Russian Academy of Sciences

Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 85. Iss. 2

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

March–April

Учредитель: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Редакция:
В.Г. Байдулов – отв. секретарь
Е.В. Есина – зав. редакцией

Адрес редакции: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245
Телефон редакции: 8 (495) 434-21-49
E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: http://pmm.ipmnet.ru

На сайте Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала "Прикладная математика и механика" в каталоге Роспечати 70706
ISSN 0032-8235

Founder: Russian Academy of Sciences

The Editorial Staff:
V.G. Baydulov – executive secretary
E.V. Esina – head of Editorial office (manager editor)

The Editorial Board Adress: 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia
Phone: 8 (495) 434-21-49
E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL : http://pmm.ipmnet.ru

The subscription index in Rospechat catalogue 70706
ISSN 0021-8928

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 2, с. 139–151

УДК 531.38; 531.39

О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ

© 2021 г. Г. В. Горр[1],*, Т. В. Белоконь[2],**

[1] *Институт прикладной математики и механики, Донецк, Украина*

[2] *Донецкий национальный университет экономики и торговли им. М. Туган-Барановского, Донецк, Украина*

**e-mail: gvgorr@gmail.com*

***e-mail: B.Tatyana13@mail.ru*

Поступила в редакцию 22.06.2020 г.
После доработки 12.10.2020 г.
Принята к публикации 20.10.2020 г.

Рассмотрена задача о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил. Получено три новых решения уравнений движения, которые определяются тремя линейными инвариантными соотношениями (ИС) на компоненты вектора угловой скорости. Для случая тяжелого гиростата найдено решение, которое характеризуется обобщенными условиями класса Ковалевской и Горячева–Чаплыгина. Два следующих решения имеют место для уравнений класса Кирхгофа–Пуассона. Одно из них существует в случае динамически симметричных гиростатов, а в другом решении распределение масс произвольно.

Ключевые слова: гиростатический момент, инвариантные соотношения, потенциальные и гироскопические силы, обобщенные условия Ковалевской, Горячева–Чаплыгина

DOI: 10.31857/S0032823521020053

Введение. Задача о движении гиростата, имеющего неподвижную точку, является обобщением классической задачи, которая описывается уравнениями Эйлера–Пуассона. Постановка задачи о движении гиростата и первые результаты получены [1–4] и др. В динамике гиростата применяются различные определения и типы гиростатов, что связано с рассмотрением различных постановок. *Первая* постановка состоит в том, что изучается система твердых тел S, состоящая из тела-носителя S_0 и несомых роторов $S_1, \ldots, S_n$, вращающихся вокруг своих осей симметрии. В частности, в этой постановке рассматриваются гиростаты [1]. В монографии [5] дается полное определение гиростата со ссылкой на статью [4]. Основное предположение в данном определении состоит в том, что распределение масс системы S не изменяется с течением времени. Кроме этого, при изучении движения гиростатов [1] полагается, что они имеют постоянные относительные компоненты суммарного кинетического момента, вычисленные по отношению к телу-носителю. Рассматривается [6, 7] движение гиростата, которое является статически и динамически уравновешенным [6], или характеризуется свойством динамической симметрии роторов, вращающихся вокруг своих барицентрических осей [7]. Если гиростатический момент гиростата постоянен, то, например, уравнения движения тяжелого гиростата имеют три первых интеграла.

Вторая постановка задачи о движении гиростата (гиростаты Жуковского–Вольтерра) характеризуется тем, что в ней рассматриваются системы, образованные телом-носителем с внутренними полостями с циркулирующей в них жидкостью.

С прикладной точки зрения важным свойством движения гиростата служит учет переменности гиростатического момента [7, 8]. Данное обстоятельство учитывается при исследовании спутников-гиростатов [9–11]. Особое значение имеет математическое моделирование движения гиростата с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил, так как оно позволяет установить базовые свойства динамики гиростата с переменным гиростатическим моментом. В этом направлении опубликовано много исследований, среди которых отметим статьи [11, 12], а также монографию [13], в которой дан обзор результатов, полученных в динамике неавтономного гиростата. В последней монографии основное внимание уделено анализу результатов по исследованию прецессионных движений гиростата. Данная статья посвящена интегрированию уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил.

Для исследования условий существования решений уравнений движения гиростата применен метод инвариантных соотношений (ИС). Этот метод разработан в [5, 14] и обобщен в статье [15]. Метод ИС использован [16, 17] применительно к другим задачам динамики. Данный подход связан с тем, что в общем случае уравнения динамики твердого тела и гиростата неинтегрируемы в квадратурах по Якоби [18, 19]. В данной статье рассмотрена задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил на заданных ИС уравнений движения. Построены три новых решения в динамике неавтономного гиростата. Для случая тяжелого гиростата условия существования характеризуются следующими условиями на распределение масс гиростата: гиростат динамически симметричен, центр масс лежит в экваториальной плоскости (обобщенные условия Ковалевской и Горячева–Чаплыгина). Два следующих решения имеют место в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил; одно из них выполняется для тех же классов гиростатов, а другое соответствует случаю произвольного распределения масс гиростата.

1. Постановка задачи. Многие задачи динамики твердого тела и гиростата описываются системой дифференциальных уравнений, которая содержит уравнения Пуассона [20–25]

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – вектор, характеризующий направление оси симметрии силового поля; $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела-носителя гиростата; точка над переменной $\boldsymbol{\nu}$ обозначает относительную производную по времени t.

Был изучен [25] важный класс инвариантных соотношений (ИС), которые имеют вид [25, 26]

$$\omega_1 = \nu_1\varepsilon + \beta_1 g, \quad \omega_2 = \nu_2\varepsilon + \beta_2 g, \quad \omega_3 = h, \tag{1.2}$$

где β_1, β_2 – постоянные параметры, $\varepsilon = \varepsilon(\nu_3)$, $g = g(\nu_3)$, $h = h(\nu_3)$ – дифференцируемые функции переменной ν_3. Особенность ИС (1.2) состоит в том, что уравнение (1.1), которое в скалярной форме приводится к системе уравнений [25]

$$\dot{\nu}_1 = \nu_2(h - \nu_3\varepsilon) - \beta_2\nu_3 g, \quad \dot{\nu}_2 = \nu_1(\nu_3\varepsilon - h) + \beta_1\nu_3 g, \quad \dot{\nu}_3 = (\beta_2\nu_1 - \beta_1\nu_2)g, \tag{1.3}$$

допускает интегральное представление

$$\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2 + \int \frac{[h - \nu_3\varepsilon]d\nu_3}{g} = c_0, \tag{1.4}$$

где c_0 – произвольная постоянная. Наличие соотношения (1.4) позволило построить новые классы решений уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку, в потенциальном силовом поле [25, 26], которые изучены в [27]. Но в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом ИС (1.2) не рассматривались.

Запишем уравнения движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [23–25, 28]. В качестве подвижной системы координат $Oxyz$ с единичными векторами $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ выберем главную систему координат тела-носителя:

$$\dot{\mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}(t)) \times a\mathbf{x} + a\mathbf{x} \times B\boldsymbol{\nu} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu} \tag{1.5}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}, \tag{1.6}$$

где a – гирационный тензор: $a = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3)$, $B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, B_3)$, $C = \mathrm{diag}(C_1, C_2, C_3)$; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – постоянный вектор. Запишем ИС (1.2) в компонентах вектора $\mathbf{x}$. Используя равенства $x_i = \omega_i / a_i$ $(i = \overline{1,3})$, из (1.2) получим [25]

$$x_1 = \frac{1}{a_1}(\nu_1\varepsilon + \beta_1 g), \quad x_2 = \frac{1}{a_2}(\nu_2\varepsilon + \beta_2 g), \quad x_3 = \frac{1}{a_3}h \tag{1.7}$$

Будем полагать, что вектор гиростатического момента имеет вид [7]

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \sum_{i=1}^{3} D_i(a\mathbf{x} \cdot \mathbf{i}_i + \dot{\kappa}_i)\mathbf{i}_i, \tag{1.8}$$

где D_i – моменты инерции несомых тел S_i относительно главных осей инерции; $\dot{\kappa}_i$ – угловые скорости вращения этих тел вокруг осей l_i, направленных по главным осям инерции. Общий момент количества движения гиростата (S_0, S_1, S_2, S_3) выражается по формуле [7]

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}(t) \tag{1.9}$$

В равенстве (1.9) $\mathbf{x} = A\boldsymbol{\omega}$, где $A = a^{-1}$ – тензор инерции, функция $\boldsymbol{\lambda}(t)$ определена равенством (1.8). Если уравнения (1.5), (1.6) проинтегрировать, то необходимо дополнительно рассмотреть уравнения

$$D_i \dot{p}_i(t) = L_i(t) \quad (i = \overline{1,3}), \tag{1.10}$$

в которых, в силу (1.8), $p_i(t)$ имеют вид

$$p_i = a\mathbf{x} \cdot \mathbf{i}_i + \dot{\kappa}_i \tag{1.11}$$

В уравнениях (1.10) правая часть $L_i(t)$ – проекция на l_i внутренних сил, действующих со стороны тела-носителя на тела S_i.

Уравнения (1.5), (1.6) допускают два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}(t)) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \tag{1.12}$$

где k – произвольная постоянная.

2. Случай тяжелого гиростата. Положим в уравнениях (1.5), (1.12) $B = 0$, $C = 0$, $\lambda_1(t) = 0$, $\lambda_2(t) = 0$ и запишем (1.6) в скалярном виде:

$$a_2 x_2 \lambda_3(t) = -\dot{x}_1 + (a_3 - a_2)x_2 x_3 + s_2\nu_3 - s_3\nu_2 \tag{2.1}$$

$$a_1 x_1 \lambda_3(t) = \dot{x}_2 - (a_1 - a_3)x_3 x_1 - s_3\nu_1 + s_1\nu_3 \tag{2.2}$$

$$\dot{\lambda}_3(t) = -\dot{x}_3 + (a_2 - a_1)x_1 x_2 + s_1\nu_2 - s_2\nu_1 \tag{2.3}$$

$$\dot{\nu}_1 = a_3 x_3 \nu_2 - a_2 x_2 \nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = a_1 x_1 \nu_3 - a_3 x_3 \nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = a_2 x_2 \nu_1 - a_1 x_1 \nu_2 \tag{2.4}$$

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad (x_1 + \lambda_1(t))\nu_1 + (x_2\nu_2 + x_3\nu_3)\nu_3 = k \tag{2.5}$$

Гиростатический момент $\boldsymbol{\lambda}(t)$ из (1.8) упрощается:

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \lambda_3(t)\mathbf{i}_3, \quad \lambda_3(t) = D_3[(a\mathbf{x}\cdot\mathbf{i}_3) + \dot{\kappa}_3] \tag{2.6}$$

Рассмотрим систему уравнений (2.1)–(2.6). Исключим из уравнений (2.1), (2.2) переменную $\lambda_3(t)$. Результат представим в виде

$$\left[\frac{1}{2}\gamma_+(a,x,x) - s_3\nu_3\right]^{\bullet} + a_3(a_2 - a_1)x_1x_2x_3 + \nu_3\gamma_-(s,ax) = 0, \tag{2.7}$$

где точкой обозначена производная по времени от функции, входящей в квадратную скобку; $\gamma_+(a,x,y) = a_2x_1y_1 + a_1x_2y_2$, $\gamma_-(x,y) = x_1y_2 - x_2y_1$. Уравнение (2.7) рассматривалось [12] в случае, когда выполняются равенства

$$a_2 = a_1, \quad s_2 = 0, \quad s_1 = 0 \tag{2.8}$$

В силу условий (2.8) из уравнения (2.7) получим первый интеграл

$$\frac{a_1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) - s_3\nu_3 = b_0, \tag{2.9}$$

где b_0 – произвольная постоянная. Из уравнения (2.3) находится дополнительный интеграл [12]

$$x_3 + \lambda_3(t) = \mathrm{const} \tag{2.10}$$

Условия (2.8) характеризуют обобщенный интеграл Лагранжа (2.10) задачи о движении тяжелого твердого тела. Если второе уравнение из (2.5) продифференцировать только в силу уравнений (2.3), (2.4), то опять получим уравнение (2.7).

В качестве второго разрешающего уравнения будем использовать комбинацию уравнений (2.1), (2.2), которая получается в результате исключения из этих уравнений параметра s_3:

$$(x_3 + \lambda_3(t))\dot{\nu}_3 = -\gamma_+(1,\dot{x},\nu) + a_3x_3\gamma_-(\nu,x) + \nu_3\gamma_-(\nu,s) \tag{2.11}$$

Подставим в уравнение (2.11) значение $x_3 + \lambda_3$, найденное из второго уравнения (2.5), и воспользуемся третьим уравнением из системы (2.4):

$$\frac{k\dot{\nu}_3}{\nu_3} = \frac{\dot{\nu}_3}{\nu_3}\gamma_+(1,x,\nu) - \gamma_+(1,\dot{x},\nu) + a_3x_3\gamma_-(\nu,x) + \nu_3\gamma_-(\nu,s) \tag{2.12}$$

Таким образом, при рассмотрении условий существования ИС (1.7) необходимо изучать редуцированную систему, которая состоит из уравнений (2.4), (2.7), (2.12).

Рассмотрим уравнения (2.4), (2.7), (2.12) при наличии у них ИС (1.7). Вначале изучим систему уравнений (1.3) в случае, когда функции h и ε удовлетворяют равенству

$$h = \nu_3\varepsilon \tag{2.13}$$

Тогда из уравнения (1.3) и представления (1.4) имеем

$$\dot{\nu}_1 = -\beta_2\nu_3 g, \quad \dot{\nu}_2 = \beta_1\nu_3 g, \quad \dot{\nu}_3 = \gamma_-(\nu,\beta)\,g \tag{2.14}$$

$$\gamma_+(1,\beta,\nu) = c_0 \tag{2.15}$$

Было показано [25, 27], что компоненты ν_1, ν_2 вектора $\boldsymbol{\nu}$ в силу интеграла $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$ и ИС (2.15) являются функциями вспомогательной переменной ν_3:

$$\nu_1 = \frac{1}{\kappa_0^2}\left(c_0\beta_1 + \beta_2\sqrt{D(\nu_3)}\right), \quad \nu_2 = \frac{1}{\kappa_0^2}\left(c_0\beta_2 - \beta_1\sqrt{D(\nu_3)}\right)$$
$$D(\nu_3) = (\kappa_0^2 - c_0^2) - \kappa_0^2\nu_3^2, \tag{2.16}$$

а зависимость $\nu_3(t)$ находится путем обращения интеграла

$$\int_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3}{g\sqrt{D(\nu_3)}} = t - t_0 \tag{2.17}$$

В формулах (2.16), (2.17) обозначено $\kappa_0^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2$.

Распишем уравнения (2.7), (2.12) с учетом равенств (1.7), (2.13):

$$\dot{\nu}_3 \{\varepsilon'[\gamma_+(a,\nu,\nu)\varepsilon + \gamma_+(a,\nu,\beta)g] + g'[\gamma_+(a,\nu,\beta)\varepsilon + \gamma_+(a,\beta,\beta)g]\} =$$
$$= a_1a_2[s_3\dot{\nu}_3 - \nu_3\gamma_-(s,\nu)\varepsilon - \nu_3\gamma_-(s,\beta)g] - \nu_3\varepsilon^2[(a_2 - a_1)\nu_1\nu_2\varepsilon + \gamma_-(\beta, a\nu)g], \tag{2.18}$$

$$\dot{\nu}_3[\gamma_+(a,\nu,\nu)\varepsilon' + \gamma_+(a,\nu,\beta)g'] = \frac{\dot{\nu}_3}{\nu_3}[\gamma_+(a,\nu,\nu)\varepsilon + \gamma_+(a,\nu,\beta)g] +$$
$$+ a_1a_2\left[\nu_3\gamma_-(\nu,s) - \frac{k\dot{\nu}_3}{\nu_3}\right] + \dot{\nu}_3\nu_3(a_1 + a_2)\varepsilon + (a_1 - a_2)\nu_1\nu_2\nu_3\varepsilon^2 \tag{2.19}$$

Для удобства использования уравнений (2.18), (2.19) в них не подставлено значение

$$\dot{\nu}_3 = \gamma_-(\nu,\beta)g \tag{2.20}$$

Таким образом, справедливо утверждение.

Утверждение 1. Задача интегрирования уравнений движения тяжелого гиростата (2.1)–(2.4) на ИС (1.7), в которых функция $h(\nu_3)$ имеет вид (2.13), сведена к интегрированию уравнений (2.18), (2.19) и нахождению функции $\nu_3(t)$ путем обращения интеграла (2.17).

Замечание 1. Из метода получения уравнения (2.18) и из вида уравнения (2.7) следует, что на рассматриваемых ИС при условиях

$$g = g_0, \quad \varepsilon = \varepsilon_0, \quad a_2 = a_1, \quad s_3 = 0, \quad s_1 = \sigma_0\beta_1, \quad s_2 = \sigma_0\beta_2, \tag{2.21}$$

где $g_0, \varepsilon_0, \sigma_0$ — постоянные, уравнение (2.7) имеет первый интеграл

$$\frac{a_1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) - s_3\nu_3 - \frac{\varepsilon_0}{2g_0}\sigma_0\nu_3^2 = c_* \tag{2.22}$$

Здесь c_* — произвольная постоянная. На основании условий из (2.21) можно сделать заключение, что распределение масс гиростата определяется обобщенными условиями Ковалевской ($a_3 = 2a_1$) и Горячева–Чаплыгина ($a_3 = 4a_1$). В силу первых двух равенств системы (2.21) и равенства (2.13), ИС (1.2) являются линейными функциями переменных ν_i ($i = \overline{1.3}$).

Для дальнейшего рассмотрения уравнений (2.18), (2.19) представим их в следующем виде:

$$\varepsilon' = H(\nu_3, \varepsilon, g), \quad g' = L(\nu_3, \varepsilon, g) \tag{2.23}$$

Данная система представляет, по-видимому, только теоретический интерес. Поэтому рассмотрим пример интегрирования системы (2.18), (2.19). Положим, что функции ε и g принимают постоянные значения

$$\varepsilon = \varepsilon_0, \quad g = g_0, \tag{2.24}$$

которые являются частью условий (2.21) (остальные равенства не используем). Вместо переменной ν_3 введем новую переменную ψ по формуле

$$\nu_3 = \frac{\mu_0}{\kappa_0}\sin\psi, \quad \mu_0 = \sqrt{\kappa_0^2 - c_0^2} \tag{2.25}$$

Тогда из третьего уравнения системы (2.14), в силу (2.15), (2.25), получим

$$\psi(t) = \kappa_0 g_0 t + \psi_0 \tag{2.26}$$

На основании (2.16), (2.25) запишем компоненты ν_1, ν_2:

$$\nu_i(\psi) = \frac{1}{\kappa_0^2}\left(c_0\beta_i - (-1)^i \mu_0\beta_{3-i}\cos\psi\right), \quad i = 1, 2 \tag{2.27}$$

Для исследования зависимости остальных переменных задачи от переменной ψ обратимся к соотношениям (1.7). На основании формул (2.13), (2.24), (2.25), (2.27) найдем

$$x_i(\psi) = \frac{1}{a_i\kappa_0^2}\left[\beta_i(c_0\varepsilon_0 + g_0\kappa_0^2) - (-1)^i \beta_{3-i}\varepsilon_0\mu_0\cos\psi\right], \quad i = 1, 2$$
$$x_3(\psi) = \frac{\varepsilon_0\mu_0}{a_3\kappa_0}\sin\psi \tag{2.28}$$

Используя равенства (2.25), (2.27), (2.28), потребуем, чтобы уравнения (2.18), (2.19) были тождествами по переменной ψ. Тогда получим следующие условия:

$$a_2 = a_1, \quad s_3 = 0, \quad s_1 = \sigma_0\beta_1, \quad s_2 = \sigma_0\beta_2 \tag{2.29}$$

$$k = \frac{1}{a_1}(c_0 g_0 + \varepsilon_0), \quad \sigma_0 = -\frac{\varepsilon_0 g_0}{a_1} \tag{2.30}$$

Условия (2.29) совпадают с условиями (2.21), при выполнении которых имеет место интеграл (2.22). Их характеристика дана выше. Отметим только, что в равенствах (2.29) параметр σ_0 принимает конкретное значение из (2.30).

Для рассмотрения свойств сил, действующих на несомое тело со стороны тела-носителя, обратимся к третьему уравнению из (1.10) при условии $i = 3$. Используя третье уравнение из (1.11), в силу

$$p_3(t) = \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\kappa_0}\sin(\kappa_0 g_0 t + \psi_0) + \dot{\kappa}_3(t), \quad \lambda_3(t) = \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\kappa_0}\frac{a_3 - a_1}{a_1 a_3}\sin(\kappa_0 g_0 t + \psi_0), \tag{2.31}$$

получим

$$L_3(t) = \varepsilon_0\mu_0 g_0\frac{a_3 - a_1}{a_1 a_3}\cos(\kappa_0 g_0 t + \psi_0) \tag{2.32}$$

Следовательно, проекция внутренних сил на ось вращения ротора S_3 равна значению (2.32).

Справедливо утверждение.

Утверждение 2. Необходимыми условиями существования у системы (2.18), (2.19) линейных инвариантных соотношений по основным переменным задачи (1.5), (1.6) являются равенства (2.29), (2.30), которые характеризуют динамически симметричный гиростат, распределение масс которого определяется обобщенными условиями Ковалевской и Горячева–Чаплыгина.

3. Случай движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Запишем уравнение (1.5) в скалярной форме, положив $\lambda_1(t) = 0$, $\lambda_2(t) = 0$:

$$a_2 x_2\lambda_3(t) = -\dot{x}_1 + (a_3 - a_2)x_2 x_3 + s_2\nu_3 - s_3\nu_2 +$$
$$+ a_2 B_3 x_2\nu_3 - a_3 B_2\nu_2 x_3 + (C_3 - C_2)\nu_2\nu_3, \tag{3.1}$$

$$a_1 x_1\lambda_3(t) = \dot{x}_2 - (a_1 - a_3)x_3 x_1 - s_3\nu_1 + s_1\nu_3 -$$
$$- a_3 B_1 x_3\nu_1 + a_1 B_3\nu_3 x_1 - (C_1 - C_3)\nu_3\nu_1, \tag{3.2}$$

$$\dot{\lambda}_3(t) = -\dot{x}_3 + (a_2 - a_1)x_1x_2 + s_1\nu_2 - s_2\nu_1 + \\ + a_1B_2x_1\nu_2 - a_2B_1\nu_1x_2 + (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2 \tag{3.3}$$

К уравнениям (3.1)–(3.3) следует добавить уравнения Пуассона (2.4) и первые интегралы (1.12):

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + (x_3 + \lambda_3(t))\nu_3 - \frac{1}{2}\left(B_1\nu_1^2 + B_2\nu_2^2 + B_3\nu_3^2\right) = k, \tag{3.4}$$

так как в разд. 2 показано, что в этом частном случае можно провести полный анализ условий существования ИС (1.2). Используя подход, изложенный в п. 2, систему уравнений (3.1)–(3.3) редуцируем к системе уравнений

$$\left[\frac{1}{2}\gamma_+(a,x,x) - s_3\nu_3\right]^{\bullet} + a_3(a_2 - a_1)x_1x_2x_3 + \nu_3\gamma_-(s,ax) + \\ + a_3x_3\gamma_-(ax,B\nu) - \nu_3\left[\gamma_-(C\nu,x) - C_3\gamma_-(\nu,ax)\right] = 0, \tag{3.5}$$

$$\frac{\dot{\nu}_3k}{\nu_3} = \frac{1}{\nu_3}\gamma_+(1,x,\nu)\dot{\nu}_3 - \gamma_+(1,\dot{x},\nu) + a_3x_3\gamma_-(\nu,x) + \nu_3\gamma_-(\nu,s) - \\ - \frac{\dot{\nu}_3}{2\nu_3}(B_1\nu_1^2 + B_2\nu_2^2 - B_3\nu_3^2) + \nu_1\nu_2\left[a_3(B_1 - B_2)x_3 + (C_1 - C_2)\nu_3\right] \tag{3.6}$$

Для получения замкнутой системы уравнений необходимо рассматривать систему (3.5), (3.6) совместно с уравнениями Пуассона

$$\dot{\nu}_1 = a_3x_3\nu_2 - a_2x_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = a_1x_1\nu_3 - a_3x_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = a_2x_2\nu_1 - a_1x_1\nu_2 \tag{3.7}$$

После интегрирования системы (3.5)–(3.7) функцию $\lambda_3(t)$ определяем из второго соотношения системы (3.4):

$$\lambda_3(t) = \frac{1}{\nu_3}\left[k - x_1\nu_1 - x_2\nu_2 - x_3\nu_3 + \frac{1}{2}\left(B_1\nu_1^2 + B_2\nu_2^2 + B_3\nu_3^2\right)\right] \tag{3.8}$$

Как уже было отмечено выше, в предположении $B = 0$, $C = 0$ рассмотрен случай [12], который в обозначениях данного раздела соответствует величинам: $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $a_2 = a_1$. Здесь рассмотрим более общий вариант, положив в (3.3), (3.5), (3.6) и (3.8)

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad a_2 = a_1, \quad B_2 = B_1, \quad C_2 = C_1 \tag{3.9}$$

Тогда из (3.3) следует первый интеграл

$$\lambda(t) + x_3 + B_1\nu_3 = b_1, \tag{3.10}$$

где b_1 – произвольная постоянная. При условиях (3.9) уравнение (3.5) принимает вид

$$\left[\frac{a_1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - s_3\nu_3 + \frac{1}{2}(C_3 - C_1)\nu_3^2\right]^{\bullet} = -B_1a_3x_3\dot{\nu}_3 \tag{3.11}$$

Если в (3.11) положить $B_1 = 0$, то получим дополнительный первый интеграл

$$\frac{a_1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) - s_3\nu_3 + \frac{1}{2}(C_3 - C_1)\nu_3^2 = b_2, \tag{3.12}$$

где b_2 – произвольная постоянная.

Замечание 2. Наличие у системы шести уравнений (3.3), (3.5), (3.6) трех первых интегралов (3.10)–(3.12) не позволяет выполнить интегрирование данной системы в квадратурах. Аналогичная проблема имела место и в исследованиях статьи [12]. Поэтому в [12] дополнительно предполагалось, что в соотношениях (2.6) $\lambda_3 = \text{const}$. В изучаемом здесь случае данное предположение приводит, в силу соотношения (3.10), к решению [24], которое представляет собой обобщение решения Кирхгофа [22].

Данное замечание и итоги разд. 2 показывают, что целесообразно рассматривать уравнения (3.5)–(3.8) в случае существования у них инвариантных соотношений [25]

$$x_1(\nu_3) = \frac{1}{a_1}(\nu_1(\nu_3)\varepsilon + \beta_1 g), \quad x_2(\nu_3) = \frac{1}{a_2}(\nu_2(\nu_3)\varepsilon + \beta_2 g), \quad x_3(\nu_3) = \frac{1}{a_3}\nu_3\varepsilon \tag{3.13}$$

Подставим значения (3.13) в уравнения (3.5), (3.6) и воспользуемся уравнениями Пуассона (3.7):

$$\begin{gathered}\gamma_-(\nu,\beta)\{[\varepsilon\gamma_+(a,\nu,\nu) + g\gamma_+(a,\nu,\beta)]g\varepsilon' + [\varepsilon\gamma_+(a,\nu,\beta) + g\gamma_+(a,\beta,\beta)]gg'\} = \\ = -\nu_3\{(a_2 - a_1)\nu_1\nu_2\varepsilon + [\gamma_-(\beta, a\nu)g + a_1a_2(B_2 - B_1)\nu_1\nu_2]\}\varepsilon^2 + \\ + a_1a_2\{\nu_3[(C_1 - C_2)\nu_1\nu_2 - \gamma_-(\beta, B\nu)g - \gamma_-(s,\nu)]\varepsilon + \\ + [s_3\gamma_-(\nu,\beta) - \nu_3\gamma_-(s,\beta) + \beta_2(C_1 - C_3)\nu_1\nu_3 + \beta_1(C_3 - C_2)\nu_2\nu_3]g\},\end{gathered} \tag{3.14}$$

$$\begin{gathered}\frac{\dot\nu_3}{a_1a_2}[\gamma_+(a,\nu,\nu)\varepsilon' + \gamma_+(a,\nu,\beta)g'] = \frac{1}{a_1a_2}\left\{\frac{\dot\nu_3}{\nu_3}[\gamma_+(a,\nu,\nu)\varepsilon + \gamma_+(a,\nu,\beta)g] + \right. \\ \left. + \nu_3\Big[(a_1 - a_2)\varepsilon^2\nu_1\nu_2 + (a_1 + a_2)\varepsilon\dot\nu_3 + a_1a_2\gamma_-(\nu,s)\Big]\right\} - \\ - \frac{\dot\nu_3}{2\nu_3}\Big(B_1\nu_1^2 + B_2\nu_2^2 - B_3\nu_3^2 + 2k\Big) + \nu_1\nu_2[a_3(B_1 - B_2)x_3 + (C_1 - C_2)\nu_3],\end{gathered} \tag{3.15}$$

где $\dot\nu_3$ имеет значение (2.20). Для удобства исследования уравнения (3.15) выражение $\dot\nu_3$ не внесено в (3.15). В силу постановки задачи к уравнениям (3.14), (3.15) необходимо присоединить уравнения (2.14) и инвариантное соотношение (2.15). То есть в уравнениях (3.14), (3.15) функции $\nu_1(\nu_3)$, $\nu_2(\nu_3)$ имеют вид (2.16), а зависимость $\nu_3(t)$ устанавливается из (2.17). Отметим, что ИС (2.15) описывают прецессионные движения [28, 29] – движения, при которых постоянен угол между вектором $\boldsymbol{\beta}(\beta_1, \beta_2, 0)$ и вектором $\boldsymbol{\nu}$.

В общем случае задача интегрирования уравнений (3.14), (3.15) представляет весьма сложную проблему (см. п. 2 настоящей статьи). Поэтому рассмотрим вариант, когда ИС (3.13) являются линейными функциями, то есть компоненты вектора угловой скорости имеют вид

$$\omega_1 = \varepsilon_0\nu_1 + \beta_1 g_0, \quad \omega_2 = \varepsilon_0\nu_2 + \beta_2 g_0, \quad \omega_3 = \varepsilon_0\nu_3 \tag{3.16}$$

В силу равенств (3.16) прецессия тела-носителя относится к классу регулярных прецессий [28, 29].

Подставим значения (3.13) (в которых $\varepsilon(\nu_3) = \varepsilon_0$, $g(\nu_3) = g_0$) и значения (2.25), (2.27) в уравнения (3.14), (3.15) и потребуем, чтобы полученные равенства были тождествами по ψ:

$$(a_2 - a_1)\Big(2c_0\varepsilon_0 + g_0\kappa_0^2\Big) + c_0a_1a_2(B_2 - B_1) = 0 \tag{3.17}$$

$$\sigma_0 = \frac{g_0}{\kappa_0^2}\left\{-\frac{\varepsilon_0\left(a_1\beta_2^2 + a_2\beta_1^2\right)}{a_1a_2} + \frac{1}{2}\Big[\beta_1^2(B_3 - B_2) + \beta_2^2(B_3 - B_1)\Big]\right\} \tag{3.18}$$

$$\varepsilon_0^2(a_1 - a_2) + a_1a_2[\varepsilon_0(B_1 - B_2) + (C_1 - C_2)] = 0 \tag{3.19}$$

$$s_3 = 0, \quad s_1 = \sigma_0\beta_1, \quad s_2 = \sigma_0\beta_2 \tag{3.20}$$

$$\begin{gathered}\varepsilon_0^2 g_0\left(a_2\beta_1^2 + a_1\beta_2^2\right) + a_1a_2\left\{\varepsilon_0\Big[\sigma_0\kappa_0^2 + g_0(B_2\beta_1^2 + B_1\beta_2^2)\Big] + \right. \\ \left. + g_0\Big[\beta_1^2(C_3 - C_2) + \beta_2^2(C_3 - C_1)\Big]\right\} = 0,\end{gathered} \tag{3.21}$$

где σ_0 – параметр. Параметр k, входящий в равенство (3.8) при условиях (3.17)–(3.21), имеет значение

$$k = \frac{1}{2a_1 a_2 \kappa_0^4}\Big\{2\varepsilon_0\Big[\kappa_0^4(a_1 + a_2) - c_0^2\left(a_1\beta_1^2 + a_2\beta_2^2\right)\Big] - \\ - a_1 a_2\Big[B_3\kappa_0^4 + c_0^2\left(\beta_1^2(B_1 - B_3) + \beta_2^2(B_2 - B_3)\right)\Big]\Big\} \tag{3.22}$$

Функцию $\lambda_3(t)$ определим на основании равенств (2.25), (2.27), (3.16)–(3.21):

$$\lambda_3(t) = \frac{\mu_0}{2a_1 a_2 a_3 \kappa_0^3}\Big\{2\varepsilon_0\Big[a_3\left(a_1\beta_1^2 + a_2\beta_2^2\right) - \kappa_0^2 a_1 a_2\Big] - \\ - a_1 a_2 a_3\Big[\beta_1^2(B_2 - B_3) + \beta_2^2(B_1 - B_3)\Big]\Big\}\sin(\kappa_0 g_0 t + \psi_0) \tag{3.23}$$

Обсудим условия (3.17)–(3.23). Если в полученных условиях полагать, что $B_i = 0$, $C_i = 0$ $(i = \overline{1,3})$, то получим условия (2.29)–(2.31).

Положим в (3.17)–(3.21) $a_2 \neq a_1$. Тогда из (3.17) следует

$$c_0 = \frac{g_0\kappa_0^2(a_1 - a_2)}{2\varepsilon_0(a_2 - a_1) + a_1 a_2(B_2 - B_1)}$$

Из уравнения (3.19) можно определить параметр ε_0, если выполняется условие

$$a_1 a_2(B_1 - B_2)^2 + 4(a_2 - a_1)(C_1 - C_2) \geq 0$$

Равенство (3.21) можно рассматривать как условие на параметры C_i $(i = \overline{1,3})$.

Таким образом, доказано утверждение.

Утверждение 3. Построено новое решение (2.25)–(2.28) уравнений (3.5)–(3.7), которое описывает прецессионное движение тела-носителя в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Условиями существования данного решения являются равенства (3.17)–(3.22): в них, в отличие от случая (2.29), отсутствует требование динамической симметрии гиростата.

4. Линейные ИС уравнений движения неавтономного гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае непрецессионных движений. Ранее [25] было получено решение уравнений движения динамически симметричного твердого тела $(a_2 = a_1)$ в потенциальном поле сил:

$$x_1 = \frac{1}{a_1}\left(-\frac{\mu_1}{3}\nu_1 + \beta_1\mu_2\right), \quad x_2 = \frac{1}{a_1}\left(-\frac{\mu_1}{3}\nu_2 + \beta_2\mu_2\right), \quad x_3 = \frac{\mu_1}{a_3}\nu_3 \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} \nu_1(\nu_3) &= \frac{1}{3\mu_2\kappa_0^2}\left(\mu_1\beta_1(1 - 2\nu_3^2) - \beta_2\sqrt{F(\nu_3)}\right) \\ \nu_2(\nu_3) &= \frac{1}{3\mu_2\kappa_0^2}\left(\mu_1\beta_2(1 - 2\nu_3^2) + \beta_1\sqrt{F(\nu_3)}\right), \end{aligned} \tag{4.2}$$

где

$$F(\nu_3) = -\varepsilon_2^2\nu_3^4 + \varepsilon_1\nu_3^2 + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = 9\kappa_0^2\mu_2^2 - \mu_1^2, \quad \varepsilon_1 = 4\mu_1^2 - 9\kappa_0^2\mu_2^2, \quad \varepsilon_2 = 2\mu_1 \tag{4.3}$$

Подчеркнем, что в равенствах (4.1), (4.2) свойство динамической симметрии гиростата

$$a_2 = a_1 \tag{4.4}$$

сохраняется. В формулах (4.1)–(4.3) μ_1, μ_2 – постоянные параметры, $\varkappa_0^2$ – параметр, имеющий значение $\beta_1^2+\beta_2^2$. Зависимость $\nu_3(t)$ находится путем обращения интеграла [27]:

$$\int\limits_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3}\frac{d\nu_3}{\sqrt{F(\nu_3)}}=-\frac{1}{3}(t-t_0) \tag{4.5}$$

Величины (4.2) получены из ИС

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1,\quad \beta_1\nu_1+\beta_2\nu_2=\frac{\mu_1}{3\mu_2}\left(1-2\nu_3^2\right), \tag{4.6}$$

которые допускают уравнение Пуассона (1.1) на ИС (4.1). Так как второе ИС из (4.6) отличается от ИС (2.15), то движение гиростата не является прецессионным [28].

Дополнительно к условию (4.4) предположим, что имеют место равенства

$$s_1=\sigma_0\beta_1,\quad s_2=\sigma_0\beta_2, \tag{4.7}$$

т.е. рассмотрим условия существования ИС (4.1), (4.2), (4.6) уравнений (3.5), (3.6) при наличии ограничений на параметры (4.4), (4.7). Отличие ИС (4.6) от ИС п. 3 состоит в том, что второе ИС из (4.6) является **нелинейным.**

Для получения наглядных результатов будем считать, что выполняются равенства

$$B_2=B_1,\quad C_2=C_1\quad (i=\overline{1,3}) \tag{4.8}$$

Подствим значения (4.1), (4.2) в уравнения (3.5), (3.6). Учитывая в редуцированных уравнениях ИС (4.6) равенства (4.7). (4.8), потребуем, чтобы они были тождествами по переменной ν_3. Тогда найдем условия

$$s_3=0,\quad k=-\frac{1}{2}B_{11},\quad \sigma_0=-\frac{\mu_2}{6a_1}\left[2\mu_1+3a_1(B_1+B_3)\right] \tag{4.9}$$

$$4\mu_1^2-3a_1\mu_1(B_3+7B_1)+18a_1(C_1-C_3)=0 \tag{4.10}$$

Из первого равенства системы (4.9) следует, что центр масс гиростата лежит в плоскости кругового сечения эллипсоида инерции гиростата. Третье условие из (4.9) служит для нахождения параметра σ_0, из равенства (4.10) при выполнении неравенства $C_3>C_1$ можно получить значение параметра μ_1.

Функцию гиростатического момента $\lambda_3(\nu_3)$ в данном решении определим с помощью равенства (3.8):

$$\lambda_3(\nu_3)=\frac{1}{6a_1a_3}\left[2\mu_1(a_3-3a_1)+3a_1a_3(B_3-B_1)\right]\nu_3, \tag{4.11}$$

где функция $\nu_3(t)$ удовлетворяет интегральному соотношению (4.5), которое изучено ранее [27].

Приведем пример исследования интеграла (4.5). Следуя [27], положим, что параметры из (4.3) подчинены условию $\mu_1^2=9\varkappa_0^2\mu_2^2$. Тогда интеграл (4.5) принимает вид

$$\int\limits_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3}\frac{d\nu_3}{\nu_3\sqrt{\lambda_0^2-\nu_3^2}}=-\frac{2\mu_1}{3}(t-t_0), \tag{4.12}$$

т.е. переменная ν_3 изменяется на отрезке

$$-\lambda_0\le\nu_3\le\lambda_0\quad\left(\lambda_0=\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \tag{4.13}$$

где $\nu_3^{(0)} \neq 0$. Интеграл (4.12) вычисляется в элементарных функциях

$$\nu_3(t) = \frac{\sqrt{3}}{2\,\mathrm{ch}\,w(t)}, \quad w(t) = \frac{\mu_1(t - t_0)}{\sqrt{3}} \tag{4.14}$$

В силу (4.1), (4.2), (4.13), (4.14), движение тела-носителя при $t \to \infty$ стремится к состоянию покоя [27]. Значение гиростатического момента $\lambda_3(t)$ находим из (4.11). Таким образом, справедливо утверждение.

Утверждение 4. Построен класс решений уравнений движения динамически симметричного гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которое *не является прецессионным*. Для него движение тела-носителя обладает свойством асимптотичности к состоянию покоя. Центр масс гиростата лежит в плоскости равных главных моментов инерции.

Заключение. В статье построены новые решения уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом в двух задачах динамики: в задаче о движении тяжелого гиростата и в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Thomson W.* On the motion of rigid solids in a liquid circulating irrotationally through perforations in them or in any fixed solid // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1872. V. 7. P. 668–674.
2. *Volterra V.* Sur la théorie des variations des latitudes // Acta. Math. 1899. V. 22. P. 201–358.
3. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. Т. 1. М., 1949. С. 31–152.
4. *Gray A.* A Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion. Theory and Applications. New York: Dover Publ., 1959. 530 p.
5. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. Т. 2, ч. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 555 с.
6. *Румянцев В.В.* Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика, механика. 1970. № 2. С. 83–96.
7. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. 1972. Вып. 4. С. 52–73.
8. *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 292 с.
9. *Kane T.R., Fowler R.C.* Equivalence of two gyrostatic stability problems // J. Appl. Mech. V. 37 (4). 1970. P. 1146–1147.
10. *Roberson R.E.* The equivalence of two classical problems of free spinning gyrostats // J. Appl. Mech. V. 38 (3). 1971. P. 1146–1147.
11. *Асланов В.С., Дорошин А.В.* Движение системы соосных тел переменной массы // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 6. С. 999–1009.
12. *Асланов В.С., Дорошин А.В.* О двух случаях движения неуравновешенного гиростата // Изв. РАН. МТТ. № 4. 2006. С. 42–55.
13. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Котов Г.А.* Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом. Донецк: Изд-е ГУ "Институт прикладной математики и механики", 2017. 250 с.
14. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. 1974. Вып. 6. С. 15–24.
15. *Ковалев А.М., Горр Г.В., Неспирный В.Н.* Инвариантные соотношения неавтономных систем дифференциальных уравнений с приложением в механике // Механика твердого тела. 2013. Вып. 43. С. 3–19.
16. *Ольшанский В.Ю.* Линейные инвариантные соотношения уравнений Пуанкаре–Жуковского // ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 1. С. 29–45.
17. *Ольшанский В.Ю.* Об одном новом линейном инвариантном соотношении уравнений Пуанкаре–Жуковского // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 6. С. 883–894.

18. *Зиглин С.Л.* Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела // Тр. Москов. мат. об-ва. 1980. Т. 41. С. 287–303.
19. *Козлов В.В., Онищенко Д.А.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 6. С. 1298–1300.
20. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. Киев: Наук. думка, 1978. 294 с.
21. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 384 с.
22. *Kirchhoff G.R.* Über die Bewegung eines Rotationkörpers in einer Flüssigkeit // J. für die reine und angew. Math. 1870. Bd. 71. S. 237–262.
23. *Стеклов В.А.* О движении твердого тела в жидкости. Харьков, 1893. 234 с.
24. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // ПМТФ. 1963. № 4. С. 17–29.
25. *Горр Г.В.* О трех инвариантных соотношениях уравнений движения тела в потенциальном поле сил // ПММ. 2019. Т. 83. № 2. С. 202–214.
26. *Gorr G.V., Tkachenko D.N., Shchetinina E.K.* Research on the motion of a body in a potential force field in the case of three invariant relations // Russ. J. Nonlin. Dyn. 2019. V. 15. № 3. P. 327–342.
27. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. Донецк: ДонНУ, 2010. 364 с.
28. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. Киев: Наук. думка, 2013. 408 с.
29. *Grioli G.* Questioni di dinamica del corpo rigido // Atti. Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. e Natur. 1963. V. 35. F. 1–2. P. 35–39.

On Solutions of Equations of Motion of a Gyrostat with Variable Gyrostatic Moment

G. V. Gorr[a,#] and T. V. Belokon[b,##]

[a] *Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Ukraine*
[b] *Tugan-Baranovsky National University of Economics and Trade, Donetsk, Ukraine*
[#]*e-mail: gvgorr@gmail.com*
[##]*e-mail: B.Tatyana13@mail.ru*

The problem on motion of a gyrostat with the variable gyrostatic moment under the action of potential and gyroscopic forces is considered. Three new solutions of the equations of motion are obtained, which are determined by three linear invariant relations for the components of the angular velocity vector of the gyrostat. In the case of a heavy gyrostat, a solution is found, when the gyrostat mass distribution is characterized by Kovalevskaya and Goryachev–Chaplygin generalized conditions. Next two solutions take place for equations of Kirchhoff–Poisson class. One of them exists in the case of dynamically symmetric gyrostates, and in the other solution the gyrostat mass distribution is arbitrary.

Keywords: gyrostatic moment, invariant relations, potential and gyroscopic forces, Kovalevskaya and Goryachev–Chaplygin generalized conditions

REFERENCES

1. *Thomson W.* On the motion of rigid solids in a liquid circulating irrotationally through perforations in them or in any fixed solid // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1872, no. 7, pp. 668–674.
2. *Volterra V.* Sur la theorie des variations des latitudes // Acta Math., 1899, vol. 22, pp. 201–358.
3. *Zhukovsky N.E.* On the motion of a solid body having cavities filled with a homogeneous dropping liquid // in: Coll. works. Vol. 1. Moscow: 1949. pp. 31–152. (in Russian)
4. *Gray A.* A Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion. Theory and Applications. N.Y.: Dover Publ., 1959. 530 p.
5. *Levy-Civita T., Amaldi W.* Course in Theoretical Mechanics. Vol. 2, part 2. Moscow: Inostr. Lit., 1951. 555 p. (in Russian)

6. *Rumyantsev V.V.* About orientation control and satellite stabilization by rotors // Moscow Univ. Mech. Bull. Math., 1970, iss. 2, pp. 83–96. (in Russian)
7. *Kharlamov P.V.* On the equations of motion of a system of solids // Mech. Rigid Body, 1972, vol. 4, pp. 52–73. (in Russian)
8. *Wittenburg J.* Dynamics of Systems of Rigid Bodies. Moscow: Mir, 1980. 292 p. (in Russian)
9. *Kane T.R., Fowler R.C.* Equivalence of two gyrostatic stability problems // J. Appl. Mech., 1970, vol. 37 (4), pp. 1146–1147.
10. *Roberson R.E.* The equivalence of two classical problems of free spinning gyrostats // J. Appl. Mech., 1971, vol. 38 (3), pp. 1146–1147.
11. *Aslanov V.S., Doroshin A.V.* The motion of a system of coaxial bodies of variable mass // JAMM, 2004, vol. 68, iss. 6, pp. 899–908.
12. *Aslanov V.S., Doroshin A.V.* Two cases of motion of an unbalanced gyrostat // Mech. Sol., 2006, vol. 41, iss. 4, pp. 29–39.
13. *Gorr G.V., Maznev A.V., Kotov G.A.* The Movement of the Gyrostat with a Variable Gyrostatic Moment. Donetsk: Pub. House Inst. Appl. Math.&Mech., 2017, 250 p. (in Russian)
14. *Kharlamov P.V.* On invariant relations of a system of differential equations // Mech. Rigid Body, 1974, iss. 6, pp. 15–24. (in Russian)
15. *Kovalev A.M., Gorr G.V., Nespirnyy V.N.* Invariant relations for nonautonomous systems of differential equations with application in mechanics // Mech. Rigid Body, 2013, iss. 43, pp. 3–18. (in Russian)
16. *Olshanskii V.Yu.* A new linear invariant relation of the Poincaré–Zhukovskii equations // JAMM, 2012, vol. 76, iss. 6, pp. 636–645.
17. *Olshanskii V.Yu.* Linear invariant relations of the Poincaré–Zhukovskii equations // JAMM, 2014, vol. 78, iss. 1, pp. 18–29.
18. *Sieglin S.L.* The splitting of separatrices, branching of solutions and non-existence of an integral in rigid body dynamics // Proc. Moscow Math. Soc., 1980, vol. 41, pp. 287–303. (in Russian)
19. *Kozlov V.V., Onishchenko D.A.* Non-integrability of Kirchhoff equations // Dokl. Acad. Nauk SSSR, 1982, vol. 266, no. 6, pp. 1298–1300. (in Russian)
20. *Gorr G.V., Kudryashova L.V., Stepanova L.A.* Classical Problems of the Dynamics of a Rigid Body. Development and Current Status. Kiev: Nauk. Dumka, 1978. 296 p. (in Russian)
21. *Borisov A.V., Mamaev I.S.* Dynamics of a Rigid Body. Izhevsk: R&C Dyn., 2001. 84 p. (in Russian)
22. *Kirchhoff G.R.* Über die Bewegung eines Rotationkörpers in einer Flüssigkeit // J. für die reine und angew. Math., 1870, Bd. 71, S. 237–262.
23. *Steklov V.A.* On Motion of a Solid Body in the Liquid. Kharkov: 1893, 234 p. (in Russian)
24. *Kharlamov P.V.* On motion in the fluid of a body bounded by a multiply connected surface // J. Appl. Mech.&Techn. Phys., 1963, no. 4, pp. 17–29. (in Russian)
25. *Gorr G.V.* On three invariant relation of the equations of motion of a body in an potential field of force // Mech. Solids, 2019, vol. 54, no. 2, pp. 234–244.
26. *Gorr G.V., Tkachenko D.N., Shchetinina E.K.* Research on the motion of a body in a potential force field in the case of three invariant relations // Russ. J. Nonlin. Dyn., 2019, vol. 15, no. 3, pp. 327–342.
27. *Gorr G.V., Maznev A.V.* The Dynamics of a Gyrostat Having a Fixed Point. Donetsk: Donetsk Nat. Univ., 2010. 364 p. (in Russian)
28. *Gorr G.V., Kovalev A.M.* Motion of a Gyrostat. Kyev: Naukova Dumka, 2013. 408 p. (in Russian)
29. *Grioli G.* Questioni di dinamica del corpo rigido // Atti. Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis., Mat. e Natur., 1963, vol. 35, f. 1–2, pp. 35–39.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 2, с. 152–171

УДК 531.36

МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ АСИНХРОННЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ В МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Л. А. Климина[1,*]

[1] НИИ механики МГУ, Москва, Россия

**e-mail: klimina@imec.msu.ru*

Поступила в редакцию 15.09.2020 г.
После доработки 21.12.2020 г.
Принята к публикации 12.01.2021 г.

Рассматривается автономная неконсервативная механическая система с двумя степенями свободы. В системе присутствует управление в форме обратной связи с двумя коэффициентами усиления. Требуется подобрать значения этих коэффициентов таким образом, чтобы сформировать в системе асинхронные автоколебания с определенными свойствами. Предложен итерационный алгоритм поиска соответствующих коэффициентов усиления. Он основан на построении вспомогательных систем второго порядка и формировании предельных циклов этих систем при помощи подхода, опирающегося на критерий Андронова–Понтрягина, но не требующего наличия малого параметра. Эффективность подхода проиллюстрирована на примере задачи о формировании асинхронных автоколебаний/авторотаций в модели аэродинамического маятника. Обсуждаются условия применимости алгоритма и возможные модификации.

Ключевые слова: асинхронные автоколебания, автономная неконсервативная система, управление, итерации, усреднение, критерий Андронова–Понтрягина, аэродинамический маятник

DOI: 10.31857/S0032823521020065

Введение. Термин “автоколебания” был введен Андроновым в начале XX в. для описания процесса, которому можно в математической модели сопоставить предельный цикл Пуанкаре автономной системы дифференциальных уравнений. Сначала рассматривался случай неконсервативной системы второго порядка. При введении понятия автоколебаний Андронов предложил идею метода отыскания циклов, отвечающих автоколебаниям [1]. Несколько позже эта идея была формализована Понтрягиным [2]. Предложенный подход тесно связан с методом Крылова–Боголюбова, уступая последнему по высоте размерности систем, к которым он применим, но являясь более удобным для систем второго порядка. Так, критерий Андронова–Понтрягина активно развивается и применяется в современных исследованиях динамических систем на плоскости [3–11], в том числе при решении задач, родственных 16-й проблеме Гильберта [12, 13].

Как и метод усреднения Крылова–Боголюбова, критерий Андронова–Понтрягина предполагает наличие в системе малого параметра. Однако для обоих подходов развиты модификации, предполагающие итерационную процедуру и позволяющие снять требование присутствия малого параметра: [14, 15] – для первого, [16–18] – для второго. Скорость сходимости и сам факт сходимости указанных итерационных методов зависят от константы Липшица функции, описывающей негамильтоновы слагаемые в системе.

Понятие автоколебаний естественным образом распространяется на случай механической системы с двумя степенями свободы, описываемой автономной неконсервативной динамической системой четвертого порядка. Но в такой системе автоколебаниям (самоподдерживающимся колебаниям) может соответствовать как предельный цикл, так и аттрактор более сложной структуры, например, квазипериодическая траектория.

По сравнению со случаем одной степени свободы методы исследования автоколебаний для систем с двумя и более обобщенными координатами значительно усложняются. Среди них можно выделить подходы, основанные на прямом интегрировании динамических уравнений, проекционные методы, методы на основе усреднения и др. Краткий обзор алгоритмов поиска периодических решений приведен в [18], для случая квазипериодических решений – в [19], из наиболее новых методов можно отметить [20–24]. Реализация методов, предназначенных для описания квазипериодических решений, требует, как правило, весьма сложных вычислительных алгоритмов.

В данной работе предложен численно-аналитический метод поиска (формирования) автоколебаний, относительно простой в реализации и не требующий дополнительных замен переменных. Подход основан на рассмотрении двух вспомогательных систем второго порядка и применении к каждой из них метода [17], основанного на критерии Андронова–Понтрягина. При этом алгоритм позволяет выявить автоколебания (сформировать, если предполагается наличие управляющего параметра), которым отвечают аттракторы, не являющиеся периодическими траекториями. Однако периодические траектории системы предложенный метод, как правило, не обнаруживает, поскольку не учитывает эффекты, связанные с синхронизацией. Отметим, что известен ряд подходов для формирования периодических автоколебаний определенных классов систем с двумя и более степенями свободы (например, подход [25]).

Ранее [26, 27] предложен метод построения близких к периодическим (но не периодических) траекторий, предназначенный для формирования асинхронных режимов авторотации механической системы с двумя вращательными степенями свободы. При этом был рассмотрен класс систем более узкий, чем в данной работе: в [26, 27] перевязки между подсистемами зависят только от фазовых скоростей, но не от координат, причем в [27] эта зависимость предполагается линейной. В настоящей работе перевязки между подсистемами зависят и от фазовых координат, и от фазовых скоростей (в общем случае нелинейно). Соответственно усложняется метод построения близкого к периодическому решения (метод [26] существенно опирается на отсутствие перевязки по координатам, а подход [27] помимо этого принципиально использует линейный характер перевязок по скоростям). Дополнительное техническое усложнение в настоящей работе связано с тем, что рассматриваются решения, соответствующие не только авторотациям, но и автоколебаниям.

Эффективность алгоритма, предложенного далее, проиллюстрируем на примере задачи о формировании автоколебаний аэродинамического маятника. Определим коэффициенты в законе управления, при которых существует близкая к периодической траектория, отвечающая колебаниям с заданной амплитудой.

1. Постановка задачи. Рассмотрим автономную неконсервативную механическую систему с двумя степенями свободы. Пусть в безразмерных переменных уравнения движения системы имеют следующий вид (точкой обозначена производная по безразмерному времени τ):

$$
\begin{gathered}
\dot{\varphi}_1 = \omega_1 \\
\dot{\omega}_1 = \sum_{k=0}^{N} F_{1k}\left(\varphi_1, \omega_1, G_{2k}(\varphi_2, \omega_2)\right) + u_1(\varphi_1, \varphi_2, \omega_1, \omega_2) \\
\dot{\varphi}_2 = \omega_2 \\
\dot{\omega}_2 = \sum_{k=0}^{N} F_{2k}\left(\varphi_2, \omega_2, G_{1k}(\varphi_1, \omega_1)\right) + u_2(\varphi_1, \varphi_2, \omega_1, \omega_2)
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

Будем рассматривать управление вида

$$
\begin{aligned}
u_1 &= -b_1 f_1(\varphi_1, \omega_1) + g_2(b_2, \varphi_2, \omega_2) \\
u_2 &= -b_2 f_2(\varphi_2, \omega_2) + g_1(b_1, \varphi_1, \omega_1)
\end{aligned}
$$

Здесь φ_i — обобщенные координаты, ω_i — соответствующие обобщенные скорости. Здесь и далее $i = 1, 2$. Функции F_{ik} определяются на основе выражения для механической энергии системы, а также внешних сил и моментов, в том числе неконсервативных; при этом функции G_{ik} описывают взаимодействие в системе; u_i — компоненты управления; b_i — коэффициенты усиления управляющего воздействия, которые подлежат выбору в соответствии с задачей управления. Функции f_i отвечают за управляющее воздействие, направленное на изменение поведения переменных φ_i, ω_i. Функция g_2 описывает опосредованное влияние управляющего воздействия по φ_2, ω_2 на изменение переменных φ_1, ω_1, и аналогичную роль выполняет функция g_1.

Функции f_i выбираем так, чтобы было выполнено следующее свойство: $\omega_i f_i(\varphi_i, \omega_i) > 0$ при $\omega_i \neq 0$ (например, $f_i = \omega_i$). Все функции в (1.1) предполагаются аналитическими.

Пусть требуется посредством управления организовать в механической системе, описываемой уравнениями (1.1), режим асинхронных автоколебаний, таких, что амплитуда колебаний по каждой переменной φ_i остается вблизи некоторых заданных значений φ_i^*, и средние по времени (на большом отрезке времени) частоты колебаний по двум переменным несоизмеримы (не происходит синхронизации). Отметим, что асинхронные колебания представляют интерес для ряда прикладных задач [28, 29].

Будем считать, что правые части системы (1.1) зависят от координат φ_i 2π-периодически. Наряду с уже поставленной задачей далее рассмотрим две весьма близкие задачи: формирование режима, при котором по обеим координатам происходят ротации с близкими к постоянным угловыми скоростями ω_i^* несоизмеримыми друг с другом; формирование режима, при котором по одной из координат происходят колебания с амплитудой близкой к заданной, а по другой координате — ротация с угловой скоростью близкой к заданной.

2. Частично усредненные системы. Построим две вспомогательные “частично усредненные” системы второго порядка с неопределенными параметрами:

$$
\begin{gathered}
\dot{\varphi}_1 = \omega_1 \\
\dot{\omega}_1 = \sum_{k=1}^{N} F_{1k}\left(\varphi_1, \omega_1, \bar{G}_{2k}^j\right) + \bar{g}_2^j - b_1^j f_1(\varphi_1, \omega_1)
\end{gathered} \tag{2.1}
$$

$$
\begin{gathered}
\dot{\varphi}_2 = \omega_2 \\
\dot{\omega}_2 = \sum_{k=1}^{N} F_{2k}\left(\varphi_2, \omega_2, \bar{G}_{1k}^j\right) + \bar{g}_1^j - b_2^j f_2(\varphi_2, \omega_2)
\end{gathered} \tag{2.2}
$$

Здесь $\bar{G}_{ik}^j$, $\bar{g}_i^j$, b_i^j – неизвестные параметры, которые подлежат определению, их вычисление проводится методом последовательных приближений, верхний индекс j ($j \geq 0$) соответствует номеру итерационного шага.

Коэффициент b_i^j в системе (2.i) отвечает за поворот векторного поля (в силу указанного выше свойства функции f_i: $\omega_i f_i(\varphi_i, \omega_i) > 0$). Этот коэффициент усиления управляющего воздействия требуется выбрать таким образом, чтобы в системе (2.i) существовал предельный цикл, проходящий через точку $(-\varphi_i^*, 0)$. Далее обозначим такой цикл $(\tilde{\varphi}_i^j(t), \tilde{\omega}_i^j(t))$. Предполагаем, что искомое значение b_i^j существует. Для отыскания величины b_i^j могут быть применены различные методы формирования/поиска периодических траекторий, обзор приведен, например, в [18]. При необходимости локализацию областей существования предельных циклов можно провести при помощи таких методов, как [30, 31]. В данной работе для определения значений b_i^j будем использовать метод [16] для случая, если система обладает центральной симметрией, [17] для системы, не обладающей центральной симметрией, либо [18] для случая, если по какой-либо координате происходит авторотация, а не автоколебания. Все перечисленные случаи проиллюстрированы далее на примере задачи об аэродинамическом маятнике.

