. Problems Eng.* 2014. V. 2014. PaperID 238459.
120. *Ortigueira M.D., Machado J.A.T.* What is a fractional derivative? // *J. Comput. Phys.* 2015. V. 293. P. 4–13.
121. *Teodoro G.S., Machado J.A.T., de Oliveira E.C.* A review of definitions of fractional derivatives and other operators // *J. Comput. Phys.* 2019. V. 388. P. 195–208.
122. *Valério D., Trujillo J.J., Rivero M., Machado J.A.T., Baleanu D.* Fractional calculus: A survey of useful formulas. *Eur. Phys. J. Special Topics.* 2013. V. 222. P. 1827–1846.
123. *Tarasov V.E.* Review of some promising fractional physical models // *Int. J. Modern Phys. B.* 2013. V. 27. №. 9. PaperID 1330005.
124. *Рехвиашвили С.Ш., Псху А.В.* Новый метод описания затухающих колебаний балки с одним заделанным концом // *ЖТФ.* 2019. Т. 89. Вып. 9. С. 1314–1318.

125. *Shamaev A.S., Shumilova V.V.* Effective acoustic equations for a layered material described by the fractional Kelvin-Voigt model // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 2021. V. 14. № 3. P. 351–359.
126. *Кулбас А.А.* Теория и приложения дифференциальных уравнений дробного порядка (Курс лекций). Воронеж, Самара, 2009. 121 с.
127. *Caputo M., Fabrizio M.* A new definition of fractional derivative without singular kernel // *Progress in Fract. Differ. Appl.* 2015. V. 1. №. 2. P. 73–85.
128. *Atangana A., Baleanu D.* New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model // *Thermal Sci.* 2016. V. 20. № 2. P. 736–769.
129. *Hristov J.* Linear viscoelastic responses and constitutive equations in terms of fractional operators with non-singular kernels // *Eur. Phys. J. Plus.* 2019. V. 134. PaperID 283.
130. *Gómez-Aguilar J.F., Yépez-Martínez H., Calderón-Ramón C., Cruz-Orduña I., Escobar-Jiménez R.F., Olivares-Peregrino V.H.* Modeling of a mass-spring-damper system by fractional derivatives with and without a singular kernel // *Entropy.* 2015. V. 17. № 9. P. 6289–6303.
131. *Al-Salti N., Karimov E., Sadarangani K.* On a differential equation with Caputo-Fabrizio fractional derivative of order $1 < \beta \leq 2$ and application to mass-spring-damper system // *Progress Fract. Differ. Appl.* 2016. V. 2. № 4. P. 257–263.
132. *Morales-Delgado V.F., Gómez-Aguilar J.F., Taneco-Hernández M.A., Escobar-Jiménez R.F.* A novel fractional derivative with variable- and constant-order applied to a mass-spring-damper system // *Eur. Phys. J. Plus.* 2018. V. 133: PaperID 78.
133. *Almbaidin A.A., Abu-Alshaikh I.M.* Vibration of functionally graded beam subjected to moving oscillator using Caputo-Fabrizio fractional derivative model // *Roman. J. Acoust. Vibr.* 2019. V. 16. № 2. P. 137–146.
134. *Ortigueira M.D., Machado J.T.* A critical analysis of the Caputo–Fabrizio operator // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2018. V. 59. P. 608–611.
135. *Diethelm K., Garrappa R., Giusti A., Stynes M.* Why fractional derivatives with nonsingular kernels should not be used // *Fract. Calculus Appl. Anal.* 2020. V. 23. № 3. P. 610–634.
136. *Koh C.G., Kelly J.M.* Application of fractional derivatives to seismic analysis of base-isolated models // *Eathq. Eng. Struct. Dyn.* 1990. V. 19. № 2. P. 229–241.
137. *Lee H.H., Tsai C.S.* Analytical model of viscoelastic dampers for seismic mitigation of structures // *Comput. Struct.* 1994. V. 50. № 1. P. 111–121.
138. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Analysis of damped vibrations of thin bodies embedded into a fractional derivative viscoelastic medium // *J. Mech. Behavior Mat.* 2012. V. 21. № 5–6. P. 155–159.
139. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. Изд. 3-е, стереотипное. М.: КомКнига, 2007. 439 с. = *Timoshenko S.P.* *Vibration Problems in Engineering*. 3rd Ed. In collaboration with Young D.H. New York: D. Van Nostrand, 1955. 468 pp.
140. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Application of fractional derivatives to the analysis of damped vibrations of viscoelastic single mass systems // *Acta Mech.* 1997. V. 120. № 1–4. P. 109–125.
141. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Application of fractional operators to the analysis of damped vibrations of viscoelastic single-mass systems // *J. Sound Vibr.* 1997. V. 199. № 4. P. 567–586.
142. *Shen Y., Yang S., Xing H., Ma H.* Primary resonance of Duffing oscillator with two kinds of fractional-order derivatives // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2012. V. 47. № 9. P. 975–983.
143. *Xing W., Chen E., Chang Y., Wang M.* Threshold for chaos of a Duffing oscillator with fractional-order derivative // *Shock Vib.* 2019. V. 2019. PaperID 1230194.
144. *Niu J., Liu R., Shen Y., Yang S.* Chaos detection of Duffing system with fractional-order derivative by Melnikov method // *Chaos.* 2019. V. 29. PaperID 123106.
145. *Shen Y., Yang S., Xing H., Ma H.* Primary resonance of Duffing oscillator with two kinds of fractional-order derivatives // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2012. V. 47. P. 975–983.
146. *Niu J.C., Gutierrez H., Ren B.* Resonance analysis of fractional order Mathieu oscillator // *J. Comput. Nonlinear Dyn.* 2018. V. 13. PaperID 051003.
147. *Leung A.Y.T., Yang H.X., Guo Z.J.* The residue harmonic balance for fractional order van der Pol like oscillators // *J. Sound Vibr.* 2012. V. 331. № 5. P. 1115–1126.
148. *Shen Y., Yang S., Sui C.* Analysis on limit cycle of fractional-order Van der Pol oscillator // *Chaos, Solitons, Fractals.* 2014. V. 67. P. 94–102.

149. *Огородников Е.Н.* Математические модели дробных осцилляторов, постановка и структура решения задачи Коши // Матем. моделирование и краев. задачи. 2009. Ч. 1. С. 177–181.
150. *Rekhviashvili S., Pskhu A., Agarwal P., Jain S.* Application of the fractional oscillator model to describe damped vibrations // Turk. J. Phys. 2019. V. 43. P. 236–242.
151. *Паровик Р.И., Зуннунов Р.Т.* Анализ вынужденных колебаний дробного осциллятора // Проблемы прочности. Ташкент: изд-во “Фан”, 2019. № 4. С. 20–23.
152. *Паровик Р.И.* Существование хаотических режимов дробного аналога осциллятора типа Дуффинга // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Серия: физ.-мат. науки. 2019. Т. 23. № 2. С. 378–393.
153. *Паровик Р.И.* Математическое моделирование линейных эрдитарных осцилляторов. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2015. 178 с.
154. *Паровик Р.И.* Эрдитарный осциллятор Дуффинга с переменными дробными порядками // Интернет-журнал “Науковедение” 2016. Т. 8. № 5. <http://naukovedenie.ru/PDF/34TVN516.pdf>
155. *Дробышева И.В.* Математическое моделирование нелинейных эрдитарных осцилляторов на примере осциллятора Дуффинга с дробными производными в смысле Римана–Лиувилля // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 2. С. 43–49.
156. *Ким В.А.* Модельное уравнение эрдитарного осциллятора Дуффинга с производной переменного порядка Римана–Лиувилля, характеризующей вязкое трение // Новый ун-т. Сер.: Техн. науки. 2016. № 4–5. С. 28–31.
157. *Мейланов Р.П., Янполов М.С.* Особенности фазовой траектории “фрактального” осциллятора // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 1. С. 67–73.
158. *Паровик Р.И.* Хаотические режимы фрактального нелинейного осциллятора // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. № 2. С. 364–379.
159. *Паровик Р.И.* Математическое моделирование нелокальной колебательной системы Дуффинга с фрактальным трением // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. № 1. С. 18–24.
160. *Паровик Р.И.* Существование и единственность задачи Коши для фрактального нелинейного уравнения осциллятора // Узб. мат. ж. 2017. № 4. С. 110–118.
161. *Orsingher E., D’Ovidio M.* Vibrations and fractional vibrations of rods, plates and Fresnel pseudo-processes // J. Stat. Phys. 2011. V. 145. P. 143–174.
162. *Li M.* Theory of Fractional Engineering Vibrations. Berlin: De Gruyter, 2021. 318 p.
163. *West B.J., Bologna M., Grigolini P.* Physics of Fractal Operators. New York: Springer, 2002. 349 p.
164. *Нигматуллин Р.Р.* Дробный интеграл и его физическая интерпретация // ТМФ. 1992. Т. 90. № 3. С. 354–368.
165. *Рутман Р.С.* О статье Р.Р. Нигматулина “Дробный интеграл и его физическая интерпретация” // ТМФ. 1994. Т. 100. № 3. С. 476–478.
166. *Учайкин В.В.* О дробно-дифференциальном уравнении Лиувилля как уравнении динамики открытой системы // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. 2014. № 25. С. 58–67.
167. *Kwok S.Fa.* A falling body problem through the air in view of the fractional derivative approach // Physica A. 2005. V. 350. P. 199–206.
168. *Baleanu D., Golmankhaneh A.K., Nigmatullin R., Golmankhaneh Ali K.* Fractional Newtonian mechanics // Cent. Eur. J. Phys. 2010. V. 8. № 1. P. 120–125.
169. *Elzahar E.R., Gaber A.A., Aljohani A.F., Machado J.T., Ebaidd A.* Generalized Newtonian fractional model for the vertical motion of a particle // Appl. Math. Mod. 2020. V. 88. P. 652–660.
170. *Tschoegl N.* The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior: An Introduction. Berlin: Springer, 1989. 769 p.
171. *Hooke R.* A Description of Helioscopes and Some Other Instruments, London, 1676. 32 p.
172. *Hooke R.* Lectures de Potentia Restitutiva, or of Spring Explaining the Power of Springing Bodies. London, 1678. 56 p.
173. *Newton I.* Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. London, 1687.
174. *Alfrey T.* The Mechanical Properties of High Polymers. New York, Interscience Publishers, 1948. = *Альфрей Т.* Механические свойства высокополимеров. М.: Изд-во иностранной литературы, 1952. 619 с.
175. *Arrospide E., Bikandi I., García I., Durana G., Aldabaldetrekú G., Zubia J.* Mechanical properties of polymer-optical fibres / Polymer Optical Fibres: Fibre Types, Materials, Fabrication, Charac-

- terization, and Applications (*Bunge C.-A., Gries T., Beckers M.*, Eds.). London: Woodhead Publishing, 2017. Chapter 7. P. 201–216.
176. *Thompson J.H.C.* On the theory of visco-elasticity: A thermodynamical treatment of visco-elasticity, and some problems of the vibrations of visco-elastic solids // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1933. V. 231 (694–706). P. 339–407.
177. *Maxwell J.C.* On the dynamical theory of gases // *Philos. Trans. R. Soc. London*. 1867. V. 49. P. 49–88.
178. *Thomson W. (Lord Kelvin)* On the elasticity and viscosity of metals // *Proc. R. Soc. London*. 1865. V. 14. P. 289–297.
179. *Thomson W. (Lord Kelvin)* Elasticity / *Encyclopedia Britannica. A Dictionary of Arts, Science, and General Literature*. 9th ed. Edinburgh: Adam and Charles Black, 1875. V. 7. P. 796–825.
180. *Meyer O.E.* Zur Theorie der inneren Reibung // *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)*. 1874. V. 78. P. 130–135.
181. *Voigt W.* Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper // *Annalen der Physik*. 1889. V. 274 (12). P. 573–587.
182. *Voigt W.* Ueber innere Reibung fester Körper, insbesondere der Metalle // *Annalen der Physik und Chemie*. 1892. V. 283. P. 671–693.
183. *Jeffreys H.* The Viscosity of the Earth. (Third Paper.) *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1917. V. 77. Issue 5. P. 449–455.
184. *Jeffreys H.* The Earth. Cambridge: Cambridge University Press, 1929 = *Джеффрис Г.* Земля, ее происхождение, история и строение. М.: ИЛ, 1960. 486 с.
185. *Krusser A.I., Shitikova M.V.* Classification of viscoelastic models with integer and fractional order derivatives // *IOP Conf. Ser.: Materials Science and Engineering*. 2020. V. 747. PaperID 012007
186. *Zener C.* Elasticity and anelasticity of metals. University of Chicago press, 1948. = *Зинер К.* Упругость и неупругость металлов // *Сборник “Упругость и неупругость металлов”* под ред. С.В. Вонсовского. М.: Изд-во иност. лит-ры, 1954. С. 8–168.
187. *Богомолов В.О., Жданюк В.К., Цинка А.О.* Вязкоупругая структурная модель асфальтобетона // *Автомобильный транспорт*. 2016. Т. 38. С. 117–125.
188. *Poynting J.H., Thomson J.J.* Elasticity / *Properties of Matter*. London: C. Griffin and Co, 1902. Chapter 4. P. 53–61.
189. *Ишлинский А.Ю.* Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последствия и релаксации // *ПММ*. 1940. Т. 4. Вып. 1. С. 79–92.
190. *Ишлинский А.Ю.* Линейные законы деформирования не вполне упругих тел // *Доклады АН СССР*. 1940. Т. 24. № 1. С. 22–26 = *Ishlinsky A.* Linear deformation laws of not quite elastic bodies // *Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS*. 1940. V. 24. № 1. P. 23–27.
191. *Ишлинский А.Ю.* Уравнения деформирования не вполне упругих и вязкопластических тел // *Известия АН СССР. Отд. техн. наук*. 1945. № 1–2. С. 34–45.
192. *Steinmann P., Runesson K.* Visco-elasticity / *The Catalogue of Computational Material Models. Basic Geometrically Linear Models in 1D*. Chapter 4. Cham: Springer, 2021. P. 77–191.
193. *Yuan J., Gao S., Xiu G., Wang L.* Mechanical energy and equivalent viscous damping for fractional Zener oscillator // *J. Vibr. Acoust.* 2020. V. 142. № 4. P. 1–22.
194. *Lewandowski R., Baum M.* Dynamic characteristics of multilayered beams with viscoelastic layers described by the fractional Zener model // *Archive Appl. Mech.* 2015. V. 85. № 12. P. 1793–1814.
195. *Litewka P., Lewandowski R.* Steady-state non-linear vibrations of plates using Zener material model with fractional derivative // *Comput. Mech.* 2017. V. 60. P. 333–354.
196. *Litewka P., Lewandowski R.* Nonlinear harmonically excited vibrations of plates with Zener material // *Nonlinear Dyn.* 2017. V. 89. P. 691–712.
197. *Litewka P., Lewandowski R.* Influence of elastic supports on non-linear steady-state vibrations of Zener material plates // *AIP Conf. Proc.* 2018. V. 1922. PaperID 100002.
198. *Martin O.* Nonlocal effects on the dynamic analysis of a viscoelastic nanobeam using a fractional Zener model // *Appl. Math. Model.* 2019. V. 73. P. 637–650.
199. *Mokhtari M., Permoon M.R., Haddadpour H.* Aeroelastic analysis of sandwich cylinder with fractional viscoelastic core described by Zener model // *J. Fluids Struct.* 2019. V. 85. P. 1–16.

200. Zhang C.C., Zhu H.H., Shi B., Mei G.X. Bending of a rectangular plate resting on a fractionalized Zener foundation // *Struct. Eng. Mech.* 2014. V. 52. № 6. P. 1069–1084.
201. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Two approaches for studying the impact response of viscoelastic engineering systems: An overview // *Comp. Math. Appl.* 2013. V. 66. № 5. P. 755–773.
202. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Features of fractional operators involving fractional derivatives and their applications to the problems of mechanics of solids // *Fractional Calculus: History, Theory and Applications*. Chapter 8. P. 165–226. New York: Nova Science Publishers, 2015.
203. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Fractional calculus models in dynamic problems of viscoelasticity // *Handbook of Fractional Calculus with Applications. V. 7: Applications in Engineering, Life and Social Sciences, Part A.* De Gruyter, 2019. P. 139–158.
204. Sevostianov I., Levin V., Radi E. Effective properties of linear viscoelastic microcracked materials: Application of Maxwell homogenization scheme // *Mechanics of Materials*. 2015. V. 84. P. 28–43.
205. Sevostianov I., Levin V. Creep and relaxation contribution tensors for spheroidal pores in hereditary solids: fraction-exponential operators approach // *Acta Mech.* 2016. V. 227. P. 217–227.
206. Vilchevskaya E., Levin V., Seyedkavoosi S., Sevostianov I. Replacement relations for a viscoelastic material containing multiple inhomogeneities // *Int. J. Eng. Science*. 2019. V. 136. P. 26–37.
207. Blair G.W.S., Copen F.M.V. The subjective judgement of the elastic and plastic properties of soft bodies; the “differential thresholds” for viscosities and compression moduli // *Proc. Royal Society of London Series B-Biological Sciences*. 1939. V. 128 (850). P. 109–125.
<https://doi.org/10.1098/rspb.1939.0046>
208. Blair G.W.S., Copen F.M.V. The estimation of firmness in soft materials // *The American Journal of Psychology*, 1943. V. 56 (2). P. 234–246.
<https://doi.org/10.2307/1417506>
209. Scott Blair G.W. *Elementary Rheology*. London: Academic Press, 1969.
210. Stiasnie M. On the application of fractional calculus for the formulation of viscoelastic models // *Applied Mathematical Modelling*. 1979. V. 3. P. 300–302.
211. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Analysis of rheological equations involving more than one fractional parameters by the use of the simplest mechanical systems based on these equations // *Mech. Time-Dependent Mat.* 2001. V. 5. № 2. P. 131–175.
212. Paola M.D., Zingales M. Exact mechanical models of fractional hereditary materials // *J. Rheol.* 2012. V. 56. № 5. P. 983–1004.
213. Di Paola M., Pinnola F.P., Zingales M. A discrete mechanical model of fractional hereditary materials // *Meccanica*. 2013. V. 48. P. 1573–1586.
214. Okuka A.S., Zorica D. Formulation of thermodynamically consistent fractional Burgers models // *Acta Mech.* 2018. V. 229. P. 3557–3570.
215. Kaminskii A.A., Selivanov M.F. On approach to the determination of the deformation characteristics of viscoelastic materials // *Int. Appl. Mech.* 2005. V. 41. P. 867–875.
216. Yu B., Jiang X. Numerical identification of the fractional derivatives in the two-dimensional fractional cable equation // *J. Scientific Comput.* 2016. V. 68. P. 252–272.
217. Shabani M., Jahani K., Di Paola M., Sadeghi M.H. Frequency domain identification of the fractional Kelvin-Voigt’s parameters for viscoelastic materials // *Mech. Materials*. 2019. V. 137. Paper-ID 103099
218. Lewandowski R., Chorazyczewski B. Identification of the parameters of the Kelvin-Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers // *Comput. Struct.* 2010. V. 88. P. 1–17.
219. Di Paola M., Pirrotta A., Valenza A. Visco-elastic behavior through fractional calculus: An easier method for best fitting experimental results // *Mech. Mat.* 2011. V. 43. P. 799–806.
220. Popov I.I., Chang T.P., Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Experimental study of concrete aging effect on the contact force and contact time during the impact interaction of an elastic rod with a viscoelastic beam // *J. Mech.* 2017. V. 33. № 3. P. 317–322.
221. Popov I.I., Chang T.P., Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Study of concrete aging effect on the contact force and the contact time during the impact of an elastic sphere upon a viscoelastic beam // *AER-Advances Eng. Res.* 2016. V. 52. P. 175–177.

222. Попов И.И., Россихин Ю.А., Шитикова М.В. Экспериментальное исследование влияния возраста бетона на величину контактной силы и времени контакта при ударе по вязкоупругой балке // Известия вузов. Строительство. 2018. № 6. С. 117–128.
223. Barpi F., Valente S. Creep and fracture in concrete: a fractional order rate approach // Eng. Fract. Mech. 2002. V. 70. P. 611–623.
224. Celauro C., Fecarotti C., Pirrotta A., Collop A. Experimental validation of a fractional model for creep/recovery testing of asphalt mixtures // Constr. Build. Mater. 2012. V. 36. P. 458–466.
225. Lagos-Varas M., Movilla-Quesada D., Arenas J.P., Raposeiras A.C., Castro-Fresno D., Calzada-Pérez M.A., Vega-Zamanillo A., Maturana J. Study of the mechanical behavior of asphalt mixtures using fractional rheology to model their viscoelasticity // Const. Build. Mat. 2019. V. 200. P. 124–134.
226. Meral F.C., Royston T.J., Magin R. Fractional calculus in viscoelasticity: An experimental study // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2010. V. 15. P. 939–945.
227. Shabani M., Jahani K. Time domain parameter identification of fractional viscoelastic constitutive equation // Proc. 27th Int. Conf. Iranian Soc. Mech. Eng. ISME'2019. Tehran, Iran. 2019. 4 p.
228. Popov I.I., Rossikhin Y.A., Shitikova M.V. Experimental identification of the fractional parameter for a viscoelastic model of concrete at different ages based on the impulse excitation technique / In: Dutta S., Inan E., Dwivedy S. (eds.) Advances in Rotor Dynamics, Control, and Structural Health Monitoring. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Singapore: Springer, 2020. P. 349–358.
229. Yin Y., Yang Z., Shi M. Circular arc rules of complex plane plot for model parameters determination of viscoelastic material // Mech. Time-Depend. Mater. 2021. <https://doi.org/10.1007/s11043-020-09465-x>
230. Wang Y., Harris J.M. Seismic attenuation models: multiple and fractional generalizations // SEG Technical Program Expanded Abstracts. 2020. P. 2754–2758.
231. Popov I.I., Shitikova M.V. Impulse excitation technique and its application for identification of material damping: An overview // IOP Conf. Ser.: Materials Science and Engineering. 2020. V. 962. PaperID022025.
232. Ерохин С.В., Алероев Т.С. Параметрическая идентификация порядка дробной производной в модели Бегли–Торвика // Математическое моделирование. 2018. Т. 30. № 7. С. 93–102.
233. Ерохин С.В., Алероев Т.С., Фриштер Л.Ю., Колесниченко А.В. Параметрическая идентификация математической модели вязкоупругих материалов с использованием производных дробного порядка // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2015. Т. 11. № 3. С. 82–86.
234. Унгарова Л.Г. Применение нелинейных дробных аналогов реологических моделей в задаче аппроксимации экспериментальных данных по растяжению поливинилхлоридного пластика // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20. № 4. С. 691–706.
235. Унгарова Л.Г., Огородников Е.Н. Идентификация параметров нелинейных дробных математических моделей наследственно упругого тела на основе экспериментальных данных о ползучести образцов из ПВХ-пластиката // Материалы XI Всероссийской научной конференции “Математическое моделирование и краевые задачи” (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). 2019. Т. 1. С. 359–363.
236. Love A.E.H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. Cambridge: Cambridge University Press, 1892. 396 p. = Ляв А. Математическая теория упругости. М.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 674 с. (Перевод с 4-го англ. издания).
237. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред: Гидродинамика и теория упругости. Т. 3. М.; Л.: ОГИЗ. Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1944. 624 с.
238. Hilton H.H. The elusive and fickle viscoelastic Poisson’s ratio and its relation to the elastic-viscoelastic correspondence principle // J. Mech. Mat. Struct. 2009. V. 4. P. 1341–1364.
239. Hilton H.H. Implications and constraints of time-independent Poisson ratios in linear isotropic and anisotropic viscoelasticity // J. Elasticity. 2001. V. 63. P. 221–251.
240. Hilton H.H. Clarifications of certain ambiguities and failings of Poisson’s ratios in linear viscoelasticity // J. Elasticity. 2011. V. 104. P. 303–318.
241. Tschoegl N.W., Knauss W.G., Emri I. Poisson’s ratio in linear viscoelasticity – a critical review // Mech. Time-Depend. Mat. 2002. V. 6. P. 3–51.
242. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Estrada M.M.G. Modeling of the impact response of a beam in a viscoelastic medium // Appl. Math. Sci. 2016. V. 10. № 49. P. 2471–2481.

-
243. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Trung P.T.* Application of the fractional derivative Kelvin–Voigt model for the analysis of impact response of a Kirchhoff–Love plate // *WSEAS Trans. Math.* 2016. V. 15. P. 498–501.
244. *Spanos P.D., Malara G.* Nonlinear random vibrations of beams with fractional derivative elements // *J. Eng. Mech.* 2014. V. 140. Paper ID 04014069.
245. *Bhullar S.K.* Three decades of auxetic polymers: a review // *E-Polymers.* 2015. V. 15. P. 205–215.
246. *Carneiro V.H., Meireles J., Puga H.* Auxetic materials – A review // *Materials Science-Poland.* 2013. V. 31. P. 561–571.
247. *Mazaev A.V., Ajenezza O., Shitikova M.V.* Auxetics materials: classification, mechanical properties and applications // *IOP Conf. Ser.: Materials Science and Engineering.* 2020. V. 747. Paper ID 012008.
248. *Городцов В.А., Лисовенко Д.С.* Ауксетики среди материалов с кубической анизотропией // *Известия РАН. МТТ.* 2020. № 4. С. 7–24.
249. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Krusser A.I.* To the question on the correctness of fractional derivative models in dynamic problems of viscoelastic bodies // *Mech. Res. Com.* 2016. V. 77. P. 44–49.
250. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* The fractional derivative Kelvin–Voigt model of viscoelasticity with and without volumetric relaxation // *J. Phys. Conf. Series.* 2018. V. 991. PaperID 012069.

УДК 539.39

**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С ОДНИМ
ИЛИ НЕСКОЛЬКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ:
СЛУЧАЙ ОДИНАКОВЫХ МОДУЛЕЙ СДВИГА**

© 2022 г. И. Я. Цуркис^{a,*}, Ю. О. Кузьмин^{a,**}

^a *Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Москва, Россия*

**e-mail: tsurkis@ifz.ru*

***e-mail: kuzmin@ifz.ru*

Поступила в редакцию 07.04.2021 г.

После доработки 26.04.2021 г.

Принята к публикации 13.05.2021 г.

Рассмотрена двумерная задача теории упругости для плоскости с несколькими включениями произвольной формы, модули сдвига которых совпадают с модулями сдвига плоскости. Никаких ограничений на модули сжатия нет. В бесконечно удаленной точке плоскости задается однородное напряженное состояние. Использован метод комплексных потенциалов Колосова–Мусхелишвили. Получено общее решение в квадратурах и явные формулы для нескольких частных случаев. Исследовано поле напряжений вблизи особых точек границ включений (эти границы предполагаются кусочно-гладкими, состоящими из конечного числа дуг Ляпунова).

Ключевые слова: модуль сдвига, краевая задача теории упругости, интеграл типа Коши, теорема Лиувилля, теорема Племеля

DOI: 10.31857/S0572329921060155

1. Введение. Задачам теории упругости для бесконечной или полубесконечной кусочно-однородной изотропной среды ввиду их практической важности посвящена обширная литература; настолько обширная, что авторы сочли целесообразным при обсуждении текущего состояния вопроса ограничиться, в основном, изотропным двумерным случаем. Правда, пик интереса к данной проблематике, в частности, к двумерной задаче, миновал – он приходится на 50-е–70-е годы прошлого века. Поэтому самая “свежая” работа, на которую мы сошлемся, датирована 2010 г.

Здесь уместно сказать, что под включением (это слово фигурирует в названии статьи) мы будем по умолчанию понимать конечную область с измененными упругими свойствами; скачок вектора смещений при переходе через границу области отсутствует. Наша терминология отличается от общепринятой, согласно которой область с измененными свойствами называется неоднородностью, а включением – область, на границе которой смещение претерпевает разрыв [1]. Впрочем, разделение упругих дефектов на эти два типа является до некоторой степени условным. Так, в геофизике (авторы имеют к ней непосредственное отношение), а точнее – в современной геодинамике, существенную роль играют дефекты земной коры, т.н. разломы. Их деформационную активизацию можно интерпретировать и как скачок смещений (включение в традиционном смысле слова), и как временное изменение неоднородности. Оба подхода дают идентичные результаты [2].

Двумерная постановка не только уменьшает количество уравнений, — она дает возможность применить метод комплексных потенциалов Колосова—Мусхелишвили [3, 4], который основан на том, что компоненты двумерного тензора напряжений являются вторыми производными некоторой бигармонической функции, т.н. функции Эри. В свою очередь, бигармоническая функция выражается через две функции комплексного переменного (это и есть потенциалы Колосова), аналитические в той области, где упругие модули постоянны. Задача теории упругости сводится, таким образом, к краевой задаче ТФКП. На бесконечности задается однородное напряженное состояние. Условий на границе два: одно следует из третьего закона Ньютона, второе выражает непрерывность вектора смещений.

Но если не накладывать ограничений на соотношения между упругими модулями матрицы и включений, даже этот мощный аппарат позволяет получить точное решение, только если матрица (т.е. вмещающая среда) — вся плоскость, включение одно, и это — эллипс. Предположим, что в бесконечно удаленной точке задано одноосное напряженное состояние; тогда напряженное состояние внутри эллипса будет однородным [5]. Здесь мы имеем полную аналогию с трехмерной задачей об эллипсоидальном включении [1]. Примечательно, что напряженное состояние внутри эллипсоида или эллипса будет однородным даже при анизотропии упругих свойств и включения, и матрицы [6, 7].

Возникает вопрос: верно ли обратное утверждение? То есть: если на бесконечности действует одноосное напряженное состояние, и поле напряжений во включении однородно, означает ли это, что включение представляет собой эллипс? Положительный ответ дал Г. Сендецкий в работе [8].

Задачу, рассмотренную Г. Сендецким, можно назвать обратной задачей о включении: известен общий вид поля напряжений во включении и на бесконечности, а искомой является геометрия включения. Решение основано на том, что внешность единичного круга можно конформно отобразить на внешность любой односвязной области, а функция $z(w)$, осуществляющая это отображение, представима в виде степенного ряда:

$$z(w) = Aw + A_0 + A_1/w + A_1/w^2 + \dots \quad (1.1)$$

Конформные отображения являются основным инструментом при решении “прямой”, классической задачи о плоскости с полостью. Если $z(w)$ — рациональная функция (в частности, если ряд (1.1) конечен), метод Колосова—Мусхелишвили дает точное решение [4]. Но внутри круга у этой функции есть особенность, поэтому в прямой задаче о включении с конечными модулями упругости конформные отображения “не работают”, по крайней мере, столь же эффективно.

Метод комплексных потенциалов, тем не менее, полезен: он позволяет свести задачу о включении к системе сингулярных интегральных уравнений (с ядром Коши). Ее можно регуляризовать, превратив в систему интегральных уравнений Фредгольма. Это сделал Д.И. Шерман в работе [9]. В ней вмещающая область предполагается конечной, но предложенный автором подход почти без изменений переносится на случай, когда матрица — вся плоскость, или даже полуплоскость [10]. Однако решать полученные интегральные уравнения приходится численно. По-видимому, наиболее эффективный алгоритм численного решения предложен в [11]: авторы решают не уравнение Фредгольма, а “исходное”, сингулярное уравнение, заменяя искомую непрерывную функцию ступенчатой. Работоспособность алгоритма они проверяют на эллиптическом включении, сравнивая приближенное решение с решением Хардима на [5]. Но доказательство корректности своей численной процедуры авторы не приводят. Неизвестно, будет ли их алгоритм работать, если граница включения содержит угловые точки.

Альтернативным является метод возмущений — он позволяет свести задачу о неоднородности к последовательности (бесконечной) “однородных” задач. Этот метод по-

дробно описан в [12]. Доказательство сходимости итераций использует предположение о том, что упругие модули меняются от точки к точке непрерывно, более того — достаточно гладко. Но его, по-видимому, можно модифицировать таким образом, что это предположение станет лишним. Основная трудность в другом: метод возмущений тоже не позволяет получить точные квадратурные формулы; довольствоваться, в конечном итоге, приходится некоторым приближением.

Все вышесказанное относится к ситуации, когда упругие модули включений могут произвольным образом отличаться от упругих модулей вмещающей среды. Если же модули сдвига включений одинаковы и совпадают с модулем сдвига матрицы (плоскости), получить точные формулы для потенциалов Колосова, а значит, и для напряжений и деформаций, не составляет труда. При этом включений может быть несколько, их форма принципиального значения не имеет; на модули сжатия никаких ограничений нет.

Данная статья посвящена разбору именно этого частного случая. По непонятным причинам, он остался вне поля зрения исследователей, занимавшихся данной проблематикой. Правда, В.А. Ломакин рассматривает в [12] задачу теории упругости для неоднородно-упругого тела с постоянным модулем сдвига. При этом модуль сжатия предполагается гладкой функцией координат. В.А. Ломакин сводит эту задачу к уравнению в частных производных четвертого порядка относительно вспомогательной функции, которую тоже можно назвать потенциалом: напряжения и смещения выражаются через производные этой функции.

Но о возможности решения в квадратурах речь не идет: во-первых, задача трехмерная. Во-вторых, между непрерывным и скачкообразным изменением модуля сжатия в данном случае есть принципиальная разница. И, в-третьих, автор не конкретизирует геометрию вмещающего тела. Мы же будем рассматривать случай неограниченной двумерной среды (плоскости), и только его.

Предлагаемое решение основано на элементарных свойствах интегралов типа Коши. “Образцом” послужила работа Д.И. Шермана [13], где решена другая, хотя и близкая задача: включение “сделано” из того же материала, что и матрица, но на границе раздела задан скачок смещений. Эту задачу естественно было бы назвать задачей Шермана, или, используя инженерную терминологию, задачей о вставке. Д.И. Шерман, используя интегралы типа Коши, сводит ее к первой основной задаче для вмещающей области, которую он предполагает конечной.

Но для нас гораздо больший интерес представляет случай, когда это — полуплоскость или вся плоскость. Ему посвящена работа [14]. Автор называет задачу о вставке двумерной задачей Эшелби. Работу Шермана [13] он не упоминает. Его подход основан на следующем факте: пусть D — ограниченная область в плоскости комплексного переменного z , которую занимает включение; ∂D — граница этой области и $\xi \in \partial D$. Тогда функция $F(\xi) = \bar{\xi}(\xi)$ может быть аналитически продолжена на внешность области D . Это следует из существования отображения (1.1).

Обрывая ряд (1.1), т.е. рассматривая вместо D близкую к ней, “более регулярную” область, автор добивается того, что точка $z = \infty$ оказывается полюсом конечного порядка для функции $F(z)$. Если включение одно, его идею можно применить к нашей задаче. Но решение будет приближенным; кроме того, сконструировать функцию $F(z)$ не так просто — сначала нужно построить отображение (1.1).

Интереснее и ближе нам работа [15], тоже посвященная задаче о вставке. Авторы идут вслед за Д.И. Шерманом. Они рассматривают частный пример, когда включение представляет собой квадрат, который извлекли из плоскости, увеличили в размерах (скажем, нагрели), затем обжали и с помощью жесткой оправки поместили обратно. Для компонент напряжения в [15] получены явные формулы. Оказывается, что в

окрестности вершин квадрата след тензора напряжений остается конечным, а сдвигающая составляющая стремится к бесконечности.

Авторы [15] могли выписать решение для нескольких вставок произвольной формы, и – более того – распространить его на случай, когда только модули сдвига вставок и плоскости совпадают, а модули сжатия различаются. Тогда бы необходимости в данной статье не было – наши формулы были бы частным случаем их результатов. Но они мимо этой возможности прошли.

2. Метод Колосова–Мусхелишвили. Этот метод является основой для дальнейших рассмотрений. С исчерпывающей полнотой он изложен в [4], см. также [16]. Мы только напомним, в чем он состоит, и приведем (без вывода) факты, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Метод комплексных потенциалов (Колосова–Мусхелишвили) основан на том, что компоненты σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yy} двумерного тензора напряжений в однородной изотропной упругой среде являются производными бигармонической функции, т.н. функции напряжений Эри $U(x, y)$:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

и на теореме Гурса, в силу которой функцию, бигармоническую в области D можно представить в виде:

$$U = \operatorname{Re} \left(z\bar{\varphi} + \int \psi dz \right)$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – аналитические функции комплексной переменной $z = x + iy$. Это и есть потенциалы Колосова. Иногда мы будем называть $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ первым и вторым потенциалом Колосова соответственно.

В силу (2.1), функция Эри определена с точностью до слагаемого вида $ax + by + c$. Следовательно, потенциал φ определен с точностью до слагаемого вида $i\alpha z + \beta$, где α – действительная, β – комплексная константа, а $\psi(z)$ – с точностью до аддитивной комплексной константы:

$$\varphi(z) \sim \varphi(z) + i\alpha z + \beta, \quad \psi(z) \sim \psi(z) + \gamma \quad (2.2)$$

Компоненты тензора напряжений определяются потенциалами Колосова однозначно:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 4 \operatorname{Re} \varphi'(z) \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2(\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Введем в рассмотрение функцию $f(z)$, “комплексный градиент” бигармонической функции $U(x, y)$:

$$f(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \quad (2.4)$$

Пусть сначала конечная область D ограничена кусочно-гладким контуром ∂D . Сужение (2.4) на ∂D , функцию $f(\xi)$, где $\xi \in \partial D$, можно выразить через компоненты F_x и F_y вектора напряжений, действующих извне:

$$f(\xi) = i \int_{\xi_0}^{\xi} (F_x + iF_y) ds + C \quad (2.5)$$

где ds – элемент дуги контура ∂D (при интегрировании контур обходится в положительном направлении по отношению к области D – так, что эта область остается слева); $\xi_0 \in \partial D$ – произвольно выбранная точка на контуре; C – произвольная константа

та. По этой причине $f(z)$ мы будем называть силовой функцией для области D . В [4] показано, что граничные значения $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ связаны друг с другом и с $f(\xi)$ соотношением

$$\varphi(\xi) + \overline{\xi\varphi'(\xi)} + \overline{\psi(\xi)} = f(\xi), \quad \xi \in \partial D \quad (2.6)$$

Найти потенциалы Колосова по заданной функции $f(\xi)$ – значит решить т.н. первую основную задачу плоской теории упругости. По поводу условий, при которых это заведомо можно сделать, см. [4]. Заметим, что функция $f(\xi)$ определена с точностью до аддитивной константы. С такой же точностью в силу (2.2) определена и левая часть (2.6).

Пусть теперь граница ∂D области D состоит из одного или нескольких кусочно-гладких контуров:

$$\partial D = \bigcup_{n=1}^N \partial D_n$$

а потенциалы Колосова $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ заданы. Этим функция Эри в D определена с точностью до аддитивной константы, а силовая функция (2.4) – однозначно. Зададим функцию $f_n(\xi)$, $\xi \in \partial D_n$ формулой

$$f_n(\xi) = \varphi(\xi) + \overline{\xi\varphi'(\xi)} + \overline{\psi(\xi)}, \quad \xi \in \partial D_n$$

Функцию $f_n(\xi)$, которая есть не что иное, как сужение (2.4) на ∂D_n , можно представить в виде, аналогичном (2.5). А именно: пусть $F_x^{(n)}$ и $F_y^{(n)}$ – компоненты вектора напряжений, действующих на контур ∂D_n извне. Зафиксируем точку $\xi_0^{(n)} \in \partial D_n$. Утверждается, что существует комплексная константа C_n , зависящая от $\xi_0^{(n)}$, такая, что

$$f_n(\xi) = i \int_{\xi_0^{(n)}}^{\xi} (F_x^{(n)} + iF_y^{(n)}) ds + C_n \quad (2.7)$$

Приведем также формулу (Г.В. Колосова) для смещений. Пусть u и v – горизонтальная и вертикальная составляющие вектора смещений. Формула Колосова:

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} = (\kappa + 1)\varphi(z) - f(z) \quad (2.8)$$

Здесь μ – модуль сдвига; κ – константа Колосова, которая выражается через модуль сдвига μ и модуль сжатия λ :

$$\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$$

В силу (2.2), формула (2.8) определяет вектор смещений с точностью до слагаемого вида

$$i\eta z + \delta \quad (2.9)$$

где η – действительная, δ – комплексная константа. Но оно не влияет на симметризованный тензор деформации, от которого зависят упругие напряжения.

3. Постановка двумерной задачи. Пусть D_0 – изотропная, но не однородная по упругим свойствам плоскость; она же – плоскость комплексного переменного z . Пусть $D_1 \subset D_0$, $D_2 \subset D_0$, ..., $D_N \subset D_0$ – односвязные области, ограниченные замкнутыми кусочно-гладкими кривыми $\varphi_n(z)$; предполагается, что каждая гладкая компонента каждого контура является дугой Ляпунова.

Модуль сдвига во всей плоскости D_0 один и тот же; его мы обозначим через μ .

Модуль сжатия в D_1 равен λ_1 , и т.д.; в $D_N - \lambda_n(z)$. Модуль сжатия в области D , внешней по отношению к $D_1 \cup \dots \cup D_N$, обозначим через λ .

Компоненты тензора напряжений D_n , σ_{yy}^∞ и σ_{xy}^∞ в бесконечно удаленной точке плоскости заданы, требуется найти напряжения во всех точках D_0 при условии, что вектор смещений при переходе через границы ∂D_n изменяется непрерывно.

Сведем эту задачу к краевой задаче теории функций. Пусть $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ – потенциалы Колосова, которые определяют напряженное состояние в области D_n , $n = 1, \dots, N$; а $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – потенциалы Колосова в области D . Мы будем искать функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в виде:

$$\varphi(z) = \Gamma_1 z + \Phi(z), \quad \psi(z) = \Gamma_2 z + \Psi(z) \quad (3.1)$$

где $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ – голоморфные в области D функции такие, что

$$\Phi(\infty) = \Psi(\infty) = 0 \quad (3.2)$$

Константы Γ_1 и Γ_2 задают поле напряжений в бесконечно удаленной точке. Поскольку мнимая часть $\varphi(z)$ на напряжения не влияет, будем считать, что

$$\text{Im } \Gamma_1 = 0 \quad (3.3)$$

Из (2.3) следует, что

$$\Gamma_1 = \frac{\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty}{4}, \quad \Gamma_2 = \frac{\sigma_{yy}^\infty - \sigma_{xx}^\infty}{2} + i\sigma_{xy}^\infty$$

Если поле в D задано, требования (3.1), (3.2) и (3.3) к потенциалам $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ определяют эти функции однозначно. Поэтому функции $f_n(\xi)$, $\xi \in \partial D_n$, $n = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} f_n(\xi) &= \varphi(\xi) + \overline{\xi\varphi'(\xi)} + \overline{\psi(\xi)} = \\ &= 2\Gamma_1\xi + \overline{\Gamma_2\xi} + \Phi(\xi) + \overline{\xi\Phi'(\xi)} + \overline{\Psi(\xi)} \quad \xi \in \partial D_n \end{aligned} \quad (3.4)$$

тоже определены однозначно. В терминах предыдущего раздела, $f_n(\xi)$ – это сужение силовой функции для области D на контур ∂D_n . $f_n(\xi)$ можно представить в виде (2.7), где $F_x^{(n)}$ и $F_y^{(n)}$ – компоненты вектора напряжений, действующих со стороны включения D_n ; $\xi_0^{(n)}$ – произвольно выбранная точка контура ∂D_n ; C_n – константа, которая зависит от $\xi_0^{(n)}$.

Подчеркнем, что интегрирование идет в положительном направлении по отношению к области D – так, что она остается слева, то есть по часовой стрелке.

Еще рассмотрим силовую функцию для области D_n (точнее, ее сужение на ∂D_n), $\tilde{f}_n(\xi)$. Эта функция определена с точностью до константы (см. раздел 1). Воспользуемся этим, и выберем такую нормировку:

$$\tilde{f}_n(\xi) = i \int_{\xi_0^{(n)}}^{\xi} (\tilde{F}_x^{(n)} + i\tilde{F}_y^{(n)}) ds + C_n$$

где $\xi_0^{(n)}$ – та же точка на контуре ∂D_n , что и раньше; C_n – та же, зависящая от $\xi_0^{(n)}$ константа; $\tilde{F}_x^{(n)}$ и $\tilde{F}_y^{(n)}$ – компоненты вектора напряжений, действующих со стороны области D . Интегрирование идет в положительном направлении по отношению к области D_n , т.е. против часовой стрелки. Но по третьему закону Ньютона, $\tilde{F}_x^{(n)} = -F_x^{(n)}$, $\tilde{F}_y^{(n)} = -F_y^{(n)}$. Следовательно,

$$\tilde{f}_n(\xi) = f_n(\xi)$$

поэтому граничные значения потенциалов $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ мы можем подчинить условию:

$$\varphi_n(\xi) + \overline{\xi\varphi'_n(\xi)} + \overline{\psi_n(\xi)} = f_n(\xi), \quad \xi \in \partial D_n \quad (3.5)$$

Исключив $f_n(\xi)$ из (3.4) и (3.5), получим N граничных условий для функций $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$; ..., $\varphi_N(z)$, $\psi_N(z)$; $\Phi(z)$, $\Psi(z)$:

$$\begin{aligned} & \overline{\varphi_n(\xi) + \xi\varphi'_n(\xi) + \psi_n(\xi)} - 2\Gamma_1\xi - \overline{\Gamma_2\xi} = \\ & = \overline{\Phi(\xi) + \xi\Phi'(\xi) + \Psi(\xi)}, \quad \xi \in \partial D_n; \quad n = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.6)$$

Еще N условий даст непрерывность смещений, ее мы пока не учитывали. Напомним, что мы считали заданным поле напряжений в D , т.е. потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$. С этой точки зрения, (3.6) – граничное условие первой основной задачи (см. пред. раздел), оставляющее произвол в выборе нормировок: $\varphi_n(z)$ можно заменить на $\varphi_n(z) + i\alpha_n z + \beta_n$, а $\psi_n(z)$ – на $\psi_n(z) - \beta_n$. Здесь α_n – произвольная действительная, β_n – любая комплексная константа. Условия на смещения, как мы увидим, определяют “естественную” нормировку для $\varphi_n(z)$. Тогда и нормировка $\psi_n(z)$ определится однозначно.

Пусть $u(z)$ – горизонтальная, $v(z)$ – вертикальная компонента смещений в D , $u_n(z)$, $v_n(z)$ – горизонтальная и вертикальная компонента смещений в D_n . При переходе через границу включения компоненты смещения изменяются непрерывно. Следовательно,

$$u(\xi) + iv(\xi) = u_n(\xi) + iv_n(\xi), \quad \xi \in \partial D_n \quad (3.7)$$

Согласно формуле Колосова (2.8),

$$\begin{aligned} u(\xi) + iv(\xi) &= \frac{(\kappa + 1)\varphi(\xi) - f_n(\xi)}{2\mu} + i\eta\xi + \delta, \\ u_n(\xi) + iv_n(\xi) &= \frac{(\kappa_n + 1)\varphi_n(\xi) - f_n(\xi)}{2\mu} + i\eta_n\xi + \delta_n; \quad \xi \in \partial D_n \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь κ и κ_n – коэффициенты, характеризующие упругие свойства матрицы D и включения D_n :

$$\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}, \quad \kappa_n = \frac{\lambda_n + 3\mu}{\lambda_n + \mu}$$

Мы учли, что модуль сдвига всюду один и тот же и что формула (2.8) определяет смещения с точностью до слагаемого вида (2.9). В силу (3.7) и (3.8),

$$(\kappa_n + 1)\varphi_n(\xi) = (\kappa + 1)\varphi(\xi) + 2\mu(i(\eta - \eta_n)\xi + (\delta - \delta_n)), \quad \xi \in \partial D_n; \quad n = 1, \dots, N \quad (3.9)$$

Варьируя нормировку φ_n , мы можем добиться того, что второе слагаемое в правой части (3.9) исчезнет. Это и есть та естественная нормировка, о которой говорилось выше. С учетом (3.1), будем иметь:

$$(\kappa_n + 1)\varphi_n(\xi) - (\kappa + 1)\Gamma_1\xi = (\kappa + 1)\Phi(\xi), \quad \xi \in \partial D_n; \quad n = 1, \dots, N \quad (3.10)$$

Равенства (3.6) и (3.10) составляют полную систему граничных условий. Задача теории упругости будет решена, если мы найдем функции, голоморфные в D_n , где $n = 1, \dots, N$, а также функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, регулярные в D , которые этим условиям удовлетворяют. Ниже будет показано, что такие функции определяются однозначно.

4. Решение в квадратурах и его свойства. Начнем с анализа соотношений (3.10): рассмотрим вспомогательную функцию $\chi(z)$

$$\chi(z) = \begin{cases} (\varkappa + 1)\Phi(z), & z \in D \\ (\varkappa_n + 1)\varphi_n(z) - (\varkappa + 1)\Gamma_1 z, & z \in D_n \end{cases}$$

В силу (3.10), она голоморфна на $D \cup D_1 \cup \dots \cup D_N$, т.е. на всей плоскости D_0 . Следовательно, $\chi(z) = \text{const}$. А поскольку на бесконечности эта функция равна нулю (в силу того, что $\Phi(\infty) = 0$), она равна нулю везде. Отсюда,

$$\Phi(z) = 0, \quad z \in D; \quad \varphi_n(z) = \frac{(\varkappa + 1)\Gamma_1}{\varkappa_n + 1} z, \quad z \in D_n \quad (4.1)$$

Далее: подставим (4.1) в (3.6). После элементарных преобразований получим:

$$\psi_n(\xi) - \Gamma_2 \xi + \frac{2(\varkappa - \varkappa_n)\Gamma_1}{\varkappa_n + 1} \bar{\xi} = \Psi(\xi), \quad \xi \in \partial D_n; \quad n = 1, \dots, N \quad (4.2)$$

Введем в рассмотрение еще одну вспомогательную кусочно-голоморфную функцию $\omega(z)$:

$$\omega(z) = \begin{cases} \Psi(z), & z \in D \\ \psi_n(z) - \Gamma_2 z, & z \in D_n \end{cases} \quad (4.3)$$

Обозначим через ∂D границу области D :

$$\partial D = \bigcup_{n=1}^N \partial D_n$$

Пусть $\omega_+(\xi)$ и $\omega_-(\xi)$ – предельные значения функции $\omega(z)$ при стремлении к точке $\xi \in \partial D$ слева и справа (то есть, изнутри или снаружи одного из контуров ∂D_n) соответственно. Из (4.3) и (4.2) следует формула для скачка $\omega_+(\xi) - \omega_-(\xi)$:

$$\omega_+(\xi) - \omega_-(\xi) = \frac{2(\varkappa_n - \varkappa)\Gamma_1}{\varkappa_n + 1} \bar{\xi}, \quad \xi \in \partial D_n$$

Поскольку значение функции $\omega(z)$ в бесконечно удаленной точке задано (а именно, $\omega(\infty) = 0$, так как $\Psi(\infty) = 0$), эта функция определяется однозначно. По общим правилам, она равна сумме интегралов типа Коши:

$$\omega(z) = \sum_{n=1}^N \frac{(\varkappa_n - \varkappa)\Gamma_1}{(\varkappa_n + 1)\pi i} \int_{\partial D_n} \frac{\bar{\xi} d\xi}{\xi - z} \quad (4.4)$$

Из (4.4) и (4.3) следуют формулы для $\Psi(z)$ и $\psi_n(z)$, $n = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \sum_{m=1}^N \frac{(\varkappa_m - \varkappa)\Gamma_1}{(\varkappa_m + 1)\pi i} \int_{\partial D_m} \frac{\bar{\xi} d\xi}{\xi - z}, \quad z \in D \\ \psi_n(z) &= \sum_{m=1}^N \frac{(\varkappa_m - \varkappa)\Gamma_1}{(\varkappa_m + 1)\pi i} \int_{\partial D_m} \frac{\bar{\xi} d\xi}{\xi - z} + \Gamma_2 z, \quad z \in D_n \end{aligned} \quad (4.5)$$

Эти формулы вместе с (4.1) решают задачу (3.6), (3.10). Если $N = 1$ (включение одно), то

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= 0, \quad \Psi(z) = \frac{(\varkappa_1 - \varkappa)\Gamma_1}{(\varkappa_1 + 1)\pi i} \int_{\partial D_1} \frac{\bar{\xi} d\xi}{\xi - z}, \quad z \in D \\ \varphi_1(z) &= \frac{(\varkappa + 1)\Gamma_1}{\varkappa_1 + 1} z, \quad \psi_1(z) = \frac{(\varkappa_1 - \varkappa)\Gamma_1}{(\varkappa_1 + 1)\pi i} \int_{\partial D_1} \frac{\bar{\xi} d\xi}{\xi - z} + \Gamma_2 z, \quad z \in D_1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ниже полученные результаты (формулы (4.1) и (4.5)) будут проанализированы.

