

Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 84. Iss. 4

EDITORIAL BOARD

- I.G. Goryacheva** (editor-in-chief, Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)
- V.G. Baydulov** (executive secretary, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)
- J. Awrejcewicz** (Professor, Politechnika Łódzka, Lodz, Poland),
N.N. Bolotnik (Professor, Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
F.M. Borodich (Professor, Cardiff University, Cardiff, United Kingdom),
A.B. Freidin (Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),
A.M. Gaifullin (Professor, Corresponding RAS member, Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Zhukovsky, Russia),
M.L. Kachanov (Professor, Tufts University, Medford, MA, USA),
Ju.D. Kaplunov (Professor, Keele University, Staffordshire, United Kingdom),
A.V. Karapetyan (Professor, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia),
A.A. Korobkin (Professor, University of East Anglia, Norwich, United Kingdom),
A.M. Kovalev (Professor, NASU member, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Ukraine),
V.V. Kozlov (Professor, RAS member, Vice-President RAS, Moscow, Russia),
A.M. Krivtsov (Professor, Corresponding RAS member, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),
A.G. Kulikovskii (Professor, RAS member, Steklov Institute of Mathematics, RAS, Moscow, Russia),
Yu.Yu. Makhovskaya (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
N.F. Morozov (Professor, RAS member, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia),
T.J. Pedley (Professor, FRS member, University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom),
F. Pfeiffer (Professor, FRS, Foreign RAS member, Technische Universität München, Munich, Germany),
V.V. Pukhnachev (Professor, Corresponding RAS member, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics RAS, Novosibirsk, Russia),
G. Rega (Professor, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy),
S.A. Reshmin (Professor, Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
V.A. Sabelnikov (Professor, The French Aerospace Lab ONERA, Paris, France),
Ye.I. Shifrin (Professor, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
F.E. Udvardia (Professor, University of Southern California, Los Angeles, CA, USA),
S.E. Yakush (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
V.F. Zhuravlev (Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
K. Zimmermann (Professor, Technische Universität Ilmenau, Ilmenau, Germany)
- Editorial advisory board: N.I. Amelkin, I.M. Anan'evskii, A.S. Andreev, A.M. Formalskii, Yu.P. Gupalo, A.P. Ivanov, A.N. Kraiko, A.P. Markeev, S.A. Nazarov, V.S. Patsko, A.G. Petrov, N.N. Rogacheva, V.V. Sazonov, A.P. Seyranian, I.A. Soldatenkov, S.Ya. Stepanov, G.A. Tirsksii, V.N. Tkhai

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

July–August

Учредитель: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Редакция:

В.Г. Байдулов – отв. секретарь

Е.В. Есина – зав. редакцией

Адрес редакции: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245

Телефон редакции: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

На сайте Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала "Прикладная математика и механика" в каталоге Роспечати 70706

ISSN 0032-8235

Founder: Russian Academy of Sciences

The Editorial Staff:

V.G. Baydulov – executive secretary

E.V. Esina – head of Editorial office (manager editor)

The Editorial Board Adress: 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia

Phone: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL : <http://pmm.ipmnet.ru>

The subscription index in Rospechat catalogue 70706

ISSN 0021-8928

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Расчеты эволюции орбит планет <i>Н. И. Амелькин</i>	407
Аналитическая аппроксимация функциональных зависимостей параметров геодезической линии <i>П. А. Кучеренко, С. В. Соколов</i>	426
Переходные процессы в динамике волчка тип-топ <i>М. А. Муницына</i>	433
О субгармонических колебаниях в близкой к круговой эллиптической задаче Ситникова <i>А. П. Маркеев</i>	442
Устойчивость упруго закрепленного цилиндра в циркуляционном потоке вязкой жидкости <i>А. Г. Петров, М. А. Юдин</i>	455
К теории гиперзвукового обтекания тонкого треугольного крыла конечной стреловидности под большим углом атаки <i>В. Н. Голубкин</i>	467
Длинноволновые колебания и длинные волны в анизотропной пластине <i>Н. Ф. Морозов, П. Е. Товстик, Т. П. Товстик</i>	481
Плоские трещины в трансверсально изотропном слое <i>Е. А. Артамонова, Д. А. Пожарский</i>	500
Ангармонические волны в стержне Миндлина–Германа, погруженном в нелинейно-упругую среду <i>В. И. Ерофеев, А. В. Леонтьева</i>	511
Контактные задачи для пористоупругого композита при наличии сил трения <i>Т. В. Суворова, О. А. Беляк</i>	529
Информация для авторов и читателей журнала ПММ	540

CONTENTS

Calculations of the evolution of planet orbits <i>N. I. Amel'kin</i>	407
Analytical approximation of the geodesic line parameters functional dependencies <i>P. A. Kucherenko, S. V. Sokolov</i>	426
Transition processes in tippe top dynamics <i>M. A. Munitsyna</i>	433
On subharmonic oscillations in the near-circular elliptic Sitnikov's problem <i>A. P. Markeev</i>	442
Stability of elastically hardened cylinder in a circular flow of viscous fluid <i>A. G. Petrov, M. A. Yudin</i>	455
To the theory of hypersonic flow over thin finite sweep delta wing at high incidence <i>V. N. Golubkin</i>	467
Long-wave vibrations and long waves in an anisotropic plate <i>N. F. Morozov, P. E. Tovstik, T. P. Tovstik</i>	481
Plane cracks in a transversely isotropic layer <i>E. A. Artamonova, D. A. Pozharskii</i>	500
Anharmonic waves in a Mindlin–Herman rod immersed in a nonlinearly elastic medium <i>V. I. Erofeev, A. V. Leonteva</i>	511
Contact problems for porous composite in the presence of friction forces <i>T. V. Suvorova, O. A. Belyak</i>	529

УДК 521.135

РАСЧЕТЫ ЭВОЛЮЦИИ ОРБИТ ПЛАНЕТ

© 2020 г. Н. И. Амелькин*

*Московский физико-технический институт, Москва, Россия***e-mail: namelkin@mail.ru*

Поступила в редакцию 03.02.2020 г.

После доработки 23.04.2020 г.

Принята к публикации 12.05.2020 г.

В рамках планетной задачи исследуется эволюция орбит планет Солнечной системы. Смещение элементов орбит определяется численным интегрированием уравнений возмущенного движения, записанных в невырождающихся переменных. Результаты представлены в виде таблиц для средних смещений элементов орбит и их колебательных составляющих на эпоху J2000, а также в виде графиков поведения элементов орбит в зависимости от времени.

Ключевые слова: Солнечная система, пространственная задача n тел, уравнения возмущенного движения, эволюция орбит планет

DOI: 10.31857/S0032823520040025

Введение. Первые расчеты движения планет Солнечной системы в рамках ньютоновской механики были проведены Леверье. Им было исследовано [1, 2] движение Меркурия в гравитационном поле Солнца при учете гравитационных возмущений от других планет и обнаружено аномальное смещение перигелия Меркурия. Результаты Леверье с незначительными поправками были подтверждены в последующих работах других авторов [3, 4], а аномальное смещение перигелия Меркурия было объяснено в рамках общей теории относительности Эйнштейна [5].

При исследовании эволюции планетных орбит используются уравнения возмущенного движения, записанные в тех или иных переменных. До середины двадцатого столетия (в расчетах Леверье и других авторов) уравнения возмущенного движения исследовались аналитически с применением метода осреднения. Этот метод требует выполнения огромного числа весьма громоздких вычислительных процедур и поэтому при его использовании ограничиваются решением задачи в первом приближении теории возмущений.

Более эффективным и менее затратным представляется расчет эволюции планетных орбит по результатам численного интегрирования уравнений возмущенного движения. Этот метод широко используется в настоящее время для создания высокоточных численных эфемерид планет и других небесных тел [6, 7].

Численное интегрирование дифференциальных уравнений возмущенного движения позволяет помимо вычисления вековых смещений элементов орбит определить также и колебательные составляющие в поведении этих элементов. В рассматриваемой планетной задаче колебательные составляющие для некоторых планет характеризуются сравнительно большими амплитудами. Поэтому их необходимо учитывать при оценке точности вычисления вековых смещений по данным наблюдений и при составлении эфемерид планет. Ранее [8] на примере плоской планетной задачи показа-

но, что среднее смещение перигелия Меркурия, найденное численным интегрированием соответствующих дифференциальных уравнений, полностью совпадает со средним смещением, вычисленным аналитически методом осреднения, и определена амплитуда колебательной составляющей в поведении перигелия Меркурия.

Ниже эволюция орбит планет Солнечной системы исследуется в рамках пространственной задачи n тел и определяется по результатам численного интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения.

Элементы орбит планет определяются относительно плоскости начальной эклиптики. Для орбиты Земли в начальную эпоху наклонение относительно плоскости эклиптики равно нулю, а в уравнении для долготы восходящего узла при таком значении наклонения орбиты возникает особенность. Из-за этой особенности численное интегрирование уравнений возмущенного движения в оскулирующих элементах, как единой системы взаимосвязанных уравнений, невозможно. Из этих уравнений можно рассчитать только в первом приближении смещение всех элементов орбит планет, кроме долготы восходящего узла и наклонения для орбиты Земли, полагая, что фигурирующие в правых частях этих уравнений элементы орбит планет остаются неизменными.

Для определения смещений элементов орбит планет в точной (нелинейной) постановке в работе выведены уравнения возмущенного движения в невырождающихся переменных. В качестве таких переменных использовались векторы кинетических моментов и векторы Лапласа планет.

Основное внимание в работе уделяется исследованию вопроса о точности вычисления вековых смещений элементов орбит планет по данным наблюдений и определению интервалов времени, на которых первое приближение адекватно описывает поведение элементов орбит планет. Кроме того, проводится сопоставление результатов расчетов, полученных в рамках классической механики, с данными эфемерид на эпоху J2000, и определяется, как согласуется разница в этих данных с релятивистским эффектом, предсказываемым общей теорией относительности.

1. Уравнения возмущенного движения в оскулирующих элементах. Система состоит из Солнца массы M и n планет с массами m_k . Солнце и планеты рассматриваются как материальные точки.

Обозначим через \mathbf{R}_k радиус-векторы, соединяющие Солнце с k -й планетой, а через \mathbf{R}'_k и \mathbf{R}_M – радиус-векторы планет и Солнца относительно инерциального базиса $O_i \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3$ с началом в центре масс всей системы. Эти векторы связаны формулами

$$\mathbf{R}'_k = \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_M, \quad \mathbf{R}_M = -\sum_{s=1}^n \varepsilon_s \mathbf{R}'_s; \quad \varepsilon_s = \frac{m_s}{M} \quad (1.1)$$

Ускорение k -й планеты в инерциальном базисе записывается в виде

$$\ddot{\mathbf{R}}'_k = \ddot{\mathbf{R}}_k + \ddot{\mathbf{R}}_M = -\frac{\mu \mathbf{R}_k}{R_k^3} - \sum_{j \neq k} \frac{\mu \varepsilon_j (\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_j)}{|\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_j|^3}; \quad \mu = \gamma M \quad (1.2)$$

Отсюда, учитывая соотношения (1.1), получим в наблюдаемых переменных \mathbf{R}_k следующие уравнения:

$$\ddot{\mathbf{R}}_k = -\frac{\mu(1 + \varepsilon_k) \mathbf{R}_k}{R_k^3} - \mu \sum_{j \neq k} \varepsilon_j \left(\frac{\mathbf{R}_j}{R_j^3} + \frac{\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_j}{|\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_j|^3} \right) - \mu \sum_{j \neq s} \frac{\varepsilon_j \varepsilon_s (\mathbf{R}_s - \mathbf{R}_j)}{|\mathbf{R}_s - \mathbf{R}_j|^3}$$

Последняя сумма в правых частях этих уравнений обращается в нуль. Поэтому уравнения возмущенного движения записываются в виде

$$\ddot{\mathbf{R}}_k = -\frac{\mu_k \mathbf{R}_k}{R_k^3} + \mathbf{a}_k, \quad \mu_k = \mu(1 + \varepsilon_k); \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

$$\mathbf{a}_k = \sum_{j \neq k} \mathbf{a}_{kj} = -\mu \sum_{j \neq k} \varepsilon_j \left(\frac{\mathbf{R}_j}{R_j^3} + \frac{\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_j}{|\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_j|^3} \right); \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

Невозмущенное движение k -й планеты описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{\mathbf{R}}_k = -\frac{\mu_k \mathbf{R}_k}{R_k^3} \quad (1.5)$$

и представляет собой движение по кеплеровой эллиптической орбите вокруг Солнца, а возмущающее ускорение для k -й планеты дается формулой (1.4).

В качестве инерциального базиса $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ будем использовать правую ортонормированную тройку векторов, задающую ориентацию плоскости эклиптики на начальную эпоху (например, J2000). Оси \mathbf{i}_1 и \mathbf{i}_2 расположим в плоскости этой *фиксированной* эклиптики, причем ось \mathbf{i}_1 направим на точку весеннего равноденствия, а ось \mathbf{i}_2 – в сторону движения Земли по эклиптике. Ось \mathbf{i}_3 будет ортогональна плоскости указанной эклиптики [9, 10]. Положение орбиты k -й планеты относительно базиса $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ задается долготой восходящего узла Ω_k , наклонением орбиты i_k и аргументом перицентра ω_k . Невозмущенное движение k -й планеты описывается уравнением

$$\mathbf{R}_k = R_k \mathbf{s}_k; \quad R_k = \frac{P_k}{1 + e_k \cos v_k}, \quad (1.6)$$

где v_k , P_k , e_k – истинная аномалия, параметр и эксцентриситет орбиты для k -й планеты, а единичный вектор \mathbf{s}_k , указывающий радиальное направление, определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_k &= \mathbf{i}_1 X_k + \mathbf{i}_2 Y_k + \mathbf{i}_3 Z_k \\ X_k &= \cos \Omega_k \cos(\omega_k + v_k) - \cos i_k \sin \Omega_k \sin(\omega_k + v_k) \\ Y_k &= \sin \Omega_k \cos(\omega_k + v_k) + \cos i_k \cos \Omega_k \sin(\omega_k + v_k) \\ Z_k &= \sin i_k \sin(\omega_k + v_k) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Введем также единичный вектор $\boldsymbol{\tau}_k$, указывающий трансверсальное направление. Он определяется формулой

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_k &= \frac{\partial \mathbf{s}_k}{\partial v_k} = \mathbf{i}_1 X'_k + \mathbf{i}_2 Y'_k + \mathbf{i}_3 Z'_k \\ X'_k &= -[\cos \Omega_k \sin(\omega_k + v_k) + \cos i_k \sin \Omega_k \cos(\omega_k + v_k)] \\ Y'_k &= -\sin \Omega_k \sin(\omega_k + v_k) + \cos i_k \cos \Omega_k \cos(\omega_k + v_k) \\ Z'_k &= \sin i_k \cos(\omega_k + v_k) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь штрихом обозначена производная по истинной аномалии v_k .

Введем следующие обозначения:

$$r_{kj} = \frac{R_k}{R_j} = \frac{P_k(1 + e_j \cos v_j)}{P_j(1 + e_k \cos v_k)} \quad (1.8)$$

$$F_{kj} = \mathbf{s}_k \cdot \mathbf{s}_j = X_k X_j + Y_k Y_j + Z_k Z_j \quad (1.9)$$

$$F'_{kj} = \boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{s}_j = X'_k X_j + Y'_k Y_j + Z'_k Z_j \quad (1.10)$$

$$H_{kj} = \frac{1}{|\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_k r_{kj}|^3} = (1 - 2F_{kj}r_{kj} + r_{kj}^2)^{-3/2} \quad (1.11)$$

Тогда возмущающее ускорение (1.4) запишется в виде

$$\mathbf{a}_k = \mu \sum_{j \neq k} \frac{\varepsilon_j}{R_j^2} ((H_{kj} - 1)\mathbf{s}_j - H_{kj}r_{kj}\mathbf{s}_k), \quad (1.12)$$

а компоненты возмущающего ускорения (радиальная S_k , трансверсальная T_k и нормальная к плоскости орбиты W_k) определяются формулами

$$S_k = \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{s}_k = \mu \sum_{j \neq k} \frac{\varepsilon_j}{R_j^2} ((H_{kj} - 1)F_{kj} - H_{kj}r_{kj}) \quad (1.13)$$

$$T_k = \mathbf{a}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k = \mu \sum_{j \neq k} \frac{\varepsilon_j}{R_j^2} (H_{kj} - 1)F'_{kj} \quad (1.14)$$

$$W_k = \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{n}_k = \mu \sum_{j \neq k} \frac{\varepsilon_j}{R_j^2} (H_{kj} - 1)[(X_j \sin \Omega_k - Y_j \cos \Omega_k) \sin i_k + Z_j \cos i_k] \quad (1.15)$$

Здесь $\mathbf{n}_k = \mathbf{s}_k \times \boldsymbol{\tau}_k$ — единичный вектор нормали к плоскости орбиты планеты.

Пронумеруем планеты в порядке их удаления от Солнца (Меркурий — 1, Венера — 2, Земля — 3, Марс — 4, Юпитер — 5, Сатурн — 6, Уран — 7, Нептун — 8). Запишем уравнения возмущенного движения в оскулирующих элементах планетных орбит Ω_k , π_k , i_k , e_k и P_k . Здесь через π_k обозначена долгота перигелия: $\pi_k = \Omega_k + \omega_k$. Учитывая закон изменения истинной аномалии со временем [9]

$$\frac{dv_k}{dt} = \frac{\sqrt{\mu_k P_k}}{R_k^2} \left(1 + \frac{\mu}{\mu_k} h_k R_k^2 \right); \quad h_k = \frac{1}{e_k} \left(\tilde{S}_k \cos v_k - \tilde{T}_k \left(1 + \frac{R_k}{P_k} \right) \sin v_k \right) \quad (1.16)$$

и выбирая в качестве независимой переменной истинную аномалию Земли v_3 , получим на основании уравнений Ньютона [9, 10] следующие уравнения:

$$\frac{dv_k}{dv_3} = \alpha_k \sqrt{\frac{P_k R_3^2}{P_3 R_k^2} \frac{(1 + \gamma_k R_k^2 h_k)}{(1 + \gamma_3 R_3^2 h_3)}} \quad (1.17)$$

$$\frac{d\pi_k}{dv_3} = \frac{\beta_k R_3^2}{1 + \gamma_3 h_3 R_3^2} \sqrt{\frac{P_k}{P_3}} \left(-h_k + \tilde{W}_k \frac{R_k}{P_k} \sin(\omega_k + v_k) \operatorname{tg} \frac{i_k}{2} \right) \quad (1.18)$$

$$\frac{d\Omega_k}{dv_3} = \frac{\beta_k R_3^2}{1 + \gamma_3 h_3 R_3^2} \sqrt{\frac{P_k R_k}{P_3 P_k}} \frac{\tilde{W}_k}{\sin i_k} \sin(\omega_k + v_k) \quad (1.19)$$

$$\frac{di_k}{dv_3} = \frac{\beta_k R_3^2}{1 + \gamma_3 h_3 R_3^2} \sqrt{\frac{P_k R_k}{P_3 P_k}} \tilde{W}_k \cos(\omega_k + v_k) \quad (1.20)$$

$$\frac{de_k}{dv_3} = \frac{\beta_k R_3^2}{1 + \gamma_3 h_3 R_3^2} \sqrt{\frac{P_k}{P_3}} \left(\tilde{S}_k \sin v_k + \tilde{T}_k \left[\cos v_k + (\cos v_k + e_k) \frac{R_k}{P_k} \right] \right) \quad (1.21)$$

$$\frac{dP_k}{dv_3} = \frac{2\beta_k R_3^2}{1 + \gamma_3 h_3 R_3^2} \sqrt{\frac{P_k R_k}{P_3}} \tilde{T}_k \quad (1.22)$$

Здесь использованы обозначения

$$\tilde{S}_k = \frac{S_k}{\mu}, \quad \tilde{T}_k = \frac{T_k}{\mu}, \quad \tilde{W}_k = \frac{W_k}{\mu} \quad (1.23)$$

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{1 + \epsilon_k}{1 + \epsilon_3}}, \quad \beta_k = \frac{1}{\sqrt{(1 + \epsilon_3)(1 + \epsilon_k)}}, \quad \gamma_k = \frac{1}{1 + \epsilon_3} \quad (1.24)$$

Закон изменения большой полуоси для k -й планеты определяется из уравнения

$$\frac{da_k}{dv_3} = \frac{1}{1 - e_k^2} \frac{dP_k}{dv_3} + \frac{2P_k e_k}{(1 - e_k^2)^2} \frac{de_k}{dv_3} \quad (1.25)$$

Заметим, что для всех планет Солнечной системы коэффициенты ϵ_k не превышают величины 10^{-3} . Поэтому, если положить $\alpha_k = 1$, $\beta_k = 1$, $\gamma_k = 1$, то правые части уравнений будут записаны с относительной точностью до 10^{-3} , а для внутренних планет – с относительной точностью до 10^{-5} .

По результатам интегрирования уравнений (1.17)–(1.22) определяется поведение элементов орбит планет в “земном” времени, где изменение независимой переменной v_3 на 2π соответствует одному земному году.

Элементы орбит планет определяются относительно плоскости начальной эклиптики. Для орбиты Земли в начальную эпоху наклонение относительно плоскости эклиптики равно нулю ($i_3 = 0$), а в уравнении (1.19) при таком значении наклонения орбиты возникает особенность. Из-за этой особенности численное интегрирование уравнений (1.17)–(1.22), как единой системы взаимосвязанных уравнений, невозможно. Из этих уравнений можно получить только решение *в первом приближении*, полагая, что фигурирующие в правых частях этих уравнений элементы орбит планет остаются неизменными [9]. Тогда каждое k -е уравнение (1.18)–(1.22) интегрируется в сочетании с k -м уравнением (1.17) независимо от других уравнений. Таким образом, полагая значения элементов в правых частях уравнений постоянными, интегрированием уравнений (1.17)–(1.22), можно рассчитать *в первом приближении* смещение всех элементов орбит планет, кроме долготы восходящего узла и наклонения для орбиты Земли (уравнение (1.20) тоже не может быть непосредственно использовано для расчета поведения наклонения орбиты Земли относительно начальной эклиптики ввиду неопределенности значений Ω_3 и ω_3 при $i_3 = 0$).

Отметим, что за счет малости возмущений (в рассматриваемой задаче малыми параметрами являются коэффициенты ϵ_j в выражениях (1.12) для возмущающих ускорений) элементы орбит меняются медленно и, как будет установлено ниже, *первое приближение* адекватно описывает эволюцию большинства элементов планетных орбит на интервалах времени до ста лет. Но для точного определения смещений всех элементов орбит требуется точное решение уравнений возмущенного движения. Такое решение можно получить численным интегрированием уравнений, записанных в невырождающихся переменных.

2. Уравнения возмущенного движения планет в избыточных переменных. Получить систему уравнений, не имеющих особенностей при $i_k = 0$, можно, используя закон изменения кинетического момента и вектора Лапласа для каждой планеты.

Рассмотрим задачу о движении отдельной планеты. Пусть уравнения возмущенно-го движения имеют вид

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\mu \mathbf{R}}{R^3} + \mathbf{a}, \quad (2.1)$$

где \mathbf{a} – возмущающее ускорение. Вектор кинетического момента планеты определяется формулой

$$\mathbf{c} = \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} = c\mathbf{n}, \quad (2.2)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к плоскости орбиты.

Вектор Лапласа обозначим через $\tilde{\mathbf{f}}$. Он определяется формулой

$$\tilde{\mathbf{f}} = -\mu \frac{\mathbf{R}}{R} + \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{c} = \mu e\mathbf{j}, \quad (2.3)$$

где \mathbf{j} – единичный вектор, указывающий направление на перигецентр орбиты, e – эксцентриситет орбиты. Векторы (2.2) и (2.3) взаимно ортогональны. Законы изменения этих векторов со временем описываются уравнениями

$$\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{R} \times \mathbf{a} \quad (2.4)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{f}}} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \dot{\mathbf{R}} \times \dot{\mathbf{c}} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \dot{\mathbf{R}} \times (\mathbf{R} \times \mathbf{a}) \quad (2.5)$$

Вектор $\dot{\mathbf{R}}$ исключим из уравнения (2.5), используя соотношения (2.2) и (2.3). Умножив векторно обе части этих равенств на вектор \mathbf{R} и учитывая взаимную ортогональность векторов \mathbf{R} и \mathbf{c} , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \times \mathbf{c} &= \mathbf{R}(\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}) - \dot{\mathbf{R}}R^2 \\ \mathbf{R} \times \tilde{\mathbf{f}} &= -\mathbf{c}(\dot{\mathbf{R}}_k \cdot \mathbf{R}_k) \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\dot{\mathbf{R}} = -\frac{1}{R^2} \left(\mathbf{R} \times \mathbf{c} + \frac{\mathbf{R}[\mathbf{c} \cdot (\mathbf{R} \times \tilde{\mathbf{f}})]}{c^2} \right) \quad (2.6)$$

Ниже вместо переменных (2.2) и (2.3) будем использовать переменные

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{c}}{\sqrt{\mu}} = C\mathbf{n} = \sqrt{p}\mathbf{n}, \quad \mathbf{f} = \frac{\tilde{\mathbf{f}}}{\mu} = f\mathbf{j} = e\mathbf{j}, \quad (2.7)$$

в которых уравнения (2.4), (2.5) при учете (2.6) запишутся в виде

$$\dot{\mathbf{C}} = \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{a}}{\sqrt{\mu}} \quad (2.8)$$

$$\dot{\mathbf{f}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left(\mathbf{a} \times \mathbf{C} - \frac{1}{R^2} \left[\left(\mathbf{R} \times \mathbf{C} + \frac{\mathbf{R}[\mathbf{C} \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{f})]}{C^2} \right) \times (\mathbf{R} \times \mathbf{a}) \right] \right) \quad (2.9)$$

После учета соотношений

$$\mathbf{R} = R\mathbf{s}, \quad R = \frac{C^2}{1 + f \cos v}, \quad \mathbf{s} = \mathbf{j} \cos v + \mathbf{n} \times \mathbf{j} \sin v$$

$$\mathbf{a} = \mu(\tilde{\mathcal{S}}\mathbf{s} + \tilde{\mathcal{T}}\boldsymbol{\tau} + \tilde{\mathcal{W}}\mathbf{n}), \quad \boldsymbol{\tau} = -\mathbf{j} \sin v + \mathbf{n} \times \mathbf{j} \cos v$$

уравнения возмущенного движения в переменных (2.7) примут следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \sqrt{\mu} \frac{C[\mathcal{C}\tilde{\mathcal{T}}f + \tilde{\mathcal{W}}(fC \sin v - \mathbf{C} \times \mathbf{f} \cos v)]}{f(1 + e \cos v)} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{f}}{dt} &= \sqrt{\mu} \left(\frac{f\mathbf{C}}{f} \left(\tilde{\mathcal{T}} \left[\cos v + \frac{\cos v + f}{1 + f \cos v} \right] + \tilde{\mathcal{S}} \sin v \right) - \frac{\mathbf{C}\tilde{\mathcal{W}}f \sin v}{1 + f \cos v} \right) + \\ &+ \sqrt{\mu} \frac{\mathbf{C} \times \mathbf{f}}{f} \left(\tilde{\mathcal{T}} \left[1 + \frac{1}{1 + f \cos v} \right] \sin v - \tilde{\mathcal{S}} \cos v \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Эти уравнения дополняются уравнением для истинной аномалии

$$\frac{dv}{dt} = \sqrt{\mu} \frac{C}{R^2} (1 + hR^2); \quad h = \frac{1}{f} \left(\tilde{S} \cos v - \tilde{T} \left(1 + \frac{R}{C^2} \right) \sin v \right) \quad (2.12)$$

и образуют систему из семи скалярных уравнений относительно семи переменных v , C_1 , C_2 , C_3 , f_1 , f_2 , f_3 , где C_i и f_i – компоненты векторов \mathbf{C} и \mathbf{f} в инерциальном базисе $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$. В качестве независимой переменной можно выбрать истинную аномалию планеты и получить, тем самым, систему из шести скалярных уравнений.

Следует отметить, что используемые в уравнениях (2.10)–(2.12) векторы \mathbf{C} и \mathbf{f} задают орбиту планеты избыточным числом координат (шесть вместо пяти). Но, при этом, уравнения (2.10)–(2.12), в отличие от уравнений (1.17)–(1.22), не вырождаются ни при каких наклонениях орбиты, а скалярное произведение $\mathbf{C} \cdot \mathbf{f}$ – первый интеграл этих уравнений.

Приведем формулы, выражающие оскулирующие элементы орбиты через переменные \mathbf{C} и \mathbf{f} . Эксцентриситет, параметр и наклонение орбиты выражаются следующими формулами:

$$e = f, \quad P = C^2, \quad \cos i = \frac{C_3}{C}, \quad \sin i = \frac{\sqrt{C^2 - C_3^2}}{C} \quad (2.13)$$

Для долготы восходящего узла Ω , аргумента перицентра ω и долготы перицентра $\pi = \Omega + \omega$, учитывая взаимную ортогональность векторов \mathbf{C} и \mathbf{f} , получим

$$\cos \Omega = -\frac{C_2}{\sqrt{C^2 - C_3^2}}, \quad \sin \Omega = \frac{C_1}{\sqrt{C^2 - C_3^2}} \quad (2.14)$$

$$\cos \omega = \frac{C_1 f_2 - C_2 f_1}{f \sqrt{C^2 - C_3^2}}, \quad \sin \omega = \frac{f_3 C}{f \sqrt{C^2 - C_3^2}} \quad (2.15)$$

$$\cos \pi = \frac{1}{C_3 f} \left[f_1 C + \frac{C_2 (f_2 C_1 - f_1 C_2)}{C + C_3} \right], \quad \sin \pi = \frac{1}{C_3 f} \left[f_2 C + \frac{C_1 (f_1 C_2 - f_2 C_1)}{C + C_3} \right] \quad (2.16)$$

Смещения оскулирующих элементов вычисляются по формулам

$$\Delta e = f - e_0, \quad \Delta P = C^2 - P_0, \quad \sin \Delta i = \frac{\sqrt{C^2 - C_3^2}}{C} \cos i_0 - \frac{C_3}{C} \sin i_0 \quad (2.17)$$

$$\sin \Delta \Omega = \frac{C_1}{\sqrt{C^2 - C_3^2}} \cos \Omega_0 + \frac{C_2}{\sqrt{C^2 - C_3^2}} \sin \Omega_0 \quad (2.18)$$

$$\sin \Delta \omega = \frac{f_3 C}{f \sqrt{C^2 - C_3^2}} \sin \omega_0 - \frac{C_1 f_2 - C_2 f_1}{f \sqrt{C^2 - C_3^2}} \cos \omega_0 \quad (2.19)$$

$$\sin \Delta \pi = \frac{1}{C_3 f} \left(\left[f_2 C + \frac{C_1 (f_1 C_2 - f_2 C_1)}{C + C_3} \right] \cos \pi_0 - \left[f_1 C + \frac{C_2 (f_2 C_1 - f_1 C_2)}{C + C_3} \right] \sin \pi_0 \right) \quad (2.20)$$

Здесь начальные значения элементов обозначены нижним индексом “0”.

Отметим, что применительно к рассматриваемой задаче об эволюции планетных орбит смещения угловых элементов ввиду их малости однозначно определяются значениями синусов соответствующих углов на интервалах времени в сотни тысяч лет. Кроме того, на интервалах времени в тысячи лет синусы смещений угловых переменных с высокой точностью совпадают с самими смещениями.

Вернемся теперь к задаче об эволюции орбит планет Солнечной системы. Выбирая в качестве переменных векторы

$$\mathbf{C}_k = \frac{\mathbf{c}_k}{\sqrt{\mu_k}}, \quad \mathbf{f}_k = \frac{\tilde{\mathbf{f}}_k}{\mu_k}, \quad (2.21)$$

где \mathbf{c}_k и $\tilde{\mathbf{f}}_k$ — вектор кинетического момента и вектор Лапласа для k -й планеты, а в качестве независимой переменной — истинную аномалию Земли v_3 , получим по аналогии с (2.10)–(2.12) следующие уравнения:

$$\frac{dv_k}{dv_3} = \alpha_k \frac{C_k R_3^2 (1 + \gamma_k h_k R_k^2)}{C_3 R_k^2 (1 + \gamma_3 h_3 R_3^2)}; \quad h_k = \frac{1}{f_k} \left(\tilde{S}_k \cos v_k - \tilde{T}_k \left(1 + \frac{R_k}{C_k^2} \right) \sin v_k \right) \quad (2.22)$$

$$\frac{d\mathbf{C}_k}{dv_3} = \frac{\beta_k R_3^2 C_k}{(1 + \gamma_3 h_3 R_3^2) C_3} \left(\frac{\mathbf{C}_k f_k \tilde{T}_k + \tilde{W}_k (\mathbf{f}_k C_k \sin v_k - \mathbf{C}_k \times \mathbf{f}_k \cos v_k)}{f_k (1 + f_k \cos v_k)} \right) \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{f}_k}{dv_3} = & \frac{\beta_k R_3^2}{(1 + \gamma_3 h_3 R_3^2) C_3} \left(\frac{\mathbf{f}_k C_k}{f_k} \left[\tilde{S}_k \sin v_k + \tilde{T}_k \left[\cos v_k + \frac{\cos v_k + f_k}{1 + f_k \cos v_k} \right] \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\mathbf{C}_k \times \mathbf{f}_k}{f_k} \left[\tilde{T}_k \sin v_k \left[1 + \frac{1}{1 + f_k \cos v_k} \right] - \tilde{S}_k \cos v_k \right] - \frac{\mathbf{C}_k f_k \tilde{W}_k \sin v_k}{1 + f_k \cos v_k} \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

В этих уравнениях коэффициенты α_k , β_k , γ_k определяются формулами (1.24), а функции \tilde{S}_k , \tilde{T}_k и \tilde{W}_k выражаются через переменные (2.21) формулами

$$\begin{aligned} \tilde{S}_k &= \sum_{j \neq k} \frac{\varepsilon_j}{R_j^2} ((H_{kj} - 1) F_{kj} - H_{kj} r_{kj}), \quad \tilde{T}_k = \sum_{j \neq k} \frac{\varepsilon_j}{R_j^2} (H_{kj} - 1) F'_{kj} \\ \tilde{W}_k &= \sum_{j \neq k} \frac{\varepsilon_j}{R_j^2} (H_{kj} - 1) Z_{kj}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где

$$R_j = \frac{C_j^2}{1 + f_j \cos v_j}, \quad r_{kj} = \frac{R_k}{R_j}, \quad H_{kj} = (1 - 2F_{kj} r_{kj} + r_{kj}^2)^{-3/2} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} F_{kj} = & \frac{\mathbf{f}_k \cdot \mathbf{f}_j \cos v_k \cos v_j}{f_k f_j} + \frac{(\mathbf{C}_k \times \mathbf{f}_k) \cdot (\mathbf{C}_j \times \mathbf{f}_j) \sin v_k \sin v_j}{C_k f_k C_j f_j} + \\ & + \frac{\mathbf{f}_j \cdot (\mathbf{C}_k \times \mathbf{f}_k) \sin v_k \cos v_j}{C_k f_k f_j} + \frac{\mathbf{f}_k \cdot (\mathbf{C}_j \times \mathbf{f}_j) \cos v_k \sin v_j}{C_j f_k f_j} \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$F'_{kj} = \frac{\partial F_{kj}}{\partial v_k}, \quad Z_{kj} = \frac{\mathbf{C}_k \cdot \mathbf{f}_j \cos v_j}{C_k f_j} + \frac{\mathbf{C}_k \cdot (\mathbf{C}_j \times \mathbf{f}_j) \sin v_j}{C_k f_j C_j} \quad (2.28)$$

Для восьми планет Солнечной системы уравнения (2.22)–(2.24) образуют замкнутую систему из 56 скалярных уравнений для 56 переменных v_k , C_{ki} , f_{ki} ; $k = 1, 2, \dots, 8$, $i = 1, 2, 3$. Скалярные произведения $\mathbf{C}_k \cdot \mathbf{f}_k$ являются первыми интегралами этих уравнений. По результатам интегрирования этих уравнений значения и смещения оскулирующих элементов вычисляются формулами (2.13)–(2.20). Поведение большой полуоси каждой планеты определяется формулой

$$a_k = \frac{C_k^2}{1 - f_k^2} \quad (2.29)$$

Отметим, что при необходимости из системы (2.23), (2.24) можно получить и *первое приближение* для смещений элементов орбит, положив векторы \mathbf{C}_k и \mathbf{f}_k в правых частях уравнений постоянными.

3. Эволюция орбит внутренних планет. Анализ эволюции планетных орбит проводился по результатам численного интегрирования уравнений возмущенного движения. При этом использовались как *первое приближение* для смещений элементов орбит, получаемое интегрирование уравнений (1.17)–(1.22) при постоянных значениях элементов в правых частях уравнений, так и точные решения уравнений (2.23), (2.24), которые интегрировались как единая система взаимосвязанных уравнений. Результаты расчетов по первому приближению и по точным решениям сопоставлялись друг с другом и определялись интервалы времени, в пределах которых первое приближение адекватно описывает эволюцию планетных орбит.

В качестве больших полуосей орбит планет принимались их отношения к большой полуоси орбиты Земли. При таком определении больших полуосей исследуемые уравнения представляют собой уравнения в безразмерных переменных. В расчетах использовались начальные данные на эпоху J2000 [11].

Средние смещения элементов орбит, вычисленные по *первому приближению*, линейно зависят от времени. Процедура вычисления среднего смещения по первому приближению состояла в следующем. Из графика поведения элемента, полученного по результатам численного интегрирования уравнений (1.17)–(1.22), вычиталась линейная функция времени, коэффициент пропорциональности в которой подбирался методом последовательных приближений таким образом, чтобы в конечном итоге с требуемой точностью получалась только колебательная составляющая. Ввиду того, что помимо среднего смещения в поведении элементов орбит имеются колебательные составляющие, значения амплитуд которых может достигать весьма больших величин, для вычисления с требуемой точностью среднего смещения интегрирование уравнений проводилось на интервалах времени в десятки тысяч лет.

На рис. 1 приведен пример вычисления среднего смещения перигелия Меркурия. Здесь N – число земных лет, а смещение перигелия Δl выражается в угловых секундах. В левой части рисунка изображен график Δl в зависимости от времени, а в правой части – график колебательной составляющей, который получается при вычитании из графика Δl линейной функции $5.2882^\circ N$. Таким образом, среднее смещение перигелия Меркурия, вычисленное в первом приближении, составляет 528.82 угловых секунд за столетие. Амплитуда колебательной составляющей в поведении перигелия Меркурия составляет около $18''$ (эта составляющая названа колебательной, поскольку строгой периодичности в ней не наблюдается). Аналогичным образом вычислялись средние смещения других элементов орбиты Меркурия и всех остальных планет.

Результаты расчетов эволюции орбит внутренних планет, полученные на основе первого приближения решений уравнений (1.17)–(1.22), приведены в таблице 1. Здесь символом Δ обозначается среднее смещение элемента за столетие, а символом δ – амплитуда колебательной составляющей в поведении этого элемента.

Обратим внимание, что средние значения параметров и эксцентриситетов всех планет меняются со временем. Но среднего смещения больших полуосей, вычисляемого интегрированием уравнения (1.25), не обнаружено.

Смещение каждого элемента орбиты возмущаемой планеты, вычисленное в первом приближения, равно сумме смещений, обусловленных влиянием отдельных возмущающих планет. Полученные по результатам интегрирования уравнений (1.17)–(1.22) данные о вкладе отдельных планет в смещение перигелия внутренних планет приведены в таблице 2.

Из таблицы 1 видно, что помимо векового смещения в поведении элементов орбит имеются колебательные составляющие, амплитуды которых могут достигать больших

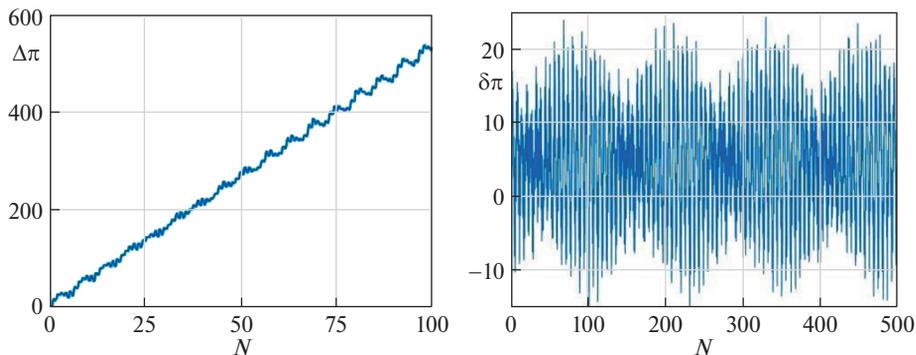


Рис. 1. Перигелий Меркурия.

значений. Например, для перигелия Венеры амплитуда колебательной составляющей почти в сто раз превышает среднее смещение за столетие. Колебательная составляющая влияет на точность вычисления среднего при расчетах смещения элементов орбит по данным наблюдений. Из всех внутренних планет точность вычисления среднего смещения перигелия по данным наблюдений для Меркурия самая высокая, а для Венеры – самая низкая.

Наличием колебательных составляющих объясняется также наблюдаемое различие между средними смещениями элементов, вычисленными по первому приближению, и линейной по времени составляющей среднего смещения, вычисленной на основе точных решений системы уравнений (2.23), (2.24).

Расчеты смещений элементов орбит планет по точным решениям уравнений возмущенного движения показали, что *средние* смещения нелинейно зависят от времени.

Таблица 1. Смещение элементов орбит внутренних планет за столетие. Эпоха J2000

Планета	$\Delta\pi$	$\Delta\Omega$	Δi	Δe	ΔP
Меркурий	$528.82'' \pm 0.03''$	$-451.50'' \pm 0.03''$	$-21.423'' \pm 0.002''$	$2.040 \times 10^{-5} \pm 0.002 \times 10^{-5}$	$-3.25 \times 10^{-6} \pm 0.005 \times 10^{-6}$
	$\delta\pi = 18''$	$\delta\Omega = 3''$	$\delta i = 0.35''$	$\delta e = 1.7 \times 10^{-5}$	$\delta P = 4.3 \times 10^{-6}$
Венера	$15.4'' \pm 1''$	$-1000.9'' \pm 0.2''$	$-3.083'' \pm 0.002''$	$-4.758 \times 10^{-5} \pm 0.002 \times 10^{-5}$	$0.46 \times 10^{-6} \pm 0.01 \times 10^{-6}$
	$\delta\pi = 1350''$	$\delta\Omega = 13''$	$\delta i = 0.5''$	$\delta e = 4.2 \times 10^{-5}$	$\delta P = 1.3 \times 10^{-5}$
Земля	$1146.6'' \pm 0.3''$	–	$46.997'' \pm 0.002''$	$-4.21 \times 10^{-5} \pm 0.01 \times 10^{-5}$	$1.41 \times 10^{-6} \pm 0.01 \times 10^{-6}$
	$\delta\pi = 700''$	–	$\delta i = 0.5''$	$\delta e = 5.5 \times 10^{-5}$	$\delta P = 2.5 \times 10^{-5}$
Марс	$1591.9'' \pm 0.2''$	$-1062.05'' \pm 0.03''$	$-29.325'' \pm 0.002''$	$9.05 \times 10^{-5} \pm 0.01 \times 10^{-5}$	$-2.57 \times 10^{-5} \pm 0.01 \times 10^{-5}$
	$\delta\pi = 320''$	$\delta\Omega = 25''$	$\delta i = 0.6''$	$\delta e = 1.5 \times 10^{-4}$	$\delta P = 1.4 \times 10^{-4}$

Таблица 2. Вклад отдельных планет в смещение перигелия внутренних планет (в угловых секундах за столетие)

Планета	Меркурий	Венера	Земля	Марс
Меркурий		-150.95	-13.73	0.77
Венера	275.931		345.25	49.4
Земля	90.115	-574.2		227.5
Марс	2.464	74.9	97.42	
Юпитер	152.91	657.5	698.2	1246.3
Сатурн	7.222	7.74	18.7	66.4
Уран	0.138	0.27	0.56	1.17
Нептун	0.042	0.11	0.18	0.35
Σ	528.82	15.37	1146.58	1591.89

При этом для внутренних планет на интервалах времени до тысячи лет доминирующей является линейная составляющая, а нелинейная составляющая вносит заметный вклад на интервалах времени в десятки тысяч лет.

Линейные по времени составляющие среднего смещения элементов орбиты рассчитывались по следующей процедуре. Из графика поведения элемента, полученного по результатам численного интегрирования системы (2.23), (2.24), вычиталась линейная функция времени, коэффициент пропорциональности в которой подбирался методом последовательных приближений таким образом, чтобы в среднем для получаемой в итоге функции момент начальной эпохи соответствовал ее стационарной точке. Точность вычисления линейной части среднего смещения по такой процедуре ниже, чем при вычислении среднего смещения по первому приближению. Ввиду того, что точные решения характеризуются нелинейным по времени поведением средних элементов орбит, увеличением интервала интегрирования уточнить линейную часть среднего смещения на начальную эпоху нет возможности. Чтобы точнее определить линейную часть среднего смещения, уравнения интегрировались как в “прямом”, так и в “обратном” времени по отношению к начальной эпохе.

На рис. 2 приведен пример вычисления линейной части в среднем смещении перигелия и эксцентриситета Марса на эпоху J2000. В левой части рисунка изображен график функции, получаемый вычитанием из графика поведения перигелия Марса $\Delta\pi_4$ линейной функции $15.95''N$, а в правой части – график функции, получаемый вычитанием из графика Δe_4 линейной функции $8.85 \times 10^{-7} N$. Для полученных функций момент времени $t = 0$ – стационарная точка. Поэтому линейная часть среднего смещения перигелия Марса на эпоху J200 составляет $1595''$ за столетие, а линейная часть среднего смещения эксцентриситета равна 8.85×10^{-5} за столетие. Графики показывают поведение нелинейных по времени составляющих в среднем смещении перигелия и эксцентриситета Марса.

По результатам численного интегрирования уравнений (2.23), (2.24) установлено, что линейные части наклонов и долгот восходящего узла для всех внутренних планет совпадают с данными таблицы 1 и данными эфемерид [11] с точностью до погрешности расчетов. Различие наблюдается в смещениях перигелиев и эксцентриситетов некоторых планет. Рассчитанные на основе уравнений (2.23), (2.24) данные для этих элементов приведены в таблице 3.

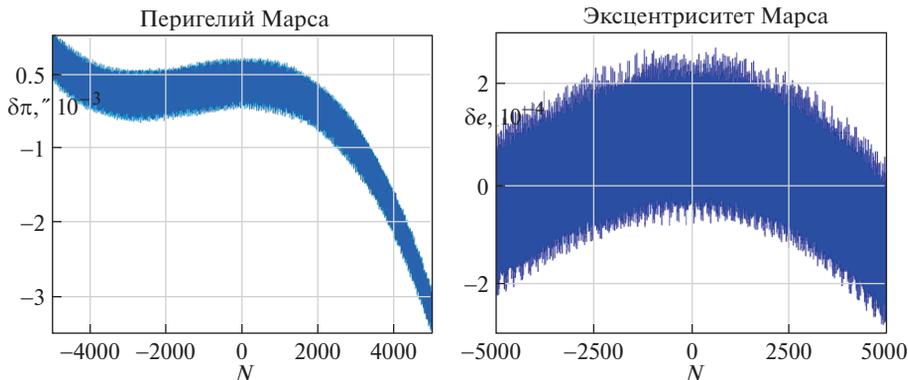


Рис. 2.

Важно отметить, что и по результатам интегрирования уравнений (2.23), (2.24) на интервалах времени в тысячи лет векового смещения больших полуосей, определяемых формулой (2.29), не обнаружено.

Сопоставляя полученные результаты расчетов для смещений элементов орбит с данными эфемерид [11] на эпоху J2000, можно определить, как согласуется разница в этих данных с релятивистским эффектом, предсказываемым общей теорией относительности (ОТО).

Дополнительное смещение перигелия орбиты планеты по ОТО за один оборот планеты вокруг Солнца определяется формулой [5]

$$\Delta\pi = \frac{6\pi\mu}{a(1-e^2)c^2} = \frac{24\pi^3 a^2}{T^2(1-e^2)c^2}, \quad (3.1)$$

где a – большая полуось орбиты, c – скорость света, T – период обращения планеты. Эта формула следует из решения задачи о движении точки в искривленном пространстве-времени, описываемом метрикой Шварцшильда. Траектории точки в таком пространстве соответствуют траекториям при движении в поле центральной силы

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}) = -\frac{\mu m}{R^2} \left(1 + \frac{3\mu P}{c^2 R^2} \right) \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (3.2)$$

Здесь P – параметр орбиты. В таком поле к ньютоновскому ускорению добавляется возмущающее ускорение, которое имеет только радиальную компоненту

$$S = -\frac{3\mu^2 P}{c^2 R^4} \quad (3.3)$$

Таблица 3. Линейная часть средних смещений элементов орбит внутренних планет на эпоху J2000 (за столетие)

Планета	$\Delta\pi$	Δe
Меркурий	$529.1'' \pm 0.2''$	$(2.04 \pm 0.02) \times 10^{-5}$
Венера	$15'' \pm 10''$	$(-4.75 \pm 0.03) \times 10^{-5}$
Земля	$1160'' \pm 3''$	$(-4.2 \pm 0.03) \times 10^{-5}$
Марс	$1595'' \pm 2''$	$(8.85 \pm 0.03) \times 10^{-5}$

Из уравнений возмущенного движения в оскулирующих элементах следует, что такое возмущение влияет только на поведение долготы перигелия и эксцентриситета орбиты. Уравнения для этих элементов принимают вид

$$\frac{d\pi}{dv} = \frac{3\mu P}{c^2 R^2 e} \cos v = \frac{3\mu}{c^2 a e (1 - e^2)} \cos v (1 + e \cos v)^2 \quad (3.4)$$

$$\frac{de}{dv} = -\frac{3\mu P}{c^2 R^2} \sin v = -\frac{3\mu}{c^2 a (1 - e^2)} \sin v (1 + e \cos v)^2 \quad (3.5)$$

Здесь v – истинная аномалия планеты. Из уравнений (3.4) и (3.5) следует, что обусловленное релятивистским эффектом *дополнительное среднее* смещение перигелия планеты за один оборот вокруг Солнца определяется формулой (3.1), а *дополнительное среднее* смещение эксцентриситета равно нулю.

Определяемые формулой (3.1) дополнительные средние смещения перигелия для внутренних планет за столетие имеют следующие значения:

$$\text{Меркурий: } 43.03'', \quad \text{Венера: } 8.64'', \quad \text{Земля: } 3.83'', \quad \text{Марс: } 1.35'' \quad (3.6)$$

Разница для линейных по времени составляющих средних смещений перигелиев между данными эфемерид [11] и данными таблицы 3 составляет:

$$\begin{aligned} \text{Меркурий: } 42.81'' \pm 0.2'', \quad \text{Венера: } 2.55'' \pm 10'' \\ \text{Земля: } 1.24'' \pm 3'', \quad \text{Марс: } 3.05'' \pm 2'' \end{aligned} \quad (3.7)$$

Сопоставляя данные (3.6) и (3.7), можно сделать вывод, что наличие релятивистского эффекта подтверждается для смещения перигелия Меркурия. Для перигелиев остальных планет эффект, предсказываемый ОТО, находится внутри интервала погрешности расчетов. Кроме того, между данными таблицы 3 и данными эфемерид [11] имеется существенная разница в среднем смещении эксцентриситета Марса. Она составляет $(0.198 \pm 0.03) \times 10^{-5}$ и не может быть объяснена с позиций ОТО, поскольку возмущение (3.3), как было показано выше, не вызывает векового смещения эксцентриситетов.

Отметим, что если сравнивать данные эфемерид [11] с данными таблицы 1, полученными на основе первого приближения решений уравнений возмущенного движения, то разница в средних смещениях перигелиев Венеры, Земли и Марса будет существенно отличаться от значений, предсказываемых ОТО.

4. Эволюция орбит внешних планет. Для внешних планет, как показали расчеты, смещения элементов орбит, вычисленные на основе первого приближения и точных решений уравнений возмущенного движения, различаются более заметно, чем для внутренних планет. На рис. 3 приведены графики смещений перигелия и наклонения орбиты Юпитера на интервале времени в пять тысяч лет. Здесь цифрой 1 обозначены графики, полученные из точных решений системы (2.23), (2.24), а цифрой 2 – графики, полученные из первого приближения. На рис. 4 приведены полученные из точных решений графики смещений долготы восходящего узла и эксцентриситета орбиты Юпитера.

Из этих графиков видно, как существенно различаются смещения некоторых элементов орбиты Юпитера, вычисленные по первому приближению и по точным решениям уравнений возмущенного движения. В поведении элементов орбиты Юпитера наблюдаются ярко выраженные долгопериодические моды колебаний. При этом на точных решениях и на решениях первого приближения частоты этих мод различаются в несколько раз, а различие в средних смещениях перигелия Юпитера составляет около 20%. По точным решениям период долгопериодических мод колебаний составляет около 560 лет.

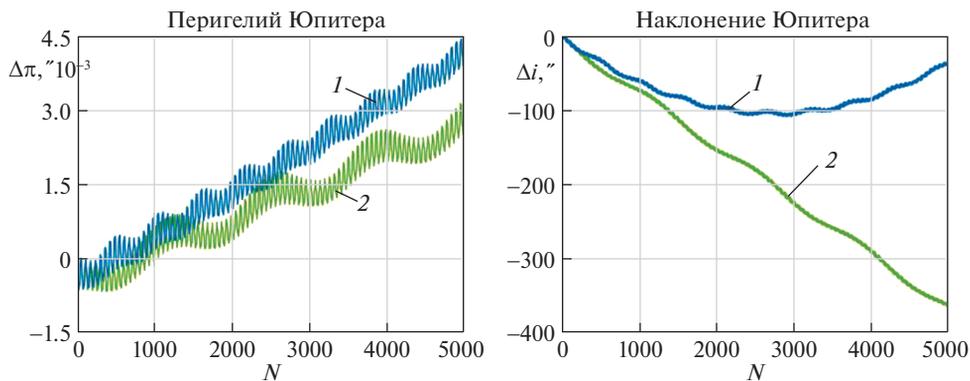


Рис. 3.

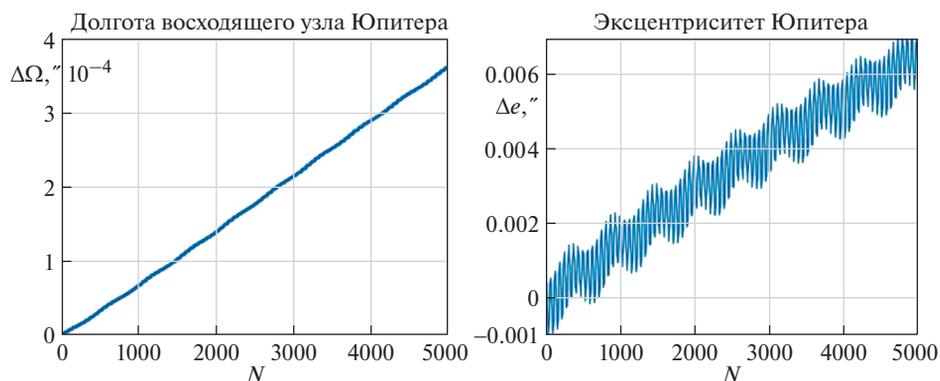


Рис. 4.

Аналогичная картина наблюдается и в поведении элементов орбиты Сатурна. На рис. 5 приведены вычисленные по точным решениям графики смещений перигелия и наклона орбиты Сатурна, а на рис. 6 — графики смещений долготы восходящего узла и эксцентриситета. Наличие долгопериодических мод колебаний в поведении элементов орбит Юпитера и Сатурна обусловлено тем, что отношение периодов обращения этих планет близко к резонансу 2:5.

На рис. 7, 8 и 9, 10 приведены графики поведения во времени элементов орбиты Урана и Нептуна, соответственно, вычисленные по точным решениям уравнений возмущенного движения (2.23), (2.24).

Детальный анализ графиков показал, что первое приближение адекватно описывают поведение элементов орбит внешних планет только на коротких интервалах времени до ста лет. На более длинных интервалах времени эволюцию орбит следует рассчитывать, используя точные решения уравнений возмущенного движения.

Как видно из графиков на рис. 11, где показано поведение перигелия и эксцентриситета орбиты Юпитера на интервале времени в шестьсот лет, помимо долгопериодической составляющей в поведении элементов орбит внешних планет имеется еще среднепериодическая составляющая, период которой равен около 62 лет, что соответ-

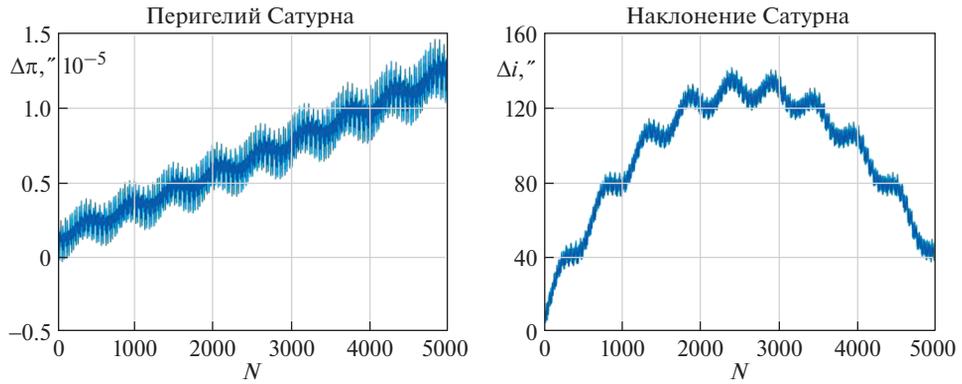


Рис. 5.