Параметры $\bar{G}_{ik}^j$, $\bar{g}_i^j$ определяются следующим образом:

$$\bar{G}_{2k}^0 = \bar{g}_2^0 = 0, \quad \bar{G}_{2k}^{j+1} = \frac{1}{T_2^j}\int_0^{T_2^j} G_{2k}(\tilde{\varphi}_2^j(t), \tilde{\omega}_2^j(t))dt$$

$$\bar{g}_2^{j+1} = \frac{1}{T_2^j}\int_0^{T_2^j} g_2\left(b_2^j, \tilde{\varphi}_2^j(t), \tilde{\omega}_2^j(t)\right)dt; \quad j \geq 0$$

$$\bar{G}_{1k}^j = \frac{1}{T_1^j}\int_0^{T_1^j} G_{1k}\left(\tilde{\varphi}_1^j(t), \tilde{\omega}_1^j(t)\right)dt, \quad \bar{g}_1^j = \frac{1}{T_1^j}\int_0^{T_1^j} g_1\left(b_1^j, \tilde{\varphi}_1^j(t), \tilde{\omega}_1^j(t)\right)dt; \quad j \geq 0$$

Здесь T_i^j – период предельного цикла $(\tilde{\varphi}_i^j(t), \tilde{\omega}_i^j(t))$ системы (2.i), построенного на j-м шаге. Для применения алгоритма удобно использовать при вычислении $\bar{G}_{ik}^j$ формулы, исключающие зависимость от времени, и то же самое относится к вычислению значений $\bar{g}_i^j$:

$$\bar{G}_{ik}^{j+i-1} = \frac{1}{T_i^j}\left(\int_{-\varphi_i^-}^{\varphi_i^+} \frac{G_{ik}(\varphi, \omega_i^{j+}(\varphi))}{\omega_i^{j+}(\varphi)}d\varphi - \int_{-\varphi_i^-}^{\varphi_i^+} \frac{G_{ik}(\varphi, \omega_i^{j-}(\varphi))}{\omega_i^{j-}(\varphi)}d\varphi\right)$$

$$T_i^j = \left(\int_{-\varphi_i^-}^{\varphi_i^+} \frac{1}{\omega_i^{j+}(\varphi)}d\varphi - \int_{-\varphi_i^-}^{\varphi_i^+} \frac{1}{\omega_i^{j-}(\varphi)}d\varphi\right); \quad j \geq i-1$$

Здесь $\varphi_i^- = \varphi_i^*$. Точка $(\varphi_i^+, 0)$ – самая правая точка периодической траектории $(\tilde{\varphi}_i^j(t), \tilde{\omega}_i^j(t))$ на фазовой плоскости (φ_i, ω_i); $\omega_i^{j\pm}(\varphi_i)$ – функция, описывающая зависимость ω_i от φ_i вдоль верхней/нижней части предельного цикла $(\tilde{\varphi}_i^j(t), \tilde{\omega}_i^j(t))$, соответственно (т.е. в верхней/нижней полуплоскости); $\omega_i^{j\pm}(\varphi_i^+) = \omega_i^{j\pm}(\varphi_i^-) = 0$. Для случая периодической траектории $\omega_i^j(\varphi)$, отвечающей авторотации по угловой координате, справедливы аналогичные по смыслу формулы; тогда $\omega_i^j(\varphi_i)$ — 2π-периодическая функция φ_i, и, поскольку такая траектория целиком расположена в верхней/нижней части фазового цилиндра, для нее индекс $\pm$ не требуется:

$$\bar{G}_{ik}^{j+i-1} = \frac{1}{T_i^j}\int\limits_0^{2\pi}\frac{G_{ik}(\varphi,\omega_i^j(\varphi))}{\omega_i^j(\varphi)}d\varphi,\quad T_i^j = \int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{\omega_i^j(\varphi)}d\varphi;\quad j \ge i-1$$

Предложенный алгоритм позволяет не вычислять явную зависимость переменных от времени на предельном цикле, достаточно определить зависимость ω_i от координаты φ_i вдоль верхней/нижней части цикла. Это радикально снижает объем необходимых вычислений при построении предельных циклов вспомогательных систем. В качестве примера можно сравнить описание предельных циклов возмущенного осциллятора Дуффинга, раскрывающее [32] и не раскрывающее [11] зависимость от времени: во втором случае объем вычислений сокращается многократно.

Итак, на j-м шаге алгоритма с учетом предыдущего шага строится периодическая траектория системы (2.1), проходящая через точку $(-\varphi_1^*, 0)$, как двузначная функция $\omega_1^{j\pm}(\varphi_1)$ от координаты. Определяется соответствующее значение b_1^j, обеспечивающее существование такой траектории. Вдоль этой траектории вычисляются средние по времени за период значения $\bar{G}_{1k}^j$, $\bar{g}_1^j$ функций G_{1k}, g_1. Эти значения подставляются в правую часть системы (2.2), после чего аналогично выполняется j-й шаг алгоритма для системы (2.2). Средние значения $\bar{G}_{2k}^{j+1}$, $\bar{g}_2^{j+1}$ функций G_{2k}, g_2, полученные на j-м шаге, используются для $(j+1)$-го шага в системе (2.1) и т.д., пока для каждого i разница между значениями $\bar{G}_{ik}^j$, $\bar{g}_i^j$, b_i^j полученными на j-м и $(j+1)$-м шагах не станет меньше некоторого заданного порогового значения (критерий практической сходимости алгоритма).

Далее при обсуждении свойств притяжения решений для краткости будем использовать обозначение $db_i^j/d\varphi_i^* = db_i^j/d\varphi_i^0\big|_{\varphi_i^0=\varphi_i^*}$, где $b_i^j\left(\varphi_i^0\right)$ — значение b_i^j, обеспечивающее наличие $\bar{G}_{ik}^j$, $\bar{g}_i^j$, b_i^j предельного цикла, проходящего через точку $(-\varphi_i^0, 0)$. В соответствии со свойствами поворота векторного поля при $db_i^j/d\varphi_i^* < 0$ предельный цикл $\omega_i^{j\pm}(\varphi_i)$ орбитально устойчив. Для случая траектории 2π-периодической по φ_i справедливо аналогичное утверждение при $db_i^j/d\omega_i^* < 0$. Соответствующие теоремы подробно обсуждаются в [16—18].

Пусть при численной реализации метода значения b_i^j на каждом j-м шаге определены и последовательности $\bar{G}_{ik}^j$, $\bar{g}_i^j$, b_i^j сходятся к некоторым предельным значениям при $j \to \infty$. Если при этом, начиная с некоторого j, выполнено $db_i^j/d\varphi_i^* < 0$, то при достаточно слабых перевязках между подсистемами можно ожидать, что в системе (1.1) при $b_i = b_i^* = \lim\limits_{j\to\infty} b_i^j$ существует притягивающее близкое к периодическому решение, отвечающее автоколебаниям по координатам φ_i с амплитудами близкими к φ_i^*. Для случая, когда по какой-либо координате рассматривается ротация и $db_i^j/d\omega_i^* < 0$, имеет место аналогичное утверждение.

Если указанная гипотеза подтверждается, то проекции близкой к периодической траектории системы (1.1) на плоскости (φ_i, ω_i) приближенно описываются кривыми $\omega_i^{\pm}(\varphi_i)$, которые представляют собой периодические траектории, существующие в системах (2.i) при предельных значениях $\bar{G}_{ik}^*$, $\bar{g}_i^*$, b_i^* параметров. В силу непрерывной зависимости траекторий от параметров функции $\omega_i^{\pm}(\varphi_i)$ определены и являются пределами функциональных последовательностей $\omega_i^{j\pm}(\varphi_i)$ при $j \to \infty$. Эти функции вычисляются наряду со значениями b_i^* в ходе применения алгоритма.

Сформулируем достаточные условия формирования асинхронных колебаний при конечных перевязках между переменными в системе (1.1).

Теорема 1. Пусть для каждого $j \geq 0$ определены периодические траектории $\omega_i^{j\pm}(\varphi_i)$ и соответствующие значения $\bar{G}_{ik}^j$, $\bar{g}_i^j$, b_i^j в системах (2.i). Пусть все эти последовательности при $j \to \infty$ сходятся к некоторым пределам $\omega_i^{\pm}(\varphi_i)$, $\bar{G}_{ik}^*$, $\bar{g}_i^*$, b_i^*, причем $\omega_i^{\pm}(\varphi_i)$ – притягивающий цикл системы (2.i) при $\bar{G}_{ik}^*$, $\bar{g}_i^*$, b_i^*. Пусть помимо этого существуют области Ω_i на плоскостях $(\varphi_i,\ \omega_i)$, содержащие кривые $\omega_i^{\pm}(\varphi_i)$, и такие, что при $(\varphi_i, \omega_i) \in \Omega_i$ значения правой части $2i$-го уравнения системы (1.1) отличаются от значений, которые принимает правая часть второго уравнения системы (2.i) при $\bar{G}_{ik}^*$, $\bar{g}_i^*$, b_i^*, на величину Γ_i, ограниченную по модулю некоторой константой A_i. Пусть в областях Ω_i существуют вспомогательные кривые $\breve{\omega}_i^{\pm}(\varphi_i)$, $\widehat{\omega}_i^{\pm}(\varphi_i)$, определение которых приведено в тексте доказательства. Тогда в системе (1.1) существует аттрактор, проекция которого на плоскость $(\varphi_i,\ \omega_i)$ расположена внутри полосы, ограниченной кривыми $\breve{\omega}_i^{\pm}(\varphi_i)$, $\widehat{\omega}_i^{\pm}(\varphi_i)$ (т.е. проекции аттрактора расположены в окрестности кривых $\omega_i^{\pm}(\varphi_i)$).

Доказательство. При $(\varphi_i, \omega_i) \in \Omega_i$ первые два уравнения системы (1.1) принимают вид:

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1$$
$$\dot{\omega}_1 = \sum_{k=1}^{N} F_{1k}(\varphi_1, \omega_1, \bar{G}_{2k}^*) + \bar{g}_2^* - b_1^* f_1(\varphi_1, \omega_1) + \Gamma_1(\varphi_1, \omega_1, \varphi_2, \omega_2)$$
$$\left|\Gamma_1(\varphi_1, \omega_1, \varphi_2, \omega_2)\right| \leq A_1$$

Формально рассмотрим в пространстве произвольных значений φ_1, ω_1 неавтономную систему, про которую известно, что $\left|U_1(t)\right| \leq A_1$:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= \omega_1\\ \dot{\omega}_1 &= \sum_{k=1}^{N} F_{1k}(\varphi_1, \omega_1, \bar{G}_{2k}^*) + \bar{g}_2^* - b_1^* f_1(\varphi_1, \omega_1) + U_1(t)\end{aligned} \tag{2.3}$$

Для каждой траектории системы (1.1) существует такая функция U_1, $\left|U_1(t)\right| \leq A_1$, что при $(\varphi_i, \omega_i) \in \Omega_i$ проекция этой траектории системы (1.1) на плоскость $(\varphi_1,\ \omega_1)$ совпадает с некоторой траекторией системы (2.3).

Функцию U_1 в системе (2.3) можно рассматривать как управление и поставить задачу выбора управления U_1, максимально отдаляющего решение от кривой $\omega_1^{\pm}(\varphi_1)$, т.е. смоделировать “наихудшие” возможные возмущения, вызванные перевязками.

Рассмотрим случай $U_1 = A_1 \operatorname{sgn} \omega_1$. При таком выборе U_1 система (2.3) автономна, и функция U_1 в этой системе обеспечивает поворот векторного поля системы на положительный угол, при таком повороте векторного поля системы на плоскости/цилиндре притягивающие предельные циклы расширяются, отталкивающие сужаются, и те, и другие могут разрушиться, например, сливаясь друг с другом [33].

При $U_1 \equiv 0$ в системе (2.3) существует притягивающая периодическая траектория $\omega_1^{\pm}(\varphi_1)$. Предположим, что эта периодическая траектория при переходе к системе (2.3) с $U_1 = A_1 \operatorname{sgn} \omega_1$ не разрушается, а, расширяясь, переходит в некоторый предельный цикл $\hat{\omega}_1^{\pm}(\varphi_1)$, и что кривая $\hat{\omega}_1^{\pm}(\varphi_1)$ расположена в области Ω_1.

Аналогично рассмотрим $U_1 = -A_1 \operatorname{sgn} \omega_1$. Такая функция обеспечивает поворот поля на отрицательный угол. Предположим, что периодическая траектория $\omega_1^{\pm}(\varphi_1)$ при переходе к системе (2.3) с $U_1 = -A_1 \operatorname{sgn} \omega_1$ не разрушается, а, сужаясь, переходит в некоторую притягивающую траекторию $\breve{\omega}_1^{\pm}(\varphi_1)$, и кривая $\breve{\omega}_1^{\pm}(\varphi_1)$ расположена в области Ω_1.

Для построения циклов $\breve{\omega}_1^{\pm}(\varphi_1)$, $\hat{\omega}_1^{\pm}(\varphi_1)$ можно использовать, например, метод [17].

Тогда, какой бы ни была функция U_1 при условии $|U_1(t)| \le A_1$, траектория системы (2.3), начинающаяся в полосе, ограниченной кривыми $\breve{\omega}_1^{\pm}(\varphi_1)$ и $\hat{\omega}_1^{\pm}(\varphi_1)$, никогда не покидает этой полосы. Если предположим противное, то в точке пересечения траектории системы (2.3) с какой-либо из границ полосы получим противоречие: с одной стороны, функции $U_1 = \pm A_1 \operatorname{sgn} \omega_1$ обеспечивают в системе (2.3) максимально/минимально возможное значение угла наклона касательной, с другой стороны, в точке пересечения траектории с границей полосы значение угла наклона касательной к траектории больше/меньше, чем угла наклона касательной к границе.

Проведем аналогичные рассуждения для φ_2, ω_2. Предположим, что соответствующие кривые $\breve{\omega}_2^{\pm}(\varphi_2)$ и $\hat{\omega}_2^{\pm}(\varphi_2)$ существуют и расположены в Ω_2.

В предложении существования при $(\varphi_i, \omega_i) \in \Omega_i$ кривых $\breve{\omega}_i^{\pm}(\varphi_i)$, $\hat{\omega}_i^{\pm}(\varphi_i)$ получаем, что возмущения, вызванные ограниченными перевязками в системе (1.1), не разрушают близкое к периодическому решение, существующее при формальной замене функций, описывающих взаимовлияние, их средними значениями $\bar{G}_{ik}^*$, $\bar{g}_i^*$. Это порождающее решение в полной системе переходит в некоторый аттрактор, проекция которого на плоскость (φ_i, ω_i) расположена внутри полосы, ограниченной кривыми $\breve{\omega}_i^{\pm}(\varphi_i)$, $\hat{\omega}_i^{\pm}(\varphi_i)$.

Теорема 1 доказана.

Для случая, когда в одной или двух из систем (2.i) периодическая траектория описывает ротации, а не колебания, можно ослабить условия теоремы, рассмотрев случай, когда верхняя и нижняя границы для функций Γ_i, описывающих перевязки, отличаются друг от друга.

Выбор управления U_1 максимально расширяющего/сужающего предельный цикл на плоскости, осуществлен по аналогии с подходом, предложенным в [34] и примененным для задачи о раскачивании качелей в [35].

Помимо этого отметим, что систему (2.3) можно рассматривать как систему с нестационарными возмущениями. Современные методы исследования управляемых систем с нестационарными возмущениями обсуждаются и применяются, например, в [36, 37]. В частности, в [36] развит подход, при котором усреднение применяется для построения первого приближения функции Ляпунова.

Проверка условий теоремы 1 нетривиальна, тем не менее, она требует работы только с системами второго порядка, но не четвертого. В случае выполнения достаточных условий локализуется область, внутри которой точно расположен аттрактор полной системы четвертого порядка. Этот аттрактор может иметь небольшую область притяжения, так что обнаружить его перебором начальных условий в четырехмерном пространстве может быть значительно сложнее, чем проверить выполнение условий теоремы 1.

В качестве примера, в котором реализуются условия теоремы 1, рассмотрим один из режимов асинхронной авторотации в системе с двумя степенями свободы, приближение для которого было найдено в статье [26] (методом, представляющим собой частный случай предложенного здесь алгоритма). Это режим авторотации в модели двойной ветротурбины Дарье. Динамические уравнения в форме системы вида (1.1) и значения параметров приведены в указанной работе. Режим характеризуется программными значениями безразмерных угловых скоростей $\omega_1^* = \omega_2^* = 9.4$. Для таких ω_i^* определены 2π-периодические по φ_i траектории частично усредненных систем вида (2.i), а также определены соответствующие значения b_i^* ($b_i^* \approx 0.11$). Для данных ω_i^* условия теоремы 1 выполнены, например, при $\Omega_i = \{|\omega_i - \omega_i^*| < 0.01\}$.

В случае если перевязки между подсистемами уравнений (1.1) ограничены малой величиной, условия теоремы 1 можно ослабить. Приведем соответствующий результат.

Теорема 2. Пусть для каждого $j \geq 0$ определены периодические траектории $\omega_i^{j\pm}(\varphi_i)$ и соответствующие значения $\overline{G}_{ik}^j$, $\overline{g}_i^j$, b_i^j в системах (2.i). Пусть все эти последовательности при $j \to \infty$ сходятся к некоторым пределам $\omega_i^{\pm}(\varphi_i)$, $\overline{G}_{ik}^*$, $\overline{g}_i^*$, b_i^*, причем $\omega_i^{\pm}(\varphi_i)$ – притягивающий цикл системы (2.i) при $\overline{G}_{ik}^*$, $\overline{g}_i^*$, b_i^*. Пусть помимо этого существуют конечного размера области Ω_i на плоскостях (φ_i, ω_i), содержащие кривые $\omega_i^{\pm}(\varphi_i)$, и такие, что при $(\varphi_i, \omega_i) \in \Omega_i$ значения правой части $2i$-го уравнения системы (1.1) отличается от значений, которые принимает правая часть второго уравнения системы (2.i) при $\overline{G}_{ik}^*$, $\overline{g}_i^*$, b_i^*, на величину, ограниченную по модулю некоторым сколь угодно малым значением ε. Иными словами, перевязки в системе (1.1) малы, по крайне мере, если φ_i, ω_i принимают значения из конечных окрестностей кривых $\omega_i^{\pm}(\varphi_i)$. Тогда в системе (1.1) существует некоторый аттрактор, проекция которого на плоскость (φ_i, ω_i) стремится к кривой $\omega_i^{\pm}(\varphi_i)$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Рассмотрим при $(\varphi_1, \omega_1) \in \Omega_1$ систему вида (2.3) с $U_1 = \varepsilon \operatorname{sgn} \omega_1$. В случае $\varepsilon = 0$ эта система обладает притягивающим грубым циклом $\omega_1^{\pm}(\varphi_1)$. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ такой цикл не разрушится, а перейдет в притягивающий цикл $\widehat{\omega}_1^{\varepsilon\pm}(\varphi_1)$, расположенный вне области, ограниченной кривыми $\omega_1^{\pm}(\varphi_1)$, (по свойству поворота векторного поля) и стягивающийся к $\omega_1^{\pm}(\varphi_1)$ при $\varepsilon \to 0$. Аналогично при $U_1 = -\varepsilon \operatorname{sgn} \omega_1$ в системе (2.3) существует притягивающий цикл $\breve{\omega}_1^{\varepsilon\pm}(\varphi_1)$, расположенный внутри области, ограниченной кривыми $\omega_1^{\pm}(\varphi_1)$, и стягивающийся к $\omega_1^{\pm}(\varphi_1)$ при $\varepsilon \to 0$. При достаточно малом ε оба цикла $\breve{\omega}_1^{\varepsilon\pm}(\varphi_1)$, $\widehat{\omega}_1^{\varepsilon\pm}(\varphi_1)$ лежат в конечной области Ω_1.

Рассмотрим траекторию системы (1.1) с начальными условиями по (φ_i, ω_i), расположенными на кривой $\omega_i^{\pm}(\varphi_i)$. Проекция этой траектории на плоскость (φ_1, ω_1) не может выйти из трубки, ограниченной кривыми $\breve{\omega}_1^{\varepsilon\pm}(\varphi_1)$, $\widehat{\omega}_1^{\varepsilon\pm}(\varphi_1)$, пока $(\varphi_2, \omega_2) \in \Omega_2$, так как в точке пересечения с этой трубкой было бы нарушено условие $|U_1(t)| \leq \varepsilon$, что невозможно при $(\varphi_i, \omega_i) \in \Omega_i$. Аналогичное свойство имеет место для проекции этой траектории на плоскость (φ_2, ω_2). Таким образом, рассмотренная траектория стремится к некоторому аттрактору, проекция которого на каждую из плоскостей (φ_i, ω_i) находится внутри трубки, ограниченной кривыми $\breve{\omega}_i^{\varepsilon\pm}(\varphi_i)$, $\widehat{\omega}_i^{\varepsilon\pm}(\varphi_i)$, и стремится к кривой $\omega_i^{\pm}(\varphi_i)$ при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 2 доказана.

Для сравнения отметим, что в [38] свойство грубости решения использовано при доказательстве сохранения асинхронных колебаний при малых перевязках в системе четвертого порядка, характерной для моделей нейронных сетей. Возможно, на основании подобных рассуждений можно существенно усилить результат теоремы 2 (например, распространив его на близкие к периодическим траектории системы (1.1), которые не являются притягивающими ни в прямом, ни в обратном времени), но это выходит за рамки данной работы.

3. О численной проверке, вопросах устойчивости и области применимости алгоритма. В случае если условия теоремы 1 не выполнены, наличие в полной системе близкого к периодическому решения, порожденного периодическими траекториями частично усредненных систем, требует дополнительной проверки, например, путем прямого численного интегрирования системы (1.1) с начальными условиями, взятыми на предельных кривых $\omega_i^{\pm}(\varphi_i)$ или в их окрестности (например, $\varphi_i(0) = \varphi_i^*$, $\omega_i(0) = 0$). Отметим, что возможна ситуация, когда в системе (1.1) траектория, близкая к периодической, проекции которой на фазовые плоскости расположены около построенных кривых $\omega_i^{\pm}(\varphi)$, существует, но не является притягивающей ни в прямом, ни в обратном времени. В последнем случае наличие такого решения в результате этапа численной проверки не будет подтверждено. Возможно дальнейшее развитие метода путем построения управления, стабилизирующего такие траектории.

Область применимости метода определяется областью сходимости итерационной процедуры, а также областью, в которой взаимовлияние “подсистем” качественно описывается осредненными значениями функций, отвечающих за перевязки.

Далее приведен пример, который демонстрирует эффективность работы предложенного метода для системы, где перевязки не малы и имеет место дефицит управляющих воздействий.

4. Пример применения в задаче об аэродинамическом маятнике. Рассмотрим маятник, который состоит из державки OC, закрепленной в неподвижном шарнире O (ось шарнира вертикальна), и пластины AB, закрепленной в шарнире C (рис. 1). Плоскость пластины вертикальна. Система находится в горизонтальном потоке воздуха скорости $\mathbf{V}$ плотности ρ. Система имеет две степени свободы, которые будем описывать углом φ поворота державки OC, отсчитываемым против часовой стрелки от направления скорости ветра, и углом ϑ относительной ориентации пластины, отсчитываемым против часовой от направления перпендикулярного державке OC. В шарнире C присутствует спиральная пружина, ненапряженное состояние которой соответствует значению $\vartheta = 0$, а также в этом шарнире действует момент линейного вязкого трения. В шарнире O приложен некоторый управляющий момент M_u.

Пусть r – длина державки OC, J_1 – момент инерции державки относительно точки O, m – масса пластины, центр масс пластины расположен в точке C, J_2 – момент инерции пластины относительно точки C. Кинетическая энергия системы имеет вид (здесь точкой обозначена производная по времени t):

$$T = 0.5\left(J_1 + mr^2\right)\dot{\varphi}^2 + 0.5J_2(\dot{\varphi} + \dot{\vartheta})^2$$

На пластину действуют аэродинамические силы со стороны потока воздуха. Будем считать, что они могут быть представлены в виде силы сопротивления $\mathbf{D}$ и подъемной силы $\mathbf{L}$, приложенных в точке C и выражаемых соотношениями

$$L = 0.5\rho SU^2C_l(\alpha), \quad D = 0.5\rho SU^2C_d(\alpha)$$

Здесь S – площадь пластины, α – мгновенный угол атаки – угол между воздушной скоростью точки C и плоскостью пластины, $C_d(\alpha)$ и $C_l(\alpha)$ – коэффициенты силы со-

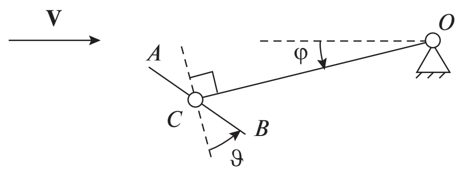

Рис. 1.

противления и подъемной (боковой) силы соответственно, U – величина воздушной скорости точки C:

$$U^2 = (V\cos\varphi)^2 + (r\dot\varphi - V\sin\varphi)^2, \quad \mathrm{tg}(\alpha - \vartheta) = \frac{V\cos\varphi}{r\dot\varphi - V\sin\varphi}$$

Аналогичная модель аэродинамического воздействия рассмотрена [9, 10] для маятника с одной степенью свободы ($\vartheta \equiv 0$), а также для других конструкций однозвенных маятников в потоке [17, 18], подобная модель применена [39] для альтернативной схемы двухзвенного маятника. Этот квазистатический подход к описанию аэродинамики маятника в потоке восходит к работе [40]. Предложены [41, 42] более сложные модификации.

При численных расчетах будем использовать для аэродинамических коэффициентов простейшие аппроксимации, отражающие качественные свойства четности/нечетности этих функций:

$$C_d(\alpha) = 0.1 + \sin^2\alpha, \quad C_l(\alpha) = \sin(2\alpha)$$

Введем следующие обозначения для безразмерных переменных и времени: $\omega = V^{-1}rd\varphi/dt$, $w = V^{-1}rd\vartheta/dt$, $\tau = r^{-1}Vt$.

Обобщенная сила по координате φ, отвечающая аэродинамическому воздействию, выражается соотношением:

$$Q_\varphi = 0.5\rho SV^2F(\varphi,\vartheta,\omega)$$

$$F(\varphi,\vartheta,\omega) = \sqrt{\cos^2\varphi + (\omega - \sin\varphi)^2}\left(C_l(\alpha)\cos\varphi - C_d(\alpha)(\omega - \sin\varphi)\right)$$

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{\cos\varphi}{\omega - \sin\varphi}\right) + \vartheta$$

Представим функцию $F(\varphi,\vartheta,\omega)$ в следующем виде:

$$F(\varphi,\vartheta,\omega) = P(\varphi) + (F_0(\varphi,\omega) - P(\varphi)) + F_1(\varphi,\omega)\vartheta + 0.5F_2(\varphi,\omega)\vartheta^2 + O(\vartheta^3),$$

здесь использованы следующие обозначения:

$$P(\varphi) = F(\varphi,0,0), \quad F_0(\varphi,\omega) = F(\varphi,0,\omega),$$

$$F_1(\varphi,\omega) = \left.\frac{\partial F(\varphi,\vartheta,\omega)}{\partial\vartheta}\right|_{\vartheta=0}, \quad F_2(\varphi,\omega) = \left.\frac{\partial^2 F(\varphi,\vartheta,\omega)}{\partial\vartheta^2}\right|_{\vartheta=0}$$

Будем искать автоколебания с относительно небольшой амплитудой по углу ϑ и при этом ограничимся для функции $F(\varphi,\vartheta,\omega)$ членами разложения порядка до $O(\vartheta^2)$ включительно. Тогда каждое слагаемое в правой части системы уравнений движения будет произведением функций, каждая из которых зависит или только от φ и ω или только от ϑ и w.

Таким образом, в безразмерных обозначениях уравнения движения системы имеют структуру аналогичную (1.1):

$$
\begin{gathered}
\varphi = \omega \\
\dot{\vartheta} = w \\
\dot{\omega} = a\sum_{k=0}^{2}\frac{1}{k!}F_k(\varphi,\omega)\vartheta^k + p(\kappa\vartheta + \chi w) + u \\
\dot{w} = -a\sum_{k=0}^{2}\frac{1}{k!}F_k(\varphi,\omega)\vartheta^k - \kappa\vartheta - \chi w - u \\
a = \frac{\rho S r^3}{2\left(J_1 + mr^2\right)}, \quad p = \frac{J_2}{J_1 + mr^2 + J_2}
\end{gathered} \tag{4.1}
$$

Здесь a – параметр, характеризующий аэродинамическое воздействие, p – коэффициент, характеризующий инерционные параметры, κ – безразмерный коэффициент упругости пружины, установленной в шарнире C, χ – безразмерный коэффициент вязкого трения в шарнире C. Безразмерное управляющее воздействие u выберем в следующем виде:

$$
u = -b_1\omega + b_2 \operatorname{sgn} w \tag{4.2}
$$

В обозначениях системы (1.1) получаем: $f_1(\varphi_1,\omega_1) = \omega_1$, $f_2(\varphi_2,\omega_2) = \operatorname{sgn}(\omega_2)$, $g_1(\varphi_1,\omega_1) = b_1\omega_1$, $g_2(\varphi_2,\omega_2) = b_2 \operatorname{sgn}(\omega_2)$.

Требуется подобрать значения параметров b_i так, чтобы в системе (4.1) существовала близкая к периодической траектория, отвечающая автоколебаниям (авторотациям), амплитуда которых по φ примерно равна φ^* (частота которых по φ примерно равна ω^*), а по ϑ – примерно ϑ^*, и чтобы на этом режиме не происходила синхронизация между углами φ и ϑ.

Отметим, что в системе имеет место дефицит управляющих воздействий, сложности, связанные с этим, описаны, например, в [34].

4.1. Асинхронные автоколебания двойного маятника. Рассмотрим задачу формирования асинхронных автоколебаний. Система (4.1) обладает свойством центральной симметрии. Будем искать решения колебательного типа, которые обладают центральной симметрией. С учетом свойств симметрии часть слагаемых при построении вспомогательных частично усредненных систем (2.1), (2.2) зануляется:

$$
\begin{gathered}
\dot{\varphi} = \omega \\
\dot{\omega} = aP(\varphi) + \left[a(F_0(\varphi,\omega) - P(\varphi)) + 0.5aF_2(\varphi,\omega)\bar{G}_{22}^j - b_1^j\omega\right]
\end{gathered} \tag{4.3}
$$

$$
\begin{gathered}
\dot{\vartheta} = w \\
\dot{w} = -(a\bar{G}_{11}^j + \kappa)\vartheta + \left[-b_2^j \operatorname{sgn} w - \chi w\right]
\end{gathered} \tag{4.4}
$$

Остальные слагаемые не вошли в частично усредненные системы, поскольку в силу свойств центральной симметрии средние значения $\bar{G}_{ik}^j$ соответствующих функций нулевые на каждом шаге алгоритма.

Квадратными скобками в частично усредненных системах обозначены все слагаемые, кроме консервативной части (отметим, что в консервативные слагаемые не обязательно было из $F_0(\varphi,\omega)$ включать именно $P(\varphi)$, но это один из наиболее естественных возможных вариантов).

Проиллюстрируем работу предложенного алгоритма. Положим $a = 0.2$, $p = 0.005$ (небольшое значение параметра p существенно, с физическим смыслом оно согласу-

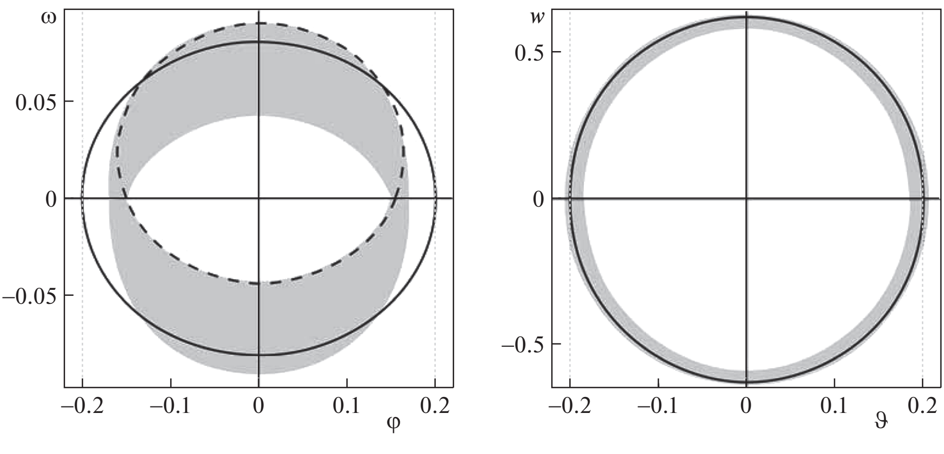

Рис. 2.

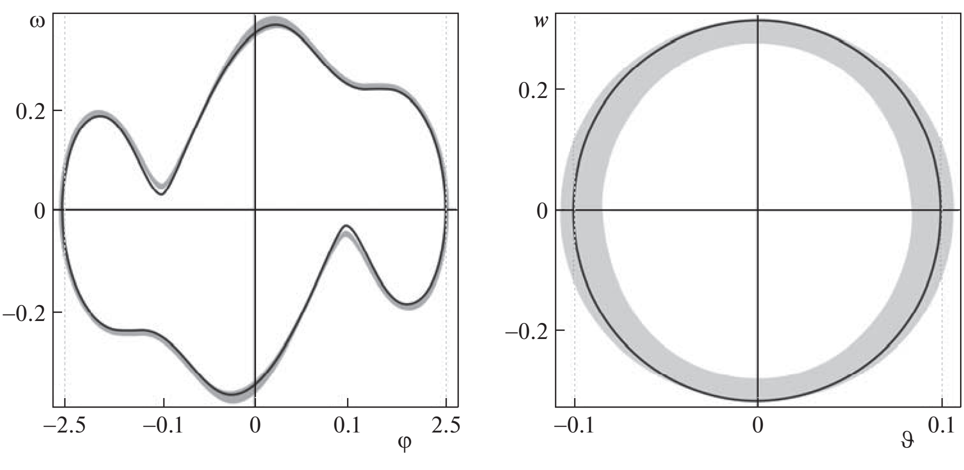

Рис. 3.

ется), $\kappa = 10$, $\chi = 0.04$. Рассмотрим следующие наборы "программных" значений амплитуд: 1) $\varphi^* = 0.2$, $\vartheta^* = 0.2$; 2) $\varphi^* = 2.5$, $\vartheta^* = 0.1$.

На рис. 2, 3 черным цветом изображены кривые $\omega^{\pm}(\varphi)$ и $w^{\pm}(\vartheta)$, построенные приближенно в ходе применения предложенного алгоритма к вспомогательным системам. Серым цветом показаны приближения для проекций аттрактора системы (4.1) на плоскости (φ, ω) и (ϑ, w), они построены путем прямого численного интегрирования системы (4.1) методом Рунге–Кутты с начальными условиями из окрестностей кривых $\omega^{\pm}(\varphi)$, $w^{\pm}(\vartheta)$ (проекция траектории закрашивает некоторую область). Система и найденные решения обладают центральной симметрией. Соответствующие значения коэффициентов в законе управления, полученные в результате применения алгоритма составили: 1) $b_1^* \approx 0.818$, $b_2^* \approx -0.097$; 2) $b_1^* \approx 0.216$, $b_2^* \approx -0.050$.

Пунктирной линией на плоскости (φ, ω) на рис. 2 показано сечение Пуанкаре для построенной траектории гиперплоскостью $\vartheta = 0$ (в направлении увеличения ϑ). Качественный вид построенного сечения Пуанкаре позволяет предположить, что найденный аттрактор представляет собой двумерный инвариантный тор: характерный вид сечений Пуанкаре, соответствующих различным типам аттракторов приведен, например, в [43].

В рассмотренных примерах при построении периодических траекторий $\omega^{\pm}(\varphi)$ и $w^{\pm}(\vartheta)$ систем (4.3), (4.4) для каждого шага j было выполнено по 5 итерационных приближений метода [16], и всего было по 3 шага ($j = 0,1,2$).

4.2. Асинхронный режим, при котором авторотация первого звена сопровождается автоколебаниями второго. При жестком закреплении пластины к державке под прямым углом ($\vartheta \equiv 0$) рассматриваемый маятник представляет собой элемент ротора Дарье. Для него характерна авторотация в потоке, и только при относительно большой дополнительной диссипации вместо ротации наблюдаются колебания [10]. Рассмотрим задачу формирования асинхронного режима системы (4.1), характеризующегося ротацией по φ и колебаниями по ϑ. Управление будем искать, как и раньше, в форме (4.2). Когда первое звено совершает авторотации, то уже нельзя воспользоваться свойствами центральной симметрии при вычислении средних значений от функций переменных φ и ω. В результате в обеих частично усредненных системах появятся дополнительные слагаемые по сравнению с предыдущим случаем.

$$
\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \omega \\
\dot{\omega} &= aP(\varphi) + p\kappa\bar{G}_{21}^{j} + p\chi\bar{G}_{20}^{j} + \bar{g}_{2}^{j} + \\
&+ \left[a(F_0(\varphi,\omega) - P(\varphi)) + aF_1(\varphi,\omega)\bar{G}_{21}^{j} + 0.5aF_2(\varphi,\omega)\bar{G}_{22}^{j} - b_1^{j}\omega\right],
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\vartheta} &= w \\
\dot{w} &= -a\bar{G}_{10}^{j} - (a\bar{G}_{11}^{j} + \kappa)\vartheta - 0.5a\bar{G}_{12}^{j}\vartheta^2 + \bar{g}_{1}^{j} + \left[-b_2^{j}\operatorname{sgn} w - \chi w\right]
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Параметры, отвечающие за перевязки, вошли и в неконсервативные части вспомогательных систем, и в консервативные. Значения $\bar{g}_i^{j}$ в данном случае зависят от b_i^{j}.

Соответствие между функциями, которые усредняем вдоль периодических траекторий систем (4.5), (4.6), и вспомогательными параметрами следующее: $F_0(\varphi,\omega) \to \bar{G}_{10}^{j}$, $F_1(\varphi,\omega) \to \bar{G}_{11}^{j}$, $F_2(\varphi,\omega) \to \bar{G}_{12}^{j}$, $b_1^{j}\omega \to \bar{g}_1^{j}$, $w \to \bar{G}_{20}^{j}$, $\vartheta \to \bar{G}_{21}^{j}$, $\vartheta^2 \to \bar{G}_{22}^{j}$, $b_2^{j}\operatorname{sgn} w \to \bar{g}_2^{j}$.

Используем алгоритм, описанный выше. На каждом шаге алгоритма будем применять к системе (4.5) модификацию [18] метода [16], предназначенную для формирования авторотаций в системе второго порядка. При этом для системы (4.6) используем модификацию [17] подхода [16], предназначенную для формирования автоколебаний в системе, не обладающей центральной симметрией.

При $\omega^* = 2$, $\vartheta^* = 0.2$ получаем $b_1^* \approx -0.057$, $b_2^* \approx 0.099$.

На рис. 4 черными кривыми представлены порождающие периодические траектории систем (4.5), (4.6), построенные предложенным итерационным методом; серым цветом представлены проекции на фазовые плоскости приближения для аттрактора системы (4.1), построенного методом Рунге—Кутты при $b_i = b_i^*$ (траектория закрашивает некоторую область); пунктирной кривой на рис. 4 изображено сечение Пуанкаре гиперплоскостью $\vartheta = 0$ (в направлении увеличения ϑ) для траектории, построенной методом Рунге—Кутты. Качественный вид сечения Пуанкаре, как и в предыдущем примере, косвенно свидетельствует о том, что найденный аттрактор — двумерный инвариантный тор.

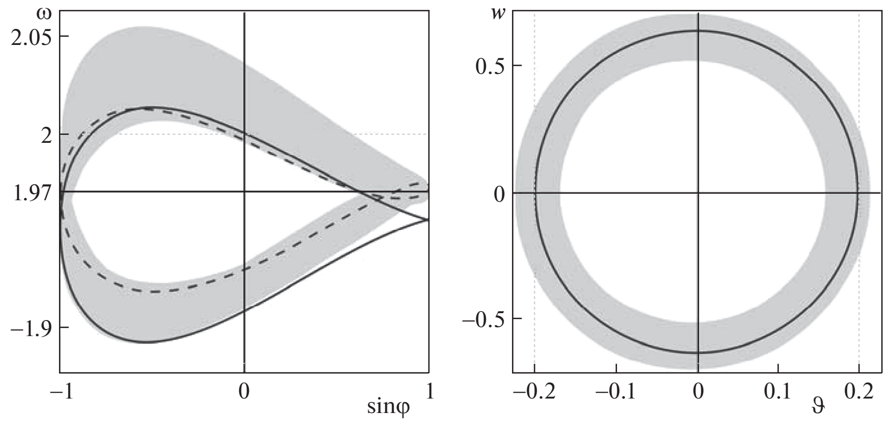

Рис. 4.

Значения вспомогательных параметров $\bar{G}_{10}^j$, $\bar{G}_{11}^j$, $\bar{G}_{12}^j$, $\bar{G}_{22}^j$, $\bar{g}_1^j$, b_1^j, b_2^j за три шага алгоритма ($j = 0, 1, 2$) практически перестали меняться. Значения $\bar{G}_{20}^j$, $\bar{G}_{21}^j$, $\bar{g}_2^j$ остаются практически нулевыми на всех итерациях, поскольку периодическая траектория системы (4.6) хотя и не является центрально симметричной, но мало отличается от таковой.

Модификация подхода, предназначенная для формирования асинхронных авторотаций в системе с двумя вращательными координатами, предложена и проиллюстрирована на примерах [26, 27], при этом присутствовали некоторые дополнительные ограничения на форму системы, которые сняты в настоящей работе. В частности, в модификациях [26, 27] перевязки между подсистемами не зависят от координат φ_i. В результате в [26] параметры аналогичные $\bar{G}_{ik}^j$, $\bar{g}_i^j$ не требуется искать итерационно, — они определяются заранее, до построения предельных циклов вспомогательных систем (иными словами, параметры, отвечающие за перевязки, не зависят от j). В силу дополнительных ограничений на вид системы в [27] параметры аналогичные $\bar{G}_{ik}^j$, $\bar{g}_i^j$ отсутствуют, а в качестве коэффициентов b_i^* выступают средние значения фазовых скоростей на траектории, отвечающей авторотации, что значительно упрощает алгоритм поиска такой траектории. В случае авторотаций по обеим координатам на каждом шаге применения алгоритма для вспомогательных систем второго порядка используется метод формирования 2π-периодических траекторий [18].

5. Обсуждение. Отметим некоторые особенности работы алгоритма, обнаруженные при рассмотрении приведенного выше механического примера, а затем опишем возможные направления дальнейшего развития общей задачи.

Относительно большая жесткость к пружины в шарнире C существенна для эффективности работы алгоритма. В предельном случае, если этот коэффициент много больше остальных коэффициентов системы (4.1), система близка к полностью интегрируемой. Для такого случая можно ожидать расширение области применимости алгоритма. Если же жесткость невелика, то значительно расширяется область параметров, при которых происходит синхронизация и система выходит на периодический режим (не описываемый предложенным алгоритмом). Можно предположить, что усиление неконсервативных воздействий по сравнению с консервативными выступает как один из факторов, способствующий синхронизации.

Отметим, что взаимное влияние элементов системы существенно сказывается не только на колебаниях переменных около средних значений (“размывании” аттрактора), но и на форме порождающих периодических решений вспомогательных систем. Чтобы убедиться в этом, можно сравнить решения, полученные в описанных выше примерах, с периодическими решениями в задаче о маятнике с пластиной, жестко закрепленной на первом звене ($\vartheta \equiv 0$). Последние описаны в [10] (но для случая системы с малым параметром).

Предложенный алгоритм позволяет быстро построить приближение для асинхронных колебаний, которое в ряде случаев оказывается достаточно грубым. Например, для рассмотренных значений $\varphi^* = 0.2$, $\vartheta^* = 0.2$ амплитуда по φ у сформированных автоколебаний существенно отличается от φ^*. Однако построенное грубое приближение можно использовать в качестве отправной точки, чтобы путем продолжения по параметрам определить значения коэффициентов управления, обеспечивающие более точное отслеживание программных значений амплитуд.

Среди возможных модификаций предложенного метода необходимо отметить, в первую очередь, алгоритм для поиска асинхронных автоколебаний системы в отсутствие управления. Для обобщения метода на такую задачу требуется искусственное добавление в систему слагаемых вида $b_i f_i(\varphi_i, \omega_i)$, выполнение алгоритма для большого набора пар $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$; поиск тех пар $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$, при которых $b_i^* = 0$; выполнение для таких пар численной проверки наличия в исходной системе близкой к периодической траектории. Такой подход позволяет, по сути, перебирать начальные условия для искомой траектории не в четырехмерном, а в двумерном пространстве, и только в окрестности “подозрительных” пар $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$ подбирать начальные условия в пространстве всех четырех переменных.

Помимо этого, отметим, что для управляемой системы целесообразно развитие модификации метода, которая предполагала бы специальный выбор функций $f_i(\varphi_i, \omega_i)$ для обеспечения свойства притяжения траектории, порожденной периодическими решениями вспомогательных систем, или для расширения диапазона значений $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$, при котором сходится итерационный процесс.

Дополнительные модификации предложенного алгоритма можно получить, применяя альтернативные методы для построения периодических решений вспомогательных систем (2.*i*), например методы [14, 15], итерационные методы, основанные на прямом численном интегрировании, или на разложении решения в гармонический ряд, а также методы, основанные на исследовании бифуркаций рождения циклов в окрестности положений равновесия и продолжении по параметру [44, 45]. Применение того или иного подхода в зависимости от специфики конкретной задачи может позволить расширить область сходимости, ускорить сходимость.

Заключение. В работе рассматривается автономная неконсервативная механическая система с двумя степенями свободы. Предполагается, что в системе присутствуют управляющие воздействия в форме обратной связи. Предложен метод формирования асинхронных автоколебаний посредством выбора коэффициентов усиления управляющих воздействий. Близкие подходы для формирования авторотаций предложены ранее [26, 27]. Эффективность работы алгоритма проиллюстрирована на примере задачи о формировании автоколебаний аэродинамического маятника. Обсуждается область применимости предложенного подхода и возможные направления его дальнейшего развития.

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Математические методы анализа сложных систем”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Andronov A.A.* Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues // Comptes Rendus de l’Academie des Sci. 1929. V. 189. P. 559–561.
2. *Понтрягин Л.С.* О динамических системах, близких к гамильтоновым // ЖЭТФ. 1934. Т. 4. № 9. С. 234–238.
3. *Морозов А.Д.* Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. М.; Ижевск: Изд-во РХД, 2005. 424 с.
4. *Королев С.А., Морозов А.Д.* О периодических возмущениях автоколебательных маятниковых уравнений // Нелин. динам. 2010. Т. 6. № 1. С. 79–89.
5. *Bonnin M.* Existence, number, and stability of limit cycles in weakly dissipative, strongly nonlinear oscillators // Nonlin. Dyn. 2010. V. 62. № 1–2. P. 321–332.
6. *Morozov A.D., Kostromina O.S.* On periodic perturbations of asymmetric Duffing–Van-der-Pol equation // Int. J. Bifurc. & Chaos. 2014. V. 24. № 5. P. 1450061.
7. *Gavrilov L., Iliev I.D.* Perturbations of quadratic Hamiltonian two-saddle cycles // Annales de l’Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis. 2015. V. 32. № 2. P. 307–324.
8. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы // АиТ. 2019. № 11. С. 83–92.
9. *Климина Л.А.* Ротационные режимы движения аэродинамического маятника с вертикальной осью вращения // Вестн. МГУ. Сер. 1: Математика. Механика. 2009. № 5. С. 71–74.
10. *Климина Л.А., Локшин Б.Я.* Об одном конструктивном методе поиска ротационных и автоколебательных режимов в автономных динамических системах // Нелин. динам. 2017. Т. 13. № 1. С. 25–40.
11. *Климина Л.А., Локшин Б.Я., Самсонов В.А.* Бифуркационная диаграмма автоколебательных режимов для системы с динамической симметрией // ПММ. 2017. Т. 81. № 6. С. 642–652.
12. *Морозов А.Д., Федоров Е.Л.* К исследованию уравнений с одной степенью свободы, близких к нелинейным интегрируемым // Диффер. уравн. 1983. Т. 19. № 9. С. 1511–1516.
13. *Хованская (Пушкарь) И.А.* Ослабленная инфинитезимальная 16-я проблема Гильберта // Тр. МИАН. 2006. Т. 254. С. 215–246.
14. *Самойленко А.М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I // Укр. мат. ж. 1965. Т. 17. № 4. С. 82–93.
15. *Ронто Н.И., Самойленко А.М., Трофимчук С.И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. IV // Укр. мат. ж. 1998. Т. 50. № 12. С. 1656–1672.
16. *Климина Л.А.* Метод поиска периодических траекторий центрально-симметричных динамических систем на плоскости // Диффер. уравн. 2019. Т. 55. № 2. С. 159–168.
17. *Климина Л.А., Селюцкий Ю.Д.* Метод построения периодических решений в управляемой динамической системе второго порядка // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 4. С. 3–15.
18. *Климина Л.А.* Метод построения периодических решений в управляемой динамической системе с цилиндрическим фазовым пространством // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 2. С. 5–16.
19. *Schilder F., Osinga H.M., Vogt W.* Continuation of quasi-periodic invariant tori // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2005. V. 4. № 3. P. 459–488.
20. *Kamiyama K., Komuro M., Endo T.* Bifurcation of quasi-periodic oscillations in mutually coupled hard-type oscillators: Demonstration of Unstable Quasi-Periodic Orbits // Int. J. Bifurc. & Chaos. 2012. V. 22. № 6. P. 1230022.
21. *Bush J., Gameiro M., Harker S., Kokubu H., Mischaikow K., Obayashi I., Pilarczyk P.* Combinatorial-topological framework for the analysis of global dynamics // Chaos: An Interd. J. Nonlin. Sci. 2012. V. 22. № 4. P. 047508.
22. *Kamiyama K., Komuro M., Endo T.* Algorithms for obtaining a saddle torus between two attractors // Int. J. Bifurc. & Chaos. 2013. V. 23. № 9. P. 1330032.

23. *Zhou B., Thouverez F., Lenoir D.* A variable-coefficient harmonic balance method for the prediction of quasi-periodic response in nonlinear systems // Mech. Syst. & Signal Proc. 2015. V. 64. P. 233–244.
24. *Chen G., Dunne J.F.* A Fast continuation scheme for accurate tracing of nonlinear oscillator frequency response functions // J. Sound & Vibr. 2016. V. 385. P. 284–299.
25. *Барабанов И.Н., Тхай В.Н.* Конструирование устойчивого цикла в слабо связанных идентичных системах // Автом. и телемех. 2017. № 2. С. 27–35.
26. *Климина Л.А.* Метод формирования авторотаций в управляемой механической системе с двумя степенями свободы // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 6. С. 3–14.
27. *Климина Л.А., Мастерова А.А., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.* Численно-аналитический метод поиска авторотаций механической системы с двумя вращательными степенями свободы // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 3. С. 128–142.
28. *Campbell S.A., Ncube I., Wu J.* Multistability and stable asynchronous periodic oscillations in a multiple-delayed neural system // Physica D: Nonlin. Phenom. 2006. V. 214. № 2. P. 101–119.
29. *Космодамианский А.С., Воробьев В.И., Пугачев А.А.* Моделирование электропривода с асинхронным двигателем в режиме минимума мощности потерь // Электротехника. 2012. № 12. С. 26–31.
30. *Гринь А.А., Рудевич С.В.* Признак Дюлака–Черкаса для установления точного числа предельных циклов автономных систем на цилиндре // Диффер. уравн. 2019. Т. 55. № 3. С. 328–336.
31. *Гринь А.А.* Трансверсальные кривые для установления точного числа предельных циклов // Диффер. уравн. 2020. Т. 56. № 4. С. 427–437.
32. *Georgiev Z.D., Uzunov I.M., Todorov T.G.* Analysis and synthesis of oscillator systems described by a perturbed double-well Duffing equation // Nonlin. Dyn. 2018. V. 94. № 1. P. 57–85.
33. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967. 488 с.
34. *Формальский А.М.* Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2012. 232 с.
35. *Климина Л.А., Формальский А.М.* Трехзвенный механизм как модель человека на качелях // Изв. РАН. ТиСУ. № 5. С. 89–105.
36. *Aleksandrov A.Y., Tikhonov A.A.* Averaging technique in the problem of Lorentz attitude stabilization of an Earth-pointing satellite // Aerosp. Sci. & Technol. 2020. V. 104. P. 105963.
37. *Kalenova V.I., Morozov V.M.* Novel approach to attitude stabilization of satellite using geomagnetic Lorentz forces // Aerosp. Sci. & Technol. 2020. V. 106. P. 106105.
38. *Ashwin P., Burylko O.* Weak chimeras in minimal networks of coupled phase oscillators // Chaos: An Interd. J. Nonlin. Sci. 2015. V. 25. № 1. P. 013106.
39. *Selyutskiy Y.D., Holub A.P., Dosaev M.Z.* Elastically mounted double aerodynamic pendulum // Int. J. Struct. Stab. & Dyn. 2019. V. 19. № 5. P. 1941007-1–1941007-13. https://doi.org/10.1142/S0219455419410074
40. *Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А.* Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во МГУ, 1986. 86 с.
41. *Локшин Б.Я., Самсонов В.А.* Авторотационные и автоколебательные режимы движения аэродинамического маятника // ПММ. 2013. Т. 77. № 4. С. 501–513.
42. *Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.* Феноменологическая модель взаимодействия пластины с потоком среды // Фундам. и прикл. матем. 2005. Т. 11. № 7. С. 43–62.
43. *Borkowski L., Perlikowski P., Kapitaniak T., Stefanski A.* Experimental observation of three-frequency quasiperiodic solution in a ring of unidirectionally coupled oscillators // Phys. Rev. E. 2015. V. 91. № 6. P. 062906.
44. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 252 с.
45. *Брюно А.Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998. 288 с.

Method for Constructing Asynchronous Self-sustained Oscillations of a Mechanical System with Two Degrees of Freedom

L. A. Klimina[a,#]

[a] *Institute of Mechanics of MSU, Moscow, Russia*
[#] *e-mail: klimina@imec.msu.ru*

An autonomous non-conservative mechanical system with two degrees of freedom is studied. The system is subjected to a feedback control with two control impact gain factors. It is required to select values of these factors in such a way as to ensure existence of asynchronous self-sustained oscillations with prescribed properties. An iterative method is proposed for search for the corresponding values of control impact gain factors. The approach is based on construction of auxiliary second–order systems and formation of limit cycles in these systems. The algorithm that is used for this purpose represents a modification of the Andronov–Pontryagin method, but doesn't require the presence of a small parameter in the system. The efficiency of this approach is illustrated for the problem of construction of asynchronous self-sustained oscillations/rotations in a model of an aerodynamic pendulum. Conditions of applicability of the algorithm and possible modifications are discussed.

Keywords: asynchronous self-sustained oscillations, autonomous nonconservative system, feedback control, iterations, averaging, the Andronov–Pontryagin method, aerodynamic pendulum

REFERENCES

1. *Andronov A.A.* Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues // Comptes Rendus de l'Academie des Sci., 1929, vol. 189, pp. 559–561.
2. *Pontryagin L.S.* On dynamical systems close to Hamiltonian systems // Zh. Eksp. Teor. Fiz., 1934, vol. 4, no. 9, pp. 883–885.
3. *Morozov A.D.* Resonances, cycles and chaos in quasi-conservative systems. Moscow; Izhevsk: R&C Dyn., 2005. 424 p.
4. *Korolev S.A., Morozov A.D.* On periodic perturbations of self-oscillating pendulum equations // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2010, vol. 6, no. 1, pp. 79–89.
5. *Bonnin M.* Existence, number, and stability of limit cycles in weakly dissipative, strongly nonlinear oscillators // Nonlin. Dyn., 2010, vol. 62, no. 1–2, pp. 321–332.
6. *Morozov A.D., Kostromina O.S.* On periodic perturbations of asymmetric Duffing–Van-der-Pol equation // Int. J. Bifurc. & Chaos, 2014, vol. 24, no. 5, pp. 1450061.
7. *Gavrilov L., Iliev I.D.* Perturbations of quadratic Hamiltonian two-saddle cycles // Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis, 2015, vol. 32, no. 2, pp. 307–324.
8. *Tkhai V.N.* Stabilizing the oscillations of a controlled mechanical system // Autom. & Remote Control, 2019, vol. 80, no. 11, pp. 1996–2004.
9. *Klimina L.A.* Rotational modes of motion for an aerodynamic pendulum with a vertical rotation axis // Moscow Univ. Mech. Bull., 2009, vol. 64, no. 5, pp. 126–129.
10. *Klimina L.A., Lokshin B.Ya.* On a constructive method of search for rotary and oscillatory modes in autonomous dynamical systems // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2017, vol. 13, no. 1, pp. 25–40.
11. *Klimina L.A., Lokshin B.Y., Samsonov V.A.* Bifurcation diagram of the self-sustained oscillation modes for a system with dynamic symmetry // JAMM, 2017, vol. 81, no. 6, pp. 442–449.
12. *Morozov A.D., Fedorov E.L.* On the investigation of equations with one degree of freedom, close to nonlinear integrable ones // Differents. Uravn., 1983, vol. 19, no. 9, pp. 1511–1516.
13. *Khovanskaya I.A.* Weak infinitesimal Hilbert's 16th problem // Proc. Steklov Inst. Math., 2006, vol. 254, no. 1, pp. 201–230.
14. *Samoilenko A.M.* Numerical analytical method of investigating periodic systems of ordinary differential equations. I // Ukr. Mat. J., 1965, vol. 17, no. 4, pp. 82–93.
15. *Rontó M.I., Samoilenko A.M., Trofimchuk S.I.* The theory of the numerical-analytic method: achievements and new trends of development. IV // Ukr. Math. J., 1998, vol. 50, no. 12, pp. 1888–1907.