Начнем с рассмотрения тривиального случая, когда на бесконечности задан чистый сдвиг, то есть $\Gamma_1 = 0$. Из (4.1) и (4.5) имеем:

$$\Phi(z) = 0, \quad \Psi(z) = 0, \quad z \in D; \quad \varphi_n(z) = 0, \quad \psi_n(z) = \Gamma_2 z, \quad z \in D_n \quad (4.7)$$

Элементарно проверяется, что (4.7) – это, действительно, решение задачи (3.6), (3.10), если $\Gamma_1 = 0$. Из (4.7) следует, что тензор напряжений всюду будет таким же, как на бесконечности. Его компоненты, в силу (2.3),

$$\sigma_{xx} = -\operatorname{Re} \Gamma_2, \quad \sigma_{xy} = \operatorname{Im} \Gamma_2, \quad \sigma_{yy} = \operatorname{Re} \Gamma_2$$

Теперь, в предположении $\Gamma_1 \neq 0$, исследуем формулы (4.1) и (4.5) “на регулярность”. Величина $\bar{\xi}$, если ее рассматривать как функцию точки, принадлежащей границе включения, удовлетворяет условию Гельдера. Поэтому определяемые посредством (4.5) функции $\psi_n(z)$ и $\Psi(z)$ ограничены. Ограничены также функции $\varphi_n(z)$, линейные по z ; а функция $\Phi(z)$ просто равна нулю.

Но напряжения определяются производными потенциалов Колосова. Первые две производные φ_n и φ ограничены: в силу (4.1),

$$\varphi'_n(z) = \frac{(\kappa + 1)\Gamma_1}{\kappa_n + 1}, \quad \varphi''_n(z) = 0 \quad z \in D_n$$

$$\varphi'(z) = \Gamma_1; \quad \varphi''(z) = 0; \quad z \in D$$

Здесь учтено, что $\varphi(z) = \Gamma_1 z + \Phi(z)$. Для того чтобы прояснить ситуацию с $\psi'_n(z)$ и $\Psi'(z)$, рассмотрим интеграл типа Коши от $\bar{\xi}$ по кусочно-гладкому контуру ∂D_n , границе одной из областей D_n . Обозначим этот интеграл через I :

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_n} \frac{\bar{\xi} d\bar{\xi}}{\xi - z} \quad (4.8)$$

Вычислим производную $I'(z)$, и применим к ней интегрирование по частям:

$$I'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_n} \frac{\bar{\xi} d\bar{\xi}}{(\xi - z)^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_n} \frac{\partial \bar{\xi} / \partial \xi d\bar{\xi}}{\xi - z}$$

Проинтегрированный член исчезает, поскольку функция $\bar{\xi}(\xi)$ непрерывна. Производную $\bar{\xi}$ по ξ следует понимать как отношение:

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \xi} = \frac{d\bar{\xi}}{ds} / \frac{d\xi}{ds}$$

где s – длина дуги, отсчитываемая в положительном направлении от произвольной точки $a_0 \in \partial D_n$. Очевидно,

$$\frac{d\xi}{ds} = \exp(i\theta), \quad \frac{d\bar{\xi}}{ds} = \overline{\left(\frac{d\xi}{ds}\right)} = \exp(-i\theta)$$

где $\theta(\xi)$ – угол между касательной l , инцидентной точке $\xi \in \partial D_n$, и положительным направлением действительной оси, см. рис. 1.

Следовательно,

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \xi} = \exp(-2i\theta)$$

и

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_n} \frac{\exp(-2i\theta)}{\xi - z} d\xi$$

По предположению, контур ∂D_n состоит из дуг Ляпунова, – дуг, во внутренних точках которых угол θ – непрерывная функция ξ , удовлетворяющая, к тому же, условию Гельдера H . Классу H , очевидно, принадлежит и экспонента $\exp(-2i\theta)$, поэтому вблизи неугловых точек ∂D_n функция $\Gamma(z)$ ограничена.

Выясним, что происходит вблизи угловых точек, где функция $\theta(\xi)$ претерпевает разрыв. При этом мы воспользуемся одной важной теоремой из [17]. В упрощенном варианте она формулируется следующим образом: пусть L_1, L_2, \dots, L_K – гладкие дуги, инцидентные точке a ; на каждой из дуг L_k задана своя функция $q_k(\xi)$, принадлежащая классу H , и направление интегрирования. Обозначим через $Q(z)$ сумму интегралов типа Коши:

$$Q(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{q_1(\xi) d\xi}{\xi - z} + \dots + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_K} \frac{q_K(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

Тогда в достаточно малой окрестности точки a

$$Q(z) = \frac{\sum_{k=1}^K \pm q_k(a)}{2\pi i} \ln |z - a| + O(1) \quad (4.9)$$

Знак “+” перед слагаемым $q_k(a)$ выбирается, если интегрирование по L_k идет по направлению к точке a , знак “–” – если в противоположном направлении.

Применим эту теорему к нашему случаю. Пусть a – угловая точка контура ∂D_n ; она инцидентна двум дугам (т.е. $K = 2$). На этих дугах задана функция $\exp(-2i\theta)$, принадлежащая классу H . Задано и направление интегрирования (против часовой стрелки). Пусть L_1 – дуга, которая заканчивается точкой a , L_2 – дуга, которая с нее начинается. Таким образом, $q_1(\xi) = \exp(-2i\theta(\xi))$, $\xi \in L_1$; $q_2(\xi) = \exp(-2i\theta(\xi))$, $\xi \in L_2$, а $q_1(a)$ и $q_2(a)$ – предельные значения $q_1(\xi)$ и $q_2(\xi)$ при $\xi \rightarrow a$.

Пусть θ_a^+ и θ_a^- – предельные значения угла θ , см. рис. 2:

$$\theta_a^+ = \lim_{\xi \rightarrow a, \xi \in L_1} \theta(\xi), \quad \theta_a^- = \lim_{\xi \rightarrow a, \xi \in L_2} \theta(\xi)$$

(пределы односторонние). Тогда

$$q_1(a) = \exp(-2i\theta_a^+), \quad q_2(a) = \exp(-2i\theta_a^-)$$

В силу (4.9) и следующего за (4.9) замечания относительно выбора знаков,

$$\Gamma'(z) = \frac{\exp(-2i\theta_a^+) - \exp(-2i\theta_a^-)}{2\pi i} \ln |a - z| + O(1), \quad z \rightarrow a \quad (4.10)$$

Притом неважно, слева или справа (изнутри или извне контура ∂D_n) приближаемся мы к угловой точке. Поэтому для $\psi'_n(z)$ и $\Psi'(z)$ мы имеем одну асимптотику: при $z \rightarrow a$

$$\psi'_n(z), \Psi'(z) = \frac{(\kappa_n - \kappa)\Gamma_1}{\pi i(\kappa_n + 1)} (\exp(-2i\theta_a^+) - \exp(-2i\theta_a^-)) \ln |a - z| + O(1) \quad (4.11)$$

Заметим, что (4.11) – асимптотика еще и для $\psi'(z)$, так как $\psi'(z) = \Psi'(z) + \Gamma_2$. Итак, производные второго потенциала Колосова при приближении к угловым точкам границы стремятся к бесконечности по логарифмическому закону (исключение составляет

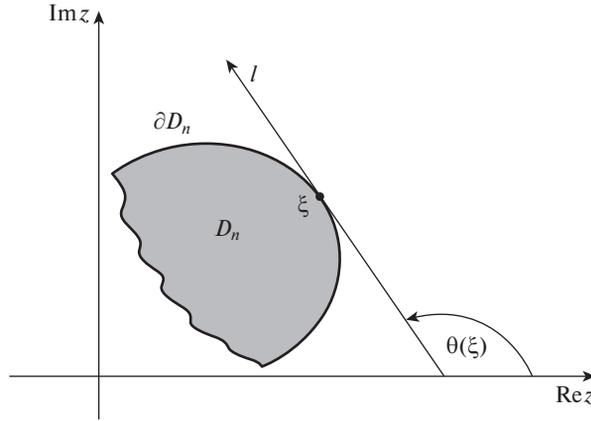


Рис. 1. К определению угла $\theta(\xi)$.

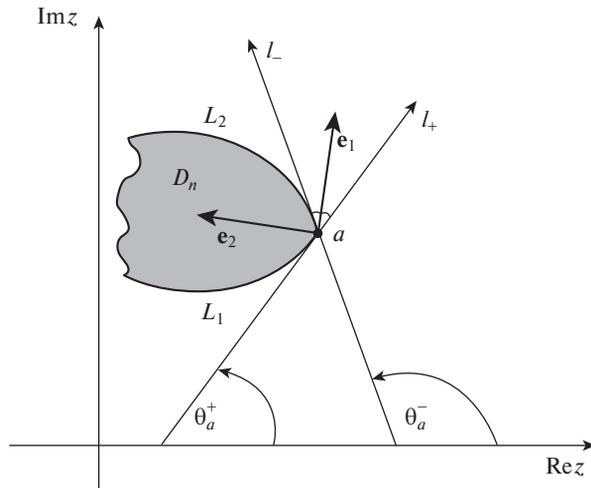


Рис. 2. Предельные углы θ_a^+ и θ_a^- , и предельное положение главных осей тензора напряжения (a – угловая точка).

случай $\Gamma_1 = 0$, – он был рассмотрен выше). Но след тензора напряжений σ – величина ограниченная: по первой из формул (4.1), след равен $4\Gamma_1$ в D и $4\Gamma_1(\kappa + 1)/(\kappa_n + 1)$ в $-D_n$. Учитывая это и пользуясь (4.11), находим с помощью (2.3) асимптотику для компонент σ

$$\sigma = \frac{\Gamma_1(\kappa_n - \kappa) \ln |a - z|}{\pi(\kappa_n + 1)} \begin{pmatrix} \sin 2\theta_a^+ - \sin 2\theta_a^- & \cos 2\theta_a^- - \cos 2\theta_a^+ \\ \cos 2\theta_a^- - \cos 2\theta_a^+ & \sin 2\theta_a^- - \sin 2\theta_a^+ \end{pmatrix} + \mathbf{O}(1) \quad (4.12)$$

Здесь $\mathbf{O}(1)$ – симметричная матрица, компоненты которой при $z \rightarrow a$ остаются конечными. Напряженное состояние вблизи угловой точки определяется, в основном, пер-

вым слагаемым в правой части (4.12) и представляет собой практически чистый сдвиг. Собственные значения σ (главные напряжения):

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{2\Gamma_1(\kappa_n - \kappa) \ln |a - z|}{\pi(\kappa_n + 1)} \sin(\theta_a^+ - \theta_a^-) + O(1) \\ \sigma_2 &= -\frac{2\Gamma_1(\kappa_n - \kappa) \ln |a - z|}{\pi(\kappa_n + 1)} \sin(\theta_a^+ - \theta_a^-) + O(1)\end{aligned}\quad (4.13)$$

Главные оси тензора напряжений в пределе при $z \rightarrow a$ коллинеарны векторам $\mathbf{e}_1 = \left(\cos \frac{\theta_a^+ + \theta_a^-}{2}, \sin \frac{\theta_a^+ + \theta_a^-}{2} \right)$ и $\mathbf{e}_2 = \left(\sin \frac{\theta_a^+ + \theta_a^-}{2}, -\cos \frac{\theta_a^+ + \theta_a^-}{2} \right)$ – собственным векторам матрицы

$$\begin{pmatrix} \sin 2\theta_a^+ - \sin 2\theta_a^- & \cos 2\theta_a^- - \cos 2\theta_a^+ \\ \cos 2\theta_a^- - \cos 2\theta_a^+ & \sin 2\theta_a^- - \sin 2\theta_a^+ \end{pmatrix}$$

Вектор \mathbf{e}_1 отвечает собственному числу σ_1 , и, очевидно, коллинеарен биссектрисе угла между предельными касательными l_+ и l_- ; рис. 2. Вектор \mathbf{e}_2 ему ортогонален.

Итак, независимо от условий на бесконечности, предельное положение одной из главных осей тензора напряжений – это биссектриса угла, который образован касательными, инцидентными угловой точке.

Замечание 1. Если a – не просто угловая точка, а точка заострения:

$$\theta_a^- = \theta_a^+ \pm \pi$$

то, согласно (4.12), напряжения в окрестности a ограничены. Этот результат согласуется со следующим фактом (и является, в некотором смысле, его обобщением): пусть включение D_n – трещина (то есть, бесконечно узкая щель) произвольной конфигурации. Тогда, очевидно,

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_n} \frac{\bar{\xi} d\xi}{\xi - z} = 0, \quad z \notin D_n$$

и производная Γ этого интеграла – тоже 0. Иными словами, трещину, заполненную материалом с “общим” модулем сдвига, поле напряжений во внешней области “не замечает”. Поэтому в окрестности трещины, а значит, и вблизи точки заострения – ее устья напряжения будут конечными.

5. Примеры. *5.1. Эллиптическое включение.* Полное решение задачи теории упругости для изотропного эллиптического включения дано в [5]. Здесь мы только убедимся в том, что формулы (4.6) дают правильный ответ для случая, когда модули сдвига включения и плоскости совпадают.

Итак, единственное включение занимает область D_1 , граница которой ∂D_1 – эллипс. Будем считать, что сумма полуосей эллипса равна 2: большая полуось равна $1 + \beta$, малая – $1 - \beta$, где $\beta \in (0, 1)$; центр совпадает с началом координат; большая полуось ориентирована вдоль действительной оси. Константа Колосова, характеризующая свойства включения, равна κ_1 ; константа Колосова для области D (т.е. для плоскости с исключенным из нее эллипсом) равна κ . Это соответствует обозначениям, принятым в разделах 2 и 3.

Искомые потенциалы Колосова: в области D_1 – $\phi_1(z)$ и $\psi_1(z)$, в D – $\phi(z) = \Gamma_1 z + \Phi(z)$ и $\psi(z) = \Gamma_2 z + \Psi(z)$, где $\Phi(\infty) = \Psi(\infty) = 0$. Граничные условия, которым эти функции удовлетворяют – частный случай (3.6) и (3.10) при $N = 1$:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) + \overline{\xi\varphi_1'(\xi)} + \overline{\psi_1(\xi)} - 2\Gamma_1\xi - \overline{\Gamma_2\xi} &= \Phi(\xi) + \overline{\xi\Phi'(\xi)} + \overline{\Psi(\xi)}, \\ (\kappa_1 + 1)\varphi_1(\xi) - (\kappa + 1)\Gamma_1\xi &= (\kappa + 1)\Phi(\xi), \quad \xi \in \partial D_1 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Функции $\Phi(z)$ и $\varphi_1(z)$ находятся просто: из (4.6),

$$\Phi(z) = 0, \quad \varphi_1(z) = \frac{(\kappa + 1)\Gamma_1}{\kappa_1 + 1} z \quad (5.2)$$

Для того, чтобы найти с помощью (4.6) функции $\psi_1(z)$ и $\Psi(z)$, мы должны вычислить интеграл по эллипсу ∂D_1

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1} \frac{\overline{\xi} d\xi}{\xi - z} \quad (5.3)$$

Произведем замену: $\xi = \varepsilon + \frac{\beta}{\varepsilon}$; тогда (5.3) сведется к интегралу по окружности $|\varepsilon| = 1$:

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\varepsilon|=1} \frac{(\beta\varepsilon^2 + 1)(\varepsilon^2 - \beta)d\varepsilon}{\varepsilon^2(\varepsilon^2 - z\varepsilon + \beta)} \quad (5.4)$$

Здесь учтено, что $d\xi = (1 - \beta/\varepsilon^2)d\varepsilon$ и $\overline{\xi} = 1/\varepsilon$. Особые точки подынтегральной функции: начало координат и два (в общем случае) корня уравнения

$$\varepsilon^2 - z\varepsilon + \beta = 0$$

Обозначим через ε_1 корень, наименьший по абсолютной величине. Поскольку $|\beta| < 1$, при любом z он находится внутри единичной окружности. Вторым корнем, $\varepsilon_2 = \beta/\varepsilon_1$, находится внутри этой окружности, если $z \in D_1$, и вне ее, если $z \notin D_1$. В последнем случае можем написать:

$$\varepsilon_1(z) = \frac{z - \sqrt{z^2 - 4\beta}}{2} \quad (5.5)$$

Здесь имеется в виду ветвь квадратного корня, для которой

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{z^2 - 4\beta}}{z} = 1$$

Вне эллипса $\varepsilon_1(z)$ — однозначная функция. Действительно, точки ветвления функции $\sqrt{z^2 - 4\beta}$ — это фокусы эллипса. При обходе контура, охватывающего оба фокуса, а тем более весь эллипс, квадратный корень не испытывает приращения.

Теперь вычислить интеграл (5.4) (используя теорию вычетов), не составляет труда:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\varepsilon|=1} \frac{(\beta\varepsilon^2 + 1)(\varepsilon^2 - \beta)d\varepsilon}{\varepsilon^2(\varepsilon^2 - z\varepsilon + \beta)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1} \frac{\overline{\xi} d\xi}{\xi - z} = \begin{cases} \beta z, & z \in D_1 \\ (\beta - 1/\beta)\varepsilon_1(z), & z \in D \end{cases} \quad (5.6)$$

Легко проверить, что в соответствии с теоремой Племеля,

$$\beta z - \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right) \varepsilon_1(z) = \overline{z}, \quad z \in \partial D_1 \quad (5.7)$$

Подставляя (5.6) в (4.6), получаем формулы для $\Psi(z)$ и $\psi_1(z)$:

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= \frac{2(\kappa_1 - \kappa)\Gamma_1}{\kappa_1 + 1} \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right) \varepsilon_1(z), \quad z \in D \\ \psi_1(z) &= \left(\frac{2\beta(\kappa_1 - \kappa)\Gamma_1}{\kappa_1 + 1} + \Gamma_2 \right) z, \quad z \in D_1\end{aligned}\tag{5.8}$$

где $\varepsilon_1(z)$ вычисляется по формуле (5.5). Формулы (5.2) и (5.8) решают краевую задачу (5.1): то, что удовлетворяется второе граничное условие (5.1), очевидно. С помощью (5.7) можно убедиться в том, что первое граничное условие (5.1) тоже выполнено.

Обратим внимание на тот факт, что функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ линейны по z . Так и должно быть: это значит, что напряженное состояние внутри эллиптического включения однородно.

Заметим также, что при $\beta = 1$ (когда эллиптическое включение вырождается в прямолинейную щель), из (5.8) имеем:

$$\Psi(z) = 0$$

т.е. поле напряжений во внешней области тоже будет однородным, таким же, каким оно было бы в отсутствие включения. Это — частный случай ситуации, рассмотренной в конце предыдущего раздела, см. Замечание 1.

5.2. Набор из N кругов. Пусть области D_n , $n = 1, \dots, N$ — попарно не пересекающиеся круги. Центр круга D_n находится в точке z_n , радиус равен r_n . Требуется решить краевую задачу (3.6), (3.10).

Ответ для функций $\Phi(z)$ и $\varphi_n(z)$ готов — это формулы (4.1). Для того, чтобы найти, пользуясь (4.5), функции $\Psi(z)$ и $\psi_n(z)$, необходимо вычислить интеграл (4.8) по каждой окружности. Это нетрудно:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_n} \frac{\bar{\xi} d\xi}{\xi - z} = \begin{cases} \bar{z}_n, & z \in D_n \\ \frac{r_n^2}{z_n - z}, & z \notin D_n \end{cases}\tag{5.9}$$

Подставляем (5.9) в (4.5):

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= 2\Gamma_1 \sum_{m=1}^N \frac{(\kappa_m - \kappa)}{(\kappa_m + 1)} \frac{r_m^2}{z_m - z}, \quad z \in D \\ \psi_n(z) &= \frac{2\Gamma_1(\kappa_n - \kappa)\bar{z}_n}{(\kappa_n + 1)} + 2\Gamma_1 \sum_{m=1, m \neq n}^N \frac{(\kappa_m - \kappa)}{(\kappa_m + 1)} \frac{r_m^2}{z_m - z} + \Gamma_2 z, \quad z \in D_n\end{aligned}\tag{5.10}$$

Формулы (4.1) и (5.10) решают краевую задачу (3.6), (3.10). Это легко проверить непосредственной подстановкой, если учесть, что поскольку ∂D_n — окружность радиуса r_n , а z_n — ее центр,

$$\frac{r_n^2}{\bar{z}_n - \bar{\xi}} = z_n - \xi, \quad \xi \in \partial D_n$$

5.2. Полуокруг. Пусть включение снова одно, и это — полуокруг D_1 (рис. 3.), ограниченный дугой C — верхней полуокружностью единичной окружности и отрезком действительной оси $[-1, 1]$:

$$\partial D_1 = C \cup [-1, 1]$$

Требуется решить задачу (5.1).

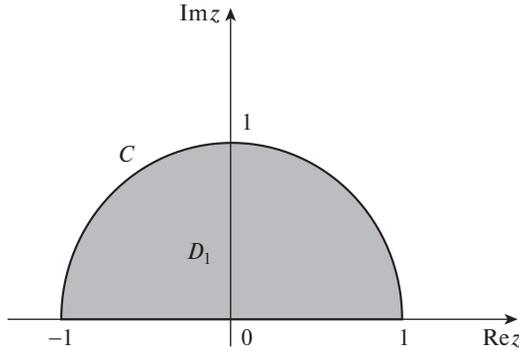


Рис. 3. Включение – полукруг.

Функции $\Phi(z)$ и $\phi_1(z)$ определяются, как и в случае эллиптического включения, формулами (5.2). Для того, чтобы найти с помощью (4.6) функции $\psi_1(z)$ и $\Psi(z)$, мы должны взять интеграл по границе полукруга:

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1} \frac{\bar{\xi} d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\xi}{\xi(\xi - z)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{[-1,1]} \frac{\xi d\xi}{\xi - z} \quad (5.11)$$

Переходя от средней части (5.11) к правой, мы учли, что $\bar{\xi} = 1/\xi$, если $\xi \in C$; и $\bar{\xi} = \xi$, если $\xi \in [-1, 1]$. Дальнейшие вычисления интереса не представляют, – они основаны на элементарной теории вычетов. Приведем ответ:

$$I = \frac{1}{\pi i} + \frac{z^2 - 1}{2\pi i z} \ln \frac{z-1}{z+1} + \begin{cases} 1/(2z), & z \in D_1 \\ -1/(2z), & z \in D \end{cases} \quad (5.12)$$

Под $\ln(\dots)$ в правой части (5.12) можно понимать, например, ветвь логарифма: $\ln z = \ln|z| + i \arg z$, где $\arg z \in (-\pi, \pi)$.

Пусть $I_+(z)$, $I_-(z)$ – сужение функции $I(z)$ соответственно на D_1 и D :

$$I_+ = \frac{1}{\pi i} + \frac{z^2 - 1}{2\pi i z} \ln \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{2z}, \quad z \in D_1 \quad (5.13)$$

$$I_- = \frac{1}{\pi i} + \frac{z^2 - 1}{2\pi i z} \ln \frac{z-1}{z+1} - \frac{1}{2z}, \quad z \in D$$

Заметим, что $I_+(z)$ и $I_-(z)$ – однозначные функции, каждая в своей области определения. Действительно: внутри контура, расположенного в D_1 , не содержится ни одной из двух точек ветвления логарифма ($z = \pm 1$); внутри контура, расположенного в D , лежат обе эти точки, поэтому в обоих случаях аргумент комплексной величины $(z - 1)/(z + 1)$ при обходе по контуру не изменяется. Важно, что при $z \rightarrow 0$

$$\lim_{z \rightarrow 0, z \in D_1} I_+(z) = \lim_{z \rightarrow 0, z \in D} I_-(z) = \frac{1}{\pi i}$$

При $z \rightarrow \pm 1$:

$$\lim_{z \rightarrow \pm 1, z \in D_1} I_+(z) = \frac{1}{\pi i} \pm \frac{1}{2}, \quad \lim_{z \rightarrow \pm 1, z \in D} I_-(z) = \frac{1}{\pi i} \mp \frac{1}{2} \quad (5.14)$$

Легко проверить, что согласно теореме Племеля,

$$I_+(z) - I_-(z) = \bar{z}, \quad z \in \partial D_1 \quad (5.15)$$

Далее: вычислим производные $I'_+(z)$ и $I'_-(z)$. Дифференцирование (5.13) дает:

$$\begin{aligned} I'_+(z) &= \frac{z^2+1}{2\pi iz^2} \ln \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{\pi iz} - \frac{1}{2z^2} \\ I'_-(z) &= \frac{z^2+1}{2\pi iz^2} \ln \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{\pi iz} + \frac{1}{2z^2} \end{aligned} \quad (5.16)$$

При стремлении z к любой неугловой точке контура, производные стремятся к конечным пределам. В частности,

$$\lim_{z \rightarrow 0} I'_+(z) = \frac{1}{2}; \quad \lim_{z \rightarrow 0} I'_-(z) = -\frac{1}{2}$$

Из (5.16) заключаем, что вблизи угловой точки $z = 1$

$$I'_+(z), I'_-(z) = \frac{1}{\pi i} \ln |z-1| + O(1), \quad z \rightarrow 1 \quad (5.17)$$

а окрестности точки $z = -1$,

$$I'_+(z), I'_-(z) = -\frac{1}{\pi i} \ln |z+1| + O(1), \quad z \rightarrow -1 \quad (5.18)$$

Итак, при $z \rightarrow \pm 1$ производная интеграла (5.11) стремится к бесконечности по логарифмическому закону.

Сравним (5.17) и (5.18) с результатами, которые были получены в разделе 4, а именно – с асимптотикой (4.10). Напомним, что в разделе 4 через θ_a^+ и θ_a^- обозначены углы, которые образуют левая и правая касательные, инцидентные угловой точке a , с действительной осью, см. рис. 2. В данном случае, угловых точек две: 1 и -1 . Для первой точки:

$$\theta_{a=1}^+ = 0, \quad \theta_{a=1}^- = \pi/2 \quad (5.19)$$

Подставив значения (5.19) в (4.10), получим правую часть (5.17). Если же $a = -1$, будем иметь:

$$\theta_{a=-1}^+ = -\pi/2, \quad \theta_{a=-1}^- = 0 \quad (5.20)$$

Подставив (5.20) в (4.10), приходим к (5.18). Таким образом, асимптотики (5.17) и (5.18) – это частные случаи (4.10); так и должно быть.

Согласно (4.6),

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \frac{2(\kappa_1 - \kappa)\Gamma_1}{(\kappa_1 + 1)} I_-(z), \quad z \in D \\ \psi_1(z) &= \frac{2(\kappa_1 - \kappa)\Gamma_1}{(\kappa_1 + 1)} I_+(z) + \Gamma_2 z, \quad z \in D_1 \end{aligned} \quad (5.21)$$

Формулы (5.21) и (5.2) дают решение краевой задачи (5.1). То, что функции (5.2) удовлетворяют второму условию (5.1), очевидно. Используя (5.15), убеждаемся в том, что первое граничное условие тоже выполнено. Обратим внимание, что в силу (5.14) функции $\Psi(z)$ и $\psi_1(z)$ вблизи угловых точек ограничены; следовательно, смещения всюду конечны.

Приведем также явные выражения для $\Psi(z)$ и $\psi_1(z)$:

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \frac{2(\kappa_1 - \kappa)\Gamma_1}{(\kappa_1 + 1)} \left(\frac{1}{\pi i} + \frac{z^2 - 1}{2\pi i z} \ln \frac{z-1}{z+1} - \frac{1}{2z} \right), \quad z \in D \\ \psi_1(z) &= \frac{2(\kappa_1 - \kappa)\Gamma_1}{(\kappa_1 + 1)} \left(\frac{1}{\pi i} + \frac{z^2 - 1}{2\pi i z} \ln \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{2z} \right) + \Gamma_2 z, \quad z \in D_1 \end{aligned} \quad (5.22)$$

Формулы (5.22) и (5.2) позволяют найти компоненты тензора напряжений σ во всей плоскости. Но мы ограничимся асимптотиками при $z \rightarrow \pm 1$, которые проще всего получить из общей формулы (4.12):

$$\sigma = -\frac{2\Gamma_1(\kappa_1 - \kappa) \ln|z-1|}{\pi(\kappa_1 + 1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{O}(1), \quad z \rightarrow 1$$

и

$$\sigma = \frac{2\Gamma_1(\kappa_1 - \kappa) \ln|z+1|}{\pi(\kappa_1 + 1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{O}(1), \quad z \rightarrow -1$$

Здесь $\mathbf{O}(1)$ – ограниченная симметричная матрица. Главные напряжения σ_1 и σ_2 вблизи угловых точек, согласно (4.13),

$$\sigma_1, \sigma_2 \approx \pm \frac{2\Gamma_1(\kappa_1 - \kappa) \ln|z-a|}{\pi(\kappa_1 + 1)}$$

где $a = \pm 1$.

6. Сводка результатов. В статье рассмотрена двумерная задача теории упругости для плоскости с одним или несколькими включениями, модули сдвига которых совпадают с модулями сдвига плоскости. Никаких ограничений на модули сжатия нет. Границы включений предполагаются кусочно-гладкими, состоящими из конечного числа дуг Ляпунова. Условия на бесконечности задаются в терминах напряжений. Использован метод Колосова–Мухелишвили. Основные результаты:

1. Для потенциалов Колосова получено общее решение в квадратурах.
2. Показано, что вблизи угловых точек границы включения напряженное состояние представляет собой практически чистый сдвиг и что напряжения растут по логарифмическому закону. Получены соответствующие асимптотики. Найдено предельное положение главных осей тензора напряжений. Показано, что оно определяется локальной геометрией границы и не зависит от условий на бесконечности.
3. Показано, что вблизи точек заострения напряжения остаются ограниченными и что трещина (бесконечно узкая щель), заполненная материалом с “общим” модулем сдвига, не влияет на поле напряжений во внешней области.
4. Вычислены потенциалы Колосова для нескольких конкретных случаев: когда включение представляет собой эллипс; полукруг; а также когда включений несколько, и это – круги разных радиусов с разными модулями сжатия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eshelby J.D.* Elastic inclusions and inhomogeneities. In *I. N. Sneddon, & R. Hill* (Eds.), *Progress in solid mechanics* (Vol. 2, Chap. III). Amsterdam: North-Holland, 1961, pp. 89–140.
2. *Кузьмин Ю.О.* Индуцированные деформации разломных зон // *Физика Земли*. 2019. № 5. С. 61–75.
3. *Колосов Г.В.* Применение комплексной переменной к теории упругости. М.: ОНТИ, 1935. 224 с.
4. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
5. *Hardiman N.I.* Elliptic elastic inclusion in an infinite elastic plate // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1954. V. 7. Part 2. P. 226–230.

6. *Гольдштейн Р.В., Шифрин Е.И.* Интегральные уравнения задачи об упругом включении. Полное аналитическое решение задачи об эллиптическом включении // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 1. С. 50–76.
7. *Добровольский И.П.* Задача о включении // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 5. С. 89–97.
8. *Sendeckyj G.P.* Elastic inclusion problem in plane elastostatics // Int. J. Solids Structures. 1970. V. 6. P. 1535–1543
9. *Sherman D.I.* On the Problem of plane strain in nonhomogeneous media. Symposium held in Warsaw. Pergamon Press, 1958.
10. *Цуркис И.Я.* О решении одной нерегулярной системы линейных алгебраических уравнений // Ж. вычисл. матем. и мат. физики. № 9. 1992. С. 1361–1378.
11. *Theocaris P.S., Ioakimidis N.I.* The inclusion problem in plane elasticity // Q. J. of Mech. and Appl. Math. 1977. V. 30. № 4. P. 437–448.
12. *Ломакин В.А.* Теория упругости неоднородных тел. М.: ЛЕНАНД, 2014. 376 с.
13. *Шерман Д.И.* Об одной задаче теории упругости // Докл. АН СССР. Т. XXVII. № 9. 1940. С. 907–910.
14. *Ru C.Q.* Analytic Solution for Eshelby's Problem of an Inclusion of Arbitrary Shape in a Plane or Half-Plane // J. of Appl. Mech. 1999. V. 66. P. 315–322.
15. *List R.D., Silberstein J.P.O.* Two-dimensional elastic inclusion problems // Math. Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 1966. V. 62. P. 303–311.
16. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
17. *Мухелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.

УДК 539.3

КОНТАКТ ГЛАДКОГО ИНДЕНТОРА И ДВУХСЛОЙНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С УСЛОЖНЕННЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ПОВЕРХНОСТИ

© 2022 г. Ф. И. Степанов^{a,*}, Е. В. Торская^{a,**}

^a Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: stepanov_ipm@mail.ru

**e-mail: torskaya@mail.ru

Поступила в редакцию 26.02.2021 г.

После доработки 15.03.2021 г.

Принята к публикации 13.05.2021 г.

Рассмотрена задача о нагружении текстурированного двухслойного упругого основания жестким гладким индентором. На границе раздела текстурированного слоя и полупространства заданы условия полного сцепления. Элементами рельефа являются упругие цилиндры, характеризующиеся высотой и радиусом, располагающиеся на поверхности основания с заданным периодом. Для описания механических свойств элементов рельефа используется одномерная модель Винклера. Решение контактной задачи осуществляется с помощью метода граничных элементов. Давление, перемещения, а также форма индентора аппроксимируются кусочно-постоянными функциями. Коэффициенты взаимного влияния строятся с помощью метода, основанного на двойных интегральных преобразованиях Фурье. Проведен анализ влияния плотности расположения элементов текстуры и их податливости на распределение контактного давления. Получено, что в большинстве случаев контакт осуществляется только с элементами текстуры. Для относительно жесткого текстурированного слоя важно комбинированное влияние изгиба слоя и дополнительной податливости, сообщаемой элементами текстуры. Для относительно жестких и податливых текстурированных слоев получены кривые нагрузка–внедрение в зависимости от периода текстуры. В рамках предложенной постановки также рассмотрен предельный случай контакта индентора со слоем Винклера, полностью покрывающим поверхность двухслойного упругого полупространства. Получены и проанализированы кривые нагрузка–внедрение для индентора, имеющего форму пирамиды Берковича.

Ключевые слова: контактная задача, покрытие, текстурированная поверхность

DOI: 10.31857/S0572329921060131

1. Введение. Создание на поверхности определенного рельефа (текстуры) является распространенным технологическим приемом, преследующим разные цели, такие как создание объемов для удержания смазки и вывода продуктов износа в условиях фрикционного контакта, управления коэффициентом трения и жесткостью контакта путем варьирования геометрии и взаимного расположения элементов текстуры и т.д. При решении задач о контакте текстурированных поверхностей принято пользоваться методами и подходами, разработанными для механики дискретного контакта. Для однородных упругих тел периодические задачи были рассмотрены в ряде работ, таких как [1–5]. Контактные задачи для покрытий переменной толщины, возникающей из-за наличия текстуры, можно рассматривать с помощью приближенных методов, как, на-

пример, в работе [6], где рассматривалась соответствующая плоская задача. Пространственная задача о нагружении текстурированного слоя, сцепленного с жестким полупространством, рассмотрена в работе [7]. Приближенный метод решения пространственной задачи для покрытия, масштаб неровностей на поверхности которого существенно уступает толщине покрытия, разработан в [8].

В данной работе предложена постановка и метод решения задачи о контакте гладкого индентора и двухслойного упругого полупространства, на поверхности которого находится периодическая система одинаковых элементов текстуры.

Также на поверхности покрытий могут существовать тонкие слои, как правило достаточно податливые, возникающие в процессе эксплуатации. Типичным примером является слой, возникающий в процессе трения (так называемый трибослой). Определение свойств этого слоя позволяет получить важную информацию о процессах, происходящих при фрикционном взаимодействии. Механические свойства слоя можно определить с помощью наноиндентирования. Существуют экспериментальные работы по индентированию поверхностей трения [10–12], но для корректной идентификации механических свойств поверхностей покрытых пленок при интерпретации результатов необходимо учитывать деформацию покрытия и подложки, особенно в случае относительно жестких покрытий. В [12] приведены результаты определения механических свойств трибопленки на поверхности углеродного покрытия при индентировании шариком (осесимметричная задача). В данной работе показано, что в рамках предложенной модели для решения задачи о контакте текстурированной поверхности можно в качестве предельного случая рассмотреть пространственную задачу о контакте гладкого индентора произвольной формы и двухслойного упругого полупространства с относительно податливым слоем на поверхности.

2. Постановка задачи. Рассматривается нагружение жестким индентором двухслойного упругого основания, на поверхность которого нанесен периодический рельеф (рис. 1). Нижняя часть основания представляет из себя упругое полупространство с модулем упругости E_2 и коэффициентом Пуассона ν_2 . Верхний слой также является упругим и описывается конечной толщиной H , а также модулем упругости E_1 и коэффициентом Пуассона ν_1 . Условия на границе полупространства и верхнего слоя соответствуют полному сцеплению:

$$\begin{aligned} w^{(1)} &= w^{(2)}, & u_x^{(1)} &= u_x^{(2)}, & u_y^{(1)} &= u_y^{(2)} \\ \sigma_z^{(1)} &= \sigma_z^{(2)}, & \tau_{xz}^{(1)} &= \tau_{xz}^{(2)}, & \tau_{yz}^{(1)} &= \tau_{yz}^{(2)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – нормальное и касательные напряжения, w, u_x, u_y – нормальные и касательные перемещения в материале слоя (1) и полупространства (2).

Элементами рельефа являются упругие цилиндры высотой h и радиусом r , располагающиеся на поверхности основания с периодом T . Для описания механических свойств элементов рельефа используется одномерная модель упругого материала, характеризующаяся податливостью $\eta = h/E_a$. Правосторонняя декартова система координат XYZ располагается таким образом, что ее центр находится в плоскости, проходящей через вершины элементов рельефа в недеформированном состоянии, а ось аппликат направлена по нормали к указанной плоскости в сторону, противоположную основанию. Форма индентора описывается гладкой функцией $f(x, y)$. Индентор нагружен вертикальной силой Q . Граничные условия в плоскости $z = 0$:

$$\begin{aligned} f^*(x, y) + w^{(1)}(x, y) + w^*(x, y) &= f(x, y) - D, & (x, y) \in \Omega \\ \sigma_z &= 0, & (x, y) \notin \Omega \\ \tau_{xz} &= 0, & \tau_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

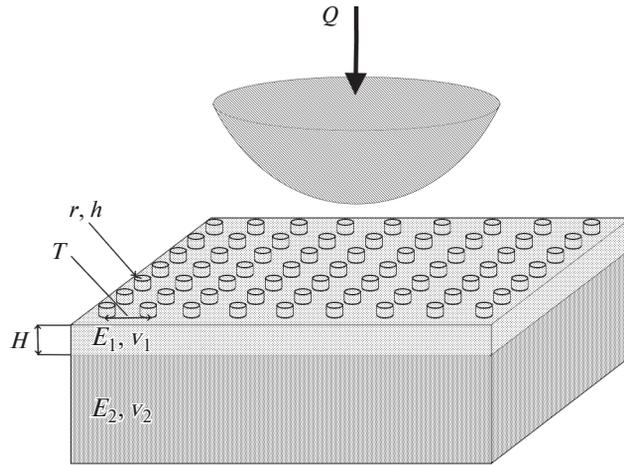


Рис. 1. Схема контакта.

Здесь Ω – номинальная область контакта, $f^*(x, y)$ – форма поверхности в недеформированном состоянии, $w^{(1)}(x, y)$ – вертикальные перемещения верхней границы двухслойного основания, на котором находятся элементы текстуры, $w^*(x, y)$ – вертикальные перемещения верхних точек элементов текстуры относительно поверхности двухслойного основания (вне элементов текстуры $w^*(x, y) = 0$), D – внедрение индентора. При этом контактное давление $p(x, y) = -\sigma_z(x, y)$, номинальная область контакта Ω и внедрение D – неизвестны.

Также выполняется условие равновесия:

$$Q = \iint_{\Omega} p(x, y) dx dy \quad (2.3)$$

3. Метод решения. Решение контактной задачи осуществляется с помощью метода граничных элементов. Прямоугольная область Ω^* , включающая в себя искомую область контакта, разбивается на N квадратных элементов $\Omega_i, i = 1..N$. Давление, перемещения, а также форма индентора внутри этой области аппроксимируются кусочно-постоянными функциями ($p_i, \tilde{w}_i, w_i^*, f_i, f_i^*, i = 1..N$). Для определения зависимости вертикальных перемещений границы двухслойного основания от приложенного давления используется решение задачи о действии нагрузки q , равномерно распределенной внутри квадрата со стороной $2a$ на поверхности двухслойного упругого основания [9]:

$$w'(x', y', 0) = -\frac{1 + \nu_1}{E_1} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \Delta(\gamma, \varphi, \lambda, \chi) \cos(x'\gamma \cos \varphi) \cos(y'\gamma \sin \varphi) d\gamma d\varphi \quad (3.1)$$

$$\chi = E_1/E_2, \quad (x', y', w') = (x, y, w)/a, \quad \lambda = H/a$$

Функция $\Delta(\gamma, \varphi, \lambda, \chi)$ определяется из решения системы линейных функциональных уравнений, полученных из граничных условий в результате использования бигармонических функций для определения напряжений и перемещений, а также примененного к постоянной нагрузке двойного интегрального преобразования Фурье. Функция $\Delta(\gamma, \varphi, \lambda, \chi)$ линейно зависит от результата применения двойного преобразования Фурье к постоянному давлению:

$$\bar{q} = q \frac{4 \sin(\gamma \cos \varphi) \sin(\gamma \sin \varphi)}{\pi^2 \gamma^2 \sin \varphi \cos \varphi} \quad (3.2)$$

Благодаря тому, что вертикальные перемещения границы линейно зависят от приложенного давления внутри каждого элемента, вертикальные перемещения границы двуслойного основания, а также перемещения элементов рельефа могут быть выражены через давление следующим образом:

$$\begin{pmatrix} k_1^1 & \dots & k_N^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^N & \dots & k_N^N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \vdots \\ \tilde{w}_N \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \eta_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \eta_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1^* \\ \vdots \\ w_N^* \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

где k_i^j – вертикальное смещение поверхности в центре элемента i в результате действия единичного давления внутри элемента j , η_i – податливость:

$$k_i^j = -\frac{1 + \nu_1}{E_1} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \Delta'(\gamma, \chi, \varphi, \lambda) \cos(y_{ij}\gamma \sin \varphi) \cos(x_{ij}\gamma \cos \varphi) d\gamma d\varphi \quad (3.4)$$

Здесь $(x_{ij}^2 + y_{ij}^2)^{1/2}$ – расстояние между центрами элементов-квадратов.

Граничные условия (2.2) и условие равновесия (2.3) могут быть выражены с помощью введенных кусочно-постоянных функций:

$$\begin{pmatrix} 4a^2 & \dots & 4a^2 & 0 \\ k_1^1 + \eta_1 & \dots & k_N^1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_1^N & \dots & k_N^N + \eta_N & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \\ f_1 - f_1^* \\ \vdots \\ f_N - f_N^* \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Поскольку область Ω^* заведомо больше области контакта, при решении системы (3.5) давления p_i , $i = 1..N$ могут принимать положительные, отрицательные и нулевые значения, что противоречит граничным условиям. Поскольку элементы с отрицательным давлением не являются частью площадки контакта, им присваивается нулевое значение, ранг матрицы системы уравнений (3.5) сокращается, затем система решается заново. Процесс продолжается до тех пор, пока в решении не окажется элементов с отрицательным давлением. В результате приближенно определяется область контакта, контактное давление и внедрение индентора. Следует отметить, что условие контакта только по поверхности элементов текстуры не ставится заранее, более того, при некоторых комбинациях входных параметров возможен контакт индентора с деформированной поверхностью упругого слоя вне элементов текстуры.

4. Результаты расчетов (текстурированный слой). Расчеты проводились для индентора имеющего форму параболоида $f(x, y) = (x^2 + y^2)/2R$, где R – радиус. При расчетах рассматривались элементы рельефа, имеющие форму цилиндра радиусом r_a и высотой H_a и расположенные периодически с периодом T , при этом модуль упругости элементов рельефа равен модулю упругости слоя ($E_a = E_1$). Результаты получены для полупространства, покрытого относительно жестким слоем и для полупространства, покрытого относительно мягким слоем. Результаты представлены в безразмерном виде, при этом безразмерные параметры получены следующим образом: $(x', y', z') = (x, y, z)/R$, $p' = p/E_1$, $Q' = Q/E_1 R^2$.

На рис. 2 представлено распределение контактного давления при внедрении сферического индентора в различные типы оснований под действием различных усилий.

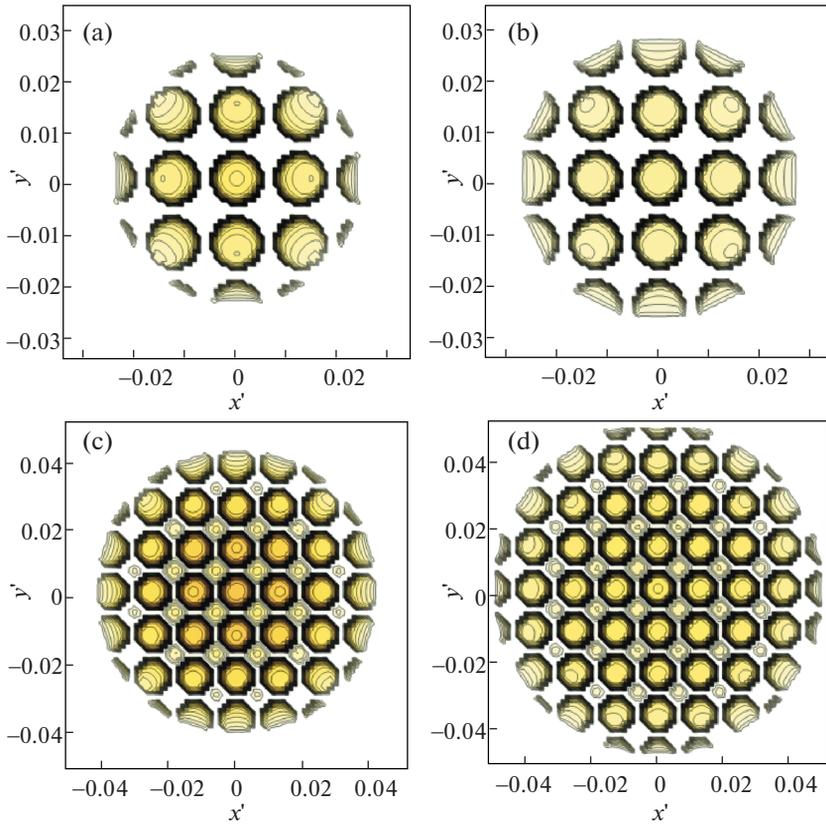


Рис. 2. Распределение контактного давления для относительно жестких (b, d) и относительно податливых текстурированных покрытий (a, c) при разных значениях силы: $Q' = 0.3571 \times 10^{-4}$ (a), $Q' = 0.3571 \times 10^{-5}$ (b), $Q' = 2.1426 \times 10^{-4}$ (c), $Q' = 2.1426 \times 10^{-5}$ (d); $E_1/E_2 = 10$, $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.4$ (b, d); $E_1/E_2 = 0.1$, $\nu_1 = 0.4$, $\nu_2 = 0.3$ (a, c); $r'_a = 5 \times 10^{-3}$; $H'_a = H' = 10^{-4}$, $E_a = E_1$; $T = 1/80$.

На рис. 2 а, b наблюдается неполный контакт основания и индентора: в контакт с индентором вступают только поверхности элементов рельефа. В случаях, изображенных на рис. 2 с, d имеем полный контакт вблизи центра индентора и неполный на краях. Пики давлений концентрируются на краях элементов неровностей. Во всех рассмотренных случаях максимальное контактное давление находится на краю элемента неровности, центр которой совпадает с осью симметрии индентора.

Деформированная поверхность слоя и элементов текстуры изображена на рис. 3 для тех же параметров задачи, что рассматривались на рис. 2. В случае неполного контакта поверхность между инденторами имеет кривизну, при этом максимальные вертикальные смещения находятся вблизи границ элементов неровности, что обусловлено концентрацией контактного давления на краях неровностей.

Была исследована зависимость внедрения индентора от нагрузки для двух различных случаев относительной жесткости слоя и двух периодов, характеризующих взаимное расположение неровностей (рис. 4). При этом безразмерная нагрузка $Q' = Q/E_1 R^2$

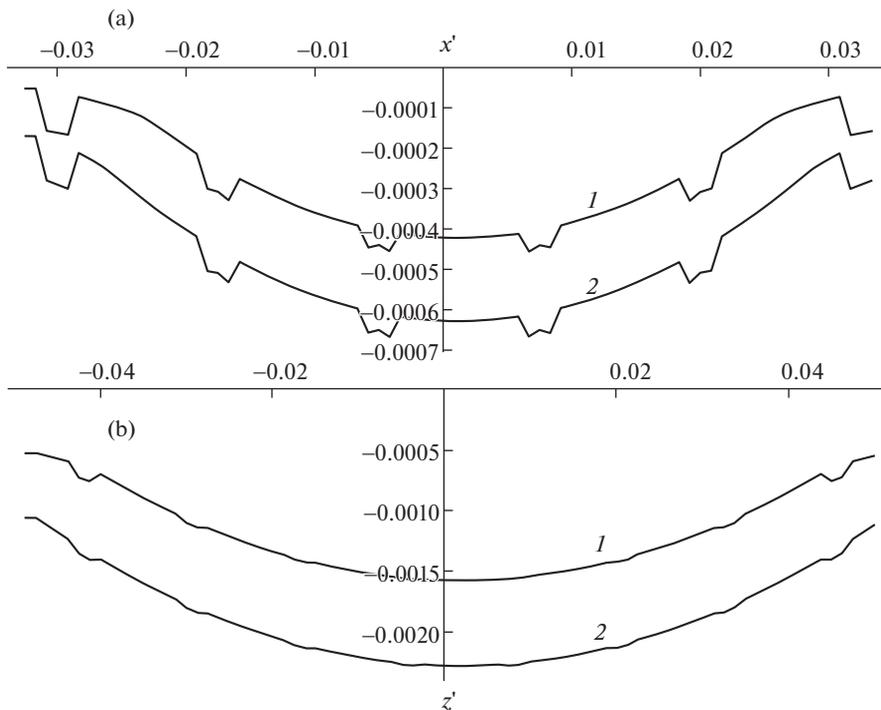


Рис. 3. Форма поверхности слоя под элементами текстуры для относительно податливого (а) и относительно жесткого (б) слоя: $E_1/E_2 = 0.1$, $\nu_1 = 0.4$, $\nu_2 = 0.3$ (а); $E_1/E_2 = 10$, $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.4$ (б); $Q' = 0.3571 \times 10^{-5}$ (а, кривая 1), $Q' = 0.3571 \times 10^{-4}$ (а, кривая 2), $Q' = 2.1426 \times 10^{-5}$ (б, кривая 1), $Q' = 2.1426 \times 10^{-4}$ (б, кривая 2); $r'_a = 5 \times 10^{-3}$, $H'_a = H' = 10^{-4}$, $E_a = E_1$; $T = 1/80$.

в обоих случаях получена относительно модуля упругости E_1 жесткого покрытия, чтобы иметь возможность сравнить результаты для одинаковой абсолютной. Во всех случаях наблюдается нелинейная зависимость между внедрением и нагрузкой. Наибольший рост внедрения при увеличении нагрузки наблюдается вблизи нуля. При увеличении нагрузки, значение $\partial D/\partial Q$ постепенно снижается до некоторого постоянного значения. Ожидаемо, меньшему значению периода взаимного расположения неровностей соответствует меньшее внедрение индентора. Характер зависимости внедрения от нагрузки схож для случаев относительно жестких и относительно мягких текстурированных покрытий.

5. Результаты расчетов (однородный слой). Разработанный метод решения для случая $w^*(x, y) \neq 0$ во всех внутренних точках области Ω , был использован для исследования контакта двухслойного упругого полупространства, на поверхности которого находится слой постоянной толщины H_w , описываемый моделью Винклера с податливостью $\eta_w = H_w/E_w$, и гладкого индентора произвольной формы. С практической точки зрения наиболее востребованной является задача о вдавливании пирамиды Берковица, поскольку она может быть использована при интерпретации результатов индентирования поверхностей покрытий с тонкими пленками. Этот тип головок представляет собой трехгранную пирамиду с закругленным концом (по ГОСТ Р. 8.904-2015 радиус

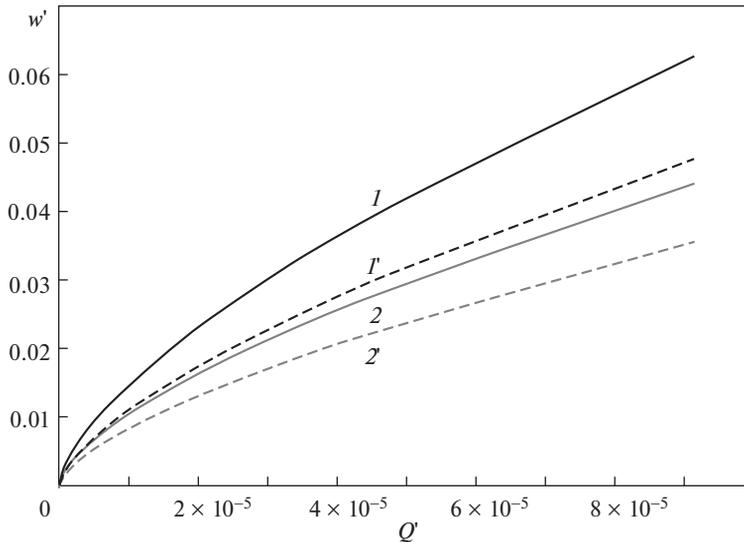


Рис. 4. Кривые нагрузка-внедрение для относительно жесткого (кривые 1 и 1') и относительно податливого (кривые 2 и 2') слоев при периодах $T = 1/60$ (кривые 1 и 2) и $T = 1/80$ (кривые 1' и 2'); $E_1/E_2=10$, $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.4$ (кривые 1 и 1'); $E_1/E_2 = 0.1$, $\nu_1 = 0.4$, $\nu_2 = 0.3$ (кривые 2 и 2'); $r'_a = 5 \times 10^{-3}$; $H'_a = H = 10^{-4}$; $E_a = E_1$.

