



Российская Академия Наук

А ВТОМАТИКА И МЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

Я Н В А Р Ь

Москва

2021

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Поляк Б.Т., Попков Ю.С.,
Рутковский В.Ю., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескерев Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М.,
Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф.,
Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П.,
Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,
Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М.,
Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А.,
Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталев М.М., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: (495) 334-87-70

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ООО «Объединённая редакция»

© 2021 г. Б.Т. ПОЛЯК, д-р техн. наук (boris@ipu.ru),
М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru),
П.С. ЩЕРБАКОВ, д-р физ.-мат. наук (savour118@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ЛИНЕЙНЫЕ МАТРИЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ¹

Обзор посвящен применению техники линейных матричных неравенств для учета возможных неопределенностей (в описании системы, во внешних возмущениях, в начальных условиях) при анализе и синтезе управления в линейных системах.

Ключевые слова: системы управления, устойчивость, внешние возмущения, робастность, всплеск, синтез, линейные матричные неравенства, квадратичные функции Ляпунова, инвариантные эллипсоиды, разреженность.

DOI: 10.31857/S0005231021010013

1. Введение

Настоящий обзор посвящен пересечению двух важнейших направлений современной теории управления — учету неопределенности и линейным матричным неравенствам.

Тема неопределенности всегда была ключевой при анализе и синтезе систем управления. Собственно идея обратной связи возникла именно вследствие непредсказуемости изменяющихся условий функционирования объекта и необходимости реакции на них. Первые же регуляторы (типа регулятора Уатта) использовали *принцип обратной связи* для достижения цели в условиях неопределенности. После короткого периода господства *программного управления* для таких задач, как планирование космических полетов (где неопределенность почти отсутствует), дальнейшее развитие теории было связано с новыми подходами к управлению при наличии неопределенности — адаптивным и робастным управлением, такими техниками как H_∞ , ℓ_1 , Model Predictive Control (MPC) и другими. При этом использовались разные модели неопределенности как в описании объекта (частотная, параметрическая, структурированная), так и в видах действующих возмущений (случайные, детерминированные ограниченные в той или иной норме), в информации о

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 19-18-50226.

начальных условиях и т.п. Еще больше разнообразия в моделях неопределенности для нелинейных систем; так, исторически первая *теория абсолютной устойчивости* (восходящая к работе А.И. Лурье и В.Н. Постникова [29] 1944 г.) связана с секторной неопределенностью нелинейной части системы.

В данном обзоре авторы в основном ограничиваются *линейными стационарными* моделями вида

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + Bu + Dw, \quad x(0) \in \mathcal{B},$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ — управление, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ — возмущение. Неопределенность заключается либо в матрицах системы A , B , D , либо во внешних возмущениях w (известен только класс, которому они принадлежат), либо в начальном условии $x(0)$ (например, известен лишь шар \mathcal{B} , которому оно принадлежит). Цель управления заключается либо в достижении стабилизации системы, либо в оптимизации какого-либо критерия оптимальности. При этом само управление ищется главным образом в форме *статической линейной обратной связи по состоянию*

$$(2) \quad u = Kx,$$

где матрица обратной связи K (регулятор) подлежит выбору. Впрочем, иногда будем выходить за рамки моделей (1), (2); так, в разделе 8 рассматриваются нелинейные системы, а наряду с непрерывными моделями (1), (2) нередко будем иметь дело и с дискретными системами.

Техника линейных матричных неравенств (ЛМН) (английская аббревиатура LMI — Linear Matrix Inequalities) получила необычайно широкое распространение после появления монографии С.Бойда с соавторами [84]. Впрочем, корни этой техники можно проследить еще в работах Ляпунова. Действительно, система $\dot{x} = Ax$ является устойчивой тогда и только тогда, когда для нее существует квадратичная функция Ляпунова $V(x) = (Qx, x)$ с положительно-определенной матрицей $Q \succ 0$. Иначе говоря, $\dot{V} = ((A^\top Q + QA)x, x) < 0$, что эквивалентно $A^\top Q + QA \prec 0$ и $Q \succ 0$. Это типичное ЛМН: в нем переменной является матрица Q , а сами неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц. Такого типа неравенства появились еще в работах Р. Беллмана, В.А. Якубовича, Дж. Виллемса, Е.С. Пятницкого, однако по-настоящему рабочим аппаратом в теории управления ЛМН сделали монография [84] и наличие мощных вычислительных средств для их решения, разработанных Ю.Е. Нестеровым и А.С. Немировским [123]. В настоящее время сведение той или иной проблемы к формату ЛМН приравнивается к ее решению. Многочисленные примеры использования ЛМН для задач управления можно найти, в частности, в монографиях [84, 101, 138].

В данном обзоре рассматриваются способы применения ЛМН к основным задачам управления при наличии неопределенности. Ограничиваясь именно этим кругом проблем, обзор не затрагивает иные способы работы с неопределенностью и другие применения ЛМН. Разумеется, даже в пределах выбранной тематики невозможно представить исчерпывающе полный обзор; авторы

приносят извинения читателю за возможный субъективизм и неполноту информации.

Структура статьи следующая. В разделе 2 описываются основные виды ЛМН, применяемая там техника преобразований неравенств, имеющиеся вычислительные средства решения. Раздел 3 посвящен связи задач управления с ЛМН, роли квадратичных функций Ляпунова, проблемам анализа устойчивости и синтеза устойчивых систем, и другим важнейшим понятиям — безотносительно к наличию неопределенности. Начиная со следующего раздела, рассматриваются основные типы неопределенности. В разделе 4 это параметрическая неопределенность в описании системы и проблемы робастной устойчивости и стабилизации. Раздел 5 связан с неопределенностью внешних возмущений. Обсуждаются два основных их класса — ограниченные по норме L_2 или по норме L_∞ ; лишь кратко обсуждается класс случайных возмущений. При этом рассматриваются и задачи анализа, и задачи синтеза. Еще один тип неопределенности, связанный с начальными условиями, исследуется в разделе 6. Оказывается, ненулевые начальные условия могут приводить к важному (и нежелательному) эффекту — большим отклонениям от положения устойчивого равновесия. Исследуется величина подобного эффекта и способы его подавления. Весьма актуальная тематика так называемого разреженного управления рассматривается в разделе 7. Простейшим нелинейным обобщением посвящен раздел 8. Наконец, в заключительном разделе 9 подведены итоги обзора и намечены пути дальнейших обобщений.

Всюду далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора и спектральная норма матрицы, $^\top$ — символ транспонирования, $\mathbb{S}^{n \times n}$ — класс симметричных вещественных матриц размерности $n \times n$, I — единичная матрица соответствующей размерности, а все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

2. Линейные матричные неравенства

В этом разделе введем основные определения, необходимые для дальнейшего изложения, приведем основные свойства линейных матричных неравенств, отметим основные этапы истории возникновения и использования этого аппарата, а также кратко опишем вычислительные процедуры, лежащие в его основе, вместе с наиболее популярными пакетами прикладных программ.

2.1. Основные определения, свойства и технические приемы

Приведем основные определения и простейшие свойства линейных матричных неравенств, а также удобные технические приемы, часто используемые при формулировках разнообразных задач управления. Детальное изложение и обсуждение более тонких эффектов можно найти в ставших классическими книгах [84, 138]; большое количество фактов, относящихся к свойствам линейных матричных неравенств и их приложениям к теории управления, собрано в обзоре [86]. На русском языке по этой тематике опубликованы две монографии [4, 37], в которых также подробно обсуждаются как сами ЛМН, так и их использование в управлении, приведено много примеров.

Рассмотрим следующую линейную матричнозначную функцию векторного аргумента $x \in \mathbb{R}^\ell$:

$$F(x) \doteq F_0 + \sum_{i=1}^{\ell} x_i F_i,$$

где $F_i = F_i^\top \in \mathbb{S}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, \ell$, — известные фиксированные вещественные симметричные матрицы, а x_i , $i = 1, \dots, \ell$, — скалярные переменные.

Соотношение

$$(3) \quad F(x) \prec 0$$

называется *линейным матричным неравенством в канонической форме* относительно переменных x_1, \dots, x_ℓ , а любое x , удовлетворяющее (3), называется решением этого неравенства. Множество $\mathcal{D}_{\text{feas}}$ всех решений называется *допустимой областью* ЛМН $F(x) \prec 0$; очевидно, $\mathcal{D}_{\text{feas}}$ может быть как ограниченным, так и нет, и может быть пустым. Принципиально важным свойством ЛМН является выпуклость допустимой области (это сразу следует из определения), которая позволяет формулировать многие задачи управления в виде задач выпуклого программирования.

Многочисленные элементарные (и не только) свойства ЛМН следуют из выпуклости и знакоопределенности; более подробно они разобраны в упомянутых выше источниках; в частности, внимание в этих работах уделено соотношениям между строгим и нестрогим неравенствами.

Каноническая форма записи сравнительно редко встречается в приложениях; как правило, приходится иметь дело с линейными матричными неравенствами, в которых переменными являются не скаляры, а матрицы. Простейший пример — условие на знакоопределенность матрицы ($Q \succ 0$); более содержательный пример — классическое неравенство Ляпунова вида

$$(4) \quad A^\top Q + QA + R \prec 0, \quad R \succ 0,$$

где переменной является симметричная матрица Q .

ЛМН такого типа естественным образом возникают при формулировании задач управления. Матричную форму (4) легко можно привести к каноническому виду (но не наоборот), используя стандартный базис в пространстве симметричных матриц.

Сформулируем две основные проблемы теории ЛМН, к которым сводится подавляющее большинство задач управления.

Задача *разрешимости (допустимости)* заключается в отыскании некоторой точки $x \in \mathcal{D}_{\text{feas}}$ или в доказательстве того, что такой точки не существует. Типичным примером задачи допустимости является отыскание квадратичной функции Ляпунова для данной устойчивой линейной системы, т.е. решение неравенства (4) относительно матричной переменной $Q \succ 0$.

Вторая ключевая задача ЛМН-теории — оптимизация критерия на множестве, заданном линейными матричными неравенствами. Точнее, задача минимизации линейной функции при ЛМН-ограничениях называется задачей

полуопределенного программирования (Semi-Definite Programming, SDP). Задача полуопределенного программирования является основным форматом, к которому сводятся практически все задачи управления, подавления возмущений, фильтрации и т.д., решаемые с применением техники ЛМН.

Разумеется, в исходном виде все эти задачи формулируются иначе, и для того, чтобы свести их к желаемой форме, имеется несколько технических приемов; приведем два из них, наиболее универсальных и часто применимых.

Первый прием — использование так называемого дополнения по Шуру. Это понятие, хорошо известное из линейной алгебры, играет значительную роль в численном анализе, статистике и матричных вычислениях и относится к представлению блочных матриц.

Рассмотрим блочную матрицу

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^\top & M_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)},$$

где $M_{11} \in \mathbb{S}^{n \times n}$, $M_{12} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, а матрица $M_{22} \in \mathbb{S}^{m \times m}$ обратима. Матрица $M_{12}M_{22}^{-1}M_{12}^\top$ называется дополнением по Шуру к блоку M_{22} в матрице M .

Лемма 1. Имеем

$$M \succ 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad M_{22} \succ 0, \quad M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{12}^\top \succ 0.$$

Различные формулировки этого результата, иногда называемого леммой Шура (строгое или нестрогое неравенство, симметричные формулировки), свойства и применения дополнения по Шуру к решению линейных уравнений и т.п. можно найти в [37, 85] или в книгах по линейной алгебре.

Основное назначение леммы Шура в задачах стабилизации и управления при использовании ЛМН — сведение нелинейных матричных неравенств к линейным, в частности, переход от обратных матриц к прямым, оценивание матричной нормы, а также использование при описании эллипсоидов. Так, например, применяя лемму Шура к алгебраическому матричному (квадратичному) неравенству Риккати

$$A^\top Q + QA - QBS^{-1}B^\top Q + R \succ 0, \quad S \succ 0,$$

относительно матричной переменной $Q \succ 0$ (оно часто встречается в задачах оптимального управления) и разворачивая его с помощью леммы Шура (т.е. применяя теорему 1 в “обратную сторону”), приходим к эквивалентной записи в виде ЛМН

$$\begin{pmatrix} A^\top Q + QA + R & QB \\ B^\top Q & S \end{pmatrix} \succ 0,$$

откуда, в частности, следует, что множество решений неравенства Риккати выпукло.

При использовании ЛМН в задачах управления как правило ищется минимальный в некотором смысле эллипсоид, связанный с системой. Для описания эллипсоида существует много способов, относительные удобства которых

зависят от той или иной задачи (см. [37, 84] и учебники по линейной алгебре). В настоящем обзоре рассматриваются эллипсоиды с центром в нуле, задаваемые в виде

$$(5) \quad \mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x^\top P^{-1} x \leq 1 \right\}, \quad P \succ 0.$$

По ряду причин удобно использовать именно обратную матрицу P^{-1} , а применяя лемму Шура к нелинейному по P неравенству $x^\top P^{-1} x \leq 1$, можно привести его к форме ЛМН:

$$\begin{pmatrix} 1 & x^\top \\ x & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Критерии оптимальности эллипсоида также могут быть различны; среди них объем, размер минимального шара, в котором этот эллипсоид содержится, или сумма квадратов его полуосей. Все критерии “эквивалентны”, для простоты и наглядности будем рассматривать последний из них. Если пользоваться записью (5), то эта величина равна следу матрицы P , т.е. линейной функции от элементов P . Таким образом, оптимизация эллипсоида с матрицей P , которая удовлетворяет ЛМН, специфичным для конкретной проблемы управления, сводится к задаче полуопределенного программирования.

Еще один фундаментальный результат, иногда называемый *S-процедурой*, позволяет формулировать условия, при которых выполнение нескольких квадратичных неравенств влечет выполнение еще одного квадратичного неравенства. Приведем его в следующей формулировке.

Лемма 2. Пусть заданы однородные квадратичные формы

$$f_i(x) = x^\top A_i x, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A_i = A_i^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Если существуют числа $\tau_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, такие, что

$$(6) \quad A_0 \prec \sum_{i=1}^m \tau_i A_i,$$

то неравенства

$$(7) \quad f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

влечут неравенство

$$(8) \quad f_0(x) < 0$$

для всех $x \neq 0$.

Обратно, если из (7) следует (8) и выполняется любое из условий:

а) $m = 1$;

б) $m = 2$, $n \geq 3$ и существует вектор $x^0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что $f_1(x^0) < 0$, $f_2(x^0) < 0$, то найдутся $\tau_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, такие, что выполняются соотношения (6).

Этот результат существенным образом используется при построении квадратичных функций Ляпунова; его простейшей иллюстрацией является установление условий, при которых эллипсоид \mathcal{E}_1 вида (5) с матрицей P_1 содержится в эллипсоиде \mathcal{E}_2 с матрицей P_2 . Из S -теоремы с одним ограничением ($m = 1$) немедленно следует, что $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$ тогда и только тогда, когда $P_1 \preceq P_2$.

S -процедура была обоснована В.А. Якубовичем [63]; обзор ее модификаций, частных случаев и применений дан в [15], а из самых свежих работ следует отметить [47].

2.2. История развития ЛМН

По-существу, идеология матричных неравенств восходит еще к работам А.М. Ляпунова. Впоследствии матричные неравенства в явном виде появлялись в работах В.А. Якубовича [61], Р. Беллмана [75], Дж. Виллемса [152] и Е.С. Пятницкого [18]. Однако первой работой, в которой систематически изложена техника ЛМН, является книга С. Бойда с соавторами [84], после ее появления эта техника стала общепринятой в работах по теории управления и оптимизации. Показателем популярности этой книги является число ссылок на нее — более двадцати тысяч! Первой монографией на русском языке, посвященной этому вопросу, является книга Д.В. Баландина и М.М. Когана [4], а из последних опубликованных книг отметим [37] и [36, ч. 1]. Из самых свежих работ, посвященных линейным матричным неравенствам, их свойствам и применениям в теории управления и устойчивости, необходимо отметить замечательный обзор [86]. Впрочем, вопросам учета неопределенности уделяется немного внимания; кроме того, этот обзор написан в форме справочника.

2.3. Вычислительные средства

Уже отмечалось, что задача полуопределенного программирования является выпуклой. Незадолго до появления книги С. Бойда [84] в работах Ю.Е. Нестерова и А.С. Немировского был предложен чрезвычайно эффективный метод внутренней точки для решения именно таких задач; он стал очень популярным после публикации монографии этих авторов [123]. Комбинация этих двух книг и наличие программных реализаций метода (о которых говорится ниже) привело к лавинообразному росту числа работ, использующих технику ЛМН.

Для решения задач полуопределенного программирования с ограничениями в виде линейных матричных неравенств существует большое разнообразие программного обеспечения. Исторически первым является пакет LMPLab [100], созданный в 1994 г. почти одновременно с выходом в свет упоминавшейся “ключевой” книги по линейным матричным неравенствам [84]; сейчас он является частью пакета Robust Control Toolbox системы МАТЛАВ. Позже появились наиболее популярные в настоящее время “решатели” SeDuMi [143] (Self-Dual Minimization), SDPT3 [147], а также CSDP [83], и другие. Они представляют собой библиотеки программ, реализующих численные процедуры для широкого круга задач оптимизации.

На сегодняшний день наиболее универсальным и мощным решателем является пакет MOSEK [120], который особенно эффективен при решении задач

большой размерности с разреженным представлением данных. Среди прочих достоинств — возможность сопряжения с различными языками программирования, такими как MATLAB, C, Java, Python.

Почти все имеющиеся решатели находятся в свободном доступе, кроме MOSEK, который распространяем на коммерческой основе; впрочем, для научных и образовательных учреждений пакет может поставляться бесплатно.

Перечисленные решатели имеют свои преимущества и недостатки. Так, одна и та же оптимизационная задача может иметь решение в одном из них и не иметь в другом, или же численные решения оказываются несколько отличными. Поэтому при применении пакетов следует уделять внимание выбору соответствующих параметров (таких как задаваемая точность вычислений, максимальное число итераций и др.) и иметь под рукой несколько решателей. Сравнению эффективности различных решателей на тестовых задачах посвящены работы [67, 117, 118].

Среди наиболее популярных и удобных интерфейсов, позволяющих обращаться к решателям в среде MATLAB (в частности, к SeDuMi, SDPT3, MOSEK), являются свободно распространяемые пакеты YALMIP [115] (Yet Another LMI Parser) и cvx [104].

Среди публикаций на русском языке отметим полезную книгу [60], в которой дается описание пакетов SeDuMi и YALMIP.

3. Квадратичные функции Ляпунова, устойчивость и синтез

Прежде чем обратиться к применению аппарата линейных матричных неравенств к системам с неопределенностью, обсудим его прямую связь с квадратичными функциями Ляпунова и анализом устойчивости линейных систем.

Как мы уже отмечали во введении, линейная система

$$(9) \quad \dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

устойчива тогда и только тогда, когда для нее существует квадратичная функция Ляпунова вида

$$(10) \quad V(x) = x^\top Qx$$

с положительно определенной матрицей Q . Отсюда сразу получаем следующий результат.

Теорема 1. Устойчивость системы (9) эквивалентна разрешимости ЛМН

$$(11) \quad A^\top Q + QA \prec 0, \quad Q \succ 0.$$

Первое из неравенств (11) называется *неравенством Ляпунова*. Таким образом, если брать на вооружение квадратичные функции Ляпунова, то использование аппарата ЛМН при анализе устойчивости систем неизбежно и

естественно. Далее, пусть $Q \succ 0$ — какое-то решение системы (11); тогда из свойств функции Ляпунова видим, что эллипсоид

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x^\top Q x \leq 1 \right\}$$

обладает следующим свойством: если $x_0 \in \mathcal{E}$, то и $x(t) \in \mathcal{E}$ для всех $t > 0$, т.е. начавшись в эллипсоиде \mathcal{E} , траектории устойчивой системы не покидают его во все моменты времени. Иногда такой эллипсоид называют удерживающим [84]; далее это свойство будет обобщено на случай наличия внешних возмущений в системе, приводя к так называемым инвариантным эллипсоидам.

Итак, аппарат линейных матричных неравенств тесно связан с рассмотрением квадратичных функций Ляпунова и идеологией эллипсоидального оценивания состояний системы.

Приведем аналогичный результат для линейной дискретной стационарной системы.

Теорема 2. Устойчивость системы

$$x_{k+1} = Ax_k$$

эквивалентна разрешимости ЛМН

$$(12) \quad A^\top Q A - Q \prec 0, \quad Q \succ 0.$$

Первое из неравенств (12) называется *дискретным неравенством Ляпунова*. Практически все результаты, которые приводятся в дальнейшем для непрерывных систем, имеют подобные дискретные аналоги; не будем на них останавливаться.

Обратимся теперь к задаче синтеза и рассмотрим систему

$$(13) \quad \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0,$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, с управляемой парой (A, B) . Замкнув ее линейной обратной связью по состоянию

$$(14) \quad u = Kx,$$

придем к замкнутой системе

$$(15) \quad \dot{x} = A_c x$$

с матрицей $A_c = A + BK$.

Функция (10) является функцией Ляпунова для системы (15) тогда и только тогда, когда

$$A_c^\top Q + Q A_c \prec 0,$$

т.е. когда найдутся матрицы K и $Q \succ 0$ такие, что

$$(16) \quad (A + BK)^\top Q + Q(A + BK) \prec 0.$$

Неравенство (16) нелинейно (и невыпукло!) относительно матричных переменных Q и K . От этого можно избавиться с помощью следующего общего приема.

Домножив неравенство (16) слева и справа на матрицу $P = Q^{-1}$, получим

$$(A + BK)P + P(A + BK)^T \prec 0.$$

Введем вспомогательную матричную переменную $Y = KP$, исключая K . В силу $P \succ 0$, матрица K восстанавливается единственным образом: $K = YP^{-1}$. В результате приходим к матричному неравенству

$$AP + PA^T + BY + Y^T B^T \prec 0,$$

линейному по переменным Y и P . Получаем следующий результат.

Теорема 3. Пусть матрицы \hat{P} и \hat{Y} удовлетворяют ЛМН

$$(17) \quad AP + PA^T + BY + Y^T B^T \prec 0, \quad P \succ 0.$$

Тогда регулятор (14) с матрицей $\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$ стабилизирует систему (13), а квадратичная форма $V(x) = x^T \hat{P}^{-1}x$ является функцией Ляпунова для замкнутой системы.

Видим, что для управляемых систем разрешимость ЛМН (17) эквивалентна возможности стабилизировать систему с помощью обратной связи по состоянию. Более того, теорема предлагает очень простую параметризацию всех стабилизирующих регуляторов через решения этого ЛМН и служит основой синтеза. Описанный выше подход к стабилизации, основанный на поиске квадратичной функции Ляпунова, был рассмотрен А.М. Мейлахсом в [31] в 1975 г., где впервые применен прием с введением вспомогательной переменной Y , который послужил систематической основой для использования ЛМН в задачах стабилизации. На Западе этот трюк стал известен после публикации работы [77] в 1989 г., а неявно он применялся в статье [145] 1981 г.

Такой подход не дает решения в явном виде, а сводит задачу к решению линейных матричных неравенств. Эта техника оказывается особенно эффективной для задач робастной стабилизации, когда требуется стабилизировать систему в условиях неопределенности, а также при наличии внешних возмущений и в разнообразных задачах оптимизации.

Рассмотрим теперь одну из типичных задач оптимального управления — задачу о линейно-квадратичном регуляторе (Linear Quadratic Regulator, LQR), в которой помимо стабилизации системы требуется оптимизировать некоторый показатель ее качества. Эта задача была поставлена и решена в 1960 г. Р.Е. Калманом и А.М. Летовым. Классический подход опирается на решение матричного уравнения Риккати, на основе которого находится матрица коэффициентов регулятора [66]. Однако с некоторых пор для ее решения стал привлекаться аппарат линейных матричных неравенств, например, см. [4, 37, 84] и библиографию, приведенную в этих книгах.

Одна из основных причин использования линейных матричных неравенств в этой задаче — их удобство при решении робастных постановок задачи, когда матрицы системы содержат аффинную неопределенность или известны с

точностью до аддитивного возмущения, ограниченного по норме (на Западе такая тематика известна под названием *guaranteed-cost control*). Первые робастные постановки задачи о линейно-квадратичном регуляторе были предложены в [90, 127]; более свежие результаты содержатся в обзоре [76]. Из самых последних работ в этом направлении отметим [57].

Обсудим возможности аппарата ЛМН при решении задачи о линейно-квадратичном регуляторе без неопределенности в ее простейшей постановке. Рассматривается система (13), в которой пара (A, B) управляема, а начальное состояние x_0 известно.

Цель состоит в нахождении управления u , которое минимизирует следующий квадратичный критерий качества:

$$(18) \quad J = \int_0^{\infty} (x^{\top} R x + u^{\top} S u) dt,$$

где $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $S \in \mathbb{R}^{p \times p}$ — заданные положительно определенные весовые матрицы (так что $J > 0$, за исключением тривиального случая $x_0 = 0$, при котором $J = 0$). В основополагающих работах показано, что оптимальное управление в этой задаче достигается в классе статических линейных обратных связей по состоянию

$$(19) \quad u = Kx, \quad K \in \mathbb{R}^{p \times n},$$

т.е. цель состоит в отыскании оптимальной матрицы K регулятора.

Для того, чтобы функционал J был конечен, необходимо и достаточно, чтобы система (13), замкнутая обратной связью (19), была устойчива. Управляемость пары (A, B) гарантирует существование стабилизирующих обратных связей.

Классический метод решения (например, см. [66]) основан на рассмотрении алгебраического уравнения Риккати

$$(20) \quad A^{\top} Q + Q A - Q B S^{-1} B^{\top} Q + R = 0$$

относительно матрицы $Q \succ 0$. При этом оптимальный регулятор дается выражением

$$(21) \quad K_{\text{ric}} = -S^{-1} B^{\top} Q_{\text{ric}},$$

а минимальное значение функционала (18) равно

$$J_{\text{ric}} = x_0^{\top} Q_{\text{ric}} x_0,$$

где Q_{ric} — положительно определенное решение уравнения (20). Такое решение существует и единственно в предположении об управляемости системы и невырожденности весовых матриц; при этом форма

$$V(x) = x^{\top} Q_{\text{ric}} x$$

является квадратичной функцией Ляпунова для замкнутой системы.

Важно отметить, что от начальных условий зависит лишь значение функционала, но не сам оптимальный регулятор K_{ric} и матрица Q_{ric} .

Применение аппарата ЛМН к решению задачи о линейно-квадратичном регуляторе основано на рассмотрении неравенства Риккати вместо уравнения (20), преобразовании его к линейному виду с помощью леммы Шура и последующей минимизации линейной целевой функции на решениях полученного ЛМН.

Впервые ЛМН-формулировка задачи о линейно-квадратичном регуляторе, по-видимому, была предложена в [153]; за ней последовали многочисленные работы, в которых рассматривался функционал несколько иного вида, предполагалось наличие выхода у системы [84], ограничений на управление [154], использовался динамический регулятор по выходу [6] и пр. Однако предлагаемые регуляторы (в частности, именно такой регулятор предлагался в [40, 84]) оказывались зависимыми от начальных условий, и при их изменении задачу приходилось решать заново. Вероятно, первой работой, в которой с помощью техники ЛМН был построен регулятор, совпадающий с оптимальным (21), является [58]. Приведем этот результат в следующей формулировке.

Теорема 4. Пусть P_{ric} — решение задачи полуопределенного программирования

$$\max \text{tr } P \quad \text{при ограничениях} \quad \begin{pmatrix} AP + PA^\top - BS^{-1}B^\top & P \\ P & -R^{-1} \end{pmatrix} \preceq 0, \quad P \succ 0,$$

где оптимизация проводится по матричной переменной $P = P^\top$.

Тогда

$$Q_{\text{ric}} = P_{\text{ric}}^{-1}, \quad K_{\text{ric}} = -S^{-1}B^\top P_{\text{ric}}^{-1},$$

где Q_{ric} и K_{ric} определены в (20) и (21) через решение уравнения Риккати.

Попытки строить x_0 -независимый линейно-квадратичный регулятор с применением аппарата ЛМН предпринимались и ранее. Так, например, в работе [5] такой регулятор строился исходя из естественных соображений робастности — против наихудших начальных условий из единичного шара. Однако такой регулятор может отличаться от оптимального, полученного в теореме 4 и давать существенно худшие значения функционала для иных начальных условий.

4. Робастная устойчивость и стабилизация

4.1. Виды неопределенности

Переходим к исследованию ситуаций, когда в описании системы (1) присутствует неопределенность. Как уже отмечалось, проблематика неопределенности является центральной в теории управления. Многочисленные монографии [2, 3, 24–26, 28, 59, 73, 74, 81, 88, 95, 102, 112, 137, 139, 142, 150, 155] всегда подчеркивали роль неопределенности и предлагали различные способы борьбы с ней. Опубликовано и много обзоров посвященных этим темам,

из наиболее поздних отметим [128, 130]. Способов задания неопределенности довольно много и они сильно различаются; совсем кратко остановимся на некоторых из них. Сам перечень моделей неопределенности также будет весьма ограниченным по ряду причин. Во-первых, данный обзор посвящен в основном линейным системам, и чрезвычайно богатая тематика нелинейных систем [2, 108, 109] остается вне его рамок. Во-вторых, будем интересоваться в основном теми способами описания неопределенностей, которые позволяют применять аппарат ЛМН. Поэтому в обзоре не уделяется внимание, например, моделям типа неизвестных-но-ограниченных возмущений в измерениях [28, 59, 74, 81, 88, 95, 102, 112] или случайным возмущениям. Далее, нет возможности уделить внимание в обзоре и задачам оценивания, идентификации, фильтрации. Наконец, рассматриваются лишь управления типа статической линейной обратной связи по состоянию (2) и не исследуются другие типы управлений, см. [16, 25, 74].

Еще одна важная модель неопределенности связана с *частотной неопределенностью*: предполагается, что частотная характеристика системы задана с погрешностями, ограниченными в некоторой норме. Вопросы робастной устойчивости и синтеза регуляторов таких систем рассматриваются в многочисленных работах, посвященных H_∞ -теории, см., например, [74, 91, 96, 98, 155].

Поскольку в обзоре рассматриваются задачи, записанные в форме пространства состояний, будем интересоваться *параметрической неопределенностью*. В простейшей ситуации это означает, что в линейной системе без управления и без внешних возмущений

$$(22) \quad \dot{x} = A(\Delta)x$$

матрица системы зависит от параметров Δ . В свою очередь, эта зависимость может быть различной. Рассмотрим несколько частных случаев.

Интервальные полиномы. Пусть система (22) записана во фробениусовой форме, а ее нижняя строка является интервальной (т.е. заданы верхние и нижние границы изменения каждого элемента). Иначе говоря, характеристический полином системы принадлежит интервальному семейству полиномов. Вопрос о робастной устойчивости таких систем решается необычайно просто. Знаменитая теорема Харитоновой утверждает, что робастная устойчивость интервального семейства эквивалентна устойчивости четырех специальных полиномов. Существуют и графические способы проверки робастной устойчивости (годограф Цыпкина–Поляка). Эти подходы связаны с теорией D -разбиения, развитой Ю.И. Неймарком. Об этих результатах можно прочесть в книгах [36, 40]. К сожалению, попытки перенести теорему Харитоновой на другие классы задач (например, на дискретные системы или интервальные матрицы) оказались безуспешными, поэтому для других типов неопределенности нужны другие методы.