16. *Klimina L.A.* Method for finding periodic trajectories of centrally symmetric dynamical systems on the plane // Different. Equat., 2019, vol. 55, no. 2, pp. 159–168.
17. *Klimina L.A., Selyutskiy Y.D.* Method to construct periodic solutions of controlled second-order dynamical systems // J. Comput. & Syst. Sci. Intern., 2019, vol. 58, no. 4, pp. 503–514.
18. *Klimina L.A.* Method for constructing periodic solutions of a controlled dynamic system with a cylindrical phase space // J. Comput. & Syst. Sci. Intern., 2020, vol. 59, no. 2, pp. 139–150.
19. *Schilder F., Osinga H.M., Vogt W.* Continuation of quasi-periodic invariant tori // SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 2005, vol. 4, no. 3, pp. 459–488.
20. *Kamiyama K., Komuro M., Endo T.* Bifurcation of quasi-periodic oscillations in mutually coupled hard-type oscillators: Demonstration of Unstable Quasi-Periodic Orbits // Int. J. Bifurc. & Chaos, 2012, vol. 22, no. 6, pp. 1230022.
21. *Bush J., Gameiro M., Harker S., Kokubu H., Mischaikow K., Obayashi I., Pilarczyk P.* Combinatorial-topological framework for the analysis of global dynamics // Chaos: An Interd. J. Nonlin. Sci., 2012, vol. 22, no. 4, pp. 047508.
22. *Kamiyama K., Komuro M., Endo T.* Algorithms for obtaining a saddle torus between two attractors // Int. J. Bifurc. & Chaos, 2013, vol. 23, no. 9, pp. 1330032.
23. *Zhou B., Thouverez F., Lenoir D.* A variable-coefficient harmonic balance method for the prediction of quasi-periodic response in nonlinear systems // Mech. Syst. & Signal Proc., 2015, vol. 64, pp. 233–244.
24. *Chen G., Dunne J.F.* A Fast continuation scheme for accurate tracing of nonlinear oscillator frequency response functions // J. Sound & Vibr., 2016, vol. 385, pp. 284–299.
25. *Barabanov I.N., Tkhai V.N.* Designing a stable cycle in weakly coupled identical systems // Autom. & Remote Control, 2017, vol. 78, no. 2, pp. 217–223.
26. *Klimina L.A.* Method for forming autorotations in controllable mechanical system with two degrees of freedom // J. Comput. & Syst. Sci. Intern., 2020, vol. 59, no. 6, pp. 817–827.
27. *Klimina L.A., Masterova A.A., Samsonov V.A., Selyutskiy Y.D.* Numerical and analytical approach for searching for self-sustained rotations of a mechanical system with two rotational degrees of freedom // Mech. of Solids, 2021. (in press)
28. *Campbell S.A., Ncube I., Wu J.* Multistability and stable asynchronous periodic oscillations in a multiple-delayed neural system // Physica D: Nonlin. Phenom., 2006, vol. 214, no. 2, pp. 101–119.
29. *Kosmodamianskii A.S., Vorobiev V.I., Pugachev A.A.* The temperature effect on the performance of a traction asynchronous motor // Rus. Electr. Engng., 2011, vol. 82, no. 8, pp. 445–448.
30. *Grin' A.A., Rudevich S.V.* Dulac-Cherkas test for determining the exact number of limit cycles of autonomous systems on the cylinder // Different. Equat., 2019, vol. 55, no. 3, pp. 319–327.
31. *Grin' A.A.* Transversal curves for finding the exact number of limit cycles // Different. Equat., 2020, vol. 56, no. 4, pp. 415–425.
32. *Georgiev Z.D., Uzunov I.M., Todorov T.G.* Analysis and synthesis of oscillator systems described by a perturbed double-well Duffing equation // Nonlin. Dyn., 2018, vol. 94, no. 1, pp. 57–85.
33. *Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Maier A.G.* The theory of bifurcations of dynamical systems on the plane. Moscow: Nauka, 1967. 488 p. (in Russian)
34. *Formalskii A.M.* Stabilization and Motion Control of Unstable Objects. Berlin; Boston: Walter de Gruyter, 2015. 239 p.
35. *Klimina L.A., Formalskii A.M.* Three-Link Mechanism as a Model of a Person on a Swing // J. Comput. & Syst. Sci. Intern., 2020, vol. 59, no. 5, pp. 728–744.
36. *Aleksandrov A.Y., Tikhonov A.A.* Averaging technique in the problem of Lorentz attitude stabilization of an Earth-pointing satellite // Aerosp. Sci. & Technol., 2020, vol. 104, pp. 105963.
37. *Kalenova V.I., Morozov V.M.* Novel approach to attitude stabilization of satellite using geomagnetic Lorentz forces // Aerosp. Sci. & Technol., 2020, vol. 106, pp. 106105.
38. *Ashwin P., Burylko O.* Weak chimeras in minimal networks of coupled phase oscillators // Chaos: An Interd. J. Nonlin. Sci., 2015, vol. 25, no. 1, pp. 013106.
39. *Selyutskiy Y.D., Holub A.P., Dosaev M.Z.* Elastically mounted double aerodynamic pendulum // Int. J. Struct. Stab. & Dyn., 2019, vol. 19, no. 5, pp. 1941007-1–1941007-13.
doi: 10.1142/S0219455419410074.

40. *Lokshin B.Y., Privalov V.A., Samsonov V.A.* Introduction to the Problem of a Body Moving in a Resistant Medium. Moscow: MSU Publ., 1986. 86 p. (in Russian)
41. *Lokshin B.Y., Samsonov V.A.* The self-induced rotational and oscillatory motions of an aerodynamic pendulum // JAMM, 2013, vol. 77, no. 4, pp. 360–368.
42. *Samsonov V.A., Seliutski Y.D.* Phenomenological model of interaction of a plate with a flow // J. Math. Sci., 2007, vol. 146, no. 3, pp. 5826–5839.
43. *Borkowski L., Perlikowski P., Kapitaniak T., Stefanski A.* Experimental observation of three-frequency quasiperiodic solution in a ring of unidirectionally coupled oscillators // Phys. Rev. E., 2015, vol. 91, no. 6, pp. 062906.
44. *Bruno A.D.* Local Method of Nonlinear Analysis of Differential Equations. Moscow: Nauka, 1979. 252 p.
45. *Bruno A.D.* Power Geometry in Algebraic and Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2000. 385 p.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 2, с. 172–192

УДК 539.374

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СПЛОШНОГО ЦИЛИНДРА ИЗ ЛИНЕЙНО-УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА

А. Н. Прокудин[a,*], А. А. Буренин[a,]**

[a] *Институт машиноведения и металлургии Хабаровского федерального исследовательского центра ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия*

**e-mail: sunbeam_85@mail.ru*

***e-mail: mail@imim.ru*

Поступила в редакцию 28.12.2020 г.
После доработки 28.01.2021 г.
Принята к публикации 02.02.2021 г.

Исследуется вращающийся сплошной цилиндр из упрочняющегося упругопластического материала. Постановка задачи основана на уравнениях Прандтля–Рейса и предположении об обобщенном плоском деформированном состоянии в цилиндре. Для определения пластических деформаций используется условие максимальных приведенных напряжений, ассоциированный с ним закон пластического течения, а также закон линейного изотропного упрочнения. Анализ ограничен активным нагружением цилиндра. Показано, что в общем случае в цилиндре возможно появление четырех пластических областей, соответствующих разным ребрам и граням поверхности текучести. Для каждой возможной области найдено точное аналитическое решение. Установлены зависимости критической скорости вращения, при которой весь цилиндр переходит в состояние пластичности, от параметра упрочнения. Приведено сравнение полученных результатов с решениями для условий пластичности Треска и Мизеса.

Ключевые слова: упругопластичность, малые деформации, вращающийся цилиндр, линейное изотропное упрочнение, условие максимальных приведенных напряжений

DOI: 10.31857/S0032823521020077

Вращающиеся цилиндры являются важным составным элементом многих механизмов и машин. В ходе эксплуатации цилиндры подвергаются действию значительных центробежных сил, что может приводить к появлению пластических деформаций. Поэтому для более точного прогнозирования прочности вращающихся деталей механизмов необходимо применять упругопластический анализ. Для решения данного класса задач обычно используется предположение о плоском либо обобщенном плоском деформированном состоянии в цилиндре, теория малых деформаций, условие пластичности Треска или Мизеса и ассоциированный с ним закон течения. В работах [1–8] представлено решение упругопластической задачи на основе условия Треска для вращающегося сплошного и полого цилиндра с различными типами условий на торцах. Установлены закономерности появления и развития пластических областей, а также критические скорости вращения, соответствующие полному переходу цилиндра в пластическое состояние. Схожая постановка задачи, отличающаяся тем, что материал цилиндра принят неоднородным, использовалась [9–11] для анализа упругопластического деформирования вращающихся полых цилиндров из функциональноградиентных материалов. Неоднородность свойств материала описывалась с помощью степенной зависимости от радиальной координаты, при этом данная зависимость использовалась [9, 10] только для модуля Юнга, а в [11] – для модуля Юнга, плотности и предела текучести. Показано [9–11], что неоднородность материала оказывает значительное влияние на напряженно-деформированное состояние в цилиндре и критические скорости вращения.

В работах [1–11] использовалась модель идеального упругопластического материала. Для описания пластического деформирования материалов в большей степени подходят модели упрочняющегося тела. С использованием условия Треска и закона линейного изотропного упрочнения получено [12] решение упругопластической задачи для вращающегося сплошного цилиндра. Автором рассматривались цилиндры, как с закрепленными, так и свободными торцами. Показано, что в цилиндрах из идеального и упрочняющегося материала возникают пластические области, соответствующие одинаковым граням и ребрам призмы Треска, однако в упрочняющемся цилиндре пластическое течение развивается медленней, а величина пластических деформаций – ниже. Исследовались [13] вращающиеся цилиндры из нелинейно-упрочняющегося материала. Рассматривались сплошные и полые цилиндры с различными типами условий на торцах. Для постановки задачи использовалась деформационная теория пластичности и условие пластичности Мизеса. Нелинейное изотропное упрочнение материала описывалось с помощью закона Свифта, частным случаям которого является линейный закон упрочнения. Решение задачи проводилось с помощью разработанного численного алгоритма на основе метода стрельбы. Автор показал, что использование условий Треска и Мизеса вместе с линейным законом упрочнения приводит к близкому распределению перемещений и напряжений в цилиндре, однако условие Мизеса предсказывает значительно меньшую величину пластических деформаций в цилиндре. Кроме того, для одинаковой скорости вращения пластическое течение при использовании условия Мизеса распространяется на меньшую область по сравнению с условием Треска. Также автором установлено, что параметры материала оказывают существенное влияние на напряженно-деформированное состояние вращающегося цилиндра из нелинейно-упрочняющегося материала.

На практике вращающиеся элементы механизмов, такие как роторы, находятся под действием не только центробежных сил, но и температурного воздействия. Рассмотрено [14, 15] упругопластическое деформирование вращающегося полого цилиндра при наличии стационарного температурного градиента между внутренней и внешней поверхностью цилиндра. Пластическая составляющая деформации определялась с помощью условия Треска, ассоциированного с ним закона течения и закона линейного упрочнения. Для расчета температурных деформаций использовалось уравнение теплопроводности и закон Дюамеля–Неймана. При этом предполагалось, что механические и теплофизические параметры материала не зависят от температуры. Установлено [14, 15], что неоднородное температурное поле оказывает существенное влияние на развитие пластического течения во вращающемся полом цилиндре. В частности, отмечено [14], что присутствие положительного градиента температуры приводит к уменьшению скорости начала пластического течения и незначительному увеличению скорости, при которой весь цилиндр переходит в пластическое состояние. С другой стороны, как показано [15], цилиндр, предварительно нагруженный отрицательным температурным градиентом практически до предела текучести, способен выдерживать значительные скорости вращения до возникновения пластического течения.

Использование более сложных моделей материалов затрудняет получение аналитического решения упругопластических задач, что приводит к необходимости применения численных методов. Следует отметить публикации [16–18], посвященные исследованию вращающихся полых цилиндров из нелинейно упрочняющегося материала в рамках жесткопластического анализа. Постановка задачи основана на теоремах предельного пластического состояния. Использовалось [16] условие пластичности Мизеса и экспоненциальный закон упрочнения Восе, который асимптотически (с увеличением эквивалентной пластической деформации) переходит в модель идеального пластического тела. Авторы [17, 18] рассматривали усложненные модели материала, включающие в себя учет эффектов вязкости материала [17] и его пластической анизотропии [18]. Решение поставленных в [16—18] задач проводилось с помощью метода конечных элементов. Кроме того, для ряда значений параметров материала найдены замкнутые аналитические решения в элементарных функциях.

Проведенный литературный обзор показал, что для расчета упругопластических деформаций вращающихся цилиндров наиболее часто используются условия текучести Треска и Мизеса. Условие максимальных приведенных напряжений (условие Ишлинского—Ивлева) [19] также относится к классическим условиям пластичности. Оно было сформулировано А.Ю. Ишлинским на основе гипотезы прочности формоизменения [20]. Аналогичное условие использовалось Шмидтом [21], Хиллом [22] и Ивлевым [23]. Это условие, как и условие Треска, является кусочно-линейным, но в его запись входят все три главных напряжения. Ранее с его помощью было получено распределение напряжений во вращающемся сплошном диске [24] и цилиндре [25] из идеального упругопластического материала. Из недавних работ также можно отметить [26—30].

Целью настоящей публикации является получение точного аналитического решения задачи об упругопластическом деформировании вращающегося сплошного цилиндра. Рассматривается цилиндр, как с закрепленными, так и свободными торцами. Для постановки задачи используется теория малых деформаций, условие максимальных приведенных напряжений, линейный закон изотропного упрочнения и ассоциированный закон пластического течения. Проведенное исследование ограничено случаем активного нагружения цилиндра. Полученные результаты дополняют работы Эразлана [12, 13], в которых использовались условия Треска и Мизеса вместе с линейным законом изотропного упрочнения, а также работу [25] в которой принималось условие максимальных приведенных напряжений и модель идеального упругопластического материала.

1. Постановка задачи. Рассматривается сплошной цилиндр, вращающийся вокруг собственной оси. Предполагается, что цилиндр находится в состоянии обобщенной плоской деформации (суммарная осевая деформация не зависит от β) и сохраняет осевую симметрию в процессе деформирования. Введем цилиндрическую систему координат (r,θ,z) и безразмерные величины:

$$\begin{gathered}\beta=\frac{r}{b},\quad \overline{u}=\frac{E}{\sigma_0}\frac{u_r}{b},\quad \overline{\varepsilon}_{ij}=\frac{E}{\sigma_0}\varepsilon_{ij},\quad \overline{\varepsilon}^e_{ij}=\frac{E}{\sigma_0}\varepsilon^e_{ij},\quad \overline{\varepsilon}^p_{ij}=\frac{E}{\sigma_0}\varepsilon^p_{ij}\\ \overline{\sigma}_{ij}=\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0},\quad \overline{\sigma}_y=\frac{\sigma_y}{\sigma_0},\quad H=\eta\frac{\sigma_0}{E},\quad \Omega=\frac{\rho b^2\omega^2}{\sigma_0},\end{gathered}\tag{1.1}$$

где b — радиус цилиндра, E — модуль Юнга, σ_0, σ_y — начальный/актуальный предел текучести при одноосном растяжении-сжатии, u_r — радиальное перемещение, ε_{ij} — полные деформации, ε^e_{ij} — упругие деформации, ε^p_{ij} — пластические деформации, σ_{ij} — напряжения, η — параметр, характеризующий упрочнение материала, ρ — плотность, ω — скорость вращения цилиндра. Параметр нагружения Ω, зависящий от квадрата угловой скорости, монотонно возрастает от 0 до некоторого максимального значения $\Omega_{\max}$. Угловым ускорением пренебрегаем. Далее в статье все уравнения записаны в безразмерных переменных (1.1), а знак подчеркивания для краткости не используется.

Полные деформации ε_{ij} являются малыми и складываются из упругих ε_{ij}^e и пластических ε_{ij}^p составляющих:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial \beta} = \varepsilon_{rr}^e + \varepsilon_{rr}^p, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{\beta} = \varepsilon_{\theta\theta}^e + \varepsilon_{\theta\theta}^p, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^e + \varepsilon_{zz}^p \tag{1.2}$$

Заметим, что случай $\varepsilon_{zz} = \text{const} \neq 0$ соответствует цилиндру со свободными торцами, а $\varepsilon_{zz} = 0$ — цилиндру с закрепленными торцами (плоское деформированное состояние).

Напряжения связаны с упругими деформациями через закон Гука:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left((1-\nu)\varepsilon_{rr}^e + \nu\varepsilon_{\theta\theta}^e + \nu\varepsilon_{zz}^e\right) \\
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\nu\varepsilon_{rr}^e + (1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta}^e + \nu\varepsilon_{zz}^e\right) \\
\sigma_{zz} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\nu\varepsilon_{rr}^e + \nu\varepsilon_{\theta\theta}^e + (1-\nu)\varepsilon_{zz}^e\right)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона.

Также в анализе используются соотношения, обратные к (1.3):

$$\varepsilon_{rr}^e = \sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{zz}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^e = \sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr} - \nu\sigma_{zz}, \quad \varepsilon_{zz}^e = \sigma_{zz} - \nu\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta} \tag{1.4}$$

Единственное нетривиальное уравнение равновесия в цилиндре имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{\beta} = -\Omega\beta \tag{1.5}$$

Для цилиндра со свободными концами необходимо использовать дополнительное ограничение на суммарную осевую силу:

$$2\pi\int_0^1 \beta\sigma_{zz}d\beta = 0 \tag{1.6}$$

Граничные условия задачи:

$$u(0) = 0, \quad \sigma_{rr}(1) = 0 \tag{1.7}$$

Для расчета пластических деформаций используется условие максимальных приведенных напряжений:

$$\max\left(|\sigma_1 - \sigma|, |\sigma_2 - \sigma|, |\sigma_3 - \sigma|\right) = \frac{2}{3}\sigma_y,$$

где σ_1, σ_2, σ_3 — главные напряжения, упорядоченные по возрастанию: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, σ — гидростатическое напряжение. Приведенное условие далее используется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_y, \quad \text{если} \quad \sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2 \\
&\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 = \sigma_y, \quad \text{если} \quad \sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3 совпадают с координатными, поскольку касательные напряжения в цилиндре отсутствуют. Поверхность в пространстве главных напряжений, соответствующую условию (1.8) будем называть призмой Ивлева.

Для сравнения используются результаты [12, 13], полученные с помощью условий Треска и Мизеса, которые имеют вид:

$$\max\left(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|\right) = \sigma_y \tag{1.9}$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_y^2 \tag{1.10}$$

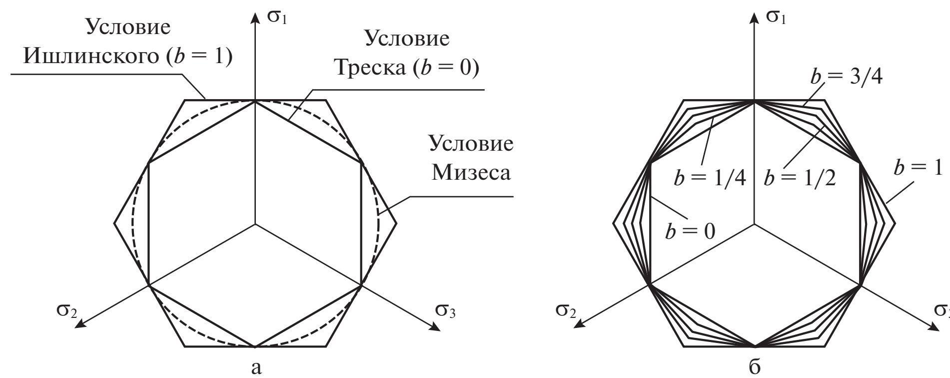

Рис. 1. Сечения поверхностей текучести девиаторной плоскостью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$: а – условия Треска, Мизеса и Ишлинского–Ивлева; б – общее кусочно-линейное условие.

На рис. 1а изображены сечения поверхностей текучести (1.8)–(1.10) девиаторной плоскостью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$. Условию Треска соответствует внутренний шестиугольник, а условию максимальных приведенных напряжений – внешний. Условие Мизеса имеет вид окружности, описанной вокруг внутреннего шестиугольника и вписанной во внешний.

Условия (1.8) и (1.9) являются частными случаями общего кусочно-линейного условия пластичности [31]:

$$\begin{aligned} &\sigma_1 - \frac{1}{1+b}(b\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_y, \quad \text{если} \quad \sigma_2 \le (\sigma_1 + \sigma_3)/2 \\ &\frac{1}{1+b}(\sigma_1 + b\sigma_2) - \sigma_3 = \sigma_y, \quad \text{если} \quad \sigma_2 \ge (\sigma_1 + \sigma_3)/2 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Условие (1.11) сводится к условию Треска (1.9), если принять $b = 0$ и к условию максимальных приведенных напряжений (1.8), если $b = 1$. Кроме того, условие, полученное из (1.11) при $b = \left(\sqrt{3} - 1\right)/2$, называется условием Соколовского [32, 33] и представляет собой кусочно-линейную аппроксимацию условия Мизеса (1.10). Параметр b зависит от отношения предела текучести при чистом сдвиге τ_y к пределу текучести при одноосном растяжении-сжатии σ_y:

$$b = (2\alpha - 1)/(1 - \alpha), \quad \alpha = \tau_y/\sigma_y,$$

и его можно рассматривать как характеристику материала. Из предыдущего выражения можно найти отношение $\alpha = (1 + b)/(2 + b)$.

Отсюда при $b = 1$ найдем для условия (1.8) $\alpha = 2/3$. Для условия Треска, как известно, $\alpha = 1/2$. Результаты экспериментов показывают, что для ряда материалов (алюминий, титан, никелевые сплавы, нержавеющая сталь) величина α лежит в диапазоне от 0.58 до 0.7 [31, 34]. Как следствие, для перечисленных материалов в большей степени подходит условие максимальных приведенных напряжений (1.8). Общее кусочно-линейное условие текучести для ряда значений параметра b изображено на рис. 1б.

Предел текучести является линейной функцией эквивалентной пластической деформации $\varepsilon_{\text{eq}}^p$:

$$\sigma_y = 1 + H\varepsilon_{\text{eq}}^p \tag{1.12}$$

Ассоциированный закон течения имеет вид:

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda \frac{df}{d\sigma_{ij}}, \tag{1.13}$$

здесь $d\varepsilon_{ij}^{p}$ – приращения пластических деформаций, $d\lambda$ – положительный множитель, f – пластический потенциал, соответствующий грани поверхности текучести.

Если напряженное состояние в пластической области соответствует ребру поверхности текучести, то вместо закона (1.13) необходимо использовать его обобщение, предложенное Койтером [35]:

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda_1 \frac{df_1}{d\sigma_{ij}} + d\lambda_2 \frac{df_2}{d\sigma_{ij}}, \tag{1.14}$$

где $d\lambda_1$ и $d\lambda_2$ – положительные множители, f_1 и f_2 – функции пластичности, соответствующие граням призмы текучести, на пересечении которых лежит рассматриваемое ребро.

Приращение эквивалентной пластической деформации $d\varepsilon_{\text{eq}}^{p}$ определяется из соотношения:

$$\sigma_y d\varepsilon_{\text{eq}}^{p} = \sigma_{rr} d\varepsilon_{rr}^{p} + \sigma_{\theta\theta} d\varepsilon_{\theta\theta}^{p} + \sigma_{zz} d\varepsilon_{zz}^{p} \tag{1.15}$$

2. Упругое решение. Рассмотрим область чисто упругого деформирования, в которой $\varepsilon_{rr}^{p} = \varepsilon_{\theta\theta}^{p} = \varepsilon_{zz}^{p} = 0$. Решая уравнение равновесия (1.5) с учетом (1.2) и (1.3) найдем распределение перемещения:

$$u = \frac{D_1}{\beta} + D_2\beta - \frac{1}{8}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)}\Omega\beta^3, \tag{2.1}$$

где D_1, D_2 – константы интегрирования. Заметим, что полученное решение не зависит от полной осевой деформации ε_{zz}.

Далее с помощью кинематических соотношений (1.2) и закона Гука (1.3) найдем распределение напряжений в цилиндре:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= -\frac{D_1}{(1+\nu)}\frac{1}{\beta^2} + \frac{(D_2 + \nu\varepsilon_{zz})}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{1}{8}\frac{(3-2\nu)}{(1-\nu)}\Omega\beta^2 \\
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{D_1}{(1+\nu)}\frac{1}{\beta^2} + \frac{(D_2 + \nu\varepsilon_{zz})}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{1}{8}\frac{(1+2\nu)}{(1-\nu)}\Omega\beta^2 \\
\sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) + \varepsilon_{zz}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

До наступления пластического течения решение (2.1), (2.2) остается справедливым во всем цилиндре, поэтому осевая деформация ε_{zz} и константы интегрирования D_1, D_2 определяются из условий (1.6) и (1.7)

$$D_1 = 0, \quad D_2 = \frac{1}{8}\frac{(3-5\nu)}{(1-\nu)}\Omega, \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{2}\Omega \tag{2.3}$$

С помощью соотношений (2.3) упругое решение (2.1), (2.2) в цилиндре со свободными концами запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&u = \frac{1}{8}\frac{(3-5\nu)}{(1-\nu)}\Omega\beta - \frac{1}{8}\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)}\Omega\beta^3, \quad \sigma_{rr} = \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\left(1-\beta^2\right) \\
&\sigma_{\theta\theta} = \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\left(1 - \frac{1+2\nu}{3-2\nu}\beta^2\right), \quad \sigma_{zz} = \frac{\nu}{4(1-\nu)}\Omega\left(1-2\beta^2\right)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

В цилиндре с закрепленными концами $\varepsilon_{zz} = 0$, а константы интегрирования D_1, D_2 определяются из граничных условий (1.7)

$$D_1 = 0, \quad D_2 = \frac{1}{8}\frac{(1+\nu)(3-2\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)}\Omega \tag{2.5}$$

Упругое решение имеет такой же вид, как в цилиндре со свободными концами (2.4) за исключением осевого напряжения:

$$\begin{gathered} u = \frac{1}{8}\frac{(3-5\nu)}{(1-\nu)}\Omega\beta - \frac{1}{8}\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)}\Omega\beta^3, \quad \sigma_{rr} = \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\left(1-\beta^2\right) \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\left(1-\frac{1+2\nu}{3-2\nu}\beta^2\right), \quad \sigma_{zz} = \frac{\nu}{2(1-\nu)}\Omega\left(\frac{(3-2\nu)}{2}-\beta^2\right) \end{gathered} \tag{2.6}$$

Критические значения параметра нагружения Ω, соответствующие началу пластического течения и полному переходу цилиндра в пластическое состояние, будем обозначать Ω_p и Ω_{fp} соответственно. В интервале $\Omega_p < \Omega < \Omega_{fp}$ в цилиндре сохраняется упругая область, в которой найденное решение (2.1), (2.2) остается справедливым, однако неизвестные величины D_1, D_2 и ε_{zz} необходимо определять повторно, используя помимо условий (1.6) и (1.7) также условия непрерывности на границах между областями. Значения Ω_p и Ω_{fp} зависят от коэффициента Пуассона ν и от типа условий на торцах цилиндра.

Нетрудно показать, что пластическое течение во вращающемся сплошном цилиндре при условии текучести (1.9) начинается в центре цилиндре $\beta = 0$, где $\sigma_3 = \sigma_{zz}$, $\sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$. Используя (2.4) и (2.6) найдем выражение для Ω_p в цилиндре со свободными торцами:

$$\Omega_p^{fr} = \frac{8(1-\nu)}{3-4\nu}, \tag{2.7}$$

и с закрепленными:

$$\Omega_p^{fx} = \frac{8(1-\nu)}{(3-2\nu)(1-2\nu)} \tag{2.8}$$

Очевидно, что $\Omega_p^{fr} < \Omega_p^{fx}$. Интересно отметить, что полученные выражения для критических величин Ω_p^{fr} и Ω_p^{fx} совпадают для всех условий (1.8)–(1.10), однако, как будет показано далее, для Ω_{fp}^{fr} и Ω_{fp}^{fx} это не так.

3. Упругопластическое решение. Развитие пластического течения во вращающемся сплошном цилиндре имеет свои особенности в зависимости от типа торцевых условий. Рассмотрим подробно цилиндр с закрепленными концами. При $\Omega = \Omega_p^{fx}$ в центре цилиндра $\beta = 0$ впервые выполняется условие (1.8), соответствующее грани призмы Ивлева $\sigma_3 = \sigma_{zz}$, $\sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$, в результате чего появляется пластическая область I. С увеличением параметра нагружения Ω граница между пластической и упругой областями движется в сторону поверхности цилиндра. При $\Omega = \Omega_1$ на внешней поверхности цилиндра условие (1.8) выполняется в виде $\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$, что приводит к появлению пластической области II. Последующее увеличение параметра нагружения Ω ведет к постепенному уменьшению упругой области между областями I и II, в результате чего при $\Omega = \Omega_{fp}^{fx}$ цилиндр полностью переходит в состояние пластичности, а между областями I и II появляется область III, напряженное состояние в которой соответствует ребру призмы Ивлева $\sigma_{rr} = (\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})/2$, $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$. Анализ можно продолжить и для бóльших значений параметра нагружения Ω. При $\Omega = \Omega_{fp2}^{fx}$ напряженное состояние на боковой поверхности цилиндра (область II) переходит с грани призмы Ивлева на ее ребро $\sigma_{zz} = (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})/2$, $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$, в результате чего появляется пластическая область IV. Дальнейшее увеличение параметра Ω не приводит к появлению новых пластических областей, но границы между областями I–IV меняют свое положение, причем увеличиваются области III и IV, напряженное состояние в которых соответствует ребрам призмы Ивлева. Таким образом, в общем случае для достаточно высоких значений Ω во вращающемся цилиндре с закрепленными концами возможно появление четырех пластических областей, соответствующих различным граням и ребрам призмы Ивлева.

В цилиндре со свободными концами при $\Omega = \Omega_{p}^{fr}$ условие (1.8) выполняется в виде $\sigma_3 = \sigma_{zz}$, $\sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$, что приводит к появлению пластической области I, соответствующей ребру призмы Ивлева. С увеличением параметра нагружения Ω упругопластическая граница движется в сторону боковой поверхности цилиндра и при $\Omega = \Omega_{fp}^{fr}$ весь цилиндр переходит в пластическое состояние. Следует отметить, что для определенного соотношения между параметрами ν и H при $\Omega > \Omega_{fp}^{fr}$ возможно появление еще одной пластической области, однако в дальнейшем предполагается, что данное соотношение не выполняется, и пластическое течение происходит только в области I.

Рассмотрим общий принцип решения в пластических областях. В кинематических соотношениях (1.2) упругие ε_{ij}^{e} и пластические ε_{ij}^{p} составляющие деформаций выражаются через напряжения σ_{ij} с помощью (1.4), (1.8) и (1.12)–(1.15). В результате получается линейная система, связывающая напряжения σ_{ij} и полные деформации ε_{ij}. Из решения этой системы можно получить выражения для напряжений:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= a_0 + a_1\varepsilon_{rr} + a_2\varepsilon_{\theta\theta} + a_3\varepsilon_{zz} \\
\sigma_{\theta\theta} &= b_0 + b_1\varepsilon_{rr} + b_2\varepsilon_{\theta\theta} + b_3\varepsilon_{zz} \\
\sigma_{zz} &= c_0 + c_1\sigma_{rr} + c_2\sigma_{\theta\theta} + c_3\varepsilon_{zz}
\end{aligned} \qquad (3.1)$$

Коэффициенты a_i, b_i и c_i в каждой области необходимо определять отдельно. Заметим, что в областях III и IV, соответствующих ребру призмы Ивлева, осевое напряжение σ_{zz} выражается через σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ непосредственно из условия текучести (1.8). Далее уравнение равновесия (1.5) преобразуется с помощью (3.1). В полученном уравнении второго порядка неизвестной функцией является уже перемещение u. Из аналитического решения этого уравнения с помощью (1.2) определяются полные деформации ε_{ij}, далее с помощью (3.1) и (1.3) – упругие составляющие деформации ε_{ij}^{e}. Наконец, пластические деформации ε_{ij}^{p} вычисляются как разница между полными ε_{ij} и упругими ε_{ij}^{e} деформациями.

Пластическое течение в цилиндре с закрепленными концами разбивается на следующие интервалы параметра нагружения Ω: $(\Omega_{p}^{fx}, \Omega_1)$, $(\Omega_1, \Omega_{fp}^{fx})$, $(\Omega_{fp}^{fx}, \Omega_{fp2}^{fx})$, $(\Omega_{fp2}^{fx}, \Omega_{\max})$. В случае цилиндра со свободными торцами необходимо рассматривать лишь два интервала: $(\Omega_{p}^{fr}, \Omega_{fp}^{fr})$ и $(\Omega_{fp}^{fr}, \Omega_{\max})$. В каждом из интервалов цилиндр состоит из разных пластических областей. Для вычисления констант интегрирования D_i (в упругой области) и C_i (в пластических областях), а также координат β_i границ между областями используется система алгебраических уравнений, состоящая из граничных условий (1.7), а также условий непрерывности u, σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ на каждой границе. Для вычисления осевой деформации ε_{zz} в систему дополнительно включается условие (1.6), при этом интеграл $\int \beta\sigma_{zz}d\beta$ вычисляется отдельно в каждой области. Полученная система уравнений является линейно относительно C_i, D_i, ε_{zz} и нелинейной относительно β_i. Часть уравнений системы решается точно для выражения C_i, D_i и ε_{zz} через параметры ν, H и Ω. Для этого удобно использовать системы компьютерной алгебры (Wolfram Mathematica, Maple и др.). Получаемые выражения являются достаточно громоздкими и в статье не приводятся. В оставшиеся уравнения системы подставляются выражения для C_i, D_i и ε_{zz}, а также численные значения параметров ν и H. Полученные уравнения решаются численно методом Ньютона для выбранных значений параметра нагружения Ω внутри интервала. Определение переходных величин Ω_1, Ω_{fp}^{fx}, Ω_{fp2}^{fx}, Ω_{fp}^{fr} требует дополнительных условий.

В следующих подразделах получено аналитическое решение для каждой пластической области I–IV. Для большей общности использовалось предположение об обобщенном плоском деформированном состоянии в цилиндре. Найденные выражения сводятся к случаю плоского деформированного состояния, для этого достаточно положить $\varepsilon_{zz} = 0$.

Пластическая область I. В первой области пластического течения напряженное состояние соответствует грани призмы Ивлева $\sigma_3 = \sigma_{zz}$, $\sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$, тогда условие (1.8) примет вид:

$$\frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) - \sigma_{zz} = \sigma_y\left(\varepsilon_{\text{eq}}^p\right)$$

Из ассоциированного закона пластического течения (1.13) следует:

$$d\varepsilon_{rr}^p = \frac{1}{2}d\lambda; \quad d\varepsilon_{\theta\theta}^p = \frac{1}{2}d\lambda; \quad d\varepsilon_{zz}^p = -d\lambda$$

Соотношение (1.15) после преобразований запишется в виде:

$$\sigma_y d\varepsilon_{\text{eq}}^p = -\left(\frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) - \sigma_{zz}\right)d\varepsilon_{zz}^p$$

Тогда для монотонного нагружения получим $\varepsilon_{\text{eq}}^p = -\varepsilon_{zz}^p$, $\varepsilon_{rr}^p = \varepsilon_{\theta\theta}^p = -\frac{1}{2}\varepsilon_{zz}^p$. Обратное соотношение к (1.15) запишется следующим образом:

$$\varepsilon_{\text{eq}}^p = \frac{1}{H}\left(\frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) - \sigma_{zz} - 1\right) \tag{3.2}$$

Кинематические соотношения (1.2) примут вид

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}^e + \frac{1}{2}\varepsilon_{\text{eq}}^p, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^e + \frac{1}{2}\varepsilon_{\text{eq}}^p, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^e - \varepsilon_{\text{eq}}^p$$

Преобразуем полученные соотношения с помощью (1.4) и (3.2)

$$\begin{aligned}
(4H+1)\sigma_{rr} - (4\nu H - 1)\sigma_{\theta\theta} - (4\nu H + 2)\sigma_{zz} &= 4H\varepsilon_{rr} + 2\\
-(4\nu H - 1)\sigma_{rr} + (4H+1)\sigma_{\theta\theta} - (4\nu H + 2)\sigma_{zz} &= 4H\varepsilon_{\theta\theta} + 2\\
-(2\nu H + 1)\sigma_{rr} - (2\nu H + 1)\sigma_{\theta\theta} + (2H+2)\sigma_{zz} &= 2H\varepsilon_{zz} - 2
\end{aligned}$$

Решая полученную систему найдем коэффициенты в (3.1)

$$\begin{gathered}
a_0 = b_0 = \frac{1}{3 + 2(1+\nu)H}, \quad a_1 = b_2 = \frac{\left(5 - 4\nu + 4(1-\nu^2)H\right)}{2(1+\nu)(1-2\nu)(3 + 2(1+\nu)H)}\\
a_2 = b_1 = -\frac{\left(1 - 4(2+H)\nu - 4\nu^2 H\right)}{2(1+\nu)(1-2\nu)(3 + 2(1+\nu)H)}, \quad a_3 = b_3 = \frac{(1+2\nu H)}{(1-2\nu)(3+2(1+\nu)H)}\\
c_0 = -\frac{1}{1+H}, \quad c_1 = c_2 = \frac{1+2\nu H}{2(1+H)}, \quad c_3 = \frac{H}{(1+H)}
\end{gathered} \tag{3.3}$$

Из решения уравнения равновесия (1.5) с помощью (3.1) и (3.3) найдем выражение для перемещения:

$$u = C_1\beta^{-1} + C_2\beta - \frac{(1-2\nu)(1+\nu)(3+2(1+\nu)H)}{4\left(5-4\nu+4\left(1-\nu^2\right)H\right)}\Omega\beta^3$$

Пластическая область II. Напряжения во второй пластической области лежат на грани призмы Ивлева $\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_2 \le (\sigma_1 + \sigma_3)/2$. Условие пластичности (1.8) имеет вид:

$$\sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{zz}) = \sigma_y\left(\varepsilon^p_{\text{eq}}\right)$$

Ассоциированный закон течения (1.13) запишется как

$$d\varepsilon^p_{rr} = -\frac{1}{2}d\lambda, \quad d\varepsilon^p_{\theta\theta} = d\lambda, \quad d\varepsilon^p_{zz} = -\frac{1}{2}d\lambda$$

Отсюда получим:

$$\sigma_y d\varepsilon^p_{\text{eq}} = \left(\sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})\right)d\varepsilon^p_{\theta\theta}$$

В результате для случая монотонного нагружения имеем: $\varepsilon^p_{\text{eq}} = \varepsilon^p_{\theta\theta}$, $\varepsilon^p_{rr} = \varepsilon^p_{zz} = -\frac{1}{2}\varepsilon^p_{\theta\theta}$.

Из закона линейного упрочнения (1.12) следует:

$$\varepsilon^p_{\text{eq}} = \frac{1}{H}\left(\sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{zz}) - 1\right) \tag{3.4}$$

Кинематические соотношения (1.2) с учетом последнего соотношения и (1.4) запишутся следующим образом:

$$\begin{gathered}
(4H+1)\sigma_{rr} - (4\nu H + 2)\sigma_{\theta\theta} - (4\nu H - 1)\sigma_{zz} = 4H\varepsilon_{rr} - 2 \\
-(2\nu H + 1)\sigma_{rr} + (2H+2)\sigma_{\theta\theta} - (2\nu H + 1)\sigma_{zz} = 2H\varepsilon_{\theta\theta} + 2 \\
-(4\nu H - 1)\sigma_{rr} - (4\nu H + 2)\sigma_{\theta\theta} + (4H+1)\sigma_{zz} = 4H\varepsilon_{zz} - 2
\end{gathered}$$

Решая вышеприведенную систему, найдем коэффициенты в (3.1)

$$\begin{gathered}
a_0 = -\frac{1}{3+2(1+\nu)H}, \quad a_1 = \frac{\left(5-4\nu+4\left(1-\nu^2\right)H\right)}{2(1+\nu)(1-2\nu)(3+2(1+\nu)H)} \\
a_2 = b_1 = b_3 = \frac{(1+2\nu H)}{(1-2\nu)(3+2(1+\nu)H)}, \quad a_3 = -\frac{\left(1-4(2+H)\nu-4\nu^2 H\right)}{2(1+\nu)(1-2\nu)(3+2(1+\nu)H)} \\
b_0 = \frac{2}{3+2(1+\nu)H}, \quad b_2 = \frac{(1+2(1-\nu)H)}{(1-2\nu)(3+2(1+\nu)H)} \\
c_0 = -\frac{2}{1+4H}, \quad c_1 = -\frac{1-4\nu H}{1+4H}, \quad c_2 = \frac{2+4\nu H}{1+4H}, \quad c_3 = \frac{4H}{1+4H}
\end{gathered} \tag{3.5}$$

Перемещение определяется из решения уравнения равновесия (1.5) с учетом соотношений (3.1) и (3.5):

$$u = C_3\beta^{-\kappa} + C_4\beta^{\kappa} + (\varepsilon_{zz} + 2(1+\nu))\beta - L\Omega\beta^3$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{2(1+\nu+2(1-\nu^2)H)}{(5-4\nu+4(1-\nu^2)H)}}, \quad L = \frac{2(1+\nu)(1-2\nu)(3+2(1+\nu)H)}{\left(43-38\nu+32\left(1-\nu^2\right)H\right)}$$

Пластическая область III. В данной пластической области напряжения соответствуют ребру призмы Ивлева $\sigma_{rr} = (\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})/2$, $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$. Условие текучести (1.8) запишется в следующем виде:

$$\sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{zz}) = \sigma_y\left(\varepsilon^p_{\mathrm{eq}}\right), \quad \frac{1}{2}(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr}) - \sigma_{zz} = \sigma_y\left(\varepsilon^p_{\mathrm{eq}}\right),$$

из которого следует, что

$$\sigma_{zz} = 2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}$$

Эквивалентная пластическая деформация

$$\varepsilon^p_{\mathrm{eq}} = \frac{1}{H}\left(\frac{3}{2}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) - 1\right) \tag{3.6}$$

Ассоциированный закон пластического течения (1.13) примет вид:

$$d\varepsilon^p_{rr} = -\frac{1}{2}d\lambda_1 + \frac{1}{2}d\lambda_2, \quad d\varepsilon^p_{\theta\theta} = d\lambda_1 + \frac{1}{2}d\lambda_2, \quad d\varepsilon^p_{zz} = -\frac{1}{2}d\lambda_1 - d\lambda_2$$

Отсюда следует:

$$d\lambda_1 = -d\varepsilon^p_{rr} + \frac{2}{3}d\varepsilon^p_{\theta\theta} = -\frac{4}{3}d\varepsilon^p_{rr} - \frac{2}{3}d\varepsilon^p_{zz} = \frac{4}{3}d\varepsilon^p_{\theta\theta} + \frac{2}{3}d\varepsilon^p_{zz}$$

$$d\lambda_2 = \frac{4}{3}d\varepsilon^p_{rr} + \frac{2}{3}d\varepsilon^p_{\theta\theta} = \frac{2}{3}d\varepsilon^p_{rr} - \frac{2}{3}d\varepsilon^p_{zz} = -\frac{2}{3}d\varepsilon^p_{\theta\theta} - \frac{4}{3}d\varepsilon^p_{zz}$$

Соотношение (1.15) после преобразований запишется в виде

$$d\varepsilon^p_{\mathrm{eq}} = d\lambda_1 + d\lambda_2$$

Отсюда для случая монотонного нагружения получим

$$\varepsilon^p_{\mathrm{eq}} = -\frac{2}{3}\varepsilon^p_{rr} - \frac{4}{3}\varepsilon^p_{zz}, \quad \varepsilon^p_{\mathrm{eq}} = \frac{2}{3}\varepsilon^p_{\theta\theta} - \frac{2}{3}\varepsilon^p_{zz} \tag{3.7}$$

Преобразуем (1.2) с помощью (1.4), (3.6), (3.7) и получим

$$(9 + 4(5-4\nu)H)\sigma_{rr} - (9 + 8(1+\nu)H)\sigma_{\theta\theta} = 4H\varepsilon_{rr} + 8H\varepsilon_{zz} - 6,$$
$$-(9 + 8(1+\nu)H)\sigma_{rr} + (9 + 8(1+\nu)H)\sigma_{\theta\theta} = 4H\varepsilon_{\theta\theta} - 4H\varepsilon_{zz} + 6$$

Из решения данной системы найдем коэффициенты в (3.1):

$$\begin{gathered} a_0 = 0, \quad a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = \frac{1}{3}\frac{1}{(1-2\nu)}, \quad b_0 = \frac{6}{9 + 8(1+\nu)H} \\ b_2 = \frac{(9 + 4(5-4\nu)H)}{3(1-2\nu)(9 + 8(1+\nu)H)}, \quad b_3 = \frac{(9 - 4(1-8\nu)H)}{3(1-2\nu)(9 + 8(1+\nu)H)} \end{gathered} \tag{3.8}$$

Из решения уравнения равновесия (1.5) с учетом (3.1) и (3.8) получим

$$u = C_5\beta^{-\tau} + C_6\beta^{\tau} + \left(\varepsilon_{zz} - \frac{3}{2}H^{-1}\right)\beta - M\Omega\beta^3,$$

$$\tau = \sqrt{\frac{9 + 4(5-4\nu)H}{9 + 8(1+\nu)H}}, \quad M = \frac{3(1-2\nu)(9 + 8(1+\nu)H)}{4(18 + (13 + 22\nu)H)}$$

Замечание: решение, найденное в пластической области III, не сводится к решению [25] для идеально пластического материала при $H = 0$.

Пластическая область IV. В последней области пластического деформирования напряжения лежат на ребре призмы Ивлева $\sigma_{zz} = (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})/2$, $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$. Условие (1.8) имеет вид

$$\sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{2}(\sigma_{zz} + \sigma_{rr}) = \sigma_y\left(\varepsilon^p_{\text{eq}}\right), \quad \frac{1}{2}(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) - \sigma_{rr} = \sigma_y\left(\varepsilon^p_{\text{eq}}\right)$$

Откуда следует, что

$$\sigma_{zz} = (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})/2$$

Эквивалентная пластическая деформация

$$\varepsilon^p_{\text{eq}} = \frac{1}{\text{H}}\left(\frac{3}{4}\sigma_{\theta\theta} - \frac{3}{4}\sigma_{rr} - 1\right) \tag{3.9}$$

Ассоциированный закон течения (1.13) запишется в виде

$$d\varepsilon^p_{rr} = -\frac{1}{2}d\lambda_1 - d\lambda_2, \quad d\varepsilon^p_{\theta\theta} = d\lambda_1 + \frac{1}{2}d\lambda_2, \quad d\varepsilon^p_{zz} = -\frac{1}{2}d\lambda_1 + \frac{1}{2}d\lambda_2$$

Откуда следует, что

$$d\lambda_1 = \frac{2}{3}d\varepsilon^p_{rr} + \frac{4}{3}d\varepsilon^p_{\theta\theta} = -\frac{2}{3}d\varepsilon^p_{rr} - \frac{4}{3}d\varepsilon^p_{zz} = \frac{2}{3}d\varepsilon^p_{\theta\theta} - \frac{2}{3}d\varepsilon^p_{zz},$$

$$d\lambda_2 = -\frac{4}{3}d\varepsilon^p_{rr} - \frac{2}{3}d\varepsilon^p_{\theta\theta} = -\frac{2}{3}d\varepsilon^p_{rr} + \frac{2}{3}d\varepsilon^p_{zz} = \frac{2}{3}d\varepsilon^p_{\theta\theta} + \frac{4}{3}d\varepsilon^p_{zz}$$

Соотношение (1.15), как и в области III имеет вид

$$d\varepsilon^p_{\text{eq}} = d\lambda_1 + d\lambda_2$$

Для монотонного нагружения имеем

$$\varepsilon^p_{\text{eq}} = -\frac{4}{3}\varepsilon^p_{rr} - \frac{2}{3}\varepsilon^p_{zz}, \quad \varepsilon^p_{\text{eq}} = \frac{4}{3}\varepsilon^p_{\theta\theta} + \frac{2}{3}\varepsilon^p_{zz} \tag{3.10}$$

С учетом (1.4), (3.9), (3.10) соотношения (1.2) примут вид

$$(9 + 4(5 - 4\nu)H)\sigma_{rr} - (9 - 4(1 - 8\nu)H)\sigma_{\theta\theta} = 16H\varepsilon_{rr} + 8H\varepsilon_{zz} - 12,$$

$$-(9 - 4(1 - 8\nu)H)\sigma_{rr} + (9 + 4(5 - 4\nu)H)\sigma_{\theta\theta} = 16H\varepsilon_{\theta\theta} + 8H\varepsilon_{zz} + 12$$

Решая данную систему, найдем коэффициенты в (3.1)

$$\begin{gathered} a_0 = -b_0 = -\frac{6}{9 + 8(1+\nu)H}, \quad a_1 = b_2 = \frac{(9 + 4(5 - 4\nu)H)}{3(1 - 2\nu)(9 + 8(1+\nu)H)} \\ a_2 = b_1 = \frac{(9 - 4(1 - 8\nu)H)}{3(1 - 2\nu)(9 + 8(1+\nu)H)}, \quad a_3 = b_3 = \frac{1}{3}\frac{1}{(1 - 2\nu)} \end{gathered} \tag{3.11}$$

Из решения уравнения равновесия (1.5) с учетом (3.1) и (3.11) найдем

$$u = C_7\beta^{-1} + C_8\beta + K\beta\ln\beta - N\Omega\beta^3$$

$$K = \frac{18(1 - 2\nu)}{(9 + 4(5 - 4\nu)H)}, \quad N = \frac{3(1 - 2\nu)(9 + 8(1+\nu)H)}{8(9 + 4(5 - 4\nu)H)}$$

4. Результаты расчетов. Расчеты проводились для цилиндра, изготовленного из нержавеющей стали AISI 304, со следующими значениями параметров (1.1):

$$b = 0.1\text{ м},\quad E = 200\text{ ГПа},\quad \sigma_0 = 215\text{ МПА}$$
$$\eta = 465,\quad \rho = 8000\text{ кг/м}^3,\quad \nu = 0.3$$

Отсюда безразмерный параметр упрочнения $H \cong 0.5$. Для сравнения рассматривается случай $H = 1.0$, а также идеальный упругопластический материал, который моделируется заданием значения $H = 10^{-6} \approx 0$.

Пластическое течение в цилиндре с закрепленными концами начинается при $\Omega_{fp}^{fx} \cong$ $\cong 5.8333$ (2.8), а в цилиндре со свободными концами при $\Omega_{fp}^{fr} \cong 3.1111$ (2.7). Соответствующие скорости вращения: $\omega_{fp}^{fx} \cong 37\,800$ об./мин, $\omega_{fp}^{fr} \cong 27\,600$ об./мин. Распределение напряжений в цилиндре с закрепленными концами в момент начала пластического течения представлено в работе [2].

Цилиндр с закрепленными концами ($\varepsilon_{zz} = 0$). Рассмотрим подробно пластическое деформирование вращающегося цилиндра с закрепленными концами. Установлено, что пластическая область II появляется на внешней поверхности цилиндра при $\Omega = \Omega_1 \cong$ $\cong 8.1663$ ($\omega_1 \cong 44\,700$ об./мин). Весь цилиндр переходит в пластическое состояние при $\Omega = \Omega_{fp}^{fx} \cong 9.4035$ ($\omega_1 \cong 48\,000$ об./мин). Распределение напряжений и пластических деформаций при $\Omega = \Omega_{fp}^{fx}$ для разных значений параметра упрочнения H изображено на рис. 2 и 3 соответственно. Разумеется, критическая величина Ω_{fp}^{fx} зависит от H, однако, как показали расчеты, зависит несущественно. Для $H = 0.0, 1.0$ цилиндр полностью переходит в пластическое состояние при $\Omega_{fp}^{fx} \cong 9.2672, 9.4771$ соответственно. Видим, что упрочнение материала практически не влияет на распределение радиального и тангенциального напряжения в цилиндре и незначительно уменьшает величину осевого напряжения. Графики напряжений для $H = 1.0$ не приведены на рис. 2 и 5, поскольку они практически сливаются с графиками для $H = 0.5$. С другой стороны, как видно из рис. 3, пластические деформации в цилиндре из упрочняющегося материала существенно ниже по сравнению с цилиндром из идеального материала. Сравнение полученных результатов с данными [12, 13] показывает, что условия Треска и Мизеса при одной и той же скорости вращения предсказывают бóльшую величину напряжений и пластических деформаций в цилиндре.

На рис. 4 изображены зависимости Ω_{fp}^{fx} от параметра упрочнения H для условий Ишлинского–Ивлева, Треска и Мизеса. Графики, соответствующие условиям Треска и Мизеса, получены на основе работ [12] и [13] соответственно. Значения Ω_{fp}^{fx} и Ω_{fp}^{fr} приведены [13] только для трех значений параметра $H = 0.2; 0.4; 0.6$. Критические значения параметра нагружения Ω_{fp}^{fx} слабо зависит от параметра упрочнения H. Это справедливо для всех сравниваемых условий пластичности. Разница в значении Ω_{fp}^{fx} между условиями Ишлинского–Ивлева и Треска составляет около 10%, а между условиями Ишлинского–Ивлева и Мизеса – примерно 7%.

После полного перехода в пластическое состояние развитие пластического течения в упрочняющемся цилиндре существенно замедляется по сравнению с цилиндром из идеального материала. Так, для первой модели ($H \cong 0.5$) возникновение пластической области IV происходит при $\Omega = \Omega_{fp2}^{fx} \cong 16.5679$ ($\omega_{fp2}^{fx} \cong 63\,700$ об./мин), а для вто-

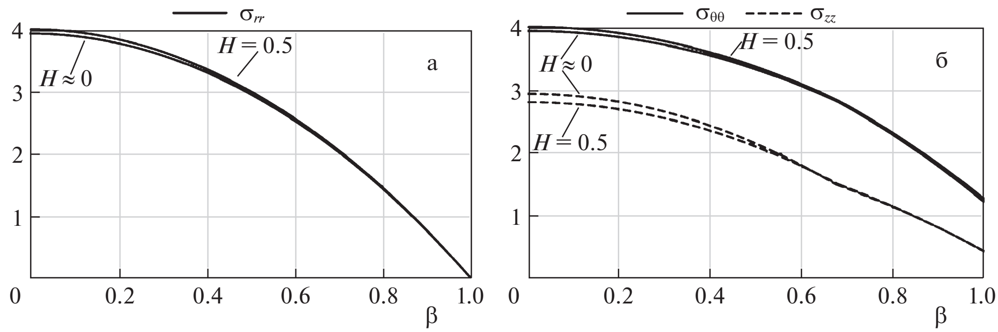

Рис. 2. Распределение напряжений при $\Omega = \Omega_{fp}^{fx}$: а – σ_{rr}; б – $\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$.

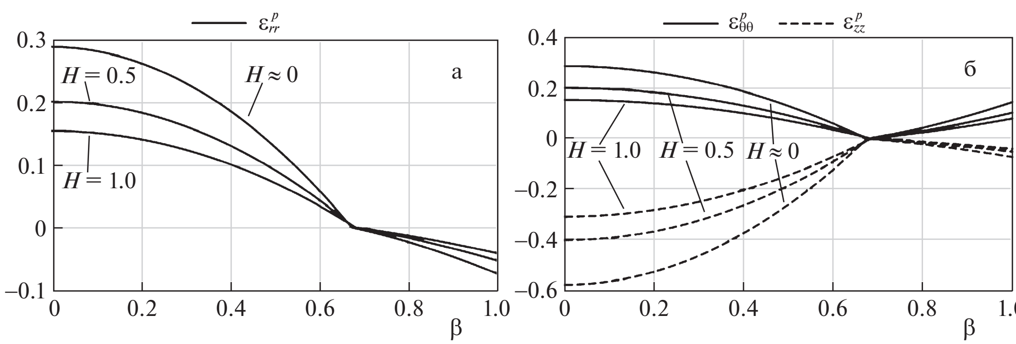

Рис. 3. Распределение пластических деформаций при $\Omega = \Omega_{fp}^{fx}$: а – ε_{rr}^{p}; б – $\varepsilon_{\theta\theta}^{p}$, ε_{zz}^{p}.

рой ($H \approx 0.0$) при $\Omega = \Omega_{fp2}^{fx} \cong 12.1183$ ($\omega_{fp2}^{fx} \cong 55000$ об. мин). Распределение напряжений и пластических деформаций в цилиндре для $\Omega = \Omega_{\max}^{fx} = 20$ ($\omega_{\max}^{fx} \cong 70000$ об. мин) изображено на рис. 5 и 6 соответственно. Интересно отметить (рис. 5б), что упрочнение оказывает наибольшее влияние на осевое напряжение. Деформированное состояние цилиндра (рис. 6) существенно зависит от параметра упрочнения H: чем он выше, тем ниже пластические деформации в цилиндре.

Цилиндр со свободными концами ($\varepsilon_{zz} = \text{const}$). Решение для цилиндра из идеально-пластического материала при использовании условия Треска и условия Ишлинского–Ивлева существует только для $\Omega < 4$. Для условия Ишлинского–Ивлева при указанном максимальном значении параметра нагружения цилиндр полностью переходит в пластическое состояние ($\Omega_{fp}^{fr} = 4$). Распределение напряжений и пластических деформаций при $\Omega = 4$ ($\omega \cong 31300$ об./мин) для $H \approx 0.0$ и $H = 0.5$, 1.0 изображено на рис. 7 и 8 соответственно. При указанной скорости вращения координата упругопластической границы имеет следующие значения в зависимости от параметра упрочнения H: $\beta_1 = 0.9995$, 0.7983, 0.7671. Видим, что упрочнение материала оказывает на деформирование цилиндра со свободными торцами эффект, схожий рассмотренному выше в случае цилиндра с закрепленными концами. Радиальное и тангенциальное напряже-

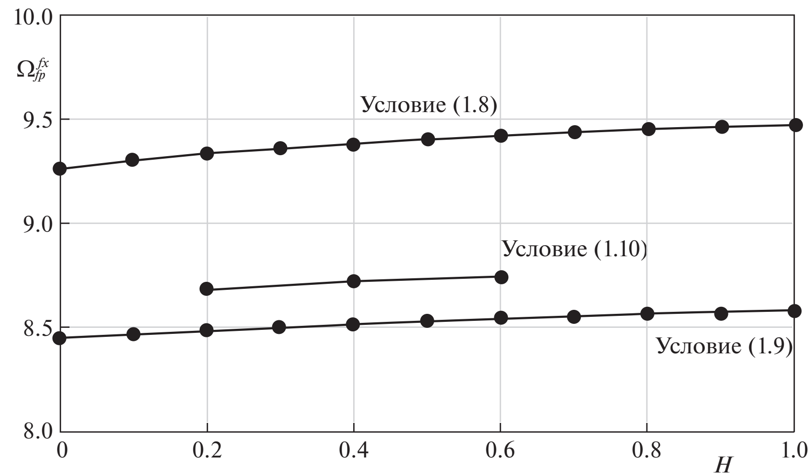

Рис. 4. Зависимость Ω_{fp}^{fx} от параметра упрочнения H для условий (1.8)–(1.10).

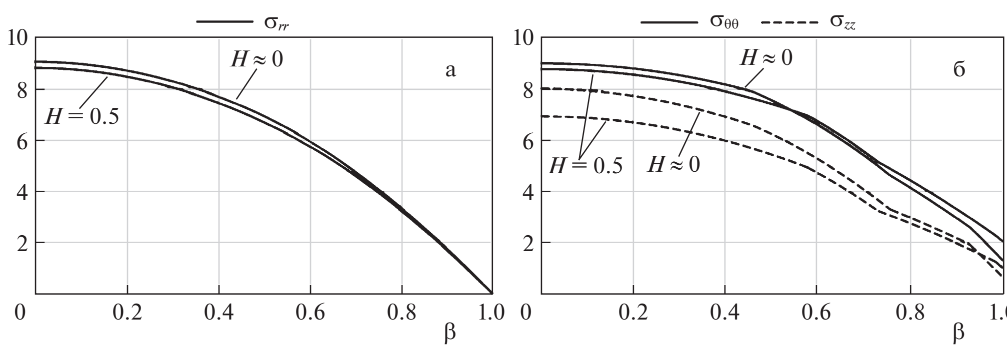

Рис. 5. Распределение напряжений при $\Omega = \Omega_{\max}^{fx}$: а – σ_{rr}; б – $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz}.

ния практически не зависят от параметра упрочнения H, и на рис. 7а показаны графики только для случая $H = 0.5$. Абсолютная величина осевого напряжения незначительно снижается с ростом H (рис. 7б). Упрочнение материала главным образом влияет на пластические деформации в цилиндре: их величина существенно зависит от параметра H.