закругления R_b может быть от 20 до 50 нм, в ходе эксплуатации увеличивается). При исследовании тонких пленок все чаще индентирование происходит в упругом режиме, что не позволяет определять твердость исследуемых материалов, но может дать информацию об их упругих свойствах.

Для демонстрации возможностей метода было исследовано вдавливание индентора, геометрия которого определяется ГОСТ Р. 8.904-2015, в относительно жесткое покрытие с модулем Юнга 70 ГПа, нанесенное на подложку с модулем 7 ГПа; на поверхности покрытия находится податливая пленка (0.14 ГПа). В работе [13] показано, что в случае относительно жестких покрытий деформация подложки оказывает существенное влияние на кривую нагрузка–внедрение даже при малых значениях нагрузки.

Полученные результаты представлены на рис. 5 и рис. 6 в размерных величинах (координаты в метрах, нагрузка и давление в Ньютонах и Паскалях соответственно). По рис. 5 можно сравнить распределения контактного давления под индентором при наличии либо отсутствии поверхностной пленки. Помимо ожидаемого результата – увеличения области контакта и уменьшения максимального давления, следует отметить, что форма распределения при наличии пленки ближе к пирамидальной.

Важным аспектом является влияние пленки на внедрение и максимальное значение контактного давления при индентировании. На рис. 6 представлены соответствующие результаты для выбранного диапазона нагрузки, нижняя граница которого обусловлена чувствительностью численного метода решения. Кривые, иллюстрирующие результаты, полученные для случаев покрытия с поверхностной пленкой и без нее, имеют существенно разные градиенты в области, близкой к нулю (на ранних стадиях нагружения), затем влияние пленки уменьшается. Вопрос о правомерности использования модели Винклера для интерпретации результатов индентирования податливых

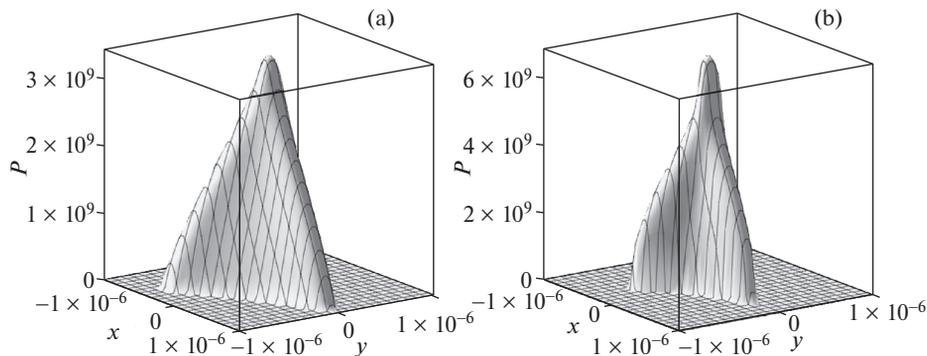


Рис. 5. Распределение контактного давления под пирамидой при наличии пленки (а) и без пленки (б). $E_1 = 70$ ГПа, $E_2 = 7$ ГПа, $E_w = 0.14$ ГПа, $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.4$, $H_w = 5$ нм, $H = 10$ нм, $R_b = 400$ нм, $Q = 2.3$ мН.

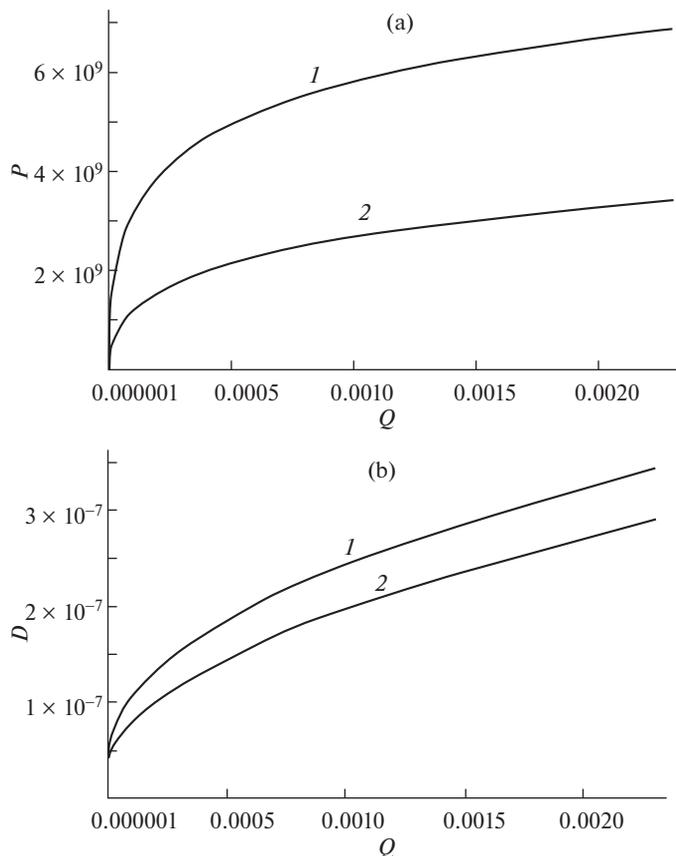


Рис. 6. Зависимость максимального контактного давления (а) и внедрения (б) от нагрузки при наличии пленки на поверхности покрытия (кривая 2) и без нее (кривая 1). $E_1 = 70$ ГПа, $E_2 = 7$ ГПа, $E_w = 0.14$ ГПа, $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.4$, $H_w = 5$ нм, $H = 10$ нм, $R_b = 400$ нм.

тонких пленок на жестком основании рассматривался в работе [14], где также представлена экспериментальная верификация модели.

6. Заключение. В рамках данной работы был предложен эффективный способ моделирования контакта жесткого индентора с упругим телом, покрытым текстурированным слоем. Расчеты выполнены для индентора параболической формы, а также относительно мягкого и относительно жесткого покрытия с цилиндрическими неровностями на его поверхности. Результаты показывают, что податливость покрытия существенно зависит от периода расположения неровностей. Выбранная часто используемая форма неровностей (цилиндрическая) вызывает концентрацию контактного давления на краях неровностей, что потенциально может вызвать неравномерный износ такого покрытия.

Предельным случаем предложенной постановки задачи является контакт гладкого индентора с двухслойным упругим полупространством, на поверхности которого находится тонкая пленка (одномерная модель упругого материала). Получены результаты, которые показывают, что при индентировании пирамидой Берковича с малыми нагрузками влияние пленки на кривую нагрузка–внедрение является существенным. Из этого следует, что предложенная модель может быть использована для интерпретации результатов индентирования, диагностирования наличия поверхностных пленок различной природы и оценки их механических свойств.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 19-01-00231 (контакт текстурированных поверхностей) и грант 20-58-00007 (индентирование тонких пленок).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов Е.А., Гороховский Г.А. О фактическом контактном давлении // Проблемы трения и изнашивания. 1977. № 12. С. 10–15.
2. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
3. Barber J.R. Contact mechanics. Springer, 2017. 581 p.
4. Goryacheva I.G., Malanchuk N.I., Martynyak R.M. Contact interaction of bodies with a periodic relief during partial slip // J. Appl. Math. Mech. 2012. V. 76. № 5. P. 695–709.
5. Tsukanov I.Y. Effects of shape and scale in mechanics of elastic interaction of regular wavy surfaces // Proc. Inst. Mech. Eng., Part J. 2017. V. 231. № 3. P. 332–340.
6. Soldatenkov I.A. Contact deformation of an elastic composition of a half-plane and a strip of variable width // J. Appl. Math. Mech. 2001. V. 65. № 1. P. 145–153.
7. Горячева И.Г., Торская Е.В., Степанов Ф.И., Мышкин Н.К., Купреев А.В. Моделирование деформации текстурированного слоя в условиях контактного взаимодействия // Трение и износ. 2017. Т. 38. № 6. С. 526–531.
8. Torskaya E. Study of roughness effect on elastic indentation of coated bodies // Proc. Inst. Mech. Eng., Part C. 2016. V. 230. № 9. P. 1392–1397.
9. Никушин В.С., Шаниро Г.С. Пространственные задачи теории упругости для многослойных сред. М.: Вычислительный центр АН СССР, 1970. 260 с.
10. Liskiewicz T., Kubiak K., Comyn T. Nano-indentation mapping of fretting-induced surface layers // Tribol. Int. 2017. V. 108. P. 186–193.
11. Губенко М.М., Мезрин А.М., Щербакова О.О., Торская Е.В. Исследование изменения механических свойств поверхностных слоев алюминиевых сплавов в условиях трения скольжения // Трение и износ. 2017. Т. 38. № 5. С. 483–487.
12. Torskaya E.V., Muravyeva T.I., Sánchez-López J.C. Study of TiC/a-C(:H) Coatings before and after friction by nanoindentation // Proceedings of the 4th International Conference on Industrial Engineering. ICIE 2018. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Cham: Springer, 2019. P. 1011–1018.
13. Степанов Ф.И., Торская Е.В. Моделирование индентирования относительно жестких покрытий индентором произвольной формы // Трение и износ. 2019. Т. 40. № 4. С. 417–423.
14. Torskaya E., Siroezkin S., Chizhik S. The Method of Elastic Coatings Diagnostics from Indentation Data. Advanced Tribology. Berlin: Springer, 2009. P. 705–706.

УДК 539.3

ГАШЕНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ БЫСТРО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

© 2022 г. Н. В. Баничук^а, С. Ю. Иванова^{а,*}, В. С. Афанасьев^а

^а Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: syuivanova@yandex.ru

Поступила в редакцию 02.02.2021 г.

После доработки 03.03.2021 г.

Принята к публикации 04.03.2021 г.

Рассматривается вращение тонкого упругого диска вокруг его оси. Предполагается, что диск жестко закреплен в центре и совершает малые поперечные колебания, описываемые в рамках мембранной модели. Для подавления колебаний гибкий диск подвергается внешним механическим воздействиям. Процесс демпфирования колебаний оценивается квадратичным энергетическим критерием и оптимизируется с применением современной теории оптимального управления. Выведены условия оптимальности, применяемые для подавления упругих колебаний на конечном интервале времени, и приведен разработанный итерационный алгоритм демпфирования колебаний, проиллюстрированный на примере аналитического определения стабилизирующего воздействия.

Ключевые слова: вращающийся гибкий диск, гашение колебаний, оптимизация демпфирующих воздействий

DOI: 10.31857/S0572329921060039

1. Введение. Модель поперечных колебаний гибкого вращающегося диска, предложенная в [1, 2], учитывала действие натяжений в радиальном и окружном направлениях. Отмечалось, что, несмотря на отсутствие учета в модели изгибных сил, данная модель описания колебаний приводит к удовлетворительным результатам при больших скоростях вращения диска. В работах [3–5] в предположении об отсутствии изгибных напряжений исследовались моды свободных поперечных колебаний вращающихся мембранных дисков. В работе [6] при исследовании поперечных колебаний вращающегося диска дополнительно учитывались изгибные силы и были получены результаты, обосновывающие вычисления частот в [1–5]. Влияние приложения внешней поперечной силы на устойчивость вращающегося упругого диска исследовалось в [7] в предположении, что внешнее воздействие распределено по малой области диска. Стационарные прогибы гибкого вращающегося диска, находящегося под воздействием фиксированной в пространстве поперечной нагрузки, изучались в [8] как в рамках мембранной модели, так и с учетом изгибной жесткости. Проблемы устойчивости и дестабилизации колебаний упругих и вязкоупругих систем в движущихся средах исследовались в [9], а в [10] приведено решение, полученное Хосака и Крэндаллом, задачи стабилизации поперечных колебаний вращающегося диска с учетом аэродинамического воздействия.

2. Основные соотношения задачи оптимизации. Рассматривается вращающийся с угловой скоростью ω упругий диск, совершающий поперечные колебания малой амплитуды и находящийся под внешним механическим воздействием для демпфирования

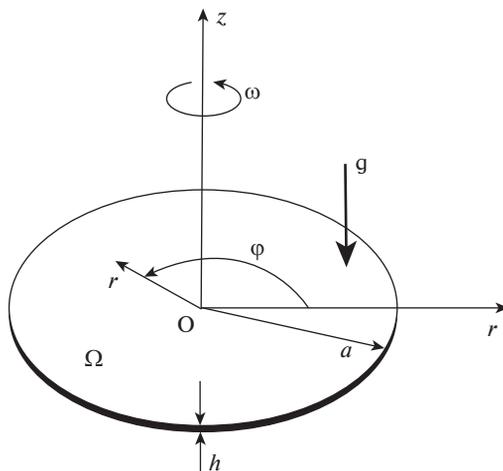


Рис. 1. Вращающийся диск.

колебаний. Используя лабораторную (Эйлерову) систему координат $rO\varphi$ (см. рис. 1) и мембранную модель вращающегося диска, представим уравнение поперечных колебаний в виде [1–5]

$$\rho h(w_{tt} + 2\omega w_{t\varphi} + \omega^2 w_{\varphi\varphi}) - \frac{\rho h \omega^2}{r} (r P w_r)_r - \frac{\rho h \omega^2 Q}{r^2} w_{\varphi\varphi} = g \quad (2.1)$$

$$P = \frac{1}{8}(3 + \nu)(a^2 - r^2), \quad Q = \frac{1}{8}((3 + \nu)a^2 - (1 + 3\nu)r^2) \quad (2.2)$$

где $w = w(r, \varphi, t)$ – поперечное перемещение, ρ – плотность, a – радиус диска, h – толщина мембраны, $\omega = \varphi_t$ – угловая скорость, ν – коэффициент Пуассона, $g = g(r, \varphi, t)$ – прикладываемое поперечное демпфирующее воздействие, нижние индексы t, r и φ означают дифференцирование по соответствующей переменной.

В дальнейшем используются безразмерные переменные $r' = r/a, g' = g/\rho h$ (штрихи далее опускаются), а также начальные и граничные условия, выражающие жесткое закрепление в центре круглого диска и конечность перемещений свободного края. Учитывая, что все рассуждения проводятся в области Ω :

$$(r, \varphi) \in \Omega = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \quad (2.3)$$

на отрезке времени $0 \leq t \leq t_f$, запишем данные условия в виде

$$(w)_{t=0} = g_1(r, \varphi), \quad (w_t)_{t=0} = g_2(r, \varphi), \quad (r, \varphi) \in \Omega \quad (2.4)$$

$$(w)_{r=0} = 0 \quad (w)_{r=1} < \infty, \quad t \in [0, t_f] \quad (2.5)$$

в которой t_f – безразмерное время окончания рассматриваемого процесса демпфирования колебаний, $g_1(r, \varphi)$ и $g_2(r, \varphi)$ – заданные начальные возмущения перемещений и их скоростей. Функция прогибов удовлетворяет также условиям $(w_r)_{r=0} = 0$ и $w(r, \varphi, t) = w(r, \varphi + 2\pi, t)$. Функция $g = g(r, \varphi, t)$ рассматривается в дальнейшем в качестве управляющего воздействия, реализующего демпфирование колебаний диска. Качество процесса подавления колебаний оценивается значением функционала

$$J_g = \int_{\Omega} (\alpha_1 w^2 + \alpha_2 w_t^2)_{t=t_f} d\Omega \quad (2.6)$$

зависящего от перемещений $w(r, \varphi, t_f)$ и скоростей $w_t(r, \varphi, t_f)$ в конечный момент времени $t = t_f$. Параметры $\alpha_1 \geq 0$ и $\alpha_2 \geq 0$ считаются заданными.

На управляющее демпфирующее воздействие $g(r, \varphi, t)$ наложено энергетическое ограничение в виде следующего неравенства:

$$J_{\mu} = \int_0^{t_f} \int_{\Omega} g^2(r, \varphi, t) d\Omega dt \leq M_0 \quad (2.7)$$

Здесь $d\Omega = r dr d\varphi$, а $M_0 > 0$ – заданная постоянная.

Процесс гашения колебаний в оптимизационной постановке [11–15] заключается в отыскании управляющего экстремального воздействия $g(r, \varphi, t)$ ($(r, \varphi) \in \Omega$), удовлетворяющего энергетическому неравенству (2.7) и минимизирующего квадратичный функционал качества (2.6).

Для реализации процесса минимизации рассматриваемого функционала качества (2.6) выведем условия оптимальности. С этой целью воспользуемся уравнением колебаний вращающегося диска в безразмерной форме

$$L(w) \equiv w_{tt} + 2\omega w_{t\varphi} + \omega^2 \left[w_{\varphi\varphi} \left(1 - \frac{Q}{r^2} \right) - \frac{1}{r} (rPw_r)_r \right] = g \quad (2.8)$$

и приведем соответствующие соотношения в вариациях для этого уравнения и начально-краевых условий (2.4), (2.5)

$$\begin{aligned} \delta L(w) = L(\delta w) = & (\delta w)_{tt} + 2\omega (\delta w)_{t\varphi} + \\ & + \omega^2 (\delta w)_{\varphi\varphi} \left(1 - \frac{Q}{r^2} \right) - \frac{\omega^2}{r} (rP(\delta w)_r)_r = \delta g \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$(\delta w)_{t=0} = 0, \quad (\delta w_t)_{t=0} = 0, \quad (r, \varphi) \in \Omega \quad (2.10)$$

$$(\delta w)_{r=0} = 0, \quad (\delta w)_{r=1} \leq 0, \quad t \in [0, t_f] \quad (2.11)$$

причем $(\delta w_r)_{r=0} = 0$ и $\delta w(r, \varphi, t) = \delta w(r, \varphi + 2\pi, t)$.

3. Сопряженная система и необходимые условия оптимальности. Используем в дальнейшем также выражения для вариаций минимизируемого функционала δJ_g и ограничения (2.7), записанного предварительно в виде равенства при помощи введения вспомогательной величины θ [14, 15]:

$$J_{\mu} - M_0 + \theta^2 = 0 \quad (3.1)$$

Будем иметь

$$\delta J_g = 2 \int_{\Omega} (\alpha_1 w \delta w + \alpha_2 w_t \delta w_t)_{t=t_f} d\Omega \quad (3.2)$$

$$\delta(J_{\mu} - M_0 + \theta^2) = 2 \int_0^{t_f} \int_{\Omega} g \delta g d\Omega dt + 2\theta \delta \theta = 0 \quad (3.3)$$

Введем в рассмотрение сопряженную переменную $v(r, \varphi, t)$, удовлетворяющую по определению следующим граничным условиям:

$$(v)_{r=0} = 0, \quad (v)_{r=1} < \infty, \quad t \in [0, t_f] \quad (3.4)$$

совпадающим с граничными условиями, наложенными на переменную w при $r = 0$ и $r = 1$ в (2.5). Умножим затем уравнение в вариациях (2.9) на переменную v с последую-

щим интегрированием произведения по области Ω . Используя начально-краевые условия (2.10) и (2.11) и выполняя интегрирование “по частям”, представим вариацию полученного интеграла в виде

$$\begin{aligned} \delta J_a &= \int_0^{t_f} \int_{\Omega} v [L(\delta w) - \delta g] d\Omega dt = \\ &= \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \{ [L(v)] \delta w - v \delta g \} d\Omega dt + \int_{\Omega} (v \delta w_t - v_t \delta w)_{t=t_f} d\Omega \end{aligned} \quad (3.5)$$

Необходимое условие оптимальности процесса демпфирования колебаний вращающегося диска сводится к равенству нулю вариации расширенного функционала Лагранжа, то есть

$$\delta J = \delta J_g + \delta J_a + \mu \left(2 \int_0^{t_f} \int_{\Omega} g \delta g d\Omega dt + 2\theta \delta \theta \right) = 0 \quad (3.6)$$

где μ – множитель Лагранжа, соответствующий учету энергетического неравенства (2.7). Подстановка выражений (3.3), (3.5) в уравнение (3.6) и учет произвольности вариаций δg , δw при $(r, \varphi) \in \Omega$ и вариации $\delta \theta$ приводит к необходимому условию оптимальности

$$g(r, \varphi, t) = \frac{1}{2\mu} v(r, \varphi, t), \quad (r, \varphi) \in \Omega, \quad t \in [0, t_f] \quad (3.7)$$

если ограничение (2.7) выполняется со знаком строгого равенства и, следовательно, $\theta = 0$. При этом $(d\Omega = r dr d\varphi)$

$$\mu^2 = \frac{1}{4M_0} \int_0^{t_f} \int_{\Omega} v^2(r, \varphi, t) d\Omega dt \quad (3.8)$$

В случае строгого неравенства в (2.7) величина вспомогательной переменной θ в (3.1) отлична от нуля, а из необходимого условия экстремума ($\mu \theta = 0$), которое получается из (3.6), следует, что $\mu = 0$.

Из условия обращения в ноль полной (расширенной) вариации в (3.6) также получим однородное дифференциальное уравнение в частных производных для сопряженной переменной

$$L(v) \equiv v_{tt} + 2\omega v_{t\varphi} + \omega^2 \left(1 - \frac{Q}{r^2} \right) v_{\varphi\varphi} - \frac{\omega^2}{r} (r P v_r)_r = 0 \quad (3.9)$$

удовлетворяющей условиям в конечный момент времени $t = t_f$ рассматриваемого временного интервала

$$(v)_{t=t_f} = -2\alpha_2 w_t, \quad (v_t)_{t=t_f} = 2\alpha_1 w \quad (3.10)$$

Отметим, что условие экстремума расширенного функционала

$$\mu \theta = 0 \quad (3.11)$$

означает, что для неактивного ограничения (2.7), выполняющегося со знаком строгого неравенства, из (2.7) и (3.1) следует, что $\theta \neq 0$. Соответствующий множитель Лагранжа в этом случае должен полагаться равным нулю, как это следует из необходимого условия оптимальности (3.11). Тем самым, ограничение (2.7) в этом случае не учитывается при отыскании оптимального решения. Если же $\mu \neq 0$, то $\theta = 0$, и соответствующее ограничение является “активным”.

Таким образом, рассматриваемая задача оптимального гашения колебаний сводится к решению связанных начально-краевой задачи для $w(r, \varphi, t)$ и краевой задачи для $v(r, \varphi, t)$ с условиями в конечный момент времени. При этом оптимальное демпфирующее воздействие $g(r, \varphi, t)$ находится с применением условий экстремума.

4. Алгоритм определения управляющих воздействий. Для отыскания способа оптимального гашения колебаний вращающегося упругого диска предлагается следующий алгоритм определения управляющих воздействий. Данный способ основывается на применении выведенных условий экстремума и решении связанных терминальными условиями уравнений, определяющих распределения прогибов $w(r, \varphi, t)$ и сопряженной переменной $v(r, \varphi, t)$. Итерационный алгоритм решения задачи оптимизации заключается в последовательном выполнении описанных ниже итераций и шагов.

На первом шаге первой итерации решается “прямая” задача, состоящая в интегрировании уравнений динамики для функции прогибов с граничными условиями и начальными условиями, описывающими начальные распределения перемещений w и скоростей $\partial w / \partial t$ при $t = 0$. На начальном этапе итерационного процесса при выполнении первого шага первой итерации в качестве демпфирующего воздействия задается некоторое (неоптимальное) управление $g(r, \varphi, t) = g^{(1)}(r, \varphi, t)$, удовлетворяющее неравенству (2.7). При выполнении последующих итераций алгоритма в качестве управляющего воздействия на первом шаге принимается воздействие, получаемое из условий оптимальности.

На втором шаге итерационного алгоритма с учетом найденного на первом шаге распределения $w(r, \varphi, t_f)$ и соответствующих величин производных, входящих в терминальные условия, решается задача возвратного интегрирования сопряженного уравнения с соответствующими граничными условиями и условиями в конечный момент времени $t = t_f$, рассматриваемыми в качестве начальных условий при отыскании $v(r, \varphi, t)$.

На третьем шаге с применением найденного на втором шаге распределения сопряженной переменной $v(r, \varphi, t)$ и использованием условий экстремума (3.7), (3.8) находится текущее приближение для оптимального демпфирующего воздействия $g(r, \varphi, t)$, прикладываемого к диску при $(r, \varphi) \in \Omega, t \in [0, t_f]$. Полученное на третьем шаге итерационного процесса демпфирующее управление рассматривается далее в качестве “начального” при переходе к первому шагу следующей итерации алгоритма.

5. Реализация метода Галёркина. Приведем некоторые детали нахождения оптимального управления процессом гашения колебаний, основанного на методе Галёркина. Представим искомые распределения поперечных перемещений диска $w(r, \varphi, t)$ и сопряженной переменной $v(r, \varphi, t)$ в виде рядов

$$w(r, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{n_0} q_n(t) \Psi_n(r, \varphi), \quad v(r, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{n_0} s_n(t) \Psi_n(r, \varphi) \quad (5.1)$$

где $q_n(t), s_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots, n_0$) – неизвестные функции времени, подлежащие определению с использованием уравнений, определяющих w и v , а $\Psi_n(r, \varphi)$ – функции формы, определяемые выражениями

$$\Psi_n(r, \varphi) = R_n(r) \Phi_n(\varphi), \quad (r, \varphi) \in \Omega \quad (5.2)$$

и удовлетворяющие граничным условиям (2.5), (3.4) для w и v .

Для координатных функций метода Галёркина $q_n(t)$ и $s_n(t)$ получим обыкновенные дифференциальные уравнения, подставив выражения (5.1) в соответствующие динамические уравнения (2.8), (3.9), определяющие переменные $w(r, \varphi, t)$ и $v(r, \varphi, t)$, и

умножив получающиеся соотношения на $\Psi_j(r, \varphi)$ ($j = 1, 2, \dots$) с последующим интегрированием по r и φ ($0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Выполнив стандартные операции, характерные для метода Галёркина [16–21], будем иметь две системы обыкновенных дифференциальных уравнений, служащих для определения величин $q_n(t)$ и $s_n(t)$

$$\sum_{n=1}^{n_0} \left\{ A_{jn} \frac{d^2 q_n}{dt^2} + 2\omega B_{jn} \frac{dq_n}{dt} + \omega^2 (C_{jn} - D_{nj}) q_n \right\} - G_j(t) = 0 \quad (5.3)$$

$$\sum_{n=1}^{n_0} \left\{ A_{jn} \frac{d^2 s_n}{dt^2} + 2\omega B_{jn} \frac{ds_n}{dt} + \omega^2 (C_{jn} - D_{nj}) s_n \right\} = 0 \quad (5.4)$$

Коэффициенты A_{jn} , B_{jn} , C_{jn} , D_{jn} и функции $G_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots$) определяются выражениями

$$\begin{aligned} A_{jn} &= \int_{\Omega} \Psi_n \Psi_j d\Omega, & B_{jn} &= \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_n}{\partial \varphi} \Psi_j d\Omega \\ C_{jn} &= \int_{\Omega} \left(1 - \frac{Q}{r^2} \right) \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \varphi^2} \Psi_j d\Omega, & D_{jn} &= \int_{\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r P \frac{\partial \Psi_n}{\partial r} \right) \Psi_j d\Omega \\ G_j(t) &= \int_{-1}^1 g(r, \varphi, t) \Psi_j dx, & j &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.5)$$

Начальные условия для q_j при $t = 0$ и условия для s_j в конечный момент времени $t = t_f$ записываются в следующем виде:

$$\sum_{n=1}^{n_0} (q_n)_{t=0} A_{jn} = \int_{\Omega} \Psi_j g_1 d\Omega, \quad \sum_{n=1}^{n_0} \left(\frac{dq_n}{dt} \right)_{t=0} A_{jn} = \int_{\Omega} \Psi_j g_2 d\Omega \quad (5.6)$$

$$\sum_{n=1}^{n_0} (s_n)_{t=t_f} A_{jn} = -2\alpha_2 \sum_{n=1}^{n_0} \left(\frac{dq_n}{dt} \right)_{t=t_f} A_{jn}, \quad \sum_{n=1}^{n_0} \left(\frac{ds_n}{dt} \right)_{t=t_f} A_{jn} = 2\alpha_1 \sum_{n=1}^{n_0} (q_n)_{t=t_f} A_{jn} \quad (5.7)$$

6. Пример построения решения. Рассмотрим пример оптимизации процесса демпфирования колебаний. Предположим, что

$$\begin{aligned} g_1(r, \varphi) &= \Psi_1(r, \varphi) = \left(1 - \cos\left(\frac{\pi r}{2}\right) \right) \sin \varphi, & (r, \varphi) &\in \Omega \\ g_2(r, \varphi) &= 0, & n_0 &= 1 \end{aligned} \quad (6.1)$$

и ограничимся выполнением двух итераций. При этом рассмотрим вариант итерационного процесса, когда на первом шаге первой итерации принимаются следующие значения для функций g и G_1 :

$$\begin{aligned} g &= g^{(1)}(r, \varphi, t) = 1, & (r, \varphi) &\in \Omega, & t &\in [0, t_f] \\ G_1 &= G_1^{(1)}(t) = \int_{\Omega} \Psi_1 g^{(1)} d\Omega = \lambda_0, & \lambda_0 &= 1 + \frac{4}{\pi} \left(\frac{2}{\pi} - 1 \right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

и осуществляется интегрирование уравнения для $q_1^{(1)}$

$$\frac{d^2 q_1^{(1)}}{dt^2} + \gamma_1 q_1^{(1)} + \gamma_0 = 0, \quad \gamma_0 = -G_1^{(1)} A_{11}^{-1}, \quad \gamma_1 = \omega^2 A_{11}^{-1} (C_{11} - D_{11}) \quad (6.3)$$

с начальными условиями

$$(q_1^{(1)})_{t=0} = \int_{\Omega} \Psi_1 g_1 d\Omega = \lambda_1, \quad \lambda_1 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{3}{4} + \frac{7}{\pi^2} - \frac{4}{\pi} \right) \quad (6.4)$$

$$\left(\frac{dq_1^{(1)}}{dt} \right)_{t=0} = \int_{\Omega} \Psi_1 g_2 d\Omega = 0 \quad (6.5)$$

Будем иметь

$$q_1^{(1)}(t) = \left(\lambda_1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \right) \cos(\sqrt{\gamma_1} t) + \frac{\gamma_0}{\gamma_1}, \quad t \in [0, t_f] \quad (6.6)$$

Используя далее это решение на втором шаге первой итерации алгоритма при возвратном интегрировании сопряженного уравнения

$$\frac{d^2 s_1^{(1)}}{dt^2} + \gamma_1 s_1^{(1)} = 0 \quad (6.7)$$

с условиями в конечный момент времени $t = t_f$

$$\begin{aligned} (s_1^{(1)})_{t=t_f} &= -2\alpha_2 \frac{dq_1^{(1)}}{dt} = 2\alpha_2 \sqrt{\gamma_1} \left(\lambda_1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \right) \sin(\sqrt{\gamma_1} t_f) = \kappa_1 \\ \left(\frac{ds_1^{(1)}}{dt} \right)_{t=t_f} &= 2\alpha_1 q_1^{(1)} = 2\alpha_1 \left[\left(\lambda_1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \right) \cos(\sqrt{\gamma_1} t_f) + \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \right] = \kappa_2 \end{aligned} \quad (6.8)$$

В результате находим выражение для $s_1^{(1)}$

$$s_1^{(1)}(t) = v_1 \sin(\sqrt{\gamma_1} t) + v_2 \cos(\sqrt{\gamma_1} t) \quad (6.9)$$

в котором

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}} (\kappa_1 \sqrt{\gamma_1} \sin(\sqrt{\gamma_1} t_f) + \kappa_2 \cos(\sqrt{\gamma_1} t_f)) \\ v_2 &= \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}} (\kappa_1 \sqrt{\gamma_1} \cos(\sqrt{\gamma_1} t_f) - \kappa_2 \sin(\sqrt{\gamma_1} t_f)) \end{aligned} \quad (6.10)$$

При этом получаемое на третьем шаге первой итерации алгоритма приближение для оптимального демпфирующего воздействия запишется в виде

$$g^{(2)} = \frac{1}{2\mu} v^{(1)}(r, \varphi, t) = \frac{1}{2\mu} s_1^{(1)}(t) \Psi_1(r, \varphi) \quad (6.11)$$

Применим найденное выражение для $g^{(2)}$ на первом шаге второй итерации при интегрировании уравнения колебаний

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q_1^{(2)}}{dt^2} + \gamma_1 q_1^{(2)} + \gamma_2 &= 0, \quad t \in [0, t_f] \\ \gamma_2(t) &= -A_{11}^{-1} G_1^{(2)} = -A_{11}^{-1} \int_{\Omega} \Psi_1 g^{(2)} d\Omega = -\frac{1}{2\mu} s_1^{(1)}(t) \end{aligned} \quad (6.12)$$

и, опуская детали вычислений, используем решение этого уравнения для минимизации на второй итерации функционала (2.6), то есть

$$\begin{aligned}
 (J_g^{(2)})_{t=t_f} &= \left[\alpha_1 (q_1^{(2)})^2 + \alpha_2 \left(\frac{dq_1^{(2)}}{dt} \right)^2 \right]_{t=t_f} \int_{\Omega} \Psi_1^2 d\Omega = \\
 &= \lambda_1 \left[\alpha_1 (q_1^{(2)})^2 + \alpha_2 \left(\frac{dq_1^{(2)}}{dt} \right)^2 \right]_{t=t_f}
 \end{aligned}
 \tag{6.13}$$

7. Некоторые замечания и выводы. В работе описана новая постановка задачи оптимального гашения поперечных колебаний вращающегося упругого диска. В предположении о наличии начальных возмущений плоской формы диска и поперечных скоростей предложен эффективный алгоритм подавления возмущений. Изложенный алгоритм гашения колебаний основан на получении и использовании необходимых условий оптимальности и выведенных динамических уравнений в частных производных. Эти уравнения описывают как процессы колебаний вращающейся круговой мембраны, так и некоторые процессы для введенных сопряженных переменных (сопряженные задачи). Показано, что решение прямых и сопряженных задач возможно с применением метода Галёркина. Приведен пример, иллюстрирующий основные этапы решения задачи оптимального гашения колебаний тонкого мембранного диска.

Приведем некоторые замечания. Описанный подход к решению задачи оптимального подавления упругих колебаний вращающегося диска, рассматриваемой в рамках мембранной модели, естественным образом обобщается на случай диска из термоупругого, а также из вязкоупругого материалов, находящегося под воздействием различных механических и тепловых нагрузок.

Для подавления возникающих возмущений в работе используются управляющие воздействия в форме $g = g(r, \varphi, t)$ с не разделяющимися в общем случае временем t и геометрическими переменными (r, φ) . Однако, при указанном подходе экстремальное управление может оказаться очень сложным, а его практическая реализация затруднительной. В этом случае для упрощения можно воспользоваться представлением управляющего воздействия в виде $g(r, \varphi, t) = f_1(t) f_2(r, \varphi)$ с разделенными функциями положения и времени, описывающими как конкретную геометрическую реализацию расположения воздействий (приводов, актюаторов), задаваемую посредством $f_2(r, \varphi)$, так и способ изменения воздействий во времени, обозначаемый через $f_1(t)$. Данный подход позволит рассмотреть и сравнить по эффективности способы приложения распределенных воздействий к различным частям диска и прикладываемых в отдельных точках сосредоточенных воздействий, а также сопоставить режимы воздействий во времени, такие, как релейные, гармонические, ударные и другие управления.

Работа выполнена по теме госзадания (номер госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при частичной финансовой поддержке Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 20-08-00082а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lamb H., Southwell R.V.* The vibrations of a spinning disc // Proc. Roy. Soc. London. 1921. V. 99. P. 272–280.
2. *Southwell R.V.* On the free transverse vibrations of a uniform circular disc clamped at its centre: and on the effects of rotation // Proc. Roy. Soc. London. 1922. V. 101. P. 133–153.
3. *Simmonds J.G.* The transverse vibrations of a flat spinning membrane // J. Aeronautic. Sci. 1962. V. 29. № 1. P. 16–18.
4. *Simmonds J.G.* Axisymmetric transverse vibrations of a spinning membrane clamped at its center // AIAA J. 1962. V. 1. № 5. P. 1224–1225.
5. *Eversman W.* Transverse vibrations of a clamped spinning membrane // AIAA J. 1968. V. 6. № 7. P. 1395–1397.

6. *Barasch S., Chen Y.* On the vibration of a rotating disc // *J. Appl. Mech.* 1972. V. 39. P. 1143–1144. <https://doi.org/10.1115/1.3422847>
7. *Iwan W.D., Moeller T.L.* The stability of a spinning elastic disc with a transverse load system // *J. Appl. Mech.* 1976. 43. P. 485–490. <https://doi.org/10.1115/1.3423896>
8. *Benson R.C., Bogy D.B.* Deflection of a very flexible spinning disc due to a stationary transverse load // *J. Appl. Mech.* 1978. V. 45. P. 636–641. <https://doi.org/10.1115/1.3424374>
9. *Crandall S.H.* Stability of vibratory modes in moving media // *Dynamic Problems of Rigid-Elastic Systems and Structures* / Ed. by *Banichuk N.V., Klimov D.M., Schiehlen W.* Berlin: Springer-Verlag, 1991. P. 65–72.
10. *Paidoussis M.P.* Fluid-structure interaction: slender structures and axial flow. V. 2. Elsevier Academic Press, 2004.
11. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.
12. *Моисеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. 424 с.
13. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 415 с.
14. *Баничук Н.В.* Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986. 303 с.
15. *Троицкий В.А., Петухов Л.В.* Оптимизация формы упругих тел. М.: Наука, 1982. 432 с.
16. *Banichuk N., Jeronen J., Neittaanmäki P., Saksä T., Tuovinen T.* *Mechanics of Moving Materials.* Cham: Springer, 2014. 253 p.
17. *Banichuk N., Barsuk A., Jeronen J., Tuovinen T., Neittaanmäki P.* *Stability of axially moving materials.* Cham, Switzerland: Springer, 2020. 642 p.
18. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю.* О подавлении поперечных колебаний упругой панели, продольно движущейся в потоке жидкости // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2020. Т. 492. С. 81–85.
19. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
20. *Келдыш М.В.* О методе Б.Г. Галёркина для решения краевых задач // Изв. АН СССР, сер. матем. 1942. Т. 6. № 6. С. 309–330.
21. *Свирский И.В.* Методы Бубнова–Галёркина и последовательных приближений. М.: Наука, 1968. 199 с.

УДК 539.214+539.374

О ДИНАМИКЕ РАЗГРУЗКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ ПРИ АЗИМУТАЛЬНОМ СДВИГЕ

© 2022 г. А. А. Буренин^{a,*}, Е. А. Герасименко^{b,**}, Л. В. Ковтаниук^{b,***},
Г. М. Севастьянов^{a,****}

^a Хабаровский федеральный исследовательский центр ДВО РАН, Хабаровск, Россия

^b Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия

*e-mail: burenin@iacp.dvo.ru

**e-mail: gerasimenko@iacp.dvo.ru

***e-mail: lk@iacp.dvo.ru

****e-mail: akela.86@mail.ru

Поступила в редакцию 10.03.2021 г.

После доработки 18.04.2021 г.

Принята к публикации 26.04.2021 г.

Рассмотрена задача о деформировании упруговязкопластического материала в зазоре между соосными цилиндрическими поверхностями ротационного вискозиметра. Нагружение материала происходит за счет медленного поворота внешней стенки вискозиметра, на этом этапе принимается условие прилипания материала к стенкам. При некотором критическом угле поворота происходит проскальзывание материала, которое вызывает распространение в слое ударной волны разгрузки. При распространении волны происходит ее взаимодействие с упруго-пластической границей и отражение от стенок вискозиметра. Динамика разгрузки исследуется с помощью лучевого метода построения прифронтных разложений.

Ключевые слова: упругость, вязкопластичность, вискозиметрия, большие деформации, лучевой метод, волна разгрузки

DOI: 10.31857/S0572329922010056

1. Введение. Среди задач, решаемых средствами механики деформируемых тел, выделяются такие, в которых изучаются некоторые пороговые события. Такие события часто оказываются катастрофическими и вызывают разрушения в искусственных и природных структурах. Примеры подобных событий – явление бифуркации равновесных состояний, потеря устойчивости в элементах конструкций (прошелкивание оболочек) [1, 2], в горных породах [3]; образование трещин хрупкого разрушения [4], сход лавин [5] и др. Здесь рассмотрим краевую задачу теории больших упруговязкопластических деформаций о мгновенном изменении в медленном процессе вискозиметрического деформирования, которое вызвано срывом и проскальзыванием материала. Упруговязкопластическое деформирование материала в вискозиметре является, таким образом, докритическим процессом, а динамическая разгрузка, следующая за моментом срыва, процессом закритическим. При этом на обоих этапах деформированное состояние представляет собой азимутальный сдвиг. Учитывая, что обратимые и необратимые деформации, приобретенные в процессе нагружения, взаимосвязаны и не могут быть заданы произвольно, задача о динамической разгрузке требует решения также и задачи активного нагружения [6–8]. Задачи азимутального сдвига для раз-

личных моделей сред при квазистатическом и ударно-волновом деформировании имеют долгую историю и разнообразные приложения, в том числе в биомеханике [9–17].

2. Модельные соотношения упруговязкопластического материала. Для описания движения среды примем модель больших упругопластических деформаций [18, 19], в которой обратимая и необратимая составляющие полных деформаций задаются дифференциальными уравнениями их изменения (переноса). Тогда в переменных Эйлера основные кинематические соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{e}}{Dt} &= \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{1}{2}((\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p - \mathbf{z})), & \frac{D\mathbf{p}}{Dt} &= \boldsymbol{\varepsilon}^p - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^p \cdot \mathbf{p} \\ \frac{D\mathbf{n}}{Dt} &= \frac{d\mathbf{n}}{dt} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}^T, & \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla^T\mathbf{v}), & \boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} - \nabla^T\mathbf{v}) \\ \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\mathbf{u}, & \mathbf{r} &= \boldsymbol{\omega} + \mathbf{z} \\ \mathbf{z} &= A^{-1}\{B^2(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + B(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}^2 - \mathbf{e}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}^2 - \mathbf{e}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}\} \\ A &= 8 - 8E_1 + 3E_2 - E_3 - \frac{E_1^3}{3} + \frac{E_3}{3}, & B &= 2 - E_1, & E_1 &= \text{tr}(\mathbf{e}) \\ E_2 &= \mathbf{e} \cdot \cdot \mathbf{e}, & E_3 &= \mathbf{e}^2 \cdot \cdot \mathbf{e} \\ \mathbf{d} &= \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u} - \nabla^T\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u}) = \mathbf{e} + \mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{e} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь \mathbf{u} , \mathbf{v} – векторы перемещений и скорости; \mathbf{d} – тензор полных деформаций Альманси; \mathbf{e} , \mathbf{p} – тензоры обратимых и необратимых деформаций соответственно; $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ – тензоры скоростей полных и необратимых деформаций; $\boldsymbol{\omega}$ – тензор вихря скорости; D/Dt – объективная производная по времени, записанная для произвольного тензора \mathbf{n} , которая переходит в производную Яуманна [19], когда нелинейная часть \mathbf{z} тензора вращений \mathbf{r} равна нулю. Согласно (2.1) при разгрузке ($\boldsymbol{\varepsilon}^p = 0$) компоненты тензора необратимых деформаций изменяются также как при жестком перемещении тела. Всюду далее принято условие несжимаемости с целью сосредоточиться на процессах, в которых достигаются значительные деформации сдвига при сравнительно малых изменениях объема. В этом случае аналог формулы Мурнагана, определяющей связь напряжений с обратимыми деформациями, принимает вид [19]:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= -p_1\mathbf{I} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{d}}(\mathbf{I} - 2\mathbf{d}), & \mathbf{p} &\equiv 0 \\ \boldsymbol{\sigma} &= -p_2\mathbf{I} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{I} - \mathbf{e}), & \mathbf{p} &\neq 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

В (2.2) $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений Эйлера–Коши; p_1 и p_2 – функции добавочного гидростатического давления, \mathbf{I} – единичный тензор второго ранга, $W = W(J_1, J_2)$ – упругий потенциал, который для несжимаемой среды может быть представлен в виде [19, 20]:

$$W = -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b - \mu)J_1J_2 - \chi J_1^3 + \dots \quad (2.3)$$

$$J_k = \begin{cases} L_k, & \mathbf{p} \equiv 0 \\ I_k, & \mathbf{p} \neq 0, \end{cases} \quad k = 1, 2$$

$$L_1 = \text{tr}(\mathbf{d}), \quad L_2 = \mathbf{d} \cdot \cdot \mathbf{d}, \quad I_1 = \text{tr}(\mathbf{e}) - \frac{1}{2}\mathbf{e} \cdot \cdot \mathbf{e}, \quad I_2 = \mathbf{e} \cdot \cdot \mathbf{e} - \mathbf{e}^2 \cdot \cdot \mathbf{e} + \frac{1}{4}\mathbf{e}^2 \cdot \cdot \mathbf{e}^2$$

Здесь μ , b и χ – упругие модули среды. Инварианты I_1 и I_2 тензора обратимых деформаций выбраны так, чтобы осуществлялся предельный переход в (2.3) от второй

зависимости к первой при стремлении к нулю пластических деформаций. Будем считать, что необратимые деформации начинают накапливаться в материале, когда напряжения достигают поверхности нагружения (текучести) $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, k) = 0$. В качестве поверхности нагружения принимаем условие пластичности Треска с учетом вязкого сопротивления пластическому течению [21]:

$$f(\sigma_i, \varepsilon_k^p, k) = \max |\sigma_i - \sigma_j| - 2k - 2\eta \max |\varepsilon_k^p| \quad (2.4)$$

В (2.4) σ_i и ε_k^p – главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций, k – предел текучести, η – коэффициент вязкости. Скорости необратимых деформаций связаны с напряжениями ассоциированным законом пластического течения

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \lambda > 0 \quad (2.5)$$

Для того чтобы получить замкнутую систему уравнений и в области упругого деформирования, и в области пластического течения достаточно дополнить предыдущие соотношения уравнением движения или уравнением равновесия

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

Пренебречь силами инерции в (2.6) так, чтобы иметь (2.7), удастся не всегда. Если это оказывается возможно, то говорят о квазистатическом приближении в решении задачи.

3. Постановка задачи. Квазистатическое деформирование. Пусть материал, свойства которого описаны выше, заполняет кольцевой зазор между жесткими цилиндрическими поверхностями с неограниченными образующими. Радиус внутреннего цилиндра обозначим r_0 , а внешнего R . Внешний цилиндр поворачивается вокруг своей оси с задаваемым напряжением сдвига, тогда как внутренний остается неподвижным. Полагаем, что при значениях напряжения сдвига не превышающих некоторого заданного порогового значения $|\sigma_{r\varphi}| \leq \sigma_0$ ($\sigma_0 = \text{const}$) на стенках цилиндров выполняются условия прилипания:

$$\mathbf{u}(r_0, t) = \mathbf{v}(r_0, t) = 0, \quad \sigma_{r\varphi}(R, t) = \alpha t, \quad \alpha = \text{const} \quad (3.1)$$

Будем считать, что $\sigma_0 > k$. Предварительные деформации отсутствуют. Траекториями точек среды будут концентрические окружности, а все искомые функции в цилиндрической системе координат (r, φ, z) зависят от двух переменных: расстояния от общей оси цилиндров r и времени t . Согласно (2.1) кинематика среды в этом случае определяется зависимостями

$$\begin{aligned} u_r &= r(1 - \cos \psi), & u_\varphi &= r \sin \psi \\ d_{rr} &= -\frac{r^2}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2, & d_{r\varphi} &= \frac{r}{2} \frac{\partial \psi}{\partial r}, & v_\varphi &= r\omega = r \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{r}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t}, & \omega_{r\varphi} &= -\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{r}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t}, & r_{r\varphi} &= -\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{2\varepsilon_{r\varphi}(1 - e_{\varphi\varphi})}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\psi = \psi(r, t)$ – центральный угол закручивания точек среды, $\omega = v_\varphi/r$ – угловая скорость.

До выхода напряжений на поверхность нагружения деформирование является обратимым. Согласно (2.2) компоненты тензора напряжений в этом случае определяются зависимостями:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} = \sigma_{zz} &= -(p + 2\mu) - \frac{(b + \mu)r^2}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)^2 = -s(r, t) \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -s(r, t) + \mu \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)^2, \quad \sigma_{r\varphi} = \mu r \frac{\partial \Psi}{\partial r}\end{aligned}\quad (3.3)$$

Обратимые деформации полагаем малыми, поэтому в (3.3) выписаны только старшие нелинейные слагаемые деформаций. В областях, где присутствуют необратимые деформации, напряжения определяются согласно второй зависимости в (2.2):

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -p - 2\mu + 2(b + \mu)e_{rr} + 2be_{\varphi\varphi} + \mu e_{r\varphi}^2 \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -p - 2\mu + 2(b + \mu)e_{\varphi\varphi} + 2be_{rr} + \mu e_{r\varphi}^2 \\ \sigma_{zz} &= -p - 2\mu + 2b(e_{rr} + e_{\varphi\varphi}) - 2\mu e_{r\varphi}^2, \quad \sigma_{r\varphi} = 2\mu e_{r\varphi}, \quad \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\sigma_{r\varphi}} = \frac{e_{rr} - e_{\varphi\varphi}}{e_{r\varphi}}\end{aligned}\quad (3.4)$$

Компоненты тензоров не выписанные в (3.2)–(3.4) равны нулю. Задавая изменение крутящего момента достаточно медленным, можно рассчитывать процесс деформирования в рамках квазистатического приближения. В этом случае интегрируя уравнения равновесия, следующие из (2.7) и (3.3),

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = 0 \quad (3.5)$$

с учетом граничных условий (3.1) запишем решение справедливое в промежуток времени, когда материал испытывает только упругую деформацию

$$\begin{aligned}\Psi &= \frac{c(t)}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \omega = \frac{\alpha R^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad c(t) = \alpha R^2 t \\ \sigma_{r\varphi} &= \frac{c(t)}{r^2}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{zz} = \frac{c(t)^2}{4\mu} \left(\frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r^4} \right) + \sigma_{rr}^0 \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{c(t)^2}{4\mu} \left(\frac{1}{r_0^4} + \frac{3}{r^4} \right) + \sigma_{rr}^0, \quad \sigma_{rr}^0 = \sigma_{rr}(r_0, t) \\ e_{r\varphi} &= d_{r\varphi} = \frac{c(t)}{2\mu r^2}, \quad e_{rr} = -\frac{3}{2} e_{r\varphi}^2, \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{e_{r\varphi}^2}{2}\end{aligned}\quad (3.6)$$

Решение (3.6) справедливо до момента времени $t = t_0$, когда на поверхности $r = r_0$ выполнится условие пластичности $\sigma_{r\varphi}(r_0, t_0) = k$, $t_0 = kr_0^2/\alpha R^2$. С этого момента в рассматриваемом слое $V: r_0 \leq r \leq R$ присутствуют две области: область вязкопластического течения $V^{(P)}: r_0 \leq r \leq m(t)$ и область обратимого (упругого) деформирования $V^{(E)}: m(t) \leq r \leq R$; $r = m(t)$ – уравнение движущейся упругопластической границы. Здесь и далее верхними индексами “E” и “P” в круглых скобках будем обозначать величины в областях $V^{(E)}$ и $V^{(P)}$ соответственно. Будем полагать, что напряженное состояние достаточно близко к состоянию чистого азимутального сдвига, пренебрегая эффектами второго порядка. Тогда, исходя из (2.4) условие пластического течения записывается в виде:

$$f(\sigma_{r\varphi}, \varepsilon_{r\varphi}^p) = \sigma_{r\varphi}^2 - (k + \eta |\varepsilon_{r\varphi}^p|)^2 = 0 \quad (3.7)$$

а в силу ассоциированного закона пластического течения (2.5) из условия (3.7) следует

$$\sigma_{r\varphi} = k + \eta \varepsilon_{r\varphi}^p, \quad \lambda = \frac{\varepsilon_{r\varphi}^p}{k + \eta \varepsilon_{r\varphi}^p} \quad (3.8)$$

Параметры напряженно-деформированного состояния находим интегрированием уравнений равновесия в областях $V^{(E)}$ и $V^{(P)}$, а неизвестные функции интегрирования определяются из (3.1) и условия непрерывности перемещения, скорости и напряжения на упругопластической границе $r = m(t)$. Таким образом, в области вязкопластического течения $V^{(P)}$ получим

$$\begin{aligned} \psi^{(P)} &= \frac{c(t)}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{2\eta} \left\{ \alpha R^2 t^2 \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) + 4kt \ln \frac{r_0}{r} + \frac{k^2(r^2 - r_0^2)}{\alpha R^2} \right\} \\ \omega^{(P)} &= \frac{\alpha R^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{\eta} \left\{ \alpha R^2 t \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) + 2k \ln \frac{r_0}{r} \right\} \\ p_{r\varphi} &= \frac{1}{\eta} \left(\frac{\alpha R^2 t^2}{2r^2} - kt + \frac{k^2 r^2}{2\alpha R^2} \right), \quad e_{r\varphi} = \frac{\alpha R^2 t}{2\mu r^2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

а в области упругого деформирования $V^{(E)}$

$$\begin{aligned} \psi^{(E)} &= \frac{c(t)}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{2\eta} \left\{ \alpha R^2 t^2 \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{m(t)^2} \right) + 4kt \ln \frac{r_0}{m(t)} + \frac{k^2(m(t)^2 - r_0^2)}{\alpha R^2} \right\} \\ \omega^{(E)} &= \frac{\alpha R^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{\eta} \left\{ \alpha R^2 t \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{m(t)^2} \right) + 2k \ln \frac{r_0}{m(t)} \right\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Напряжения в слое, как и ранее, определяются согласно (3.5). Положение упругопластической границы находим из условия равенства на ней нулю скорости пластических деформаций $\varepsilon_{r\varphi}^p$

$$m(t) = R \sqrt{\frac{\alpha t}{k}}, \quad \varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{\alpha R^2 t}{\eta r^2} \frac{k}{\eta} \quad (3.11)$$

Согласно (1.1), (3.7) и (3.8) диагональные компоненты обратимых e_{rr} , $e_{\varphi\varphi}$ и необратимых p_{rr} , $p_{\varphi\varphi}$ деформаций, являющиеся малыми более высокого порядка по сравнению с недиагональными, находятся численно из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial t} &= \varepsilon_{r\varphi}^p, \quad \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} = -\varepsilon_{r\varphi}^p \frac{p_{\varphi\varphi} - e_{r\varphi}^2}{e_{r\varphi}} + \frac{4\varepsilon_{r\varphi} p_{r\varphi}}{2 + e_{r\varphi}^2} \left(1 + p_{\varphi\varphi} - \frac{1}{2} e_{r\varphi}^2 - 2e_{r\varphi} p_{r\varphi} \right) \\ e_{rr} &= p_{\varphi\varphi} - \frac{3e_{r\varphi}^2}{2} - 2e_{r\varphi} p_{r\varphi}, \quad p_{rr} + p_{\varphi\varphi} = -2p_{r\varphi}^2, \quad e_{rr} + e_{\varphi\varphi} = -e_{r\varphi}^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Затем, исходя из (3.4) и (3.6) определяется функция добавочного гидростатического давления.