Аффинные неопределенности. Пусть матрица $A(\Delta)$ в (22) принадлежит выпуклой оболочке m заданных матриц A_i :

$$(23) \quad A(\Delta) = \sum_{i=1}^m q_i A_i, \quad q_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m q_i = 1.$$

Достаточным условием робастной устойчивости является наличие общей функции Ляпунова для матриц A_i .

Теорема 5. Если система ЛМН

$$A_i^\top Q + QA_i \prec 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

имеет решение $Q \succ 0$, то система (22), (23) робастно устойчива.

Матрица Q определяет общую квадратичную функцию Ляпунова для неопределенной системы. Впервые термин квадратичная устойчивость был введен в [106] применительно к синтезу стабилизирующего регулятора для семейства систем, см. также [71, 72].

Результат теоремы 5 немедленно следует из условий выпуклости; отметим, что этот простой критерий формулируется именно в терминах ЛМН. Замечательно, что это условие справедливо даже в более широком классе *нестационарных* неопределенностей $q_i(t)$. К сожалению, это условие является лишь достаточным: можно построить примеры (даже для $m = 2$) когда аффинное семейство робастно устойчиво, однако общей функции Ляпунова не существует.

Чтобы преодолеть эти трудности, в работах [92, 107, 125] был предложен более гибкий подход, основанный на понятии S -переменной. Он основан на том, что простейшее условие устойчивости (11) эквивалентно условию

$$\begin{pmatrix} 0 & Q \\ Q & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} (I \quad -A) + \begin{pmatrix} I \\ -A^\top \end{pmatrix} (F^\top \quad G^\top) \prec 0,$$

включающему дополнительные матрицы F, G (так называемые S -переменные). На этом пути получается следующий результат.

Теорема 6. Если система ЛМН

$$\begin{pmatrix} 0 & Q_i \\ Q_i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} (I \quad -A_i) + \begin{pmatrix} I \\ -A_i^\top \end{pmatrix} (F^\top \quad G^\top) \prec 0, \quad Q_i \succ 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

относительно матричных переменных F, G и Q_i имеет решение, то система (22), (23) робастно устойчива.

В этом случае оказывается, что матрица

$$Q = \sum_{i=1}^m q_i Q_i$$

определяет зависящую от параметров функцию Ляпунова $V(x) = x^\top Qx$. Это менее жесткое требование, чем существование одной функции Ляпунова для всего семейства. Правда, такой подход не годится для анализа нестационарных неопределенностей. Примеры показывают, что проверка робастной устойчивости на основе этого результата дает заметно лучшие оценки допустимой неопределенности, чем с помощью предыдущей теоремы об общей функции Ляпунова.

Аналогичные результаты для дискретных систем были получены в [124]. Тематика параметрических функций Ляпунова продолжалась и в ряде других работ, например [97, 99, 135].

Структурированная неопределенность. Наиболее типичный класс неопределенностей имеет вид

$$A(\Delta) = A + F\Delta H, \quad \|\Delta\| \leq 1,$$

где матрицы A, F, H заданы, а неопределенность Δ ограничена в операторной матричной норме. Размерности Δ, F, H могут быть различны, требуется лишь, чтобы выражение $F\Delta H$ имело смысл. Именно этим классом неопределенностей займемся дальше в этом разделе.

4.2. Лемма Питерсена

Основным техническим средством работы со структурированными неопределенностями служит так называемая лемма Питерсена [126] (и ее модификации [55]), эффективно применяемая в разнообразных робастных постановках задач стабилизации и управления. В частности, эта лемма является удобным инструментом анализа робастной квадратичной устойчивости систем со структурированной неопределенностью, позволяя отыскивать общую квадратичную функцию Ляпунова.

Пусть $G \in \mathbb{S}^{n \times n}$ — заданная матрица; рассмотрим ее возмущение вида

$$(24) \quad G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top,$$

где $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$ — возмущающая матрица, а $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$ и $N \in \mathbb{R}^{q \times n}$ — постоянные “обрамляющие” матрицы соответствующих размерностей, задающие структуру неопределенности. Подчеркнем, что в этой схеме симметричное возмущение задается с помощью матрицы Δ , которая не обязана быть симметричной и даже квадратной.

Такая симметризованная схема неопределенности естественным образом возникает в задачах, связанных с построением квадратичной функции Ляпунова для динамической системы, матрица которой содержит произвольную, но ограниченную по норме матричную неопределенность Δ . Именно этим фактом прежде всего объясняется многообразие приложений, в которых встречается модель (24).

Лемма Питерсена отвечает на вопрос о том, при каких условиях возмущенная матрица (24) является знакоопределенной при всех ограниченных по норме возмущениях Δ .

Лемма 3. Пусть $G = G^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, а $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$ и $N \in \mathbb{R}^{q \times n}$ — ненулевые матрицы. Неравенство

$$G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top \preccurlyeq 0$$

справедливо для всех $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$: $\|\Delta\| \leq 1$ тогда и только тогда, когда существует число ε такое, что

$$\begin{pmatrix} G + \varepsilon MM^\top & N^\top \\ N & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Обратим внимание на то, что матричная неопределенность Δ не предполагается фиксированной; единственное требование — ее ограниченность по норме. Таким образом, полученный результат, справедлив в том числе и для нестационарной неопределенности $\|\Delta(t)\| \leq 1$.

Итак, лемма Питерсена сводит проверку знакоопределенности семейства (24) к задаче разрешимости линейного матричного неравенства относительно одной скалярной переменной ε . Такая форма будет неоднократно использоваться в дальнейшем, значительно упрощая вычисления.

Лемма Питерсена решает задачу анализа, предоставляя необходимое и достаточное условие робастной знакоопределенности семейства (24) при фиксированном уровне возмущения Δ . Естественным обобщением этого результата является отыскание максимально допустимого уровня, сохраняющего знакоопределенность семейства

$$(25) \quad G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top, \quad \|\Delta\| \leq \gamma.$$

Предполагая далее, что $G \prec 0$, введем в рассмотрение *радиус знакоопределенности (робастности)* семейства (25):

$$\gamma_{\max} = \sup \left\{ \gamma: G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top \prec 0 \text{ для всех } \|\Delta\| \leq \gamma \right\}.$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 7. Пусть $\hat{\gamma}$ — решение задачи полуопределенного программирования

$$\max \gamma \quad \text{при ограничении} \quad \begin{pmatrix} G + \varepsilon M M^\top & \gamma N^\top \\ \gamma N & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preceq 0$$

относительно скалярных переменных ε и γ .

Тогда радиус знакоопределенности семейства (25) равен $\hat{\gamma}$.

Таким образом, нахождение радиуса знакоопределенности сводится к простой задаче полуопределенного программирования.

4.3. Робастная квадратичная устойчивость и стабилизация

В общей ситуации непосредственная проверка робастной устойчивости заданного семейства систем весьма сложна [37, 40]; трудной является и задача отыскания величины радиуса робастной устойчивости, более того, в общем случае отсутствуют регулярные способы ее решения. Поэтому часто используется подход, основанный на достаточных условиях робастной устойчивости — он состоит в построении общей квадратичной функции Ляпунова для неопределенных семейств, и потому называется робастной квадратичной устойчивостью; см., подробнее, монографии [37, 84] и ссылки в них.

Рассмотрим матричное семейство со структурированной неопределенностью вида

$$(26) \quad A(\Delta) = A + F\Delta H,$$

где номинальная матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ устойчива, $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $H \in \mathbb{R}^{q \times n}$, а возмущение $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$ (возможно, зависящее от времени) ограничено по норме:

$$\|\Delta\| \leq \gamma.$$

Встав на позиции квадратичной устойчивости, легко видеть, что построение общей функции Ляпунова в этом случае сводится к решению линейных матричных неравенств, значительно упрощая вычисления. Рассмотрим сперва задачу проверки квадратичной устойчивости при $\|\Delta\| \leq 1$.

Действительно, выполнение неравенства Ляпунова

$$(A + F\Delta H)P + P(A + F\Delta H)^\top < 0,$$

т.е.

$$AP + PA^\top + F\Delta HP + PH^\top \Delta^\top F^\top < 0$$

с некоторой матрицей $P \succ 0$ при всех допустимых неопределенностях означает, что у семейства (26) есть общая квадратичная функция Ляпунова $V(x) = x^\top P^{-1}x$. Теперь остается воспользоваться леммой Питерсена при

$$G = AP + PA^\top, \quad M = F, \quad N = HP,$$

и записать последнее матричное неравенство в виде эквивалентного ему ЛМН относительно скалярной переменной ε и матричной переменной $P \succ 0$:

$$(27) \quad \begin{pmatrix} AP + PA^\top + \varepsilon FF^\top & PH^\top \\ HP & -\varepsilon I \end{pmatrix} < 0.$$

Если это ЛМН разрешимо, семейство (26) робастно квадратично устойчиво, и наоборот. С учетом однородности неравенства (27) по P и ε приходим к следующему результату.

Теорема 8. Разрешимость линейных матричных неравенств

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + FF^\top & PH^\top \\ HP & -I \end{pmatrix} < 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричной переменной $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ эквивалентно квадратичной устойчивости семейства (26) при всех $\|\Delta\| \leq 1$, причем решение \hat{P} определяет общую квадратичную функцию Ляпунова.

Теперь нетрудно вычислить радиус квадратичной устойчивости семейства (26):

$$\gamma_{\max} = \sup \left\{ \gamma : (A + F\Delta H)P + P(A + F\Delta H)^\top < 0 \right. \\ \left. \text{при некотором } P \succ 0 \text{ и всех } \|\Delta\| \leq \gamma \right\},$$

то есть максимальный размах γ_{\max} неопределенности Δ , такой, что при всех $\gamma < \gamma_{\max}$ у семейства имеется общая квадратичная функция Ляпунова.

Теорема 9. Пусть $\hat{\gamma}$ — решение задачи полуопределенного программирования

$$\max \gamma \quad \text{при ограничениях} \quad \begin{pmatrix} AP + PA^\top + \gamma FF^\top & PH^\top \\ HP & -I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и скалярной переменной γ . Тогда радиус квадратичной устойчивости семейства (26) равен $\sqrt{\hat{\gamma}}$.

Вопрос о радиусе квадратичной устойчивости для дискретной системы решается аналогично непрерывному случаю.

Перейдем к вопросам робастной стабилизации и рассмотрим семейство

$$(28) \quad \dot{x} = (A + F\Delta H)x + Bu,$$

со структурированной матричной неопределенностью, где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $H \in \mathbb{R}^{q \times n}$, пара (A, B) управляема, а матричная неопределенность $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$ удовлетворяет ограничению $\|\Delta\| \leq 1$. Цель прежняя — стабилизировать систему (28) с помощью линейной обратной связи по состоянию

$$(29) \quad u = Kx$$

при всех допустимых неопределенностях.

Ответ дается следующим утверждением, предоставляющим необходимые и достаточные условия робастной квадратичной стабилизируемости неопределенной системы.

Теорема 10. Пусть матрицы \hat{P} и \hat{Y} удовлетворяют линейным матричным неравенствам

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + FF^\top & PH^\top \\ HP & -I \end{pmatrix} \prec 0, \quad P \succ 0.$$

Тогда регулятор (29) с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$$

робастно стабилизирует систему (28) при всех неопределенностях $\|\Delta\| \leq 1$, а квадратичная форма

$$V(x) = x^\top \hat{P}^{-1}x$$

является общей функцией Ляпунова для замкнутой системы (при всех неопределенностях $\|\Delta\| \leq 1$).

Как увидим далее, идеи и технические средства, использующиеся при построении робастно квадратично стабилизирующих регуляторов, существенным образом применяются при решении задач управления с внешними возмущениями.

5. Внешние возмущения

Задача о подавлении внешних возмущений является одной из основных в теории управления и рассматривается в различных ее разделах. В линейно-квадратичной оптимизации рассматриваются задачи со случайными гауссовскими помехами (так называемая линейно-квадратичная гауссовская задача, LQG). Проблема H_∞ -оптимизации связана либо с гармоническими внешними возмущениями, либо со случайными гауссовскими, либо с возмущениями из класса L_2 (т.е., по-существу, убывающими с течением времени). Однако во многих практических случаях внешние возмущения являются просто ограниченными; какая-либо дополнительная информация о них отсутствует.

5.1. Анализ

Рассмотрим одну из простейших постановок задач для линейной стационарной динамической системы в непрерывном времени

$$(30) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Dw, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ — выход системы, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, принадлежащее тому или иному классу (такие возмущения будем далее называть допустимыми).

Требования, предъявляемые ко внешнему возмущению, можно понимать и определять по-разному; будем интересоваться тремя основными случаями:

- а) случайные внешние возмущения;
- б) L_2 -ограниченные внешние возмущения;
- в) L_∞ -ограниченные внешние возмущения.

На системах со случайными возмущениями остановимся совсем кратко. Во многих задачах на систему действуют случайные внешние возмущения, и естественно интересоваться ее реакцией на такие возмущения. Разумеется, эта реакция тоже будет случайной, поэтому важны некоторые средние характеристики отклонений. Изучение таких характеристик для непрерывных систем требует математического аппарата (теории случайных процессов), отличающегося от обсуждаемого в настоящей работе, поэтому ограничимся наиболее простым случаем дискретных систем

$$x_{k+1} = Ax_k + Dw_k, \quad x_0 = 0,$$

и будем предполагать w_k случайным вектором со следующими свойствами:

- 1) средние значения помех равны нулю: $\mathbf{E} w_k = 0$ (напомним, что знак \mathbf{E} означает математическое ожидание);
- 2) матрица ковариаций помех задана: $\mathbf{E} w_k w_k^\top = \Sigma \succ 0$;
- 3) помехи не коррелированы во времени: $\mathbf{E} w_k w_l^\top = 0$, $k \neq l$.

Обозначим среднее значение вектора состояний $\mathbf{E} x_k = h_k$, а его матрицу вторых моментов $\mathbf{E} x_k x_k^\top = W_k$.

Имеет место следующий результат.

Теорема 11. При сделанных выше предположениях

$$h_k = 0, \quad W_{k+1} = AW_kA^\top + D\Sigma D^\top, \quad W_0 = 0.$$

Если матрица A шуровская, то существует

$$W = \lim_{k \rightarrow \infty} W_k,$$

и эта предельная матрица ковариаций удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$AWA^\top - W = -D\Sigma D^\top.$$

Оказывается, средние характеристики траекторий при случайных возмущениях качественно близки к гарантирующим характеристикам систем с L_2 -ограниченными возмущениями (см. ниже раздел 5.1.1).

Перейдем к системам с L_2 - и L_∞ -ограниченными внешними возмущениями. Для дальнейшего изложения понадобится ввести в рассмотрение понятие инвариантного эллипсоида.

Определение 1. Эллипсоид с центром в начале координат

$$(31) \quad \mathcal{E}_x = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x^\top P^{-1}x \leq 1 \right\}, \quad P \succ 0,$$

называется инвариантным (по состоянию) для динамической системы (30), если из условия $x(0) \in \mathcal{E}_x$ следует $x(t) \in \mathcal{E}_x$ для всех моментов времени $t \geq 0$.

Иными словами, любая траектория системы, исходящая из точки, лежащей в эллипсоиде \mathcal{E}_x , при всех допустимых внешних возмущениях, действующих на систему, в любой момент времени будет находиться в этом эллипсоиде.

Инвариантный эллипсоид обладает следующим свойством:

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathcal{E}_x \quad \text{при} \quad x(0) \notin \mathcal{E}_x$$

(при этом, возможно, $x(t) \in \mathcal{E}_x$ при $t \geq T$ для некоторого $T > 0$), т.е. траектория системы, исходящая из точки вне эллипсоида \mathcal{E}_x , стремится к эллипсоиду \mathcal{E}_x с течением времени. Таким образом, инвариантный эллипсоид является также и притягивающим.

Соответственно, если начальное состояние системы принадлежит инвариантному эллипсоиду, имеем равномерную оценку поведения траекторий системы — в любой момент времени траектории принадлежат этому эллипсоиду при любых допустимых внешних возмущениях; если начальные условия произвольны, имеем асимптотическую оценку поведения траекторий системы — траектории будут стремиться к этому эллипсоиду с течением времени при любых допустимых внешних возмущениях.

Важно отметить, что с инвариантным эллипсоидом (31) ассоциирована квадратичная форма

$$V(x) = x^\top P^{-1}x,$$

которая будет служить квадратичной функцией Ляпунова для системы (30) вне соответствующего инвариантного эллипсоида.

Инвариантные эллипсоиды можно рассматривать как внешние аппроксимации множества достижимости

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x(t), t \geq 0, \text{ — решение (30) при } x(0) = 0\},$$

являющегося в общем случае некоторым замкнутым ограниченным выпуклым множеством и при этом — наименьшим (по включению) инвариантным множеством. Понятие инвариантного эллипсоида является более полезным и робастным по сравнению с множеством достижимости: в последнем предполагается, что начальные условия нулевые, однако малое отклонение в начальном условии может привести к тому, что траектория выйдет за пределы достижимого множества.

Именно достижимые множества дают наиболее полное описание динамической системы, однако они весьма сложны для изучения. Среди различных подходов к их исследованию отметим следующий. Поскольку достижимое множество представляет собой множество точек фазового пространства, в которые может перейти динамическая система из начала координат при некоторых допустимых возмущениях, то можно возмущения w рассматривать в качестве управлений. При этом приходим к задаче классического оптимального управления о попадании в начало координат. Структура достижимых множеств рассматривалась в ряде работ начиная с середины прошлого столетия. Наиболее полные результаты приведены в монографии А.М. Формальского [48], где исследованы не только ограничения (35), но и многие другие (например, возмущения, ограниченные в L_1 - и L_2 -нормах, а также их комбинации). Различные факты о строении достижимых множеств получены в книге А.Б. Куржанского [28].

Инвариантные эллипсоиды можно рассматривать как характеристику влияния внешних возмущений на траектории динамической системы. А именно, в рамках задачи анализа проблема состоит в оценке степени влияния внешних возмущений на вектор выхода системы. В этой связи естественно интересоваться минимальными в некотором смысле эллипсоидами, содержащими выход системы.

Нетрудно видеть, что если \mathcal{E}_x — инвариантный эллипсоид (31) с матрицей P , то выход системы (30) при $x_0 \in \mathcal{E}_x$ принадлежит эллипсоиду

$$(32) \quad \mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}^l : z^\top (CPC^\top)^{-1} z \leq 1\}.$$

В частности, в случае одномерного выхода ($l = 1$) этот эллипсоид является полосой $\mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R} : |z| \leq \sqrt{CPC^\top}\}$, в которой будет находиться выход z системы.

Эллипсоид (32) будем называть *ограничивающим (по выходу)*. Как отмечалось выше, его минимальность можно понимать в разных смыслах; здесь рассматривается линейная функция $f(P) = \text{tr } CPC^\top$, которая соответствует сумме квадратов его полуосей.

Выбор линейного (или линеаризуемого) критерия минимальности эллипсоида позволяет свести проблему к стандартной задаче полуопределенного

программирования и тем самым существенно упростить результаты. Заметим, что в случае одномерного выхода все эти критерии совпадают.

5.1.1. L_2 -ограниченные внешние возмущения. Рассмотрим систему (30) с возмущениями, ограниченными в L_2 -норме:

$$(33) \quad \|w\|_2^2 = \int_0^{\infty} w^\top(t)w(t)dt \leq 1.$$

Будем полагать, что система устойчива (матрица A гурвицева), а C — матрица полного ранга.

Условие $x(0) = 0$ не является ограничительным, поскольку при $x(0) \neq 0$ решение системы представимо в виде $x(t) = e^{At}x(0) + x_0(t)$, где $x_0(t)$ — решение при нулевых начальных условиях.

Множество

$$R(T) = \{x(T) : x(t) \text{ — решение (30) при некотором } w : \|w\|_2 \leq 1\}$$

называется *множеством достижимости в момент $T \geq 0$* , а их объединение

$$R = \bigcup_{T \geq 0} R(T)$$

для всех $T \geq 0$ — просто *множеством достижимости*.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 12. *Если пара (A, D) управляема, то множество $R(T)$ является эллипсоидом*

$$R(T) = \left\{ x : x^\top W_c^{-1}(T)x \leq 1 \right\},$$

с матрицей

$$W_c(T) = \int_0^T e^{A\tau} D D^\top e^{A^\top \tau} d\tau \succ 0.$$

Если матрица A устойчива (гурвицева), то множество R представляет собой эллипсоид

$$R = \left\{ x : x^\top W^{-1}x \leq 1 \right\},$$

где $W = \int_0^{\infty} e^{A\tau} D D^\top e^{A^\top \tau} d\tau \succ 0$ — *грамиан управляемости*, т.е. решение уравнения *Ляпунова*

$$AW + WA^\top = -DD^\top.$$

Таким образом, множество достижимости для устойчивых систем с L_2 -ограниченным внешним возмущением имеет очень простой вид — оно является эллипсоидом. Очевидно, что если ввести в рассмотрение выходную величину

$$z = Cx,$$

то соответствующее множество выходов также является эллипсоидом

$$(34) \quad \left\{ z: z^T (CWC^T)^{-1} z \leq 1 \right\}$$

с матрицей $CWC^T \succ 0$, поскольку C — матрица полного ранга. В частности, для системы со скалярным выходом $z = c^T x$ этот эллипсоид схлопывается в отрезок:

$$|z| \leq \sqrt{c^T W c}.$$

Естественно искать такое управление, которое обеспечивает минимум выхода при всех допустимых возмущениях того или иного типа. В частности, для систем с L_2 -ограниченными возмущениями, критерием оптимальности при выборе обратной связи может служить размер эллипсоида (34).

Аналогичные результаты верны и для дискретных систем.

5.1.2. L_∞ -ограниченные внешние возмущения. Впервые задача об оптимальном подавлении неслучайных ограниченных возмущений была сформулирована в работе Е.Д. Якубович, а ее полное решение было построено в работах А.Е. Барабанова и О.Н. Граничина и позже — М. Далеха и Дж. Пирсона. Впоследствии эта теория получила название l_1 -оптимизации. Однако методы l_1 -оптимизации имеют ряд существенных недостатков: ее применение к задаче синтеза оптимального управления часто приводит к регуляторам очень высокого порядка; отметим и асимптотический характер получающихся оценок.

Существует иной подход к данной проблематике, основанный на методе инвариантных множеств. Инвариантные множества довольно широко используются в различных задачах гарантированного оценивания, фильтрации и минимаксного управления в динамических системах при наличии неопределенностей в измерениях. Принципиальными в этом направлении можно считать работы Ф. Швепше [139], Д. Бертсекаса [78, 79], А.Б. Куржанского [28] и Ф.Л. Черноусько [59], см. также [27]. Инвариантные множества во многих случаях оказываются удобными аппроксимациями областей достижимости динамических систем; это позволяет их широко использовать в задачах анализа. Концепция инвариантности также активно применяется и в других разделах теории систем и автоматического управления (см. обзорную статью Ф. Бланкини [80] и монографию Ф. Бланкини и С. Миани [81]). Среди различных форм инвариантных множеств особо выделяют эллипсоиды из-за их простой структуры и прямой связи с квадратичными функциями Ляпунова. Ввиду этого, в рамках эллипсоидального описания, в качестве технического средства может быть использован аппарат линейных матричных неравенств и полуопределенного программирования.

Вопросам использования ЛМН-техники в целях подавления возмущений посвящены работы [4, 37, 64, 82, 84], см. также библиографию в [37]. В западной литературе этот круг вопросов называется *peak-to-peak gain minimization*. Это означает, что целью является уменьшение максимального (*пикового*) значения выхода при ограниченных максимальных значениях возмущений (речь идет о системах с одним входом – одним выходом; эллипсоидальная техника обобщает этот подход на многомерный случай).

Систематическое использование техники ЛМН позволяет переформулировать проблему подавления ограниченных внешних возмущений в терминах инвариантных эллипсоидов. Применение этой концепции позволяет свести синтез оптимального регулятора к поиску наименьшего инвариантного эллипсоида замкнутой динамической системы. Такой подход приводит к простым оптимальным регуляторам; он имеет большой потенциал и возможности для обобщений, в равной мере распространим как на непрерывный, так и на дискретный варианты задачи. Систематическое изложение результатов об управлении в линейных системах с неопределенностью при внешних возмущениях можно найти в [37].

ЛМН-подход к подавлению L_∞ -ограниченных внешних возмущений не свободен и от недостатков: ему присущ определенный консерватизм, обусловленный тем, что достижимые множества не являются эллипсоидами.

Итак, вновь рассмотрим систему (30) с измеримым по t внешним возмущением, ограниченным в каждый момент времени:

$$(35) \quad \|w(t)\| \leq 1 \quad \text{для всех } t \geq 0.$$

Отметим, что никаких других ограничений на возмущение $w(t)$ не накладывается; так, оно не предполагается ни случайным, ни гармоническим. Будем полагать, что система (30) устойчива (т. е. матрица A гурвицева), пара (A, D) управляема, C — матрица полного ранга.

Разумеется, если матрица A устойчива, то все решения системы (30) при допустимых возмущениях $w(t)$ ограничены:

$$\limsup_{t \geq 0} \|x(t)\| \leq r.$$

Наименьшее такое число r в западной литературе называют “*peak-to-peak gain*” — коэффициент усиления от возмущений (ограниченных единицей) к норме состояния системы (см. [93]). Можно, однако, интересоваться более точным описанием системы с помощью инвариантных эллипсоидов. Для рассматриваемого — простейшего — случая в [64, 84] была установлена справедливость следующей теоремы.

Теорема 13. Эллипсоид (31) является инвариантным по состоянию для динамической системы (30), (35) тогда и только тогда, когда его матрица $P \succ 0$ удовлетворяет ЛМН

$$(36) \quad AP + PA^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^\top \preceq 0$$

при некотором $\alpha > 0$.

Как отмечалось выше, степень влияния L_∞ -ограниченных внешних возмущений w на выход z системы сводится к нахождению ограничивающего эллипсоида (32), минимального по тому или иному критерию. В частности, для скалярного выхода оценивается максимальное по модулю значение z .

5.2. Синтез

При синтезе управления обычно желательно обеспечивать малость выхода при всех допустимых возмущениях из данного класса. В частности, для систем с L_2 - или L_∞ -ограниченными возмущениями в качестве критерия оптимальности при выборе обратной связи нередко принимается размер инвариантного эллипсоида.

Будем рассматривать систему управления

$$(37) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 u + Dw, & x(0) &= 0, \\ z &= Cx + B_2 u, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l \times p}$, с вектором состояния $x(t) \in \mathbb{R}^n$, вектором выходных переменных выходом $z(t) \in \mathbb{R}^l$, вектором управления $u(t) \in \mathbb{R}^p$ и вектором внешних возмущений $w(t) \in \mathbb{R}^m$, ограниченными в L_2 - или L_∞ -норме.

Однако прежде, чем переходить к L_2 - и L_∞ -ограниченным возмущениям, кратко обсудим подходы к решению задачи синтеза при случайных внешних возмущениях, а именно, рассмотрим задачу о выборе регулятора, в максимальной степени подавляющего случайные помехи. Вновь ограничившись дискретным случаем, рассмотрим систему

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Dw_k, \quad x_0 = 0,$$

со случайными возмущениями w_k , удовлетворяющими прежним предположениям о несмещенности, ограниченности ковариаций и некорррелированности. Целью является выбор регулятора в форме линейной обратной связи по состоянию

$$u_k = Kx_k,$$

которая делает систему устойчивой и при этом минимизирует средний разброс траекторий на бесконечности, т.е. минимизирует след предельной матрицы ковариаций W . Поскольку матрица замкнутой системы имеет вид $A + BK$, получаем для W уравнение

$$(A + BK)W(A + BK)^\top - W = -D\Sigma D^\top,$$

которое после стандартной замены $Y = KW$ переходит в линейное матричное неравенство относительно матриц W , Y :

$$AWA^\top + BYA^\top + AY^\top B^\top - W = -D\Sigma D^\top, \quad W \succ 0.$$

Минимизируя какую-либо заданную характеристику матрицы W (например, $\text{tr } W$ или CWC^\top при наличии скалярного выхода $y = Cx$) при этих ограничениях, можно найти решение \widehat{W}, \widehat{Y} , а по нему — оптимальный регулятор

$$K = \widehat{Y}\widehat{W}^{-1}.$$

Как будет видно далее, случайность помех не вносит принципиальной разницы в решение задачи о синтезе регулятора, когда целью является минимизация отклонений от равновесия в среднем.

5.2.1. L_2 -ограниченные внешние возмущения. Как известно, для возмущений, ограниченных в L_2 -норме, естественной мерой их влияния является H_∞ -норма выхода. Обратимся к системе (37) с внешними возмущениями, удовлетворяющими условию (33): в простейшей постановке задача H_∞ -оптимизации заключается в выборе регулятора в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$(38) \quad u = Kx,$$

который минимизирует H_∞ -норму передаточной функции $H(s)$ замкнутой системы.

Введем в рассмотрение функционал

$$(39) \quad J = \sup_{\|w\|_2 \leq 1} \int_0^\infty z^\top z \, dt = \sup_{\|w\|_2 \leq 1} \|z\|_2^2$$

и будем искать его минимум по всем стабилизирующим регуляторам вида (38); решение этой задачи и дает H_∞ -оптимальный регулятор. Обратим внимание, что в (37) управление включено в уравнение для выхода для того, чтобы ограничить величину используемого управления. ЛМН-подход к решению этой задачи опирается на описание достижимого множества и сводит исходную задачу к полуопределенному программированию.

Продельвая стандартные преобразования, делая описанные выше замены переменных и используя лемму Шура (подробности можно найти в [37]), приходим к следующему результату.

Теорема 14. Пусть $\widehat{P}, \widehat{Y}, \widehat{\gamma}$ — решение задачи

$$\min \gamma \quad \text{при} \quad \begin{pmatrix} AP + PA^\top + B_1 Y + Y^\top B_1^\top & D & PC^\top & Y^\top B_2^\top \\ D^\top & -\gamma I & 0 & 0 \\ CP & 0 & -I & 0 \\ B_2 Y & 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричных переменных $P = P^\top$, Y и скалярной переменной γ .

Тогда стабилизирующий регулятор с матрицей $\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$ минимизирует функционал (39) на решениях системы (37):

$$J_{\min} = \hat{\gamma},$$

а квадратичная форма $V(x) = x^T \hat{P}^{-1} x$ является функцией Ляпунова для замкнутой системы.

Выше предполагалось, что состояние системы известно, однако аналогичная техника применима и для задачи управления по выходу; кроме того, возможен и ряд других, более общих постановок задачи, а также ее дискретные аналоги. Дальнейшее развитие этой линии исследований можно найти в работах Д.В. Баландина и М.М. Когана и их учеников, см., например, [8, 10, 12, 23, 68, 70]. В частности, в рамках этого подхода возможен учет неопределенности в начальном условии; иногда неопределенность в начальном условии и внешнем возмущении объединяется в одно ограничение вида $\|x_0\|^2 + \|w\|^2 \leq \gamma$, где $\|\cdot\|$ — некоторые нормы.

Проблематика построения оптимальных регуляторов по отношению к обобщенной H_2 -норме, которые обеспечивают минимум максимального по времени значения евклидовой нормы выхода при внешнем возмущении из класса L_2 , освещена в публикациях [11, 69], см. также ссылки в них.