Интересно отметить, что поскольку пластическое течение в линейно-упрочняющемся цилиндре при условии пластичности (1.8) происходит только в одной области (пластическая область I), то становится возможным получить следующее аналитическое выражение

$$\Omega_{fp}^{fr} = 4\frac{\left(5 - 4\nu + 4H\left(1+\nu\right)\left(1-\nu\right)\right)}{\left(5 - 4\nu + 2H\left(1+\nu\right)\right)}$$

Для условия Треска подобное выражение получить затруднительно, поскольку в этом случае цилиндр состоит из двух пластических областей, и определение Ω_{fp}^{fr} сво-

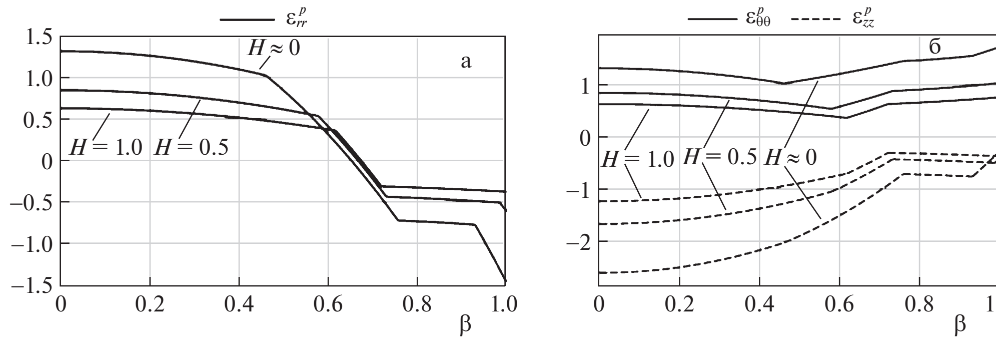

Рис. 6. Распределение пластических деформаций при $\Omega = \Omega^{fx}_{max}$: а – ε^p_{rr}; б – $\varepsilon^p_{\theta\theta}$, ε^p_{zz}.

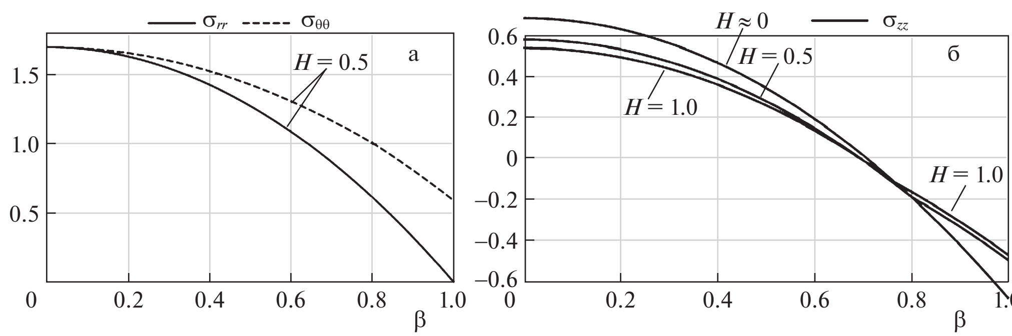

Рис. 7. Распределение напряжений при $\Omega = 4$: а – σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$; б – σ_{zz}.

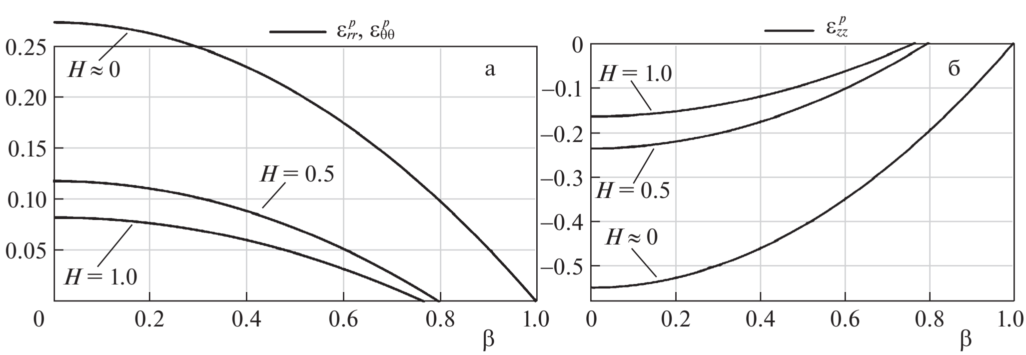

Рис. 8. Распределение пластических деформаций при $\Omega = 4$: а – ε^p_{rr}, $\varepsilon^p_{\theta\theta}$; б – ε^p_{zz}.

дится к решению системы двух нелинейных алгебраических уравнений относительно Ω и координаты β_1 границы между пластическими областями [12]. На рис. 9 приведены зависимости Ω^{fr}_{fp} от параметра упрочнения H для условий Ишлинского–Ивлева, Треска и Мизеса. Видим, что с увеличением H разница между критическими значениями Ω^{fr}_{fp} для условий пластичности Ишлинского–Ивлева и Треска также растет. Если для идеального материала эта разница составляет около 10%, то при $H = 0.5$ она составляет

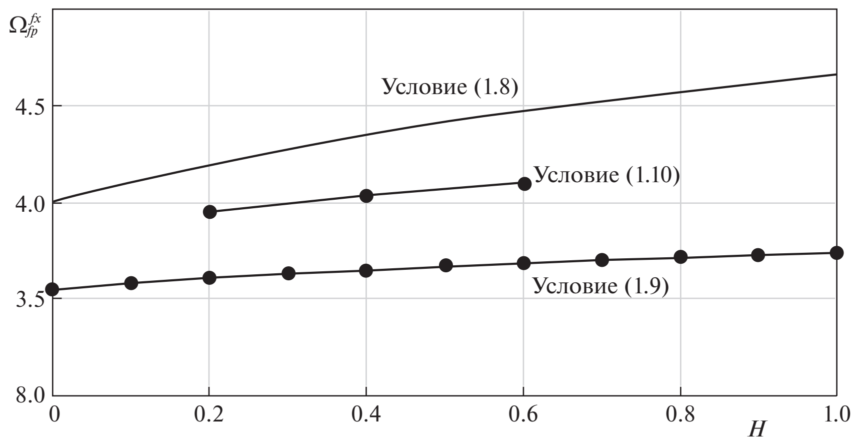

Рис. 9. Зависимость Ω_{fp}^{fr} от параметра упрочнения H для условий (1.8)–(1.10).

уже около 20%. При этом для условия Ишлинского–Ивлева величина Ω_{fp}^{fr} в большей степени зависит от параметра упрочнения H по сравнению с условием Треска. Критическая величина Ω_{fp}^{fr}, соответствующая условию Мизеса, примерно равна среднему между значениями Ω_{fp}^{fr} для условий Треска и Ишлинского–Ивлева. Здесь еще раз следует отметить, что для сравнения полученных результатов (рис. 4 и 9) с условием Мизеса используются данные [13], основанной на деформационной теории пластичности. Решение аналогичной упругопластической задачи, но с использованием условия Мизеса и ассоциированного с ним закона течения, представляет значительный интерес и к настоящему времени еще не опубликовано.

Для диапазона параметра нагружения $\Omega \geq \Omega_{fp}^{fr}$ из условий (1.6) и (1.7) можно получить точные выражения для констант интегрирования и осевой деформации в виде функций от ν, H и Ω. Отсюда распределение напряжений в цилиндре имеет вид

$$\sigma_{rr} = \frac{(7 - 2\nu + 2H(3 - 2\nu)(1 + \nu))}{4(5 - 4\nu + 4H(1 - \nu)(1 + \nu))}\Omega\left(1 - \beta^2\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\left(7 - 2\nu + 2H(3 - 2\nu)(1 + \nu) - (1 + 10\nu + 2H(1 + \nu)(1 + 2\nu))\beta^2\right)}{4(5 - 4\nu + 4H(1 - \nu)(1 + \nu))}\Omega$$

$$\sigma_{zz} = \frac{(1 + \nu)(1 + 2H\nu)}{(10 - 8\nu + 8H(1 - \nu)(1 + \nu))}\Omega\left(1 - 2\beta^2\right)$$

а актуальный предел текучести записывается как

$$\sigma_y = \frac{\left(5 - 4\nu + 2H(1 + \nu)\left(3 - 4\nu - 2\beta^2(1 - 2\nu)\right)\right)}{4(5 - 4\nu + 4H(1 - \nu)(1 + \nu))}\Omega$$

Работа выполнена в рамках государственного задания ХФИЦ ДВО РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gamer U., Sayir M.* Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP. 1984. V. 35. № 5. P. 601–617.
2. *Gamer U., Mack W., Varga I.* Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends // Int. J. Eng. Sci. 1997. V. 35. № 3. P. 253–267.
3. *Mack W.* The rotating elastic–plastic solid shaft with free ends // Technische Mechanik. 1991. № 12. P. 119–124.
4. *Mack W.* Rotating elastic-plastic tube with free ends // Int. J. Solids & Struct. 1991. V. 27. № 11. P. 1461–1476.
5. *Lindner T., Mack W.* Residual stresses in an elastic-plastic solid shaft with fixed ends after previous rotation // ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 1998. V. 78. № 2. P. 75–86.
6. *Prokudin A.N.* Exact elastoplastic analysis of a rotating cylinder with a rigid inclusion under mechanical loading and unloading // ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2020. V. 100. № 3. e201900213.
7. *Prokudin A.N., Firsov S.V.* Elastoplastic deformation of a rotating hollow cylinder with a rigid casing // PNRPU Mech. Bull. 2019. № 4. P. 120–135.
8. *Прокудин А.Н., Фирсов С.В.* Упругопластическое деформирование вращающегося полого цилиндра с жестким покрытием на внутренней и внешней стенках // Вестн. Инж. школы Дальнев. фед. ун-та. 2019. № 4 (41). С. 12–28.
9. *Eraslan A.N., Arslan E.* Plane strain analytical solutions to rotating partially plastic graded hollow shafts // Turkish J. Engng. & Environ. Sci. 2007. V. 31. № 5. P. 273–287.
10. *Akis T., Eraslan A.N.* Exact solution of rotating FGM shaft problem in the elastoplastic state of stress // Arch. Appl. Mech. 2007. V. 77. № 10. P. 745–765.
11. *Nejad M.Z., Fatehi P.* Exact elasto-plastic analysis of rotating thick-walled cylindrical pressure vessels made of functionally graded materials // Int. J. Engng. Sci. 2015. V. 86. № Suppl. C. P. 26–43.
12. *Eraslan A.N.* On the linearly hardening rotating solid shaft // Europ. J. Mech. A: Solids. 2003. V. 22. № 2. P. 295–307.
13. *Eraslan A.N.* Von Mises' yield criterion and nonlinearly hardening rotating shafts // Acta Mechanica. 2004. V. 168. № 3–4. P. 129–144.
14. *Eraslan A.N., Arslan E., Mack W.* The strain hardening rotating hollow shaft subject to a positive temperature gradient // Acta Mechanica. 2007. V. 194. № 1–4. P. 191–211.
15. *Arslan E., Mack W., Eraslan A.N.* The rotating elastic-plastic hollow shaft conveying a hot medium // Forsch Ingenieurwes. 2010. V. 74. № 1. P. 27–39.
16. *Leu S.-Y., Chen J.T.* Sequential limit analysis of rotating hollow cylinders of nonlinear isotropic hardening // CMES – Comput. Model. in Engng.&Sci. 2006. V. 14. № 2. P. 129–140.
17. *Leu S.-Y.* Investigation of rotating hollow cylinders of strain-hardening viscoplastic materials by sequential limit analysis // Comput. Meth. in: Appl. Mech.&Engng. 2008. V. 197. № 51. P. 4858–4865.
18. *Leu S.-Y., Hsu H.-C.* Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders // Int. J. Mech. Sci. 2010. V. 52. № 12. P. 1579–1587.
19. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2003. 704 с.
20. *Ишлинский А.Ю.* Гипотеза прочности формоизменения // Уч. зап. МГУ. 1940. № 46. С. 104–114.
21. *Schmidt R.* Über den Zusammenhang von Spannungen und Formänderungen im Verfestigungsgebiet // Ingenieur-Archiv. 1932. V. 3. № 3. P. 215–235.
22. *Hill R.* On the inhomogeneous deformation of a plastic lamina in a compression test // The London, Edinburgh, and Dublin Phil. Mag. & J. Sci. 1950. V. 41. № 319. P. 733–744.
23. *Ivlev D.D.* On the development of a theory of ideal plasticity // JAMM. 1958. V. 22. № 6. P. 1221–1230.

24. *Cai Q., Pang M., Zhang Y.-Q., Liu X.* Elastic-plastic stress distribution of rotating annular disc based on twin-shear stress yield criterion // Zhejiang Daxue Xuebao (Gongxue Ban) / J. Zhejiang Univ. (Engng. Sci.). 2008. V. 42. № 9. P. 1540–1544.
25. *Prokudin A.N.* Elastic-plastic analysis of rotating solid shaft by maximum reduced stress yield criterion // Vestn. Samarsk. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki. 2020. V. 24. № 1. P. 74–94.
26. *Zhao D.-w., Xie Y.-j., Liu X.-h., Wang G.-d.* Three-dimensional analysis of rolling by twin shear stress yield criterion // J. Iron&Steel Res. Int. 2006. V. 13. № 6. P. 21–26.
27. *Zhu X., Pang M., Zhang Y.* Estimation of burst pressure of pipeline using twin-shear stress yield criterion // Yingyong Lixue Xuebao/Chinese J. Appl. Mech. 2011. V. 28. № 2. P. 135–138.
28. *Буренин А.А., Ткачева А.В., Щербатюк Г.А.* К расчету неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах // Выч. мех. сплошн. сред. 2017. Т. 10. № 3. С. 245–259.
29. *Burenin A.A., Tkacheva A.V., Scherbatyuk G.A.* To the use of piecewise-linear plastic potentials in the non-stationary theory of temperature stresses // Vestn. Samarsk. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki. 2018. V. 22. № 1. P. 23–39.
30. *Буренин А.А., Каинг М., Ткачева А.В.* К расчету плоских напряженных состояний в теории неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах // Дальнев. мат. ж. 2018. Т. 18. № 2. С. 131–146.
31. *Yu M.-H.* Unified Strength Theory and Its Applications. Singapore: Springer, 2018. 463 p.
32. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
33. *Писаренко Г.С., Лебедев А.А.* Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. Киев: Наук. думка, 1976. 415 с.
34. *Kolupaev V.A., Yu M.-H., Altenbach H.* Fitting of the strength hypotheses // Acta Mechanica. 2016. V. 227. № 6. P. 1533–1556.
35. *Koiter W.T.* Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface // Quart. Appl. Math. 1953. V. 11. № 3. P. 350–354.

Elastic-Plastic Analysis of a Rotating Solid Shaft Made of Linear Hardening Material

A. N. Prokudin[a,#] **and A. A. Burenin**[a,##]

[a] *Institute of Machinery and Metallurgy, Khabarovsk FRC FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia*
[#]*e-mail: sunbeam_85@mail.ru*
[##]*e-mail: mail@imim.ru*

A rotating solid shaft made of a hardening elastic-plastic material is investigated. The statement of the problem is based on the Prandtl-Reis equations and the assumption of a generalized strain state in a cylinder. Plastic deformations are determined with the help of maximum reduced stress yield condition, the flow rule associated with it and the law of linear isotropic hardening. The analysis is restricted to the active loading of the cylinder. It is shown that in the general case four plastic regions corresponding to different corners and edges of the yield surface may appear in the cylinder. An exact analytical solution is found for each possible plastic region. The dependences of the critical rotation velocity at which the entire cylinder becomes plastic on the hardening parameter are established. A comparison of the results with solutions for the Tresca and Mises criteria is given.

Keywords: elastoplasticity, infinitesimal strains, rotating shaft, linear isotropic hardening, maximum reduced stress yield criterion

REFERENCES

1. *Gamer U., Sayir M.* Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP, 1984, vol. 35, no. 5, pp. 601–617.

2. *Gamer U., Mack W., Varga I.* Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends // Int. J. Engng. Sci., 1997, vol. 35, no. 3, pp. 253–267.
3. *Mack W.* The rotating elastic–plastic solid shaft with free ends // Technische Mechanik, 1991, no. 12, pp. 119–124.
4. *Mack W.* Rotating elastic-plastic tube with free ends // Int. J. Solids&Struct., 1991, vol. 27, no. 11, pp. 1461–1476.
5. *Lindner T., Mack W.* Residual stresses in an elastic-plastic solid shaft with fixed ends after previous rotation // ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik, 1998, vol. 78, no. 2, pp. 75–86.
6. *Prokudin A.N.* Exact elastoplastic analysis of a rotating cylinder with a rigid inclusion under mechanical loading and unloading // ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik, 2020, vol. 100, no. 3. e201900213.
7. *Prokudin A.N., Firsov S.V.* Elastoplastic deformation of a rotating hollow cylinder with a rigid casing // PNRPU Mech. Bull., 2019, no. 4, pp. 120–135.
8. *Prokudin A.N., Firsov S.V.* Elastoplastic deformation of a rotating hollow cylinder with a rigid coating on the inner and outer walls // Bull. Engng. School of the Far Eastern Fed. Univ., 2019, no. 4 (41), pp. 12–28.
9. *Eraslan A.N., Arslan E.* Plane strain analytical solutions to rotating partially plastic graded hollow shafts // Turkish J. Engng.&Environ. Sci., 2007, vol. 31, no. 5, pp. 273–287.
10. *Akis T., Eraslan A.N.* Exact solution of rotating FGM shaft problem in the elastoplastic state of stress // Arch. Appl. Mech., 2007, vol. 77, no. 10, pp. 745–765.
11. *Nejad M.Z., Fatehi P.* Exact elasto-plastic analysis of rotating thick-walled cylindrical pressure vessels made of functionally graded materials // Int. J. Engng. Sci., 2015, vol. 86, no. Suppl. C, pp. 26–43.
12. *Eraslan A.N.* On the linearly hardening rotating solid shaft // Europ. J. Mech. A/Solids, 2003, vol. 22, no. 2, pp. 295–307.
13. *Eraslan A.N.* Von Mises' yield criterion and nonlinearly hardening rotating shafts // Acta Mechanica, 2004, vol. 168, no. 3–4, pp. 129–144.
14. *Eraslan A.N., Arslan E., Mack W.* The strain hardening rotating hollow shaft subject to a positive temperature gradient // Acta Mechanica, 2007, vol. 194, no. 1–4, pp. 191–211.
15. *Arslan E., Mack W., Eraslan A.N.* The rotating elastic-plastic hollow shaft conveying a hot medium // Forsch Ingenieurwes, 2010, vol. 74, no. 1, pp. 27–39.
16. *Leu S.-Y., Chen J.T.* Sequential limit analysis of rotating hollow cylinders of nonlinear isotropic hardening // CMES – Comput. Model. in: Engng.&Sci., 2006, vol. 14, no. 2, pp. 129–140.
17. *Leu S.-Y.* Investigation of rotating hollow cylinders of strain-hardening viscoplastic materials by sequential limit analysis // Comput. Meth. in: Appl. Mech.&Enging., 2008, vol. 197, no. 51, pp. 4858–4865.
18. *Leu S.-Y., Hsu H.-C.* Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders // Int. J. Mech. Sci., 2010, vol. 52, no. 12, pp. 1579–1587.
19. *Ishlinsky A.Yu., Ivlev D.D.* The mathematical theory of plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2003. 704 p.
20. *Ishlinsky A.Yu.* The hypothesis of the strength of forming // Sci. Notes of Moscow State Univ., 1940, no. 46, pp. 104–114.
21. *Schmidt R.* Über den Zusammenhang von Spannungen und Formänderungen im Verfestigungsgebiet // Ingenieur-Archiv, 1932, vol. 3, no. 3, pp. 215–235.
22. *Hill R.* On the inhomogeneous deformation of a plastic lamina in a compression test // The London, Edinburgh, and Dublin Phil. Mag.&J. Sci., 1950, vol. 41, no. 319, pp. 733–744.
23. *Ivlev D.D.* On the development of a theory of ideal plasticity // J. Appl. Math.&Mech., 1958, vol. 22, no. 6, pp. 1221–1230.
24. *Cai Q., Pang M., Zhang Y.-Q., Liu X.* Elastic-plastic stress distribution of rotating annular disc based on twin-shear stress yield criterion // Zhejiang Daxue Xuebao (Gongxue Ban) / J. Zhejiang Univ. (Engng. Sci.), 2008, vol. 42, no. 9, pp. 1540–1544.
25. *Prokudin A.N.* Elastic-plastic analysis of rotating solid shaft by maximum reduced stress yield criterion // Vestn. Samarsk. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, 2020, vol. 24, no. 1, pp. 74–94.

26. *Zhao D.-w., Xie Y.-j., Liu X.-h., Wang G.-d.* Three-dimensional analysis of rolling by twin shear stress yield criterion // J. Iron&Steel Res. Int., 2006, vol. 13, no. 6, pp. 21–26.
27. *Zhu X., Pang M., Zhang Y.* Estimation of burst pressure of pipeline using twin-shear stress yield criterion // Yingyong Lixue Xuebao/Chinese J. Appl. Mech., 2011, vol. 28, no. 2, pp. 135–138.
28. *Burenin A.A., Tkacheva A.V., Scherbatyuk G.A.* To the calculation of transient temperature stresses in elastoplastic bodies // Comput. Mech. Contin. Media, 2017, vol. 10, no. 3, pp. 245–259.
29. *Burenin A.A., Tkacheva A.V., Scherbatyuk G.A.* To the use of piecewise-linear plastic potentials in the non-stationary theory of temperature stresses // Vestn. Samarsk. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, 2018, vol. 22, no. 1, pp. 23–39.
30. *Burenin A.A., Caying M., Tkacheva A.V.* To the calculation of plane stresses in the theory of transient temperature stresses in elastic-plastic bodies // Far Eastern Math. J., 2018, vol. 18, no. 2, pp. 131–146.
31. *Yu M.-H.* Unified Strength Theory and Its Applications. Singapore: Springer, 2018. 463 p.
32. *Sokolovsky V.V.* Theory of Plasticity. Moscow: Higher School, 1969. 608 p.
33. *Pisarenko G.S., Lebedev A.A.* Deformation and Strength of Materials Under Complex Stress State. Kiev: Nauk. Dumka, 1976. 415 p.
34. *Kolupaev V.A., Yu M.-H., Altenbach H.* Fitting of the strength hypotheses // Acta Mechanica, 2016, vol. 227, no. 6, pp. 1533–1556.
35. *Koiter W.T.* Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface // Quart. Appl. Math., 1953, vol. 11, no. 3, pp. 350–354.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 2, с. 193–209

УДК 534.1

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ БАЛКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ОБОБЩЕННОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, С ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКОЙ

В. И. Ерофеев[1,*], Е. Е. Лисенкова[1,], И. С. Царев[1,***]**

[1] *Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород, Россия*
**e-mail: erof.vi@yandex.ru*
***e-mail: eelissen@yandex.ru*
****e-mail: tsarev_ivan97@mail.ru*

Поступила в редакцию 01.07.2020 г.
После доработки 08.12.2020 г.
Принята к публикации 26.12.2020 г.

Приводится анализ наиболее известных моделей упругого основания. Показано, что, несмотря на различие в названии, речь идет об одной обобщенной модели, характеризующейся двумя коэффициентами. Такая модель позволяет не только сохранить простоту математического аппарата, которая присуща винклеровой модели, но и получить более достоверные результаты. Рассматривается согласованное динамическое поведение балки, лежащей на обобщенном упругом основании, характеризующимся двумя коэффициентами постели (коэффициентом сжатия и коэффициентом сдвига), с движущейся нагрузкой. Изучаются особенности генерации изгибных волн движущейся нагрузкой и определены критические скорости ее движения. Получено выражение для давления волн (силы сопротивления движению). Исследуется зависимость постоянной составляющей этой силы от скорости движения объекта. Приводится сравнение с результатами, полученными при использовании классической модели упругого основания.

Ключевые слова: балка, обобщенная модель упругого основания, движущаяся нагрузка, критическая скорость, изгибные волны, сила сопротивления движению

DOI: 10.31857/S0032823521020041

Введение. Динамическому поведению упругих систем с движущимися нагрузками уделено достаточно внимания в литературе, что связано с широким практическим приложением [1–18]. Особый интерес представляют задачи о колебаниях балок на винклеровском основании, которые используются в качестве моделей, описывающих динамику железнодорожного полотна [8, 12]. В связи с развитием высокоскоростных магистралей повышаются требования к модели и точности расчетов [11, 12, 14–18]. Использование обобщенной модели упругого основания, которая характеризуется двумя коэффициентами постели (коэффициентом сжатия и коэффициентом сдвига) позволяет, с одной стороны, сохранить простоту математического аппарата присущую модели Винклера [19], а с другой, получить более достоверные результаты.

Известно [7, 12], что при движении высокоскоростных нагрузок по упругим направляющим в последних возникают колебания в виде волн деформаций, давление которых дает основной вклад в сопротивление движению. Кроме того, эффекты волнообразования являются причиной многих проблем эксплуатации рельсовых направляющих ракетного трека [20–24]. Ниже исследуются динамические процессы в балке, лежащей на обобщенном упругом основании, с движущимся объектом, являющимся носителем источника колебаний, которые, так или иначе, связаны с эффектами волнообразования.

1. Классическая и обобщенная модели упругого основания. Одним из основных понятий теории сооружений является упругое основание, под которым подразумевается механическая расчетная модель упругой среды, сопротивляющейся деформированию конструкции, взаимодействующей с ней. Такой средой в задачах строительной механики , как правило, выступает грунтовое основание. Исторически первая и самая распространенная модель упругого основания базируется на гипотезе Винклера (1867) [19], развитой Циммерманом (1888 г.) [25]. Эта гипотеза предполагает, что зависимость между давлением на грунт (q) и вызванной им осадкой точки (u) является прямо пропорциональной

$$q = Ku \tag{1.1}$$

Из (1.1) следует, что при давлении на поверхность грунта на какой-либо одной малой площадке грунт будет оседать только под ней. В действительности же грунт обладает распределительной способностью, т.е. он оседает не только под нагруженной областью, под фундаментом, но и вблизи него.

Учитывать влияние соседних нагрузок на упругую осадку грунта в данной точке под нагруженной поверхностью по убывающей показательной функции

$$u(r) = Ae^{-\alpha r} \tag{1.2}$$

предложил К. Вигхардт (1922 г.) [26].

М.М. Филоненко-Бородичем (1945 г.) [27] предложена модель упругого основания, в которой независимые “винклеровские” пружины дополняются по верху нерастяжимой нитью (“мембранная модель”) с постоянной горизонтальной проекцией натяжения T или балкой (“ламинарная модель”). В пространственном случае нити заменяются мембранами, а балка – плитой.

Дифференциальное уравнение, характеризующее работу основания по Филоненко-Бородичу в случае мембранной модели, имеет следующий вид:

$$Ku - T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = q(x, y) \tag{1.3}$$

Следует заметить, что дифференциальное уравнение поверхности мембраны, подкрепленной пружинами, ранее было получено Т. Карманом [28], и (1.3) полностью совпадает с этим уравнением.

В качестве модели грунта, с которым взаимодействуют конструкции, П.Л. Пастернак (1954 г.) предложил использовать “сплошное упругооседающее и упруговращающееся основание” [29], свойства которого описываются двумя независимыми коэффициентами постели: коэффициентом сжатия h_1, имеющим размерность (кГ/см^3), и коэффициентом сдвига h_2 размерности кГ/см, учитывающим совместную работу соседних областей. Первый коэффициент аналогичен коэффициенту постели Винклера, а второй “дает возможность выразить интенсивность вертикальной силы сдвига (или изгибающего момента) в виде произведения h_2 на производную осадки в соответствующем направлении” [29].

Схематическое изображение такого упругого основания приведено, например, в [30].

Упругое основание Пастернака описывается уравнением, совпадающим по виду с (1.3), $K = h_1, T = h_2$.

При разработке технической теории расчета конструкций на упругом основании в качестве основания использовалась [31, 32] однослойная или многослойная модели, описываемые двумя или большим количеством обобщенных упругих характеристик.

При этом работа однослойного упругого основания Власова–Леонтьева описывалась уравнением вида (1.3).

В случае одномерной однородной задачи, соответствующей (1.3), получается уравнение

$$\alpha^2 u - \frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \tag{1.4}$$

где $\alpha = \sqrt{K/T}$.

Уравнение (1.4) имеет “затухающее” решение в виде:

$$u(x) = Ae^{-\alpha x} \tag{1.5}$$

Заметим, что (1.5) совпадает с соотношением (1.2) (модель Вигхардта).

Сопоставление (1.2)–(1.4) и (1.5) показывает, что речь идет об одной обобщенной модели упругого основания. Кроме авторов работ [19, 25–29, 31, 32], подобную же модель рассматривали Э. Рейсснер [33], и М. Хетеньи [34]. Таким образом, обобщенную модель упругого основания справедливо называть моделью Вигхардта–Кармана–Филоненко-Бородича–Пастернака–Власова–Леонтьева–Рейсснера–Хетеньи.

Уравнение равновесия деформируемой поверхности, согласно модели (1.3), представляет собой классическое неоднородное уравнение Гельмгольца. Параметрам K и T, входящим в уравнение (1.3), разные авторы дают различную механическую трактовку.

Обобщенную модель упругого основания называют двухкоэффициентной [29], двухxарактеристической [35, 36], двухпараметрической [37–40], но чаще всего – моделью Пастернака (см., например, [41–45]).

Модель упругого основания с двумя коэффициентами постели (на растяжение и на сдвиг) далее в этой работе будем называть обобщенной или моделью Пастернака, в отличие от классической модели упругого основания (модель Винклера).

Для моделирования деформируемого основания кроме методов, основанных на работе с системами дискретных упругих элементов, применяются и методы теории упругости. Еще в 1919 г. Г.Э. Проктор предложил моделировать основание однородной изотропной упругой средой [46–48]. К этому же направлению относится работа М.И. Горбунова-Посадова [49].

Однако гипотеза о деформируемом основании как об упругом пространстве наделяет среду преувеличенно высокими распределительными свойствами, т.е. приводит во многих случаях (особенно при плоской деформации) к существенному преувеличению расчетных величин – прогибов и изгибающих моментов.

Преодолеть это противоречие удается с помощью моделей упругого слоя с различными условиями на его границе [50–54]. Такие модели предполагают, что с нагруженным фундаментом (конструкцией) взаимодействует ограниченная по высоте область грунтового массива. Ниже этой области находится недеформируемая область, жесткость которой принимается бесконечно большой.

При уменьшении толщины слоя такие модели приближаются к винклеровской, а при увеличении толщины слоя – к модели упругого полупространства.

Показано [55, 56], что расчет по моделям (1.2)–(1.5), являющийся промежуточным между расчетами по модели Винклера и модели упругого полупространства, дает более быстрое затухание осадок поверхности грунта по мере удаления от края фундамента, чем теория упругости.

2. Постановка и решение задачи о действии подвижной нагрузки на балку, лежащую на обобщенном упругом основании. Рассмотрим систему, состоящую из направляющей, вдоль которой по неизвестному закону $x = l(t)$ движется объект, обладающий моментом инерции I_0 и массой m, на который действует переменная сила $P(t)$. Динамическое поведение упругой направляющей и движущегося по ней объекта взаимообусловлены, т.е. характер колебаний направляющей зависит от закона движения объекта, а движение последнего происходит как под действием внешних сил, так и сил реакции со стороны направляющей.

Направляющую будем считать лежащей на упругом основании модели Пастернака [29] однородной балкой, колебания которой описываются в рамках гипотезы Бернулли–Эйлера [57].

Воспользуемся вариационным подходом для вывода уравнений движения и естественных краевых условий. С этой целью выпишем плотность функции Лагранжа λ рассматриваемой направляющей и функцию Лагранжа L движущегося объекта:

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\rho F u_t^2 - IEu_{xx}^2 - h_1 u^2 - h_2 u_x^2\right), \quad L = \frac{1}{2}m\left(\dot{u}_0^2 + \dot{\ell}^2\right) + \frac{1}{2}I_0 \dot{w}_0^2,$$

где $u(x,t)$ – поперечное смещение срединной линии балки; ρF – погонная плотность; I – момент инерции, E – модуль Юнга, h_1 и h_2 – коэффициент “постели” на сжатие и коэффициент “сдвига” основания балки, соответственно; $u_0(t)$ и $w_0(t)$ – поперечное смещение и угол поворота объекта.

Здесь и далее индексами t обозначаются частные производные по времени, индексами x – производные по координате, а точкой – обыкновенная производная по времени.

Используя методику постановок краевых задач на основе вариационного принципа Гамильтона–Остроградского [7, 58], получим, что взаимообусловленное динамическое поведение балки и движущегося по ней объекта (в предположении, что их параметры постоянны) описывается системой уравнений

$$u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} - c_{II}^2 u_{xx} + \omega_0^2 u = 0 \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered} u(x = l(t) + 0, t) = u(x = l(t) - 0, t) = u(l(t), t) = u_0(t) \\ u_x(x = l(t) + 0, t) = u_x(x = l(t) - 0, t) = u_x(l(t), t) = w_0(t) \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$I_0 \ddot{w}_0 = IE\left[u_{xx}\right] \tag{2.3}$$

$$m\ddot{u}_0(t) = -\rho F\left[\alpha^2 u_{xxx} - c_{II}^2 u_x - \dot{l} u_t\right] + P(t) \tag{2.4}$$

$$m\ddot{l} = F_{pr} + Q, \quad F_{pr} = -\frac{1}{2}\rho F\left[u_t^2 + \alpha^2 u_{xx}^2 + c_{II}^2 u_x^2 - \omega_0^2 u^2 - 2\alpha^2 u_x u_{xxx} + 2\dot{l} u_x u_t\right] \tag{2.5}$$

Здесь квадратные скобки означают разность предельных значений стоящих в них величин справа и слева от движущейся границы $x = l(t)$, $\alpha = \sqrt{IE/\rho F}$, $c_{II} = \sqrt{h_2/\rho F}$, $\omega_0 = \sqrt{h_1/\rho F}$ – наинизшая частота возбуждаемых в балке волн, F_{pr} – давление волн, Q – внешняя сила. Для полноты постановки задачи следует задать начальные условия и ограниченности смещений $u(x,t)$ при $x \to \pm\infty$.

Предполагаем, что балка является бесконечной. Такая идеализация допустима, если на ее границах находятся оптимальные демпфирующие устройства, т.е. параметры граничного закрепления таковы, что падающие на него возмущения не будут отражаться. На основе точных решений модельных задач для упругих систем обосновано [58] существование согласованных концевых гасителей различных типов колебаний, не дающих отраженных возмущений в системе. Это позволяет рассматривать модель балки без учета граничных условий, а вибрации, распространяющиеся по балке, рассматривать как бегущие изгибные волны.

Полагая движение равномерным ($l(t) = Vt$, $V = \text{const}$), и используя разработанный подход к исследованию подобного рода задач [7, 58], будем искать установившееся (стационарное) решение слева ($x < Vt$) и справа ($x > Vt$) от движущейся нагрузки в форме бегущей гармонической волны:

$$A\exp\left[i\left(\omega t - kx\right)\right], \tag{2.6}$$

где A — комплексная амплитуда, ω — круговая частота, k — волновое число.

Тогда задача определения частот, волновых чисел возбуждаемых волн и критических скоростей движения нагрузки, часто называемая задачей кинематики волн, сведется к решению дисперсионного уравнения

$$-\omega^2 + \alpha^2 k^4 + c_{II}^2 k^2 + \omega_0^2 = 0 \tag{2.7}$$

совместно с кинематическим инвариантом [7, 58]:

$$\omega - Vk = \Omega, \tag{2.8}$$

выражающим равенство фаз излучаемых волн в точке, где находится движущийся источник возмущений частоты Ω. Условие (2.8) определяет величину смещения частоты согласно эффекту Доплера [7]. В случае постоянной силы ($\Omega = 0$) кинематический инвариант запишется в виде $\omega - kV = 0$. Заметим, что для однозначного определения кинематических характеристик возбуждаемых волн необходимо воспользоваться условиями ограниченности прогибов направляющей на бесконечности и условиями излучения Мандельштама [7, 58].

Одним из основных вопросов при исследовании динамического поведения направляющих под действием движущихся нагрузок является вопрос о критических скоростях. Под критической скоростью (V_*) движения нагрузки понимается такая скорость, при превышении которой качественно меняется картина волнообразования [7]. Необходимость в правильном расчете критических скоростей при проектировании скоростных наземных магистралей связана, прежде всего, с тем, что они являются предельно допустимыми (см. [11, 12] и литературу к ним).

Из условия вырождения корней системы уравнений (2.7), (2.8) получим, что критические скорости движения нагрузки определяются решением уравнения восьмого порядка, которое в безразмерных переменных имеет вид

$$\begin{gathered}\tilde V^8 - \beta^2\left(4 - \tilde\Omega^2\right)\tilde V^6 + \left[-9\tilde\Omega^2\left(4 - \tilde\Omega^2\right) + 3\beta^4\left(2 - \tilde\Omega^2\right) - 8\left(1 - \tilde\Omega^2\right)^2\right]\tilde V^4 + \\ + \beta^2\left[36\tilde\Omega^2\left(1 - \tilde\Omega^2\right) - \beta^4\left(4 - 3\tilde\Omega^2\right) + 16\left(1 - \tilde\Omega^2\right)^2\right]\tilde V^2 + \\ + \left(1 - \tilde\Omega^2\right)\left(\beta^4 - 4 + 4\tilde\Omega^2\right)^2 = 0,\end{gathered} \tag{2.9}$$

где $\tilde V = V\big/\sqrt{\alpha\omega_0}$, $\beta^2 = c_{II}^2\big/(\alpha\omega_0)$, $\tilde\Omega = \Omega/\omega_0$.

В пренебрежении коэффициентом сдвига ($\beta \to 0$) из (2.9) получим известные выражения [58] для критических скоростей движения нагрузки вдоль балки Бернулли—Эйлера на винклеровском основании:

$$\tilde V_{1,2}^* = \sqrt[4]{\frac{1}{2}\left(8 + 20\tilde\Omega^2 - \tilde\Omega^4 \mp \tilde\Omega\left(\tilde\Omega^2 + 8\right)^{3/2}\right)} \tag{2.10}$$

Они определяют на плоскости параметров ($\tilde\Omega$, $\tilde V$) задачи две кривые, разбивающие ее на области с различным числом возбуждаемых волн (рис. 1).

Учет коэффициента сдвига ($\beta \neq 0$) в основании не приводит к изменению числа критических скоростей (их, по-прежнему, две, если частота источника не превосходит ω_0, либо одна — в противном случае) и качественной картины волнообразования (рис. 1). Так, при частоте источника меньше критической $\tilde\Omega < 1$ и скорости его движения

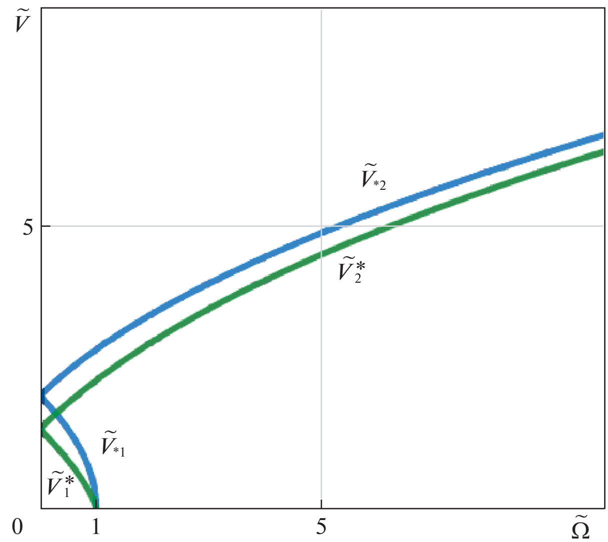

Рис. 1. Зависимость скорости движения объекта от частоты источника колебаний при $\beta = 0$ и $\beta = 2$.

меньше первой критической скорости $\tilde{V} < \tilde{V}_{*1}$ движущий источник создает локальное собственное поле, представляющее собой суперпозицию спадающих по экспоненте осцилляций. Если скорость движения объекта превышает первую критическую $\tilde{V}_{*1}$, но не превосходит вторую критическую $\tilde{V}_{*2}$ скорость ($\tilde{V}_{*1} < \tilde{V} < \tilde{V}_{*2}$), то кроме собственного поля излучаются две волны, одна из которых с большей частотой распространяется перед объектом, а другая с меньшей частотой – позади (к этой ситуации относится и случай $\tilde{\Omega} > 1$, $\tilde{V} < \tilde{V}_{*2}$). При превышении второй критической скорости собственное поле отсутствует, но зато возбуждаются по две волны впереди и позади объекта. Направления распространения этих волн аналогичны [58].

Проведем расчет критических скоростей по формулам (2.9) и (2.10) в случае рельсовой направляющей ракетного трека [21] с параметрами: изгибная жесткость $EI = 1.16$ МНм^2, погонная плотность $\rho F = 65$ кг/м, жесткость упругого основания $h_1 = 200$ МНм^2, значение частоты воздействия на рельсовую направляющую $\Omega = 620$ 1/с. Положим $\beta^2 \approx 3.28$, исходя из того, что для большинства грунтов отношение коэффициентов сдвига и сжатия меньше единицы [29]. В результате из (2.9) и (2.10) соответственно будем иметь

$$V_{*1} = 920 \text{ м/с}, \quad V_{*2} = 1258 \text{ м/с}, \quad V_1^* = 505 \text{ м/с}, \quad V_2^* = 846 \text{ м/с}$$

Наличие второго коэффициента в основании приводит к увеличению значений критических скоростей, которые сопоставимы с экспериментальными данными. Так, например, на ракетном треке ВНИИЭФ при скоростях разгона 1160–1450 м/с взаимодействие ступени ракетного поезда с направляющей в некоторых случаях приводило к появлению волнообразных остаточных деформаций и, в конечном итоге, разрушению рельсовой направляющей.

На основе решения задачи кинематики, колебания балки под действием равномерно движущейся нагрузки представимо в форме

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1(x,t) = A_1 e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + A_2 e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} & \text{при} \quad x \le Vt \\ u_2(x,t) = A_3 e^{i(\omega_3 t - k_3 x)} + A_4 e^{i(\omega_4 t - k_4 x)} & \text{при} \quad x > Vt \end{cases} \tag{2.11}$$

Комплексные амплитуды A_j $(j = \overline{1,4})$ определяются из системы алгебраических уравнений, получающихся после подстановки (2.11) в (2.1)—(2.4), и имеют вид

$$A_1 = \left[-k_{32}k_{42}IE + iI_0\Omega^2 k_2\right] P_0 \Big/ k_{12}\Delta, \quad A_2 = \left[k_{31}k_{41}IE - iI_0\Omega^2 k_1\right] P_0 \Big/ k_{12}\Delta$$

$$A_3 = -\left[k_{42}k_{41}IE + iI_0\Omega^2 k_4\right] P_0 \Big/ k_{43}\Delta, \quad A_4 = \left[k_{31}k_{32}IE + iI_0\Omega^2 k_3\right] P_0 \Big/ k_{43}\Delta$$

$$\Delta = \left[k_{32}k_{42}k_{31}k_{41}I^2E^2 + I_0 m\Omega^4\right] i +$$

$$+ \left(k_{31} + k_{42}\right) IEm\Omega^2 + \left[k_1 k_2 \left(k_1 + k_2\right) - k_3 k_4 \left(k_3 + k_4\right)\right] IEI_0\Omega^2,$$

где P_0 — амплитуда источника колебаний, $k_{nm} = k_n - k_m$.

При движении по направляющей тяжелой массы $(P = -mg,\ I_0 = 0)$ существует только одна критическая скорость, при переходе через которую возбуждаются бегущие волны. Выражение для нее находится из (2.9) в явном виде $V_* = \sqrt{2\alpha\omega_0 + c_{II}^2}$. Следует отметить, что такое выражение для критической скорости, по-видимому, впервые было получено другим способом в работе [35]. Эта скорость совпадает с минимальной фазовой скоростью распространения волн для данной модели (рис. 2) и превышает аналогичную для балки модели Бернулли—Эйлера на винклеровском основании [7, 58].

На рис. 2 представлены в безразмерном виде ($\tilde{v}_{\text{ph}} = v_{\text{ph}} \big/ \sqrt{\alpha\omega_0}$, $\tilde{v}_{\text{gr}} = v_{\text{gr}} \big/ \sqrt{\alpha\omega_0}$, $\tilde{k} = k\sqrt{\alpha/\omega_0}$, $\beta^2 = c_{II}^2 \big/ (\alpha\omega_0)$) зависимости фазовой ($v_{\text{ph}} = \omega/k$) и групповой скоростей ($v_{\text{gr}} = d\omega/dk$) от волнового числа k для различных параметров β ($\beta = 0.1;\ 2;\ 10$). При длине волны $2\pi\sqrt{\alpha/\omega_0}$ фазовая скорость по величине совпадает с групповой и достигает своего минимального значения равного $\sqrt{2\alpha\omega_0 + c_{II}^2}$. Видно (рис. 2), что в диапазоне от 0 до 1 для безразмерных волновых чисел (от 0 до $\sqrt{\alpha/\omega_0}$ — в размерных переменных), значения фазовых скоростей волн превосходят значения их групповых скоростей, следовательно дисперсия является нормальной. Аномальная дисперсия наблюдается при превышении этого диапазона ($\tilde{k} > 1$). Если $c_{II} = \sqrt{2\alpha\omega_0}$, то зависимость групповой скорости от волнового числа линейна (рис. 2б) как для балки модели Бернулли—Эйлера без учета упругого основания [59].

Учитывая, что на бесконечности прогибы балки ограничены, а бегущие волны отводят энергию от объекта, т.е.

$$\begin{cases} \operatorname{Im} k > 0 \\ V_{\text{gr}} < V \end{cases} \quad \text{при} \quad x < Vt, \qquad \begin{cases} \operatorname{Im} k < 0 \\ V_{\text{gr}} > V \end{cases} \quad \text{при} \quad x > Vt$$

($V_{\text{gr}} = d\omega/dk$ — групповая скорость волн) из (2.7), (2.8) находим, что при $V < V_*$ слева от нагрузки ($x < Vt$)

$$k_{1,2} = \frac{1}{2\alpha}\left(\pm\sqrt{2\alpha\omega_0 - c_{II}^2 + V^2} + i\sqrt{2\alpha\omega_0 + c_{II}^2 - V^2}\right),$$

а справа при $x > Vt$

$$k_{3,4} = \frac{1}{2\alpha}\left(\pm\sqrt{2\alpha\omega_0 - c_{II}^2 + V^2} - i\sqrt{2\alpha\omega_0 + c_{II}^2 - V^2}\right), \quad \omega_{1-4} = k_{1-4}V \qquad (2.12)$$

Следовательно, у неподвижной нагрузки или движущейся со скоростью, меньше критической, поле поперечных смещений локализовано около источника и представляет собой суперпозицию спадающих по экспоненте осцилляций. Полученные решения

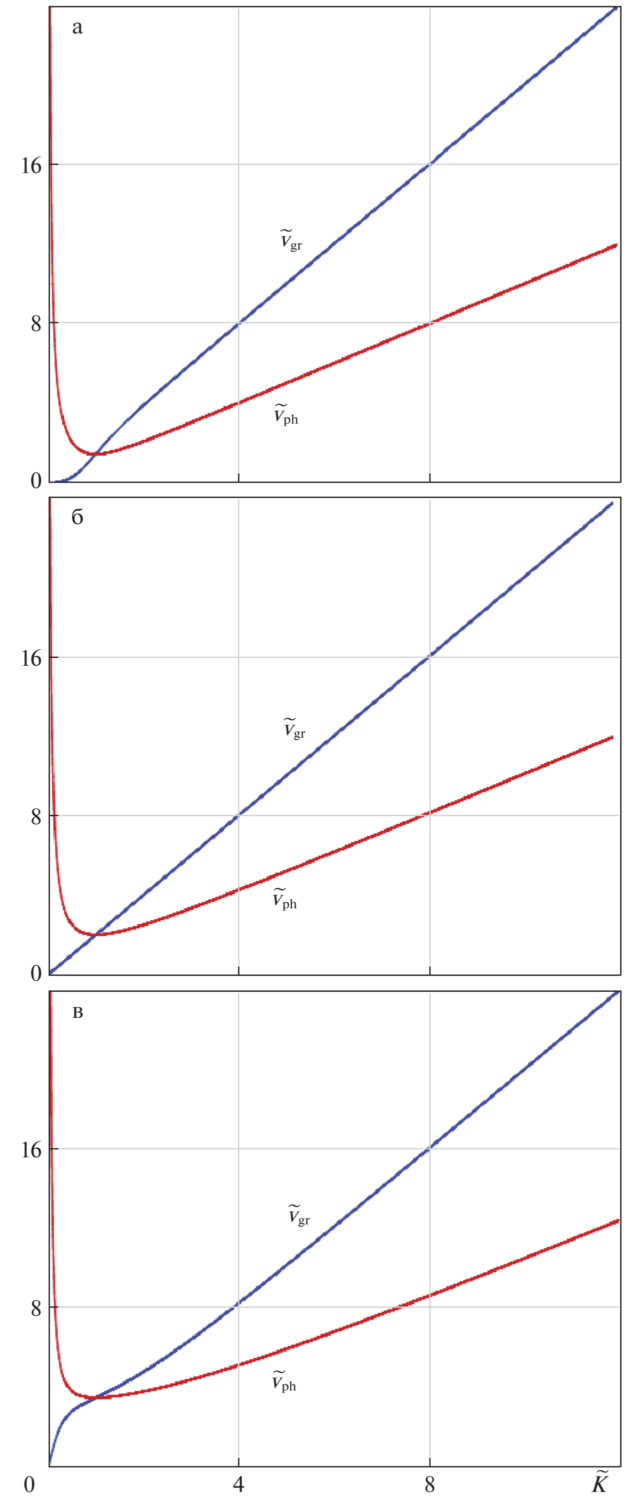

Рис. 2. Зависимости фазовой и групповой скоростей от волнового числа.

справедливы при $c_{II}^2 < 2\alpha\omega_0$, что имеет место в большинстве практических случаев, а также при $V > \sqrt{c_{II}^2 - 2\alpha\omega_0}$, если $c_{II}^2 > 2\alpha\omega_0$. Заметим, что при движении нагрузки со скоростью $V < \sqrt{c_{II}^2 - 2\alpha\omega_0}$, когда $c_{II}^2 \geq 2\alpha\omega_0$ волновые числа будут чисто мнимыми. В этом случае осциллирующая часть отсутствует. Профиль прогиба под нагрузкой симметричен и экспоненциально спадает по мере удаления от нее.

Источник нулевой частоты, движущийся со скоростью $V > V_*$, собственного поля не создает, но зато излучает четыре волны, две из которых бегут впереди движущейся нагрузки, а две другие — ей вослед, отводя от нее энергию. Волновые числа и частоты волн определяются формулами

$$\begin{gathered} k_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\left(V^2 - c_{II}^2 - \sqrt{\left(V^2 - c_{II}^2\right)^2 - 4\alpha^2\omega_0^2}\right)^{1/2} \\ k_{3,4} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\left(V^2 - c_{II}^2 + \sqrt{\left(V^2 - c_{II}^2\right)^2 - 4\alpha^2\omega_0^2}\right)^{1/2} \\ \omega_{1-4} = k_{1-4}V \end{gathered} \tag{2.13}$$

Таким образом, зная конкретный вид частот и волновых чисел излучаемых волн, имеем решение (2.11) в параметрах задачи для каждого качественно-различного кинематического случая (2.12), (2.13):

при $V < V_*$

$$u_{1,2}(x,t) = -Ae^{\pm b(x-Vt)}\cos\left(\mp\sqrt{2\alpha\omega_0 - c_{II}^2 + V^2}\,(2\alpha)^{-1}(x - Vt) - \varphi\right)$$

$$A = \frac{\sqrt{\alpha}mg}{\rho F\sqrt{4\alpha^2\omega_0^3 - \omega_0\left(V^2 - c_{II}^2\right)^2}}, \quad b = \sqrt{2\alpha\omega_0 + c_{II}^2 - V^2}\,(2\alpha)^{-1}$$

$$\varphi = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2\sqrt{\alpha\omega_0} - \sqrt{2\alpha\omega_0 - c_{II}^2 + V^2}}{\sqrt{2\alpha\omega_0 + c_{II}^2 - V^2}}\right)$$

и при $V > V_*$

$$u_{1,2}(x,t) = \frac{mgb_{2,1}\sin\left(b_{1,2}(x - Vt)/\alpha\right)}{\rho F\omega_0\sqrt{\left(V^2 - c_{II}^2\right)^2 - 4\alpha^2\omega_0^2}}$$

$$b_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{V^2 - c_{II}^2 \mp \sqrt{\left(V^2 - c_{II}^2\right)^2 - 4\alpha^2\omega_0^2}}$$

Амплитуды волн неограниченно возрастают при критической скорости движения нагрузки $V = V_*$, т.е. резонансные условия совпадают с условиями кратности корней задачи кинематики. На рис. 3 представлены графики поперечного смещения срединной линии балки в системе координат, связанной с движущейся нагрузкой $\xi = (x - Vt)\sqrt{\omega_0/\alpha}$ для различных безразмерных значений $\tilde{V}$ и β.

Расчеты проводились при $\beta^2 = 0; 0.4$; $\tilde{V}^2 = 0; 0.6; 2.6$ и тех же параметрах направляющей ракетного трека, которые использовались выше и в работе [21]. Увеличение скорости приводит к более медленному затуханию прогибов с удалением от точки приложения движущегося источника, чем от статической нагрузки (рис. 3а). Коэффициент затухания нераспространяющейся волны для направляющей, лежащей на обобщенном упругом основании, превосходит аналогичный для балки на винклеровском

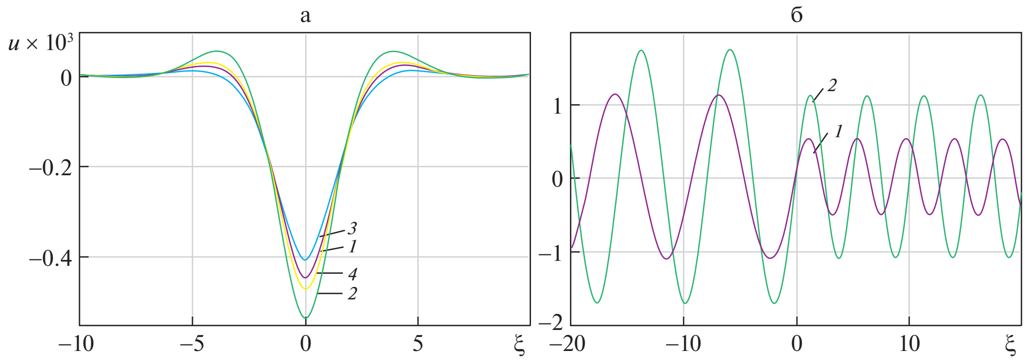

Рис. 3. Изменение прогиба направляющей в системе координат, связанной с движущейся нагрузкой а) при докритических скоростях $\tilde{V} < \tilde{V}_*$ 1) $\beta = 0, \tilde{V} = 0$, 2) $\beta = 0, \tilde{V} \neq 0$, 3) $\beta \neq 0, \tilde{V} = 0$, 4) $\beta \neq 0, \tilde{V} \neq 0$, б) при закритических скоростях $\tilde{V} > \tilde{V}_*$, 1) $\beta = 0$, 2) $\beta \neq 0$ с учетом и в пренебрежении безразмерным коэффициентом сдвига упругого основания.

основании, уменьшаясь с возрастанием скорости. При закритических скоростях движения прогиб в точке приложения силы равен нулю (рис. 3б) для обеих моделей. Источник, движущийся по балке на основании Пастернака, излучает бегущие волны с большими амплитудами, чем по балке на винклеровском основании (рис. 3б).

На основе общего решения задачи получим следующее выражение для давления волн (силы сопротивления движению [60, 61])

$$F_{\text{pr}} = \begin{cases} 0, & V < V_*, \\ -\dfrac{(mg)^2}{2\rho F\sqrt{\left(V^2 - c_{II}^2\right)^2 - 4\alpha^2\omega_0^2}}, & V > V_* \end{cases}$$

Поскольку собственное поле не оказывает давление на нагрузку, то для $V < V_*$ имеем $F_{\text{pr}} \equiv 0$ (рис. 4). Случай $V = V_*$ является “резонансным” значением скорости, сопровождающейся неограниченным ростом F_{pr}. На рис. 4 первая кривая построена для балки на винклеровском основании, вторая – на основании модели Пастернака. Начиная со скорости $V = V_*$ (как было сказано выше), в системе происходит излучение волн по две слева и справа от нагрузки, бегущих в $+x$ направлении, подобно эффекту Вавилова–Черенкова [62], оказывая давление на нагрузку. Видно, что при $V > V_*$ сила давления волн F_{pr} всегда направлена против движения (тормозящая).

Заключение. При малых скоростях движения объекта (рис. 3а) использование винклеровой модели упругого основания дает завышенное значение поперечного смещения направляющей под нагрузкой по сравнению с моделью Пастернака, а при закритических скоростях (рис. 3б) – заниженные динамические характеристики бегущих волн и силы давления волн в движущемся контакте (рис. 4). Если движение нагрузки происходит со скоростью $\sqrt{2\alpha\omega_0} < V < \sqrt{2\alpha\omega_0 + c_{II}^2}$, то в первом случае (винклерово основание) колебания направляющей носят волновой характер, в то время как при использовании основания с двумя коэффициентами постели, бегущие волны еще не излучаются. Расчет критических скоростей по формуле (2.9) показал сопоставимость с экспериментальными данными, полученными на ракетном треке ВНИИЭФ при высоких скоростях разгона.

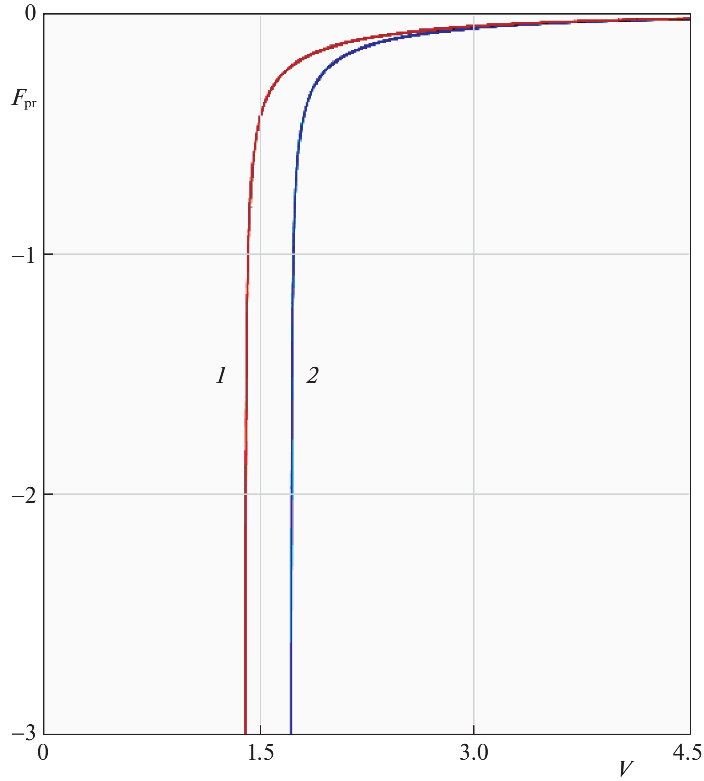

Рис. 4. Среднее значение силы давления волн в зависимости от скорости движения объекта.

Следует также отметить, что полученный вывод о безграничном возрастании амплитуд волн и силы сопротивления являются следствием пренебрежения затуханием. В действительности, если учесть, например, диссипативные потери в основании балки, то это приведет к ограничению резонансных максимумов, асимметрии прогиба направляющей впереди и позади от движущейся нагрузки и к наличию сопротивления движению при докритических скоростях [12, 58, 60] даже в отсутствие трения.

Ясно, что принятая в работе идеализация не учитывает многие особенности, присущие реальным техническим системам, так, например, в случае железнодорожного пути, это рельсовые скрепления и т.п., но удобна и чаще всего используется для решения инженерных задач, а, кроме того, позволяет получить точное решение рассматриваемой задачи.