4. Динамика разгрузки. В момент времени $t = t_s = \sigma_0 r_0^2 / \alpha R^2$ напряжение трения по коя $|\sigma_{r\varphi}|$ на поверхности $r = r_0$ достигнет предельного значения σ_0 и материал в

окрестности этой поверхности начинает проскальзывать. С этого момента условие прилипания на $r = r_0$ необходимо заменить каким-либо условием контактного трения. В качестве такового примем условие постоянства касательного напряжения на r_0 , полагая при этом, что последнее в момент t_s меняется скачком, так что

$$|\sigma_{r\varphi}(r_0, t)| = \sigma_s \quad \text{при} \quad t \geq t_s; \quad \sigma_s = \text{const}, \quad \sigma_s < k \quad (4.1)$$

Мгновенное падение напряжения ниже предела текучести приводит к формированию волны разгрузки Σ_1 , положение которой в пространстве описывается уравнением

$$r = r_1(t) = r_0 + \int_{t_s}^t G(\xi) d\xi. \quad \text{Под ударной волной понимаем поверхность сильного раз-$$

рыва, т.е. такую поверхность на которой перемещения непрерывны, а скорости перемещений и напряжения испытывают конечный разрыв. Поверхность сильного разрыва [22] можно интерпретировать как предельный слой толщины Δh ($\Delta h \rightarrow 0$), в котором скорости и напряжения изменяются от значений v_i^+ , σ_{ij}^+ до значений v_i^- , σ_{ij}^- оставаясь внутри слоя монотонными и непрерывными. На поверхностях слабого разрыва, которые также будут встречаться в дальнейшем, напряжения и скорости перемещений остаются непрерывными, а вот их некоторые частные производные претерпевают разрыв.

В [22] показано, что в упруговязкопластической среде существуют два типа волн: продольные и поперечные, скорости которых совпадают со скоростями одноименных волн в упругой среде. Пластические деформации в упруговязкопластической среде остаются непрерывными и при переходе через поверхность разрыва [22]. В силу принятого ранее предположения о малости обратимых деформаций в нашем случае скорость волны разгрузки Σ_1 постоянна $G = \sqrt{\mu/\rho}$ (ρ – плотность среды). Поскольку рассматриваемый процесс разгрузки является существенно нестационарным, пренебечь правой частью в (2.6) нельзя. Динамическое поведение материала за ударной волной разгрузки подчиняется уравнениям движения:

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = \rho r \ddot{\psi}, \quad \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = -\rho r \dot{\psi}, \quad \dot{\psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad \ddot{\psi} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (4.2)$$

Таким образом, с момента $t = t_s$ область решения задачи разделяется на три, в которых напряжения и деформации определяются по-разному. В области разгрузки $V^{(1)}$: $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ – интегрированием уравнений движения (4.2), в области продолжающегося вязкопластического течения $V^{(P)}$: $r_1(t) \leq r \leq m(t)$ и области обратимого деформирования $V^{(E)}$: $m(t) \leq r \leq R$ будем считать справедливым решение квазистатической задачи.

Первое уравнение в (4.2) является основным и может быть решено независимо от второго, а затем по найденному решению из второго уравнения находится добавочное гидростатическое давление $p(r, t)$. Согласно уравнению переноса для тензора необратимых деформаций (2.1) в процессе разгрузки ($\varepsilon_{ij}^p = 0$) его компоненты p_{ij} изменяются как при жестком перемещении тела. Из (3.9) и (3.12) следует, что компонента тензора пластических деформаций $p_{r\varphi}$ перестает изменяться со временем в тех точках области $V^{(P)}$ через которые прошел волновой фронт и в области $V^{(1)}$ является только функцией координаты $p_{r\varphi}(r)$. Учитывая это обстоятельство, уравнение движения в области разгрузки принимает вид:

$$\psi_{,rr} + \frac{3}{r}\psi_{,r} - \frac{\ddot{\psi}}{G^2} = \frac{2}{\eta} \left(\frac{\alpha R^2 \tau_1(r)}{Gr^3} - \frac{k}{Gr} - \frac{2k\tau_1(r)}{r^2} + \frac{2k^2}{\alpha R^2} \right) \quad (4.3)$$

где $\psi_{,r} = \partial\psi/\partial r$, $\psi_{,rr} = \partial^2\psi/\partial r^2$, $\tau_1(r) = t_s + (r - r_0)/G$ – время прихода волны Σ_1 в точку с координатой r . Граничными условиями для (4.3) будут условие трения (4.1) на граничной поверхности $r = r_0$ и условие непрерывности перемещений на фронте волны разгрузки $r = r_1(t)$

$$[\psi]_{\Sigma_1} = (\psi^+ - \psi^-) \Big|_{r=r_1(t)} = 0 \quad (4.4)$$

Квадратными скобками в (4.4) и далее обозначается скачок функции на поверхности разрывов, $\psi^+ = \psi^+(r_1(t), t)$ – значение функции $\psi(r, t)$ непосредственно перед поверхностью разрывов, а $\psi^- = \psi^-(r_1(t), t)$ – непосредственно за поверхностью разрывов.

Волны разгрузки рассматривались также в [23, 24], где были получены точные решения краевых задач теории больших деформаций о динамической разгрузке в плоском тяжелом слое, находящемся на наклонной плоскости и подвергнутом нагружению на свободной поверхности, с последующим мгновенным снятием нагрузки [23] или срывом материала с наклонной плоскости [24].

В нашем случае уравнение (4.3) не может быть проинтегрировано точно, его приближенное решение строим лучевым методом, заключающимся в представлении решения в окрестности волнового фронта в виде ряда Тейлора. Практика применения лучевых разложений в решении волновых задач достаточно обширна [25]. Здесь воспользуемся вариантом метода, предложенным в [26], где приближенное решение строилось в форме степенного ряда по времени в окрестности момента прихода волны в данную точку пространства. Так для угловой скорости $\omega(r, t)$ в области $V^{(1)}$ запишем:

$$\begin{aligned} \omega(r, t) &= \omega^- \Big|_{t=\tau_1} + \dot{\omega}^- \Big|_{t=\tau_1} (t - \tau_1) + \frac{1}{2} \ddot{\omega}^- \Big|_{t=\tau_1} (t - \tau_1)^2 + \dots = \\ &= (\omega^+ - [\omega]) \Big|_{t=\tau_1} + (\dot{\omega}^+ - [\dot{\omega}]) \Big|_{t=\tau_1} (t - \tau_1) + \frac{1}{2} (\ddot{\omega}^+ - [\ddot{\omega}]) \Big|_{t=\tau_1} (t - \tau_1)^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

Аналогично можно записать лучевые ряды для функций напряжения и угла закрутки, причем эти величины также выражаются через скачки угловой скорости и ее производных $[\partial^{n-1}\omega/\partial t^{n-1}]$ ($n = 1, 2, \dots$). Далее будем опускать индекс “+” для величин перед поверхностью разрыва. Обычно асимптотические ряды типа (4.5) ограничивают несколькими первыми членами. В данной работе сохраним линейные по времени слагаемые для напряжений и скорости и квадратичные для перемещений.

С целью вычисления разрыва функции на ударной волне и разрывов ее производных n -го порядка необходимо продифференцировать первое уравнение в (4.2) $n - 1$ раз по времени, записать результат с каждой стороны от волновой поверхности и вычислить их разность привлекая геометрические и кинематические условия совместности [21, 27, 28]. Таким образом, рекуррентно получим систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\chi_1}{\delta t} + \frac{3G}{2r_1}\chi_1 &= \frac{2G}{\eta} \left(\frac{\alpha R^2 t}{r_1^2} - k \right) \\ \frac{\delta\zeta_1}{\delta t} + \frac{3G}{2r_1}\zeta_1 &= \frac{2kG^2}{\eta r_1^2} - \frac{\alpha GR^2}{\eta r_1^3} - \frac{3A_1 G^2}{8r_1^{7/2}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

В которой $\chi_1 = [\omega]_{\Sigma_1}$, $\zeta_1 = [\dot{\omega}]_{\Sigma_1}$; $\delta/\delta t$ – дельта-производная по времени от функции, заданной на движущейся поверхности [27]. После интегрирования (4.6) в области $V^{(1)}$ получим:

$$\begin{aligned} \chi_1(t) &= \frac{A_1}{r_1^{3/2}} - \frac{2k}{3\eta} + \frac{4\alpha R^2}{\eta G r_1} \left(1 - \frac{Gt}{2r_1}\right), \quad \zeta_1(t) = \frac{B_1}{r_1^{3/2}} + \frac{3A_1 G}{8r_1^{5/2}} + \frac{4kG}{\eta r_1} + \frac{2\alpha R^2}{\eta r_1^2} \\ \psi^{(1)}(r, t) &= \psi^{(P)}(r, \tau_1) + (\omega^{(P)} - \chi_1) \Big|_{t=\tau_1} (t - \tau_1) + \frac{1}{2} (\dot{\omega}^{(P)} - \zeta_1) \Big|_{t=\tau_1} (t - \tau_1)^2 + \dots \\ \sigma_{r\varphi}^{(1)}(r, t) &= \frac{\alpha R^2 \tau_1}{r^2} + \frac{\mu r \chi_1(\tau_1)}{G} + \\ &+ \left\{ \frac{\alpha R^2}{r^2} + \frac{\mu r}{G} \left(\frac{3G}{2r} \chi_1(\tau_1) + \zeta_1(\tau_1) - \frac{G}{\eta r} \left(k - \frac{\alpha R^2 \tau_1}{r^2} \right) \right) \right\} (t - \tau_1) + \dots \quad (4.7) \\ A_1 &= \frac{\sqrt{r_0} G (\sigma_s - \sigma_0)}{\mu} + \frac{2r_0^{3/2}}{\eta} \left(\frac{k}{3} + \sigma_0 - \frac{2\alpha R^2}{G r_0} \right) \\ B_1 &= \frac{15G^2 (\sigma_0 - \sigma_s)}{8\mu\sqrt{r_0}} - \frac{\sqrt{r_0} G (13k + 7\sigma_0)}{4\eta} - \frac{\alpha G R^2}{\mu r_0^{3/2}} - \frac{\alpha R^2}{2\eta\sqrt{r_0}} \end{aligned}$$

Верхний индекс “(1)” означает, что вычисленные величины относятся к области $V^{(1)}$. Аналогичным образом можно при необходимости вычислить и следующие члены лучевого ряда. Принципиальных трудностей в этом нет, лишь возрастает объем вычислений.

В момент времени волна разгрузки достигнет упругопластической границы:

$$t_1 = t_s + \frac{1}{2G^2} \left(\frac{\alpha R^2}{k} - 2r_0 G + \sqrt{\frac{4\alpha R^2 G}{k} (Gt_s - r_0) + \frac{\alpha^2 R^4}{k^2}} \right) \quad (4.8)$$

Распределение по слою касательного напряжения $\sigma_{r\varphi}(r, t)$ и угла закручивания $\psi(r, t)$, представлены на рис. 1–2 в момент столкновения с упругопластической границей. Расчет проводился при следующих значениях постоянных: $\rho_0 = 2.7 \times 10^3$ кг/м³, $\mu = 24.5$ ГПа, $\eta = 1.25$ ГПа·с, $\sigma_0 = 67.56$ МПа, $\sigma = 42.225$ МПа, $R/r_0 = 1.5$, Па/с.

Начиная с момента $t = t_1$, область с накопленными необратимыми деформациями больше не увеличивается и ограничена поверхностями $r = r_0$ и $r = m_* = R\sqrt{\alpha t_1/k}$. В результате отражения Σ_1 от упругопластической $r = m_*$ начинают движение поверхности разрывов с противоположно направленными скоростями: $\Sigma_2: r = r_2(t) = m_* - G(t - t_1)$ и $\Sigma_3: r = r_3(t) = m_* + G(t - t_1)$ к граничным поверхностям $r = r_0$ и $r = R$ соответственно. В области $V^{(2)}$: $r_2(t) \leq r \leq m_*$ движение среды подчиняется уравнению (4.3), а в области $V^{(3)}$: $m_* \leq r \leq r_3(t)$ уравнение движения принимает вид:

$$\Psi_{,rr} + \frac{3}{r} \Psi_{,r} - \frac{\ddot{\Psi}}{G^2} = 0 \quad (4.9)$$

Краевыми условиями для уравнений (4.3) и (4.9) являются условие непрерывности перемещений на поверхностях $r = r_2(t)$ и $r = r_3(t)$, а также условие совпадения перемещений и напряжений на упругопластической границе $r = m_*$. Последнее обеспечивает нам гладкость решения в области $r_2(t) \leq r \leq r_3(t)$ в каждый момент времени, следующий за t_1

$$[\Psi]_{\Sigma_2} = 0, \quad [\Psi]_{\Sigma_3} = 0, \quad \Psi^{(2)}\Big|_{m_*} = \Psi^{(3)}\Big|_{m_*}, \quad \sigma_{r\varphi}^{(2)}\Big|_{m_*} = \sigma_{r\varphi}^{(3)}\Big|_{m_*} \quad (4.10)$$

Как и раньше, индекс в круглых скобках принимает значение номера той волны, к зоне влияния которой эта величина относится. Решение для искомой функции $\omega(r, t)$ за волнами Σ_2 и Σ_3 представим лучевыми рядами аналогичными (4.5)

$$\omega^{(2)} = (\omega^{(1)} - \chi_2)\Big|_{\tau_2} + (\dot{\omega}^{(1)} - \zeta_2)\Big|_{\tau_2} (t - \tau_2) + \dots \quad (4.11)$$

$$\omega^{(3)} = (\omega^{(E)} - \chi_3)\Big|_{\tau_3} + (\dot{\omega}^{(E)} - \zeta_3)\Big|_{\tau_3} (t - \tau_3) + \dots \quad (4.12)$$

$$\chi_i = [\omega]_{\Sigma_i}, \quad \zeta_i = [\dot{\omega}]_{\Sigma_i}, \quad i = 1, 2, \quad \tau_2 = t_1 + (m_* - r)/G \\ \tau_3 = t_1 + (r - m_*)/G$$

Дифференциальные уравнения для коэффициентов лучевых рядов получаем, применив к уравнению движения алгоритм описанный выше. После интегрирования, подстановки результата в лучевые ряды и сравнения с граничными условиями, оказалось, что на волне Σ_2 скорость и ускорение остаются непрерывными, т.е. $\chi_2 = \zeta_2 = 0$, а Σ_3 является ударной волной. Разрывы производных более высокого порядка в области $V^{(2)}$ можно отследить, если продолжить лучевой ряд (4.11) с требуемой степенью точности. Таким образом, в рамках принятого линейного по времени приближения для скорости и напряжения, решение в области $r_0 \leq r \leq m_*$ по-прежнему определяется соотношениями (4.7), а в области $V^{(3)}$ имеем:

$$\Psi^{(3)}(r, t) = \Psi^{(E)}(r, \tau_3) + (\omega^{(E)} - \chi_3)\Big|_{\tau_3} (t - \tau_3) + \frac{1}{2}(\dot{\omega}^{(E)} - \zeta_3)\Big|_{\tau_3} (t - \tau_3)^2 + \dots \\ \sigma_{r\varphi}^{(3)}(r, t) = \frac{\alpha R^2 \tau_3}{r^2} + \frac{\mu A_3}{G\sqrt{r}} + \left(\frac{\alpha R^2}{r^2} + \frac{15\mu A_3}{8r^{3/2}} + \frac{\mu B_3}{G\sqrt{r}} \right) (t - \tau_3) + \dots \quad (4.13) \\ \chi_3 = \frac{A_3}{r_3^{3/2}}, \quad \zeta_3 = \frac{B_3}{r_3^{3/2}} + \frac{3GA_3}{8r_3^{5/2}}$$

$$A_3 = A_1 - \frac{8km_*^{3/2}}{3\eta} + \frac{4\alpha R^2 \sqrt{m_*}}{\eta G}, \quad B_3 = B_1 + \frac{5kG\sqrt{m_*}}{\eta} + \frac{\alpha R^2}{2\eta\sqrt{m_*}}$$

Следующее изменение волновой картины произойдет в момент времени $t_2 = t_1 + (R - m_*)/G$, когда волна Σ_3 отразится от внешнего цилиндра $r = R$, дав начало новой поверхности разрыва Σ_4 : $r = r_4(t) = R - G(t - t_2)$. Движение среды в области $V^{(4)}$: $r_4(t) \leq r \leq R$ подчиняется уравнению движения (4.9), крайевыми условиями для которого служат условие прилипания на $r = R$ (3.1) и условие непрерывности перемещений на фронте волны Σ_4 . Таким образом, в области $V^{(4)}$ имеем:

$$\Psi^{(4)}(r, t) = \Psi^{(3)}(r, \tau_4) + (\omega^{(3)} - \chi_4)\Big|_{\tau_4} (t - \tau_4) + \frac{1}{2}(\dot{\omega}^{(3)} - \zeta_4)\Big|_{\tau_4} (t - \tau_4)^2 + \dots \\ \sigma_{r\varphi}^{(4)}(r, t) = \sigma_{r\varphi}^{(3)}(r, \tau_4) - \frac{\mu A_4}{G\sqrt{r}} + \left(\dot{\sigma}_{r\varphi}^{(3)}(r, \tau_4) + \frac{15\mu A_4}{8r^{3/2}} - \frac{\mu B_4}{G\sqrt{r}} \right) (t - \tau_4) + \dots \quad (4.14)$$

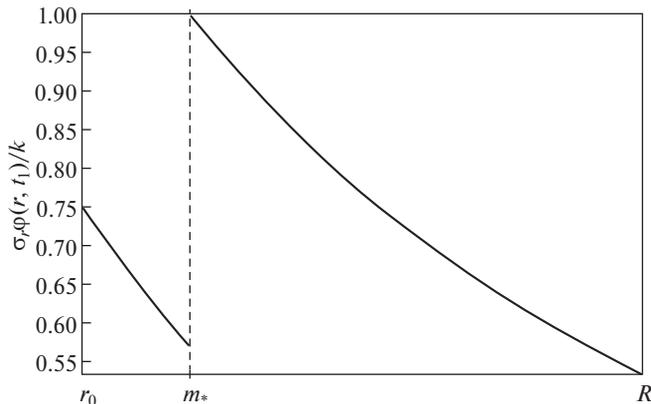


Рис. 1. Распределение касательного напряжения в момент времени $t = t_1$.

$$\chi_4 = \frac{A_4}{r_4^{3/2}}, \quad \zeta_4 = \frac{B_4}{r_4^{3/2}} - \frac{3GA_4}{8r_4^{5/2}}, \quad A_4 = A_3, \quad B_4 = B_3 + \frac{15GA_3}{4R}$$

$$\tau_4 = t_2 + (R - r)/G$$

Поверхность $r = r_4(t)$ является сходящейся ударной волной. Следует отметить, что по мере ее продвижения к внутренней границе возможно появление новой пластической области вследствие нарастающей интенсивности разрыва за счет увеличения кривизны волнового фронта. На этом этапе аналитическое исследование считаем законченным, расчет дальнейшего деформирования при необходимости целесообразно вести численно, используя аналитическое решение для аппроксимации решения в узлах прифронтной области.

5. Заключение. Рассмотренная задача отличается сменой скоростных режимов деформирования: от низкоскоростного (квазистатического) на этапе накопления необратимых деформаций до динамического на этапе разгрузки, распространяющейся в виде слабой ударной волны. Если на первом этапе удастся получить точное решение

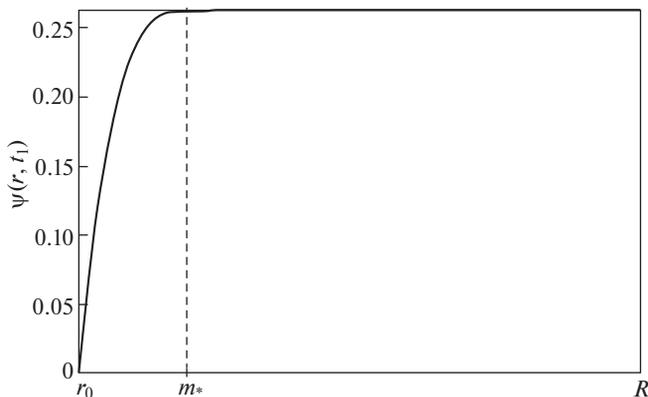


Рис. 2. Распределение угла поворота в момент времени $t = t_1$.

краевой задачи, то на втором этапе для построения приближенного аналитического решения за фронтом волны разгрузки применяется метод лучевых рядов. Таким же способом выполнен расчет отражения первоначальной волны разгрузки от упругопластической границы и граничной поверхности. Существенное упрощение в решение задачи вносят предположение о малости обратимых деформаций и одномерный характер деформирования. В этом случае скорости волн оказываются постоянными, а лучи (ортогональные траектории точек волновой поверхности) прямыми линиями. В случае конечных деформаций скорость и положение волнового фронта будут зависеть от состояния перед волной и интенсивности разрывов на волне. Кроме того, усложняется волновая картина, т.к. в среде с предварительными деформациями распространяются сразу две сдвиговые ударные волны: плоскополяризованная волна и волна круговой поляризации.

Тем не менее, результаты настоящей работы могут быть полезны при постановках нестационарных задач теории больших деформаций, но с более сложными краевыми условиями, а также при использовании полученных приближенных решений в численных конечно-разностных расчетах в прифронтовых узлах на сетке вдоль луча.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Гостехиздат, 1953. 376 с.
2. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем. М. – Л.: Гостехиздат, 1946. 532 с.
3. *Спорыхин А.Н., Шашкин А.И.* Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород. М.: Физматлит, 2004. 231 с.
4. *Черепанов Г.П., Еришов Л.В.* Механика разрушения. М.: Машиностроение, 1977. 224 с.
5. *Chernyshov A.D.* On conditions of snow avalanching and landslides // *Mech. Solids*. 2013. V. 48. P. 348–355.
<https://doi.org/10.3103/S0025654413030114>
6. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Polonik M.V.* The formation of a one-dimensional residual stress field in the neighbourhood of a cylindrical defect in the continuity of an elastoplastic medium // *J. Appl. Math. Mech.* 2003. V. 67. № 2. P. 283–292.
[https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(03\)90014-1](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(03)90014-1)
7. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Lushpei A.V.* The transient retardation of a rectilinear viscoplastic flow when the loading stresses are abruptly removed // *J. Appl. Math. Mech.* 2009. V. 73. № 4. P. 478–482.
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2009.08.001>
8. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Kulaeva D.V.* Interaction of a one-dimensional unloading wave with an elastoplastic boundary in an elastoviscoplastic medium // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2012. V. 53. P. 90–97.
<https://doi.org/10.1134/S0021894412010129>
9. *Rivlin R.S.* Large elastic deformations of isotropic materials. VI. Further results in the theory of torsion, shear and flexure // *Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*. 1949. V. 242. № 845. P. 173–195.
<https://doi.org/10.1098/rsta.1949.0009>
10. *Jiang X., Ogden R.W.* On azimuthal shear of a circular cylindrical tube of compressible elastic material // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 1998. V. 51. № 1. P. 143–158.
<https://doi.org/10.1093/qjmam/51.1.143>
11. *Ogden R.W.* Stress softening and residual strain in the azimuthal shear of a pseudo-elastic circular cylindrical tube // *Int. J. Nonlin. Mech.* 2001. V. 36. № 3. P. 477–487.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(00\)00080-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(00)00080-9)
12. *Horgan C.O., Saccomandi G.* Pure azimuthal shear of isotropic, incompressible hyperelastic materials with limiting chain extensibility // *Int. J. Nonlin. Mech.* 2001. V. 36. № 3. P. 465–475.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(00\)00048-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(00)00048-2)
13. *Carroll M.M.* Azimuthal shear in compressible finite elasticity // *J. Elasticity*. 2007. V. 88. № 2. P. 141–149.
<https://doi.org/10.1007/s10659-007-9123-3>

14. *Kassianidis F., Ogden R.W., Merodio J., Pence T.J.* Azimuthal shear of a transversely isotropic elastic solid // *Math. Mech. Solids*. 2009. V. 13. № 8. P. 690–724.
<https://doi.org/10.1177/1081286507079830>
15. *O'Callaghan L., O'Reilly O.M., Zhornitskaya L.* On azimuthal shear waves in a transversely isotropic viscoelastic mixture: Application to diffuse axonal injury // *Math. Mech. Solids*. 2011. V. 16. № 6. P. 625–636.
<https://doi.org/10.1177/1081286510387855>
16. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Ustinova A.S.* Viscosimetric flow of an incompressible elastoviscoplastic material under the presence of a lubricant on the boundary surfaces // *J. Appl. Ind. Math.* 2012. V. 6. P. 431–442.
<https://doi.org/10.1134/S1990478912040047>
17. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V.* Flow of an elastoviscoplastic material between rotating cylindrical surfaces with nonrigid cohesion // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2015. V. 56. P. 293–303.
<https://doi.org/10.1134/S0021894415020157>
18. *Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтанюк Л.В.* Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // *ДАН*. 1996. Т. 347. № 2. С. 199–201.
19. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В.* Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 321 с.
20. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
21. *Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д.* Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
22. *Быковцев Г.И., Вервейко Н.Д.* О распространении волн в упруго-вязко-пластической среде // *Инженерный журнал. МТТ*. 1966. № 4. С. 111–123.
23. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Kulaeva D.V.* Interaction of a one-dimensional unloading wave with an elastoplastic boundary in an elastoviscoplastic medium // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2012. V. 53. P. 90–97.
<https://doi.org/10.1134/S0021894412010129>
24. *Kovtanyuk L.V., Rusanov M.M.* On collision of an unloading wave with advancing elastoplastic boundary in a flat heavy layer // *J. Appl. Ind. Math.* 2015. V. 9. P. 519–526.
<https://doi.org/10.1134/S1990478915040080>
25. *Rossikhin Y.A., Shitikova M.V.* Ray Method for Solving Dynamic Problems Connected With Propagation of Wave Surfaces of Strong and Weak Discontinuities // *Appl. Mech. Rev.* 1995. V. 48. № 1. P. 1–39.
<https://doi.org/10.1115/1.3005096>
26. *Achenbach J.D., Reddy D.P.* Note on wave propagation in linearly viscoelastic media // *ZAMP*. 1967. V. 18. P. 141–144.
<https://doi.org/10.1007/BF01593905>
27. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
28. *Гринфельд М.А.* Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений. М.: Наука, 1990. 312 с.

УДК 539.42

ЭФФЕКТ ЗАПАЗДЫВАНИЯ РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ИМПУЛЬСНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

© 2022 г. Ю. В. Петров^{a,b,*}, А. А. Уткин^{a,b,**}

^a Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

^b Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: y.v.petrov@spbu.ru

**e-mail: a.utkin51@gmail.com

Поступила в редакцию 24.04.2021 г.

После доработки 26.04.2021 г.

Принята к публикации 29.04.2021 г.

Дается аналитическое исследование эффекта запаздывания разрушения материала с трещиной при ударно-волновом импульсном воздействии. Эффект выражается в возможности наступления разрыва материала у вершины трещины в момент времени, следующий за моментом достижения локальным разрывающим напряжением максимального значения. Обсуждается ряд важных особенностей динамического разрушения при пороговых и запороговых воздействиях, наблюдаемых в различных экспериментах. Установлено, что фиксируемая экспериментально задержка разрушения получает отчетливое объяснение в рамках структурно-временного подхода, базирующегося на понятии инкубационного времени разрушения. Найдены условия ее возникновения и приведены соответствующие аналитические формулы. Делается вывод о принципиальной необходимости изучения пороговых случаев, в которых проявляются важнейшие временные эффекты, не укладывающиеся в классические понятия прочности и трещиностойкости, базирующиеся на локальном предельном напряжении и/или критическом коэффициенте интенсивности.

Ключевые слова: динамическое разрушение, трещины, импульсная нагрузка, скоростная зависимость прочности, задержка разрушения

DOI: 10.31857/S0572329922010081

1. Введение. Как правило, в квазистатических ситуациях прочность материала с дефектами типа трещин связывается со значением коэффициента интенсивности напряжений, измеренным в момент разрушения (вязкостью разрушения). В случае динамических задач это также позволяет успешно характеризовать и прогнозировать процесс разрыва материала при не очень быстрых и достаточно длительных воздействиях. Однако, этот подход теряет силу в случае высокоскоростных интенсивных нагрузок, а особенно в случае коротких импульсов, поскольку многие эксперименты в этих случаях показывают нестабильное и плохо предсказуемое поведение критического коэффициента интенсивности (динамической вязкости разрушения), а также его, так называемой, скоростной и/или временной зависимости, т.е. зависимости от скорости деформации (нагружения) и/или времени до разрушения [1–3]. Более того, в некоторых экспериментах наблюдается динамическое разрушение материала, возникающее тогда, когда локальное силовое поле в точке разрыва материала уже прошло свои максимальные значения и вышло на стадию заметного снижения [4–6]. Данный

мало изученный, но принципиальный эффект не может быть объяснен на основе классических подходов и является основным предметом анализа данной работы.

Для удобства дальнейшего изложения введем в рассмотрение понятие задержки разрушения. Если при заданных граничных и начальных условиях разрушение в окрестности кончика трещины происходит после прохождения пика локального растягивающего силового поля, выражаемого, например, через текущий коэффициент интенсивности напряжений, то будем говорить, что разрушение происходит с задержкой. Время, прошедшее от достижения пика локального растягивающего напряжения до момента макроскопического разрыва материала будет характеризовать величину задержки разрушения. Далее будет показано, что данное явление является принципиальной особенностью процесса динамического разрушения, проявляющейся в пороговых ситуациях и связанной с наличием инкубационного подготовительного процесса, протекающего в микроструктуре материала в течение некоторого периода, предшествующего макроскопическому разрыву.

2. Критерий инкубационного времени. Применение структурно-временного подхода при кратковременных воздействиях позволяет объяснить многие наблюдаемые в опытах динамические эффекты, в частности изменение со скоростью ввода энергии (скоростью деформации) критических характеристик разрушения, определяемых растягивающим напряжением или значением коэффициента интенсивности напряжений в момент разрыва материала. Для материала имеющего макроскопический дефект в виде трещины критерий имеет форму (см., например, [1, 3]):

$$\int_{t-\tau}^t K(s) ds < K_{1c} \tau \quad (2.1)$$

где $K(t)$ – значение коэффициента интенсивности напряжений (КИН) в окрестности кончика трещины, как функция времени, K_{1c} – критическое значение КИН в статике, τ – инкубационное (структурное) время разрушения. Параметры K_{1c} и τ являются константами материала и не зависят от формы и продолжительности воздействия. Константы K_{1c} и τ образуют систему определяющих параметров разрушения. При этом предполагается, что моментом разрушения является то наименьшее время, при котором нарушается условие критерия.

Многочисленные исследования процесса динамического разрушения в рамках структурно-временного подхода на базе концепции инкубационного времени подтвердили его эффективность и предсказательную силу. В настоящее время он стал действенным инструментом расчета высокоскоростных динамических процессов, применяемым многими авторами в различных областях науки [7–9].

Ниже на конкретных примерах будет аналитически показано, что применение критерия инкубационного времени допускает разрушение на ниспадающих участках изменения во времени коэффициента интенсивности напряжений, т.е. через некоторое время после прохождения максимальных значений. Действительно, согласно критерию (2.1), чтобы произошло разрушение, среднее значение текущего значения коэффициента интенсивности напряжений на промежутке $[t - \tau, t]$ должно быть равным K_{1c} . Следовательно, на этом временном промежутке могут быть зоны, где $K(t) > K_{1c}$, и где $K(t) < K_{1c}$ (или на всем промежутке $[t - \tau, t]$ $K(t) = K_{1c}$). На практике это может проявляться при определенных способах импульсного воздействия, близких к пороговым, которые могут, например, отвечать минимальным предельным амплитудам при заданных длительностях или критическим длительностям при заранее установленных амплитудных характеристиках.

3. Постановка и решение динамической задачи. Рассмотрим динамическую задачу для упругой плоскости с трещиной в плоской постановке. Пусть упругая среда харак-

теризуется модулем сдвига μ и скоростями продольных и поперечных волн c_1 и c_2 соответственно и имеет полубесконечный разрез $y = 0$, $x \leq 0$. Тогда напряженно-деформированное состояние среды будет описываться следующей системой уравнений

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (3.2)$$

Здесь φ и ψ – продольный и поперечный волновые потенциалы. Компоненты вектора перемещения u и v связаны со значениями φ и ψ соотношениями:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.3)$$

Предполагаем, что на берегах разреза $y = 0$, $x < 0$ выполняются условия

$$\sigma_{xy}|_{y=0, x<0} = 0 \quad (3.4)$$

$$\sigma_y|_{y=0, x<0} = c_1^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (c_1^2 - 2c_2^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2c_2^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = f(t) \quad (3.5)$$

т.е. к берегам разреза приложена нагрузка в виде нормального напряжения, заданного временной функцией $f(t)$. При $t < 0$ упругая среда свободна от напряжений, т.е.

$$\psi|_{t<0} = 0, \quad \varphi|_{t<0} = 0 \quad (3.6)$$

Пусть приложенный в нулевой момент времени к берегам разреза импульс напряжений имеет постоянную амплитуду P и описывается функцией $f(t) = P \cdot H(t)$, где $H(t)$ – функция Хевисайда. Значение коэффициента интенсивности напряжений в такой задаче известно и будет иметь вид [10, 11]

$$K(t) = P \cdot \alpha \cdot \sqrt{t} \quad (3.7)$$

где $\alpha = 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{c_1 \gamma} \sqrt{1 - \gamma^2}$, $\gamma = c_1/c_2$. Применяя это решение, можно найти выражение для коэффициента интенсивности напряжений при произвольном воздействии $f(t)$. Соответствующее решение можно получить, используя свертку по времени (интеграл Дюамеля) найденного решения (3.7) с соответствующей функцией:

$$K^f(t) = \int_0^t K(s) \cdot f'(t-s) ds \quad (3.8)$$

где $K^f(t)$ – коэффициент интенсивности напряжений для произвольного воздействия $f(t)$. Пусть, например, к берегам разреза приложен прямоугольный импульс напряжений с амплитудой P и продолжительностью T . Таким образом, $f(t) = P(H(t) - H(t-T))$, где $H(t)$ – функция Хевисайда. Значение коэффициента интенсивности напряжений для такого воздействия будет иметь вид

$$K(t) = P \cdot \alpha \cdot (\sqrt{t} - \sqrt{t-T}) \quad (3.9)$$

Здесь и далее предполагаются значения радикалов с отрицательными аргументами равными нулю. Покажем, что аналитическое рассмотрение условия старта трещины для этого и других случаев позволяет получить и исследовать основные свойства эффекта запаздывания разрушения.

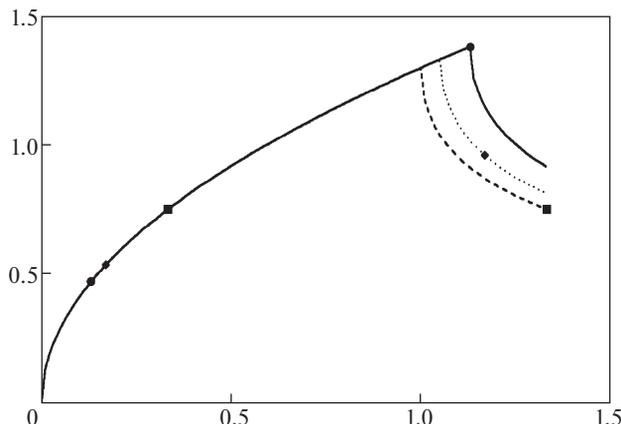


Рис. 1. Зависимость значений коэффициента интенсивности напряжений от времени при различных продолжительностях воздействия с фиксированной амплитудой.

4. Анализ разрушения. При помощи структурно-временного подхода проведем анализ разрушения и выявим условия, при которых разрушение может происходить с эффектом запаздывания.

Предположим сначала, что приложенная к берегам разреза ступенчатая нагрузка действует вплоть до момента разрушения $t = t_*$. Тогда, подставляя выражение (3.7) в критерий (2.1) получим

$$P = \frac{3}{2} \frac{K_{1c} \cdot \tau}{\alpha (t_*^{3/2} - (t_* - \tau)^{3/2})} \quad (4.1)$$

Выражение (4.1) связывает амплитуду приложенного воздействия и момент начала разрушения. На рисунке 1 сплошной линией изображена зависимость значений коэффициента интенсивности напряжений от времени. Значения времени и коэффициента интенсивности напряжений нормированы. По оси абсцисс откладывается безразмерное время t/τ , а по оси ординат отношение текущего значения КИН к критическому — $K(t)/K_{1c}$. Кружками на кривой обозначены моменты времени t_* и $t_* - \tau$. Значение КИН в этом случае растет вплоть до момента начала разрушения. При этом его величина в момент разрушения, согласно (3.7) и (4.1), будет выше статической прочности:

$$K(t_*) = \frac{3}{2} \frac{K_{1c} \cdot \tau \cdot t_*^{1/2}}{\alpha (t_*^{3/2} - (t_* - \tau)^{3/2})} > K_{1c} \quad (4.2)$$

Предположим теперь, что приложенная к берегам разреза импульсная нагрузка будет снята ранее момента t_* , определенного в (4.1), т.е. в момент времени $T < t_*$. Подстановка выражения (3.9) в критерий (2.1) показывает, что для времен $t < t_*$ условие критерия тоже может выполняться. В этом случае для импульса конечной длительности момент разрушения будет наступать через некоторое время после того как нагрузка будет снята. Соответствующая зависимость изображена на рисунке 1. Для времен $t \leq T$ значения коэффициента интенсивности не будут отличаться от посчитанных выше. При $t > T$ значения коэффициента интенсивности изображены точками. Соответствующее импульсу конечной длительности время разрушения будем по-прежнему

обозначать t_* . Моменты времени t_* и $t_* - \tau$, отвечающие импульсу длительности T , изображены ромбами. Таким образом, в этом случае интенсивность локального силового поля в окрестности кончика трещины к моменту снятия нагрузки достигнет максимального значения и начнет уменьшаться вплоть до момента срабатывания условия разрушения. Интервал времени от момента снятия нагрузки до разрушения назовем задержкой разрушения. Тогда его величина определится разностью $t_* - T$.

Для каждой приложенной нагрузки P конечной длительности существует некий предел уменьшения времени действия нагрузки, т.е. существует наименьший момент времени T , который согласно критерию (2.1) обеспечивает разрушение. Дальнейшее уменьшение этой продолжительности уже не будет обеспечивать разрушение. В случае пороговых импульсов, имеющих наименьшую разрушающую амплитуду при заданной продолжительности (или критическую длительность при определенной амплитуде) должно выполняться условие

$$\max_t \int_{t-\tau}^t K(s)ds = K_{lc}\tau$$

Здесь $K(t)$ – история коэффициента интенсивности напряжений для заданных величин P и T . Продифференцировав интеграл и приравняв нулю, получим условие достижения максимума: $K(t_*) = K(t_* - \tau)$. Следовательно, в пороговом случае период времени, в течение которого величина коэффициента интенсивности превышает свое стартовое значение, в точности равна τ . Отсюда также следует, казалось бы, парадоксальный для динамического случая вывод о том, что стартовое значение коэффициента интенсивности будет в этом случае меньше K_{lc} . Действительно на промежутке интегрирования $K(s) \geq K(t_*)$, а среднее значение интеграла K_{lc} . Значит $K(t_*) \leq K_{lc}$. Тем не менее, этот вывод не противоречит экспериментальным наблюдениям, которые проводятся, как правило, для запороговых ситуаций, когда нагрузки действуют вплоть до момента разрушения, и в этом случае, как и в (4.2), $K(t_*) > K_{lc}$. При этом, в довольно редких случаях, когда реализуются именно интенсивные, но кратковременные, пороговые импульсы, наблюдаются значения динамической вязкости разрушения меньшие, чем статические для данного материала [12]. Примененный нами структурно-временной подход позволяет качественно обосновать наблюдаемую в экспериментальных исследованиях нестабильность поведения динамической вязкости разрушения материалов.

Вычисления при помощи (2.1) дадут соотношение между моментом разрушения и продолжительностью воздействия для порогового импульса заданной длительности T :

$$t_* = \frac{1}{3}(T + \tau + 2\sqrt{T^2 - T \cdot \tau + \tau^2}) \quad (4.3)$$

Для такой критической (наименьшей) продолжительности T амплитуда приложенного воздействия и момент начала разрушения будут связаны соотношением

$$P = \frac{3}{2} \cdot \frac{K_{lc} \cdot \tau}{\alpha(t_*^{3/2} - (t_* - \tau)^{3/2} - (t_* - T)^{3/2} + (t_* - \tau - T)^{3/2})} \quad (4.4)$$

Соответствующая история для КИН изображена для времен $t > T$ на рисунке 1 пунктирной линией. Интервал интегрирования ограничен квадратами. В этом случае будет наблюдаться наибольшая для данной амплитуды воздействия задержка.

На рис. 2 представлена зависимость длительности разрушающего импульса нагрузки от его амплитуды. По оси абсцисс откладывается амплитуда приложенного импульса в МПа, а по оси ординат нормированное время действия нагрузки T/τ . Этот и

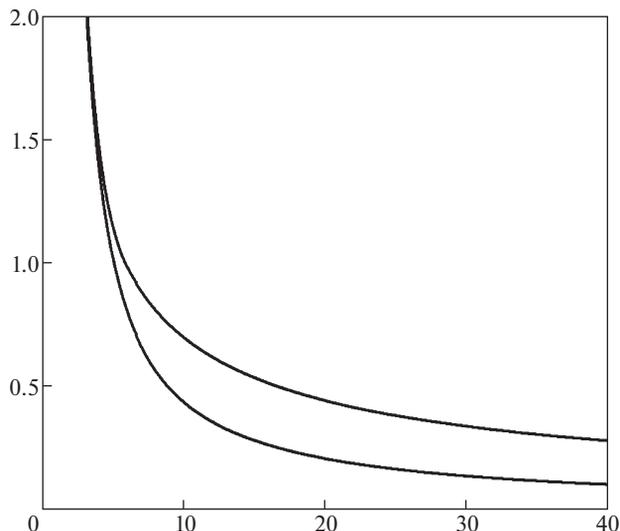


Рис. 2. Зависимость длительности разрушающего импульса нагрузки от его амплитуды.

последующие расчеты, если не оговорено обратное, проводились для ПММА. При этом было принято $c_1 = 1970$ м/с, $c_2 = 1130$ м/с, $K_{Ic} = 1.47$ МПа \sqrt{m} и $\tau = 32$ мкс. Нижняя кривая на рис. 2 соответствует минимально возможной продолжительности воздействия, вызывающей разрушение, а верхняя “максимально” возможной, для которой время действия нагрузки совпадает с моментом разрушения. Таким образом, область между нижней и верхней кривой можно трактовать как зону возможного разрушения на плоскости амплитуда приложенного импульса – длительность воздействия. Действительно, точки на этой плоскости, лежащие ниже нижней кривой не будут приводить к разрушению т.к. не достаточно амплитуды (или длительности воздействия), чтобы вызвать разрушение. Точки же выше верхней кривой недостижимы, поскольку разрушение начнется раньше, чем закончится действие импульса (при временах $t < T$). Следовательно, между нижней и верхней кривой находится область критических продолжительностей импульса, которые приводят к разрушению. Также стоит обратить внимание на то, что чем выше амплитуда приложенного импульса, тем шире область разрушения.

На рис. 3 изображена зависимость максимально возможной задержки разрушения от амплитуды приложенной нагрузки. По оси абсцисс откладывается амплитуда приложенного импульса в МПа, а по оси ординат задержка разрушения, отнесенная к величине инкубационного времени. Увеличение амплитуды ведет к увеличению задержки разрушения, которая не может превышать величины инкубационного времени.

В механике квазихрупкого разрушения главной характеристикой разрушения, называемой динамической вязкостью разрушения, является значение коэффициента интенсивности напряжений в момент начала разрушения. Используя (3.9) и (4.1), (4.4) можно получить значение динамической вязкости разрушения в зависимости от амплитуды или времени воздействия. Соответствующие зависимости приведены на рис. 4 и 5. На рис. 4 по оси абсцисс откладывается амплитуда приложенного импульса в МПа, а на рис. 5 – время действия импульса, отнесенное к величине инкубационного времени T/τ . По оси ординат откладывается значение динамической вязкостью разрушения отнесенное к критическому статическому значению коэффициента ин-

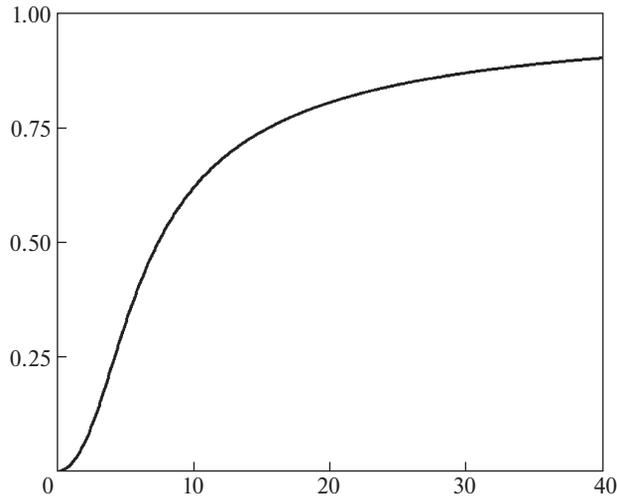


Рис. 3. Зависимость максимально возможной задержки разрушения от амплитуды приложенной нагрузки.

тенсивности напряжений K_{lc} . При этом нижние кривые соответствуют наименьшей критической продолжительности воздействия, вызывающей разрушение, а верхние – наибольшей. Как видно из анализа, значения динамической вязкости разрушения для данного материала принципиально нестабильны и могут изменяться в довольно больших пределах при нагрузках с одинаковой амплитудой или продолжительностью. Это следует обязательно учитывать при проведении анализа разрушения и обработки опытных данных, а экспериментальное изучение пороговых ситуаций при этом будет играть важнейшую роль для выявления инкубационных характеристик разрушения и прогнозирования упомянутой нестабильности.

Можно рассмотреть исследованную выше ситуацию с другой стороны. Пусть фиксирована длительность T приложенного прямоугольного импульса. Последовательно увеличивая амплитуду, можно найти ту пороговую (минимальную) для данной длительности, которая приведет к разрушению. По достижении порога разрушение произойдет в момент времени t_* , определенный в (4.3), а пороговая амплитуда такого импульса будет определяться из (4.4). Разрушение при этом будет происходить с задержкой (т.е. сопровождаться снижением текущего КИН от момента окончания действия импульса до момента t_*), величина которой равна $t_* - T$. При дальнейшем постепенном увеличении амплитуды выше найденного порогового значения разрушение будет происходить со все меньшей задержкой. Наконец, при достижении величины амплитуды, определенной формулой (4.1), разрушение произойдет без задержки, т.е. в момент времени $t_* = T$, соответствующий сбросу нагрузки. Дальнейшее увеличение амплитуды приведет к тому, что разрушение будет происходить прежде зафиксированной выше длительности воздействия $t_* < T$.

Полученные выше при анализе разрушения эффекты не связаны с рассмотренным конкретным профилем нагружения. Можно взять, например, “треугольную” нагрузку с постоянной скоростью ввода импульса $f(t) = V \cdot t \cdot [H(t) - H(t - T_0)]$. Использование (3.8) позволяет получить значение коэффициента интенсивности напряжений для такого воздействия:

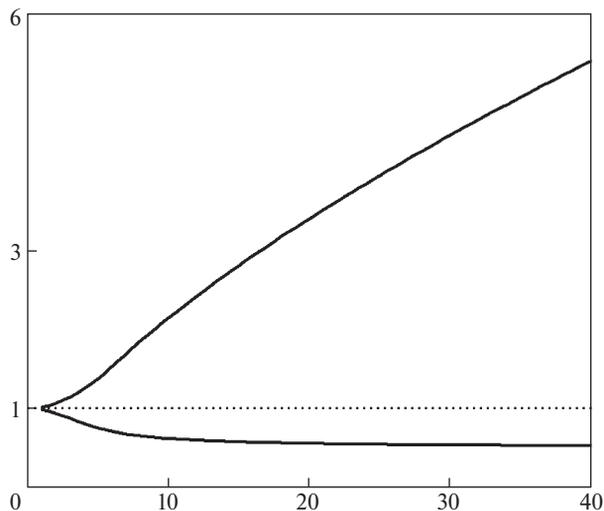


Рис. 4. Динамическая вязкость разрушения в зависимости от амплитуды воздействия.

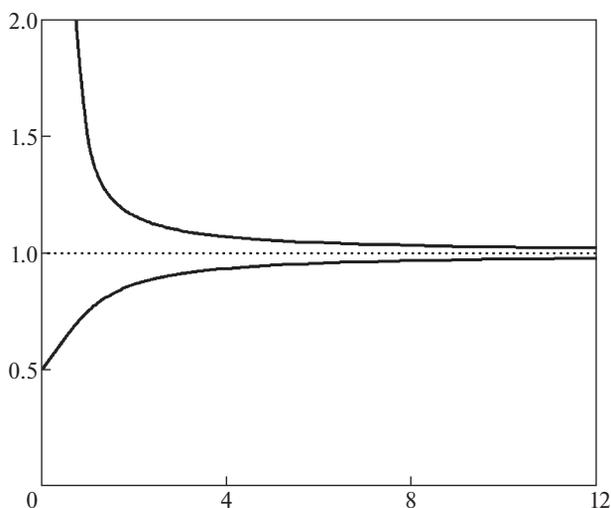


Рис. 5. Динамическая вязкость разрушения в зависимости от времени воздействия.

$$K(t) = \frac{1}{3} \alpha \cdot V \cdot [2 \cdot t \cdot \sqrt{t} - (2t + T_0) \sqrt{t - T_0}] \quad (4.5)$$

Для этого случая также можно получить формулы и расчеты, аналогичные (4.1)–(4.4). Для примера на рис. 6 приведена рассчитанная зависимость динамической вязкости разрушения от скорости приложения нагрузки. По оси абсцисс откладывается скорость приложения нагрузки в ГПа/сек, а по оси ординат значение динамической вязкости разрушения отнесенное к критическому значению коэффициента интенсивности напряжений K_{Ic} .

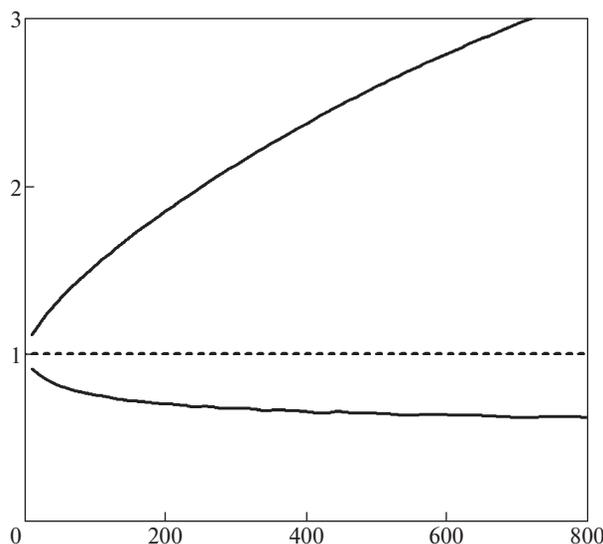


Рис. 6. Динамическая вязкость разрушения в зависимости от скорости приложения нагрузки в случае “треугольного” импульса.