5.2.2. L_∞ -ограниченные внешние возмущения. В рамках рассматриваемого подхода эффективно решается задача синтеза обратной связи для систем, подверженных воздействию произвольных ограниченный внешних возмущений; см. [32, 131]. Для компенсации влияния таких возмущений на выход системы строится регулятор в виде статической линейной обратной связи по состоянию. Искомый оптимальный регулятор, минимизирующий влияние возмущений, задается наименьшим ограничивающим эллипсоидом по выходу для замкнутой системы.

Итак, целью является нахождение регулятора K в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$(40) \quad u = Kx,$$

который стабилизирует замкнутую систему (37) при внешних возмущениях, удовлетворяющих условиям (35), и оптимально (например, в смысле минимальности следа ограничивающего эллипсоида для выхода системы) подавляет воздействие внешних возмущений. Заметим, что наличие ненулевой компоненты $B_2 u$ в выходе системы (37) позволяет при минимизации выхода избежать появления больших значений управления.¹

В следующей теореме поиск оптимального регулятора сводится к задаче полуопределенного программирования и одномерной минимизации.

Теорема 15. Пусть \hat{P} , \hat{Y} , \hat{Z} — решение задачи

$$\min \operatorname{tr} \left[CPC^T + CY^T B_2^T + B_2 Y C^T + B_2 Z B_2^T \right]$$

¹ Как известно, если управление и возмущение приложены “в одной точке”, т. е. матрицы B_1 и D совпадают, то за счет огромного управления выход системы можно сделать сколь угодно малым.

при ограничениях

$$AP + PA^\top + B_1 Y + Y^\top B_1^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^\top \preceq 0,$$

$$\begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^\top & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричных переменных $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$ и скалярного параметра $\alpha > 0$.

Тогда регулятор (40) с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$$

стабилизирует систему (37), (35) и оптимально подавляет внешние возмущения, при этом матрица минимального (по критерию следа) ограничивающего эллипсоида для выхода z замкнутой системы с $x_0 = 0$ дается выражением

$$C \hat{P} C^\top + C \hat{Y}^\top B_2^\top + B_2 \hat{Y} C^\top + B_2 \hat{Z} B_2^\top.$$

Обсуждаемая ЛМН-техника может быть распространена на задачу синтеза статической обратной связи по выходу [34], использующую оценку состояния, получаемую с помощью наблюдателя Люенбергера, на задачу построения линейного динамического регулятора по выходу [9, 50], а также на задачу фильтрации [33] для случая, когда все параметры модели не зависят от времени; в этом случае ищется оценка состояния, такая, что ее ошибка гарантированно заключена в единый эллипсоид для всех моментов времени, т.е. оценка является равномерной. В классе линейных стационарных фильтров и равномерных оценок проблема оказывается полностью разрешимой, т.е. построен оптимальный фильтр и получена оптимальная оценка состояния.

5.3. Робастное подавление L_∞ -ограниченных внешних возмущений

Вышеприведенные результаты оказываются распространяемыми на случай робастного подавления внешних возмущений, когда в матрицах системы содержится структурированная матричная неопределенность. Ограничимся случаем L_∞ -ограниченных возмущений и задачей анализа.

В простейшем случае рассматривается система

$$(41) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= (A + \Delta A)x + (D + \Delta D)w, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, с состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, выходом $z(t) \in \mathbb{R}^l$ и внешним возмущением $w(t) \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющим ограничению (35). При этом системные неопределенности ΔA и ΔD имеют структуру

$$(42) \quad \Delta A = F_A \Delta_A H_A, \quad \Delta D = F_D \Delta_D H_D,$$

где матричные неопределенности $\Delta_A \in \mathbb{R}^{p_A \times q_A}$ и $\Delta_D \in \mathbb{R}^{p_D \times q_D}$ удовлетворяют ограничениям

$$(43) \quad \|\Delta_A\| \leq 1, \quad \|\Delta_D\| \leq 1,$$

а $F_A \in \mathbb{R}^{n \times p_A}$, $F_D \in \mathbb{R}^{n \times p_D}$, $H_A \in \mathbb{R}^{q_A \times n}$, $H_D \in \mathbb{R}^{q_D \times m}$ — заданные постоянные матрицы. Будем полагать, что матрица A гурвицева, пара (A, D) управляема, C — матрица полного ранга.

Для неопределенной системы определение инвариантного эллипсоида претерпевает следующее естественное изменение.

Определение 2. Эллипсоид с центром в начале координат

$$\mathcal{E}_x = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x^\top P^{-1} x \leq 1 \right\}, \quad P \succ 0,$$

называется инвариантным для системы (41)–(43), если из условия $x(0) \in \mathcal{E}_x$ следует $x(t) \in \mathcal{E}_x$ для всех моментов времени $t \geq 0$ при всех допустимых возмущениях $w(t)$ и всех допустимых неопределенностях Δ_A, Δ_D .

В [131] установлена справедливость следующей теоремы.

Теорема 16. Эллипсоид \mathcal{E}_x является инвариантным для динамической системы (41), (35), (42), (43), если его матрица $P \succ 0$ удовлетворяет ЛМН

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \alpha P + \varepsilon_1 F_A F_A^\top + \varepsilon_2 F_D F_D^\top & D & P H_A^\top & 0 \\ D^\top & -\alpha I & 0 & H_D^\top \\ H_A P & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 \\ 0 & H_D & 0 & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preceq 0$$

при некоторых $\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$.

Помимо ЛМН-техники, в качестве технического средства здесь используется упоминавшаяся выше лемма Питерсена.

Задачи робастного анализа и синтеза ставятся и решаются в публикациях [54, 131], робастной фильтрации — в [49]. В [56] ставится и решается задача построения нехрупкого регулятора, выдерживающего возмущения в матрицах системы.

В завершение раздела отметим, что ЛМН-техника позволяет синтезировать управление в системах, подверженным воздействию внешних возмущений, исходя из инженерных критериев качества, в частности, таких, как время установления, а решать задачи подавлению внешних ограниченных возмущений с помощью т. н. *комбинированной обратной связи* вида

$$u = Kx + K_1 w,$$

где наряду со статической линейной обратной связью по состоянию вводится линейная обратная связь по вектору возмущений или по части его компонент, мгновенные значения которых известны.

6. Ненулевые начальные условия

Остановимся подробнее на переходных процессах в системах с ненулевыми начальными условиями при отсутствии внешних возмущений.

Рассмотрим простейший случай системы

$$(44) \quad \dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \neq 0$$

с гурвицевой матрицей $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, так что $x(t) \rightarrow 0$ с ростом t . Однако оказывается, что решение такой системы может сильно отклоняться от нуля в конечные моменты времени; например, см. [35], где приведен исторический обзор работ в этом направлении и обсуждается связь со схожим явлением *перерегулирования*. Этот эффект отклонения, называемый *всплеском*, крайне нежелателен по многим естественным причинам. Среди них — возможная неустойчивость вычислительных схем численных методов, нарушение адекватности линеаризованной модели исходно нелинейной системы в окрестности рабочей точки, опасные режимы функционирования или разрушение технических систем, немонотонное поведение некоторых методов оптимизации и др. Техника линейных матричных неравенств предоставляет возможность эффективно получать верхние оценки величины всплеска и строить управление в виде обратной связи, минимизирующей эту оценку.

Для системы (44) введем величину

$$\eta(A, x_0) = \max_{t \geq 0} \frac{\|x(t)\|}{\|x(0)\|},$$

и если она больше единицы, будем говорить о наличии всплеска.

Естественно полагать, что начальные условия могут быть известны лишь с точностью до некоторого множества \mathcal{B} , т.е. в задаче о всплеске имеем еще один источник неопределенности — в начальных условиях. Такая неопределенность естественным образом возникает в самых разных ситуациях, например, в задачах стабилизации и управления при помощи наблюдателя с неизвестным начальным состоянием, или же в системах с переключениями, когда к моменту переключения система приходит в некоторую точку фазового пространства.

В этом случае интерес представляет собой оценка величины

$$(45) \quad \eta(A) = \max_{x_0 \in \mathcal{B}} \eta(A, x_0) = \max_{x_0 \in \mathcal{B}} \max_{t \geq 0} \frac{\|x(t)\|}{\|x(0)\|}.$$

Поскольку решение линейно зависит от начальных условий, то без потери общности считаем, что \mathcal{B} — единичный шар, т.е. $\|x_0\| \leq 1$.

Решение системы (44) имеет вид

$$x(t) = e^{At} x_0,$$

поэтому, меняя местами $\max_{x_0 \in \mathcal{B}}$ и $\max_{t \geq 0}$ в (45), получаем

$$\eta(A) = \max_{t \geq 0} \|e^{At}\|$$

(где $\|\cdot\|$ — операторная норма матрицы), т.е. величина отклонения напрямую связана с оценкой матричной экспоненты. В практических задачах стабилизации величина $\|e^{At}\|$ может принимать очень большие значения на конечных интервалах времени, но до недавних пор регулярные способы ее оценивания отсутствовали, как и методы подавления этих эффектов.

Получение численной верхней оценки для величины $\eta(A)$ с помощью линейных матричных неравенств может быть осуществлено следующим образом.

Рассмотрим систему (44) с устойчивой матрицей $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ее устойчивость эквивалентна существованию квадратичной функции Ляпунова

$$V(x) = x^\top P^{-1}x$$

с матрицей $P \succ 0$, удовлетворяющей неравенству Ляпунова

$$AP + PA^\top \prec 0,$$

которое является ЛМН относительно матричной переменной $P = P^\top$.

Рассмотрим эллипсоид

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x^\top P^{-1}x \leq 1 \right\}$$

с центром в начале координат и задаваемый матрицей P . По определению функции Ляпунова если $x_0 \in \mathcal{E}$, то $x(t) \in \mathcal{E}$ для всех $t > 0$. В частности, если этот эллипсоид содержит единичный шар $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, что можно записать как $P \succ I$, то из $x_0 \in \mathcal{B}$ следует $x(t) \in \mathcal{E}$ для всех $t > 0$. Последнее означает, что $\|x(t)\| \leq \sqrt{\lambda_{\max}(P)}$ для всех $t > 0$, т.е. норма решения не превосходит корня из длины большей полуоси эллипсоида.

Таким образом, чтобы получить наилучшую верхнюю границу для $\|x(t)\|$, необходимо минимизировать большую полуось эллипсоида, задаваемого матрицей P , которая удовлетворяет неравенству Ляпунова и условию $P \succ I$. Эта минимизация эквивалентна минимизации скалярной величины γ в матричном неравенстве $P \preceq \gamma I$.

Получаем следующий результат.

Теорема 17. Пусть $\hat{\gamma}$ является решением задачи полуопределенного программирования

$$(46) \quad \min \gamma \quad \text{при ограничениях} \quad AP + PA^\top \prec 0, \quad I \preceq P \preceq \gamma I,$$

относительно переменных $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $\gamma \in \mathbb{R}$.

Тогда для траекторий системы (44) имеем

$$\max_{\|x_0\| \leq 1} \max_{t \geq 0} \|x(t)\| \leq \eta_{\text{upp}}(A) = \hat{\gamma}^{1/2}$$

для всех начальных условий $\|x_0\| \leq 1$.

Таким образом, получена верхняя оценка величины операторной нормы матричной экспоненты.

По-видимому, первой работой, где была предложена эта идея, является [105]; в несколько иных постановках и формулировках, в том числе, и применительно к задачам синтеза (см. ниже), этот результат приводится в [7, 35, 151].

Совершенно аналогично получение верхней оценки всплеска дается для систем дискретного времени; разница заключается лишь в рассмотрении квадратичной функции Ляпунова

$$V(x_k) = x_k^\top P^{-1} x_k$$

и использовании дискретного неравенства Ляпунова $APA^\top - P \prec 0$; все остальные рассуждения и формулировки остаются теми же. По-видимому, первой работой по получению верхних оценок всплеска в дискретных системах является [22]; уточнения и развитие этого подхода обсуждаются в [1, 140, 141].

Естественно задаться вопросом о точности оценок, получаемых таким путем. Насколько известно авторам, теоретические результаты в этом направлении отсутствуют, но численные эксперименты, проведенные в [1], свидетельствуют о невысоком консерватизме оценок. А именно, случайным образом генерировались шуровские матрицы A , для них с помощью дискретной версии теоремы 17 вычислялась верхняя оценка; непосредственным возведением в степень также вычислялось истинное значение для $\max_k \|A^k\|$. Для подавляющей доли реализаций оценка превосходила истинную величину всплеска не более чем на 10–20%, а максимальная ошибка составляла 75%, так что техника LMI, по-видимому, дает приемлемые верхние оценки всплеска.

Интересно заметить, что анализ эффектов всплеска с помощью линейных матричных неравенств дает простые необходимые и достаточные условия отсутствия всплеска в линейных системах при любых начальных условиях. В самом деле, всплеск не наблюдается тогда и только тогда, когда решением задачи из теоремы 17 является $\gamma = 1$, что эквивалентно наличию у системы квадратичной функции Ляпунова с матрицей $P = I$, см. (46). Таким образом, для непрерывной системы с матрицей A всплеска нет тогда и только тогда, когда $A + A^\top \prec 0$. Соответственно для дискретных систем необходимым и достаточным условием отсутствия всплеска является $AA^\top \prec I$. В частности, можно показать, что матрицы во фробениусовой форме этим условиям не удовлетворяют, т.е. для систем в канонической управляемой форме всегда найдутся начальные условия, дающие всплеск.

Аппарат линейных матричных неравенств применим и к синтезу обратной связи, минимизирующей всплеск решений замкнутой системы. Такие результаты в различных постановках получены в [7, 35, 105, 151] для непрерывных систем и в [1, 22, 140, 141] для дискретного времени. Техника решения совершенно аналогична той, которая неоднократно обсуждалась выше, с использованием вспомогательной матричной переменной (раздел 3). Так, если в непрерывной системе

$$(47) \quad \dot{x} = Ax + Bu$$

с матрицами $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, ищется обратная связь по состоянию $u = Kx$, то замкнутая система с матрицей $A + BK$ обладает квадратичной функцией Ляпунова с положительно определенной матрицей P , удовлетворяющей неравенству

$$(A + BK)P + P(A + BK)^T \prec 0.$$

Введение новой переменной $Y = KP$ приводит последнее неравенство к виду, линейному по P и Y :

$$AP + PA^T + BY + Y^T B^T \prec 0,$$

которое и используется в оптимизационной задаче из теоремы 17 вместо первого ограничения из (46). Приведем окончательный результат (см., например, [35], где он приведен в несколько иной формулировке).

Теорема 18. Пусть \hat{P} , \hat{Y} , $\hat{\gamma}$ — решение задачи полуопределенного программирования

$$(48) \min \gamma \text{ при ограничениях } AP + PA^T + BY + Y^T B^T \prec 0, \quad I \preceq P \preceq \gamma I,$$

относительно переменных $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Тогда для траекторий системы (47) с управлением

$$u = \hat{K}x, \quad \hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1},$$

имеем

$$\max_{\|x_0\| \leq 1} \max_{t \geq 0} \|x(t)\| \leq \eta_{\text{урп}}(A) = \hat{\gamma}^{1/2}$$

для всех начальных условий $\|x_0\| \leq 1$.

Совершенно аналогично задача синтеза управления, подавляющего всплеск, решается для дискретных систем, см. [1, 22, 140, 141].

Следует отметить, что величина всплеска в устойчивой системе может быть очень большой даже для невысокой размерности; при этом обратная связь, построенная в теореме 18 часто дает значительное подавление всплеска. Так, в [1] приведен пример устойчивой дискретной системы четвертого порядка, для которой указанная обратная связь уменьшает оценку всплеска в 10^4 раз.

Задача о всплеске может решаться и в робастной постановке, когда матрица системы содержит ограниченную по норме неопределенность вида

$$(49) \quad A + F\Delta H, \quad \|\Delta\| \leq \delta,$$

где номинальная матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ устойчива, $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ и $H \in \mathbb{R}^{q \times n}$ — известные матрицы, а $\delta > 0$ — некоторый уровень неопределенности, не превышающий радиуса квадратичной устойчивости матричного семейства (49) (см. раздел 4). Иными словами, с помощью линейных матричных неравенств

можно исследовать эффекты всплеска при наличии неопределенности как в начальных условиях, так и в матрице системы, получая верхнюю оценку для величины

$$\eta = \max_{\|\Delta\| \leq \delta} \max_{\|x_0\| \leq 1} \max_{t \geq 0} \|x(t)\|.$$

Технически дело сводится к использованию в теоремах 17 и 18 неравенства Ляпунова (первое неравенство в (46) или (48)), модифицированного на случай системы с матрицей вида (49). Такая модификация проводится на основе леммы Питерсена, см. раздел 4. Приведем результат, полученный в [20].

Теорема 19. Пусть \hat{P} — решение задачи выпуклой оптимизации

$$\min \|P\| \quad \text{при ограничениях} \quad \begin{pmatrix} AP + PA^\top + \varepsilon \delta^2 FF^\top & PH^\top \\ HP & -\varepsilon I \end{pmatrix} \prec 0, \quad P \succcurlyeq I,$$

относительно матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и скалярной переменной ε .

Тогда для решений системы

$$\dot{x} = (A + F\Delta H)x$$

при всех $\|x_0\| \leq 1$ и всех допустимых неопределенностях $\|\Delta\| \leq \delta$ справедлива оценка отклонения

$$\eta \leq \sqrt{\|\hat{P}\|}.$$

В работе [20] также формулируется и решается задача синтеза управления, минимизирующего величину отклонения робастно против всех неопределенностей $\|\Delta\| \leq \delta$. Соответствующая задача для систем дискретного времени решалась в [1, 21].

Наконец, наряду с неизвестными начальными условиями можно рассматривать наличие неизвестных ограниченных внешних возмущений и оценивать сверху величину всплеска в таких условиях. По-существу, такая задача решается с использованием идеологии инвариантных эллипсоидов, рассмотренной в разделе 5. Действительно, эллипсоидальная неопределенность в начальных условиях вида $x_0 \in \mathcal{E}_0$, где \mathcal{E}_0 — эллипсоид с матрицей $P_0 \succ 0$ (в частности, $P_0 = I$), может быть учтена путем добавления условия $P \succcurlyeq P_0$ к неравенству (36) из теоремы 13 с последующей минимизацией большой полуоси эллипсоида с матрицей P . Подробности можно посмотреть в приведенных выше работах по подавлению внешних возмущений.

7. Разреженное управление

Идеи разреженности широко используются в обработке сигналов и изображениях, распознавании образов и многих других областях. Одной из первых областей применения концепции разреженности является ℓ_1 -оптимизация,

успешно развиваемая в различных направлениях, таких как compressed sensing, ℓ_1 -фильтрация и др. (см., например, [89, 111, 146]).

Математически задача сводится к минимизации числа ненулевых компонент вектора, определяемого так называемой ℓ_0 - (квази)нормой, при выпуклых ограничениях. Вместо этой трудной задачи обычно рассматривается результат ее овыпукления, получаемый при минимизации ℓ_1 -нормы. При этом, как правило, строгие оценки точности получающегося решения отсутствуют, однако его качество обычно достаточно высоко. Однако насколько можно судить, идеи разреженности не нашли широкого применения в управлении; среди немногочисленных публикаций по построению разреженной обратной связи можно упомянуть [113, 114], в которых разреженная структура оговорена заранее; особое внимание в этих работах уделено оптимизационным алгоритмам.

Прозрачная мотивация использования идей разреженности при синтезе управления предлагается так называемой C^3 -парадигмой. Она включает в себя триаду *Control, Communication, Computation*, компоненты которой анализируются с единой точки зрения [95, 103, 116]. В рамках этого подхода уменьшение числа задействуемых при построении управления состояний системы естественно трактовать как число сенсоров или измеряющих устройств, число используемых управлений связано с числом необходимых управляющих устройств, а уменьшение числа требуемых выходов системы эквивалентно минимизации количества информации, передаваемой по каналу управления.

Обсуждаемый далее подход отличается простотой: исходные задачи сводятся к решению маломерных задач полуопределенного программирования, а для их численного решения могут быть использованы стандартные вычислительные средства. Начало этой линии исследований было положено в публикациях [38, 129].

Пусть $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$; введем в рассмотрение следующие специальные матричные нормы:

$$\|X\|_{r_1} = \sum_{i=1}^n \max_{1 \leq j \leq p} |x_{ij}|, \quad \|X\|_{c_1} = \sum_{j=1}^p \max_{1 \leq i \leq n} |x_{ij}|.$$

Первая из них иногда называется rx -нормой или $\ell_{1,\infty}$ -нормой; ее основное применение — восстановление строчно-разреженных решений матричных уравнений [148]; аналогично, r_1 -норма восстанавливает столбцово-разреженные решения.

Итак, обсудим специфику обсуждаемого подхода, который позволяет регулярным образом строить разреженные регуляторы. Рассмотрим линейную систему в непрерывном времени

$$(50) \quad \dot{x} = Ax + Bu$$

с фазовым состоянием $x \in \mathbb{R}^n$ и управлением $u \in \mathbb{R}^m$, так что $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, и пара (A, B) управляема. Задача состоит в синтезе разреженного стабилизирующего управления

$$u = Kx,$$

под которым понимается наличие у вектора управления нулевых компонент. Эта задача эквивалентна нахождению строчно-разреженной матрицы стабилизирующего регулятора $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, т.е. имеющей некоторое количество нулевых строк.

Понятно, что за исключением вырожденных случаев управляемую систему всегда можно стабилизировать скалярным управлением. Соответственно оптимальное решение может быть найдено обнулением всех строк матриц регулятора K , кроме одного. Это означает, что надо перебрать лишь m строк матрицы, а не их всевозможные комбинации. С другой стороны, подобный метод “грубой силы” потребует полного комбинаторного перебора, тогда как обсуждаемый подход гораздо более прост и весьма эффективен.

Теорема 20. Решение \hat{P} и \hat{Y} задачи полуопределенного программирования

$$\min \|Y\|_{r_1} \quad \text{при ограничениях} \quad AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top \prec 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричных переменных $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ определяет строчно-разреженный стабилизирующий регулятор

$$K_{\text{sp}} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$$

для системы (50).

Теорема 20 позволяет определить управления, стабилизирующие систему; эти управления определяются номерами ненулевых строк матрицы K_{sp} . При этом, вообще говоря, нельзя гарантировать, что получившееся решение обязательно окажется разреженным, однако ее наличие можно ожидать.

Рассмотрим задачу синтеза линейной обратной связи $u = Kx$ для системы

$$(51) \quad \dot{x} = Ax + u$$

по неполному вектору состояния x , т.е. использующей минимальное число компонент вектора состояния. Легко видеть, что столбцово-разреженная структура матрицы регулятора приводит к “исключению” компонент вектора состояния. Таким образом, требуется синтезировать столбцово-разреженный стабилизирующий регулятор K , т.е. имеющий некоторое количество нулевых столбцов.

Теорема 21. Решение \hat{Q} и \hat{Y} задачи

$$\min \|Y\|_{c_1} \quad \text{при ограничениях} \quad A^\top Q + QA + Y + Y^\top \prec 0, \quad Q \succ 0,$$

относительно матричных переменных $Q = Q^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ определяет столбцово-разреженный регулятор

$$K_{\text{sp}} = \hat{Q}^{-1} \hat{Y},$$

реализующий стабилизирующую статическую обратную связь $u = K_{\text{sp}}x$ по неполному вектору состояния системы (51).

Иными словами, определены состояния, достаточные для построения обратной связи; они соответствуют номерам ненулевых столбцов матрицы K_{sp} .

Заметим, что иногда некоторые компоненты вектора x трудны для измерения. В этом случае вместо c_1 -нормы можно воспользоваться взвешенной c_1 -нормой

$$\|X\|_{c_1, w} = \sum_{j=1}^n w_j \max_{1 \leq i \leq m} |x_{ij}|, \quad w_j \geq 0,$$

где большие веса соответствуют “дорогим” компонентам вектора состояния.

В качестве обобщения полученного результата рассмотрим задачу построения статической линейной обратной связи по выходу для системы

$$(52) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + u, \\ y &= Cx, \end{aligned}$$

где $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, а пара (A, C) управляема. Как известно, для системы (52) существует стабилизирующая обратная связь по выходу, т.е. найдется K такое, что матрица $A + KC$ устойчива. Задача состоит в нахождении стабилизирующей статической линейной обратной связи по неполному вектору выхода.

Теорема 22. Решение \hat{Q} и \hat{Y} задачи

$$\min \|Y\|_{c_1} \quad \text{при ограничениях} \quad A^T Q + QA + YC + C^T Y^T < 0, \quad Q > 0,$$

относительно матричных переменных $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $Y \in \mathbb{R}^{n \times l}$ определяет столбцово-разреженный регулятор

$$K_{sp} = \hat{Q}^{-1} \hat{Y},$$

реализующий обратную связь $u = K_{sp}y$ по неполному вектору выхода системы (52).

В рассмотренных задачах структура системы была фиксирована, т.е. матрицы A , B и C заданы. Предположим теперь, что точное измерение всего вектора состояния x доступно, и задача состоит в конструировании линейного маломерного выхода $y = Cx$ и построении для него линейной обратной связи $u = Ky$. Чтобы решить эту задачу, рассмотрим структуру матрицы стабилизирующего регулятора по состоянию K_{sp} для системы (50):

$$K_{sp} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}.$$

Ясно, что, изменив r_1 -норму в задании целевой функции в теореме 20 на c_1 -норму, естественно ожидать появления нулевых столбцов в матрице \hat{Y} :

$$u = \hat{Y} \hat{P}^{-1} x = \begin{pmatrix} \times & 0 & \times & 0 & \times \\ \times & 0 & \times & 0 & \times \\ & & \dots & & \\ \times & 0 & \times & 0 & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \times & \times & \dots & \times \\ & \dots & & \\ \times & \times & \dots & \times \\ & & \dots & \\ \times & \times & \dots & \times \end{pmatrix} x.$$

Сформируем матрицу \tilde{K} , состоящую из ненулевых столбцов матрицы \hat{Y} , и матрицу \tilde{C} , состоящую из строк матрицы \hat{P}^{-1} с теми же номерами. При этом имеем

$$u = Kx = \tilde{K}\tilde{C}x = \tilde{K}y.$$

В результате приходим к следующему результату.

Теорема 23. Пусть \hat{P} и \hat{Y} — решение задачи

$$\min \|Y\|_{c_1} \quad \text{при ограничениях} \quad AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top \prec 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричных переменных $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Обозначим через \tilde{K} матрицу, состоящую из ненулевых столбцов матрицы \hat{Y} , а через \tilde{C} — матрицу, состоящую из строк \hat{P}^{-1} с теми же номерами.

Тогда стабилизирующей обратной связью по маломерному выходу

$$y = \tilde{C}x$$

системы (50) служит

$$u = \tilde{K}y.$$

Действуя аналогичным образом, нетрудно организовать нулевые строки в регуляторе \tilde{K} по построенному выходу системы. Это достигается с помощью соответствующей r_1 -оптимизации и позволит уменьшить число управлений, достаточное для стабилизации системы.

Теорема 24. Пусть P_r и Y_r — решение задачи полуопределенного программирования

$$\min \|Y\|_{r_1} \quad \text{при ограничениях} \quad AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top \prec 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричных переменных $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$, где матрица Y имеет столбцово-разреженную структуру как решение задачи из теоремы 23.

Обозначим через \tilde{K}_{sp} матрицу, состоящую из ненулевых столбцов матрицы Y_r , а через C_r — матрицу, состоящую из строк P_r^{-1} с теми же номерами.

Тогда стабилизирующая обратная связь по маломерному выходу

$$y = C_r x$$

системы (50) дается как

$$u = \tilde{K}_{\text{sp}} y,$$

где регулятор \tilde{K}_{sp} строчно-разреженный.

Различные обобщения и приложения описанной выше техники можно найти в работах [13, 121, 136, 149].

К дальнейшим направлениям исследований, прежде всего, следует отнести иные задачи оптимального управления, такие как H_∞ -оптимизация; они также могут быть поставлены и решены в рамках “разреженного” подхода. Эта же техника (с небольшими модификациями) применима к задачам фильтрации, подавления ограниченных внешних возмущений и другим классическим задачам теории управления. Кроме того, на основе использования дискретного неравенства Ляпунова аналогично может быть исследован случай дискретного времени. Наконец, полученные результаты распространяемы и на робастные версии задач, в частности, для системы вида

$$\dot{x} = (A + F\Delta H)x + Bu$$

с матричной неопределенностью $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$, ограниченной в спектральной норме $\|\Delta\| \leq 1$, и заданными матрицами F и H соответствующих размерностей.

В завершение раздела заметим, что разреженное управление иногда понимается не в форме обратной связи, а как программное управление, см. подробнее [122, 132, 134].

8. Некоторые задачи для нелинейных систем

Как уже отмечалось выше, настоящий обзор в основном посвящен технике ЛМН для линейных систем. Нелинейные проблемы гораздо более сложны и разнообразны, и авторы не имеют возможности на них остановиться подробно. Ниже будут рассмотрены лишь отдельные задачи для систем, в том или ином смысле близких к линейным.

8.1. Абсолютная устойчивость

Как уже отмечалось, одна из первых постановок задач о робастной устойчивости для нелинейных систем связана с идеями абсолютной устойчивости. Рассмотрим нелинейную динамическую систему

$$(53) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b\varphi(\sigma), \\ \sigma &= c^\top x, \end{aligned}$$

где A — постоянная матрица, b , c — постоянные вектор-столбцы, а $\varphi(\sigma)$ — вектор-функция скалярной переменной σ . Проверка устойчивости системы (53) в случае *секторных* ограничений

$$\varphi(0) = 0, \quad 0 \leq \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \leq \bar{k}, \quad \sigma \neq 0,$$

накладываемых на нелинейность φ , приводит к проблеме абсолютной устойчивости, восходящей к классическим работам А.И. Лурье и В.Н. Постникова [29], М.А. Айзермана и Ф.Р. Гантмахера [2], Е.С. Пятницкого с соавторами [42, 44], В.М. Попова [41]. В этих работах использовалась техника функций

Ляпунова не только квадратичных, но и типа *квадратичная функция плюс интеграл от нелинейности*. Систематическое использование ЛМН-техники применительно к подобным задачам началось с работ В.А. Якубовича [61, 62]. С тех пор эта тематика активно развивалась; не имея возможности на этом остановиться, отсылаем читателя к работам [14, 19, 84, 108, 109] и цитируемым в них исследованиям. Отметим также публикации [43, 45, 46], посвященные численным методам построения функций Ляпунова в задаче абсолютной устойчивости.

8.2. Ограниченные внешние возмущения

Остановимся прежде всего на проблеме влияния ограниченных внешних возмущений на нелинейные системы, близкие к линейным.

Рассмотрим нелинейную стационарную динамическую систему в непрерывном времени

$$(54) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \Phi\varphi(x) + Dw, & x(0) &= 0, \\ z &= Cx, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ — выход системы, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, ограниченное в каждый момент времени:

$$(55) \quad \|w(t)\| \leq 1 \quad \text{для всех } t \geq 0,$$

а векторная функция $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ удовлетворяет ограничению

$$(56) \quad \|\varphi(x)\|^2 \leq \mu_0 + \mu_1 \|x\|^2 \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^n$$

с заданными параметрами $\mu_0, \mu_1 \geq 0$ (отметим, что при $\mu_0 = 0$ появляется секторная нелинейность). Будем полагать, что матрица A гурвицева, пара (A, D) управляема, C — матрица полного ранга.