Рассмотренная задача дополняет цикл исследований проблем волновой динамики и устойчивости движения высокоскоростных объектов по рельсовым направляющим ракетного трека [20–24]. Полученные результаты могут служить методическим и расчетным сопровождением при постановке экспериментов по высокоскоростному разгону полезной нагрузки.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 20-19-00613).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
2. *Fryba L.* Vibration of Solids and Structures under Moving Loads. Prague: Academia, 1972. 484 p.
3. *Филиппов А.П., Кохманюк С.С., Воробьев Ю.С.* Воздействие динамических нагрузок на элементы конструкций. Киев: Наук. думка, 1974. 176 с.
4. *Кохманюк С.С., Янютин В.Г., Романенко Л.Г.* Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. Киев: Наук. думка, 1980. 232 с.
5. *Бондарь Н.Г., Козьмин Ю.Г., Ройтбурд З.Г., Тарасенко В.П., Яковлев Г.Н.* Взаимодействие железнодорожных мостов с подвижным составом. М.: Транспорт, 1984. 272 с.
6. *Вериго М.Ф., Коган А.Я.* Взаимодействие пути и подвижного состава. М.: Транспорт, 1987. 560 с.
7. *Весницкий А.И.* Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
8. *Veritchev S.N.* Instability of a Vehicle Moving on an Elastic Structure. 2002. 190 p.
9. *Vostrukhov A.V.* Three-Dimensional Dynamic Models of a Rail-Way Track for High-Speed Trains. Delft: Univ. Press, 2002. 184 p.
10. *Козин В.М., Жесткая В.Д., Погорелова А.В., Чижиумов С.Д., Джабраилов М.Р., Морозов В.С., Кустов А.Н.* Прикладные задачи динамики ледяного покрова. М.: Изд-во Академии естествознания. 2008. https://www.monographies.ru/ru/book/view?id=14
11. *Иванченко И.И.* Динамика транспортных сооружений: высокоскоростные подвижные, сейсмические и ударные нагрузки. М.: Наука, 2011. 574 с.
12. *Метрикин А.В., Веричев С.Н., Вострухов А.В.* Фундаментальные задачи высокоскоростного наземного транспорта. Saarbrucken: Lambert Acad. Publ., 2015. 200 с.
13. *Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Нестационарное движение нормальной сосредоточенной нагрузки вдоль границы упругой полуплоскости // Тр. МАИ. 2015. № 82. 20 с. www.mai.ru/science/trudy
14. *Савин А.В.* Выбор конструкции пути для высокоскоростного движения // Транспорт РФ. 2017. № 1 (68). С. 18–21.
15. *Абдурашитов А.Ю., Локтев А.А., Сычева А.В., Сычев П.В.* Расчет высокочастотных вибраций железнодорожного пути под подвижным составом при скоростях 200–250 км/ч // Вестн. трансп. Поволжья. 2018. № 6 (72). С. 22–28.
16. *Абдурашитов Ю.А., Сычев В.П., Абдурашитов А.Ю.* Оценка влияния воздействия подвижного состава с различной нагрузкой на ось на железнодорожный путь с различной толщиной балластного слоя и элементами верхнего строения пути на основе моделирования // Внедр. совр. констр. и перед. технол. в путевое хоз-во. 2018. Т. 12. № 12 (12). С. 58–64.
17. *Абдурашитов А.Ю., Кузнецов С.В.* О выборе профиля рельсов для кривых участков пути // Внедр. совр. констр. и перед. технол. в путевое хоз-во. 2020. Т. 16. № 16 (16). С. 20–25.
18. *Savin A., Suslov O., Korolev V., Loktev A., Shishkina I.* Stability of the continuous welded rail on transition sections // Adv. in Intell. Syst.&Comput. 2020. V. 1115. AISC. P. 648–654
19. *Winkler E.* Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit. Prague, 1867.
20. *Бутова С.В., Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г.* Устойчивость движения высокоскоростных объектов по направляющим ракетного трека // Пробл. машиностр. и надежн. машин. 2015. № 1. С. 3–8.
21. *Герасимов С.И., Ерофеев В.И.* Расчет изгибно-крутильных колебаний рельсовой направляющей ракетного трека // Пробл. машиностр. и надежн. машин. 2016. № 3. С. 25–27.
22. *Erofeev V., Lissenkova E., Malkhanov A.* Wave resistance to the movement of objects along the rocket track guides // MATEC Web Conf. 2018. V. 224. Article ID 02016. P. 1–6.
23. *Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г., Одзерихо И.А.* Условие на скользящем контакте в анализе устойчивости движения ступени на ракетном треке // Пробл. машиностр. и надежн. машин. 2018. № 3. С. 21–27.
24. *Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Одзерихо И.А., Смирнов Д.Ю.* Оценка влияния волновых процессов в упругой направляющей на динамику ракетного трека // Вестн. научно-технич. развит. 2019. № 6 (142). С. 3–12.

25. *Zimmerman H.* Die Berechnung des Eisenbahnoberbauee. Berlin, 1888.
26. *Wieghardt K.* Uber den Ralken auf Nachgibiebiger Unterlage // Zeitschriff fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 1922. Bd. 2. H. 3. S. 165–184.
27. *Филоненко-Бородич М.М.* Простейшая модель упругого основания, способная распределять нагрузку // Тр. Моск. электромех. ин-та инж. трансп. 1945. № 53. С. 92–108.
28. *von Karman T.* Festigkeitsproblem im maschinenbau // Encyk. D. Math. Wiss. IV. 1910. P. 311–385.
29. *Пастернак П.Л.* Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. М.: Госстройиздат, 1954. 56 с.
30. *Леонтьев Н.Н., Леонтьев А.Н., Анохин Н.Н., Соболев Д.Н.* Основы теории балок и плит на деформируемом основании. М.: МИСИ, 1982. 120 с.
31. *Власов В.З., Леонтьев Н.Н.* Техническая теория расчета фундаментов на упругом основании // Тр. МИСИ. 1956. Вып. 14 (154). С. 12–31.
32. *Власов В.З., Леонтьев Н.Н.* Балки, плиты, оболочки на упругом основании. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1960. 492 с.
33. *Reissner E.* Selected Works in Applied Mechanics and Mathematics. Sudbury (MA): Jones&Bartlett Pub., 1996.
34. *Hetenyi M.* Beams on Elastic Foundations. Michigan: Univ. Press, 1946. 255 p.
35. *Дуплякин И.А.* Движение экипажа с постоянной скоростью по балке бесконечной длины, лежащей на основании с двумя упругими характеристиками // ПММ. 1991. Т. 55. № 3. С. 461–471.
36. *Александров В.М., Дуплякин И.А.* Динамика бесконечной балки Тимошенко, лежащей на основании с двумя упругими характеристиками, при движении деформируемого экипажа // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 1. С. 180–197.
37. *Сливкер В.И.* К вопросу о назначении характеристик двухпараметрового упругого основания // Строит. мех. и расчет сооруж. 1981. № 1. С. 36–39.
38. *Eisenberger M., Clastornik J.* Beams on variable two-parameter elastic foundation // Comput.&Struct. 1986. V. 23. P. 351–356.
39. *Куреннов С.С.* Модель двухпараметрического упругого основания в расчете напряженного состояния клеевого соединения // Электрон. ж. Труды МАИ. 2013. № 66. 7 с. http://www.mai.ru/science/trudy/
40. *Рао Ч.К., Рао Л.Б.* Закритическое поведение тонкостенной свободно опертой балки с открытым профилем поперечного сечения, покоящейся на двухпараметрическом упругом основании, при ее кручении // ПМТФ. 2018. Т. 59. № 1 (347). С. 204–213.
41. *Wang T.M., Stephens J.E.* Natural frequencies of Timoshenko beams on Pasternak foundations // J. Sound&Vibr. 1977. V. 51. № 2. P. 149–155.
42. *Wang T.M., Gagnon L.W.* Vibrations of continuous Timoshenko beams on Winkler-Pasternak foundations // J. Sound&Vibr. 1978. V. 59. № 2. P. 211–220.
43. *Козел А.Г.* Перемещения в круговой трехслойной пластине на двухпараметрическом основании // Механика. Исслед. и иннов. 2017. Вып. 10. С. 90–95.
44. *Козел А.Г., Старовойтов Э.И.* Изгиб упругой трехслойной круговой пластины на основании Пастернака // Механика композ. матер. и констр. 2018. Т. 24. № 3. С. 392–406.
45. *Feng Q., Fu Sh., Wang Ch., Liu W.W.* Analytical solution for fracture problem of slope roof based on Pasternak foundation model // Soil Mech.& Found. Engng. 2019. V. 56. № 2. P. 142–150.
46. *Проктор Г.Э.* Заметка к вопросу о расчете балок, лежащих на упругом основании // Изв. Иваново-Вознес. Политехн. ин-та. 1923. Т. 7. С. 34–89.
47. *Проктор Г.Э.* Механика изменяемого твердого тела (Сопротивление материалов). Иваново-Вознесенск: Студенч. изд-во Губбюро Пролетстуда, 1926. 476 с.
48. *Проктор Г.Э.* Дополнительные главы по сопротивлению материалов. М.: МЭИ, 1936. 30 с.
49. *Горбунов-Посадов М.И.* Расчет балок и плит на упругом полупространстве // ПММ. 1940. Т. 4. № 3. С. 61–80.
50. *Шехтер О.Я.* О влиянии мощности слоя на распределение напряжений в фундаментной балке // Сб. тр. НИС треста глубин. работ. 1939. № 10. С. 15–25.
51. *Давыдов С.С.* Расчет и проектирование подземных конструкций. М.: Стройиздат, 1960. 376 с.

52. *Егоров К.Е.* К расчету деформаций оснований. Сб. статей. М.: ВНИИНТПИ, 1984. 400 с.
53. *Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И.* Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат, 1984. 679 с.
54. *Высоковский Д.А., Русакова Е.Б.* Устойчивость плиты Э. Рейсснера на упругом невинклеровском основании // Инж. вестн. Дона. 2017. № 2 (45). 10 с. http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2017/4250
55. *Васильков Г.В., Рапопорт Г.А., Шпитюк Е.Н.* Квазидвухмерные расчетные схемы при конечноэлементной реализации модели упругого сжимаемого слоя // Изв. вузов. Строительство. 1999. № 6. С. 21–25.
56. *Рапопорт Г.А.* К расчету зданий и сооружений по комплексным расчетным схемам. Решение задачи В.З. Власова об упругом сжимаемом слое методом Л.В. Канторовича // В сб.: Коммунальное хозяйство городов. Киев: Техника, 2004. Вып. 55. С. 281–290.
57. Вибрации в технике. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. *В.В. Болотина*. М.: Машиностроение, 1999. 504 с.
58. *Весницкий А.И.* Избранные труды по механике. Н. Новгород: ИД “Наш дом”, 2010. 248 с.
59. *Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е.* Общие соотношения для волн в одномерных упругих системах // ПММ. 2013. Т. 77. № 2. С. 315–321.
60. *Быченков В.А., Крысов С.В., Холуев В.В.* Волновое сопротивление движению нагрузок вдоль деформируемых систем // Машиноведение. 1988. № 3. С. 60–66.
61. *Андрианов В.Л.* О сопротивлении движению нагрузок вдоль упругих направляющих, вызываемом излучением в них волн // ПММ. 1993. Т. 57. № 2. С. 156–160.
62. *Болотовский Б.М., Гинзбург В.Л.* Эффект Вавилова–Черенкова и эффект Доплера при движении источников со скоростью больше скорости света в вакууме // УФН. 1972. Т. 106. № 4. С. 577–592.

Dynamic Behavior of the Beam Laying on a Generalized Elastic Basis, with Moving Load

V. I. Erofeev[a,#], E. E. Lisenkova[a,##], and I. S. Tsarev[a,###]

[a] *Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Nizhny Novgorod, Russia*
[#]*e-mail: erof.vi@yandex.ru*
[##]*e-mail: eelissen@yandex.ru*
[###]*e-mail: tsarev_ivan97@mail.ru*

The analysis of the most famous elastic base models is given. It is shown that, despite the difference in name, we are talking about one generalized model, characterized by two coefficients. Such a model allows not only to preserve the simplicity of the mathematical apparatus that is inherent in the Winkler model, but also to obtain more reliable results. The consistent dynamic behavior of a beam lying on a generalized elastic foundation, characterized by two bed coefficients (compression coefficient and shear coefficient), with a moving load, is considered. The features of generation of bending waves by a moving load are studied and the critical speeds of its movement are determined. An expression is obtained for the pressure of waves (forces of resistance to motion). The dependence of the constant component of this force on the speed of the object is investigated. A comparison is made with the results obtained using the classical model of an elastic base.

Keywords: beam, generalized model of elastic foundation, moving load, critical speed, bending waves, force of resistance to movement

REFERENCES

1. *Fillipov A.P.* Oscillations of Deformable Systems. Moscow: Mashinostroenie, 1970. 734 p. (in Russian)
2. *Fryba L.* Vibration of Solids and Structures under Moving Loads. Prague: Academia, 1972. 484 p.
3. *Filippov A.P., Kokhmanuk S.S., Vorobiev Yu.S.* The Impact of Dynamic Loads on Structural Elements. Kiev: Nauk. Dumka, 1974. 176 p. (in Russian)

4. *Kokhmanuk S.S., Janutin V.G., Romanenko L.G.* Oscillations of Deformable Systems under Pulsed and Moving Loads. Kiev: Nauk. Dumka, 1980. 232 p. (in Russian)
5. *Bondar N.G., Kozmin Yu.G., Roitburd Z.G., Tarasenko V.P., Jakovlev G.N.* The Interaction of Railway Bridges and Tracks. Moscow: Transport, 1984. 272 p. (in Russian)
6. *Verigo M.F., Kogan A.J.* Interaction of the Track and Rolling Stock. Moscow: Transport, 1987. 560 p. (in Russian)
7. *Vesnitskii A.I.* Waves in Systems with Moving Boundaries. Moscow: Fizmatlit, 2001. 320 p. (in Russian)
8. *Veritchev S.N.* Instability of a Vehicle Moving on an Elastic Structure. Delft: Univ. Press, 2002. 190 p.
9. *Vostrukhov A.V.* Three-Dimensional Dynamic Models of a Rail-Way Track for High-Speed Trains. Delft: Univ. Press, 2002. 184 p.
10. *Kozin V.M., Zhestkaya V.D., Pogorelova A.V., Chizhiumova S.D., Jabrailov M.R., Morozov V.S., Kustov A.N.* Applied Problems of Ice Cover Dynamics. Moscow: Academija Estestvoznanija, 2008. https://www.monographies.ru/ru/book/view?id=14 (in Russian)
11. *Ivanchenko I.I.* Dynamics of Transport Facilities: High-Speed Mobile, Seismic and Shock Loads. Moscow: Nauka, 2011. 574 p. (in Russian)
12. *Metrikine A.V., Veritchev S.N., Vostrukhov A.V.* Fundamental Tasks of High-Speed Land Transport, Saarbrucken: Lambert Acad. Publ., 2015. 200 p.
13. *Okonichnikov A.S., Tarlakovsky D.V., Fedotenkov G.V.* Unsteady motion of a normal concentrated load along the boundary of an elastic half-plane // Tr. MAI, 2015, no. 82, 20 p. http://www.mai.ru/science/trudy/ (in Russian)
14. *Savin A.V.* Choice of track design for high-speed // Transport RF, 2017, no. 1 (68), pp. 18–21. (in Russian)
15. *Abdurashitov A.Yu., Loktev A.A., Sicheva A.V., Sichev P.V.* Calculation of high-frequency vibrations of a railway track under a rolling stock at speeds of 200–250 km/h // Vestn. Transp. Povol., 2018, no. 6 (72), pp. 22–28. (in Russian)
16. *Abdurashitov A.Yu., Sichev P.V., Abdurashitov Yu.A* Assessment of the impact of rolling stock with different thickness of the ballast layer and elements of the track superstructure based on modeling // Vnedr. Sovrem. Konstr. i Pered. Tekhnol. v Putevoe Khoz., 2018, vol. 12, no. 12 (12), pp. 58–64. (in Russian)
17. *Abdurashitov A.Yu., Kuznetsov S.V.* About choosing a rail profile for curved sections // Vnedr. Sovrem. Konstr. i Pered. Tekhnol. v Putevoe Khoz., 2020, vol. 16, no. 16 (16), pp. 20–25. (in Russian)
18. *Savin A., Suslov O., Korolev V., Loktev A., Shishkina I.* Stability of the continuous welded rail on transition sections // Adv. in Intell. Syst. & Comput., 2020, vol. 1115, AISC, pp. 648–654.
19. *Winkler E.* Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit. Prague, 1867.
20. *Butova S.V., Gerasimov S.I., Erofeev V.I., Kamchatnyi V.G.* Stability of high-speed objects moving along a rocket track guide // J. Machin. Manuf. & Reliab., 2015, vol. 44, no. 1, pp. 1–5.
21. *Gerasimov S.I., Erofeev V.I.* Calculation of flexural-and-torsional vibrations of a rocket track rail // J. Machin. Manuf. & Reliab., 2016, vol. 45, no. 3, pp. 211–213.
22. *Erofeev V., Lissenkova E., Malkhanov A.* Wave resistance to the movement of objects along the rocket track guides // MATEC Web of Conferences. vol. 224, 2018. Article ID 02016, pp. 1–6.
23. *Gerasimov S.I., Erofeev V.I., Kamchatnyi V.G., Odzerikho I.A.* The sliding contact condition in stability analysis of stage motion for a rocket sled track facility // J. Machin. Manuf.&Reliab., 2018, vol. 47, no. 3, pp. 221–226.
24. *Gerasimov S.I., Erofeev V.I., Odzerikho I.A., Smirnov D.Yu.* Estimation of the effect of wave processes in elastic guide on the dynamics of the rocket train // Vestn. Nauchno-Tekhnich. Razv., 2019, no. 6 (142), pp. 3–12. (in Russian)
25. *Zimmerman H.* Die Berechnung des Eisenbahnoberbauee. Berlin, 1888.
26. *Wieghardt K.* Uber den ralken auf nachgibiebiger unterlage // Zeitschriff fur Angewandte Mathematik und Mechanik, 1922. Bd. 2. H. 3. S. 165–184.
27. *Filonenko-Borodich M.M.* The simplest model of elastic foundation, capable of distributing the loads // Tr. Mosk. Elektromekh. In-ta Inzh. Transp., 1945, no. 53, pp. 92–108.
28. *von Karman T.* Festigkeitsproblem im maschinenbau // Encyk. D. Math. Wiss., 1910, IV, pp. 311–385.
29. *Pasternak P.L.* Fundamentals of a New Method for Calculation Foundations on an Elastic Foundation Using Two Coefficients. Moscow: Gosstroyizdat, 1954. 56 p. (in Russian)

30. *Leontiev N.N., Leontiev A.N., Anokhin N.N., Sobolev D.N.* Fundamentals of the Theory of Beams and Slabs on a Deformable Foundation. Moscow: MISI, 1982. 120 p. (in Russian)
31. *Vlasov V.Z., Leontiev N.N.* Technical Theory of Calculating Foundations on an Elastic Foundation // Trudi MISI, 1956, no. 14 (154), pp. 12–31. (in Russian)
32. *Vlasov V.Z., Leontiev N.N.* Beams, Plates, Shells on an Elastic Base, Moscow: Fizmatlit, 1960. 492 p. (in Russian)
33. *Reissner E.* Selected Works in Applied Mechanics and Mathematics, Sudbury (MA): Jones&Bartlett Publ., 1996.
34. *Hetenyi M.* Beams on Elastic Foundations. Michigan: Univ. Press, 1946. 255 p.
35. *Duplyakin I.A.* The motion of a carriage with constant velocity along a beam of infinite length resting on a base with two elastic characteristics // JAMM, 1991, vol. 55, no. 3, pp. 376–384.
36. *Aleksandrov V.M., Duplyakin I.A.* Dynamics of an endless Timoshenko beam lying on a base with two elastic characteristics during the movement of a deformable crew // Mech. Solids, 1996, no. 1, pp. 180–197. (in Russian)
37. *Slivker V.I.* To the question of the appointment of the characteristics of a two-parameter elastic base // Stroit. Mekh. i Raschet Sooruzh., 1981, no. 1, pp. 36–39. (in Russian)
38. *Eisenberger M., Clastornik J.* Beams on variable two-parameter elastic foundation // Comput.&Struct., 1986, vol. 23, pp. 351–356.
39. *Kurennov S.S.* Model of a two-parameter elastic base in calculating the stress state of the adhesive joint // Elektronniy zh. “Trudi MAI”, 2013, no. 66, 7 p. http://www.mai.ru/science/trudy/
40. *Rao Ch.K., Rao L.B.* Torsional post-buckling of a simply supported thin-walled open-section beam rasting on two-parameters foundation // J. Appl. Mech. & Techn. Phys., 2018, vol. 59, no. 1, pp. 176–184.
41. *Wang T.M., Stephens J.E.* Natural frequencies of Timoshenko beams on Pasternak foundations // J. Sound & Vibr., 1977, vol. 51, no. 2, pp. 149–155.
42. *Wang T.M., Gagnon L.W.* Vibrations of continuous Timoshenko beams on Winkler-Pasternak foundations // J. Sound & Vibr., 1978, vol. 59, no. 2, pp. 211–220.
43. *Kozel A.G.* Displacements in a circular three-layer plate on a two-parameter base // Mekh. Issled. i Innov., 2017, no. 10, pp. 90–95. (in Russian)
44. *Kozal A.G., Starovoitov E.I.* The bending of an elastic circular sandwich plate on the Pasternak foundation // Mekh. Kompoz. Mater. i Konstr., 2018, vol. 24, no. 3, pp. 392–406. (in Russian)
45. *Feng Q., Fu Sh., Wang Ch., Liu W.W.* Analytical solution for fracture problem of slope roof based on Pasternak foundation model // Soil Mech. & Found. Engng., 2019, vol. 56, no. 2, pp. 142–150.
46. *Proctor G.E.* Note on the question of calculating beams lying on an elastic base // Izv. Ivanovo-Voznes. Politekhn. Inst., 1923, vol. 7, pp. 34–89. (in Russian)
47. *Proctor G.E.* Mechanics of a Variable Solid (Resistance of Materials). Ivanovo-Voznesensk: Gubburo Proletstuda, 1926, 476 p. (in Russian)
48. *Proctor G.E.* Additional Chapters on the Resistance of Materials. Moscow: MEI, 1936. 30 p. (in Russian)
49. *Gorbunov-Posadov M.I.* Calculation of beams and plates on elastic half-space // PMM, 1940, vol. 4, no. 3, pp. 61–80. (in Russian)
50. *Shekhter O.Ja.* On the effect of layer power on the stress distribution in the foundation beam // Sb. Tr. NIS Tresta Glubinnikh Rabot, 1939, no. 10, pp. 15–25. (in Russian)
51. *Davidov S.S.* Calculation and Design of Underground Structures. Moscow: Stroyizdat, 1960. 376 p. (in Russian)
52. *Egorov K.E.* To the Calculation of Deformayions of the Bases. Moscow: VNIINTPI, 2002. 400 p. (in Russian)
53. *Gorbunov-Posadov M.I., Malikova T.A., Solomin V.I.* Calculation of Structures on an Elastic Foundation. Moscow: Stroyizdat, 1984. 679 p. (in Russian)
54. *Visocovskii D.A., Rusakova E.B.* Stability of a plate E. Reissner on an elastic non-Winkler base // Inzh. Vestn. Dona, 2017, no. 2(45), 10 p.
http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2017/4250 (in Russian)

55. *Vasil'kov G.V., Rapoport G.A., Shpituk E.N.* Quasi-two-dimensional computational schemes for the finite element realization of the model of an elastic compressible layer // Izv. Vuzov. Stroitel'stvo, 1999, no. 6, pp. 21–25. (in Russian)
56. *Rapoport G.A.* To the calculation of buildings and structures according to complex settlement schemes. Solution of the problem V.Z. Vlasov on an elastic compressible layer by the L.V. Kantorovich method, Kommunal'noe khoziaystvo gorodov. Kiev: Tekhnika, 2004, no. 55, pp. 281–290. (in Russian)
57. Vibrations in Technology. Vol. 1. Oscillations of Linear Systems / Ed. by *Bolotin V.V.* Moscow: Mashinostroenie, 1999. 504 p. (in Russian)
58. *Vesnitskii A.I.* Selected Works on Mechanics. Nizhny Novgorod: Nash Dom, 2010. 248 p. (in Russian)
59. *Yerofeyev V.I., Lisenkova Ye.Ye.* General relations for waves in one-dimensional elastic systems // JAMM, 2013, vol. 77, no. 2, pp. 230–234.
60. *Bychenkov V.A., Krysov S.V., Kholuev V.V.* Wave resistance to the movement of loads along deformable systems // Mashinoved., 1988, no. 3, pp. 60–66. (in Russian)
61. *Andrianov V.L.* The resistance to the motion of loads elastic directions cansed by the radiation of waves in them // JAMM, 1993, vol. 57, no. 2, pp. 383–387.
62. *Bolotovskii B.M., Ginzburg V.L.* The Vavilov–Cherenkov effect and Doppler effect in the motion of sources with superluminal velocity // Sov. Phys. Usp., 1972, vol. 15, pp. 184–192.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 2, с. 210–238

УДК 539.3

МЕТОД ОТВЕРСТИЯ В ДИАГНОСТИКЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

© 2021 г. А. Л. Попов[1,*], В. М. Козинцев[1], Д. А. Челюбеев[1], А. Л. Левитин[1]

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**e-mail: popov@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 26.08.2020 г.
После доработки 11.11.2020 г.
Принята к публикации 20.11.2020 г.

Во всех промышленно развитых странах активно ведутся исследования остаточных напряжений и их влияния на прочность материалов и конструкций. Потребность в таких исследованиях в значительной степени обусловлена тем обстоятельством, что многие технические разрушения и техногенные катастрофы происходят из-за высокого уровня остаточных технологических напряжений. Для диагностики остаточных напряжений применяются разные физические и механические методы. Методы, основанные на различных физических принципах, не влияют на прочность объекта измерения, т.е. могут считаться неразрушающими, если не принимать во внимание изменение состояния поверхности объекта во время подготовки к измерениям. Но между измеряемыми величинами и искомыми напряжениями действуют сложные соотношения с параметрами, которые часто зависят от ряда трудно учитываемых факторов. Механические методы являются разрушающими или частично разрушающими. Остаточные напряжения рассчитывают по деформациям или перемещениям, возникающим при разгрузке объекта или его частей, используя уравнения теории упругости; для обработки измерений требуется знать только базовые механические свойства материала. Из числа механических методов метод отверстия – наиболее применяемый: он является мало повреждающим, достаточно универсальным – форма и материал объектов могут быть самые разные, методически и материально обеспечен – утверждены стандарты измерений, разработано оборудование, технология измерений и методика обработки результатов.

В статье представлена история развития метода отверстия, вклад отечественных и зарубежных ученых в его становление, даны примеры конкретных измерений остаточных напряжений с помощью этого метода в лабораторных и производственных условиях с акцентом на отечественную технологию измерений.

Ключевые слова: остаточные напряжения, диагностика, метод отверстия

DOI: 10.31857/S0032823521010069

Введение. Остаточными называют напряжения, остающиеся в конструкции или в ее отдельных элементах после снятия всех внешних воздействий. Остаточные напряжения возникают тогда, когда внешние воздействия создают в теле не только упругую, но и необратимую пластическую деформации. В технике для обозначения остаточных напряжений используют также названия технологических процессов, после которых они проявляются: сварочные напряжения, закалочные напряжения, деформационные, напряжения правки или отделки продукции [1–4].

Остаточные напряжения практически всегда возникают при изготовлении любых изделий из любых материалов: металлов, керамики, стекла, полимеров и композитов, строительных материалов, при изготовлении элементов конструкций и изделий в це-

Рис. 1. Взрыв газопровода в Москве 10 мая 2009 г.

лом. Эти напряжения часто называют технологическими, так как они возникают вследствие разного рода технологий изготовления, среди которых можно указать литье, сварку, ковку, прокатку, термообработку, точение и т.д. Многолетние исследования авторов данной статьи в области остаточных напряжений и сведения из научной литературы подтверждают, что эти напряжения обнаруживаются после подавляющего большинства технологических операций. Даже травление – операция без силового или значительного теплового воздействия, не оставляющая пластических деформаций – создает малые остаточные напряжения вследствие перепада химического состава в поверхностном слое и образования тонких окисных пленок с механическими свойствами, отличающимися от свойств материала подложки [4].

Имеется достаточно примеров разрушений, вызванных большими технологическими напряжениями. Одни из наиболее частых со значительными экологическими последствиями – это разрушения трубопроводов, в которых образуются трещины длиной иногда до нескольких десятков километров, сопровождающиеся взрывами и пожарами [5]. На рис. 1 приведена фотография одного из таких событий – взрыва и горения газопровода в Москве 10 мая 2009 г.

Наличие остаточных напряжений способно вызвать внезапные разрушения крупных резервуаров [6], саморазрушение огнеупорных блоков для обкладки ванн стекловаренных печей [7], закаленного стекла [8], коробление (искажение формы) изделий во время их обработки и эксплуатации, которое появляется в результате изгибающей и скручивающей деформации в металле при нарушении равновесия внутренних сил и моментов, наблюдающееся даже при продолжительном вылеживании изделий без применения [9–12], влияет на свойства выращиваемых кристаллов, в частности, является причиной их аномальной двухосности, недопустимой в поляризационной оптике, оптических линиях связи и т.д. [13, 14], снижает разрешение оптических элементов, особенно крупных линз телескопов, из-за эффекта фотоупругости, т.е. появления в стекле эффекта двойного лучепреломления даже от малых напряжений, и локального изменения коэффициента преломления [15, 16]. Существенна роль остаточных напряжений в растрескивании металлов из-за коррозии, хрупком разрушении, понижении пределов упругости и усталости материала. Вредное действие остаточных напряжений сказывается и в повышении общей химической активности металла. Особенно вредно усиление межкристаллитной коррозии под действием растягивающих остаточных напряжений [17–22].

Значительные остаточные напряжения могут возникать после механической обработки – точения, фрезерования, шлифования и др. [23]. Особенность таких напряжений состоит в том, что они действуют практически только в тонких поверхностных слоях деталей. Однако, как показывает опыт эксплуатации, остаточные напряжения в поверхностном слое могут существенно повлиять на прочность всей детали, особенно при действии переменных напряжений, способствуя ее усталостному разрушению, так как усталостная трещина, как правило, зарождается на поверхности изделия [22, 24–26].

Возможной причиной Чернобыльской катастрофы называют влияние на работоспособность конструкции реактора остаточных напряжений в циркониевых трубках тепловыделяющих элементов [27]. Утверждают, что завод-изготовитель внес изменения в процесс термомеханический обработки, не согласовав эти изменения с потребителем. В результате часть трубок в процессе эксплуатации разрушилась, вызвав аварию [28, 29]. Авторы данной статьи участвовали в техническом расследовании причин образования трещины в корпусе коллектора парогенератора Армянской АЭС, приведшей к утечке радиоактивных веществ; было установлено, что причиной возникновения трещины в коллекторе являлись остаточные напряжения, не принятые во внимание при расчете коллектора на прочность [2, 30, 31].

Возможно не только вредное, но и благоприятное влияние остаточных напряжений на изделия, способное повысить их статическую и усталостную прочность. Поверхность изделий, как правило, является наиболее “слабой” зоной, поэтому любая обработка, которая приводит к возникновению и росту поверхностных сжимающих напряжений, положительно сказывается на эксплуатационных свойствах изделий [32]. Наиболее характерный пример – закаленные стекла транспортных средств. Закалка стекла создает в нем поверхностные сжимающие напряжения, которые закрывают микротрещины, всегда присутствующие на поверхности стекла, не дают им развиваться и разрушать хрупкое стекло [33]. В итоге, прочность стекла возрастает в несколько раз и в случае разрушения запасенная энергия остаточных напряжений способствует дроблению стекла на мелкие безопасные осколки, а не на большие фрагменты как у обычного стекла, подобные кинжалам по виду и остроте. Аналогично действует пластическая деформация поверхности металлических объектов: закрываются трещинки – инициаторы разрушений и прочность возрастает [34].

Различают термические и фазовые (структурные) внутренние напряжения, которые возникают соответственно в результате термического сжатия или расширения и фазовых превращений в твердом состоянии при наличии в теле градиента температур. Внутренние напряжения могут возникнуть практически при любой обработке, причем одна технологическая операция может привести к созданию разных по своему происхождению остаточных напряжений: термических, фазовых и напряжений от неоднородной пластической деформации. Например, если горячедеформированный сплав охлаждается ускоренно и в нем протекают фазовые превращения. При литье, сварке и закалке возникают термические и фазовые напряжения. Различные по своему происхождению остаточные напряжения складываются и очень часто дают весьма сложные эпюры [35, 36].

В металлоизделиях, после завершения цикла обработки, под воздействием механических и тепловых нагрузок, зачастую наблюдается ползучесть, в результате которой происходит процесс релаксации (уменьшения) остаточных напряжений [37]. Этот процесс протекает интенсивно при повышенных температурах, но в некоторых случаях происходит и при нормальной температуре. Отметим следующее важное обстоятельство. Изменение напряженного состояния тела (например, вследствие релаксации остаточных напряжений) приводит к появлению дополнительных деформаций, которые, в свою очередь, могут привести к неблагоприятному перераспределению остаточных напряжений, что может вызвать появления трещин и внезапное хрупкое разрушение деталей как в процессе отжига, так при эксплуатации и даже при хранении [7, 37, 38].

При больших остаточных напряжениях разрушение часто происходит от незначительных по величине дополнительных нагрузок, особенно ударных. Так, например, трещины в металлических отливках могут возникать при очистке их пневматическим молотком и даже от неравномерного охлаждения зимой из-за добавления термических напряжений к остаточным: явление "сезонного растрескивания латуни" [21].

Крупные отливки из малопластичных алюминиевых сплавов через некоторое время после окончания литья могут разрушиться от случайных небольших сотрясений или ударов; высвобождающаяся при этих разрушениях упругая энергия иногда так велика, что бывали случаи, когда часть слитка весом в сотни килограммов отрывалась и отлетала на расстояние в несколько метров [27]. Другой пример: известны случаи, когда цельносварные суда из-за остаточных растягивающих напряжений разрушались под воздействием незначительных внешних факторов, например, от удара ломом при очистке палубы ото льда [38]. Наглядный пример разрушения такого типа приведен на рис. 2, где показана фотография балки из высокопрочной стали, которая спонтанно лопнула в цехе без нагрузки после того, как два ее конца были срезаны под углом; в результате перераспределения напряжений произошло разрушение вдоль продольной оси балки [39].

Перечень как вредного, так и полезного проявлений остаточных напряжений может быть продолжен. В сущности, все эти многообразные проявления и породили научное направление по изучению остаточных технологических напряжений и способов их регулирования [40].

1. История вопроса. Быстрое развитие промышленности, транспорта и военного дела в 18—19-м веках сопровождалось значительным ростом мощности и габаритов техники. Но крупные элементы больших машин и изделий иногда разрушались по непонятным причинам не только во время эксплуатации, но и при изготовлении и даже при хранении. Наиболее зримое и возможно первое документированное свидетельство вредного влияния остаточных напряжений запечатлено в Филадельфийском колоколе Свободы (рис. 3). Он был отлит в 1751 г. для созыва жителей города на оглашение Декларации независимости, однако треснул во время первого же звона [41].

Это и другие подобные разрушения вызвали повышенное внимание к качеству изделий из металла и заготовок для них. Была осознана проблема несоответствия расчетной прочности и реального поведения изделий из чугуна и стали, несмотря на то, что в то время уже были достаточно хорошо определены механические свойства применяемых металлов — пределы прочности и текучести, относительные удлинения и сужение, твердость, коррозионная стойкость и др.

Особенно напряженная ситуация возникла в военном деле. Мощные паровые двигатели способствовали появлению броненосцев — тяжелых военных кораблей, защищенных навешенными броневыми плитами и практически неуязвимых для существовавшей артиллерии. В ответ стали срочно увеличивать калибр пушек. И здесь явственно ощутились проблемы, связанные с габаритами. Наблюдался значительный разброс

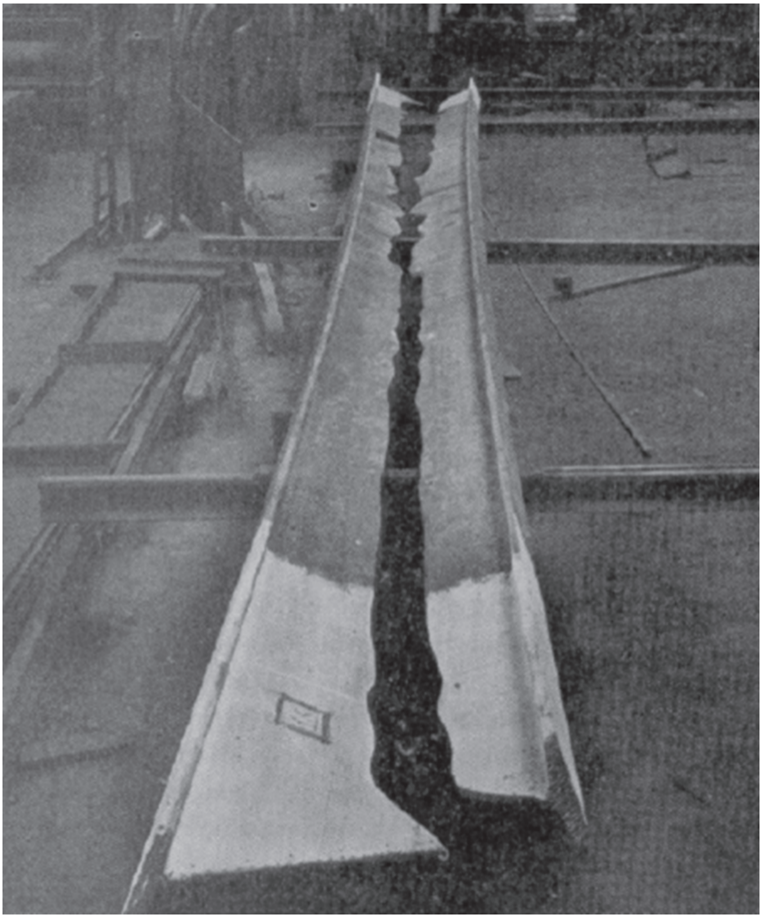

Рис. 2. Двутавровая балка, расколотая остаточными напряжениями после резки под углом концов балки [39].

стойкости стволов одной конструкции: от двух—трех тысяч до всего лишь нескольких десятков испытательных выстрелов, и даже разрывы стволов при первых выстрелах.

Возникло предположение, что реальные характеристики крупных объектов зависят не только от свойств металла, но также от режимов изготовления и обработки, начиная от тепловых режимов плавления и розлива литейных металлов, режима охлаждения отливки и последующей тепловой и механической обработки заготовки. Вначале было усилено внимание к применяемым металлам, затем — к конструкции ствола: разрабатывалась сложная наружная и внутренняя геометрия, предлагались составные многотрубные стволы, усиление ствола кольцами, навивкой проволокой. Эта работа иногда давала полезный результат, а иногда и вредный: например — усиление ствола накладными кольцами понижало его стойкость. Последующее теоретическое рассмотрение этого случая распределения напряжений подтвердило наблюдаемый неблагоприятный эффект.

Впоследствии внимание перешло на технологию изготовления и режимы обработки стволов, начиная от скорости исходной литейной плавки и тепловых режимов литья, охлаждения и ковки, до операций термической и механической обработки.

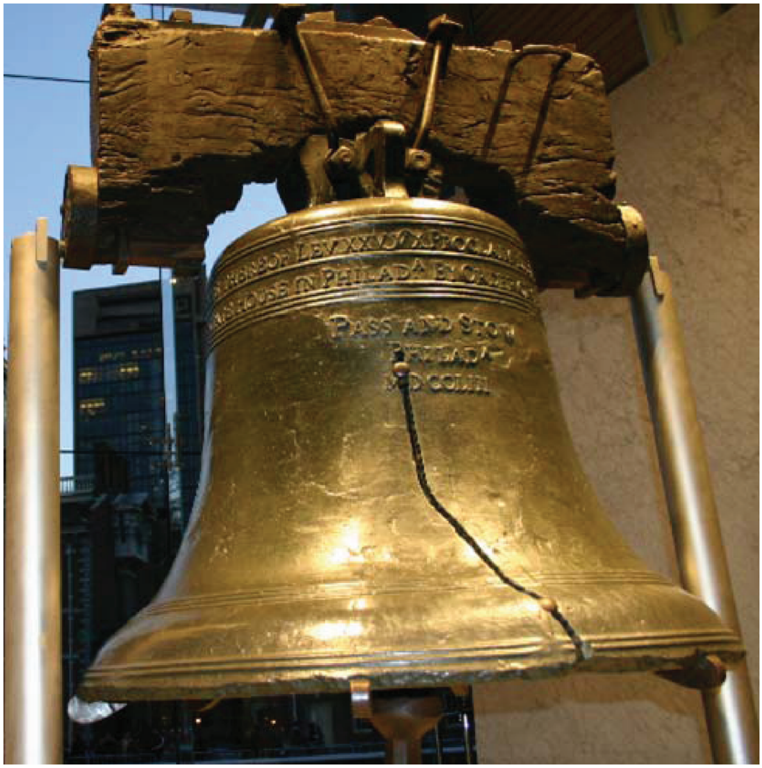

Рис. 3. Трещина в колоколе Свободы.

Первые исследования в этих направлениях велись на основе интуиции и “здравого смысла”. Яркий пример такого поиска – работа американского инженера-артиллериста Т.Д. Родмана, который разработал новую методику литья чугунных артиллерийских стволов, позволявшую делать прочные и надежные пушки очень крупных калибров – вплоть до 20 дюймов [42]. Он опытным путем установил, что если отливать полую заготовку и при этом охлаждать ее изнутри, то ствол получается гораздо прочнее из-за более равномерной кристаллической структуры металла и, как впоследствии было установлено, – напряжений сжатия в поверхностном слое канала ствола. В результате ресурс ствола увеличивался в 2–2.5 раза.

Однако, в целом, проблема масштабных разрушений в промышленности и транспорте оставалась актуальной. Ведь разрушались не только стволы орудий, но и заготовки для снарядов во время обработки и хранения, разрушались многие крупные изделия: габаритные отливки, части мощных двигателей – коленчатые валы, штоки, цилиндры и трубы, корпуса кораблей.

Начало общему систематическому научному изучению остаточных напряжений положил русский военный инженер-металловед Н.В. Калакуцкий (1831–1889). Его целью было создание теории возникновения и методики измерения остаточных (внутренних натуральных – по его терминологии) напряжений, а также разработка метода их расчета.

На основе собственных экспериментов и используя уже существовавшие практические наработки Родмана и других авторов, был впервые объяснен механизм образования остаточных напряжений, разработана методика количественного определения их в орудийных стволах, снарядных корпусах и в листовом металле, указаны способы удаления вредных и создания полезных остаточных напряжений [43, 44].

В исследованиях Н.В. Калакуцкого из объекта (ствол пушки) вырезались кольца и промерялись изменения размеров кольца после вырезки. По изменению диаметра вырезанного кольца рассчитывалось "давление" (т.е. напряжение), действовавшее в металле до вырезки, полагая, что остаточные напряжения проявляют себя через изменение геометрических размеров частей изделия при его разделении на части.

Метод колец был усовершенствован [45] и получил название метода разрезки колец. Усовершенствование заключалось в разрезке вырезанного кольца вдоль образующей и замере изменения диаметра и формы кольца в результате разрезки. Параллельно, в начале 1930-х годов, был разработан струнный метод измерения деформаций [46], позволивший впервые измерить величину горного давления в туннелях.

Другим, получившим широкое распространение, вариантом разрушающего метода определения остаточных напряжений в толстостенных трубах был метод [47]. В соответствии с ним выполняется послойная обточка или расточка трубы с измерениями окружной и осевой деформаций образца. На основании полученных данных строятся графики зависимости поперечных и продольных деформаций от величины площади сечения удаляемого слоя. Далее по формулам осесимметричной упругости определяются напряжения, вызывающие такие деформации.

Было проведено [48] сравнение методов [44–47]. Показано, что точность определения напряжений по методу [45] более высока, поскольку измеряемые деформации в этом случае значительно больше, чем при определении напряжений по методам [44, 47].

Работы Н.В. Калакуцкого стали основой и других методов исследования остаточных напряжений, заключающихся в замере деформаций образцов, происходящих при их разрушении. Более подробно о применяемых разрушающих методах определения остаточных напряжений изложено в монографии [2].

2. Метод отверстия и его развитие. Метод отверстия, предложенный Й. Матаром в 1932 г. [49], со временем превратился в наиболее удобный и эффективный слабоповреждающий метод определения остаточных напряжений [39, 50, 51]. Он имеет преимущества высокой точности, надежности и оперативности, стандартизуемости процедур испытаний и удобной практической реализации. Повреждение, внесенное в образец, локализуется в небольшом несквозном отверстии и часто допустимо или ремонтопригодно.

Метод отверстия включает в себя три основных аспекта: 1) Создание зондирующего отверстия в интересующей области тела с напряжениями, 2) Измерение деформаций, либо перемещений на контуре и в окрестности отверстия, высвобождаемых под действием существующих в теле напряжений и 3) Вычисление соответствующих остаточных напряжений. Все три аспекта метода отверстия значительно развились впоследствии.

В исходной реализации метода отверстия Матаром был сделан принципиальный шаг в переходе от специально изготовленных образцов, применявшихся в разрушающих методах определения остаточных напряжений и становящихся непригодными после проведения испытаний, к измерению в деталях и элементах конструкций с внесением в них повреждений настолько малых, что деталь могла быть использована снова. Однако, несмотря на стремление уменьшить повреждение от зондирующего воздействия, в установке [49] применялось сверло диаметром 12 мм, по нынешним меркам – весьма внушительным. Это было сделано для обеспечения необходимой базы измерений на диаметре отверстия при превращении его из круглого в эллиптическое. Общий вид экспериментальной установки [49] представлен на рис. 4.

Важно отметить, что Матар не ограничился созданием опытного образца своей установки, а выполнил на ней ряд важных экспериментов в напряженных балках и сварных соединениях. Использованное им для калибровки измерительного устрой-

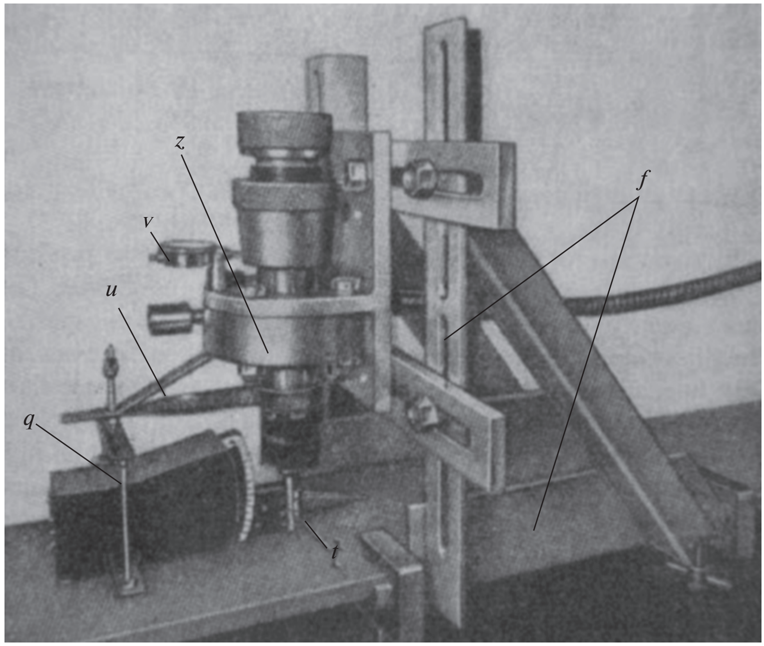

Рис. 4. Испытательная установка Матара [49]: z — дрель со сверлом t, q — трехточечный экстензометр, v — оптический датчик глубины отверстия, u, f — крепления экстензометра и установки.

ства решение задачи Кирша [52], является и в настоящее время одним из важнейших верифицирующих тестов методик и устройств, основанных на создании отверстий в напряженном теле. Результаты, полученные [49] по распределению напряжений в сварных соединениях, а именно, — что напряжения при различных методах сварки плавлением близки к пределу текучести — получили подтверждение в дальнейших работах многих последователей. Также на уровне российского [53] и американского [54] стандартов закреплено, выдвинутое Матаром, утверждение о том, что пропорциональность напряжений измеряемым удлинениям сохраняется лишь до тех пор, пока напряжения составляют менее 40% от предела текучести, что объясняется высокой концентрацией напряжений на краю отверстия [52, 55, 56].

Полезными для практики являются и результаты, показывающие, что в образце значительной толщины напряжения, которые высвобождаются при сверлении зондирующего отверстия, начиная с некоторой глубины, не оказывают заметного влияния на деформацию поверхности тела. Из этого следует, что для определения напряжений в толстых деталях не обязательно просверливать сквозные отверстия. Испытания показали, что достаточна глубина отверстий в 1.5–2 диаметра.

После скоропостижной смерти Матара в 1933 г. использованный им механический экстензометр был признан основным фактором, ограничивающим точность и надежность измерений остаточных напряжений в методе сверления отверстия, так как он имел большую измерительную базу — 60 мм, и соответственно, усреднял напряжения на этой базе; для его крепления требовались посадочные резьбовые отверстия на исследуемом изделии и, главное, — вибрации во время операций сверления делали его показания неустойчивыми и нерегулярными. Вследствие этого, делались попытки использования других способов регистрации деформаций в окрестности зондирующего отверстия. Так, например, был рассмотрен [57] рентгенографический метод, состоящий в сравнительном анализе рентгенограмм окрестности отверстия в теле с напряжениями и без напряжений. Ограниченность его применения состояла в том, что надо было иметь два идентичных образца, один из которых с напряжениями, а другой – без напряжений.

Для измерения деформаций в окрестности отверстия был применен струнный метод измерения деформаций [58]. При этом использовались сразу два струнных “тенсометра”, устанавливаемых в направлениях главных остаточных напряжений (осевых и окружных) на образцах бочек валков горячей прокатки, часть из которых в производственных условиях разрушалась по причине наличия больших остаточных напряжений. Было также построено решение задачи Кирша в перемещениях, на основе которого в последующей работе [59] были выведены теоретические соотношения, позволяющие определить по замеренным в трех направлениях деформациям на поверхности образца главные остаточные напряжения при заранее неизвестных их величинах и ориентации. Выбранные направления расположения датчиков, два из которых перпендикулярны друг другу, а третий – под углом 45° между ними, явились прообразом одного из наиболее распространенных типов современных розеток тензодатчиков [54].

Изобретение в 1939 г. тензометрического датчика электрического сопротивления [60] позволило существенно улучшить качество измерения деформаций. В 1950 году [61] для измерений деформаций при сверлении отверстий было введено использование тензодатчиков, что значительно повысило точность и надежность измерений и позволило использовать отверстия меньшего размера. Годом раньше [62], а затем, в [63] и [64] предложен метод столбиков в сочетании с тензометрированием деформаций. В этом методе вокруг тензодатчика, предварительно наклеенного на поверхность тела с напряжениями, делается кольцевая проточка определенной глубины, после чего производится измерение деформаций на торце образовавшегося столбика. Преимуществом метода кольцевой проточки является отсутствие концентрации напряжений на столбике, т.е. возможность определения более высоких остаточных напряжений в рамках линейной теории упругости, чем при сверлении отверстия. Тем не менее, метод сверления отверстий остался наиболее часто используемой процедурой из-за простоты его применения и меньшего повреждения образца. На рис. 5 схематично показаны оба метода с тензорозетками из трех датчиков.

В теоретически завершенном виде связь измеряемых остаточных напряжений с данными по деформациям, снимаемым с розетки тензодатчиков при сквозном отверстии, представлена в [2]. В случае несквозного отверстия эта связь была установлена эмпирически с помощью растягивающей установки [65] и в дальнейшем стандартизирована [54].

Широкое внедрение вычислительной техники и расчетных методов в 1970–1980-х годах не осталось без внимания исследователей в области остаточных напряжений. Как средство анализа деформаций при сверлении зондирующего отверстия в теле с напряжениями стали использоваться конечно-элементные расчеты, которые обеспечили большую гибкость в выборе формы образца, материалов и экспериментальной процедуры, чем было бы возможно при использовании только аналитических или экспериментальных методов [66].

Следует отметить и недостатки измерения деформаций в окрестности зондирующего отверстия с помощью тензорозетки. Зондирующее отверстие оказывает локализованное воздействие на напряженно-деформированное состояние тела. Деформация, возникающая при сверлении отверстия, быстро убывает от кромки отверстия [52]. Тензорозетка не захватывает самых значительных деформаций, так как всегда должен быть промежуток между кромкой отверстия и тензодатчиком: требуется предохранить тензодатчик от повреждения сверлом и стружкой; нужен допуск, связанный с несовпадением центров отверстия и тензорозетки и отклонением формы отверстия от идеальной окружности. Вследствие этого, тензорозетка реагирует только на часть возни-

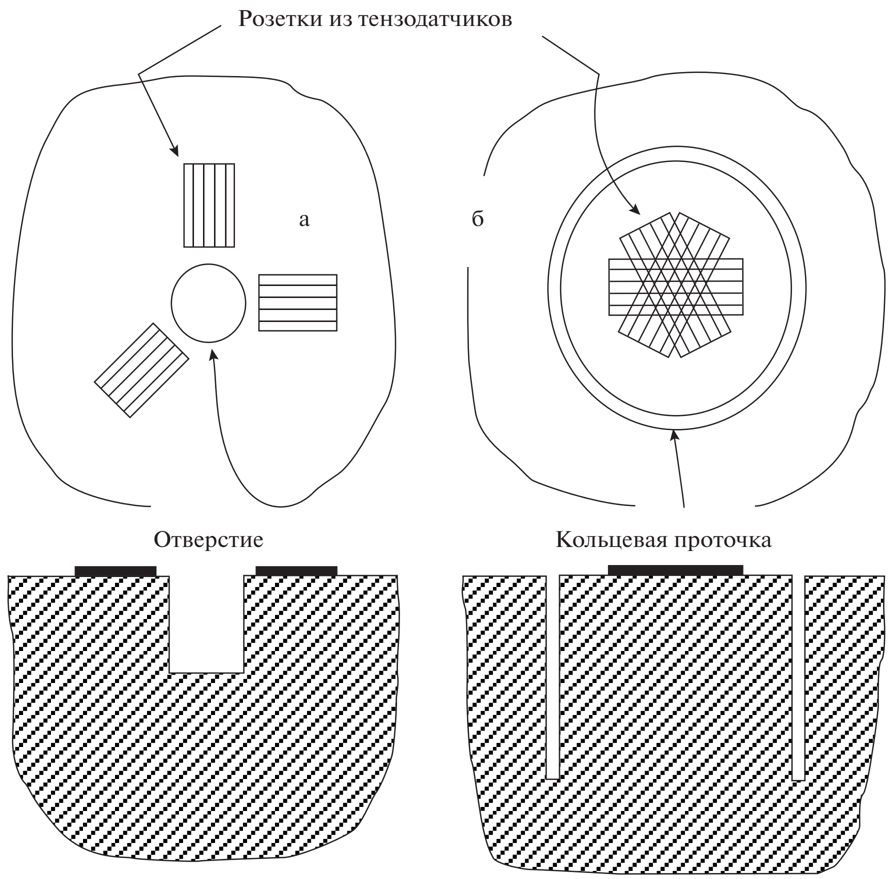

Рис. 5. Схемы зондирующего отверстия (а) и кольцевой проточки (б) с розетками тензодатчиков.

кающих деформаций, тем самым снижая чувствительность метода. Еще одним источником погрешности является усреднение деформации по длине базы датчика. Погрешность вносится и нагревом датчиков в процессе сверления. Работа с тензорозеткой не имеет наглядности, так как величина и направление напряжений вычисляются обработкой показаний тензорозетки.

С изобретением голографии [67] и лазера [68] голографическая интерферометрия становится полноценным конкурентом тензометрической розетке в измерениях малых деформаций и перемещений в окрестности зондирующего отверстия [69]. Начиная с 1980-х годов было разработано несколько оптических методов оценки остаточных напряжений методом сверления отверстия [3, 4, 70–75]. Эти методы имеют преимущество в предоставлении данных о полном поле перемещений в окрестности зондирующего отверстия, позволяющем сразу определять направление главных напряжений, в оперативности получаемых результатов, меньшей трудоемкости в подготовке к измерениям при сохранении той же точности определения остаточных напряжений, что и при тензометрическом съеме информации. На рис. 6 сравнивается локализованная информация, предоставляемая тензометрическими датчиками, с гораздо более богатой информацией, доступной при измерениях смещений в полном поле перемещений в окрестности отверстия.

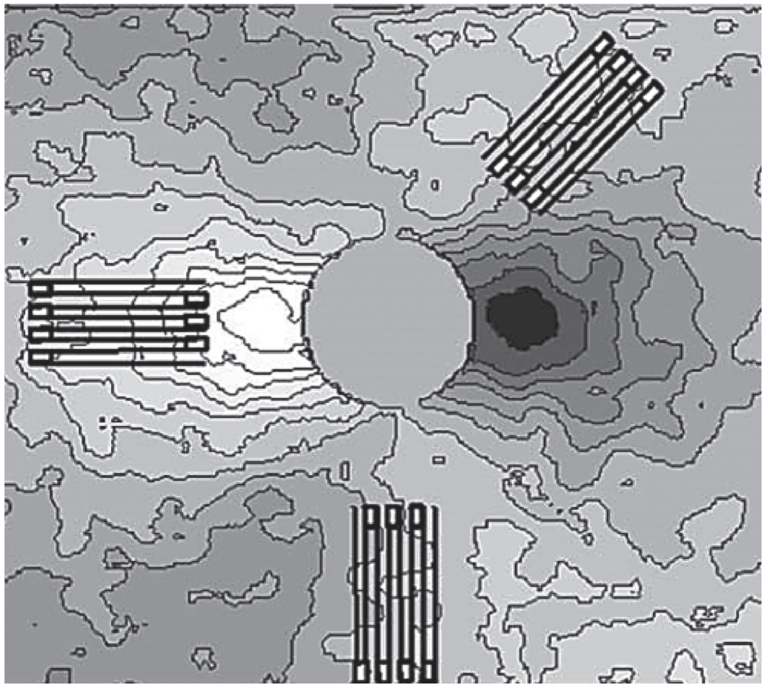

Рис. 6. Сравнение возможностей снятия информации с тензорозетки и с полного поля перемещений в окрестности отверстия [50].