5. Сравнение с экспериментом. Рассмотрим известную серию экспериментов по инициированию роста трещин К. Рави-Чандара и В.Г. Кнаусса [2]. Эксперименты проводились на оптически чувствительном материале Nomalite – 100, который имеет $K_{Ic} = 0.48 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$, $c_1 = 2150 \text{ м/с}$, $c_2 = 1230 \text{ м/с}$. Образцы прямоугольной формы имели разрез. Нагружение производилось при помощи быстрого приложения к берегам разреза создаваемого магнитным полем давления, имеющего трапециевидный временной профиль. Участок роста импульса давления имел продолжительность 25 мкс, после чего давление удерживалось постоянным. Весь эксперимент занимал не более 150 мкс, но старт трещин во всех случаях происходил до времени сброса давления на берегах. Во время эксперимента регистрировалось текущее значение коэффициента интенсивности $K(t)$. Размеры образцов были выбраны достаточно большими, таким образом, чтобы за время проведения испытания исключить взаимодействие с разрезом волн, отраженных от границ образца. Следовательно, испытываемую модель можно было рассматривать как бесконечную плоскость, имеющую полубесконечный разрез. Приложенную в опытах трапециевидную нагрузку можно представить в виде $f(t) = P[tH(t) - (t - T_0)H(t - T_0)]/T_0$, где T_0 – время роста импульса давления, P – амплитуда приложенного давления на постоянном участке воздействия. Нагрузка удерживалась по крайней мере до момента разрушения t_* , который мог быть как меньше, так и больше периода нарастания давления T_0 . Таким образом, в терминах предыдущих рассмотрений разрушение в данном эксперименте во всех случаях происходило в результате приложения критического максимального (запорогового) импульса. Значение коэффициента интенсивности напряжений в такой задаче находится из (3.7), (3.8):

$$K(t) = 2P \cdot \frac{\alpha}{3T_0} [t^{3/2} H(t) - (t - T_0)^{3/2} H(t - T_0)] \quad (5.1)$$

Подставляя (5.1) в критерий (2.1) нетрудно получить выражение для величины коэффициента интенсивности напряжений в момент разрушения $K_q = K(t_*)$:

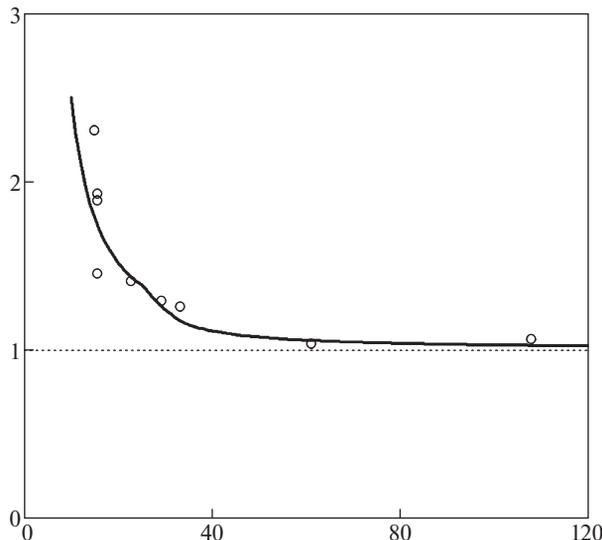


Рис. 7. Разрушение трапецидальным импульсом материала Nomalite-100 в зависимости от времени действия нагрузки. Расчетная кривая и опытные данные [2].

$$\frac{K_q}{K_{lc}} = \frac{5}{2} \frac{\bar{t}_*^{3/2} - (\bar{t}_* - \bar{T}_0)^{3/2}}{\bar{t}_*^{5/2} - (\bar{t}_* - 1)^{5/2} - (\bar{t}_* - \bar{T}_0)^{5/2} + (\bar{t}_* - \bar{T}_0 - 1)^{5/2}} \quad (5.2)$$

где \bar{t}_* – момент разрушения, $\bar{t}_* = t_*/\tau$, $\bar{T}_0 = T_0/\tau$. Теоретическая кривая и точки из [2] при $\tau = 10$ мкс показаны на рис. 7. По оси абсцисс откладывается время действия нагрузки в микросекундах, а по оси ординат значение динамической вязкости разрушения отнесенное к критическому статическому значению коэффициента интенсивности напряжений. Как видно из графика, проведенный расчет показывает хорошее соответствие с экспериментальными результатами.

В [12] описана серия экспериментов, в которой при заданной продолжительности воздействия определялась наименьшая амплитуда, вызывающая разрушение. Эксперименты проводились на прямоугольных металлических пластинах, имеющих симметрично расположенный разрез. Нагружение проводилось волновыми импульсами растягивающего напряжения прямоугольной формы, падающими нормально на трещину. Были реализованы три серии экспериментов с продолжительностями импульсов $T_1 = 18$ мкс, $T_2 = 40$ мкс и $T_3 = 80$ мкс. В каждой серии определялась минимальная (пороговая) амплитуда вызывающая разрушение. С уменьшением времени воздействия пороговое значение амплитуды приобретало все большую разницу по сравнению с тем, которое должно следовать из классического критерия критического коэффициента интенсивности и оказывалось существенно большим по величине. В случае коротких импульсов описанную ситуацию можно рассматривать как воздействие на полубесконечный разрез минимального (порогового) разрушающего импульса прямоугольной формы с амплитудой P и продолжительностью T . Критическую амплитуду, определенную по критерию критического коэффициента интенсивности, обозначим через P_k , а по критерию инкубационного времени через P_a . Тогда из (4.4) следует, что

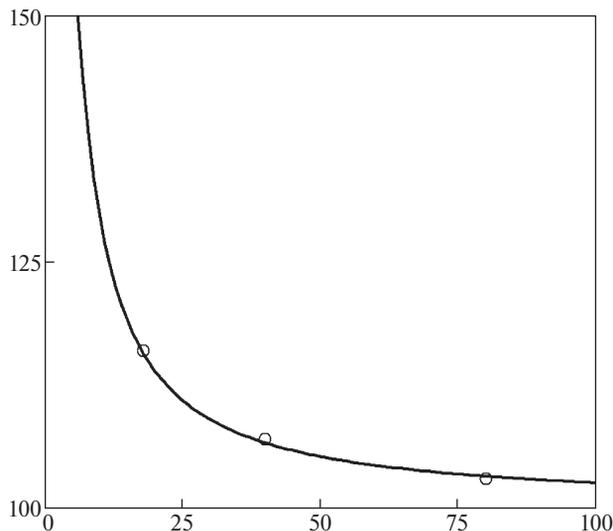


Рис. 8. Процентное превышение динамического значения разрушающей амплитуды по сравнению со статическим в зависимости от времени действия нагрузки.

$$\frac{P_a}{P_k} = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\bar{T}}}{\bar{t}_*^{3/2} - (\bar{t}_* - 1)^{3/2} - (\bar{t}_* - \bar{T})^{3/2}} \quad (5.3)$$

где $\bar{T} = T/\tau$, $\bar{t}_* = t_*/\tau$ – момент разрушения. Результаты расчета при $\tau = 10$ мкс для $Q = (P_a - P_k/P_k) \cdot 100\%$ приведены на рис. 8, где по оси абсцисс откладывается время действия нагрузки в мкс, а по оси ординат определенная выше безразмерная величина Q . При этом $Q_1 = Q(T_1) = 16\%$; $Q_2 = 7\%$; $Q_3 = 3\%$, что вполне соответствует экспериментальным наблюдениям [12], показанным точками.

В [6] описана серия экспериментов, в которой при помощи магнитно-импульсного способа формирования нагрузки на образцах с макротрещинами из ПММА [13] проведено исследование разрушения при динамическом нагружении микросекундной длительности. Равномерно распределенное давление на берега разреза имело форму затухающих синусоид и описывалось следующей формулой

$$P(t) = P_0 \exp\left(-\frac{2 \cdot t}{T_1}\right) \cdot \sin^2\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T}\right) \quad (5.4)$$

Ввиду быстрого затухания приложенного импульса в расчет принимались первые три пульсации. При этом период колебаний $T = 5.6$ мкс, и постоянная времени затухания $T_1 = 4.2$ мкс не изменялись для всех реализованных испытаний. Из (5.4) следует, что в момент времени $t_m = \arctg(2 \cdot \pi \cdot T_1/T) \cdot T/(2/\pi)$ значение давления достигает своей максимальной величины $P_m = P_0 \cdot \exp(-2 \cdot t_m/T_1)/(1 + T^2/(2\pi T_1)^2)$, которая и принималась за амплитуду. Были проведены испытания 10 образцов. Амплитуда импульса давления P_m варьировалась при этом от 140 до 320 МПа. В опытах фиксировалось время начала разрушения (старта трещины).

Значение коэффициента интенсивности напряжений для такой задачи согласно (3.8) имеет вид

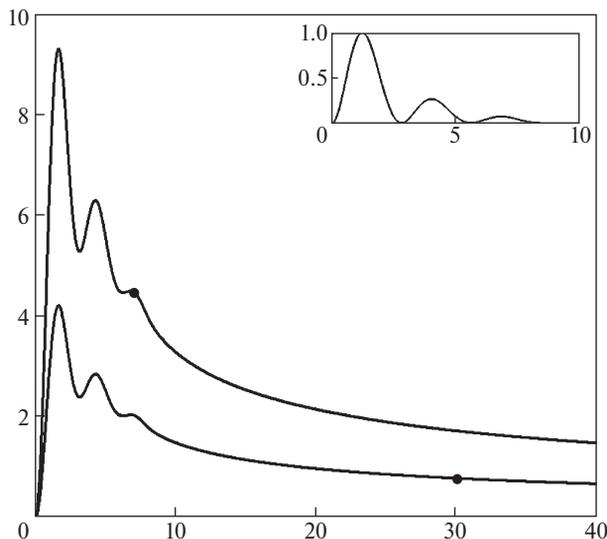


Рис. 9. Значения коэффициента интенсивности напряжений в зависимости от времени при воздействии в виде затухающих синусоид.

$$K(t) = \int_0^t \frac{\alpha \cdot P(s)}{\sqrt{t-s}} ds \quad (5.5)$$

где $\alpha = 2 \cdot c_2 \sqrt{c_1^2 - c_2^2} / (c_1 \cdot \sqrt{\pi c_1})$. Поскольку при проведении экспериментов в нагрузке $P(t)$ варьировалась только величина P_0 , значения коэффициентов интенсивности отличаются только множителем. Максимальное значение коэффициента интенсивности достигается в момент времени $t \approx 1.7$ мкс после начала нагружения.

Использование критерия инкубационного времени (2.1) позволяет рассчитать наблюдаемую в эксперименте зависимость момента начала разрушения от амплитуды приложенного импульса. Для данного материала было принято $\tau = 32$ мкс.

Расчет показывает, что для создаваемой в опытах нагрузки минимальная (пороговая) разрушающая амплитуда P_m составляет 94.7 МПа. Реализованные при проведении эксперимента нагрузки превосходили минимальную до более чем в 3 раза. Значения коэффициента интенсивности напряжений от момента приложения нагрузки до начала разрушения приведены на рис. 9. Верхняя кривая соответствует наибольшей реализованной в опытах амплитуде $P_m = 320$ МПа, а нижняя – наименьшей $P_m = 140$ МПа. По оси абсцисс откладывается время в мкс, а по оси ординат отношение значения текущего коэффициента интенсивности напряжений к статической вязкости разрушения – $K(t)/K_{Ic}$. Кружками обозначены моменты начала разрушения. В верхнем правом углу представлена зависимость нормированного приложенного импульса давления на берегах от времени в мкс. Видно, что разрушение происходит с заметной задержкой, тем большей, чем меньше амплитуда, причем значение текущего коэффициента интенсивности перед стартом трещины может падать в несколько раз. При этом время, прошедшее до момента старта трещины, может на порядок превосходить как время до максимума КИН, так и время действия приложенного импульса.

Отметим также, что задержка разрушения наблюдалась и при изучении откольного разрушения [4, 5, 14].

6. Заключение. Таким образом, на основе структурно-временного подхода аналитически установлено, что разрушение материалов с трещинами может происходить в широких пределах времен и традиционных критических характеристик ударно-волнового воздействия. Так, предельное значение коэффициента интенсивности напряжений (динамическая вязкость разрушения) для данного материала при импульсном воздействии принципиально нестабильно и может изменяться в довольно больших пределах. При этом может возникать принципиальный эффект задержки разрушения, которая становится особенно заметной в случае кратковременных воздействий, близких к пороговым.

Показано, что наблюдаемая в экспериментах задержка разрушения получает отчетливое объяснение в рамках подхода, базирующегося на понятии инкубационного времени разрушения. Найдены условия ее возникновения и приведены соответствующие аналитические формулы.

Из проведенного исследования следует вывод о принципиальной необходимости изучения пороговых случаев, в которых проявляются временные эффекты, не укладываемые в понятия прочности и трещиностойкости, базирующиеся на локальном предельном напряжении и/или критическом КИН. Именно поэтому экспериментальное и теоретическое исследования пороговых ситуаций, до сих пор не получившие достаточного распространения и освещения, являются принципиально важными и, авторы надеются, станут одним из новых направлений исследований процессов динамического разрушения и структурных превращений в сплошных средах.

Работа выполнена при поддержке РФФИ 20-01-00291. Материал разделов 1, 2, 4 был создан Ю.В. Петровым при поддержке РФФИ-БРИКС 18-51-80008.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Petrov Y.V., Utkin A.A.* Dependence of the dynamic strength on loading rate // *Sov. Mater. Science.* 1989. V. 25. № 2. P. 153–156.
<https://doi.org/10.1007/BF00780499>
2. *Ravi-Chandar K., Knauss W.G.* An experimental investigation into dynamic fracture: 1. Crack initiation and arrest // *Int. J. Fract.* 1984. V. 25. P. 247–262.
<https://doi.org/10.1007/BF00963460>
3. *Petrov Yu.V., Sitnikova E.V.* Dynamic cracking resistance of structural materials predicted from impact fracture of an aircraft alloy // *Tech. Phys.* 2004. V. 49. № 1. P. 57–60.
<https://doi.org/10.1134/1.1642679>
4. *Уткин А.А.* Задержка разрушения при отколе // Тез. докл. XI Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике. Казань, 2015. С. 3859–3860.
5. *Mikhailova N.V., Volkov G.A., Meshcheryakov Y.I., Petrov Y.V., Utkin A.A.* Failure-delay effect in destruction of steel samples under spalling conditions // *Tech. Phys.* 2017. V. 62. № 2. P. 547–552.
<https://doi.org/10.1134/S106378421704017X>
6. *Berezkin A.N., Krivosheev S.I., Petrov Yu.V., Utkin A.A.* Effect of delayed crack nucleation under threshold pulse loading // *Dokl. Phys.* 2000. V. 45. № 11. P. 617–619.
<https://doi.org/10.1134/1.1333869>
7. *Gruzdkov A.A., Petrov Y.V.* Cavitation breakup of low- and high-viscosity liquids // *Tech. Phys.* 2008. V. 53. № 3. P. 291–295.
<https://doi.org/10.1134/S106378420803002X>
8. *Bragov A.M., Karihaloo B.L., Petrov Yu.V., Konstantinov A.Yu., Lamzin D.A., Lomunov A.K., Smirnov I.V.* High-rate deformation and fracture of fiber reinforced concrete // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2012. V. 53. P. 926–933.
<https://doi.org/10.1134/S0021894412060168>
9. *Petrov Y.V., Smirnov I.V., Volkov G.A., Abramian A.K., Bragov A.M., Verichev S.N.* Dynamic failure of dry and fully saturated limestone samples based on incubation time concept // *J. Rock Mech. Geotech. Eng.* 2017. V. 9. № 1. P. 125–134.
<https://doi.org/10.1016/j.jrmge.2016.09.004>

10. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
11. *Freund L.B.* The analysis of elastodynamic crack tip stress fields // *Mechanics Today*. V. 3 / Ed. by *S. Nemat-Nasser*. New-York: Pergamon Press, 1976. P. 55–91.
12. *Homma H., Shockey D.A., Hada S.* Minimum time criterion -for crack instability in structural materials // *Fracture Mechanics*: V. 17 / Ed. by *John H. Underwood* et al. Philadelphia: ASTM International, 1986. P. 683–696.
13. *Krivosheev S.I., Petrov Yu.V.* Testing of dynamic property of materials under microsecond duration pressure created by the pulse current generator // *Proc. of the IX Intern. Conf. on Megagauss Magnetic Field Generation and Related Topics*. Moscow-St.-Petersburg, July 7–14, 2002 / Ed. by *Selimir V.D., Plyashkevich L.N.* Sarov: VNIIEF, 2004. P. 112–115.
14. *Petrov Y.V., Smirnov I.V., Utkin A.A.* Effects of strain-rate strength dependence in nanosecond load duration range // *Mech. Solids*. 2010. V. 45. № 3. P. 476–484.
<https://doi.org/10.3103/S0025654410030179>

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТАЛОСТНОЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ КОНСТРУКЦИОННЫХ СТАЛЕЙ ПРИ ОДНОЧАСТОТНОМ И ДВУХЧАСТОТНОМ НАГРУЖЕНИИ

© 2022 г. И. А. Волков^{a,*}, Л. А. Игумнов^{a,**}, Д. Н. Шишулин^{a,***}, Е. В. Боев^{a,****}

*^a Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского, Н. Новгород, Россия*

**e-mail: pmptmvgavt@yandex.ru*

***e-mail: igumnov@mech.unn.ru*

****e-mail: shishulindn@gmail.ru*

*****e-mail: e.boev87@mail.ru*

Поступила в редакцию 30.04.2021 г.

После доработки 03.08.2021 г.

Принята к публикации 24.09.2021 г.

В настоящей работе проведены исследования упругопластического поведения и ресурсных характеристик для широко используемых в промышленности конструкционных материалов при усталостном одночастотном и двухчастотном нагружении. Развита математическая модель механики поврежденной среды, позволяющая моделировать упругопластическое поведение и определять ресурсные характеристики для конструкционных материалов при усталостном нагружении. Рассматриваются процессы малоциклового и многоциклового усталости. Модель базируется на совместном интегрировании уравнений, описывающих кинетику напряженно-деформированного состояния и процессов накопления повреждений. Замыкающим соотношением является критерий прочности, выполнение которого соответствует образованию макротрещины.

Уравнения пластичности основываются на основных положениях теории течения. В основе соотношений, моделирующих накопление повреждений лежит энергетический подход к определению ресурсных характеристик. Кинетика накопления усталостных повреждений основана на введении скалярного параметра поврежденности конструкционного материала и единой энергетической форме представления механизма деградации в условиях малоциклового и многоциклового нагружения. По предложенной математической модели механики поврежденной среды проведены численные исследования процессов кинетики напряженно-деформированного состояния и разрушения поликристаллических материалов – сталей 20 и 08Х18Н12Т в условиях одночастотного и двухчастотного усталостного нагружения. Результаты оценки достоверности показали, что развитая модель с высокой степенью точности описывает процессы малоциклового и многоциклового усталости.

Ключевые слова: механика поврежденной среды, упругая деформация, пластическая деформация, поврежденность, численное моделирование, малоцикловая усталость, многоцикловая усталость, двухчастотное нагружение

DOI: 10.31857/S0572329922010111

1. Введение. Экспериментальные исследования усталости конструкционных материалов (поликристаллических металлов и их сплавов) позволяют сделать вывод, что

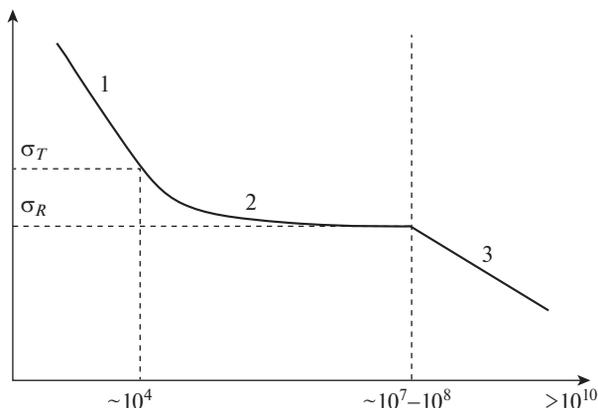


Рис. 1. Кривая усталости.

усталость условно можно разделить как минимум на три области (рис. 1), характеризующиеся особенностями протекающих процессов накопления повреждений — область малоцикловой усталости обозначена цифрой 1, область многоцикловой усталости обозначена цифрой 2 и область гигацикловой усталости обозначена цифрой 3 [1–4].

Основной характерной особенностью малоцикловой усталости (МЦУ) является наличие в процессе нагружения макроскопических пластических деформаций во всем рассматриваемом объеме конструкционного материала. Данную область циклического нагружения в условиях одноосного нагружения лабораторных образцов (растяжения–сжатия) условно ограничивают числом циклов до образования макротрещины равным 10^4 . Данный деградационный механизм характерен для зон с конструктивными концентраторами напряжений, такие как корень сварного шва, переходы с малыми радиусами скругления и т.п. с номинальными напряжениями в сечении конструктивного элемента $\sim 0.5\div 0.8$ от предела текучести σ_T и превышающим предел текучести в самом концентраторе. Для малоцикловой усталости характерны проявления эффектов упрочнения и разупрочнения материала, вызванные изменениями микроструктуры и фазового состава. При малоцикловой усталости кинетика образования и роста микродефектов зависит от истории нагружения конструкционного материала и его циклических свойств [5–7].

Характерной особенностью многоцикловой усталости (МнЦУ) является наличие в процессе циклического нагружения микроскопических пластических деформаций при уровнях интенсивности действующих напряжений меньших чем предел текучести и больше, чем предел выносливости σ_R на заданной базе числа циклов нагружения для конструкционного материала. Область многоциклового нагружения условно ограничивается числом циклов до образования макротрещины при одноосном нагружении лабораторных образцов (растяжении–сжатии) в диапазоне от 10^5 до 10^7 . При многоцикловой усталости материала накопление повреждений происходит за счет процессов на микро- и мезоуровнях вследствие микроскопической пластической деформации, реализующейся за счет пластического деформирования отдельных разнесенных зерен и их конгломератов по объему конструкционного материала [3, 4].

Гигацикловая усталость конструкционных материалов возникает при воздействии нагрузок не превосходящих предела выносливости σ_R . Накопление повреждений при гигацикловой усталости описывается физическими моделями развития микротрещин и микропор в районе точечных дефектов и включений в поликристаллическом мате-

риале [4]. Особенностью разрушения при гигацикловой усталости является превалирующее влияние на ресурсные характеристики конструкционных материалов стадии зарождения усталостных микротрещин, так как процессы накопления повреждений ассоциируются с дефектами различной физической природы. Качественным отличием гигацикловой усталости от МЦУ и МнЦУ является то, что зарождение дефектов и дальнейшее развитие поврежденности происходит в локальных объемах материала. В связи с этим возникает существенная проблема при решении задачи оценки ресурсных характеристик при гигацикловой усталости — необходимость формирования критериев перехода от эволюционного развития точечных и неравномерно распределенных дефектов к макроскопическому разрушению [3].

В [5–12] на базе основных положений механики поврежденной среды развита математическая модель, описывающая процессы кинетики напряженно-деформированного состояния и накопления повреждений в поликристаллических металлах и их сплавах при нерегулярном термосиловом нагружении. В [13, 16] для оценки ресурсных характеристик при многоциклового усталости приведен энергетический критерий и его экспериментальное обоснование.

Особое место при расчетах ресурсных характеристик машин и аппаратов новой техники, а также при продлении ресурса действующих инженерных объектов занимают виды нагружения в условиях которых реализуется суммарное воздействие от низкочастотных и высокочастотных нагрузок. Данный вид нагружения существенно влияет на пластические и ресурсные характеристики конструкционного материала. Достаточно большое количество работ, связанных с исследованиями процессов двухчастотного нагружения, посвящено разработке аналитических зависимостей для расчетной оценки ресурсных характеристик, однако они в основном основаны на критериальных подходах и не учитывают всей истории нагружения при эксплуатационном воздействии [13–16]. Необходимо отметить, что накопление повреждений при воздействии двухчастотного нагружения является существенно нелинейным процессом и определяющим образом зависит от кинетики напряженно-деформированного состояния и температуры нагружения. Анализ имеющихся экспериментальных данных при двухчастотном нагружении свидетельствует о существенном снижении циклической прочности по сравнению с одночастотным нагружением [14–17].

Таким образом, анализ экспериментальных и теоретических работ позволяет сделать вывод, что требуется научно-обоснованный подход к оценке ресурсных характеристик конструкционных материалов в условиях действия двух и более нагрузок, отличающихся по частоте и амплитуде воздействия. Подход должен основываться на физически обоснованных закономерностях, связывающих упругопластическое поведение материалов и ресурсные характеристики.

Один из подходов, позволяющих устранить данный недостаток, базируется на исследовании неупругих циклических деформаций как при раздельном, так и при двухчастотном нагружениях. Это особенно важно в связи с тем, что в ряде публикаций однозначно была показана взаимосвязь процессов неупругого деформирования и усталостного повреждения металлов [2, 13, 15, 16, 18].

Используемая в настоящей работе математическая модель механики поврежденной среды МПС [5–8] позволяет численно моделировать процессы кинетики напряженно-деформированного состояния при малоциклового и многоциклового усталости. Проверка достоверности полученных расчетных данных определялась из сравнения численных данных с результатами экспериментальных исследований.

2. Определяющие соотношения математической модели механики поврежденной среды. Основные гипотезы и положения для рассматриваемой математической модели МПС заключаются в том, что: рассматривается начально изотропный материал; рассматривается только анизотропия, связанная с процессами пластического деформирования; процесс поврежденности материала носит изотропный характер; тензоры

деформаций e_{ij} и их скоростей \dot{e}_{ij} являются суммой упругих e_{ij}^e, \dot{e}_{ij}^e и пластических компонент e_{ij}^p, \dot{e}_{ij}^p ; поверхность пластического нагружения описывается уравнением Мизеса; процессы деформирования характеризуются малыми деформациями; рассматривается только упругое изменение элементарного объема материала (пластическая несжимаемость); вводится скалярная мера поврежденности конструкционного материала ω , изменяющийся в диапазоне $\omega_o \leq \omega \leq \omega_f$; учитывается влияние поврежденности материала на процессы деформирования через тензор эффективных напряжений.

Математическая модель МПС состоит из соотношений, описывающих упругопластическое поведение конструкционного материала, уравнений накопления повреждений и критерия прочности поврежденного материала.

2.1. Определяющие соотношения пластичности. Принимается, что при упругом поведении материала девиаторная и шаровая составляющие тензоров напряжений и деформаций, а также их скоростей связаны обобщенным законом Гука:

$$\sigma = 3K[e - \alpha(T - T_0)], \quad \sigma_{ij} = 2Ge_{ij}^e, \quad \dot{\sigma} = 3K(\dot{e} - \dot{\alpha}T - \alpha\dot{T}) + \frac{\dot{K}}{K}\sigma$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G\dot{e}_{ij}^e + \frac{\dot{G}}{G}\sigma_{ij}$$

где $\alpha(T)$ – коэффициент линейного температурного расширения материала, $K(T)$ – модуль объемной упругости, $G(T)$ – модуль сдвига, T_0 – базовая температура, T – текущая температура.

Поверхность пластического нагружения описывается в виде:

$$F_{pl} = S_{ij}S_{ij} - C_{pl}^2 = 0, \quad S_{ij} = \sigma'_{ij} - \rho_{ij}$$

В пространстве пластических деформаций вводится поверхность “памяти”:

$$a_e = (e_{ij}^p - \xi_{ij})(e_{ij}^p - \xi_{ij}) - a_{e\max}^2 = 0 \quad (2.1)$$

где $a_{e\max}$ – максимальное значение интенсивности тензора пластических деформаций e_{ij}^p в процессе нагружения, ξ_{ij} – тензор односторонне накопленных пластических деформаций.

При численном моделировании кинетики напряженно-деформированного состояния при пластическом деформировании необходимо максимально точно описывать процессы упрочнения и разупрочнения конструкционных материалов, так как данные механизмы играют определяющую роль в точности оценок ресурсных характеристик. При усталостном нагружении реализуется конкуренция процессов упрочнения и разупрочнения вызванных в материале механизмами изменения фазового состава, микроструктурного состояния, изменением плотности дислокаций, а также влияние изменения температуры [19]. Физические механизмы, протекающие в поликристаллических металлах и сплавах, влияющие на процессы упрочнения и разупрочнения, зависят от действующей температуры, вида траектории деформирования, длины пути пластического деформирования, действующих амплитуд интенсивности пластической деформации и степени стабилизации процесса деформирования.

Для учета эффектов упрочнения и разупрочнения, проявляющихся вследствие протекания различных физических механизмов в поликристаллических металлах и их сплавах [20, 21], изменение радиуса поверхности пластического нагружения принимается в виде суммы скоростей изменений радиуса поверхности пластического нагружения при пластическом деформировании:

$$\dot{C}_{pl}(\chi, T) = \sum_{i=1}^h \dot{C}_{pl}^{(i)}(\chi) + \sum_{l=1}^k \dot{C}_{pl}^{(l)}(T)$$

где $\dot{C}_{pl}^{(i)}(\chi)$, $\dot{C}_{pl}^{(l)}(T)$ – скорости изменения радиуса поверхности пластического нагружения за счет вклада определенного физического механизма упрочнения либо разупрочнения конструкционного материала и изменения температуры; $\dot{C}_{pl}(\chi, T)$ – суммарная скорость изменения радиуса поверхности пластического нагружения определяемая аналогично интегральным по объему материала механическим макрохарактеристикам (предел пропорциональности, предел упругости, предел текучести) с учетом вклада каждого физического механизма:

$$\dot{C}_{pl}(\chi, T) = \left[\sum_{i=1}^n q_{\chi}^{(i)} f_m^{(i)}(a_e) + \sum_{j=1}^m a_j (Q_s^{(j)} - C_{pl}^{(j)}) f_c^{(j)}(a_e) \right] \dot{\chi} + \left[\sum_{l=1}^k q_T^{(l)} \right] \dot{T} \quad (2.2)$$

где $q_{\chi}^{(i)}$ – параметры монотонного упрочнения (разупрочнения) за счет вклада i -го физического механизма; a_j , $Q_s^{(j)}$ – параметры циклического упрочнения (разупрочнения) за счет вклада j -го физического механизма; $f_m^{(i)}(a_e)$ и $f_c^{(j)}(a_e)$ – функции учитывающие характер пластического деформирования, $q_T^{(l)}$ – параметры скорости изменения радиуса поверхности пластического нагружения за счет вклада l -го физического механизма при изменении температуры.

Зависимость (2.2) описывает изотропное упрочнение (разупрочнение) при монотонном пластическом деформировании (первый член в скобке при $\dot{\chi}$), циклическом деформировании (второй член в скобке при $\dot{\chi}$) и от скорости изменения температуры \dot{T} .

Экспериментальное определение параметров, входящих в зависимость (2.2), описывающих изменение радиуса поверхности пластического нагружения должно проводиться на основании опытов в которых возможно выделение физических механизмов процессов упрочнения либо разупрочнения, таких как фазовые превращения, изменение микроструктуры и плотности дислокаций, и определения их вклада, также данные процессы можно исследовать с получением их количественных характеристик с использованием дополнительных средств неразрушающего контроля (акустический, виброакустический и др. [22–24]).

При пластическом деформировании конструкционного материала изменение фазового состава материала приводит либо только к эффекту упрочнения либо разупрочнения, а при изменении микроструктурного состояния и дислокационной картины, может возникать как эффект упрочнения, так и эффект разупрочнения конструкционного материала в зависимости от вида текущей траектории деформирования, причем проявление эффекта существенно зависит от степени стабилизации процесса деформирования в пространстве пластических деформаций. Результаты экспериментальных исследований в работах [13, 15, 16] показывают, что двухчастотное нагружение в отличие от одночастотного приводит к разупрочнению исследуемых материалов, а также в процессе нагружения отсутствует стабилизация петли пластического гистерезиса, что сопровождается постоянным изменением центра ξ_{ij} в уравнении (2.1), описывающего поверхность “памяти” a_e в пространстве пластических деформаций. Таким образом, в диапазоне температур T , при которых можно пренебречь эффектами отжига и конкретизируя параметры в зависимости (2.2) изотропное упрочнение (разупрочнение) можно записать как:

$$\dot{C}_{pl} = q_{\chi} \dot{\chi}_m + a_c (Q_{s\chi} - C_{pl}) \dot{\chi}_c + a_{\xi} (Q_{s\xi} - C_{pl}) \dot{\chi}_{\xi} + q_T \dot{T} \quad (2.3)$$

$$C_{pl} = C_{pl}^0 + \int_0^t \dot{C}_{pl} dt \quad (2.4)$$

$$\dot{\chi} = \left(\frac{2}{3} \dot{e}_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p \right)^{1/2}, \quad \chi = \int_0^t \dot{\chi} dt, \quad \dot{\chi}_{\xi} = \left(\frac{2}{3} \dot{\xi}_{ij} \dot{\xi}_{ij} \right)^{1/2}, \quad \chi_{\xi} = \int_0^t \dot{\chi}_{\xi} dt \quad (2.5)$$

$$\dot{\chi}_m = \begin{cases} 0, a_e < 0 \vee e_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p \leq 0 \\ \dot{\chi}, a_e = 0 \wedge e_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p \geq 0 \end{cases}, \quad \dot{\chi}_c = \begin{cases} \dot{\chi}, a_e < 0 \vee e_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p \leq 0 \\ 0, a_e = 0 \wedge e_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p \geq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$q_{\chi} = q_2 A - (1 - A) q_1, \quad Q_{s_{\chi, \xi}} = Q_{2\chi, \xi} A + (1 - A) Q_{1\chi, \xi} \quad (2.7)$$

$$A = 1 - \cos^2 \Theta, \quad \cos \Theta = n_{ij}^e n_{ij}^s, \quad n_{ij}^e = \frac{\dot{e}_{ij}^p}{(\dot{e}_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p)^{1/2}}, \quad n_{ij}^s = \frac{S_{ij}}{(S_{ij} S_{ij})^{1/2}}$$

В зависимостях (2.3)–(2.7) введены следующие обозначения: C_{pl}^0 – радиус поверхности пластического нагружения для конструкционного материала в исходном состоянии, q_1, q_2, q_T – модули монотонного изотропного упрочнения (разупрочнения) при монотонных нагружениях по лучевым путям, при изломе траектории деформирования на 90° и изменении температуры; $Q_{1\chi, \xi}, Q_{2\chi, \xi}$ – модули циклического изотропного упрочнения (разупрочнения), при пропорциональном нагружении и при изломе траектории деформирования на 90° соответственно; $a_{c, \xi}$ – постоянные, определяющие скорость процесса стабилизации формы петли гистерезиса при циклическом нагружении материала; $Q_{s_{\chi, \xi}}$ – стационарные значения радиуса поверхности текучести в зависимости от $a_{e_{\max}}$ и температуры T ; $\dot{\chi}_m$ – скорость изменения длины траектории пластического деформирования материала на монотонных участках; $\dot{\chi}_c$ – скорость изменения длины траектории пластического деформирования материала на участках стабилизированного циклического деформирования без смещения центра поверхности a_e ; $\dot{\chi}_{\xi}$ – скорость изменения длины траектории пластического деформирования материала на участках циклического деформирования со смещением центра поверхности a_e (нестабилизированные участки траектории циклического деформирования).

Первый член уравнения (2.3) описывает изотропное упрочнение в результате монотонного пластического деформирования, второй член – циклическое упрочнение (разупрочнение) материала на стабилизированных участках циклического деформирования, третий член – циклическое разупрочнение (разупрочнение) материала при нестабилизированном циклическом деформировании, четвертый – изменение радиуса поверхности пластического нагружения при изменении температуры. Уравнение (2.4) описывает локальную анизотропию пластического упрочнения в зависимости от параметра непропорциональности нагружения A .

Эволюция тензора микронапряжений ρ_{ij} принимается в виде:

$$\dot{\rho}_{ij} = f(\chi) (\dot{\rho}_{ij}^m + \dot{\rho}_{ij}^p + \dot{\rho}_{ij}^r), \quad \rho_{ij} = \int_0^t \dot{\rho}_{ij} dt \quad (2.8)$$

$$\dot{\rho}_{ij}^m = g_1^m \dot{e}_{ij}^p - g_2^m \rho_{ij}^m \dot{\chi} + g_T^m \rho_{ij}^m \dot{T}$$

$$\dot{\rho}_{ij}^p = g_1^p \dot{e}_{ij}^p - g_2^p \rho_{ij}^p \dot{\chi} + g_T^p \rho_{ij}^p \dot{T}$$

$$\dot{\rho}_{ij}^r = g_1^r \dot{e}_{ij}^p - g_2^r \left(\frac{\rho_{\min}^r - \rho_u^r}{\rho_u^r} \right) \rho_{ij}^r \dot{\chi} \cos \gamma + g_T^r \rho_{ij}^r \dot{T}$$

$$\cos \gamma = \begin{cases} \left| \frac{\dot{\rho}_{ij}^r}{(\dot{\rho}_{ij}^r)^{1/2} (\rho_{ij}^r)^{1/2}} \right|, & \cos \gamma < 0 \\ 0, & \cos \gamma > 0 \end{cases}, \quad \rho_u^r = (\rho_{ij}^r \rho_{ij}^r)^{1/2}$$

$$g_T^{m,p,r} = \frac{1}{g_1^{m,p,r}} \left[\frac{\partial g_1^{m,p,r}}{\partial T} \right]$$

$$f(\chi) = f(\chi_m) + f(\chi_c) + f(\chi_\xi)$$

$$f(\chi_{m,c,\xi}) = 1 + k_1^{m,c,\xi} (1 - e^{-k_2^{m,c,\xi} \chi_{m,c,\xi}})$$

где $g_1^{m,p,r}$, $g_2^{m,p,r}$, $k_1^{m,c,\xi}$, $k_2^{m,c,\xi}$ – материальные параметры, определяющиеся экспериментальным путем.

В формуле (2.8) первый член, указанный в скобках описывает эволюцию ρ_{ij} , связанного с образованием и эволюцией микропластических деформаций; второй – с образованием макроскопических пластических деформаций; третий – при односторонне накапливаемых пластических деформациях ξ_{ij} .

Зависимость (2.8) позволяет описывать основные эффекты анизотропии, вызванной неупругим деформированием при знакопеременном нагружении, а также эффекты, возникающие при реализации жестких (“посадка” петли гистерезиса) и мягких режимов нагружения (“вышагивание” петли гистерезиса).

Функция $f(\chi)$ описывает изменение ρ_{ij} в случае зависимости параметров $g_1^{m,p,r}$, $g_2^{m,p,r}$ от длины пути пластического деформирования χ при монотонном, циклическом стабилизированном и нестабилизированном деформировании и связанная с физическими механизмами протекающими в процессе пластического нагружения, изменяющими фазовый состав конструкционного материала, дислокационная плотность и др.

Тензор скоростей пластических \dot{e}_{ij}^p деформаций определяется на основе ассоциированного с поверхностью активного нагружения закона течения:

$$\dot{e}_{ij}^p = \lambda_p S_{ij}$$

Влияние накопленной поврежденности учитывается через эффективные значения гидростатической и девиаторной части тензора напряжений. Эффективные значения компонент тензора напряжений определяются через эффективные значения модулей упругости [7] с учетом влияния на них величины накопленной поврежденности ω :

$$\tilde{\sigma}'_{ij} = F_1(\omega) \sigma'_{ij} = \frac{G}{\tilde{G}} \sigma'_{ij} = \frac{\sigma'_{ij}}{(1-\omega) \left[1 - \frac{(6K+12G)}{(9K+8G)} \omega \right]}$$

$$\tilde{\sigma} = F_2(\omega) \sigma = \frac{K}{\tilde{K}} \sigma = \frac{\sigma}{4G(1-\omega)/(4G+3K\omega)}$$

$$\tilde{\rho}_{ij}^{(n)} = F_1(\omega) \rho_{ij}^{(n)}, \quad n = m, p, r$$

где $F_{1,2}(\omega)$ – функции Мак-Кензи [7].

2.2. Уравнения накопления повреждений при малоцикловой и многоцикловой усталости. Уравнения накопления повреждений базируются на связи величины поврежденности с макроскопическими параметрами, которые могут быть экспериментально определены. Наиболее физически обоснованным и апробированным является энергетический подход [7, 8, 10, 18] при определении ресурсных характеристик поликристаллических

тел. Новожиловым В.В. установлена зависимость рассеянной энергии, затраченной на образование дефектов при малоцикловом нагружении, с работой тензора микронапряжений ρ_{ij} на пластических деформациях e_{ij}^p

$$\dot{W}_p = \rho_{ij} \dot{e}_{ij}^p, \quad W_p = \int \rho_{ij} de_{ij}^p$$

Ресурсные характеристики при МнЦУ определяются с использованием подхода [13], основанного на энергетическом критерии, который записывается следующим выражением:

$$\sum_{i=1}^{N_p} \left[\Delta W_i - \Delta W_R \left(\frac{\Delta W_i}{\Delta W_R} \right)^\alpha \right] = \Delta W_o = \text{const} \quad (2.9)$$

где ΔW_o – опасная часть рассеянной энергии за цикл нагружения, коррелирующей с энергией затраченной на образование микродефектов; ΔW_i – полная рассеянная энергия за цикл нагружения; ΔW_R – рассеянная энергия за цикл нагружения при напряжении равном пределу выносливости.

Рассмотрим выражение (2.9) для одного цикла нагружения в следующем виде:

$$\Delta W_o = \Delta W_i - \Delta W_R \left(\frac{\Delta W_i}{\Delta W_R} \right)^\alpha = \Delta W_i - \Delta W_H \quad (2.10)$$

где $\Delta W_H = \Delta W_R \left(\frac{\Delta W_i}{\Delta W_R} \right)^\alpha$ – неопасная часть рассеянной энергии за цикл нагружения, связанной с фазовыми переходами, структурными изменениями и процессами тепловыделения.

В работе [11] Коротких Ю.Г. конкретизировал соотношение (2.10) на случай регулярного циклического нагружения в виде:

$$\Delta W_e^{on} = \Delta W_e [1 - f(\gamma)], \quad \gamma = \sigma_u / \sigma_u^R \quad (2.11)$$

где σ_u – интенсивность тензора напряжений; σ_u^R – интенсивность тензора напряжений, равная условному пределу выносливости материала σ_R ; $f(\gamma)$ – функция, характеризующая степень влияния механизма МнЦУ на кривую усталости.

На основе (2.9) и (2.11), выражение для опасной энергии за один цикл нагружения представим в следующем виде:

$$\Delta W_o = \Delta W_i [1 - f(\gamma)]$$

$$f(\gamma) = \frac{\Delta W_H(\gamma)}{\Delta W_i(\gamma)}$$

Функция $f(\gamma)$, учитывает относительную величину неопасной энергии в полной рассеянной энергии, затраченной на пластическое деформирование и зависящая от параметра γ , характеризующего относительный уровень действующих максимальных напряжений в цикле нагружения.

$$\gamma = \frac{\tilde{\sigma}_u^*}{\tilde{\sigma}_{hcf}^*}, \quad \tilde{\sigma}_u^* = [(\sigma_{ij}^i - \rho_{ij}^r)(\sigma_{ij}^i - \rho_{ij}^r)]^{1/2} \quad (2.12)$$

$$\tilde{\sigma}_{hcf} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{hcf} + \int_0^t \dot{C}_{pl}^c dt, \quad \dot{C}_{pl}^c = a_c (Q_{s\chi} - C_{pl}) \dot{\chi}_c + a_\xi (Q_{s\xi} - C_{pl}) \dot{\chi}_\xi + q_T \dot{T}$$

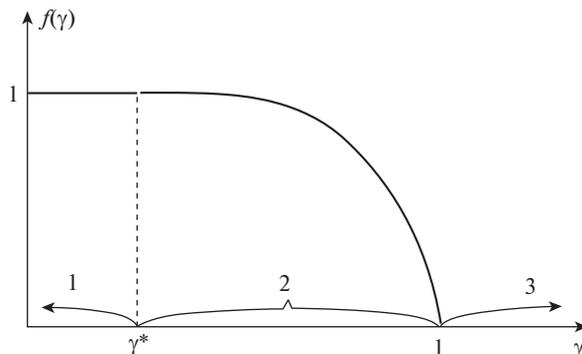


Рис. 2. Графическое представление функции $f(\gamma)$.

В выражении (2.12) $\tilde{\sigma}_u^*$ – нормированная интенсивность девиатора тензора напряжений; $\tilde{\sigma}_{hcf}$ – значение интенсивности напряжений при котором происходит переход от механизма МЦУ к МнЦУ с учетом процессов упрочнения (разупрочнения) конструкционного материала (точка перегиба на полной кривой усталости), σ_{hcf} – константа материала.

Для определения ресурсных характеристик поликристаллических металлов и их сплавов при деградации материала по механизмам МЦУ и МнЦУ в качестве энергии повреждения, принимается соотношение:

$$\Delta W_o = \sum_{i=1}^{N_f} \Delta W_i [1 - f(\gamma)]$$

Функция $f(\gamma)$ зависит от параметра $\gamma = \sigma_u / C_p$, характеризующего относительный уровень действующих напряжений в цикле нагружения:

$$f(\gamma) = \begin{cases} 0, & \gamma > 1 \\ 1 - \left(\frac{\gamma - \gamma^*}{1 - \gamma^*} \right)^n, & \gamma^* \leq \gamma \leq 1 \\ 1, & \gamma < \gamma^* \end{cases}$$

На рис. 2 приведено графическое представление функции $f(\gamma)$ (1 – область гигациклового усталости, 2 – область многоциклового усталости, 3 – область малоциклового усталости).

В задачах оценки ресурсных характеристик необходимо учитывать влияние многоосности нагружения, наличие которой существенным образом снижает ресурс за счет как увеличения действующих компонент тензора деформаций и напряжений при пропорциональном нагружении так и за счет вращения главных площадок тензоров напряжений и деформаций при непропорциональном нагружении.

Многочисленные исследования влияния многоосности нагружения при различных видах напряженных состояний таких как двухосное растяжение–сжатие, трехосное растяжение и др. позволяют сделать вывод, что на ресурс оказывает существенное влияние “объемность” напряженного состояния $\beta = \sigma / \sigma_u$, где σ – гидростатическая компонента тензора напряжений, σ_u – интенсивность тензора напряжений.

Учет влияния “объемности” напряженного состояния на скорость роста поврежденности $\dot{\omega}$ производится за счет введения в уравнение скорости накопления повреждений функции $f_1(\beta)$, которая увеличивает скорость накопления повреждений $\dot{\omega}$ при нагружениях с $\beta \rightarrow +\infty$ и уменьшает скорость при $\beta \rightarrow -\infty$. При нагружениях с $\beta \rightarrow -\infty$ в некоторых поликристаллических металлах и сплавах возможно частичное уменьшение накопленной поврежденности (эффект “залечивания”). При нагружениях с $\beta = 0$ (чистый сдвиг) функция $f_1(\beta) = 1$.

В условиях непропорционального нагружения, при котором направляющие тензора напряжений и деформаций не соосны реализуемая траектория деформирования существенным образом влияет на кинетику напряженно-деформированного состояния и на ресурсные характеристики конструкционного материала.

Учитывая рассмотренные эффекты, влияющие на ресурсные характеристики, уравнение для скорости накопления усталостных повреждений в условиях малоциклового и многоциклового нагружения можно представить в виде:

$$\dot{\omega}_p = f_1(\beta) f_2(\omega_p) f_3(W_p) \dot{W}_p \quad (2.13)$$

В (2.13) введены следующие обозначения для функций:

$f_1(\beta)$ – учет влияния “объемности” напряженного состояния;

$f_2(\omega_p)$ – учет влияния накопленного уровня поврежденности на скорость накопления повреждений;

$f_3(W_p)$ – учет текущего относительного уровня рассеянной энергии, идущей на образование микродефектов.

$$f_1(\beta) = \exp(k_p \beta)$$

$$f_2(\omega_p) = \begin{cases} 0, & W_p \leq W_{pa} \\ c \omega_p^{-1/3} (1 - \omega_p)^{-2/3}, & W_p > W_{pa} \end{cases}$$

$$f_3(W_p) = \frac{W_p - W_{pa}}{W_{pf} - W_{pa}}$$

где c – константа интегрирования ($c \cong 0.806$).

Принимается, что кинетика накопления повреждений состоит из двух последовательных стадий – зарождения микродефектов и их слияния. Данные стадии разграничиваются значением величины рассеянной энергии W_p^a . Образование макродефекта происходит при достижении величины рассеянной энергии значения W_p^f .

2.3. Критерий прочности поврежденного материала. В качестве критерия прочности поврежденного материала принимается достижение накопленной поврежденности ω критического значения $\omega_f \leq 1$.

$$\omega = \omega_f \leq 1$$

3. Численные результаты. В работе [25] приведены результаты экспериментальных исследований циклического неупругого деформирования и закономерностей усталостного разрушения при действии одночастотного и двухчастотного нагружения для сталей 20 и 08X18H12T. Исследования усталостного разрушения проводили на испытательной машине МИР-СТ при симметричном и несимметричном нагружении в условиях одноосного растяжения–сжатия лабораторных образцов.

Испытывались цилиндрические гладкие образцы широко используемых конструкционных сталей: углеродистой стали 20 в состоянии поставки и стали аустенитного класса 08X18H12T(1) – в состоянии поставки и 08X18H12T(2) – после эксплуатационной наработки.

Таблица 1. Физико-механические характеристики и параметры модели МПС конструкционных сталей

Характеристики	Материал		
	08X18H12T(1)	08X18H12T(2)	Сталь 20
K (МПа)	166667	166667	166667
G (МПа)	76923	76923	76923
C_{pl}^o (МПа)	85	90	82
g_1^m , (МПа)	400000	400000	200000
g_2^m	5600	5600	2000
g_1^p , (МПа)	24090	24090	19000
g_2^p	289	289	224
g_1^r (МПа)	4000	4000	1200
g_2^r	0	0	0
a_ξ	5	5	6
W_a (МДж/м ³)	0	0	0
W_p^f (МДж/м ³)	2900	2884	13980
σ_{hcf} , МПа	220	240	280
γ^*	0.8182	0.8400	0.7473
n	1.55	3.1	1.05

Каждый из указанных конструкционных материалов испытывали при следующих режимах нагружения: циклическое нагружение с частотой 34 Гц при симметричном цикле; циклическое нагружение с частотой 34 Гц с асимметрией в цикле, среднее напряжение $\sigma_m = 50$ МПа; циклическое нагружение с частотой 0.082 Гц с асимметрией в цикле, среднее напряжение $\sigma_m = 50$ МПа; циклическое нагружение реализуемое за счет изменения среднего напряжения в цикле σ_m в пределах от 0 до 100 МПа с частотой 0.082 Гц при циклическом нагружении с частотой 34 Гц (двухчастотное нагружение).

Результатом экспериментальных исследований явились кривые усталости для сталей 20 и 08X18H12T при указанных режимах нагружения.

В таблицах 1–3 для исследуемых сталей приведены физико-механические характеристики и материальные параметры МПС.

Значение модуля монотонного изотропного упрочнения q_1 и q_2 от длины траектории пластического деформирования χ для сталей аустенитного класса 08X18H12T(1) и 08X18H12T(2) приняты равными нулю.

На рис. 3–4 приведены расчетные кривые одноосного растяжения для сталей 2008X18H12T(1), 08X18H12T(2) и стали 20.