Для этой ситуации удастся выписать инвариантный эллипсоид, используя ту же технику, что и для линейного случая. Достаточное условие инвариантности эллипсоида для системы (54) может быть установлено в терминах ЛМН и полуопределенного программирования, см. [39]. Другие результаты в этом направлении содержатся в [65, 94, 133].

Сходным образом решается и задача синтеза. Рассмотрим непрерывную систему управления

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \Phi\varphi(x) + B_1u + Dw, & x(0) &= 0, \\ z &= Cx + B_2u, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ — регулируемый выход, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ — управление, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (55), векторная функция $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ удовлетворяет ограничению (56); пара (A, B_1) управляема, пара (A, C) наблюдаема. Поиск регулятора K в

форме статической линейной обратной связи по состоянию $u = Kx$, стабилизирующего замкнутую систему и, в смысле минимальности ограничивающего эллипсоида для выхода z , подавляющего воздействие внешних возмущений, сводится к задаче полуопределенного программирования и одномерной минимизации [39].

Методам синтеза управления для нелинейных систем, также использующим линейные матричные неравенства, посвящена работа [30].

8.3. Мультипликативные возмущения

Перейдем к системам с мультипликативным возмущением. Во многих задачах уровень внешних возмущений может зависеть от состояния системы. В частности, нередко ситуация, когда внешние возмущения растут не быстрее, чем линейная функция от вектора состояния системы.

Например, взглянем с несколько иной, чем прежде, точки зрения на системы с ограниченными в норме неопределенностями и ограниченными внешними возмущениями:

$$(57) \quad \dot{x} = (A + \Delta A(t))x + Dw(t),$$

где

$$\|\Delta A(t)\| \leq \delta, \quad \|w(t)\| \leq 1 \quad \text{для всех } t \geq 0.$$

Обратим внимание, что, в отличие от робастных постановок задач (см., например, [49, 131]), здесь предполагается, что матричная неопределенность зависит от времени t .

Будем трактовать величину $\Delta A(t)x + Dw(t)$ как внешнее возмущение, которое уже будет зависеть от состояния системы. При этом, очевидно, скорость роста ее нормы не превосходит скорости роста нормы состояния системы.

Обсужденные выше подходы, основанные на технике линейных матричных неравенств, могут быть распространены на динамические системы с внешними возмущениями указанной структуры.

Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему в непрерывном времени

$$(58) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Dw, & x(0) &= 0, \\ z &= Cx, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ — выход системы, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению

$$\|w(t)\|^2 \leq \gamma_0 + \gamma_1 \|x(t)\|^2 \quad \text{для всех } t \geq 0$$

с известными параметрами $\gamma_0 \geq 0$ и $\gamma_1 > 0$ (в частности, для системы (57) имеем $\gamma_0 = \|D\|^2$, $\gamma_1 = \delta$). Будем полагать, что матрица A гурвицева, пара (A, D) управляема, C — матрица полного ранга.

В отличие от предыдущих результатов этого раздела, условия инвариантности эллипсоида для системы (58) являются необходимыми и достаточными. Аналогичным образом решается и задача синтеза для системы с мультипликативным возмущением [39].

Рассмотренный подход может быть применен и к другим задачам управления, связанным с подавлением внешних возмущений, в частности — при синтезе обратной связи по измеряемому выходу, см. подробнее [37], а также на их различные робастные постановки.

8.4. Билинейные системы

Задачам, связанным со стабилизацией билинейных систем управления, посвящено множество работ; большая их часть была инициирована появлением монографии [119]. Среди разнообразных подходов к решению соответствующих задач отметим поиск линейных преобразований, переводящих билинейную систему в управляемую линейную [87]; вопросам стабилизации билинейных систем управления с помощью релейных управлений посвящена публикация [17]; в работе [144] для стабилизации билинейных систем используются квадратичные функции Ляпунова.

В [110] на основе ЛМН-техники и квадратичных функций Ляпунова для билинейной системы управления строился так называемый эллипсоид стабилизируемости такой, что траектории замкнутой системы, начинаясь внутри эллипсоида, асимптотически стремятся к нулю. В дальнейшем это позволило эффективно конструировать невыпуклые области стабилизируемости билинейных систем управления.

Публикации [51, 52] развивают этот подход: в них рассматривается билинейная система управления, подверженная воздействию произвольных ограниченных внешних возмущений, и вводится концепция эллипсоида стабилизируемости, обладающего тем свойством, что траектории замкнутой системы, начинаясь внутри эллипсоида, его не покидают (они будут входить во множество достижимости или стремиться к точке на его границе). В публикации [53] рассматривается билинейная система управления, подверженная воздействию произвольных ограниченных внешних возмущений и содержащая структурированную матричную неопределенность. В статье ставятся и решаются задачи робастного управления билинейными системами при внешних возмущениях; в частности, предложен подход к конструктивному построению эллипсоида робастной стабилизируемости и области робастной стабилизируемости.

9. Заключение

В обзоре рассмотрены основные методы использования линейных матричных неравенств для учета разного рода неопределенностей в задачах управления. Видно, что это очень удобный и универсальный аппарат, позволяющий охватить многие задачи анализа и синтеза. Данный обзор ограничивается в основном линейными системами; нелинейный случай затронут лишь кратко; рассмотрены отнюдь не все виды неопределенностей. Обзор литературы так-

же не претендует на полноту; все богатство обозначенной темы невозможно исчерпать в одном обзоре.

Авторы благодарны рецензентам за полезные замечания и библиографические указания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агиевич В.Н., Парсегов С.Э., Щербakov П.С.* Верхние оценки всплеска в линейных дискретных системах // *АиТ.* 2018. № 11. С. 32–46.
Ahiyevich V.N., Parsegov S.E., Shcherbakov P.S. Upper Bounds on Peaks in Discrete-Time Linear Systems // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 11. P. 1976–1988.
2. *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М.: АН СССР, 1963.
3. *Афанасьев В.Н.* Управление неопределенными динамическими объектами. М.: Физматлит, 2008.
4. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
5. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез оптимальных линейно-квадратичных законов управления на основе линейных матричных неравенств // *АиТ.* 2007. № 3. С. 3–18.
Balandin D.V., Kogan M.M. Synthesis of Linear Quadratic Control Laws on Basis of Linear Matrix Inequalities // *Autom. Remote Control.* 2007. V. 68. No. 3. P. 371–385.
6. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Линейно-квадратичные и γ -оптимальные законы управления по выходу // *АиТ.* 2008. № 6. С. 5–14.
Balandin D.V., Kogan M.M. Linear-Quadratic and γ -Optimal Output Control Laws // *Autom. Remote Control.* 2008. V. 69. No. 6. P. 911–919.
7. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Метод функций Ляпунова в синтезе законов управления при интегральном и фазовых ограничениях // *Дифференц. уравнения.* 2009. Т. 45. № 5. С. 655–664.
Balandin D.V., Kogan M.M. Lyapunov Function Method for Control Law Synthesis under One Integral and Several Phase Constraints // *Different. Equat.* 2009. V. 45. No. 5. P. 670–679.
8. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Обобщенное H_∞ -оптимальное управление как компромисс между H_∞ -оптимальным и γ -оптимальным управлениями // *АиТ.* 2010. № 6. С. 20–38.
Balandin D.V., Kogan M.M. Generalized H_∞ -Optimal Control as a Trade-Off Between the H_∞ -Optimal and γ -Optimal Controls // *Autom. Remote Control.* 2010. V. 71. No. 6. P. 993–1010.
9. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез субоптимального регулятора по выходу для гашения ограниченных возмущений // *АиТ.* 2011. № 4. Р. 3–10.
Balandin D.V., Kogan M.M. Synthesis of a Suboptimal Controller by Output for Dampening Limited Disturbances // *Autom. Remote Control.* 2011. V. 72. No. 4. P. 677–683.
10. *Баландин Д.В., Коган М.М., Кривдина Л.Н., Федюков А.А.* Синтез обобщенного H_∞ -оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах // *АиТ.* 2014. № 1. С. 3–22.

- Balandin D.V., Kogan M.M., Krivdina L.N., Fedukov A.V.* Design of Generalized Discrete-Time H_∞ -Optimal Control Over Finite and Infinite Intervals // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 1. P. 1–17.
11. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Оптимальное по Парето обобщенное H_2 -управление и задачи виброзащиты // АиТ. 2017. № 8. С. 76–90.
Balandin D.V., Kogan M.M. Pareto Optimal Generalized H_2 -Control and Vibration Protection Problems // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 8. P. 1417–1429.
 12. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Многокритериальные робастные обобщенные H_2 и γ_0 управления с применением к стабилизации ротора в электромагнитных подшипниках // АиТ. 2018. № 6. С. 49–68.
Balandin D.V., Kogan M.M. Multicriteria Robust Generalized H_2 and γ_0 Controllers with Application to Stabilization of a Rotor in Electromagnetic Bearings // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 6. P. 996–1012.
 13. *Быков А.В., Щербakov П.С.* Синтез разреженной обратной связи в линейных дискретных системах // АиТ. 2018. № 7. С. 3–21.
Bykov A.V., Shcherbakov P.S. Sparse Feedback Design in Discrete-Time Linear Systems // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 7. P. 1175–1190.
 14. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
 15. *Гусев С.В., Лихтарников А.Л.* Очерк истории леммы Калмана–Попова–Якубовича и S -процедуры // АиТ. 2006. № 10. С. 77–121.
Gusev S.V., Likharnikov A.L. Kalman–Popov–Yakubovich Lemma and the S -Procedure: A Historical Essay // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 11. P. 1768–1810.
 16. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Новые типы обратной связи: Управление при неопределенности. М.: Наука, 1997.
 17. *Емельянов С.В., Крищенко А.П.* Стабилизируемость билинейных систем канонического вида // ДАН. 2012. Т. 445. № 6. С. 636–639.
Emel'yanov S.V., Krishchenko A.P. Stabilizability of Bilinear Systems of Canonical Form // Dokl. Math. 2012. V. 86. P. 591–594.
 18. *Каменецкий В.А., Пятницкий Е.С.* Градиентный метод построения функций Ляпунова в задачах абсолютной устойчивости // АиТ. 1987. № 1. С. 3–12.
Kamenetskii V.A., Pyatnitskii E.S. Gradient Method of Constructing Lyapunov Functions in Problems of Absolute Stability // Autom. Remote Control. 1987. V. 48. No. 1. Part 1. P. 1–9.
 19. *Каменецкий В.А.* Системы с переключениями, системы Лурье, абсолютная устойчивость, проблема Айзермана // АиТ. 2019. № 8. С. 9–28.
Kamenetskiy V.A. Switched Systems, Lur'e Systems, Absolute Stability, Aizerman Problem // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 8. P. 1375–1389.
 20. *Квинто Я.И., Хлебников М.В.* Верхние оценки больших отклонений в линейных системах при наличии неопределенности // Проблемы управления. 2018. № 3. С. 2–7.
Kvinto Y.I., Khlebnikov M.V. Upper Bounds on Large Deviations in Linear Systems in the Presence of Uncertainty // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 5. P. 927–935.
 21. *Квинто Я.И., Хлебников М.В.* Верхние границы максимального отклонения траектории в линейных дискретных системах: робастная постановка // Управление большими системами. 2019. Вып. 77. С. 70–84.

22. *Коган М.М., Кривдина Л.Н.* Синтез многоцелевых линейных законов управления дискретными объектами при интегральных и фазовых ограничениях // *АиТ.* 2011. № 7. С. 83–95.
Kogan M.M., Krivdina L.N. Synthesis of Multipurpose Linear Control Laws of Discrete Objects under Integral and Phase Constraints // *Autom. Remote Control.* 2011. V. 72. No. 7. P. 1427–1439.
23. *Коган М.М.* Обобщенная H_∞ -норма в анализе и синтезе робастных систем управления // *Известия РАН. ТИСУ.* 2015. № 6. С. 3–16.
24. *Коровин С.К., Фомичев В.В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М.: Физматлит, 2007.
25. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985.
26. *Кунцевич В.М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. Киев: Наук. думка, 2006.
27. *Кунцевич В.М., Пшеничный Б.Н.* Минимальные инвариантные множества динамических систем с ограниченными возмущениями // *Кибернетика и системный анализ.* 1996. № 1. С. 74–81.
28. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
29. *Лурье А.И., Постников В.Н.* К теории устойчивости регулируемых систем // *Прикладная математика и механика.* 1944. № 8. Вып. 3. С. 246–248.
30. *Маликов А.И.* Оценивание состояния и стабилизация дискретных систем с неопределенными нелинейностями и возмущениями // *АиТ.* 2019. № 11. С. 59–82.
Malikov A.I. State Estimation and Stabilization of Discrete-Time Systems with Uncertain Nonlinearities and Disturbances // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 11. P. 1976–1995.
31. *Мейлахс А.М.* О стабилизации линейных управляемых систем в условиях неопределенности // *АиТ.* 1975. № 2. С. 182–184.
Meilakhs A.M. Stabilization of Linear Controlled Systems under Uncertainty Conditions // *Autom. Remote Control.* 1975. V. 36. No. 2. 349–351.
32. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // *АиТ.* 2007. № 3. С. 106–125.
Nazin S.A., Polyak B.T., Topunov M.V. Rejection of Bounded Exogenous Disturbances by the Method of Invariant Ellipsoids // *Autom. Remote Control.* 2007. V. 68. No. 3. P. 467–486.
33. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // *ДАН.* 2008. Т. 418. № 6. С. 749–753.
Polyak B.T., Topunov M.V. Filtering under Nonrandom Disturbances: The Method of Invariant Ellipsoids // *Dokl. Math.* 2008. V. 77. No. 1. P. 158–162.
34. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // *АиТ.* 2008. № 5. С. 72–90.
Polyak B.T., Topunov M.V. Suppression of Bounded Exogenous Disturbances: Output Feedback // *Autom. Remote Control.* 2008. V. 69. No. 5. P. 801–818.
35. *Поляк Б.Т., Тремба А.А., Хлебников М.В., Щербаков П.С., Смирнов Г.В.* Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // *АиТ.* 2015. № 6. С. 18–41.

- Polyak B.T., Tremba A.A., Khlebnikov M.V., et al.* Large Deviations in Linear Control Systems with Nonzero Initial Conditions // *Autom. Remote Control*. 2016. V. 76. No. 6. P. 957–976.
36. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.
37. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
38. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Разреженная обратная связь в линейных системах управления // *АиТ*. 2014. № 12. С. 13–27.
- Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S.* Sparse Feedback in Linear Control Systems // *Autom. Remote Control*. 2014. V. 75. No. 12. P. 2099–2111.
39. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Нелинейные системы с ограниченными или мультипликативными возмущениями / Проблемы устойчивости и управления. Сб. научн. статей, посв. 80-летию акад. В.М. Матросова. М.: Физматлит, 2013. С. 271–299.
40. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
41. *Попов В.М.* Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования // *АиТ*. 1961. № 8. С. 961–979.
42. *Пятницкий Е.С.* Новые исследования по абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования (обзор) // *АиТ*. 1968. № 6. С. 5–36.
- Pyatnitskii Ye.S.* New Research on Absolute Stability of Automatic Control Systems (review) // *Autom. Remote Control*. 1968. V. 29. No. 6. P. 855–881.
43. *Пятницкий Е.С., Скородинский В.И.* Численные методы построения функций Ляпунова и критерии абсолютной устойчивости в форме численных процедур // *АиТ*. 1983. № 11. С. 52–63.
- Pyatnitskii E.S., Skorodinskii V.I.* Numerical Methods of Designing Lyapunov Functions and Absolute Stability Criteria as Numerical Procedures // *Autom. Remote Control*. 1983. V. 44. No. 11. P. 1427–1437.
44. *Пятницкий Е.С.* Избранные труды. Теория управления. Т. 1–3. М.: Наука, 2004.
45. *Рапопорт Л.Б.* О задаче абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными стационарными элементами // *АиТ*. 1987. № 5. С. 66–74.
- Raport L.B.* Absolute Stability of Control Systems with Several Nonlinear Stationary Elements // *Autom. Remote Control*. 1987. V. 48. No. 5. Part 1. P. 623–630.
46. *Рапопорт Л.Б.* Расширение S -процедуры и анализ многомерных систем управления с помощью линейных матричных неравенств // *АиТ*. 2005. № 1. С. 37–48.
- Raport L.B.* Extension of the S -Procedure and Analysis of the Multidimensional Control Systems Using Linear Matrix Inequalities // *Autom. Remote Control*. 2005. V. 66. No. 1. P. 31–42.
47. *Рапопорт Л.Б.* Полуопределенная релаксация и новые условия знакоопределенности квадратичной формы при квадратичных ограничениях // *АиТ*. 2018. № 11. С. 150–158.
- Raport L.B.* Semidefinite Relaxation and New Conditions for Sign-Definiteness of the Quadratic Form Under Quadratic Constraints // *Autom. Remote Control*. 2018. V. 79. No. 11. P. 2073–2079.

48. *Формальский А.М.* Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974.
49. *Хлебников М.В.* Робастная фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // *АиТ.* 2009. № 1. С. 147–161.
Khlebnikov M.V. Robust Filtering under Nonrandom Disturbances: The Invariant Ellipsoid Approach // *Autom. Remote Control.* 2009. V. 70. No. 1. P. 133–146.
50. *Хлебников М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений: линейный динамический регулятор по выходу // *АиТ.* 2011. № 4. С. 27–42.
Khlebnikov M.V. Suppression of Bounded Exogenous Disturbances: A Linear Dynamic Output Controller // *Autom. Remote Control.* 2011. V. 72. No. 4. P. 699–712.
51. *Хлебников М.В.* Оптимизация билинейной системы управления при внешних возмущениях: I // *АиТ.* 2019. № 2. С. 46–63.
Khlebnikov M.V. Optimization of Bilinear Control Systems Subjected to Exogenous Disturbances: I // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 2. P. 234–249.
52. *Хлебников М.В.* Оптимизация билинейной системы управления при внешних возмущениях: II // *АиТ.* 2019. № 8. С. 29–43.
Khlebnikov M.V. Optimization of Bilinear Control Systems Subjected to Exogenous Disturbances: II // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 8. P. 1390–1402.
53. *Хлебников М.В.* Оптимизация билинейной системы управления при внешних возмущениях: III // *АиТ.* 2020. № 6. С. 47–61.
Khlebnikov M.V. Optimization of Bilinear Control Systems Subjected to Exogenous Disturbances. III // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 6. P. 1003–1016.
54. *Хлебников М.В., Поляк Б.Т., Кунцевич В.М.* Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) // *АиТ.* 2011. № 11. С. 9–59.
Khlebnikov M.V., Polyak B.T., Kuntsevich V.M. Optimization of Linear Systems Subject to Bounded Exogenous Disturbances: The Invariant Ellipsoid Technique // *Autom. Remote Control.* 2011. V. 72. No. 11. P. 2227–2275.
55. *Хлебников М.В., Щербakov П.С.* Лемма Питерсена о матричной знакоопределенности и ее обобщения // *АиТ.* 2008. № 11. С. 125–139.
Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Petersen's Lemma on Matrix Uncertainty and Its Generalization // *Autom. Remote Control.* 2008. V. 69. No. 11. P. 1932–1945.
56. *Хлебников М.В., Щербakov П.С.* Инвариантность и нехрупкость при подавлении внешних возмущений // *АиТ.* 2015. № 5. С. 175–190.
Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Invariance and Nonfragility in the Rejection of Exogenous Disturbances // *Autom. Remote Control.* 2015. V. 76. No. 5. P. 872–884.
57. *Хлебников М.В., Щербakov П.С.* Задача линейно-квадратичного управления. II // *АиТ.* 2019. № 10. С. 115–131.
Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Linear Quadratic Regulator: II // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 10. P. 1847–1860.
58. *Хлебников М.В., Щербakov П.С., Честнов В.Н.* Задача линейно-квадратичного управления. I // *АиТ.* 2015. № 12. С. 65–79.
Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S., Chestnov V.N. Linear-Quadratic Regulator. I // *Autom. Remote Control.* 2015. V. 76. No. 12. P. 2143–2155.
59. *Черноузько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
60. *Чурилов А.Н., Гессен А.В.* Исследование линейных матричных неравенств. Путеводитель по программным пакетам. СПб.: Изд-во С.-Петербург. гос. ун-та, 2004.

61. *Якубович В.А.* Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования // ДАН СССР. 1962. Т. 143. № 6. С. 1304–1307.
Yakubovich V.A. Solution of Certain Matrix Inequalities Encountered in Nonlinear Control Theory // Sov. Math. Dokl. 1964. V. 5. P. 652–656.
62. *Якубович В.А.* Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. I // АиТ. 1964. № 7. С. 1017–1029.
63. *Якубович В.А.* Частотная теорема в теории управления // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14. № 2. С. 384–419.
64. *Abedor J., Nagpal K., Poolla K.* A Linear Matrix Inequality Approach to Peak-to-Peak Gain Minimization // Int. J. Robust Nonlin. Control. 1996. V. 6. P. 899–927.
65. *Amato F., Cosentino C., Merola A.* On the Region of Attraction of Nonlinear Quadratic Systems // Automatica. 2007. V. 43. P. 2119–2123.
66. *Anderson B.D.O., Moore J.B.* Linear Optimal Control. N.Y.: Prentice-Hall, 1971.
67. *Arzelier D., Peaucelle D., Henrion D.* Some Notes on Standard LMI Solvers. URL <http://homepages.laas.fr/publis/prague102.pdf> (2018).
68. *Balandin D.V., Kogan M.M.* LMI-based H_∞ -Optimal Control with Transients // Int. J. Control. 2010. V. 83. Iss. 8. P. 1664–1673.
69. *Balandin D.V., Kogan M.M.* Multi-Objective Generalized H_2 Control // Automatica. 2019. V. 99. P. 317–322.
70. *Balandin D.V., Kogan M.M.* Multi-Objective Robust Generalised H_2 Control // Int. J. Syst. Sci. 2020. V. 51. Iss. 10. P. 1873–1882.
71. *Barmish B.R., Corless M., Leitman G.* A New Class of Stabilizing Controllers for Uncertain Dynamical Systems // SIAM J. Control Optim. 1983. V. 21. No. 2. P. 246–255.
72. *Barmish B.R.* Necessary and Sufficient Conditions for Quadratic Stabilizability of an Uncertain System // J. Optim. Theory Appl. 1985. V. 46. No. 4. P. 399–408.
73. *Barmish B.R.* New Tools for Robustness of Linear Systems. MacMillan, 1993.
74. *Başar T., Bernhard P.* H_∞ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems: A Dynamic Game Approach. Boston: Birkhäuser, 1995.
75. *Bellman R.* Notes on Matrix Theory. X. A Problem in Control // Quarterly of Appl. Math. 1957. V. 14. No. 4. P. 417–419.
76. *Bernhard P.* Survey of Linear Quadratic Robust Control // Macroeconom. Dynam. 2002. No. 6. P. 19–39.
77. *Bernussou J., Peres P.L.D., Geromel J.C.* A Linear Programming Oriented Procedure for Quadratic Stabilization of Uncertain Systems // Syst. Control Lett. 1989. V. 13. P. 65–72.
78. *Bertsekas D.P., Rhodes I.B.* On the Minimax Reachability of Target Sets and Target Tubes // Automatica. 1971. V. 7. P. 233–247.
79. *Bertsekas D.P., Rhodes I.B.* Recursive State Estimation for a Set-Membership Description of Uncertainty // IEEE Trans. Autom. Control. 1971. V. 16. P. 117–128.
80. *Blanchini F.* Set Invariance in Control // Automatica. 1999. V. 35. No. 11. P. 1747–1767.
81. *Blanchini F., Miani S.* Set-Theoretic Methods in Control. Birkhäuser, 2008.
82. *Blanchini F., Sznajder M.* Persistent Disturbance Rejection via Static State Feedback // IEEE Trans. Autom. Control. 1995. V. 40. P. 1127–1131.
83. *Borchers B.* CSDP, a C Library for Semidefinite Programming // Optim. Methods Software. 1999. V. 11. No. 1. P. 613–623.

84. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., et al.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
85. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
86. *Caverly R.J., Forbes J.R.* LMI Properties and Applications in Systems, Stability, and Control Theory // arXiv:1903.08599v2 [cs.SY] 12 Jun 2019
87. *Čelikovský S.* On the Stabilization of the Homogeneous Bilinear Systems // Syst. Control Lett. 1993. V. 21. No. 6. P. 503–510.
88. *Chernousko F., Polyak B. (eds.)* Special Issue on Set-Membership Modelling of Uncertainties in Dynamical Systems // Math. Comp. Modelling Dynam. Syst. 2005. V. 11. Iss. 2. P. 123–124.
89. *Donoho D.L.* Compressed Sensing // IEEE Trans. Inform. Theory. 2006. V. 52. P. 1289–1306.
90. *Douglas J., Athans M.* Robust Linear Quadratic Designs with Real Parameter Uncertainty // IEEE Trans. Autom. Control. 1994. V. 39. No. 1. P. 107–111.
91. *Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A.* State-Space Solution to Standard H^2 and H^∞ Control Problem // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. No. 8. P. 831–847.
92. *Ebihara Y., Peaucelle D., Arzelier D.* S-Variable Approach to LMI-Based Robust Control. London: Springer, 2014.
93. *Elia N., Dahleh M.A.* Minimization of the Worst-Case Peak to Peak gain via Dynamic Programming: State Feedback Case // IEEE Trans. Autom. Control. 2000. V. 45. P. 687–701.
94. *Fiacchini M., Alamo T., Camacho E.F.* On the Computation of Convex Robust Control Invariant Sets for Nonlinear Systems // Automatica. 2010. V. 46. P. 1334–1338.
95. *Fradkov A.L.* Cybernetical Physics: From Control of Chaos to Quantum Control. Springer, 2007.
96. *Francis B.A.* A Course in H_∞ Control Theory // Lecture Notes in Control and Information Sciences. V. 88. Berlin: Springer-Verlag, 1987.
97. *Fu M., Dasgupta S.* Parametric Lyapunov Functions for Uncertain Systems: The Multiplier Approach // Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control. SIAM, 2000. P. 95–108.
98. *Gahinet P., Apkarian P.* A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control // Int. J. Robust Nonlinear Control. 1994. V. 4. No. 4. P. 421–448.
99. *Gahinet P., Apkarian P., Chilali M., et al.* Affine Parameter-Dependent Lyapunov Functions and Real Parametric Uncertainty // IEEE Trans. Automat Control. 1996. V. 41. No. 3. P. 436–442.
100. *Gahinet P., Nemirovskii A., Laub A.J., et al.* LMI Control Toolbox — For Use with Matlab. Natick: The MathWorks Inc., 1995.
101. *El Ghaoui L., Niculescu S.* Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control. SIAM, 2000.
102. *Glover D., Schweppe F.* Control of Linear Dynamic Systems with Set Constrained Disturbances // IEEE Trans. Autom. Control. 1971. V. 16. P. 411–423.
103. *Graham S., Kumar P.R.* The Convergence of Control, Communication, and Computation / M. Conti, S. Giordano, E. Gregori, S. Olariu, eds. Personal Wireless Communications, Lecture Notes in Computer Science. V. 2775. Berlin: Springer-Verlag, 2003. P. 458–475.

104. *Grant M., Boyd S.* CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 2.1. URL <http://cvxr.com/cvx>
105. *Hinrichsen D., Plischke E., Wurth F.* State Feedback Stabilization with Guaranteed Transient Bounds // Proc. 15th Int. Symp. Math. Theory Networks & Syst. South Bend, USA, August 12–16, 2002.
106. *Hollot C.V., Barmish B.R.* Optimal Quadratic Stabilizability of Uncertain Linear Systems // Proc. 18th Allerton Conf. Commun. Control and Computing. Monticello, USA, 1980. P. 697–706.
107. *Hosoe Y., Peaucelle D.* S -Variable Approach to Robust Stabilization State Feedback Synthesis for Systems Characterized by Random Polytopes // Proc. 2016 Eur. Control Conf. (ECC 2016). Aalborg, Denmark, June 29 – July 1, 2016. P. 2023–2028.
108. *Isidori A.* Nonlinear Control Systems. London: Springer-Verlag, 1995.
109. *Khalil H.K.* Nonlinear Systems. N.Y.: Prentice Hall, 2002.
110. *Khlebnikov M.V.* Quadratic Stabilization of Bilinear Control Systems // Proc. 14 Eur. Control Conf. (ECC'15). Linz, Austria, July 15–17, 2015. IEEE Catalog Number(USB): CFP1590U-USB. P. 160–164.
111. *Kim S.-J., Koh K., Boyd S., Gorinevsky D.* ℓ_1 Trend Filtering // SIAM Rev. 2009. V. 51. No. 2. P. 339–360.
112. *Kurzhanski A.B., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997.
113. *Lin F., Fardad M., Jovanović M.* Sparse Feedback Synthesis via the Alternating Direction Method of Multipliers // Proc. 2012 Amer. Control Conf. Montreal, Canada, June 25–27, 2012. P. 4765–4770.
114. *Lin F., Fardad M., Jovanović M.* Augmented Lagrangian Approach to Design of Structured Optimal State Feedback Gains // IEEE Trans. Autom. Control. 2011. V. 56. No. 12. P. 2923–2929.
115. *Löfberg J.* YALMIP: Software for Solving Semiconvex (and Nonconvex) Optimization Problems. URL <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/wiki/pmwiki.php>
116. *Matveev A.S., Savkin A.V.* Estimation and Control over Communication Networks. Boston: Birkhäuser, 2008.
117. *Mittelman H.D.* An Independent Benchmarking of SDP and SOCP Solvers // Math. Progr. 2002. V. 95. No. 2. P. 407–430.
118. *Mittelman H.D.* Decision Tree for Optimization Software. URL <http://plato.la.asu.edu/bench.html>
119. *Mohler R.R.* Bilinear Control Processes. N.Y.: Academic Press, 1973.
120. The MOSEK Optimization Software. URL <http://www.mosek.com>
121. *Nagahara M., Chatterjee D., Challapalli N., Vidyasagar M.* CLOT Norm Minimization for Continuous Hands-Off Control // Automatica. 2020. V. 113. Art. 108679.
122. *Nagahara M., Quevedo D.E., Nesic D.* Maximum Hands-Off Control: A Paradigm of Control Effort Minimization // IEEE Trans. Autom. Control. 2016. V. 61. No. 3. P. 735–747.
123. *Nesterov Yu., Nemirovsky A.* Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming. Philadelphia: SIAM, 1994.
124. *De Oliveira M.C., Bernussou J., Geromel J.C.* A New Discrete-Time Robust Stability Condition // Syst. Control Lett. 1999. V. 37 No. 4. P. 261–265.
125. *Peaucelle D., Ebihara Y.* Affine Versus Multi-Affine Models for S -Variable LMI Conditions // IFAC-PapersOnLine. 2018. V. 51. No. 25. P. 453–458.