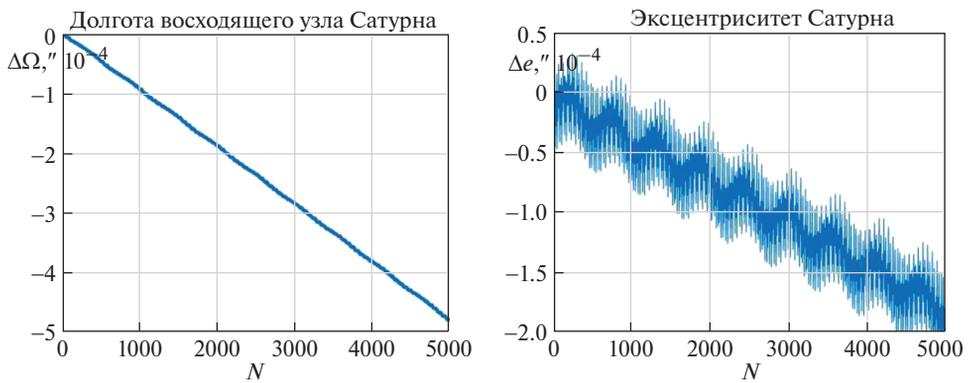


Рис. 6.

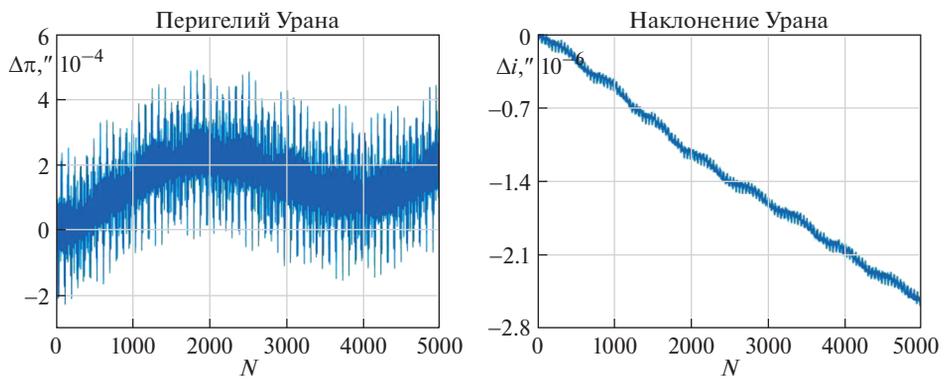


Рис. 7.

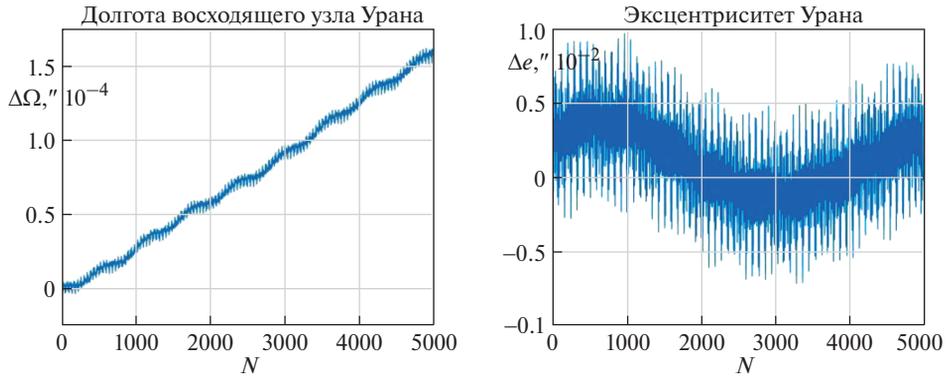


Рис. 8.

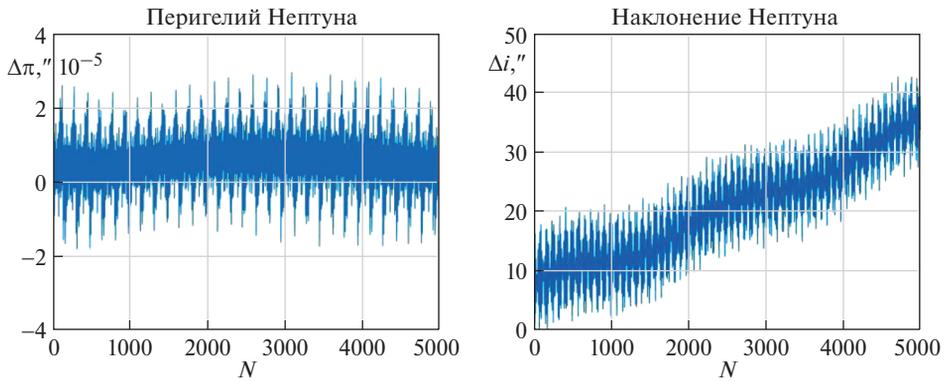


Рис. 9.

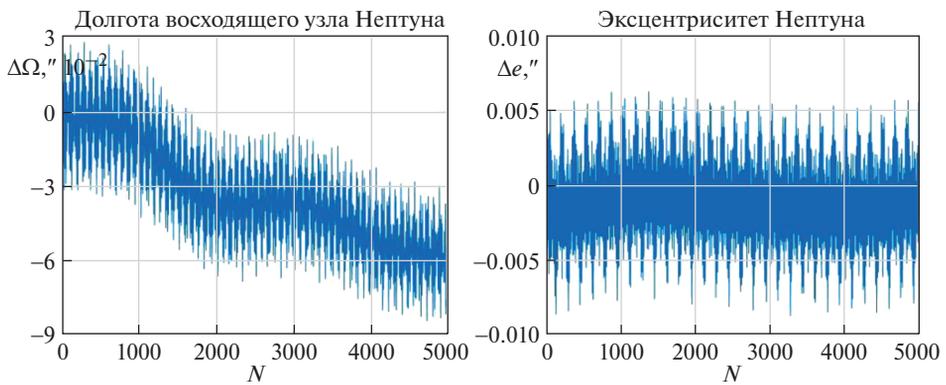


Рис. 10.

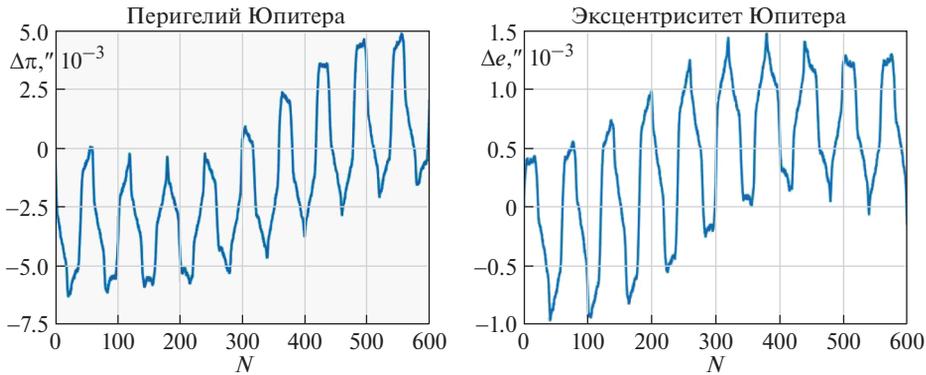


Рис. 11.

ствует примерно двум периодам обращения Сатурна. Для некоторых элементов орбит амплитуда этих колебаний во много раз превышает среднее смещение за столетие. Например, для перигелия Юпитера она составляет около $0.8''$, а для перигелия Сатурна — около $3.5''$. А поскольку период этих колебаний сравнительно большой, то для расчета значений элементов орбит внешних планет на заданный момент времени информация о средних смещениях элементов представляется мало полезной, так как на интервалах времени в десятки лет истинное значение элемента существенно отличается от среднего.

Как показали расчеты, в эволюции орбит внешних планет доминирующим фактором является взаимодействие между самими этими планетами, т.е. влияние внутренних планет сравнительно мало, и им можно пренебречь. На основании этого из системы (1.17)–(1.22) можно исключить уравнения для внутренних планет. Тогда проблема, связанная с особенностью в уравнениях для элементов орбиты Земли, будет устранена. Оставшиеся уравнения можно уже проинтегрировать как единую систему взаимосвязанных уравнений и получить, тем самым, точные решения уравнений возмущенного движения для внешних планет. Проведенные расчеты показали полное совпадение результатов численного интегрирования этой системы с результатами численного интегрирования системы (2.23), (2.24). Это совпадение может служить свидетельством того, что при выводе уравнений (2.23), (2.24) и при их программировании никаких ошибок допущено не было.

Результаты численного интегрирования уравнений возмущенного движения на интервалах времени до пяти тысяч свидетельствуют о том, что средние значения параметров и эксцентриситетов орбит планет меняются со временем. Но их изменения носят такой характер, что средние значения больших полуосей остаются неизменными. Для внешних планет в средних значениях больших полуосей орбит наблюдаются только среднепериодические и долгопериодические колебания. Таким образом, теорема Лапласа [9] об устойчивости Солнечной системы подтверждается и результатами численного интегрирования уравнений возмущенного движения.

Были проведены также расчеты эволюции орбит внешних планет на больших интервалах времени до ста тысяч лет. По результатам этих расчетов также не выявлено вековых смещений в средних значениях больших полуосей орбит планет. Кроме того, установлено, что помимо долгопериодических мод колебаний в поведении элементов орбит имеются сверх долгопериодические моды, период которых составляет в зависимости от планеты от нескольких тысяч лет до нескольких десятков тысяч лет. Соответ-

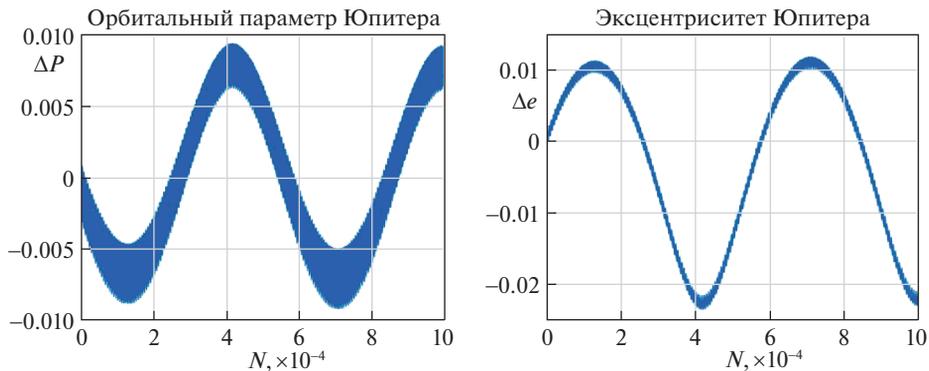


Рис. 12.

ствующий пример приведен на рис. 12, где изображены графики для параметра и эксцентриситета орбиты Юпитера на интервале времени в сто тысяч лет.

Заключение. В работе получены уравнения возмущенного движения в невырождающихся переменных, численным интегрированием которых задача определения смещения элементов орбит планет решается в точной (нелинейной) постановке. В качестве таких переменных использовались векторы кинетических моментов и векторы Лапласа планет.

Определены средние смещения и амплитуды колебательных составляющих для элементов орбит всех внутренних планет Солнечной системы на эпоху J2000 (таблица 1). По результатам этих расчетов установлено, что точность вычисления вековых смещений перигелия для Меркурия самая высокая, а для Венеры — самая низкая. Определен вклад каждой планеты в среднее смещение перигелия внутренних планет (таблица 2).

Определены интервалы времени, на которых первое приближение адекватно описывает поведение элементов орбит планет. Для внутренних планет эти интервалы составляют около тысячи лет, а для внешних — не более ста лет. Установлено также, что в поведении элементов орбит внешних планет присутствуют среднепериодические (около 60 лет) и долгопериодические (около 560 лет) моды колебаний, амплитуда которых может в несколько раз превышать среднее смещение элемента за столетие. По этой причине точность вычисления вековых смещений элементов орбит внешних планет существенно ниже, чем для внутренних планет.

Проведено сопоставление результатов расчетов для средних смещений элементов орбит, полученных в рамках классической механики, с данными эфемерид на эпоху J2000 [11]. Установлено, что для Меркурия разница в этих данных хорошо согласуется с релятивистским эффектом, предсказываемым общей теорией относительности, а для остальных планет находится внутри интервала погрешности расчетов.

Результаты расчетов на интервалах времени до ста тысяч лет подтверждают теорему Лапласа об отсутствии вековых смещений в значениях больших полуосей орбит планет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Le Verrier U.* Théorie de mouvement de Mercure // Ann. Observ. Imp. 1859. V. 5. P. 1–96.
2. *Le Verrier U.* Lettre de M. Le Verrier à M. Faye sur la théorie de Mercure et sur le mouvement du périhélie de cette planète // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. 1859. V. 49. P. 379–383.

3. *Newcomb S.* The Elements of the Four Inner Planets and the Fundamental Constants of Astronomy. Suppl. Am. Ephemer. & Naut. Alman. for 1897. Washington, D.C.: U.S. Govt. Printing Office, 1895. ix+202 p.
4. *Роузвер Н.Т.* Перигелий Меркурия. От Лаверьё до Эйнштейна. М.: Мир, 1985. 244 с.
5. *Эйнштейн А.* Объяснение движения перигелия Меркурия в общей теории относительности // Собр. научн. тр. в 4 томах. Т. I. С. 439–447.
6. *Standish E.M., Newhall X.X., Williams J.G., Folkner W.M.* JPL planetary and lunar ephemerides, DE403/LE403 // Interoffice Memorandum. 1995. 314.10-127, 1–22.
7. *Путьева Е.В.* Современные численные теории движения Солнца, Луны и больших планет. СПб.: Ин-т прикл. астрон. РАН. 2003. 32 с.
8. *Амелькин Н.И.* О прецессии орбиты Меркурия // Докл. РАН. 2019. Т. 489. № 6. С. 570–575.
9. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Физматгиз, 1963. 588 с.
10. *Дубошин Г.Н.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. 864 с.
11. *Simon J.L., Bretagnon P., Chapront J., Chapront-Touzé M., Francon G., Laskar J.* Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets // Astron. Astrophys. 1994. V. 282. P. 663–683. neb/rw/natsat/plaorbw.htm.

Calculations of the Evolution of Planet Orbits

N. I. Amel'kin[#]

Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

[#]*e-mail: namelkin@mail.ru*

As part of a planetary task, the evolution of the orbits of the planets of the Solar system is being explored. Offset of orbital elements is determined by the numerical integration of the equations of the perturbed movement recorded in non-degenerate variables. The results are presented as tables for the average offsets of orbit elements and their vibrational components for the J2000 era, as well as graphs of the behavior of orbits elements depending on the time.

Keywords: solar system, spatial task of n bodies, equations of perturbed motion, evolution of planet orbits

REFERENCES

1. *Le Verrier U.* Théorie de mouvement de Mercure // Ann. Observ. Imp., 1859, vol. 5, pp. 1–96.
2. *Le Verrier U.* Lettre de M. Le Verrier à M. Faye sur la théorie de Mercure et sur le mouvement du périhélie de cette planète // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 1859, vol. 49, pp. 379–383.
3. *Newcomb S.* The Elements of the Four Inner Planets and the Fundamental Constants of Astronomy. Suppl. Am. Ephemer. & Naut. Alman. for 1897. Washington, D.C.: U.S. Govt. Printing Office, 1895. ix+202 p.
4. *Roseveare N.T.* Mercury's perihelion from Le Verrier to Einstein. Oxford: Oxford Univ. Press, 1982. viii + 208 p.
5. *Einstein A.* Sitzungsber. Berlin: Preuss. Akad. Wiss., 1915, pp. 778, 799, 831, 844.
6. *Standish E.M., Newhall X.X., Williams J.G., Folkner W.M.* JPL planetary and lunar ephemerides, DE403/LE403 // Interoffice Memorandum, 1995, 314.10-127, 1–22.
7. *Pitjeva E.V.* Modern Numerical Theories of the Movement of the Sun, Moon and Large Planets. St. Petersburg: Inst. Appl. Astron. RAS, 2003. 32 p.
8. *Amel'kin N.I.* The precession of Mercury's orbit // Dokl. Phys., 2019, vol. 489, no. 6, pp. 570–575.
9. *Duboshin G.N.* Celestial Mechanics. Basic Problems and Methods. Moscow: Fizmatgiz, 1963. 588 p.
10. *Duboshin G.N.* Reference Manual on Celestial Mechanics and Astrodynamics. Moscow: Nauka, 1976. 864 p.
11. *Simon J.L., Bretagnon P., Chapront J., Chapront-Touzé M., Francon G., Laskar J.* Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets // Astron. Astrophys., 1994, vol. 282, pp. 663–683. neb/rw/natsat/plaorbw.htm.

УДК 531.01

АНАЛИТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ПАРАМЕТРОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИНИИ© 2020 г. П. А. Кучеренко^{1,*}, С. В. Соколов^{2,**}¹ Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростов-на-Дону, Россия² Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия

*e-mail: pavelpost83@mail.ru

**e-mail: s.v.s.888@yandex.ru

Поступила в редакцию 04.12.2019 г.

После доработки 19.02.2020 г.

Принята к публикации 11.03.2020 г.

Рассмотрен синтез высокоточных аналитических аппроксимирующих функций зависимости геодезической долготы от приведенной широты на геодезической линии сфероида. Полученные аппроксимации актуальны как для задач геодезии, так и навигации при необходимости высокоточных расчетов.

Ключевые слова: ортодромическая траектория, сфероид, аппроксимация функциональной зависимости

DOI: 10.31857/S0032823520030054

Введение. Постоянный рост требований к точности современных навигационных систем приводит к необходимости решения проблемы компромисса между повышением точности описания текущих параметров движения объекта, неизбежно ведущим к усложнению навигационных алгоритмов, и снижением вычислительной сложности последних с целью обеспечения возможности решения навигационной задачи в реальном масштабе времени. Одним из путей решения первой задачи является использование при построении основных уравнений навигации сфероидальной модели Земли вместо сферической, а радикальным подходом к решению второй (сокращению размерности системы навигационных уравнений без потери точности решения задачи навигации) — использование функциональных зависимостей между навигационными переменными, в частности, между долготой и широтой, возникающих на отдельных видах траекторий. Подобные аналитические зависимости, выраженные в элементарных функциях, известны для локсодромической или ортодромической траекторий движения объекта по сферической Земле и для локсодромической траектории движения по сфероиду [1–5]. В [6] была получена аналогичная зависимость геодезической долготы от приведенной широты для геодезической линии на сфероиде в интегральной форме (затрудняющей ее применение в задачах геодезии и навигации) и показана возможность ее аппроксимации аналитической зависимостью, выраженной элементарными функциями. Точность полученной при этом аппроксимации составила единицы метров, что позволяет использовать ее при решении задачи позиционирования в навигационных системах среднего класса точности. Но для высокоточных систем навигации необходим уже сантиметровой (и менее) уровень ошибки аппроксимации, поэтому рассмотрим далее возможность построения с данной точностью зависимости геодезической долготы от приведенной широты на геодезической линии, выраженной в элементарных функциях.

1. Постановка задачи. Как показано в [6], точная зависимость геодезической долготы L от приведенной широты u (однозначно определяющей также и геодезическую широту B [7]) является интегральной:

$$L(u) = L_0 + \int_{u_0}^u \phi \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}{\cos u \sqrt{\cos^2 u - \phi^2}} du, \quad \phi = \sin A_0 \cos u_0, \quad (1.1)$$

где u_0 – приведенная широта начальной точки геодезической линии, A_0 – азимут геодезической линии в начальной точке, L_0 – геодезическая долгота начальной точки геодезической линии, e – второй эксцентриситет (для эллипсоида Красовского).

Это затрудняет ее непосредственное использование в задачах навигации и геодезии.

Графическое изображение этой зависимости, дающее представление об общем характере функции $L(u)$ – непрерывном и монотонном, приведено также в [6]. Так как аналитическое вычисление интеграла (1.1) не представляется возможным, рассмотрим далее возможность его аналитической аппроксимации, обеспечивающей заявленную выше точность.

2. Решение задачи. Для построения искомой аппроксимации интеграла (1.1) рассмотрим возможность упрощения его подынтегрального выражения разложением в ряд функции $\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}$ по аргументу $e^2 \cos^2 u$ (в заданной точке u_l) с точностью до $(e^2 \cos^2 u)^4$ (что, как показано далее, достаточно для обеспечения точности аппроксимации существенно выше заявленной (сантиметровой) – в пределах 10^{-6} м):

$$\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} \approx \alpha_0 + \alpha_1 \cos^2 u + \alpha_2 \cos^4 u + \alpha_3 \cos^6 u + \alpha_4 \cos^8 u \quad (2.1)$$

где коэффициенты $\alpha_i, i = 0, \dots, 4$ приведены в Приложении 1.

Точность подобного разложения функции $\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}$ оказывается весьма высокой, что иллюстрирует приведенный на рис. 1 график изменения погрешности приближения $\Delta(u)$ в зависимости от приведенной широты u . Это, в свою очередь, позволяет использовать функцию (2.1) для последующего решения задачи.

При этом следует иметь в виду, что для области низких и высоких широт коэффициенты функции (2.1) существенно упрощаются:

– для района высоких широт – $u_0 = \frac{\pi}{2}$ (при выборе точки аппроксимации в начале интервала, т.е. при $u_l = u_0$):

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = -\frac{e^2}{2}, \quad \alpha_2 = -\frac{e^4}{8}, \quad \alpha_3 = -\frac{e^6}{16}, \quad \alpha_4 = -\frac{5e^8}{128}$$

– для района низких широт – $u_0 = 0$ (также при $u_l = u_0$):

$$\alpha_n = \sqrt{1 - e^2} \sum_{m=n}^4 (-1)^{n+m+1} \frac{e^{2m}}{(1 - e^2)^m} \alpha_{nm}, \quad n = 0, \dots, 4$$

$$\alpha_{nm} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{5}{128} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & \frac{5}{32} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{5}{64} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{5}{32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{128} \end{pmatrix}$$

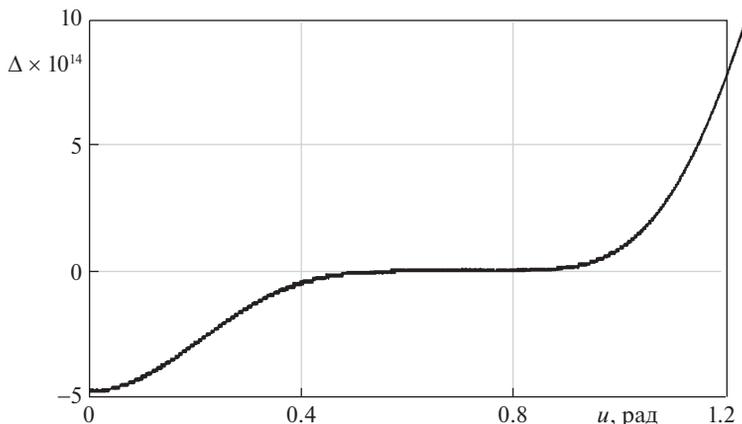


Рис. 1. Погрешность приближения Δ функции $\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}$ при $u_l = 0.7$ рад.

При использовании функции (2.1) интеграл (1.1) распадается на сумму интегралов:

$$L = L_0 + \phi \cdot \alpha_0 \int_{u_0}^u \frac{du}{\cos u \sqrt{\cos^2 u - \phi^2}} + \phi \sum_{i=1}^4 \alpha_i \int_{u_0}^u \frac{\cos^{2i-1} u}{\sqrt{\cos^2 u - \phi^2}} du \quad (2.2)$$

Первый из этих интегралов равен:

$$\begin{aligned} \int_{u_0}^u \frac{\phi \alpha_0}{\cos u \sqrt{\cos^2 u - \phi^2}} du &= \phi \alpha_0 k \int_{u_0}^u \frac{du}{\cos u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} = \\ &= -\frac{1}{2\kappa^*} \ln \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} - k^* \sin u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} + k^* \sin u} \Big|_{u_0}^u \phi k \alpha_0 \\ k^2 &= (1 - \phi^2)^{-1}, \quad k^* = \sqrt{1 - k^2} \end{aligned}$$

Так как параметр $k^* = \sqrt{1 - k^2}$ – комплексный, то представляя его в виде $k^* = iv$, $v = \sqrt{k^2 - 1}$ преобразуем полученный логарифм следующим образом [8]:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2\kappa^*} \ln \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} - k^* \sin u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} + k^* \sin u} = \\ &= \frac{1}{v} \operatorname{arctg} \frac{v \sin u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} = \frac{1}{k\phi} \operatorname{arctg} \frac{k\phi \sin u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} \end{aligned}$$

С учетом данного преобразования окончательно определяем выражение для интеграла:

$$\int_{u_0}^u \frac{\phi \alpha_0}{\cos u \sqrt{\cos^2 u - \phi^2}} du = \alpha_0 \left[\operatorname{arctg} \frac{k\phi \sin u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} - \operatorname{arctg} \frac{k\phi \sin u_0}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u_0}} \right]$$

Второй интеграл из (2.2) при замене переменных является табличным:

$$\int_{u_0}^u \frac{\phi \alpha_1 \cos u}{\sqrt{\cos^2 u - \phi^2}} du = \phi \alpha_1 [\arcsin(k \sin u) - \arcsin(k \sin u_0)],$$

а остальные интегралы

$$\phi\alpha_n \int_{u_0}^u \frac{\cos^{2n-1} u}{\sqrt{\cos^2 u - \phi^2}} du = \phi\alpha_n k \int_{u_0}^u \frac{\cos^{2n-1} u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} du, \quad n = 2, 3, 4$$

могут быть определены из [8]:

$$\begin{aligned} & \phi k \alpha_n \int_{u_0}^u \frac{\cos^{2n-1} u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} du = \\ & = \phi k \alpha_n \left\{ \frac{\sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}{k^{2(n-1)}} \sum_{m=0}^{n-2} (k^2 \sin^2 u)^m \sum_{l=0}^{n-m-2} (-1)^{n+l} p_{nmk} k^{2l} + \right. \\ & \left. + \frac{\arcsin(k \sin u)}{k^{2n-1}} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{n-m-1} q_{nm} k^{2m} \right\} \Big|_{u_0}^u, \quad n = 2, 3, 4, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} q_{20} &= \frac{1}{2}, & q_{21} &= 1; & q_{30} &= \frac{3}{8}, & q_{31} &= q_{32} = 1; & q_{40} &= \frac{5}{16} \\ q_{41} &= \frac{9}{8}, & q_{42} &= \frac{3}{2}, & q_{43} &= 1 \\ p_{200} &= \frac{1}{2}; & p_{300} &= \frac{3}{8}, & p_{301} &= 1, & p_{310} &= \frac{1}{4} \\ p_{400} &= \frac{5}{16}, & p_{401} &= \frac{9}{8}, & p_{402} &= \frac{3}{2}, & p_{410} &= \frac{5}{24}, & p_{411} &= \frac{3}{4}, & p_{420} &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

С учетом соотношения

$$\begin{aligned} \frac{k\phi \sin u_0}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u_0}} &= \frac{\sin A_0 \cos u_0 \sin u_0}{\sqrt{1 - (\sin A_0 \cos u_0)^2} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 u_0}{1 - (\sin A_0 \cos u_0)^2}}} = \\ &= \frac{\sin A_0 \cos u_0 \sin u_0}{\sqrt{\cos^2 u_0 - (\sin A_0 \cos u_0)^2}} = \sin u_0 \operatorname{tg} A_0 \end{aligned}$$

и возможности представления в компактном виде суммы интегралов

$$\begin{aligned} \phi \sum_{n=2}^4 \alpha_n \int_{u_0}^u \frac{\cos^{2n-1} u}{\sqrt{\cos^2 u - \phi^2}} du &= (\beta_0 + \beta_1 \sin^2 u + \beta_2 \sin^4 u) \sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} + \\ &+ \beta_3 \arcsin(k \sin u) + \beta_4, \end{aligned}$$

где коэффициенты $\beta_n, n = 0, \dots, 4$ приведены в Приложении 2, окончательно аппроксимация функциональной зависимости геодезической долготы от приведенной широты на геодезической линии принимает вид:

$$\begin{aligned} L^*(u) &= L_0 + \alpha_0 \left[\operatorname{arctg} \frac{k\phi \sin u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} - \operatorname{arctg}(\sin u_0 \operatorname{tg} A_0) \right] + \\ &+ \phi \alpha_1 [(\arcsin(k \sin u) - \arcsin(k \sin u_0))] + \\ &+ (\beta_0 + \beta_1 \sin^2 u + \beta_2 \sin^4 u) \sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} + \beta_3 \arcsin(k \sin u) + \beta_4 = \\ &= L_0 + \alpha_0 \operatorname{arctg} \frac{k\phi \sin u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} + (\beta_3 + \phi \alpha_1) \arcsin(k \sin u) + \\ &+ (\beta_0 + \beta_1 \sin^2 u + \beta_2 \sin^4 u) \sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} + \beta_5 \\ \beta_5 &= \beta_4 - \alpha_0 \operatorname{arctg}(\sin u_0 \operatorname{tg} A_0) - \phi \alpha_1 \arcsin(k \sin u_0) \end{aligned} \tag{2.3}$$

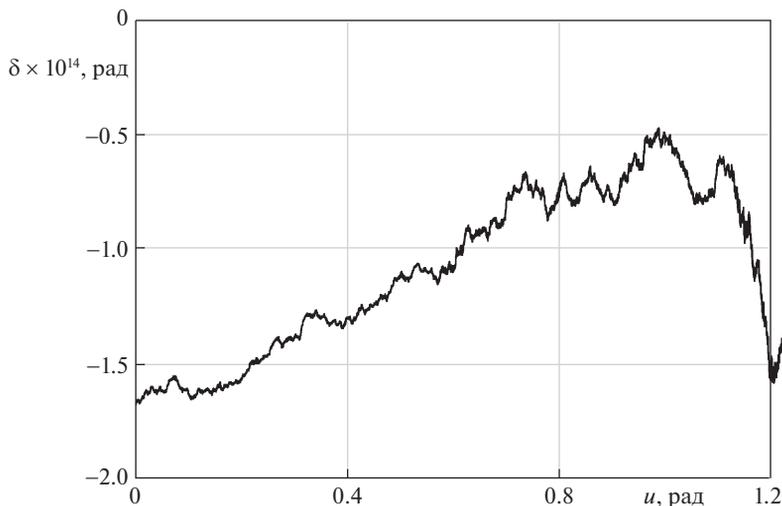


Рис. 2. Погрешность аппроксимации δ для параметров $L_0 = 0.3$, $u_0 = 0$, $A_0 = 0.3$ при $u_l = 0.7$ рад.

На рис. 2 приведен график характерного изменения погрешности аппроксимации $\delta(u) = L(u) - L^*(u)$ в зависимости от широты u (для значений параметров $L_0 = 0.3$, $u_0 = 0$, $A_0 = 0.3$ при $u_l = 0.7$).

Как показали результаты моделирования, характер изменения и порядок значений среднеквадратических ошибок аппроксимации существенно не меняются при выборе различных интервалов изменения широты u и точек аппроксимации u_l в пределах этих интервалов, что свидетельствует об общем характере полученной аппроксимации и возможности ее использования в высокоточных навигационных системах и геодезических расчетах.

В завершение рассмотрения данной аппроксимации следует отметить, что, учитывая известную связь приведенной и геодезической B широт

$$\sin u = \frac{\sin B}{\sqrt{1 + e^2 \cos^2 B}} \quad (2.4)$$

из (2.3), (2.4) можно легко получить следующую аппроксимацию связи геодезической долготы и геодезической широты B :

$$\begin{aligned} L = & L_0 + \alpha_0 \operatorname{arctg} \frac{k\phi \sin B}{\sqrt{1 + e^2 - (k^2 + e^2) \sin^2 B}} + \\ & + (\beta_3 - \phi\alpha_1) \arcsin \left(k \frac{\sin B}{\sqrt{1 + e^2 \cos^2 B}} \right) + \left(\beta_0 + \beta_1 \frac{\sin^2 B}{1 + e^2 \cos^2 B} + \right. \\ & \left. + \beta_2 \frac{\sin^4 B}{(1 + e^2 \cos^2 B)^2} \right) \frac{\sin B}{1 + e^2 \cos^2 B} \sqrt{1 - k^2 + (e^2 + k^2) \cos^2 B} + \beta_5, \end{aligned}$$

где коэффициенты α_i , β_i , $i = 0, \dots, 4$, приведенные в Приложениях 1, 2 пересчитываются аналогичным образом с учетом (2.4).

Заключение. Как показал вычислительный эксперимент, максимальная ошибка аппроксимации полученных аналитических аппроксимирующих функциональных зависимостей не превышает 2×10^{-13} рад (1.5×10^{-6} м), что позволяет их эффективно использовать в высокоточных геодезических и навигационных расчетах.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Коэффициенты разложения в ряд функции $\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}$

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u_l} + \frac{e^2 \cos^2 u_l}{2\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u_l}} - \frac{e^4 \cos^4 u_l}{8\sqrt{(1 - e^2 \cos^2 u_l)^3}} + \\ &+ \frac{e^6 \cos^6 u_l}{16\sqrt{(1 - e^2 \cos^2 u_l)^5}} - \frac{5e^8 \cos^8 u_l}{128\sqrt{(1 - e^2 \cos^2 u_l)^7}} \\ \alpha_1 &= -\frac{e^2}{2\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u_l}} + \frac{e^4 \cos^2 u_l}{4\sqrt{(1 - e^2 \cos^2 u_l)^3}} - \\ &- \frac{3e^6 \cos^4 u_l}{16\sqrt{(1 - e^2 \cos^2 u_l)^5}} + \frac{5e^8 \cos^6 u_l}{32\sqrt{(1 - e^2 \cos^2 u_l)^7}} \\ \alpha_2 &= -\frac{e^4}{8\sqrt{(1 - e^2 \cos^2 u_l)^3}} + \frac{3e^6 \cos^2 u_l}{16\sqrt{(1 - e^2 \cos^2 u_l)^5}} - \frac{15e^8 \cos^4 u_l}{64\sqrt{(1 - e^2 \cos^2 u_l)^7}} \\ \alpha_3 &= -\frac{e^6}{16\sqrt{(1 - e^2 \cos^2 u_l)^5}} + \frac{5e^8 \cos^2 u_l}{32\sqrt{(1 - e^2 \cos^2 u_l)^7}} \\ \alpha_4 &= -\frac{5e^8}{128\sqrt{(1 - e^2 \cos^2 u_l)^7}} \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Выражения для коэффициентов разложения β_n

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \phi \frac{24\alpha_2 k^4 + 6\alpha_3(8k^2 - 3)k^2 + \alpha_4(72k^4 - 54k^2 + 15)}{48k^5} \\ \beta_1 &= -\phi \frac{\alpha_4(18k^2 - 5) + 6k^2\alpha_3}{24k^3} \\ \beta_2 &= \phi \frac{\alpha_4}{6k} \\ \beta_3 &= \phi \frac{\alpha_2(2k^2 - 1)8k^4 + \alpha_3(8k^4 - 8k^2 + 3)2k^2 + \alpha_4(16k^6 - 24k^4 + 18k^2 - 5)}{16k^6} \\ \beta_4 &= -(\beta_0 + \beta_1 \sin^2 u_0 + \beta_2 \sin^4 u_0) \sin u_0 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u_0} - \beta_3 \arcsin(k \sin u_0) \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Серапинас Б.Б.* Геодезические основы карт. М.: Изд-во МГУ, 2001. 132 с.
2. *Wei-Kuo Tseng, Michael A. Earle, Jiunn-Liang Guo* Direct and inverse solutions with geodetic latitude in terms of longitude for rhumb line sailing // *J. Navigation*. 2012. V. 65. № 3. P. 549–559.
3. *Nihad E. Daidzic* Long and short-range air navigation on spherical Earth // *Intern. J. Aviation, Aeronautics and Aerospace*. 2017. V. 4. № 1. P. 1–54.
4. *Соколов С.В.* Аналитические модели пространственных траекторий для решения задач навигации // *ПММ*. 2015. Т. 79. Вып. 1. С. 24–30.
5. *Розенберг И.Н., Соколов С.В., Уманский В.И., Погорелов В.А.* Теоретические основы тесной интеграции инерциально-спутниковых навигационных систем. М.: Физматлит, 2018. 306 с.

6. Кучеренко П.А., Соколов С.В. Аналитическое решение задачи аппроксимации функциональных зависимостей параметров геодезической линии // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 5. С. 104–112.
7. Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии. М.: Недра, 1979. 296 с.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов. М.: Физматлит, 1963. 1100 с.

Analytical Approximation of the Geodesic Line Parameters Functional Dependencies

P.A. Kucherenko^{a,#} and S.V. Sokolov^{b,##}

^a Rostov State Transport University, Rostov-on-Don, Russia

^b Moscow technical university of communications and informatics, Moscow, Russia

[#] e-mail: pavelpost83@mail.ru

^{##} e-mail: s.v.s.888@yandex.ru

The synthesis of high-precision analytical approximations of the dependence of the geodetic longitude on the reduced latitude on the geodesic line of the spheroid is considered. The obtained approximations are relevant for both geodesy and navigation problems, providing the possibility of a significant reduction in computational costs in high-precision geodetic and navigation calculations.

Keywords: orthodromic trajectory, spheroid, approximation of functional dependence

REFERENCES

1. Serapinas B.B. Geodesic Basics of Maps (Geodezicheskie osnovy kart) Moscow: MGU, 2001. 132 p. (in Russian)
2. Wei-Kuo Tseng, Michael A. Earle, Jiunn-Liang Guo Direct and inverse solutions with geodetic latitude in terms of longitude for rhumb line sailing // J. Navigation, 2012, vol. 65, no. 3, pp. 549–559.
3. Nihad E. Daidzic Long and short-range air navigation on spherical Earth // Intern. J. Aviation, Aeronautics, and Aerospace, 2017, vol. 4, no. 1, pp. 1–54.
4. Sokolov S.V. Analytical models of spatial trajectories for solving navigation problems // JAMM, 2015, vol. 79, no. 1, pp. 17–22.
5. Rozenberg I.N., Sokolov S.V., Umanskij V.I., Pogorelov V.A. Theoretical Foundations of Close Integration of Inertial-Satellite Navigation Systems (Teoreticheskie osnovy tesnoj integracii inercial'no-sputnikovyh navigacionnyh system). Moscow: Fizmatlit, 2018. 306 p. (in Russian)
6. Kucherenko P.A., Sokolov S.V. An analytical solution to the problem of approximating the functional dependences of the parameters of the geodesic line // Mech. Solids, 2019 (in Press).
7. Morozov V.P. Course of Spheroidal Geodesy (Kurs sferoidicheskoj geodezii) Moscow: Nedra, 1979. 296 p. (in Russian)
8. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tables of Integrals (Tablicy integralov). Moscow: Fizmatlit, 1964. 1100 p. (in Russian)

УДК 531.36

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ДИНАМИКЕ ВОЛЧКА ТИП-ТОП

© 2020 г. М. А. Муницына^{1,2,*}

¹ Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

² Институт проблем управления РАН, Москва, Россия

*e-mail: munitsyna@gmail.com

Поступила в редакцию 02.03.2020 г.

После доработки 21.04.2020 г.

Принята к публикации 06.05.2020 г.

Простейшей моделью волчка тип-топ является неоднородный динамически симметричный шар, центр масс которого лежит на оси динамической симметрии, но не совпадает с геометрическим центром. Локальный анализ этой модели представлен в работах [1, 2], а глобальный качественный анализ – в работах [3–5]. Численные исследования проводились в рамках поликомпонентного сухого трения [6]. Сравнительный анализ различных моделей проведен в [7]. В работе [8] представлен метод обобщенных диаграмм Смейла [9, 10] в задаче о движении волчка тип-топ на вязкоупругой плоскости.

В настоящей работе для поликомпонентных моделей сухого и вязкого трения при некотором классе начальных условий приводятся приближенные уравнения, описывающие динамику волчка и позволяющие дополнить качественный анализ количественными оценками.

Ключевые слова: трения, тип-топ, диаграммы Смейла

DOI: 10.31857/S0032823520040086

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении неоднородного динамически симметричного шара на горизонтальной плоскости. Пусть r – радиус шара, s – расстояние между его геометрическим центром O и центром масс S ($s \neq 0$). Будем считать, что прямая SO с единичным ортом $e = \overline{SO}/s$ является осью динамической симметрии шара, а A и C – его экваториальный и осевой моменты инерции.

Теоремы об изменении количества движения и кинетического момента шара, условие постоянства вектора γ и условие безотрывности движения, отнесенные к главным центральным осям инерции шара, имеют соответственно вид

$$m\dot{\mathbf{v}} + [\boldsymbol{\omega}, m\mathbf{v}] = -mg\boldsymbol{\gamma} + N\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{F}, \quad \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}] = [\mathbf{r}, N\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{F}] + \mathbf{M} \quad (1.1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}] = 0, \quad (\mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$$

Здесь m – масса шара, \mathbf{v} и $\boldsymbol{\omega}$ – векторы скорости его центра масс и угловой скорости, $\mathbf{r} = s\mathbf{e} - r\boldsymbol{\gamma}$ и $\mathbf{u} = \mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$ – радиус-вектор и скорость нижней точки шара соответственно, g – ускорение свободного падения, $N \geq 0$ – величина нормальной составляющей реакции опорной плоскости, $\mathbf{J} = \text{diag}(A, A, C)$ – центральный тензор инерции шара, \mathbf{F} и \mathbf{M} – сила и момент трения. При заданной модели трения

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}, N), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}, N) \quad (1.2)$$

система (1.1) замкнута относительно переменных \mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$ и N .

Заметим, что в случае отрыва шара от плоскости ($N = 0$) для описания его динамики следует положить $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{M} = 0$ в первых трех уравнениях (1.1), отбросив последнее уравнение. При этом для отслеживания возвращения на контакт следует рассматривать также уравнение

$$\dot{z} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma}), \quad (1.3)$$

где z – высота над плоскостью нижней точки шара (в момент отрыва и при возвращении на контакт $z = 0$).

2. Плоскость с трением скольжения. Следуя [1, 4], рассмотрим случай $\mathbf{M} = 0$ и будем считать, что сила трения удовлетворяет условиям

$$\mathbf{F} = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{u} = 0; \quad (\mathbf{F}, \mathbf{u}) < 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{u} \neq 0 \quad (2.1)$$

Тогда система уравнений (1.1) имеет первый интеграл (интеграл Джелетта) вида

$$K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = -\frac{1}{Cr} (\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) = k = \text{const}, \quad (2.2)$$

а для качественного анализа динамики предложенной модели волчка (неоднородного шара) явное выражение силы трения не требуется [4].

В рассматриваемом случае система уравнений (1.1) имеет решения вида

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \pm 1, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \text{const}, \quad N = mg, \quad \mathbf{v} = 0, \quad (2.3)$$

соответствующие равномерным вращениям вокруг вертикальной оси динамической симметрии шара, и

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega \sin \theta \sin \omega_0 t, & \omega_2 &= \omega \sin \theta \cos \omega_0 t, & \omega_3 &= \omega \cos \theta + \omega_0 \\ \gamma_1 &= \sin \theta \sin \omega_0 t, & \gamma_2 &= \sin \theta \cos \omega_0 t, & \gamma_3 &= \cos \theta, & N &= mg, \quad \mathbf{v} = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

соответствующие его регулярным прецессиям вокруг неподвижного центра масс. Параметры регулярной прецессии (2.4) определяются постоянной интеграла Джелетта

$$k^2 = c \frac{(a(1-y^2) + (y-b)^2)^2}{b - (1-a)y}, \quad \omega = \frac{k}{a(1-y^2) + (y-b)^2}, \quad \omega_0 = -b\omega \quad (2.5)$$

и справедливо равенство

$$\omega_3^2 = \frac{(b-y)^2 c}{(a-1)y + b} \quad (2.6)$$

Здесь $y = \cos \theta$ – косинус угла нутации шара, значение которого определяется первым равенством формулы (2.4), а a , b и c – параметры волчка

$$a = \frac{A}{C} \in [1/2, +\infty], \quad b = \frac{s}{r} \in (0, 1), \quad c = \frac{mgs}{C} \in (0, +\infty]$$

Указанные движения представляют собой множество всех возможных движений без проскальзывания ($\mathbf{u} = 0$), на которых полная механическая энергия

$$H(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) - mg(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{r}) \quad (2.7)$$

сохраняется.

Полный параметрический анализ устойчивости этих решений и соответствующие диаграммы Смейла на плоскости (k^2, h) , где h – начальное значений полной механической энергии представлен в работе [4]. Например, для волчка с параметрами

$$a = 1, \quad b = 0.3 \quad (2.8)$$

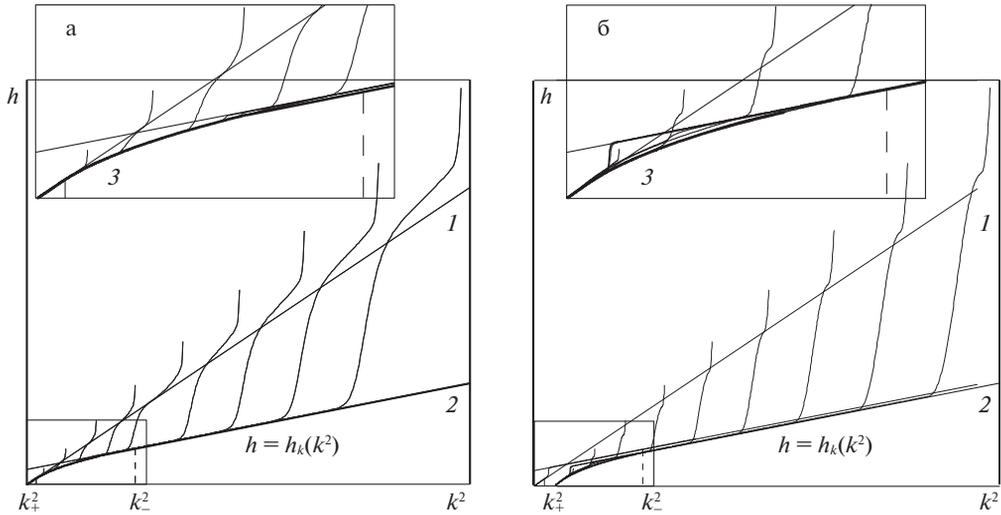


Рис. 1.

диаграмма Смейла имеет вид, представленный на рис. 1. Здесь решениям (2.3), устойчивым при $k^2 \leq k_{\pm}^2$, соответствуют прямые 1 и 2, решениям (2.4), (2.5) соответствует кривая 3. Каждому значению k соответствует ровно одно устойчивое движение (жирная кривая), точные выражения для соответствующей зависимости $h = h(k^2)$ и значения k_{\pm}^2 представлены в [4].

Заметим, в случае абсолютно гладкой плоскости уравнения движения шара имеют еще один первый интеграл $\omega_3 = \text{const}$ и допускают что те же решения (2.3), (2.4), параметры которых определяются значениями интегралов

$$\frac{((x - b)\omega_3 - k)\omega_3}{(1 - x^2)a} + \frac{((x - b)\omega_3 - k)^2 x}{(1 - x^2)^2 a} = c, \quad \omega = \frac{k - (x - b)\omega_3}{a(1 - x^2)}, \quad \omega_0 = \omega_3 - \omega x \quad (2.9)$$

Здесь $x = \cos \theta$ – косинус угла нутации шара, значение которого определяется первым равенством формулы (2.9). Причем прецессии устойчивы при любых параметрах задачи [11].

3. Плоскость с трением скольжения, верчения и качения. Рассмотрим плоскость с трением скольжения, верчения и качения $\mathbf{F} \neq 0$, $\mathbf{M} \neq 0$. Тогда на решениях системы (1.1) справедливы равенства

$$\dot{H} = (\mathbf{F}, \mathbf{u}) + (\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}), \quad \dot{K} = -\frac{1}{Cr}(\mathbf{M}, \mathbf{r}) \quad (3.1)$$

Следуя [4] будем считать, что момент трения удовлетворяет условиям

$$0 < \frac{(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega})}{(\mathbf{F}, \mathbf{u})} \ll 1 \quad \text{при} \quad \mathbf{u} \neq 0; \quad \frac{(\mathbf{M}, \mathbf{r})}{mgr^2} \ll 1 \quad \text{при} \quad \mathbf{u} \neq 0 \quad (3.2)$$

Эти условия позволяют провести качественный анализ динамики методом обобщенных диаграмм Смейла [9, 10]. Полная механическая энергия H убывает на движения без проскальзывания значительно медленнее, чем на движениях с проскальзыванием, а величина K медленно меняется на всех движениях. Следовательно [4], под действи-

ем фазового потока системы (1.1) те точки плоскости (K^2, H) , которые не принадлежат соответствующим (2.3) и (2.4), (2.5) решениям движутся “быстро” в сторону уменьшения H , и “медленно” – вдоль оси K^2 . Попадая таким образом на множество $H = h(K^2)$ точка продолжает движение “медленно” вдоль него до тех пор, пока не остановится в соответствующей устойчивому равновесию точке.

Тогда, если в начальном положении ось шара с параметрами (2.8) почти вертикальна, центр масс близок к наинижнему положению, а начальная угловая скорость почти сонаправлена с осью и достаточно велика, то начальная точка на обобщенной диаграмме Смейла находится в окрестности прямой I (рис. 1) в области $K^2 > k_-^2$, и в процессе движения ось шара сначала перевернется к вертикальному положению с наивысшим расположением центра масс после чего на некоторое время останется в этом положении. Шар будет вращаться вокруг нее с медленно убывающей по модулю угловой скоростью, пока она не уменьшится о соответствующего равенству $K^2 = k_-^2$ значения. После этого ось шара будет переворачиваться к начальному положению, а шар будет совершать квазипрецессионные движения. Когда центр масс займет наинижнее положение, шар будет замедленно вращаться вокруг вертикали до полной остановки.

Для исследования первого переходного процесса к множеству $H = h(K^2)$ заметим, что из системы (1.1) следует, что

$$\dot{\omega}_3 = \frac{r}{C}([\mathbf{F}, \boldsymbol{\gamma}], \mathbf{e}) + \frac{1}{C}(\mathbf{M}, \mathbf{e}) \quad (3.3)$$

Отсюда в предположении о малости правой части следует, что ω_3 является медленной переменной, а приближенное уравнение, описывающие ее изменение, может быть получено подстановкой вместо быстрых переменных соответствующих периодических или почти периодических решений исходной системы, найденных в предположении о постоянстве медленной переменной [12, 13], т.е. соответствующих стационарным движениям шара на абсолютно гладкой плоскости – прецессии (2.4) с учетом (2.9). При движении вдоль соответствующих (2.3) множеств величина $\dot{\omega}_3$ может быть определена непосредственно из уравнений движения. На движении вдоль соответствующего (2.4), (2.5) множества, медленной величиной будет также полная механическая энергия, а почти периодическими решениями, найденными в предположении ее постоянстве, будут соответствующие этому множеству решения.

Таким образом, учитывая все высказанное при вязком трении вида

$$\mathbf{F} = -\kappa_f \mathbf{u}, \quad \mathbf{M} = -\kappa_m(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma}, \quad \kappa_f = \text{const}, \quad \kappa_m = \text{const} \quad (3.4)$$

и считая малыми безразмерные параметры $\kappa_f \sqrt{r/g}/m$ и $\kappa_m \sqrt{r/g}/C$, получим

$$\dot{\omega}_3 = \begin{cases} -\frac{\kappa_f r^2}{A} \Phi(\omega_3) - \frac{\kappa_m}{A} \Psi(\omega_3)x, & H > h(K^2) \\ -\frac{\kappa_m}{C} \omega_3, & H = h(K^2), \quad K^2 \in [0, k_+^2] \cup [k_-^2, +\infty) \\ -\frac{\kappa_m c}{C} \frac{\varphi(y)(1-by)y-b}{(a-1)y+b} \omega_3, & H = h(K^2), \quad K^2 \in (k_+^2, k_-^2), \end{cases} \quad (3.5)$$

где

$$\varphi(y) = \frac{(by-1)[(a-1)y+b(a+1)]}{3[(a-1)y+b(a+1)]^2 + a(b^2-1) + a^2}$$

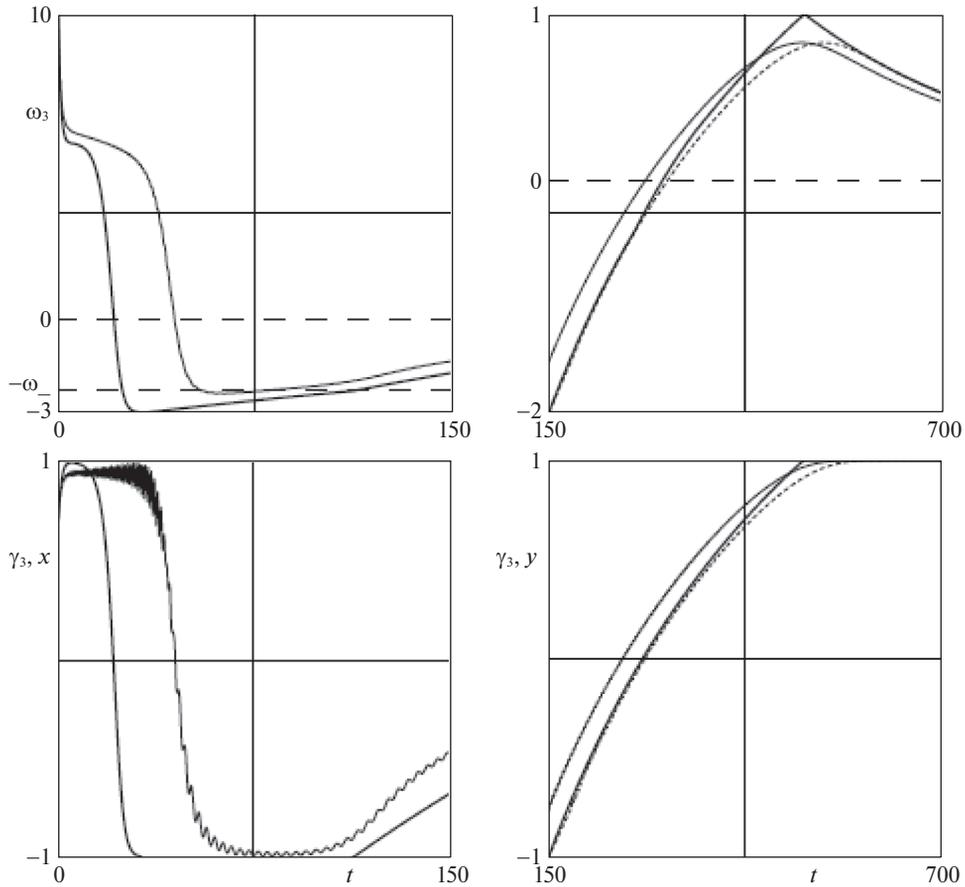


Рис. 2.

зависимости $x = x(\omega_3)$ и $y = y(\omega_3)$ определяются соответствующими равенствами (2.9) и (2.6), а зависимости $\Phi(\omega_3)$ и $\Psi(\omega_3)$ имеют вид

$$\Phi(\omega_3) = (b - x)K + (a(1 - x^2) + (b - x)^2)\omega_3, \quad \Psi(\omega_3) = K + (b + (a - 1)x(\omega_3))\omega_3$$

Введем такие масштабы измерения масс, длин и времени, что $m = 1$, $g = 1$ и $r = 1$, численные значения параметров волчка (2.8) и трения примем следующими: $c = 1$, $\kappa_f = 0.25$, $\kappa_m = 1 \times 10^{-3}$. На рис. 2 тонкими кривыми представлены результаты численного интегрирования полных уравнений движения шара при начальных условиях

$$\mathbf{v}(0) = 0, \quad \gamma_3(0) = 0.7, \quad \gamma_1(0) = 0, \quad \omega_3(0) = 10, \quad \omega_1(0) = \omega_2(0) = 0 \quad (3.6)$$

Жирным кривым на рис. 2 отмечены решение уравнения (3.5) и соответствующая ему зависимость косинуса угла нутации шара. Последние можно разделить на четыре этапа движения: на первом абсолютная величина ω_3 уменьшается и выполнено неравенство $x > -1$ – в этом случае интегрируется первая строчка уравнения (3.5) (этот этап соответствует первому перевороту волчка от положения с наимизшим расположением центра масс к наивысшему); на втором $\dot{\omega}_3$ меняет знак на противоположный, а вели-

чина x (y) полагается равной -1 — интегрируется вторая строчка уравнения (3.5) (соответствующая вращению волчка вокруг вертикали) до тех пор, пока не достигается равенство $\omega_3^2 = \omega_-^2$ ($K^2 = k_-^2$); затем интегрируется третья строчка (соответствующая второму повороту волчка) и величина y меняется от -1 до 1 ; на финальном этапе (также соответствующем вращению волчка вокруг вертикали) снова интегрируется вторая строчка уравнения (3.5) до тех пор, пока величина ω_3 не обратится в ноль.

При численном интегрировании уравнения (3.5) на первом этапе движения изменение величины K не учитывалось, вследствие чего наблюдается различие значений ω_3 в результате этого переходного процесса, а на следующих этапах решения отличаются сдвигом по времени (пунктиром обозначен сдвиг точного решения). При численном интегрировании уравнения (3.5) на третьем этапе учитывалось, что его правая часть имеет в точке $\omega_3 = 0$ ($y = b$) устранимую особенность. Заметим, что в начале этого этапа решение полной системы уравнений остается в окрестности $\gamma_3 = -1$, а затем быстро переходит в окрестность приближенного решения, т.е. при сходе с неустойчивых вращений наблюдается затягивание потери устойчивости ([14, 15]).