На рис. 5–7 приведено сравнение результатов расчетных и экспериментальных кривых усталости для сталей 08X18H12T(1), 08X18H12T(2), стали 20 соответственно, а также приведены расчетные кривые полной рассеянной энергии W , затраченной на пластическое деформирование и “опасной” части полной энергии W_o , коррелирующей

Таблица 2. Значение модуля монотонного изотропного упрочнения q_1 (МПа) от длины траектории пластического деформирования $\chi_{\text{мон}}$ для среднеуглеродистой стали 20 ($q_2 = 0$)

χ	0	0.0006	0.0012	0.0024	0.0042	0.006	0.0102	0.0132	0.015
q_1 , МПа	0	0	-11709	-11170	-10360	3200	280	120	0

Таблица 3. Значение модуля циклического изотропного упрочнения $Q_{1\xi}$ (МПа) от длины траектории пластического деформирования a_{emax} 08X18H12T (1) ($Q_{2\xi} = 0$ для всех рассмотренных сталей)

Сталь 08X18H12T(1)							
a_{emax}	0	0.00015	0.000162	0.000165	0.000192	0.000248	0.000350
$Q_{1\xi}$, МПа	25	30	39	54	78	84	85
Сталь 08X18H12T(1)							
a_{emax}	0	0.00024	0.000266	0.000284	0.000331	0.00035	0.0004
$Q_{1\xi}$, МПа	25	32	43	61	77	82	90
Сталь 20							
a_{emax}	0	0.0004	0.000451	0.000508	0.000591	0.00075	0.0001
$Q_{1\xi}$, МПа	30	52	55	65	70	74	78

щей с энергией, затраченной на образование микродефектов в зависимости от числа циклов нагружения. На рис. 5,а, 6,а и 7,а представлены зависимости амплитуды напряжения от числа циклов, пунктирными линиями отмечены осредненные опытные данные, черными маркерами – результаты расчетов по предложенной модели МПС, а черными крестиками – экспериментальные точки. Из сравнения экспериментальных и расчетных кривых усталости (рис. 5,а, 6,а и 7,а) видно, что расчеты по модели МПС качественно и количественно совпадают с опытными данными. Численные данные по зависимостям рассеянной энергии от числа циклов (рис. 5,б – $\sigma_{11}^a = 300$ МПа, 5,с – $\sigma_{11}^a = 200$ МПа, 5,д – $\sigma_{11}^a = 190$ МПа, 6,б – $\sigma_{11}^a = 300$ МПа, 6,с – $\sigma_{11}^a = 230$ МПа,

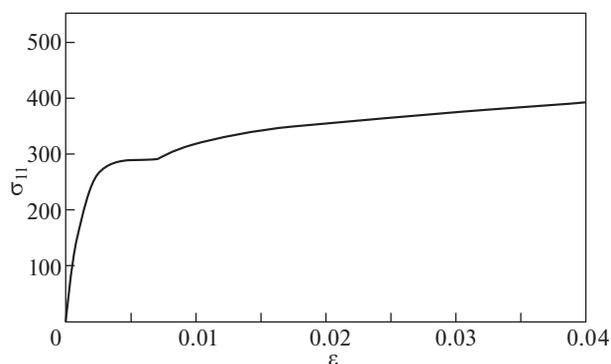


Рис. 3. Расчетная диаграмма растяжения для стали 20.

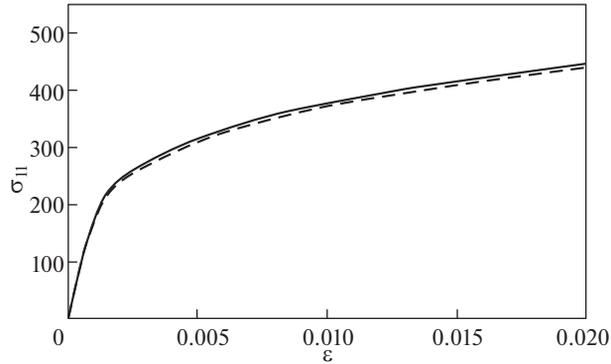


Рис. 4. Расчетные диаграммы растяжения сталей: — 2008X18H12T(1), - - - - 08X18H12T(2).

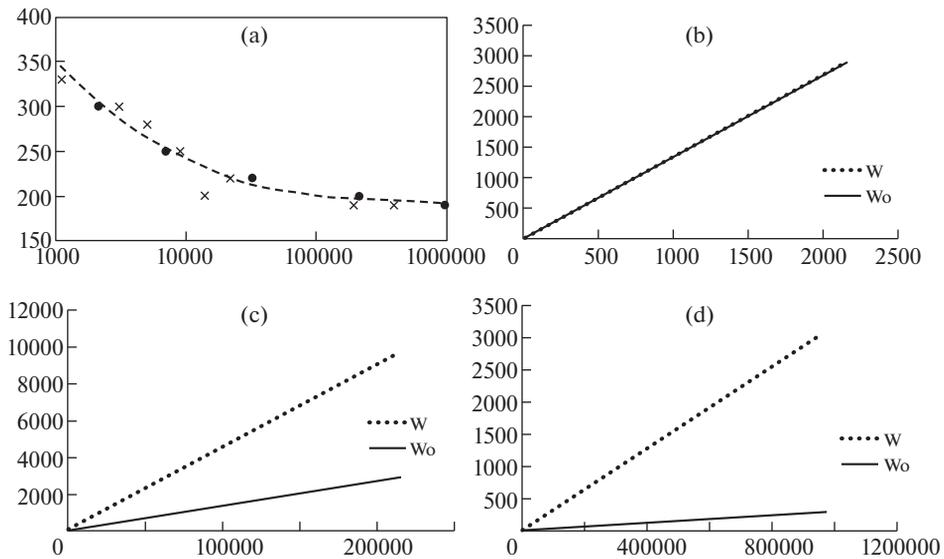


Рис. 5. Кривая усталости для стали 08X18H12T(1) при одночастотном нагружении (а).

6,d – $\sigma_{11}^a = 215$ МПа, 7,b – $\sigma_{11}^a = 330$ МПа, 7,c – $\sigma_{11}^a = 240$ МПа, 7,d – $\sigma_{11}^a = 215$ МПа) показывают, что в области МЦУ кривые полной рассеянной энергии $W(N)$ и ее “опасной части” $W_0(N)$ совпадают, но по мере уменьшения амплитуды нагружения данные кривые расходятся и тем больше, чем меньше амплитуда нагружения. Данный эффект связан с тем, что у “неопасной” части рассеянной полной энергии W_n наблюдается незначительная амплитудная зависимость только в области МЦУ, тогда как при МнЦУ амплитудная зависимость W_n вносит значительный вклад в полную рассеянную [13, 16].

На рис. 8–10 приведены результаты сравнения расчетных и экспериментальных кривых усталости при двухчастотном нагружении для сталей 08X18H12T(1), 08X18H12T(2) и стали 20 в циклах высокой частоты. На рис. 11–13 приведены резуль-

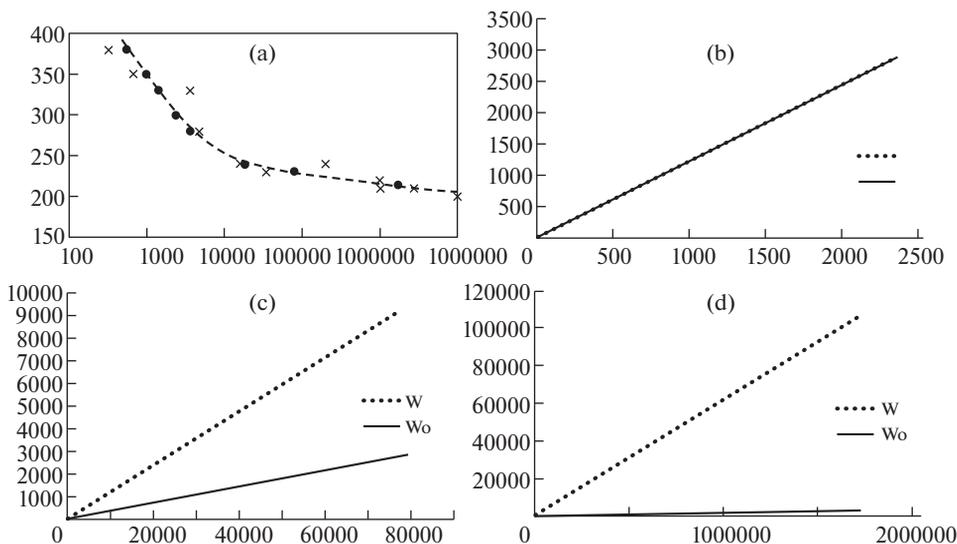


Рис. 6. Кривая усталости для стали 08X18H12T(2) при одночастотном нагружении (а).

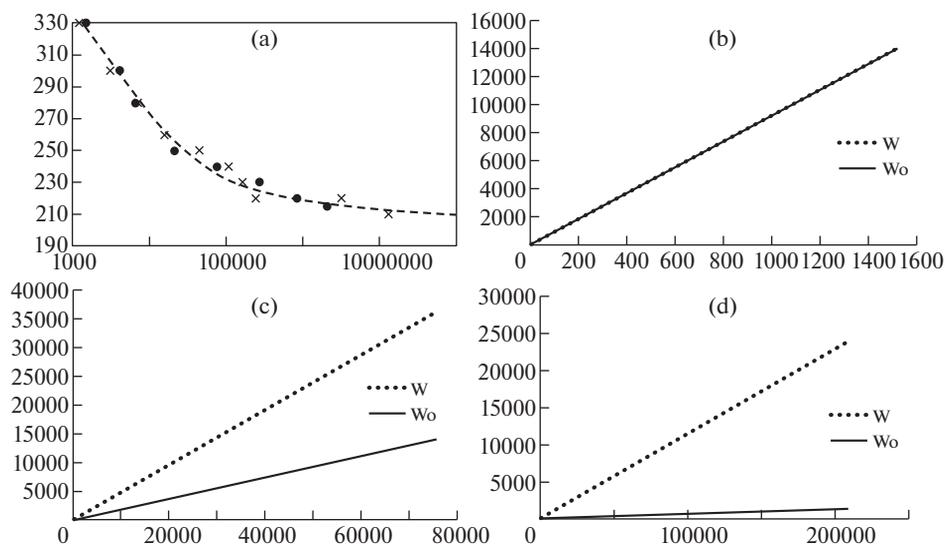


Рис. 7. Кривая усталости для стали 20 при одночастотном нагружении (а).

таты сравнения расчетных и экспериментальных кривых усталости при двухчастотном нагружении для сталей 08X18H12T(1), 08X18H12T(2) и стали 20 в циклах низкой частоты. Здесь пунктирными линиями отмечены расчетные данные при одночастотном нагружении, сплошной черной линией отмечены расчетные данные при двухчастотном нагружении, а черными маркерами – экспериментальные результаты при двухчастотном нагружении. Из представленных рисунков видно, что расчетные зна-

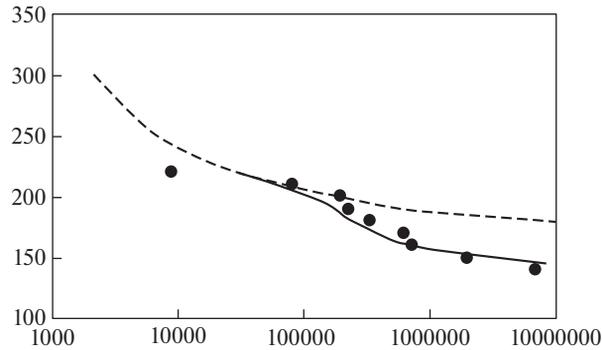


Рис. 8. Кривая усталости для стали 08X18H12T(1) при двухчастотном нагружении в циклах высокой частоты.

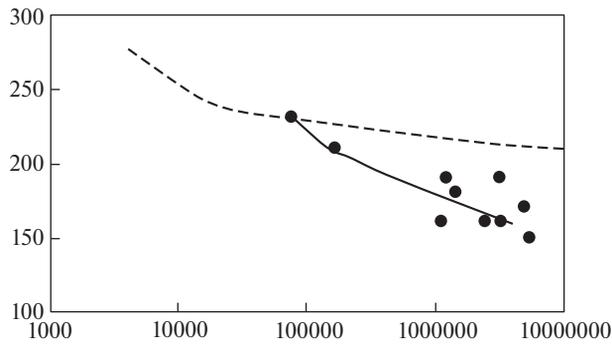


Рис. 9. Кривая усталости для стали 08X18H12T(2) при двухчастотном нагружении в циклах высокой частоты.

чения по математической модели МПС качественно и количественно совпадают с экспериментальными результатами.

На рис. 14–16 приведено сравнение расчетных стабилизированных петель гистерезиса для одночастотного (пунктирная линия) и двухчастотного нагружения (сплошная линия), из которого виден эффект роста размаха циклической пластической де-

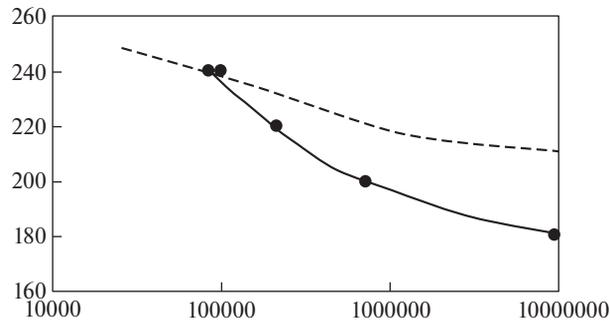


Рис. 10. Кривая усталости для стали 20 при двухчастотном нагружении в циклах высокой частоты.

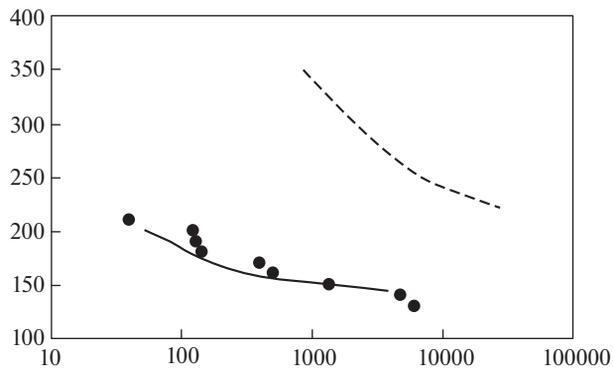


Рис. 11. Кривая усталости для стали 08X18N12T(1) при двухчастотном нагружении в циклах низкой частоты.

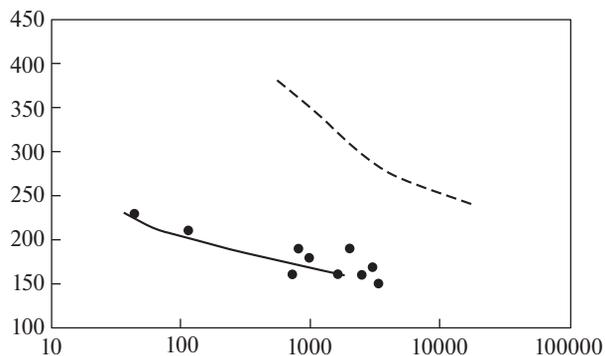


Рис. 12. Кривая усталости для стали 08X18N12T(2) при двухчастотном нагружении в циклах низкой частоты.

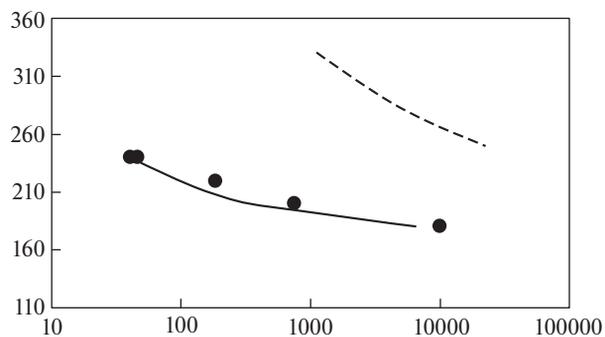


Рис. 13. Кривая усталости для стали 20 при двухчастотном нагружении в циклах низкой частоты.

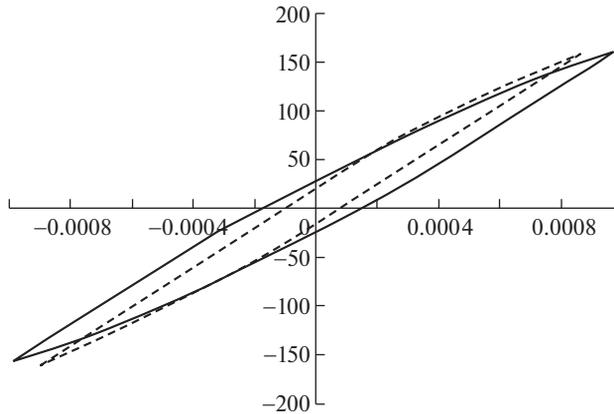


Рис. 14. Сравнение петель пластического гистерезиса при одночастотном и двухчастотном нагружении для стали 08X18N12T(1).

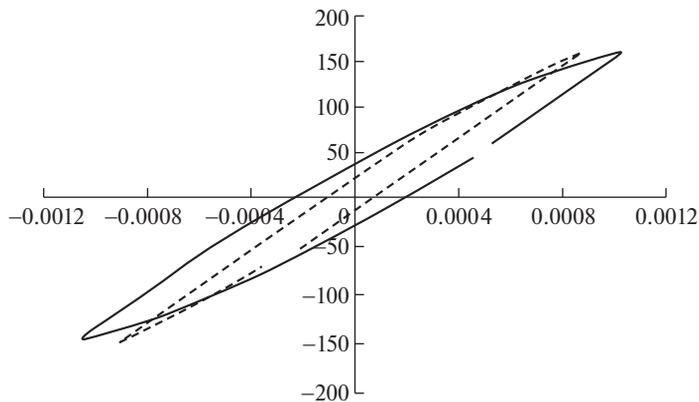


Рис. 15. Сравнение петель пластического гистерезиса при одночастотном и двухчастотном нагружении для стали 08X18N12T(2).

формации при двухчастотной форме цикла в сравнении с одночастотным нагружением при эквивалентной величине амплитуды напряжений, что связано со снижением сопротивления деформированию материалов (для лучшей визуализации петли нормированы к началу координатной сетки).

4. Заключение. Развита математическая модель МПС, описывающая процессы деформирования и накопления повреждений при усталостном нагружении, основанная на энергетическом подходе и единой форме представления процесса накопления повреждений при малоциклового и многоциклового усталости. Для математической модели определены параметры и скалярные функции, входящие в определяющие соотношения математической модели МПС. В рамках оценки достоверности развитой математической модели механики поврежденной среды проведены численные исследования процессов усталостного разрушения конструкционных материалов – сталей 20 и 08X18N12T в условиях одночастотного и двухчастотного нагружения. Результаты оценки достоверности

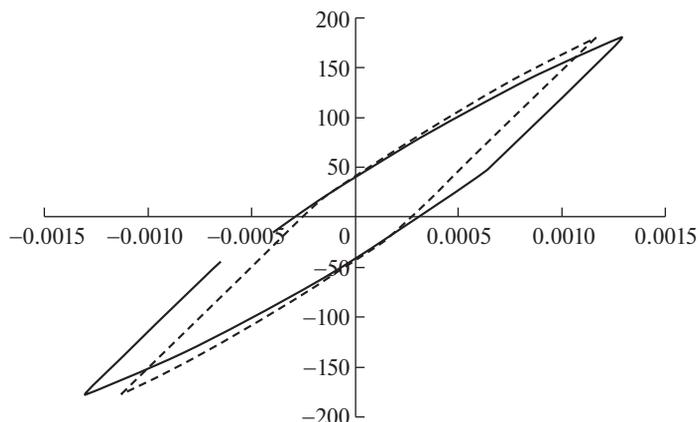


Рис. 16. Сравнение петель пластического гистерезиса при одночастотном и двухчастотном нагружении для стали 20.

показали, что развитая модель с высокой степенью точности описывает процессы малоциклового и многоциклового усталости.

Благодарности. Численные исследования стали 08X18H12T выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 0729-2020-0054). Численные исследования стали 20 выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-08-00450).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ. Предсказание. Предотвращение. М.: Мир, 1984. 624 с.
2. Троценко В.Т. Деформирование и разрушение металлов при многоциклоном нагружении. Киев: Наук. думка, 1981. 343 с.
3. Банников М.В., Оборин В.А., Наймарк О.Б. Исследование стадийности разрушения титановых сплавов в режиме много- и гигацикловой усталости на основе морфологии поверхности разрушения // Вестник ПНИПУ. Механика. 2015. № 3. С. 15–24. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.3.02>
4. Терентьев В.Ф. Механизм зарождения усталостных трещин в высокопрочных сталях при гигацикловой усталости // XIII International Colloquium “Mechanical fatigue of metals”. Plenary papers. Ternopil, Ukraine: TDTU, 2006. С. 135–140.
5. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. М.: Физматлит, 2008. 424 с.
6. Волков И.А., Игумнов Л.А. Введение в континуальную механику поврежденной среды. М.: Физматлит, 2017. 304 с.
7. Волков И.А., Игумнов Л.А., Тарасов И.С., Шишулин Д.Н., Пичков С.Н., Маркова М.Т. Моделирование пластического деформирования поликристаллических конструкционных сплавов при блочных несимметричных режимах мягкого малоциклового нагружения // Проблемы прочности и пластичности. 2019. Т. 81. № 1. С. 63–76. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2019-81-1-63-76>
8. Волков И.А., Игумнов Л.А., Коротких Ю.Г., Казаков Д.А., Емельянов А.А., Тарасов И.С., Гусева М.А. Программная реализация процессов вязкопластического деформирования и накопления повреждений в конструкционных сплавах при термомеханическом нагружении // Пробле-

- мы прочности и пластичности. 2016. Т. 78. № 2. С. 188–207.
<https://doi.org/10.32326/1814-9146-2016-78-2-188-207>
9. *Chaboche J.-L., Kanouté P., Azzouz F.* Cyclic inelastic constitutive equations and their impact on the fatigue life predictions // *Int. J. Plasticity*. 2012. V. 35. P. 44–66.
<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.01.010>
 10. *Волков И.А., Коротких Ю.Г.* Моделирование процессов усталостной долговечности материалов и конструкций при малоцикловом нагружении // *Изв. РАН. МТТ*. 2014. № 3. С. 66–78.
 11. *Большухин М.А., Зверев Д.Л., Кайдалов В.Б., Коротких Ю.Г.* Оценка долговечности конструкционных материалов при совместных процессах малоциклового и многоциклового усталости // *Проблемы прочности и пластичности*. 2010. Т. 72. С. 28–35.
<https://doi.org/10.32326/1814-9146-2010-72-1-29-35>
 12. *Бондарь В.С., Данишин В.В., Кондратенко А.А.* Вариант теории термовязкопластичности // *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2016. № 1. С. 39–56.
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.1.03>
 13. *Троценко В.Т.* Рассеянное усталостное повреждение металлов и сплавов. Сообщение 3. Деформационные энергетические критерии // *Проблемы прочности*. 2006. № 1. С. 5–31.
 14. *Гаденин М.М.* Исследование повреждаемости и долговечности конструкций при одно- и двухчастотных режимах нагружения на основе деформационных и энергетических подходов // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. 2017. № 83 (6). С. 44–51.
 15. *Гаденин М.М.* Влияние формы цикла нагружения на сопротивление циклическому деформированию и разрушению конструкционных материалов // *Вестник научно-технического развития*. 2010. № 9 (37). С. 15–19.
 16. *Хамаза Л.А., Коваленко В.А.* Сопротивление металлов усталостному разрушению и деформированию при двухчастотном нагружении. Сообщение 2. Методика оценки циклической долговечности при двухчастотном нагружении // *Проблемы прочности*. 1989. № 10. С. 13–18.
 17. *Порошин В.Б., Дружинин П.С., Шахова С.А.* Методика оценки долговечности лопатки газовой турбины в условиях неупругого деформирования при двухчастотном нагружении // *II Международная научно-техническая конференция “Пром–Инжиниринг”*. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2016 С. 36–43.
 18. *Бондарь В.С., Данишин В.В., Алхимов Д.А.* Анализ циклического деформирования и мало-многоциклового усталости в условиях одноосного напряженного состояния // *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2016. № 4. С. 52–71.
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.4.04>
 19. *Мовчан Б.А., Фирстов С.А., Луговской Ю.Ф.* Структура, прочность и сопротивление усталости микроструктурных и микрослойных материалов. Киев: Наукова думка, 2016. 170 с.
 20. *Гольдштейн М.И., Литвинов В.С., Бронфин Б.М.* Металлофизика высокопрочных сплавов. М.: Металлургия, 1986. 312 с.
 21. *Пиккеринг Ф.Б.* Физическое металловедение и разработка сталей. М.: Металлургия, 1982. 184 с.
 22. *Хлыбов А.А., Углов А.Л.* Исследование накопления усталостных повреждений в образцах из стали 08X18H10T при малоциклового усталости // *Изв. высших учебных заведений. Черная металлургия*. 2016. Т. 59. № 3. С. 185–190.
<https://doi.org/10.17073/0368-0797-2016-3-185-190>
 23. *Углов А.Л., Ерофеев В.И., Смирнов А.Н.* Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации / Отв. ред. *Ф.М. Митенков*. М.: Наука, 2009. 280 с.
 24. *Муравьев В.В., Зуев Л.Б., Комаров К.Л.* Скорость звука и структура сталей и сплавов. Новосибирск: Наука, 1996. 183 с.
 25. *Хамаза Л.А., Коваленко В.А.* Сопротивление металлов усталостному разрушению и деформированию при двухчастотном нагружении. Сообщение 1. Методика и результаты исследования усталости и неупругости металлов при двухчастотном циклическом нагружении // *Проблемы прочности*. 1989. № 10. С. 7–13.

УДК 539.3

МОДЕЛЬ ДЛЯ АНАЛИЗА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ВЫРЕЗАМИ

© 2022 г. В. Н. Бакулин^{а,*}

^а *Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия*

**e-mail: vbak@yandex.ru*

Поступила в редакцию 20.03.2021 г.

После доработки 22.03.2021 г.

Принята к публикации 29.03.2021 г.

Рассматривается построение модели для послойного анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек вращения с прямоугольными вырезами. Провести послойный анализ для оболочек с прямоугольными вырезами аналитическими методами, как правило, не удастся из-за математических трудностей, поэтому применяется конечно-элементный подход. Модели послойного анализа отличаются большой размерностью, а наличие вырезов приводит к необходимости измельчения сетки разбиений, что еще более увеличивает размерность задачи, для уменьшения которой применены эффективные функции аппроксимаций деформаций и перемещений внутри конечных элементов. Рассмотренная модель позволяет учесть особенности слоисто-неоднородного строения, а также наличие вырезов. В качестве примера проведено исследование напряженно-деформированного состояния в слоях трехслойных цилиндрических оболочек вращения с прямоугольными вырезами.

Ключевые слова: трехслойные цилиндрические оболочки вращения, прямоугольные вырезы, напряженно-деформированное состояние, послойный подход, конечно-элементные модели, аппроксимирующие функции обобщенных деформаций и перемещений

DOI: 10.31857/S0572329922010032

1. Введение. Актуальность темы в теоретическом плане связана с недостаточной исследованностью проблемы анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) трехслойных цилиндрических оболочек с учетом неоднородности структуры при наличии вырезов. Интерес с практической точки зрения объясняется увеличивающимся распространением в современной ракетной, авиакосмической, судостроительной, строительной и других отраслях указанных элементов конструкций трехслойных оболочек, отличающихся высокими показателями весовой эффективности, удельной жесткости и прочности, несущей способности и многих других важных характеристик [1–4].

Недостаточное развитие моделей для уточненного анализа НДС с учетом указанных выше особенностей оказывает сдерживающее влияние на распространение трехслойных оболочек. Поэтому построение адекватных моделей, позволяющих учесть отмеченные особенности является актуальной научной проблемой, имеющей важное прикладное значение.

Теорий расчета напряженно-деформированного состояния неоднородных и трехслойных оболочек достаточно много. Значительно меньше публикаций, в которых разработанные модели позволяют с необходимой точностью и степенью детализации провести расчет НДС трехслойных оболочек с указанными выше особенностями.

В работах [5–8] рассмотрены некоторые последние обзоры расчетных моделей слоисто-неоднородных и в том числе трехслойных оболочек.

С требуемой точностью и степенью детализации провести расчет НДС трехслойных нерегулярных оболочек вращения с указанными выше особенностями позволяет послойный анализ [7, 9–12], при котором в случае необходимости стенка оболочки, в том числе заполнитель, может моделироваться по толщине слоями, стыкуемыми между собой. При этом могут быть разные по сложности модели для расчета слоев с применением аналитических и численных методов в зависимости от условий задач.

Обзоры по расчету оболочек, ослабленных отверстиями, приведены, например, в работах [13–15]. Большая часть работ по исследованию оболочек с вырезами посвящена однородным оболочкам, меньшая часть — оболочкам из композиционных материалов и совсем в небольшом числе работ рассмотрены трехслойные оболочки с вырезами. В значительной части этих работ приведены исследования трехслойных сферических оболочек с круговыми отверстиями. При этом почти отсутствуют результаты расчетов трехслойных оболочек, ослабленных прямоугольными в плане вырезами [15].

Аналитическими методами решение подобных задач с учетом указанных особенностей для оболочек с прямоугольными вырезами сталкивается с непреодолимыми математическими сложностями. Это приводит к необходимости применять численные методы и особенно метод конечных элементов (МКЭ) [16–18].

Краткий обзор конечно-элементных моделей (КЭМ) для расчета оболочек, включая трехслойные и слоисто-неоднородные оболочки, рассмотрен в статье [7].

Strang G., Fix G.J. отмечали [19] “...конечные элементы стали наиболее употребительным средством вычислительной математики во всем мире, но будет еще лучше, если мы научимся решать те же задачи с меньшими затратами...”.

Похожие мысли высказывал академик И.Ф. Образцов в статье [20] “...основная проблема при рассмотрении сложных конструкций заключается в создании эффективных математических моделей исследуемых систем, которые не только обеспечивают выполнение заданных требований к информативности и точности исследований, но и одновременно являются экономичными, способствуя, в частности, минимизации затрат машинного времени и памяти ЭВМ...”.

2. Постановка задачи. Размерность конечно-элементных моделей оболочек при послойном анализе определяется числом слоев по толщине оболочки, количеством конечных элементов, на которые разбиваются слои, числом степеней свободы конечных элементов. Количество конечных элементов (КЭ), с помощью которых моделируются слои, зависит от эффективности функций формы КЭ, то есть от того, как быстро численные результаты будут приближаться к точным решениям при увеличении числа разбиений на КЭ. При послойном моделировании трехслойных и слоисто-неоднородных нерегулярных оболочек это чрезвычайно важно.

Увеличение размерности модели приводит к росту вычислительных операций, а следовательно к повышению вычислительных погрешностей расчета, увеличению расчетного времени и ужесточению требований к вычислительным ресурсам.

Оптимальным для повышения скорости сходимости численных алгоритмов и получаемых результатов и уменьшения требуемого для решения задач числа КЭ было бы построение функций формы КЭ на основе аналитических решений [21–26]. Такой подход удалось реализовать для круговых слоистых арок [21] и осесимметричных конечных элементов трехслойных и слоистых цилиндрических оболочек [22–26].

Наличие вырезов приводит к необходимости измельчения сеток разбиений, что еще более увеличивает размерность задач, для уменьшения которой применены эффективные функции аппроксимации деформаций в конечных элементах несущих слоев рассматриваемых трехслойных цилиндрических оболочек.

В отличие от работ по моделированию НДС в оболочках конической формы [10, 27–30] и оболочках двойкой кривизны [31–35], в которых используются аппроксимирующие функции перемещений, в данной работе рассмотрим алгоритм построения конечно-элементной модели с применением функций, аппроксимирующих обобщенные деформации, для анализа НДС в несущих слоях трехслойных нерегулярных цилиндрических оболочках вращения. Рассмотрение алгоритмов построения конечно-элементных моделей несущих слоев и слоя заполнителя проведем на примере конечных элементов естественной кривизны прямоугольной в плане формы, что позволит более просто моделировать НДС в слоях трехслойных цилиндрических оболочек вращения, ослабленных прямоугольными вырезами.

3. Алгоритм построения модели для исследования напряженно-деформированного состояния в несущих слоях трехслойных нерегулярных цилиндрических оболочек вращения. Будем рассматривать несущие слои как тонкие моментные оболочки, к которым применима классическая теория Кирхгофа–Лява, тогда запишем [36]

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_2 &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{R}, & \gamma &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varkappa_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \varkappa_2 &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}, & \chi &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \end{aligned} \quad (3.1)$$

где x – линейная координата вдоль меридиана на срединной поверхности каждого несущего слоя, φ – угловая координата в плоскости, перпендикулярной оси оболочки, R – радиус кривизны для каждого из несущих слоев.

Одним из требований к аппроксимирующим функциям конечных элементов для расчета оболочек является учет перемещений как твердых тел [37–40]. Для получения перемещений как твердого тела проинтегрируем (3.1) при нулевых значениях деформаций. При этом появятся шесть констант интегрирования, назовем их неопределенными коэффициентами и обозначим $\alpha_1, \dots, \alpha_6$. Они будут задействованы при записи выражений для перемещений как твердого тела.

Рассмотрим конечный элемент несущих слоев трехслойной в общем случае нерегулярной цилиндрической оболочки вращения, полученный сечением оболочки двумя плоскостями, проходящими через ось оболочки, и двумя плоскостями, перпендикулярными оси вращения. За узловые параметры в четырех угловых точках конечного элемента примем три линейных перемещения точек срединной поверхности и два угла поворота нормали к срединной поверхности относительно осей координат в осевом и кольцевом направлениях. Конечный элемент имеет двадцать степеней свободы (по пять степеней свободы в узлах) и следовательно для записи аппроксимирующих функций обобщенных деформаций остается четырнадцать неопределенных коэффициентов (первые шесть неопределенных коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ использованы при записи выражений для перемещений как твердого тела).

При выборе полиномов для записи выражений аппроксимирующих функций обобщенных деформаций исходим из предполагаемого характера изменения параметров напряженно–деформированного состояния в несущих слоях трехслойных нерегулярных цилиндрических оболочек вращения. Так как несущие слои считаем тонкими моментными оболочками, то параметры изменения кривизны \varkappa_1, \varkappa_2 срединной поверхности, отвечающие за моментное состояние, будем представлять полиномами более высоких порядков по сравнению с другими параметрами вектора обобщенных деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma, \chi$.

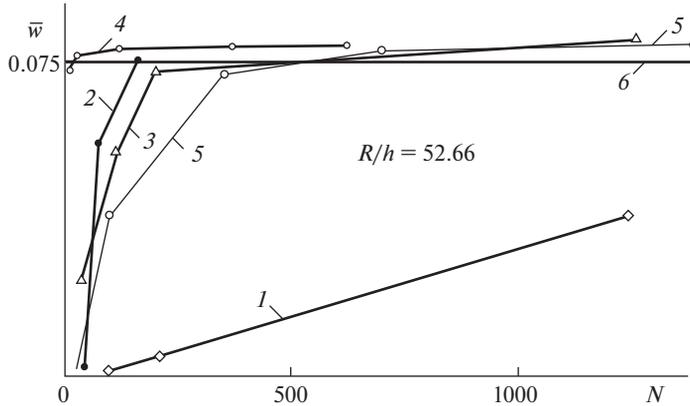


Рис. 1. Зависимости прогиба оболочки от порядка системы уравнений при расчете различными конечными элементами.

фик 4 рис. 1) показана сравнением с известными КЭ и аналитическим решением С.П. Тимошенко [41] (график 6 рис. 1) на примере оболочки при действии самоуравновешенных диаметрально противоположных радиальных сосредоточенных сил P . Приведены зависимости прогиба $\bar{w} = -wDl/PR^3$ в точке приложения сил от порядка решаемой системы уравнений N для распространенных цилиндрических конечных элементов с аппроксимирующими функциями перемещений [42]: КЭ (Cantin G., Glagh R.W. [42]) с 24 степенями свободы с учетом (график 3) и без учета (график 1) перемещений как твердого тела; КЭ (Vogner F.K., Fox R.L. and Schmit L.A. [42]) с 48 степенями свободы (график 2); оболочечный КЭ нулевой кривизны с 20 степенями свободы [10, 27] (график 5). Из-за симметрии рассматривалась восьмая часть цилиндрической оболочки. Из сравнения видно, что практически точное значение достигается при $N = 20$ для конечного элемента с аппроксимирующими функциями деформаций (то есть при моделировании рассматриваемого сегмента одним КЭ с 20 степенями свободы), при $\sim N = 140$ для КЭ с аппроксимирующими функциями перемещений (АФП) с 48 степенями свободы, при $\sim N = 200$ для КЭ с АФП и 24 степенями свободы и при $\sim N = 333$ для оболочечного КЭ нулевой кривизны с 20 степенями свободы. Следует отметить, что решение С.П. Тимошенко [41] получено для нерастяжимой срединной поверхности, поэтому оно находится ниже точного значения, к которому сходятся конечно-элементные решения.

Были проведены также и другие сравнения с большим числом различных КЭ. Эти сопоставления подтвердили эффективность рассмотренного подхода и приведенной модели, а также высокую скорость сходимости полученных с помощью этой модели решений, что позволило, как показали сравнения, значительно уменьшить необходимое для расчета число КЭ. Для приведенного здесь примера (рис. 1) уменьшение порядка решаемой системы уравнений N для конечного элемента с аппроксимирующими функциями деформаций произошло в $\sim 7-17$ раз соответственно в сравнении с рассмотренными конечными элементами с аппроксимирующими функциями перемещений.

Достоверность и эффективность приведенной модели конечного элемента несущих слоев показана и на примерах исследования НДС цилиндрических, в том числе ортотропных композитных оболочек, ослабленных прямоугольными отверстиями [43, 44].

5. Алгоритм построения трехмерной модели для исследования напряженно-деформированного состояния в слое заполнителя трехслойных нерегулярных цилиндрических оболочек вращения. Подход при построении модели трехмерного оболочечного конечного элемента для исследования НДС слоя заполнителя состоит в следующем. За узловые поверхности этого КЭ принимаются поверхности стыковки с несущими слоями с узлами в угловых точках трехмерного оболочечного конечного элемента слоя заполнителя. К этим поверхностям со срединных поверхностей несущих слоев приводятся узловые перемещения КЭ несущих слоев с помощью матриц перехода подобно [17]. Таким образом, КЭ заполнителя (КЭЗ) будет иметь восемь узлов по четыре узла на внутренней и внешней цилиндрических поверхностях, а аппроксимирующими функциями перемещений будут функции, аппроксимирующие перемещения конечных элементов несущих слоев. Такая схема построения КЭ слоя заполнителя свободна от погрешностей расчета, связанных с разрывом перемещений на цилиндрических поверхностях стыковки КЭ заполнителя с конечными элементами несущих слоев.

Обозначим как $\bar{\delta}_i^c$ вектор перемещений КЭ несущих слоев на поверхностях сопряжения с КЭ слоя заполнителя, где $i = 1$ для внутреннего и $i = 3$ для внешнего несущих слоев. Тогда условия стыковки в векторной форме примут следующий вид для случая одного КЭЗ по толщине слоя заполнителя

$$\delta^1 = \bar{\delta}_1^c; \quad \delta^2 = \bar{\delta}_3^c \quad (5.1)$$

где δ^1, δ^2 векторы перемещений соответственно внутренней и внешней цилиндрических поверхностей КЭ заполнителя.

Вектор перемещений трехмерного КЭ слоя заполнителя $\delta_i^f = \{u, v, w\}^T$ (f означает, что рассматривается слой заполнителя, $i = 2$ для слоя заполнителя и этот индекс далее не указывается) будет иметь вид

$$\delta^f = \delta^1 \varphi^1 + \delta^2 \varphi^2 \quad (5.2)$$

где $\varphi^1 = (1 - 2z^f/h^f)/2$, $\varphi^2 = 1 - \varphi^1$, z^f – нормальная к срединной поверхности КЭЗ координата, h^f – толщина конечного элемента заполнителя.

С учетом (5.1), (5.2), зная АФП КЭ несущих слоев (3.3), запишем в матричной форме выражение для вектора перемещений трехмерного КЭ слоя заполнителя

$$\delta^f = T^f \alpha^f \quad (5.3)$$

где T^f (3×40), α^f – соответственно матрица аппроксимирующих функций перемещений и вектор неопределенных коэффициентов конечных элементов слоя заполнителя.

После подстановки (5.3) в геометрические соотношения для трехмерного тела, записанные в цилиндрических координатах, будет иметь выражение для вектора обобщенных деформаций КЭ слоя заполнителя в матричной форме

$$\varepsilon^f = \Omega^f \alpha^f \quad (5.4)$$

Используя для КЭ слоя заполнителя физические соотношения (закон Гука), с учетом (5.4) получим запись выражений для напряжений с помощью вектора неопределенных коэффициентов, а затем с помощью вектора узловых перемещений. Из условия минимума полной потенциальной энергии (вариационный принцип Лагранжа) [36, 17] находятся выражения для записи матрицы жесткости конечного элемента слоя заполнителя подобно [23].

Определив выражения для матриц жесткости конечных элементов несущих слоев и слоя заполнителя, дальнейшее решение задачи проводится с помощью хорошо разработанных и отлаженных алгоритмов метода перемещений МКЭ.

6. Числовой пример. Разработанную модель применим для исследования напряженно-деформированного состояния в слоях трехслойной цилиндрической композитной оболочки, нагруженной равномерно распределенным внутренним давлением и ослабленной двумя диаметрально противоположными прямоугольными вырезами. Несущие слои оболочки выполнены из стеклопластика, а наполнитель – из пенопласта.

Рассматриваются два варианта оболочки с вырезами:

1 – вырезы сквозные;

2 – вырезы закрыты крышками, которые служат для герметизации отсека и не воспринимают нагрузку, действующую на них, а та часть давления, которая приходится на площадь крышки при расчете заменялась распределенными по периметру выреза перерезывающими силами.

Вырезы располагаются на равном расстоянии от торцов оболочки. Длина вырезов составляет 40% от длины образующей. Угол раствора вырезов равен 0.84 рад.

Принимается, что граничные условия на торцах несущих слоев оболочки соответствуют случаю жесткой заделки с разрешением осевых перемещений.

Геометрические параметры оболочки следующие:

$$L = 2 \text{ м}, \quad R = 1.5 \text{ м}, \quad h_1 = 0.002 \text{ м}, \quad h_3 = 0.002 \text{ м}, \quad H = 0.05 \text{ м}$$

где L – длина, R – радиус срединной поверхности наполнителя оболочки; h_1, h_3 – толщина внутреннего и наружного несущих слоев соответственно; H – толщина трехслойного пакета.

Физико-механические характеристики трехслойной оболочки следующие:

– для внутреннего и наружного ортотропных несущих слоев: $E_1 = 20594$ Мпа, $E_2 = 18632.6$ Мпа, $G_{12} = 3432.3$ Мпа, $\mu_2 = 0.1$;

– для наполнителя: $E_3 = 23.53$ Мпа, $G_{13} = G_{23} = 9.81$ Мпа.

Вследствие симметрии в осевом и окружном направлениях при расчете рассматривалась 1/8 симметричная часть оболочки, которая разбивалась на 20 трехслойных блоков (состоящих из конечных элементов внутреннего и наружного несущих слоев и слоя наполнителя) в осевом направлении и на 30 блоков в окружном.

Наибольшими по абсолютной величине в несущих слоях являются мембранные усилия N_1 во внутреннем несущем слое на середине прямолинейного края выреза (рис. 2). Максимальные значения мембранных усилий N_2 наблюдаются в окрестности угловой точки выреза во внутреннем несущем слое. Эти максимальные значения усилий N_2 почти на 20% меньше наибольших усилий N_1 для варианта 2 оболочки с вырезами. Максимальные значения мембранных напряжений в несущих слоях превышают максимальные значения моментных напряжений.

Наибольшими в наполнителе являются напряжения τ_{31}, τ_{23} вблизи угловой точки выреза (рис. 3). Причем максимальные значения τ_{31} на ~33% больше наибольших напряжений τ_{23} для варианта 2 оболочки с вырезами и почти в 3 раза выше напряжений σ_{33} . В наполнителе напряжения σ_{11}, σ_{22} , которыми обычно пренебрегают, сопоставимы с σ_{33} .

Изменение наибольших усилий N_1 (Н/м) и напряжений τ_{31} (Мпа) вдоль прямолинейного края выреза представлено на рис. 2, 3. По оси абсцисс откладывается номер КЭ, начиная от торца оболочки к середине выреза.

Цифрами 1, 2 обозначены графики для двух вариантов оболочки, указанных выше.

Как видно из приведенных графических зависимостей, напряженно-деформированное состояние оболочки, ослабленной вырезами, характеризуется ярко выраженным краевым эффектом в окрестности выреза и вблизи его угловых точек, быстро затухающим по мере удаления от выреза. Учет нагрузок от крышки (вариант 2) значительно повышает напряжения возле выреза.

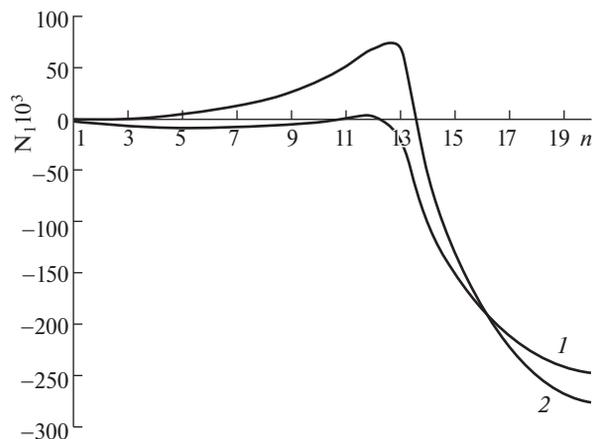


Рис. 2 Изменение усилий N_1 вдоль прямолинейного края выреза трехслойной цилиндрической оболочки: 1 – сквозные вырезы; 2 – вырезы закрыты крышками.

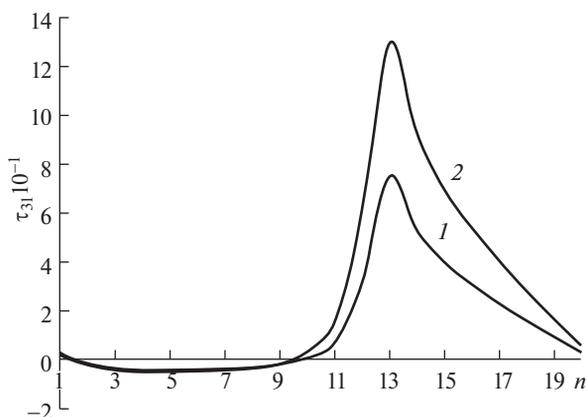


Рис. 3 Изменение напряжений τ_{31} вдоль прямолинейного края выреза трехслойной цилиндрической оболочки: 1 – сквозные вырезы; 2 – вырезы закрыты крышками.

7. Заключение. Рассмотрено построение модели для послойного анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных нерегулярных цилиндрических оболочек вращения, при котором стенка оболочки моделируется по толщине конечными элементами, которые затем стыкуются между собой. Модель позволяет адекватно моделировать особенности слоисто-неоднородного строения, моментное состояние несущих слоев, трехмерное напряженно-деформированное состояние в заполнителе, а также учесть наличие прямоугольных вырезов. Для уменьшения размерности модели послойного анализа применены функции аппроксимаций деформаций. Приведено исследование напряженно-деформированного состояния в слоях трехслойных цилиндрических оболочек вращения с прямоугольными вырезами, в том числе закрытыми крышками.

Статья посвящается светлой памяти Ученого и Учителя, Героя Социалистического Труда, лауреата Ленинской и Государственной премий, чл.-кор. АН СССР В.И. Феодосьева (05.05.1916–24.09.1991) от его благодарного студента, дипломника, аспиранта, ученика.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПРИМ РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
2. *Бакулин В.Н., Образцов И.Ф., Потопахин В.А.* Динамические задачи нелинейной теории многослойных оболочек: Действие интенсивных термосиловых нагрузок, концентрированных потоков энергии. М.: Наука. Физматлит, 1998. 464 с.
3. *Бакулин В.Н., Острик А.В.* Комплексное действие излучений и частиц на тонкостенные конструкции с гетерогенными покрытиями. М.: Физматлит, 2015. 280 с.
4. *Vakulin V. N.* Investigation of the Influence of the Cutout Dimensions on the Stress-strain State of Three-layer Shells with Load-bearing Layers of Composite Materials // *J. Phys.: Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2020. V. 714. P. 012002.
<https://doi.org/10.1088/1757-899X/714/1/012002>
5. *Паймушин В.Н.* Теория среднего изгиба подкрепленных на контуре трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем // *Мех. композ. материалов.* 2017. Т. 53. № 1. С. 3–26.
6. *Григоренко Я.М., Григоренко А.Я.* Статические и динамические задачи для анизотропных неоднородных оболочек с переменными параметрами и их числовым решением (обзор) // *Прикладная механика.* 2013. Т. 49. № 2. С. 3–70.
7. *Бакулин В.Н.* Послойный анализ напряженно-деформированного состояния нерегулярных трехслойных оболочек вращения ненулевой гауссовой кривизны // *ПММ.* 2021. Т. 85. № 1. С. 90–106.
8. *Аннин Б.Д., Волчков Ю.М.* Неклассические модели теории пластин и оболочек // *ПМТФ.* 2016. Т. 57. № 5. С. 5–14.
9. *Бакулин В.Н.* Уточненные модели послойного анализа трехслойных нерегулярных оболочек // *Всероссийская научно-техническая конференция. “Механика и математическое моделирование в технике”, посвященная 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева. Сб. материалов.* М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. С. 278–281.
10. *Vakulin V. N.* A Corrected model of level-by-level analysis of three-layer irregular conical shells // *Dokl. Phys.* 2017. V. 62. № 1. P. 37–41.
11. *Vakulin V.N.* Block based finite element model for layer analysis of stress strain state of three-layered shells with irregular structure // *Mech. Solids.* 2018. V. 53. No. 4. P. 411–417.
<https://doi.org/10.3103/S0025654418040064>
12. *Бакулин В.Н.* Уточненный послойный анализ НДС слоисто-неоднородных, в общем случае нерегулярных оболочечных элементов конструкций // *Материалы XIII Международной конференции по Прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АМ-МАГ2020), посвященной 90-летию МАИ и 100-летию со дня рождения академика И.Ф. Образцова, 6–13 сентября 2020 г. Алушта. М.: Изд-во МАИ, 2020. С. 259–261.*
13. *Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов Вал.Н., Чехов Вик.Н., Шнеренко К.И.* Методы расчета оболочек. Т. 1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. Киев: Наукова думка, 1980. 636 с.
14. *Бакулин В.Н., Ревенко В.П.* Аналитико-численный метод конечных тел решения краевой задачи для цилиндрической ортотропной оболочки с немалым прямоугольным отверстием // *Изв. вузов. Математика.* 2016. № 6. С. 3–14.
15. *Vakulin V.N.* Layer-by-layer analysis of the stress-strain state of three-layer shells with cutouts // *Mech. Solids.* 2019. V. 54. № 3. P. 448–460.
<https://doi.org/10.3103/S0025654419020092>
16. *Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С.* Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М.: Высшая школа, 1985. 392 с.

17. Бакулин В.Н., Рассоха А.А. Метод конечных элементов и голографическая интерферометрия в механике композитов. М.: Машиностроение, 1987. 312 с.
18. Бакулин В.Н. Построение конечно-элементных моделей для уточненного прочностного анализа слоистых оболочек. Материалы XII Международной конференции по Прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ'2018), посвященной памяти академика Ю.А. Рыжова. 24–31 мая 2018 г. Алушта, Крым. М.: МАИ, 2018. С 330–332.
19. *Strang G., Fix G.J.* An Analysis of the Finite Element Method. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1973 = *Стренг Г., Фикс Д.* Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 392 с.
20. Образцов И.Ф. О некоторых перспективных прикладных проблемах механики, имеющих народнохозяйственное значение // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 3–9.
21. Бакулин В.Н., Каледин Вл.О. Конечный элемент круговой арки с конечной сдвиговой жесткостью // Мех. композ. матер. 1988. № 5. С. 915–919.
22. Бакулин В.Н. Аппроксимации для моделирования напряженно-деформированного состояния слоистых цилиндрических оболочек // Матем. моделир. 2004. Т. 16. № 6. С. 101–105.
23. Бакулин В.Н. Конечно-элементная модель для анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек // Матем. моделир. 2006. Т. 18. № 1. С. 3–9.
24. Образцов И.Ф., Бакулин В.Н. Уточненные модели для исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек // ДАН. 2006. Т. 407. № 1. С. 36–39.
25. Бакулин В.Н. Неклассические уточненные модели в механике трехслойных оболочек // Вест. Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4. Ч. 5. С. 1989–1991.
26. Каледин Вл.О., Шпиталь С.В. Выбор расчетной схемы при исследовании осесимметричного краевого эффекта в трехслойных цилиндрических оболочках с легким наполнителем // Мех. композ. материалов. 1993. № 5. С. 657–665.
27. Бакулин В.Н., Репинский В.В. Конечно-элементные модели деформации однослойных и трехслойных конических оболочек // Матем. моделир. 2001. Т. 13. № 6. С. 39–46.
28. Бакулин В.Н. Уточненная модель для расчета напряженно-деформированного состояния трехслойных конических оболочек вращения // Вестник Московского авиац. ин-та, 2011. Т. 18. № 2. С. 211–218.
29. *Vakulin V.N.* Analysis of the influence of rectangular cutouts on the stress-strain state of three-layer shells // 18th International Conference “Aviation and Cosmonautics – 2019”. Abstracts. Moscow: Moscow State Institute of Aviation (National Research University), 2019. P. 435–436.
30. *Vakulin V.N.* A Model for Refined Calculation of the Stress-Strain State of Sandwich Conical Irregular Shells // Mech. Solids. 2019. V. 54. № 5. P. 786–796.
<https://doi.org/10.3103/S0025654419050054>
31. Бакулин В.Н., Кривцов В.С., Рассоха А.А. Алгоритм получения матрицы жесткости конечно-го элемента анизотропной оболочки // Изв. вузов. Авиац. техника. 1983. № 4. С. 14–18.
32. Бакулин В.Н. Конечно-элементные модели для расчета слоистых оболочек вращения ненулевой гауссовой кривизны // Матем. моделир. 2002. Т. 14. № 8. С. 37–43.
33. Бакулин В.Н., Репинский В.В. Сравнение конечно-элементного решения с аналитическим в задачах механики деформирования сферических оболочек. Материалы XII Международной конференции по Прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ'2018), посвященной памяти академика Ю.А. Рыжова. 24–31 мая 2018 г. Алушта, Крым. М.: МАИ, 2018. С 338–340.
34. *Vakulin V.N.* Block finite-element model of layer-by-layer analysis of the stress-strain state of three-layer generally irregular shells of double-curvature revolution // Dokl. Phys., 2019. V. 64. No. 1. P. 9–13.
<https://doi.org/10.1134/S1028335819010026>
35. *Vakulin V.N.* Model for Layer-by-Layer Analysis of the Stress-Strain State of Three-Layer Irregular Shells of Revolution of Double Curvature // Mech. Solids. 2020. V. 55. № 2. P. 248–257.
<https://doi.org/10.3103/S0025654420020077>
36. Балабух Л.И., Колесников К.С., Зарубин В.С. и др. Основы строительной механики ракет. М.: Высшая школа, 1969. 494 с.
37. *Vakulin V.N.* Effective model of load-bearing layers for layer-by-layer analysis of the stress-strain state of three-layer cylindrical irregular shells of revolution // Mech. Solids. 2020. V. 55. № 3.