Такие полнопольные измерения обеспечивает голографическая интерферометрия [3, 4, 70], которая однако требует трудоемкой и аккуратной работы по записи и обработке голограмм. Электронная спекл-интерферометрия (ESPI) наиболее популярна в связи с тем, что использование ESPI менее трудоемко; спекл-интерферограмма получается на экране монитора компьютера непосредственно с видеокамеры путем вычитания спеклограмм поверхности образца в исходном и деформированном состояниях, в том числе – в режиме реального времени [71–76]. Важно отметить, что спекл-интерферометрия позволила применить интерферометрию к телам с геометрически произвольной поверхностью, которой обладает большинство технических объектов и деталей [71]. Измеряемой информацией в спекл-интерферометрии выступают пятнистые картины (спекл-структуры), возникающие в поле наблюдения при освещении пучком когерентного света диффузной поверхности. Пятна или спеклы случайного размера и яркости образуются в результате взаимной интерференции многих волн, идущих от разных центров рассеяния. Каждое пятнышко спеклограммы имеет определенный уровень яркости, который в восьмибитной градации принимает значение от 0 (черный) до 255 (белый). При микроизменении положения наблюдаемого участка поверхности или любого его фрагмента изменяются яркости пятнышек, принадлежащих одним и тем же координатам спеклограммы [72]. Рассматривая спеклограммы исходного и измененного состояний поверхности как яркостные матрицы одинакового размера и производя вычитание по модулю одной из другой, получают спекл-интерферограмму смещений поверхности. При этом перемещения, кратные половине длины волны используемого лазера ($\lambda/2$), в которых модули интенсивностей совпадают, формируют темные полосы интерферограммы, а промежуточные значений переме-

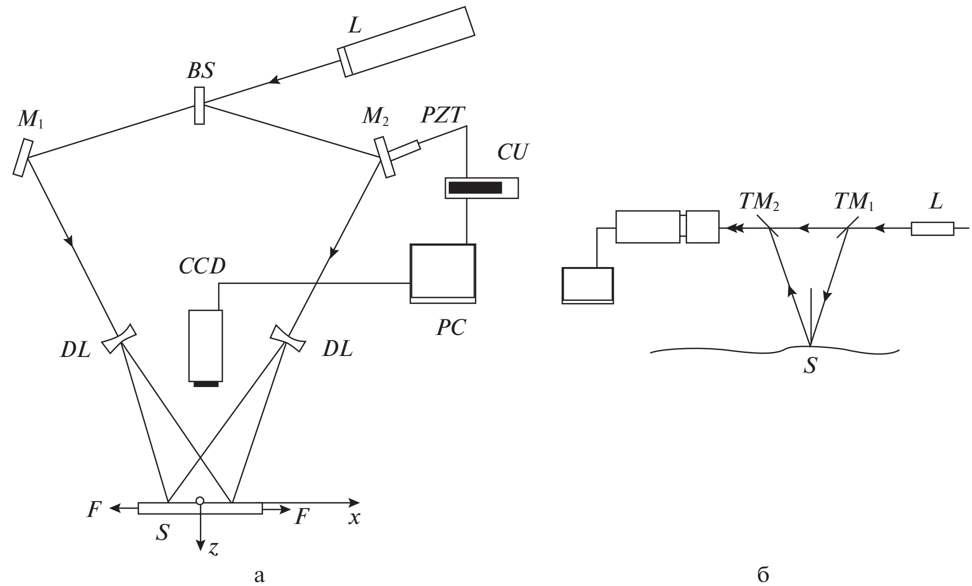

Рис. 7. Оптические схемы интерферометров ESPI для регистрации плоскостной (а) [74] и нормальной (б) компонент смещений образца: L – лазер, CCD – видеокамера, PC – компьютер, S – образец, TM_1, TM_2 – полупрозрачные зеркала, M_1, M_2 – глухие зеркала, BS – расщепитель луча, DL – рассеивающая линза, CU – блок управления, PZT – пьезоэлектрический преобразователь.

щений – светлые полосы. Перемещения в выбранном направлении определяются умножением числа темных или светлых полос в этом направлении на $\lambda/2$.

В зависимости от используемой оптической схемы возможны измерения в плоскости поверхности образца (тангенциальные смещения) [73], по нормали к поверхности с регистрацией нормальных перемещений [74, 75] или под некоторым углом к поверхности [76]. Важной особенностью ESPI является регистрация перемещений поверхности образца без прикрепления дифракционной решетки, необходимой при измерениях муаровом методом [77, 78]. Это позволяет быстро проводить измерения и использовать ESPI в качестве компактного и мобильного инструмента контроля качества. Измерения тангенциальных компонент смещений используются при определении остаточных напряжений в стандарте ASTM [54], а – нормальных – в ГОСТ [53].

На рис. 7 показаны оптические схемы интерферометров ESPI, применяемых для регистрации одной из тангенциальных рис. 7,а [74] и нормальной рис. 7,б компонент смещений образца в окрестности отверстия. Следует отметить, что измерение нормальной компоненты смещения при определении напряжений имеет ряд преимуществ перед измерениями тангенциальных компонент: 1) более простая оптическая схема интерферометра (видно из сопоставлений рис. 7,а и б), 2) простое обеспечение максимальной теоретической чувствительности метода применением освещения объекта практически по нормали к его поверхности, в то время как добиться максимальной теоретической чувствительности в интерферометрическом методе измерения плоскостных деформаций достаточно сложно [79]: освещенность образца снижается при увеличении угла падения лучей на объект свыше 60° от нормали; чувствительность же пропорциональна синусу этого угла.

На рис. 8 показаны стадии формирования электронной спекл-интерферограммы при регистрации нормальных смещений в окрестности зондирующего отверстия на

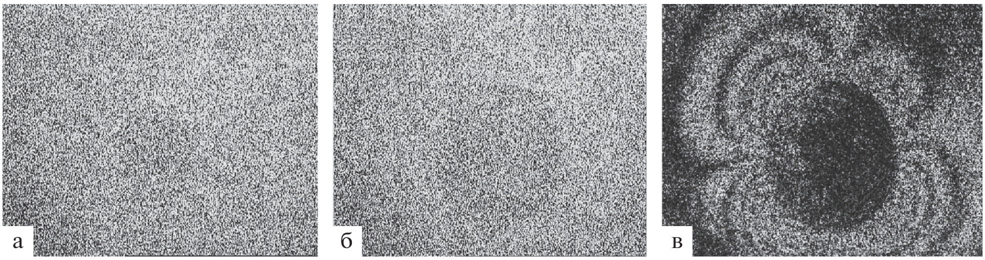

Рис. 8. Стадии формирования спекл-интерферограммы: исходные состояния до (а) и после сверления отверстия (б), спекл-интерферограмма, полученная поточечным вычитанием матриц исходных состояний (в).

сварном шве: спеклограмма исходного состояния с надсверленным отверстием рис. 8, а, спеклограмма после сверления отверстия рис. 8,б, спекл-интерферограмма, полученная поточечным вычитанием матриц исходных состояний, отображающая линии уровня нормальных смещений в окрестности отверстия рис. 8,в.

Еще одним преимуществом измерения нормальной компоненты перемещения является определение направлений главных напряжений непосредственно по интерференционной картине, тогда как при измерениях по тангенциальным компонентам определяется перемещение только по одной из осей, необязательно совпадающей с направлением главного напряжения; нахождение главных направлений оказывается при этом нетривиальной задачей. Если же направления главных остаточных напряжений заранее известны, то показатели точности их определения по тангенциальным смещениям выше, чем по нормальным, т.к. нормальные смещения происходят в основном из-за эффекта Пуассона и их величина поэтому значительно меньше, чем у плоскостных смещений. Наилучших результатов удается добиться комбинацией внеплоскостных и плоскостных измерений [74].

Для расчетно-теоретического обоснования измерений остаточных напряжений по нормальным перемещениям окрестности отверстия используются результаты численного решения трехмерной задачи теории упругости о полупространстве с несквозным цилиндро-коническим отверстием [3, 75]. Считается, что полупространство находится под действием самоуравновешенного двухосного поля напряжений σ_x, σ_y параллельных его границе. Распределение напряжений по глубине в пределах глубины h цилиндрической части малого несквозного отверстия, принимается в виде

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\sigma_x^0\\ \sigma_y^0\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\sigma_x^1\\ \sigma_y^1\end{Bmatrix}\left(1 - 2\frac{z}{h}\right),$$

где первое слагаемое характеризует постоянную компоненту, а второе – переменную, – самоуравновешенную по глубине отверстия (рис. 9).

Решение трехмерной задачи о растягиваемом полупространстве с несквозным отверстием без упрощения весьма времяемкое даже на современных серверах. Поэтому, имея в виду, что оно должно быть подобно решению задачи Кирша в плане изменения по окружной координате θ, может быть выполнено отделение этой координаты и сведение трехмерной задачи к двум двумерным: осесимметричной и задачи, компоненты решения которой меняются по угловой координате по законам $\cos 2\theta$ и $\sin 2\theta$. На рис. 10 показаны конечно-элементная сетка в осесимметричном случае (цифрами *1–4* отмечены участки с разным сгущением сетки в разрезе цилиндрической системы координат в пределах расчетной области r_1, $-z_1$, r_0 – радиус цилиндрической части от-

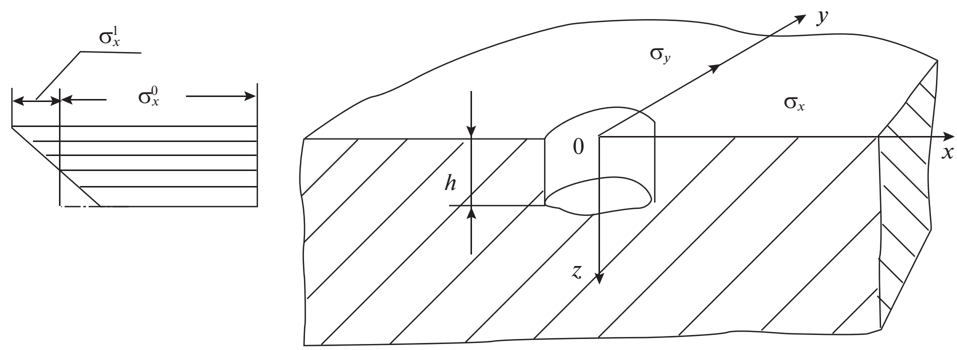

Рис. 9. Схема полупространства с зондирующим отверстием и исходным распределением напряжений.

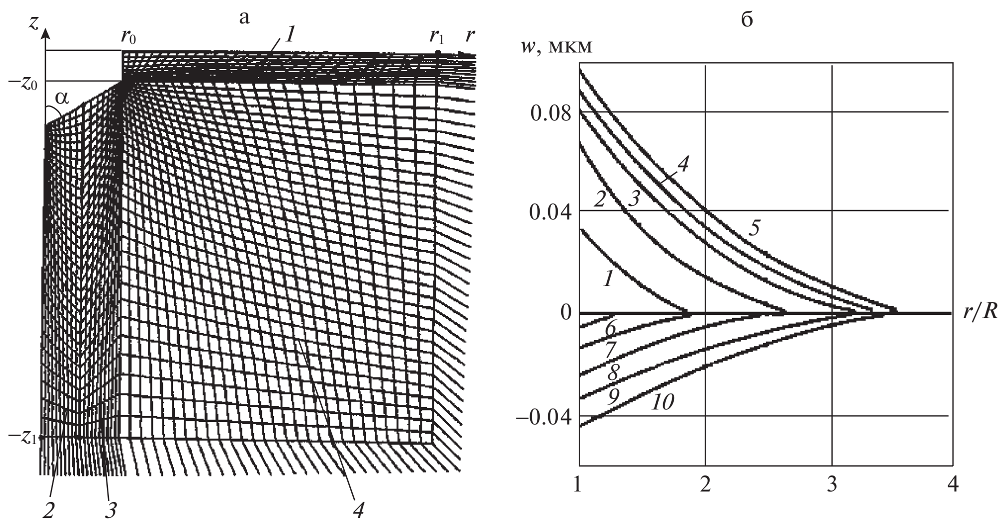

Рис. 10. Численное решение [3] трехмерной задачи о несквозном цилиндро-коническом отверстии при постоянном распределении напряжений по глубине: (а) – конечно-элементная сетка в окрестности отверстия; (б) – графики нормальных перемещений поверхности полупространства из алюминия при глубинах отверстия от $0.4R$ до $2R$ с шагом $0.4R$; кривые *1–5* – по направлению действия нагрузки $\sigma_x^0 = 10$ МПа, $\sigma_y^0 = 0$; кривые *6–10* – в перпендикулярном направлении.

верстия, z_0 – ее глубина), а также графики получающихся нормальных перемещений при тестовой нагрузке в 10 МПа [3].

Как видно из рис. 10,б, при малом несквозном отверстии уровни нормальных перемещений в его окрестности существенно выше по направлению действующих напряжений, чем в перпендикулярном направлении, что выделяет направление нагружения. С углублением отверстия, это различие постепенно снижается. Одновременно снижается вклад в перемещение поверхности образца от следующих ступеней заглубления отверстия.

В практике измерений вместо набора кривых, показанных на рис. 10,б, удобнее пользоваться экспресс-методикой, основанной на одной калибровочной кривой. Для

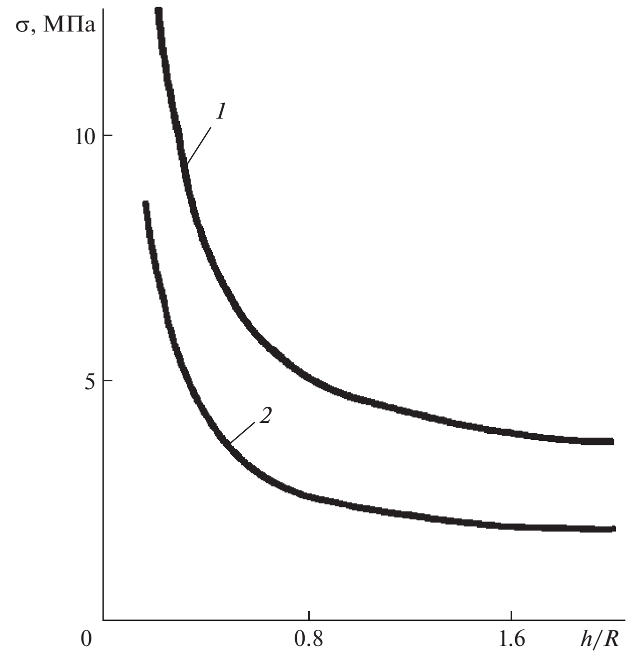

Рис. 11. Зависимости цены полосы σ от безразмерной глубины h/R отверстия для алюминия: *1* – учет темных интерференционных полос, *2* – учет и темных и светлых полос [3].

этого находится “цена полосы”: исходное напряжение на каждом шаге сверления делится на перемещение края отверстия в выбранном направлении, выраженное в числе темных или светлых полос интерферограммы, накопленных на предыдущих шагах с учетом последнего шага сверления [3, 4, 75].

На рис. 11 представлена зависимость “цены полосы” σ в МПа от безразмерной глубины h/R отверстия радиусом $R = 1$ мм для тестового материала с модулем упругости 70 ГПа. Цифрой *1* отмечен график, когда в расчет принимаются только темные полосы, цифрой *2* – темные и светлые полосы; в этом случае цена полосы в два раза меньше.

Аналогично строится график цены полосы, если определение остаточных напряжений проводится при помощи касательной компоненты вектора перемещений.

Обобщение результатов, полученных для тестового материала, на другой материал с модулем упругости E_1, радиусом R_1 и глубиной отверстия h_1 дается формулой [75]:

$$\sigma = \left(\frac{a}{h_1} + b\right)\frac{R}{R_1}\frac{E_1}{E}N, \qquad (2.1)$$

где σ – величина главного остаточного напряжения, N – число темных полос на интерферограмме. Значения калибровочных констант a и b в гиперболической аппроксимации кривой *1* на рис. 11 равны: $a = 20$ МПа·мм, $b = 25$ МПа.

Дальнейшим обобщением формулы (2.1) является формула [80]:

$$\sigma = \left(\frac{a}{h_1} + b\right)\frac{R}{R_1}\frac{E_1}{E}\frac{\nu}{\nu_1}\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{N}{\cos\alpha}, \qquad (2.2)$$

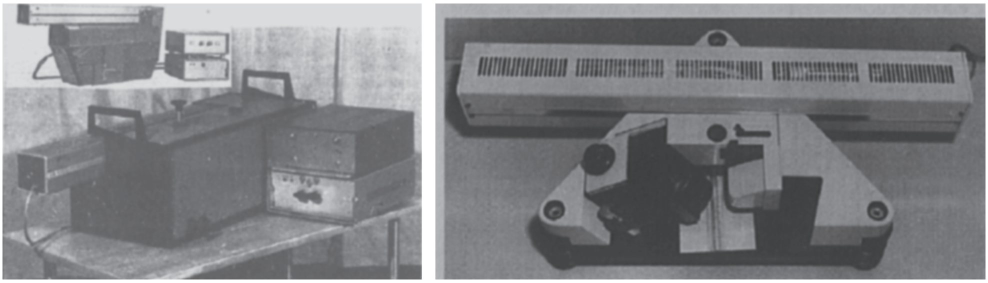

Рис. 12. Переносные приборы для измерения остаточных напряжений на гелий-неоновом лазере (1985 и 1994 гг.).

в которой учтено возможное отклонение коэффициента Пуассона ν_1 испытываемого материала от тестового значения, а также то, что формула (2.1) получена для оптической схемы Майкельсона при освещении тела лазером с длиной волны $\lambda = 0.633$ мкм. При освещении другим, например, лазером с длиной волны $\lambda_1 = 0.532$ мкм одному и тому же уровню подъема поверхности будет соответствовать большее число полос интерферограммы, что учитывается в (2.2) дополнительным множителем λ_1/λ. В случае оптической схемы, изображенной на рис. 7,б, для которой направление освещения отклонено от нормали к поверхности тела на угол α добавляется множитель $1/\cos(\alpha)$.

3. Опыт измерения остаточных напряжений методом отверстий в сварных соединениях. В связи с тем, что остаточные напряжения представляют собой прежде всего техническую проблему, для их измерений потребовалась разработка приборов, работающих не только в лабораторных, но и в производственных и полевых условиях. В этих целях было создано несколько модификаций портативных переносных измерительных систем под общим названием “ЛИМОН” (Лазерный Интерферометрический Метод Определения Напряжений). Часть из них, содержащая в качестве источников излучения гелий-неоновый лазер, представлена на рис. 12 [3, 4].

С этими приборами в производственных условиях был выполнен ряд исследований, результаты которых существенно повлияли на технические характеристики изделий. Остановимся на некоторых из них.

Измерения остаточных напряжений в сферических сосудах высокого давления. Сосуды высокого давления в форме сферических оболочек широко применяются в промышленности. Особое внимание привлекают сосуды с высоким значением энергетического показателя PV (м^3 кгс/см^2) > 10^7 Дж при минимальном весе. Титановые сплавы перспективны как базовый материал для таких сосудов. Однако после изготовления и завершения испытаний опытной партии сосудов с объемом порядка 1000 л, рассчитанных на рабочее давление более 300 кгс/см^2, выполненных штамповочно-сварной технологией из титанового сплава ВТ6ч, отмечались разрушения серийно изготовленных изделий [3]. При исследовании причин разрушений были измерены остаточные напряжения в осколках этих сосудов, а затем – и в не разрушившихся изделиях. Но эти измерения не прояснили ситуацию. Тогда было принято решение о проведении измерений остаточных напряжений после каждой операции изготовления сосуда: сварки, локальной и общей термической обработки, подварки дефектов, механической обработки. Выяснилось, что введенный в первоначальную технологическую цепочку общий вакуумный печной отжиг, несмотря на то, что он полностью снимал остаточные напряжения, также влиял на механические свойства материала: малые отклонения режима при проведении термообработки, неизбежные в серийном производстве, вызывали нежелательное наводораживание титана, что резко снижало эксплуатационные характеристики изделия, особенно при циклической нагрузке. Поэтому вместо общего печного отжига была предложена локальная тепловая обработка, при которой нагревалась только зона шва — наиболее напряженная часть сосуда. Сравнение эпюр остаточных напряжений после сварки и после локальной термической обработки показало, что эта термообработка не снимала полностью остаточные напряжения, а только снижала их до безопасного уровня, перераспределяя энергию напряжений на больший объем. В итоге технология изготовления сосудов была значительно удешевлена, а качество изделий повышено.

Измерения остаточных напряжений в сварных трубопроводах АЭС. Объект для измерения остаточных напряжений был определен исходя из реальных задач, сложившихся в условиях монтажа технологического оборудования АЭС, когда возникли осложнения при сварке стыков трубопровода [4]. Несмотря на соблюдение технологии сварки и термообработки, имелась достаточно большая статистика образования трещин длиной от 5 до 400 мм в сварных соединениях как на стадии монтажа, так и в процессе эксплуатации. Проблема повышения качества и надежности работы трубопровода встала настолько остро, что было решено ввести в программу исследования качества сварных соединений такой параметр, как уровень и распределение остаточных напряжений. По этой программе методом отверстия проведены замеры остаточных напряжений в лабораторных условиях на образцах, изготовленных по той же технологии сварки и термообработки, что и реальные конструкции, а затем, — в условиях монтажа на рабочих объектах. Обнаружено, что уже на первом этапе технологического процесса при выполнении корневого шва создаются значительные остаточные напряжения, а последующие этапы не приводят к их существенному снижению. Выяснилось, что особую опасность представляли соединения типа “труба—колено”, где уровень напряжений достигал 350 МПа. Установлено также, что, принятая в технологическом цикле, термообработка, состоящая в отпуске при 620°C в течение 2-х часов, не приводила к снижению напряжений в сварном соединении.

Полученные результаты позволили отработать технологию монтажной сварки трубопроводов, ликвидировав образование трещин в сварных соединениях. Было отмечено, что вносимый в исследуемую конструкцию в процессе измерения дефект — отверстие диаметром 2 и глубиной 1 мм — соизмерим с величиной допустимых дефектов. Поэтому в данной работе примененный метод измерения был признан неразрушающим.

Измерения остаточных напряжений в корпусе коллектора парогенератора АЭС. Еще одним примером измерений остаточных напряжений в производственных условиях были измерения в корпусе коллектора парогенератора (толстостенная труба с поясом из множества отверстий). Высверливание единичного отверстия в толстостенной трубе не влияет на ее жесткость и прочность, перфорация множественными отверстиями высокой плотностью наводит большое поле напряжений, вызывающее деформации и иногда разрушения. Именно в вершине неперфорированного клина и была обнаружена трещина на работающем парогенераторе.

Измерения методом отверстий остаточных напряжений, выполненные на новом корпусе парогенератора, показали, что в окрестности клина имеются значительные растягивающие напряжения порядка 200 МПа, наведенные операциями сверления. Сложившись с активными напряжениями от температурных перепадов при эксплуатации коллектора, они могли способствовать развитию микротрещин, образовавшихся при взрывной опрессовке трубок, что в итоге привело к трещине в корпусе парогенератора [4]. Фотография с участием одного из авторов процесса измерений остаточных напряжений в корпусе парогенератора приведена на рис. 13; цифрой *1* обозначен лазерный интерферометр.

На основе полученных результатов измерений и теоретических оценок на следующих поколениях парогенераторов технология запрессовки трубок взрывом была заме-

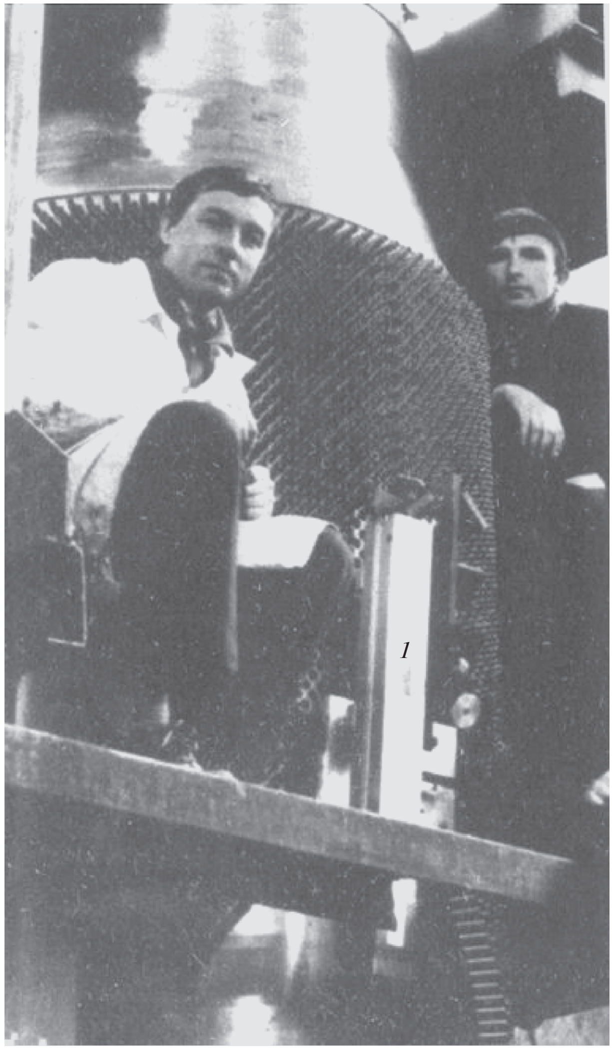

Рис. 13. Измерения остаточных напряжений в корпусе парогенератора ПГВ–1000; *1* – лазерный интерферометр.

нена гидровальцовкой, обеспечивающей недопущения образования микротрещин в их окрестности [81].

Приведенные примеры показывают важность знания остаточных напряжений, наводимых технологическими процессами и снабжения этими знаниями создателей ответственных конструкций, чтобы эти напряжения были учтены в расчетных схемах и при необходимости были приняты меры по их уменьшению.

Большое количество выполненных измерений в лабораторных и производственных условиях способствовало совершенствованию технологии измерений и регистрирующей аппаратуры. Один из вариантов мобильного спекл-интерферометра для измерения остаточных напряжений представлен на рис. 14. В нем используются современ-

Рис. 14. Мобильный спекл-интерферометр для измерения остаточных напряжений (2000 г.).

ные комплектующие: компактный лазер и видеокамера, позволившие снизить массу измерительной части прибора до 2 кг.

С помощью этого прибора проводились измерения остаточных напряжений в промышленных условиях на разных конструкциях. На рис. 15,а показан рабочий момент измерений в спиральном сварном шве трубы газопровода большого диаметра. Многочисленные зондирующие отверстия в окрестности шва на внешней поверхности этой трубы показаны на рис. 15,б; для повышения контрастности интерферограмм поверхность объекта вблизи мест сверления отверстия покрывалась диффузно отражающей краской [82]. Одним из преимуществ спирального шва перед кольцевым является то, что главные остаточные напряжения располагаются под углом к направлению прокатки ленты, что повышает работоспособность металла [83].

На рис. 16 показаны характерные интерферограммы, полученные в разных местах сварных соединений на трубе и вырезках из трубы [84]: интерферограмма на рис. 16,а отображает двухосное напряженное состояние с главными напряжениями, примерно одинаковыми по величине, но противоположными по знаку; на рис. 16,б – двухосное напряженное состояние с большим градиентом по одному направлению; на рис. 16,в – напряженное состояние, близкое к одноосному, а на рис. 16,г – равноосное напряженное состояние.

По результатам измерений на наружной и внутренней поверхностях трубы и образцов были построены эпюры напряжений. На рис. 17,а показаны эпюры напряжений на наружной поверхности трубы поперек спирального шва (центр шва соответствует началу координат). Линией с треугольными маркерами отмечено распределение продольных приповерхностных напряжений, параллельных оси шва, – с квадратными маркерами – напряжений, перпендикулярных оси шва. Как видно из этих эпюр, продольные напряжения у поверхности шва заметно отличаются от напряжений в глубине наплавленного материала, которые отображены штриховой линией (в области $r = 0$, $\sigma = 200$–250 МПа).

На рис. 17,б представлены эпюры напряжений по окружности наружной поверхности трубы вдали от ее торца (на расстоянии одного диаметра трубы). Распределение

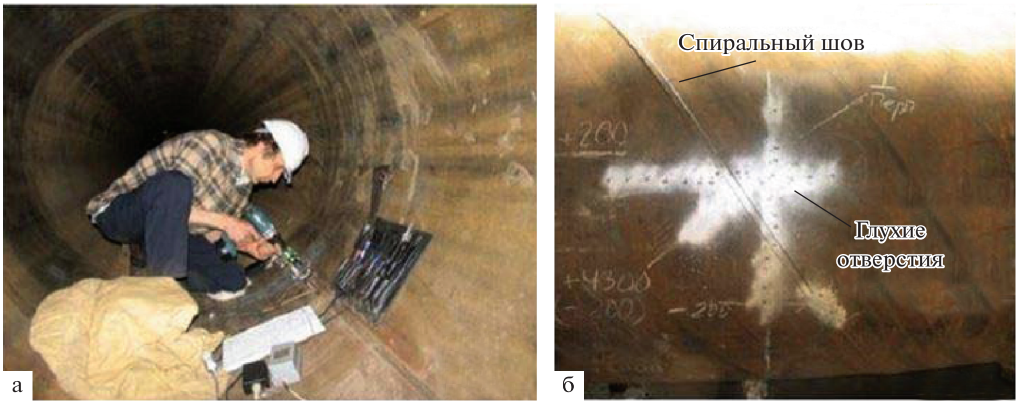

Рис. 15. Измерение остаточных напряжений в зоне сварного шва на газовой трубе большого диаметра: (а) — сверление внутри трубы, (б) — зондирующие отверстия на наружной поверхности трубы вблизи спирального шва.

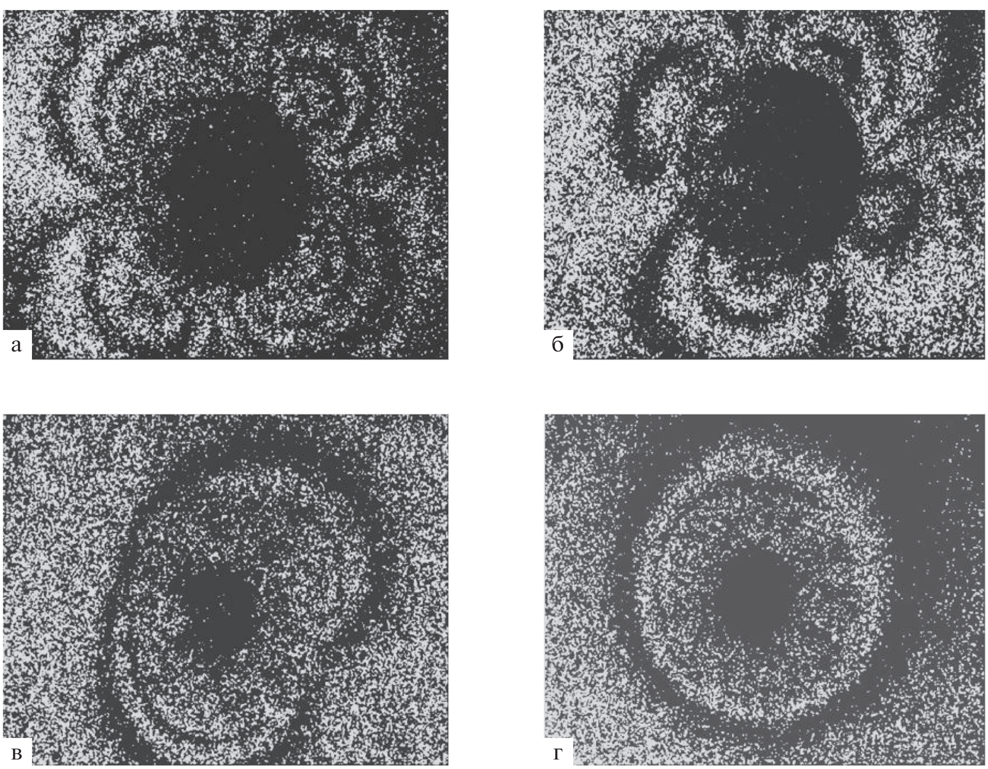

Рис. 16. Характерные интерферограммы [84].

приповерхностных напряжений σ_1, ориентированных вдоль образующей, показано с внешней стороны, а напряжений σ_2, действующих в окружном направлении — внутри круговой линии, отображающей окружность трубы.

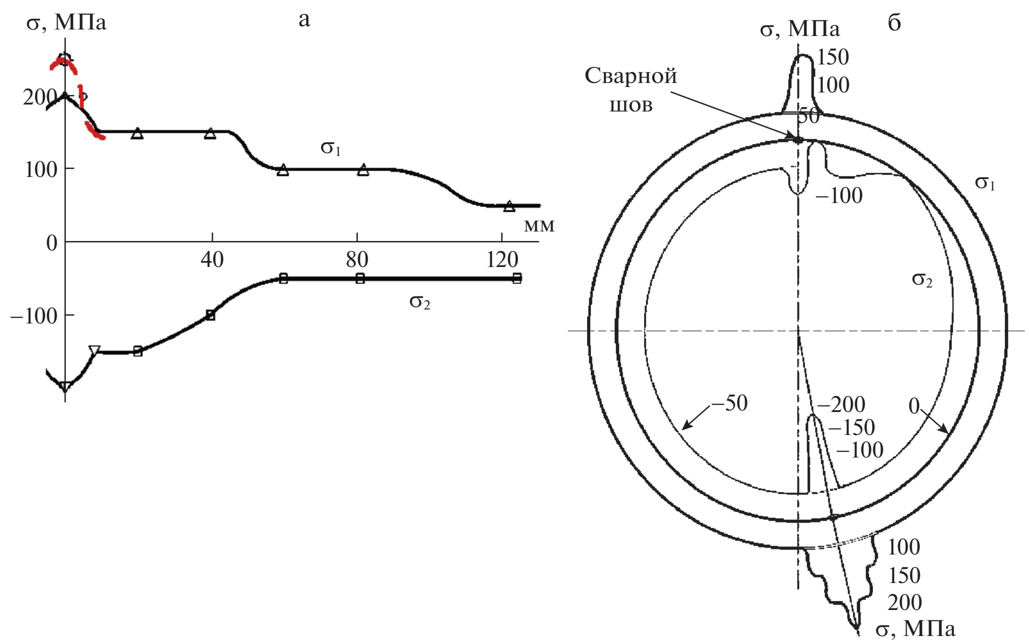

Рис. 17. Эпюры напряжений [84] (а) на наружной поверхности трубы поперек спирального шва (сплошные линии – приповерхностные напряжения, штриховые красные линии – напряжения в глубине наплавленного материала), (б) по окружности наружной поверхности трубы вдали от ее торца (σ_1 в зоне $\sigma > 0$, σ_2 в зоне $\sigma < 0$).

Из приведенных зависимостей видно, что распределения остаточных напряжений вдоль швов и по окружности трубы имеют всплески в узких зонах – на шве и в ближней зоне термовлияния. Уровень растягивающих и сжимающих напряжений на наружной поверхности в спиральном и в стыковом шве (на его несрезанной выпуклости), а также в ближней зоне термовлияния на расстояниях до 15 мм от линии сплавления составляет 150–200 МПа и плавно снижается до уровня 0–50 МПа по мере удаления от шва. На срезанной выпуклости шва уровень растягивающих напряжений достигает 250 МПа. Главные растягивающие напряжения на швах и в зоне термовлияния направлены вдоль их осей, а главные сжимающие – перпендикулярно этим осям. При удалении от швов ориентация главных напряжений меняется случайным образом.

Характер распределения напряжений в швах и по окружности на внутренней поверхности труб и образцов такой же, как на наружной, но максимальный уровень напряжений составляет не более 150 МПа.

В целом по окружности наружной поверхности отмечены в среднем более высокие растягивающие, а внутренней – сжимающие напряжения. Установлено также, что применяемая в рамках технологического процесса термическая обработка, предназначенная в основном для придания материалу заданных механических характеристик, практически не влияла на уровень остаточных напряжений и их распределение.

Заключение. Проблема остаточных напряжений сопровождает развитие техники и производства с момента их зарождения и не теряет актуальности в настоящее время. Для диагностики остаточных напряжений применяются разнообразные неразрушающие и в разной степени повреждающие методы. Среди них выделяется слабоповреждающий метод зондирующего отверстия, для которого отработаны различные методики регистрации высвобождаемых в окрестности отверстия малых перемещений и деформаций.

В работе представлен обзор истории развития механических разрушающих методов диагностики остаточных напряжений, применявшихся до изобретенного Матаром слабоповреждающего метода отверстия. Подробно изложены особенности этого метода, прежде всего в плане регистрации деформаций и перемещений в окрестности зондирующего отверстия. Проанализированы два основных способа регистрации – с помощью тензометрии и лазерной интерферометрии. Представлено расчетно-теоретическое обоснование методики измерений остаточных напряжений по нормальным перемещениям окрестности отверстия на основе численного решения трехмерной задачи теории упругости об одноосевом растяжении полупространства с цилиндро-коническим несквозным отверстием, которая используется в нескольких поколениях лазерно-интерферометрических измерительных систем, созданных как для лабораторных исследований, так и в мобильных вариантах для измерений остаточных напряжений в производственных и полевых условиях. Рассмотрены примеры конкретных измерений остаточных напряжений с помощью этого метода в лабораторных и заводских условиях. Итогом этих измерений становилось во многих случаях совершенствование технологии изготовления и повышение качества выпускаемой продукции.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-18-50142.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Витман Ф.Ф.* Остаточные напряжения. М.; Л.: ГТТИ, 1933. 64 с.
2. *Биргер И.А.* Остаточные напряжения. М.: Машиностроение, 1963. 232 с.
3. *Чернышев Г.Н., Попов А.Л., Козинцев В.М. и др.* Остаточные напряжения в деформируемых твердых телах. М.: Физматлит, 1996. 240 с.
4. *Чернышев Г.Н., Попов А.Л., Антонов А.А. и др.* Технологические напряжения в сварных соединениях. М.: МГОУ, 2004. 254 с.
5. *Макаров Г.И.* Протяженные разрушения магистральных газопроводов. М.: Академия, 2002. 208 с.
6. *Розенштейн И.М.* Аварии и надежность стальных резервуаров. М.: Недра, 1995. 253 с.
7. *Рыбалкин П.Т., Иванов С.Д., Чернышев Г.Н.* Термическая обработка электроплавленных огнеупоров. М.: Металлургия, 1986. 190 с.
8. *Витман Ф.Ф., Дмитриева Т.Г., Пух В.П.* Остаточные напряжения в стеклах, закаленных в жидкостях // ФТТ. 1962. Т. 4. № 8. С. 2151–2159.
9. *Кривко А.И.* Влияние релаксаций напряжений на коробление деталей // Металловедение и термическая обработка металлов. 1978. № 2. С. 32–36.
10. *Быков В.Г., Салтыков М.А., Горбунов М.Н.* Причины необратимых формоизменений тонкостенных вкладышей и пути повышения надежности подшипников высоконагруженных дизелей // Двигателестроение. 1980. № 6. С. 54–57.
11. *Букатый С.А., Дмитриев В.А., Папшев Д.Д.* Влияние технологических остаточных напряжений на деформации тонкостенных кольцевых деталей // Вестн. машиностр. 1984. № 6. С. 40–44.
12. *Вивденко Ю.Н.* Влияние наследственных и внесенных обработкой остаточных напряжений на коробление дисков ГТД // Авиац. промышл. 1988. № 2. С. 25–28.
13. *Инденбом В.Л., Томиловский Г.Е.* Измерение внутренних напряжений в кристаллах синтетического корунда // Кристаллография. 1958. Т. 3. № 4. С. 593–599.
14. *Крымов В.М., Носов Ю.Г., Бахолдин С.И. и др.* Остаточные напряжения в стержнях сапфира, выращиваемых способом Степанова // ФТТ. 2015. Т. 57. Вып. 4. С. 727–732.
15. *Александров А.Я., Ахметзянов М.Х.* Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела. М.: Наука, 1973. 575 с.

16. *Куряева Р.Г., Сурков Н.В.* Изменение под давлением показателя преломления и плотности стекол системы $CaO \cdot Al_2O_3 \cdot xSiO_2$, где $x = 2, 4$ // Геохимия. 2008. № 1. С. 100–103.
17. *Гликман Л.А.* Коррозионно-механическая прочность металлов. Л.; М.: Машгиз, 1955. 176 с.
18. *Арчаков Ю.И.* Водородная коррозия стали. М.: Металлургия, 1985. 192 с.
19. *Петров Л.Н.* Коррозия под напряжением. Киев: Вища школа, 1986. 142 с.
20. *Стеклов О.И.* Стойкость материалов и конструкций к коррозии под напряжением. М.: Машиностроение, 1988. 290 с.
21. *Бобылев А.В.* Растрескивание медных сплавов: справочник. М.: Металлургия, 1993. 352 с.
22. *Трощенко В.Т., Покровский В.В., Ярусевич В.Л. и др.* Скорость роста усталостных трещин в полях остаточных напряжений сварных титановых соединений с различным содержанием охрупчивающих примесей // Пробл. прочн. 1990. № 11. С. 8–14.
23. *Подзей А.В., Сулима А.М., Евстигнеев М.И. и др.* Технологические остаточные напряжения. М.: Машиностроение, 1973. 216 с.
24. *Труфяков В.И.* Усталость сварных соединений. Киев: Наук. думка, 1973. 216 с.
25. *Труфяков В.И.* Прочность сварных соединений при переменных нагрузках. Киев: Наук. думка, 1990. 256 с.
26. *Прохоров Н.Н.* Горячие трещины при сварке. М.: Машгиз, 1953. 220 с.
27. *Буркин С.П., Шимов Г.В., Андрюкова Е.А.* Остаточные напряжения в металлопродукции. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2015. 248 с.
28. *Кузнецова Е.В., Мелехин Д.А., Елистратова Е.С., Виндокуров Д.В.* Поведение оболочек тепловыделяющих элементов при эксплуатации с учетом остаточных напряжений // Прикл. матем. и вопросы управл. 2016. № 3. С. 23–34.
29. *Кузнецова Е.В., Арташева А.А.* Влияние эксплуатационных режимов и технологических остаточных напряжений на коррозионное растрескивание циркониевых оболочек, используемых в атомной энергетике // Вестн. ПНИПУ. Механика. 2012. № 1. С. 51–61.
30. *Пэнэжко П.* “Радиоактивный” прокурор // Инженер. 1990. № 12. С. 2–4.
31. *Козинцев В.М., Пономарев И.И., Попов А.Л. и др.* Технологические остаточные напряжения и аварии в парогазогенераторах АЭС // Тр. 4-й Всеросс. конф. “Новое в экологии и безопасн. жизнедеят. 1999”. СПб.: БГТУ. 1999. Т. 1. С. 553–557.
32. *Алехин В.П.* Физика прочности и пластичности поверхностных слоев материалов. М.: Наука, 1980. 280 с.
33. *Витман Ф.Ф., Богуславский И.А., Пух В.П.* Упрочнение стекла // ФТТ. 1962. Т. 4. № 8. С. 2160–2168.
34. *Богуславский И.А.* Высокопрочные закаленные стекла. М.: Стройиздат, 1969. 208 с.
35. *Кудрявцев И.В.* Поверхностный наклеп для повышения прочности и долговечности машин. М.: Машиноведение, 1969. 100 с.
36. *Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. М.: Наука, 1984. 368 с.
37. *Радченко В.П., Саушкин М.Н.* Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях. М.: Машиностроение, 2005. 226 с.
38. *Вологдин В.П.* Деформации и напряжения при сварке судовых конструкций. М.: Оборонгиз, 1945. 149 с.
39. *Steinzig M., Ponslet E.* Residual stress measurement using the hole drilling method and laser speckle interferometry: Part I // Exp. Tech. 2003. V. 27. № 3. P. 43–46.
40. *Чернышев Г.Н., Попов А.Л., Козинцев В.М.* Полезные и опасные остаточные напряжения // Природа. 2002. № 10. С. 17–24.
41. *De Bolla P.* The Fourth of July and the Founding of America. Woodstock; New York: Overlook Press, 2008. 192 с.
42. *Родман Т.Д.* Отчет об отливке и проб, до 2450 обыкновенных выстрелов, двух 10-дюймовых орудий; одного отлитого сплошною болванкою и охлажденного снаружи, другого отлитого с готовым каналом и охлажденного изнутри, капитана Родмана // Горный ж. 1863. Кн. 07 (июль). С. 27–76.
43. *Калакуцкий Н.В.* Материалы изучения стальных орудий // Артиллер. ж. 1867. № 5. С. 784–817.

44. *Калакуцкий Н.В.* Исследование внутренних напряжений в чугуне и стали. СПб.: тип. и хромолит. А. Траншель, 1888. 116 с.
45. *Давиденков Н.Н.* Избранные труды. Т. 2: Механические свойства материалов и методы измерения деформаций. Киев: Изд. АН УССР, 1981. 655 с.
46. *Давиденков Н.Н.* Струнный метод измерения деформаций. Л.; М.: ГИТТЛ, 1933. 60 с.
47. *Sachs G.* Der Nachweis inneres Spannungen in Stangen und Rohren // Zeitschr. für Metallkunde. 1927. V. 19. S. 352–357.
48. *Соколов И.А., Уральский В.И.* Остаточные напряжения и качество металлопродукции. М.: Металлургия, 1981. 96 с.
49. *Mathar J.* Ermittlungen von Eigenspannungen durch Messung von Bohrloch-verformungen // Arch. Eisenhüttenwes. 1932. V. 6. № 6. P. 277–281.
50. *Schajer G.S.* Hole-drilling residual stress measurements at 75: origins, advances, opportunities // Exp. Mech. 2010. V. 50. № 2. P. 245–253.
51. *Huang X., Liu Z., Xie H.* Recent progress in residual stress measurement techniques // Acta Mech. Solida Sin. 2013. V. 26. № 6. P. 570–583.
52. *Kirsch G.* The theory of elasticity and the needs of the theory of strength // J. Assoc. Ger. Eng. 1898. V. 42. P. 797–807.
53. ГОСТ Р 52891-2007. Контроль остаточных технологических напряжений методом лазерной интерферометрии. Общие требования. М.: Стандартинформ, 2009. 15 с.
54. ASTM E837-13 2013. Standard Test Method for Determining Residual Stresses by the Hole-Drilling Strain-Gage Method. ASTM International. West Conshohocken (PA), 2013. 16 p.
55. *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 496 с.
56. *Петерсен Р.* Коэффициенты концентрации напряжений. М.: Мир, 1977. 302 с.
57. *Давиденков Н.Н., Цобкалло С.О.* Новый метод рентгенографического решения плоской задачи теории упругости // ЖТФ. 1941. Т. XI. Вып. 5. С. 389–397.
58. *Курносов Д.Г., Якутович М.В.* Метод измерения напряжений в пластинах и в поверхностном слое крупных изделий // Заводская лабор. 1939. Т. 8. № 10–11. С. 1148–1154.
59. *Курносов Д.Г., Якутович М.В.* Измерение остаточных напряжений методом высверливания отверстий // Заводская лабор. 1946. Т. 12. № 11–12. С. 960–987.
60. *Ruge A.C.* Strain Gauge. U.S. Pat. No. 2,350,972. June 6, 1944. Filed Sept. 16, 1939 / Cambridge, Mass. Patent Office. 5 p.
61. *Soete W., Vancrombrugge R.* An industrial method for the determination of residual stresses // Proc. SESA. 1950. V. 8. № 1. P. 17–28.
62. *Цобкалло С.О., Васильев Д.М.* Измерение остаточных напряжений путем вырезания столбика // Заводская лабор. 1949. Т. 15. № 2. С. 199–207.
63. *Milbradt K.P.* Ring method determination of residual stresses // Proc. SESA. 1951. V. 9. № 1. P. 63–74.
64. *Гликман Л.А., Писаревский М.М.* Измерение остаточных напряжений в поверхностном слое крупных изделий с помощью тензометрирования // Заводская лабор. 1951. Т. 17. № 1. С. 75–81.
65. *Rendler N.J., Vigness I.* Hole-drilling strain-gage method of measuring residual stresses // Exp. Mech. 1966. V. 6. № 12. P. 577–586.
66. *Schajer G.S.* Application of finite element calculations to residual stress measurements // J. Eng. Mater. Technol. 1981. V. 103. № 2. P. 157–163.
67. *Gabor D.A.* New microscopic principle // Nature. 1948. V. 161. P. 777–778.
68. *Maiman T.H.* Stimulated optical radiation in ruby // Nature. 1960. V. 187. P. 493–494.
69. *Sharpe W.N.* The interferometric strain gage // Exp. Mech. 1968. V. 8. № 4. P. 164–170.
70. *Nelson D.V., McCrickerd J.T.* Residual-stress determination through combined use of holographic interferometry and blind-hole drilling // Exp. Mech. 1986. V. 26. № 4. P. 371–378.
71. *Франсон М.* Оптика спеклов. М.: Мир, 1980. 171 с.
72. *Рябухо В.П.* Спекл-интерферометрия // СОЖ. 2001. Т. 7. № 5. С. 102–109.
73. *Tjhung T., Li K.* Measurement of in-plane residual stresses varying with depth by the interferometric strain/slope rosette and incremental hole-drilling // J. Eng. Mater.&Technol. 2003. V. 125. № 2. P. 153–162.

74. *Lin S.-T., Hsieh C.-T., Hu C.-P.* Two holographic blind-hole methods for measuring residual stresses // Exp. Mech. 1994. V. 34. № 2. P. 141–147.
75. *Goldstein R.V., Kozintsev V.M., Popov A.L.* Using an electronic speckle interferometry for measurement of a stress-deformation state of elastic bodies and structures: Recent advances in mechanics / ed. by *Gdoutos E.E. and Kounadis A.N.* Athens: Springer, 2009. P. 191–206.
76. *Diaz F.V., Kaufmann G.H., Galizzi G.E.* Determination of residual stresses using hole drilling and digital speckle pattern interferometry with automated data analysis // Opt. Lasers Eng. 2000. V. 33. № 1. P. 39–48.
77. *McDonach A., McKelvie J., MacKenzie P., Walker C.A.* Improved moiré interferometry and applications in fracture mechanics, residual stresses and damaged composites // Exp. Tech. 1983. V. 7. № 6. P. 20–24.
78. *Furgiuele F.M., Pagnotta L., Poggialini A.* Measuring residual stresses by hole-drilling and coherent optics techniques: a numerical calibration // J. Eng. Mater. Technol. 1991. V. 113. № 1. P. 41–50.
79. *Zhang J.* Two-dimensional in-plane electronic speckle pattern interferometer and its application to residual stress determination // Opt. Eng. 1998. V. 37. № 8. P. 2402–2409.
80. *Popov A.L., Kozintsev V.M., Levitin A.L. et al.* Application of the probe hole method for diagnostics of shrinkage stresses in products of additive technologies / IUTAM Symp. on Mech. Design and Analysis for AM Technologies. Symp. materials / IPMech RAS Moscow, 2018. P. 66–68.
81. *Стекольников В.В., Титов В.Ф.* Причины повреждения коллекторов теплоносителя и меры повышения надежности парогенераторов ПГВ-1000 // Атомная энергия. 1991. Т. 71. Вып. 4. С. 312–320.
82. *Гольдштейн Р.В., Попов А.Л., Козинцев В.М. и др.* Исследование остаточных напряжений методом электронной спекл-интерферометрии / Актуальн. пробл. механ.: механ. деформ. тверд. тела. Сб. тр. М.: Наука, 2009. С. 479–494.
83. *Вайншток С.М.* (ред.) Трубопроводный транспорт нефти. Т. 1. М.: ООО “Недра-Бизнесцентр”, 2002. 407 с.
84. *Гольдштейн Р.В., Козинцев В.М., Попов А.Л. и др.* Спекл-интерферометрическое исследование остаточных напряжений в сварных соединениях труб, изготовленных по разным технологиям // Космонавтика и ракетостроение. 2009. № 1(54). С. 94–102.

Hole Method in Residual Stress Diagnostics

A. L. Popov[a, #], V. M. Kozintsev[a], D. A. Chelyubeev[a], and A. L. Levitin[a]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*
[#]*e-mail: popov@ipmnet.ru*

Research on residual stresses and their influence on the strength of materials and structures is being actively doing in all industrialized countries. The such research is a need to largely due to the fact that many technical failures and man-made disasters occur due to a high level of residual technological stresses. Various physical and mechanical methods are used to diagnose residual stresses. Methods based on various physical principles do not affect the strength of the measurement object, i.e. they can be considered non-destructive if you do not take into account changes in the surface state of the object during preparation for measurements. However, there are complex relationships between the measured values and the desired stresses with parameters that often depend on a number of factors that are difficult to take into account. Mechanical methods are destructive or partially destructive. Residual stresses are calculated from deformations or displacements that occur when an object or its parts are unloaded, using the equations of elasticity theory; to process measurements, we only need to know the basic mechanical properties of the material. The hole method is the most widely used among the mechanical methods: it is not very damaging, it is quite universal as the shape and material of objects can be very different, it is methodically and materially provided as measurement standards are approved, equipment, measurement technology and methods of processing results are developed.

The article presents the history of the development of the hole method, the contribution of domestic and international scientists to its development, and gives examples of specific measurements of residual stresses using this method in laboratory and production conditions with an emphasis on domestic measurement technology.

Keywords: residual stresses, diagnostics, hole-drilling method

REFERENCES

1. *Vitman F.F.* Residual Stresses (Ostatochnyye napryazheniya). Moscow; Leningrad: GTTI, 1933. 64 p. (in Russian)
2. *Birger I.A.* Residual Stresses (Ostatochnyye napryazheniya). Moscow: Mashinostroenie, 1963. 232 p. (in Russian)
3. *Chernyshev G.N., Popov A.L., Kozintsev V.M. et al.* Residual Stresses in Deformable Solids (Ostatochnyye napryazheniya v deformiruyemykh tverdykh telakh). Moscow: Fizmatlit, 1996. 240 p. (in Russian)
4. *Chernyshev G.N., Popov A.L., Kozintsev V.M. et al.* Technological Stresses in Welded Joints (Tekhnologicheskiye napryazheniya v svarnykh soyedineniyakh). Moscow: MGOU, 2004. 254 p. (in Russian)
5. *Makarov G.I.* Extended Destruction of Main Gas Pipelines (Protyazhennyye razrusheniya magistral'nykh gazoprovodov). Moscow: Academy, 2002. 208 p. (in Russian)
6. *Rozenshtein I.M.* Accidents and Reliability of Steel Tanks (Avarii i nadezhnost' stal'nykh rezervuarov). Moscow: Nedra, 1995. 253 p. (in Russian)
7. *Rybalkin P.T., Ivanov S.D., Chernyshev G.N.* Heat Treatment of Electrofused Refractories (Termicheskaya obrabotka elektroplavlennykh ogneuporov). Moscow: Metallurgy, 1986. 190 p. (in Russian)
8. *Vitman F.F., Dmitrieva T.G., Pooh V.P.* Residual stresses in glass tempered in liquids // Phys. Solid State, 1962, vol. 4, no. 8, pp. 2151–2159.
9. *Krivko A.I.* Effect of stress relaxations on part warping // Metal Sci.&Heat Treatment, 1978, vol. 20, no. 2, pp. 32–36.
10. *Bykov V.G., Saltykov M.A., Gorbunov M.N.* Causes of irreversible deformation of thin-walled bushings and ways to improve the reliability of bearings in highly loaded diesel engines // Engine Building, 1980, no. 6, pp. 54–57. (in Russian)
11. *Bukatiy S.A., Dmitriev V.A., Papshev D.D.* Influence of technological residual stresses on deformations of thin-walled ring parts // Russ. Engng. Res., 1984, vol. 4, no. 6, pp. 40–44.
12. *Vivdenko Yu.N.* Influence of hereditary and processed residual stresses on the warp age of GTE disks // Aviation Industry. 1988, no. 2, pp. 25–28. (in Russian)
13. *Indenbom V.L., Tomilovsky G.E.* Measurement of internal stresses in synthetic corundum crystals // Sov. Phys. Crystall., 1958, vol. 3, no. 4, pp. 593–599.
14. *Krymov V.M., Nosov Yu.G., Bakholdin S.I. et al.* Residual stresses in sapphire rods grown by the Stepanov method // Phys. Solid State, 2015, vol. 57, no. 4, pp. 746–751.
15. *Aleksandrov A.Ya., Akhmetzyanov M.Kh.* Polarization-optical Methods of Deformable Body Mechanics (Polyarizatsionno-opticheskiye metody mekhaniki deformiruyemogo tela). Moscow: Nauka, 1973. 575 p. (in Russian)
16. *Kuryaeva R.G., Surkov N.V.* Change under pressure of the refractive index and density of glasses of the $CaO \cdot Al_2O_3 \cdot xSiO_2$ system, where $x = 2, 4$ // Geochem. Intern., 2008, vol. 46, no. 1, pp. 92–95.
17. *Glikman L.A.* Corrosion-mechanical Strength of Metals (Korrozionno-mekhanicheskaya prochnost' metallov). Leningrad, Moscow: Mashgiz, 1955. 176 p. (in Russian)
18. *Archakov Yu.I.* Hydrogen Corrosion of Steel (Vodorodnaya korroziya stali). Moscow: Metallurgy, 1985. 192 p. (in Russian)
19. *Petrov L.N.* Stress Corrosion (Korroziya pod napryazheniyem). Kiev: High School, 1986. 142 p. (in Russian)
20. *Steklov O.I.* Resistance of Materials and Structures to Stress Corrosion (Stoykost' materialov i konstruktsiy k korrozii pod napryazheniyem). Moscow: Mashinostroenie, 1988. 290 p. (in Russian)
21. *Bobylev A.V.* Cracking of Copper Alloys: a Handbook (Rastreskivaniye mednykh splavov: spravochnik). Moscow: Metallurgy, 1993. 352 p. (in Russian)

22. *Troshchenko V.T., Pokrovsky V.V., Yarusevich V.L., Mikhailov V.I.* Growth rate of fatigue cracks in residual stress fields of welded titanium joints with different content of embrittling impurities // Strength of Mater., 1990, vol. 22, no. 11, pp. 1562–1569.
23. *Podzey A.V., Sulima A.M., Evstigneev M.I., Serebryannikov G.Z.* Technological Residual Stresses (Tekhnologicheskiye ostatochnyye napryazheniya). Moscow: Mashinostroenie, 1973. 216 p. (in Russian)
24. *Trufyakov V.I.* Fatigue of Welded Joints. (Ustalost' svarnykh soyedineniy) Kiev: Naukova Dumka, 1973. 216 p. (in Russian)
25. *Trufyakov V.I.* Strength of Welded Joints at Variable Loads (Prochnost' svarnykh soyedineniy pri peremennykh nagruzkakh). Kiev: Naukova Dumka, 1990. 256 p. (in Russian)
26. *Prokhorov N.N.* Hot Welding Cracks (Goryachiye treshchiny pri svarke). Moscow: Mashgiz, 1953. 220 p. (in Russian)
27. *Burkin S.P., Shimov G.V., Andryukova E.A.* Residual Stresses in Metal Products (Ostatochnyye napryazheniya v metalloproduktsii). Ekaterinburg: Ural Univ., 2015. 248 p. (in Russian)
28. *Kuznetsova E.V., Melekhin D.A., Elistratova E.S., Vindokurov D.V.* Behavior of covers of the heatallocating elements at operation taking into account residual stresses // Appl. Math.&Control Issues, 2016, no. 3, pp. 23–34.
29. *Kuznetsova E.V., Artashova A.A.* The influence of operational modes and technological residual stresses on corrosion cracking of zirconium covers are used in atomic engineering // Bull. Perm Nat. Res. Polytech. Univ. Mechanics, 2012, no. 1, pp. 51–61.
30. *Penezhko P.* "Radioactive" prosecutor // Engineer, 1990, no. 12, pp. 2–4. (in Russian)
31. *Kozintsev V.M., Ponomarev I.I., Popov A.L., Chernyshev G.N.* Technological residual stresses and accidents in steam and gas generators of nuclear power plants // Proc. 4th All-Russian scientific-practical conference with international participation "New in Ecology and Life Safety 1999". SPb.: BSTU, 1999. Vol. 1. C. 553–557. (in Russian)
32. *Alekhin V.P.* Physics of Strength and Plasticity of Surface Layers of Materials (Fizika prochnosti i plastichnosti poverkhnostnykh sloyev materialov). Moscow: Nauka, 1980. 280 p. (in Russian)
33. *Vitman F.F., Boguslavsky I.A., Pooh V.P.* Glass hardening // Phys. Solid State, 1962, vol. 4, no. 8, pp. 2160–2168.
34. *Boguslavsky I.A.* High Strength Tempered Glass (Vysokoprochnyye zakalennyye stekla). Moscow: Stroyizdat, 1969. 208 p. (in Russian)
35. *Kudryavtsev I.V.* Surface Hardening for Increased Strength and Durability of Machines (Poverkhnostnyy naklep dlya povysheniya prochnosti i dolgovechnosti mashin). Moscow: Mashinovedenie, 1969. 100 p. (in Russian)
36. *Podstrigac Ya.S., Lomakin V.A., Kolyano Yu.M.* Thermoelasticity of Bodies of Inhomogeneous Structure (Termouprugost' tel neodnorodnoy struktury). Moscow: Nauka, 1984. 368 p. (in Russian)
37. *Radchenko V.P., Saushkin M.N.* Creep and Relaxation of Residual Stresses in Hardened Structures (Polzuchest' i relaksatsiya ostatochnykh napryazheniy v uprochnennykh konstruktsiyakh). Moscow: Mashinostroenie, 2005. 226 p. (in Russian)
38. *Vologdin V.P.* Deformations and Stresses During Welding of Ship Structures (Deformatsii i napryazheniya pri svarke sudovykh konstruktsiy). Moscow: Oborongiz, 1945. 149 p. (in Russian)
39. *Steinzig M., Ponslet E.* Residual stress measurement using the hole drilling method and laser speckle interferometry: Part I // Exp. Tech., 2003, vol. 27, no. 3, pp. 43–46.
40. *Chernyshev G.N., Popov A.L., Kozintsev V.M.* Useful and dangerous residual stresses // Nature, 2002, no. 10, pp. 17–24. (in Russian)
41. *De Bolla P.* The Fourth of July and the Founding of America. Woodstock; N.Y.: Overlook Press, 2008. 192 c.
42. *Rodman T.D.* Casting and sampling report, up to 2450 ordinary shots, two 10 inch guns; one cast with a solid block and cooled outside, the other cast with a finished channel and cooled from the inside, captain Rodman // Mining Mag., 1863. Book. 07 (July). pp. 27–76. (in Russian)
43. *Kalakutskiy N.V.* Materials of the study of steel tools // Artillery Mag., 1867, no. 5, pp. 784–817. (in Russian)
44. *Kalakutskiy N.V.* Study of Internal Stresses in Cast Iron and Steel. (Issledovaniye vnutrennikh napryazheniy v chugune i stali) SPb: a type. and chromolite. A. Tranchelle, 1888. 116 p. (in Russian)

45. *Davidenkov N.N.* Selected Works. Vol. 2: Mechanical Properties of Materials and Methods for Measuring Deformations. (Izbrannyye trudy. T. 2: Mekhanicheskiye svoystva materialov i metody izmereniya deformatsiy) Kiev: Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, 1981. 655 p. (in Russian)
46. *Davidenkov N.N.* String Method for Measuring Deformations (Strunnyy metod izmereniya deformatsiy). Leningrad; Moscow: GITTL, 1933. 60 p. (in Russian)
47. *Sachs G.* Der Nachweis inneres Spannungen in Stangen und Rohren // Zeitschr. für Metallkunde, 1927, vol. 19, s. 352–357.
48. *Sokolov I.A., Uralsky V.I.* Residual Stresses and Quality of Metal Products (Ostatochnyye napryazheniya i kachestvo metalloproduktsii). Moscow: Metallurgy, 1981. 96 p. (in Russian)
49. *Mathar J.* Determination of initial stresses by measuring the deformation around drilled holes // Trans ASME, 1934, vol. 56, no. 4, pp. 249–254.
50. *Schajer G.S.* Hole-drilling residual stress measurements at 75: origins, advances, opportunities // Exp. Mech., 2010, vol. 50, no. 2, pp. 245–253.
51. *Huang X., Liu Z., Xie H.* Recent progress in residual stress measurement techniques // Acta Mech. Solida Sin., 2013, vol. 26, no. 6, pp. 570–583.
52. *Kirsch G.* The theory of elasticity and the needs of the theory of strength // J. Assoc. Ger. Eng., 1898, vol. 42, pp. 797–807.
53. GOST R 52891-2007. Control of Residual Technological Stresses by Laser Interferometrical Method. General Requirements. (GOST R 52891-2007. Moscow: Standartinform, 2009. 15 p. (in Russian)
54. ASTM E837-13 2013. Standard Test Method for Determining Residual Stresses by the Hole-Drilling Strain-Gage Method. ASTM International. West Conshohocken (PA), 2013. 16 p.
55. *Savin G.N.* Distribution of Stresses Around Holes (Raspredeleniye napryazheniy okolo otverstiy). Kiev: Naukova Dumka, 1968. 496 p. (in Russian)
56. *Peterson R.E.* Stress Concentration Factors. N.Y.: Wiley, 1974. 420 p.
57. *Davidenkov N.N.*, *Sobkallo S.O.* A new method for X-ray solution of the plane problem of the theory of elasticity // Techn. Phys., 1941, vol. XI, no. 5, pp. 389–397.
58. *Kurnosov D.G., Yakutovich M.V.* Method for measuring stresses in plates and in the surface layer of large products // Factory Lab., 1939, vol. 8, no. 10–11, pp. 1148–1154. (in Russian)
59. *Kurnosov D.G., Yakutovich M.V.* Measurement of residual stresses by the hole-drilling method // Factory Lab., 1946, vol. 12, no. 11–12, pp. 960–987. (in Russian)
60. *Ruge A.C.* Strain Gauge. U.S. Pat. No. 2,350,972. June 6, 1944. Filed Sept. 16, 1939 / Cambridge, Mass. Patent Office. 5 p.
61. *Soete W., Vancrombrugge R.* An industrial method for the determination of residual stresses // Proc. SESA, 1950, vol. 8, no. 1, pp. 17–28.
62. *Sobkallo S.O., Vasiliev D.M.* Measurement of residual stresses by cutting a column // Factory Lab., 1949, vol. 15, no. 2, pp. 199–207. (in Russian)
63. *Milbradt K.P.* Ring method determination of residual stresses // Proc. SESA, 1951, vol. 9, no. 1, pp. 63–74.
64. *Glikman L.A., Pisarevsky M.M.* Measurement of residual stresses in the surface layer of large products using strain gauge // Factory Lab., 1951. vol. 17. no. 1. pp. 75–81. (in Russian)
65. *Rendler N.J., Vigness I.* Hole-drilling strain-gage method of measuring residual stresses // Exp. Mech., 1966, vol. 6, no. 12, pp. 577–586.
66. *Schajer G.S.* Application of finite element calculations to residual stress measurements // J. Eng. Mater. Technol., 1981, vol. 103, no. 2, pp. 157–163.
67. *Gabor D.A.* New microscopic principle // Nature, 1948, vol. 161, pp. 777–778.
68. *Maiman T.H.* Stimulated optical radiation in ruby // Nature, 1960, vol. 187, pp. 493–494.
69. *Sharpe W.N.* The interferometric strain gage // Exp. Mech., 1968, vol. 8, no. 4, pp. 164–170.
70. *Nelson D.V., McCrickerd J.T.* Residual-stress determination through combined use of holographic interferometry and blind-hole drilling // Exp. Mech., 1986, vol. 26, no. 4, pp. 371–378.
71. *Françon M.* La granularité laser (speckle) et ses applications en optique. Paris: Masson, 1977. 132 p.
72. *Ryabukho V.P.* Speckle interferometry // SEJ, 2001, vol. 7, no. 5, pp. 102–109. (in Russian)
73. *Tjhung T., Li K.* Measurement of in-plane residual stresses varying with depth by the interferometric strain/slope rosette and incremental hole-drilling // J. Eng. Mater. & Technol., 2003, vol. 125, no. 2, pp. 153–162.