Рассмотрим модель трения вида

$$\mathbf{F} = -fN \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}| + 8\rho/(3\pi)|(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})|}, \quad \mathbf{M} = -\frac{3\pi\rho^2 f}{16} N \frac{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma}}{15\pi/(16\rho)|\mathbf{u}| + |(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})|}, \quad (3.7)$$

где f , ρ — постоянные коэффициенты. Равенства (19) соответствует аппроксимациям Паде первого порядка моделей трения [2, 10]. Тогда, считая малыми параметры f и ρ/r , получим

$$\dot{\omega}_3 = \begin{cases} -\frac{fc}{b} \frac{\Phi(\omega_3)\sqrt{1-x^2}}{\Phi(\omega_3)\text{sign } K + \beta\Psi(\omega_3)\sqrt{1-x^2}} - \frac{\mu}{C} \frac{\Psi(\omega_3)x\sqrt{1-x^2}}{\alpha\Phi(\omega_3)\text{sign } K + \Psi(\omega_3)\sqrt{1-x^2}} & H > h(K^2) \\ -\frac{K_m}{C} \text{sign } \omega_3, & H = h(K^2), \quad K^2 \in [0, k_+^2] \cup [k_-^2, +\infty) \\ -\frac{K_m}{C} \varphi(y), & H = h(K^2), \quad K^2 \in (k_+^2, k_-^2) \end{cases} \quad (3.8)$$

Результаты соответствующих численных экспериментов при следующих параметрах трения $f = 0.2$, $\rho = 0.04$, представлены на рис. 3. Качественно эти результаты совпадают с представленными на рис. 2. Параметры трения определялись из условия примерного совпадения длины временных интервалов каждого из этапов движения с аналогичными интервалами предыдущего эксперимента. В целом можно сказать, что при выбранных параметрах в рассматриваемых экспериментах качество приближения полученными уравнениями (3.5), (3.8) полной системы уравнений движения при двух рассмотренных моделях трения одинаково. К различиям можно отнести дальнейшее затягивание потери устойчивости при переходе с неустойчивых вращений к прецессиям в случае сухого трения.

Кривые, соответствующие численному интегрированию полных уравнений движения на обобщенных диаграммах Смейла в случае моделей трения (3.4) и (3.7) представлены на рис. 1, а и рис. 1, б соответственно (начальные условия имели аналогичный (3.6) вид, начальная угловая скорость менялась от 1 до 10 с равным шагом в единицу).

Полученные уравнения (3.5), (3.8), определяют динамику шара при близких к виду (2.4) при соотношении (2.9) начальных условиях. Они интегрируются в квадратурах и аппроксимируют зависимость от времени проекции угловой скорости шара на ось его динамической симметрии, при этом равенства (2.3) или (2.4) с учетом (2.9) или (2.5) на соответствующих этапах движения описывают поведение всех остальных перемен-

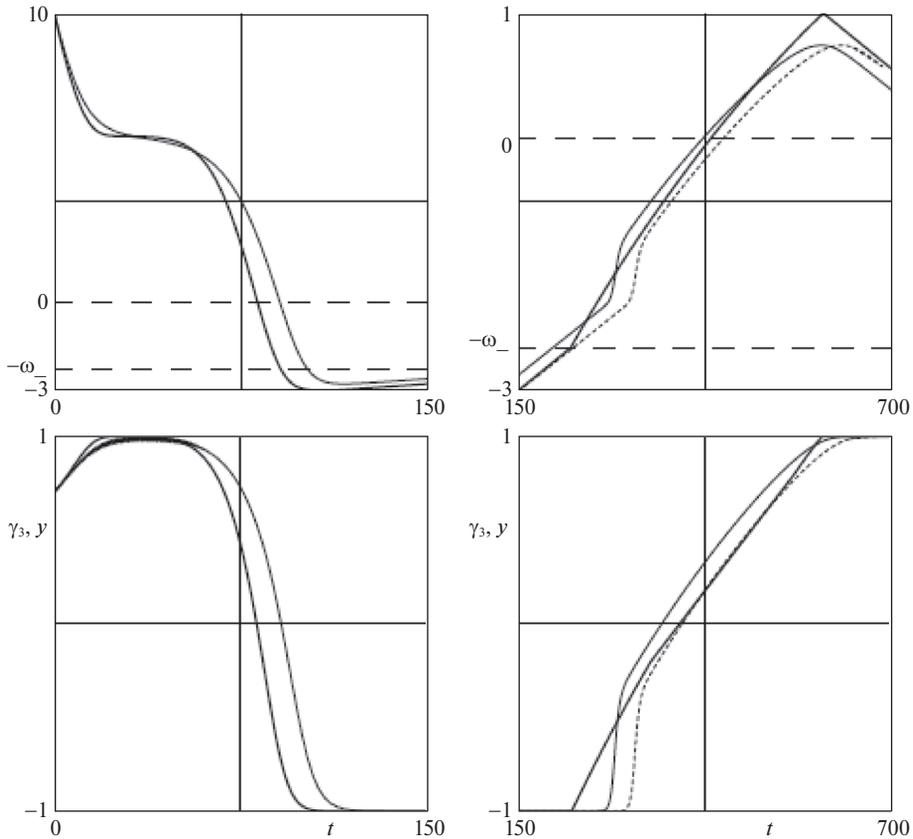


Рис. 3.

ных. Точные решения полной системы уравнений движения шара представляют собой сумму плавно меняющейся траектории усредненного движения и быстро осциллирующих слагаемых. В частности, сила реакции опорной плоскости, сохраняя в среднем равное весу шара значение, может существенно отклоняться от него, в том числе принимая нулевое значение. В таком случае происходит отрыв от плоскости. Но в силу быстрой осциляции всех переменных, а следовательно и правой части равенства (1.3), ему соответствует столь же быстрое возвращение на контакт. Этим объясняется тот факт, что в соответствующем натурном эксперименте видимого отрыва от плоскости не наблюдается, а движение сопровождается звуком серии микроударов.

Следует отметить, что при добавлении к любой из рассмотренных моделей трения перпендикулярной скорости скольжения компоненты силы или момента трения полученные уравнения (3.5), (3.8) не изменятся, т.е. в рассматриваемой задаче о движении неоднородного шара на неподвижной горизонтальной плоскости эти компоненты не оказывают качественного влияния на динамику. Заметим также, что предложенный подход к исследованию динамики волчка тип-топ и других задач подобного рода (например, динамики сфероида [18, 19]) может быть использован и при других моделях взаимодействия тела с опорной поверхностью.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (19-01-00140, 18-01-00335) и Программы фундаментальных научных исследова-

ний по приоритетным направлениям, определяемым Президиумом Российской академии наук, № 7 “Новые разработки в перспективных направлениях энергетики, механики и робототехники”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Контенсу П.* Связь между трением скольжения и трением верчения в ее учет в теории волчка // Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. С. 60–77.
2. *Магнус К.* Гироскоп. теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.
3. *Карапетян А.В.* Качественное исследование волчка на плоскости с трением // ПММ. 1991. Т. 55. № 4. С. 698–701.
4. *Карапетян А.В.* Глобальный качественный анализ динамики китайского волчка (тип-топ) // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 33–41.
5. *Карапетян А.В.* Инвариантные множества механических систем с симметрией // Проблемы устойчивости и управления. Сб. научн. статей, посвященный 80-летию акад. В.М. Матророва. М.: Физматлит, 2013. С. 184–210.
6. *Климов Д.М., Журавлёв В.Ф.* О динамике волчка Томсона (тип-топ) на плоскости с реальным сухим трением // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 6. С. 157.
7. *Зобова А.А.* Различные модели трения в динамике двусферического волчка // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 2. С. 21–28.
8. *Zobova A.A., Karapetyan A.V.* Tippe-top on visco-elastic plane: steady-state motions, generalized Smale diagrams and overturns // Lobachevskii J. Math. 2017. V. 38. P. 1007–1013.
9. *Карапетян А.В.* Качественный анализ динамики диссипативных систем с симметрией на основе метода обобщенных диаграмм Смейла // В сб.: Современные проблемы математики и механики. Т. 2. Механика. Вып. 2. М.: МГУ, 2009. С. 192–200.
10. *Карапетян А.В.* Обобщенные диаграммы Смейла и их применение к задачам динамики систем с трением // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Тр. 10-й междунар. Четаевской конф. Казань, 2012 Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. С. 247–258.
11. *Карапетян А.В.* Об устойчивости стационарных движений тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости // ПММ. 1981. Т.45. № 3. С. 504–511.
12. *Моргунов Б.И., Волосов В.М.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: МГУ, 1971. 508 с.
13. *Блехман И.И.* Вибрационная механика. М.: Физматлит, 1994. 400 с.
14. *Нейштадт А.И.* О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях. I // Дифференц. уравн. 1987. Т. 23. № 12. С. 2060–2067.
15. *Нейштадт А.И.* О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях. II // Дифференц. уравн. 1988. Т. 24. № 2. С. 226–233.
16. *Карапетян А.В.* Двухпараметрическая модель трения и ее свойства // ПММ. 2009. Т. 73. № 5. С. 515–519.
17. *Журавлев В.Ф.* О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62. №. 5. С. 762–767.
18. *Муницына М.А.* Динамика сфероида на плоскости с трением // ПММ. 2018. Т. 82. №. 1. С. 16–24.
19. *Муницына М.А.* О переходных процессах в динамике эллипсоида вращения на плоскости с трением // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 3. С. 69–75.

Transition Processes in Tippe Top Dynamics

M. A. Munitsyna^{a,b,#}

^a *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia*

^b *Trapeznikov Institute of Control Sciences RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: munitsyna@gmail.com*

The simplest model of a tippe-top is an nonhomogeneous dynamically symmetric ball, the center of mass of which lies on the axis of dynamic symmetry, but does not coincide with the

geometric center. A local analysis of this model is presented in the works [1, 2], and global qualitative analysis is in the works [3–5]. Numerical studies for multicomponent dry friction were carried out in [6]. A comparative analysis of various models was carried out in [7]. In this work, for multicomponent models of dry and viscous friction, for a certain class of initial conditions, approximate equations are described that describe the dynamics of the top. They allow you to complement the qualitative analysis with quantitative estimates.

Keywords: friction, tippe-top, Smale diagrams

REFERENCES

1. *Contensou P.* Couplage entre frottement de glissement et frottement de pivotement dans la théorie de la toupee // *Kreiselprobleme. Gyrodym. Symp.* Belin: Springer, 1963. pp. 201–216.
2. *Magnus K.* *Kreisel. Theorie und Anwendungen.* Berlin: Springer, 1971.
3. *Karapetyan A.V.* Qualitative investigation of the dynamics of a top on a plane with friction // *JAMM*, 1991, vol. 55, no. 4, pp. 563–565.
4. *Karapetyan A.V.* Global qualitative analysis of tippe top dynamics // *Mech. Sol.*, 2008, vol. 43, no. 3, pp. 342–348.
5. *Karapetian A.V.* Invariantnye mnozhestva mehanicheskikh sistem s simmetriey // *Problemy ustojchivosti i upravleniia. Sbornik nauchnykh statej, posviashchennyj 80-letiyu akad. V.M. Matrosova.* M.: Fizmatlit, 2013. pp. 184–210. (in Russian)
6. *Zhuravlev V.P., Klimov D.M.* On the dynamics of the thompson top (tippe top) on the plane with real dry friction // *Mech. Sol.*, 2005, vol. 40, no. 6, pp. 117–127.
7. *Zobova A.A.* Various friction models in two-sphere top dynamics // *Mech. Sol.*, 2013, vol. 48, no. 2, pp. 134–139.
8. *Zobova A.A., Karapetyan A.V.* Tippe-top on visco-elastic plane: steady-state motions, generalized Smale diagrams and overturns // *Lobachevskii J. Math.*, 2017, vol. 38, pp. 1007–1013.
9. *Karapetian A.V.* Kachestvennyj analiz dinamiki dissipativnykh sistem s simmetriey na osnove metoda obobshchennykh diagramm Smejla // *V sb.: Sovremennye problemy matematiki i mehaniki.* vol. 2. *Mekhanika. Iss. 2.* M.: MGU, 2009. pp. 192–200. (in Russian)
10. *Karapetian A.V.* Obobshchennye diagrammy Smejla i ih primenenie k zadacham dinamiki sistem s treniem // *Analiticheskaja mehanika, ustojchivost' i upravlenie: Tr. 10-j mezhdunar. Chetaevskoj konf. T. 1. Sekc. 1. Analiticheskaja mehanika.* Kazan, 2012. Kazan: Izd-vo Kazan. Gos. Tehn. un-ta, 2012, pp. 247–258. (in Russian)
11. *Karapetian A.V.* On stability of steady motions of a heavy solid body on an absolutely smooth horizontal plane // *JAMM*, 1981, vol. 45, no. 3, pp. 368–373.
12. *Morgunov B.I., Volosov V.M.* Metod osredneniia v teorii nelinejnykh kolebatel'nykh sistem. M.: MGU, 1971. 508 p. (in Russian)
13. *Bleelman I.I.* *Vibrational Mechanics (Vibracionnaia mehanika).* M.: Fizmatlit, 1994. 400 p. (in Russian)
14. *Nejshtadt A.I.* Persistence of stability loss for dynamical bifurcations. I // *Differ. Eq.*, 1987, vol. 23, pp. 1385–1391.
15. *Nejshtadt A.I.* Persistence of stability loss for dynamical bifurcations. II // *Differ. Eq.*, 1988, vol. 24, pp. 171–176.
16. *Karapetyan A.V.* A two-parameter friction model // *JAMM*, 2009, vol. 73, no. 4, pp. 367–370.
17. *Zhuravlev V.F.* The Model of dry friction in the problem of the rolling of rigid bodies // *JAMM*, 1998, vol. 62, no. 5, pp. 705–710.
18. *Munitsyna M.A.* Spheroid dynamics on a horizontal plane with friction // *Mech. Sol.*, 2018, vol. 53, pp. 60–67.
19. *Munitsyna M.A.* On transients in the dynamics of an ellipsoid of revolution on a plane with friction // *Mech. Sol.*, 2019, vol. 54, no. 4, pp. 545–550.

УДК 531.011:521.1

О СУБГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ В БЛИЗКОЙ К КРУГОВОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ СИТНИКОВА

© 2020 г. А. П. Маркеев^{1,2,*}

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

² Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия

*e-mail: anat-markeev@mail.ru

Поступила в редакцию 03.04.2020 г.

После доработки 22.05.2020 г.

Принята к публикации 25.05.2020 г.

Рассматривается случай ограниченной задачи трех тел (материальных точек), когда массы двух основных притягивающих тел равны. Предполагается, что их орбиты представляют собой эллипсы. Задача о движении третьего тела пренебрежимо малой массы под действием гравитационного притяжения основных тел (ее называют задачей Ситникова) допускает частные решения, для которых третье тело движется вдоль прямой, проходящей через центр масс основных тел и перпендикулярной плоскости их орбит. В статье предполагается, что величина эксцентриситета орбит основных тел мала и исследуется нелинейная задача о существовании периодических движений третьего тела с периодом, кратным периоду обращения основных тел по их орбитам. Решается также вопрос об устойчивости этих периодических движений по Ляпунову при возмущениях, оставляющих траекторию третьего тела прямолинейной, а также при произвольных пространственных возмущениях.

Ключевые слова: ограниченная задача трех тел, субгармонические колебания, устойчивость

DOI: 10.31857/S0032823520040062

Исследование ограниченной задачи трех тел, притягивающихся по закону Ньютона, в случае, когда массы двух основных тел равны, началось более ста лет назад [1, 2]. Основные результаты [1, 2] изложены в монографиях [3, 4]. В последние десятилетия этой задаче уделялось очень большое внимание. Особенно много исследований появилось после публикации статьи [5], в которой рассматривался случай эллиптической ограниченной задачи, и было показано существование таких движений, в которых отклонение тела пренебрежимо малой массы от центра масс основных гравитирующих тел может принимать сколь угодно большие значения, но не имеет предела при неограниченном возрастании времени (осциллирующие движения). К настоящему времени довольно подробно исследована задача о существовании, устойчивости и бифуркациях периодических движений в круговой и эллиптической задачах, проведен анализ возможности хаотизации движения, даны обобщения классической задачи на случай, учитывающий световое давление, а также на случай, когда количество точек конечных масс больше двух. Большая библиография упомянутых исследований содержится в публикациях [6–14].

В статье численно-аналитическими методами исследуется задача о существовании и устойчивости прямолинейных движений третьего тела с периодом, кратным перио-

ду обращения двух основных притягивающих тел по их эллиптическим орбитам малого эксцентриситета.

1. Введение. Рассмотрим три тела (материальные точки) P_1 , P_2 и P_3 , движущиеся под действием гравитационного притяжения по закону Ньютона. Считаем, что точки P_1 и P_2 имеют равные массы, а масса точки P_3 пренебрежимо мала. Движение точек P_1 и P_2 определяется из задачи двух тел (материальных точек). Будем предполагать, что орбита точки P_2 в ее движении относительно P_1 является эллипсом с эксцентриситетом e . Через X, Y, Z обозначим координаты точки P_3 в системе координат $OXYZ$ с началом в центре масс тел P_1 и P_2 и осью OX , направленной по прямой P_1P_2 в сторону точки P_2 , направление кратчайшего поворота оси OX к оси OY совпадает с направлением вращения точки P_2 относительно P_1 . Пусть r – расстояние между точками P_1 и P_2 . Если ввести координаты Нехвилла $x = X/r$, $y = Y/r$, $z = Z/r$ и в качестве независимой переменной принять истинную аномалию v в эллиптическом движении точки P_2 , то дифференциальные уравнения движения точки P_3 можно записать [15, 16] в форме уравнений Лагранжа второго рода с функцией L вида

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + (j\dot{x} - y\dot{x}) + \frac{x^2 + y^2}{2(1 + e \cos v)} - \frac{e \cos v}{2(1 + e \cos v)} z^2 - \frac{1}{1 + e \cos v} \Pi,$$

где точкой обозначено дифференцирование по v , а

$$\Pi = -\frac{1}{\sqrt{1 + 4x + 4(x^2 + y^2 + z^2)}} - \frac{1}{\sqrt{1 - 4x + 4(x^2 + y^2 + z^2)}}$$

Введя обобщенные импульсы

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - y, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + x, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \dot{z}$$

уравнения движения можно записать в форме канонических уравнений с функцией Гамильтона вида

$$\Gamma = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + p_x y - p_y x + \frac{e \cos v}{2(1 + e \cos v)}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{1 + e \cos v} \Pi$$

Уравнения движения допускают решения, в которых $x = y = p_x = p_y = 0$, а изменение переменных z , p_z описывается уравнениями с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2} p_z^2 + \frac{e \cos v}{2(1 + e \cos v)} z^2 - \frac{2}{(1 + e \cos v) \sqrt{1 + 4z^2}} \quad (1.1)$$

Для этих частных решений точка P_3 во все время движения остается на прямой $x = y = 0$, проходящей через центр масс точек P_1 и P_2 и перпендикулярной плоскости, в которых расположены орбиты этих точек.

В случае, когда орбиты точек P_1 и P_2 – окружности ($e = 0$), упомянутые прямолинейные траектории точки P_3 описываются уравнениями

$$\frac{dz}{dv} = p_z, \quad \frac{dp_z}{dv} = -\frac{8z}{(1 + 4z^2)^{3/2}}, \quad (1.2)$$

которым соответствует функция Гамильтона

$$H_0 = \frac{1}{2} p_z^2 - \frac{2}{\sqrt{1 + 4z^2}} \quad (1.3)$$

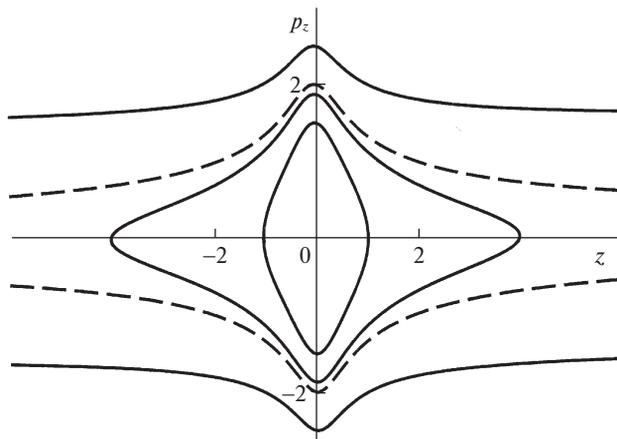


Рис. 1.

Система уравнений (1.2) является интегрируемой и довольно подробно изучена [1–4, 6]. Она допускает интеграл энергии

$$H_0 = h = \text{const} \quad (h \geq -2) \quad (1.4)$$

Фазовый портрет системы показан на рис. 1. При $h = -2$ точка P_3 находится в положении равновесия $z = 0$; при $-2 < h < 0$ — совершает периодические колебания в окрестности этого равновесия. При этом $-z_{\max} < z < z_{\max}$, где z_{\max} — максимальное отклонение точки P_3 от положения равновесия,

$$z_{\max} = \frac{k\sqrt{1-k^2}}{1-2k^2} \quad \left(0 < k < \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad (1.5)$$

Если φ_{\max} — максимальное значение угла между отрезками P_3P_2 и P_1P_2 при колебаниях точки P_3 , то $k = \sin(\varphi_{\max}/2)$. Постоянная h интеграла (1.4) может быть выражена через параметр k :

$$h = -2(1 - 2k^2) \quad (1.6)$$

При $h \geq 0$ движения точки P_3 являются неограниченными. Значению $h = 0$ на рис. 1 отвечают сепаратрисы. Они задаются уравнениями

$$p_z = \pm \frac{2}{\sqrt[4]{1+4z^2}} \quad (1.7)$$

Кривые (1.7) изображены на рис. 1 штриховыми линиями. Они разделяют области неограниченных движений точки P_3 по прямой от области, отвечающей колебательному характеру ее движения.

Колебания точки P_3 удобно описывать в переменных действие-угол I, ω . Переменная I равняется поделенной на 2π площади, заключенной внутри фазовой траектории. Вычисления показывают, что переменная I может быть выражена через параметр k при помощи полных эллиптических интегралов 1-го, 2-го и 3-го родов:

$$I(k) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} [K(k) - 2E(k) + \Pi(2k^2, k)] \quad (1.8)$$

Здесь и далее используются общепринятые обозначения теории эллиптических интегралов и функций [17–19].

Функция $I(k)$ имеет обратную функцию, так как $\partial I/\partial k \neq 0$. Действительно, используя известные [18] правила дифференцирования полных эллиптических интегралов, из выражения (1.8) можно получить

$$\frac{\partial I}{\partial k} = \frac{2\sqrt{2}k}{\pi(1-2k^2)} [2E(k) - K(k) + \Pi(2k^2, k)] \quad (1.9)$$

Но при выполнении ограничений (1.5) на параметр k справедливы неравенства $\Pi(2k^2, k) > 0$ и $2E(k) > K(k)$. Поэтому $\partial I/\partial k > 0$.

Функция (1.3) зависит только от переменной I :

$$H_0 = -2(1-2k^2), \quad (1.10)$$

где $k = k(I)$ – функция, обратная к функции (1.8). Для частоты колебаний имеем выражение

$$\omega = \frac{\partial H_0}{\partial I} = \frac{\partial H_0}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial I} = \frac{2\sqrt{2}\pi(1-2k^2)}{2E(k) - K(k) + \Pi(2k^2, k)} \quad (1.11)$$

В переменных действие-угол I, w уравнения движения (1.2) записываются в виде

$$\frac{dw}{dv} = \omega, \quad \frac{dI}{dv} = 0 \quad (1.12)$$

Для частоты (1.11) справедливо неравенство $0 < \omega < 2\sqrt{2}$. В рассматриваемом интервале $0 < k < \sqrt{2}/2$ функция $\omega(k)$ является монотонно убывающей. Для малых колебаний в окрестности равновесия ($0 < k \ll 1$)

$$\omega = 2\sqrt{2} - \frac{9\sqrt{2}}{2}k^2 + O(k^4),$$

а в окрестности сепаратрис (1.7) (когда $0 < 1 - 2k^2 \ll 1$)

$$\omega = 4(1-2k^2)^{3/2} + O((1-2k^2)^3)$$

График функции $\omega(k)$ представлен на рис. 2.

Для дальнейшего отметим, что функция (1.10) удовлетворяет условию невырожденности $\partial^2 H_0/\partial I^2 \neq 0$. В самом деле, вычисления показывают, что

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} = \frac{\sqrt{2}\omega^3[(1-k^4)K(k) + (2k^4 - 2k^2 - 1)E(k) - 3k^2(1-k^2)\Pi(2k^2, k)]}{16\pi k^2(1-k^2)(1-2k^2)^2} \quad (1.13)$$

В интервале $0 < k < \sqrt{2}/2$ величина $\partial^2 H_0/\partial I^2$ отрицательна и монотонно возрастает. Для малых колебаний справедлива оценка

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} = -\frac{9}{2} + \frac{141}{16}k^2 + O(k^4),$$

а вблизи сепаратрис

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} = -12(1-2k^2)^2 + O((1-2k^2)^{5/2})$$

График функции $\partial^2 H_0/\partial I^2$ показан на рис. 3.

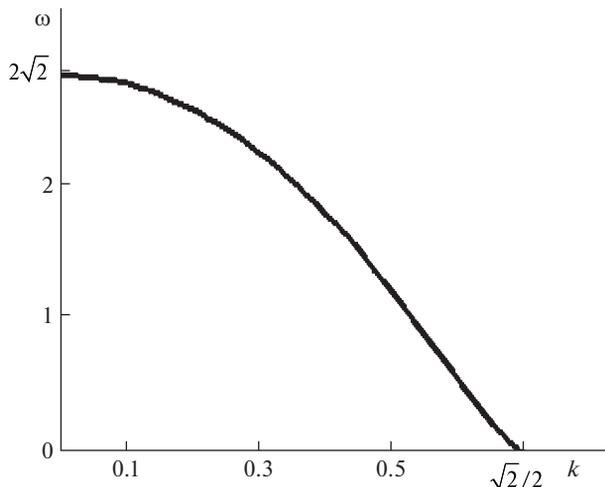


Рис. 2.

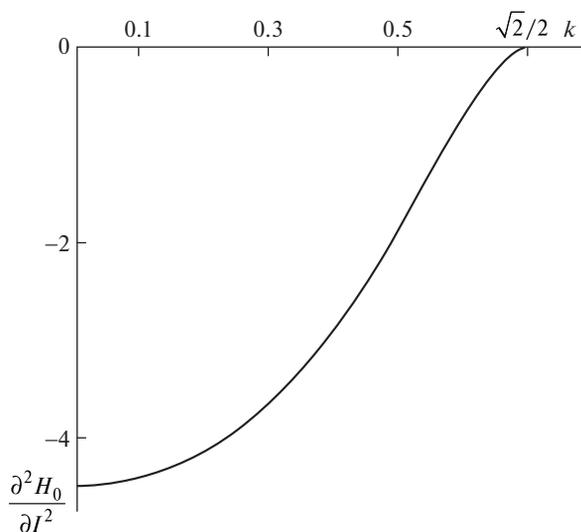


Рис. 3.

Далее рассматривается случай, когда орбиты точек P_1 и P_2 близки к круговым ($0 < e \ll 1$). Решается задача о существовании и устойчивости периодических движений точки P_3 вдоль прямой $x = y = 0$ с периодом, кратным периоду обращения точек P_1 и P_2 по их орбитам. Для периодических орбит, лежащих в малой окрестности сепаратрис, аналогичная задача рассматривалась в [13, 14].

2. Субгармонические колебания. Пусть орбиты точек P_1 и P_2 близки к круговым. При малых значениях e функция Гамильтона (1.1) записывается в виде

$$H = H_0 + eH_1 + O(e^2), \quad (2.1)$$

где H_0 – функция (1.3), а

$$H_1 = G(z) \cos v, \quad G(z) = \frac{1}{2} z^2 + \frac{2}{\sqrt{1+4z^2}} \quad (2.2)$$

Пусть значение $I = I_0$ переменной действие таково, что частота (1.11) прямолинейных колебаний точки P_3 в случае круговых орбит точек P_1 и P_2 будет рациональным числом n/m , где n и m – взаимно простые натуральные числа. Из (1.12) тогда следует, что

$$I = I_0, \quad w = \frac{n}{m} v + w_0, \quad (2.3)$$

т.е. в невозмущенной системе с функцией Гамильтона H_0 колебания точки P_3 будут периодическими с периодом $2\pi m/n$. Следуя [20], рассмотрим задачу о существовании и устойчивости периодических движений в возмущенной системе с функцией Гамильтона (2.1).

2.1. Общая схема исследования. Невозмущенная система является невырожденной (см. (1.13) и рис. 3). Пусть $H_1(I, w, v)$ – функция (2.2), записанная в переменных I, w , отвечающих движению с функцией Гамильтона H_0 . Через $\langle H_1 \rangle$ обозначим ее среднее значение на невозмущенном движении (2.3):

$$\langle H_1 \rangle = \frac{1}{2\pi m} \int_0^{2\pi m} H_1 \left(I_0, \frac{n}{m} v + w_0, v \right) dv \quad (2.4)$$

Величина (2.4) – функция от I_0 и w_0 . Пусть существует w_0 такое, что

$$\frac{\partial \langle H_1 \rangle}{\partial w_0} = 0 \quad (2.5)$$

и при этом

$$\frac{\partial^2 \langle H_1 \rangle}{\partial w_0^2} \neq 0, \quad (2.6)$$

тогда [20] существует $2\pi m$ -периодическое движение полной системы с функцией Гамильтона (2.1), которое аналитично по e и при $e = 0$ переходит в движение (2.3) невозмущенной системы.

Вопрос об устойчивости этого $2\pi m$ -периодического движения решается рассмотрением величин

$$\chi_1 = \frac{\partial^2 \langle H_1 \rangle}{\partial w_0^2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \quad \text{и} \quad \chi_2 = 5 \left(\frac{\partial^3 \langle H_1 \rangle}{\partial w_0^3} \right)^2 - 3 \frac{\partial^2 \langle H_1 \rangle}{\partial w_0^2} \frac{\partial^4 \langle H_1 \rangle}{\partial w_0^4} \quad (2.7)$$

на невозмущенном движении (2.3). Согласно [20], при $\chi_1 < 0$ периодическое движение неустойчиво, а при $\chi_1 > 0$ устойчиво в первом (линейном) приближении. В [21] при помощи КАМ-теории [22] показано, что если $\chi_1 > 0$ и при этом $\chi_2 \neq 0$, то периодическое движение устойчиво по Ляпунову (не только в первом приближении, но и в строгой нелинейной постановке задачи).

2.2. О численном способе построения замены $z, p_z \rightarrow I, w$. Для реализации описанной схемы исследования необходимо предварительно получить каноническое преобразование $z, p_z \rightarrow I, w$, приводящее функцию Гамильтона H_0 к виду (1.10). Следуя [23], укажем как это можно сделать численным способом в общем случае автономной гамильтоновой системы с одной степенью свободы, а не только в нашей конкретной задаче.

Пусть в системе с функцией Гамильтона $H(q, p)$ в некотором интервале изменения постоянной h интеграла энергии $H(q, p) = h$ движение имеет периодический характер и описывается формулами (через t обозначается независимая переменная)

$$q = q^*(t + t_0, h), \quad p = p^*(t + t_0, h) \quad (2.8)$$

Пусть I – переменная действие, а $h(I)$ – функция $H(q, p)$, записанная в переменных действие-угол I, w . Тогда каноническое преобразование $q, p \rightarrow I, w$ может быть записано в виде

$$q = q^*(\psi, h), \quad p = p^*(\psi, h) \quad (\psi = w/\omega, \quad h = h(I), \quad \omega = \partial h/\partial I) \quad (2.9)$$

Для доказательства достаточно убедиться, что скобка Пуассона (q^*, p^*) функций (2.9) по переменным w, I равна единице. Действительно, учитывая тождества $H(q^*, p^*) = h$ и

$$\frac{\partial q^*}{\partial \psi} = \frac{dq^*}{d\psi} = \frac{\partial H(q^*, p^*)}{\partial p^*}, \quad \frac{\partial p^*}{\partial \psi} = \frac{dp^*}{d\psi} = -\frac{\partial H(q^*, p^*)}{\partial q^*}$$

можно показать, что

$$(q^*, p^*) = \frac{\partial q^*}{\partial w} \frac{\partial p^*}{\partial I} - \frac{\partial q^*}{\partial I} \frac{\partial p^*}{\partial w} = \frac{\partial H(q^*, p^*)}{\partial p^*} \frac{\partial p^*}{\partial h} + \frac{\partial H(q^*, p^*)}{\partial q^*} \frac{\partial q^*}{\partial h} = \frac{\partial H(q^*, p^*)}{\partial h} = 1$$

В рассматриваемой задаче, когда H – это функция H_0 из (1.3), замена переменных $z, p_z \rightarrow I, w$ задается получаемыми из (1.2) и (1.12) дифференциальными уравнениями

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\omega} p_z, \quad \frac{dp_z}{dw} = -\frac{8z}{\omega(1 + 4z^2)^{3/2}} \quad (2.10)$$

Будем полагать, что (см. рис. 1)

$$z(0) = 0, \quad p_z(0) = 2\sqrt{2}k \quad (2.11)$$

Функции z и p_z будут соответственно нечетной и четной функциями w . Зависимость этих функций от I проявляется через параметр k , который при численном интегрировании уравнений (2.10), (2.11) считается заданной величиной.

2.3. *О существовании и устойчивости прямолинейных субгармонических колебаний точки P_3 и их устойчивости.* Если в формуле (2.4) перейти к интегрированию по переменной w , определяемой вторым из равенств (2.3), то для среднего значения функции (2.2) получим следующее выражение:

$$\langle H_1 \rangle = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} G(z) \cos\left(\frac{m}{n}w - \frac{m}{n}w_0\right) dw \quad (2.12)$$

Очевидно, что при $n \neq 1$ величина (2.12) тождественно равняется нулю. Следовательно, при анализе субгармонических колебаний, существование которых можно установить уже в первом приближении по e , надо в невозмущенном движении (2.3) положить $n = 1$. Поэтому далее значение частоты невозмущенного движения задается равенством

$$\omega = \frac{1}{m}, \quad (2.13)$$

в котором m – натуральное число ($m = 1, 2, \dots$). Соответствующие этим частотам периоды колебаний точки P_3 и ее максимальное отклонение z_{\max} от положения равновесия $z = 0$ монотонно возрастают с ростом m . При $m = 1$ период колебаний точки P_3 равен периоду обращения точек P_1 и P_2 по их орбитам, а максимальное отклонение точки P_3 от положения равновесия приблизительно равно расстоянию между точками P_1 и P_2

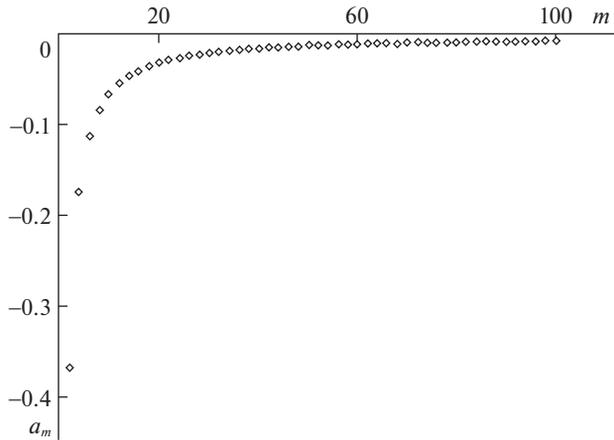


Рис. 4.

($z_{\max} = 1.044$), а при $m = 100$ период колебаний в сто раз больше периода обращения точек P_1 и P_2 , при этом $z_{\max} = 27.115$.

В излагаемом численно-аналитическом исследовании мы ограничимся значениями m , не превосходящими 100.

Заметим, что функция $G(z)$ под знаком интеграла в выражении (2.12) — четная π -периодическая функция w . Положив в (2.12) $n = 1$ и учтя это замечание, находим следующее выражение для среднего значения функции H_1 :

$$\langle H_1 \rangle = \frac{1}{2} a_m \cos mw_0, \quad (2.14)$$

где коэффициент a_m равен нулю, если m — нечетное число, а при m четном

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(z) \cos mwdw \quad (m = 2, 4, \dots) \quad (2.15)$$

Для нахождения коэффициентов (2.15) численным способом рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi_m(w)$, определяемую дифференциальным уравнением

$$\frac{d\varphi_m}{dw} = \frac{1}{\pi} G(z) \cos mw \quad (2.16)$$

с начальным условием $\varphi_m(0) = 0$. Проинтегрировав это уравнение совместно с уравнениями (2.10), (2.11) (в которых $\omega = 1/m$) от $w = 0$ до $w = 2\pi$, получим $a_m = \varphi_m(2\pi)$.

Вычисления показали, что для всех рассмотренных четных m (от $m = 2$ до $m = 100$) коэффициент a_m отрицателен. График функции a_m показан на рис. 4.

Поскольку величина a_m отлична от нуля, то получаемое из (2.5) и (2.14) уравнение для порождающих значений w_0 эквивалентно уравнению $\sin mw_0 = 0$, которое на промежутке $[0, 2\pi)$ имеет $2m$ корней

$$w_0 = \frac{s\pi}{m} \quad (s = 0, 1, \dots, 2m - 1) \quad (2.17)$$

При этих значениях w_0 для левой части соотношения (2.6) получаем выражение

$$\frac{\partial^2 \langle H_1 \rangle}{\partial w_0^2} = (-1)^{s+1} \frac{m^2 a_m}{2}, \quad (2.18)$$

а величины χ_1 и χ_2 из (2.7) будут такими:

$$\chi_1 = (-1)^{s+1} \frac{m^2 a_m}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}, \quad \chi_2 = \frac{3}{4} m^6 a_m^2 \quad (2.19)$$

Так как величины a_m и $\partial^2 H_0 / \partial I^2$ отрицательны, то (см. раздел 2.1) при достаточно малых эксцентриситетах e значения w_0 из (2.17) порождают $2m$ периодических решений $z^*(v)$, $p_z^*(v)$ уравнений с функцией Гамильтона (2.1) периода $2\pi m$ по v . Эти периодические решения соответствуют двум различным $2\pi m$ -периодическим движениям точки P_3 . Одно из них отвечает четным, а другое нечетным значениям s . Первое движение неустойчиво (для него $\chi_1 < 0$), а второе устойчиво по Ляпунову (для него $\chi_1 > 0$, $\chi_2 \neq 0$). Движения, отвечающие оставшимся $(2m - 2)$ -м решениям получаются из этих двух сдвигом начальной фазы w_0 на величину, кратную $2\pi/m$.

2.4. *О неустойчивости прямолинейных субгармонических колебаний по отношению к пространственным возмущениям.* Для исследования устойчивости периодических движений $z^*(v)$, $p_z^*(v)$ точки P_3 вдоль прямой $x = y = 0$ положим

$$x = q_1, \quad y = q_2, \quad z = z^*(v) + q_3, \quad p_x = p_1, \quad p_y = p_2, \quad p_z = p_z^*(v) + p_3$$

и рассмотрим линеаризованные уравнения возмущенного движения. Им соответствует квадратичная относительно q_j, p_j ($j = 1, 2, 3$) функция Гамильтона

$$\Gamma_2 = \Gamma_2^{(2)} + \Gamma_2^{(3)},$$

где $\Gamma_2^{(2)}$ и $\Gamma_2^{(3)}$ — квадратичные формы относительно q_i, p_i ($i = 1, 2$) и q_3, p_3 соответственно. Коэффициенты квадратичных форм $2\pi m$ -периодичны по v .

Возмущенное движение для пространственных переменных q_i, p_i ($i = 1, 2$) отделяется от движений для возмущений, оставляющих точку P_3 на прямолинейной траектории. Устойчивость по отношению к этим возмущениям исследована выше. Поэтому будем рассматривать линейные уравнения возмущенного движения, отвечающие пространственным возмущениям q_i, p_i ($i = 1, 2$).

Характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{X}(v)$ фундаментальных решений системы с функцией Гамильтона $\Gamma_2^{(2)}$, вычисленной при $v = 2\pi m$, как и для всякой линейной гамильтоновой системы с периодическими коэффициентами [24], будет возвратным:

$$\rho^4 - c_1 \rho^3 + c_2 \rho^2 - c_1 \rho + 1 = 0, \quad (2.20)$$

где коэффициент c_1 равен следу матрицы $\mathbf{X}(2\pi m)$, а c_2 — сумма всех ее главных миноров второго порядка. Коэффициенты c_1 и c_2 — аналитические функции эксцентриситета e ($0 < e \ll 1$).

Если уравнение (2.20) имеет хотя бы один корень, модуль которого больше единицы, то исследуемое периодическое движение неустойчиво. Причем не только в линейном приближении, но и в строгом нелинейном смысле [24]. В изучаемой задаче для всех $2\pi m$ -периодических движений ($m = 2, 4, \dots, 100$) реализуется как раз этот случай. Чтобы убедиться в этом, достаточно, ввиду аналитичности коэффициентов c_1 и c_2 по e , проверить, что уравнение (2.20) имеет корень, по модулю больший единицы, при нулевом значении эксцентриситета.

При $e = 0$ имеем такую функцию Гамильтона, отвечающую линеаризованным уравнениям движения:

$$\Gamma_2^{(2)} = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + p_1q_2 - p_2q_1 - \frac{8(1 - 2z^{*2})}{(1 + 4z^{*2})^{5/2}}q_1^2 + \frac{4}{(1 + 4z^{*2})^{3/2}}q_2^2 \quad (2.21)$$

К каноническим уравнениям, отвечающим этой функции Гамильтона, надо еще добавить уравнения (1.2) для $z^*(v)$, $p_z^*(v)$ с начальными условиями $z^*(0) = 0$, $p_z^*(0) = 2\sqrt{2}k$ (где для заданного m величина k находится из соотношения (2.13)).

Задав m ($m = 2, 4, \dots, 100$) и проинтегрировав от $v = 0$ до $v = 2\pi m$ систему уравнений для нахождения $z^*(v)$, $p_z^*(v)$ и элементов матрицы $x_{ij}(v)$ фундаментальных решений, получим величины c_1 и c_2 . Корни уравнения (2.20) выражаются через c_1 и c_2 по формулам

$$\rho_j = \frac{1}{4}(\delta_j + \sqrt{\delta_j^2 - 16}), \quad \rho_{j+2} = \frac{1}{\rho_j}, \quad \delta_j = c_1 + (-1)^{j+1}\sqrt{c_1^2 - 4c_2 + 8} \quad (j = 1, 2) \quad (2.22)$$

Вычисления показали, что для каждого $m = 2, 4, \dots, 100$ среди корней (2.22) есть корень, модуль которого больше единицы. Например, при $m = 2$ (когда $\omega = 1/2$, $k = 0.608$, $h = -0.522$, $c_1 = 18.500$, $c_2 = 78.575$) таких корней даже два:

$$\rho_1 = 12.167, \quad \rho_2 = 6.087, \quad \rho_3 = 0.082, \quad \rho_4 = 0.164$$

При остальных m ($m = 4, \dots, 100$) два из корней (2.22) вещественны и два комплексно сопряженные. При наибольшем из рассмотренных m ($m = 100$, $\omega = 1/100$, $k = 0.701$, $h = -0.037$, $c_1 = 6.218$, $c_2 = -9.683$) корни таковы:

$$\rho_1 = 7.598, \quad \rho_3 = 0.132, \quad \rho_{2,4} = -0.756 \pm i0.655$$

Заключение. Рассмотрены $2\pi m$ -периодические прямолинейные движения точки P_3 , которые обнаруживаются уже при анализе первого приближения по e . Оказалось, что для этих движений m – четное число. Рассмотрение четных значений m от $m = 2$ до $m = 100$ показало, что для возмущений, не уведящих точку P_3 с прямой, m движений устойчивы по Ляпунову и m движений неустойчивы. Если же возмущения имеют общий пространственный характер, то все m пар $2\pi m$ -периодических движений ($m = 2, 4, \dots, 100$) неустойчивы.

Для решения задачи о существовании субгармонических колебаний периода $2\pi m$ ($m = 1, 2, \dots$) можно использовать иные подходы, отличные от примененных выше. Задача о существовании таких движений, обладающих теми или иными свойствами симметрии, исследовалась ранее [8] при помощи специального алгоритма, разработанного для обратимых систем. Существование симметричных субгармонических колебаний для сколь угодно больших m [11] устанавливается при помощи анализа функции Мельникова [25].

Многие вопросы о субгармонических колебаниях точки P_3 требуют дополнительного исследования. Например, анализ более высоких приближений по e позволил бы рассмотреть другие типы субгармонических движений. Несомненный интерес представляет также задача о численном продолжении субгармонических колебаний на значения e , не являющиеся малыми [8].

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00116) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете) и в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pavanini G.* Sorpa una nuova categoria di soluzioni periodiche nel problema dei tre corpi // *Annali di Matematica*. 1907. Serie 3. T. 13. P. 179–202.
2. *MacMillan W.D.* An integrable case in the restricted problem of three bodies // *Astron J.* 1911. V. 27. P. 11–13.
3. *Stumpff K.* *Himmelsmechanik*. Band 2. Berlin: VEB, 1965. S. 73–79.
4. *Себехей В.* Теория орбит. Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1982. 657 с.
5. *Ситников К.* Существование осциллирующих движений в задаче трех тел // *Докл. АН СССР*. 1960. Т. 133. № 2. С. 303–306.
6. *Belbruno E., Llibre J., Ollé M.* On the families of periodic orbits which bifurcate from the circular Sitnikov motions // *Celest. Mech. & Dyn. Astron.* 1994. V. 60. Iss. 1. P. 99–129.
7. *Dvorak R., Vrabc F., Wodnar K.* The Sitnikov problem: a short review // *Sistema Solari e Sistema Stellari-Perturbative-Dinamica del Volo Spaziale*. Eds. *A. Celletti and E. Rerozzi*. Universita' di L'Aquila, 1993. P. 16–22.
8. *Тхай В.Н.* Периодические движения обратимой механической системы второго порядка, приложение к задаче Ситникова // *ПММ*. 2006. Т. 70. Вып. 5. С. 813–834.
9. *Bountis T., Papadakis K.E.* The stability of vertical motion in the N-body circular Sitnikov problem // *Celest. Mech. & Dyn. Astron.* 2009. V. 104. Iss. 1–2. P. 205–225.
10. *Sidorenko V.V.* On the circular Sitnikov problem: the alternation of stability and instability of vertical motions // *Celest. Mech. & Dyn. Astron.* 2011. V. 109. Iss. 4. P. 367–384.
11. *Hagel J.* A new method to construct integrable approximations to nearly integrable system in celestial mechanics: application to the Sitnikov problem // *Celest. Mech. & Dyn. Astron.* 2015. V. 122. Iss. 2. P. 101–116.
12. *Красильников П.С.* Прикладные методы исследования нелинейных колебаний. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015. 528 с.
13. *Мозер Ю.* Устойчивые и хаотические движения в динамических системах: в приложении к небесной механике. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2010. 184 с.
14. *Robinson C.* Uniform subharmonic orbits for Sitnikov problem // *Discrete & Contin. Dyn. Syst., Ser. S*. 2008. V. 1. № 4. P. 647–652.
15. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1978. 456 с.
16. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
17. *Журавский А.М.* Справочник по эллиптическим функциям. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1941. 235 с.
18. *Byrd P.F., Friedman M.D.* *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists*. Berlin: Springer, 1954. 355 p.
19. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
20. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. В кн.: *Избранные труды*. Т. 1. М: Наука, 1971. 771 с.
21. *Маркеев А.П., Чуркина Н.И.* О периодических решениях Пуанкаре канонической системы с одной степенью свободы // *Письма в астрон. ж.* 1985. Т. 11. № 8. С. 634–639.
22. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 416 с.
23. *Маркеев А.П.* О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы при резонансе 2:1 // *ПММ*. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 757–769.
24. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
25. *Мельников В.К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // *Тр. Моск. мат. о-ва*. 1963. Т. 12. С. 3–52.

On Subharmonic Oscillations in the Near-Circular Elliptic Sitnikov's Problem

A. P. Markeev^{a,b,#}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

^b *Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: anat-markeev@mail.ru*

The restricted three-body problem (material points) is considered when the masses of the two main attracting bodies are equal. Their orbits are assumed to be ellipses. The problem of the motion of the third body of negligible mass under the influence of gravitational attraction of the main bodies (the Sitnikov's problem) allows particular solutions for which the third body moves along a straight line passing through the center of mass of the main bodies and perpendicular to the plane of their orbits. For the case when the eccentricity of the orbits of the main bodies is small, the nonlinear problem of the existence of periodic motions of the third body with a period multiple of the period of revolution of the main bodies in their orbits is investigated. The problem of stability (in Lyapunov's sense) of these periodic motions under perturbations keeping the trajectory of the third body rectilinear as well as under arbitrary spatial perturbations is also solved.

Keywords: restricted three-body problem, subharmonic oscillations, stability

REFERENCES

1. *Pavanini G.* Sorpa una nuova categoria di soluzioni periodiche nel problema dei tre corpi // *Annali di Matematica*. Ser. 3, 1907, vol. 13, pp. 179–202.
2. *MacMillan W.D.* An integrable case in the restricted problem of three bodies // *Astron J.*, 1911, vol. 27, pp. 11–13.
3. *Stumpff K.* *Himmelsmechanik*. Band 2. Berlin: VEB, 1965. ss. 73–79.
4. *Szebehely V.* *Theory of Orbits. The Restricted Problem of Three Bodies*. N.Y.: Academ. Press, 1967. 684 p.
5. *Sitnikov K.* Existence of oscillating motions for the three-body problem // *Dokl. Akad. Nauk. USSR*, 1960, vol. 133, no. 2, pp. 303–306. (in Russian)
6. *Belbruno E., Llibre J., Olle' M.* On the families of periodic orbits which bifurcate from the circular Sitnikov motions // *Celest. Mech. & Dyn. Astron.*, 1994, vol. 60, no. 1, pp. 99–129.
7. *Dvorak R., Vrabc F., Wodnar K.* The Sitnikov problem: a short review // *Sistema Solari e Sistema Stellari-Perturbative-Dinamica del Volo Spaziale* / Ed. by *Celletti A., Rerozzi E.* *Universita' di L'Aquila*, 1993, pp. 16–22.
8. *Tkhai V.N.* Periodic motions of a reversible second-order mechanical system: Application to the Sitnikov problem // *JAMM*, 2006, vol. 70, no. 5, pp. 734–753.
9. *Bountis T., Papadakis K.E.* The stability of vertical motion in the N-body circular Sitnikov problem // *Celest. Mech. & Dyn. Astron.*, 2009, vol. 104, no. 1–2, pp. 205–225.
10. *Sidorenko V.V.* On the circular Sitnikov problem: the alternation of stability and instability of vertical motions // *Celest. Mech. & Dyn. Astron.*, 2011, vol. 109, no. 4, pp. 367–384.
11. *Hagel J.* A new method to construct integrable approximations to nearly integrable system in celestial mechanics: application to the Sitnikov problem // *Celest. Mech. & Dyn. Astron.*, 2015, vol. 122, no. 2, pp. 101–116.
12. *Krasil'nikov P.S.* *Applied Methods for Studying of Nonlinear Oscillations*. (Prikladnye metody issledovaniya nelinejnyh kolebanij) Moscow; Izhevsk: R&C Dynamics; Inst. Comput. Sci., 2015. 528 p. (in Russian)
13. *Moser J.* *Stable and random motions in dynamical systems* // *Ann. Math. Stud.* no. 77. Princeton: Univ. Press, 1973. 199 p.
14. *Robinson C.* Uniform subharmonic orbits for Sitnikov problem // *Discrete & Contin. Dyn. Syst.* Ser. S, 2008, vol. 1, no. 4, pp. 647–652.
15. *Duboshin G.N.* *Celestial Mechanics. Analytical and Qualitative Methods*. (Nebesnaya mekhanika. Analiticheskie i kachestvennye metody) Moscow: Nauka, 1978. 456 p. (in Russian)

16. *Markeev A.P.* Libration Points in Celestial Mechanics and Cosmodynamics. (Tochki libratsii v nebesnoi mekhanike i kosmodinamike) Moscow: Nauka, 1978, 312 p. (in Russian)
17. *Zhuravskii A.M.* Reference Book in Elliptic Functions. (Spravochnik po ellipticheskim funktsiyam) Moscow; Leningrad: AN SSSR, 1941. 235 p. (in Russian)
18. *Byrd P.F., Friedman M.D.* Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists. Berlin: Springer, 1954. 355 p.
19. *Gradstein I.S., Ryzhik I.M.* Tables of Integrals, Sums, Series and Products. (Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy) Moscow: Nauka, 1971. 1108 p. (in Russian)
20. *Poincare' H.* Les me'thodes nouvelles de la me'canique ce'leste. T. 1. Paris: Gauthier –Villars, 1892. 385 p.
21. *Markeev A.P., Churkina T.E.* On periodic Poincare solutions of a canonical system with one degree of freedom // *Astron. Lett.*, 1985, vol. 11, no. 8, pp. 634–639. (in Russian)
22. *Arnol'd V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I.* Mathematical aspects of classical and celestial mechanics. Encyclopedia Math. Sci. vol. 3. Berlin: Springer, 2006. 505 p.
23. *Markeyev A.P.* Non-linear oscillations of a Hamiltonian system with 2:1 resonance // *JAMM*, 1999, vol. 63, no. 5, pp. 715–726.
24. *Malkin I.G.* Theory of Stability of Motion. Washington D.C.: Office of Technical Information, 1952. 456 p.
25. *Mel'nikov V.K.* On the stability of a center for time-periodic perturbations // *Trans. Mos. Math. Soc.*, 1963, vol. 12, no. 1, pp. 3–52.

УДК 532.5

**УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННОГО ЦИЛИНДРА
В ЦИРКУЛЯЦИОННОМ ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ**© 2020 г. А. Г. Петров^{1,*}, М. А. Юдин^{2,**}¹ *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*² *Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского, Москва, Россия***e-mail: petrovipmech@gmail.ru****e-mail: mikleudin@yandex.com*

Поступила в редакцию 02.03.2020 г.

После доработки 21.04.2020 г.

Принята к публикации 06.05.2020 г.

Рассматривается система, состоящая из двух цилиндров (внутреннего упруго закрепленного и внешнего жестко закрепленного) и циркуляционного потока вязкой несжимаемой жидкости между ними. В положении равновесия цилиндры расположены коаксиально и внутренний вращается с угловой скоростью Ω , которая поддерживается постоянной. Получено выражение силы, действующей на внутренний цилиндр со стороны жидкости, в приближении больших чисел Рейнольдса при малом отклонении внутреннего цилиндра от положения равновесия. Показано, что сила имеет наследственный характер и зависит от всей траектории движения. Исследуется устойчивость положения внутреннего упруго закрепленного цилиндра в линейном приближении с учетом наследственной силы, действующей на внутренний цилиндр со стороны жидкости.

Ключевые слова: неустойчивость, течение в ограниченной области, вязкая жидкость

DOI: 10.31857/S0032823520040098

Изучается система, состоящая из двух цилиндров, вставленных один в другой, и вязкой несжимаемой жидкости между ними. Внешний цилиндр покоится, внутренний цилиндр вращается относительно своей оси с угловой скоростью Ω , которая поддерживается постоянной. Ось внутреннего цилиндра упруго закреплена и может совершать колебания относительно положения равновесия, в котором цилиндры расположены коаксиально (рис. 1).

Задача об устойчивости быстро вращающегося ротора в кожухе впервые была поставлена П.Л. Капицей [1]. Было рассмотрено влияние вязкости на устойчивость ротора и показано, что трение об окружающую среду приводит к появлению неустойчивости в системе. При этом была отмечена чрезвычайная сложность определения силы, действующей на цилиндр со стороны жидкости, из уравнений гидродинамики и использовалась оценка, полученная полуэмпирическим путем. Полученные оценки для силы [1], действующей на цилиндр со стороны вязкой жидкости, используются также в более современных работах [2] для анализа способов повышения устойчивости таких систем. Имеется ряд зарубежных публикаций, посвященных влиянию потока жидкости на устойчивость быстро вращающихся роторов, в которых используются введенные несколько иные полуэмпирические оценки для сил [3], действующих на ротор.

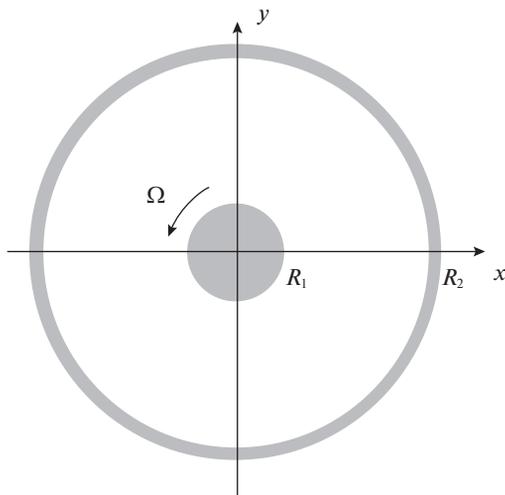


Рис. 1. Рассматриваемая система.

Анализ устойчивости может быть проведен в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости. Впервые такое исследование было выполнено для течения произвольной завихренностью [4]. Аналитически найдена сила, действующая на внутренний цилиндр, при малом отклонении осей цилиндров. С учетом выражения для силы определяются условия устойчивости в линейном приближении. Выделено несколько типов неустойчивости в зависимости от завихренности течения. Сила, действующая на внутренний цилиндр, найдена [5] для течения идеальной жидкости с постоянной завихренностью в нелинейной постановке.

Ниже устойчивость точной краевой задачи впервые проанализирована в рамках модели вязкой несжимаемой жидкости. Для этого вычисляется сила, действующая со стороны жидкости на цилиндр, найденная в приближении больших чисел Рейнольдса и предположении о ламинарности течения между цилиндрами. Задача устойчивости центральной оси ротора также решена с учетом найденного выражения для силы.

При вращении внутреннего цилиндра с постоянной угловой скоростью Ω образуется известное течение Куэтта с постоянной завихренностью [6]. Течение Куэтта будет рассматриваться как порождающее течение, которое возмущается при смещении оси внутреннего цилиндра. Решение для возмущенного течения строится в приближении больших чисел Рейнольдса.

В настоящей работе получено выражение для силы, действующей на цилиндр со стороны вязкой жидкости, и проанализировано влияние этой силы на устойчивость положения цилиндра.