- Р. 357–365.
<https://doi.org/10.3103/S0025654420030048>
38. *Кантин Г.* Смещение криволинейных элементов как жесткого целого // Ракетная техника и космонавтика. 1970. № 7. С. 84–88.
 39. *Железнов Л.П., Кабанов В.В.* Функции перемещений конечных элементов оболочки вращения как твердых тел // Изв. РАН. МТТ. 1990. № 1. С. 131–136
 40. *Клочков Ю.В.* Учет жестких смещений конечного элемента в неявном виде на основе использования векторной интерполяции перемещений // Вестник РУДН. 2002. Спецвыпуск. № 1. С. 123–127.
 41. *Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.* Theory of plates and shells. 2d ed. New York: Mc Graw-Hill, 1959. = *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
 42. *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 392 с.
 43. *Bakulin V.N.* Research of the influence of rectangular cutout dimensions on the stress-strain state of shells using an effective finite element model // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2020. V. 868. P. 012034.
<https://doi.org/10.1088/1757-899X/868/1/012034>
 44. *Bakulin V.N.* Investigation of the stress-strain state of the composite cylindrical shell with rectangular cutouts // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2020. V. 927. P. 012066.
<https://doi.org/10.1088/1757-899X/927/1/012066>

УДК 531.36

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ В ДИНАМИКЕ УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННОГО АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

© 2022 г. Ю. Д. Селюцкий^{a,*}

^a НИИ механики МГУ, Москва, Россия

*e-mail: seliutski@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 21.01.2021 г.

После доработки 05.02.2021 г.

Принята к публикации 22.03.2021 г.

Рассмотрена динамика однозвенного аэродинамического маятника в упругом закреплении, причем нестационарное аэродинамическое воздействие моделируется с помощью присоединенного осциллятора. Предполагается, что жесткость пружины крепления помимо линейной составляющей содержит и кубическую. Исследованы положения равновесия маятника и их устойчивость. Показано, в частности, что при определенных значениях параметров системы “флюгерное” положение равновесия становится неустойчивым, и возникает притягивающий предельный цикл. Получены приближенные формулы для частоты и амплитуды этого цикла. Показано, что в широком диапазоне значений параметров его частота практически не зависит от коэффициента жесткости пружины крепления и от момента инерции маятника. Амплитуда цикла растет с увеличением момента инерции и убывает с ростом коэффициента жесткости.

Ключевые слова: колебания, устойчивость, аэроупругость, аэродинамический маятник, тело в потоке среды

DOI: 10.31857/S0572329922010093

1. Введение. Аэродинамический маятник, т.е. маятниковая система, движущаяся в потоке сопротивляющейся среды и взаимодействующая с ним, представляет собой весьма интересный объект. Он может рассматриваться как компонент различных технических систем, в частности, ветроэнергетических установок различных типов (например, ветротурбины Дарье с прямыми лопастями [1]), систем дозаправки летательных аппаратов в воздухе [2], элементов управления в летательных аппаратах и т.д. В последнее время активно рассматриваются различные варианты ветроэнергетических систем, рабочим элементом которых является упругая конструкция, совершающая колебания в результате взаимодействия с потоком среды [3–5], и исследование динамики упруго закрепленного аэродинамического маятника может оказаться полезным для анализа особенностей поведения таких систем.

При описании движения маятника в потоке среды необходимо, вообще говоря, учитывать нестационарность аэродинамического воздействия. Интегрирование уравнений Навье–Стокса с учетом движения твердого тела позволяет дать подробное описание движения среды и аэродинамических сил. Однако, оно требует достаточно значительных вычислительных ресурсов и времени и практически не позволяет проводить параметрический анализ системы. Поэтому активно используются различные упрощенные феноменологические модели.

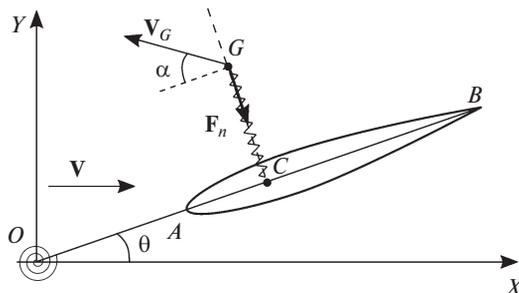


Рис. 1. Упруго закрепленный аэродинамический маятник с присоединенным осциллятором.

Одной из наиболее часто применяемых моделей такого типа является квазистатический подход [6]. С его помощью исследовались разные аспекты поведения различных механических систем, включающих тела, взаимодействующие с сопротивляющейся средой [7, 8], в том числе, однозвенных аэродинамических маятников без пружины в креплении [9–11]. Были рассмотрены локальные и нелокальные бифуркации, возникающие в соответствующей динамической системе, а также изучены периодические режимы, существующие в ней. В [12] на основе квазистатического подхода проанализирована динамика двухзвенного аэродинамического маятника в упругом креплении и показано, что этот подход обеспечивает качественное (а в ряде случаев и количественное) согласие с экспериментами.

Чтобы описать нестационарные эффекты более точно, чем это позволяет квазистатический подход, были предложены другие феноменологические модели. Среди них выделяется группа моделей, основанных на использовании дополнительных переменных, характеризующих нестационарное взаимодействие тела с потоком (такие модели используются, например, в [13–15]). В работах [16, 17] для учета внутренней динамики потока среды предложен подход подобного типа, основанный на введении дополнительной “скрытой” обобщенной координаты (“присоединенного осциллятора”), интегральным образом характеризующей состояние потока вблизи тела. В [18] модель присоединенного осциллятора была использована для анализа поведения аэродинамического маятника без пружины в креплении, и было показано, в частности, что в случае достаточно малой длины державки тривиальное положение равновесия теряет устойчивость при увеличении момента инерции маятника.

В данной статье анализируются положения равновесия и предельные циклы, возникающие в динамике упруго закрепленного аэродинамического маятника в случае, когда пружина крепления имеет кубическую нелинейность.

2. Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему, представляющую собой однозвенный аэродинамический маятник в упругом креплении (рис. 1). Этот маятник состоит из тонкого крыла с симметричным профилем и твердого стержня – державки. Державка находится в плоскости симметрии крыла. Ось вращения O вертикальна и также принадлежит плоскости симметрии крыла. В шарнире O установлена спиральная пружина с кубической нелинейностью.

Вся система помещена в стационарный горизонтальный поток среды, скорость которого на бесконечности постоянна и равна V . Будем считать также, что пружина крепления не напряжена, когда державка маятника ориентирована вдоль набегающего потока.

Введем в горизонтальной плоскости неподвижную систему координат OXY , ось абсцисс которой направим вдоль вектора \mathbf{V} . Положение маятника будем характеризовать углом θ между державкой и осью OX .

Для учета нестационарности аэродинамического воздействия потока на маятник воспользуемся моделью [18], в которой внутренняя динамика потока описывается с помощью присоединенного осциллятора CG , прикрепленного к хорде крыла в статическом центре давления C ($OC = l$), причем точка G может перемещаться вдоль нормали к хорде. Обозначим расстояние CG через η . Будем считать, что аэродинамическая сила приложена в точке G , ее составляющая, направленная вдоль хорды профиля (тангенциальная сила), пренебрежимо мала, а нормальная к хорде составляющая имеет следующую структуру:

$$F_n = \frac{\rho S}{2} V_G^2 C_n(\alpha)$$

Здесь ρ – плотность среды, S – характерная площадь крыла, C_n – безразмерный коэффициент нормальной силы, V_G – воздушная скорость точки G , α – угол между вектором \mathbf{V}_G и хордой AB (эффективный угол атаки). Из кинематических соображений следует, что

$$V_G \cos \alpha = V \cos \theta + \eta \dot{\theta}, \quad V_G \sin \alpha = V \sin \theta + l \dot{\theta} + \dot{\eta}$$

Уравнения движения системы “маятник + осциллятор” можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta} + m\eta^2\ddot{\theta} + 2m\eta\dot{\eta}\dot{\theta} + m\eta\dot{\theta}^2 &= l(k\eta + h\dot{\eta}) - \kappa\theta - \kappa_3\theta^3 - \delta\dot{\theta} \\ m(\dot{\eta} + l\ddot{\theta} - \eta\dot{\theta}^2) &= -k\eta - h\dot{\eta} - \frac{\rho S}{2} V_G^2 C_n(\alpha) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь m – масса осциллятора, k и h – его коэффициенты жесткости и демпфирования, J – момент инерции маятника относительно оси вращения, κ и κ_3 – коэффициенты, характеризующие жесткость пружины крепления, δ – коэффициент демпфирования этой пружины.

Обезразмерим уравнения, выбрав в качестве безразмерного времени величину $\tau = tV/b$ (где b – длина хорды крыла) и введя следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \frac{\eta}{b}, \quad \bar{l} = \frac{l}{b}, \quad \bar{V}_G = \frac{V_G}{V}, \quad \bar{m} = \frac{2m}{\rho S b}, \quad \bar{J} = \frac{2J}{\rho S b^3} \\ \bar{k} &= \frac{2kb}{\rho S V^2}, \quad \bar{h} = \frac{2hb}{\rho S V}, \quad \bar{\kappa} = \frac{2\kappa}{\rho S b V^2}, \quad \bar{\kappa}_3 = \frac{2\kappa_3}{\rho S V^2 b}, \quad \bar{\delta} = \frac{2\delta}{\rho S V b^2} \end{aligned}$$

Далее для упрощения записи будем обозначать производную по безразмерному времени точкой и опускать черту над безразмерными величинами.

Вообще говоря, коэффициент нормальной силы представляет собой достаточно сложную 2π -периодическую функцию угла атаки (нечетную в случае крыла с симметричным профилем). Однако из многочисленных экспериментов известно, что при малых углах атаки эта зависимость с хорошей точностью является линейной: $C_n = C_n^\alpha \alpha$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением таких движений маятника, при которых угол атаки остается малым. Отметим, что для крыльев $C_n^\alpha > 0$.

Тогда уравнения (2.1) примут вид:

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta} + m\eta^2\ddot{\theta} + 2m\eta\dot{\eta}\dot{\theta} + ml\eta\dot{\theta}^2 &= l(k\eta + h\dot{\eta}) - \kappa\theta - \kappa_3\theta^3 - \delta\dot{\theta} \\ m(\ddot{\eta} + l\ddot{\theta} - \eta\dot{\theta}^2) &= -k\eta - h\dot{\eta} - V_G^2 C_n^\alpha \alpha \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\alpha = \arcsin \frac{\sin \theta + l\dot{\theta} + \dot{\eta}}{V_G}, \quad V_G = \sqrt{(\sin \theta + l\dot{\theta} + \dot{\eta})^2 + (\cos \theta + \eta\dot{\theta})^2}$$

Исследуем поведение траекторий системы (2.2).

3. Положения равновесия и их устойчивость. Пусть (θ_s, η_s) – неподвижная точка системы (2.2). Тогда величины θ_s и η_s удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \kappa_3\theta_s^3 &= -(lC_n^\alpha + \kappa)\theta_s \\ k\eta_s &= -C_n^\alpha\theta_s \end{aligned} \quad (3.1)$$

Очевидно, что система (3.1) имеет тривиальное равновесие $\theta_s = 0$, $\eta_s = 0$. При этом маятник находится во флюгерном положении.

Если $lC_n^\alpha + \kappa > 0$ (это условие выполнено, в частности, если $l > 0$, т.е. центр давления расположен “ниже по потоку”, чем точка подвеса), то других неподвижных точек у системы нет, поскольку величины C_n^α и κ положительны. Если же $lC_n^\alpha + \kappa < 0$, то имеются еще два симметричных “косых” равновесия:

$$\theta_{s1,2} = \pm \sqrt{-\frac{lC_n^\alpha + \kappa}{\kappa_3}}$$

Поскольку наше рассмотрение ограничено областью малых углов атаки, будем считать, что параметры системы таковы, что величины $\theta_{s1,2}$ малы (когда они являются действительными числами). В частности, такая ситуация имеет место, когда параметр κ_3 велик: $\kappa_3 \gg 1$.

Вначале рассмотрим тривиальное равновесие. Система (2.2), линеаризованная в окрестности этого равновесия, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta} &= l(k\eta + h\dot{\eta}) - \kappa\theta - \delta\dot{\theta} \\ m(\ddot{\eta} + l\ddot{\theta}) &= -k\eta - h\dot{\eta} - C_n^\alpha(\theta + \eta + l\dot{\theta}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Запишем характеристический полином системы (3.2):

$$\begin{aligned} Jm\lambda^4 + (m(hl^2 + \delta) + J(C_n^\alpha + h))\lambda^3 + (C_n^\alpha hl^2 + kml^2 + Jk + m\kappa + (C_n^\alpha + h)\delta)\lambda^2 + \\ + ((C_n^\alpha l^2 + \delta)k + C_n^\alpha hl + \kappa(C_n^\alpha + h))\lambda + k(C_n^\alpha l + \kappa) = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Очевидно, что тривиальное равновесие статически неустойчиво при $lC_n^\alpha + \kappa < 0$. Если же $lC_n^\alpha + \kappa > 0$, то все коэффициенты полинома (3.3) положительны. Поэтому достаточные условия асимптотической устойчивости тривиального равновесия в этом случае сводятся к условию положительности третьего минора матрицы Гурвица для (3.3), которое можно представить в следующем виде:

$$B_2 J^2 + C_n^\alpha h l B_1 J + m l^2 h B_0 > 0 \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} B_2 &= k(h + C_n^\alpha)(C_n^\alpha l(kl - C_n^\alpha) + k\delta) \\ B_1 &= \delta^2 k(h + C_n^\alpha)^2 + (lh C_n^\alpha (C_n^\alpha l + hl - m) + \delta((h + C_n^\alpha)^2 - 2km))(h + C_n^\alpha)\kappa + \end{aligned}$$

$$+ ((C_n^\alpha l + hl - m)hl + \delta(h + C_n^\alpha))(C_n^\alpha)^2(kl + h) + 2kml^2h(C_n^\alpha l(kl - C_n^\alpha) + k\delta) + \delta C_n^\alpha l((h + C_n^\alpha)(h^2 - 3km + 2klh) + kmC_n^\alpha) \quad (3.5)$$

$$B_0 = (hl^2 + \delta)C_n^\alpha((kl + h)lC_n^\alpha + \kappa(h + C_n^\alpha) + \delta k) + k(kml^2 + \delta h)(C_n^\alpha l^2 + \delta) + C_n^\alpha m\kappa l(2kl + h) + (h + C_n^\alpha)\kappa(\delta h + \kappa m) + lC_n^\alpha \delta(h^2 - km)$$

Результаты идентификации параметров осциллятора [18] показывают, что для них выполнены следующие неравенства:

$$h^2 > 4mk, \quad (C_n^\alpha)^2 > 2mk \quad (3.6)$$

Пусть $l > 0$. Нетрудно видеть, что, с учетом (3.6), при этом $B_0 > 0$. Кроме того, можно путем несложных выкладок показать, что $B_1 > 0$ при $B_2 > 0$. Таким образом, $B_2 > 0$ оказывается достаточным условием асимптотической устойчивости при $l > 0$. Оно, очевидно, выполнено при любых длинах державки, если коэффициент δ достаточно велик: $\delta > (C_n^\alpha)^3/4k^2$.

Соответственно, неравенство

$$C_n^\alpha l(kl - C_n^\alpha) + k\delta < 0 \quad (3.7)$$

является необходимым условием неустойчивости в области $l > 0$. Если коэффициент демпфирования мал, так что $\delta < (C_n^\alpha)^3/4k^2$, то существует интервал $l \in (l_1, l_2)$, $l_{1,2} > 0$, в котором $B_2 < 0$:

$$l_{1,2} = \frac{C_n^\alpha}{2k} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{C_n^\alpha}{k}\right)^2 - 4 \frac{\delta}{C_n^\alpha}} \quad (3.8)$$

Для каждого l из указанного интервала существует ровно одно положительное значение J_* момента инерции, при котором третий минор матрицы Гурвица обращается в нуль (происходит бифуркация Андронова–Хопфа). При меньших величинах момента инерции положение равновесия асимптотически устойчиво, а при больших – неустойчиво. Таким образом, в случае, когда длина державки маятника удовлетворяет неравенствам $l_1 < l < l_2$, увеличение момента инерции маятника приводит к дестабилизации “флюгерного” положения равновесия. Этот эффект был описан в работе [18] для маятника без пружины в креплении. Заметим, что границы этого интервала по l зависят от параметров, характеризующих жесткость пружины.

Найдем величину J_* и частоту ω_* предельного цикла, рождающегося в результате соответствующей бифуркации. Для этого подставим в (3.3) $\lambda = i\omega_*$ ($\omega_* \neq 0$) и после несложных преобразований получим:

$$(hl^2 + \delta)m^2\omega_*^4 + (hlC_n^\alpha(l(h + C_n^\alpha) - m) + \delta((h + C_n^\alpha)^2 - 2km))\omega_*^2 + k(C_n^\alpha l(kl - C_n^\alpha) + k\delta) = 0 \quad (3.9)$$

$$J_* = \frac{\kappa}{\omega_*^2} - \frac{m(hl^2 + \delta)}{C_n^\alpha + h} + \frac{lC_n^\alpha(kl + h) + k\delta}{\omega_*^2(C_n^\alpha + h)}$$

С учетом (3.6) и (3.7) первое уравнение (3.9) имеет единственное положительное решение.

Очевидно, что при $l \rightarrow l_1 + 0$ и $l \rightarrow l_2 - 0$ имеем $\omega_* \rightarrow 0$, соответственно, $J_* \rightarrow \infty$.

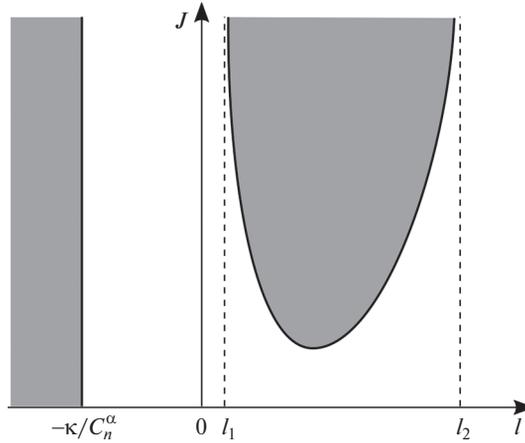


Рис. 2. Области неустойчивости тривиального равновесия (выделены серым цветом).

Любопытно, что получаемая из (3.9) величина ω_* не зависит от жесткости пружины крепления. При этом, как нетрудно показать, ω_* убывает с ростом коэффициента демпфирования δ .

Отметим также, что критическое значение момента инерции растет с увеличением коэффициента жесткости пружины крепления.

С учетом (3.5) нетрудно видеть, что левая часть (3.4) представляет собой полином 6 степени относительно l , причем в силу (3.6) все его коэффициенты, за исключением коэффициентов при l и l^2 , положительны. Значит, по теореме Декарта, этот полином имеет не более 2 действительных корней. Кроме того, при малых значениях момента инерции положительны все коэффициенты полинома, так что при этом асимптотическая устойчивость имеет место при всех положительных l .

Теперь обратимся к случаю $l < 0$. Заметим, что при этом все коэффициенты в первом уравнении (3.9) положительны, следовательно, действительных решений нет. Соответственно, в области отрицательных l корни характеристического полинома не могут пересекать мнимую ось в точках, отличных от начала координат. Нулевой корень существует только при $l = -\kappa/C_n^\alpha$. Следовательно, при $-\kappa/C_n^\alpha < l < 0$ имеет место асимптотическая устойчивость.

При $l = -\kappa/C_n^\alpha$ в системе происходит бифуркация типа “вилка”, и тривиальное решение становится неустойчивым при $l < -\kappa/C_n^\alpha$. Нетрудно показать, что рождающиеся при этом “косые” равновесия асимптотически устойчивы при l , близких к бифуркационному значению.

С учетом вышесказанного, границы области асимптотической устойчивости тривиального равновесия на плоскости параметров J, l имеют вид, качественно изображенный на рис. 2 (области неустойчивости показаны серым цветом).

Будем предполагать, что $|\theta_{s1,2}| = \mu = 1$. Характеристический полином системы, линеаризованной в окрестности косога равновесия, имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned}
 & (Jm + O(\mu^2))\lambda^4 + (m(hl^2 + \delta) + J(C_n^\alpha + h) + O(\mu^2))\lambda^3 + \\
 & + (C_n^\alpha hl^2 - 3mlC_n^\alpha - 2m\kappa + kml^2 + Jk + (C_n^\alpha + h)\delta + O(\mu^2))\lambda^2 + \\
 & + ((kl - C_n^\alpha)C_n^\alpha + \delta k - 2(C_n^\alpha + h)(C_n^\alpha l + \kappa) + O(\mu^2))\lambda - 2k(C_n^\alpha l + \kappa) = 0
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Видно, что нулевой корень у (3.10) также существует только при $l = -\kappa/C_n^\alpha$. В то же время, косые равновесия существуют и отличны от нуля только при $l < -\kappa/C_n^\alpha$.

Пусть $\lambda = i\omega_{**}$ ($\omega_{**} \neq 0$). Нетрудно показать, что ω_{**} является корнем биквадратного уравнения, коэффициенты которого с точностью до $O(\mu^2)$ совпадают с коэффициентами биквадратного уравнения на ω_* (3.8). При $l < 0$ все эти коэффициенты, как было отмечено выше, положительны. Значит, чисто мнимые корни у (3.9) отсутствуют.

Таким образом, корни характеристического полинома (3.10) не пересекают мнимую ось при $l < -\kappa/C_n^\alpha$, следовательно, “косые” равновесия остаются асимптотически устойчивыми при всех значениях параметров, при которых они существуют, а углы $\theta_{s1,2}$ достаточно малы.

4. Периодические решения. В соответствии с вышесказанным, в случае, когда $l \in (l_1, l_2)$, а момент инерции маятника достаточно велик, тривиальное равновесие неустойчиво, других равновесий нет, и в системе существует цикл, родившийся в результате бифуркации Андронова–Хопфа. Исследуем этот цикл, считая, что $\kappa_3 \gg 1$. Это означает, что в пружине присутствует значительное упрочнение. Такая ситуация имеет место для некоторых пружин в области небольших деформаций. Введем малый параметр: $\varepsilon = \sqrt{\kappa_3^{-1}} \ll 1$. Тогда амплитуда колебаний будет мала в достаточно широком диапазоне значений остальных параметров, и сделанные выше предположения относительно C_n будут справедливы.

Для оценки параметров цикла воспользуемся методом гармонического баланса. Будем искать периодические решения вида

$$\theta = \theta_1 \sin \omega t, \quad \eta = \eta_1 \sin \omega t + \eta_2 \cos \omega t \tag{4.1}$$

$$\theta_1 = \varepsilon \theta_{11} + O(\varepsilon^2), \quad \eta_1 = \varepsilon \eta_{11} + O(\varepsilon^2), \quad \eta_2 = \varepsilon \eta_{21} + O(\varepsilon^2), \quad \omega = \omega_0 + O(\varepsilon)$$

Подставив (4.1) в систему (2.2), в первом приближении по малому параметру получим:

$$\begin{aligned}
 -J\theta_{11}\omega_0^2 + \eta_{21}hl\omega_0 - \eta_{11}kl + \frac{3}{4}\theta_{11}^3 + \kappa\theta_{11} &= 0 \\
 -\eta_{11}hl\omega_0 + \delta\omega_0\theta_{11} - \eta_{21}kl &= 0 \\
 -m\eta_{11}\omega_0^2 - \eta_{21}h\omega_0 - C_n^\alpha(\eta_{21}\omega_0 - \theta_{11}) + \eta_{11}k - ml\theta_{11}\omega_0^2 &= 0 \\
 -m\eta_{21}\omega_0^2 + \eta_{11}h\omega_0 + C_n^\alpha\omega_0(\eta_{11} + l\theta_{11}) + \eta_{21}k &= 0
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Нетрудно показать, что ω_0 равно ω_* . Таким образом, частота цикла, существующего при произвольном (но достаточно большом, чтобы имела место неустойчивость тривиального равновесия) значении момента инерции маятника, с точностью до малого параметра совпадает с частотой цикла, рождающегося при бифуркации Андронова–Хопфа:

$$\omega = \sqrt{\frac{-q_1 + \sqrt{q_1^2 - 4m^2k(hl^2 + \delta)(C_n^\alpha l(kl - C_n^\alpha) + k\delta)}}{2(hl^2 + \delta)m^2}} + O(\varepsilon) \tag{4.3}$$

Здесь $q_1 = hlC_n^\alpha(l(h + C_n^\alpha) - m) + \delta((h + C_n^\alpha)^2 - 2km)$.

Соответственно, частота цикла достаточно слабо зависит как от коэффициентов, характеризующих жесткость пружины крепления, так и от момента инерции маятника. Этот эффект представляется любопытным.

Для коэффициентов θ_{11} , η_{11} , η_{21} , характеризующих амплитуды колебаний маятника и присоединенного осциллятора, из (4.2) получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned}\theta_{11} &= \frac{2\omega_*}{\sqrt{3}} \sqrt{J - J_*} \\ \eta_{11} &= -\theta_{11} \frac{(C_n^\alpha - m\omega_*^2)(k - m\omega_*^2) + C_n^\alpha \omega_*^2 l(C_n^\alpha + h)}{\Delta} \\ \eta_{21} &= -\omega_* \frac{h}{k} \eta_{11}\end{aligned}\quad (4.4)$$

где $\Delta = (h + C_n^\alpha)^2 \omega_*^2 + (k - m\omega_*^2)^2$.

Из (3.9) ясно, что, как и следовало ожидать, величина θ_{11} убывает с увеличением коэффициента жесткости k .

В силу громоздкости выражения для первой ляпуновской величины вопрос о том, является ли цикл притягивающим, не удастся разрешить аналитически. Тем не менее, заметим, что, как следует из (4.4), цикл указанного вида существует только при $J > J_*$, т.е. в области, где тривиальное равновесие неустойчиво. Это косвенно свидетельствует о том, что он является притягивающим, а бифуркация Андронова–Хопфа – суперкритической.

Необходимо отметить, что в отсутствие демпфирования $\lim_{l \rightarrow 0} \omega_* = \infty$ и $\lim_{l \rightarrow 0} J_* = 0$.

Соответственно, величина θ_{11} стремится к бесконечности при $l \rightarrow 0$, и предложенная аппроксимация в этой ситуации оказывается неприменимой.

5. Численное моделирование. Проведем численное исследование поведения системы при разных значениях параметров. Примем для параметров присоединенного осциллятора такие же значения, что и в [18]: $m = 1.5$, $k = 3$, $h = 8$. Пусть $\kappa_3 = 100$. Для коэффициента нормальной силы примем $C_n^\alpha = 5.5$ (это соответствует стандартному профилю NASA 0012 [19]). Будем считать также, что коэффициент демпфирования достаточно мал: $\delta < (C_n^\alpha)^3 / 4k^2$, так что величины $l_{1,2}$ в формулах (3.8) являются вещественными. Для численного интегрирования будем использовать стандартный метод Рунге–Кутты 4 порядка.

Вначале рассмотрим ситуацию, когда в системе существует три положения равновесия: $l < -\kappa / C_n^\alpha$. Численное интегрирование показывает, что в достаточно широком диапазоне параметров и начальных условий притягивающие циклы не наблюдаются, и траектории системы стремятся к одному из “косых” равновесий. Области притяжения этих равновесий в пространстве начальных условий в проекции на плоскость $\eta_0 = 0$, $\dot{\eta}_0 = 0$ при разных значениях параметров l и J представлены на рис. 3 (расчеты проводились при $\kappa = 1$, $\delta = 0.1$). Белым цветом отмечены такие начальные условия θ_0 , $\dot{\theta}_0$, что вышедшие из них траектории стремятся к положению равновесия $\theta \equiv \theta_{s1} > 0$, $\eta_{s1} \equiv -C_n^\alpha \theta_{s1} / k < 0$; траектории, выходящие из начальных условий, отмеченных серым цветом, стремятся ко второму “косому” положению равновесия ($\theta \equiv \theta_{s2} < 0$, $\eta_{s2} \equiv -C_n^\alpha \theta_{s2} / k > 0$). На рис. 3, а–d приведены результаты для $l = -0.2$, а на рис. 3, е–h – для $l = -0.5$. Параметр J принимает значения 0.1 (рис. 3 а, е), 1 (рис. 3 б, ф), 5 (рис. 3, с, г) и 10 (рис. 3, д, h).

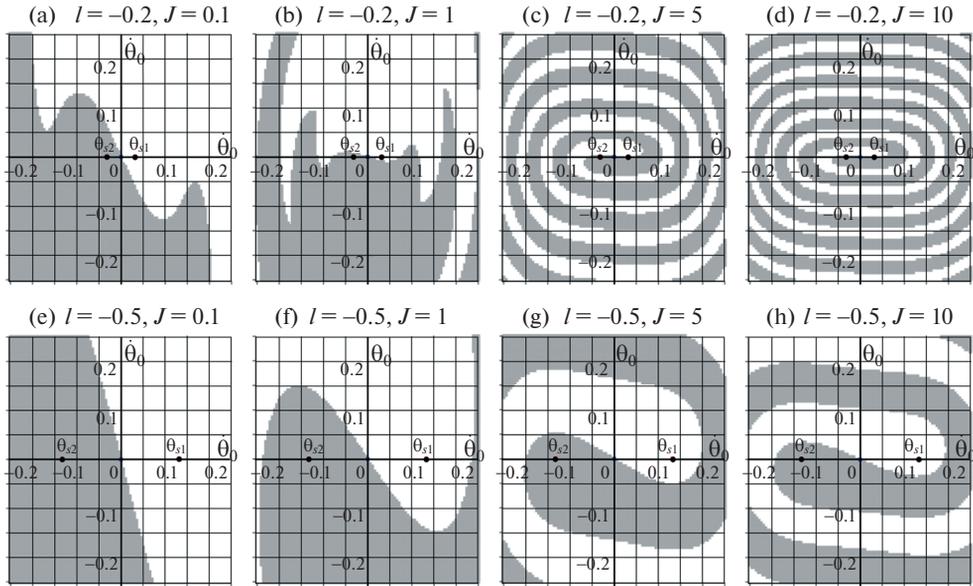


Рис. 3. Эволюция области притяжения “косых” равновесий в пространстве начальных условий (белая область – для положения (θ_{s1}, η_{s1}) , серая область – для положения (θ_{s2}, η_{s2})) с увеличением момента инерции при разных значениях параметра l ; проекция на плоскость $(\eta_0 = 0, \dot{\eta}_0 = 0)$.

Указанные проекции областей притяжения имеют спиралевидную структуру, причем ширина “рукавов” спиралей и их средний угол закрутки уменьшаются с ростом момента инерции и увеличиваются с ростом l .

При $-\kappa/C_n^\alpha < l < l_1$, как было отмечено выше, существует только тривиальное равновесие, и оно асимптотически устойчиво. Численное моделирование показывает, что в достаточно широком диапазоне начальных условий и значений параметров других притягивающих инвариантных многообразий не наблюдается.

При $l_1 < l < l_2$ в системе при достаточно больших значениях момента инерции существует цикл. Численное моделирование показывает, что он является притягивающим, а соответствующие колебания с достаточно хорошей точностью являются одночастотными в широком диапазоне значений параметров l и J . Это проиллюстрировано на рис. 4, на котором представлены проекции фазовых траекторий на конфигурационную плоскость и плоскость $(\theta, \dot{\theta})$ при $\kappa = 1$ и разных комбинациях значений параметров l, J и δ .

На рис. 5 показаны амплитуды θ_1 и частоты колебаний в зависимости от момента инерции при разных значениях коэффициента жесткости κ пружины (квадраты – $\kappa = 1$, круги – $\kappa = 5$, ромбы – $\kappa = 10$), полученные численным интегрированием системы (2.2). Расчеты проводились при $\delta = 0.1, l = 0.2$. Сплошные линии соответствуют аппроксимационным формулам (4.3)–(4.4). Видно, что в достаточно широком диапазоне значений параметров частота цикла мало отличается от величины ω_* и, таким образом, практически не зависит ни от J , ни от κ . Отличие становится заметным, когда амплитуда θ оказывается большой.

На рис. 6 проиллюстрировано влияние длины державки на амплитуду (рис. 6, а и 6, с) и частоту (рис. 6, б и 6, d) колебаний маятника в случае $\kappa = 1$ при различных значениях момента инерции и коэффициента демпфирования. Рис. 6а, 6б соответствуют значе-

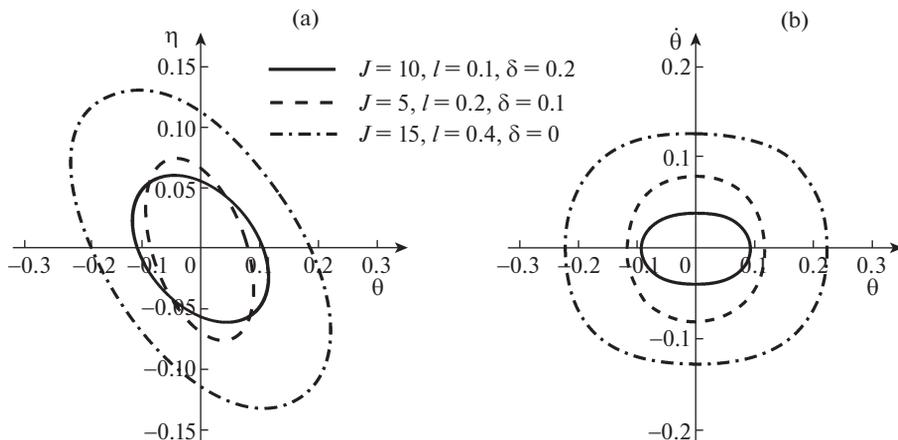


Рис. 4. Примеры фазовых траекторий системы при $\kappa = 1$ и разных комбинациях значений параметров l , J и δ : а) в проекции на конфигурационную плоскость; б) в проекции на плоскость $(\theta, \dot{\theta})$.

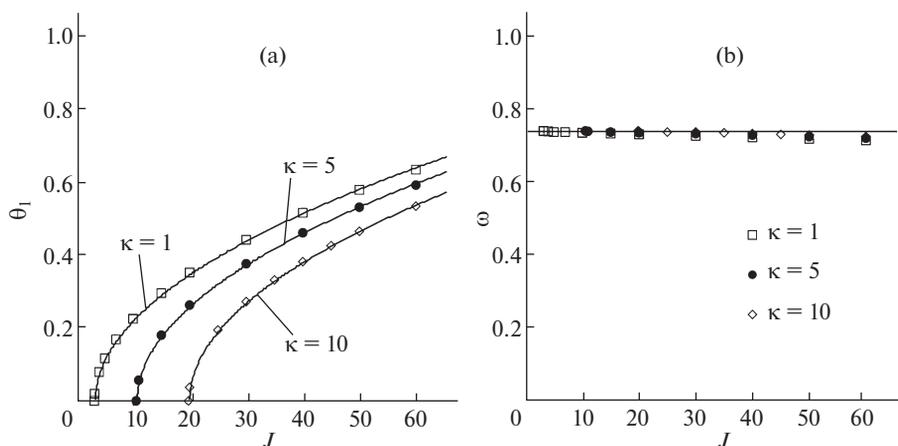


Рис. 5. Зависимости характеристик цикла от момента инерции маятника при разных значениях коэффициента жесткости; точки – результаты численного интегрирования, сплошные линии – аппроксимационные формулы: а) амплитуда колебаний маятника; б) частота колебаний маятника.

нию $\delta = 0$, а рис. 6с и 6d – $\delta = 0.1$. Сплошными линиями вновь обозначены зависимости (4.3)–(4.4), а квадратами – частоты и амплитуды, полученные в результате численного интегрирования системы (2.2) при разных значениях параметров l и J (белые квадраты: $J = 10$; черные квадраты: $J = 5$).

Видно, что аппроксимационные формулы достаточно хорошо согласуются с “точным” численным решением, если амплитуда колебаний маятника невелика (менее 0.3 рад). В частности, при $\delta = 0.1$ аппроксимация при рассмотренных значениях J оказывается достаточно эффективной во всей области существования цикла. Зависимость частоты цикла от момента инерции проявляется только при большой амплитуде цикла.

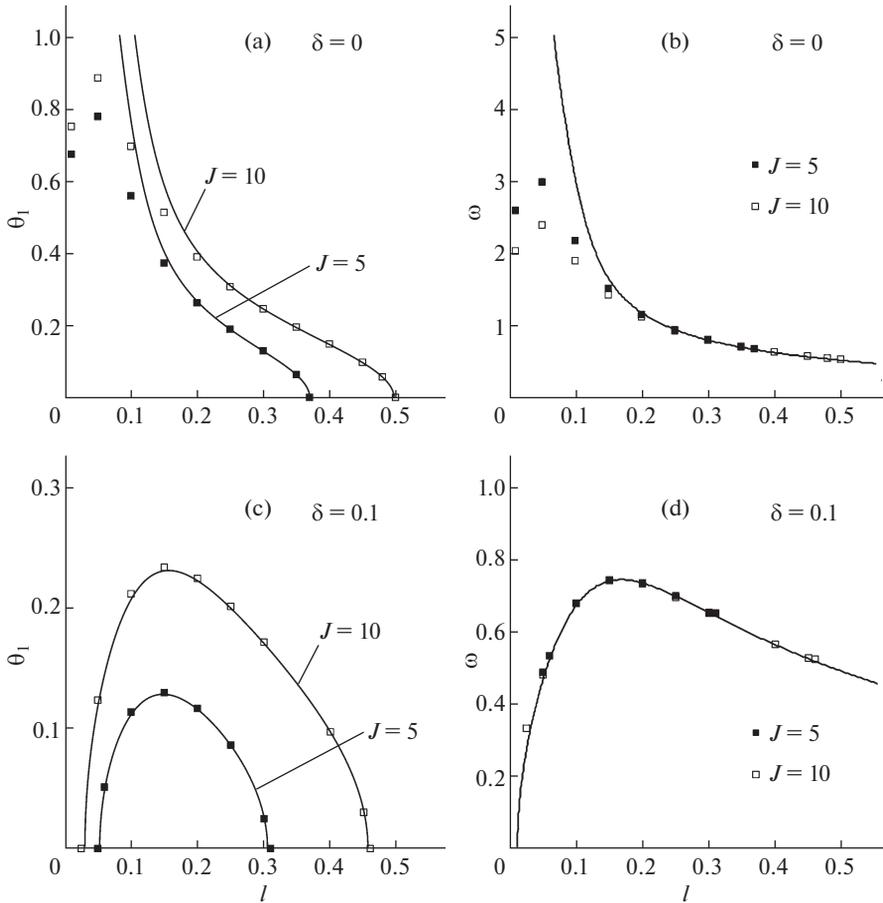


Рис. 6. Зависимости амплитуды и частоты цикла от длины державки маятника при разных значениях момента инерции и коэффициента демпфирования; точки – результаты численного интегрирования, сплошные линии – аппроксимационные формулы.

Впрочем, необходимо отметить, что при больших θ предложенный подход должен быть модифицирован, поскольку в этом случае необходимо учитывать нелинейность зависимости коэффициента нормальной силы от угла атаки.

6. Заключение. Рассмотрена динамика упруго закрепленного аэродинамического маятника. Для описания нестационарного аэродинамического воздействия используется модель присоединенного осциллятора.

Найден диапазон длин державки, в котором при достаточно больших значениях момента инерции маятника положение равновесия “вдоль потока” является неустойчивым, и существует предельный цикл. Получены аппроксимационные формулы для амплитуды и частоты этого цикла.

Проведено численное моделирование, показано, что предложенные формулы достаточно хорошо согласуются с результатами численного интегрирования уравнений движения в широком диапазоне значений параметров системы.

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Фундаментальные и прикладные исследования космоса”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Климина Л.А.* Ротационные режимы движения аэродинамического маятника с вертикальной осью вращения // Вестн. Моск. ун-та. Серия 1: Мат. Мех. 2009. № 5. С. 71–74.
2. *Ro K., Ahmad H., Kamman J.* Dynamic Modeling and Simulation of Hose-Paratrogue Assembly for Mid-Air Operations // AIAA Infotech Aerospace Conference. 2009. P. 1–14.
<https://doi.org/10.2514/6.2009-1849>
3. *Abdelkefi A.* Aeroelastic energy harvesting: A review // Int. J. Eng. Sci. 2016. V. 100. P. 112–135.
<https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2015.10.006>
4. *Wu Y., Li D., Xiang J., Da Ronch A.* A modified airfoil-based piezoaeroelastic energy harvester with double plunge degrees of freedom // Theor. Appl. Mech. Lett. 2016. V. 6. № 5. P. 244–247.
<https://doi.org/10.1016/j.taml.2016.08.009>
5. *Pigolotti L., Mannini C., Bartoli G., Thiele K.* Critical and post-critical behaviour of two-degree-of-freedom flutter-based generators // J. Sound Vib. 2017. V. 404. P. 116–140.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.05.024>
6. *Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А.* Введение в задачу о движении точки и тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992.
7. *Досаев М.З., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д., Лю В.-Л., Линь Ч.-Х.* Бифуркации режимов функционирования малых ветроэлектростанций и оптимизация их характеристик // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 2. С. 59–66.
8. *Dosaev M.* Interaction between internal and external friction in rotation of vane with viscous filling // Appl. Math. Mod. 2019. Vol. 68. P. 21–28.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.11.002>
9. *Локшин Б.Я., Самсонов В.А.* Об одной эвристической модели аэродинамического маятника // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4. № 3. С. 1047–1061.
10. *Локшин Б.Я., Самсонов В.А.* Авторотационные и автоколебательные режимы движения аэродинамического маятника // ПММ. 2013. Т. 77. № 4. С. 501–513.
11. *Локшин Б.Я., Самсонов В.А., Шамолин М.В.* Маятниковые системы с динамической симметрией // Совр. математика и ее приложения. 2016. Т. 100. С. 76–133.
12. *Selyutskiy Yu.D., Holub A.P., Dosaev M.Z.* Elastically mounted double aerodynamic pendulum // Int. J. Struct. Stab. Dyn. 2019. V. 19. № 5. P. 1941007.
<https://doi.org/10.1142/S0219455419410074>
13. *Goman M., Khrabrov A.* State-space representation of aerodynamic characteristics of an aircraft at high angles of attack // J. Aircraft. 1994. V. 31. № 5. P. 1109–1115.
14. *Hansen M. H., Gaunaa M., Aagaard Madsen H.* A Beddoes-Leishman type dynamic stall model in state-space and indicial formulations. Tech. Rep. Risø-R-1354(EN): Risø National Laboratory, Denmark, 2004.
15. *Mannini C., Massai T., Marra A.M.* Modeling the interference of vortex-induced vibration and galloping for a slender rectangular prism // J. Sound Vib. 2018. V. 419. P. 493–509.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.12.016>
16. *Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.* О колебаниях пластины в потоке сопротивляющейся среды // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 4. С. 24–31.
17. *Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.* Феноменологическая модель взаимодействия пластины с потоком среды // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11. № 7. С. 43–62.
18. *Selyutskiy Yu.D., Samsonov V.A., Andronov P.R.* Oscillations of aerodynamic pendulum // Int. J. Struct. Stab. Dyn. 2013. V. 13. № 7. P. 1340010.
<https://doi.org/10.1142/S0219455413400105>
19. *Табачников В.Г.* Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Труды ЦАГИ. 1974. Вып. 1621. С. 79–93.

УДК 531.383,62-50

**ВЫСОКОТОЧНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ КОЛЕБАНИЯ РЕЗОНАТОРА
ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
МЕТОДОВ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ**

© 2022 г. А. Б. Шаталов^{a,*}, С. В. Соколов^{b,**},
В. А. Погорелов^{c,***}, И. Н. Гашененко^{a,****}

^aРоссийский университет дружбы народов, Институт инновационных инженерных технологий,
Москва, Россия

^bМосковский технический университет связи и информатики, Москва, Россия

^cДонской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

*e-mail: shatalovab@yandex.ru

**e-mail: s.v.s.888@yandex.ru

***e-mail: vadim.pogorelov.rnd@gmail.com

****e-mail: gashenenko@mail.ru

Поступила в редакцию 10.04.2020 г.

После доработки 12.08.2020 г.

Принята к публикации 07.09.2020 г.

Для повышения точности работы волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) построена стохастическая модель колебаний кромки резонатора и выходного сигнала чувствительного элемента (ЧЭ) ВТГ в форме “объект-наблюдатель”, учитывающая особенности динамики выходного сигнала ЧЭ и наличие широкополосных помех. Для оценки амплитуды колебаний резонатора предложено использование фильтра Калмана. Приведены результаты численного моделирования, иллюстрирующие эффективность использования предложенного метода.

Ключевые слова: волновой твердотельный гироскоп, фильтр Калмана, амплитуда колебаний, кромка резонатора

DOI: 10.31857/S057232992201010X

Введение. Совершенствование технологий изготовления волновых твердотельных гироскопов (ВТГ) обеспечивает им все большее применение в навигационно-измерительных комплексах самого различного назначения [1–7]. Но, несмотря на резкое улучшение технических характеристик ВТГ за последние годы, их точность по-прежнему существенно уступает точности механических и лазерных гироскопов [8–11]. В связи с этим проблема повышения точности для ВТГ на сегодняшний день остается одной из основных. Ее решение осуществляется по многим направлениям, из которых следует выделить в качестве особо перспективного направление обработки выходной информации чувствительных элементов (ЧЭ) ВТГ (пьезоэлементов, оптических датчиков и др.), измеряющих амплитуду колебаний его резонатора с неизбежными и весьма интенсивными широкополосными помехами [12]. В настоящее время для фильтрации зашумленных измерений ЧЭ ВТГ применяется метод наименьших квадратов (МНК) [13]. Его основным недостатком является то, что данный метод не является алгоритмически инвариантным. Время его работы растет экспоненциально с увеличением входных данных, что существенно затрудняет его использование в алгорит-

мах обработки выходной информации ВТГ. Кроме того, оценки, получаемые с использованием МНК, будут точны только для небольшого интервала времени. В связи с этим возникает необходимость постоянного перерасчета уравнения регрессии по мере поступления новых измерений, осложняемого известными трудностями подбора уравнения регрессии при построении модели выходного сигнала ВТГ [14].

Подобная проблема обуславливает необходимость разработки новых методов обработки измерительной информации ВТГ, учитывающих особенности динамики выходного сигнала ВТГ и обеспечивающих заданную точность его оценки в условиях широкополосных интенсивных помех. Рассмотрим далее один из возможных вариантов решения данной проблемы.

1. Постановка задачи. Как показано в [15], динамика ВТГ может быть описана системой двух линейных обыкновенных нестационарных дифференциальных уравнений второго порядка, описывающих возбуждаемую моду (режим возбуждения) и измеряемую моду (режим чувствительности):

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\xi\omega\dot{x}_1 + (\omega^2 - \Omega^2)x_1 &= f_1 - 2K\Omega\dot{x}_2 - K\dot{\Omega}x_2 \\ \ddot{x}_2 + 2\xi\omega\dot{x}_2 + (\omega^2 - \Omega^2)x_2 &= f_2 + 2K\Omega\dot{x}_1 + K\dot{\Omega}x_1 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где x_1, x_2 – деформация кромки резонатора в режимах возбуждения и чувствительности соответственно, ω – собственная частота резонатора, соответствующая второй форме колебаний, ξ – относительный коэффициент демпфирования, Ω – угловая скорость основания, f_1, f_2 – ускорения кромки резонатора, вызванные внешними силами, K – коэффициент Брайана (для второй формы колебаний равный 0.4).

При выполнении типичных для практики условий работы ВТГ [1, 2, 13, 15]:

– угловая скорость основания намного меньше собственной частоты резонатора $\Omega \ll \omega$;

– элементы возбуждения действуют только на координату x_1 , т.е. $f_2 = 0$;

– угловая скорость основания постоянна $\dot{\Omega} = 0$;

– ускорение кромки резонатора, обусловленное действием элементов возбуждения, намного больше ускорения Кориолиса $f_1 \gg 2K\Omega\dot{x}_2$;

уравнения (1.1) трансформируются в систему линейных стационарных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{\omega}{Q}\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= f_1 \\ \ddot{x}_2 + \frac{\omega}{Q}\dot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= 2K\Omega\dot{x}_1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $Q = 1/(2\xi)$ – добротность резонатора.

При формировании возбуждения резонатора по гармоническому закону $f_1 = f_0 \sin vt$, где f_0, v – амплитуда и частота ускорения, обусловленного действием элементов возбуждения, в установившемся режиме резонансной настройки решение первого уравнения системы (1.2) имеет вид [15]

$$x_{1res} = -x_{1r} \cos vt$$

где $x_{1r} = f_0 Q / \omega v$, и, соответственно, уравнение движения кромки резонатора в режиме чувствительности может быть записано следующим образом:

$$\ddot{x}_2 + \frac{\omega}{Q}\dot{x}_2 + \omega^2 x_2 = 2K\Omega\dot{x}_1 = 2K\Omega x_{1r} v \sin vt \quad (1.3)$$

Решением данного уравнения в установившемся режиме является временной сигнал, измеряемый чувствительными элементами ВТГ:

$$x_2 = -2K\Omega x_{1r} \frac{Q}{v} \cos vt$$

Соответственно, с выхода ЧЭ ВТГ (пьезоэлементов, оптических датчиков и др.) снимается измерительный сигнал, который с учетом неизбежных помех измерения W_1 может быть записан следующим образом:

$$z_1 = x_2 + W_1 = -2K\Omega x_{1r} \frac{Q}{v} \cos vt + W_1 \quad (1.4)$$

Так как помехи измерения W_1 обусловлены, как правило, значительным числом равномошных случайных факторов (вариациями температуры, случайными перегрузками, флуктуациями питания, конструктивными погрешностями ЧЭ и др.), то с целью сохранения общности последующих рассуждений полагаем далее помеху измерения W_1 белым гауссовским шумом с нулевым средним и известной интенсивностью D_{W1} .

В силу того, что измеряемый сигнал x_2 является высокодинамичным, для его оценки по стохастическим измерениям (1.4) целесообразно использовать не традиционные методы статической обработки сигналов [14], а методы стохастической оценки динамических сигналов [18, 19]. Т.к. оцениваемый сигнал x_2 описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка, то с точки зрения точности оценивания здесь наиболее эффективным оказывается линейный фильтр Калмана (ФК), обеспечивающий минимум среднеквадратической ошибки оценки. Но построение данного фильтра непосредственно с использованием уравнения (1.3), содержащего неизвестный параметр Ω в правой части, оказывается невозможным. В связи с этим возникает необходимость разработки нового подхода, обеспечивающего минимальную в среднеквадратическом ошибку оценки амплитуды колебания резонатора ВТГ x_2 в условиях неизбежных помех измерения.

2. Решение задачи. Для решения задачи построения уравнений стохастической оценки сигнала x_2 сформируем помимо сигнала x_2 дополнительный сигнал x_3 , образованный сдвигом гармонического сигнала x_2 на $\pi/2$ (например, за счет использования типовой фазосдвигающей цепи [20]):

$$x_3 = 2K\Omega x_{1r} \frac{Q}{v} \sin vt$$

который далее подвергается зашумленному измерению

$$z_2 = x_3 + W_2 = 2K\Omega x_{1r} \frac{Q}{v} \sin vt + W_2 \quad (2.1)$$

где помеху измерения W_2 в силу упомянутых ранее соображений полагаем белым гауссовским шумом с нулевым средним и известной интенсивностью D_{W2} .