126. *Petersen I.R.* A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Systems // Syst. Control Lett. 1987. V. 8. P. 351–357.
127. *Petersen I.R., McFarlane D.C.* Optimal Guaranteed Cost Control and Filtering for Uncertain Linear Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1994. V. 39. No. 9. P. 1971–1977.
128. *Petersen I., Tempo R.* Robust Control of Uncertain Systems: Classical Results and Recent Developments // Automatica. 2014. V. 50. P. 1315–1335.
129. *Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S.* An LMI Approach to Structured Sparse Feedback Design in Linear Control Systems // Proc. 12 Eur. Control Conf. (ECC'13). Zürich, Switzerland, July 17–19, 2013. P. 833–838.
130. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Stability and Performance of Complex Systems Affected by Parametric Uncertainty / Encyclopedia Syst. Control. Second ed. Springer, 2020.
131. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S., Topunov M.V.* Invariant Ellipsoids Approach to Robust Rejection of Persistent Disturbances // Proc. 17th IFAC World Congr. Seoul, Korea, July 6–11, 2008. P. 3976–3981.
132. *Polyak B., Tremba A.* Sparse Solutions of Optimal Control via Newton Method for Under-Determined Systems // J. Global Optim. URL <https://doi.org/10.1007/s10898-019-00784-z>, published on-line May 24, 2019.
133. *Poznyak A., Polyakov A., Azhmyakov V.* Attractive Ellipsoids in Robust Control. Springer, 2014.
134. *Rao C.V.* Sparsity of Linear Discrete-Time Optimal Control Problems with ℓ_1 Objectives // IEEE Trans. Autom. Control. 2018. V. 63. No. 2. P. 513–517.
135. *Rodrigues L.A., Oliveira R.C.L.F., Camino J.F.* Parameterized LMIs for Robust H_2 and H_∞ State Feedback Control of Continuous-Time Polytopic Systems // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2018. V. 28. Iss. 3. P. 940–952.
136. *Romao L., Margellos K., Papachristodoulou A.* Distributed Actuator Selection: Achieving Optimality via a Primal-Dual Algorithm // IEEE Control Syst. Lett. 2018. V. 2. No. 4. P. 779–784.
137. *Safonov M.G.* Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems. Cambridge: MIT Press, 1980.
138. *Scherer C., Weiland S.* Linear Matrix Inequalities in Control. URL <https://www.imng.uni-stuttgart.de/mst/files/LectureNotes.pdf>
139. *Schweppe F.C.* Uncertain Dynamic Systems. N.J.: Prentice Hall, 1973.
140. *Shcherbakov P.* On Peak Effects in Discrete Time Linear Systems // Proc. 2017 25th Mediterranean Conf. Control Automation (MED 2017). Valletta, Malta, July 3–6, 2017. P. 376–381.
141. *Shcherbakov P., Parsegov S.* Solutions of Discrete Time Linear Systems: Upper Bounds on Deviations // Proc. Int. Conf. System Theory, Control and Computing (ICSTCC 2018). Sinaia, Romania, October 10–12, 2018. P. 152–157.
142. *Skelton R.E., Iwasaki T., Grigoriadis D.E.* A Unified Algebraic Approach to Control Design. CRC Press, 1997.
143. *Sturm J.F.* Using SeDuMi 1.02, a Matlab Toolbox for Optimization over Symmetric Cones // Optim. Methods Software. 1999. No. 11–12. P. 625–653. URL <http://sedumi.ie.lehigh.edu>
144. *Tarbouriech S., Queinnec I., Calliero T.R., Peres P.L.D.* Control Design for Bilinear Systems with a Guaranteed Region of Stability: An LMI-Based Approach // Proc. 17th Mediterranean Conf. Control Automation (MED'09). Thessaloniki, Greece, June 24–26, 2009. P. 809–814.

145. *Thorp J.S., Barmish B.R.* On Guaranteed Stability of Uncertain Linear Systems via Linear Control // *J. Optimiz. Theory Appl.* 1981. V. 35. No. 4. P. 559–579.
146. *Tibshirani R.* Regression Shrinkage and Selection via the Lasso // *J. Royal Statist. Soc.* 1996. V. 58. No. 1. P. 267–288.
147. *Toh K.C., Todd M.J., Tütüncü R.H.* SDPT3 – A MATLAB Software Package for Semidefinite Programming, version 1.3 // *Optim. Methods Software.* 1999. V. 11. No. 1–4. P. 545–581.
148. *Tropp J.A.* Algorithms for Simultaneous Sparse Approximation. Part II: Convex Relaxation // *Signal Proc.* (special issue “Sparse approximations in signal and image processing”). 2006. V. 86. P. 589–602.
149. *Wang Y., Lopez J.A., Sznaier M.* Convex Optimization Approaches to Information Structured Decentralized Control // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2018. V. 63. No. 10. P. 3393–3403.
150. *Weinmann A.* Uncertain Models and Robust Control. Springer-Verlag, 1994.
151. *Whidborne J.F., McKernan J.* On Minimizing Maximum Transient Energy Growth // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2007. V. 52. No. 9. P. 1762–1767.
152. *Willems J.S.* The Analysis of Feedback Systems. Cambridge: MIT Press, 1971.
153. *Willems J.S.* Least Squares Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation // *IEEE Trans. Autom. Control.* 1971. V. 16. No. 6. P. 621–634.
154. *Yu L., Han Q.-L., Sun M.-X.* Optimal Guaranteed Cost Control of Linear Uncertain Systems with Input Constraints // *Int. J. Control Autom. Syst.* 2005. V. 3. No. 3. P. 397–402.
155. *Zhou K., Doyle J., Glover K.* Robust and Optimal Control. N.J.: Prentice Hall, 1996.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 30.07.2020

После доработки 08.09.2020

Принята к публикации 10.09.2020

© 2021 г. А.Л. ШЕСТАКОВ, д-р техн. наук (a.l.shestakov@susu.ru),
С.А. ЗАГРЕБИНА, д-р физ.-мат. наук (zagrebinasa@susu.ru),
Н.А. МАНАКОВА, д-р физ.-мат. наук (manakovana@susu.ru),
М.А. САГАДЕЕВА, канд. физ.-мат. наук (sagadeevama@susu.ru),
Г.А. СВИРИДЮК, д-р физ.-мат. наук (sviridiukga@susu.ru)
(Южно-Уральский государственный университет
национальный исследовательский университет), Челябинск)

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ИЗМЕРЕНИЯ, ИСКАЖЕННОГО ИНЕРЦИОННОСТЬЮ, РЕЗОНАНСАМИ И ДЕГРАДАЦИЕЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА¹

Задача оптимальных измерений состоит в минимизации разности значений виртуального наблюдения, т.е. полученного с помощью расчетной модели, и экспериментальных данных. При исследовании задачи оптимального измерения можно выделить три части: математическая модель оптимального измерения, алгоритмы численных исследований этой модели и программы, их реализующие. Описаны первые две части исследования задачи оптимального измерения. Приводится описание математической модели оптимального измерения при наличии помех разного вида, описываются приближения оптимального измерения и доказывается их сходимости к точному. Описывается алгоритм численного нахождения приближений оптимального измерения.

Ключевые слова: приближения оптимального измерения, система леонтьевского типа, вырожденный поток матриц, квадратичный функционал, задача оптимального управления, метод градиентного спуска.

DOI: 10.31857/S0005231021010025

1. Введение

В теории динамических измерений актуальной проблемой является задача восстановления измерения по наблюдению. Традиционным подходом [1] решения данной задачи является метод, основанный на теории обратных задач [2–4]. Другим подходом [5, 6] является метод исследования, основанный на теории автоматического управления [7–9]. В последнее время возник [10] и активно развивается [11–13] подход, основанный на теории оптимального управления решениями уравнений леонтьевского типа [14, 15]. В основе этого подхода лежит поиск оптимума функционала штрафа от нормы разности реального (т.е. зафиксированного на измерительном приборе) и виртуального (т.е. найденного посредством вычислительного алгоритма) наблюдений.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (грант № FENU-2020-0022 (2020072Г3)).

Данную задачу называют *задачей оптимального измерения*, а найденный таким образом оптимум объявляется *оптимальным измерением*. К настоящему времени в рамках теории оптимальных измерений исследованы случаи, когда измерение искажено инерционностью измерительного устройства [16], резонансами в его цепях [17] или его деградацией [18]. В настоящей статье рассматривается случай, когда измерение искажено всеми тремя помехами одновременно.

Пусть L и M – квадратные матрицы порядка n , $f(t) = \text{col}(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ – некоторая вектор-функция. Рассмотрим линейное неоднородное уравнение вида

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + f(t),$$

причем допускаем возможность $\det L = 0$. Заметим, что первым такие уравнения начал изучать В. Леонтьев [19]. Поэтому будем называть эти уравнения *уравнениями леонтьевского типа*, считая синонимами позже появившиеся термины “дифференциально-алгебраические уравнения” [20], “алгебро-дифференциальные системы” [21], “дескрипторные системы” [22] и т.д.

Математическая модель (ММ) измерительного устройства (ИУ) описывается системой уравнений леонтьевского типа вида

$$(1) \quad L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + Du(t), \quad y(t) = b(t)Nx(t) + Fu(t),$$

где D , N , F – квадратные матрицы порядка n , $x(t) = \text{col}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $y(t) = \text{col}(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$ и $u(t) = \text{col}(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$ – вектор-функции, $a(t)$ и $b(t)$ – функции. Здесь матрицы L , M , D , N и F характеризуют конструкцию ИУ, вектор-функция $x = x(t)$ характеризует состояние ИУ, функции $a = a(t)$ и $b = b(t)$ описывают деградацию ИУ при длительной эксплуатации (например, при эксплуатации в околоземном пространстве), вектор-функция $u = u(t)$ соответствует входному сигналу (*измерению*), а вектор-функция $y = y(t)$ соответствует выходному сигналу (*наблюдению*). В ММ (1) измерение и наблюдение имеют одинаковую размерность, но на практике размерность наблюдения может быть меньше.

Дополним ММ (1) начальным *условием Шоултера–Сидорова* [23, 24]

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \left[R_\mu^L(M) \right]^{p+1} (x(t) - x_0) = 0,$$

где $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ – *правая L -резольвента матрицы M* , $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – некоторый вектор, а параметр p будет описан далее.

Главной частью рассматриваемой математической модели ИУ является функционал штрафа

$$(3) \quad J(u) = \varepsilon \int_0^\tau \|y(t) - \tilde{y}(t)\|^2 dt + (1 - \varepsilon) \int_0^\tau \langle Cx(t), x(t) \rangle dt.$$

Здесь $\|\cdot\|$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидовы норма и скалярное произведение в \mathbb{R}^n , $x(t)$ и $y(t)$ линейно зависят от $u(t)$. Отметим, что в отличие от предыдущих исследований задачи оптимального измерения [11–18] предлагается более простой вид функционала штрафа, что, с одной стороны, позволяет

найти решение, а с другой – упрощает численный метод нахождения этого решения. Используя априорную информацию, в пространстве измерений $\mathfrak{U} = \{u \in L_2((0, \tau); \mathbb{R}^n) : u^{(p)} \in L_2((0, \tau); \mathbb{R}^n)\}$ выделим выпуклое и замкнутое подмножество $\mathfrak{U}_\partial \subset \mathfrak{U}$, которое называется *множеством допустимых измерений*. Минимизируя первое слагаемое функционала (3) на множестве \mathfrak{U}_∂ , будем добиваться минимизации воздействия инерционности ИУ на измерение. А минимизируя второе слагаемое, будем снижать воздействие резонансов в цепях ИУ. Заметим, что квадратная симметрическая матрица C порядка n характеризует взаимовлияние резонансов в цепях ИУ. Константа $\varepsilon \in (0, 1)$ выбирается таким образом, чтобы учесть предпочтения исследователя. Наконец, $\tilde{y}(t)$ – наблюдение, полученное в результате вычислительного или натурального эксперимента. Итак, задача поиска *оптимального измерения* $v(t)$ заключается в поиске минимума

$$(4) \quad J(v) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\partial} J(u).$$

Таким образом, математической моделью ИУ является *задача оптимального измерения* (1)–(4). Исследование этой задачи можно представить тремя частями. В первой части создается математическая модель ИУ, ставится задача нахождения оптимального измерения и приводятся условия, при которых существует единственное решение данной задачи. Именно такое решение называется *точным оптимальным измерением*. Во второй части конструируются алгоритмы построения приближений решения задачи оптимального измерения и формулируются условия, при которых построенная последовательность приближений решения сходится к точному решению. И наконец, в третьей части исследования задачи оптимального измерения на основе алгоритмов второй части создаются программы, проводятся процедуры проверки для отладки этих программ и ставятся вычислительные эксперименты по восстановлению искаженного измерения, полученного в ходе эксперимента.

Основная цель данной статьи – описание второй части исследования задачи оптимального измерения. В статье построены приближения оптимального измерения и обоснована сходимост этих приближений к точному оптимальному измерению. Также статья содержит описание алгоритма нахождения приближений решения этой задачи. Отметим, что в отличие от более ранних работ [11–18] для поиска минимума в статье предлагается использовать метод градиентного спуска, что стало возможно благодаря упрощению вида функционала (3). По сути, в данной статье развиваются положения обзора [25].

Статья кроме введения и списка литературы состоит из трех частей. В первой из них приводятся теоретические результаты о существовании точного решения этой задачи, т.е. приводится описание первой части исследования задачи оптимального измерения на основе результатов [18]. Во второй части описываются приближения оптимального измерения и приводятся результаты о сходимости этих приближений решения к точному. В третьей части приводится описание численного алгоритма нахождения оптимального измерения, искаженного инерционностью, резонансами и деградацией измерительного устройства.

2. Точное оптимальное измерение

Пусть L и M – квадратные матрицы порядка n . Назовем матрицу M *регулярной относительно матрицы L* (коротко, L -регулярной), если существует число $\alpha \in \mathbb{C}$, такое что $\det(\alpha L - M) \neq 0$. Понятно, что число $\alpha \in \mathbb{C}$, такое что $\det(\alpha L - M) \neq 0$, существует, если $\det L \neq 0$. Однако внимательный анализ реальных ИУ [26, 27] показывает, что случай $\det L = 0$ встречается довольно часто. Итак, пусть матрица M L -регулярна, тогда [28, гл. 12] существуют такие невырожденные матрицы A и B порядка n , что $BLA = \text{diag}\left\{\overset{0}{\mathfrak{J}}_{p_1}, \overset{0}{\mathfrak{J}}_{p_2}, \dots, \overset{0}{\mathfrak{J}}_{p_l}, \mathbb{I}_{n-m}\right\}$, $BMA = \text{diag}\{\mathbb{I}_m, S\}$, где $\overset{0}{\mathfrak{J}}_{p_k}$ – жорданова клетка порядка p_k с нулями на главной диагонали, $\sum_{k=1}^l p_k = m$, \mathbb{I}_k – единичная матрица порядка k , S – квадратная матрица порядка $n - m$. Возьмем число $p = \max\{p_1, p_2, \dots, p_l\}$ и назовем L -регулярную матрицу M (L, p) -регулярной.

Фиксируем число $\tau \in \mathbb{R}_+$ и введем в рассмотрение *пространство измерений* $\mathfrak{U} = \{u \in L_2((0, \tau); \mathbb{R}^n) : u^{(p)} \in L_2((0, \tau); \mathbb{R}^n)\}$, *пространство наблюдений* $\mathfrak{Y} = L_2((0, \tau); \mathbb{R}^n)$ и *пространство состояний* $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$.

Теорема 1. Пусть матрица M (L, p) -регулярна, $p \in \{0, 1, \dots, n\}$. Тогда для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $a \in C([0, \tau]; \mathbb{R}_+) \cap C^p((0, \tau); \mathbb{R}_+)$, $b \in C([0, \tau]; \mathbb{R}_+)$ и $u \in \mathfrak{U}$, существует единственное решение $y \in \mathfrak{Y}$ задачи (1), (2), которое имеет вид

$$(5) \quad y(t) = b(t)Nx(t) + Fu(t),$$

где

$$(6) \quad x(t) = X(t, 0)x_0 + \int_0^t X(t, s)L_1^{-1}QDu(s)ds + \sum_{q=0}^p H^q M_0^{-1}(Q - \mathbb{I}_n) \left(\frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt}\right)^q \frac{Du(t)}{a(t)}.$$

Здесь $X(t, s) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left(L - \frac{1}{k} \int_0^t a(r)dr M \right)^{-1} L \right)^k$ – вырожденный поток [15], т.е. $X(t, r)X(r, s) = X(t, s)$ при всех $t, r, s \in \mathbb{R}$ таких, что $t \geq r \geq s$, причем $X(t, t) \neq \mathbb{I}_n$ при всех $t \in \mathbb{R}$;

$$\begin{aligned} P &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(k(kL - M)^{-1} L \right)^k, & Q &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(kL(kL - M)^{-1} \right)^k, \\ M_0^{-1} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k} L - M \right)^{-1} (\mathbb{I}_n - Q), & L_0 &= L(\mathbb{I}_n - P), \\ H &= M_0^{-1} L_0, & L_1^{-1} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(L - \frac{1}{k} M \right)^{-1} Q. \end{aligned}$$

Утверждение теоремы 1 следует из аналогичного утверждения из [29] с учетом ослабления требований на пространства. Заметим, что (6), по сути, заменяет в системе (1) первое уравнение.

Теперь сформулируем теорему о существовании решения задачи оптимального измерения (1)–(4).

Теорема 2. Пусть матрица M (L, p) -регулярна, $p \in \{0, 1, \dots, n\}$. Тогда для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathfrak{Y}$, $a \in C([0, \tau]; \mathbb{R}_+) \cap C^p((0, \tau); \mathbb{R}_+)$ и $b \in C([0, \tau]; \mathbb{R}_+)$ существует единственное измерение $v \in \mathfrak{U}_\partial$, для которого выполнено (4).

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству соответствующего утверждения из [29] с учетом корректировки вида функционала (5).

Вектор-функцию $v = v(t)$, существующую по теореме 2, будем в дальнейшем называть *точным оптимальным измерением*. Строго говоря, после замены $u(t) = v(t)$ формула (6) уже не будет решением системы уравнений

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + Dv(t)$$

даже в обобщенном смысле. Однако при подстановке (6) в (5) и замене $u(t) = v(t)$ получим вектор-функцию $y = y(t)$, которую назовем *точным оптимальным наблюдением*. Заметим, что вектор-функции $v = v(t)$ и $y = y(t)$, полученные в результате применения теоремы 1 и теоремы 2, являются *виртуальным точным оптимальным измерением* и *виртуальным точным оптимальным наблюдением*. Алгоритмы конструктивного построения v и y будут предложены ниже.

Однако прежде чем перейти к построению алгоритмов, сделаем пару замечаний, которые упростят решение данной задачи.

Замечание 1. Без потери общности можно считать $\det M \neq 0$. Действительно, сделаем в (1) замену $x(t) = \exp\left(\alpha \int_0^t a(\tau) d\tau\right) z(t)$ и получим

$$\begin{aligned} L\dot{z} &= a(t)(M - \alpha L)z(t) + Dv(t), \\ w(t) &= b(t)Nz(t) + Fv(t), \end{aligned}$$

где $v(t) = \exp\left(-\alpha \int_0^t a(\tau) d\tau\right) u(t)$ и $w(t) = \exp\left(-\alpha \int_0^t a(\tau) d\tau\right) y(t)$. Переобозначив $M - \alpha L$ через M , получим требуемое.

Замечание 2. Вместо решения (6), где x_0 не зависит от функции управления, будем рассматривать решение в виде

$$(7) \quad x(t) = \int_0^t X(t, s)L_1^{-1}QDu(s)ds + \sum_{q=0}^p H^q M_0^{-1}(Q - \mathbb{I}_n) \left(\frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt}\right)^q \frac{Du(t)}{a(t)},$$

которое получится, если в (2) взять $x_0 \in \ker[R_\mu^L(M)]^p = \ker X(t, 0)$. Подставив (7) вместо (6) в (5) и (3), можем найти (4).

Теорема 3. Пусть матрица M (L, p) -регулярна, $p \in \{0, 1, \dots, n\}$, причём $\det M \neq 0$. Тогда для любых $x_0 \in \ker[R_\mu^L(M)]^p$, $\tilde{y} \in \mathfrak{Y}$, $a \in C([0, \tau]; \mathbb{R}_+) \cap C^p((0, \tau); \mathbb{R}_+)$ и $b \in C([0, \tau]; \mathbb{R}_+)$ существует единственное $v \in \mathfrak{U}_\partial$, для которого выполнено (4).

3. Приближения оптимальные измерения

Пусть L, M, D, N и F – квадратные матрицы порядка n , причем матрица M (L, p) -регулярна, $p \in \{0, 1, \dots, n\}$, и $\det M \neq 0$. Пусть вектор $x_0 \in \ker[R_\mu^L(M)]^p$, причем заметим, что $\ker[R_\mu^L(M)]^p$ не зависит от $\mu \in \mathbb{C}$, таких что $\det(\mu L - M) \neq 0$ [15]. Приступим к описанию приближений оптимального измерения.

3.1. Первое приближение оптимального измерения

Пространство \mathfrak{U} представим в виде

$$\mathfrak{U} = \bigoplus_{j=1}^n \mathfrak{U}_j,$$

где

$$\mathfrak{U}_j = \left\{ u^j \in L_2((0, \tau); \mathbb{R}) : (u^j)^{(p)} \in L_2((0, \tau); \mathbb{R}) \right\}.$$

По построению пространство \mathfrak{U}_j – гильбертово и сепарабельно, $j = 1, 2, \dots, n$. Обозначим через $\{\varphi_i\}$ ортонормированную последовательность базисных векторов. Понятно, что эта последовательность может быть выбрана в каждом \mathfrak{U}_j одинаковой. Построим конечномерный линейал

$$\mathfrak{U}_j^k = \text{span} \{ \varphi_i : i = 1, 2, \dots, k \}$$

и подпространство

$$\mathfrak{U}^k = \bigoplus_{j=1}^n \mathfrak{U}_j^k.$$

Найдем подмножество $\mathfrak{U}_\partial^k = \mathfrak{U}^k \cap \mathfrak{U}_\partial$. Подмножество $\mathfrak{U}_\partial^k \subset \mathfrak{U}_\partial$ может оказаться пустым, однако в любом случае оно замкнуто и выпукло. Понятно, что все члены последовательности $\{\mathfrak{U}_\partial^k\}$ не могут оказаться пустыми множествами из-за очевидной монотонности этой последовательности и того, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathfrak{U}_\partial^k = \mathfrak{U}_\partial.$$

Возьмем вектор $u_k \in \mathfrak{U}_\partial^k$ и построим вектор-функцию

$$(8) \quad x_k(t) = \int_0^t X(t, s) L_1^{-1} Q u_k(s) ds + \sum_{q=0}^p H^q M^{-1} (Q - \mathbb{I}_n) \left(\frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt} \right)^q \frac{D u_k(t)}{a(t)},$$

$$(9) \quad y_k(t) = b(t) N x_k(t) + F u_k(t).$$

Теперь подставим x_k и y_k в функционал штрафа J и найдем его минимум

$$(10) \quad J(v_k) = \min_{u_k \in \mathfrak{U}_\partial^k} J(u_k).$$

Если $\mathfrak{U}_\partial^k \neq \emptyset$, то такой вектор v_k существует и единственен в силу теоремы 3. Если окажется $\mathfrak{U}_\partial^k = \emptyset$, то число k необходимо увеличить, чтобы получить $\mathfrak{U}_\partial^k \neq \emptyset$ (см. рассуждения выше). Для того чтобы гарантировать $\mathfrak{U}_\partial^k \neq \emptyset$ для любого $k \in \mathbb{N}$, далее будем требовать выполнения условия $0 \in \mathfrak{U}_\partial$. Действительно, так как $0 \in \mathfrak{U}^k$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то при выполнении этого условия $0 \in \mathfrak{U}_\partial^k$, т.е. $\mathfrak{U}_\partial^k \neq \emptyset$. Это требование в дальнейшем возможно будет ослаблено.

Вектор $v_k \in \mathfrak{U}_\partial^k$ будем называть *первым приближением оптимального измерения*.

Лемма 1. Пусть матрица M такая, что $\det M \neq 0$, (L, p) -регулярна, $p \in \{0, 1, \dots, n\}$. Пусть $0 \in \mathfrak{U}_\partial$, вектор-функция $\tilde{y} \in \mathfrak{Y}$, функции $a \in C([0, \tau]; \mathbb{R}_+) \cap C^p((0, \tau); \mathbb{R}_+)$ и $b \in C([0, \tau]; \mathbb{R}_+)$, а вектор $x_0 \in \ker[R_\mu^L(M)]^p$. Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = v$.

Доказательство. По построению набор множеств $\{\mathfrak{U}_\partial^k\}$ таков, что $\mathfrak{U}_\partial^k \subset \mathfrak{U}_\partial^{k+1}$, т.е. является исчерпанием множества допустимых измерений \mathfrak{U}_∂ . Тогда решения v_k и v_{k+1} задачи (8)–(10), найденные на множествах \mathfrak{U}_∂^k и $\mathfrak{U}_\partial^{k+1}$, таковы, что выполнено неравенство

$$J(v_k) \geq J(v_{k+1}).$$

Следовательно, $\{J(v_k) : v_k \in \mathfrak{U}_\partial\}$ образуют невозрастающую ограниченную последовательность, и в силу того что функционал (3) непрерывный и квадратичный, получаем утверждение леммы 1.

3.2. Второе приближение оптимального измерения

Начнем построение следующего приближения решения. В условиях леммы 1 можем написать

$$P = \lim_{l \rightarrow \infty} \left(l(lL - M)^{-1}L \right)^l, \quad Q = \lim_{l \rightarrow \infty} \left(lL(lL - M)^{-1} \right)^l,$$

$$L_1^{-1} = \lim_{l \rightarrow \infty} \left(L - \frac{1}{l}M \right)^{-1} Q, \quad H = M^{-1}L(\mathbb{I}_n - P).$$

Отсюда

$$(11) \quad x_{kl}(t) =$$

$$= \int_0^t \left(\left(L - \frac{1}{l} \int_s^t a(r) dr M \right)^{-1} L \right)^l \left(L - \frac{1}{l}M \right)^{-1} (lL(lL - M)^{-1})^l u_k(s) ds +$$

$$+ \sum_{q=0}^p H^q M^{-1} \left((lL(lL - M)^{-1})^l - \mathbb{I}_n \right) \left(\frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt} \right)^q \frac{Du_k(t)}{a(t)},$$

$$(12) \quad y_{kl}(t) = b(t)Nx_{kl}(t) + Fu_k(t).$$

Подставив (11) и (12) в функционал штрафа (3), построим функционал $J_l(u_k)$. Минимизируя этот функционал на множестве \mathfrak{U}_∂^k , получим

$$J(v_{kl}) = \min_{u_k \in \mathfrak{U}_\partial^k} J_l(u_k).$$

Вектор $v_{kl} \in \mathfrak{U}_\partial^k$ будем называть *вторым приближением оптимального измерения*.

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда $\lim_{l \rightarrow \infty} v_{kl} = v_k$.

Доказательство. В силу теоремы 1 и того, как задаются матрицы в решении (6), для функции (11) справедлива оценка

$$\exists C > 0 \quad \forall t \in [0, \tau] \quad \|x_{kl}(t) - x_k(t)\| \leq \frac{C}{l},$$

откуда для x_{kl} из (11) и y_{kl} из (12) получим, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} x_{kl} = x_k \quad \text{и} \quad \lim_{l \rightarrow \infty} y_{kl} = y_k.$$

И в силу непрерывности и квадратичности функционала (3) получим $\lim_{l \rightarrow \infty} v_{kl} = v_k$. Лемма 2 доказана.

3.3. Третье приближение оптимального измерения

В заключительной части для построения третьего приближения оптимального измерения опишем способы вычисления первого слагаемого в (11) (интеграла) и второго слагаемого (суммы производных). Для вычисления интеграла воспользуемся схемой Гаусса, поделив отрезок $[0, \tau]$ на m частей. При этом не исключается возможность найти интеграл в явном виде. Во втором слагаемом заменим производные разностными формулами, причем не исключается возможность, что производные посчитаются в явном виде. После чего вместо формул (11) и (12) получаем приближенные значения векторов $x_{klm} = x_{klm}(t)$ и $y_{klm} = y_{klm}(t)$. Подставив их в функционал штрафа и минимизируя его на множестве \mathfrak{U}_∂^k , получим

$$(13) \quad J(v_{klm}) = \min_{u_k \in \mathfrak{U}_\partial^k} J_{lm}(u_k).$$

Вектор $v_{klm} \in \mathfrak{U}_\partial^k$ будем называть *третьим приближением оптимального измерения*.

Лемма 3. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда $\lim_{m \rightarrow \infty} v_{klm} = v_{kl}$.

Доказательство. Воспользуемся квадратурной формулой Гаусса для вычисления интегральных слагаемых и формулой численного дифференцирования для вычисления слагаемого с производными в x_{kl} из (11). Для вычисления $J_{lm}(u_k)$ зафиксируем количество узлов m формулы Гаусса, вычислим узлы τ_j и веса w_j для этой формулы на отрезке $[0, \tau]$ и получим

$$(14) \quad J_{lm}(u_k) = \frac{\tau}{2} \sum_{j=0}^m \left[\varepsilon \|y_{klm}(\tau_j) - \tilde{y}(\tau_j)\|^2 + (1 - \varepsilon) \langle C x_{klm}(\tau_j), x_{klm}(\tau_j) \rangle \right] w_j.$$

Здесь $y_{klm}(\tau_j)$ получено после подстановки вместо x_{kl} в (12) вектора

$$(15) \quad x_{klm}(\tau_j) = \frac{\tau_j}{2} \times \\ \times \sum_{\kappa=0}^j \left[\left(\left(L - \frac{\tau_j - \tau_\kappa}{2l} \sum_{r=0}^{j-\kappa} a(s_r) \varpi_r M \right)^{-1} L \right)^l \left(L - \frac{1}{l} M \right)^{-1} (lL(lL - M)^{-1})^l u_k(\tau_\kappa) \right] \times \\ \times w_\kappa + \sum_{q=0}^p H^q M^{-1} \left((lL(lL - M)^{-1})^l - \mathbb{I}_n \right) \left(\frac{m}{\tau} \right)^q \sum_{\iota=-r}^{\nu} d_{q\iota} A_q \left(\tau_j + \iota \frac{\tau}{m} \right),$$

где s_r и ϖ_r ($r = 0, \dots, j - \kappa$) – узлы и веса квадратурной формулы Гаусса на отрезке $[\tau_\kappa, \tau_j]$, $d_{q\iota}$ – коэффициенты формулы численного дифференцирования порядка точности $\left(\frac{\tau}{m}\right)^{\tilde{r}}$ ($r \leq \iota \leq \nu$, $r + \nu + 1 = q + \tilde{r}$), а значения вектор-функции $A_q : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$ специальным образом строятся по значениям функций $a(t)$ и $Du_k(t)$.

Сходимость $x_{klm} \rightarrow x_{kl}$ при $m \rightarrow \infty$ следует из сходимости формулы Гаусса и точности формулы численного дифференцирования. Откуда, аналогично рассуждениям в доказательствах лемм 1 и 2, получаем, что $\lim_{m \rightarrow \infty} v_{klm} = v_{kl}$. Лемма 3 доказана.