1. Основные уравнения. В работе П.Л. Капицы [1] рассматривается следующая система уравнений

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + H\dot{x} + Kx &= F_x \\ M\ddot{y} + H\dot{y} + Ky &= F_y, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где M – масса внутреннего цилиндра, $H > 0$ – демпфирующий фактор, $K > 0$ – коэффициент упругости, F_x и F_y – проекции на оси Ox и Oy силы, действующей на цилиндр со стороны жидкости, (x, y) – координаты центра внутреннего цилиндра. Вве-

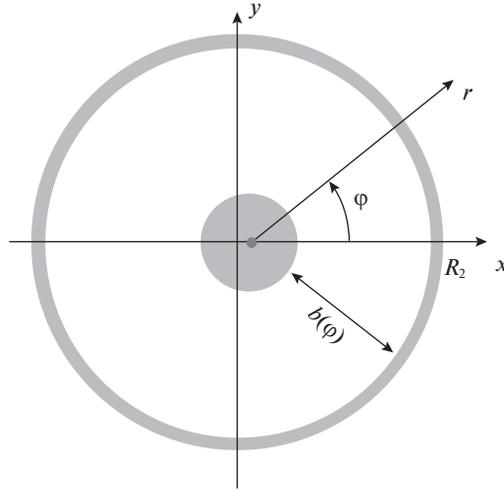


Рис. 2. Сдвинутый цилиндр.

дем обозначения $h_1 = \frac{H}{M}$, $\Omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$ – частота собственных колебаний внутреннего цилиндра, $z_0 = x + iy$ – комплексная координата, $f = \frac{F_x}{M} + i \frac{F_y}{M}$ – комплексная сила и перепишем систему (1.1) в комплексном виде

$$\ddot{z}_0 + h_1 \dot{z}_0 + \Omega_0^2 z_0 = f \quad (1.2)$$

Далее рассматриваются три варианта определения выражения для силы F , действующей на цилиндр со стороны жидкости: (I) полуэмпирическая сила [1], (II) сила в приближении невязкой несжимаемой жидкости и (III) сила в приближении вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса. Для каждого случая задача устойчивости решается в линейном приближении.

2. Решение П.Л. Капицы. Рассмотрим полученные [1] оценки силы, действующей на смещенный внутренний цилиндр, который вращается с угловой скоростью Ω . Пусть внутренний цилиндр смещен на некоторую величину x_0 вдоль оси Ox (рис. 2). Тогда зазор между двумя цилиндрами можно записать как

$$b(\varphi) = (R_2 - R_1) - x_0 \cos \varphi,$$

где R_2 и R_1 – радиусы внешнего и внутреннего цилиндра, соответственно.

Средняя скорость газа между цилиндрами в положении равновесия предполагается равной половине периферической скорости внутреннего цилиндра $\Omega R_1/2$. При смещении внутреннего цилиндра расход считается неизменным. Откуда найдена средняя скорость в зависимости от угла φ [1]

$$v(\varphi) = \frac{\Omega R_1}{2} \frac{(R_2 - R_1)}{R_2 - R_1 - x_0 \cos \varphi}$$

Сила трения, действующая на цилиндр, считается пропорциональной квадрату относительной скорости, плотности окружающей среды ρ и постоянной трения k . Тогда в проекции на ось Oy получим

$$F_y = k\rho R_1 \int_0^{2\pi} (R_1 \Omega - v(\varphi))^2 \cos \varphi d\varphi = -N x_0, \quad N = \frac{\pi k \rho}{2} \frac{R_1^3 \Omega^2}{R_2 - R_1}$$

Вводя обозначение $n = \frac{N}{M}$ и переходя к комплексным переменным, получим уравнение

$$\ddot{z}_0 + h_1 \dot{z}_0 + \Omega_0^2 z_0 = -inz_0 \quad (2.1)$$

Как видно из проведенных рассуждений, сила связана исключительно с трением среды о цилиндр. При этом составляющая силы, связанная с неравномерным распределением давления на цилиндре, считается в данных оценках пренебрежимо малой.

Перепишем полученное условие [1] устойчивости для уравнения (2.1) $h_1 \geq \frac{n}{\rho_1}$ в размерных величинах

$$H \geq \frac{\kappa \rho R_1^2}{2} \frac{R_1}{R_2 - R_1} \frac{\Omega^2}{\Omega_0} \quad (2.2)$$

Найденные полуэмпирические оценки для силы [1], действующей на цилиндр со стороны вязкой жидкости, используются в более современных работах [2] для анализа способов повышения устойчивости таких систем. В настоящей работе сила получена из решения уравнений для вязкого ламинарного потока жидкости в приближении больших чисел Рейнольдса.

3. Решение в невязкой жидкости. Рассмотрим сначала невязкое течение несжимаемой жидкости между двумя цилиндрами. Возмущение поля скорости будем искать в виде разложения по малому смещению центра внутреннего цилиндра. В качестве среднего течения используем известное течение Куэтта с функцией тока $\Psi_0(r) = \Omega \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(-\ln \frac{r}{R_2} + \frac{r^2}{2R_2^2} \right)$, которое точно удовлетворяет как уравнениям Эйлера идеальной жидкости, так и уравнениям Навье–Стокса вязкой жидкости. В полярной системе координат r, φ (рис. 1) радиальная v_{0r} и трансверсальная $v_{0\varphi}$ компоненты скорости выражаются через функцию тока Ψ_0 :

$$v_{0r} = \frac{\partial \Psi_0}{r \partial \varphi} = 0, \quad v_{0\varphi} = -\frac{\partial \Psi_0}{\partial r} = \Omega \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{R_2^2} \right) \quad (3.1)$$

Это течение складывается из потенциального течения точечного вихря с угловой компонентой скорости

$$v_{\alpha 1} = \frac{\Gamma}{2\pi r} = \Omega \frac{R_1^2 R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2) r} \quad (3.2)$$

и течения с постоянным вихрем

$$\omega_0 = -\Delta \Psi_0 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Psi_0 = -\Omega \frac{2R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (3.3)$$

Пусть внутренний цилиндр сдвинут вдоль оси Ox на величину x_0 , и имеет вектор скорости (\dot{x}_0, \dot{y}_0) (см. рис. 2). Покажем, что функция тока

$$\Psi_{id} = \Psi_0(r) + \Psi_1(r, \varphi), \quad \Psi_1(r, \varphi) = \frac{R_1^2 (R_2^2 - r^2)}{(R_2^2 - R_1^2) r} (\dot{x}_0 \sin \varphi - \dot{y}_0 \cos \varphi) \quad (3.4)$$

определяет поле скорости возмущенного течения $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$. Здесь r, φ сдвинутые полярные координаты, изображенные на рис. 2.

Действительно, поле возмущения скорости течения с функцией тока $\Psi_1(r, \varphi)$ потенциально и в согласии с теоремами о сохранении циркуляции и вихря [6] не изменяет циркуляцию Γ и вихрь ω_0 .

Нормальная скорость на границе внутреннего смещенного цилиндра $r = R_1$ и внешнего цилиндра $r = R_2 - x_0 \cos \varphi + O(x_0^2)$ в линейном по x_0 приближении имеют вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{id}}{\partial \varphi} \Big|_{r=R_1} = \dot{x}_0 \cos \varphi + \dot{y}_0 \sin \varphi, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{id}}{\partial \varphi} \Big|_{r=R_2 - x_0 \cos \varphi} = 0$$

Таким образом, в линейном по величинам $x_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$ приближении поле скорости удовлетворяет условиям непротекания на границах цилиндров, что и требовалось показать.

При этом возмущение касательной скорости на границе внутреннего цилиндра равно

$$v_{1\varphi} = - \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} (\dot{x}_0 \sin \varphi - \dot{y}_0 \cos \varphi) \quad (3.5)$$

и условию прилипания не удовлетворяет (что не противоречит модели идеальной жидкости).

Сила, действующая на смещенный цилиндр, определяется [5] из уравнений Лагранжа всей системы

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} - \frac{\partial L}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_0} - \frac{\partial L}{\partial y_0} = 0, \quad L = \frac{1}{2} M (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \Lambda,$$

где Λ — функция Лагранжа жидкости в слое между цилиндрами, которая может быть выражена через поле скоростей [7]. Уравнения Лагранжа можно записать в виде

$$M\ddot{x}_0 = F_x, \quad M\ddot{y}_0 = F_y,$$

где компоненты силы выражаются через функцию Лагранжа жидкости Λ :

$$F_x = - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{x}_0} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_0}, \quad F_y = - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{y}_0} + \frac{\partial \Lambda}{\partial y_0} \quad (3.6)$$

Функция Λ была найдена в нелинейном приближении для произвольного течения Куэтта [5]. В линейном приближении она имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda}{\rho} = & \frac{1}{2(R_2^2 - R_1^2)} \left\{ \left[\pi R_1^2 (R_1^2 + R_2^2) + \frac{1}{4\pi} (\Gamma + \pi \omega_0 R_1^2) (\Gamma + \pi \omega_0 R_2^2) \right] (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \right. \\ & \left. + \left[\Gamma (R_1^2 + R_2^2) + 2\pi R_1^2 R_2^2 \omega_0 \right] (\dot{x}_0 y_0 - \dot{y}_0 x_0) \right\} \end{aligned}$$

Подставляя выражения (3.2) и (3.3) в функцию Лагранжа течения, получим

$$\Lambda = \frac{\rho \pi R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left[\frac{1}{2} (R_1^2 + R_2^2) (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \Omega R_2^2 (\dot{x}_0 y_0 - x_0 \dot{y}_0) \right]$$

Из уравнений (3.6) находим силу, выражение для которой в комплексной форме имеет вид:

$$F = F_x + iF_y = \frac{\rho \pi R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left[- (R_1^2 + R_2^2) \ddot{z}_0 + 2i\Omega R_2^2 \dot{z}_0 \right] \quad (3.7)$$

Подставляя выражение для силы (3.7) в уравнение (1.2), получим

$$\ddot{z}_0 + h_1 \dot{z}_0 + \Omega_0^2 z = \gamma \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left[-\ddot{z}_0 + 2i \dot{z}_0 \frac{\Omega R_2^2}{R_2^2 + R_1^2} \right], \quad (3.8)$$

где параметр $\gamma = \frac{\rho \pi R_1^2}{M}$ — отношение плотности жидкости к плотности цилиндра. Получим уравнение для нахождения собственных частот колебаний, подставляя решение $z_0(t) \sim \exp(\lambda t)$ в уравнение (3.8)

$$\lambda^2 + h_1 \lambda + \Omega_0^2 = \gamma \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left[-\lambda^2 + 2i \lambda \frac{\Omega R_2^2}{(R_2^2 + R_1^2)} \right]$$

Даже в отсутствии демпфирования ($h_1 = 0$) характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни, и собственные колебания оказываются нейтрально устойчивыми. Таким образом, движение вращающегося кругового цилиндра в кольцевом потоке идеальной жидкости с постоянной завихренностью устойчиво при $h_1 \geq 0$. Это условие согласуется с результатами [4, 5]. Перейдем к исследованию задачи устойчивости в вязкой жидкости.

4. Уравнения движения вязкой жидкости. В вязкой жидкости функцию тока ищем в виде $\Psi = \Psi_{\text{id}} + \Psi'$, где Ψ_{id} определена выражениями (3.4). Вихрь течения вязкой жидкости $\omega_{\text{full}} = \omega_0 + \omega'$ складывается из вихрей ω_0 и ω' течений с функциями тока Ψ_{id} и Ψ' . Постоянный вихрь ω_0 определен выражением (3.3), а вязкое возмущение ω' выражается через возмущение функции тока

$$\omega' = -\Delta \Psi' = - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \Psi' \quad (4.1)$$

и удовлетворяет уравнению переноса вихря

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} + v_r \frac{\partial \omega'}{\partial r} + v_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \omega'}{\partial \varphi} = \nu \Delta \omega', \quad v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial (\Psi_{\text{id}} + \Psi')}{\partial \varphi}, \quad v_\varphi = - \frac{\partial (\Psi_{\text{id}} + \Psi')}{\partial r} \quad (4.2)$$

На границах цилиндров компоненты скорости должны удовлетворять условиям прилипания.

5. Приближение пограничного слоя. При малых смещениях цилиндра в приближении больших чисел Рейнольдса $\text{Re} = \frac{R_1^2 \Omega}{\nu} \gg 1$ течение разбивается на три области: область пограничного слоя около внутреннего цилиндра, область пограничного слоя около внешнего цилиндра и область между ними. Во внутренней области вязкими эффектами можно пренебречь, поле скоростей близко к течению в идеальной жидкости, изученному ранее [4, 5]. Вязкость следует учитывать только в пограничном слое внутреннего цилиндра.

В рассматриваемом приближении больших чисел Рейнольдса на границе внутреннего цилиндра образуется пограничный слой толщины порядка $\delta = \frac{R_1}{\sqrt{\text{Re}}} = \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}}$. Про-

ведем оценки величин и производных входящих в уравнения (4.1), (4.2): $\frac{\partial}{\partial r} \sim \frac{1}{\delta}$, $\frac{\partial^2}{\partial r^2} \sim \frac{1}{\delta^2}$, $\Delta \sim \frac{\partial^2}{\partial r^2}$, $v_r \frac{\partial \omega'}{\partial r} \sim \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2} \frac{\omega'}{\delta}$, $v_\varphi \frac{\partial \omega'}{\partial \varphi} \sim \Omega \omega'$. Вторым слагаемым в уравнении (4.2)

можно пренебречь при условии $\frac{\sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}}{\delta} \ll \Omega$. Это условие дает следующее ограничение на скорость оси внутреннего цилиндра

$$\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 \ll v\Omega \quad (5.1)$$

В пограничном слое около внутреннего цилиндра возникает дополнительное вязкое течение с компонентами скорости v'_φ , v'_r . Компонента скорости v'_φ на границе внутреннего цилиндра удовлетворяет условию прилипания, которое в соответствии с (3.5) имеет вид

$$v'_\varphi \Big|_{r'=0} = -v_{1\varphi} \Big|_{r'=0} = -\frac{R_1^2 + R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} (\dot{x}_0 \sin \varphi - \dot{y}_0 \cos \varphi), \quad (5.2)$$

а вне пограничного слоя равна нулю. С учетом граничных условий (5.2) имеем оценку $\omega' \sim \frac{v_{1\varphi} \Big|_{r'=0}}{\delta} = \frac{\sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}}{\delta}$, а ограничение (5.1) приводит к условию $\omega' \ll \sqrt{v\Omega}/\delta = \sqrt{v\Omega}/\sqrt{v/\Omega} = \Omega$. Из проведенных оценок следует, что вязкость создает вихрь существенно меньший по сравнению с вихрем в течении Куэтта. Таким образом, при условии (5.1) уравнения пограничного слоя (4.1), (4.2) примут вид [9]

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \omega'}{\partial \varphi} = v \frac{\partial^2 \omega'}{\partial r'^2}, \quad \omega' = -\frac{\partial^2 \Psi'}{\partial r'^2} \quad (5.3)$$

где введена внутренняя переменная $r' = r - R_1$.

В отличие от традиционного уравнения Прандтля уравнение линейное.

В начальный момент возмущение завихренности положим равным нулю

$$\omega'(0, r, \varphi) = 0 \quad (5.4)$$

Возмущения вне пограничного слоя так же отсутствуют

$$\omega'(t, \infty, \varphi) = 0 \quad (5.5)$$

Запишем граничные условия прилипания на внутреннем цилиндре

$$-\frac{\partial \Psi'}{\partial r'} \Big|_{r'=0} = v'_\varphi \Big|_{r'=0} = -v_{1\varphi} \Big|_{r'=0} = -\frac{R_1^2 + R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} (\dot{x}_0 \sin \varphi - \dot{y}_0 \cos \varphi), \quad (5.6)$$

где $v_{1\varphi} \Big|_{r'=0}$ – тангенциальная компонента скорости на границе цилиндра в невязком приближении (3.5). Условие непротекания удовлетворяется невязким приближением.

Интегрируя второе уравнение в (5.3), получим $\frac{\partial \Psi'}{\partial r'} = \int_{r'}^{\infty} \omega' dr'$. Подставляя полученное выражение в граничные условия (5.6), найдем, что

$$\int_0^{\infty} \omega' dr' = \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} (\dot{x}_0 \sin \varphi - \dot{y}_0 \cos \varphi) = \text{Re} \left[\frac{R_1^2 + R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} i z_0 e^{-i\varphi} \right] \quad (5.7)$$

Уравнение (5.3), дополненное начальным условием (5.4) и граничными условиями (5.5) и (5.7), образует краевую задачу, решение которой будем искать в виде $\omega' = \text{Re}[e^{-i(\varphi + \Omega t)} W(t, r')]$. Тогда для функции $W(t, r')$ краевая задача переписывается в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 W}{\partial r'^2}, \quad W(0, r') = 0, \quad W(t, 0) = W_0(t), \quad W(t, \infty) = 0, \quad (5.8)$$

где функция $W_0(t)$ может быть найдена из граничного условия (5.7). Решение задачи (5.8) можно выписать в виде

$$W(t, r') = \frac{r'}{2\sqrt{\nu\pi}} \int_0^t \exp\left(-\frac{r'^2}{4\nu(t-t')}\right) \frac{W_0(t') dt'}{(t-t')^{3/2}}$$

Преобразуем интеграл

$$\int_0^\infty W(t, r') dr' = \int_0^\infty \int_0^t \exp\left(-\frac{r'^2}{4\nu(t-t')}\right) \frac{W_0(t') dt'}{(t-t')^{3/2}} \frac{r'}{2\sqrt{\nu\pi}} dr' = \frac{\sqrt{\nu}}{2} \int_0^t \frac{W_0(t')}{\sqrt{t-t'}} dt'$$

Подставляя полученное выражение в граничное условие (5.7), получим для функции $W_0(t)$ интегральное уравнение Абеля

$$\int_0^t \frac{W_0(t') dt'}{\sqrt{t-t'}} = k \dot{z}_0(t) \exp(i\Omega t), \quad k = \frac{2}{\sqrt{\nu}} \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} i, \quad (5.9)$$

где $\dot{z}_0 = \dot{x}_0 + i\dot{y}_0$.

Решение интегрального уравнения (5.9) имеет вид [9]

$$W_0(t) = \frac{2i}{\pi\sqrt{\nu}} \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\dot{z}_0(t') \exp(i\Omega t')}{\sqrt{t-t'}} dt' \quad (5.10)$$

6. Сила, действующая на внутренний цилиндр. Для того, чтобы проанализировать устойчивость положения цилиндра в циркуляционном потоке вязкой жидкости необходимо вычислить силу, действующую на него. Как известно [8], давление сохраняется в пограничном слое. Силу, действующую на цилиндр, разделим на две составляющие. Первая компонента, невязкая, связанная с интегралом давления по поверхности смещенного цилиндра, была рассмотрена ранее [4, 5]. Второй член, вязкий, связан с трением цилиндра об окружающую среду и может быть найден из решения (5.10).

Касательное напряжение на границе внутреннего цилиндра может быть записано как

$$\tau = i\mu e^{i\varphi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r'} \Big|_{r'=0} = i\mu e^{i\varphi} \omega(t, 0) = i\mu e^{i\varphi} \operatorname{Re} \left[e^{-i(\varphi + \Omega t)} W_0(t) \right]$$

Интегрируя касательное напряжение по поверхности внутреннего цилиндра, получим силу [9], действующую со стороны вязкой жидкости

$$F_v = -2\rho\sqrt{\nu} R_1 e^{-i\Omega t} \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\dot{z}_0(t') e^{i\Omega t'}}{\sqrt{t-t'}} dt' \quad (6.1)$$

Заметим, что в [9] знак “-” опущен.

Вязкая сила (6.1) является аналогом наследственной силы Бассе, действующей на сферу радиуса R_1 при ее неравномерном движении. Сила Бассе находится из приближения Стокса при малых числах Рейнольдса, тогда как сила (6.1) найдена в приближении большого числа Рейнольдса.

7. Решение задачи устойчивости в вязкой жидкости. Как было сказано ранее, для решения задачи устойчивости в вязкой жидкости необходимо в уравнениях динамики (1.1) поставить в правую часть сумму вязкой (6.1) и невязкой (3.7) сил.

На внутренний цилиндр действует суммарная сила $F_{id} + F_v$, где F_{id} определена формулой (3.7), а F_v – формулой (6.1).

Запишем уравнение движения цилиндра (1.1) в виде

$$\ddot{z}_0 - 2ib\dot{z}_0 + h\dot{z}_0 + p^2 z_0 = -\varepsilon a e^{-i\Omega t} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\dot{z}_0(t') e^{i\Omega t'}}{\sqrt{\pi} \sqrt{t-t'}} dt', \quad (7.1)$$

где $h = \frac{H}{M} \left(1 + \gamma \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\right)^{-1}$, $p^2 = \frac{K}{M} \left(1 + \gamma \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\right)^{-1}$, $a = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2\gamma(\Omega)^{1/2} (R_2^2 + R_1^2)}{(R_2^2 - R_1^2) + \gamma(R_2^2 + R_1^2)}$,
 $b = \frac{\gamma\Omega R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2) + \gamma(R_2^2 + R_1^2)}$, $\gamma = \frac{\rho\pi R_1^2}{M}$ и $\varepsilon = \text{Re}^{-1/2} \ll 1$.

Уравнение (7.1) может быть решено аналитически с помощью преобразования Лапласа. Интеграл в правой части имеет вид свертки, и в образах Лапласа интегро-дифференциальное уравнение (7.1) становится алгебраическим. Использование аналитических методов позволяет явно выделить область устойчивости системы и провести сравнение с имеющимися результатами для невязкого течения [4, 5] и результатами, полученными П.Л. Капицей [1].

Примем обозначение $Z(s) = L[z(t)] = \int_0^\infty Z(t) \exp(-st) dt$, тогда уравнение (7.1) в образах Лапласа примет вид

$$\begin{aligned} (s^2 Z(s) - s z_0(0) - \dot{z}_0(0)) + (h - 2ib)(sZ(s) - z_0(0)) + p^2 Z(s) = \\ = -\varepsilon a \sqrt{s + i\Omega} (sZ(s) - z_0(0)), \end{aligned}$$

а его решение запишется как

$$Z(s) = \frac{s z_0(0) + \dot{z}_0(0) + (h - 2ib) z_0(0) + \varepsilon a \sqrt{s + i\Omega} z_0(0)}{p^2 + (h - 2ib)s + s^2 + \varepsilon a s \sqrt{s + i\Omega}} \quad (7.2)$$

Для анализа устойчивости необходимо найти обратное преобразование Лапласа $z(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} Z(s) e^{st} ds$, где σ_1 выбрана таким образом, что все особенности (7.2) лежат левее контура интегрирования. Вывод об устойчивости или неустойчивости системы можно сделать, рассмотрев асимптотику решения на больших временах.

Решение в пространстве Лапласа (7.2) является многозначной функцией с точкой ветвления $s = -i\Omega$. Проведем разрез параллельно действительной оси (рис. 3) и выберем ветвь функции $\sqrt{s + i\Omega}$ так, что $\sqrt{s + i\Omega} > 0$ при действительном и положительном значении подкоренного выражения.

Теперь определим полюса решения (7.2) в приближении малых демпфирующих сил $h = \varepsilon \tilde{h}$

$$p^2 + (\varepsilon \tilde{h} - 2ib)s + s^2 + \varepsilon a s \sqrt{s + i\Omega} = 0 \quad (7.3)$$

Будем искать решение уравнения (7.3) в виде разложения в ряд $s = s_0 + \varepsilon s_1 + \dots$

В нулевом приближении оба полюса являются чисто мнимыми $s_0 = ib \pm i\sqrt{b^2 + p^2}$, и устойчивость решения определяется следующим приближением. В первом приближении (7.3) получим

$$s_{1,1} = -\frac{b + \sqrt{b^2 + p^2}}{2\sqrt{b^2 + p^2}} \left(\tilde{h} + a \sqrt{i \left(b + \sqrt{b^2 + p^2} + \Omega \right)} \right) \quad (7.4)$$

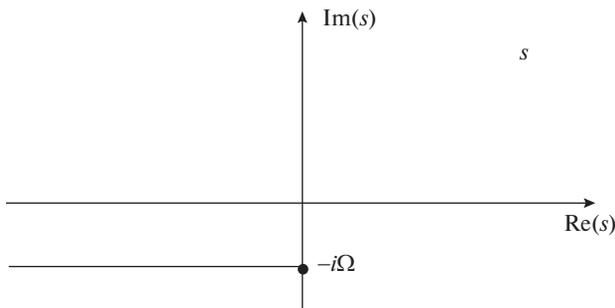


Рис. 3. Разрез для многозначной функции $Z(S)$.

$$s_{1,2} = -\frac{-b + \sqrt{b^2 + p^2}}{2\sqrt{b^2 + p^2}} \left(\tilde{h} + a\sqrt{i(b - \sqrt{b^2 + p^2} + \Omega)} \right) \quad (7.5)$$

Устойчивость системы будет определяться знаком действительной части выражений (7.4) и (7.5). Условия устойчивости запишутся так

$$\operatorname{Re}(s_{1,1}) < 0, \quad \operatorname{Re}(s_{1,2}) < 0$$

Из них следуют два неравенства

$$\tilde{h} > -\frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{|b + \sqrt{b^2 + p^2} + \Omega|}, \quad \tilde{h} > -\frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{|b - \sqrt{b^2 + p^2} + \Omega|}$$

Без ограничения общности будем считать, $\Omega > 0$. Тогда из двух неравенств следует оставить второе.

Таким образом, условие устойчивости всей системы можно записать в виде

$$\tilde{h} > -\frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{|b - \sqrt{b^2 + p^2} + \Omega|} \quad (7.6)$$

В случае, если условие (7.6) не выполняется система неустойчива.

В уравнении (7.6) можно перейти к физически значимым переменным. Учитывая, что для газа параметр γ , определяющему отношение плотности жидкости к плотности цилиндра, очень мал, то можно учесть главный член разложения по этому параметру. Тогда условие примет вид

$$H > -\sqrt{2\pi\nu} \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \rho R_1 \sqrt{|\Omega - \Omega_0|} \quad (7.7)$$

8. Сравнение условий устойчивости. Представляет интерес сравнение условия устойчивости П.Л. Капицы (2.2), условия устойчивости (7.7), полученного в настоящей работе и условия устойчивости в невязкой жидкости. Сравнение необходимого для устойчивости системы коэффициента демпфирования H будет происходить с учетом оценок $\gamma \ll 1$.

Условие устойчивости можно записать в виде $H > H^*$, где H^* – некоторое критическое значение, величина которого зависит от выбора модели течения

$H_{\text{id}}^* = 0$ – идеальная жидкость;

$$H_K^* = \frac{\kappa}{2} \pi \rho R_1^2 \frac{R_1}{R_2 - R_1} \frac{\Omega^2}{\Omega_0} - \text{полуэмпирическое выражение [1];}$$

$$H_v^* = -\sqrt{2\pi\nu} \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \rho R_1 \sqrt{|\Omega - \Omega_0|} - \text{вязкая жидкость (выражение (7.7) где } \kappa - \text{ эмпирический безразмерный коэффициент, } \Omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} - \text{ собственная частота колебаний ротора.}$$

рический безразмерный коэффициент, $\Omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$ – собственная частота колебаний ротора.

В невязкой жидкости система нейтрально устойчива ($H_{id}^* = 0$). Исходя из оценок [1], вязкость приводит к появлению неустойчивости в системе ($H_K^* > 0$). В настоящей работе показано, что учет вязкости в выбранном приближении приводит к затуханию колебаний системы ($H_v^* < 0$). Такое расхождение может быть объяснено как разными моделями трения, так и разницей исходных предположений: [1] – сильно турбулентный поток, настоящая работа ламинарное среднее течение между цилиндрами при $Re \gg 1$.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690138-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Капица П.Л. Устойчивость и переход через критические обороты быстро вращающихся роторов при наличии трения // ЖТФ. 1939. Т. 9. № 2. С. 124–146.
2. Баландин Д.В. Стабилизация движения роторов в кожухе, заполненным газом // ПММ. 2015. Т. 79. № 2. С. 210–217.
3. Muszynska A. Whirl and whip–Rotor/bearing stability problems // J. Sound & Vibr. 1986. V. 110. № 3. P. 443–462.
4. Копьев В.Ф., Чернышев С.А., Юдин М.А. Неустойчивость цилиндра в циркуляционном потоке несжимаемой идеальной жидкости // ПММ. 2017. Т. 81. № 2. С. 216–229.
5. Петров А.Г., Юдин М.А. К динамике цилиндра в ограниченном циркуляционном потоке идеальной жидкости с постоянной завихренностью // ПММ. 2019. Т. 83. № 3. С. 393–402.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Гидродинамика. М.: Физматлит, 1986. 736 с.
7. Петров А.Г. Принцип Гамильтона и некоторые задачи динамики идеальной жидкости // ПММ. 1983. Т. 47. № 1. С. 48–55.
8. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
9. Петров А.Г. Сила, действующая на цилиндр в кольцевом течении вязкой жидкости при малом эксцентричном смещении // Докл. РАН. 2018. Т. 480. № 6. С. 666–670.

Stability of Elastically Hardened Cylinder in a Circular Flow of Viscous Fluid

A. G. Petrov^{a,#} and M. A. Yudin^{b,##}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

^b *Zhukovsky Central Aerohydrodynamic Institute, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: petrovipmech@gmail.ru*

^{##} *e-mail: mikleudin@yandex.com*

In this work, the system consisting of two cylinders (an internal elastically fixed and an external rigidly fixed) and a circulation flow of a viscous incompressible fluid between them is considered. In the equilibrium position, the cylinders are coaxial and the inner one rotates with an angular velocity that is kept constant. The force acting on the inner cylinder with a small deviation of the inner cylinder from the equilibrium position is obtained in the approximation of large Reynolds numbers. It is shown that the force is hereditary and depends on the entire trajectory of movement. The stability of the position of the inner elastically fixed cylinder in the linear approximation is studied taking into account the hereditary force acting on the inner cylinder.

Keywords: instability, flow in a limited region, viscous fluid

REFERENCES

1. *Kapitsa P.L.* Rapidly rotating rotor under friction: stability and whirling speed transition // *Zh. Tech. Fiz.*, 1939, vol. 9, no 2. pp. 124–146. (in Russian)
2. *Balandin D.V.* Stabilization of the motion of a rotor in a gas-filled housing // *JAMM*, 2015, vol. 79, no. 2, pp. 142–147.
3. *Muszynska A.* Whirl and whip—rotor/bearing stability problems // *J. Sound &Vibr.*, 1986, vol. 110, no. 3, pp. 443–462.
4. *Kopiev V.F., Chernyshev S.A., Yudin M.A.* Instability of a cylinder in the circulation flow of incompressible ideal fluid // *JAMM*, 2017, vol. 81, no. 2, pp. 148–156.
5. *Petrov A.G., Yudin M.A.* On the cylinder dynamics in bounded ideal fluid flow with constant vorticity // *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 7, pp. 898–906.
6. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* *Fluid Mechanics*. Oxford: Pergamon Press, 1987. 539 p.
7. *Petrov A.G.* Hamilton's principle and certain problems of dynamics of perfect fluid // *JAMM*, 1983, vol. 47, no. 1, pp. 30–36.
8. *Schlichting H.* *Boundary-layer theory*. N.Y.: McGraw-Hill, 1955. 535 p.
9. *Petrov A.G.* The force acting on a cylinder in a ring flow of a viscous fluid with a small eccentric displacement // *Dokl. Phys.*, 2018, vol. 63, no. 6, pp. 253–256.

УДК 533.6.011

К ТЕОРИИ ГИПЕРЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ТОНКОГО ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА КОНЕЧНОЙ СТРЕЛОВИДНОСТИ ПОД БОЛЬШИМ УГЛОМ АТАКИ

© 2020 г. В. Н. Голубкин*

*Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия***e-mail: valeriy.golubkin@tsagi.ru*

Поступила в редакцию 20.02.2020 г.

После доработки 12.04.2020 г.

Принята к публикации 19.04.2020 г.

Дан короткий обзор наиболее важных результатов решения задачи обтекания тонкого треугольного крыла конечной стреловидности гиперзвуковым потоком газа под большими, близкими к прямому, углами атаки, полученных автором с применением метода тонкого ударного слоя. Дополнена классификация всех основных режимов и схем обтекания, реализуемых в рамках предложенной теории, по двум основным параметрам подобия. Получено композитное решение, адекватно описывающее возмущенное течение как в основной части сжатого слоя, так и в пристеночном энтропийном слое.

Ключевые слова: гиперзвуковое обтекание, треугольное крыло, метод тонкого ударного слоя, классификация режимов обтекания, энтропийный слой, композитное решение

DOI: 10.31857/S0032823520040050

1. Введение. Режимы гиперзвукового обтекания крыла. Для исследования гиперзвукового обтекания наветренной поверхности тонкого треугольного крыла (рис. 1), к которой приложена основная часть аэродинамической нагрузки, под большим (близким к прямому) углом атаки

$$\alpha = \pi/2 - A_*, \quad 0 < A_* \ll 1 \quad (1.1)$$

используется асимптотический метод тонкого ударного слоя (МТУС) [1] с малым параметром, равным отношению плотностей на сильном прямом скачке уплотнения

$$\varepsilon = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (1 + 2m^{-1}) \ll 1, \quad m = (\gamma - 1) M_\infty^2 \sim 1 \quad (1.2)$$

Вычисление малого параметра ε с помощью эффективного показателя адиабаты γ_* [2] $\varepsilon = (\gamma_* - 1)(\gamma_* + 1)^{-1}$ позволяет учесть влияние равновесных свойств воздуха при высоких температурах.

Ранее было рассмотрено [3–6] обтекание крыльев конечного удлинения различной формы с острой передней кромкой в характерных условиях гиперзвукового полета, когда число Маха велико $M_\infty \gg 1$, и показатель адиабаты близок к единице $(\gamma - 1) \ll 1$ (так что обеспечивается выполнение условия (1.2)), а угол атаки таков, что соотношение (1.1) записывается как

$$\alpha = \pi/2 - \varepsilon^{1/2} A, \quad A = \cos \alpha / \varepsilon^{1/2} \sim 1 \quad (1.3)$$

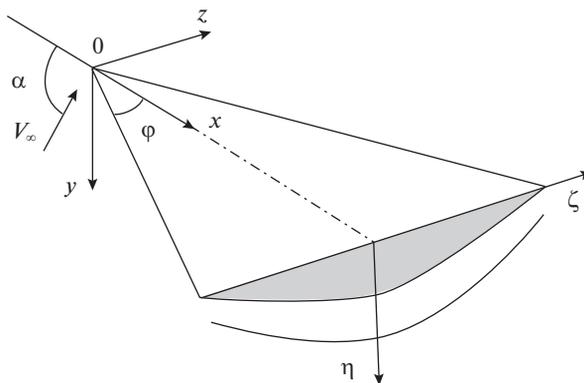


Рис. 1.

Веская причина рассмотреть случай (1.3), также как и асимптотику потока при $\cos \alpha \sim \epsilon^{1/2} \ll 1$ обусловлена тем, что вследствие свойств воздуха при гиперзвуковом обтекании именно в этом диапазоне углов атаки расположен наиболее общий сценарий обтекания треугольного крыла конечной стреловидности, который при умеренных значениях сверхзвуковых скоростей и при показателе адиабаты $\gamma = 1.4$ имеет место, если угол атаки принимает конечные значения, точнее, если $\cos \alpha \sim 1$. Таким образом, в рамках одного сценария существует возможность возникновения всех трех качественно различных режимов обтекания крыла с головным скачком уплотнения: (1) присоединенным к острой передней кромке крыла, (2) присоединенным только к заостренной вершине и (3) полностью отсоединенным.

В указанных выше условиях набегающий гиперзвуковой поток, проходя через скачок уплотнения большой интенсивности вблизи наветренной поверхности крыла, становится умеренно сверхзвуковым или даже дозвуковым. Стоит отметить, что хотя в развитой асимптотической теории угол атаки и считается близким к прямому, условие (1.3) не накладывает слишком жестких ограничений на угол атаки и соответствует вполне реальным его значениям, как видно из рис. 2, где нанесены зависимости $\alpha(A)$ для двух случаев достаточно малого параметра $\epsilon = 0.05$ и 0.1 .

В плоскости нормального сечения, перпендикулярной линии передней кромки плоского треугольного крыла с углом стреловидности Λ и полууглом при вершине $\varphi = \pi/2 - \Lambda$, присоединенный скачок может составлять с плоскостью крыла углы [3]

$$\theta_{\pm} = \frac{\epsilon^{1/2}}{2} [A \cos \Lambda \pm (A^2 \cos^2 \Lambda - 4)^{1/2}], \quad (1.4)$$

причем верхний (нижний) знак соответствует скачку сильного (слабого) семейства. Тот факт, что при условии (1.3) порядки углов наклона сильного и слабого скачков одинаковы, делает более вероятным образование сильного скачка вместо гораздо чаще встречающихся слабых скачков. Появление решений с сильным скачком при больших углах атаки отмечалось ранее [7], где задача обтекания решалась упрощенно в нулевом приближении метода интегральных соотношений без учета изменения функций поперек сжатого слоя. Поскольку скольжение крыла отсутствовало, в силу симметрии относительно вертикальной плоскости $y = 0$ решение строилось для полуплоскости $\zeta \geq 0$.

Если выполняется основное предположение МТУС (1.2), отражающее влияние реальных свойств воздуха, то при любом конечном полуугле раствора крыла $\varphi \sim 1$

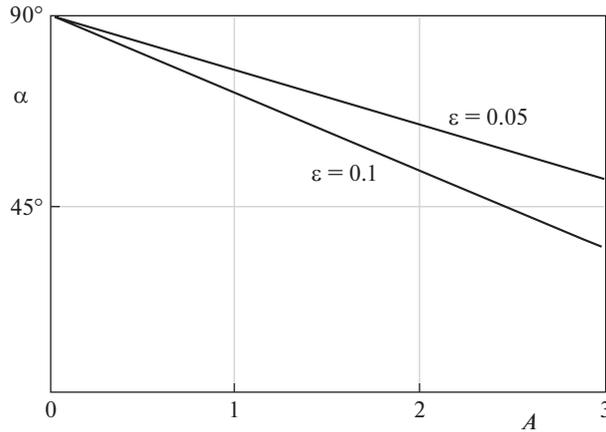


Рис. 2.

(в радианах) обнаруженный характерный случай (поток удовлетворяет условию (1.3)) занимает промежуточное положение между, с одной стороны, обтеканием плоского крыла под *конечным* углом атаки, когда в условии (1.1) $A_* \sim 1$ или $A \gg 1$ в условии (1.3), и реализуется только один тип течений – головной скачок уплотнения присоединен к передней кромке (режим 1), и вне узкой центральной области справедливо известное правило полос [2]. С другой стороны – обтеканием под углом атаки, очень близким к *прямому*, когда $A_* \ll \varepsilon^{1/2}$ или $0 < A \ll 1$ (не выполняется условие (1.3)), и единственно возможным оказывается сценарий обтекания, когда перед крылом всегда располагается полностью отсоединенный скачок (режим 3).

Таким образом, условие (1.3) оказывается наиболее общим, поскольку при его выполнении возможны не только режимы 1, 3 (рис. 3), но также и режим обтекания, при котором головной скачок имеет с крылом только одну общую точку, будучи присоединенным в его заостренной вершине (режим 2) при $0 < \varphi < \varphi_*(A)$ ($A \geq 2$) или $0 < \varphi < \varphi_{\max}(A)$ ($0 < A < 2$). При этом возможны две схемы обтекания, качественно различающиеся характером поведения конических поверхностей тока [5]: схема 2б с линией растекания в плоскости симметрии при $0 < \varphi < \varphi_{\max}(A)$ ($0 < A < \sqrt{2}$), $0 < \varphi < \varphi_{**}(A)$ ($A > \sqrt{2}$), и схема 2а с линией стекания в плоскости симметрии и дополнительной линией стекания на консоли вблизи передней кромки при $\varphi_{**}(A) < \varphi < \varphi_{\max}(A)$ ($\sqrt{2} < A < 2$), $\varphi_{**}(A) \leq \varphi \leq \varphi_*(A)$ ($A \geq 2$).

Примечательно, что вторая из них реализуется только, если $A > \sqrt{2}$. Завершая описание классификации, представленной на рис. 3, отметим также, что в зависимости от угла раствора крыла скачок может быть также присоединенным вдоль всей острой передней кромки, если $\varphi_*(A) \leq \varphi \leq \pi/2$ ($A \geq 2$) (режим 1) или полностью отсоединенным от нее, если $\varphi_{\max}(A) < \varphi \leq \pi/2$ ($0 < A < 2$) (режим 3). Область параметров справа от штрихпунктирной линии $\varphi = \varphi_{ss}(A)$ на рис. 3 соответствует всюду сверхзвуковой скорости газа в сжатом слое, когда течение около крыла с конечной длиной корневой хорды обладает свойством коничности, и применимо решение для бесконечного вниз по потоку крыла. Наоборот, для параметров из зоны между штрихпунктирной кривой и границей 2–3 ввиду распространяющегося по местным дозвуковым зонам влияния

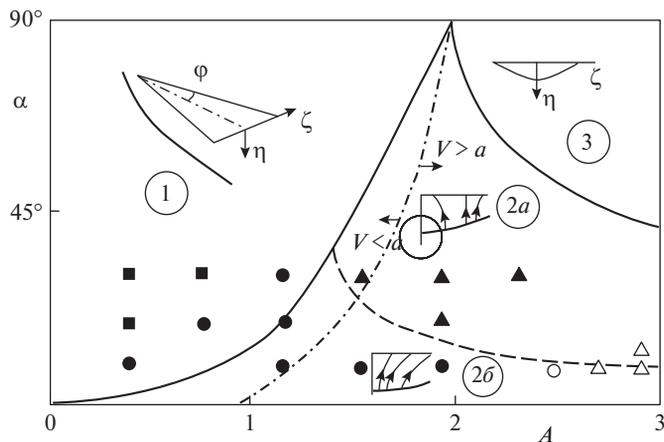


Рис. 3.

задней кромки течение около треугольного крыла конечной длины уже не будет коническим, несмотря на то, что головной скачок присоединен к вершине. Естественно, на дозвуковых участках задней кромки должно выполняться обычное в теории крыла условие Чаплыгина–Жуковского. Дополняя результаты [3–6], приведем уравнения линий, которые разграничивают области параметров, соответствующих этим режимам и схемам обтекания на плоскости A , φ :

- граница областей 1–2б: $\varphi = \varphi_*(A) = \arcsin(2A^{-1})$, $A \geq 2$;
 - граница областей 2б–2а: $\text{tg } \varphi_{**}(A) = 0.75 - 0.55 \exp\{-0.21[0.17 - \ln(A - \sqrt{2})]^{1.36}\}$, $A > \sqrt{2}$;
 - граница областей 2–3: $\varphi_{\max}(A) = 0.132(e^{1.04A} - 1)^{1.32}$, $0 < A \leq 1.3$;
- $$\varphi_{\max}(A) = 1.5(A - 0.95), \quad 1.3 \leq A \leq 2 \quad (1.5)$$
- Граница области полностью сверхзвукового течения в сжатом слое:
- $$\varphi_{ss}(A) = 0.075A^{4.43} - 0.036, \quad 0.93 \leq A \leq 2$$

Форма первой из этих линий получена аналитически, а трех других – путем аппроксимации результатов численных расчетов методом [5]. На рис. 3 для сравнения нанесены результаты определения типа схемы обтекания в эксперименте по визуализации течения на крыле [8] (темные маркеры) и в численном расчете [9] (светлые маркеры). Треугольники соответствуют схеме 2а, кружки – схеме 2б, квадраты – режиму 3. Видно, что граница областей 2а–2б определяется теорией с приемлемой точностью.

Проведенная и дополненная классификация дает информацию, позволяющую судить о типе режима/схемы обтекания только на основе исходных параметров задачи еще до ее решения, и может оказаться полезной при выборе наиболее подходящей численной схемы расчета гиперзвукового обтекания треугольных крыльев под достаточно большими углами атаки на основе полных уравнений Эйлера и для иных целей. Качественно она совпадает с классификацией, приведенной в [7].

2. Постановка задачи во внешней области. Рассмотрим пространственное обтекание потоком с гиперзвуковой скоростью V_∞ нижней поверхности тонкого треугольного крыла, близкой к базовой плоскости $y = 0$, в декартовой системе координат (см. рис. 1).

Толщину крыла считаем малой и по порядку соизмеримой с толщиной сжатого слоя (1.4). Учтем, что за скачком, присоединенным к вершине крыла, при соответствующей форме его поверхности течение является коническим. С использованием (1.3) и оценок порядков величин компонент вектора скорости u, v, w , отнесенных к V_∞ , давления p , отнесенного к $\rho_\infty V_\infty^2$, и плотности ρ , отнесенной к ρ_∞ , а также энтропийной функции $\sigma = p\rho^{-\gamma}$ их асимптотические разложения в рамках МТУС записываются в виде [3, 5]

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon^{1/2}u_0(\eta, \zeta) + \dots, & v &= \varepsilon v_1(\eta, \zeta) + \dots, & w &= \varepsilon^{1/2}w_0(\eta, \zeta) + \dots \\ p &= 1 + \varepsilon[p_1(\eta, \zeta) - A^2] + (\gamma M_\infty^2)^{-1} + \dots, & \rho &= \varepsilon^{-1} + \rho_0 + \dots \\ \sigma &= \sigma_{00} + \varepsilon^2\sigma_2 + \dots, & \sigma_{00} &= \text{const}, & \sigma_2 &= p_1 - \rho_0 - A^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Аргументами входящих сюда функций служат приведенные конические переменные, имеющие порядок единицы в сжатом слое

$$\eta = \frac{y}{\varepsilon^{1/2}x}, \quad \zeta = \frac{z}{x}$$

Из известных уравнений конического течения и граничных условий на поверхности скачка $\eta = \eta_s(\zeta)$ и на крыле $\eta = \eta_b(\zeta)$ [10] получается следующая формулировка задачи в основном приближении МТУС:

$$Du = 0, \quad Dw = 0, \quad Dv = -p_\eta, \quad \eta u_\eta + \zeta u_\zeta - v_\eta - w_\zeta = 0, \quad D\sigma = 0, \quad (2.2)$$

где $D = (v - u\eta)\frac{\partial}{\partial\eta} + (w - u\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta}$ – оператор дифференцирования вдоль конической проекции поверхности тока на поперечную (почти горизонтальную) плоскость $x = 1$,

$$\eta = \eta_s(\zeta): u_s = A - \eta_s + \zeta\eta'_s, \quad v_s = (\eta_s - \zeta\eta'_s)u_s - 1 - \eta_s'^2 \quad (2.3)$$

$$w_s = -\eta_s', \quad p_s = v_s + A(A - u_s)$$

$$\eta = \eta_b(\zeta): v_b = u_b\eta_b + (w_b - \zeta u_b)\eta'_b \quad (2.4)$$

В постановке (2.2)–(2.4) задача о коническом обтекании крыла, преобразованная к переменным Мизеса ζ, ψ ($D\psi = 0$) допускает [3, 5] общее аналитическое решение, с помощью которого все искомые функции выражаются через форму скачка уплотнения $\eta = \eta_s(\zeta)$, а она, в свою очередь, удовлетворяет функциональному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\eta_s''(\zeta) \left\{ 1 - \frac{1 + \zeta^2}{[(1 + \zeta^2)\eta_s' + \zeta(A - \eta_s)]^2} \right\} = \eta_b''(\zeta) + \frac{\psi_b'(\zeta)}{u(\psi_b)[\psi_b(\zeta) - \zeta]^2}, \quad (2.5)$$

в котором, согласно условию непротекания (2.4), функция тока на поверхности крыла $\psi_b(\zeta)$ либо постоянна $\psi_b = \text{const}$, либо переменна и является обратной по отношению к функции $N(\psi) = w_s(\psi)/u_s(\psi)$:

$$N[\psi_b(\zeta)] = \zeta \quad (2.6)$$

3. Внешнее решение. Согласно решениям, полученным для этого промежуточного режима аналитически в случае присоединенного [3] и численно для отсоединенного [5] от кромки головного скачка уплотнения, поверхность треугольного крыла частично или полностью совпадает с огибающей поверхностей тока поперечного конического течения. Линии функции тока подходят по касательной к поверхности крыла и оканчива-

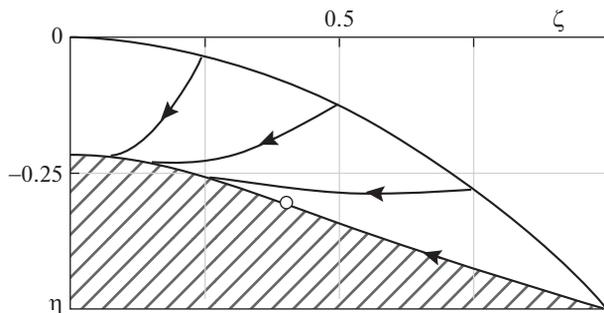


Рис. 4.

ются на ней в точках с координатами $\zeta = w/u$, определяемыми отношением боковой и продольной составляющих скорости, постоянных вдоль поверхностей тока (см. два первых уравнения (2.2)). Для иллюстрации на рис. 4 показана картина обтекания крыла, соответствующая точному решению [3] с присоединенным скачком параболической формы

$$\eta_s = -b\zeta^2/2, \quad b > 0 \quad (3.1)$$

и также параболической, но не эквидистантной ей (в отличие от точного решения для крыла малого удлинения при конечных углах атаки [11]) формой крыла в корневой части

$$\eta_b = -\eta_{b0} - B\zeta^2/2, \quad \eta_{b0} = \frac{A - b + b \ln(b/A)}{(A - b)^2}, \quad B = b + \frac{A^2}{2(A - b)^3} \quad (3.2)$$

Консольная часть (справа от точки, отмеченной круглым маркером на рис. 4) образована (по принципу отвердевания) некоторой регулярной поверхностью тока $\psi_b = \text{const}$, расположенной за параболическим скачком (3.1). Корневая параболическая часть поверхности крыла (3.2) в терминологии [12] – особая поверхность тока, огибающая регулярные поверхности тока, которые подходят по касательной и оканчиваются на ней.

При решении краевой задачи (2.5), (2.6) для скачка уплотнения, отсоединенного от кромки плоского треугольного крыла, ставятся граничные условие симметрии в центре $\zeta = 0$ и условие смешанного типа на кромке $\zeta = Z = \text{tg} \varphi$, означающее, что звуковая точка располагается над ней на скачке

$$\eta'_s(0) = 0, \quad (1 + Z^2)\eta'_s(Z) + [A - \eta_s(Z)]Z + \sqrt{1 + Z^2} = 0 \quad (3.3)$$

Найденные численно [5] конфигурации головного скачка и поверхностей тока для схем обтекания $2a$, $2b$ показаны на рис. 5. В этом случае функция тока меняется вдоль поверхности крыла и определяется из (2.6). Штриховыми линиями на рис. 5 показаны распределения давления на крыле.

Таким образом, подход к этой (части) поверхности треугольного крыла происходит с распределенной функцией тока, для которой $w - u\zeta \rightarrow 0$. Согласно второму уравнению (2.2), боковая составляющая градиента давления p_ζ в уравнении импульсов по оси ζ умножается на $\varepsilon \ll 1$. Ее вклад пренебрежимо мал в основной части сжатого слоя и не учитывается в уравнениях (2.2) для “внешней” области, где $w - u\zeta \sim 1$. В пределах этой области часть поверхности крыла с переменной функцией тока ассоциируется с “особой” конической поверхностью тока [12], совпадающей с огибающей регулярных поверхностей тока $\psi = \text{const}$, подходящих к поверхности крыла по касательной. Инте-

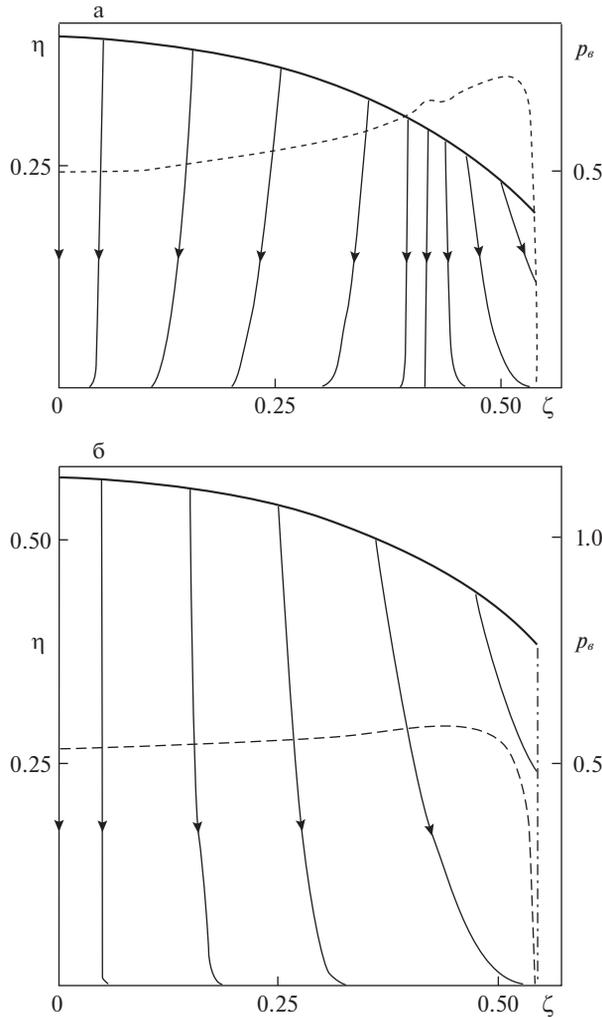


Рис. 5.

ресно, что до появления работы [12] такая ситуация считалась невозможной [10]. Несмотря на малость вклада бокового градиента давления, его вклад необходимо учитывать в пристеночной “внутренней” области, где разность $w - u\zeta$ также мала. Эта область может быть названа вихревым слоем. Здесь внешнее решение непригодно, и для описания течения нужно дополнительное исследование, позволяющее уточнить характер пристеночного поведения поверхностей тока. В этом и состоит основная цель настоящей работы. Отметим, что ранее [2, 13, 14] для решения ряда сходных задач использовались различные методы.

4. Внешнее и композитное решения в окрестности плоскости симметрии. Чтобы оценить толщину вихревого слоя и разницу между точным и внешним решениями, построим композитное решение, пригодное вплоть до поверхности крыла. Заметим, что в данном случае возможно упрощение процедуры общего метода сращиваемых асимптотических разложений, предполагающего раздельное построение внешнего и

внутреннего решений, последующее их сращивание и, наконец, построение композитного решения как суммы этих решений за вычетом общей части [15]. В качестве примера рассмотрим течение в окрестности плоскости симметрии плоского крыла с отошедшим [5] от кромки скачком при $|\zeta| \ll 1$. Учитывая очевидные свойства четности искомых безразмерных функций, входящих в разложения МТУС (2.1), представим их в виде

$$f(\eta, \zeta) = \bar{f}(\bar{\eta}) - \tilde{f}(\bar{\eta})\zeta^2, \quad f = \{u_0, v_1, p_1, p_2, \sigma_2\} \quad (4.1)$$

$$w_0(\eta, \zeta) = \zeta \bar{w}(\bar{\eta}), \quad \bar{\eta} = \eta/\Delta_0, \quad \eta_s(\zeta) = \Delta_0 - b\zeta^2/2 + \eta_b(\zeta), \quad \eta_b(\zeta) = 0$$

Подставим представления (4.1) в исходные уравнения МТУС и краевые условия (2.2)–(2.4), отбрасывая индексы. Тогда, обозначая штрихом полные производные по $\bar{\eta}$, в главном порядке получим следующую краевую задачу

$$\begin{aligned} V\bar{u}' &= 0, & V\bar{v}' &= \bar{p}', & -V\bar{w}' + W\Delta_0\bar{w} &= 2\varepsilon\Delta_0\bar{p} \\ v' + W\Delta_0 &= 0, & V\bar{\sigma}' &= 0, & V(\bar{\eta}) &= \Delta_0\bar{\eta}u - \bar{v}, & W(\bar{\eta}) &= \bar{w} - \bar{u} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \bar{\eta} = 1: \quad \bar{u}_s &= A - \Delta_0, & \bar{v}_s &= \Delta_0\bar{u}_s - 1, & \bar{w}_s &= b, & \bar{p}_s &= 2\Delta_0 - A - 1 - \Delta_0^2 \\ & & \bar{p}_s &= (b - u_s)b \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\bar{\eta} = 0: \quad \bar{v}_b = 0$$

В правой части третьего уравнения (4.2) в соответствии с отмеченным выше оставлен член, существенный лишь в тонком пристеночном слое при $\bar{\eta} \ll 1$, поэтому давление в нем полагается постоянным $\bar{p}(\bar{\eta}) \approx \bar{p}(0) = \beta_0$ [2]. Краевая задача (4.2), (4.3) – незамкнута, т.к. для определения постоянных b , β_0 необходимо учесть условия (3.3) на передней кромке. В этом состоит принципиальное отличие данной задачи, относящейся к задачам обтекания так называемых сильно затупленных тел, от задач обтекания гладких тел (например, кругового конуса), допускающих локальное решение в замкнутой форме [2]. Однако некоторые свойства течений можно получить и при неопределенных значениях величин b , β_0 . Впрочем, в дальнейшем эта неопределенность может быть устранена с использованием внешних данных взятых из результатов глобальных численных расчетов.

Из первого уравнения (4.2) и первого условия (4.3) находим $\bar{u} = A - \Delta_0 = \text{const}$. Для скоростей поперечного конического течения V , W из (4.2), переходя к новой переменной t , запишем

$$t \frac{dW}{dt} = \bar{u}W + W^2 - 2\varepsilon\beta_0 \quad (4.4)$$

$$\frac{t}{V} \frac{dV}{dt} = W + 2\bar{u} \quad (4.5)$$

$$V(\bar{\eta}) dt = \Delta_0 d\bar{\eta}, \quad t(0) = 0, \quad t(1) = 1 \quad (4.6)$$

$$W(1) = b - \bar{u}, \quad V(1) = 1, \quad V(0) = 0 \quad (4.7)$$

Найдем сначала предельное внешнее решение W_0 , V_0 , которое представляет собой разложение известного [5] решения при малых ζ . Полагая $\varepsilon = 0$ и интегрируя последовательно уравнения (4.4), (4.5), имеем:

$$W_0 = \frac{\bar{u}(b - \bar{u})t^{\bar{u}}}{b - (b - \bar{u})t^{\bar{u}}}, \quad V_0 = \frac{\bar{u}t^{2\bar{u}}}{b - (b - \bar{u})t^{\bar{u}}} \quad (4.8)$$

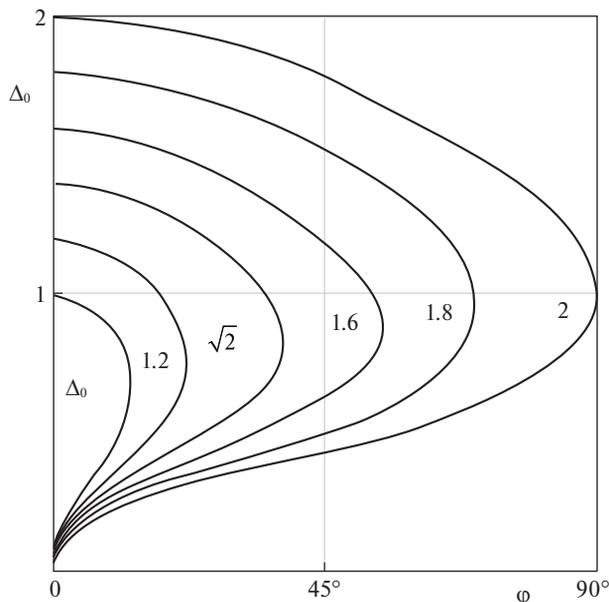


Рис. 6.