Из выражения сигнала измерения (2.1) может быть получено с точностью до постоянного множителя v следующее представление правой части уравнения (1.3):

$$(z_2 - W_2) \frac{v}{Q} = 2K\Omega x_{1r} \sin vt$$

Подстановка полученного выражения в уравнение движения кромки резонатора в режиме чувствительности приводит к стохастическому дифференциальному уравнению, не содержащему параметрической неопределенности:

$$\ddot{x}_2 + \frac{\omega}{Q} \dot{x}_2 + \omega^2 x_2 = z_2 \frac{v^2}{Q} - \frac{v^2}{Q} W_2$$

Для возможности дальнейшего использования методов стохастической фильтрации представим данное уравнение в векторной форме Ланжевена:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{20} \\ \dot{x}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{20} \\ x_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \frac{v^2}{Q} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ v^2 \\ Q \end{pmatrix} W_2 = A \begin{pmatrix} x_{20} \\ x_{21} \end{pmatrix} + B - CW_2, \quad x_2 = x_{20}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\omega \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ v^2 \\ Q \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ v^2 \\ Q \end{pmatrix}$$

Выбирая в качестве сигнала наблюдения за координатой $x_2 = x_{20}$ сигнал измерения z_1 , уравнение наблюдателя получаем в форме (1.4):

$$z_1 = x_{20} + W_1 = H \begin{pmatrix} \hat{x}_{20} \\ \hat{x}_{21} \end{pmatrix} + W_1$$

где $H = |1 \ 0|$, а соответствующий линейный ФК для оценки сигнала $x_2 = x_{20}$ – в виде (2.2):

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{20} \\ \hat{x}_{21} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{20} \\ x_{21} \end{pmatrix} + B + K (z_1 - \hat{x}_{20}) \quad (2.2)$$

$$\dot{R} = AR + RA^T + CD_{W_2}C^T - KD_{W_1}K^T = AR + RA^T + CC^T D_{W_2} - RH^T HRD_{W_1}^{-1}$$

$$K = RH^T D_{W_1}^{-1}$$

$$\hat{x}_{20}(0) = -2Kx_{1r} \frac{Q}{v} M[\Omega], \quad \hat{x}_{21}(0) = 0,$$

$$R(0) = M \left[\begin{pmatrix} x_{20}(0) \\ x_{21}(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{x}_{20}(0) \\ \hat{x}_{21}(0) \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} x_{20}(0) \\ x_{21}(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{x}_{20}(0) \\ \hat{x}_{21}(0) \end{pmatrix} \right]^T$$

где $\hat{x}_{20}, \hat{x}_{21}$ – оценки сигнала x_2 и скорости его изменения, R – апостериорная ковариационная матрица.

Выбор значения $M[\Omega]$ осуществляется исходя из априорной информации о скорости вращения основания ВТГ: при нулевой скорости вращения основания значение $M[\Omega]$ следует выбирать равным значению проекции скорости вращения Земли на ось чувствительности ВТГ.

Для увеличения наблюдаемости вектора $|\hat{x}_{20} \ \hat{x}_{21}|^T$ можно использовать ранее полученное измерение сигнала x_3 :

$$z_2 = 2K\Omega x_{1r} \frac{Q}{v} \sin vt + W_2$$

которое с учетом выражения скорости кромки резонатора

$$\dot{x}_2 = x_{21} = 2K\Omega x_{1r} Q \sin vt$$

может быть преобразовано к измерению компоненты x_{21} масштабированием с коэффициентом v :

$$z_3 = vz_2 = 2K\Omega x_{1r} Q \sin vt + vW_2 = x_{21} + vW_2$$

В этом случае ФК, не изменяя размерности, приобретает вид

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \hat{x}_{20} \\ \hat{x}_{21} \end{vmatrix} &= A \begin{vmatrix} x_{20} \\ x_{21} \end{vmatrix} + B + K \left(\begin{vmatrix} z_1 \\ z_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \hat{x}_{20} \\ \hat{x}_{21} \end{vmatrix} \right) \\ K &= R \begin{vmatrix} D_{W1}^{-1} & 0 \\ 0 & v^{-2} D_{W2}^{-1} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\dot{R} = AR + RA^T + CC^T D_{W2} - R \begin{vmatrix} D_{W1}^{-1} & 0 \\ 0 & v^{-2} D_{W2}^{-1} \end{vmatrix} R$$

После процедуры оценки сигнала \hat{x}_2 вычисление значения Ω осуществляется традиционными способами [15]. Необходимо при этом отметить, что введение дополнительного наблюдения компоненты x_{21} хотя и увеличивает (незначительно) вычислительные затраты на реализацию ФК, но позволяет при этом существенно увеличить его сходимость, что проиллюстрировано в приведенном ниже примере.

3. Имитационное моделирование. Численное моделирование работы ВТГ в режиме чувствительности осуществлялось на временном интервале [0, 1000] сек при следующих значениях параметров режима и самой конструкции: $f_0 = 0.4$ м/с², $Q = 5000$, $\omega = v = 4500$ Гц, $K = 0.4$. Интегрирование уравнения колебания кромки резонатора (1.3) осуществлялось с использованием метода Рунге–Кутты 4-го порядка с шагом 0.01 сек. Значения постоянной угловой скорости Ω выбирались в интервале $[10^{-4}, 1]$ рад/сек, помехи измерения W_1, W_2 моделировались центрированными гауссовскими случайными последовательностями с дисперсиями $D_{W1} = D_{W2} = (10^{-7} \text{ м})^2$. Оценка параметров движения кромки резонатора осуществлялась с использованием ФК (2.3). На рис. 1, 2 показаны изменения во времени ошибок оценивания амплитуды колебаний кромки резонатора фильтром (2.3) для значений скорости вращения основания: $\Omega_1 = 10^{-4}$ рад/сек, $\Omega_2 = 10^{-2}$ рад/сек, соответственно; на рис. 3, 4 – ошибки оценивания самой скорости вращения основания $\Omega_1 = 10^{-4}$ рад/сек на всем интервале моделирования (рис. 3) и в конце его (рис. 4); на рис. 5, 6 – ошибки оценивания скорости вращения основания $\Omega_2 = 10^{-2}$ рад/сек на всем интервале моделирования (рис. 5) и в конце его (рис. 6). Анализ результатов моделирования показывает высокую устойчивость процесса оценивания и существенное увеличение ее точности по сравнению с традиционным подходом – непосредственным определением угловой скорости по показаниям ЧЭ ВТГ. Так, при оценке $\Omega_1 = 10^{-4}$ рад/сек с использованием традиционного подхода ошибка имеет неустойчивый характер и достигает величины 2.8×10^{-4} рад/сек, а при оценке предложенным методом не превышает 2×10^{-5} рад/сек (рис. 4) (т.е. точнее, более чем в 10 раз). Аналогично, при оценке $\Omega_2 = 10^{-2}$ рад/сек с использованием традиционного подхода ошибка имеет также ярко выраженный неустойчивый характер и достигает величины 2×10^{-2} рад/сек, а при оценке предложенным методом не превышает 1.5×10^{-3} рад/сек (рис. 6) (т.е. также точнее на порядок).

Таким образом, результаты имитационного моделирования свидетельствуют о возможности эффективного практического применения предложенного подхода для увеличения точности обработки выходной информации ВТГ.

Заключение. В целом, построенная в работе стохастическая модель “ВТГ-ЧЭ” в форме “объект-наблюдатель”, разработанный подход к оценке ее вектора состояния и полученные результаты имитационного моделирования позволяют сделать вывод об устойчивости и высокой точности предложенного метода оценки амплитуды колебаний резонатора ВТГ. Разработанный метод может найти широкое применение при

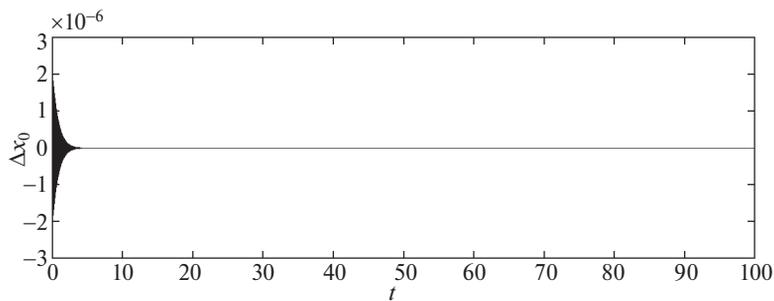


Рис. 1. Ошибка оценивания амплитуды колебаний кромки резонатора при $\Omega_1 = 10^{-4}$ рад/сек.

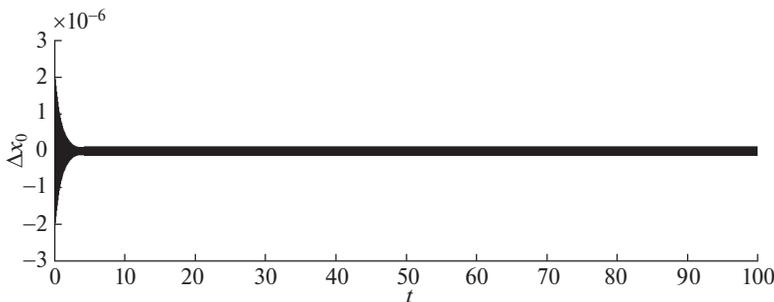


Рис. 2. Ошибка оценивания амплитуды колебаний кромки резонатора при $\Omega_2 = 10^{-2}$ рад/сек.

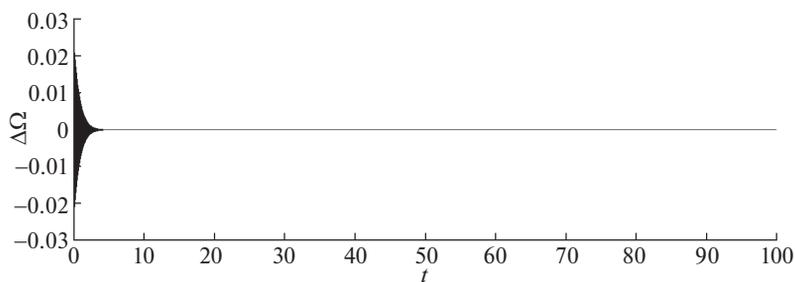


Рис. 3. Ошибки оценивания скорости вращения основания на всем интервале моделирования при $\Omega_1 = 10^{-4}$ рад/сек.

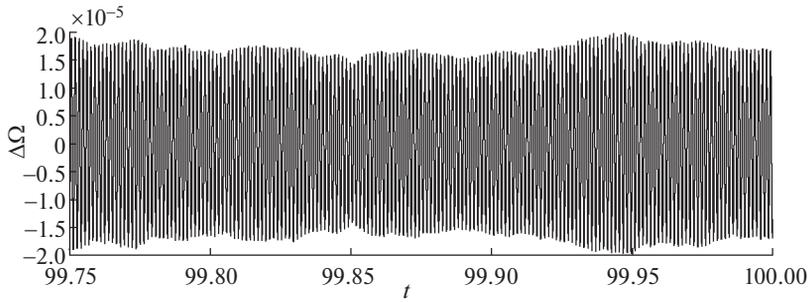


Рис. 4. Ошибки оценивания скорости вращения основания в конце интервала моделирования при $\Omega_1 = 10^{-4}$ рад/сек.

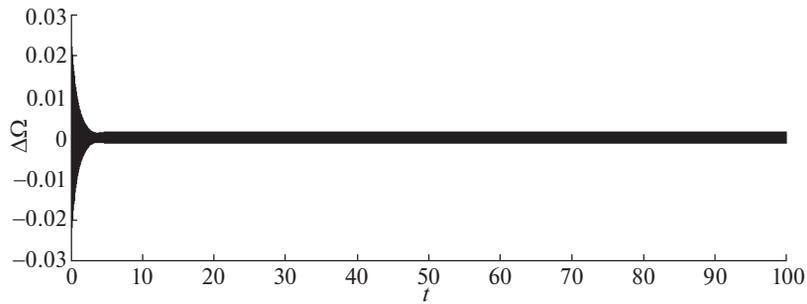


Рис. 5. Ошибки оценивания скорости вращения основания на всем интервале моделирования при $\Omega_2 = 10^{-2}$ рад/сек.

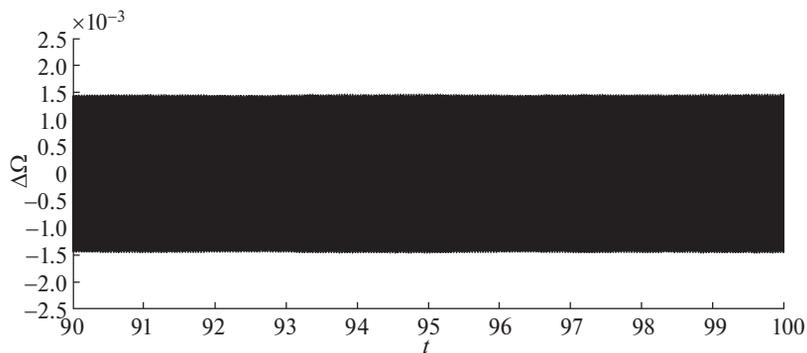


Рис. 6. Ошибки оценивания скорости вращения основания на всем интервале моделирования при $\Omega_2 = 10^{-2}$ рад/сек.

проектировании современных и перспективных ВТГ, функционирующих в условиях действия внутренних и внешних помех различной физической природы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Делэйе Ф. Бортовая инерциальная система координат Spacenaute для европейской ракеты-носителя “Ариан-6” на основе волнового твердотельного гироскопа // Гироскопия и навигация. 2018. Т. 26. № 4 (103). С. 3–13.
2. Negri C., Labarre E., Lignon C., Brunstein E., Salaün E. A new generation of IRS with innovative architecture based on HRG for Satellite Launch Vehicle // Proceedings of the 22nd Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. Saint Petersburg, 2015. P. 298–306.
3. Джангжава Г.И., Бахонин К.А., Виноградов Г.М., Требухов А.В. Бесплатформенная инерциальная навигационная система на базе твердотельного волнового гироскопа // Сб. материалов XIV С.-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. СПб., 2007. С. 116–125.
4. Delhaye, F. HRG by SAFRAN: The game-changing technology // 2018 IEEE International Symposium on Inertial Sensors and Systems (INERTIAL). 2018. P. 1–4.
<https://doi.org/10.1109/ISISS.2018.8358163>
5. Современные информационные технологии в задачах навигации и наведения беспилотных маневренных летательных аппаратов / Под. ред. М.Н. Красильщикова, Г.Г. Себрякова. М.: Физматлит, 2009. 556 с.
6. Матвеев В.А., Лунин Б.С., Басараб М.А. Навигационные системы на волновых твердотельных гироскопах. М.: Физматлит, 2008. 240 с.
7. Розенберг И.Н., Соколов С.В., Уманский В.И., Погорелов В.А. Теоретические основы тесной интеграции инерциально-спутниковых навигационных систем. М.: Физматлит, 2018. 312 с.
8. Соколов С.В., Погорелов В.А. Стохастическая оценка, управление и идентификация в высокоточных навигационных системах. М.: Физматлит, 2016. 264 с.
9. Соколов С.В., Погорелов В.А. Основы синтеза многоструктурных бесплатформенных навигационных систем. М.: Физматлит, 2009. 190 с.
10. Аналитический обзор состояния исследований и разработок в области навигации за рубежом / Под. ред. Ривкин Б.С. СПб.: ГНЦ РФ АО “Концерн “ЦНИИ “Электроприбор”, 2017. 58 с.
11. Лукьянов Д.П., Распопов В.Я., Филатов Ю.В. Прикладная теория гироскопов. СПб.: ГНЦ РФ ОАО “Концерн “ЦНИИ “Электроприбор”, 2015. 316 с.
12. Джексон Р.Г. Новейшие датчики. М.: Техносфера, 2007. 384 с.
13. Распопов В.Я. и др. Волновой твердотельный гироскоп с металлическим резонатором / Под ред. Распопова В.Я. Тула: ТулГУ, 2018. 189 с.
14. Пугачев В.С., Сеницын И.Н. Теория стохастических систем. М.: Логос, 2004. 1000 с.
15. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 126 с.
16. Журавлев В.Ф., Линч Д.Д. Электрическая модель волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 12–24.
17. Трутнев Г.А. Модель твердотельного волнового гироскопа в медленных переменных // Вестник Удмуртского университета. 2015. Т. 25. Вып. 3. С. 421–429.
18. Сеницын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева. М.: Логос, 2006. 640 с.
19. Соколов С.В., Ковалев С.М., Кучеренко П.А., Смирнов Ю.А. Методы идентификации нечетких и стохастических систем. М.: Физматлит, 2018. 432 с.
20. Харкевич А.А. Основы радиотехники. М.: Физматлит, 2007. 512 с.

УДК 534.16

ФЛАТТЕР ПЛАСТИНЫ СО СМЕШАННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ В ПЛАНЕ

© 2022 г. С. Д. Алгазин^{а,*}

^а *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской Академии наук,
Москва, Россия*

**e-mail: algazinsd@mail.ru*

Поступила в редакцию 16.07.2020 г.

После доработки 24.07.2020 г.

Принята к публикации 13.08.2020 г.

Методом математического моделирования исследуются флаттер пластины произвольной формы в плане. Для численного моделирования неустойчивых колебаний пластины предложен эффективный численный алгоритм без насыщения, который позволяет на редкой сетке получить приемлемую точность в приближенном решении. Стандартно критическая скорость флаттера ищется на двух сетках 9×15 и 15×31 ; критерием правильности расчета является близость полученных значений, возможно задать произвольную сетку. Произведены расчеты для эллиптической алюминиевой пластины для двух толщин $h = 0.003$ и $h = 0.005$ при разных направлениях вектора скорости потока. Совпадение расчетов на двух сетках удовлетворительное.

Ключевые слова: численные методы без насыщения, флаттер пластины

DOI: 10.31857/S0572329922010020

Введение. Наиболее распространенным в настоящее время методом решения задач механики деформируемого твердого тела является метод конечных элементов. Его недостатки общеизвестны: аппроксимируя перемещение кусочно-линейной функцией, мы получаем, что напряжения разрывные. Вместе с тем следует заметить, что большинство задач механики деформируемого твердого тела описывается уравнениями эллиптического типа, которые имеют гладкие решения. Представляется актуальным разработать алгоритмы, которые учитывали бы эту гладкость. Идея таких алгоритмов принадлежит К.И. Бабенко [1]. Эта идея высказана им в начале 70-х годов прошлого века. Многолетнее применение этой методики в эллиптических задачах на собственные значения автором настоящей работы доказало их высокую эффективность. В настоящей работе рассматривается флаттер пластины, обтекаемой, с одной стороны, потоком воздуха. Принятая математическая модель флаттера пластины построена А.А. Ильишиным, И.А. Кийко [2]. Эффективный алгоритм решения задачи разработан автором и Кийко И.А. [3]. Основу программы составляет построение дискретного бигармонического оператора по методике [4]. Конформное отображение строится по программе Э.П. Казанджана [5]. Программный комплекс устроен таким образом, что если известны параметрические уравнения границы области, то возможно найти критическую скорость флаттера и построить соответствующую собственную форму. Стандартно критическая скорость флаттера ищется на двух сетках 9×15 и 15×31 ; критерием правильности расчета является близость полученных значений, возможно задать произвольную сетку.

1. Математическая постановка задачи. Исследование устойчивости колебаний тонкой пластины произвольной формы в плане, которая в плоскости x, y занимает область G с границей ∂G и обдувается потоком газа, приводит к спектральной задаче [2] для амплитудного значения прогибов $\varphi = \varphi(x, y), (x, y) \in G$.

$$D\Delta^2\varphi - \beta \mathbf{V} \text{grad}\varphi = \lambda\varphi, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \beta = \frac{kp_0}{c_0} \quad (1.1)$$

$$\varphi|_{\partial G} = 0, \quad M\varphi|_{\partial G} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины, h – ее толщина, $\mathbf{V} = (V_x, V_y)$ – вектор скорости газа, p_0, c_0 – давление и скорость звука в невозмущенном потоке, k – показатель политропы газа.

Собственное число λ связано с частотой колебаний соотношением

$$\lambda = -\rho h \omega^2 - \beta \omega \quad (1.3)$$

в котором ρ – плотность материала пластины.

Оператор M в (1.2) – это известный в теории пластин дифференциальный оператор, определяемый типом граничных условий. Методика решения спектральной задачи (1.1)–(1.3) описана для произвольного оператора M .

Колебания пластины будут устойчивыми или нет в зависимости от того, будет ли $\text{Re}\omega < 0$ или $\text{Re}\omega > 0$; если $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ – наименьшее по модулю собственное значение, то вследствие (1.3) выписанным неравенствам соответствуют $F(\alpha_1, \beta_1) > 0$ или $F(\alpha_1, \beta_1) < 0$, где $F(\alpha_1, \beta_1) = \alpha_1\beta_1^2 - \rho h\beta_1^2$. Поскольку $\alpha_1 = \alpha_1(V), \beta_1 = \beta_1(V)$ уравнение $F(\alpha_1, \beta_1) = 0$ определяет нейтральную кривую и соответствующую ей критическую скорость флаттера. Речь идет, следовательно, о нахождении нулей функции $F(\alpha_1(V), \beta_1(V))$ при заданном направлении вектора скорости потока.

Обозначим через l характерный размер области G и введем безразмерные (со штрихами) координаты и параметры: $x = x'l, y = y', E = E'p_0, h = h'l, \rho = \frac{\rho'p_0}{c_0^2}, \omega = \frac{\omega'c_0}{l}, V = V'c_0, \varphi = \varphi'l$.

Подставив в (1.1), (1.3), убеждаемся, что в безразмерной форме система сохраняет свой вид, если параметр β заменить на безразмерный параметр k . В дальнейшем изложении штрихи будем опускать.

Введем вместо декартовых координат x, y криволинейные координаты r, θ по формулам $x = u(r, \theta), y = v(r, \theta)$; если выполнены условия Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

то система координат r, θ ортогональна. Выберем теперь функции $u(r, \theta)$, и $v(r, \theta)$ таким образом, чтобы функция

$$\psi(\zeta) = u(r, \theta) + iv(r, \theta), \quad \zeta = r \exp(i\theta)$$

задавала конформное отображение круга $|\zeta| = r \leq 1$ на область G . Тогда в координатах (r, θ) уравнение (1.1) примет вид

$$D\Delta(|\psi'(\zeta)|^{-2} \Delta\varphi) - k \left((V_x u_r + V_y v_r) \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} (V_y u_r - V_x v_r) \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = \lambda |\psi'(\zeta)|^2 \varphi \quad (1.4)$$

$$\left(u_r = \text{Re} \left(\frac{\psi'(\zeta) \zeta}{r} \right), v_r = \text{Im} \left(\frac{\psi'(\zeta) \zeta}{r} \right) \right)$$

Таблица 1. Результаты расчетов для эллиптической пластины

($a = 1, e = 0.7$); $Al: (E = 0.7 \times 10^6 \text{ кгс/см}^2, \rho = 2.7 \times 10^3 \text{ кг/м}^3)$

θ	$h = 0.003$		$h = 0.005$	
	9×15	15×31	9×15	15×31
0	0.4255 (3)	0.4454 (2)	1.6984 (2)	1.7925 (1)
$\pi/8$	0.4528 (2)	0.4609 (2)	1.5195 (1)	1.5397 (1)
$\pi/4$	0.4259 (1)	0.4199 (1)	1.7138 (2)	1.7989 (2)
$3\pi/8$	0.3582 (1)	0.3696 (1)	1.9560 (2)	1.9372 (2)
$\pi/2$	0.3346 (1)	0.3438 (1)	2.1710 (2)	2.2268 (2)
$5\pi/8$	0.3238 (1)	0.3289 (1)	2.2892 (2)	2.2667 (2)
$3\pi/4$	0.3117 (1)	0.3113 (1)	2.0261 (2)	1.9760 (2)
$7\pi/8$	0.2941 (1)	0.2927 (1)	2.2988 (2)	2.9141 (2)
π	0.2834 (1)	0.2840 (1)	2.5720 (2)	2.6060 (2)
$9\pi/8$	0.2892 (1)	0.2900 (1)	2.5415 (2)	2.7088 (2)
$5\pi/4$	0.3157 (1)	0.3125 (1)	2.4861 (2)	2.0417 (2)
$11\pi/8$	0.3704 (1)	0.3517 (1)	2.4607 (2)	2.2631 (2)
$3\pi/2$	0.4671 (1)	0.4048 (1)	2.6563 (2)	2.3201 (2)
$13\pi/8$	0.4369 (1)	0.4676 (1)	2.0075 (2)	2.0203 (2)
$7\pi/4$	0.4085 (3)	0.4736 (2)	1.5138 (5)	1.8752 (1)
$15\pi/8$	0.4042 (5)	0.4474 (2)	1.5576 (5)	1.8221 (1)

граничные условия (1.2) преобразуются известным образом [7]. В дальнейшем изложении область G предполагается односвязной, а контур ∂G – кривой Ляпунова; это обеспечивает выполнение основной теоремы Римана и теоремы о соответствии границ. Обозначим

$$f(r, \theta) = \Phi(r, \theta) + \lambda |\psi'(\xi)|^2 \varphi$$

$$\Phi(r, \theta) = k \left((V_x u_r + V_y v_r) \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} (V_y u_r - V_x v_r) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)$$

и запишем уравнение (1.4) в виде

$$D\Delta(|\psi'(\xi)|^{-2} \Delta \Phi) = \Phi(r, \varphi) + \lambda |\psi'(\xi)|^2 \varphi \tag{1.5}$$

Теперь очевидно, что дискретизации краевой задачи (1.5), (1.2) вполне аналогична описанной ранее [4] для бигармонического оператора.

2. Вычислительные эксперименты. Рассматриваются алгоритмы численного решения задачи (1.1) с краевыми условиями

$$u|_{\partial G} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial G_1} = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{\partial G_2} = 0 \tag{2.3}$$

Здесь G – область в комплексной z – плоскости с достаточно гладкой границей $\partial G = \partial G_1 \cup \partial G_2$, n – единичный вектор внешней нормали к ∂G ; d/ds – означает дифференцирование по длине дуги (длина отсчитывается против часовой стрелки); γ – кривизна ∂G ; ν – постоянная (коэффициент Пуассона). Краевые условия (2.1) и (2.2) означают, что пластинка закреплена по краю, а краевые условия (2.1) и (2.3) означают свободное опирание по краю.

Для рассматриваемых смешанных краевых условий оператор M имеет разный вид для частей границ G_i , $i = 1, 2$. Возможность такой дискретизации проверяется ниже экспериментально.

Рассматривалась эллиптическая пластинка с большой полуосью $a = 1$ и эксцентриситетом $e = 0.7$. Правая половина эллипса закреплена, а левая свободно оперта. Результаты расчетов представлены в таблице 1.

3. Выводы. Экспериментально проверено, что методика, разработанная в [6] для задач флаттера с однородными краевыми условиями, применима для смешанных краевых условий. Сравнение расчетов на двух сетках дает в большинстве случаев хорошее совпадение. Те случаи, когда совпадение плохое, выделены в таблице 1 полужирным шрифтом.

Благодарность. Работа выполнена по теме государственного задания ИПМех РАН № АААА-А20-120011690132-4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.; 2-е изд., испр. и доп. / Под ред. *А.Д. Брюно*. М.; Ижевск: РХД, 2002. 847 с.
2. *Ильюшин А.А., Кийко И.А.* Новая постановка задачи о флаттере полой оболочки // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 167–171.
3. *Алгазин С.Д., Кийко И.А.* Численно-аналитическое исследование флаттера пластины произвольной формы в плане // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 1. С. 171–174.
4. *Алгазин С.Д.* Численные алгоритмы классической матфизики. II. Спектральные задачи для бигармонического уравнения // Препр. ИПМех. М.: ИПМех, 2001. № 678. 27 с.
5. *Казанджан Э.П.* Об одном численном методе конформного отображения односвязных областей // Препр. ИПМ. М.: ИПМ, 1977. № 82. 59 с.
6. *Алгазин С.Д., Кийко И. А.* Флаттер пластин и оболочек. Издание 2-е, переработанное и дополненное. М.: “URSS”, 2016. 278 с.

УДК 539.389

О ЦИКЛИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ОБОЛОЧКИ КАМЕРЫ СГОРАНИЯ ЖИДКОСТНОГО РАКЕТНОГО ДВИГАТЕЛЯ МНОГОКРАТНОГО ДЕЙСТВИЯ

© 2022 г. В. С. Зарубин^{a,*}, В. Н. Зимин^{a,**}

^a *Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет) Москва, Россия*

**e-mail: fn2@bmsu.ru*

***e-mail: ziminn@bmsu.ru*

Поступила в редакцию 04.03.2021 г.
После доработки 19.03.2021 г.
Принята к публикации 15.04.2021 г.

При построении математической модели, описывающей неупругое неизотермическое деформирование внутренней стенки цилиндрической оболочки камеры сгорания жидкостного ракетного двигателя (ЖРД), использована упрощенная расчетная схема одномерного напряженно-деформированного состояния (НДС) биметаллической оболочки. Проведен анализ изменения напряжений и деформаций во внутренней и наружной стенках оболочки в периоды пуска, работы, останова и паузы между пусками ЖРД многократного действия. Для описания неупругого деформирования внутренней стенки применен механический аналог, позволяющий описать неизотермические процессы пластичности и ползучести. Приведен пример расчета НДС оболочки, позволяющего оценить накопление абсолютного значения неупругой деформации в материале внутренней стенки, влияющей на повреждаемость ее материала.

Ключевые слова: биметаллическая оболочка, неизотермическая неупругая деформация, кратковременная ползучесть

DOI: 10.31857/S0572329922010123

Введение. Оболочка камеры сгорания современных ЖРД является одним из наиболее теплонапряженных элементов конструкции двигателя. Высокие значения давления и температуры газа в камере сгорания приводят к необходимости охлаждения ее оболочки [1]. Охлаждающий тракт оболочки образован зазором между ее внутренней и наружной стенками, скрепленными между собой диффузионной пайкой по вершинам фрезерованных ребер (рис. 1) [2]. Контактующая с высокотемпературными продуктами сгорания внутренняя стенка подвержена интенсивному нагреву, а наружная стенка выполняет роль силового элемента оболочки. Различие функций стенок оболочки приводит к необходимости их изготовления из разных материалов с существенно различными теплофизическими и механическими характеристиками. Для наружной стенки используют высокопрочные нержавеющие стали, а материалом внутренней стенки служат высокотеплопроводные сплавы на основе меди [2]. При работе ЖРД в силу большой разности температурных деформаций стенок такой биметаллической оболочки материал внутренней стенки подвергается неупругому неизотермическому деформированию (как пластическому, так и развивающейся во времени ползучести [3]), тогда как материал наружной стенки обычно сохраняет свойство упругости.

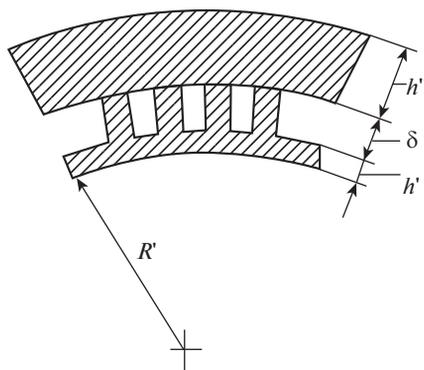


Рис. 1. Фрагмент поперечного сечения цилиндрической биметаллической оболочки.

Циклическая последовательность этапов нагружения оболочки камеры сгорания ЖРД многократного действия приводит к накоплению связанных с малоцикловой усталостью [4, 5] повреждений в материале внутренней стенки и вызвать ее разрушение и/или утрату герметичности охлаждающего тракта. Основным параметром, определяющим уровень малоцикловой усталости и характеризующим остаточный ресурс биметаллической оболочки, является абсолютное значение накопленной неупругой деформации. Для количественной оценки этого параметра необходим анализ нагружения биметаллической оболочки при многократных пусках и выключениях ЖРД. В данной работе при определенных упрощающих допущениях проведен приближенный анализ такого нагружения.

1. Упрощенная расчетная схема биметаллической оболочки. Одна из первых работ по анализу НДС оболочки камеры сгорания ЖРД принадлежит В.И. Феодосьеву [6]. В этой работе для предварительного анализа предложена упрощенная расчетная схема оболочки, учитывающая во внутренней и наружной стенках толщиной h' и h'' лишь окружные напряжения σ' и σ'' (здесь и в дальнейшем символы с одним штрихом отнесены к внутренней стенке, а с двумя штрихами – к наружной). Это позволяет рассматривать только поперечное сечение оболочки (см. рис. 1) без учета условий ее нагружения в направлении оси камеры сгорания.

Во время работы ЖРД из условия равновесия фрагмента оболочки в окружном направлении следует соотношение [3, 6]

$$\sigma' h' + \sigma'' h'' = p_g R' + p_f \delta \quad (1.1)$$

где p_g и p_f – давления газа в камере сгорания и компонента топлива в охлаждающем тракте соответственно, R' – радиус внутренней поверхности оболочки, δ – высота ребер. Ребра приняты абсолютно жесткими в радиальном направлении и достаточно часто расположенными.

Суммарная толщина $h = h' + \delta + h''$ оболочки (см. рис. 1) для двигателей с достаточно большой силой тяги мала по сравнению с ее средним радиусом $R = R' + h/2$, к которому можно отнести перемещения стенок в окружном направлении. Тогда полные деформации стенок в окружном направлении, включающие механические ε и температурные ε_T составляющие, будут одинаковы, а условие совместности деформации примет вид [5]

$$\varepsilon' + \varepsilon'_T = \varepsilon'' + \varepsilon''_T \quad (1.2)$$

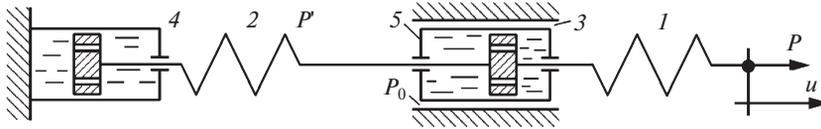


Рис. 2. Схема механического аналога.

Отсчет температурных деформаций происходит от состояния оболочки перед пуском двигателя, когда значения средних температур T' и T'' стенок одинаковы и равны T_0 .

Представленные соотношения необходимо дополнить математической моделью, описывающей связь напряжения и деформации материала каждой стенки оболочки в неизотермических условиях.

2. Модель неупругого деформирования материалов оболочки. Для используемых в конструкции рассматриваемой оболочки материалов допустимо считать, что при растяжении и сжатии связь между абсолютными значениями напряжения и деформации одинакова. Поэтому для построения модели деформирования таких материалов при одноосном нагружении необходима лишь совокупность диаграмм растяжения образцов этого материала при фиксированных значениях температуры и зависимости от времени деформации ползучести этих образцов при фиксированных значениях температуры и напряжения. Следует отметить, что учет процесса ползучести необходим лишь для материала внутренней стенки в период работы ЖРД, длительность которого имеет порядок 10^3 с. В этом случае принято говорить о кратковременной ползучести [7].

Определяемая диаграммой растяжения связь напряжения σ и деформации ε при фиксированной температуре T можно аппроксимировать объединением линейного участка упругого деформирования и участка пластического деформирования, описываемого степенной зависимостью [4]. Для линейного участка будет справедливо равенство $\sigma(T, \varepsilon) = E(T)\varepsilon$, где $E(T)$ — зависящий от температуры модуль упругости (модуль Юнга). Это равенство применимо при $\sigma \in [-\sigma_0(T); \sigma_0(T)]$ и $\varepsilon \in [-\varepsilon_0(T); \varepsilon_0(T)]$, где $\sigma_0(T)$ — зависящий от температуры предел пропорциональности и $\varepsilon_0(T) = \sigma_0(T)/E(T)$. Степенная зависимость при $|\sigma| \geq \sigma_0(T)$ имеет вид

$$\sigma_h(T, \varepsilon) = \sigma_0(T)(|\varepsilon|/\varepsilon_0(T))^{m(T)}\varepsilon/|\varepsilon| \quad (2.1)$$

где $m(T) \in [0; 1)$ — зависящий от температуры показатель степени. Тогда модуль упрочнения при пластическом деформировании материала будет равен

$$E_h(T, \varepsilon) = \partial \sigma_h(T, \varepsilon) / \partial \varepsilon = \sigma_0(T) m(T) (|\varepsilon|/\varepsilon_0(T))^{m(T)-1} / \varepsilon_0(T)$$

Для описания неизотермического неупругого деформирования материала внутренней стенки оболочки с учетом ползучести целесообразно применить механический аналог (рис. 2). Аналог построен на основе физических представлений о микроструктуре поликристаллических конструкционных материалов и микромеханизме процесса их деформирования в сочетании с известными положениями феноменологических теорий пластичности и ползучести [8].

Сила P на рис. 2 пропорциональна напряжению σ при одноосном нагружении материала, а перемещение точки приложения этой силы пропорционально деформации ε . При фиксированном значении температуры жесткость пружины 1 постоянна и пропорциональна модулю упругости $E(T)$ моделируемого материала, а жесткость пружины 2 пропорциональна модулю упрочнения $E_h(T, \varepsilon_h)$ этого материала при пластическом деформировании. Сила P_0 при движении элемента сухого трения 3 относительно

направляющих пропорциональна пределу пропорциональности $\sigma_0(T)$ материала. При $|P| > P_0$ в затвердевшей жидкости в элементах 4 и 5 вязкого трения возникает мгновенное перемещение этого элемента и растяжение или сжатие пружины 2, пропорциональное мгновенной пластической деформации.

После обнуления силы P аналог моделирует разгрузку материала. Если при нагружении было выполнено неравенство $|P| \leq 2P_0$, то разгрузка происходит при упругой деформации, а возникшее натяжение пружины 2 сохранится и будет пропорционально пластическому упрочнению моделируемого материала. Неравенство $|P| > 2P_0$ соответствует случаю, когда после обнуления силы P , с учетом идеального эффекта Баушингера на завершающем этапе разгрузки в материале возникает мгновенная пластическая деформация обратного знака. Если материал обладает изотропным упрочнением [9, 10], то в аналоге сила трения P_0 будет зависеть от абсолютного значения накопленной пластической деформации. При наличии на диаграмме моделируемого материала так называемого “зуба текучести”, вызванного наличием перед началом движения дислокаций в плоскостях скольжения предварительного этапа их освобождения из “облаков” примесей [8, 11], для элемента 3 следует ввести силу трения покоя P_0^0 . В случае неизотермического пластического деформирования материала параметры аналога будут зависеть от температуры.

При конечной вязкости жидкости в элементе 4 вязкого трения аналог моделирует снятие упрочнения материала, вызванного пластическим деформированием. Перемещение поршня в элементе 5 при конечной вязкости жидкости позволяет моделировать процесс ползучести материала. Фиксированному значению температуры материала соответствуют постоянные значения вязкости в элементах 4 и 5. При одновременном функционировании этих элементов происходит выравнивание скоростей движения поршней относительно стенок цилиндров, что моделирует процесс перехода стадии неустановившейся ползучести материала в стадию установившейся ползучести с постоянной скоростью $\dot{\epsilon}_c = \text{const}$, соответствующей фиксированным значениям температуры T и напряжения σ .

Скорости перемещения поршней в элементах 4 и 5 механического аналога нелинейно зависят от действующих на поршни сил. При моделировании установившейся стадии ползучести эти скорости должны быть постоянны, что позволяет для моделируемого материала использовать соотношения, описывающие термически активируемые процессы движения дислокаций в кристаллических зернах поликристаллов [8]. Для постоянной скорости деформации ползучести можно записать

$$\dot{\epsilon}_c = A(T) \text{sh}(B(T)(\sigma - \sigma_m)/\sigma_0(T)) = \text{const} \quad (2.2)$$

где функции $A(T)$ и $B(T)$ определяют влияние температуры, а параметр σ_m характеризует уровень микронапряжений в материале и в аналоге соответствует силе, действующей на поршень в элементе 4.

Структура соотношения (2.2) может быть использована и для описания неустановившейся стадии ползучести, если заменить параметр σ_m функцией $\sigma_m(t)$ времени t . Скорость изменения этой функции можно представить в виде [8]

$$\dot{\sigma}_m(t) = E_h(T, \epsilon)(\dot{\epsilon}_c - A_h(T) \text{sh}(B_h(T) \sigma_m(t)/\sigma_0(T))) \quad (2.3)$$

Здесь функции $A_h(T)$ и $B_h(T)$ также определяют влияние температуры и вместе с функциями $A(T)$ и $B(T)$ их следует определять обработкой экспериментальных данных. Для сплавов на основе меди, применяемых для внутренней стенки оболочки камеры ЖРД в интервале температур 600...1000 К, можно принять [8] $A(T) = A_h(T) = \exp(T/40 + 10600/T - 46.4)$ 1/с и $B(T) = B_h(T) = 7.5$.

Таблица 1. Параметры аппроксимации диаграмм растяжения материалов стенок

Параметр	T	E	σ_0	ε_0	m
Внутренняя стенка	293	143700	41	0.000285	0.293
	873	115300	82	0.000711	0.054
Наружная стенка	293	197200	844	0.000428	0.110
	400	192000	828	0.000431	0.115

Для материала с изотропным упрочнением сила трения P_0 в элементе Z аналога будет зависеть от абсолютных значений накопленной материалом деформации не только при пластическом деформировании, но и в процессе ползучести. Взаимодействие элементов представленного механического аналога позволяет применить соотношения вида (2.1) и (2.2) для описания процесса ползучести материала и в случае изменения во времени как температуры T , так и напряжения σ . Тогда в этих соотношениях скорость $\dot{\varepsilon}_c$ деформации ползучести также станет функцией времени.

3. Последовательность нагружения оболочки. Этапы нагружения оболочки камеры сгорания ЖРД в пределах одного цикла целесообразно рассмотреть на конкретном примере, используя соотношения, описывающие поведение механического аналога. Пусть $R' = 0.15$ м, $h' = 0.001$ м, $h'' = 0.007$ м, $\delta = 0.004$ м, т.е. $R = 0.156$ м. Перед пуском двигателя $T' = T'' = T_0 = 293$ К, на его рабочем режиме с длительностью 200 с $T' = 873$ К, $T'' = 400$ К, $p_g = 20$ МПа, $p_f = 35$ МПа. Этапы останова двигателя включают практически мгновенный сброс давления ($p_g = 0$) и сравнительно короткий период охлаждения оболочки при $p_f > 0$. Внутренняя стенка оболочки выполнена из бронзы марки БрХ08, а наружная стенка – из хромоникелевой стали 07Х16Н6Т. Для этих материалов средние значения коэффициента линейного теплового расширения соответственно $\alpha' = 17 \times 10^{-6}$ 1/К в интервале температур $T_0 \dots T'$ и $\alpha'' = 16 \times 10^{-6}$ 1/К в интервале температур $T_0 \dots T''$. Следовательно, температурные деформации стенок оболочки на рабочем режиме будут равны $\varepsilon_T' = 0.0102$ и $\varepsilon_T'' = 0.001712$.

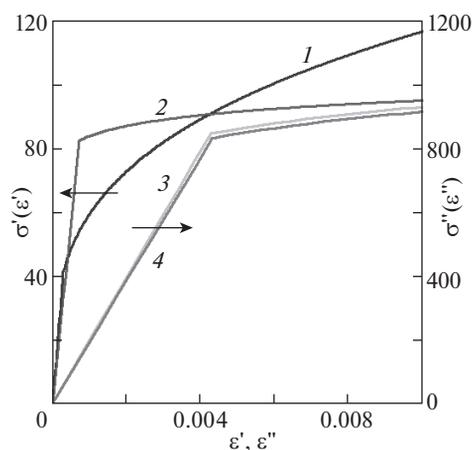
**Рис. 3.** Диаграммы растяжения материалов стенок.

Таблица 2. Напряжения и деформации в характерных точках траекторий нагружения

Номер точки	1	2	3	4	5
T'	873	873	873	293	873
ε'	-0.005743	-0.005811	-0.007980	-0.000073	-0.005788
σ'	-91.79	-0.7062	-87.09	100.47	-31.35
T''	400	400	400	293	400
ε''	0.002405	0.002337	0.000168	-0.000073	0.002360
σ''	461.68	448.67	32.26	-14.36	453.04

На рис. 3 представлены аппроксимации диаграмм растяжения материалов стенок при начальной температуре T_0 (кривые 1 для внутренней и 3 для наружной стенки) и температурах T' (2 для внутренней стенки) и T'' (4 для наружной стенки), построенные по данным работы [4]. Стрелками на рисунке указаны соответствующие кривым оси ординат. Используемые при построении значения параметров приведены в табл. 1.

Из предварительных оценок следует, что при указанных исходных данных на всех этапах нагружения оболочка материала наружной стенки сохраняет свойство упругости, а в материале внутренней стенки возникают неупругие деформации. Этапы пуска и останова двигателя достаточно кратковременны, что позволяет на этих этапах пренебречь накоплением деформации ползучести. В предположении отсутствия начальных деформаций стенок оболочки деформацию ε' внутренней стенки при завершении первого пуска двигателя будет определять равенство

$$\sigma'_0(T'')h'(|\varepsilon'|/\varepsilon'_0(T''))^{m'(T'')}|\varepsilon'| + E''(T'')h''(\varepsilon' + \varepsilon'_T - \varepsilon''_T) = p_g R' + p_f \delta \quad (3.1)$$

которое следует из формул (1.1), (1.2) и (2.1). На последующих этапах нагружения оболочки при отсутствии ползучести необходимо в равенстве (3.1) учесть значения деформации и напряжения внутренней стенки в начале каждого этапа и соответствующие этому этапу значения p_g и p_f .

На этапе установившегося режима работы двигателя при $T' = \text{const}$ и $T'' = \text{const}$ ползучесть материала внутренней стенки приводит к релаксации напряжения $\sigma'(t)$ путем изменения упругой составляющей $\sigma'(t)/E'(T')$ деформации. Из условия (1.1) равновесия при $p_g = \text{const}$ и $p_f = \text{const}$ следует $d\sigma'(t)/dt = -(h''/h')d\sigma''(t)/dt$, а из условия (1.2) совместности деформаций стенок с учетом релаксации – равенство

$$\frac{d\varepsilon'(t)}{dt} = \frac{d\varepsilon'_c}{dt} + \frac{1}{E'(T')} \frac{d\sigma'(t)}{dt} = -\frac{d\varepsilon''(t)}{dt} = -\frac{1}{E''(T'')} \frac{d\sigma''(t)}{dt}$$

Это равенство с учетом соотношений (2.2) и (2.3) приводит к системе двух дифференциальных уравнений

$$(1/E'(T') + (h'/h'')/E''(T''))d\sigma'(t)/dt = A(T')\text{sh}(B(\sigma'(t) - \sigma'_m(t)/\sigma'_0(T')))$$

$$d\sigma'_m(t)/dt = E'_h(T', \varepsilon'(t))A(T')(\text{sh}(B(\sigma'(t) - \sigma'_m(t)/\sigma'_0(T'))) - A(T')\text{sh}(B\sigma'_m(t)/\sigma'_0(T')))$$

где

$$E'_h(T', \varepsilon'(t)) = \sigma'_0(T')m'(T')(|\varepsilon'|/\varepsilon'_0(T''))^{m'(T')-1}/\varepsilon'_0(T')$$

$$\varepsilon'(t) = (p_g R' + p_f \delta - \sigma'(t)h')/(E''(T'')h'') + \varepsilon''_T - \varepsilon'_T$$

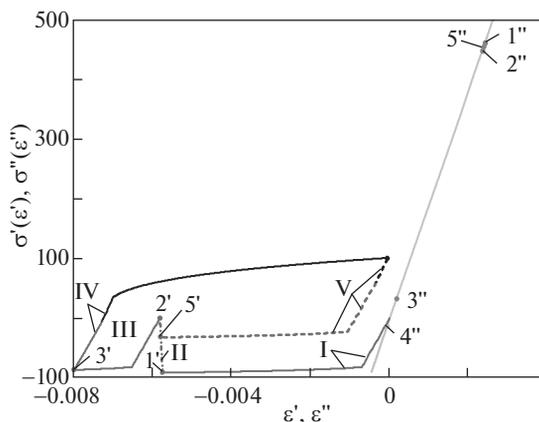


Рис. 4. Траектории рабочих точек стенок оболочки.

Интегрирование этих уравнений при начальных условиях $\sigma'(0) = \sigma'_1$, $\sigma'_m(0) = 0$, определяемых в конце этапа пуска двигателя, позволяет рассчитать процесс ползучести материала внутренней стенки в период установившегося режима работы двигателя.

На рис. 4 в координатах деформация—напряжение приведены рассчитанные траектории рабочих точек внутренней и наружной стенок оболочки на этапах первого цикла нагружения оболочки и пуска двигателя при втором цикле. Римские цифры указывают этапы нагружения внутренней стенки: I — первый пуск двигателя; II — ползучесть материала в период работы двигателя; III — сброс давления в камере сгорания при останове двигателя; IV — охлаждение оболочки до начальной температуры T_0 ; V — второй пуск двигателя. Характерные точки траекторий отмечены арабскими цифрами с одним или двумя штрихами соответственно для внутренней и наружной стенки: 1 — завершение первого пуска двигателя; 2 — начало сброса давления p_g ; 3 — начало охлаждения оболочки; 4 — завершение этапа охлаждения оболочки; 5 — завершение второго пуска двигателя. Значения температуры, напряжения и деформации в характерных точках траекторий представлены в табл. 2.

При выбранных исходных данных материал наружной стенки сохраняет свойство линейной упругости на всех этапах нагружения. За период в 200 с работы двигателя в силу ползучести материала внутренней стенки происходит практически полная релаксация напряжения σ' . Упругое деформирование материала внутренней стенки на этапе IV представлено двумя звеньями ломаной, соответствующими значениям модуля упругости E' при температурах T' и T_0 (в действительности при непрерывном изменении температуры между значениями T' и T_0 траектория рабочей точки будет криволинейной, но близкой к ломаной и имеющей с ней общие конечные точки. Аналогично представлено двумя звеньями штриховой ломаной линии начало этапа V при втором пуске.

В силу почти полной релаксации напряжения во внутренней стенке и при втором пуске двигателя траектория ее рабочей точки на этапах III и IV будет мало отличаться от траектории при первом пуске. Это означает, что при неизменном режиме работы двигателя все последующие циклы деформирования внутренней стенки можно принять совпадающими с циклом второго пуска. Таким образом, начиная со второго цикла, накопление за каждый из последующих циклов абсолютного значения неупругой деформации внутренней стенки, влияющей на повреждаемость ее материала [4], будет примерно одинаковым и близким к первому циклу. На этапе I этого цикла абсолют-

ное значение пластической деформации равно 0.005032, а на этапе II абсолютное значение деформации ползучести не превысило 0.000068. Пластическая деформация при сбросе давления в камере сгорания (этап III) по абсолютному значению равна 0.001457, а при охлаждении оболочки (этап IV) она положительна и имеет значение 0.006825. Таким образом, абсолютное значение накопленной за цикл неупругой деформации составило 0.0013382.

Существуют различные подходы к оценке работоспособности материала конструкции при циклическом неизотермическом нагружении [4, 12, 13]. Одна из наиболее простых оценок, пригодная в случае набора циклов с различающимися параметрами, состоит в сравнении суммарного абсолютного значения накопленной за все циклы неупругой деформации с относительным удлинением до разрыва образца материала при растяжении. Для хромистой бронзы БрХ08 эта величина в рассматриваемом интервале температур находится в промежутке 0.288 ... 1.204 [4]. Следует учитывать, что поврежденность материала в виде образования микротрещин возникает, в основном, при растягивающих напряжениях, а при сжатии может происходить так называемое заживление повреждений. Поэтому представленные выше суммарное абсолютное значение накопленной за цикл неупругой деформации и его составляющие на отдельных этапах нагружения оболочки следует рассматривать как исходную информацию для оценки работоспособности внутренней стенки в рамках различных подходов и методик.

Заключение. Представленный приближенный анализ нагружения оболочки камеры сгорания жидкостного ракетного двигателя многократного действия позволил оценить абсолютное значение неупругой деформации, накопленной за один цикл работы такого двигателя при наличии ползучести материала этой стенки. Это значение может быть использовано для прогноза количества циклов, в течение которых материал внутренней стенки сохраняет свою работоспособность.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования России (проект 0705-2020-0047).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Феодосьев В.И.* Основы техники ракетного полета. Изд. 2-е. М.: Наука, 1981. 496 с.
2. *Моисеев В.А., Тарасов В.А., Колмыков В.А., Филимонов А.С.* Технология производства жидкостных ракетных двигателей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 381 с.
3. *Балабух Л.И., Колесников К.С., Зарубин В.С., Алфутов Н.А., Усюкин В.И., Чижов В.Ф.* Основы строительной механики ракет. М.: Высшая школа, 1969. 496 с.
4. Прочность и ресурс ЖРД / Под ред. *Н.А. Махутова, В.С. Рачука.* М.: Наука, 2011. 525 с.
5. *Зарубин В.С., Зимин В.Н., Кувыркин Г.Н.* Оценка работоспособности оболочки камеры сгорания многоразового жидкостного ракетного двигателя // Изв. вузов. Авиационная техника. 2018. № 3. С. 100–107.
6. *Феодосьев В.И.* Прочность теплонапряженных узлов жидкостных ракетных двигателей. М.: Оборонгиз, 1963. 210 с.
7. *Работнов Ю.Н., Милейко С.Т.* Кратковременная ползучесть. М.: Наука, 1970. 224 с.
8. *Зарубин В.С.* Прикладные задачи термпрочности элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1985. 296 с.
9. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
10. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2003. 704 с.
11. *Новиков И.И.* Дефекты кристаллического строения металлов. М.: Изд-во "Металлургия", 1975. 208 с.
12. *Гусенков А.П., Котов П.И.* Малоцикловая усталость при неизотермическом нагружении. М.: Машиностроение, 1983. 240 с.
13. *Александров Д.А., Зарубин В.С.* О критериях разрушения материала теплонапряженных конструкций // Машиностроение. Энциклопедия. Т. 1–3. Кн. 1. Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин. М.: Машиностроение, 1994. С. 176–180.