Наконец, из лемм 1, 2 и 3 вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 4. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} v_{klm} = v.$$

4. Алгоритм нахождения приближения оптимального измерения

Опишем алгоритм численного нахождения приближения оптимального измерения. Для этого в качестве конечномерных пространств \mathfrak{U}^k возьмем пространства вектор-многочленов $u_k = u_k(t)$, имеющих вид

$$(16) \quad u_k(t) = \text{col} \left(\sum_{i=0}^k c_{1i} t^i, \sum_{i=0}^k c_{2i} t^i, \dots, \sum_{j=0}^k c_{ni} t^i \right).$$

Определим множество $\mathfrak{U}_{\partial}^k$ с помощью условия $\|u_k\| \leq R$ при некотором $R > 0$.

Сам алгоритм численного нахождения приближения оптимального измерения состоит из семи этапов, последний из которых состоит в минимизации методом градиентного спуска.

Этап 1. Ввод начальных данных: размерности модели n , матриц L , M , D , N и F , функций $a(t)$ и $b(t)$, длины отрезка интегрирования τ , параметра ε , определяющего приоритеты оптимизации, вектор-функции наблюдения $\tilde{y}(t)$, старшего порядка k вектор-многочленов (16), константы R , определяющей $\mathfrak{U}_{\partial}^k$, точности вычислений δ .

Этап 2. Проверка условия $\det M \neq 0$ при заданной точности δ . Если это условие не выполнено, то выбрать α так, чтобы $\det(M - \alpha L) \neq 0$, провести замену из замечания 1 и продолжить выполнение алгоритма.

Этап 3. Найти порядок полюса p в бесконечно удаленной точке для матриц-функции $(\mu L - M)^{-1}$.

Этап 4. Найти значение l , для которого можно вычислять второе приближение оптимального управления: $l = \max\{l_1, l_2, p + 1\}$, где l_1, l_2 определяются следующим образом:

$$l_1 = \frac{1}{d} \sum_{i=0}^q |d_i| + 1, \quad l_2 = \frac{1}{dp^p} \sum_{i=0}^q |d_i| (p + 1)^{n-1} + 1,$$

где $d = \max\left\{1, \sum_{i=0}^q |d_i|\right\}$, а d_i – коэффициенты полинома $\det(\mu L - M)$ и d_q – его старший ненулевой коэффициент.

Этап 5. Задав количество узлов m квадратурной формулы Гаусса, найти узлы τ_j и веса w_j на отрезке $[0, \tau]$, а также узлы s_r и веса ϖ_r формулы Гаусса на отрезке $[\tau_\kappa, \tau_j]$. Вычислить значения $a(s_r)$, $\tilde{y}(\tau_j)$, а также коэффициенты численного дифференцирования d_{qi} и значения $a(\tau_j + \iota \frac{\tau}{m})$ и $Du_k(\tau_j + \iota \frac{\tau}{m})$.

Этап 6. В качестве начальных значений $c_{ji}^{(0)}$ возьмем нулевые значения и для них вычислим x_{klm} по формуле (15), y_{klm} , подставив x_{klm} вместо x_{kl} в (12), и $J_{lm}(u_k)$ по формуле (14).

Этап 7. Решается задача (13), (14) с u_k из (16) относительно коэффициентов c_{ji} как задача выпуклого программирования на множестве \mathfrak{U}_∂^k . Для решения этой задачи будем использовать алгоритм скорейшего градиентного спуска. Распишем его по шагам.

Шаг 1. Задать относительный шаг дифференцирования Δ и положить счетчик числа итераций $\ell = 0$.

Шаг 2. Определить направление градиента по коэффициентам c_{ji} штрафного функционала $J_{lm}(u_k) = J(c_{10}, \dots, c_{1k}, c_{20}, \dots, c_{2k}, c_{30}, \dots, c_{nk})$ по формуле

$$\nabla J(\overline{c}^{(\ell)}) = \left(\frac{\partial J(\overline{c}^{(\ell)})}{\partial c_{10}}, \dots, \frac{\partial J(\overline{c}^{(\ell)})}{\partial c_{1k}}, \frac{\partial J(\overline{c}^{(\ell)})}{\partial c_{20}}, \dots, \frac{\partial J(\overline{c}^{(\ell)})}{\partial c_{nk}} \right)$$

в точке $\overline{c}^{(\ell)} = (c_{10}^{(\ell)}, \dots, c_{1k}^{(\ell)}, c_{20}^{(\ell)}, \dots, c_{2k}^{(\ell)}, c_{30}^{(\ell)}, \dots, c_{nk}^{(\ell)})$. Для нахождения значений частных производных $\frac{\partial J(\overline{c}^{(\ell)})}{\partial c_{ji}}$ воспользуемся стандартной разностной формулой с заданным шагом Δ .

Шаг 3. Проверить условие продолжения поиска

$$\left\| \nabla J(\overline{c}^{(\ell)}) \right\| > \delta \quad \text{и} \quad u_k \in \mathfrak{U}_\partial^k.$$

Если условие нарушено, то расчет окончен и $\overline{c}^* = \overline{c}^{(\ell)}$, иначе перейти к следующему шагу.

Шаг 4. Найти шаг h_ℓ по формуле

$$h_\ell = \frac{(\nabla J(\overline{c^{(\ell)}}), \nabla J(\overline{c^{(\ell)}}))}{(H_J(\overline{c^{(\ell)}}) \nabla J(\overline{c^{(\ell)}}), \nabla J(\overline{c^{(\ell)}}))},$$

используя результаты вычислений шага 2 и стандартные разностные формулы с заданным относительным шагом дифференцирования Δ для вычислений элементов матрицы Гессе $H_J(\overline{c^{(\ell)}})$ в точке $\overline{c^{(\ell)}}$.

Шаг 5. Определить координаты следующей точки

$$\overline{c^{(\ell+1)}} = \overline{c^{(\ell)}} - h_\ell \nabla J(\overline{c^{(\ell)}}),$$

положить $\ell = \ell + 1$ и перейти к шагу 2.

В результате приближение оптимального измерения, найденное численно, будет иметь вид

$$v_{klm}(t) = \text{col} \left(\sum_{i=0}^k c_{1i}^* t^i, \sum_{i=0}^k c_{2i}^* t^i, \dots, \sum_{j=0}^k c_{ni}^* t^i \right).$$

5. Заключение

В статье описана математическая модель измерительного устройства, которая позволяет находить измерение по наблюдению. При этом данная модель учитывает помехи, воздействующие на ИУ разного вида, а именно: инерционность ИУ, резонансы в его цепях, а также воздействие деградации ИУ в процессе его эксплуатации. В статье представлен и обоснован алгоритм численного нахождения приближений оптимального измерения. В дальнейшем планируется выполнение третьей части исследования задачи оптимального измерения, т.е. реализация данного алгоритма в виде программы и проведение вычислительных экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грановский В.А. Динамические измерения. Основы метрологического обеспечения. Л.: Энергоатомиздат, 1984.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
3. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
4. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шшиатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
5. Шестаков А.Л. Модальный синтез измерительного преобразователя // Проблемы управления и информатики. 1995. № 4. С. 67–75.
6. Шестаков А.Л. Методы теории автоматического управления в динамических измерениях. Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2013.

7. Деруссо П., Роу Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. М.: Наука, 1970.
8. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
9. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976.
10. Шестаков А.Л., Свиридюк Г.А. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2010. № 16 (192). С. 116–120.
11. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Keller A.V. The Theory of Optimal Measurements // J. Comp. Eng. Math. 2014. V. 1. No. 1. P. 3–15.
12. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Keller A.V. Optimal Measurements // XXI IMEKO World Congr. “Measurement in Research and Industry”. 2015. ID 116100.
13. Shestakov A.L., Sagadeeva M.A., Manakova N.A., Keller A.V., Zagrebina S.A., Zamyshlyayeva A.A., Sviridyuk G.A. Optimal Dynamic Measurements in Presence of the Random Interference // J. Phys.: Conf. Series. 2018. V. 1065. No. 21. ID 212012.
14. Keller A.V. On the Computational Efficiency of the Algorithm of the Numerical Solution of Optimal Control Problems for Models of Leontieff Type // J. Comp. Eng. Math. 2015. V. 2. No. 2. P. 39–59.
15. Keller A.V., Sagadeeva M.A. Degenerate Matrix Groups and Degenerate Matrix Flows in Solving the Optimal Control Problem for Dynamic Balance Models of the Economy // Semigroups of Operators – Theory and Applications. SOTA 2018. Springer Proc. in Mathematics & Statistics. V. 325. Cham: Springer, 2020. P. 263–277.
16. Шестаков А.Л., Келлер А.В., Назарова Е.И. Численное решение задачи оптимального измерения // АИТ. 2012. № 1. С. 107–115.
Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. Numerical Solution of the Optimal Measurement Problem // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 1. P. 97–104.
17. Keller A.V., Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Khudyakov Y.V. The Numerical Algorithms for the Measurement of the Deterministic and Stochastic Signals // Semigroups of Operators – Theory and Applications. SOTA 2013. Springer Proc. in Mathematics & Statistics. V. 113. Cham: Springer, 2015. P. 183–195.
18. Sagadeeva M.A. Mathematical Bases of Optimal Measurements Theory in Nonstationary Case // J. Comp. Eng. Math. 2016. V. 3. No. 3. P. 19–32.
19. Леонтьев В.В. Экономические эссе. Теории, исследования, факты, политика. М.: Политиздат, 1990.
20. Бояринцев Ю.Е. Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы. Новосибирск: Наука, 2000.
21. März R. On Initial Value Problems in Differential-algebraic Equations and Their Numerical Treatment // Computing. 1985. V. 35. No. 1. P. 13–37.
22. Белов А.А., Курдюков А.П. Дескрипторные системы и задачи управления. М.: Физматлит, 2015.
23. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Khudyakov Y.V. Dynamical Measurements in the View of the Group Operators Theory // Semigroups of Operators – Theory and Applications. SOTA 2013. Springer Proc. in Mathematics & Statistics. V. 113. Cham: Springer, 2015. P. 273–286.
24. Келлер А.В., Загребина С.А. Некоторые обобщения задачи Шоултера – Сидорова для моделей соболевского типа // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2015. Т. 8. № 2. С. 5–23.

25. *Shestakov A.L., Keller A.V., Zamyshlyayeva A.A., Manakova N.A., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A.* The Optimal Measurements Theory as a New Paradigm in the Metrology // J. Comp. Eng. Math. 2020. V. 7. No. 1. P. 3–23.
26. *Khudyakov Yu.V.* On Mathematical Modeling of the Measurement Transducers // J. Comp. Eng. Math. 2016. V. 3. No. 3. P. 68–73.
27. *Khudyakov Yu.V.* On Adequacy of the Mathematical Model of the Optimal Dynamic Measurement // J. Comp. Eng. Math. 2017. V. 4. No. 2. P. 14–25.
28. *Гантмахер Ф.П.* Теория матриц. М.: Физматлит, 2004.
29. *Сагадеева М.А.* Построение наблюдения для задачи оптимального динамического измерения по искаженным данным // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2019. Т. 12. № 2. С. 82–96.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 30.07.2020

После доработки 03.09.2020

Принята к публикации 10.09.2020

© 2021 г. А.В. ЮРЧЕНКОВ, канд. физ.-мат. наук
(alexander.yurchenkov.@yandex.ru)

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва)

ЛЕММА ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ АНИЗОТРОПИЙНОЙ НОРМЫ ДЛЯ СИСТЕМ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ ПРИ НЕЦЕНТРИРОВАННОМ ВОЗМУЩЕНИИ¹

Рассмотрена дискретная линейная нестационарная система с мультипликативными шумами, на которую действует окрашенное внешнее возмущение с ненулевым первым моментом. Мультипликативные шумы моделируются в виде линейных комбинаций детерминированных матриц с взаимно независимыми случайными коэффициентами. Для указанной системы описан способ вычисления анизотропийной нормы, использующий реализацию в пространстве состояний, в терминах уравнений Риккати.

Ключевые слова: мультипликативные шумы, нестационарная система, нецентрированные возмущения, анизотропия, анизотропийная норма.

DOI: 10.31857/S0005231021010037

1. Введение

В теории управления одна из центральных проблем связана с решением задачи подавления влияния внешних возмущений. Интерес к упомянутой задаче появился еще в середине XX в. [1]. Позднее была сформулирована и решена задача о подавлении ограниченных возмущений [2–4]. Синтезируемые оптимальные регуляторы при указанном подходе не лишены недостатков — они имеют большой порядок. Более того, как указано в [5], построение оптимальных регуляторов для непрерывных систем в случае ограниченных внешних возмущений вызывает дополнительные сложности. В рамках \mathcal{H}_2 -оптимизации возмущение предполагается случайным с известными статистическими характеристиками, при решении задач \mathcal{H}_∞ -оптимизации внешнее возмущение выбирается из класса квадратично интегрируемых (для непрерывных систем) или квадратично суммируемых (для дискретных систем) функций времени [6]. Принадлежность возмущений к тому или иному классу влияет на выбор критерия оптимальности, а с ним и на выбор регуляторов. При этом \mathcal{H}_∞ -регуляторы вносят излишний консерватизм в динамику системы со слабо окрашенными возмущениями на входе, тогда как \mathcal{H}_2 -регуляторы не обеспечивают робастность по отношению к неопределенностям в системе и сильно окрашенным возмущениям.

Наряду с работами по смешанному $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ критерию [7, 8], около четверти века назад появились первые исследования, использующие стохастический

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-31-00067 мол_а, 18-07-00269 А).

подход к \mathcal{H}_∞ -оптимизации [9–12]. Введенное понятие анизотропии случайного вектора позволило ввести меру неопределенности возмущения, таким образом смягчая требования точного знания статистических характеристик внешнего возмущения и не внося излишний консерватизм, свойственный \mathcal{H}_∞ -оптимальным регулятором. Средняя анизотропия (в пределе на единицу времени неограниченно растущих фрагментов) стационарных гауссовских последовательностей и связанная с ней анизотропийная норма линейных стационарных систем позволили ставить и решать задачи анизотропийного анализа и синтеза для таких систем в установившемся режиме, что впоследствии было обобщено в [13, 14] и на нестационарные постановки на конечных интервалах.

За последние несколько лет значительно возрос интерес к моделям систем с мультипликативными шумами, поскольку такие модели эффективно описывают динамику популяций, химических реакций, финансовой математики, биомеханические системы [15, 16], а также работу сети датчиков со случайными отказами [17]. Были решены задачи анализа и фильтрации в рамках \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ теорий как для непрерывных, так и для дискретных систем [18–21]. Также были предприняты попытки использования анизотропийного анализа и синтеза для систем с мультипликативными шумами в публикации [22], но приведенные там результаты нуждаются в разработке численного алгоритма для решения полученной системы уравнений. В [23, 24] был рассмотрен вопрос анизотропийного анализа стационарных систем с мультипликативными шумами, на основе которого был предложен синтез управления по состоянию и выходу в [25, 26]. Упомянутые публикации рассматривали мажоранту анизотропийной нормы замкнутой системы, поэтому результаты носили оценочный характер. В [27] был предложен метод анизотропийного анализа стохастической системы, на основе которого в данной статье будет исследован вопрос вычисления анизотропийной нормы нестационарной системы с мультипликативными шумами на конечном горизонте при ненулевом среднем возмущения. Также вопрос анализа для нецентрированных возмущений ранее уже рассматривался в [28–30], но для обыкновенных систем без мультипликативного шума.

Статья организована следующим образом: в разделе 2 содержатся основные сведения и обозначения, необходимый минимум из анизотропийной теории управления, в разделе 3 ставится и решается задача вычисления анизотропийной нормы, раздел 4 содержит численный пример, в разделе 5 дается краткое заключение.

2. Элементы анизотропийной теории

Рассмотрим сначала класс тех случайных векторов W со значениями в \mathbb{R}^m , которые отличны от нуля с вероятностью единица и при этом единичный случайный вектор направления $\xi = W/|W|$ имеет абсолютно непрерывное вероятностное распределение Q на единичной сфере \mathbb{S}_m в \mathbb{R}^m . Для любого такого W определен функционал анизотропии [10]:

$$(1) \quad \mathbf{A}_o(W) = \mathbf{D}(Q||U_m) = \mathbf{E}[\ln g(\xi)] = \int_{\mathbb{S}_m} g(s) \ln g(s) U_m(ds),$$

где $\mathbf{E}[\cdot]$ — математическое ожидание, $\mathbf{D}(Q||U_m)$ — относительная энтропия Q относительно равномерного распределения U_m на \mathbb{S}_m (совпадающая со взятой с противоположным знаком дифференциальной энтропией Q относительно U_m) и $g = \frac{dQ}{dU_m}$ — производная Радона—Никодима (плотность распределения вероятности для единичного случайного вектора ξ относительно U_m). Таким образом, $\mathbf{A}_o(W)$ характеризует неравномерность распределения случайного вектора W по направлениям. Величина $\mathbf{A}_o(W)$ всегда неотрицательна, причем равенство ее нулю достигается лишь в случае, когда единичный вектор направления ξ равномерно распределен на сфере \mathbb{S}_m .

Однако вместо величины (1) обычно используют ее верхнюю границу $\mathbf{A}(W)$, введенную в [13, 14] (как многомерную версию рассмотренного в [31] функционала энергии-энтропии) для более узкого класса абсолютно непрерывно распределенных случайных векторов W в \mathbb{R}^m с конечными вторыми моментами следующим образом:

$$(2) \quad \mathbf{A}(W) = \inf_{\lambda > 0} \mathbf{D}(f||p_{m,\lambda}) = \frac{m}{2} \ln \left(\frac{2\pi e}{m} \mathbf{E}[|W|^2] \right) - h(W),$$

где f — плотность распределения вероятностей вектора W относительно лебеговой меры в \mathbb{R}^m , $h(W) = -\mathbf{E}[\ln f(W)] = -\int_{\mathbb{R}^m} f(w) \ln f(w) dw$ — дифференциальная энтропия, λ — положительный параметр, определяющий плотность

$$p_{m,\lambda}(x) = (2\pi\lambda)^{-m/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\lambda}\right), \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

изотропного гауссовского распределения в \mathbb{R}^m с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей λI_m , где I_m — единичная матрица порядка m . Величину $\mathbf{A}(W)$ называют анизотропией случайного вектора W , причем эта величина имеет простой содержательный смысл: она показывает насколько “велико” отклонение распределения вектора W от класса изотропных гауссовских распределений в \mathbb{R}^m . Если случайный вектор имеет гауссовское распределение с нулевым средним и ковариационной матрицей Σ , то анизотропия такого вектора может быть посчитана согласно формуле из [14]:

$$\mathbf{A}(W) = -\frac{1}{2} \ln \det \left(\frac{m\Sigma}{\text{tr}\Sigma} \right),$$

здесь и далее $\text{tr}(\cdot)$ обозначает след соответствующей матрицы.

В [28] определение анизотропии вектора (2) применялось к нецентрированным возмущениям. Если случайный m -мерный вектор распределен по нормальному закону с математическим ожиданием μ и ковариационной матрицей Σ , то его анизотропию можно вычислить следующим образом [29]:

$$(3) \quad \mathbf{A}(W) = -\frac{1}{2} \ln \det \left(\frac{m\Sigma}{\text{tr}\Sigma + |\mu|^2} \right).$$

В анизотропийной теории используют свой критерий качества — анизотропийную норму. Чтобы ввести это понятие, рассмотрим произвольную матрицу F из пространства $\mathbb{R}^{p \times m}$. Эта матрица будет играть роль линейного оператора для случайного m -мерного вектора $W \in \mathcal{L}_2^m$. Здесь и далее через \mathcal{L}_2^m

обозначается гильбертово пространство случайных векторов со значениями в \mathbb{R}^m и конечными вторыми моментами. Рассмотрим коэффициент усиления

$$(4) \quad \mathbf{Q}(F, W) = \frac{\|FW\|}{\|W\|},$$

где $FW \in \mathcal{L}_2^p$, $\|x\| = \sqrt{\mathbf{E}[|x|^2]}$ для случайного вектора x и $\|X\| = \sqrt{\text{tr } \mathbf{E}[X^T X]}$ для случайной матрицы X . В данной статье предполагается, что матрица F и вектор W взаимно независимы, вследствие чего имеет место равенство $\mathbf{E}[FW] = \mathbf{E}[F] \mathbf{E}[W]$, а также используется инвариантность следа произведения матриц относительно их циклической перестановки:

$$\|FW\|^2 = \text{tr } \mathbf{E}[W^T F^T FW] = \text{tr } \mathbf{E}[F^T F W W^T] = \text{tr}(\mathbf{E}[F^T F] \mathbf{E}[W W^T]).$$

Последнее равенство, являющееся следствием предположения о независимости F и W , позволяет привести (4) к виду

$$(5) \quad \mathbf{Q}(F, W) = \sqrt{\frac{\text{tr}(\Lambda \Sigma)}{\text{tr } \Sigma}},$$

где $\Lambda = \mathbf{E}[F^T F]$, $\Sigma = \mathbf{E}[W W^T]$. Максимальное значение $\mathbf{Q}(F, W)$ совпадает со стохастической операторной нормой матрицы F :

$$\max_{W \in \mathcal{L}_2^m} \mathbf{Q}(F, W) = \|F\|_\infty = \bar{\sigma}(F),$$

где $\bar{\sigma}(F) = \max_{1 \leq k \leq m} \sqrt{\lambda_k(\Lambda)}$ — стохастическая интерпретация максимального сингулярного значения F . Этот случай реализуется, если вектор W имеет направление, совпадающее с направлением собственного вектора матрицы Λ , отвечающего максимальному собственному значению этой матрицы.

В некотором смысле “нейтральное” значение коэффициент усиления $\mathbf{Q}(F, W)$ принимает для случайных векторов W с изотропными вероятностными распределениями. В этом случае он совпадает с масштабированным стохастическим аналогом фробениусовой нормы матрицы F :

$$\mathbf{Q}(F, W) = \frac{1}{\sqrt{m}} \|F\|_2 = \sqrt{\frac{\text{tr } \Lambda}{m}},$$

такое значение достигается на векторах с равномерным распределением на единичной сфере.

Введем множество векторов с ограниченным уровнем анизотропии:

$$(6) \quad \mathbf{W}_a = \left\{ W \in \mathcal{L}_2^m : \mathbf{A}(W) \leq a \right\}.$$

Аналогично [11] показывается, что при увеличении уровня анизотропии a от 0 до ∞ в пределах от $\|F\|_2 / \sqrt{m}$ до $\|F\|_\infty$ изменяется соответствующее максимальное значение коэффициента усиления (4), описываемое анизотропийной нормой. Сама анизотропийная норма вводится следующим образом:

$$(7) \quad \|F\|_a = \sup_{W \in \mathbf{W}_a} \mathbf{Q}(F, W).$$

Для случая нецентрированного вектора W с произвольной матрицей Σ оптимизационная задача (7) рассматривается при дополнительных ограничениях на первые два момента, см. [28]. Представим вектор W в виде суммы центрированного вектора \widetilde{W} и постоянного вектора $\mu = \mathbf{E}[W]$. Тогда коэффициент усиления $\mathbf{Q}(F, W)$ принимает вид:

$$(8) \quad \mathbf{Q}(F, W) = \sqrt{\frac{\mathbf{E}[|F\widetilde{W}|^2] + \mathbf{E}[|F\mu|^2]}{\mathbf{E}[|\widetilde{W}|^2] + |\mu|^2}}.$$

Соответственно в [28] показано, что анизотропийная норма для системы F с дополнительными ограничениями на первые два момента относительно внешнего возмущения будет равняться следующему:

$$(9) \quad \|F\|_a = \sup_{W \in \mathbf{W}_a} \sqrt{\frac{\text{tr}(\Lambda\Sigma) + \mathbf{E}[|F\mu|^2]}{\text{tr}\Sigma + |\mu|^2}}$$

при дополнительном ограничении на первые два момента:

$$|\mu| \geq \tau, \quad \text{tr}\Sigma \leq \sigma,$$

где $\tau \in [0; 1)$ представляет собой заданный параметр нецентрированности, описывающий условие $\frac{|\mu|}{\sqrt{|\mu|^2 + \text{tr}\Sigma}} \geq \tau$.

В [28] было показано, что при введенных ограничениях на первые два момента возможно масштабированием добиться выполнения условия $\sigma + \tau^2 = 1$, поскольку анизотропия последовательности инвариантна относительно поворота системы координат и масштабирования. Тогда условие (9) можно привести к виду

$$(10) \quad \|F\|_{a,\tau} = \sup_{\Sigma, e_0} \left\{ \left(\text{tr}(\Lambda\Sigma) + \mathbf{E}[|Fe_0|^2] \tau^2 \right)^{1/2} \left| - \frac{1}{2} \ln \det(m\Sigma) \leq a, \sigma + \tau^2 = 1 \right. \right\},$$

где $\tau = |\mu|$, e_0 — направляющий единичный вектор среднего. Поскольку целевой функционал в (10) зависит от двух параметров Σ и e_0 , то поиск супремума может быть разделен на поиск супремума каждого слагаемого в отдельности. Второе слагаемое достигает своего максимального значения, когда единичный вектор e_0 совпадает с собственным вектором матрицы $\mathbf{E}[F^T F]$, отвечающим максимальному собственному числу, при этом $\mathbf{E}[|Fe_0|^2] = \bar{\sigma}^2(\Lambda)$.

Первое слагаемое $\text{tr}(\Lambda\Sigma)$ при условии $-\frac{1}{2} \ln \det(m\Sigma) \leq a$, $\text{tr}\Sigma + \tau^2 = 1$ представляет собой задачу условной максимизации, которая может быть решена методом множителей Лагранжа. Подробно решение описано в [28], здесь же приводится только результат.

Теорема 1 [28]. Если анизотропия внешнего возмущения с ненулевым средним μ не превосходит порогового значения a , то для некоторого положительного параметра $\tau \in [0; 1)$ анизотропийная норма системы F при дополнительных ограничениях на возмущение вида $|\mu| \geq \tau$, $\text{tr} \Sigma \leq 1 - \tau^2$ может быть вычислена с помощью следующих функций:

$$\|F\|_{a,\tau} = \mathcal{N}(A_\tau^{-1}(a), \tau),$$

где

$$(11) \quad \Phi(q) = \frac{1}{m} \text{tr} \left((I_m - q\Lambda)^{-1} \right),$$

$$(12) \quad \Psi(q) = \frac{1}{m} \ln \det \left((I_m - q\Lambda)^{-1} \right),$$

$$(13) \quad \mathcal{A}_\tau(q) = \frac{m}{2} \left(\ln \left(\frac{\Phi(q)}{1 - \tau^2} \right) - \Psi(q) \right),$$

$$(14) \quad \mathcal{N}_\tau(q) = \left(\frac{\Phi(q) - 1}{q\Phi(q)} (1 - \tau^2) + \|F\|_\infty^2 \tau^2 \right)^{1/2},$$

параметр $q \in [0; \|F\|_\infty^{-2})$, m – размерность возмущения, $\Lambda = F^T F$, в случае случайной матрицы F , $\Lambda = \mathbf{E}[F^T F]$.

3. Основной результат

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную дискретную нестационарную систему с мультипликативными шумами с нулевыми начальными условиями $x(0) = 0$ на конечном временном интервале:

$$(15) \quad F \sim \begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k w_k, \\ z_k = C_k x_k + D_k w_k, \end{cases}$$

где $A_k \in \mathcal{L}_2^{n \times n}$, $B_k \in \mathcal{L}_2^{n \times m}$, $C_k \in \mathcal{L}_2^{p \times n}$, $D_k \in \mathcal{L}_2^{p \times m}$, индекс времени принадлежит интервалу $k \in \{0, \dots, N\}$. Каждая из матриц в (15) представляет собой линейную комбинацию зависящих от времени детерминированных матриц со случайными коэффициентами:

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{i=0}^M \xi_{i,k}^A A_{i,k}, & B_k &= \sum_{i=0}^M \xi_{i,k}^B B_{i,k}, \\ C_k &= \sum_{i=0}^M \xi_{i,k}^C C_{i,k}, & D_k &= \sum_{i=0}^M \xi_{i,k}^D D_{i,k}. \end{aligned}$$

Слагаемые $A_{i,k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_{i,k} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_{i,k} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ и $D_{i,k} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ – неслучайные действительные матрицы; одномерные случайные величины $\xi_{i,k}^\Omega$,

$\Omega = \{A, B, C, D\}$, $i = \overline{0, M}$, нормально распределены, имеют нулевое среднее и единичную дисперсию; величины $\xi_{0,k}^\Omega = 1$ по обозначению. Последнее условие приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[A_k] &= A_{0,k}, & \mathbf{E}[B_k] &= B_{0,k}, \\ \mathbf{E}[C_k] &= C_{0,k}, & \mathbf{E}[D_k] &= D_{0,k}, \end{aligned}$$

которые будут в дальнейшем использованы. Все случайные величины $\xi_{i,k}^\Omega$ полагаются независимыми в совокупности для всех значений индексов $i = \overline{0, M}$, $k = \overline{0, N}$, $\Omega = \{A, B, C, D\}$, т.е. $\mathbf{E}[\xi_{i,k}^\alpha \xi_{j,t}^\beta] = (\delta_{i,j} \delta_{k,t} \delta_{\alpha,\beta})$, где $\delta_{i,j}$, $\delta_{k,t}$ и $\delta_{\alpha,\beta}$ — символы Кронекера.

Введем обозначение $W_{0:N} = (w_0^T, \dots, w_N^T)^T$, $Z_{0:N} = (z_0^T, \dots, z_N^T)^T$, тогда систему (15) можно переписать в виде

$$Z_{0:N} = F_{0:N} W_{0:N},$$

где $F_{0:N}$ — блочно-нижнетреугольная матрица с блоками

$$f_{k,j} = \begin{cases} C_k T_{k,j} B_j, & \text{если } k > j, \\ D_k, & \text{если } k = j, \\ 0, & \text{если } k < j, \end{cases} \quad T_{k,j} = \begin{cases} I_n, & k = j + 1, \\ A_{k-1} T_{k-1,j}, & k > j + 1. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу вычисления анизотропийной нормы (9) системы (15) с некоррелированными мультипликативными шумами и нецентрированным возмущением из класса (6) при условии $|\mathbf{E}(W)| > \tau$.

3.2. Критерий изометричности

В дальнейшем для некоторой вспомогательной системы, описываемой уравнениями типа (15) на том же временном интервале, понадобится использование условия изометричности, означающей равенство норм входа и выхода (для удобства формулируемое далее в терминах исходной системы):

$$\|Z_{0:N}\| = \|F_{0:N} W_{0:N}\| = \|W_{0:N}\|.$$

Последнее равенство с учетом взаимной независимости W и F будет выполняться, если $\mathbf{E}[F_{0:N}^T F_{0:N}] = \Lambda_{0:N}$ является единичной матрицей соответствующей размерности. Критерий изометричности можно получить в терминах матриц исходной системы (15).

Лемма 1. Чтобы система с мультипликативными шумами вида (15) была изометричной, необходимо и достаточно, чтобы для всех значений $k = \overline{0, N}$ матрицы реализации в пространстве состояний этой системы удовлетворяли уравнениям

$$(16) \quad \sum_{i=0}^M (B_{i,k}^T Q_{k+1} B_{i,k} + D_{i,k}^T D_{i,k}) = I_m,$$

$$(17) \quad P_k (A_{0,k}^T Q_{k+1} B_{0,k} + C_{0,k}^T D_{0,k}) = 0,$$

где грамианоподобные матрицы P_k и Q_{k+1} удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$(18) \quad P_{k+1} = A_{0,k} P_k A_{0,k}^T + B_{0,k} B_{0,k}^T,$$

$$(19) \quad Q_k = \sum_{i=0}^M (A_{i,k}^T Q_{k+1} A_{i,k} + C_{i,k}^T C_{i,k})$$

с граничными условиями $P_0 = 0$, $Q_{N+1} = 0$.