Последующее интегрирование обеих частей уравнения (4.6) дает трансцендентное соотношение между неизвестными параметрами b и Δ_0 , определяющими соответственно кривизну и отход скачка в плоскости симметрии:

$$\Delta_0 = \int_0^1 \frac{V(t)}{t} dt = \frac{1}{(A - \Delta_0 - b)^2} \left(A - \Delta_0 - b + b \ln \frac{b}{A - \Delta_0} \right), \quad (4.9)$$

которое совпадает с результатом [5] внешнего решения. Здесь уместно отметить, что в классической задаче обтекания плоского треугольного крыла с отсоединенным от кромки скачком (режим 2) на основе результатов систематических глобальных численных расчетов [5] при сведении сформулированной краевой задачи к задаче Коши с заменой условия (3.3) на передней кромке вторым условием в плоскости симметрии $\eta_s(0) = \Delta_0$ и последующим установлением связи между Δ_0 и ϕ с помощью второго условия (3.3) построена сетка номограмм зависимости $\Delta_0 = \Delta_0(\phi, A)$ (рис. 6), позволяющая для заданных значений исходных параметров ϕ, A определить отход скачка уплотнения Δ_0 , после чего из соотношения (4.9) находится кривизна скачка $b = b(A - \Delta_0)$, входящая в аналитическое решение (см. сетку графиков на рис. 7). В частности показано, что схема обтекания $2a$, реализуемая при $b < A - \Delta_0$, возможна только при $A > \sqrt{2}$, когда кривая $b = b(A - \Delta_0)$ пересекается с биссектрисой первого квадранта, что совпадает с выводом [7]. В данной пространственной задаче полученная сетка номограмм играет ту же роль, что сетка ударных поляр в плоской задаче сверхзвукового обтекания клина или сетка яблоковидных кривых в осесимметричной задаче сверхзвукового обтекания конуса. Видно, что для $A < 2$, $\phi < \phi_{\max}(A)$, где $\phi_{\max}(A)$ – абсцисса точки кривой с вертикальной касательной (1.6), каждому значению полуугла при вершине ϕ отвечают два решения с разными Δ_0 . По аналогии с известной двужначностью решения для косога скачка на клине скачок с меньшим Δ_0 на-

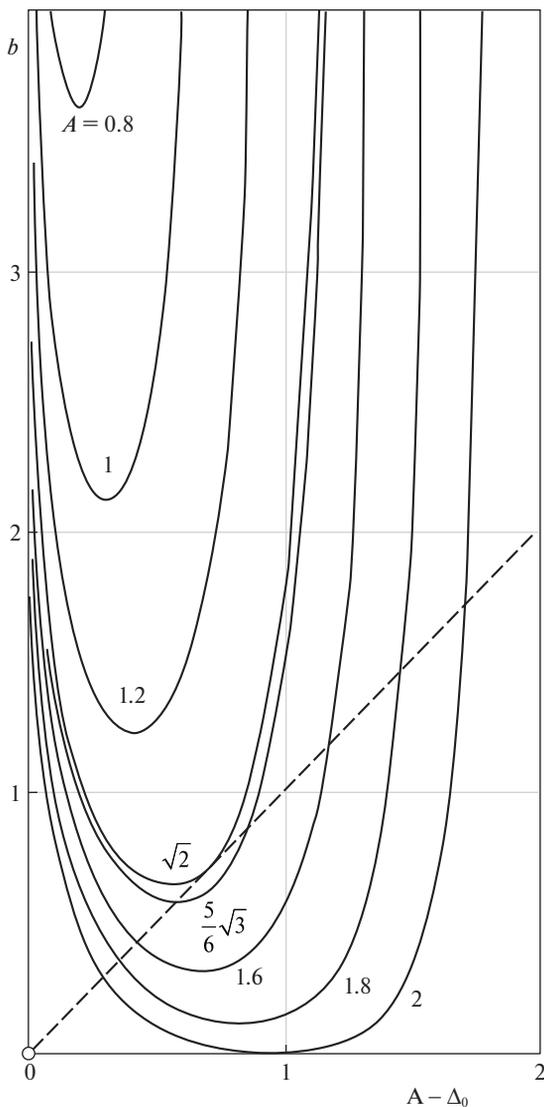


Рис. 7.

зовем слабым, а скачок с большим Δ_0 – сильным. Результаты расчетов, показанные выше на рис. 5, относятся к слабой ветви скачка.

Внешнее решение (4.8), как и ранее, дает $W_0 = 0$ на крыле при $t = 0$. Исследуем теперь поведение энтропийной функции и поверхностей тока. В соответствии с пятым уравнением (4.2) главный член $\bar{\sigma} = \text{const}$, а для следующего члена разложения (4.1) имеем

$$t \frac{d\bar{\sigma}}{dt} = 2\bar{\sigma}W(t)$$

Подставляя из внешнего решения (4.8) $W = W_0(t)$, находим во внешней области

$$\bar{\sigma}_0(t) = \bar{\sigma}_0(1) \left[\frac{\bar{u}}{b - (b-u)t^{\bar{u}}} \right]^2$$

Следовательно, согласно внешнему решению, энтропия на крыле переменна, как и должно быть на особой поверхности тока [12]:

$$\sigma_0(0, \zeta) = \bar{\sigma} - \tilde{\sigma}_0(1) \left(\frac{\bar{u}\zeta}{b} \right)^2 + \dots,$$

и поверхность крыла совпадает с огибающей изоэнтропических поверхностей тока. Условие сохранения энтропии на них дает связь координаты ζ_s точки, в которой коническая проекция поверхности тока начинается на скачке, и координаты точки ее окончания на крыле $\zeta_b = \zeta_s b / \bar{u}$, показывающую, что (аналогично [5]) в окрестности плоскости симметрии происходит стекание потока, при $b < \bar{u}$ и растекание, при $b > \bar{u}$.

Сохраняя в уравнении (4.4) последнее слагаемое, существенное в пристеночном вихревом слое, найдем композитное решение

$$\begin{aligned} W &= \frac{\gamma_1(b - \bar{u} - \gamma_2) - \gamma_2(b - \bar{u} - \gamma_1)t^\mu}{(b - \bar{u} - \gamma_2) - (b - \bar{u} - \gamma_1)t^\mu} \\ V &= \frac{\mu t^\nu}{(b - \bar{u} - \gamma_2) - (b - \bar{u} - \gamma_1)t^\mu} \\ \gamma_{1,2} &= \frac{1}{2}[-\bar{u} \pm (\bar{u}^2 + 8\varepsilon\beta_0)^{1/2}], \quad \gamma_1 = \frac{2\beta_0}{\bar{u}}\varepsilon + \dots, \quad \gamma_2 = \bar{u} + \dots \\ \mu &= \gamma_1 - \gamma_2 > 0, \quad \nu = 2\bar{u} + \gamma_1 \end{aligned} \tag{4.10}$$

В основной части сжатого слоя ($t \sim 1$) композитное (4.10) и внешнее решение (4.8) совпадают с точностью до членов порядка ε , однако в тонком слое вблизи стенки при $t \ll 1$ они различаются, так как имеют вид

$$W = \frac{2\beta_0}{\bar{u}}\varepsilon + \dots, \quad W_0 = \frac{\bar{u}(b - \bar{u})}{b}t^{\bar{u}} + \dots \tag{4.11}$$

Видно, что $W_0 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, но при этом скорость W отлична от нуля и вместе с β_0 имеет знак, противоположный градиенту давления вдоль размаха. Приравняв по порядку величины слагаемые в числителе (4.8), получим оценку толщины этого слоя $\delta_\nu = \Delta\bar{\eta}$

$$t \sim \varepsilon^{1/\bar{u}}, \quad \Delta\bar{\eta} \sim \int_0^{\varepsilon^{1/\bar{u}}} t^{\nu-1} dt \sim \varepsilon^{\nu/\bar{u}} \sim \varepsilon^2,$$

которая оказывается по порядку величины меньше толщины основной части сжатого слоя.

С другой стороны, используя композитное решение (4.10), получим, что энтропия на крыле постоянна, поскольку

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(1) \left[\frac{\mu t^{\gamma_1}}{(b - \bar{u} - \gamma_2) - (b - \bar{u} - \gamma_1)t^\mu} \right]^2, \quad \tilde{\sigma}(0) = 0$$

Форма проекций поверхностей тока находится из уравнения

$$\frac{dt}{d\zeta} = -\frac{t}{W\zeta},$$

в которое нужно подставить W из (4.11). Во внешнем и композитном решениях формы поверхностей тока совпадают в основной части возмущенного течения (внешней области), но сильно различаются в пристеночном слое (рис. 8), где под действием гради-

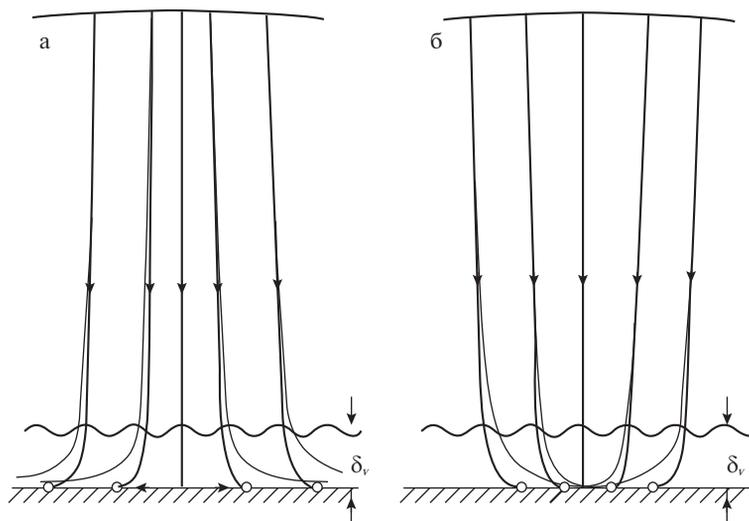


Рис. 8.

ента давления вдоль размаха происходит резкий разворот поверхностей тока (более тонкие линии, для композитного решения).

В зависимости от характера течения во внешней области (схемы 2а, 2б [5]) после этого разворота газ вблизи крыла течет либо к плоскости симметрии при $b < A - \Delta_0$ (рис. 8, б), либо от нее при $b > A - \Delta_0$ (рис. 8, а), и особая точка $\eta = \zeta = 0$ (точка Ферри [10]) для показанных на рис. 8 проекций поверхностей тока $\eta = \eta_i(\zeta)$ является или узловой, или седловой, соответственно. Существующий поперек этого слоя градиент энтропии порождает здесь сильно завихренное течение, вследствие чего рассмотренный пристеночный слой называется энтропийным или вихревым.

Таким образом, показано, что в случае обтекания под большим углом атаки (1.3) треугольного крыла с конечным удлинением (или углом при вершине) пространственное возмущенное течение в достаточно широком диапазоне определяющих параметров обладает свойством коничности во всем сжатом слое между скачком уплотнения, присоединенным к передней кромке крыла или к его вершине, и поверхностью крыла, включая тонкую пристеночную зону энтропийного слоя. Лишь в нем обнаружено заметное (локализованное) отличие в поведении конических поверхностей тока от основной части сжатого слоя.

В то же время, согласно [16], для обтекания крыла, имеющего малое удлинение (или угол при вершине $\varphi \sim \varepsilon^{1/2}$), случай (1.3), в котором $\cos \alpha \sim \varepsilon^{1/2}$, также особый и промежуточный, между пространственным (коническим) течением в тонком сжатом слое ($\cos \alpha \sim 1$), и двумерным (плоским) течением в поперечных плоскостях $x = \text{const}$ ($\cos \alpha \sim \varepsilon$). Возникает внутренняя пристеночная область заметно большей толщины, соизмеримой с толщиной внешней области, в которой течение становится трехмерным и неконическим, тогда как во внешней области, прилегающей к головному скачку, справедлив закон плоских сечений, и в поперечных плоскостях $x = \text{const}$ поток оказывается двумерным.

Заключение. Приведена дополненная классификация для гиперзвукового обтекания плоского треугольного крыла при больших углах атаки, которая включает в себя все основные режимы обтекания по форме головного скачка уплотнения и схемы по

характеру поведения поверхностей тока. Это позволяет судить о реализации того или иного режима обтекания на основе исходных параметров задачи, минуя ее решение. Полученное композитное решение и оценка толщины энтропийного слоя уточняют структуру течения вблизи поверхности крыла и полезны при рассмотрении поглощения энтропийного слоя вязким пограничным слоем, приводящего к росту теплового потока к наветренной поверхности крыла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черный Г.Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
2. Лунев В.В. Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 328 с.
3. Голубкин В.Н. Обтекание треугольного крыла гиперзвуковым потоком при больших углах атаки // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 376–382.
4. Голубкин В.Н. Гиперзвуковое обтекание крыла при больших углах атаки // ПМТФ. 1984. № 4. С. 65–70.
5. Голубкин В.Н., Негода В.В. Гиперзвуковое обтекание крыла при больших углах атаки с отсоединенным скачком уплотнения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 3. С. 149–157.
6. Голубкин В.Н., Негода В.В. Аэродинамические характеристики треугольного крыла в гиперзвуковом потоке при больших углах атаки // Уч. зап. ЦАГИ. 1986. Т. XVII. № 1. С. 26–32.
7. Черный Г.Г. Крылья в гиперзвуковом потоке // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 616–634.
8. Башкин В.А. Треугольные крылья в гиперзвуковом потоке. М.: Машиностроение, 1970. 136 с.
9. Косых А.П. О влиянии реальных свойств воздуха на параметры течения около пирамидальных крыльев // Тр. ЦАГИ. 1981. Вып. 2093. С. 3–18.
10. Булах Б.М. Нелинейные конические течения. М.: Наука, 1970. 344 с.
11. Голубинский А.И. Обтекание гиперзвуковым потоком треугольных крыльев определенного класса, установленных под углом атаки, с присоединенным скачком уплотнения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 5. С. 73–78.
12. Голубинский А.И. Особые поверхности тока в конических течениях газа // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 6. С. 1058–1066.
13. Мелник Р., Шейнз Р. Структура сжатого слоя и энтропийные слои в гиперзвуковых конических течениях // В сб. Исследование гиперзвуковых течений. М.: Мир, 1964. С. 268–295.
14. Гонор А.Л., Остапенко Н.А. Гиперзвуковое обтекание крыла конечной толщины // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 3. С. 46–55.
15. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
16. Голубкин В.Н., Негода В.В. Расчет гиперзвукового обтекания наветренной стороны крыла малого удлинения при больших углах атаки // ЖВММФ. 1988. Т. 28. № 10. С. 1586–1594.

To the Theory of Hypersonic Flow over Thin Finite Sweep Delta Wing at High Incidence

V. N. Golubkin[#]

Zhukovsky Central Aerohydrodynamic Institute, Zhukovsky, Russia

[#]*e-mail: vngolubkin@mail.ru*

The review is given of the most important results of solution the problem of hypersonic flow over thin finite sweep delta wing at large angle of attack, closed to the right angle, obtained by the author using thin shock layer method. Supplements are introduced to the classification of all main regimes and schemes of flow through two basic similarity parameters, realized within the framework of the theory proposed. The composite solution is obtained, which adequately represents disturbed flow both in the main shock layer part and in the near wall entropy layer.

Keywords: hypersonic flow, delta wing, thin shock layer method, flow regimes classification, entropy layer, composite solution

REFERENCES

1. *Chernyi G.G.* Introduction to Hypersonic Flows. N.Y.: Acad. Press, 1961. 276 p.
2. *Lunev V.V.* Hypersonic Aerodynamics. Moscow: Mashinostroenie, 1975. 327 p. (in Russian)
3. *Golubkin V.N.* Hypersonic flow past a delta wing at large angles of attack // JAMM, 1984, vol. 48, no. 3, pp. 270–275.
4. *Golubkin V.N.* Supersonic flow over a wing at high attack angles // J. Appl. Mech. & Techn. Phys., 1984, vol. 25, no. 4, pp. 556–562.
5. *Golubkin V.N., Negoda V.V.* Hypersonic flow past a wing at large angles of attack with detached shock waves // Fluid Dyn., 1985, vol. 20, no. 3, pp. 464–471.
6. *Golubkin V.N., Negoda V.V.* Aerodynamic characteristics of a delta wing in hypersonic flow at large angles of attack // Uch. Zap. TsAGI, 1986, vol. 17, no. 1, pp.26–32. (in Russian)
7. *Chernyi G.G.* Wings in hypersonic flow // PMM, 1965, vol. 29, no. 4, pp. 616 – 634. (in Russian)
8. *Bashkin V.A.* Delta wings in hypersonic flow. Moscow: Mashinostroenie, 1970. 136 p. (in Russian)
9. *Kosykh A.P.* On the influence of real air properties on the flow parameters about pyramidal wings // Tr. TsAGI, 1981, no..2093, pp. 3–18. (in Russian)
10. *Bulakh B.M.* Nonlinear Conical Flows. Moscow: Nauka, 1970. 344 p. (in Russian)
11. *Golubinskii A.I.* Hypersonic flow past delta wings of a certain class at angle of attack with an attached shock// Fluid Dyn., 1968, vol. 3, no. 5, pp. 48–51.
12. *Golubinskii A.I.* Singular stream surfaces in conical gas flows // JAMM, 1972, vol. 34, no. 6, pp. 996–1004.
13. *Melnic R., Scheuing R.* Structure of a compressed layer and entropy layers in hypersonic conical flows // In: Hypersonic Flow Research. Moscow: Mir, 1964, pp. 268–293. (in Russian)
14. *Gonor A.L., Ostapenko N.A.* Hypersonic flow past a wing of finite thickness // Fluid Dyn., 1970, vol. 5, no. 3, pp. 394–402.
15. *Van-Dyke M.* Perturbation Methods in Fluid Mechanics. N.Y.: Acad. Press, 1964. 229 p.
16. *Golubkin V.N., Negoda V.V.* Calculation of supersonic flow past the weather side of a wing of small aspect ratio at large angles of attack // USSR. Comput. Maths. Math. Phys., 1988, vol. 25, no. 5, pp. 202–208.

УДК 539.3

*Светлой памяти Роберта Вениаминовича Гольдштейна***ДЛИННОВОЛНОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ДЛИННЫЕ ВОЛНЫ
В АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ**© 2020 г. Н. Ф. Морозов^{1,2,*}, П. Е. Товстик^{1,2,**}, Т. П. Товстик^{2,***}¹ Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия² Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: morozov@nm1016.spb.edu

**e-mail: peter.tovstik@mail.ru

***e-mail: tovstik_t@mail.ru

Поступила в редакцию 17.03.2020 г.

После доработки 15.05.2020 г.

Принята к публикации 22.05.2020 г.

В линейном приближении исследуются свободные колебания и плоские волны в тонкой упругой анизотропной бесконечной пластине постоянной толщины. Рассматривается анизотропия общего вида, описываемая 21 модулем упругости. Предполагается, что модули упругости и плотность не зависят от тангенциальных координат, но могут зависеть от координаты по толщине пластины. Многослойные и функционально градиентные пластины не исключаются из рассмотрения. В предположении, что длина волны существенно превосходит толщину пластины, построено асимптотическое разложение по степеням малого параметра толщины гармонического по тангенциальным координатам решения системы трехмерных уравнений теории упругости. При фиксированных значениях волновых чисел существуют только три длинноволновых решения: одно изгибное низкочастотное и два тангенциальных. С точностью до членов второго порядка малости по безразмерной толщине построены дисперсионные уравнения для этих решений. Для изгибных решений характерна сильная зависимость частоты от длины волны, а тангенциальные волны распространяются с малой дисперсией. Рассмотрены частные виды анизотропии.

Ключевые слова: анизотропная неоднородная пластина, гармонические колебания, плоские волны, дисперсионное уравнение

DOI: 10.31857/S0032823520040074

1. Введение. При рассмотрении длинных волн в пластине естественно использовать двумерные модели, ибо напряженное состояние в ней близко к плоскому напряженному состоянию. Вывод двумерных приближенных моделей тонких пластин и оболочек — это одна из классических задач механики. Классическая модель Кирхгофа–Лява (КЛ) может быть получена из трехмерных уравнений теории упругости с использованием гипотез о прямой нормали [1, 2]. Более сложная и в ряде случаев более точная модель Тимошенко–Рейсснера (ТР) для описания деформаций тонкостенных конструкций с учетом поперечного сдвига была предложена первоначально для балок [3] и оболочек [4], соответственно. Для пластин эта модель была впервые применена в работах [5, 6].

Ряд уточненных моделей основан на разложении неизвестных функций по полиномам Лежандра [7, 8]. В последнее время широко используются модели [9], связанные с разложением перемещений в ряд по степеням толщины z с подлежащими определению коэффициентами. В результате получаются модели первого, второго, третьего и т.д. порядка. В частности, классическая модель КЛ имеет первый порядок, а модель ТР – третий. Кроме того, область применимости этих моделей ограничена однородными ортотропными пластинами. Для функционально градиентных и многослойных пластин эти модели напрямую неприменимы. Приходится вводить однородные пластины с эквивалентными упругими свойствами или (для многослойных пластин) осуществлять стыковку слоев [8].

Многочисленные исследования посвящены выводу двухмерных уравнений с использованием асимптотических разложений по степеням малого параметра толщины $\mu = h/L$, где h – толщина, L – характерная длина волны в тангенциальных направлениях (см. [10–14] и др.).

Асимптотическое разложение используется и в данной работе [15, 16]. Нулевое приближение соответствует гипотезам о прямой нормали и приводит к модели Кирхгофа–Лява. Первое приближение, появляется лишь для анизотропных пластин с наклонной анизотропией. В остальных случаях (для изотропных, ортотропных и моноклинных пластин, однородных и неоднородных по толщине) первое приближение отсутствует, и внимание было сосредоточено на построении второго приближения – на уточненных моделях второго порядка точности. Преимущество асимптотического разложения по сравнению с разложением по степеням z заключается в том, что в одном приближении асимптотического разложения собираются члены одного порядка малости в то время, как в разложении по степеням z члены различных порядков перемешаны. В то же время последние разложения приводят к более простым моделям.

Были построены уравнения второго порядка точности, как для изотропных однородных по толщине пластин [13, 14], так и для многослойных трансверсально изотропных пластин [16]. Найденный при этом эквивалентный модуль поперечного сдвига [17–19] был использован для построения обобщенной модели Тимошенко–Рейсснера и для решения частных задач [20, 21]. Для многослойной пластины из моноклинного материала построены модели второго порядка точности [22, 23]. Эффекты второго порядка малости для моноклинных материалов – это поперечный сдвиг и деформация растяжения (сжатия) нормальных волокон, а для задач динамики к ним добавляются силы инерции вращательного движения нормальных волокон и силы инерции их растяжения. Модель ТР для однородного материала учитывает эффект поперечного сдвига и инерцию вращательного движения, а (как правило, малые) эффекты, связанные с растяжением нормального волокна, моделью ТР не описываются.

Рассмотрен [24] пример анизотропного материала общего вида (с 21 модулем упругости). В нем изотропная матрица армирована системой жестких нитей, ориентированных под углом к плоскости пластины. Поэтому такую анизотропию называют наклонной. Асимптотическое интегрирование при такой анизотропии вызывает дополнительные трудности. Было построено [25] нулевое приближение, которое имеет ту же точность, а система уравнений имеет тот же порядок, что и в модели КЛ. Модель второго порядка точности [26, 27], завершает построение таких моделей для пластин из анизотропных неоднородных материалов. Она приводит к весьма громоздкой системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В данной работе модель [26, 27] используется для анализа длинноволновых колебаний и длинных плоских волн в анизотропной неоднородной бесконечной пластине. При этом задача существенно упрощается, ибо ищется гармоническое по тангенциальным координатам решение, в результате чего система дифференциальных уравнений сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Отдельно рассмотрены

тенгенциальные и изгибные колебания и волны. Рассмотрены частные виды анизотропии.

Следует назвать монографии [28–31], в которых рассматриваются различные вопросы колебаний и распространения волн в пластинах, оболочках и трехмерных телах и которые способствовали написанию данной работы.

2. Основные предположения и уравнения. В линейном приближении динамические уравнения упругой анизотропной пластины постоянной толщины h в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 имеют вид:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad 0 \leq x_3 = z \leq h, \quad (2.1)$$

где $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ – напряжения, $u_i(x_1, x_2, x_3)$ – проекции перемещения, $\rho(x_3)$ – плотность материала. Тензорные обозначения не используются. Деформации ε_{ij} выражаются через перемещения по формулам:

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

Деформации и напряжения будем записывать как 6-мерные векторы. Тогда соотношения упругости принимают вид [9]:

$$\sigma = \mathbf{E} \cdot \varepsilon, \quad \mathbf{E} = (E_{ij})_{i,j=1,\dots,6}, \quad E_{ij} = E_{ji} \quad (2.3)$$

$$\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})^T, \quad \varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12})^T$$

Здесь и в дальнейшем T означает транспонирование, для векторов и матриц используются жирные буквы, точкой (\cdot) обозначается произведение векторов и матриц. Матрица \mathbf{E} модулей упругости в рассматриваемом случае анизотропии общего вида содержит 21 независимый упругий модуль, она симметричная и положительно определенная. Предполагается, что модули упругости E_{ij} и плотность ρ не зависят от тангенциальных координат x_1, x_2 , но могут зависеть от координаты $x_3 = z$. Зависимость модулей упругости и плотности от координаты z имеет место для функционально градиентных пластин, а для многослойных пластин эти величины являются кусочно-постоянными функциями z .

Лицевые поверхности пластины предполагаются свободными, что дает граничные условия

$$\sigma_{i3} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad z = h \quad (2.4)$$

Удобно разделить напряжения и деформации на группы тангенциальных σ_t, ε_t и трансверсальных σ_n, ε_n напряжений и деформаций [18, 19]:

$$\sigma_t = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})^T, \quad \sigma_n = (\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33})^T$$

$$\varepsilon_t = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})^T, \quad \varepsilon_n = (\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33})^T \quad (2.5)$$

Тогда соотношения упругости (2.3) запишутся в виде:

$$\sigma_t = \mathbf{A} \cdot \varepsilon_t + \mathbf{B} \cdot \varepsilon_n, \quad \sigma_n = \mathbf{B}^T \cdot \varepsilon_t + \mathbf{C} \cdot \varepsilon_n, \quad (2.6)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{26} \\ E_{16} & E_{26} & E_{66} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} E_{15} & E_{14} & E_{13} \\ E_{15} & E_{24} & E_{23} \\ E_{56} & E_{46} & E_{36} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} E_{55} & E_{45} & E_{35} \\ E_{45} & E_{44} & E_{34} \\ E_{35} & E_{34} & E_{33} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Как показывает последующий анализ, особого рассмотрения заслуживает моноклинный материал, для которого модули упругости сохраняют свое значение при замене $\tilde{z} = -z$ направления оси z . Для этого материала $E_{4i} = E_{5i} = 0$ при $i = 1, 2, 3, 6$.

Исключение трансверсальных деформаций ε_n из соотношений (2.6) дает

$$\sigma_t = \mathbf{A}^* \cdot \varepsilon_t + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \sigma_n, \quad \varepsilon_n = \mathbf{C}^{-1} \cdot \sigma_n - \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \varepsilon_t, \quad (2.8)$$

где

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \quad (2.9)$$

Пренебрегая малыми напряжениями σ_n , получаем приближенные соотношения упругости

$$\sigma_t = \mathbf{A}^* \cdot \varepsilon_t, \quad (2.10)$$

связывающие тангенциальные напряжения и деформации. Эти соотношения соответствуют классической модели Кирхгофа–Лява. Матрицу \mathbf{A}^* назовем матрицей тангенциальных упругих модулей.

3. Уравнения распространения плоских волн и свободных колебаний. При сделанных предположениях система уравнений (2.1)–(2.3) имеет решение вида

$$\Phi(x_1, x_2, z, t) = \Phi(z) \exp[i(q_1 x_1 + q_2 x_2 - \lambda t)], \quad \Phi = \{\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i\}, \quad (3.1)$$

где $i = \sqrt{-1}$, Φ – любая из неизвестных функций системы, описывающей распространение плоской гармонической волны, движущейся со скоростью $v = \lambda / \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$ в направлении, определяемом вектором $\mathbf{n} = q_1 \mathbf{i}_1 + q_2 \mathbf{i}_2$. Здесь q_1, q_2 – вещественные волновые числа, характерная длина волны равна $L = 2\pi / \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$.

Введем безразмерные величины (со значком $\tilde{}$) по формулам:

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2, u_1, u_2, u_3\} &= \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3\} / q, \quad q = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}, \quad \{E_{ij}, \sigma_{ij}\} = E_* \{\tilde{E}_{ij}, \tilde{\sigma}_{ij}\} \\ z = h\tilde{z}, \quad \mu = hq &= \frac{2\pi h}{L}, \quad \{q_1, q_2\} = q\{\tilde{q}_1, \tilde{q}_2\}, \quad \rho = \rho_* \tilde{\rho}, \quad t = \sqrt{\frac{\rho_0}{E_* v^2}} \tilde{t}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где E_* , ρ_* – характерные значения модулей упругости и плотности. Формулы (3.1) станут безразмерными

$$\tilde{\Phi}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{z}, \tilde{t}) = \tilde{\Phi}(\tilde{z}) \exp[i(\tilde{q}_1 \tilde{x}_1 + \tilde{q}_2 \tilde{x}_2 - \tilde{\lambda} \tilde{t})], \quad \tilde{\lambda} = \sqrt{\frac{\rho_0}{E_* v^2}} \lambda, \quad (3.3)$$

причем $\tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2 = 1$, $0 \leq \tilde{z} \leq 1$. В безразмерных переменных скорость волны равна $\tilde{v} = \tilde{\lambda}$, а ее длина равна 2π . В дальнейшем значок $\tilde{}$ опускаем.

Уравнения (2.1)–(2.3) в результате подстановки (3.1) приводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \mu \varepsilon_{33}, \quad w = u_3 \\ \frac{du_k}{dz} &= -\mu(p_k w - \varepsilon_{k3}), \quad p_k = \frac{\partial}{\partial x_k} = iq_k, \quad k = 1, 2 \\ \frac{d\sigma_{k3}}{dz} &= -\mu(p_1 \sigma_{1k} + p_2 \sigma_{2k} + \lambda^2 \rho(z) u_k), \quad k = 1, 2 \\ \frac{d\sigma_{33}}{dz} &= -\mu(p_1 \sigma_{13} + p_2 \sigma_{23} + \lambda^2 \rho(z) w) \end{aligned} \quad (3.4)$$

В системе (3.4) основные неизвестные функции – функции $w, u_1, u_2, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$. При рассмотрении многослойных пластин предполагается, что имеется полный контакт между слоями, следовательно, основные неизвестные функции непрерывны. Деформации $\epsilon_{k3}, k = 1, 2, 3$, и напряжения $\sigma_{ij}, i, j = 1, 2$, входящие в систему (3.4), выражаются через основные неизвестные по формулам (2.2) и (2.8).

Запишем краевую задачу (3.4), (2.4) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(z)\Phi + \Lambda\rho(z)\mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{U} = \{u_1, u_2, u_3\}^T, \quad \Lambda = \lambda^2 \\ \sigma_{k3}(0) = \sigma_{k3}(l) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{3.5}$$

где $\mathbf{M}(z)$ – дифференциальный оператор с комплексно-значными коэффициентами, определяемыми из системы (3.4).

Справедливо следующее утверждение (см. также [30]).

При сделанных выше предположениях относительно матрицы модулей упругости $\mathbf{E}(z)$ для фиксированных волновых чисел q_1, q_2 краевая задача (3.5) является самосопряженной и имеет дискретный неотрицательный спектр $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ с точкой сгущения на бесконечности. Собственные функции $\Phi_n(z)$ удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_0^1 \rho(z) \mathbf{U}_n^T(z) \cdot \overline{\mathbf{U}_m(z)} dz = 0, \quad \Lambda_m \neq \Lambda_n, \quad n, m = 1, 2, \dots, \tag{3.6}$$

где T означает транспонирование, а черта сверху – комплексное сопряжение.

Для доказательства рассмотрим систему уравнений (3.5) при $\Lambda = \Lambda_n$ с собственными функциями $\Phi_n(z), \mathbf{U}_n(z)$. Третье уравнение (3.4) умножим на функции $\overline{u_{km}(z)}, k = 1, 2$, четвертое – на $\overline{w_m(z)}$, сложим и проинтегрируем по $z \in [0, l]$. Тогда после интегрирования по частям и преобразований с использованием первых двух уравнений (3.4) получим

$$\Lambda_n \int_0^1 \rho(z) \mathbf{U}_n^T(z) \cdot \overline{\mathbf{U}_m(z)} dz = \int_0^1 \sigma_n^T(z) \cdot \overline{\epsilon_m(z)} dz, \tag{3.7}$$

где σ и ϵ – шестимерные векторы (2.3). В силу равенства (2.3) $\sigma = \mathbf{E} \cdot \epsilon$ при $m = n$ из соотношения (3.7) следует неотрицательность собственных значений (положительность, если исключить движения пластины как твердого тела):

$$\Lambda_n \int_0^1 \rho(z) |U_n(z)|^2 dz = \int_0^1 \epsilon_n^T(z) \cdot \mathbf{E} \cdot \overline{\epsilon_n(z)} dz, \tag{3.8}$$

а при $\Lambda_m \neq \Lambda_n$ – ортогональность собственных функций (3.6). В силу (3.8) собственное значение Λ_n равно отношению плотностей потенциальной и кинетической энергии пластины.

Представим комплексные функции $\Phi(z)$ в виде:

$$\Phi(z) = \Phi_a(z) \exp(i\Phi_f(z)), \quad \Phi_a(z) = |\Phi(z)| \tag{3.9}$$

Тогда при фиксированных волновых числах q_1, q_2 для каждого номера n функции (3.1) описывают две плоских волны

$$\Phi^{(n)}(x_1, x_2, z, t) = \Phi_a^{(n)}(z) \sin(q_1 x_1 + q_2 x_2 + \Phi_f^{(n)}(z) \pm \sqrt{\Lambda_n} t), \tag{3.10}$$

распространяющихся в направлении $\mathbf{n} = q_1 \mathbf{i}_1 + q_2 \mathbf{i}_2$ и в противоположном направлении $-\mathbf{n}$ с равными по модулю скоростями.

Рассмотрим свободные установившиеся колебания пластины.

При фиксированных волновых числах q_1, q_2 спектр частот колебаний пластины суть $\omega_n = \sqrt{\Lambda_n}$, где Λ_n – собственные числа задачи (3.5).

Действительно, функции

$$\Phi(x_1, x_2, z, t) = \Phi(z) \exp[i(q_1 x_1 + q_2 x_2) \sin(\omega t + \alpha)], \quad \omega = \sqrt{\Lambda} \quad (3.11)$$

удовлетворяют той же системе уравнений (3.4) или (3.5).

Формы колебаний пластины

$$\Phi_1^{(n)}(x_1, x_2, z) = C \Phi_a^{(n)}(z) \sin(q_1 x_1 + q_2 x_2 + \Phi_f^{(n)}(z) + \alpha), \quad (3.12)$$

где C и α – произвольные постоянные, вытянуты в направлении, перпендикулярном \mathbf{n} , и имеют характер “стиральной доски”. Привычные “шахматные” формы колебаний вида $w(x_1, x_2, z) = w(z) \sin(q_1 x_1 + \alpha_1) \sin(q_2 x_2 + \alpha_2)$ возможны лишь, если волновым числом p, q и $p, -q$ отвечает одна и та же частота колебаний ω . Последнее условие выполнено для ортотропных пластин.

4. Преобразование системы (3.4). В п. 3 рассмотрена общая задача о распространении плоских волн в пластине и о ее свободных колебаниях. Ниже рассматриваются длинные волны в тонкой пластине в предположении, что длина волны много больше ее толщины, т.е. $h \ll L$. Тогда μ (см. (3.2)) становится малым параметром, который будет использоваться для построения приближенного решения. Приводимое ниже исследование для пластин в определенном смысле дополняет исследование работы [30], посвященной анализу коротких волн в трехмерном упругом теле. Для длинных волн деформации охватывают всю толщину пластины и выпадают из рассмотрения волны Релея и волны Стоунли, локализующиеся, соответственно, вблизи поверхности пластины или вблизи плоскостей контакта слоев в многослойной пластине.

Для удобства последующего асимптотического анализа преобразуем систему (3.4), подставив в нее трансверсальные деформации ε_{k3} , $k = 1, 2, 3$, и тангенциальные напряжения σ_{ij} , $i, j = 1, 2$ по формулам (2.8) и (2.6), соответственно. Введем двумерные векторы перемещений и трансверсальных деформаций и напряжений сдвига

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T, \quad \varepsilon_s = (\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23})^T, \quad \sigma_s = (\sigma_{13}, \sigma_{23})^T \quad (4.1)$$

и дифференциальные операторы

$$\mathbf{p} = (p_1, q_2)^T, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_2 \\ 0 & p_2 & p_1 \end{pmatrix}^T \quad (4.2)$$

Матрицы $\mathbf{C}^{-1} = \{G_{ij}\}$ и $\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T = \{S_{ij}\}$, входящие в формулы (2.8), разобьем на блоки

$$\mathbf{C}^{-1} = \{G_{ij}\} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{g} \\ \mathbf{g}^T & c_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12} & G_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = (G_{13}, G_{23})^T, \quad c_3 = G_{33} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{-1} = \{S_{ij}\} = (\mathbf{S}\mathbf{s}), \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \\ S_{31} & S_{32} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} S_{13} \\ S_{23} \\ S_{33} \end{pmatrix}$$

Для моноклинного материала будет $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, $\mathbf{S} = \mathbf{0}$.

Теперь соотношения (2.8) дают

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{S} \cdot \sigma_s + \mathbf{s}\sigma_{33} \\ \varepsilon_s &= \mathbf{G} \cdot \sigma_s + \mathbf{g}\sigma_{33} - \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} \\ \varepsilon_{33} &= \mathbf{g}^T \cdot \sigma_s + c_3 \sigma_{33} - \mathbf{s}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.4)$$

и уравнения (3.4) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \mu(\mathbf{g}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s + c_3\sigma_{33} - \mathbf{s}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) \\ \frac{d\mathbf{u}}{dz} &= -\mu(\mathbf{p}w - \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\sigma}_s - \mathbf{g}\sigma_{33} + \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) \\ \frac{d\sigma_s}{dz} &= -\mu(\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}_s + \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{s}\sigma_{33} + \Lambda\rho(z)\mathbf{u}) \equiv g_1(x_1, x_2, z) \\ \frac{d\sigma_{33}}{dz} &= -\mu(\mathbf{p}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s + \Lambda\rho(z)w) \equiv g_2(x_1, x_2, z) \end{aligned} \quad (4.5)$$

При рассмотрении длинных волн и длинноволновых колебаний параметр $\mu = 2\pi h/L$ является малым. Предположим, что все модули упругости имеют один и тот же порядок, а неизвестные функции сохраняют свой порядок при дифференцировании по x_1, x_2 (в безразмерном виде $E_{ij} \sim 1, \{\mathbf{P}, \mathbf{p}\} \sim 1$).

Асимптотическое решение системы (4.5) строим методом итераций. При интегрировании первых двух уравнений вводим произвольные, не зависящие от z , функции $w^{(0)}(x_1, x_2)$ и $\mathbf{u}^{(0)}(x_1, x_2)$, которые находим из условия совместности двух последних уравнений:

$$\int_0^1 g_k(x_1, x_2, z) dz = 0, \quad k = 1, 2 \quad (4.6)$$

Соотношение порядков неизвестных функций в системах (3.4) и (4.5) для тангенциальных и изгибных колебаний оказывается различным, поэтому рассматриваем их по отдельности.

5. Тангенциальные колебания и волны. Для тангенциальных колебаний примем $\mathbf{u} \sim 1$. Тогда порядки остальных неизвестных в системе (4.5) будут

$$\{\mathbf{u}, \varepsilon_t, \sigma_t, \Lambda\} \sim 1, \quad \{w, \varepsilon_n, \sigma_s, \sigma_{33}\} \sim \mu, \quad \sigma_{33} \sim \mu^2 \quad (5.1)$$

При фиксированных волновых числах q_1, q_2 ищем двоякопериодическое решение системы (4.5) в виде

$$\boldsymbol{\Phi}(x_1, x_2, z, \mu) = \boldsymbol{\Phi}^{(k)}(z, \mu)e^{i(q_1x_1 + q_2x_2)}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \{\mathbf{u}, w, \sigma_s, \sigma_{33}\}, \quad \Lambda = \Lambda^{(k)}, \quad (5.2)$$

где $k = 0, 1, \dots$ – номер итерации

$$\frac{d\boldsymbol{\Phi}^{(k+1)}}{dz} = \mathbf{N}(\boldsymbol{\Phi}^{(k)}) \quad (5.3)$$

Здесь \mathbf{N} – оператор правых частей системы (4.5).

Введем интегральный оператор \mathbf{I} и оператор осреднения \mathbf{I}_a по формулам

$$\mathbf{I}(Z) = \int_0^z Z(z) dz, \quad \mathbf{I}_a(Z) = \int_0^1 Z(z) dz \quad (5.4)$$

Положим в системе (4.5) $\mathbf{P} = i\mathbf{Q}$, $\mathbf{p} = i\mathbf{q}$ и перепишем ее в виде

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \mu(-i\mathbf{s}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{g}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s + c_3\sigma_{33}) \\ \frac{d\mathbf{u}}{dz} &= \mu(-i\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u} - i\mathbf{q}w + \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\sigma}_s + \mathbf{g}\sigma_{33}) \\ \frac{d\sigma_s}{dz} &= \mu(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u} - i\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}_s - i\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{s}\sigma_{33} - \Lambda\rho(z)\mathbf{u}) \\ \frac{d\sigma_{33}}{dz} &= -\mu(i\mathbf{q}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s + \Lambda\rho(z)w) \end{aligned} \quad (5.5)$$

В нулевом приближении имеем $\mathbf{u}^{(0)}(z) = \mathbf{u}_0$, а остальные неизвестные равны нулю. Условие совместности (4.6) третьего уравнения (5.5) дает

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}_a(\mathbf{A}^*) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_0 - \Lambda^{(0)} \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}, \quad (5.6)$$

откуда следует квадратное уравнение для $\Lambda^{(0)}$

$$|\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}_a(\mathbf{A}^*) \cdot \mathbf{Q} - \Lambda^{(0)} \mathbf{E}| = 0, \quad (5.7)$$

где \mathbf{E} — единичная матрица второго порядка. Два корня $\Lambda_k^{(0)}$, $k = 1, 2$ уравнения (5.7) дают две тангенциальных волны (или формы колебаний) и им соответствуют амплитудные векторы \mathbf{u}_{0k} , $|\mathbf{u}_{0k}| = 1$, $k = 1, 2$. Последующие вычисления проводятся для каждого из них, причем индекс k опускаем.

В первом приближении из уравнений (5.5), считая \mathbf{u}_0 и $\Lambda^{(0)}$ известными, находим

$$\begin{aligned} w^{(1)} &= i\mu \hat{w}^{(1)}, & \hat{w}_1^{(1)} &= w_1 - \mathbf{I}(\mathbf{s}^T) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}^{(1)} &= \mathbf{u}_0 + \mu \mathbf{u}_1 + i\mu \hat{\mathbf{u}}^{(1)}, & \hat{\mathbf{u}}^{(1)} &= -\mathbf{I}(\mathbf{S}^T) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_0 \\ \sigma_s^{(1)} &= \mu \sigma_s^{(1)}, & \sigma_s^{(1)} &= \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}(\mathbf{A}^*) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_0 - \Lambda^{(0)} \mathbf{I}(\rho) \mathbf{u}_0 \\ & & \sigma_{33}^{(1)} &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Условие совместности четвертого уравнения (5.5) дает уравнение для величины w_1 :

$$\Lambda^{(0)} w_1 = (\Lambda^{(0)} \mathbf{I}_a(\rho \mathbf{I}(\mathbf{s}^T)) \cdot \mathbf{Q} + \Lambda^{(0)} \mathbf{I}_a(\rho) \mathbf{q}^T - \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}_a(\mathbf{A}^*) \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{u}_0 \quad (5.9)$$

Для повторных интегралов типа $\mathbf{I}_a(Y(z)\mathbf{I}(Z(z)))$ имеют место тождества:

$$\mathbf{I}_a(Y(z)\mathbf{I}(Z(z))) = \mathbf{I}_a(Y(z))\mathbf{I}_a(Z(z)) - \mathbf{I}_a(Z(z)\mathbf{I}(Y(z))), \quad \mathbf{I}_a\mathbf{I}(Z(z)) = \mathbf{I}_a((1-z)Z(z)) \quad (5.10)$$

В частности, если функция $Z(z) = Z$ постоянна, то $\mathbf{I}_a\mathbf{I}(Z) = Z/2$.

Функция $w^{(1)}(z)$ описывает в первом приближении распределение нормальных перемещений по толщине пластины. В частности, для однородной по толщине пластины будет $w^{(1)}(1/2) = 0$ (что может служить для контроля приведенных выше формул). Функция $\mathbf{u}^{(1)}(z)$ описывает в первом приближении изгиб нормального волокна. Для моноклинного материала ($\mathbf{S} = 0$) нормальное волокно остается прямым.

Величины \mathbf{u}_1 и $\Lambda^{(1)}$ определяются из условия совместности третьего уравнения (5.5) в первом приближении

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}_a(\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}^{(1)}) - i\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}_a(\mathbf{S} \cdot \sigma_s^{(1)}) - \Lambda^{(1)} \mathbf{I}_a(\rho(z)\mathbf{u}^{(1)}) = 0 \quad (5.11)$$

С учетом (5.6) слагаемые порядка μ в уравнении (5.11) дают уравнение для вектора \mathbf{u}_1 :

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}_a(\mathbf{A}^*) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1 - \Lambda^{(0)} \mathbf{u}_1 - \Lambda_1 \mathbf{u}_0 + \mathbf{F}_1 = 0, \quad \Lambda^{(1)} = \Lambda^{(0)} + \mu \Lambda_1, \quad (5.12)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= i(-\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}_a(\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{S}^T)) + \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}(\mathbf{A}^*)) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_0 + \\ &+ \Lambda^{(0)} \mathbf{I}_a(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{S} \mathbf{I}(\rho) + \rho \mathbf{I}(\mathbf{S}^T) \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{u}_0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

В силу (5.7) определитель системы (5.12) обращается в нуль, и из условия ее совместности

$$\Lambda_1 = \mathbf{u}_0^T \cdot \mathbf{F}_1 \quad (5.14)$$

находим величину Λ_1 . Для моноклинного материала ($\mathbf{S} = \mathbf{0}$) отсюда сразу следует, что $\Lambda_1 = 0$. Однако и для анизотропного материала общего вида (при $\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$) будет $\Lambda_1 = 0$, ибо имеет место равенство $\mathbf{u}_0^T \cdot \mathbf{F} = 0$, выполняющееся в силу соотношений (5.6) и (5.10). Кстати, мнимое значение Λ_1 противоречит установленной выше вещественности спектра.

Следовательно, для длинных ($\mu \ll 1$) плоских тангенциальных волн в анизотропных пластинах дисперсия проявляется лишь во втором приближении $\Lambda^{(2)} = \Lambda^{(0)} + \mu^2 \Lambda_2$, $\Lambda_2 \neq 0$. Скорость распространения волны $v = \sqrt{\Lambda}$ в общем случае сильно зависит от направления ее распространения $\mathbf{n} = q_1 \mathbf{i}_1 + q_2 \mathbf{i}_2$, что следует из уравнения (5.7), и слабо зависит от ее длины $L = 2\pi/\mu^{-1}$. Для transversально изотропного материала скорость v не зависит от направления \mathbf{n} . Для сравнения напомним (см. [30]), что в трехмерной анизотропной однородной упругой среде в каждом направлении без дисперсии могут распространяться три плоских волны, скорости которых зависят от направления.

Для вычисления Λ_2 построим второе приближение

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(2)} &= \mathbf{u}_0 + \mu \mathbf{u}_1 + \mu^2 \mathbf{u}_2 + \mu^2 \hat{\mathbf{u}}^{(2)}, \quad \hat{\mathbf{u}}^{(2)} = \mathbf{I}(\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{u}}^{(1)}) + \mathbf{qI}(\hat{\mathbf{w}}^{(1)}) + \mathbf{I}(\mathbf{G} \cdot \sigma_s^{(1)}) \\ \sigma_s^{(2)} &= i\mu^2 \sigma_s^{(2)}, \quad \sigma_s^{(2)} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}(\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{u}}^{(1)}) - \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}(\mathbf{S} \cdot \sigma_s^{(1)}) - \Lambda^{(0)} \mathbf{I}(\rho \hat{\mathbf{u}}^{(1)}) \\ \sigma_{33}^{(2)} &= i\mu^2 \hat{\sigma}_{33}^{(2)}, \quad \hat{\sigma}_{33}^{(2)} = -\mathbf{q}^T \cdot \mathbf{I}(\sigma_s^{(1)}) - \Lambda^{(0)} \mathbf{I}(\rho \hat{\mathbf{w}}^{(1)}) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Теперь условие совместности третьего уравнения (5.5) во втором приближении имеет вид

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}_a(\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}^{(2)}) - i\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}_a(\mathbf{S} \cdot \sigma_s^{(2)}) - i\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}_a(\mathbf{s}\sigma_{33}^{(2)}) - (\Lambda^{(0)} + \mu^2 \Lambda_2) \mathbf{I}_a(\rho \mathbf{u}^{(2)}) = 0 \quad (5.16)$$

Слагаемые порядка μ^2 в уравнении (5.16) суть

$$(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}_a(\mathbf{A}^*) \cdot \mathbf{Q} - \Lambda^{(0)} \mathbf{E}) \cdot \mathbf{u}_2 - \Lambda_2 \mathbf{u}_0 + \mathbf{F}_2 = 0, \quad \Lambda^{(2)} = \Lambda^{(0)} + \mu^2 \Lambda_2, \quad (5.17)$$

откуда, как и в (5.14), находим

$$\Lambda_2 = \mathbf{u}_0^T \cdot \mathbf{F}_2, \quad \mathbf{F}_2 = \mathbf{I}_a(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{u}}^{(2)}) + \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \sigma_s^{(2)} + \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{s} \cdot \hat{\sigma}_{33}^{(2)} - \Lambda^{(0)} \rho \hat{\mathbf{u}}^{(2)} \quad (5.18)$$

Громоздкую величину \mathbf{F}_2 получаем в результате подстановок (5.15) и (5.8).

Для пластины из однородного изотропного материала корни уравнения (5.7) не зависят от направления распространения волны и равны

$$\Lambda_p^{(0)} = \frac{E}{(1 - \nu^2)\rho}, \quad \Lambda_s^{(0)} = \frac{E}{2(1 + \nu)\rho} \quad (5.19)$$

Им соответствуют волны растяжения и сдвига, а соответствующие собственные функции равны (q_1, q_2) и $(q_2, -q_1)$. Скорость волны сдвига в пластине совпадает со скоростью плоской волны в однородном изотропном пространстве, а скорость продольной волны в пространстве больше и равна v , причем

$$v^2 = \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho} = E_{11} = \frac{E(1 - \nu)}{\rho(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad (5.20)$$

где λ_0, μ_0 – параметры Ламе, E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Не трудно проверить, что $v^2 > \Lambda_p^{(0)}$ (за исключением случая $\nu = 0$).

Вычисление по формуле (5.18) дает поправку Λ_2 и

$$\Lambda_p = \Lambda_p^{(0)} \left(1 - \mu^2 \frac{v^2}{12(1-v)^2} + O(\mu^4) \right), \quad \mu = \frac{2\pi h}{L}, \quad \Lambda_s = \Lambda_s^{(0)} \quad (5.21)$$

Иными словами, длинные волны растяжения (расширения) в пластине из однородного изотропного материала распространяются с малой дисперсией (L – длина волны), а волны сдвига – без дисперсии (для них поправка $\Lambda_2 = 0$; и равенство $\Lambda_s = \Lambda_s^{(0)}$ является точным).

Для сравнения укажем, что первоначально была установлена малая дисперсия при распространении продольных волн в однородном изотропном цилиндрическом стержне [33, 34] (см. также [35]). В дальнейшем исследование было дополнено анализом дисперсионного уравнения для неоднородного аксиально-симметричного стержня [36].

6. Изгибные колебания и волны. Для изгибных колебаний примем $w \sim 1$. Тогда порядки остальных неизвестных функций в системе (4.5) будут:

$$w \sim 1, \quad \{u_i, \varepsilon_i, \varepsilon_n, \sigma_i\} \sim \mu, \quad \{\sigma_s, \Lambda\} \sim \mu^2, \quad \sigma_{33} \sim \mu^3 \quad (6.1)$$

Из оценки $\Lambda \sim \mu^2$ следует, что для длинных изгибных колебаний и волн (при $\mu \ll 1$) их частота и скорость распространения существенно меньше, чем для тангенциальных колебаний и волн.

В соответствии с оценками (6.1) проведем изменение масштаба неизвестных функций в системе (4.5), положив

$$\mathbf{u} = i\mu \hat{\mathbf{u}}, \quad \sigma_s = i\mu^2 \hat{\sigma}_s, \quad \sigma_{33} = \mu^3 \hat{\sigma}_{33}, \quad \Lambda = \mu^2 \hat{\Lambda} \quad (6.2)$$

Опуская значок $\hat{}$, перепишем систему (4.5) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \mu^2 \mathbf{s}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u} + i\mu^3 \mathbf{g}^T \cdot \sigma_s + \mu^4 c_3 \sigma_{33} \\ \frac{d\mathbf{u}}{dz} &= -\mathbf{q}w - i\mu \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u} + \mu^2 \mathbf{G} \cdot \sigma_s - i\mu^3 \mathbf{g} \sigma_{33} \\ \frac{d\sigma_s}{dz} &= \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u} - i\mu \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \sigma_s - \mu^2 \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{s} \sigma_{33} - \mu^2 \Lambda \rho(z) \mathbf{u} \\ \frac{d\sigma_{33}}{dz} &= \mathbf{q}^T \cdot \sigma_s - \Lambda \rho(z) w \\ \sigma_{i3}(0) &= \sigma_{i3}(1) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Краевая задача (6.3) ранее неоднократно анализировалась [18, 19, 26, 27]. Приведем некоторые результаты. С учетом характера зависимости правых частей от малого параметра μ будем искать ее решение в виде рядов:

$$\begin{aligned} \Phi(z, \mu) &= \Phi^{(0)}(z) + \mu \Phi^{(1)}(z) + \mu^2 \Phi^{(2)}(z) + \dots, \quad \Phi = \{w, \mathbf{u}, \sigma_s, \sigma_{33}\} \\ \Lambda &= \Lambda_0 + \mu \Lambda_1 + \mu^2 \Lambda_2 + \dots \end{aligned} \quad (6.4)$$

В системе (6.3) все основные неизвестные функции имеют порядок единицы. Система (6.3) является точной и удобна для построения решения методом итераций. Ниже будет построена модель второго порядка точности по отношению к малому параметру μ . Поэтому слагаемые с множителями μ^3 и μ^4 в первых двух уравнениях (6.3) могут быть опущены.

Нулевое приближение получаем, полагая $\mu = 0$ в системе (6.3). Находим последовательно (см. также [18, 19])

$$w^{(0)} = w_0 = \text{const}, \quad \mathbf{u}^{(0)}(z) = \mathbf{u}_0 - \mathbf{q}(z - a)w_0, \quad (6.5)$$

где \mathbf{u}_0 — перемещение слоя $z = a$. Для симметричной по толщине пластины при $a = 1/2$ будет $\mathbf{u}_0 = 0$. Это же равенство имеет место, если у пластины существует нейтральный слой $z = a$. В частности, нейтральный слой существует для пластины из неоднородного по толщине трансверсально изотропного материала [18]. В общем случае вектор \mathbf{u}_0 находим из условия совместности третьего уравнения (6.3) при $\mu = 0$:

$$\mathbf{I}_a(\mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{u}^{(0)}) = \mathbf{I}_a(\mathbf{L}_0) \cdot \mathbf{u}_0 - \mathbf{I}_a((z - a)\mathbf{L}_0) \cdot \mathbf{q}w_0 = 0, \quad \mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(z) = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{A}_*(z) \cdot \mathbf{Q} \quad (6.6)$$

Далее находим

$$\sigma_s^{(0)}(z) = \mathbf{I}(\mathbf{L}_0(z) \cdot \mathbf{u}^{(0)}), \quad \sigma_{33}^{(0)}(z) = \mathbf{II}(\mathbf{q}^T \cdot \mathbf{L}_0(z) \cdot \mathbf{u}^{(0)}) - \Lambda_0 \mathbf{I}(\rho(z))w_0 \quad (6.7)$$

Условие совместности четвертого уравнения (6.3) дает $\mathbf{I}_a \mathbf{I}(\mathbf{q}^T \cdot \mathbf{L}_0(z) \cdot \mathbf{u}^{(0)}) - \Lambda_0 w^{(0)} = 0$, и после преобразований получаем систему для определения Λ_0 :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}_0 \cdot \mathbf{u}_0 - \mathbf{N}_1 w_0 &= 0 \\ -\mathbf{N}_1^T \cdot \mathbf{u}_0 + (\mathbf{Q}_2 - \Lambda_0)w_0 &= 0, \end{aligned} \quad (6.8)$$

в которой

$$\tilde{\mathbf{L}}_0 = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{Q}, \quad \mathbf{N}_1 = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{q}, \quad \mathbf{Q}_2 = \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{q}, \quad (6.9)$$

а $\mathbf{M}_k = \mathbf{I}_a((z - a)^k \mathbf{A}_*(z))$, $k = 0, 1, 2$, — моменты нулевого, первого и второго порядков матрицы \mathbf{A}_* тангенциальных упругих модулей. Заметим, что нулевое приближение зависит только от них. Развернутые выражения операторов в (6.9) приведены в [25]. В частности,

$$\mathbf{Q}_2 = a_{11}q_1^4 + a_{13}q_1^3q_2 + 2(a_{12} + 2a_{33})q_1^2q_2^2 + 4a_{23}q_1q_2^3 + a_{22}q_2^4, \quad (6.10)$$

где a_{ij} — элементы матрицы $\mathbf{M}_2 = \mathbf{I}_a((z - a)^2 \mathbf{A}_*(z))$.