74. *Lin S.-T., Hsieh C.-T., Hu C.-P.* Two holographic blind-hole methods for measuring residual stresses // Exp. Mech., 1994, vol. 34, no. 2, pp. 141–147.
75. *Goldstein R.V., Kozintsev V.M., Popov A.L.* Using an electronic speckle interferometry for measurement of a stress-deformation state of elastic bodies and structures: Recent advances in mechanics / ed. by *Gdoutos E.E. and Kounadis A.N.* Athens: Springer, 2009, pp. 191–206.
76. *Diaz F.V., Kaufmann G.H., Galizzi G.E.* Determination of residual stresses using hole drilling and digital speckle pattern interferometry with automated data analysis // Opt. Lasers Eng., 2000, vol. 33, no. 1, pp. 39–48.
77. *McDonach A., McKelvie J., MacKenzie P., Walker C.A.* Improved moiré interferometry and applications in fracture mechanics, residual stresses and damaged composites // Exp. Tech., 1983, vol. 7, no. 6, pp. 20–24.
78. *Furgiuele F.M., Pagnotta L., Poggialini A.* Measuring residual stresses by hole-drilling and coherent optics techniques: a numerical calibration // J. Eng. Mater. Technol., 1991, vol. 113, no. 1, pp. 41–50.
79. *Zhang J.* Two-dimensional in-plane electronic speckle pattern interferometer and its application to residual stress determination // Opt. Eng., 1998, vol. 37, no. 8, pp. 2402–2409.
80. *Popov A.L., Kozintsev V.M., Levitin A.L. et al.* Application of the probe hole method for diagnostics of shrinkage stresses in products of additive technologies / IUTAM Symp. on Mech. design and analysis for AM technologies. Symp. materials / IPMech RAS Moscow, 2018. pp. 66–68.
81. *Stekolnikov V.V., Titov V.F.* Causes of damage to coolant collectors and measures to improve the reliability of SGG-1000 steam generators // Sov. Atomic Energy, 1991, vol. 71, no. 4, pp. 312–320.
82. *Goldstein R.V., Popov A.L., Kozintsev V.M., Chelyubeev D.A.* Investigation of Residual Stresses by Electronic Speckle Interferometry / Actual Problems of Mechanics: Mechanics of a Deformable Solid. Moscow: Nauka, 2009. pp. 479–494. (in Russian)
83. *Vainshtok S.M.* (ed.) Pipeline Transport of Oil. Vol. 1. (Truboprovodnyy transport nefti) / Moscow: OOO “Nedra-Biznestsentr”, 2002. 407 p. (in Russian)
84. *Goldstein R.V., Kozintsev V.M., Popov A.L. et al.* Speckle-interferometric study of residual stresses in welded joints of pipes manufactured using different technologies // Cosmon.&Rocket Sci., 2009, no. 1(54), pp. 94–102. (in Russian)

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 2, с. 239–256

УДК 622.023.23

ОЦЕНКА ГЕОМЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ КРАЕВОЙ ЗОНЫ УГОЛЬНОГО ПЛАСТА, ВМЕЩАЮЩЕГО НЕПРОЧНЫЙ ПРОСЛОЕК

© 2021 г. Н. В. Черданцев[1,*]

[1] Федеральный исследовательский центр угля и углехимии Сибирского отделения РАН, Кемерово, Россия

**e-mail: nvch2014@yandex.ru*

Поступила в редакцию 22.05.2020 г.
После доработки 21.01.2021 г.
Принята к публикации 27.01.2021 г.

Для достоверной оценки геомеханического состояния угольного пласта, вмещающего прослоек с более низкими характеристиками прочности, чем у самого пласта, разработана модель геомеханического состояния углепородного массива, вмещающего пластовую выработку. Она построена на базе основных положений и подходов механики деформируемого твердого тела и реализована методом граничных интегральных уравнений. В рамках модели проведен вычислительный эксперимент для ряда горно-геологических условий угольного месторождения. На основе произведенного анализа полученных результатов выявлен ряд особенностей в распределении напряжений в краевой части пласта.

Ключевые слова: массив горных пород, угольный пласт, пластовая выработка, предельно напряженные зоны, характеристики прочности, линии скольжения, краевые задачи предельного состояния

DOI: 10.31857/S003282352102003X

Введение. Задача расчета напряженно деформированного состояния массива горных пород, вмещающего угольный пласт и пройденную по нему выработку, является важной и актуальной научной проблемой [1–6]. Предельно напряженные зоны, образующиеся в краевых частях пласта, существенно влияют на распределение поля напряжений и в угольном пласте, и в породах массива, окружающих горную выработку [7–9]. При определенных сочетаниях его компонентов оно может быть причиной ряда геодинамических явлений: горных ударов, обильного газовыделения в выработки, внезапных выбросов из забоев выработок горной массы, пучения почвы и значительных смещений их кровли [1, 10–15], и эти обстоятельства оказывают пагубное влияние на горные работы [10, 12].

Несмотря на то обстоятельство, что на угольных шахтах эти явления происходят довольно часто, существующие методы прогноза и борьбы с ними не всегда эффективны [1, 10, 12, 15] и, в первую очередь, из-за недостаточной изученности проблемы о напряженном состоянии краевой зоны пласта.

Современные понятия и представления о горных ударах и внезапных выбросах основаны на предположениях о том, что в большинстве случаев они происходят в предельно напряженных краевых зонах угольных пластов. К настоящему времени разработаны теории, описывающие эти виды геодинамических явлений [10, 12]. Однако в силу сложности математического описания физических процессов, сопутствующих этим явлениям, единой теории о горных ударах и выбросах не создано. Следует отметить, что все существующие теории едины в том, что для описания этих явлений необходимо знать характер распределения напряженного состояния массива в краевых зонах угольного пласта. В этой связи задача о геомеханическом состоянии пласта обычно сводится к определению параметров опорного давления, к которым относится эпюра вертикальной нормальной компоненты тензора напряжений в его краевой части и размер зоны неупругих деформаций (предельно напряженной зоны). Эти параметры могут быть определены экспериментально непосредственно в области ведения горных работ [1—3], а также теоретически в рамках ряда существующих моделей геомеханического состояния массива [4, 5, 7—10].

Модели, в рамках которых рассчитываются параметры опорного давления, можно условно классифицировать на несколько типов (категорий):

1. Модели напряженно-деформированного состояния пласта, разработанные на основе положений и методов теории упругости, в которых угольный пласт представляется включением, у которого упругие характеристики существенно отличаются от характеристик горных пород вмещающего массива [16].

2. Модели напряженного состояния краевой зоны пласта, построенные на базе методов теории упругости и пластичности, в которых состояние пласта в предельной зоне следует классическим критериям пластичности Треска—Сен-Венана или Губера—Мизеса [17, 18].

3. Модели напряженного состояния пласта, разработанные на базе методов предельного состояния горных пород, сыпучих сред. В этих моделях эпюра напряжений в предельно напряженной зоне описывается полуэмпирическими зависимостями, в которых часть параметров определяется по результатам экспериментов, проводимых в натурных условиях [1, 7—9].

4. Модели напряженного состояния пласта, разработанные на основе фундаментальных методов механики деформируемого твердого тела и сыпучих сред [19]. В этих моделях учитываются разные характеристики прочности пласта и на его контакте с окружающим массивом.

Сравнение моделей показывает, что третий и четвертый типы из приведенного списка наиболее близко отражают реальное состояние пласта и могут эффективно применяться к исследованию и напряженного состояния пласта, и геомеханического состояния углепородного массива. Однако результаты распределения напряжений в предельно напряженной зоне пласта, полученные в рамках этих моделей довольно значительно отличаются друг от друга, особенно вдали от его кромки.

Сравнение экспериментального и теоретического подходов к определению параметров опорного давления показывает, что применение моделей имеет ряд преимуществ по сравнению с экспериментами. Во-первых, они менее затратные, во-вторых, позволяют установить качественные и количественные закономерности в поведении массива и, следовательно, устанавливать некоторые прогнозные оценки о напряженном состоянии пласта и вмещающего массива.

Зачастую угольные пласты содержат прослойки угля или горной породы с довольно низкими характеристиками прочности по сравнению с характеристиками прочности самого пласта. В таких случаях формулирование задачи и ее решение связано с определенными трудностями, обусловленными более сложным механизмом формирования предельно напряженных зон по сравнению в задаче с однородным угольным пластом.

В моделях третьего типа влияние прослойка на напряженное состояние угольного пласта учитывается путем предварительного вычисления средневзвешенного предела прочности пласта и прослойка и дальнейшим использованием его в полуэмпирической формуле для получения эпюры опорного давления [1]. Однако такой подход не отражает действительную картину распределения опорного давления в предельно напряженной зоне, поскольку в расчетах учитывается тот же структурно однородный

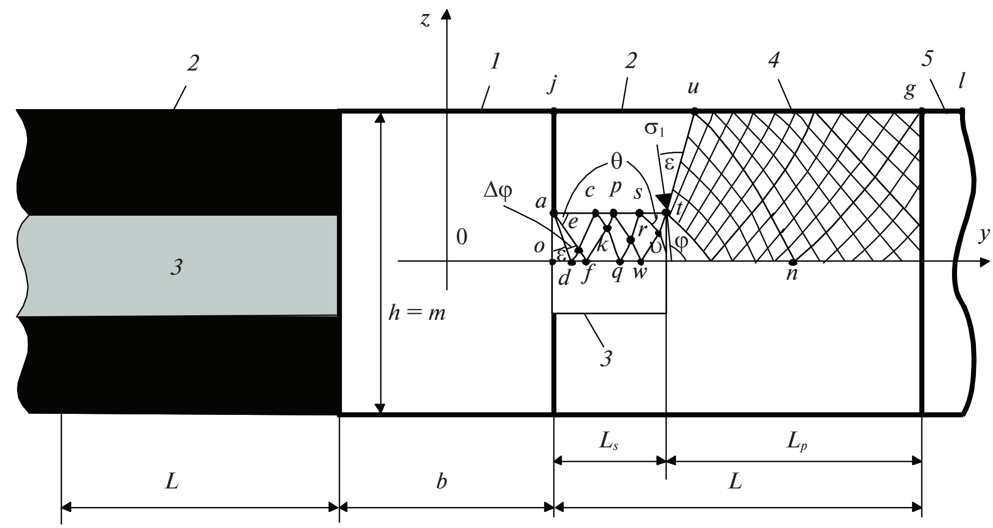

Рис. 1.

пласт, что и в отсутствии прослойка, но лишь с более низким пределом прочности пласта. В других же моделях прочностные характеристики прослойка вообще никак не учитываются.

В этой связи разработан подход к расчету краевой части пласта с прослойком и представлены результаты, полученные в рамках этого подхода. В его основе лежит разработанная автором модель напряженного состояния краевой части структурно однородного пласта, находящегося в предельно напряженном состоянии [19]. По вышеприведенной классификации она относится к моделям четвертого типа.

1. Постановка задачи о геомеханическом состоянии массива, вмещающего пластовую выработку, и построение его решения. Задача формулируется следующим образом. В массиве горных пород, моделируемом невесомой плоскостью, имеется (рис. 1) выработка *1* прямоугольного сечения размерами $b \times h$, пройденная на глубине H по угольному пласту *2* на всю мощность. Характеристики прочности пласта: σ_0 – предел прочности на одноосное сжатие, K – коэффициент сцепления, ρ – угол внутреннего трения меньше, чем характеристики прочности пород вмещающего массива, но больше, чем характеристики (K' – коэффициент сцепления, ρ' – угол внутреннего трения) по контактам пласта с остальным массивом. В средней части пласта имеется слой (пачка, прослоек) “слабого” низко прочного угля мощностью h_s. Предел прочности слоя σ_{0s} значительно ниже, чем σ_0, а угол внутреннего трения ρ_s близок к значению ρ. Массив нагружен гравитационным давлением сверху и снизу γH (γ – средневзвешенный объемный вес налегающих пород), а с боков – $\lambda\gamma H$ (λ – коэффициент бокового давления). В краевых частях пласта образуются зоны неупругого деформирования *3*, *4* шириной $L = L_s + L_p$ (L_s – ширина зоны прослойка, L_p – ширина зоны пласта), а за ними вглубь массива находится область упругого деформирования пласта *5*. Система координат $y0z$ совпадает с центральными осями выработки.

На рис. 1 приведена схема линий скольжения в прослойке и пласте. Для упрощения линии показаны для частей пласта и прослойка, расположенных над осью y. Их описание приведено ниже. Вдоль линии *jugl* строятся графики напряжений (эпюры напряжений) в краевой части пласта.

В процессе решения задачи полагается:

1) длина выработки вдоль оси x значительно превосходит размеры поперечного сечения, поэтому породы в окрестности выработки находятся в условиях плоской деформации;

2) прочности прослойка выше, чем по контактам с породами вмещающего массива и угольным пластом, но ниже прочности самого пласта, чья прочность значительно ниже прочности вмещающих пород;

3) сжимающие нормальные напряжения положительны, а растягивающие отрицательны.

В ходе решения задачи рассматриваются условия перехода пласта в предельно напряженное (пластическое) состояние и определяются параметры опорного давления (размер предельно напряженной зоны L и максимальная величина вертикальной компоненты нормальных напряжений σ_z) для ряда значений предела прочности прослойка.

Особенность задачи о напряженном состоянии массива с пластовой выработкой заключается в том, что прочность окружающих горных пород, как правило, существенно выше прочности пласта, по которому пройдена выработка. Поэтому краевые части пласта переходят в предельно напряженное состояние, тогда как вмещающие породы деформируются упруго.

Механизм формирования предельно напряженных зон с образованием линий скольжения изложен в работах [20, 21]. В них показано, что предельно напряженные зоны структурно однородного пласта развиваются вглубь пласта, начиная с его обнажения (от его кромки), когда вертикальные главные напряжения σ_1 (главное напряжение σ_3 на обнажении равно нулю) достигают значения σ_0. При увеличении σ_1 зона неупругих деформаций в бортах выработки увеличивается. В этой зоне пласт деформируется не только по направлению его мощности, но и в плоскости с окружающими породами, где происходит его проскальзывание. В этой связи в нем будут одновременно существовать два предельных состояния равновесия: общее или обыкновенное (состояние самого пласта) и специальное (состояние по контакту пласта с окружающим массивом) [1, 22]. Эти два условия соответствуют критериям Кулона–Мора для прямолинейных огибающих кругов предельных состояний по пласту и по поверхности ослабления (контакту пласта с массивом).

Критерии Кулона–Мора совместно с дифференциальными уравнениями равновесия образуют систему уравнений напряженного состояния краевой зоны угольного пласта. В задаче с плоской деформацией путем перехода от компонентов тензора напряжений к приведенному напряжению σ и углу наклона φ между осью y и напряжением σ_1 система сводится к двум уравнениям, относящимся к уравнениям гиперболического типа.

Напряжение σ и угол φ связаны с компонентами тензора напряжений σ_y, σ_z, τ_{yz} и характеристиками прочности K, ρ, θ соотношениями, вытекающими из анализа круга Мора, построенного на напряжениях, соответствующих предельно напряженному состоянию пласта, при одновременном выполнении обоих критериев Кулона–Мора (общего и специального) [1, 18, 22]

$$\sigma = c + \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \tag{1.1}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(\rho - \rho') - \frac{1}{2}\arcsin\left[\frac{\sin\rho'}{\sin\rho}\left(1 - \frac{c - c'}{\sigma}\right)\right], \quad \varphi = \pi - \theta - \varepsilon, \tag{1.2}$$

где c и c' – временные сопротивления всестороннему равномерному растяжению самого пласта и на его контакте с массивом [1, 22]. Они определяются через коэффициенты сцепления K, K' непосредственно из круга Мора следующими выражениями

$$c = K \operatorname{ctg}\rho, \quad c' = K' \operatorname{ctg}\rho', \tag{1.3}$$

в которых параметры K и K' связаны с σ_0 и σ_0' также известными соотношениями, вытекающими из круга напряжений [1, 22]

$$K = \frac{1 - \sin\rho}{2\cos\rho}\sigma_0, \quad K' = \frac{1 - \sin\rho'}{2\cos\rho'}\sigma_0', \tag{1.4}$$

а угол между главным напряжением σ_1 и линией скольжения определяется формулой, также вытекающей из круга напряжений [1, 22]

$$\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}$$

Уравнения гиперболического типа решаются методом характеристик (характеристических линий), в котором они совпадают с линиями скольжения материала [22]. На характеристиках уравнения упрощаются, но, несмотря на это, их интегрирование в замкнутом виде получается только на участках пласта, расположенных в непосредственной близости к его обнажению.

На остальных участках его предельно напряженной зоны решение можно получить только путем вычислительной процедуры, последовательно решая три краевые задачи механики предельного равновесия, используя при этом рекуррентные конечно-разностные соотношения [22].

После решения системы компоненты напряжений σ_y, σ_z, τ_{yz}, σ_1, σ_3 выражаются через напряжение σ и угол φ по формулам, также вытекающим из анализа напряжений с помощью круга Мора [22]

$$\sigma_1 = \sigma(1 + \sin\rho) - c, \quad \sigma_3 = \sigma(1 - \sin\rho) - c \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered} \sigma_y = \sigma(1 + \sin\rho\cos 2\varphi) - c, \quad \sigma_z = \sigma(1 - \sin\rho\cos 2\varphi) - c \\ \tau_{yz} = \sigma\sin\rho\sin 2\varphi - c \end{gathered} \tag{1.6}$$

Разработанная на основе описанного выше подхода к оценке состояния краевой зоны пласта модель подробно изложена в работах [20, 21]. В них приведены также результаты решения задачи о предельно напряженной зоне пласта и даны сравнительные оценки с результатами расчетов, полученных в рамках других моделей. Основываясь на этих моделях в работе [19] построена компьютерная модель линий скольжения в предельно напряженной зоне, сформулирована и решена упругопластическая задача, по результатам которой получены значения параметров опорного давления в окрестности пластовой выработки.

Очевидно, что при наличии в угольном пласте прослойка предельное состояние наступает сначала в нем и, следовательно, зависимости (1.1)–(1.6) справедливы и для прослойка, но только в них следует вместо σ_0, c, ρ, K положить параметры для прослойка: σ_{0s}, c_s, ρ_s, K_s.

Схема характерных участков с линиями скольжения на их границах показана на рис. 1. Они имеют такой же вид, как и для структурно однородного пласта [19–21]. Так, например, на участке *oad* система линий скольжения представляет собой сетку изогональных линий. Напряжения в пределах участка постоянны, а напряжение σ_3 и на кромке прослойка, и во всех точках участка равны нулю. Приведенное напряжение σ определяется по формулам [20–22]

$$\sigma = \frac{c_s}{1 - \sin\rho_s}, \quad \text{либо} \quad \sigma = \frac{\sigma_0}{2\sin\rho_s} \tag{1.7}$$

В соседнем треугольном участке *ade*, называемом зоной Прандтля, напряжения вдоль радиальных прямых линий постоянны, а в окружном направлении они меняются по экспоненциальному закону [1, 22]. Так, на линии напряжения вычисляются по следующей формуле [22]

$$\sigma_s = \frac{c_s}{1 - \sin\rho_s}\exp(2\Delta\varphi\,\mathrm{tg}\,\rho'), \tag{1.8}$$

где c_s – временное сопротивление всестороннему равномерному растяжению прослойка, угол $\Delta\varphi$, как следует из рис. 1, определяется по формуле

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta - \varepsilon \tag{1.9}$$

Во всех точках треугольной области *ace* линий скольжения представлены двумя системами изогональных наклонных линий, пересекающихся под углом 2ε.

Во всех других участках, расположенных в глубине пласта, распределение линий скольжения можно получить только в результате численного решения второй и третьей краевых задач на основе рекуррентных конечно-разностных соотношений.

Распределения напряжений и линий скольжения на участке *def* получаются из решения третьей краевой задачи. Граничными условиями в этой задаче являются условия по общей с участком *ade* границе *de*, а также по границе *df*, на которой заданы часть граничных условий: $z = 0$, $\varphi = \pi/2$ (ось y – ось симметрии и, поэтому, σ_1 вертикальна). В ходе численного решения задачи обе системы линий скольжения на этом участке получаются криволинейными.

Распределение линий скольжения внутри участка *cefk* следует из решения второй краевой задачи, в которой полный набор граничных условий задается по двум границам участка (области). В данном случае условия заданы по сторонам *ce* и *ef*, являющиеся общими границами участков *def* и *ace*, в которых решение уже получено. В ходе решения задачи одна система линий скольжения будет прямолинейной, а другая криволинейной.

Картины распределения напряжений и линий скольжения на участке *ckp* получаются из решения третьей краевой задачи. Сторона *ck* является общей границей с участком *cefk*, поэтому граничные условия на ней заданы полностью, а по стороне *cp* задана только часть граничных условий: $z = h_s/2$, а угол φ определяется из выражений (1.2). Обе системы линий скольжения также получаются криволинейными.

При решении краевых задач для участков, расположенных правее линии *dec*, можно поступить и по-другому. Так, например, линия *cd* является совокупностью двух линий: кривой линии *de* и прямой линии *ce*, которые являются границами участков, по которым распределение линий скольжения и напряжений уже построено. Следовательно, в каждой точке линии *cd* граничные условия заданы. Вдоль другой стороны *dq* участка *decq* число точек принимается таким же, как и по стороне *cd*, и в каждой из них известны ордината $z = 0$ и угол $\varphi = \pi/2$. Таким образом, граничные условия сформулированы для решения третьей краевой задачи. Поскольку граничная линия *dc* криволинейно-прямолинейная, то и линии скольжения представляют две системы сочетающих кривых и прямых линий. По результатам решения этой краевой задачи рассмотренный участок состоит из трех меньших участков, в пределах каждого из них система линий скольжения имеет характерные очертания. Так, в пределах участка *def* обе системы линий скольжения криволинейны, а в четырехугольнике *cefk* одна система линий скольжения прямолинейна, другая же криволинейная. В треугольнике *fkq* обе системы линий скольжения прямолинейны.

Далее решается третья краевая задача для участка *ckqs*. Здесь вдоль комбинированной линии *ckq* заданы все граничные условия, получающиеся из решения задачи для только что рассмотренного участка, а вдоль стороны *cs* с таким же количеством участков, что и по линии *ckq*, задана часть условий: ордината $z = h_s/2$ и угол φ, определяемый из выражений (1.2). В пределах этого участка система линий скольжения имеет свой характерный вид в пределах каждого их трех меньших участков, входящих в участок *ckqs*.

Для каждого последующего участка решается третья краевая задача, подобная той, что решалась для участков *decq* и *ckqs*.

По характеру распределения линий скольжения нетрудно установить и характер распределения напряжений в пределах каждого участка. Так, например, вдоль сторон *fq*, *ps*, принадлежащих треугольникам с прямолинейными границами, напряжения постоянны, а вдоль сторон *cp* и *qw*, принадлежащим треугольникам с криволинейными границами, напряжения нелинейны.

Таким образом, напряжения вдоль контакта прослойка, как и вдоль его оси эпюры нормальных напряжений, представляют собой графики в виде сменяющих друг друга участков с постоянными и нелинейно возрастающими линиями.

В дальнейших исследованиях напряженного состояния массива горных пород эти графики следует аппроксимировать аналитическими зависимостями, например, полиномами. Такая замена упрощает решение упругопластической задачи, позволяя ее свести к упругой и решить ее методом граничных интегральных уравнений. Коэффициенты полинома определяются из решения системы алгебраических уравнений, число которых совпадает с количеством выбранных участков в предельно напряженной зоне слоя. Правые части уравнений этой системы равны значениям найденных напряжений на границах этих участков [20].

Для расчета напряженного состояния пласта с низко прочным прослойком и оценки влияния этого прослойка на геомеханическое состояние основной части пласта также может быть использован подход, основанный на фундаментальном методе характеристик.

Из рис. 1 видно, что предельное состояние в пласте возникает лишь на некотором удалении от его кромки и при достижении приведенным напряжением в прослойке величины приведенного напряжения в пласте, которое соответствует одноосному напряженному состоянию. Из соображений непрерывности приведенных напряжений и отсутствия разрывов в линиях скольжения в пласте и слое условия перехода пласта в предельное состояние принимает следующий вид,

$$\sigma_p = \sigma_s, \quad \varphi_p = \varphi_s, \tag{1.10}$$

где σ_p – приведенное напряжение в пласте, σ_s – приведенное напряжение в прослойке, φ_p – угол наклона к горизонту напряжения σ_1 в пласте, φ_s – угол наклона σ_1 в прослойке на расстоянии L_s от обнажения пласта; σ_s – определяемое по формуле (1.7).

Очевидно, что часть пласта *ajut* (рис. 1) находится в упругом состоянии. Из условия ее равновесия следует, что касательная нагрузка, действующая вдоль линии *ju*, противоположна касательной нагрузке вдоль линии *at*.

После перехода пласта в предельное состояние и появление линии скольжения *tu* дальнейшее развитие его предельно напряженной зоны происходит совместно с прослойком. Поскольку на этой линии приведенное напряжение соответствует одноосному сжатию, то она является прямой линией. Во всех ее точках координаты, а также приведенное напряжение и угол φ определяются решениями краевой задачи для участка прослойка. Таким образом, вдоль линии скольжения *wvtu* граничные условия известны.

Очевидно, что вдоль оси y, являющейся осью симметрии, угол $\varphi = \pi/2$, ордината произвольной точки отрезка любой длины равна нулю.

В этой связи линия скольжения *wvtu* может рассматриваться одной границей следующего участка предельно напряженной зоны, охватывающей и прослойки. В качестве другой границы, на которой условия заданы лишь частично, может быть выбран отрезок с таким же количеством участков, что и на предыдущей границе (на рис. 1 это отрезок *wn*). Сформулированные таким образом граничные условия участка предельно напряженной зоны пласта являются условиями для третьей краевой задачи. После ее решения, приведенные напряжения σ, угол наклона φ и координаты точек y, z на границе *un* (рис. 1) выступают граничными условиями третьей краевой задачи для следующего участка *ung*. На другой границе *ug* этого участка в каждой точке известна ее ордината $z = h/2$, а угол φ определяется по формуле (1.2)

$$\varphi_i = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\rho' + \frac{1}{2}\arcsin\left[\frac{\sin\rho'}{\sin\rho}\left(1 - \frac{c - c'}{\sigma_{i-1}}\right)\right],$$

где i — номер произвольной точки участка.

После решения третьей краевой задачи для этого участка решается третья краевая задача для следующего участка аналогично тому, как это делалось для участка *wun*.

Представленных выше зависимостей, описывающих предельно напряженное состояние в прослойке и угольном пласте, недостаточно для решения задачи о построении поля напряжений в массиве около выработки, поскольку в этих зависимостях протяженность предельно напряженной зоны, а, следовательно, и граница раздела предельной зоны и упругой области не определены. Неизвестной величиной остается и значение максимального вертикального напряжения на границе раздела двух областей. Для их определения необходимо решить упругопластическую задачу, по результатам которой и находятся эти параметры, называемые параметрами опорного давления.

Упругопластическая задача путем замены предельно напряженных зон пласта реактивными усилиями, действующими на границе этих зон, может быть сведена ко второй внешней краевой задаче теории упругости [7] и представлена интегральным уравнением Фредгольма второго рода относительно плотности поверхностной (фиктивной) нагрузки, приложенной к контуру выработки [23, 24]. Уравнение решается численно — методом механических квадратур [24, 25].

После решения уравнения напряжения в любой точке массива определяются суперпозицией напряжений от действия найденной фиктивной нагрузки и напряжений в массиве до проведения выработки. Напряжения от действия фиктивной нагрузки находятся с помощью решения Кельвина о действии силы на упругое пространство [26].

Данный подход применялся к определению поля напряжений в массиве горных пород с прочностной анизотропией при построении зон нарушения сплошности массива вокруг горных выработок [27, 28].

В отличие от классической задачи граничные условия формулируются не только по контуру выработки, но и по контуру, включающему кровлю, почву выработки и контакт пласта с окружающим массивом на участке предельной зоны. В левой части этого уравнения они выражены через неизвестную фиктивную нагрузку, а в правой части эти условия представлены через усилия, обусловленные напряжениями исходного поля и реактивными усилиями, создаваемыми крепью выработки и напряжениями в предельно напряженной зоне на контакте пласта с массивом.

Область интегрирования в интегральном уравнении кроме размеров выработки включает и неизвестный размер предельно напряженной зоны L. Для его определения используется метод последовательных приближений: сначала задается размер предельно напряженной зоны, затем решается интегральное уравнение и после этого вычисляются напряжения вдоль контакта пласта с массивом. Далее, на границе упругой области и предельно напряженной зоны сравниваются полные напряжения p_y, p_z. Эти напряжения на горизонтальных участках равны соответственно напряжениям σ_z и τ_{yz}, поскольку нормаль к горизонтальной площадке составляет с ней угол $\pi/2$. Если результаты отличаются друг от друга, то решение интегрального уравнения производится при другом значении L. Процедура счета продолжается до тех пор, пока значения полных напряжений не совпадут или будут достаточно близки друг к другу.

Разработанная на основе описанного подхода модель геомеханического состояния углепородного массива в окрестности пластовой выработки, в которой учтены геомет-

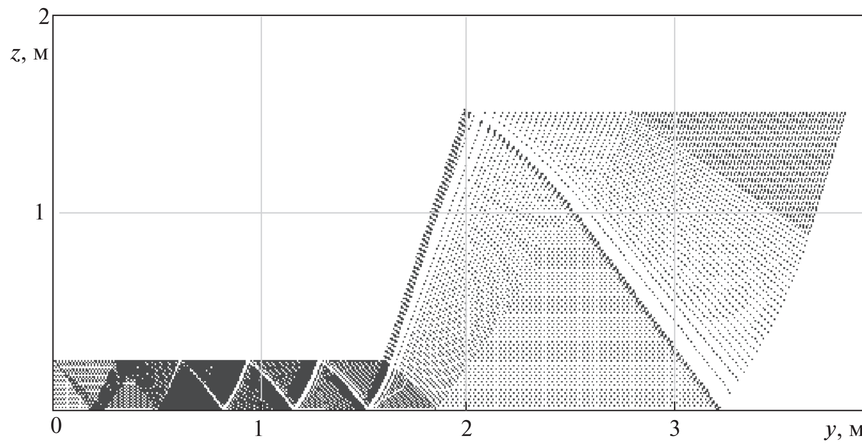

Рис. 2.

рические и механические параметры прослойка, отличные от параметров пласта, является новой и в этой статье излагается впервые. В работе [19] модель геомеханического состояния построена на условии однородной структуры пласта и в этом ее существенное отличие от модели состояния пласта с прослойком.

2. Анализ полученных результатов. В рамках рассматриваемой модели проведен вычислительный эксперимент, за исходные данные в котором приняты следующие параметры массива, выработки и пласта: $H = 800$ м, $\lambda = 1$, $\gamma = 25$ кН/м^3, $\sigma_0 = 10$ МПа, $\rho = 20°$, $\rho_s = 20°$, $\rho' = 10°$, $K' = 0$, $b = 5$ м, $h = 3$ м, $h_s = 0.5$ м. Другие параметры в ходе вычислений менялись.

На рис. 2 представлена компьютерная модель сетки линий скольжения в предельно напряженной зоне для верхней части угольного пласта, вмещающего низко прочный прослоек. В качестве дополнительных исходных данных принято $\sigma_{0s} = 2$ МПа. Сетка построена по результатам численного решения трех краевых задач механики сыпучих сред для двенадцати характерных участков прослойка, соответствующих наступлению предельного состояния пласта, и двух участков для самого пласта. На рисунке отчетливо просматриваются участки с характерным распределением сетки линий скольжения, которая представлена своими узлами (точками пересечения линий скольжения).

На рис. 3 построен график (эпюра) распределения приведенного напряжения вдоль кровли прослойка и пласта σ_K для двадцати характерных участков предельно напряженной зоны. Из них двенадцать участков принадлежат прослойку ($\sigma_{0s} = 2$ МПа) и восемь непосредственно пласту. На графике показаны две крайние точки a и t участка графика, соответствующего прослойку (рис. 1). Правее часть графика соответствует пласту вместе с прослойком. Из рисунка видно, что график на обоих участках, как это отмечено ранее, имеет вид попеременно сменяющих горизонтальных и нелинейно возрастающих участков. Из графика следует, что размер предельно напряженной зоны прослойка, соответствующего моменту перехода пласта в предельное состояние, равен 1.59 м (4.09 м $- b/2$), а величина приведенного напряжения при этом составляет $0.751/\gamma H$. Длина участка краевой предельно напряженной зоны пласта при двадцати участках равна 10.211 м (12.711 м $- b/2$), а приведенное напряжение достигает значения $5.278/\gamma H$.

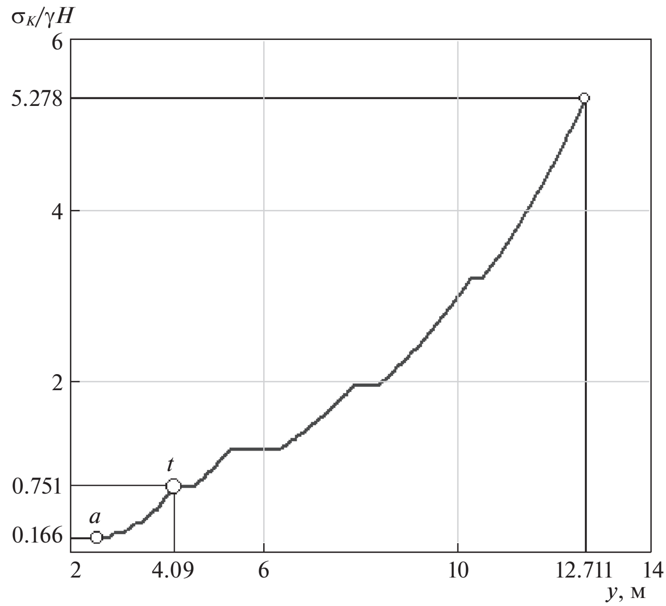

Рис. 3.

После определения приведенных напряжений и угла φ компоненты тензора напряжений, вычисленные по формулам (1.5) или (1.6), могут быть представлены графически.

На рис. 4 построена эпюра вертикальных напряжений σ_z вдоль кровли предельно напряженной зоны пласта. Как и σ_K на рис. 3, она представляет собой совокупность участков с постоянными и переменными напряжениями. Часть графика на участке *at* также соответствует напряжениям в прослойке. Напряжение в конце двадцатого участка равно, $6.567/\gamma H$, а при переходе пласта в предельное состояние оно равно $0.862/\gamma H$.

При решении упругопластической задачи эпюры компоненты тензора напряжений σ_y, σ_z, τ_{yz}, как уже отмечено выше, следует аппроксимировать аналитическими функциями.

На рис. 5 построены два графика зависимости напряжения σ_z от координаты y. Кривая *1* – эпюра исходного напряжения, показанного на рис. 4, а кривая *2* аппроксимирующий полином пятой степени. Узловыми точками при определении коэффициентов полинома приняты границы горизонтальных и нелинейных участков на исходной эпюре напряжений.

На рис. 6 представлены результаты решения упругопластической задачи в виде графика нормальных напряжений σ_z, построенного вдоль кровли пласта (вдоль линии *jl* на рис. 1). Кривая *1* – эпюра напряжений в предельно напряженной зоне пласта, а кривая *2* – эпюра напряжений в его упругой области. Их значения совпадают в точке *g*, соответствующей границе упругой и предельно напряженной зон.

Из рисунка следует, что максимальное нормальное напряжение $\sigma_{z\,\max}$ в краевой части пласта, являющееся одним из параметров опорного давления в окрестности выработки, действует на границе предельно напряженной зоны и упругой области пласта. Оно равно $1.699\,\gamma H$. Другой параметр опорного давления – ширина предельно напряженной зоны L из графика равна 3.5 м (6 м – $b/2$). Для сравнения максимум опорного давления $\sigma_{z\,\max}$ в пласте без прослойка равен $1.582\,\gamma H$, а ширина зоны $L = 4.9$ м [19].

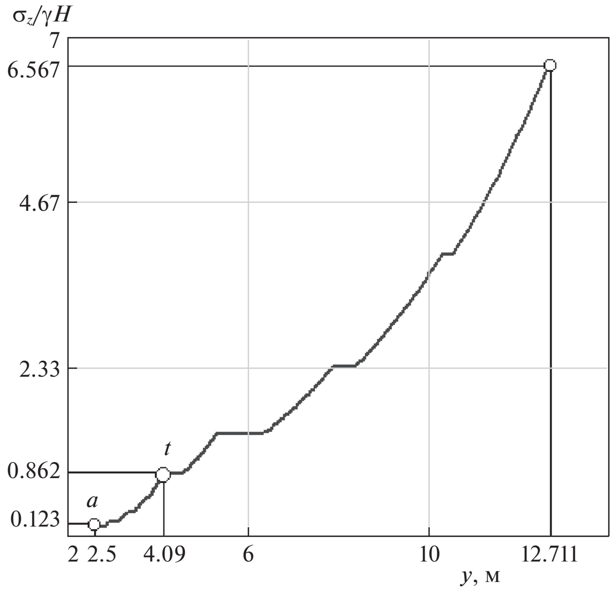

Рис. 4.

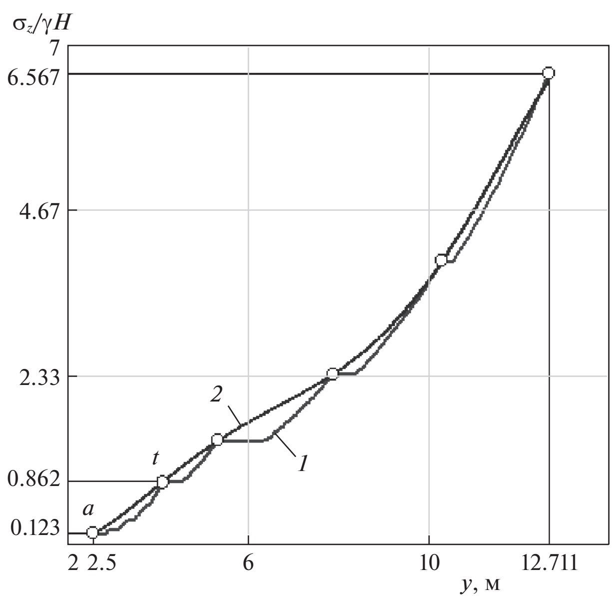

Рис. 5.

Ниже определены параметры опорного давления в пласте с прослойком на основе подхода о средневзвешенной прочности пласта σ_c [1], в котором предел прочности вычисляется по следующей формуле

$$\sigma_c = \frac{\sigma_0 \left(h - h_s\right) + \sigma_s h_s}{h}$$

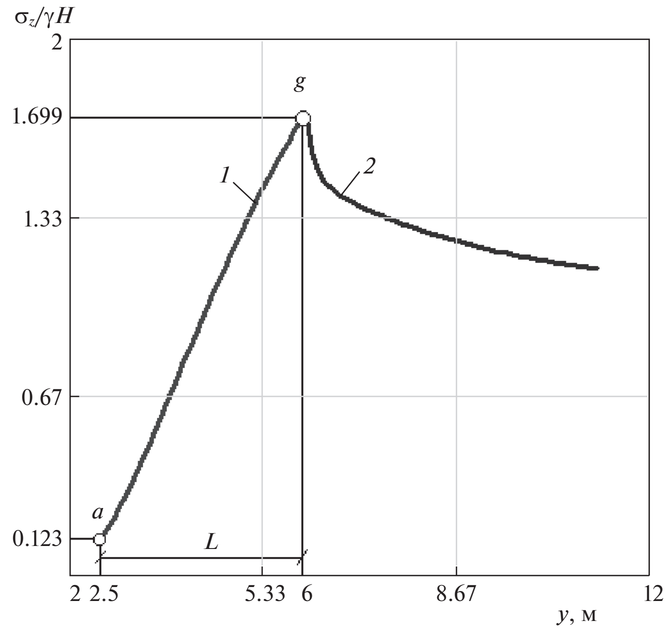

Рис. 6.

При исходных данных

$$\sigma_c = \frac{10 \cdot (3 - 0.5) + 2 \cdot 0.5}{3} = 8.67 \text{ МПа},$$

а параметры опорного давления получаются равными: $\sigma_{z\,\max} = 1.592\ \gamma H$, $L = 5.65$ м. Сравнение этих значений с параметрами опорного давления, полученными в рамках разработанного подхода, показывает, что результаты отличаются друг от друга не только количественно, но и качественно. Во-первых, максимум опорного давления, исходя из средневзвешенной прочности пласта, получается меньше, а размер предельно напряженной зоны существенно выше, чем на основе разработанного подхода.

Таким образом, оценка геомеханического состояния углепородного массива на основе подхода, в котором влияние прослойка учитывается лишь при подсчете по средневзвешенной прочности пласта, может оказаться весьма ошибочной.

При решении задачи о напряженном состоянии пласта с низко прочным прослойком важно установить протяженность предельно напряженной зоны этого прослойка, при которой начинается переход пласта в предельно напряженное состояние. Ее размер устанавливает положение линии скольжения, параметры которой являются начальными граничными условиями в задаче о развитии предельного состояния остальной части пласта.

В этой связи проведены исследования и представлены графические результаты, отражающие связь длины предельно напряженной зоны прослойка L_{pR} (рис. 1) с его характеристиками прочности, соответствующими переходу всей толщи пласта в предельное состояние.

На рис. 7 показан график изменения размера предельно напряженной зоны прослойка, соответствующего переходу пласта в предельное состояние, в зависимости от предела прочности прослойка. Ось абсцисс уменьшена в σ_0 раз.

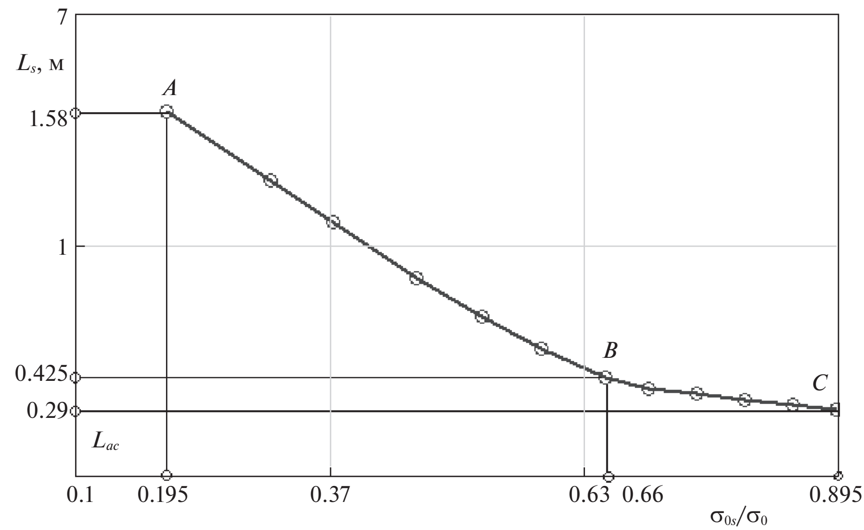

Рис. 7.

Из рисунка следует, что график состоит из двух прямолинейных участков *AB* и *BC* с изломом в точке *C*. Абсцисса точки *B* равна 6.6 МПа, а ордината равна 0.425 м.

Важно отметить, что переход пласта в предельное состояние на самой его кромке начинается при $\sigma_{0s} < \sigma_0$. Действительно, предельное состояние в пласте по стороне *ac*, непосредственно примыкающей к кромке *oa*, на основании первого условия (1.10) наступит при равенстве значений напряжений, определяемых формулами (1.7) и (1.8). После подстановки правых частей этих выражений в условие (1.10) и учете в них выражений (1.3) и (1.4) легко получается зависимость между пределами прочности пласта и прослойка, при которых наступает предельное состояние пласта непосредственно у его кромки.

Если *c*' равно нулю, то эта зависимость выражается следующим образом

$$\sigma_{0s} = \sigma_0 \exp\left(-2\Delta\varphi \operatorname{tg} \rho'\right),$$

а из формул (1.2) и (1.9) следуют достаточно простые по виду выражения для углов θ и $\Delta\varphi$

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2} - \rho', \quad \Delta\varphi = \rho'$$

В соответствии с исходными данными перечисленные параметры равны следующим величинам: $\theta = 45°$, $\Delta\varphi = 10°$, $\sigma_{0s} = 8.95$ МПа. Следовательно, при данном значении предела прочности прослойка пласт переходит в предельное состояние в любом месте участка *ac* (рис. 1), начиная с его кромки.

В этой связи размер L_s (рис. 1) либо равен нулю, либо равен длине L_{ac} этого участка.

На рис. 8, 9 показаны результаты решения упруго пластической задачи о напряженном состоянии массива в окрестности пластовой выработки. Они представлены в виде графиков зависимости параметров опорного давления в краевой части пласта от предела прочности прослойка.

Так, на рис. 8 построен график опорного давления в краевой части пласта в зависимости от предела прочности прослойка. График имеет вид плавно убывающей вогнутой кривой. Из него следует, что меньшему значению прочности прослойка соответ-

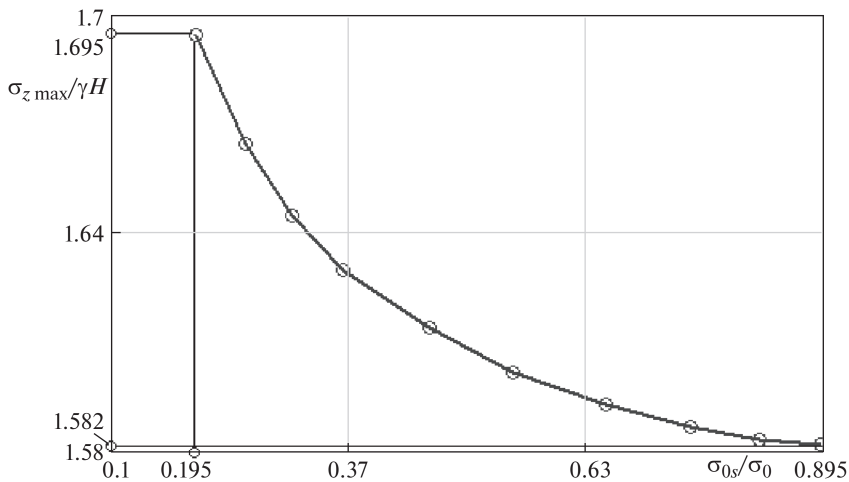

Рис. 8.

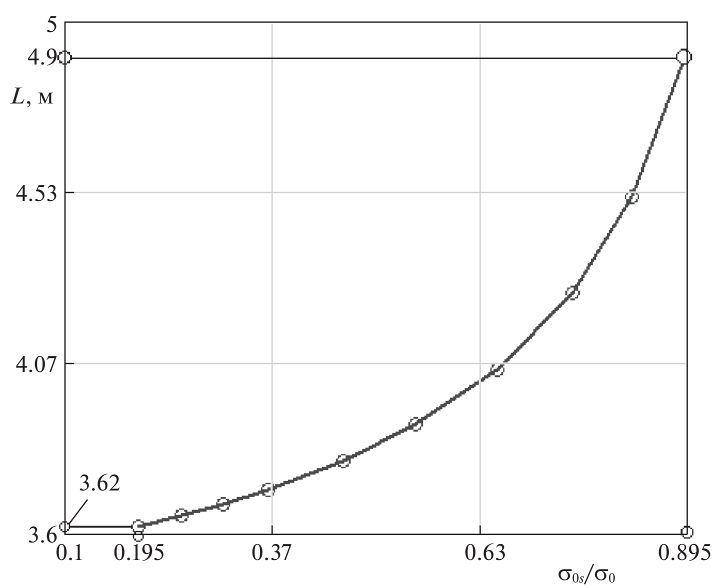

Рис. 9.

ствует большее значение максимума опорного давления (при σ_{0s} = 1.95 МПа, $\sigma_{z\,\max}$ = = 1.695 γH), а при прочности прослойка σ_{0s} = 8.95 МПа максимум опорного давления равен максимуму опорного давления в пласте в отсутствии низко прочного прослойка и составляет 1.582 γH. Разница между этими значениями составляет 7.14%.

На рис. 9 построен график зависимости другого параметра опорного давления – размера предельно напряженной зоны пласта от предела прочности прослойка. Из рисунка видно, что график имеет вид плавной возрастающей кривой и с увеличением предела прочности прослойка также возрастает. Минимальный размер предельно напряженной зоны на принятом интервале изменения σ_{0s} равен 3.62 м, а при σ_{0s} = 8.95 МПа размер этой зоны соответствует размеру предельно напряженной зоны пласта, не имеющего прослойка, составляет 4.9 м. Разница между этими значениями равна 26.12%.

Заключение. 1. Наличие в угольном пласте прослойка из низко прочного материала, расположенного в центральной части пласта, приводит к появлению предельно напряженной зоны сначала в прослойке, начиная от самой его кромки. Эта зона распространяется вглубь пласта до тех пор, пока в самом пласте не наступит предельное состояние. Как только оно будет достигнуто, предельно напряженная зона распространяется и в самом пласте.

2. В предельно напряженной зоне реализуются два критерия предельного состояния Кулона—Мора: общий (по пласту) и специальный (по контакту пласта с окружающими породами). Распределение поля напряжений в предельно напряженной зоне и прослойка, и пласта производится путем решения трех краевых задач для дифференциальных уравнений гиперболического типа методом характеристик, представленных в конечноразностной канонической форме.

3. Задача о геомеханическом состоянии массива горных пород, вмещающего выработку, пройденную по угольному пласту, путем замены предельно напряженных зон пласта напряжениями, действующими по его контакту с окружающим массивом, сведена ко второй внешней краевой задаче теории упругости для интегрального сингулярного уравнения. Его решение получено методом механических квадратур и с помощью процедуры последовательных приближений, в ходе которой осуществляется проверка статических граничных условий на границе предельно напряженной зоны и упругой области пласта. Поле напряжений в массиве построено на основе фундаментальных решений Кельвина о действии единичной сосредоточенной силы в бесконечной среде.

4. Анализ полученных результатов показал:

а) эпюра напряжений вдоль контакта прослойка с пластом, а также контакта пласта с окружающим массивом представляет собой ломаную линию в виде комбинации поочередно сменяющих друг друга горизонтальных и нелинейно возрастающих участков. На горизонтальных участках реализуется специальный критерий Кулона—Мора, а на нелинейно возрастающих участках справедлив общий критерий Кулона—Мора;

б) с уменьшением прочности прослойка увеличивается расстояние от кромки пласта до того сечения, где начинается его переход в предельно состояние. Переход пласта в предельное состояние у самой кромки возможен при меньшем значении предела прочности прослойка, чем самого пласта, но, при этом, разность между ними не превышает одиннадцати процентов;

в) в пласте, имеющем прослоек, максимум опорного давления выше, а протяженность предельно напряженной зоны меньше по сравнению с параметрами опорного давления пласта в отсутствии прослойка. То есть наличие прослойка несколько увеличивает максимум опорного давления, но при этом значительнее смещает его в сторону кромки пласта (борта выработки). Подобного эффекта с параметрами опорного давления в пласте с прослойком, не обнаружить, если использовать подход, в котором прочность прослойка учитывается лишь при подсчете средневзвешенной прочности пласта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фисенко Г.Л.* Предельные состояния горных пород вокруг выработок. М.: Недра, 1976. 272 с.

2. *Турчанинов И.А., Иофис М.А., Каспарьян Э.В.* Основы механики горных пород. Л.: Недра, 1989. 488 с.

3. *Борисов А.А.* Механика горных пород и массивов. М.: Недра, 1980. 360 с.

4. *Gao W.* Study on the width of the non-elastic zone in inclined coal pillar for strip mining // Int. J. Rock Mech.&Mining Sci. 2014. № 72. P. 304–310.

5. *Galindo R.A., Serrano A., Olalla C.* Ultimate bearing capacity of rock masses based on modified Mohr-Coulomb strength criterion // Int. J. Rock Mech.&Mining Sci. 2017. № 93. P. 215–225.

6. *Charehdash G., Barzegar M.* Numerical models currently being developed for in mining industry // Mine Planning and Equipment Selection. Proc. 22nd MPES Conf. Drezden: Springer, 2013. P. 481–490.

7. *Черданцев Н.В., Черданцев С.В.* Разработка модели геомеханического состояния углепородного массива, вмещающего пластовую выработку // Безопасн. труда в промышл. 2014. № 11. С. 41–45.

8. *Черданцев Н.В., Черданцев С.В.* Анализ состояния углепородного массива, вмещающего пластовую выработку и геологическое нарушение // Изв. РАН МТТ. 2018. № 2. С. 110–121.

9. *Черданцев Н.В.* О некоторых условиях наступления предельного состояния кровли угольного пласта при его отработке очистной выработкой // Безопасн. труда в промышл. 2017. № 5. С. 17–22.

10. *Петухов И.М., Линьков А.М.* Механика горных ударов и выбросов. М.: Недра, 1983. 280 с.

11. *Zhao B., Wen G., Sun H. et al.* Similarity criteria and coal-like material in coal and gas outburst physical simulation // Int. J. Coal Sci.&Technol. 2018. V. 5. № 2. P. 167–178.

12. *Чернов О.И., Пузырев В.Н.* Прогноз внезапных выбросов угля и газа. М.: Недра, 1979. 296 с.