Доказательства леммы 1 и последующих леммы 2 и теоремы 2 приводятся в Приложении.

3.3. Наихудшее возмущение

Рассмотрим концепцию так называемого наилучшего возмущения, предложенная еще в [11], суть которой заключается в поиске такого линейного динамического объекта, генерирующего возмущение из класса (6), на котором достигается супремум выражения (9).

На каждом шаге вектор наилучшего возмущения w_k имеет вид

$$(20) \quad w_k = L_k \xi_k + S_k^{1/2} v_k + \nu_k,$$

где $L_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $S_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\nu_k \in \mathbb{R}^m$ — некоторые подлежащие определению величины, v_k — гауссовский “белый шум”, ξ_k — состояние следующей системы:

$$(21) \quad \xi_{k+1} = (A_{0,k} + B_{0,k} L_k) \xi_k + B_{0,k} S_k^{1/2} v_k.$$

Последнее слагаемое ν_k в (20) обеспечивает выполнение условия $|\mathbf{E}(W)| > \tau$. Если обозначить в качестве $\Sigma_{0:N}$ ковариационную матрицу последовательности $\{w_k\}$, то для некоторого параметра $q \in [0, \|F\|_\infty^{-2})$ будет верно соотношение

$$\Sigma_{0:N}^{-1} + q \Lambda_{0:N} = I_{m_N},$$

или

$$(22) \quad \Sigma_{0:N} = (I_{m_N} - q \Lambda_{0:N})^{-1},$$

где $m_N = m(N+1)$. Соотношение (22) соответствует условию изометричности системы

$$\Theta = \begin{bmatrix} \sqrt{q} F_{0:N} \\ G_{0:N}^{-1} \end{bmatrix},$$

где $F_{0:N}$ и $G_{0:N}$ — переходные матрицы системы (15) и (20) соответственно. Следующая лемма 2 позволяет рассчитать параметры L_k , S_k , соответствующие наилучшему возмущению (20).

Лемма 2. Для нестационарной системы с мультипликативными шумами на конечном временном интервале (15) наилучшее возмущение генерируется фильтром

$$(23) \quad G \sim \begin{cases} \xi_{k+1} = (A_{0,k} + B_{0,k}L_k)\xi_k + B_{0,k}S_k^{1/2}v_k, \\ w_k = L_k\xi_k + S_k^{1/2}v_k + \nu_k, \end{cases}$$

где $\xi_0 = 0$, а матрицы которого соответствуют решениям уравнений

$$(24) \quad R_{1,k} = \sum_{i=0}^M A_{i,k}^\top R_{1,k+1} A_{i,k} + q \sum_{i=0}^M C_{i,k}^\top C_{i,k}, \quad R_{1,M+1} = 0,$$

$$(25) \quad R_{2,k} = A_{0,k}^\top R_{2,k+1} A_{0,k} + L_k^\top S_k^{-1} L_k, \quad R_{2,M+1} = 0,$$

$$(26) \quad S_k = \left(I_m - q \sum_{i=0}^M D_{i,k}^\top D_{i,k} - \sum_{i=0}^M B_{i,k}^\top R_{1,k+1} B_{i,k} - B_{0,k}^\top R_{2,k+1} B_{0,k} \right)^{-1},$$

$$(27) \quad L_k = S_k (q D_{0,k}^\top C_{0,k} + B_{0,k}^\top R_{1,k+1} A_{0,k} + B_{0,k}^\top R_{2,k+1} A_{0,k}),$$

для некоторого значения параметра q , удовлетворяющего условию $\mathcal{A}_\tau(q) = a$.

3.4. Вычисление анизотропийной нормы

Чтобы воспользоваться теоремой 1, необходимо получить выражения для специальных функций (11)–(14) через матрицы пространства состояний системы (15). Сформулируем этот результат в следующем виде.

Теорема 2. Для системы (15) анизотропийная норма при ненулевом среднем возмущения, анизотропия которого не превышает значения a , может быть вычислена согласно выражению $\|F\|_{a,\tau} = \mathcal{N}_\tau(\mathcal{A}_\tau^{-1}(a))$, где $\mathcal{A}_\tau(q)$ и $\mathcal{N}_\tau(q)$ определяются согласно (13) и (14) соответственно, функции $\Phi(q)$ и $\Psi(q)$ имеют вид

$$(28) \quad \Phi(q) = \frac{1}{m_N} \sum_{k=0}^N \text{tr} (L_k \Upsilon_k L_k^\top + S_k),$$

$$(29) \quad \Psi(q) = \frac{1}{m_N} \sum_{k=0}^N \ln \det S_k,$$

где S_k , L_k связаны с уравнениями (24)–(27), матрицы Υ_k удовлетворяют уравнению

$$\Upsilon_{k+1} = (A_{0,k} + B_{0,k}L_k)\Upsilon_k(A_{0,k} + B_{0,k}L_k)^\top + B_{k,0}S_kB_{k,0}^\top$$

с начальным условием $\Upsilon_0 = 0$.

Замечание. Чтобы воспользоваться результатом теоремы 2, необходимо вычислить значение стохастической операторной нормы системы F , определив границу параметра q ; далее численно найти значение параметра q^* , для которого выполнено $\mathcal{A}_\tau(q^*) = a$, при фиксированном τ (это можно сделать, например, с помощью метода Ньютона), и вычислить $\mathcal{N}_\tau(q^*) = \|F\|_{a,\tau}$.

4. Численный пример

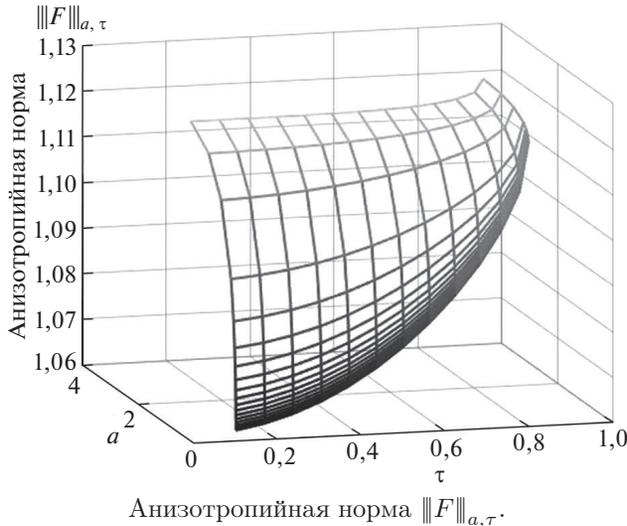
Работоспособность алгоритма вычисления анизотропийной нормы проиллюстрирована далее. В качестве объекта анализа выбрана видеоизмененная модель из [17]. Динамика модели описывается разностными уравнениями

$$F \sim \begin{cases} x_{k+1} = (A_{0,k} + \xi_k^A A_{1,k}) x_k + (B_{0,k} + \xi_k^B B_{1,k}) w_k, \\ z_k = (C_{0,k} + \xi_k^C C_{1,k}) x_k + (D_{0,k} + \xi_k^D D_{1,k}) w_k, \end{cases}$$

где условия относительно случайных величин ξ_k^* как и в системе (15), а матрицы имеют вид:

$$\begin{aligned} A_{0,k} &= \begin{bmatrix} 0 & -0,4 \\ 0,6 & 0,7 \sin(6k) \end{bmatrix}, & A_{1,k} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_{0,k} &= \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}, & B_{1,k} &= 0_{2 \times 1}, \\ C_{0,k} &= [0,3 \quad 0,2 \sin(6k)], & C_{1,k} &= [1 \quad 0], \\ D_{0,k} &= 1, & D_{1,k} &= 0. \end{aligned}$$

Поверхность, описывающая анизотропийную норму системы F в зависимости от параметров τ и a , представлена на рисунке. Для $N = 10$ были подсчитаны масштабированная \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -норма, они оказались равны $\|F\|_2 = 1,0611$ и $\|F\|_\infty = 1,1235$ соответственно. На рисунке можно заметить, что при фиксированном параметре τ анизотропийная норма с ростом анизотропии a также будет увеличиваться, приближаясь к значению \mathcal{H}_∞ -нормы, при стремлении параметров a и τ к нулю значение анизотропийной нормы близко к масштабированной \mathcal{H}_2 -норме.



5. Заключение

В статье решается задача анизотропийного анализа для системы с мультипликативными шумами при нецентрированном возмущении. Получены формулы вычисления анизотропийной нормы с помощью специальных функций и в пространстве состояний, основанные на лемме о вещественной ограниченности. Рассмотрен иллюстративный пример. Полученный результат может быть в дальнейшем применен к решению задачи фильтрации в рамках анизотропийной теории для систем с мультипликативными шумами.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Для доказательства рассмотрим блочную матрицу $\mathbf{E}[F_{0:N}^T F_{0:N}] = \Lambda_{0:N}$, которая для изометричной системы будет единичной порядка $m(N+1)$. Блоки этой матрицы имеют вид

$$\lambda_{i,j} = \sum_{k=\max\{i,j\}}^N \mathbf{E}[f_{k,i}^T f_{k,j}],$$

последний блок матрицы равен

$$\lambda_{N,N} = \mathbf{E}[D_N^T D_N] = \sum_{i=0}^M D_{i,N}^T D_{i,N} = I_m$$

вследствие взаимной независимости величин $\xi_{i,k}^D$ и $\xi_{j,k}^D$, блок с номером $N-1$ соответственно равен

$$\lambda_{N-1,N-1} = \sum_{i=0}^M (D_{i,N-1}^T D_{i,N-1} + B_{i,N-1}^T C_{i,N}^T C_{i,N} B_{i,N-1}) = I_m,$$

где

$$\sum_{i=0}^M C_{i,N}^T C_{i,N} = Q_N,$$

очевидно, что для последнего блока $\lambda_{N,N}$ необходимым является условие $Q_{N+1} = 0$. Далее по индукции легко показать, что соотношения (16) и (19) выполнены.

Рассмотрим элемент $\lambda_{i,j}$, где $i < j$,

$$\lambda_{i,j} = \mathbf{E} \left[B_{i-1}^T T_{i-1,j-1}^T (C_{j-1}^T D_{j-1} + A_{j-1}^T Q_j B_{j-1}) \right],$$

это равенство может быть приведено к виду

$$\lambda_{i,j} = B_{0,i-1}^T A_{0,i}^T \cdots A_{0,j-2}^T (C_{0,j-1}^T D_{0,j-1} + A_{0,j-1}^T Q_j B_{0,j-1}),$$

из-за предположения о независимости в совокупности величин $\xi_{i,k}^\Omega$, $\Omega = \{A, B, C, D\}$. Первые $j - 1$ элементов j -го столбца матрицы $\Lambda_{0:N}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} & [A_{0,j-2}A_{0,j-3} \cdots A_{0,1}B_{0,0}, \dots, A_{0,j-4}B_{0,j-3}, B_{0,j-2}]^T \times \\ & \times (C_{0,j-1}^T D_{0,j-1} + A_{0,j-1}^T Q_j B_{0,j-1}) = 0_{m(j-1) \times m}, \end{aligned}$$

умножив последнее равенство на

$$[A_{0,j-2}A_{0,j-3} \cdots A_{0,1}B_{0,0}, \dots, A_{0,j-4}B_{0,j-3}, B_{0,j-2}],$$

получаем выражение, аналогичное (17), с обозначением

$$P_{j-1} = B_{0,j-2}B_{0,j-2}^T + A_{0,j-2}P_{j-2}A_{0,j-2}^T,$$

совпадающее с (18).

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Доказательство основывается на обратимости матрицы S_k вследствие ее положительной определенности [27]. Далее следует применить лемму 1 к системе $[\sqrt{q}F^T, G^{-T}]$ с учетом обозначений (27) и (26), параметр q определяется в соответствии (22).

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 2. Доказательство теоремы повторяет предложенные в [28] рассуждения о вычислении анизотропийной нормы случайной матрицы.

Рассмотрим фильтр (23), генерирующий возмущение, на котором достигается супремум коэффициента усиления (8). Поскольку будет верно соотношение (22), будет достаточным связать вычисление специальных функций $\Phi(q)$ и $\Psi(q)$ с ковариационной матрицей возмущения $\Sigma_{0:N}(q)$. Рассмотрим отдельные блоки симметричной матрицы $G_{0:N}G_{0:N}^T$:

$$g_{i,j} = \begin{cases} L_i \Delta_{i,j+1} B_{0,j} S_j^{1/2}, & i > j, \\ S_j^{1/2}, & i = j, \\ 0, & i < j, \end{cases}$$

где $\Delta_{i,j} = (A_{0,i-1} + B_{0,i-1}L_{i-1})\Delta_{i-1,j}$ с граничным условием $\Delta_{i,i} = I_n$. Исходя из такого представления, получаем

$$\text{tr } \Sigma_{0:N} = \text{tr } \text{block}_{0 \leq i, 0 \leq j} \left\{ \sum_{k=0}^{\min\{i,j\}} g_{i,k} g_{j,k}^T \right\} = \sum_{k=0}^N \text{tr} (L_k \Upsilon_k L_k^T + S_k).$$

Последнее равенство означает справедливость формулы (28). Чтобы доказать (29), используем инвариантность определителя матрицы при ее транспонировании:

$$\det(G_{0:N}G_{0:N}^T) = \det(G_{0:N}^T G_{0:N}) = (\det G_{0:N})^2 = \prod_{k=0}^N \det S_k.$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Булгаков Б.В.* О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами // ДАН СССР. 1946. Т. 5. С. 339–342.
2. *Уланов Г.М.* Динамическая точность и компенсация возмущений в системах автоматического управления. М.: Машиностроение, 1971.
3. *Якубович Е.Д.* Решение задачи оптимального управления для линейных дискретных систем // АиТ. 1975. № 9. С. 73–79.
Yakubovich Ye.D. Solving One Problem of Optimal Control for a Discrete Linear System // Autom. Remote Control. 1975. V. 36. No. 9. P. 1447–1453.
4. *Vidyasagar M.* Optimal Rejection of Persistent Bounded Disturbances // IEEE Trans. Automat. Control. 1986. V. 31. P. 527–535.
5. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // АиТ. 2007. № 3. С. 106–125.
Nazin S.A., Polyak B.T., Topunov M.V. Rejection of Bounded Exogenous Disturbances by the Method of Invariant Ellipsoids // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 3. P. 467–486.
6. *Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A.* State-space Solutions to Standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ Control Problems // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. No. 8. P. 831–847.
7. *Doyle J.C., Zhou K., Bodenheimer B.* Optimal Control with Mixed \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ Performance Objectives // Proc. ACC. Pittsburg, 1989. P. 2065–2070.
8. *Steinbuch M., Bosgra O.H.* Necessary Conditions for Static and Fixed Order Dynamic Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Optimal Control // Proc. ACC. Boston, 1991. P. 1137–1142.
9. *Semyonov A.V., Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P.* Stochastic Approach to \mathcal{H}_∞ -Optimization // Proc. 33rd IEEE Conf. Decision and Control. 1994. V. 3. P. 2249–2250.
10. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* Anisotropy of Signals and the Entropy of Linear Stationary Systems // Doklady Math. 1995. V. 51. P. 388–390.
11. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* On Computing the Anisotropic Norm of Linear Discrete-time-invariant Systems // Proc. 13 IFAC World Congr. 1996. P. 179–184.
12. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* State-space Solution to Anisotropy-based Stochastic \mathcal{H}_∞ -Optimization Problem // Proc. 13 IFAC World Congr. 1996. P. 427–432.
13. *Vladimirov I., Diamond P., Kloeden P.* Anisotropy-based Robust Performance Analysis of Linear Discrete Time Varying Systems // CADSMAP Research Report, 2001 (http://www.maths.uq.edu.au/research/research_centres/cadsmap/reports.html).
14. *Владимиров И.Г., Даймонд Ф., Клоеден П.* Анзотропийный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале // АиТ. 2006. № 8. С. 92–111.
Vladimirov I.G., Diamond P., Kloeden P. Anisotropy-based Robust Performance Analysis of Finite Horizon Linear Discrete Time Varying Systems // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 8. P. 1265–1282.
15. *Gershon E., Shaked U., Yaesh I.* \mathcal{H}_∞ Control and Filtering of Discrete-Time Stochastic Systems with Multiplicative Noise // Automatica. 2001. V. 37. P. 409–417.
16. *Gershon E., Shaked U., Yaesh I.* \mathcal{H}_∞ Control and Estimation of State-multiplicative Linear Systems // Lecture Notes in Control and Information Sciences, V. 318. Springer-Verlag, 2005.

17. *Shen B., Wang Z., Hung Y.S.* Distributed \mathcal{H}_∞ -consensus Filtering in Sensor Networks with Multiple Missing Measurements: The Finite-horizon Case // *Automatica*. 2010. V. 46. P. 1682–1688.
18. *Домбровский В.В., Ляшенко Е.А.* Линейно-квадратичное управление дискретными системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами с применением к оптимизации инвестиционного портфеля // *АиТ*. 2003. № 10. С. 50–65.
Dombrovskii V.V., Lyashenko E.A. A Linear Quadratic Control for Discrete Systems with Random Parameters and Multiplicative Noise and Its Application to Investment Portfolio Optimization // *Autom. Remote Control*. 2003. V. 64. No. 10. P. 1558–1570.
19. *Barbosa K.A., de Souza C.E., Trofino A.* Robust filtering for uncertain linear systems with state-dependent noise // *Proc. IEEE Conf. Decision and Control*. 2003. V. 1. P. 880–885.
20. *Stoica A.-M., Dragan V., Yaesh I.* Kalman-Type Filtering for Stochastic Systems with State-Dependent Noise and Markovian Jumps // *Proc. 15th IFAC Symp. Syst. Ident.* 2009. P. 1375–1380.
21. *Dragan V., Morozan T., Stoica A.-M.* *Mathematical Methods in Robust Control of Discrete-Time Linear Stochastic Systems*. Springer, 2010.
22. *Stoica A.-M., Yaesh I.* On the anisotropic norm of discrete time stochastic systems with state dependent noises // *Ann. Acad. Rom. Sci. 2012. Ser. Math. Appl.* V. 4. P. 209–220.
23. *Kustov A.Yu., Kurdyukov A.P., Yurchenkov A.V.* On the Anisotropy-Based Bounded Real Lemma Formulation for the Systems with Disturbance-Term Multiplicative Noise // *IFAC-PapersOnLine*, 2016, V. 49(13). P. 65–69.
24. *Кустов А.Ю.* Условия ограниченности анизотропной нормы системы с мультипликативными шумами // *Матер. 13-й Междунар. конф. “Устойчивость и колебания нелинейных систем управления” (конф. Пятницкого)*. М.: ИПУ РАН, 2016. С. 235–237.
25. *Юрченко А.В.* Вычисление границы анизотропной нормы для дискретной системы с мультипликативными шумами // *Математика и математическое моделирование*. 2017. № 4. С. 28–41.
26. *Yurchenkov A.V.* Anisotropy-Based Controller Design for Linear Discret-Time Systems with Multiplicative Noise // *J. of Comput. and Syst. Sci. Int.* 2018. V. 57. No. 6. P. 864–873.
27. *Kustov A.Yu.* State-Space Formulas for Anisotropic Norm of Linear Discrete Time Varying Stochastic Systems // *Proc. 15th Int. Conf. on Electrical Eng., Comp. Science and Aut. Control (CCE)*. 2018. P. 6.
28. *Кустов А.Ю., Тимин В.Н.* Анизотропный анализ нестационарных систем на конечном интервале времени при нецентрированном возмущении // *АиТ*. 2017. № 6. С. 18–35.
Kustov A.Yu., Timin V.N. Anisotropy-based Analysis for Finite Horizon Time-varying Systems with Non-centered Disturbances // *Autom. Remote Control*. 2017. V. 78. No. 6. P. 974–988.
29. *Kustov A.Yu.* Anisotropy-based Analysis and Synthesis Problems for Input Disturbances with Nonzero Mean // *Proc. 15th Int. Carpathian Control Conf. (ICCC-2014)*. 2014. P. 291–295.
30. *Yurchenkov A.V.* On the Control Design for Linear Time-Invariant Systems with Moments Constraints of Disturbances in Anisotropy-based Theory // *IFAC-PapersOnLine*. 2018. V. 51. No. 32. С. 160–165.

31. *Bernhard H.P.* A Tight Upper Bound on the Gain of Linear and Nonlinear Predictors for Stationary Stochastic Processes // IEEE Trans. Signal Process. 1998. V. 46. No. 11. P. 2909–2917.
32. *Belov I.R., Yurchenkov A.V., Kustov A.Yu.* Anisotropy-Based Bounded Real Lemma for Multiplicative Noise Systems: the Finite Horizon Case // Proc. Med. Conf. Control and Autom. (MED'19). 2019. P. 148–152.

Статъа представена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 23.02.2020

После доработки 10.06.2020

Принята к публикации 09.07.2020

© 2021 г. М.В. МОРОЗОВ, канд. физ.-мат. наук (miguel@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

**КРИТЕРИЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
ПЕРИОДИЧЕСКОГО СЕЛЕКТОРНО-ЛИНЕЙНОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ**

Рассмотрено периодическое селекторно-линейное дифференциальное включение. Доказано, что для равномерной асимптотической устойчивости такого включения необходимо и достаточно существования периодической по времени функции Ляпунова квазиквадратичного вида. Получены оценки функции Ляпунова, которые гарантируют ее положительную определенность и существование у нее бесконечно малого высшего предела.

Ключевые слова: периодическое селекторно-линейное дифференциальное включение, функция Ляпунова.

DOI: 10.31857/S0005231021010049

1. Введение

Изучение систем управления привело к применению теории дифференциальных включений. Использованию дифференциальных включений в теории систем управления посвящена монография [1].

В некоторых случаях, например, таких как задача абсолютной устойчивости, исследование линейных нестационарных систем, матрица правой части которых удовлетворяет интервальным ограничениям, исследование устойчивости систем управления, которые содержат элементы с неполной информацией, могут быть использованы селекторно-линейные дифференциальные включения.

Автономным селекторно-линейным включением называется включение вида

$$(1) \quad \dot{x} \in F(x), \quad F(x) = \{y : y = Ax, A \in \Psi\},$$

где $x, y \in \mathbb{R}^n$, Ψ – множество в пространстве $(n \times n)$ -матриц. Включение вида (1) называют селекторно-линейным включением, поскольку многозначное отображение $F(x)$ в (1) представляет собой объединение линейных однозначных отображений (селекторов) Ax , $A \in \Psi$. В случае автономного селекторно-линейного включения правая часть включения (1) $F(x)$, матрица A , множество Ψ не зависят от времени. Говорят, что селекторно-линейное включение (1) асимптотически устойчиво, если его тривиальное решение $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво.

Автономным селекторно-линейным включениям посвящен ряд публикаций. В [2] для автономного селекторно-линейного дифференциального включения, у которого множество Ψ является выпуклым многогранником, разработан итерационный алгоритм построения функции Ляпунова из класса квадратичных форм. В [3, 4] для автономных селекторно-линейных дифференциальных включений, у которых множество Ψ является компактом, получены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения в виде существования функций Ляпунова различного вида. В [5–8] получены различные алгебраические критерии асимптотической устойчивости автономных селекторно-линейных дифференциальных включений, у которых множество Ψ является выпуклым многогранником.

В публикациях [9–11], посвященных периодическим по времени дифференциальным включениям, в основном рассматриваются вопросы существования периодических решений. Немного публикаций посвящено исследованию свойств решений и вопросу устойчивости периодических по времени дифференциальных включений. Так, например, в [12, 13] исследуются свойства слабой асимптотической и слабой экспоненциальной устойчивости положения равновесия периодического по времени дифференциального включения. Согласно приведенным в [12, 13] определениям положение равновесия рассматриваемого периодического дифференциального включения слабо асимптотически (слабо экспоненциально) устойчиво, если существует хотя бы одно решение включения, удовлетворяющее условиям обычных определений асимптотической (экспоненциальной) устойчивости положения равновесия дифференциального включения. В [12, 13] разработан метод исследования слабой асимптотической и слабой экспоненциальной устойчивости положения равновесия периодического по времени дифференциального включения, состоящий в построении включения первого приближения и исследовании свойств его решений.

В [14] рассмотрен ряд примеров, приводящих к системам с периодически меняющимися параметрами. В [15, 16] решены задачи абсолютной и робастной устойчивости систем управления с периодически изменяющимися параметрами. В частности, установлено, что рассматриваемые системы управления с периодическими параметрами эквивалентны, в смысле совпадения множеств абсолютно непрерывных решений, периодическим по времени селекторно-линейным дифференциальным и разностным включениям. В [17] для периодических селекторно-линейных дифференциальных включений с помощью вариационного подхода были получены критерии асимптотической устойчивости в общей форме, в виде некоторых предельных соотношений. Настоящая статья посвящена получению критерия асимптотической устойчивости периодических селекторно-линейных дифференциальных включений с помощью метода функций Ляпунова.

2. Постановка задачи

Рассмотрим селекторно-линейное периодическое дифференциальное включение вида

$$(2) \quad \dot{x} \in F(t, x), \quad F(t, x) = \{y : y = B(t)x, B(t) \in \Omega(t)\}, \quad \Omega(t + T) = \Omega(t),$$

где $x, y \in \mathbb{R}^n$, $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – многозначное отображение, функция $x(t) \equiv 0$ – положение равновесия дифференциального включения (2). $\Omega(t)$ – выпуклое, компактное множество действительных $(n \times n)$ -матриц. Предполагается, что элементы матрицы $B(t)$ являются периодическими с периодом $T > 0$, ограниченными и измеримыми функциями. Решением включения (2) будем называть абсолютно непрерывную вектор-функцию $x(t)$, определенную на интервале или отрезке I , которая почти всюду на I удовлетворяет (2). Многозначная функция $F(t, x)$ в некоторой области $G = \{0 \leq t \leq T, x \in G_R, G_R = \{x_0 : \|x_0\| \leq R\}\}$ удовлетворяет основным условиям [18, с. 60], т.е. при всех $(t, x) \in G$ множество $F(t, x) \subset \mathbb{R}^n$ непустое, ограниченное, замкнутое, выпуклое и функция $F(t, x)$ полунепрерывна сверху [18, с. 52] по (t, x) . В силу периодичности по t многозначной функции $F(t, x)$ при исследовании свойств решений $x(t, t_0, x_0)$ включения (2) без ограничения общности можно считать, что $t_0 \in [0, T]$.

Определение 1. Включение (2) называется равномерно устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что как только начальные условия $x(t_0) = x_0$ удовлетворяют условию $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$, решение $x(t, t_0, x_0)$ включения (2) с начальным условием x_0 удовлетворяет неравенству $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0 \geq 0$ и при любой матрице $B(t) \in \Omega(t)$.

Определение 1 требует наличия такой окрестности нуля, что решения, начинающиеся в этой окрестности, существуют для всех $t \geq 0$.

Определение 2. Включение (2) называется равномерно асимптотически устойчивым если выполнены условия определения 1 и равномерно относительно $B(t) \in \Omega(t)$, $t_0 \geq 0$ и x_0 из всякого шара $G_R = \{x_0 : \|x_0\| \leq R\}$ выполняется предельное соотношение $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, x_0) = 0$, т.е. для любых $\eta > 0$ и $R > 0$ существует такое $\tau(\eta, R) \geq 0$, что при всех $t \geq t_0 + \tau(\eta, R)$ для решений $x(t, t_0, x_0)$ включения (2) выполняется неравенство $\|x(t, t_0, x_0)\| < \eta$ при любом выборе $B(t) \in \Omega(t)$, начального момента времени t_0 и начального условия $x_0 \in G_R$.

Определение 3. Включение (2) называется равномерно экспоненциально устойчивым, если существуют такие числа $\alpha > 0$ и $\beta \geq 1$, что для любого решения $x(t, t_0, x_0)$ включения (2) выполнено неравенство

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \beta \|x_0\| \exp(-\alpha(t - t_0))$$

при любой матрице $B(t) \in \Omega(t)$ и любых $t_0 \geq 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Заметим, что определение неравномерной асимптотической устойчивости отличалось бы от определения 2 тем, что число δ зависело бы от $B(t) \in \Omega(t)$ и $t_0 \geq 0$, а величина τ зависела бы от $B(t) \in \Omega(t)$, $t_0 \geq 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Определение неравномерной экспоненциальной устойчивости отличалось бы от определения 3 тем, что числа α и β зависели бы от $B(t) \in \Omega(t)$, $t_0 \geq 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

В [17] для включения (2) доказана эквивалентность свойств равномерной асимптотической устойчивости и равномерной экспоненциальной устойчивости и с использованием вариационного подхода получено необходимое и достаточное условие равномерной асимптотической устойчивости в виде некоторого предельного соотношения.

В настоящее время основными методами анализа устойчивости дифференциальных включений являются метод функций Ляпунова и метод, основанный на исследовании первого приближения. В качестве первого приближения могут рассматриваться, например, выпуклые процессы — многозначные отображения специального вида [12, 13]. Центральное место в рамках метода функций Ляпунова занимает вопрос о построении функций Ляпунова с требуемыми свойствами, гарантирующими выполнение всех условий соответствующего определения устойчивости того или иного типа. Задача состоит в выделении класса функций Ляпунова, определяющих необходимые и достаточные условия равномерной асимптотической устойчивости включения (2).

3. Основной результат

Нестационарная функция Ляпунова $v(t, x)$, которая строится далее, является локально липшицевой, периодической (с периодом T) по $t \geq 0$, выпуклой по $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и, вообще говоря, не является непрерывно дифференцируемой по совокупности переменных (t, x) , что обычно предполагается в классических теоремах Ляпунова для нестационарного случая. По этой причине необходимо использовать понятие обобщенной производной функции Ляпунова $v(t, x)$ в силу дифференциального включения (2).