Для симметричной по толщине пластины и для пластины из трансверсально изотропного материала $\mathbf{u}_0 = 0$ и $\Lambda_0 = \mathbf{Q}_2$. В общем случае $\Lambda_0 = \mathbf{Q}_2 - \mathbf{N}_1^T \cdot \tilde{\mathbf{L}}_0^{-1} \cdot \mathbf{N}_1$.

Нулевое приближение в силу формул (6.5) соответствует гипотезам КЛ о прямой недеформируемой нормали. Некоторое обобщение по сравнению с однородным изотропным материалом заключается в том, что дополнительно учитывается зависимость нормальных напряжений σ_{11} и σ_{22} от деформаций сдвига ϵ_{12} и зависимость напряжений сдвига σ_{12} от нормальных деформаций ϵ_{11} и ϵ_{22} .

Из нулевого приближения следует, что скорость распространения изгибной волны $v(\mu, q_1, q_2) = \mu\sqrt{\Lambda}$ по анизотропной пластине зависит как от ее длины L , так и от направления распространения, определяемого вектором $\mathbf{n} = (q_1, q_2)$, $|\mathbf{n}| = 1$ (см. формулу (6.10), а также работу [32], в которой приведен пример). В нулевом приближении скорость изгибной волны v обратно пропорциональна ее длине L , ибо $\mu = 2\pi/L$.

Приближенные решения (6.4) сравнивались с точными решениями, полученными при численном интегрировании системы (6.3). Расчеты показали [18, 19], что если все элементы матрицы упругих модулей \mathbf{E} (см. (2.3)) имеют один порядок, то нулевое приближение имеет удовлетворительную точность. Если же элементы матрицы \mathbf{C} , стоящей в формулах (4.3) в знаменателе, малы, точность нулевого приближения недостаточна, что стимулирует построение старших приближений. Как правило, поправки старших приближений

связаны с учетом влияния поперечного сдвига, которое не учитывается нулевым приближением. В частности, анализ колебаний многослойных пластин с чередующимися мягкими и жесткими слоями приводит к необходимости рассмотрения старших приближений.

7. Старшие приближения. Первое приближение вносит поправку порядка μ в нулевое приближение. Отметим, что для моноклинного материала (при $\mathbf{S} = \mathbf{0}$) в системе (6.3) слагаемые порядка μ исчезают и можно сразу переходить ко второму приближению. Многослойную пластину, состоящую из системы ортотропных слоев с произвольно ориентированными направлениями ортотропии, можно рассматривать как моноклинную пластину с кусочно-постоянными модулями упругости [9, 23].

Построим первое приближение при $\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$. Такую анизотропию будем называть наклонной, ибо она получается у композитной пластины, состоящей из ортотропной матрицы, подкрепленной системой нитей, наклоненных к плоскости пластины [24]. Слагаемые порядка μ в системе (6.3) дают:

$$\begin{aligned} w^{(1)} &= 0 \\ \mathbf{u}^{(1)} &= \mathbf{u}_1 - i\mathbf{I}(\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}^{(0)}) \\ \sigma_s^{(1)} &= \mathbf{I}(\mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{u}^{(1)}) - i\mathbf{I}(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \sigma_s^{(0)}) \\ \sigma_{33}^{(1)} &= \mathbf{I}(\mathbf{q}^T \cdot \sigma_s^{(1)}) - \Lambda_1 \mathbf{I}(\rho)w_0, \end{aligned} \quad (7.1)$$

где $\mathbf{S}_Q^T = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{Q}$, вектор \mathbf{u}_1 и величина Λ_1 определяются из условий совместности третьего и четвертого уравнений (7.1). Как и для тангенциальных колебаний и волн, имеем $\Lambda_1 = 0$, что следует из вещественности величины Λ , а также подтверждается вычислениями. Следовательно, для изгибных колебаний и волн величина Λ в исходных обозначениях (см.(6.2)) представима в виде:

$$\Lambda = \mu^2(\Lambda_0 + \mu^2\Lambda_2 + O(\mu^4)) \quad (7.2)$$

При построении второго приближения в рядах (6.4) ограничимся вычислением величины Λ_2 . Последовательно находим

$$\begin{aligned} w^{(2)} &= \mathbf{I}(\mathbf{s}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}^{(0)}) \\ \mathbf{u}^{(2)} &= \mathbf{u}_2 - \mathbf{I}(\mathbf{q}w^{(2)}) - i\mathbf{I}(\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}^{(1)}) + \mathbf{I}(\mathbf{G} \cdot \sigma_s^{(0)}) \\ \sigma_s^{(2)} &= \mathbf{I}(\mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{u}^{(2)}) - i\mathbf{I}(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \sigma_s^{(1)}) - \mathbf{I}(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{s}\sigma_{33}^{(0)}) - \Lambda_0 \mathbf{I}(\rho\mathbf{u}^{(0)}) \\ \sigma_{33}^{(2)} &= \mathbf{I}(\mathbf{q}^T \cdot \sigma_s^{(2)}) - \Lambda_2 \mathbf{I}(\rho)w_0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

Теперь граничное условие $\sigma_{33}^{(2)}(1) = 0$ дает $(\mathbf{I}_a(\rho) = 1)$

$$\Lambda_2 = F/w_0, \quad F = \mathbf{I}_a(\mathbf{q}^T \cdot \sigma_s^{(2)}) \quad (7.4)$$

Чтобы воспользоваться формулой (7.4), представим величину F в виде $F = F_1 w_0$ (тогда будет $\Lambda_2 = F_1$). Для вычисления величины F_1 последовательно используем формулы (6.5), (6.7), (7.1) и (7.3) и выражаем неизвестные функции через ранее найденные вплоть до вычисления функции $\sigma_s^{(2)}$, входящей в уравнение (7.4). При интегрировании второго уравнения (6.3) вводятся постоянные векторы \mathbf{u}_0 , \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , которые определяются из условия совместности третьего уравнения (6.3) в соответствующем приближении:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}_0 \cdot \mathbf{u}_0 - \mathbf{N}_1 w_0 &= 0 \\ \tilde{\mathbf{L}}_0 \cdot \mathbf{u}_1 - i\mathbf{I}_a(\mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{I}(\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}^{(0)}) - i\mathbf{I}_a(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \sigma_s^{(0)}) &= 0 \\ \tilde{\mathbf{L}}_0 \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{I}_a(\mathbf{L}_0 \cdot [-\mathbf{I}(\mathbf{q}w^{(2)}) - i\mathbf{I}(\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}^{(1)}) + \mathbf{I}(\mathbf{G} \cdot \sigma_s^{(0)})] - & \\ - i\mathbf{I}_a(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \sigma_s^{(1)}) - \mathbf{I}_a(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{s}\sigma_{33}^{(0)}) - \Lambda_0 \mathbf{I}_a(\rho\mathbf{u}^{(0)}) &= 0 \end{aligned} \quad (7.5)$$

Развернутая запись формулы (7.4) весьма громоздка. В случае переменных по z модулей упругости для определения коэффициентов нужно вычислять повторные интегралы. Для моноклинного материала формула (7.4) упрощается. Упрощения также имеют место, если у пластины при изгибе имеется нейтральный слой.

8. Изгибные колебания и волны в многослойной пластине. Рассмотрим многослойную пластину с чередующимися мягкими и жесткими слоями. Наиболее просто решается задача для трансверсально изотропного материала. В этом случае система уравнений (6.3) шестого порядка после введения вспомогательных неизвестных функций [18, 19]

$$u = q_1 u_1 + q_2 u_2, \quad v = q_1 u_2 - q_2 u_1, \quad \sigma = q_1 \sigma_{13} + q_2 \sigma_{23}, \quad \tau = q_1 \sigma_{23} - q_2 \sigma_{13} \quad (8.1)$$

приводится к системе четвертого порядка для неизвестных функций $u, w, \sigma, \sigma_{33}$:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= -\mu^2 c_v(z)u + \mu^4 c_3(z)\sigma_{33}, & \frac{d\sigma}{dz} &= E_0(z)u + \mu^2 c_v(z)\sigma_{33} - \mu^2 \lambda \hat{\rho}(z)u \\ \frac{du}{dz} &= w + \mu^2 c_g(z)\sigma, & \frac{d\sigma_{33}}{dz} &= -\sigma - \lambda \hat{\rho}(z)w \\ \sigma &= \sigma_{33} = 0, & z &= 0, 1 \end{aligned} \quad (8.2)$$

Аналогичной системой описывается уравнение изгибных колебаний неоднородной по толщине балки-полоски из трансверсально изотропного материала [18].

Асимптотическое интегрирование, подобное изложенному в пп. 6, 7, дает формулу для параметра частоты Λ :

$$\Lambda = \frac{\rho_* \omega^2}{E_* q^2} = D \mu^2 (1 - g \mu^2 + O(\mu^4)), \quad (8.3)$$

где величина $g = A_g + A_v + J + J_v$ учитывает эффекты второго порядка, причем слагаемые A_g, A_v, J, J_v учитывают, соответственно, влияние поперечного сдвига, обжатие нормального волокна, инерцию его вращательного движения и инерцию, связанную с растяжением нормального волокна. В качестве характерного модуля упругости принята величина $E_* = \mathbf{I}_a(E_0(z))$, $E_0 = E/(1 - \nu^2)$, где E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона. В формуле (8.3)

$$D = \mathbf{I}_a((z - a)^2 E_0(z)), \quad A_g = \frac{1}{D} \mathbf{I}_a \left(\frac{\varphi^2(z)}{G_{13}(z)} \right), \quad \varphi(z) = \mathbf{I}((z - a)E_0(z)), \quad (8.4)$$

где D – изгибная жесткость эквивалентной однородной пластины, a – координата нейтрального слоя (который при изгибе неоднородных трансверсально изотропных пластин всегда существует), G_{13} – модуль упругости поперечного сдвига. Использование формулы (8.3) для многослойных пластин с чередующимися жесткими и мягкими слоями показало [18, 19], что если слои незначительно различаются по жесткости, то все слагаемые второго порядка в сумме g имеют одинаковый порядок, а сама формула (8.3) имеет высокую точность. Если же отношение η модулей упругости слоев растет, то сдвиговой параметр A_g также растет (ибо в знаменателе интеграла для A_g стоит величина G_{13} , которая мала для мягких слоев), а остальные параметры второго порядка малости практически не меняются и ими можно пренебречь, т.е. из эффектов второго порядка малости можно учитывать только поперечный сдвиг и считать $g = A_g$. В результате приходим к эквивалентной однослойной пластине Тимошенко–Рейсснера. Расчеты [18, 19] показали, что при $\eta \leq 1000$ погрешность этой модели имеет порядок 1%.

Формула (8.3) становится неприменимой при $g \geq 1$. Полученная ранее формула [19]

$$\Lambda = D\mu^2(1 + g\mu^2)^{-1}, \quad (8.5)$$

эквивалентная по точности формуле (8.3) при малых g и достаточно точная при $g \sim 1$.

Как следует из (8.3), (8.5), для трансверсально изотропной пластины частотный параметр Λ не зависит от волновых чисел q_1 и q_2 по отдельности, а зависит только от величины $q = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$. Скорость распространения изгибной волны зависит от ее длины, но не зависит от направления распространения.

Ранее (см. [18, 19] и др.) для оценки погрешности асимптотических формул использовалось численное интегрирование уравнений (8.2), (6.3). При этом количество и расположение слоев является несущественным. Для трехслойной симметричной по толщине балки [37] построено точное аналитическое (весьма громоздкое) дисперсионное уравнение. Был дан исчерпывающий анализ дисперсионного уравнения без предположения о длинноволновом характере волн [38]. Этот анализ опирается на предыдущие исследования [37] и на упрощенные модели при частных предположениях о параметрах задачи.

Рассмотрим многослойную пластину симметричного по толщине строения с изотропными мягкими слоями и жесткими слоями из моноклинного материала. Из эффектов второго порядка малости будем учитывать только влияние поперечного сдвига, пренебрегая растяжением нормального волокна и силами инерции второго порядка малости. Тогда формула (8.4) для сдвигового параметра A_g допускает обобщение

$$A_g = \frac{1}{D} \mathbf{I}_a(\mathbf{b}^T(z) \cdot \mathbf{G}(z) \cdot \mathbf{b}(z)), \quad \mathbf{b}(z) = \mathbf{I}((z - a)\mathbf{L}_0(z)) \cdot \mathbf{q}, \quad (8.6)$$

где $D = Q_2$ – изгибная жесткость пластины, вычисляемая по формуле (6.10), $a = 1/2$ – координата нейтрального слоя, \mathbf{G} – матрица упругих податливостей на поперечный сдвиг (с большими элементами для мягких слоев). Как главный член $\mu^2 Q_2$ параметра частоты, так и поправка A_g зависят от волновых чисел q_1 и q_2 .

Формула (8.3) для такой пластины допускает погрешность того же порядка, что и для пластины из трансверсально изотропного материала. Это обстоятельство было проверено [23] путем сравнения с точным решением трехмерной задачи. Рассмотрение более общего случая (несимметричной по толщине пластины либо пластины с наклонной анизотропией) приводит к существенно более громоздким формулам и здесь не приводится.

Заметим, что для многослойной пластины упругие модули и толщина являются кусочно-постоянными функциями, однако это обстоятельство не является препятствием при вычислении интегралов в (7.3), (8.3) и др. и при численном интегрировании системы (6.3).

Обсуждение. Исходя из трехмерных динамических уравнений теории упругости методом асимптотического интегрирования получены двухмерные модели для описания длинноволновых колебаний и длинных волн в тонкой анизотропной неоднородной по толщине пластине со свободными лицевыми плоскостями (предполагается, что упругие модули и плотность не зависят от тангенциальных координат, но могут зависеть от координаты в направлении нормали к пластине). В каждом из тангенциальных направлений длинноволновые модели описывают три плоских гармонических по тангенциальным направлениям волны: медленную (низкочастотную) изгибную волну и две тангенциальных волны. Для изгибной волны (подобно волнам в балке Бернулли–Эйлера) характерна сильная дисперсия (сильная зависимость скорости распространения волны или частоты колебаний от длины волны). Для тангенциальных волн характерна слабая дисперсия, убывающая пропорционально квадрату отношения h/L (для

продольных волн в круглом стержне слабая дисперсия была впервые установлена в [33, 34]). Для сравнения укажем, что в однородном анизотропном линейно упругом пространстве в каждом направлении могут распространяться без дисперсии три плоских (не обязательно гармонических) волны, скорости этих волн зависят от направления распространения (в изотропном пространстве – это продольная волна сжатия и две поперечных волны сдвига).

Данная статья в некотором смысле является дополнением к монографии [30], в которой рассматривается асимптотика коротких волн в трехмерном анизотропном упругом теле. Рассмотрены длинные волны в пластине со свободными лицевыми плоскостями, при этом предполагается, что деформации охватывают всю толщину пластины. В результате волны Релея, локализующиеся вблизи свободной поверхности, и волны Стоунли, локализующиеся вблизи плоскости раздела слоев в многослойной пластине, не описываются длинноволновой асимптотикой и хорошо описываются коротковолновой асимптотикой [30]. Что касается волны Лява для пластины, лежащей на упругом или жидком полупространстве, то для ее исследования вполне может быть использована и длинноволновая асимптотика. Для этого на одной из лицевых плоскостей пластины следует задать условия контакта с полупространством.

Обращаясь к задачам свободных колебаний, отметим, что для тангенциальных колебаний найденное выше при учете эффектов второго порядка малости уточнение спектра мало и не является существенным для приложений. Для изгибных колебаний неоднородных по толщине пластин (особенно для многослойных пластин с чередующимися мягкими и жесткими слоями) указанное уточнение весьма существенно. Для многослойных пластин из трансверсально изотропного материала возможно введение эквивалентной однородной пластины, и влияние эффектов второго порядка изучено достаточно полно [13, 16–21, 38]. В меньшей степени исследованы колебания ортотропных и моноклинных пластин [9, 22, 23], и практически отсутствуют численные результаты для анизотропных пластин с наклонной анизотропией [24]. Хотя общие формулы второго порядка точности здесь приведены, но они слишком громоздки. Желательно построить более простые модели для описания эффектов, связанных с наклонной анизотропией.

В работе рассмотрены свободные колебания и волны в бесконечной пластине. Исследование колебаний анизотропной неоднородной пластины конечных размеров (например, прямоугольной пластины) существенно сложнее, ибо гармоническое решение, как правило, недостаточно и приходится обращаться к интегрированию громоздкой системы дифференциальных уравнений (см. [26, 27]). Некоторые результаты были получены для частных вариантов граничных условий [9, 19, 21]. Как правило разделение переменных оказывается невозможным и трудности построения решений можно преодолеть, прибегая к вариационной постановке задачи [39–41].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 18-01-00884а, 19-01-00208а, 20-51-52001 МНТ-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kirchhoff G.* Vorlesungen über Mathematische Physik. Mechanik. Leipzig: Teubner, 1876. 466 p.
2. *Love A.E.H.* A Treatise on the Mathematical Theory Elasticity. Cambridge: Univ. Press, 1927.
3. *Timoshenko S.P.* On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars // Philos. Mag. 1921. V. 41. Ser. 6. P. 744–746.
4. *Reissner E.* The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // Trans. ASME, J. Appl. Mech. 1945. V. 12. P. 69–77.
5. *Уфлянд Я.С.* Распространение волн изгибных колебаний в стержнях и пластинах // ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 3. С. 287–300.
6. *Mindlin R.D.* Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // ASME. J. Appl. Mech. 1951. V. 18. P. 31–38.

7. Векуа И.Н. О методе расчета призматических оболочек // Тр. Тбил. мат. инст. 1955. Т. 21. С. 191–259.
8. Родионова В.А., Тутаев Б.Ф., Черных К.Ф. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. Изд. С.-Петербург. ун-та, СПб. 1996.
9. Reddy J.N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Boca Raton: CRC Press, 2003. 858 p.
10. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 512 с.
11. Аголюян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414 с.
12. Vetukov Y., Kuzin A., Krommer M. Asymptotic splitting of the three-dimensional problem of elasticity for non-homogeneous piezoelectric plates // Int. J. Solids & Struct. 2011. V. 40. P. 12–23.
13. Kienzler R., Shneider P. Comparison of various linear plate theories in the light of a consistent second order approximation // Shell Struct.: Theory & Appl. Proc. 10th SSTA 2013 Conf. 2014. V. 3. P. 109–112.
14. Schneider P., Kienzler R. A Reissner-type plate theory for monoclinic material derived by extending the uniform-approximation technique by orthogonal tensor decompositions of nth-order gradients // Meccanica. 2017. V. 52. P. 2143–2167.
15. Товстик П.Е. Об асимптотическом характере приближенных моделей балок, пластин и оболочек // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 2007. № 3. С. 49–54.
16. Товстик П.Е., Товстик Т.П. Уравнение изгиба тонкой пластины второго порядка точности // Докл. РАН. 2014. Т. 457. № 6. С. 660–663.
17. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Обобщенная модель Тимошенко–Рейсснера сильно неоднородной по толщине пластины // Докл. РАН. 2016. Т. 469. № 5. С. 562–566.
18. Tovstik P.E., Tovstik T.P. Generalized Timoshenko–Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction // ZAMM. 2017. V. 97. № 3. P. 296–308.
19. Tovstik P., Tovstik T. An elastic plate bending equation of second-order accuracy // Acta Mech. 2017. V. 228. № 10. P. 3403–3419.
20. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Континуальная модель многослойной нанопластины // Докл. РАН. 2016. Т. 471. № 3. С. 294–298.
21. Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P. Free vibrations of a transversely isotropic plate with application to a multilayered nano-plate // Mech. Mater. & Technol. Springer. Intern. Publ. AG, Cham Adv. Struct. Mater. 2017. V. 46. P. 349–362.
22. Морозов Н.Ф., Беляев А.К., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Двухмерные уравнения второго порядка точности для многослойной пластины с ортотропными слоями // Докл. РАН. 2018. Т. 483. № 1. С. 37–42.
23. Belyaev A.K., Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P. Two-dimensional linear model of multilayered anisotropic plate // Acta Mech. 2019. V. 230. P. 2891–2904.
24. Товстик П.Е., Товстик Т.П. Двухмерные модели пластин из анизотропного материала // Тр. семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”. Вып. 3. СПб. Изд. С.-Петербург. ун-та. 2008. С. 4–16.
25. Товстик П.Е., Товстик Т.П. Двухмерная модель пластины из анизотропного неоднородного материала // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 2. С. 32–45.
26. Товстик П.Е. Двухмерная модель второго порядка точности для анизотропной пластины // Вестн. СПбГУ. Мат. Мех. Астрон. 2019. Т. 6(64). № 1. С. 157–169.
27. Belyaev A.K., Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P., Zelinskaya A.V. Two-dimensional model of plate made of material with general anisotropy // В кн.: Recent Developments in the Theory of Shells. Cham: Springer, 2019. P. 91–108.
28. Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. San Diego: Acad. Press, 1998. 226 p.
29. Михасев Г.И., Товстик П.Е. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы. М.: Физматлит, 2009. 292 с.
30. Бабич В.М., Киселев В.П. Упругие волны. Высокочастотная теория. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2014. 320 с.
31. Mikhasev G.I., Tovstik P.E. Localized Dynamics of Thin-Walled Shells. Boca-Raton: CRC Press, 2020. 350 p.

32. *Беляев А.К., Зелинская А.В., Иванов Д.Н., Морозов Н.Ф., Наумова Н.В., Товстик П.Е., Товстик Т.П.* Приближенная теория колебаний многослойных анизотропных пластин // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инфор. 2018. Т. 18. № 4. С. 397–411.
33. *Pochhammer L.* Uber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten Kleiner Schwingungen in Einem Unbegrenzten Isotropen Kreiscylinder // J. Reine & Angewandte Math. 1876. V. 81. P. 324–336.
34. *Chree C.* Longitudinal Vibrations of a Circular Bar // Quart. J. Pure & Appl. Math. 1886. V. 21. P. 287–291.
35. *Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V.* Pochhammer–Chree waves: polarization of the axially symmetric modes // Arch. Appl. Mech. 2018. V. 88. № 8. P. 1385–1394.
36. *Ильяшенко А.В.* Продольные волны Похгаммера–Кри: аномальная поляризация // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 3. С. 136–146.
37. *Lee P., Chang N.* Harmonic waves in elastic sandwich plates // J. Elast. 1979. V. 9. № 1. P. 51–69.
38. *Kaplunov J.D., Prikazchikov D.A., Prikazchikova L.A.* Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate // Int. J. Solids & Struct. 2017. V. 113–114. P. 169–179.
39. *Паршина Л.В., Рябов В.М., Ярцев Б.А.* Энергия диссипации в неоднородных композитных структурах. 1. Постановка задачи // Вестн. СПбГУ. Мат. Мех. Астрон. 2018. Т. 5 (63). № 2. С. 300–309.
40. *Паршина Л.В., Рябов В.М., Ярцев Б.А.* Энергия диссипации в неоднородных композитных структурах. 2. Метод решения. // Вестн. СПбГУ. Мат. Мех. Астрон. 2018. Т. 5 (63). № 4. С. 678–688.
41. *Паршина Л.В., Рябов В.М., Ярцев Б.А.* Энергия диссипации в неоднородных композитных структурах. 3. Численный эксперимент // Вестн. СПбГУ. Мат. Мех. Астрон. 2019. Т. 6 (64). № 1. С. 144–156.

Long-Wave Vibrations and Long Waves in an Anisotropic Plate

N. F. Morozov^{a,b,#}, P. E. Tovstik^{a,b,##}, and T. P. Tovstik^{b,###}

^a St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

^b Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS, St. Petersburg, Russia

[#] e-mail: morozov@nm1016.spb.edu

^{##} e-mail: peter.tovstik@mail.ru

^{###} e-mail: tovstik_t@mail.ru

Free vibrations and plane waves are investigated in a linear approximation in a thin elastic anisotropic infinite plate of constant thickness. A general anisotropy described by 21 elastic moduli is considered. It is assumed that the moduli and the density do not depend on the tangential co-ordinates, and they may depend on the thickness co-ordinate. Multi-layered and functionally graded plates are not excluded from consideration. An asymptotic expansion in power series of a small thickness parameter, μ , of a harmonic in tangential directions solution of 3D equations of the theory of elasticity is built in assumption that the length of wave essentially exceeds the plate thickness. For the fixed values of the wave numbers there exist only three long-wave solutions: one bending low-frequency solution, and two tangential solutions. The dispersion equations are built with the second order accuracy in μ . For the bending solutions the strong dependence of the frequency on the length of wave is typical, and the tangential waves propagate with the small dispersion. Partial cases of anisotropy are considered.

Keywords: anisotropic heterogeneous plate, harmonic vibrations, plane waves, dispersion equation

REFERENCES

1. *Kirchhoff G.* Vorlesungen über Mathematische Physik. Mechanik. Leipzig: Teubner, 1876. 466 p.
2. *Love A.E.H.* A Treatise on the Mathematical Theory Elasticity. Cambridge: Univ. Press, 1927.

3. *Timoshenko S.P.* On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars // *Philos. Mag.*, 1921. vol. 41, Ser. 6, pp. 744–746.
4. *Reissner E.* The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 1945, vol. 12, pp. 69–77.
5. *Ufland Ya.S.* Waves propagation at bending vibrations of rods and plates // *JAMM*, 1948, vol. 12, no. 3, pp. 287–300. (in Russian)
6. *Mindlin R.D.* Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // *ASME J. Appl. Mech.*, 1951, vol. 18, pp. 31–38.
7. *Vekua I.N.* On the method of prismatic shells design // *Tr. Tbil. Math. Inst.*, 1955, vol. 21, pp. 191–259. (in Russian)
8. *Chernykh K.F., Rodionova V.A., Titaev B.F.* Applied theory of anisotropic plates and shells. St. Petersburg: Univ. Press, 1996. (in Russian)
9. *Reddy J.N.* Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Boca Raton: CRC Press, 2003. 858 p.
10. *Goldenweizer A.L.* Theory of Elastic Thin Shells. N.Y.: Pergamon Press, 1961. 680 p.
11. *Agolovyan L.A.* Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Moscow: Nauka, 1997. (in Russian)
12. *Vetukov Y., Kuzin A., Krommer M.* Asymptotic splitting of the three-dimensional problem of elasticity for non-homogeneous piezoelectric plates // *Int. J. Solids & Struct.*, 2011, vol. 40, pp. 12–23.
13. *Kienzler R., Shneider P.* Comparison of various linear plate theories in the light of a consistent second order approximation // *Shell Struct.: Theory & Appl. Proc. 10th SSTA 2013 Conf.*, 2014, vol. 3, pp. 109–112.
14. *Schneider P., Kienzler R.* A Reissner-type plate theory for monoclinic material derived by extending the uniform-approximation technique by orthogonal tensor decompositions of n th-order gradients // *Meccanica*, 2017, vol. 52, pp. 2143–2167.
15. *Tovstik P.E.* On the asymptotic character of approximate models of beams, plates and shells // *Vestn. St. Petersburg Univ. Math., Mech., Astron.*, 2007, no. 3, pp. 49–54.
16. *Tovstik P.E., Tovstik T.P.* A thin-plate bending equation of second-order accuracy // *Dokl. Phys.*, 2014, vol. 59, no. 8, pp. 389–392.
17. *Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P.* The Timoshenko–Reissner generalized model of a plate highly nonuniform in thickness // *Dokl. Phys.*, 2016, vol. 61, pp. 394–398.
18. *Tovstik P.E., Tovstik T.P.* Generalized Timoshenko–Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction // *ZAMM*, 2017, vol. 97, no. 3, pp. 296–308.
19. *Tovstik P., Tovstik T.* An elastic plate bending equation of second-order accuracy // *Acta Mech.*, 2017, vol. 228, no. 10, pp. 3403–3419.
20. *Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P.* Continuum model of a multi-layered nano-plate // *Dokl. Phys.*, 2016, vol. 61, no. 11, pp. 567–570.
21. *Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P.* Free vibrations of a transversely isotropic plate with application to a multilayered nano-plate // *Mech. Mater. & Technol. Springer. Int. Publ. AG. Cham. Adv. Struct. Mater.*, 2017, vol. 46, pp. 349–362.
22. *Morozov N.F., Belyaev A.K., Tovstik P.E., Tovstik T.P.* Two-dimensional equations of second order accuracy for a multilayered plate with orthotropic layers // *Dokl. Phys.*, 2018, vol. 63, no. 11, pp. 471–475.
23. *Belyaev A.K., Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P.* Two-dimensional linear model of multilayered anisotropic plate // *Acta Mech.*, 2019, vol. 230, pp. 2891–2904.
24. *Tovstik P.E., Tovstik T.P.* Two-dimensional models of plates made of an anisotropic material // *Comput. Meth. in Mech. Contin. Media. St. Petersburg Univ*, 2008, vol. 3, pp. 4–16. (in Russian)
25. *Tovstik P.E., Tovstik T.P.* Two-dimensional model of a plate made of an anisotropic inhomogeneous material // *Mech. Solids*, 2017, vol. 52, no. 2, pp. 144–154.
26. *Tovstik P.E.* Two-dimensional model of second-order accuracy for an anisotropic plate // *Vestn. St. Petersburg Univ. Math., Mech., Astron.*, 2019, vol. 6(64), no. 1, pp. 157–169.
27. *Belyaev A.K., Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P., Zelinskaya A.V.* Two-dimensional model of plate made of material with general anisotropy // In: *Recent Developments in the Theory of Shells. Cham: Springer*, 2019. pp. 91–108.

28. *Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V.* Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. San Diego: Acad. Press, 1998. 226 p.
29. *Mikhasev G.I., Tovstik P.E.* Localized Vibrations and Waves in Thin Shells. Asymptotic methods. Moscow: Fizmatlit, 2009. 292 p. (in Russian)
30. *Babich V.M., Kiselev A.P.* Elastic Waves. High-Frequency Theory. Boca Raton: CRC Press, 2020. 286 p.
31. *Mikhasev G.I., Tovstik P.E.* Localized Dynamics of Thin-Walled Shells. Boca-Raton: CRC Press, 2020. 350 p.
32. *Belyaev A.K., Zelinskaya A.V., Ivanov D.N., Morozov N.F., Naumova N.V., Tovstik P.E., Tovstik T.P.* Approximate theory of a laminated anisotropic plate vibrations // *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, no. 4, pp. 397–411. (in Russian)
33. *Pochhammer L.* Uber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten Kleiner Schwingungen in Einem Unbegrenzten Isotropen Kreiscylinder // *J. Reine & Angewandte Math.*, 1976, vol. 81, pp. 324–336.
34. *Chree C.* Longitudinal vibrations of a circular bar // *Quart. J. Pure & Appl. Math.*, 1886, vol. 21, pp. 287–291.
35. *Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V.* Pochhammer–Chree waves: polarization of the axially symmetric modes // *Arch. Appl. Mech.*, 2018, vol. 88, no. 8, pp. 1385–1394.
36. *Ilyashenko A.V.* Longitudinal Pochhammer Chree waves: anormal polarization // *Mech. Solids*, 2019, no. 3, pp. 136–146.
37. *Lee P., Chang N.* Harmonic waves in elastic sandwich plates // *J. Elast.*, 1979, vol. 9, no. 1, pp. 51–69.
38. *Kaplunov J.D., Prikazchikov D.A., Prikazchikova L.A.* Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate // *Int. J. Solids & Struct.*, 2017, vol. 113–114, pp. 169–179.
39. *Parshina L.V., Ryabov V.M., Yartsev B.A.* Energy dissipation during vibrations of non-uniform composite structures. 1. Formulation of the problem // *Vestn. St. Petersburg Univ. Math., Mech., Astron.*, 2018, vol. 5 (63), no. 2, pp. 300–309.
40. *Parshina L.V., Ryabov V.M., Yartsev B.A.* Energy dissipation during vibrations of non-uniform composite structures. 2. Method of solution // *Vestn. St. Petersburg Univ. Math., Mech., Astron.*, 2018, vol. 5 (63), no. 4, pp. 678–688.
41. *Parshina L.V., Ryabov V.M., Yartsev B.A.* Energy dissipation during vibrations of non-uniform composite structures. 3. Numerical experiments // *Vestn. St. Petersburg Univ. Math., Mech., Astron.*, 2018, vol. 6 (64), no. 1, pp. 144–156.

УДК 539.3

ПЛОСКИЕ ТРЕЩИНЫ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОМ СЛОЕ© 2020 г. Е. А. Артамонова¹, Д. А. Пожарский^{1,*}¹ *Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия***e-mail: pozharda@rambler.ru*

Поступила в редакцию 17.01.2020 г.

После доработки 21.04.2020 г.

Принята к публикации 23.05.2020 г.

Рассматриваются задачи о плоских трещинах нормального отрыва (математических разрезах) в срединной плоскости трансверсально изотропного упругого слоя, внешние грани которого находятся в условиях скользящей заделки. Плоскости изотропии параллельны или перпендикулярны граням слоя. При помощи интегрального преобразования Фурье задачи сведены к интегро-дифференциальным уравнениям относительно раскрытия трещины, из которых предельными переходами можно получить известные уравнения соответствующих задач для трансверсально изотропного пространства и изотропного слоя. Для эллиптических трещин применяется регулярный асимптотический метод, эффективный для относительно толстого слоя. Показано, область применимости метода сужается с увеличением анизотропии, характеризуемой корнями характеристического уравнения (для изотропного материала все корни равны единице). Для полосовых трещин получены замкнутые решения на основе специальных аппроксимаций символов ядер интегральных уравнений, относительные погрешности которых убывают с увеличением анизотропии. Расчеты сделаны для известных трансверсально изотропных материалов.

Ключевые слова: теория упругости, трансверсальная изотропия, слой, трещина**DOI:** 10.31857/S0032823520040037

Задачи механики анизотропных материалов являются актуальными [1, 2]. Для решения задач механики разрушения разработаны эффективные численные методы [3–5]. Ранее исследовались задачи об эллиптической [6, 7], полосовой [8] трещине, периодической системе эллиптических трещин [9] в трансверсально изотропном пространстве, когда плоскости изотропии перпендикулярны плоскостям трещин. В работе [7] оси эллипса повернуты относительно осей исходной системы координат. Изучался случай, когда плоскость трещины в неограниченном теле находится под произвольным углом к плоскостям изотропии [10]. Показана связь между задачами о трещинах и контактными задачами для обобщенного анизотропного материала [11]. Исследовались плоские задачи о продольной трещине в ортотропной упругой полосе [12, 13]. Рассматривалась возможность искривления трещины в анизотропной плоскости [14]. Применялись методы идентификации трещин в анизотропной плите [15]. Цель настоящей статьи – получение новых аналитических решений. Выводится интегро-дифференциальное уравнение задачи о трещине в трансверсально изотропном слое, плоскость которой ортогональна плоскостям изотропии. Для сравнения рассматривается и традиционный случай параллельных плоскостей [16]. В отличие от метода последовательных приближений [16], в настоящей работе применяется регулярный асимптотический метод В.М. Александрова, а также аналитический метод, основанный на спе-

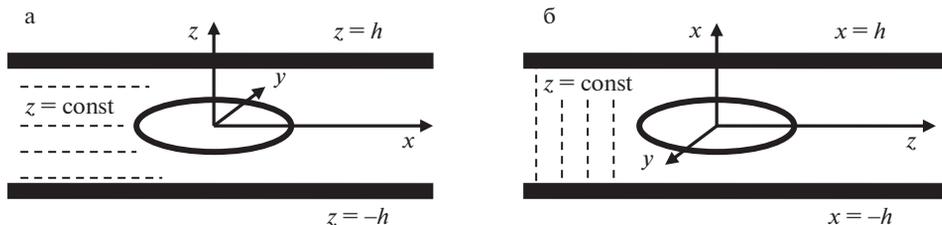


Рис. 1. Направление плоскостей изотропии в слое с трещиной.

циальной аппроксимации символа ядра, ранее использованные для изотропного слоя [17]. При выводе каждого члена асимптотики для эллиптической трещины требуется точное решение интегрального уравнения для такой трещины в пространстве [6, 9, 17].

1. Постановка задач. Рассмотрим трансверсально изотропный упругий слой $\{|x| < \infty, |y| < \infty, |z| \leq h\}$, в срединной плоскости которого имеется симметрично нагруженная трещина нормального отрыва, занимающая область Ω . Плоскости изотропии $z = \text{const}$ параллельны граням слоя (задача *A*, рис. 1, а). Рассмотрим аналогичную задачу *B* для слоя $\{|x| \leq h, |y| < \infty, |z| < \infty\}$, которая отличается от задачи *A* направлением осей координат и тем, что плоскости изотропии $z = \text{const}$ перпендикулярны граням слоя (рис. 1, б).

Для обеих задач закон Гука имеет вид [1, 6]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= A_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + (A_{11} - 2A_{66}) \frac{\partial u_y}{\partial y} + A_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \sigma_y &= (A_{11} - 2A_{66}) \frac{\partial u_x}{\partial x} + A_{11} \frac{\partial u_y}{\partial y} + A_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \sigma_z &= A_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} + A_{13} \frac{\partial u_y}{\partial y} + A_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \tau_{xy} = A_{66} \frac{\partial u_x}{\partial y} + A_{66} \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \tau_{yz} &= A_{44} \frac{\partial u_y}{\partial z} + A_{44} \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad \tau_{xz} = A_{44} \frac{\partial u_x}{\partial z} + A_{44} \frac{\partial u_z}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.1)$$

В частном случае изотропного тела в формулах (1.1) следует положить (G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона)

$$A_{11} = A_{33} = \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}, \quad A_{13} = \frac{2G\nu}{1-2\nu}, \quad A_{44} = A_{66} = G \quad (1.2)$$

В силу симметрии достаточно рассматривать половину слоя, граничные условия задачи *A* имеют вид

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \sigma_z &= -q(x, y), \quad (x, y) \in \Omega; \quad u_z = 0, \quad (x, y) \notin \Omega; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\ z = h: \quad u_z &= \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

а для задачи *B*

$$\begin{aligned} x = 0: \quad \sigma_x &= -q(y, z), \quad (y, z) \in \Omega; \quad u_x = 0, \quad (y, z) \notin \Omega; \quad \tau_{xz} = \tau_{xy} = 0 \\ x = h: \quad u_x &= \tau_{xz} = \tau_{xy} = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

При заданных параметрах упругости A_{mn} , толщине слоя $2h$, области Ω , функции $q(x, y)$ (задача *A*) или $q(y, z)$ (задача *B*) требуется определить раскрытие трещины $u_z(x, y, 0) = f(x, y)$ ($(x, y) \in \Omega$, задача *A*) или $u_x(0, y, z) = f(y, z)$ ($(y, z) \in \Omega$, задача *B*), затем может быть определен коэффициент интенсивности напряжений на контуре трещины.

2. Интегро-дифференциальные уравнения. Для сведения задач с граничными условиями (1.3) и (1.4) к интегральным уравнениям следует рассмотреть вспомогательные задачи о точечных дислокациях, когда в формулах (1.3) и (1.4) вместо нормальных напряжений задаются нормальные перемещения в виде δ -функции Дирака, область Ω стягивается в точку [6, 17]. Решения вспомогательных задач находятся при помощи двойных преобразований Фурье. Затем, интегрируя выражение для нормального напряжения по области Ω и удовлетворяя оставшемуся граничному условию, для задачи *A* получим интегральное уравнение $((x, y) \in \Omega)$

$$\iint_{\Omega} f(x_0, y_0) K_1(x - x_0, y - y_0) dx_0 dy_0 = 2\pi \frac{q(x, y)}{\theta_1}$$

$$K_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_1 \operatorname{cth}(\beta_1 h) - \gamma_2 \operatorname{cth}(\beta_2 h)}{\gamma_1 - \gamma_2} \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \exp(-i(x\xi + y\eta)) d\xi d\eta \quad (2.1)$$

$$\theta_1 = \frac{A_{11}A_{33} - A_{13}^2}{A_{11}(\gamma_1 + \gamma_2)}, \quad \beta_k = \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\gamma_k} \quad (k = 1, 2)$$

Для задачи *B* аналогичное уравнение имеет вид $((y, z) \in \Omega)$

$$\iint_{\Omega} f(y_0, z_0) K_2(y - y_0, z - z_0) dy_0 dz_0 = 2\pi \frac{q(y, z)}{\theta_2}$$

$$K_2(y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D}{(m_2 - m_1)\gamma_3^2 \xi^2 \zeta_1 \zeta_2} \exp(-i(z\xi + y\eta)) d\xi d\eta, \quad \theta_2 = A_{66}$$

$$D = m_2 h_2^2 \zeta_2 \operatorname{cth}(\zeta_1 h) - m_1 h_1^2 \zeta_1 \operatorname{cth}(\zeta_2 h) + 4(m_1 - m_2)\eta^2 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \operatorname{cth}(\zeta_3 h) \quad (2.2)$$

$$m_k = \frac{A_{11}\gamma_k^2 - A_{44}}{A_{13} + A_{44}}, \quad h_k = (m_k + 1)\gamma_3^2 \xi^2 + 2\eta^2 \quad (k = 1, 2),$$

$$\zeta_k = \sqrt{\gamma_k^2 \xi^2 + \eta^2} \quad (k = 1, 2, 3)$$

Здесь особенность подынтегральной функции при $\xi = 0$ является устранимой.

Для обеих задач γ_k ($k = 1, 2$) – корни (возможно, комплексно сопряженные, $\operatorname{Re} \gamma_k > 0$) характеристического уравнения [1, 6]

$$\gamma^4 A_{11}A_{44} - \gamma^2 [A_{11}A_{33} - A_{13}(A_{13} + 2A_{44})] + A_{33}A_{44} = 0, \quad \gamma_3 = \sqrt{A_{44}/A_{66}}$$

В силу положительной определенности матрицы упругих постоянных $\theta_1 > 0$ [1]. Если в формулах (2.1) перейти к изотропному материалу с учетом соотношений (1.2) и пределов

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow 1} \frac{\gamma_1 \operatorname{cth}(\beta_1 h) - \gamma_2 \operatorname{cth}(\beta_2 h)}{\gamma_1 - \gamma_2} = \frac{\operatorname{sh} 2u + 2u}{\operatorname{ch} 2u - 1} \quad (u = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} h), \quad \lim_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow 1} \theta_1 = \frac{G}{1 - \nu}$$

получим известное ядро интегрального уравнения задачи о трещине в изотропном слое [17]. Аналогичный предельный переход возможен и из формул (2.2).

При $h \rightarrow \infty$ ядра интегральных уравнений (2.1) и (2.2) переходят в известные для задач о трещине в бесконечном трансформном упругом теле [1, 6]. Пользуясь этим, регуляризуем уравнения (2.1) и (2.2), выделяя главные интегро-дифференциальные части, в которых ядра свободны от квадратур [8, 9, 17]. Для задачи *A*, используя формулу (1.10) [8], получим

$$-\Delta \iint_{\Omega} \frac{f(x_0, y_0)}{R} dx_0 dy_0 + \iint_{\Omega} f(x_0, y_0) L_1(x - x_0, y - y_0) dx_0 dy_0 = 2\pi \frac{q(x, y)}{\theta_1}$$

$$(x, y) \in \Omega, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (2.3)$$

$$L_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_1 [\operatorname{cth}(\beta_1 h) - 1] - \gamma_2 [\operatorname{cth}(\beta_2 h) - 1]}{\gamma_1 - \gamma_2} \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \exp(-i(x\xi + y\eta)) d\xi d\eta$$

Для задачи *Б*, сравнивая формулы (1.4) и (1.16) [8] для нормального напряжения (в формуле (1.16) [8] следует исправить опечатку – вставить множитель $-(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ под знаком интеграла), получим

$$\begin{aligned} & -\Delta \iint_{\Omega} f(y_0, z_0) L_0(y - y_0, z - z_0) dy_0 dz_0 + \\ & + \iint_{\Omega} f(y_0, z_0) L_2(y - y_0, z - z_0) dy_0 dz_0 = 2\pi \frac{q(y, z)}{\theta_2}, \quad (y, z) \in \Omega \\ & \Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad L_0(y, z) = \frac{D_0}{(m_2 - m_1) \gamma_3^2 (z^2 + y^2) y^2 \zeta_1^0 \zeta_2^0} \\ & L_2(y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_1}{(m_2 - m_1) \gamma_3^2 \xi^2 \zeta_1 \zeta_2} \exp(-i(z\xi + y\eta)) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$D_0 = m_2 h_{10}^2 \zeta_{20} - m_1 h_{20}^2 \zeta_{10} + 4(m_1 - m_2) z^2 \zeta_{10} \zeta_{20} \zeta_{30},$$

$$D_1 = m_2 h_1^2 \zeta_2 [\operatorname{cth}(\zeta_1 h) - 1] - m_1 h_2^2 \zeta_1 [\operatorname{cth}(\zeta_2 h) - 1] + 4(m_1 - m_2) \eta^2 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 [\operatorname{cth}(\zeta_3 h) - 1]$$

$$h_{k0} = (m_k + 1) \gamma_k^2 y^2 + 2z^2 \quad (k = 1, 2), \quad \zeta_{k0} = \sqrt{\gamma_k^2 y^2 + z^2} \quad (k = 1, 2, 3)$$

Для круговой области Ω уравнение (2.4) в отличие от (2.3) не сводится к случаю осевой симметрии. Будем предполагать, что упругие параметры таковы, что выполняется неравенство $D_1 / (m_2 - m_1) > 0$ ($\forall \xi, \eta$).

3. Регулярный асимптотический метод. Если в уравнениях (2.3) и (2.4) оставить только главные интегро-дифференциальные члены, в которых ядра свободны от квадратур, то при эллиптической области Ω и полиномиальной правой части $q(x, y)$ или $q(y, z)$ такие уравнения будут иметь точные решения [6, 9, 17]. Пользуясь этим, применим для решения уравнений регулярный асимптотический метод, связанный с разложениями по степеням малого параметра [17]. Пусть область Ω ограничена эллиптическим контуром

$$A) \quad l(x, y) = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad a \geq b; \quad q(x, y) = q = \text{const} \quad (3.1)$$

$$B) \quad l(y, z) = 1 - \frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad a \geq b; \quad q(y, z) = q = \text{const}$$

Введем безразмерные обозначения и замены переменных ($n = 1$ для задачи *A*, $n = 2$ для задачи *B*)

$$\begin{aligned} x_* &= \frac{x}{a}, & y_* &= \frac{y}{a}, & z_* &= \frac{z}{a}, & f_*(x_*, y_*) &= \frac{f(x, y)}{a} \\ f_*(y_*, z_*) &= \frac{f(y, z)}{a}, & q_* &= \frac{q}{\theta_n} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\lambda = \frac{h}{a}, \quad \varepsilon = \frac{b}{a}, \quad k = \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad \xi = \frac{u}{h} \cos \varphi, \quad \eta = \frac{u}{h} \sin \varphi, \quad \Omega \rightarrow \Omega_*$$

и т.д. Звездочки далее опускаем. Тогда уравнение (2.3) после взятия в ядре интеграла по полярной координате φ [18] преобразуется к виду

$$-\Delta \iint_{\Omega} \frac{f(x_0, y_0)}{R} dx_0 dy_0 + \frac{1}{\lambda^3} \iint_{\Omega} f(x_0, y_0) L_1(x - x_0, y - y_0) dx_0 dy_0 = 2\pi q, \quad (x, y) \in \Omega$$

$$L_1(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{\gamma_1 [\operatorname{cth}(u/\gamma_1) - 1] - \gamma_2 [\operatorname{cth}(u/\gamma_2) - 1]}{\gamma_1 - \gamma_2} u^2 J_0 \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\lambda} u \right) du, \quad (3.3)$$

где $J_0(u)$ — функция Бесселя. Главная часть уравнения (3.3) совпадает с главной частью соответствующего уравнения задачи о трещине в изотропном пространстве [17].

Уравнение (2.4) в обозначениях (3.2), где u, φ — полярные координаты, принимает вид

$$-\Delta \iint_{\Omega} f(y_0, z_0) L_0(y - y_0, z - z_0) dy_0 dz_0 +$$

$$+ \frac{1}{\lambda^3} \iint_{\Omega} f(y_0, z_0) L_2(y - y_0, z - z_0) dy_0 dz_0 = 2\pi q, \quad (y, z) \in \Omega$$

$$L_2(y, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{D_2 u^2}{(m_2 - m_1) \gamma_3^2 \cos^2 \varphi \zeta_{11} \zeta_{21}} \cos \left(\frac{z \cos \varphi + y \sin \varphi}{\lambda} u \right) d\varphi du$$

$$D_2 = m_2 h_{11}^2 \zeta_{21} [\operatorname{cth}(\zeta_{11} u) - 1] - m_1 h_{21}^2 \zeta_{11} [\operatorname{cth}(\zeta_{21} u) - 1] +$$

$$+ 4(m_1 - m_2) \sin^2 \varphi \zeta_{11} \zeta_{21} \zeta_{31} [\operatorname{cth}(\zeta_{31} u) - 1]$$

$$h_{k1} = (m_k + 1) \gamma_3^2 \cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi \quad (k = 1, 2),$$

$$\zeta_{k1} = \sqrt{\gamma_k^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} \quad (k = 1, 2, 3),$$

где функция $L_0(y, z)$ сохраняет форму (2.4).

Введенный в (3.2) параметр λ характеризует толщину слоя относительно размера трещины. Разложим ядра $L_1(x, y)$ (3.3) и $L_2(y, z)$ (3.4) в ряды по отрицательным степеням λ . Асимптотический метод “больших λ ” может применяться в интервале изменения λ , в котором указанные разложения абсолютно сходятся в области трещины [17]. После разложения в ряд функции Бесселя в формуле (3.3) и использовании интеграла [18]

$$\int_0^{\infty} [\operatorname{cth}(Au) - 1] u^k du = \frac{k! \zeta(k+1)}{2^k A^{k+1}}, \quad (3.5)$$

где $\zeta(k)$ — дзета-функция Римана, получим

$$L_1(x - x_0, y - y_0) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{R^{2m}}{\lambda^{2m}}$$

$$a_m = \frac{(-1)^m (m+1)(2m+1)!!}{2^{2m+1} (2m)!!} \zeta(2m+3) \frac{\gamma_1^{2m+4} - \gamma_2^{2m+4}}{\gamma_1 - \gamma_2}$$

Поскольку в области эллипса $\max R = 2$ и степенной ряд

$$\sum_{m=2}^{\infty} \zeta(m) t^m \quad (3.7)$$

сходится при $|t| < 1$ [19], ряд (3.6) сходится абсолютно в области эллипса при условии

$$\lambda > \gamma_{\max} = \max(|\gamma_1|, |\gamma_2|) \quad (3.8)$$

Разложив в ряд по степеням λ косинус в формуле (3.4) для $L_2(y, z)$ и используя интеграл (3.5), получим

$$L_2(y - y_0, z - z_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m(y - y_0, z - z_0)}{\lambda^{2m}}$$

$$b_m(y, z) = \frac{(-1)^m (m+1)(2m+1)\zeta(2m+3)}{2^{2m+1}\pi(m_2 - m_1)\gamma_3^2} \times \quad (3.9)$$

$$\times \int_0^{\pi} \left[\frac{m_2 h_{11}^2}{\zeta_{11}^{2m+4}} - \frac{m_1 h_{21}^2}{\zeta_{21}^{2m+4}} + \frac{4(m_1 - m_2) \sin^2 \varphi}{\zeta_{31}^{2m+2}} \right] \frac{(z \cos \varphi + y \sin \varphi)^{2m} d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

С учетом области сходимости ряда (3.7) и того, что

$$\max_{\varphi} \frac{(z \cos \varphi + y \sin \varphi)^2}{\gamma^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \frac{z^2 + y^2 \gamma^2}{\gamma^2}$$

можно заключить, что ряд (3.9) сходится абсолютно в области эллипса при условии

$$\lambda > \gamma_{\max}^* = \max(1, |\gamma_1^{-1}|, |\gamma_2^{-1}|, \gamma_3^{-1}) \quad (3.10)$$

Неравенства (3.8) и (3.10) ограничивают область применимости асимптотического метода соответственно для задач *A* и *B*. Для изотропного материала, когда все $\gamma_k = 1$, получаем известный интервал $\lambda > 1$ [17].

Асимптотические решения уравнений (3.3) и (3.4) с ядрами соответственно (3.6) и (3.9) будем искать в виде ($\lambda \rightarrow \infty$)

$$A) f(x, y) = \sum_{k=0}^4 \frac{f_k(x, y)}{\lambda^k} + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right), \quad B) f(y, z) = \sum_{k=0}^4 \frac{f_k(y, z)}{\lambda^k} + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) \quad (3.11)$$

Подставляя разложения (3.11) соответственно в уравнения (3.3) и (3.4) и приравнивая члены при одинаковых степенях λ , получим цепочки интегро-дифференциальных уравнений для последовательного определения функций $f_k(x, y)$ и $f_k(y, z)$. Эти уравнения соответствуют случаям эллиптической трещины в трансропном пространстве и имеют точные решения [6, 9, 17]. В результате для задачи *A* найдем ($\lambda \rightarrow \infty$)

$$f(x, y) = \frac{\varepsilon q \sqrt{l(x, y)}}{E(k)} \left(1 - \frac{\varepsilon^2 a_0}{3\lambda^3 E(k)} + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) \right), \quad a_0 = \frac{\zeta(3)}{2} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) (\gamma_1 + \gamma_2), \quad (3.12)$$

где $E(k)$ – полный эллиптический интеграл.

Для задачи *B* получим ($\lambda \rightarrow \infty$)

$$f(y, z) = \frac{\varepsilon q \sqrt{l(y, z)}}{E_1} \left(1 - \frac{\varepsilon^2 b_0}{3\lambda^3 E_1} + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) \right), \quad E_1 = \frac{1}{2(m_2 - m_1)\gamma_3^2 \varepsilon^2} \int_0^{\pi} \frac{D_3 d\varphi}{\zeta_{12} \zeta_{22} \cos^2 \varphi}$$

$$D_3 = m_2 h_{12}^2 \zeta_{22} - m_1 h_{22}^2 \zeta_{12} + 4(m_1 - m_2) \sin^2 \varphi \zeta_{12} \zeta_{22} \zeta_{32}$$

$$h_{k2} = (m_k + 1) \gamma_3^2 \varepsilon^2 \cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi \quad (k = 1, 2), \quad (3.13)$$

$$\zeta_{k1} = \sqrt{\gamma_k^2 \varepsilon^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$b_0 = \frac{\zeta(3)}{2\pi(m_2 - m_1)\gamma_3^2} \int_0^{\pi} \left[\frac{m_2 h_{11}^2}{\zeta_{11}^4} - \frac{m_1 h_{21}^2}{\zeta_{21}^4} + \frac{4(m_1 - m_2) \sin^2 \varphi}{\zeta_{31}^2} \right] \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

Пусть теперь эллипс трещины вытянут вдоль оси y , т.е. неравенства (3.1) меняются на $b \geq a$. Тогда в формулах (3.2) следует поменять a и b местами, а границы эллипсов задать функциями

$$A) \quad l(x, y) = 1 - \frac{x^2}{\varepsilon^2} - y^2, \quad B) \quad l(y, z) = 1 - \frac{z^2}{\varepsilon^2} - y^2 \quad (3.14)$$

При этом для задачи A решение сохраняет вид (3.12), (3.14). Для задачи B в решении (3.13), (3.14) следует заменить E_1 на

$$E_2 = \frac{1}{2(m_2 - m_1)\gamma_3^2} \int_0^\pi \frac{D_4 d\varphi}{\zeta_{13}\zeta_{23} \cos^2 \varphi}$$

$$D_4 = m_2 h_{13}^2 \zeta_{23} - m_1 h_{23}^2 \zeta_{13} + 4(m_1 - m_2)\varepsilon^2 \sin^2 \varphi \zeta_{13}\zeta_{23}\zeta_{33}$$

$$h_{k3} = (m_k + 1)\gamma_3^2 \cos^2 \varphi + 2\varepsilon^2 \sin^2 \varphi \quad (k = 1, 2)$$

$$\zeta_{k1} = \sqrt{\gamma_k^2 \cos^2 \varphi + \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \quad (k = 1, 2, 3)$$

На основе решений (3.12)–(3.15) при учете разницы в приведении q к безразмерной форме в задачах A и B , см. (3.2), для отношения коэффициентов интенсивности нормальных напряжений (КИН) на контуре трещины в этих задачах получим выражение

$$S_m(\varepsilon) = \frac{\theta_1 E(k)}{\theta_2 E_m} \left(1 - \frac{\varepsilon^2 b_0}{3\lambda^3 E_m} + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) \right) \left(1 - \frac{\varepsilon^2 a_0}{3\lambda^3 E(k)} + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) \right)^{-1}, \quad (3.16)$$

где следует взять $m = 1$ при $a \geq b$ и $m = 2$ при $b \geq a$. Для круговой трещины $S_1(1) = S_2(1)$.