13. *Guo H., Yuan L.* An integrated approach to study of strata behaviour and gas flow dynamics and its application // Int. J. Coal Sci.&Technol. 2015. № 2. P. 12–21.

14. *Shatter R.J.* Models of quasistatic and dynamic fluiddriven fracturing in jointed rocrs // Number. Meth. Proc. 4th Conf. San-Antonio. 1987. Tex. 23–27. P. 505–518.

15. *Шадрин А.В.* Статическая и динамическая выбросоопасность угольных пластов // Безопасн. труда в промышл. 2018. № 4. С. 42–48.

16. *Ермакова И.А., Пириева Н.Н.* Анализ геомеханического состояния предохранительных целиков на шахте им. А.Д. Рубана // Горный информ.-аналит. бюлл. 2016. № 7. С. 193–199.

17. *Христианович С.А.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1981. 484 с.

18. *Руппенейт К.В.* Некоторые вопросы механики горных пород. М.: Углетехиздат, 1954. 384 с.

19. *Черданцев Н.В.* Один из подходов к построению траектории трещины гидроразрыва в массиве горных пород вблизи горной выработки // ПММ. 2020. № 2. С. 208–233.

20. *Черданцев Н.В.* Результаты численного решения уравнений предельного состояния краевой зоны пласта и их аппроксимация полиномами // Безопасн. труда в промышл. 2019. № 6. С. 7–13.

21. *Черданцев Н.В.* Исследование предельно напряженного состояния пласта в его краевой зоне методами механики сыпучей среды // Горный информ.-аналит. бюлл. 2020. № 3. С. 45–57.

22. *Соколовский В.В.* Статика сыпучей среды. М.: Наука, 1990. 272 с.

23. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.

24. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.

25. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа, М.; Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.

26. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.

27. *Черданцев С.В., Черданцев Н.В.* О влиянии предварительно обжатой пружины на зону нарушения сплошности вокруг цилиндрической полости // ПМТФ. 2005. № 3. С. 141–148.

28. *Черданцев Н.В., Преслер В.Т., Изаксон В.Ю.* Геомеханическое состояние анизотропного по прочности массива горных пород в окрестности сопрягающихся выработок // Физ.-техн. пробл. разраб. полезных ископ. 2010. № 2. С. 62–68.

Assessment of the Geomechanical State of the Edge Zone a Coal Seam Containing a Flimsy Layer

N. V. Cherdantsev[a,#]

[a] *Federal Research Center of Coal and Coal Chemistry, SB RAS, Kemerovo, Russia*
[#]*e-mail: nvch2014@yandex.ru*

Reliable estimation of the geomechanical state of coal seam, containing strata with lower strength characteristics than the reservoir, the model of the geomechanical state of coal-rock mass, containing mine working. It is based on the basic principles and approaches of deformable solid mechanics and implemented by the method of boundary integral equations. Within the framework of the model, a computational experiment was performed for a number of mining and geological conditions of a coal deposit. Based on the analysis of the obtained results, a number of features in the stress distribution in the marginal part of the formation were identified.

Keywords: the rock massif, mine working, coal seam, the hydraulic fracture, strength criterion of Coulomb–Mohr, he theory of Griffiths–Irwin, method of boundary integral equations

REFERENCES

1. *Fisenko G.L.* The Limiting State of Rocks around an Excavation. Moscow: Nedra, 1976. 272 p.
2. *Turchaninov I.A., Iofis M.A., Kasparyan E.V.* Fundamentals of Rock Mechanics. Leningrad: Nedra, 1989. 488 p.
3. *Borisov A.A.* Mechanics of Rock and Rock Mass. Moscow: Nedra, 1980. (in Russian)
4. *Gao W.* Study on the width of the non-elastic zone in inclined coal pillar for strip mining // Int. J. Rock Mech. & Mining Sci., 2014, no. 72, pp. 304–310.
5. *Galindo R.A., Serrano A., Olalla C.* Ultimate bearing capacity of rock masses based on modified Mohr-Coulomb strength criterion // Int. J. Rock Mech. & Mining Sci., 2017, no. 93, pp. 215–225.
6. *Charehdash G., Barzegar M.* Numerical models currently being developed for in mining industry // Mine Planning and Equipment Selection. Proc. 22nd MPES Conf., Drezden: Springer, 2013. pp. 481–490.
7. *Cherdantsev N.V., Cherdantsev S.V.* Development of a model of geomechanical state of coal-rock mass, containing mine working // Labour Safety in Industry, 2014, no. 11, pp. 41–45.
8. *Cherdantsev N.V., Cherdantsev S.V.* Analysis of the state for a coal massif in-seam working and a geological discontinuity // Mech. Solids, 2018, vol. 53, no. 2, pp. 211–220.
9. *Cherdantsev N.V.* On some conditions of the occurrence of the limit state of the roof of a coal seam when practicing the cleaning developm coy // Labor Safety in Industry, 2017, no. 5, pp. 17–22.
10. *Petukhov I.M., Linkov A.M.* The Mechanics of Rock Bursts and Discharges. Moscow: Nedra, 1983. 280 p.
11. *Zhao B., Wen G., Sun H. et al.* Similarity criteria and coal-like material in coal and gas outburst physical simulation // Int. J. Coal Sci. & Technol., 2018, vol. 5, no. 2, pp. 167–178.
12. *Tchernov O.I, Puzyrev V.N.* Prediction of Sudden Gas and Coal Outbursts. Moscow: Nedra, 1979. 296 p.
13. *Guo H., Yuan L.* An integrated approach to study of strata behavior and gas flow dynamics and its application // Int. J. Coal Sci. & Techn., 2015, no. 2, pp. 12–21.
14. *Shatter R.J.* Models of guasistatic and dynamic fluid driven fracturing in jointed rocs // Number. Meth. Proc. 4th Conf. San-Antonio. 1987. Tex. 23–27, pp. 505–518.
15. *Shadrin A.V.* Static and dynamic emission hazard of coal seams // Labour Safety in Industry, 2018, no. 4, pp. 42–48.
16. *Ermakova I.A., Pirieva N.N.* Analysis of the geomechanical state of safety pillars at the A.D. Ruban mine // Mining Inform. & Anal. Bull., 2016, no. 7, pp. 193–199.
17. *Khristianovich S.A.* Continuum Mechanics. Moscow: Nauka, 1981. 484 p.
18. *Ruppeneyt K.V.* Some Questions of Rock Mechanics. Moscow: House of Coal, 1954. 384 p.

19. *Cherdantsev N.V.* One of the approaches to the construction of trajectory of hydraulic fracturing // JAMM, 2020, no. 2, pp. 208–233.
20. *Cherdantsev N.V.* The Results of numerical solution of the equations of limit state boundary formation areas and their approximation by polynomials // Labor Safety in Industry, 2019, no. 6, pp. 7–13.
21. *Cherdantsev N.V.* Investigation of the extremely stressed state of the formation in its boundary zone by methods of bulk medium mechanics // Mining Inform. & Anal. Bull., 2020, no. 3, pp. 43–57.
22. *Sokolovsky V.V.* Loose Medium Statics, Moscow: Nauka, 1990. 272 p.
23. *Lurie A.I.* Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1970. 940 p.
24. *Parton V.Z., Perlin P.I.* Methods of Mathematical Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1981. 688 c.
25. *Kantorovich L.V., Krylov V.I.* Approximate Methods of Higher Analysis. Moscow; Leningrad: Nauka, 1962. 708 p.
26. *Rabotnov Yu.N.* Mechanics of Deformable Solids. Moscow: Nauka, 1988. 712 p.
27. *Cherdantsev S.V., Cherdantsev N.V.* Effect of a precompressed spring on the discontinuity zone around a cylindrical cavity // J. Appl. Mech. & Techn. Phys., 2005, vol. 46, no. 3, pp. 423–429.
28. *Cherdantsev N.V., Presler V.T., Isakson V.Yu.* Geomechanical state of strength-anisotropic rock mass in the vicinity of mating tunnels // J. Mining Sci., 2010, vol. 46, no. 2, pp. 143–148.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 2, с. 257–272

УДК 519.6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕСТ РАСПОЛОЖЕНИЯ КОНТРОЛЬНО-ТЕРМИЧЕСКИХ СКВАЖИН ПРИ ИСКУССТВЕННОМ ЗАМОРАЖИВАНИИ ПОРОДНОГО МАССИВА

© 2021 г. М. А. Семин[1,*], Л. Ю. Левин[1], М. С. Желнин[2], О. А. Плехов[2]

[1] *Горный институт УрО РАН, Пермь, Россия*

[2] *Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия*

**e-mail: seminma@inbox.ru*

Поступила в редакцию 08.07.2020 г.
После доработки 29.09.2020 г.
Принята к публикации 14.01.2021 г.

В статье проведено исследование оптимальных мест расположения контрольно-термических скважин, исходя из критерия наиболее быстрой и достоверной калибровки теплофизической модели замораживаемого породного массива по измерениям температуры. Для этого исследована чувствительность решения прямой задачи Стефана к вариации теплофизических свойств породного массива. Определены зоны наибольшей чувствительности решения по отношению к вариациям теплопроводностей и влажности массива – в этих зонах наиболее целесообразно располагать контрольно-термические скважины. Далее получено численное решение обратной задачи Стефана в фазовой плоскости параметров калибровки математической модели. Подтверждены выводы о выборе мест расположения скважин, полученные при анализе чувствительности решения прямой задачи Стефана. В дополнение к этому, получено, что при комплексной калибровке множества теплофизических параметров массива оптимальное расположение контрольно-термической скважины может существенно не совпасть с ее расположениями при рассмотрении параметров калибровки по отдельности.

Ключевые слова: искусственное замораживание пород, ледопородное ограждение, контрольно-термические скважины, расположение скважин, обратная задача Стефана, оптимизация

DOI: 10.31857/S0032823521020089

Введение. Математическое моделирование процесса искусственного замораживания породного массива является неотъемлемым этапом при мониторинге формирования ледопородных ограждений (завес) строящихся подземных сооружений [1, 2]. Достаточно актуальным на сегодня является вопрос адекватности и точности математических моделей, используемых для описания искусственного замораживания породного массива. В особенности это касается параметризации математических моделей. Так, например, отмечается [3, 4], что исходные значения теплофизических свойств породного массива (особенно теплопроводностей) могут иметь существенную погрешность, связанную как с несовершенством методов лабораторных испытаний образцов керна, так и с недостаточным количеством кернового материала, отбираемого в процессе геологических изысканий. В конечном счете, это проявляется в сильных расхождениях между рассчитанной и измеренной температурами в местах расположения контрольно-термических скважин. Как следствие, теплофизические модели породного массива, построенные по данным лабораторных испытаний образцов керна, не могут обеспечить достоверное прогнозирование процесса искусственного замораживания породного массива при строительстве подземных сооружений.

Для решения указанной проблемы предложены и применены на практике [1, 3, 4] методы калибровки теплофизических свойств замораживаемого породного массива по данным измерения температуры породного массива в контрольно-термических скважинах. Идея заключалась в подборе теплофизических свойств массива таким образом, чтобы обеспечить наилучшее соответствие между рассчитанной и измеренной температурами в местах расположения контрольно-термических скважин. Математически такой подбор теплофизических свойств массива производился путем решения обратной задачи теплопереноса с движущейся границей фазового перехода поровой воды (или обратной задачи Стефана) [5]. В зарубежной литературе данный подход к идентификации параметров модели на основе полевых измерений называется "обратный анализ" [6].

Возникает естественный вопрос о том, как выбирать места расположения контрольно-термических скважин. К настоящему времени имеется немногочисленное количество исследований, в которых рассматривался этот вопрос [7, 8]. Местоположения скважин определялись по таким принципам, как смыкание фронтов замерзания поровой воды, распространяющихся от отдельных замораживающих скважин, и достижение ледопородного ограждения требуемой толщины.

В настоящей статье делается попытка ответить на вопрос выбора мест расположения контрольно-термических скважин с использованием другого критерия — наиболее быстрой и достоверной калибровки теплофизических свойств замораживаемого породного массива по измеренным температурам в контрольно-термических скважинах. Для этого в соответствии с теорией оптимального планирования эксперимента проводится теоретическое исследование чувствительности решения прямой задачи Стефана к вариации теплофизических свойств породного массива. Исходя из определенных зон наибольшей чувствительности решения, делается заключение о выборе мест расположения контрольно-термических скважин. Полученные выводы подкрепляются данными численного решения обратной задачи Стефана для условий промплощадки рудника Петриковского горно-обогатительного комплекса.

1. Математическая постановка задачи. Искусственное замораживание породного массива для строительства вертикального шахтного ствола осуществляется по следующей технологической схеме: вокруг проектируемой горной выработки бурится круговой контур замораживающих скважин, в которые монтируются колонки, далее колонки подключаются к рассольной сети, и организуется непрерывная циркуляция охлажденного до отрицательных температур рассола по системе замораживающих колонок. В результате окружающий породный массив постепенно охлаждается и замерзает. Следуя терминологии [7], где поровая вода полностью перешла в твердое состояние, будем называть зоной льда, а зону, где поровая вода находится в жидком состоянии — зоной охлаждения.

Сформулируем постановку прямой задачи Стефана в обобщенном виде [8] для горизонтального слоя влагонасыщенного породного массива в условиях искусственного замораживания. Для этого примем следующие упрощающие гипотезы:

1. Промерзающий влагонасыщенный породный массив представляет собой горизонтально-слоистую пористую среду, состоящую из сухого скелета и порового пространства, которое заполнено водой и льдом.

2. Теплофизические свойства каждого породного слоя являются однородными и изотропными в зонах льда и охлаждения.

3. Вертикальный тепловой поток отсутствует; распределение температуры считается однородным по всей толщине слоя.

4. Конвективный теплоперенос вследствие миграции поровой воды не учитывается.

5. Локальное тепловое равновесие между различными фазами (сухой скелет, вода, лед).

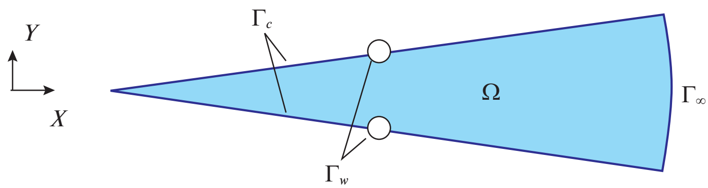

Рис. 1. Геометрия расчетной области.

6. Отклонения положений замораживающих колонок от проектных значений не рассматриваются.

Введенные гипотезы позволяют перейти к двумерной постановке задачи и рассмотреть круговой сектор, заключенный между двумя главными плоскостями ледопородного ограждения (рис. 1).

Уравнение баланса энергии влагонасыщенного слоя породного массива без явного выделения границы фазового перехода в декартовых координатах может быть записано как [9]:

$$\rho c_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in [0, t_{\text{end}}], \tag{1.1}$$

где T – температура, °C; ρ – плотность, кг/м^3; λ – теплопроводность, Вт/(м °C); c_{eff} – эффективная удельная теплоемкость, Дж/(кг °C); Ω – множество внутренних точек расчетной области; t_{end} – конечное время моделирования, с.

Теплофизические параметры влагонасыщенного породного слоя определяются согласно [10, 11]:

$$\rho = \theta\rho_{\text{sd}} + (1-\theta)\rho_{\text{lq}} \tag{1.2}$$

$$\lambda = \theta\lambda_{\text{sd}} + (1-\theta)\lambda_{\text{lq}} \tag{1.3}$$

$$c_{\text{eff}} = \frac{1}{\rho}\left[\theta\rho_{\text{lq}}c_{\text{lq}} + (1-\theta)\rho_{\text{sd}}c_{\text{sd}}\right] + \frac{L}{2}\frac{d}{dT}\left[\frac{(1-\theta)\rho_{\text{lq}} - \theta\rho_{\text{sd}}}{\rho}\right], \tag{1.4}$$

где ρ_{sd}, ρ_{lq} – плотности породы в зонах льда и охлаждения соответственно, кг/м^3; λ_{sd}, λ_{lq} – теплопроводности породы в зонах льда и охлаждения соответственно, Вт/(м °C); c_{sd}, c_{lq} – удельные теплоемкости породы в зонах льда и охлаждения соответственно, Дж/(кг °C); L – удельная теплота фазового перехода, Дж/кг; θ – сглаживающая индикаторная функция.

Удельная теплота фазового перехода L определяется в зависимости от массовой влажности w, кг/кг, [10, 12]

$$L = L_0 w, \tag{1.5}$$

где L_0 – удельная теплота кристаллизации воды, Дж/кг. Отметим, что влажность породного массива w здесь трактуется в смысле [13] – как масса влаги, в малом объеме породы, отнесенная на массу этого объема породы во влажном состоянии.

Функция θ записывается в зависимости от температуры T следующим образом:

$$\theta(T) = \begin{cases} 1, & T \le T_{\text{sd}} \\ (T_{\text{lq}} - T)^3 / (T_{\text{lq}} - T_{\text{sd}})^3, & T_{\text{sd}} < T \le T_{\text{lq}} \\ 0, & T_{\text{lq}} < T \end{cases} \tag{1.6}$$

Данная функция служит для сглаживания перехода между теплофизическими свойствами в зоне охлаждения и зоне льда в пределах интервала сглаживания $[T_{\text{sd}}, T_{\text{lq}}]$.

Граничные и начальное условия задачи представлены ниже:

$$T\big|_{\Gamma_w} = T_w(t), \quad T\big|_{\Gamma_\infty} = T_0, \quad \left.\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma_C} = 0 \tag{1.7}$$

$$T\big|_{t=0} = T_0, \tag{1.8}$$

где T_0 – начальная температура породного массива, °C; T_w – температура на границе замораживающей колонки, °C; Γ_w – граница замораживающей колонки, Γ_∞ – внешняя граница расчетной области, $\Gamma_C = \partial\Omega \backslash (\Gamma_{\text{well}} \cup \Gamma_\infty)$ – боковые границы расчетной области, на которых задано условие симметрии.

В уравнении (1.1) вся информация о фазовом переходе поровой влаги заключена в эффективную удельную теплоемкость (1.4), что позволяет выполнить моделирование теплопереноса во влагонасыщенной пористой среде с учетом скрытой теплоты кристаллизации без явного выделения границы фазового перехода. Данный подход к моделированию фазовых переходов в средах называется подходом эффективных теплоемкостей [9, 14, 15].

2. Исследование чувствительности решения задачи к вариации свойств массива. Сформулированная выше прямая задача Стефана использовалась для исследования чувствительности поля температур в замораживаемом породном слое к вариации его теплофизических свойств. В качестве варьируемых параметров выбраны теплопроводности в зонах льда λ_{sd} и охлаждения λ_{lq}, а также влажность пород w. В статье подробно рассмотрены результаты исследований для слоя мела в условиях строящихся стволов калийного рудника Петриковского горно-обогатительного комбината. Основные теплофизические свойства мела, определенные в ходе инженерно-геологических изысканий, сведены в табл. 1. Прочие параметры задачи представлены в табл. 2.

Температура на границах замораживающих колонок задается в виде временной функции, представленной на рис. 2. Данная функция соответствует реальной временной динамике температуры рассола, подаваемого в замораживающие колонки, при строительстве стволов калийного рудника Петриковского горно-обогатительного комплекса.

Прежде всего, исследовано относительное влияние вариаций теплофизических свойств породного массива на поле температуры на различном удалении от контура замораживания – 1, 3 и 5 м. На соответствующих удалениях от контура замораживания вдоль оси X установлены модельные контрольно-термические скважины KT_1, KT_2 и KT_3. Рассмотрено два модельных времени:

– время окончания активного замораживания и достижения требуемой по проекту толщины ледопородного ограждения: $t_1 = 110.4$ сут. (9.54×10^6 с),

– время окончания пассивного замораживания: $t_2 = 347.2$ сут. (3×10^7 с).

Для оценки влияния рассчитывались усредненные по времени квадратичные отклонения температур породного слоя E в контрольно-термических скважинах KT_i в результате относительного увеличения каждого из трех исследуемых теплофизических параметров p_k ($p_1 = \lambda_{\text{sd}}$, $p_2 = \lambda_{\text{lq}}$, $p_3 = \omega$) на 50%:

$$E(x_i, y_i, p_k) = \int_{t_0}^{t_j} [T(x_i, y_i, t; p'_k) - T(x_i, y_i, t; p_k)]^2 dt, \quad p'_k = 1.5 p_k \tag{2.1}$$
$$(i, k = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2),$$

где t_j – рассматриваемые времена моделирования, с; $t_0 = 3$ сут. – момент времени, при котором начинается замораживание (т.е. когда температура замораживающего рассола становится отрицательной).

Таблица 1. Теплофизические свойства слоя мела

Свойство	Значение
λ_{sd}, Вт/(м °С)	2.18
λ_{lq}, Вт/(м °С)	1.31
ρ_{sd}, кг/м^3	1771
ρ_{lq}, кг/м^3	1816
c_{sd}, Дж/(кг °С)	1126
c_{lq}, Дж/(кг °С)	1767
w, кг/кг	0.32
T_{sd}, °С	−1
T_{lq}, °С	0
L_0, Дж/кг	330000
T_0, °С	6.5

Таблица 2. Геометрические и физические параметры задачи

Параметр	Значение
Радиус кругового сектора (расчетной области), м	16.25
Расстояния от центра кругового сектора до центра замораживающей колонки, м	8.25
Радиус замораживающей колонки, м	0.073
Угол между ограничивающими сектор радиусами, °	8.78
t_{end}, с	3×10^7

Функционал E действует на множестве решений задачи (1.1)–(1.8) и ставит в соответствие решению $T = T(x, y, t; p'_k)$, полученного для возмущенного параметра p'_k, его отклонение по времени в точке (x_i, y_i), соответствующей расположению контрольно-термической скважине KT_i, от решения $T = T(x, y, t; p_k)$, найденного для параметра p_k, приведенного в табл. 1. Приращение параметров определялось, исходя из ограничений на значения теплофизических свойств породного массива, – например, максимальные и минимальные значения теплопроводностей, которые встречаются на практике для рассматриваемого слоя горных пород. Значения функционала E для времен моделирования t_j представлены в табл. 3, 4.

В ближайшей к контуру замораживания скважине KT_1 теплопроводность λ_{sd} оказывает наиболее сильное влияние на поле температуры в массиве (об этом свидетельствует наибольшее значение функционала E), а теплопроводность λ_{lq} – наиболее слабое. Если в момент времени 110.4 сут. влияние влажности w на решение на порядок ниже, чем влияние теплопроводности λ_{sd}, то в момент времени 347.2 сут. ситуация меняется и влажность начинает влиять на решение сопоставимо с теплопроводностью в зоне льда.

В более удаленных от контура скважинах KT_2 и KT_3 для времени 110.4 сут. влияние теплопроводности λ_{lq} существенно превосходит влияние остальных двух параметров.

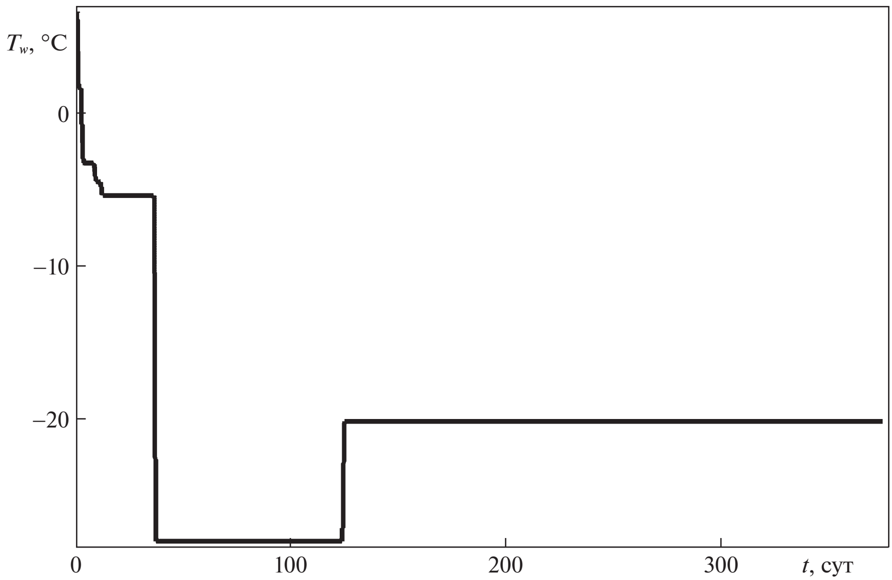

Рис. 2. Временная динамика температуры на границах замораживающих колонок.

Для времени 347.2 сут. в средней скважине KT_2 доминирующее влияние на решение по-прежнему оказывает теплопроводность λ_{sd}, но для более дальней скважины KT_3 влияние λ_{sd} на поле температур примерно в 2.5 раза ниже, чем для λ_{lq}.

Возмущение влажности w оказывает промежуточное влияние на поле температуры независимо от продолжительности наблюдений – значения функционала E для вариации параметра w меньше, чем соответствующие значения либо для вариации λ_{sd}, либо для вариации λ_{lq}. Характер изменения влияния возмущения влажности w на поле температуры с увеличением расстояния скважины от контура замораживания и увеличением продолжительности наблюдений качественно совпадает с изменением влия-

Таблица 3. Значения E для времени моделирования 110.4 сут.

Контрольно-термическая скважина	λ_{sd}	λ_{lq}	w
KT_1	12870.3	374.5	1218.0
KT_2	50.5	623.7	13.4
KT_3	0.8	122.2	0.3

Таблица 4. Значения E для времени моделирования 347.2 сут.

Контрольно-термическая скважина	λ_{sd}	λ_{lq}	w
KT_1	43917.9	710.6	37384.6
KT_2	3675.0	1578.3	1536.9
KT_3	584.6	1328.3	219.6

ния теплопроводности λ_{sd}. По данной причине далее рассматривались вариации только двух теплофизических параметров породного массива – теплопроводностей λ_{sd} и λ_{lq}.

На следующем этапе исследовались распределения чувствительности поля температуры при вариации каждого из рассматриваемых теплофизических свойств. В качестве меры чувствительности принимался следующий скалярный критерий:

$$\Phi(x, y, t_{\text{end}}) = -\ln\left[\frac{1}{t_{\text{end}} - t_0}\int_{t_0}^{t_{\text{end}}}\left(\frac{\partial T(x, y, \tau)}{\partial p_i}\right)^2 d\tau\right], \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.2}$$

Критерий Φ по форме аналогичен известному в литературе D-критерию оптимальности экспериментального плана, широко применяемому в теории оптимального планирования экспериментов для оценки влияния условий проведения эксперимента на решение обратной задачи [16].

Оптимальные местоположения контрольно-термических скважин в расчетной области ищутся по критерию наибольшей чувствительности решения к вариации теплофизических свойств массива. Для этого решается задача поиска минимума критерия Φ с помощью метода сопряженных градиентов [17]. Расчет величин $\partial T/\partial p_i$ выполняется путем численного решения методом конечных элементов краевой задачи в приращениях температуры, записанной для задачи (1.1)–(1.8).

Численные расчеты для определения распределения критерия Φ при вариациях каждого из трех рассматриваемых теплофизических свойств выполнялись для ранее рассмотренного слоя мела. На рис. 3 представлены распределения критерия Φ в расчетной области Ω для теплопроводности в зоне охлаждения λ_{lq} при различных временах t_{end} моделирования. В качестве конечных времен t_{end} моделирования рассмотрены моменты времени:

– до смыкания ледопородных цилиндров, соответствующих зонам льда вокруг замораживающих скважин, $t_{\text{end}} = 25$ сут.;

– смыкание ледопородных цилиндров и формирование сплошного ледопородного ограждения, $t_{\text{end}} = 50$ сут.;

– достижение проектной толщины ледопородного ограждения $t_{\text{end}} = 110.4$ сут.;

– окончание замораживания: $t_{\text{end}} = 347.2$ сут.

Из рис. 3 видно, что во всех рассмотренных случаях критерий Φ достигает своих максимальных значений в зоне охлаждения. Критерий Φ является гладкой функцией, без резких перепадов и скачков. Рассматривая значения критерия Φ на замковой плоскости ледопородного ограждения, можно сказать, что он имеет немонотонный характер распределения по расчетной области и два локальных минимума. Один минимум расположен внутри контура замораживания, а второй – вовне. При этом значение локального минимума, расположенного внутри контура замораживания меньше, чем расположенного вовне. До смыкания отдельных ледопородных цилиндров (25 сут.) локальные минимумы находятся вблизи контура замораживания на расстояниях соответственно 0.85 и 0.65 м от этого контура. С увеличением времени моделирования локальные минимумы смещаются вслед за границей фазового перехода, удаляясь от контура замораживания. Так при временах моделирования 50, 110.4 и 347.2 сут. внешний локальный минимум расположен на расстояниях от контура замораживания, равных соответственно 1.15, 1.95 и 3.65 м.

Таким образом, для решения коэффициентной обратной задачи Стефана относительно теплопроводности в зоне охлаждения λ_{lq} оптимальное положение контрольно-термической скважины зависит от длительности измерений температуры и конечного положения границы фазового перехода. В целом в этом случае оптимальное положение контрольно-термической скважины находится в зоне охлаждения, при этом нет

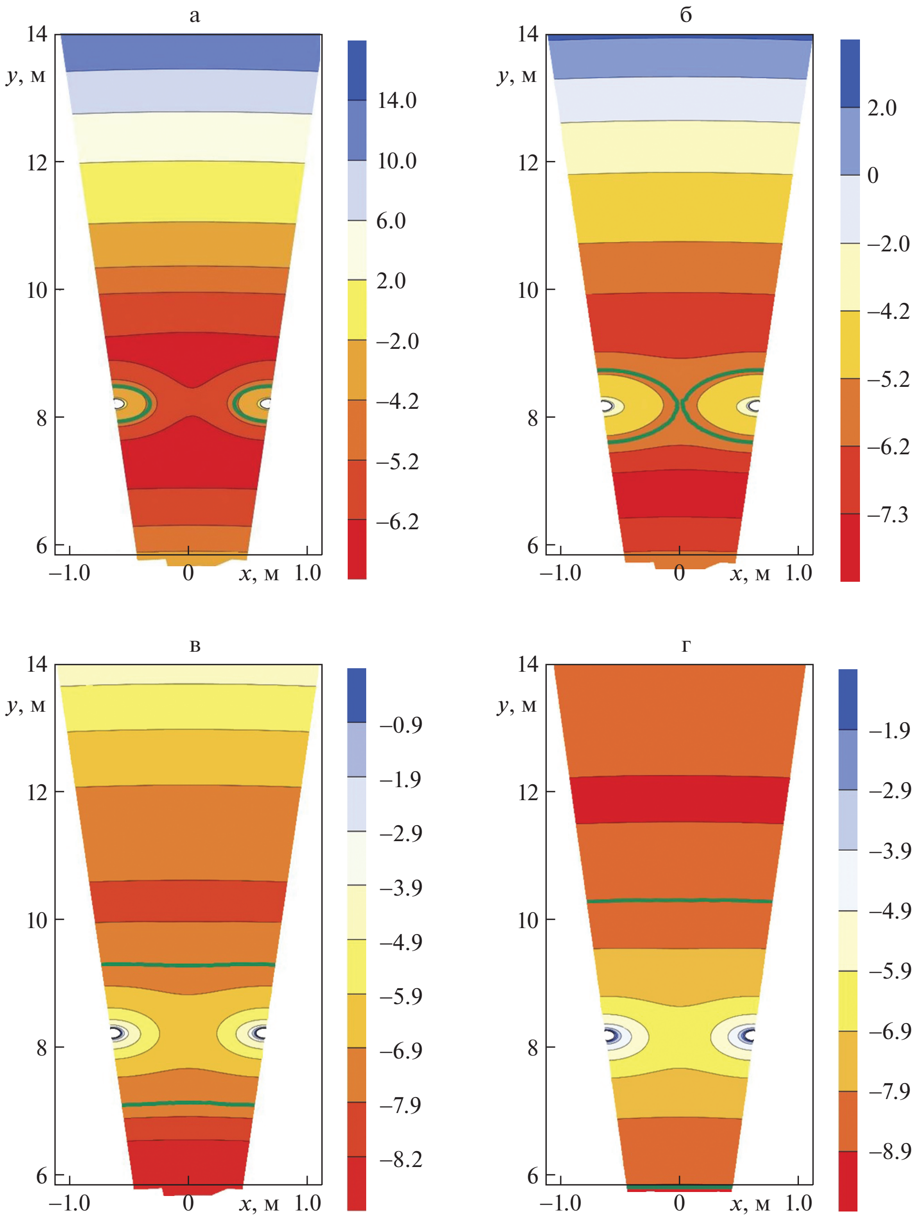

Рис. 3. Распределение критерия Ф для теплопроводности в зоне охлаждения λ_{lq} для различных времен моделирования а–г t_{end} = 25; 50; 110.4; 347.2 сут. зеленая линия обозначает фронт фазового перехода.

принципиальной разницы в размещении контрольно-термической скважины в замковой или главной плоскостях ледопородного ограждения. Если в качестве наиболее значимого времени моделирования принять время достижения проектной толщины ледопородного ограждения, то на основании рис. 3в контрольно-термическую скважину следует размещать вовне контура замораживания на расстоянии 2–2.5 м от него.

На рис. 4 представлены распределения критерия Φ в расчетной области для теплопроводности в зоне льда $\lambda_{\rm sd}$ для различных времен моделирования $t_{\rm end}$. Из распределений видно, что критерий Φ достигает своих минимальных значений в зоне льда. Значения Φ изменяются от точки к точке сильнее по сравнению с более пологим распределением критерия Φ для теплопроводности в зоне охлаждения (рис. 3). При проведении наблюдений вплоть до момента смыкания отдельных ледопородных цилиндров (50 сут.), минимумы Φ расположены вблизи замораживающих скважин. На момент достижения проектной толщины ледопородного ограждения (110.2 сут.) критерий Φ имеет единственный минимум, расположенный примерно на пересечении контура замораживания с замковой плоскости ледопородного ограждения. При дальнейшем увеличении продолжительности наблюдений у критерия Φ возникают два локальных минимума, один вовне контура замораживания (на расстоянии 0.85 м от него) и один внутри контура замораживания (на расстоянии 1.1 м от него).

Для решения коэффициентной обратной задачи Стефана относительно теплопроводности в зоне льда $\lambda_{\rm sd}$ оптимальное расположение контрольно-термической скважины также зависит от продолжительности наблюдений, но находится в зоне льда. С учетом ограничений технического плана расстояния между двумя ближайшими скважинами не может быть меньше некоторой величины, зависящей от глубины бурения [7, 18]. Данная величина зачастую сопоставима или равна расстоянию между замораживающими колонками. С учетом этого ограничения и полученных расчетных данных (рис. 4) следует принять, что контрольно-термическую скважину следует размещать в замковой плоскости ледопородного ограждения на минимальном расстоянии от контура замораживания.

3. Исследование решения обратной задачи Стефана. Полученные выводы о чувствительности решения прямой задачи Стефана к вариации теплофизических свойств массива были апробированы посредством численного решения коэффициентной обратной задачи Стефана. Решения строились при различных местоположениях контрольно-термических скважин для возможности проведения сравнения результатов решений на предмет единственности и наискорейшей сходимости численной итерационной процедуры решения.

Постановка обратной задачи Стефана и численный алгоритм ее решения, основанный на методе градиентного спуска, описаны в ранее [3, 12]. Это не единственные методы решения обратных задач Стефана, так, для решения подобных задач используется метод дескриптивной регуляризации [19] и вариационно-итерационный метод [20].

Для формулировки обратной задачи необходимо переопределить прямую задачу (1.1)–(1.7) посредством введения заданных измеренных температур $T_i^{(c)}(t)$ в местах расположения (x_i, y_i) каждой контрольно-термической скважины номера i:

$$T(t, x_i, y_i) = T_i^{(c)}(t), \quad i = 1, \ldots, N_C \tag{3.1}$$

Здесь N_C – количество контрольно-термических скважин.

Таким образом, решение обратной задачи Стефана в данном случае состоит в определении поля температур $T(t, x, y)$ и значений теплофизических свойств массива p_j $(j = 1, \ldots, N_P)$, удовлетворяющих системе уравнений (1.1)–(1.8), (3.1). Здесь N_P – количество калибруемых теплофизических свойств массива. В рассматриваемом нами случае имеется два калибруемых теплофизических свойства – теплопроводности в зонах льда $p_1 = \lambda_{\rm sd}$ и охлаждения $p_2 = \lambda_{\rm lq}$.

Численное решение поставленной коэффициентной обратной задачи осуществляется с помощью метода естественной регуляризации [5], в рамках которого жесткое

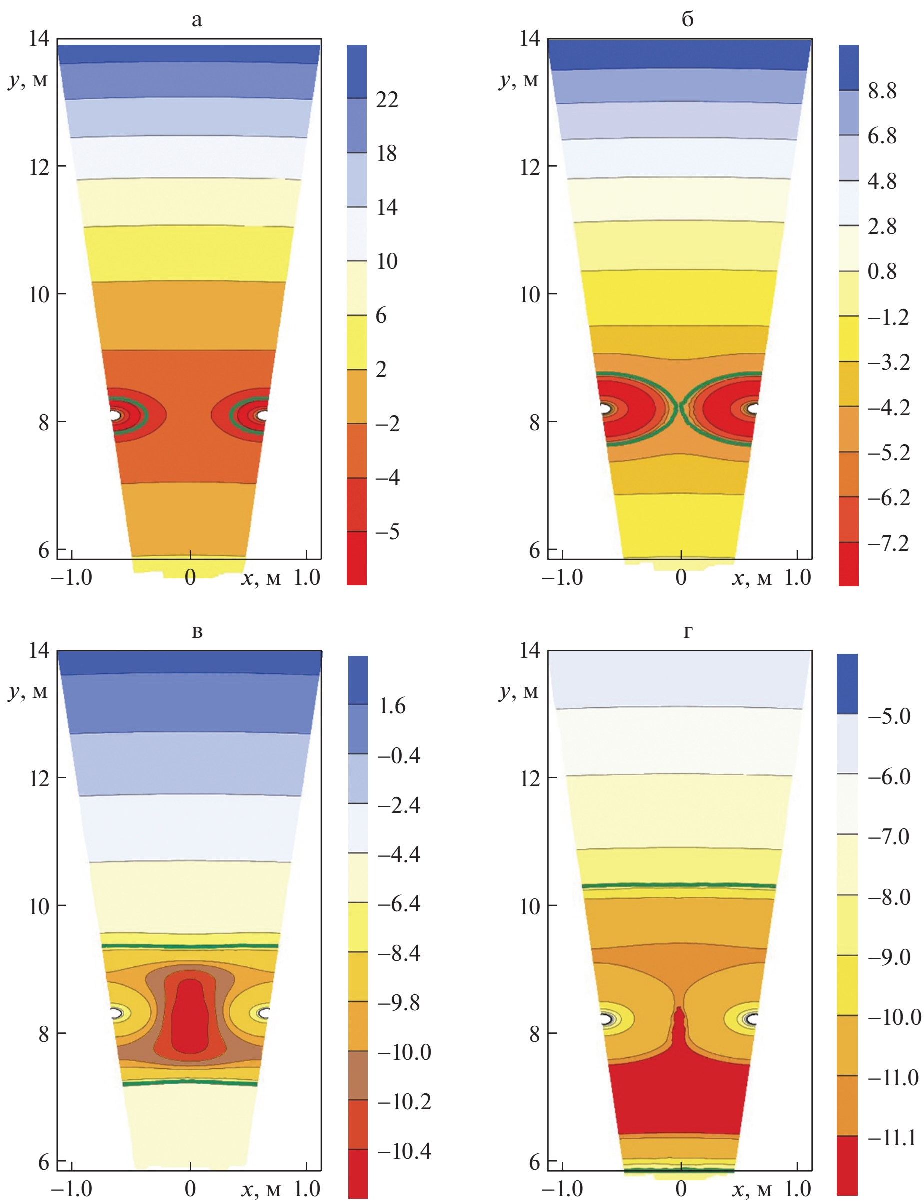

Рис. 4. Распределение критерия Ф для теплопроводности в зоне льда λ_{sd} для различных времен моделирования а–г t_{end} = 25; 50; 110.4; 347.2 сут., зеленая линия обозначает фронт фазового перехода.

условие (3.1) заменяется на условие минимума функционала $I = I(\lambda_{sd}, \lambda_{lq})$ рассогласований температур, имеющего вид:

$$I = \sqrt{\frac{1}{N_C N_m} \frac{1}{\Delta T^2} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{i=1}^{N_C} \left[T_i(t_k, x_i, y_i) - T_i^{(c)}(t_k) \right]^2}, \tag{3.2}$$

где $T_i = T(t, x_i, y_i)$ – температура в месте расположения (x_i, y_i) контрольно-термической скважины, полученная из задачи (1.1)–(1.7) для теплопроводностей λ_{sd}, λ_{lq}, °C;

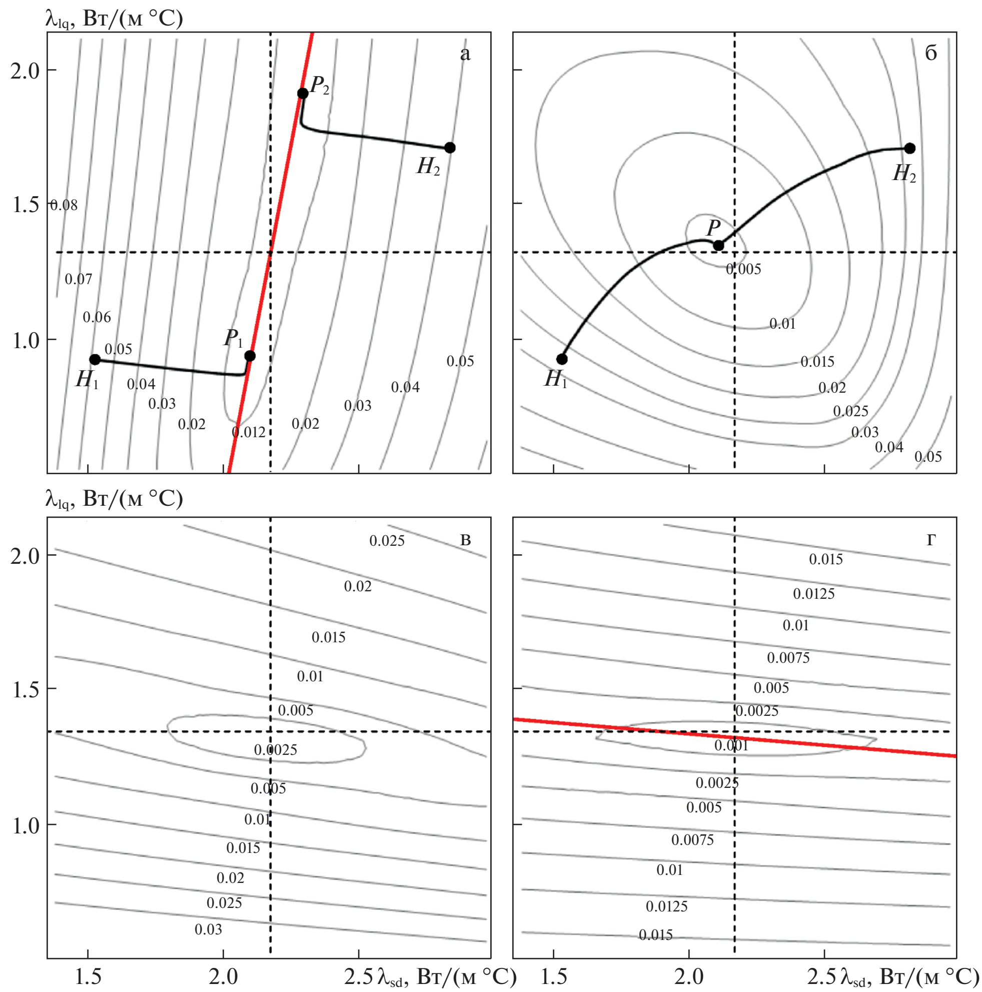

Рис. 5. Изолинии функционала рассогласований температур I в фазовом пространстве параметров минимизации (λ_{sd}, λ_{lq}) при различных расстояниях контрольно-термической скважины от контура замораживания: а) – 0.25 м, б) – 1.25 м, в) – 2.5 м, г) – 3.75 м.

N_m – количество замерных точек температуры по шкале времени; t_k – момент времени, отвечающей k-й замерной точке, с; ΔT – характерная разница температур в рассматриваемой задаче, °C. В качестве ΔT может быть взята разница начальной температуры массива и температуры хладоносителя в замораживающих колонках.

Количество контрольно-термических скважин принято равным единице. Рассмотрено четыре варианта положений контрольно-термической скважины – на расстояниях 0.25, 1.25, 2.5 и 3.75 м от контура замораживания. Во всех случаях контрольно-термическая скважина располагалась на замковой плоскости ледопородного ограждения. Рассмотрено время моделирования t_{end}, равное 110.4 сут (время окончания активного замораживания).

На рис. 5 представлены изолинии функционала рассогласований температур в фазовом пространстве параметров минимизации – теплопроводностей в зонах льда λ_{sd} и

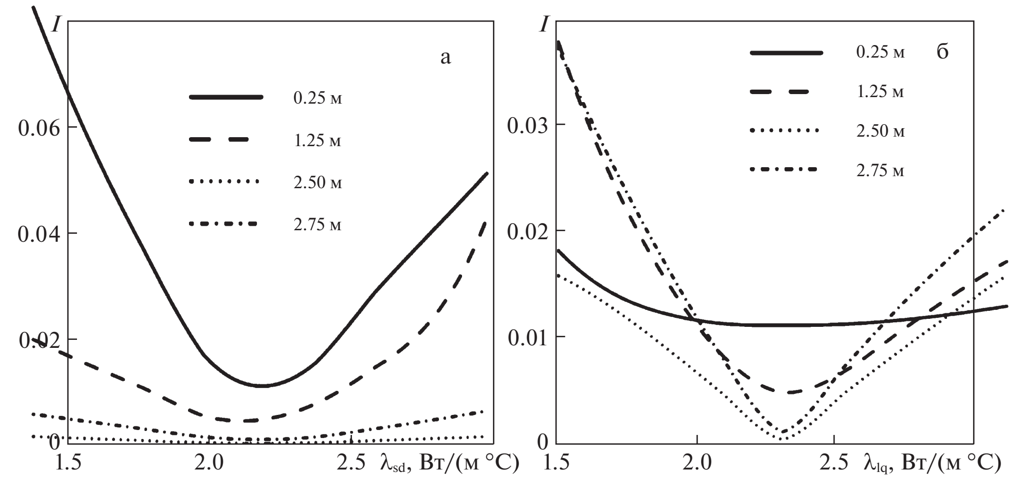

Рис. 6. Зависимости функционала I рассогласований температур от теплопроводности в зоне льда λ_{sd} (а) и теплопроводности в зоне охлаждения λ_{lq} (б).

охлаждения λ_{lq}. Четыре поля изолиний соответствуют четырем различным местам размещения контрольно-термических скважин. Также на рис. 5 а, б представлены кривые, соответствующие итерационной процедуре минимизации функционала (3.2) из двух разных начальных точек H_1 и H_2. На рис. 6 представлены зависимости функционала рассогласований температур от отдельных параметров минимизации, построенные вдоль штриховых линий, указанных на рис. 5.

Из рис. 5 следует, что форма функционала рассогласования в фазовом пространстве теплопроводностей сильно меняется с изменением положения контрольно-термической скважины, что согласуется с ранее полученными результатами [3]. Если для скважин вблизи контура замораживания изолинии расположены практически вдоль оси ординат, то при постепенном удалении скважины от контура замораживания изолинии функционала постепенно перестраиваются и вытягиваются вдоль оси абсцисс.

В целом случай а) слишком близкого расположения контрольно-термической скважины к контуру замораживания одинаково плох, как и случай г) слишком дальнего расположения контрольно-термической скважины к контуру замораживания – в обоих этих случаях на графиках можно выделить линию (см. рис. 5 а,г, красный цвет), вдоль которой значения функционала рассогласований меняются очень слабо. Это, по сути, означает, что при минимизации функционала I есть риск оказаться в любой из точек на этих прямых – т.е. любая из этих точек окажется решением обратной задачи Стефана. Этот факт подтвержден при численном решении обратной задачи – при разных начальных значениях теплопроводностей массива на рис. 5а получаются различные решения обратной задачи – точки P_1 и P_2. При этом, на рис. 5б в аналогичной ситуации достигается единственное решение задачи – точка P.

При этом, если рассматривать обусловленность задачи минимизации функционала I по каждой из теплопроводностей в отдельности (см. рис. 6), то видно, что функционал I имеет наиболее характерный минимум по теплопроводности в зоне льда λ_{sd} при самом близком расположении контрольно-термической скважины к контуру замораживания 0.25 м (рис. 6а), а минимум по теплопроводности в зоне охлаждения λ_{lq} наблюдается при расположении контрольно-термической скважины в интервале расстояний 1.25 и 2.5 м от контура замораживания (рис. 6б). Судить о характерности минимумов можно исходя из степени наклона кривых на рис. 6 — чем больше средний угол наклона кривой, тем сильнее выражен ее минимум. Эти выводы находятся в полном соответствии с результатами, полученными в предыдущем разделе этой статьи.

Таким образом, наиболее благоприятные места расположения контрольно-термических скважин по фактору наиболее быстрого и однозначного решения задачи минимизации функционала (3.2) для отдельных параметров минимизации (теплопроводностей породного массива) могут не обеспечивать скорость и однозначность решения обратной задачи Стефана для этих параметров в совокупности. Это означает, что выбор оптимальных мест размещения контрольных скважин по фактору наилучшего решения обратной задачи Стефана, должен производиться из комплексного рассмотрения всех калибруемых параметров модели. Для рассмотренного случая калибровки теплопроводностей породного массива в зонах льда и охлаждения полученное оптимальное расположение скважины находится на расстоянии примерно 1.25 м от контура замораживания. В этом случае изолинии функционала I близки к окружностям.

Заключение. В результате проведенных исследований сделаны следующие выводы относительно выбора мест расположения контрольно-термической скважины исходя из критерия наиболее быстрой и достоверной калибровки теплофизических свойств замораживаемого породного массива по измеренным температурам в контрольно-термических скважинах.

– Для наилучшей калибровки теплопроводности породного массива в зоне охлаждения контрольно-термическую скважину следует размещать вовне контура замораживания на расстоянии 2–2.5 м от него. Это обеспечит наиболее точное решение обратной задачи Стефана на момент достижения ледопородного ограждения проектной толщины.

– Для наилучшей калибровки теплопроводности породного массива в зоне льда, а также влажности породного массива контрольно-термическую скважину следует размещать в замковой плоскости ледопородного ограждения на минимальном расстоянии от контура замораживания.

– При этом, при рассмотрении комплексной задачи калибровки множества теплофизических параметров массива выбор положений контрольно-термических скважин должен производиться исходя из комплексного рассмотрения калибруемых теплофизических свойств породного массива. Полученное таким образом оптимальное расположение контрольно-термической скважины может существенно не совпасть с ее расположениями при рассмотрении параметров калибровки по отдельности.

– Неоптимальный выбор мест расположения контрольно-термических скважин может привести к существованию множества решений обратной задачи Стефана.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда в рамках проекта № 17-11-01204.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vitel M., Rouabhi A., Tijani M. et al.* Thermo-hydraulic modeling of artificial ground freezing: Application to an underground mine in fractured sandstone // Comput.&Geotechn. 2016. V. 75. P. 80–92.

2. *Papakonstantinou S., Anagnostou G., Pimentel E.* Evaluation of ground freezing data from the Naples subway // Proc. Inst. Civil Engineers: Geotechnical Engineering. 2013. V. 166. № 3. P. 280–298.

3. *Левин Л.Ю., Семин М.А., Зайцев А.В.* Калибровка теплофизических свойств породного массива при моделировании формирования ледопородного ограждения строящихся шахтных стволов // Физикотехн. пробл. разработ. полезн. ископ. 2019. № 1. С. 172–184.
4. *Долгов О.А.* Методика расчета процесса замораживания горных пород при проходке стволов шахт способом замораживания на большую глубину // в кн.: Замораживание горных пород при проходке стволов шахт. М.: Изд. АН СССР, 1961. С. 9–64.
5. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. 280 с.
6. *Russo G. et al.* Artificial ground freezing to excavate a tunnel in sandy soil. Measurements and back analysis // Tunnell.&Undergr. Space Technol. 2015. V. 50. P. 226–238.
7. *Трупак Н.Г.* Замораживание горных пород при проходке стволов. М.: Углетехиздат, 1954. 895 с.
8. *Маньковский Г.И.* Специальные способы сооружения стволов шахт. М.: Наука, 1965. 315 с.
9. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
10. *Желнин М.С., Плехов О.А., Левин Л.Ю.* Оптимизация пассивного режима искусственного замораживания водонасыщенного породного массива // ИФЖ. 2020. Т. 93. № 3. С. 706–714.
11. Comsol v.5.4 Documentation. Heat Transfer Module User’s Guide. 2018, 784 p.
12. *Левин Л.Ю., Семин М.А., Зайцев А.В.* Решение обратной задачи Стефана при анализе замораживания грунтовых вод в породном массиве // ИФЖ. 2018. Т. 91. № 3. С. 655–663.
13. *Янченко Г.А.* О взаимосвязях между показателями суммарного содержания влаги в мерзлых горных породах и грунтах // Горные науки и технол. 2016. № 1. С. 25–32.
14. *Хохолов Ю.А., Соловьев Д.Е.* Методика совместного расчета температурного и вентиляционного режимов нестационарной сети горных выработок криолитозоны // Физ.-техн. пробл. разраб. Полезн. ископ. 2013. Т. 49. № 1. С. 138–145.
15. *Самарский А.А., Моисеенко Б.Д.* Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // ЖВММФ. 1965. Т. 5. № 5. С. 816–827.
16. *Ермаков С.М., Жиглявский А.А.* Математическая теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1987. 320 с.
17. *Желнин М.С., Плехов О.А., Семин М.А. и др.* Численное решение обратной задачи определения объемной теплоемкости породного массива в процессе искусственного замораживания // Вестн. Пермского НИПУ. Механика. 2017. № 4. С. 56–75.
18. *Мишедченко О.А.* История развития способа искусственного замораживания пород // Горный информ.-аналит. бюлл. (научно-технич. ж.). 2010. № 2. С. 226–231.
19. *Гольдман Н.Л.* Обратные задачи Стефана. Теория и методы решения. М.: МГУ, 1999. 294 с.
20. *Słota D.* Direct and inverse one-phase Stefan problem solved by the variational iteration method // Comput. & Math. with Appl. 2007. V. 54. № 7–8. P. 1139–1146.

Determination of Locations of Boreholes for Temperature Measurement under Artificial Ground Freezing

M. A. Semin[a,#], L. Yu. Levin[a], M. S. Zhelnin[b], and O. A. Plekhov[b]

[a] *Mining Institute of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Perm, Russian Federation*

[b] *Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Perm, Russian Federation*

[#]*e-mail: seminma@outlook.com*

The paper is devoted to a study of optimal locations of boreholes for temperature measurement on the basis of a criterion of the most rapid and reliable calibration of a thermophysical model of a rock mass freezing using the temperature measurements. For this purpose, a sensitivity of a solution of the Stefan problem to thermophysical properties variations was investigated. Zones with the highest sensitivity of the solution to variations of the thermal conductivities and the moisture of a rock mass were determined. It was concluded that the temperature measurement boreholes should be placed in the zones. Further a solution of the inverse Stefan problem was obtained in the phase plane of the calibration parameters of the mathematical model. The conclusions about the location of the boreholes received by analysis of the solution sensitivity of the direct Stefan problem were verified. In addition, it was established, that a complex calibration of thermophysical parameters of a rock mass an optimal location of temperature measurement boreholes can significantly differ with the locations determined separately for each parameter.

Keywords: artificial ground freezing, frozen wall, temperature measurement boreholes, boreholes location, inverse Stefan problem, optimization

REFERENCES

1. *Vitel M., Rouabhi A., Tijani M. et al.* Thermo-hydraulic modeling of artificial ground freezing: Application to an underground mine in fractured sandstone // Comput.&Geotechn., 2016, vol. 75, pp. 80–92.
2. *Papakonstantinou S., Anagnostou G., Pimentel E.* Evaluation of ground freezing data from the Naples subway // Proc. Inst. Civil Engineers: Geotechnical Engineering, 2013, vol. 166, no 3, pp. 280–298.
3. *Levin L.Y., Semin M.A., Zaitcev A.V.* Adjustment of thermophysical rock mass properties in modeling frozen wall formation in mine shafts under construction // J. Min. Sci., 2019, vol. 55, no. 1, pp. 157–168.
4. *Dolgov O.A.* A methodology for computing a freezing process during a sinking of mine shafts to great depths using freezing technology // in: Freezing of Rocks during a Sinking of Mine Shafts (Zamorazhivanie gornyh porod pri prohodke stvolov shaht). Moscow: AS USSR, 1961. pp. 9–64. (in Russian)
5. *Alifanov O.M.* Inverse Heat Transfer Problems. Berlin; Heidelberg: Springer, 1994. 348 p.
6. *Russo G. et al.* Artificial ground freezing to excavate a tunnel in sandy soil. Measurements and back analysis // Tunnell.&Undergr. Space Technol., 2015, vol. 50, pp. 226–238.
7. *Trupak N.G.* Freezing of Rocks During a Sinking of Mine Shafts in Underground Construction (Zamorazhivanie gornyh porod pri prohodke stvolov). Moscow: Ugletekhizdat, 1954. 895 p. (in Russian)
8. *Man'kovskij G.I.* Special Methods for Mine Shafts Construction (Special'nye sposoby sooruzhenija stvolov shaht). Moscow: Nedra, 1965. 315 p. (in Russian)
9. *Samarskii A.A., Vabishchevich P.N.* Computational Heat Transfer (Vychislitel'naia teploperedacha). Moscow: Editorial, 2003. 784 p. (in Russian)
10. *Zhelnin M.S., Plekhov O.A., Levin L.Y.* Optimization of the passive regime of artificial freezing of a water-saturated rock mass // J. Engng. Phys.&Thermophys., 2020, vol. 93, no. 3, pp. 685–692.
11. Comsol v.5.4 Documentation. Heat Transfer Module User's Guide. 2018, 784 p.
12. *Levin L.Y., Semin M.A., Zaitsev A.V.* Solution of an inverse Stefan problem in analyzing the freezing of groundwater in a rock mass // J. Engng. Phys.&Thermophys., 2018, vol. 91, no. 3, pp. 611–618.
13. *Yanchenko G.A.* The relationship between the total index moisture in the frozen rocks // Mining Sci.&Technol., 2016, no. 1, pp. 25–32.

14. *Khokholov Y.A., Solov'ev D.E.* Procedure of joint calculation of temperature and ventilation mode in uninterrupted mining in permafrost zone // J. Mining Sci., 2013, vol. 49, no. 1, pp. 138–145.
15. *Samarskii A.A., Moiseenko B.D.* An economic continuous calculation scheme for the Stefan multidimensional problem // USSR Comput. Math.&Math. Phys., 1965, vol. 5, no. 5, pp. 43–58.
16. *Ermakov S.M., Zhigljavskij A.A.* The Mathematical Theory of Optimal Experiment. (Matematicheskaja teorija optimal'nogo jeksperimenta) Moscow: Nauka, 1983. 320 p. (in Russian)
17. *Zhelnin M.S., Plekhov O.A., Semin M.A. et al.* Numerical solution for an inverse problem about determination of volumetric heat capacity of rock mass during artificial freezing // PNRPU Mech. Bull., 2017, no. 4, pp. 56–75.
18. *Mischenko O.A.* History of development of the artificial ground freezing method // Mining Inform.&Analyt. Bull., 2010, no. 2, pp. 226–231.
19. *Gol'dman N.L.* Inverse Stefan Problems. Dordrecht: Springer, 1997.
20. *Słota D.* Direct and inverse one-phase Stefan problem solved by the variational iteration method // Comput. & Math. with Appl., 2007, vol. 54, no. 7–8, pp. 1139–1146.