4. Полосовые трещины. Рассмотрим задачи $A1$ и $B1$ о полосовых трещинах в слое, плоскости которых соответственно параллельны и перпендикулярны плоскостям изотропии. Пусть в задаче $B1$ полоса направлена вдоль оси y . В интегральных уравнениях (2.1) и (2.2) для этих задач соответственно положим

$$A1) \quad \Omega: |x| \leq a, \quad |y| < \infty; \quad q(x, y) = q(x), \quad f(x, y) = f(x)$$

$$B1) \quad \Omega: |y| < \infty, \quad |z| \leq a; \quad q(y, z) = q(z), \quad f(y, z) = f(z)$$

Тогда интегральные уравнения (2.1) и (2.2) становятся одномерными, и после введения безразмерных обозначений

$$A1) \quad x_* = \frac{x}{a}, \quad f_*(x_*) = \frac{f(x)}{h}, \quad q_*(x_*) = \frac{q(x)}{\theta_1}, \quad \lambda = \frac{h}{a}$$

$$B1) \quad x_* = \frac{z}{a}, \quad f_*(x_*) = \frac{f(z)}{h}, \quad q_*(x_*) = \frac{q(z)}{\theta_2^*}, \quad \theta_2^* = A_{66} \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2A_{13}A_{11}^{-1}}{\gamma_1\gamma_2(\gamma_1 + \gamma_2)}, \quad \lambda = \frac{h}{a}$$

их можно записать в форме (звездочки далее опускаем)

$$\int_{-1}^1 f(\xi) l\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi \lambda q(x) \quad (|x| \leq 1), \quad l(t) = \int_0^\infty L(u) u \cos(ut) du \quad (4.1)$$

$$A) \quad L(u) = \frac{\gamma_1 \operatorname{cth}(u/\gamma_1) - \gamma_2 \operatorname{cth}(u/\gamma_2)}{\gamma_1 - \gamma_2}, \quad B) \quad L(u) = \frac{\gamma_1 \operatorname{cth}(\gamma_2 u) - \gamma_2 \operatorname{cth}(\gamma_1 u)}{\gamma_1 - \gamma_2}$$

Уравнения (4.1) в пределе ($\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow 1$) переходят в известное уравнение плоской задачи о продольной трещине в изотропной упругой полосе [17]. Для материалов со значительной анизотропией (действительные корни $\gamma_1 \gg 1$, $0 < \gamma_2 \ll 1$) член с одним

из котангенсов в ядрах (4.1) начинает превалировать ($\gamma_1 \operatorname{cth}(u/\gamma_1)$ в задаче А1 и $\gamma_1 \operatorname{cth}(\gamma_2 u)$ в задаче Б1). В этом случае ядра (4.1) в соответствии с их асимптотическим поведением

$$\lim_{u \rightarrow \infty} L(u) = 1, \quad \lim_{u \rightarrow 0} uL(u) = A, \quad \text{А) } A = \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \text{Б) } A = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \quad (4.2)$$

можно достаточно точно аппроксимировать при $0 \leq u < \infty$ выражением

$$L(u) \approx \operatorname{cth}(Au) \quad (4.3)$$

При аппроксимации (4.3) уравнение (4.1) имеет замкнутое решение, относительная погрешность которого тем меньше, чем сильнее анизотропия.

Интегрируя по частям при учете условий $f(\pm 1) = 0$, сведем уравнения (4.1), (4.3) к виду [18]

$$\int_{-1}^1 f'(\xi) k\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) d\xi = \pi q(x) \quad (|x| \leq 1), \quad k(t) = \int_0^{\infty} \operatorname{cth}(Au) \sin(ut) du = \frac{\pi}{2A} \operatorname{cth} \frac{\pi t}{2A} \quad (4.4)$$

Сходимость интегралов по переменной u в (4.4) и (4.1) понимается в смысле теории обобщенных функций. Интегральное уравнение (4.4) после замены переменных сводится к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши, имеющему точное решение [17]. В результате, например, для постоянной нагрузки $q(x) = q = \operatorname{const}$ при учете условий $f(\pm 1) = 0$ последовательно найдем [18]

$$f'(x) = \frac{q(1 - \exp(Cx))}{\lambda \sqrt{(\exp C - \exp(Cx))(\exp(Cx) - \exp(-C))}}, \quad C = \frac{\pi}{\lambda A} \quad (4.5)$$

$$f(x) = \frac{qA}{\pi} \left(\arcsin \frac{\operatorname{ch} C - \exp(Cx)}{\operatorname{sh} C} + \arcsin \frac{\operatorname{ch} C - \exp(-Cx)}{\operatorname{sh} C} \right)$$

Погрешность решений (4.5) не превышает погрешности аппроксимации (4.3). На основе решений (4.5) для безразмерного КИН на границе трещины [16] получим выражение

$$K_I = - \lim_{x \rightarrow 1-0} \sqrt{2\pi(1-x)} f'(x) = \frac{q}{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{C} \operatorname{th} \frac{C}{2}}$$

5. Анализ и выводы. Рассмотрим трансверсально изотропные материалы, параметры упругости которых A_{ij} известны ([1], с. 22–23).

Для случая эллиптической трещины в табл. 1 для ряда материалов даны значения величин $\gamma_{\max} < 3$ (3.8) и $\gamma_{\max}^* < 2$ (3.10), a_0 и b_0 , входящих в решения (3.12)–(3.16). Удержание большего числа слагаемых по отрицательным степеням λ в асимптотических разложениях (3.12), (3.16) изменяет их при $\lambda \geq 3$, как правило, не более чем на 5%. В последних трех колонках табл. 1 приведены значения отношения КИН для трещины перпендикулярной плоскостям изотропии к КИН для трещины параллельной плоскостям изотропии, рассчитанные при $\lambda = 3$ по формуле (3.16). При $S_m(\epsilon) > 1$ опаснее трещины, перпендикулярные плоскостям изотропии. Для большинства материалов из табл. 1 относительный КИН возрастает с ростом эксцентриситета эллипса. Для материалов с более выраженной анизотропией, характеризуемой, как правило, большим отличием между корнями $\gamma_1 > 1$ и $\gamma_2 \in (0; 1)$, рекомендуется использовать вариационные методы при решении задач А и Б [20, 21].

В табл. 2 для ряда материалов [1], проявляющих значительную анизотропию (γ_{\max} или $\gamma_{\max}^* > 3$), а также для изотропного материала и титана приведены корни характеристического уравнения, их отношения, параметры аппроксимаций (4.3) и их относительные погрешности θ (%) для задач А1 и Б1. Как видно из табл. 2, значение θ снижа-

Таблица 1

Материал	γ_{\max}	γ_{\max}^*	a_0	b_0	$S_1(1)$	$S_1(0.1)$	$S_2(0.1)$
Al ₂ O ₃	1.669	1.586	4.400	4.027	1.070	1.617	1.624
Cd	1.029	1.229	1.088	5.380	0.6993	1.145	1.027
CdS	1.785	1.707	5.0291	5.120	1.104	1.700	1.618
Co	1.808	1.674	5.242	4.922	1.191	1.897	1.675
Ti	1.326	1.257	3.049	4.235	1.178	1.986	1.637
Zn	0.7942	1.266	0.4765	2.301	0.2667	0.3648	0.5058
ZnO	1.510	1.506	3.554	4.525	1.036	1.607	1.550
Бедренная кость сырая бычья	2.280	1.728	9.510	5.097	1.529	2.379	2.049
Бедренная кость человека	2.039	1.894	6.843	6.524	1.207	1.879	1.673
Бетон, состарен циклами нагрев-охлаждение	1.047	1.000	2.437	2.691	1.058	1.657	1.604
Бетон, состарен химически	1.125	1.000	2.491	2.567	1.154	1.853	1.708
Гнейс влажный	1.621	1.826	3.814	4.449	0.7808	1.062	1.360
Гнейс сухой	0.7448	1.365	0.8372	3.566	0.4546	0.6262	0.8455
Сапфир	1.528	1.526	3.629	3.793	1.001	1.511	1.544
Эпоксидное стекло	2.915	1.638	18.80	4.226	2.264	3.293	2.765

Таблица 2

Материал	γ_1	γ_2	$\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$	θ (%)	A	θ (%)	A
				Задача А1		Задача Б1	
Изотропный	1.000	1.000	1.00	10.5	0.500	10.5	0.500
Ti	1.326	0.7952	1.67	9.8	0.471	9.8	0.497
Композит (60% волокон)	4.724	0.6888	6.86	4.2	0.185	4.2	0.601
Ламинат Т650/950-1	5.413	0.6458	8.38	3.6	0.165	3.6	0.577
Древесина (ель Дугласа)	3.713	0.3504	10.6	2.9	0.246	2.9	0.320
ВаTiO ₃	5.314	0.1996	26.6	1.3	0.181	1.3	0.192

ется при возрастании отношения γ_1/γ_2 . Преимущество решения (4.5) состоит в том, что оно справедливо при любой относительной толщине слоя λ . В случае материалов из табл. 1, когда погрешность аппроксимации (4.3) существенна, для решения задач А1 и Б1 рекомендуется применять асимптотические методы [17].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-01-00017).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ding H., Chen W., Zhang L. Elasticity of transversely isotropic materials. Dordrecht: Springer, 2006. 435 p.
2. Pan E., Chen W. Static Green's functions in anisotropic media. New York: Cambridge Univ. Press, 2015. 356 p.
3. Wilson W.K. Finite element methods for elastic bodies containing cracks // In: Mechanics of fracture. Vol. 1. Methods of analysis and Solutions of Crack Problems. Ed. by G. C. Sih. Leyden: Kluwer, 1973. P. 484–515.

4. *Raveendra S.T., Cruse T.A.* BEM analysis of problems of fracture mechanics // In: *Developments in Boundary Element Methods—5. Industrial applications of Boundary Element Methods.* Eds. P.K. Banerjee, R.B. Wilson. London: Elsevier, 1989. P. 187–204.
5. *Шифрин Е.И.* Пространственные задачи линейной механики разрушения. М.: Физматлит, 2002. 368 с.
6. *Fabrikant V.I.* Non-traditional crack problem for transversely-isotropic body // *Europ. J. Mech. A / Solids.* 2011. V. 30. P. 902–912.
7. *Fabrikant V.I.* General flat crack located in the plane perpendicular to the planes of isotropy in transversely isotropic body // *Acta Mech.* 2015. V. 226. Iss. 10. P. 3289–3306.
8. *Артамонова Е.А., Пожарский Д.А.* О полосовом разрезе в трансверсально изотропном упругом теле // *ПММ.* 2013. Т. 77. Вып. 5. С. 768–777.
9. *Пожарский Д.А.* Периодические системы трещин в трансверсально изотропном теле // *Изв. РАН. МТТ.* 2019. № 3. С. 54–63.
10. *Fabrikant V.I.* General flat crack arbitrarily located in the transversely-isotropic body // *Theor. & Appl. Fracture Mech.* 2016. V. 82. P. 69–76.
11. *Fabrikant V.I.* Contact and crack problems in generalized material and their relationships // *Intern. J. Fracture.* 2018. V. 212. Iss. 1. P. 41–51.
12. *Александров В.М.* Продольная трещина в ортотропной упругой полосе со свободными границами // *Изв. РАН. МТТ.* 2006. № 1. С. 115–124.
13. *Александров В.М.* Две задачи со смешанными граничными условиями для упругой ортотропной полосы // *ПММ.* 2006. Т. 70. Вып. 1. С. 139–149.
14. *Гольдштейн Р.В., Шифрин Е.И.* О возможности искривления трещины нормального разрыва в анизотропной плоскости // *Изв. РАН. МТТ.* 2006. № 6. С. 173–184.
15. *Kapsov A.V., Shifrin E.I.* Identification of multiple cracks in an anisotropic elastic plate by boundary data // *J. Phys. Conf. Ser.* 2019. V. 1203. Iss. 1. P. 012029.
16. *Fabrikant V.I.* Contact and crack problems in linear elasticity. Sharjah: Bentham, 2010. 1030 p.
17. *Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В.* Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.
18. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.
19. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Доп. главы. М.: Наука, 1986. 800 с.
20. *Гольдштейн Р.В., Спектор А.А.* Вариационный метод исследования пространственных смешанных задач о плоском разрезе в упругой среде при наличии проскальзывания и сцепления его поверхностей // *ПММ.* 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 276–285.
21. *Сметанин Б.И., Соболев Б.В.* Равновесие упругого слоя, ослабленного плоскими трещинами // *ПММ.* 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 1030–1038.

Plane Cracks in a Transversely Isotropic Layer

E. A. Artamonova^a and D. A. Pozharskii^{a,#}

^a Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia

[#] e-mail: pozharda@rambler.ru

The mode *I* crack problems are considered for a transversely isotropic elastic layer (mathematical cuts are situated in its middle plane), the outer layer faces are subjected to sliding support. The planes of isotropy are either parallel or perpendicular to the layer faces. By using Fourier integral transforms, the problems are reduced to integro-differential equations with respect to the crack opening, the limiting cases of which are the well-known equations of similar problems for a transversely isotropic full space and for an isotropic layer. The regular asymptotic method is employed for elliptic cracks being effective for a relatively thick layer. It is shown that the domain of applicability of this method is narrowed down together with increasing anisotropy, which can be characterized by the characteristic equation roots (all the roots equal one for an isotropic material). For strip cracks, solutions are obtained in a closed form with the help of special approximations of the integral equations kernel sym-

bols, the relative errors of such approximations diminish together with increasing anisotropy. Calculations have been made for well-known transversely isotropic materials.

Keywords: elasticity theory, transversal isotropy, layer, crack

REFERENCES

1. *Ding H., Chen W., Zhang L.* Elasticity of Transversely Isotropic Materials. Dordrecht: Springer, 2006. 435 p.
2. *Pan E., Chen W.* Static Green's Functions in Anisotropic Media. N.Y.: Cambridge Univ. Press, 2015. 356 p.
3. *Wilson W.K.* Finite element methods for elastic bodies containing cracks // In: Mechanics of Fracture. Vol. 1. Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. Ed. by *G.C. Sih*. Leyden: Kluwer, 1973. pp. 484–515.
4. *Raveendra S.T., Cruse T.A.* BEM analysis of problems of fracture mechanics // In: Developments in Boundary Element Methods—5. Industrial Applications of Boundary Element Methods. Eds. *P.K. Banerjee, R.B. Wilson*. London: Elsevier, 1989. pp. 187–204.
5. *Shifrin E.I.* Spatial Problems in Linear Fracture Mechanics (Prostranstvennye zadachi mekhaniki razrusheniya). Moscow: Fizmatlit, 2002. 368 p. (in Russian).
6. *Fabrikant V.I.* Non-traditional crack problem for transversely-isotropic body // European J. Mech. A / Solids, 2011, vol. 30, P. 902–912.
7. *Fabrikant V.I.* General flat crack located in the plane perpendicular to the planes of isotropy in transversely isotropic body // Acta Mech., 2015, vol. 226, iss. 10, pp. 3289–3306.
8. *Artamonova E.A., Pozharskii D.A.* A strip cut in a transversely isotropic elastic solid // JAMM, 2013, vol. 77, no. 5, pp. 551–558.
9. *Pozharskii D.A.* Periodic crack systems in a transversely isotropic solid // Mech. Solids, 2019, vol. 54, no. 5, pp. 709–716.
10. *Fabrikant V.I.* General flat crack arbitrarily located in the transversely-isotropic body // Theor. Appl. & Fract. Mech., 2016, vol. 82, pp. 69–76.
11. *Fabrikant V.I.* Contact and crack problems in generalized material and their relationships // Int. J. Fract., 2018, vol. 212, iss. 1, pp. 41–51.
12. *Aleksandrov V.M.* Longitudinal crack in an orthotropic elastic strip with free faces // Mech. Solids, 2006, vol. 41, no. 1, pp. 88–94.
13. *Aleksandrov V.M.* Two problems with mixed boundary conditions for an elastic orthotropic strip // JAMM, 2006, vol. 70, no. 1, pp. 128–138.
14. *Goldshtein R.V., Shifrin E.I.* On the possible crooking of a tensile crack in an anisotropic plane // Mech. Solids, 2006, vol. 41, no. 6, pp. 140–149.
15. *Kapitsov A.V., Shifrin E.I.* Identification of multiple cracks in an anisotropic elastic plate by boundary data // J. Phys. Conf. Ser., 2019, vol. 1203, iss. 1, pp. 012029.
16. *Fabrikant V.I.* Contact and crack problems in linear elasticity. Sharjah: Bentham, 2010. 1030 p.
17. *Aleksandrov V.M., Smetanin B.I., Sobol' B.V.* Thin Stress Concentrators in Elastic Bodies (Tonkiki kontsentratory napryazhenii v uprugikh telakh). Moscow: Nauka, 1993. 224 p. (in Russian).
18. *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integral and Series. Vol. 1. Elementary Functions. N.Y.: Gordon and Breach Science Publ., 1986. 798 p.
19. *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integral and Series. Vol. 2. Special Functions. N.Y.: Gordon and Breach Science Publ., 1986. 750 p.
20. *Gol'dshtein R.V., Spector A.A.* Variational method of investigation of three-dimensional mixed problems of a plane cut in an elastic medium in the presence of slip and adhesion of its surfaces // JAMM, 1983, vol. 47, no. 2, pp. 232–239.
21. *Smetanin B.I., Sobol' B.V.* Equilibrium of an elastic layer weakened by plane cracks // JAMM, 1984, vol. 48, no. 6, pp. 757–764.

УДК 534.1

**АНГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЕ МИНДЛИНА–ГЕРМАНА,
ПОГРУЖЕННОМ В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГУЮ СРЕДУ**© 2020 г. В. И. Ерофеев^{1,*}, А. В. Леонтьева^{1,**}¹ *Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород, Россия***e-mail: erof.vi@yandex.ru****e-mail: aleonav@mail.ru*

Поступила в редакцию 06.08.2019 г.

После доработки 27.04.2020 г.

Принята к публикации 06.05.2020 г.

Изучается распространение продольных волн в стержне Миндлина–Германа, погруженном в нелинейно-упругую среду. При рассмотрении различных вариантов соотношения жесткости стержня и жесткости внешней среды, в которую помещен стержень, получено три предельных случая. Показано, что если жесткость внешней среды существенно превосходит жесткость стержня, то эволюционное уравнение представляет собой известное в нелинейной динамике уравнение Островского. Уравнение не имеет точных решений, но допускает качественное исследование при равенстве нулю старшей производной. В этом случае найдено и проанализировано решение в виде нелинейной периодической стационарной волны. Если жесткость внешней среды существенно уступает жесткости стержня, то эволюционным уравнением является уравнение, отличающееся от уравнения Островского в нелинейной части. Показано, что в этом случае в стержне возможно распространение солитонов классического профиля. Отмечено, что если жесткости внешней среды и стержня имеют один порядок, то нелинейные стационарные волны формироваться не могут.

Ключевые слова: продольная волна, модель Миндлина–Германа, нелинейно-упругая среда, эволюционное уравнение Островского, периодическая волна, солитон

DOI: 10.31857/S0032823520040049

Введение. Классическая модель Д. Бернулли (техническая теория) предполагает, что при описании продольных колебаний стержня можно пренебречь потенциальной энергией сдвиговых деформаций и кинетической энергией поперечных движений частиц стержня. Согласно этой теории линейные волны в стержне распространяются со скоростью $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ (где E – модуль Юнга; ρ – плотность материала), не зависящей от частоты. Следовательно, сделанные предположения не позволяют описать геометрическую дисперсию продольных волн, наблюдаемую экспериментально [1–6].

Математические модели, предложенные Рэлеем и Лявом, Бишопом, Миндлиным и Германом (уточненные теории) [7, 8], устраняют этот недостаток. Из одномерных моделей дисперсию продольных волн в широком частотном диапазоне наиболее точно описывает модель Миндлина–Германа [9–12]. Эта модель получила одобрение М. Био – одного из крупнейших механиков середины 20-го века [13]. Она включена во многие монографии и учебные пособия (см., например, [7, 8, 14–17]). Получены [18–20] аналитические выражения для отклика стержня модели Миндлина–Германа на

продольный удар. Проанализирована [21] связь между гипотезами теории Миндлина–Германа и двухточечной Паде-аппроксимацией.

Модель Миндлина–Германа успешно применяется при построении спектральных конечно-элементных моделей для анализа динамических процессов в композитах и функционально-градиентных материалах [22–28].

Выявлено [29, 30], что составной стержень, совершающий продольные колебания, по своим дисперсионным свойствам эквивалентен модели Миндлина–Германа.

Учет нелинейности связей между деформациями и градиентами перемещений (геометрическая нелинейность), деформациями и напряжениями (физическая нелинейность) приводит к нелинейным обобщениям уточненных математических моделей стержней.

Была предложена [31] методика сведения трехмерных уравнений нелинейной теории упругости к приближенным уравнениям теории стержней, основанная на аппроксимации перемещений в поперечном сечении стержня и применении вариационного принципа Гамильтона–Остроградского. Получены нелинейные уравнения, обобщающие модели Бишопа и Миндлина–Германа.

Изучались [32, 33] особенности распространения нелинейных стационарных волн деформации (периодических волн и солитонов) в стержне Миндлина–Германа, модель которого обобщена [31] путем учета геометрической и физической нелинейностей. Получены зависимости между основными параметрами таких волн (амплитудой, длиной волны, скоростью ее распространения и коэффициентом нелинейных искажений формы волны). Показано, что наряду с классическим поведением солитонов (волна большей амплитуды имеет меньшую ширину и распространяется с большей скоростью), может наблюдаться и их аномальное поведение (амплитуда волны уменьшается с ростом скорости).

В настоящей работе изучается волновая динамика стержня Миндлина–Германа, погруженного в нелинейно-упругую среду.

1. Математическая модель. Система уравнений, описывающая распространение продольных волн в стержне (модель Миндлина–Германа), погруженном в нелинейно-упругую среду, имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2\kappa_2^2 \lambda}{a\rho} \frac{\partial w}{\partial x} + h_1 u + h_2 u^2 = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \kappa_1^2 c_\tau^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{8\kappa_2^2 (\lambda + \mu)}{a^2 \rho} w + \frac{4\kappa_2^2 \lambda}{a\rho} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.2)$$

где $u(x, t)$, $w(x, t)$ – продольное и поперечное смещение частиц стержня, $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ – скорость распространения продольных волн в материале стержня, $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость распространения сдвиговых волн ($c_\tau < c_l$), a – радиус поперечного сечения стержня, ρ – плотность материала стержня, λ , μ – коэффициенты Ламе, h_1 , h_2 – коэффициенты, характеризующие нелинейно-упругую среду, κ_1 , κ_2 – корректирующие коэффициенты, выбираемые из условия близости дисперсионных веток данной модели (Миндлина–Германа) и точного решения Похгаммера–Кри [3, 7].

Коэффициент κ_1 определяется из уравнения [7] $4 \left[\left(1 - \frac{c_\tau^2}{c_l^2} \kappa_1^2 \right) \right]^{1/2} = (2 - \kappa_1^2)^2$ и принимает значения $0 < \kappa_1 < 1$; коэффициент κ_2 определяется из соотношения $\kappa_2^2 = \frac{\zeta^2 c_l^2}{8(c_l^2 - c_\tau^2)}$, где ζ – низший корень уравнения $\frac{c_l^2}{2c_\tau^2} \zeta J_0(\zeta) = J_1(\zeta)$, где J_0 , J_1 – функции Бесселя.

Для описания нелинейно-упругой среды использована параболическая зависимость Герстнера, содержащая, наряду с линейным слагаемым по деформации, квадратичное слагаемое [34]. Выбор такой зависимости обусловлен экспериментально установленным фактом, что в спектре интенсивных волн деформации “растяжение—сжатие” формируется, в первую очередь, вторая гармоника [35, 36]. Продольные волны в стержне аналогичны симметричным волнам Лэмба в слое или волнам Похгаммера—Кри в цилиндре. Движение частиц при распространении волны происходит симметрично относительно срединной линии стержня, преобладает продольная компонента вектора перемещений, в сечениях, перпендикулярных срединной линии, возникают напряжения одного знака. Формирование второй гармоники не может быть описано кубической параболой, часто применяемой в нелинейной механике и хорошо описывающей интенсивные сдвиговые или изгибные волны.

Нелинейность упругой среды принято подразделять на “жесткую” ($h_2 > 0$, или, по терминологии Рейснера, — “упрочняющееся” (“hardening”) основание [37]) и “мягкую” ($h_2 < 0$, или “размягченное” (“softening”) основание [37]).

В первом случае с увеличением деформации увеличивается добавочный вклад в напряжение, во втором случае с увеличением деформации такой вклад уменьшается.

Система уравнений (1.1), (1.2) может быть сведена к одному уравнению относительно продольного смещения частиц u :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} \left(\frac{4(\lambda + \mu)}{a} + \frac{\rho h_1}{2\kappa_2^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{4(\lambda + \mu)c_l^2}{a\lambda} + \frac{\kappa_1^2 c_\tau^2 \rho h_1}{2\kappa_2^2 \lambda} - \frac{4\kappa_2^2 \lambda}{\rho} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \\ & - \frac{\rho}{2\kappa_2^2 \lambda} (c_l^2 + \kappa_1^2 c_\tau^2) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho}{2\kappa_2^2 \lambda} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \frac{\kappa_1^2 c_\tau^2 \rho c_l^2}{2\kappa_2^2 \lambda} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \\ & + \frac{\rho h_2}{2\kappa_2^2 \lambda} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \kappa_1^2 c_\tau^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u^2 + \frac{4(\lambda + \mu)h_1}{a\lambda} u + \frac{4(\lambda + \mu)h_2}{a\lambda} u^2 = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Если в качестве характерных величин смещения, координаты и времени принять

$$U = u/u_0, \quad z = x/X, \quad \tau = t/T$$

$$X^2 = \varepsilon \frac{\kappa_1^2 c_\tau^2}{h_1} (m_1 + m_2 - m_3), \quad T^2 = \varepsilon \frac{1}{h_1} (1 + m_1),$$

где $m_1 = \frac{a^2 \rho h_1}{8\kappa_2^2 (\lambda + \mu)}$, $m_2 = \frac{c_l^2}{\kappa_1^2 c_\tau^2}$, $m_3 = \frac{\kappa_2^2 \lambda^2}{\kappa_1^2 c_\tau^2 \rho (\lambda + \mu)}$ — безразмерные параметры, ε — малый параметр ($\varepsilon \ll 1$), то уравнение (1.3) в безразмерных переменных примет вид:

$$\begin{aligned} & a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - a_2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_3 \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^4} - a_4 \frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \tau^2} + a_5 \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + \\ & + a_6 U + a_7 U^2 + a_8 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (U^2) - a_9 \frac{\partial^2}{\partial z^2} (U^2) = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \frac{m_1}{\varepsilon (1 + m_1)^2}, \quad a_4 = \frac{(1 + m_2) m_1}{\varepsilon (1 + m_1) (m_1 + m_2 - m_3)} \\ a_5 &= \frac{m_2 m_1}{\varepsilon (m_1 + m_2 - m_3)^2}, \quad a_6 = \varepsilon, \quad a_7 = \varepsilon \frac{u_0 h_2}{h_1} \\ a_8 &= \frac{u_0 h_2}{h_1} \frac{m_1}{(1 + m_1)}, \quad a_9 = \frac{u_0 h_2}{h_1} \frac{m_1}{(m_1 + m_2 - m_3)} \end{aligned}$$

Полагая далее нелинейность малой, рассмотрим различные случаи соотношений жесткости стержня и жесткости внешней среды, в которую помещен стержень.

Если жесткость внешней среды существенно превосходит жесткость стержня ($h_1 \gg c_m^2/a^2$, где $c_m = \sqrt{(\lambda + \mu)/\rho}$ при этом $c_\tau < c_m < c_l$ и $c_m^2 = c_l^2 - c_\tau^2$) (“жесткая” среда), то можно считать, что $1/(1 + m_1) \sim \varepsilon^2$, нелинейность при этом полагаем малой величиной первого порядка. Ограничиваясь в уравнении (1.4) слагаемыми первого порядка малости, получим:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_3 \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^4} - a_4 \frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \tau^2} + a_5 \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + a_6 U + a_8 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (U^2) - a_9 \frac{\partial^2}{\partial z^2} (U^2) = 0 \quad (1.5)$$

В уравнении (1.5) отсутствует пропорциональное коэффициенту a_7 слагаемое более высокого порядка малости по ε .

Если жесткость внешней среды существенно уступает жесткости стержня ($h_1 \ll c_m^2/a^2$) (“мягкая” среда), то будем считать, что $m_1 \sim \varepsilon^2$, нелинейность, как и прежде, первого порядка малости. В этом случае безразмерное уравнение (1.4), с учетом слагаемых до первого порядка малости включительно, примет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_3 \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^4} - a_4 \frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \tau^2} + a_5 \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + a_6 U + a_7 U^2 = 0 \quad (1.6)$$

В отличие от уравнения (1.5) в последнем уравнении присутствует слагаемое пропорциональное a_7 , а слагаемые пропорциональные коэффициентами a_8 и a_9 оказываются более высокого порядка малости, чем первое.

Если жесткости внешней среды и стержня имеют один порядок ($a^2 h_1 / c_m^2 \sim 1$), а среди нелинейных слагаемых учесть только самые крупные (меньшего порядка малости), то уравнение (1.4) будет иметь вид:

$$a_3 \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^4} - a_4 \frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \tau^2} + a_5 \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + a_8 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (U^2) - a_9 \frac{\partial^2}{\partial z^2} (U^2) = 0 \quad (1.7)$$

2. Эволюционное уравнение и его анализ в случае “жесткой” внешней среды. Перейдем в уравнении (1.5) в движущуюся систему координат $\xi = z - c\tau$, $\theta = \varepsilon\tau$ ($c^2 = 1$, $\varepsilon \ll 1$). Получим в первом приближении по ε эволюционное уравнение относительно перемещения:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} + d_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + d_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \right) - d_3 U = 0, \quad (2.1)$$

где коэффициенты уравнения равны

$$d_1 = \frac{1}{\varepsilon c} (a_9 - a_8), \quad d_2 = \frac{1}{2\varepsilon c} (a_4 - a_3 - a_5), \quad d_3 = \frac{a_6}{2\varepsilon c}$$

Заметим, что уравнение (2.1) совпадает с нелинейным эволюционным уравнением для внутренних волн во вращающемся океане:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{3c_0}{2h} U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{c_0 \beta}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \right) = \frac{\Omega^2}{2c_0} U, \quad (2.2)$$

где U – возмущение свободной поверхности жидкости, h – глубина, c_0 – скорость распространения возмущения, β – параметр высокочастотной дисперсии, Ω – параметр Кориолиса, характеризующий вращение жидкости.

Уравнение (2.2) было впервые выведено в 1978 г. Л.А. Островским [38] и называется уравнением Островского [39–41]. При $\Omega = 0$ уравнение (2.2) сводится к уравнению Кортевега–де Вриза (КдВ), но, в отличие от последнего, оно не интегрируется методом обратной задачи рассеяния и не имеет точных солитонных решений.

Было показано [41], что уравнение (2.2) имеет отношение к широкому кругу нелинейных систем, характеризующихся наличием бездисперсионной полосы в спектре частот, разделяющей области с низко- и высокочастотной дисперсиями.

Уравнение Островского не имеет точных решений, но допускает анализ качественными методами исследования динамических систем [39, 40]. Полученное выше уравнение (2.1) далее будет анализироваться аналогичным образом. Оно содержит два дисперсионных слагаемых, из которых второе вносит наибольший вклад в дисперсионный процесс ($d_2/d_3 \sim \varepsilon^2$), поэтому первым из них можно пренебречь.

Рассмотрим частный случай эволюционного уравнения (2.1), когда $d_2 = 0$. Уравнение для стационарных волн запишется в виде:

$$U_{\chi\chi} + \frac{d_3}{v}U - \frac{d_1}{v}(UU_{\chi})_{\chi} = 0, \quad (2.3)$$

где $\chi = \xi - v\theta$, v – скорость нелинейной волны, считаем, что волна распространяется в положительном направлении оси ξ . Уравнение (2.3) описывает колебания ангармонического осциллятора и содержит два типа квадратичной нелинейности. Запишем его в следующем виде:

$$(U_{\chi})^2 = \frac{d_3(2d_1U - 3v)U^2 + E}{3(d_1U - v)^2}, \quad (2.4)$$

где E – константа интегрирования и имеет смысл полной энергии системы.

Фазовый портрет изображен на рис. 1. Видно, что на фазовой плоскости есть замкнутые траектории. Области запрещенных движений $U = \frac{v}{d_1}$, $(U_{\chi})^2 = \frac{2d_3}{3d_1}U + \frac{d_3v}{3d_1^2}$ на рисунке отмечены штриховыми линиями. Знак коэффициента d_1 не влияет, а d_3 влияет на существование замкнутых траекторий. При смене знака коэффициента d_1 фазовый портрет зеркально отображается. Увеличение значения коэффициента сужает область существования замкнутых траекторий на фазовой плоскости. При отрицательных значениях коэффициента d_3 замкнутые траектории отсутствуют на фазовой плоскости (рис. 2).

Графическое изображение правой части уравнения (2.4) $f = f(U, E)$ при $d_3 = 1/2$, $d_1 > 0$ и различных значениях константы E показано на рис. 3. Когда энергия системы

меняется в пределах $0 < E < \frac{d_3v^3}{d_1^2}$ ветвь кривой, имеющая точку максимума, пересекает ось абсцисс. При этих же значениях энергии на фазовой плоскости (рис. 1) возникают замкнутые концентрические фазовые траектории с центром в начале координат, которые соответствуют квазигармоническим (вблизи положения равновесия) и сильно нелинейным (вблизи вертикальной асимптоты) колебаниям осциллятора. Что, в свою очередь, говорит о наличии периодических волн в рассматриваемой системе.

Периодические решения уравнения (2.3) представляются через эллиптические интегралы [42] и имеют следующий вид:

$$\sqrt{\frac{6d_1}{d_3(U_1 - U_3)}} \left(\left(U_1 - \frac{v}{d_1} \right) F(\varphi, k) - (U_1 - U_3) E(\varphi, k) \right) = \pm \chi \quad (2.5)$$

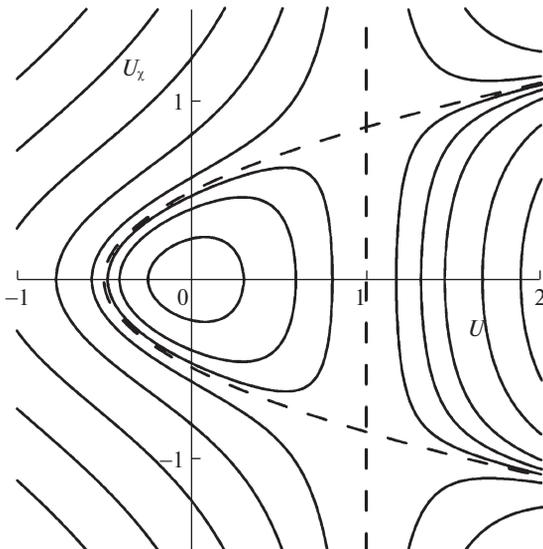


Рис. 1. Фазовый портрет (U, U_x) уравнения (2.3) ($d_1 > 0, d_3 > 0$).

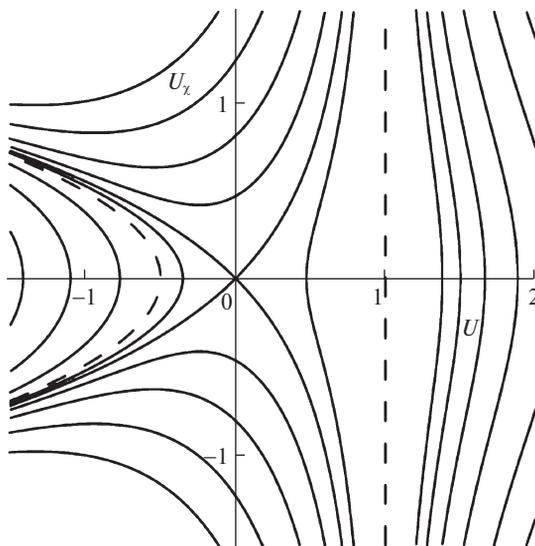


Рис. 2. Фазовый портрет (U, U_x) уравнения (2.3) ($d_1 > 0, d_3 < 0$).

$F(\varphi, k)$, $E(\varphi, k)$ – неполные эллиптические интегралы первого и второго рода, амплитуда и модуль которых равны

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{U - U_3}{U_2 - U_3}}, \quad k = \sqrt{\frac{U_2 - U_3}{U_1 - U_3}}$$

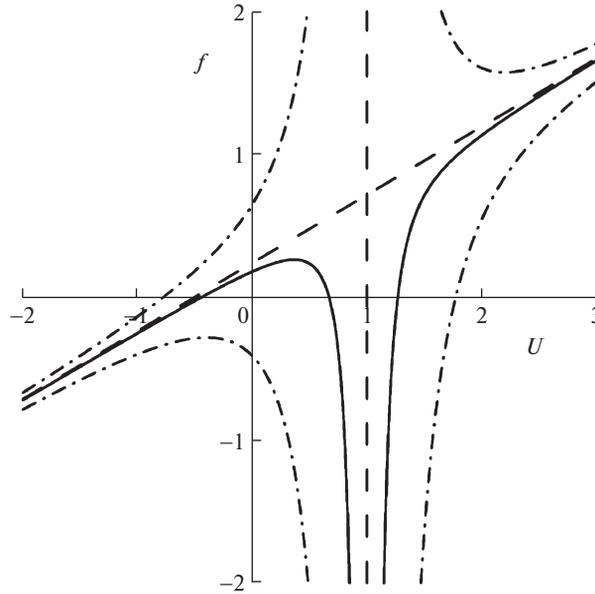


Рис. 3. Зависимости кривой f при фиксированных значениях E : E_1 (штрихпунктир, ниже наклонной асимптоты), E_2 (сплошная), E_3 (штрихпунктир, выше наклонной асимптоты), где $E_1 < E_2 < E_3$, причем $E_1 < 0, 0 < E_2 < \frac{d_3 v^3}{d_1^2}, E_3 > \frac{d_3 v^3}{d_1^2}$.

Здесь U_1, U_2, U_3 – корни кубического уравнения $U^3 - \frac{3v}{2d_1}U^2 + \frac{E}{2d_1d_3} = 0$, которые удовлетворяют неравенству $U_1 > U_2 > U_3$ и согласно тригонометрической формуле Виета имеют вид:

$$U_{1(+),2(-)} = \frac{v}{d_1} \left(\frac{1}{2} - \cos \left(\frac{2\pi}{3} \pm \frac{\phi}{3} \right) \right), \quad U_3 = \frac{v}{d_1} \left(\frac{1}{2} - \cos \left(\frac{\phi}{3} \right) \right),$$

$$\text{где } \phi = \arccos \left(\frac{2Ed_1^2}{d_3v^3} - 1 \right).$$

Профиль решения (2.5) изображен на рис. 4. Видно, что колебания сильно отличаются от гармонических колебаний. Чем ближе на оси (рис. 3) расположены второй и третий корни (но не равны), тем больше колебания будут похожи на гармонические колебания, при этом замкнутая траектория на фазовой плоскости находится около положения равновесия (рис. 1), а коэффициент нелинейных искажений стремится к нулю. Чем ближе на оси расположены первый и второй корни (но не равны), тем более нелинейными являются колебания: верхние пики (вблизи точек максимума) на рис. 4 будут более острыми (т.е. радиус кривизны в точках максимума кривой уменьшается). При этом замкнутая траектория на фазовой плоскости находится рядом с вертикальной асимптотой, а коэффициент нелинейных искажений стремится к единице.

Длина периодических волн вычисляется по формуле

$$\Lambda = \sqrt{\frac{6d_1}{d_3(U_1 - U_3)}} \left(\left(U_1 - \frac{v}{d_1} \right) K(k) - (U_1 - U_3) E(k) \right),$$

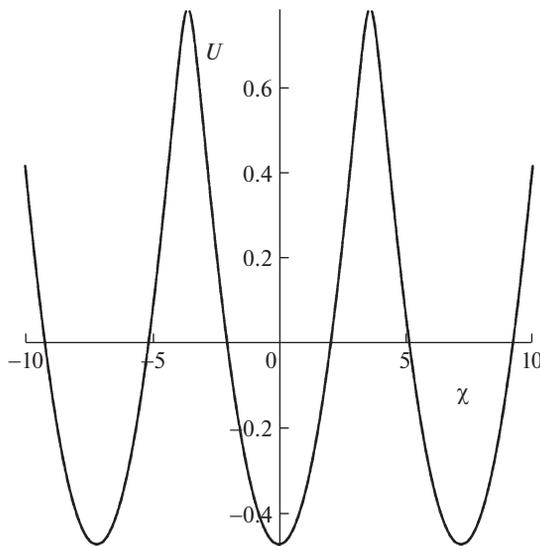


Рис. 4. Профиль периодических решений $U(\chi)$.

где $K(k)$, $E(k)$ – полные эллиптические интегралы. Амплитуду волн можно определить как разницу корней $A = U_2 - U_3$. Для фиксированных начальных условий $U(0) = U_0$, $U_\chi(0) = 0$ зависимости длины волны и ее амплитуды от параметра d_1 представлены на рис. 5, где параметр меняется в пределах $0 < d_1 < \frac{v}{U_0}$. Если значение d_1 близко к нулю, то длина и амплитуда волны (с квазигармоническим профилем) принимают наибольшие значения $\Lambda = 2\pi\sqrt{v/d_3}$, $A = 2U_0$. Если значение параметра стремится к своей верхней границе, то длина волны и амплитуда (профиль сильно нелинейный) минимальны $\Lambda = 6\sqrt{v/d_3}$, $A = \frac{3}{2}U_0$. При фиксированном значении d_1 максимальная амплитуда периодических волн ограничена величиной $A < \frac{3v}{2d_1}$.

Если учесть, что нелинейность в данной системе слабая ($d_1 \sim \varepsilon^2$), то возникающие периодические волны будут квазигармоническими.

3. Эволюционное уравнение и его анализ в случае “мягкой” внешней среды. Перейдем в уравнении (1.6) в движущуюся систему координат $\xi = z - ct$, $\theta = \varepsilon t$ ($c^2 = 1$). В первом приближении по ε получим следующее эволюционное уравнение относительно перемещения:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} + d_1 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \right) - d_2 U - d_3 U^2 = 0, \quad (3.1)$$

здесь коэффициенты имеют вид

$$d_1 = \frac{1}{2\varepsilon c} (a_4 - a_3 - a_5), \quad d_2 = \frac{a_6}{2\varepsilon c}, \quad d_3 = \frac{a_7}{2\varepsilon c}$$

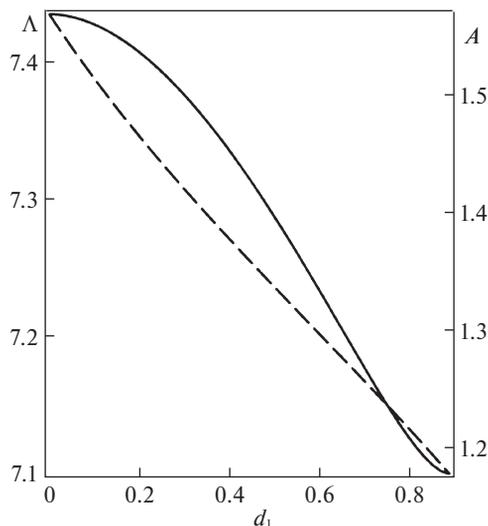


Рис. 5. Зависимости $\Lambda(d_1)$ (сплошная) и $A(d_1)$ (штриховая).

Уравнение (3.1) под знаком производной содержит линейные слагаемые уравнения КдВ. Линейная часть полученного уравнения совпадает с уравнением Островского, отличие составляет нелинейная часть уравнения. Нелинейное слагаемое в уравнении (3.1) также второго порядка, но не содержит производных, его можно отнести к возмущающей части уравнения и назвать нелинейным возмущением. Здесь уже оба дисперсионных слагаемых в равной степени ($d_1/d_2 \sim 1$) играют роль в процессе расщепления фронта волны.

В переменных бегущей волны, уравнение (3.1) принимает вид:

$$U_{xxxx} - \frac{v}{d_1} U_{xx} - \frac{d_2}{d_1} U - \frac{d_3}{d_1} U^2 = 0, \quad (3.2)$$

где v – скорость нелинейной стационарной волны.

Используя метод простейших уравнений [43], находим точное частное решение уравнения (3.2). Метод применяется для поиска точных решений нелинейных дифференциальных уравнений и позволяет строить решения исходного уравнения на основе известных решений простейших уравнений. В качестве простейших уравнений могут выступать уравнения Риккати, Якоби и Вейерштрасса. Решение уравнения (3.2) имеет вид:

$$U(\chi) = \frac{1}{338d_1d_3} \left(105v^2 \operatorname{sech}^4 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{v}{13d_1}} \chi \right) - 169d_1d_2 - 36v^2 \right) \quad (3.3)$$

Здесь скорость нелинейной волны определяется алгебраическим уравнением четвертого порядка

$$\left(\frac{6}{13} v \right)^4 - d_1^2 d_2^2 = 0,$$

а в качестве простейшего уравнения используем уравнение Риккати.

Поскольку коэффициент d_2 всегда положителен ($d_2 = 1/(2c) > 0$), то знак скорости v определяется знаком коэффициента d_1 . Физический интерес представляют два реше-

ния уравнения (3.2), где скорость равна $v_{(+,+)}$ и $v_{(-,-)}$ ($v = \pm \frac{13}{6} \sqrt{\pm d_1 d_2}$), соответствующие решения (3.3) имеют вид:

$$U_1(\chi) = \frac{d_2}{d_3} \left(\frac{35}{24} \operatorname{sech}^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{6}} \sqrt{\frac{d_2}{d_1}} \chi \right) - 1 \right) \quad (3.4)$$

$$U_2(\chi) = -\frac{35d_2}{24d_3} \operatorname{sech}^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{6}} \sqrt{\frac{d_2}{d_1}} \chi \right) \quad (3.5)$$

Решение U_1 имеет смысл при $d_1 > 0$, решение U_2 – при $d_1 < 0$. Эти решения имеют симметричный колоколообразный профиль (рис. 6). Солитон типа (3.4) имеет смещение ($-d_2/d_3$) вдоль вертикальной оси, солитон типа (3.5) без смещения. Полярность солитонов зависит от знака коэффициента при нелинейном слагаемом (d_3). При жесткой нелинейности среды ($d_3 > 0$), первый солитон имеет положительную полярность и отрицательное смещение, второй солитон отрицательной полярности. При мягкой нелинейности среды ($d_3 < 0$), второй солитон имеет положительную полярность, а первый солитон отрицательной полярности с положительным смещением. Амплитуда

и ширина солитонов равны $A = \frac{35d_2}{24|d_3|}$, $\Delta = 2\sqrt{6} \sqrt{\frac{|d_1|}{d_2}}$.

В безразмерных параметрах задачи коэффициент d_1 принимает вид:

$$d_1 = \frac{m_1(m_2 - m_3 - 1)(m_1 m_2 + m_3 - m_1)}{2\epsilon c(1 + m_1)^2(m_1 + m_2 - m_3)^2},$$

поскольку $m_2 - 1 > 0$, то знак d_1 определяется множителем $m_2 - m_3 - 1$, который больше нуля, т.к. $\lambda^2(1 - \kappa_2^2) + \lambda\mu(3 - \kappa_1^2) + \mu^2(2 - \kappa_1^2) > 0$. Значит, в данном случае смысл имеет только решение U_1 . Амплитуда, ширина и скорость солитона запишутся как:

$$A = \frac{35d_2}{24|d_3|}, \quad \Delta = 2\sqrt{6} \sqrt{\frac{|d_1|}{d_2}}, \quad v = \frac{13}{6} \sqrt{d_1 d_2}$$

При увеличении параметра нелинейной жесткости амплитуда солитона падает, ширина и скорость остаются постоянными. График зависимости амплитуды от скорости нелинейной волны при изменении параметра линейной жесткости изображен на рис. 7. При увеличении линейной жесткости амплитуда солитона растет линейно, ширина и скорость ведут себя одинаково: сначала растут, достигая максимума, затем падают.

В рассматриваемом случае наряду с уединенными волнами существуют и периодические волны. На основе метода простейших уравнений [43], с использованием функции Вейерштрасса, находим периодические решения уравнения (3.2), соответствующие стационарным периодическим волнам.

Известно, что эллиптическая функция Вейерштрасса $R(\chi)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению [42]:

$$(R_\chi)^2 = 4R^3 - B_0 R - B_1, \quad (3.6)$$

где B_0 , B_1 – инварианты функции Вейерштрасса. Решение этого уравнения (при $B_0 > 0$) может быть выражено через функцию эллиптического косинуса Якоби

$$R(\chi) = R_2 - (R_2 - R_3) \operatorname{cn}^2(\sqrt{R_1 - R_3} \chi, k), \quad (3.7)$$

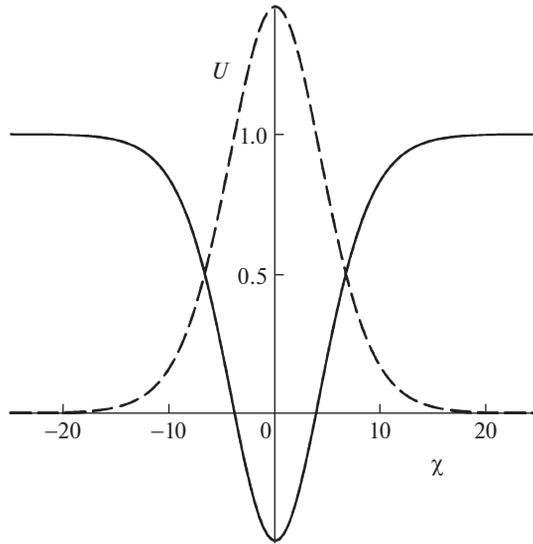


Рис. 6. Зависимости $U_1(\chi)$ (сплошная), $U_2(\chi)$ (штриховая), $d_3 < 0$.

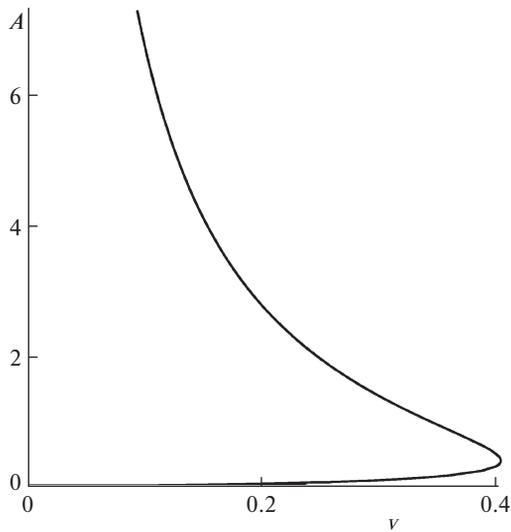


Рис. 7. Зависимость $A(\nu)$.

где $k = \sqrt{\frac{R_2 - R_3}{R_1 - R_3}}$ – модуль эллиптической функции, R_1, R_2, R_3 – действительные корни уравнения, являющегося правой частью уравнения (3.6), которые удовлетворяют соотношению $R_3 < R_2 < R_1$.

Поскольку решение $U(\chi)$ имеет полюс четвертого порядка, а решение $R(\chi)$ имеет полюс второго порядка, то решение будет иметь следующий вид

$$U(\chi) = b_0 R^2 + b_1 R + b_2, \quad (3.8)$$

где коэффициенты b_i ($i = 0, 1, 2$) и B_j ($j = 0, 1$) равны

$$b_0 = \frac{840d_1}{d_3}, \quad b_1 = -\frac{140}{13} \frac{v}{d_3}, \quad b_2 = -\frac{31}{1014} \frac{v^2}{d_1 d_3} - \frac{84d_1}{d_3} B_0 - \frac{1}{4d_3}$$

$$B_0 = \frac{780}{7} \frac{d_1}{v} B_1 + \frac{31}{42588} \frac{v^2}{d_1^2}$$

$$B_1 = \frac{1}{11232} \frac{v}{d_1^2} \left(-\frac{4}{169} \frac{v^2}{d_1} \pm \frac{3}{5} \sqrt{\frac{7}{23} \left(1 - 1296 \left(\frac{2}{169} \frac{v^2}{d_1} \right)^2 \right)} \right)$$

Воспользовавшись тригонометрической формулой Виета, находим выражения для параметров R_i ($i = 1, 2, 3$), правой части решения (3.7):

$$R_{1,2} = -\sqrt{\frac{B_0}{3}} \cos\left(\frac{2\pi}{3} \pm \frac{\Phi}{3}\right), \quad R_3 = -\sqrt{\frac{B_0}{3}} \cos\left(\frac{\Phi}{3}\right),$$

где R_1 соответствует выражение с верхним знаком.

Скорость нелинейной волны изменяется в пределах $v_-^* \leq v \leq v_+^*$ ($v_{\pm}^* = \pm \frac{13}{12} \sqrt{2d_1}$) с учетом того, что $d_1 > 0$. Профили решения (3.8) при различных значениях скорости изображены на рис. 8, 9. Крайние значения скоростей соответствуют предельным состояниям системы. Когда скорость нелинейной волны равна $v = v_-^*$, точка минимума потенциальной функции уравнения (3.6) находится в особой точке “центр” фазовой плоскости, а при стремлении скорости к этому значению фазовые траектории лежат вблизи центра, т.е. в системе существуют (распространяются) квазигармонические волны малой амплитуды (рис. 8). Когда скорость нелинейной волны равна $v = v_+^*$, точка максимума потенциальной функции уравнения (3.6) совпадает с особой точкой типа “седло” на фазовой плоскости. Решение (U_1) в этом случае найдено с помощью уравнения Риккати. При стремлении скорости к значению $v \rightarrow v_+^*$ фазовые траектории расположены внутри и вблизи сепаратрисной петли, значит, в системе имеют место периодические сильно нелинейные (кноидальные) волны (рис. 8).

Отрицательные скорости нелинейной волны означают ее распространение в противоположную сторону. Периодические волны с нулевой скоростью означают периодические колебания частиц среды, но отсутствует распространение возмущения.

При положительных скоростях фазовые траектории, соответствующие периодическим колебаниям расположены внутри сепаратрисной петли. При отрицательных скоростях фазовые траектории, соответствующие периодическим колебаниям разной амплитуды, находятся вблизи седловой точки.

Из графиков (рис. 8, 9) видно, что функции амплитуды $A(v)$ и длины волны $\Lambda(v)$ от скорости не являются монотонными функциями.

4. Анализ случая, когда жесткости внешней среды и стержня являются величинами одного порядка. Отыскивая решение уравнения (1.7) в виде бегущей стационарной волны $U = U(\chi)$, где $\chi = z - v\tau$, перейдем к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка, которое дважды проинтегрируем по переменной χ . Если константы интегрирования считать равными нулю, то уравнение преобразуется к виду:

$$U_{\chi\chi} + bU^2 = 0, \quad (4.1)$$

где $b = \frac{a_8 v^2 - a_9}{a_3 v^4 - a_4 v^2 + a_5}$, v – скорость нелинейной волны.

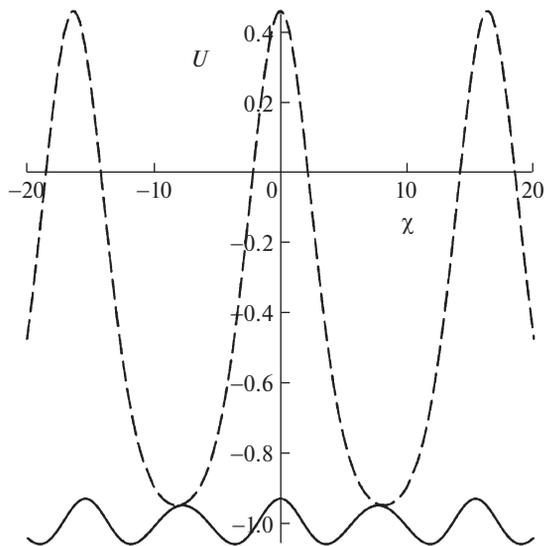


Рис. 8. Зависимости $U(\chi)$ при различных значениях ν ($\nu \rightarrow \nu_{\pm}^*$ – сплошная, $\nu \rightarrow \nu_{\pm}^*$ – штриховая), $d_3 > 0$.

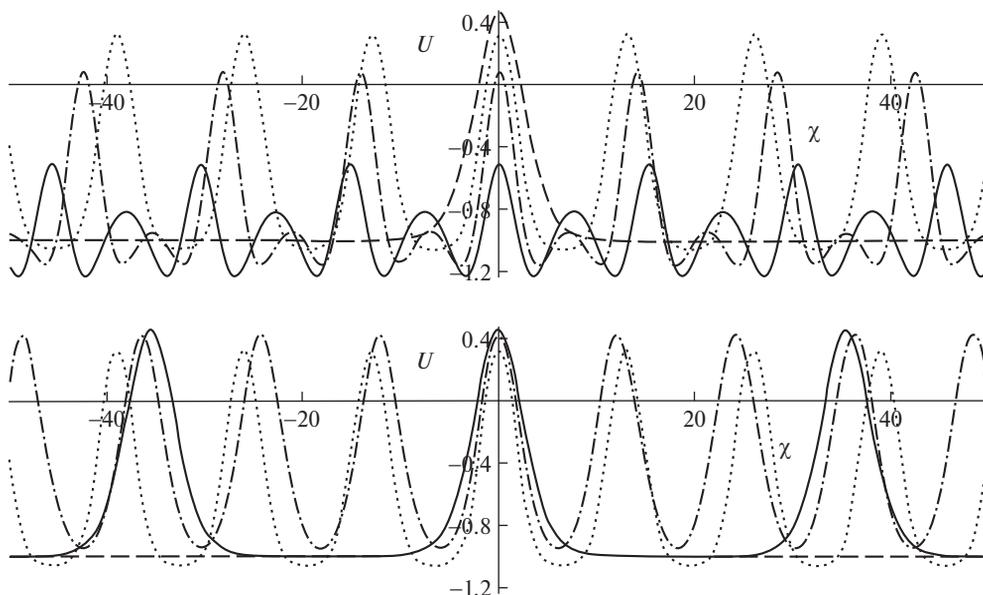


Рис. 9. Зависимости $U(\chi)$ при различных значениях ν ($d_3 > 0$); при $\nu = \nu_1$ – сплошная и $\nu = \nu_2$ – штрихпунктир (на верхнем рисунке); при $\nu = \nu_3$ – штрихпунктир и $\nu = \nu_4^* = 0$ – сплошная (на нижнем рисунке); при $\nu = 0$ – пунктир ($\nu_{\pm}^* < \nu_1 < \nu_2 < 0 < \nu_3 < \nu_4^*$); $U(\chi, \nu = \nu_4^*) = U_1(\chi)$ (штриховая).

Последнее уравнение можно еще один раз проинтегрировать

$$(U_{\chi})^2 = C_0 - \frac{2}{3} b U^3$$

и построить фазовый портрет (рис. 10). Видно, что на фазовом портрете нет замкнутых фазовых траекторий. Уравнение (4.1) не имеет ограниченных решений.

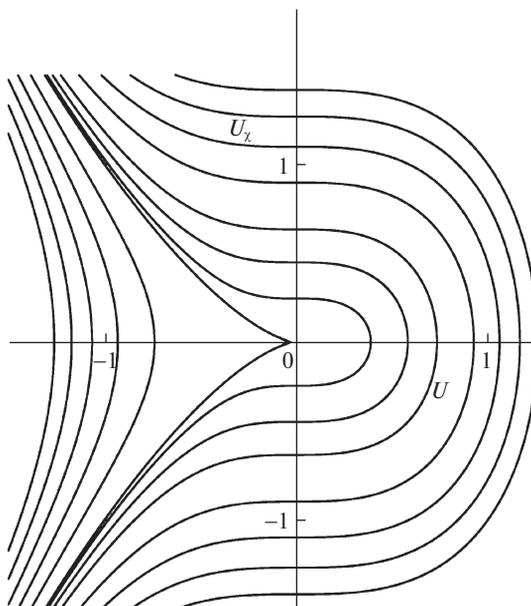


Рис. 10. Фазовый портрет (U, U_x) уравнения (4.1).

Заключение. Показано, что нелинейность внешней упругой среды влияет на существование локализованных и периодических волн, распространяющихся в стержне Миндлина–Германа с постоянной скоростью и без изменения своей формы (нелинейные стационарные волны). Тип нелинейности (мягкая, жесткая) влияет на полярность уединенной волны, распространяющейся в стержне, в случае, если жесткость среды существенно меньше жесткости стержня. Здесь равнозначные по величине (нелинейность того же порядка малости, что и дисперсия) и противоположные по действию на фронт волны, нелинейные и дисперсионные процессы формируют волну солитонного типа в виде колокола. Если жесткость среды значительно больше жесткости стержня, то формирование нелинейных стационарных локализованных волн невозможно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10073-мк).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зверев В.А. Модуляционный метод измерения дисперсии ультразвука // Докл. АН СССР. 1953. Т. 91. № 4. С. 791–794.
2. Зверев В.А. Модуляционный метод измерения дисперсии ультразвука // Акуст. ж. 1956. Т. 2. № 2. С. 142–145.
3. Эйбрамсон Х.Н., Пласс Х. Дж., Руннергер Э.А. Распространение волн напряжения в стержнях и балках // Проблемы механики. 1961. Вып. 3. С. 25–90.
4. Gary G., Klepaczko J.R., Zhao H. Correction de dispersion pour l'analyse des petites deformations aux barre de Hopkinson // J. Physique IV. 1991. V. 1. P. 403–410.
5. Lifshitz J.M., Leber H. Data processing in the split Hopkinson pressure bar tests // Int. J. Impact Engng. 1994. V. 15. P. 723–733.

6. Брагов А.М., Константинов А.Ю., Медведкина М.В. Дисперсия волн в разрезных стержнях Гопкинсона при динамических испытаниях хрупких материалов // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 6 (1). С. 158–162.
7. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории стержней, пластин и оболочек. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
8. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979. 296 с.
9. Mindlin R.D., Herrmann G. A one-dimensional theory of compressional waves in an elastic rod // Proc. 1 st U.S. National Congr. Appl. Mech. ASME. New York. 1952. P. 187–191.
10. Mindlin R.D., Herrmann G. Corrections // Proc. 2 nd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. ASME. New York. 1954. P. 233.
11. Mindlin R.D., Herrmann G. A One-Dimensional Theory of Compressional Waves in an Elastic Rod. New York: Springer, 1989. V. 1. P. 243–248.
12. Herrmann G. Forced motions of elastic rods // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1954. V. E21. № 3. P. 221–224.
13. Biot M. Dynamics of viscoelastic anisotropic media // Reprinted from Proc. Fourth Midwestern Conf. Solid Mech. at Purdue Univ. 1955. 16 p.
14. Doyle J.F. Wave Propagation in Structure. New York: Springer, 1989. 258 p.
15. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
16. Ерофеев В.И., Кажжаев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность, М.: Физматлит, 2002. 208 с.
17. Galal Krishnan S., Narendar S. Wave Propagation in Nanostructures, Cham: Springer, 2013. 358 p.
18. Кукуджанов В.Н. Асимптотические решения уточненных уравнений упругих и упруго-пластических волн в стержнях // Волны в неупругих средах, под ред. Ю.Н. Работнова. Кишинев: АН МССР, 1970. С. 119–129.
19. Исаев В.И. Продольный удар по стержню на основе теории Миндлина–Германа // Вестн. МИИТ. 2005. № 12. С. 93–98.
20. Исаев В.И. Моделирование откликов механических систем // Мир транспорта. 2007. № 1. С. 26–30.
21. Andrianov I.V., Awrejcewicz J., Weichert D. Improved continuous models for discrete media // Math. Probl. in Engng. 2010. Article ID 986242. 35 p.
22. Galal Krishnan S., Mahapatra D.R. A spectral finite element model for analysis of axial-flexural-shear coupled wave propagation in laminated composite beams // Compos. Struct. 2003. V. 59. № 1. P. 67–88.
23. Anderson S.P. Higher-order rod approximation for the propagation of longitudinal stress waves in elastic bars // J. Sound & Vibr. 2006. V. 290. № 1–2. P. 290–308.
24. Krawczuk M., Grabowska J., Palacz M. Longitudinal wave propagation. Part I – Comparison of rod theories // J. Sound & Vibr. 2006. V. 295. № 3–5. P. 461–478.
25. Guven U. Two mode Mindlin-Herrmann rod solution based on modified couple stress theory // ZAMM. J. Appl. Math. & Mech. 2014. V. 94. № 12. P. 1011–1016.
26. Chunbiao Gan, Yimin Wei, Shixi Yang Longitudinal wave propagation in a rod with variable cross-section // J. Sound & Vibr. 2014. V. 333. № 2. P. 434–445.
27. Kim S., Lee U. Effects of delamination on guided waves in a symmetric laminated composite beam // Math. Probl. in Engng. 2014. Article ID 956043. 12 p.
28. Chunhua Jin, Xinwei Wang Dynamics analysis of functional graded material bars by using novel weak form quadrature element method // J. Vibroeng. 2014. V. 16. № 6. P. 2790–2799.
29. Ерофеев В.И., Кажжаев В.В., Семерикова Н.П. Применение уточненных стержневых моделей для описания распространения упругих волн в слоистых конструкциях // Акустика неоднородных сред. Сб. тр. семинара научной школы проф. С.А. Рыбака. 2005. С. 32–37.
30. Архипова Н.И., Ерофеев В.И., Семерикова Н.П. Описание распространения упругих волн в слоистых элементах конструкций с помощью уточненных стержневых моделей // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4 (1). С. 130–133.
31. Ерофеев В.И., Потанов А.И. Нелинейные модели продольных колебаний стержней // Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепропетровск: Днепропетр. гос. ун-т им. 300-летия Воссоединения Украины с Россией, 1984. Вып. 32. С. 78–82.

32. Ерофеев В.И., Ключева Н.В., Семерикова Н.П. Нелинейные упругие волны в стержне Миндлина–Германа // Изв. вузов. Прикл. нелин. дин. 1999. Т. 7. № 4. С. 35–47.
33. Ерофеев В.И., Ключева Н.В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках // Акустич. ж. 2002. Т. 48. № 6. С. 725–740.
34. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. М.: Стройиздат, 1978. 204 с.
35. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 519 с.
36. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах // УФН. 1970. Т. 102. № 4. С. 549–586.
37. Reissner E. On postbuckling behavior and imperfection sensitivity of thin elastic plates on a non-linear elastic foundation // Stud. Appl. Math. 1970. V. XLIX. № 1. P. 45–57.
38. Островский Л.А. Нелинейные внутренние волны во вращающемся океане // Океанология. 1978. Т. 18. № 2. С. 181–191.
39. Гандариас М.Л., Брузон М.С. Симметричный анализ и точные решения для некоторых уравнений Островского // ТМФ. 2011. Т. 168. № 1. С. 49–64.
40. Stepanyants Y.A. On stationary solutions of the reduced Ostrovsky equation: Periodic waves, compactons and compound solitons // Chaos, Solitons & Fractals. 2006. V. 28. P. 193–204.
41. Степанянц Ю.А. Нелинейные волны во вращающемся океане (уравнение Островского, его обобщения и приложения) // Изв. РАН. ФАО. 2020. Т. 56. № 1. С. 20–42.
42. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, рядов и произведений. Петербург: БХВ, 2011. 1182 с.
43. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики: Долгопрудный: Интеллект, 2010. 368 с.

Anharmonic Waves in a Mindlin–Herman Rod Immersed in a Nonlinearly Elastic Medium

V. I. Erofeev^{a,#} and A. V. Leonteva^{a,##}

^a Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Nizhny Novgorod, Russia

[#] e-mail: erof.vi@yandex.ru

^{##} e-mail: aleonav@mail.ru

Propagation of longitudinal waves in a Mindlin–Hermann’s rod immersed in a nonlinearly elastic medium is studied. By consideration of various options of a ratio of a rigidity of a rod and rigidity of the external medium in which the rod is placed, three limiting cases are received. It is shown that if the rigidity of the external medium significantly surpasses a rigidity of a rod, then the evolutionary equation represents Ostrovsky’s equation, known in nonlinear dynamics. The equation has no exact decisions, but allows a qualitative research at equality to zero senior derivative. In this case the solution in the form of a nonlinear periodic stationary wave is found and analyzed. If the rigidity of the external medium significantly concedes to a rigidity of a rod, then the evolutionary equation is the equation different from Ostrovsky’s equation in a nonlinear part. It is shown that in this case in a rod propagation of solitons of a classical profile is possible. It is noted that if rigidities of the external medium and a rod have one order, then nonlinear stationary waves can’t be formed.

Keywords: longitudinal wave, model Mindlin–Herman, nonlinearly elastic medium, evolutionary equation of Ostrovsky, periodic wave, soliton

REFERENCES

1. Zverev V.A. Modulation method for measuring ultrasound dispersion // Dokl. AN SSSR. 1953, vol. 91, no. 4, pp. 791–794. (in Russian)
2. Zverev V.A. Modulation method for measuring ultrasound dispersion // Akustich. zh. 1956. vol. 2, no. 2, pp. 142–145. (in Russian)
3. Eibramson Kh.N., Plass Kh. Dz.h., Ripperger E.A. Propagation of stress waves in rods and beams // Problemy Mekhaniki, 1961, no. 3, pp. 25–90. (in Russian)

4. Gary G., Klepaczko J.R., Zhao H. Correction de dispersion pour l'analyse des petites deformations aux barre de Hopkinson // J. Physique IV, 1991, vol. 1, pp. 403–410.
5. Lifshitz J.M., Leber H. Data processing in the split Hopkinson pressure bar tests // Int. J. Impact Engng., 1994, vol. 15, pp. 723–733.
6. Bragov A.M., Konstantinov A.Iu., Medvedkina M.V. Wave dispersion in split hopkinson pressure bars in dynamic testing of brittle materials // Vestn. Lobachevsky Univ. Nizhni Novgorod, 2011, no. 6(1), pp. 158–162. (in Russian)
7. Grigoliuk E.I., Selezov I.T. Nonclassical Theories of Rods, Plates, and Shells. Moscow: VINITI, 1973. 272 p. (in Russian)
8. Artobolevskii I.I., Bobrovnikskii Iu.I., Genkin M.D. Introduction to the Acoustic Dynamics of Machines. Moscow: Nauka, 1979. 296 p. (in Russian)
9. Mindlin R.D., Herrmann G. A one-dimensional theory of compressional waves in an elastic rod // Proc. 1 st U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. ASME, New York, 1952, pp. 187–191.
10. Mindlin R.D., Herrmann G. Corrections // Proc. 2nd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., ASME, New York, 1954, pp. 233.
11. Mindlin R.D., Herrmann G. A one-dimensional theory of compressional waves in an elastic rod // Coll. Papers Raymond D. Mindlin, vol. 1. N.Y.: Springer, 1989, pp. 243–248.
12. Herrmann G. Forced motions of elastic rods // Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1954, vol. E 21, no. 3, pp. 221–224.
13. Biot M. Dynamics of viscoelastic anisotropic media // Reprinted from Proc. Fourth Midwestern Conf. Solid Mech. at Pardue Univ, 1955. 16 p.
14. Doyle J.F. Wave Propagation in Structure. N.Y.: Springer, 1989. 258 p.
15. Vesnitskii A.I. Waves in Systems with Moving Boundaries. Moscow: Fizmatlit, 2001. 320 p. (in Russian)
16. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semerikova N.P. Waves in the rods. Dispersion. Dissipation. Nonlinearity. Moscow: Fizmatlit, 2002. 208 p. (in Russian)
17. Gapalakrishnan S., Narendar S. Wave Propagation in Nanostructures. Cham: Springer, 2013. 358 p.
18. Kukudzhanov V.N. Asymptotic solutions of refined equations of elastic and elastic-plastic waves in rods // Volny v Neuprugikh Sredakh, Ed. by Iu.N. Rabotnov AN MSSR, Kishinev. 1970. pp. 119–129. (in Russian)
19. Isaev V.I. Longitudinal impact on the rod based on Mindlin-Herman theory // Vestn. MIIT, 2005, no. 12, pp. 93–98. (in Russian)
20. Isaev V.I. Modeling mechanical system responses // Mir transporta, 2007, no. 1, pp. 26–30. (in Russian)
21. Andrianov I.V., Awrejcewicz J., Weichert D. Improved continuous models for discrete media // Math. Probl. in Engng, 2010, Article ID 986242, 35 p.
22. Gapalakrishnan S., Mahapatra D.R. A spectral finite element model for analysis of axial-flexural-shear coupled wave propagation in laminated composite beams // Compos. Struct., 2003, vol. 59, no. 1, pp. 67–88.
23. Anderson S.P. Higher-order rod approximation for the propagation of longitudinal stress waves in elastic bars // J. Sound & Vibr., 2006, vol. 290, no. 1–2, pp. 290–308.
24. Krawczuk M., Grabowska J., Palacz M. Longitudinal wave propagation. Pt I. Comparison of rod theories // J. Sound & Vibr., 2006, vol. 295, no. 3–5, pp. 461–478.
25. Guven U. Two mode Mindlin-Herrmann rod solution based on modified couple stress theory // ZAMM. J. Appl. Math. & Mech., 2014, vol. 94, no. 12, pp. 1011–1016.
26. Chunbiao Gan, Yimin Wei, Shixi Yang Longitudinal wave propagation in a rod with variable cross-section // J. Sound & Vibr., 2014, vol. 333, no. 2, pp. 434–445.
27. Kim S., Lee U. Effects of delamination on guided waves in a symmetric laminated composite beam // Math. Probl. in Engng., 2014, Article ID 956043, 12 p.
28. Chunhua Jin, Xinwei Wang Dynamics analysis of functional graded material bars by using novel weak form quadrature element method // J. Vibroeng., 2014, vol. 16, no. 6, pp. 2790–2799.
29. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semerikova N.P. The use of refined rod models to describe elastic waves propagation of in layered structures // Akustika neodnorodnykh sred.. Sbornik trudov seminara nauchnoi shkoly prof. S.A. Rybaka, 2005, pp. 32–37. (in Russian)

30. *Arkhipova N.I., Erofeev V.I., Semerikova N.P.* (2011) Description of elastic wave propagation in layered structural elements using improved models of bars // Vestn. Lobachevsky Univ. Nizhni Novgorod, no. 4 (1), pp. 130–133. (in Russian)
31. *Erofeev V.I., Potapov A.I.* Nonlinear models of longitudinal oscillations of rods // *Gidraeromekhanika i Teoriia Uprugosti. sbornik, Dnepropetrovsk: Dnepropetrovskii gosudarstvennyi universitet im. 300-letiiia Vossoedineniia Ukrainy s Rossiei*, 1984. no. 32, pp. 78–82. (in Russian)
32. *Erofeev V.I., Kliueva N.V., Semerikova N.P.* Nonlinear elastic waves in Mindlin–Hermann rod // *Izvestiia vuzov, Prikl. Nelin. din.*, 1999, vol. 7, no. 4, pp. 35–47. (in Russian)
33. *Erofeev V.I., Klyueva N.V.* Solitons and nonlinear periodic strain waves in rod, plates and shells (A Review) // *Acoust. Phys.*, 2002, vol. 48, no. 6, pp. 643–655.
34. *Lukash P.A.* Fundamentals of Nonlinear Structural Mechanics. Moscow: Stroyizdat, 1978. 204 p. (in Russian)
35. *Zaremba L.K., Krasil'nikov V.A.* Introduction to Nonlinear Acoustics. Moscow: Nauka, 1966. 519 p. (in Russian)
36. *Zaremba L.K., Krasil'nikov V.A.* Nonlinear phenomena in the propagation of elastic waves in solids // *Physics Uspekhi*, 1971, vol. 13, no. 6, pp. 778–797.
37. *Reissner E.* On postbuckling behavior and imperfection sensitivity of thin elastic plates on a nonlinear elastic foundation // *Studies in Appl. Math.*, 1970, vol. XLIX, no. 1, pp. 45–57.
38. *Ostrovskii L.A.* Nonlinear internal waves in rotating ocean // *Okeanol.*, 1978, vol. 18, no. 2, pp. 181–191. (in Russian)
39. *Gandarias M.L., Bruzón M.S.* Symmetry analysis and exact solutions of some Ostrovsky equations // *Theor. & Math. Phys.*, 2011, vol. 168, no. 1, pp. 898–911.
40. *Stepanyants Y.A.* On stationary solutions of the reduced Ostrovsky equation: Periodic waves, compactons and compound solitons // *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, vol. 28, pp. 193–204.
41. *Stepanyants Y.A.* Nonlinear waves in a rotating ocean (The Ostrovsky equation and its generalizations and applications) // *Izv. Atmosph. & Oceanic Phys.*, 2020, vol. 56. no. 1, pp. 16–32.
42. *Gradshtein I.S., Ryzhik I.M.* Tables of Integrals, Series and Products. Petersburg: BKhV, 2011. 1182 p. (in Russian)
43. *Kudriashov N.A.* Methods of Nonlinear Mathematical Physics: Tutorial, Dolgoprudnyi: Intellect, 2010. 368 p. (in Russian)

УДК 539.3

**КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОРИСТОУПРУГОГО КОМПОЗИТА
ПРИ НАЛИЧИИ СИЛ ТРЕНИЯ**© 2020 г. Т. В. Суворова^{1,*}, О. А. Беляк^{1,**}¹ Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростов-на-Дону, Россия*e-mail: suvorova_tv111@mail.ru**e-mail: o_bels@mail.ru

Поступила в редакцию 05.07.2019 г.

После доработки 10.05.2020 г.

Принята к публикации 25.05.2020 г.

Рассматривается контактная задача для гетерогенного флюидонасыщенного полу-пространства при учете сил трения в области контакта, возникающих при движении штампа с плоским или параболическим основанием. Для учета внутренней микро-структуры основания используется модель Био. Краевая задача с помощью преобразования Фурье сведена к интегральному уравнению 1-го рода с ядром, имеющим логарифмическую особенность. Решение интегрального уравнения построено методом коллокации. Исследовано влияние пористости, коэффициента трения на контактные напряжения маслонаполненного композита на основе фенолона, механические модули которого определены с помощью методов микромеханики, конечно-элементного моделирования и сопоставлены с экспериментальными результатами.

Ключевые слова: контактная задача, трение в области контакта, композит, пороупругость

DOI: 10.31857/S0032823520040104

1. Введение. Контактные задачи и их приложения к трибологии достаточно давно привлекают внимание многих исследователей [1–5]. Сложности постановок и подходов, возникающих при решении контактных задач, подробно изложены в фундаментальной монографии [1]. Контактные задачи в квазистатической постановке для однородных вязкоупругих сред рассмотрены в работах [1–5]. Надо отметить, что свойства контактирующих поверхностей в значительной степени влияют на силу трения. Влияние микрогеометрии контактирующих поверхностей на силу трения исследовано в работах [4, 5]. В настоящей работе рассматривается контактная задача в квазистатической постановке о движении жесткого штампа с трением по основанию при учете его микроструктуры. Внутренняя микроструктура основания, состоящего из вязкоупругого скелета и флюида-наполнителя, учитывается использованием, как определяющих, уравнений гетерогенной двухфазной среды Био [6–9]. Определение механических модулей среды Био, является отдельной весьма важной задачей. Модули объемного сжатия насыщенной и дренированной среды были определены экспериментально, в том числе и методом наноиндентирования [10–12], а также на основе методов микромеханики и конечно-элементного моделирования. Рассмотрены случаи штампов с плоским и параболическим основанием.

Проблемы определения сил трения актуальны при конструировании композитов антифрикционного назначения на основе вязкоупругой матрицы и флюидного наполнителя [11–13].

2. Постановка задач. Рассмотрим плоскую область $-\infty < x_1 < \infty$, $x_2 \leq 0$, занятую двухфазной средой, состоящей из вязкоупругой пористой матрицы-скелета и флюида, заполняющего поры. По лицевой непроницаемой поверхности гетерогенной среды скользит жесткий штамп со скоростью V под действием силы $\mathbf{P} = \{P_1, P_2\}$, которая приложена к штампу так, чтобы обеспечить полный контакт с поверхностью при равномерном движении. Рассматривается диапазон скоростей, намного меньших скорости поверхностных волн типа Релея. Для учета внутренней микроструктуры основания используем, как наиболее апробированную, модель, описываемую уравнениями гетерогенной двухфазной среды Био–Френкеля [6, 7]:

$$\begin{aligned} A\nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + 2N\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + Q\nabla\nabla \cdot \mathbf{v} &= \rho_{11} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} + b \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) \\ Q\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + R\nabla\nabla \cdot \mathbf{v} &= \rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - b \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) \\ \sigma_{ij}^s &= Ae\delta_{ij} + 2Ne_{ij} + Qe\delta_{ij} \\ \sigma^f &= Qe + R\varepsilon, \quad i, j = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где A , N , Q , R , ρ_{11} , ρ_{12} , ρ_{22} – механические характеристики двухфазной среды [6], e_{ij} и ε_{ij} – тензоры деформации, соответствующие векторам перемещений твердой фазы $\mathbf{u}\{u_1, u_2\}$ и жидкой фазы $\mathbf{v}\{v_1, v_2\}$;

$$\begin{aligned} e_{ij} &= (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad \varepsilon_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2 \\ e &= \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad \varepsilon = \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad \Gamma_{ij} = \sigma_{ij}^s + \delta_{ij}\sigma^f, \end{aligned}$$

σ_{ij}^s – тензор напряжений, действующий на вязкоупругий скелет, σ^f – давления, действующие на жидкость в порах. Вязкость матрицы композита учтена в рамках модели частотно-независимого внутреннего трения. Согласно такому подходу модуль сдвига имеет вид $N \sim N(1 + i\beta)$, где величина β пропорциональна коэффициенту потерь вязкоупругого материала [9] и может быть определена экспериментально [14]. Вследствие этого присутствует малая комплексная составляющая в коэффициентах уравнения (2.1) N , A , Q , R [8, 9].

В области контакта Ω нормальные и касательные напряжения связаны законом Амонтона–Кулона, $\Gamma_{12} = k_r \Gamma_{22}$, где k_r – коэффициент трения. Полагаем, что силы межфазного взаимодействия пренебрежимо малы, $b = 0$. Под действием нормальной составляющей силы \mathbf{P} , приложенной с эксцентриситетом, возникает только осадка штампа δ , параллельно оси Ox_2 . Граничные условия задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} x_2 = 0: u_2 &= v_2 \\ \Gamma_{12} = \Gamma_{22} &= 0; \quad |x_1 - Vt| \notin \Omega \\ \Gamma_{12} = k_r \Gamma_{22}, \quad u_2 &= \delta - \eta x_1^2, \quad \Gamma_{22} = -q(x_1) \\ |x_1 - Vt| \in \Omega, \quad \Omega &= (a_1, a_2) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Область контакта $\Omega = (a_1, a_2)$ для штампа с параболическим основанием и контактные напряжения $q(x_1)$ неизвестны. Для штампа с плоским основанием $a_1 = -1$, $a_2 = 1$. Параметр η связан с кривизной штампа с параболическим основанием.

Рассматривались [1–5, 15, 16] задачи о давлении штампа на упругое основание различного строения с учетом сил трения, изучалось [17–19] действие движущейся осциллирующей нагрузки на гетерогенное основание.

3. Построение решения интегрального уравнения. Применим к формулам (2.1)–(2.2) для установившегося режима колебаний [20] преобразование Фурье, затем перейдем в подвижную систему координат с началом в центре штампа, устремив частоту колебаний к нулю [21]. Формулы (2.1)–(2.2) далее будем рассматривать в подвижной системе координат $(x = x_1 - Vt, x_2)$ в безразмерном виде, при этом линейные размеры отнесены к характерной линейной единице, а напряжения – к модулю сдвига матрицы. Перемещения представляются в виде трех потенциалов, соответствующих трем типам волн, распространяющихся в гетерогенной среде. После удовлетворения граничных условий в результате преобразований, подробнее описанных в [22] приходим к интегральному уравнению относительно нормальных контактных давлений $q(\xi)$:

$$\int_{a_1}^{a_2} k(x - \xi)q(\xi)d\xi = \delta - \eta x^2 \quad (3.1)$$

Для штампа с плоским основанием в интегральном уравнении (3.1) следует положить $a_1 = -1, a_2 = 1, \eta \equiv 0$, для штампа с параболическим основанием учитываем, что $q(a_1) = q(a_2) = 0$.

Ядро интегрального уравнения (3.1) имеет вид

$$k(x - \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (k_r B_{21}(\alpha) + B_{22}(\alpha)) e^{i(x-\xi)\alpha} d\alpha,$$

α – параметр преобразования Фурье, $B_{2k}(\alpha), k = 1, 2$ – элементы матрицы Грина для гетерогенного полупространства:

$$B_{21} = \frac{i}{\alpha\Delta} (2(m_1 - m_2)w_1w_2w_3 + g_4(g_1V_{01} + 2) - g_3(g_2V_{02} + 2))$$

$$B_{22} = \frac{1}{|\alpha|\Delta} (m_1 - m_2)w_1w_2V_{03}$$

$$\Delta = 4(m_2 - m_1)w_1w_2w_3 - 2g_3w_1(V_{02} - 2) + 2g_4w_2(V_{01} - 2) + (m_1 - 1)w_1V_{03}(g_2V_{02} - 2) - (m_2 - 1)w_2V_{03}(g_1V_{01} - 2)$$

$$g_k = q_{11} + q_{12}(m_k + 1) + q_{22}m_k, \quad g_{k+2} = m_k + \rho_{12}/\rho_{22}, \quad k = 1, 2$$

$$V_{0i} = (V/V_i)^2, \quad w_i = \sqrt{1 - V_{0i}}, \quad i = 1, 2, 3,$$

V_i – скорости распространения двух продольных и поперечной волны в гетерогенной среде, а $m_k, k = 1, 2$ – корни уравнения вида:

$$\begin{vmatrix} \gamma_{12} & \gamma_{22} \\ q_{12} & q_{22} \end{vmatrix} m^2 + \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{22} \\ q_{11} & q_{22} \end{vmatrix} m + \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ q_{11} & q_{12} \end{vmatrix} = 0$$

$$q_{11} = A/N + 2, \quad q_{12} = Q/N, \quad q_{22} = R/N$$

$$\gamma_{11} = \rho_{11}/\rho_s, \quad \gamma_{12} = \rho_{12}/\rho_s, \quad \gamma_{22} = \rho_{22}/\rho_s$$

Рассмотрим квазистатический процесс, наиболее востребованный в трибологических испытаниях, при скорости движения штампа, удовлетворяющей соотношению $V \ll V_R$, где V_R – скорость поверхностных волн типа Релея в пористоупругом полупространстве. В соответствии с этим преобразуем формулы (3.1), осуществляя разложение в ряд по малым параметрам $V/V_i, i = 1, 2, 3$. Ядро интегрального уравнения, отвечающее квазистатическому процессу, имеет вид:

$$k(x - \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{ik_r K_1}{\alpha} + \frac{K_2}{|\alpha|} \right) e^{i\alpha(x-\xi)} d\alpha$$

$$\begin{aligned}
K_1 &= \Theta_{10}(q_{ij}, \gamma_{ij}, m) + \zeta^2 \Theta_{11}(q_{ij}, \gamma_{ij}, m) + O(\zeta^4) \\
K_2 &= \Theta_{20}(q_{ij}, \gamma_{ij}, m) + \zeta^2 \Theta_{21}(q_{ij}, \gamma_{ij}, m) + O(\zeta^4), \quad \zeta = V/V_1 \\
\Theta_{10}(q_{ij}, \gamma_{ij}, m) &= 0.5c_{11}/c_{01} \\
\Theta_{11}(q_{ij}, \gamma_{ij}, m) &= 0.5(c_{12} + c_{11}c_{02}/c_{01})/c_{01} \\
\Theta_{20}(q_{ij}, \gamma_{ij}, m) &= (m_1 - m_2)/c_{01} \\
\Theta_{21}(q_{ij}, \gamma_{ij}, m) &= -(m_1 - m_2)(0.5(1 + \zeta_2/\zeta_1) + c_{02}/c_{01})/c_{01} \\
c_{01} &= 2(g_4(g_1 - 1) - g_3(g_2 - 1)) \\
c_{02} &= (g_2 - 1)(m_1 - 1)\zeta_2/\zeta_1 - (g_1 - 1)(m_2 - 1) - c_{01} \\
c_{11} &= 2(g_4(g_1\zeta_1 + \zeta_1 + 1) - g_3(g_2\zeta_2 + \zeta_2 + 1)) \\
c_{12} &= (g_3 - g_4)(\zeta_2 + 1 + \zeta_2/\zeta_1) + g_2g_3 - g_1g_4 \\
\zeta_i &= (V_i/V_3)^2, \quad i = 1, 2
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Отметим, что для малой скорости движения штампа при трибологических испытаниях [10] ядро интегрального уравнения (3.2), отвечающее квазистатическому процессу имеет слабую зависимость от скорости.

Для регуляризации интегрального уравнения (3.1) необходимо в выражении ядра (3.2) выделить логарифмическую особенность, при этом используем значения интегралов [23]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iy\alpha}}{\alpha} d\alpha = i\pi \operatorname{sgn} y, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iy\alpha}}{|\alpha|} d\alpha = -2(C + \ln|y|), \tag{3.3}$$

где C – постоянная Эйлера.

С учетом формул (3.3) выражение (3.2) преобразуем к виду:

$$k(x - \xi) = -0.5 \operatorname{sgn}(x - \xi) k_r K_1(V) - (C + \ln|x - \xi|) K_2(V)/\pi \tag{3.4}$$

Применим метод коллокации для решения интегрального уравнения (3.1) с ядром (3.4). Проведем дискретизацию области контакта $\tilde{\Omega}$ для штампа с плоским основанием, выбрав точки коллокации x_i, ξ_i , равномерно распределенными, с шагом $h = 2/N$ на отрезке $[-1 + h/2, 1 - h/2]$, $\xi_k = -1 + h(k - 0.5)$, $k = 1, 2, \dots, N$.

При этом полагаем $q(x)|_{x_i < x < x_{i+1}} = q(x_i) = q_i$, $i = 1, 2, \dots, N$. В случае штампа с параболическим основанием определение области контакта и контактного давления осуществляется согласно алгоритму, подробно описанному в фундаментальной работе [16]. При этом для дискретизации выбирается область $\Omega \subset \tilde{\Omega}$, заведомо большая, чем истинная область контакта Ω и учитывается, что $q(a_1) = q(a_2) = 0$.

В результате, решение интегрального уравнения (3.1) сводится к конечной системе линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N r_{ik} q_k &= f(x_k)/h \\
r_{ik} &= k(h(x_k - \xi_i)), \quad i \neq k, i, \quad i, k = 1, 2, \dots, N \\
r_{kk} &= -k_r K_1(V)/2 - K_2(V)(C + \ln(h/e))/\pi
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Элементы матрицы системы (3.5) имеют максимальное значение на главной диагонали и быстро убывают по мере удаления от нее. Сила и ее момент, действующие на штамп, определяются через решения системы (3.5).

Отметим, что для анализа скорости сходимости процесса оценивались элементы невязки для количества разбиений N и $3N$. Измельчение сетки производилось до относительного значения невязки, меньшего чем 10^{-5} .

Поскольку штамп движется без поворота за счет эксцентричного приложения силы, величина эксцентриситета определяется численно через решение системы (3.5)

$$e = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} x_i q_i}{\sum_{i=1}^{N_1} q_i}.$$

4. Результаты численного анализа. В соответствии с изложенным способом были построены нормальные и касательные контактные напряжения для штампов с плоским и параболическим основанием, а также, определена область контакта в случае параболического штампа. Расчеты проводились для механических характеристик, соответствующих двухкомпонентному композиционному материалу с матрицей на основе ароматического полиамида фенилона с нанодобавками и содержанием наполнителя – цилиндрического масла [10–12]. Корректное определение механических характеристик A , R , Q , N среды Био для гетерогенного композита является многоступенчатой задачей. Значения модуля Юнга E_s и коэффициента Пуассона ν_s были определены при проведении натуральных экспериментов при сжатии и растяжении образца из фенилона без наполнителя в режиме нагружения, обеспечивающего чисто упругие деформации образца [10]. Далее, с известным коэффициентом Пуассона на основе метода наноиндентирования были определены механические свойства фенилона и композитов на его основе [10, 12]. Эксперименты по растяжению–сжатию были верифицированы с помощью конечно-элементного пакета ANSYS, где фенилон моделировался изотропным материалом, с константами E, ν , которые в свою очередь определялись с погрешностью менее 1% из минимизации невязки диаграмм “ σ – ϵ ”, полученных в рамках натурального эксперимента [10]. Следующим этапом изучалось влияние пористости на модуль объемного сжатия пористой среды с незаполненными порами K_b . Сопоставлены результаты, полученные на основе методов микромеханики и конечно-элементного моделирования в ANSYS представительного объема композита со сферическими порами [24]. Таким образом, коэффициенты уравнений (2.1) по известным модулям объемного сжатия вязкоупругой матрицы K_s , пористой среды с незаполненными порами K_b , флюида K_f , пористости m вычислялись по формулам [25]:

$$R = \frac{m^2 K_s}{(1 - m - K_{bs} + mK_{sf})}, \quad K_{bs} = \frac{K_b}{K_s}$$

$$Q = \frac{mK_s (1 - m - K_{bs})}{(1 - m - K_{bs} + mK_{sf})}, \quad K_{sf} = \frac{K_s}{K_f}$$

$$A = \frac{(1 - m)K_s (1 - m - K_{bs}) + mK_{sf}K_b}{(1 - m - K_{bs} + mK_{sf})} - \frac{2}{3}N, \quad N = \mu$$

Расчеты проводились при следующих данных: $K_s = 5.2$ ГПа, $K_f = 2$ ГПа, $N = 1.85$ ГПа, $\rho_s = 1.2 \times 10^3$ кг/м³, $\rho_f = 0.93 \times 10^3$ кг/м³, $K_b(m = 5\%) = 4.38$ ГПа, $K_b(m = 10\%) = 3.58$ ГПа, $K_b(m = 15\%) = 2.78$ ГПа, $K_b(m = 20\%) = 2.21$ ГПа [24].

Поскольку фенилон отличается малой склонностью к ползучести под действием напряжений [26] вязкость матрицы композита была учтена в рамках модели частотно-независимого внутреннего трения. Расчеты проводились для диапазона $10^{-3} < \beta < 0.5 \times 10^{-1}$ [14, 26, 27]. На основании численных экспериментов было установлено, что на скорость сходимости процесса решения параметр β влияние не оказывает, при этом

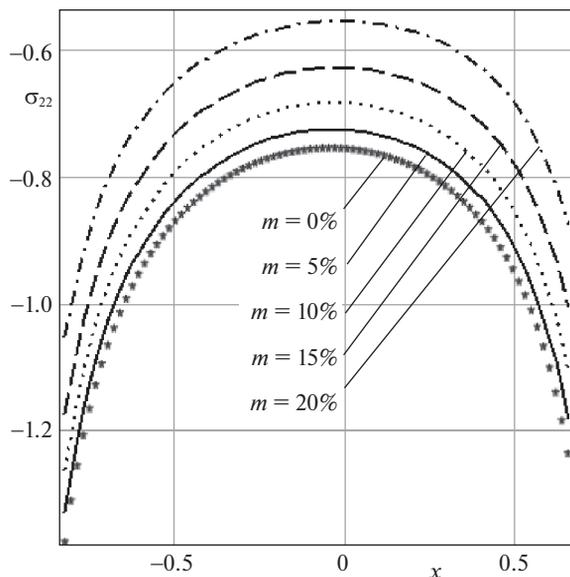


Рис. 1.

$\text{Im } q(x) / \text{Re } q(x) \sim O(\beta)$. В указанных пределах варьирования β изменение результатов вычислений q_i не превышают 1.3%.

Особое внимание было уделено анализу влияния пористости на величину контактных напряжений. Распределение действительных частей нормальных напряжений $\sigma_{22} = \text{Re } \Gamma_{22}$ при изменении пористости m и флюидонасыщенности основания приведено для штампа с плоским основанием (рис. 1) и для штампа с параболическим основанием (рис. 2) при значениях $\delta = 10^{-2}$, $\eta = 0.025$. Графики построены в подвижной системе координат, скорость движения штампов $V = 1.5$ м/с.

Заметим, что для рассматриваемых здесь механических характеристик материала основания безразмерные величины Θ_{ij} в формуле (3.2) имеют значения: $|\Theta_{10}| = 0.3582$, $|\Theta_{20}| = 0.2731$, $|\Theta_{11}| = 0.8848$, $|\Theta_{21}| = 0.1043$ при $\beta = 0.05$, $m = 0.2$. Для скорости движения штампа $V = 1.5$ м/с, т.к. $\zeta = 0.6510 \times 10^{-3}$, решение задачи практически определяется величинами Θ_{i0} , $i = 1, 2$ в выражении ядра интегрального уравнения (3.2).

Отметим, что контактные нормальные и касательные напряжения в значительной мере зависят от пористости и массовой доли флюида-наполнителя. При этом, распределение напряжений по области контакта несимметрично, что характерно и для контактных задач теории упругости при учете сил трения [1, 15]. Также, с увеличением пористости эксцентриситет приложения силы, обеспечивающей движение штампа без перекоса, увеличивается, в диапазоне 10–12% при изменении пористости с шагом 0.05, $0.05 \leq m \leq 0.2$. Увеличение пористости вызывает смещение области контакта для штампа с параболическим основанием. Установлено, что зависимость контактных напряжений от пористости нелинейная. В таблице 1 приведены значения левой и правой границы контактной области, нормальной силы P и эксцентриситета e для штампа с параболическим основанием при возрастании пористости для значений $\delta = 10^{-2}$, $\eta = 0.025$.

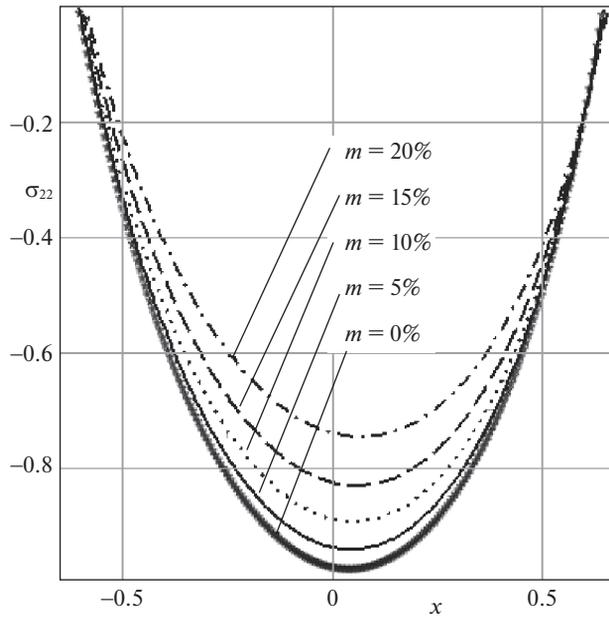


Рис. 2.

Зависимость контактных напряжений от коэффициента трения и скорости движения штампа по поверхности гетерогенной полуплоскости имеет более выраженный характер при увеличении пористости основания. Результаты численных расчетов качественно согласуются с результатами натуральных экспериментов для маслonaполненного композита [10], а также с решением контактной задачи при учете трения для движущегося штампа по упругой среде [1].

На рис. 3 приведены касательные контактные напряжения для штампа с параболическим основанием для различных значений коэффициента трения для значений $\delta = 10^{-3}$, $\eta = 0.025$, $m = 0.1$. При увеличении коэффициента трения модули нормальных и касательных контактных напряжений возрастают в значительной степени, область контакта при этом приобретает ярко выраженную асимметрию, левая и правая границы области контакта показаны на рис. 4.

Заключение. Представлена математическая модель, позволяющая прогнозировать трибологические характеристики для маслосодержащего композита, описанная контактной задачей для гетерогенной полуплоскости Био при учете сил трения в области

Таблица 1.

	$m = 0$	$m = 0.05$	$m = 0.1$	$m = 0.15$	$m = 0.2$
P	4.77172	4.60683	4.36794	4.05438	3.63227
e	0.02868	0.03155	0.03567	0.04107	0.04832
a	-0.64575	-0.64575	-0.65025	-0.65250	-0.65701
b	0.60300	0.60075	0.59625	0.59175	0.58500

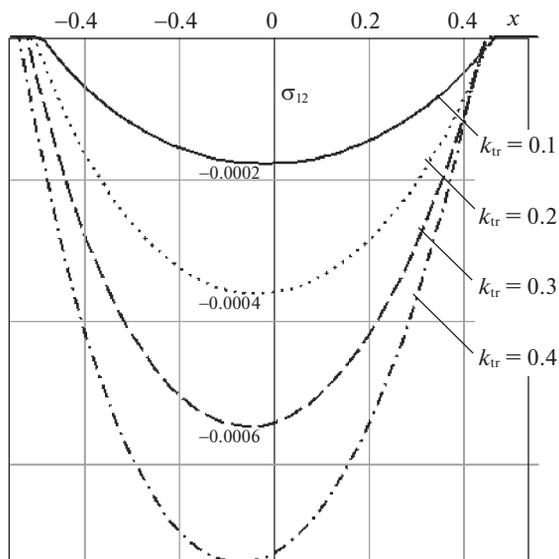


Рис. 3.

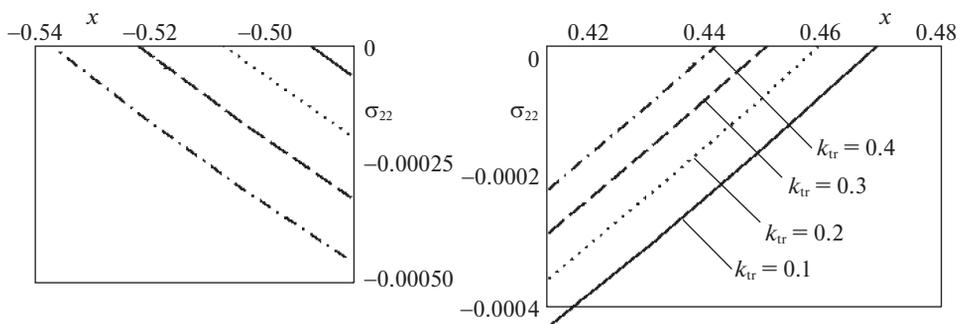


Рис. 4.

контакта. Построено аналитико-численное решение краевой задачи, исследованы зависимости контактных напряжений от параметров среды Био. На основании численных экспериментов установлено, что процентное содержание флюида в порах композита, учет трения в области контакта оказывает существенное влияние на контактные напряжения при движении с трением штампов с плоской и параболической формой подошвы по поверхности композита, причем с возрастанием пористости эта зависимость носит нелинейный характер. Результаты численных расчетов качественно согласуются с известными результатами натуральных экспериментов для маслосодержащего композита, а также с решением контактной задачи при учете трения для движущегося штампа по упругой среде.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 18-08-00260-а, 20-08-00614-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
2. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 253 с.
3. Chen W., Wang Q., Huan Z., Luo X. Semi analytical viscoelastic contact modeling of polymer based materials // J. Tribology. 2011. V. 133. № 4. P. 041404.
4. Горячева И.Г. Роль микрогеометрии поверхности при фрикционном взаимодействии вязкоупругих тел // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Т. 77. № 1. С. 49–59.
5. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю. Упругий контакт номинально плоских поверхностей при наличии шероховатости и адгезии // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 4. С. 101–111.
6. Био М.А. Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде // Сб. пер. иностр. статей. 1963. № 82. Вып. 6. С. 103–134.
7. Ковтун А.А. Об уравнениях Био и их модификациях // Уч. зап. СПбГУ. 2011. № 444. Вып. 44. С. 3–26.
8. Degrande G., De Roeck G., Van Den Breck P., Smeulders D. Wave propagation in layered dry, saturated and unsaturated poroelastic media // Intern. J. Solids & Struct. 1998. V. 35 (34–35). P. 4753–4778.
9. Guyer R.A., Alicia Kim H., Derome D. et al. Hysteresis in modeling of poroelastic systems: Quasi-static equilibrium // Phys. Rev. E. 2011. V. 83. P. 061408.
10. Ивановкин П.Г., Суворова Т.В., Данильченко С.А. и др. Комплексное исследование полимерных композитов с матрицей на основе фенилона С-2 // Вестн. РГУПС. 2018. Вып. 4. С. 18–25.
11. Колесников И.В. Системный анализ и синтез процессов, происходящих в металлополимерных узлах трения фрикционного и антифрикционного назначения. М.: ВИНТИ, 2017. 384 с.
12. Долгополов К.Н., Колесников И.В., Мельников Э.Л. Применение антифрикционных полимерных самосмазывающихся материалов класса “Масляниты” в узлах трения скольжения // Ремонт. Восстановление. Модернизация. 2018. № 4. С. 23–26.
13. Kolesnikov I.V., Bardushkin V.V., Myasnikov Ph.V. Calculation of stress-deformed condition in polymer nanocomposites filled with microcapsules with lubricant // J. Theor. & Appl. Mech. 2017. V. 47. № 4. P. 37–47.
14. Демешкин А.Г., Козенко М.Е., Корнев В.М., Кургузов В.Д. Демпфирующие характеристики композиционных конструкционных материалов, изготовленных намоткой // ПМТФ. 2001. Т. 42. № 1. С. 190–195.
15. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Блочные элементы в контактных задачах с переменным коэффициентом трения // Докл. РАН. 2018. Т. 480. № 5. С. 537–541.
16. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю., Морозов А.В. и др. Трение эластомеров. М.: Изд-во ИПМ, 2017. 203 с.
17. Беляк О.А., Суворова Т.В., Усошин С.А. Волновое поле, генерируемое в слоистом пористоупругом полупространстве движущейся осциллирующей нагрузкой // Экол. вестн. научн. центров ЧЭС. 2008. № 1. С. 53–61.
18. Беляк О.А., Суворова Т.В., Усошина Е.А. Математическое моделирование задачи о динамическом воздействии массивного объекта на неоднородное гетерогенное основание // Экол. вестн. научн. центров ЧЭС. 2014. № 1. С. 93–99.
19. Suvorova T.V., Dobrynin N.F., Ertaikov V.M. et al. The impact of structure and water saturation of the subgrade of the railway on its deformation during high-speed movement // Intern. J. Appl. Engng. Res. 2016. V. 11. № 23. P. 11448–11453.
20. Колесников В.И., Беляк О.А., Колесников И.В., Суворова Т.В. О математической модели для прогнозирования трибологических свойств маслonaполненных композитов при вибрации // Докл. РАН. 2020. Т. 491. С. 44–47.
21. Колесников В.И., Суворова Т.В. Моделирование динамического поведения системы “верхнее строение железнодорожного пути – слоистая грунтовая среда”. М.: ВИНТИ, 2003. 232 с.
22. Беляк О.А., Суворова Т.В. Влияние микроструктуры основания на силы трения при движении плоского штампа // Экол. вестн. научн. центров ЧЭС. 2018. № 3. С. 25–31.

23. *Брычков Ю.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 288 с.
24. *Belyak O.A., Suvorova T.V.* Modeling Stress Deformed State Upon Contact with the Bodies of Two-Phase Microstructure // *Solid State Phenom.* 2020. V. 299. P. 124–129.
25. *Chao-Lung Yeh, Lo Wei-Cheng, Jan Chyan-Deng* An assessment of characteristics of acoustic wave propagation and attenuation through eleven different saturated soils // *Amer. Geophys. Union. Fall Meeting.* 2006. № 12. P. 31.
26. *Абакумова Н.М., Гудимов М.М., Финогенов Г.Н. и др.* Физико-механические свойства ароматических полиамидов марки фенилон // *Пластические массы.* 1973. № 9. С. 30–32.
27. *Старцев О.В., Каблов Е.Н., Махоньков А.Ю.* Закономерности α -перехода эпоксидных связующих композиционных материалов по данным динамического механического анализа // *Вест. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. "Машиностроение".* 2011. № S2. С. 104–113.

Contact Problems for Porous Composite in the Presence of Friction Forces

T. V. Suvorova^{a,#} and O. A. Belyak^{a,##}

^a *Rostov State Transport University, Rostov on Don, Russia*

[#]*e-mail: suvorova_tv111@mail.ru*

^{##}*e-mail: o_bels@mail.ru*

The contact problem for a heterogeneous fluid-saturated half-space when considering friction forces in the contact area arising from the movement of flat and parabolic dies is considered. To account for the internal microstructure of the base, the Biot model is used. The boundary problem with the help of the Fourier transform is reduced to an integral equation of the first kind with a kernel having a logarithmic singularity. The solution of the integral equation is constructed by the collocation method. The effect of porosity, friction coefficient on the contact stresses of the oil-filled composite has been investigated. Mechanical modules of the composite are determined using the methods of micromechanics, of course elemental modeling, and compared with experimental results.

Keywords: contact problem, friction in contact area, porous composite

REFERENCES

1. *Goryacheva I.G.* Mechanics of Friction Interaction. Moscow: Nauka, 2001. 478 p. (in Russian)
2. *Goryacheva I.G., Dobychin M.N.* Contact Problems in Tribology, Moscow: Mech. Eng. Publ., 1988. 253 p. (in Russian)
3. *Chen W., Wang Q., Huan Z., Luo X.* Semi analytic viscoelastic contact modeling of polymer-based materials // *J. Tribology*, 2011, vol. 133, no. 4, pp. 041404.
4. *Goryacheva I.G.* The role of microgeometry of a surface in frictional interaction of viscoelastic bodies // *Probl. Strength & Plasticity*, 2015, vol. 77, no. 1, pp. 49–59.
5. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Yu.Yu.* Elastic contact of nominally flat surfaces in the presence of roughness and adhesion // *Mech. Solids*, 2017, no. 4, pp. 101–111.
6. *Bio M.A.* Mechanics of deformation and propagation of acoustic waves in a porous medium // *Coll. Transl. Foreign. Articles.* 1963, no. 82, Iss. 6, pp. 103–134.
7. *Kovtun A.A.* On the equations Biot and their modifications // *Proc. St. Petersburg State Univ.*, 2011, no. 444, Iss. 44, pp. 3–26.
8. *Degrande G., De Rock G., Van Den Broek P. et al.* Wave propagation in layered dry, saturated and unsaturated poroelastic media // *Intern. J. Solids & Struct.*, 1998, vol. 35 (34–35), pp. 4753–4778.
9. *Geyer R.A., Alicia Kim H., Derom D. et al.* Hysteresis modeling poroelastic systems: Quasistatic equilibrium // *Phys. Red. E.*, 2011, vol. 83, pp. 061408.
10. *Ivanochkin P.G., Suvorova T.V., Danilchenko S.A. et al.* Complex research of polymer composites with a matrix on the basis of phenilon C-2 // *Vestn. RGUPS*, 2018, no. 4, pp. 18–25.
11. *Kolesnikov I.V.* System Analysis and Synthesis of Processes Occurring in Metal-Polymer Friction Units for Friction and Antifriction Purposes. Moscow: VINITI, 2017. 384 p. (in Russian)

12. *Dolgoplov K.N., Kolesnikov I.V., Melnikov E.L.* Application of self-lubricating antifriction polymer materials of “oily” material (“maslyanit”) class in sliding friction units // *Repair. Recovery. Modernization*, 2018, no. 4, pp. 23–26.
13. *Kolesnikov I.V., Bardushkin V.V., Myasnikov Ph.V.* Calculation of stress-deformed condition in polymer nanocomposites filled with microcapsules with lubricant // *J. Theor. & Appl. Mech.*, 2017, vol. 47, no. 4, pp. 37–47.
14. *Demeshkin A.G., Kozeko M.E., Kornev V.M., Kurguzov V.D.* Damping Characteristics of Composite Structural Materials Fabricated by Winding // *J. Appl. Mech. & Techn. Phys.*, 2001, vol. 42, no. 1, pp. 169–173.
15. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* Block elements in contact problems with variable coefficient of friction // *Dokl. Phys.*, 2018, vol. 480, no. 5, pp. 537–541.
16. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Y.Y., Morozov A.V. et al.* Friction of Elastomers. Moscow: IPM, 2017. 203 p. (in Russian)
17. *Belyak O.A., Suvorova T.V., Usoshin S.A.* Wave field generated in a porous-elastic layered half-space by a moving oscillating load // *Ecol. Bull. BSEC Sci. Centers*, 2008, no. 1, pp. 53–61.
18. *Belyak O.A., Suvorova T.V., Usoshina E.A.* Mathematical modeling of the problem of the dynamic impact of a massive object on a heterogeneous heterogeneous base // *Ecol. Bull. BSEC Sci. Centers*, 2014, no. 1, pp. 93–99.
19. *Suvorova T.V., Dobrynin N.F., Ermakov V.M. et al.* The impact of structure and water saturation of the subgrade of the railway on its deformation during high-speed movement // *Intern. J. Appl. Engng. Res.*, 2016, vol. 11, no. 23, pp. 11448–11453.
20. *Kolesnikov V.I., Belyak O.A., Kolesnikov I.V., Suvorova T.V.* A mathematical model for prediction of the tribological properties of oil-filled composites under vibration // *Dokl. Phys.*, 2020, vol. 65, no. 4, pp. 149–152.
21. *Kolesnikov V.I., Suvorova T.V.* Modeling of Dynamic behavior of the System “The Upper Structure of the Railway Track – Layered Soil Environment”. Moscow: VINITI, 2003. 232 p. (in Russian)
22. *Belyak O.A., Suvorova T.V.* Influence of the microstructure of the base on the friction forces during the movement of the flat stamp // *Ecol. Bull. BSEC Sci. Centers*, 2018, no. 3, pp. 25–31.
23. *Brichkov Y.A., Prudnikov A.P.* Integral Transforms of Generalized Functions. Moscow: Nauka, 1977. 288 p. (in Russian)
24. *Belyak O.A., Suvorova T.V.* Modeling stress deformed state upon contact with the bodies of two-phase microstructure // *Solid State Phenom.*, 2020, vol. 299, pp. 124–129.
25. *Chao-Lung Yeh, Lo Wei-Cheng, Jan Chyan-Deng* An assessment of characteristics of acoustic wave propagation and attenuation through eleven different saturated soils // *Amer. Geophys. Union*, 2006, Fall Meeting, no. 12, pp. 31.
26. *Abakumova N.M., Gudimov M.M., Finogenov G.N. et al.* Physico-mechanical properties of aromatic polyamides phenylilone brand // *Intern. Polymer Sci. & Technol.*, 1973, no. 9, pp. 30–32.
27. *Startsev O.V., Kablov E.N., Makhonkov A.Yu.* Regularities of transition of epoxy binding composites according to data from dynamical mechanical analysis // *Herald Bauman Moscow State Techn. Univ. Ser. Mech. Engng.*, 2011, no. S2, pp. 104–113.

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ И ЧИТАТЕЛЕЙ ЖУРНАЛА ПММ

DOI: 10.31857/S0032823520040116

Издательство “Pleiades Publishers”, осуществляющее издание переводов статей журнала ПММ, выделяет 1000 долл. США для премирования лучших работ, опубликованных в ПММ.

Решением редколлегии от 06 июня 2020 года эта премия присуждена авторам следующих работ, опубликованных в 2019 году:

1. Горячева И.Г., Зобова А.А.

“Динамика упругого цилиндра на упругом основании” Т. 83, Вып. 1. С. 39–46

“Торможение жесткого цилиндра, скользящего по вязкоупругому основанию” Т. 83. Вып. 2. С. 215–227. (Зобова А.А.)

200 долл. США

2. Крайко А.Н.

“Неустойчивость стационарных течений в каналах переменной площади поперечного сечения с детонационной волной Чепмена–Жуге” Т. 83, Вып. 3, С. 354–369.

“Задача Ньютона о построении оптимальной головной части обтекаемого тела. История решения” Т. 83. Вып. 5–6, С. 734–748.

200 долл. США

3. Назаров С.А.

“Странное поведение частот собственных колебаний упругого тела с затупленным пиком” Т. 83. Вып. 2. С. 265–281.

200 долл. США

4. Маркеев А.П.

“Об устойчивости стационарного вращения спутника вокруг нормали к плоскости орбиты” Т. 83. Вып. 5–6. С. 691–703.

200 долл. США

5. Аэро Э.Л., Булыгин А.Н., Павлов Ю.В.

“Нелинейная модель деформирования кристаллических сред, допускающих мартенситные превращения: плоская деформация” Т. 83. Вып. 2. С. 303–313. (Булыгин А.Н., Павлов Ю.В.)

200 долл. США