Под производной функции Ляпунова $v(t, x)$ в силу включения (2) будем понимать функцию

$$(3) \quad w(t, x) = \max_{y \in F(t, x)} D_y^+ v(t, x),$$

где функция

$$(4) \quad D_y^+ v(t, x) = \overline{\lim}_{h \rightarrow +0} h^{-1} [v(t + h, x + hy) - v(t, x)]$$

непрерывна по y , поскольку функция $v(t, x)$ удовлетворяет локальному условию Липшица.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы включение (2) было равномерно асимптотически устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы существовала периодическая по t с периодом T функция Ляпунова $v(t, x)$ вида

$$(5) \quad \begin{aligned} v(t, x) &= x' L(t, x), \\ L'(t, x) &= L(t, x) = L(t, \mu x), \quad x \neq 0, \quad \mu \neq 0, \quad v(t, 0) \equiv 0, \\ L(t + T, x) &= L(t, x), \end{aligned}$$

удовлетворяющая локальному условию Липшица при $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, строго выпуклая по $x \in \mathbb{R}^n$, положительно однородная (второй степени), производная которой в силу включения (2) удовлетворяет неравенству

$$(6) \quad w(t, x) = \max_{y \in F(t, x)} D_y^+ v(t, x) \leq -\gamma \|x\|^2, \quad \gamma > 0, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

при всех $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Функция Ляпунова (5) является выпуклой, и, вообще говоря, не является непрерывно дифференцируемой. Поэтому применение такой функции при исследовании устойчивости включения (2) связано с использованием обобщения классических теорем прямого метода Ляпунова. Применительно к случаю выпуклых функций Ляпунова такое обобщение сводится к тому, что вместо производной гладкой функции $v(t, x)$ в силу системы необходимо рассматривать одностороннюю производную по направлению векторного поля в соответствии с формулами (3), (4), поскольку выпуклая функция $v(t, x)$, вообще говоря, может не быть непрерывно дифференцируемой функцией, но имеет производные по любому направлению. В выпуклом случае производная (3), (4) в обобщенных теоремах Ляпунова второго метода Ляпунова играет ту же роль, что и производная в силу системы в случае гладких функций Ляпунова. При построении функции Ляпунова с помощью формулы (П.2) определяется функция $S(t, t_0, x_0)$, а затем с помощью формулы (П.11), в виде интеграла, определяется функция Ляпунова $v(t, x)$. Такая конструкция обеспечивает строгую выпуклость, положительную определенность $v(t, x)$ и отрицательную определенность ее производной $w(t, x)$. Свойство $L'(t, x) = L(t, x) = L(t, \mu x)$ непосредственно вытекает из выбранной конструкции функции Ляпунова. Оценка (6) гарантирует отрицательную определенность производной $w(t, x)$, что в соответствии с методом Ляпунова, примененным к включению (2), обеспечивает его равномерную асимптотическую устойчивость.

В отличие от классических теорем об асимптотической устойчивости [19], в которых требуется положительная определенность функции Ляпунова и существование у нее бесконечно малого высшего предела, в теореме ничего не говорится о таких свойствах функции $v(t, x)$. Это связано с тем, что в условиях теоремы указанные свойства функции $v(t, x)$ вида (5) вытекают из следующей леммы.

Лемма. Пусть непрерывная при $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ периодическая по t функция $v(t, x)$ строго выпукла и положительно однородна (степени $s \geq 2$) по $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (т.е. $v(t, \mu x) = \mu^s v(t, x)$ при всех $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu > 0$). Тогда существуют такие константы $\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$, что справедливы неравенства

$$(7) \quad \lambda_1 \|x\|^s \leq v(t, x) \leq \lambda_2 \|x\|^s$$

при всех $t \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство леммы приведено в Приложении.

В условиях леммы свойства положительной определенности и существования бесконечно малого предела функции $v(t, x)$ вытекают непосредственно из оценок (7).

4. Заключение

В публикациях, посвященных автономным селекторно-линейным дифференциальным включениям (1) со стационарным множеством Ψ , использова-

лись стационарные функции Ляпунова. В данной статье впервые рассмотрены периодические селекторно-линейные дифференциальные включения (2), где $\Omega(t)$ – периодическое, выпуклое, компактное множество действительных $(n \times n)$ -матриц. В [15] в связи с задачей абсолютной устойчивости был рассмотрен частный случай таких включений. Задача построения нестационарной функции Ляпунова для включения (2) ранее не рассматривалась.

Доказано, что для равномерной асимптотической устойчивости таких включений необходимо и достаточно существования единой, нестационарной (периодической по времени) функции Ляпунова квазиквадратичного вида. Получены оценки выбранной функции Ляпунова, которые гарантируют ее положительную определенность и существование у нее бесконечно малого высшего предела.

Класс функций Ляпунова (5) является обобщением на случай включения (2) квадратичных функций Ляпунова $v(t, x) = x'P(t)x$, $P(t) = P(t + T)$, определяющих необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости линейных периодических систем вида $\dot{x} = A(t)x$ с однозначной правой частью [19], и обобщением квазиквадратичных функций Ляпунова $v(x) = x'P(x)x$, построенных для автономного селекторно-линейного включения в (3).

В [17] для включения (2) установлена эквивалентность свойств равномерной асимптотической устойчивости и равномерной экспоненциальной устойчивости. Таким образом, доказанная в Приложении теорема является также критерием равномерной экспоненциальной устойчивости включения (2).

Полученный результат может найти применение при изучении устойчивости систем управления с периодическими параметрами, в частности следящих систем, элементы которых работают на переменном токе, систем управления с амплитудно-импульсной модуляцией и систем, используемых при решении задач, связанных с исследованием вибраций фрезерных станков.

Дальнейшее исследование рассмотренного в данной статье включения (2) может быть связано с получением условий слабой асимптотической и слабой экспоненциальной устойчивости. Представляет также интерес выделение класса функций Ляпунова, устанавливающих необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости периодических селекторно-линейных разностных включений.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы. Из условий леммы следует, что $v(t, 0) \equiv 0$ для всех $t \geq 0$ в силу положительной однородности функции $v(t, x)$. Так как функция $v(t, x)$ строго выпукла по $x \in \mathbb{R}^n$, то при любых $x \neq 0$ и μ ($0 < \mu < 1$) выполнено неравенство $v(t, \mu x + (1 - \mu)0) < \mu v(t, x) + (1 - \mu)v(t, 0)$ или $v(t, \mu x) < \mu v(t, x)$. Последнее неравенство можно переписать в виде $\mu(1 - \mu^{s-1})v(t, x) > 0$. Следовательно, $v(t, x) > 0$ для всех $x \neq 0$ и $t \geq 0$. Пусть $t \in [0, T]$. Так как функция $v(t, x)$ непрерывна, то функции $w_1(x) = \min_{t \in [0, T]} v(t, x)$, $w_2(x) = \max_{t \in [0, T]} v(t, x)$ непрерывны и положительно определены в \mathbb{R}^n , причем для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$ справедливы неравенства $w_1(x) \leq v(t, x) \leq w_2(x)$. В силу периодичности функции $v(t, x)$ по t последние

неравенства выполнены для всех $t \geq 0$. Заметим, что справедливо равенство $w_1(x) = w_1\left(\|x\| \frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\|^s w_1\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$, $x \neq 0$. Аналогичное равенство выполнено для функции $w_2(x)$. В силу непрерывности функций $w_1(x)$, $w_2(x)$ в \mathbb{R}^n и компактности единичной сферы $S^n = \{x : \|x\| = 1\}$ следует неравенство (7), где $\lambda_1 = \min_{x \in S^n} w_1(t, x)$, $\lambda_2 = \max_{x \in S^n} w_2(t, x)$, $\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Необходимость. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$(П.1) \quad \dot{x} = B(t)x, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad B(t) \in \Omega(t), \quad \Omega(t+T) = \Omega(t).$$

Заметим, что любое решение $x_B(t, t_0, x_0)$ включения (2) при $x_B(t_0) = x_0$ и $B(t) \in \Omega(t)$, $t \geq t_0$ можно представить в виде $x_B(t, t_0, x_0) = \Phi_B(t, t_0)x_0$, где $\Phi_B(t, t_0)$ – матрицант системы (П.1).

Рассмотрим функцию

$$(П.2) \quad S(t, t_0, x_0) = \max_{B(t) \in \Omega(t)} \|x_B(t, t_0, x_0)\|^2 = \max_{B(t) \in \Omega(t)} \|\Phi_B(t, t_0)x_0\|^2.$$

Функцию $S(t, t_0, x_0)$ можно записать в виде

$$(П.3) \quad S(t, t_0, x_0) = \max_{x \in X(t, t_0, x_0)} \|x\|^2 = H^2(X(t, t_0, x_0), 0),$$

где $X(t, t_0, x_0)$ – сечение в момент $t \geq t_0$ интегральной воронки включения (2), выпущенной из точки (t_0, x_0) , $H(X(t, t_0, x_0), 0)$ – хаусдорфово расстояние от сечения $X(t, t_0, x_0)$ до нуля. Функция $S(t, t_0, x_0)$ определена при всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $t \geq t_0 \geq 0$, поскольку множество решений $\{x(t, t_0, x_0)\}$ включения (2) компактно [20] на любом конечном интервале $[t_0, t]$. Из неравенства

$$\left| \sqrt{S(t, t_1, x_1)} - \sqrt{S(t, t_0, x_0)} \right| \leq H(X(t, t_1, x_1), X(t, t_0, x_0)),$$

вытекающего из (П.3) и теорем 15, 18 в [20], следует, что функция $S(t, t_0, x_0)$ непрерывна по (t_0, x_0) , $t \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ при всяком фиксированном $t \geq t_0$ и непрерывна по $t \geq t_0$ при фиксированных (t_0, x_0) .

Докажем, что функция $S(t, t_0, x_0)$ строго выпукла по $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Пусть $x_0 \neq y_0$, $\lambda \in (0, 1)$. Условие строгой выпуклости функции $S(t, t_0, x_0)$ имеет вид

$$(П.4) \quad \begin{aligned} S(\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0) &= \max_{B(t) \in \Omega(t)} \|\Phi_B(t, t_0)(\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0)\|^2 < \\ &< \lambda \max_{B(t) \in \Omega(t)} \|\Phi_B(t, t_0)x_0\|^2 + (1-\lambda) \max_{B(t) \in \Omega(t)} \|\Phi_B(t, t_0)y_0\|^2. \end{aligned}$$

Покажем, что неравенство (П.4) выполнено. Заметим, что справедливо неравенство

$$(П.5) \quad \begin{aligned} \|\Phi_B(t, t_0)(\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0)\|^2 &\leq \\ &\leq (\lambda \|\Phi_B(t, t_0)x_0\| + (1-\lambda) \|\Phi_B(t, t_0)y_0\|)^2. \end{aligned}$$

Оценим правую часть неравенства (П.5). Так как $x_0 \neq y_0$, выполнено неравенство

$$(П.6) \quad \left(\|\Phi_B(t, t_0)x_0\|^2 - \|\Phi_B(t, t_0)y_0\|^2 \right)^2 > 0.$$

Из условия $\lambda \in (0, 1)$ и неравенства (П.6) следует

$$(П.7) \quad 2\lambda(1 - \lambda) \|\Phi_B(t, t_0)x_0\| \|\Phi_B(t, t_0)y_0\| - \lambda(1 - \lambda) \left(\|\Phi_B(t, t_0)x_0\|^2 + \|\Phi_B(t, t_0)y_0\|^2 \right) < 0.$$

Преобразуя неравенство (П.7), получим

$$(П.8) \quad \left(\lambda \|\Phi_B(t, t_0)x_0\| + (1 - \lambda) \|\Phi_B(t, t_0)y_0\| \right)^2 < \lambda \|\Phi_B(t, t_0)x_0\|^2 + (1 - \lambda) \|\Phi_B(t, t_0)y_0\|^2.$$

Из (П.8) и (П.5) следует неравенство (П.4), что и доказывает строгую выпуклость функции $S(t, t_0, x_0)$ по x_0 .

Из обобщенной теоремы Филиппова [21] следует, что функция $S(t, t_0, x_0)$ является локально Липшицевой по (t_0, x_0) равномерно по $t \geq t_0$.

Как уже отмечалось выше, для включения (2) равномерная абсолютная устойчивость эквивалентна равномерной экспоненциальной абсолютной устойчивости. Поэтому для ее решений $x_B(t, t_0, x_0)$ справедлива оценка

$$(П.9) \quad \|x_B(t, t_0, x_0)\| \leq \beta \|x_0\| \exp(-\alpha(t - t_0)), \quad t \geq t_0,$$

где числа $\alpha > 0$, $\beta \geq 1$ не зависят от $B(t) \in \Omega(t)$, $t \geq t_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Из (П.2) и (П.9) следует неравенство

$$(П.10) \quad S(t, t_0, x_0) \leq \beta^2 \|x_0\|^2 \exp(-2\alpha(t - t_0)), \quad t \geq t_0.$$

В каждой точке (t_0, x_0) , $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \geq 0$ функцию Ляпунова $v(t_0, x_0)$ определим соотношением

$$(П.11) \quad v(t_0, x_0) = \int_{t_0}^{t_0+T_1} S(\tau, t_0, x_0) d\tau, \quad T_1 > \alpha^{-1} \ln \beta.$$

Из строгой выпуклости функции $S(t, t_0, x_0)$ по x_0 следует строгая выпуклость функции $v(t_0, x_0)$ по $x_0 \in \mathbb{R}^n$ при всяком фиксированном $t_0 \geq 0$. В силу (П.3) $S(\tau, t_0, 0) \equiv 0$, $0 \leq t_0 \leq \tau$.

Пусть $B_1(\tau, t_0, x_0) \in \Omega(\tau)$ – решение вариационной задачи (П.3), а $\Phi_{B_1}(\tau, t_0, x_0)$ – матрицант системы (П.1) при $B(\tau) = B_1(\tau, t_0, x_0)$. Тогда при $x_0 \neq 0$

$$(П.12) \quad S(t, t_0, x_0) = x_0' \Phi_{B_1}'(\tau, t_0, x_0) \Phi_{B_1}(\tau, t_0, x_0) x_0 = x_0' P(\tau, t_0, x_0) x_0, \\ P'(\tau, t_0, x_0) = P(\tau, t_0, x_0).$$

Из (П.11), (П.12) следует, что $v(t_0, 0) \equiv 0$ при всех $t_0 \geq 0$ и

$$(П.13) \quad v(t_0, x_0) = x'_0 \left(\int_{t_0}^{t_0+T_1} P(\xi, t_0, x_0) d\xi \right) x_0 = x'_0 L(t_0, x_0) x_0, \\ L'(t_0, x_0) = L(t_0, x_0).$$

Пусть $X_{B_1}(t, t_0, x_0)$ – сечение в момент $t \geq t_0$ интегральной воронки включения (2), выходящей из точки (t_0, x_0) . В силу периодичности включения (2) $X_{B_1}(t, t_0, x_0) = X_{B_1}(t + T, t_0 + T, x_0)$ (см. [22]). Из (П.11)–(П.13) и последнего равенства следует, что $L(t_0, x_0) = L(t_0 + T, x_0)$ при всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \geq 0$.

Так как $S(\tau, t_0, \mu x_0) = \mu^2 S(\tau, t_0, x_0)$, то $v(t_0, \mu x_0) = \mu^2 v(t_0, x_0)$ и

$$(П.14) \quad v(t, x) = x' L(t, x) x = x' L(t, \mu x) x, \quad x \neq 0, \quad \mu \neq 0, \quad t \geq 0.$$

Пусть $x \neq 0$, $\tau_1 = \|x\|^{-1}$, $\tau_2 = -\|x\|^{-1}$. Тогда функцию $v(t, x)$ можно представить в виде $v(t, x) = x' L_1(t, x) x$, где

$$(П.15) \quad L_1(t, x) = 2^{-1} [L(t, \tau_1 x) + L(t, \tau_2 x)].$$

При этом матрица $L_1(t, x)$ удовлетворяет условию $L_1(t, \mu x) = L_1(t, x) = L'_1(t, x)$ при всех $x \neq 0$, $\mu \neq 0$, $t \geq 0$.

Следовательно, можно считать, что матрица $L(t, x)$ в (П.14) удовлетворяет равенствам $L(t, x) = L(t, \mu x) = L'(t, x)$ при всех $x \neq 0$, $\mu \neq 0$, $t \geq 0$. Таким образом, функция $v(t, x)$, определенная в соответствии с (П.11), может быть представлена в виде (5).

Перейдем к доказательству неравенства (6). Так как функция $S(t, t_0, x_0)$ удовлетворяет локальному условию Липшица по (t_0, x_0) равномерно по $t \geq t_0$, то функция $v(t, x)$ также удовлетворяет локальному условию Липшица. Поэтому для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \geq 0$, $y \in F(t_0, x_0)$ справедливо соотношение

$$(П.16) \quad D_y^+ v(t_0, x_0) = \overline{\lim}_{h \rightarrow +0} h^{-1} [v(t_0 + h, x_0 + hy) - v(t_0, x_0)] = \\ = \overline{\lim}_{h \rightarrow +0} h^{-1} [v(t_0 + h, x_0 + hy + o(h)) - v(t_0, x_0)] = \\ = \overline{\lim}_{h \rightarrow +0} h^{-1} [v(t_0 + h, x_\Lambda(t_0 + h, t_0, x_0)) - v(t_0, x_0)],$$

где $y \in F(t_0, x_0)$, $o(h)$ выбрано из условия $x_0 + hy + o(h) = x_\Lambda(t_0 + h, t_0, x_0)$, а $x_\Lambda(t, t_0, x_0)$ – решение включения (2) при $B(t) \equiv \Lambda = \text{const}$.

Из (П.11) и (П.16) следует

$$(П.17) \quad h^{-1} [v(t_0 + h, x_\Lambda(t_0 + h, t_0, x_0)) - v(t_0, x_0)] = \\ = h^{-1} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+h+T_1} S(\tau, t_0 + h, x_\Lambda(t_0 + h, t_0, x_0)) d\tau - \int_{t_0}^{t_0+T_1} S(\tau, t_0, x_0) d\tau \right\}$$

при $h > 0$. Заметим, что сечения $X(t, t_0, x_0)$ интегральной воронки включения (2) удовлетворяют полугрупповому свойству обобщенных динамических систем [23], из которого вытекает включение

$$(П.18) \quad X(\tau, t_0 + h, x_\Lambda(t_0 + h, t_0, x_0)) \subset X(\tau, t_0, x_0).$$

Из (П.18) и определения $S(\tau, t_0, x_0)$ следует неравенство

$$S(\tau, t_0 + h, x_\Lambda(t_0 + h, t_0, x_0)) \leq S(\tau, t_0, x_0), \quad \tau \leq t_0, h > 0.$$

Из (П.17) и последнего неравенства следует

$$(П.19) \quad \begin{aligned} & h^{-1}[v(t_0 + h, x_\Lambda(t_0 + h, t_0, x_0)) - v(t_0, x_0)] \leq \\ & \leq h^{-1} \left\{ \int_{t_0+h}^{t_0+h+T_1} S(\tau, t_0, x_0) d\tau - \int_{t_0}^{t_0+T_1} S(\tau, t_0, x_0) d\tau \right\} = \\ & = h^{-1} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+h+T_1} S(\tau, t_0, x_0) d\tau - \int_{t_0}^{t_0+h} S(\tau, t_0, x_0) d\tau \right\} \end{aligned}$$

при $h > 0$. Из (П.16) и (П.19) получим

$$(П.20) \quad \begin{aligned} w(t_0, x_0) &= \max_{y \in F(t_0, x_0)} D_y^+ v(t_0, x_0) \leq \\ & \leq \overline{\lim}_{h \rightarrow +0} h^{-1} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+h+T_1} S(\tau, t_0, x_0) d\tau - \int_{t_0}^{t_0+h} S(\tau, t_0, x_0) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

В силу непрерывности функции $S(\tau, t_0, x_0)$ по τ и неравенства (П.20) можно перейти к обычному пределу при $h \rightarrow +0$. Поэтому из (П.10) и (П.20) получим следующее неравенство: $w(t, x) \leq S(t_0 + T_1, t_0, x_0) - S(t_0, t_0, x_0) \leq \leq -(1 - \beta^2 \exp(-2\alpha T_1)) \|x_0\|^2$, из которого в силу произвольности $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $t_0 \geq 0$ следует оценка (6) при $\gamma = 1 - \beta^2 \exp(-2\alpha T_1) > 0$.

Достаточность. Рассмотрим любое абсолютно непрерывное решение $x(t) = x_B(t, t_0, x_0)$ включения (2), где x_0 принадлежит шару произвольного радиуса ρ ($\|x_0\| \leq \rho$) и $0 \leq t_0 \leq t \leq T_1$. Поскольку функция $v(t, x)$ удовлетворяет локальному условию Липшица при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, функция $V(t) = v(t, x(t))$ будет локально липшицевой, а значит, и абсолютно непрерывной при $t \geq 0$. В силу этого свойства функции $V(t)$ почти всюду на отрезке $[t_0, T_1]$ справедливы равенства

$$(П.21) \quad \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \lim_{h \rightarrow +0} h^{-1}[V(t+h) - V(t)] = \overline{\lim}_{h \rightarrow +0} h^{-1}[V(t+h) - V(t)] = \\ &= \overline{\lim}_{h \rightarrow +0} h^{-1}[v(t+h, x(t+h)) - v(t, x(t))] = \\ &= \overline{\lim}_{h \rightarrow +0} h^{-1}[v(t+h, x(t) + h\dot{x}(t)) - v(t, x(t))] = D_{\dot{x}(t)}^+ v(t, x(t)), \end{aligned}$$

где $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$ – производная исходной функции $x(t)$.

Из (П.21) с учетом (3), (4) и (6) получим неравенство

$$(П.22) \quad \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= D_{\dot{x}(t)}^+ v(t, x(t)) \leq \max_{y \in F(t, x(t))} D_y^+ v(t, x(t)) = \\ &= w(t, x) \leq -\gamma \|x(t)\|^2, \quad \gamma > 0, \end{aligned}$$

которое справедливо почти при всех $t \geq 0$.

Из леммы следует, что в условиях теоремы функция $v(t, x)$ вида (5) удовлетворяет неравенствам $\lambda_1 \|x\|^2 \leq v(t, x) \leq \lambda_2 \|x\|^2$ при всех $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Из этих неравенств и (П.22) для решений включения (2) вытекает экспоненциальная оценка (П.9) при $\alpha = \gamma/2\lambda_2 > 0$ и $\beta = \sqrt{\lambda_2/\lambda_1} \geq 1$. Следовательно, в условиях теоремы включение (2) является равномерно асимптотически устойчивым. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Han Z., Cai X., Huang J.* Theory of Control Systems Described by Differential Inclusions. Springer, 2016.
2. *Kamenetsky V.A., Pyatnitskii E.S.* An Iterative Method of Lyapunov Function Construction for Differential Inclusions // Systems & Control Letters. 1987. No. 8. P. 445–451.
3. *Молчанов А.П., Пятницкий Е.С.* Критерии устойчивости селекторно-линейных дифференциальных включений // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297. № 1. С. 37–40.
4. *Molchanov A.P., Pyatnitskii E.S.* Criteria of Asymptotic Stability of Differential and Difference Inclusions Encountered in Control Theory // Systems & Control Letters. 1989. No. 13. P. 59–64.
5. *Rapoport L.B., Pyatnitskii E.S.* Criteria of Asymptotic Stability of Differential Inclusions and Periodic Motions of Time-Varying Nonlinear Control Systems // IEEE Trans. Circ. Syst. I: Fundamental Theory and Applications. 1996. V. 43. No. 3. P. 219–229.
6. *Rapoport L.B.* Asymptotic Stability and Periodic Motions of Selector-Linear Differential Inclusions // In: Garafalo F., Glielmo L. (eds) Robust Control Via Variable Structure and Lyapunov Techniques. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer. Berlin Heidelberg. 1996. V. 217. P. 269–285.
7. *Иванов Г.Г., Алферов Г.В., Ефимова П.А.* Устойчивость селекторно-линейных дифференциальных включений // Вестн. Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2(37). С. 25–30.
8. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A.* About Stability of Selector Linear Differential Inclusions // AIP Conference Proceedings. 2004. 150013 (2018); <https://doi.org/10.1063/1.5079216>.
9. *Li G., Xue X.* On the Existence of Periodic Solutions for Differential Inclusions // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 276. Iss. 1. P. 168–183.
10. *Filippakis M., Gasinski L., Papageorgiou N.S.* Existence Theorems for Periodic Differential Inclusions in R^N // ACTA MATH APPL SIN-E. 2004. V. 20. No. 2. P. 179–190.
11. *Filippakis M., Gasinski L., Papageorgiou N.S.* Periodic Solutions for Differential Inclusions in R^N // Archivum Mathematicum. 2006. V. 42. No. 2. P. 115–123.

12. *Smirnov G.V.* Weak Asymptotic Stability at First Approximation for Periodic Differential Inclusions // *Nonlinear Differential Equations and Applications*. 1995. V. 2. No. 4. P. 445–461.
13. *Gata R., Smirnov G.V.* Weak Exponential Stability for Time-Periodic Differential Inclusions Via First Approximation Averaging // *Set-Valued and Variational Analysis*. 2013. V. 21. Iss. 2. P. 191–200.
14. *Шильман С.В.* Метод производящих функций в теории динамических систем. М.: Наука, 1978.
15. *Молчанов А.П., Морозов М.В.* Абсолютная устойчивость нелинейных нестационарных систем управления с периодической линейной частью // *АиТ*. 1992. № 2. С. 49–59.
Molchanov A.P., Morozov M.V. Absolute Stability of Nonlinear Nonstationary Control Systems with Periodic Linear Sections // *Autom. Remote Control*. 1992. V. 53. No. 2. Part 1. P. 189–198.
16. *Морозов М.В.* Критерии робастной устойчивости нестационарных систем с интервальными ограничениями // *Тр. ИСА РАН*. 2016. Т. 66. Вып. 4. С. 4–9.
17. *Морозов М.В.* Свойства селекторно-линейных периодических дифференциальных включений // *Тр. ИСА РАН*. 2020. Т. 70. Вып. 1. С. 99–105.
18. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
19. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
20. *Благодатских В.И.* Некоторые результаты по теории дифференциальных включений (обзор) // *Summer School on Ordinary Differential Equations*. Brno. 1975. С. 29–67.
21. *Frankowska H.* Contingent Cones to Reachable Sets of Control Systems // *Siam J. Control Optim.* 1989. V. 27. No. 1. P. 170–198.
22. *Kloeden P.E.* Asymptotic Invariance and Limit Sets of General Control Systems // *J. Differential Equations*. 1975. V. 19. No. 1. P. 91–105.
23. *Roxin E.O.* Stability of General Control Systems // *J. Differential Equations*. 1965. V. 1. No. 2. P. 115–150.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 19.05.2020

После доработки 07.07.2020

Принята к публикации 09.07.2020

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2021 г. А.А. АРДЕНТОВ, канд. техн. наук (aaa@pereslavl.ru),
А.П. МАШТАКОВ, канд. техн. наук (alexey.mashtakov@gmail.com)
(Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН,
Переславль-Залесский)

УПРАВЛЕНИЕ МОБИЛЬНЫМ РОБОТОМ С ПРИЦЕПОМ НА ОСНОВЕ НИЛЬПОТЕНТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ¹

Рассматривается кинематическая модель мобильного робота с прицепом, движущегося по однородной плоскости. Робот может двигаться вперед-назад и вращаться на месте. Для рассматриваемой модели ставится задача оптимального управления: требуется перевести систему “робот с прицепом” из произвольно заданной начальной конфигурации в произвольно заданную конечную конфигурацию так, чтобы величина маневра была минимальна. Под маневром понимается функционал, задающий компромисс между линейным и угловым перемещением робота. В зависимости от способа сцепки прицепа с роботом такая задача соответствует двухпараметрическому семейству задач оптимального управления в 4-мерном пространстве с 2-мерным управлением.

Предлагается метод нильпотентной аппроксимации для приближенного решения задачи. Разработан ряд итерационных алгоритмов и программ, успешно решающих поставленную задачу в идеальном случае — при условии отсутствия фазовых ограничений. На основе этих алгоритмов предлагается специализированный алгоритм перепарковки, решающий частный случай задачи, когда начальное и конечное положение робота совпадают, и учитывающий фазовое ограничение на угол поворота прицепа, возникающее в реальных системах.

Ключевые слова: робот с прицепом, кинематическая модель, оптимальное управление, нильпотентная аппроксимация, субриманова задача.

DOI: 10.31857/S0005231021010050

1. Введение

Рассмотрим мобильный колесный робот с прицепом, движущийся по горизонтальной плоскости. Сила трения колес, масса и форма робота и прицепа в расчет не берутся. Под роботом будем понимать ведущую колесную пару с центром в точке $(x, y) \in \mathbb{R}_{x,y}^2$ и углом $\theta \in S_\theta^1$, задающим направление движения колес относительно оси абсцисс. Под прицепом понимается пассивная колесная пара, которая сцепливается с ведущей в некоторой точке, см.

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01387-П) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна РАН.

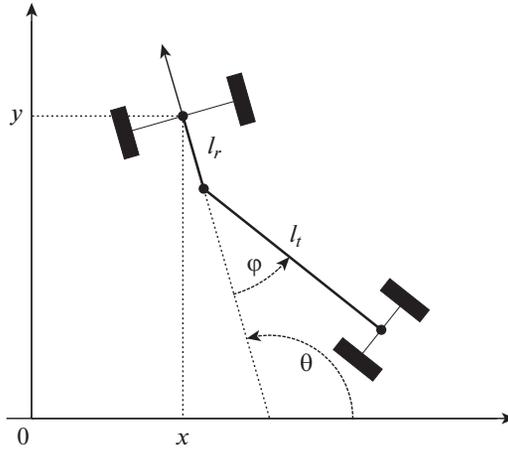


Рис. 1. Модель мобильного колесного робота с прицепом и ее параметры.

рис. 1. Положение прицепа определяется углом $\varphi \in S^1_\varphi$ ориентации относительно робота. Таким образом, положение робота с прицепом задается точкой $q = (x, y, \theta, \varphi)$ в пространстве $M = \mathbb{R}^2_{x,y} \times S^1_\theta \times S^1_\varphi$. Параметры $l_r \geq 0$, $l_t > l_r$ задают расстояния от точки сцепки робота и до центра робота и до центра прицепа, определяя конфигурацию сцепки робота с прицепом.

Кинематическая модель задается дифференциальной системой, возникающей, см. [1], из неголономного ограничения на движение без проскальзывания колес робота и прицепа. В данной статье продолжается начатое в [2] изучение модели. Предлагается метод приближенного решения задачи управления системой “робот с прицепом”, основанный на построении нильпотентной аппроксимации — более простой системы, сохраняющей важные свойства исходной системы. Подобный метод применялся в [3] для управления системой “робот с двумя прицепами”.

Рассматривается задача парковки робота с прицепом, формализуемая как двухточечная граничная задача управления, см. [4], в пространстве состояний M . По заданным граничным условиям требуется найти удовлетворяющую им траекторию $q(t) \in M$, $t \in [0, t_1]$, допустимую в смысле неголономных ограничений (т.е. удовлетворяющую дифференциальной системе) и минимизирующую заданный функционал, определяющий взвешенную цену за угловое и линейное перемещение робота.

Задача управления неголономными системами широко известна в робототехнике [1]. Кинематические модели разнообразных мобильных роботов описываются управляемыми системами вида

$$(1) \quad \dot{q} = \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i X_i(q), \quad q \in M, \quad \dim M = n \geq k, \quad \mathbf{u}_i \in \mathbb{R},$$

где X_i — гладкие векторные поля на многообразии M .

Решение задачи для систем (1) общего вида неизвестно. Удовлетворительное решение имеется лишь для систем специального вида. Одним из наиболее эффективных считается дифференциально-геометрический подход [5, 6].

В [7, 8] исследовано использование тригонометрических управлений для неголономных систем определенного рода: класс систем, которые могут быть преобразованы в цепную форму. Благодаря специальной форме, существует простое тригонометрическое управление, изменяющее определенный набор координат, в то время как другие координаты остаются неизменными. В [9] предложено использовать тригонометрические управления для перемещения системы в целевое состояние одновременно по всем координатам для систем с двумерным управлением. Кроме того, они показали, как для достижения этой цели могут быть использованы полиномиальные управления. В [10] показано, что кусочно–постоянные управления доставляют точное решение задачи управления системами в цепной форме. Техника приведения системы к цепной форме описана в [8, 11]. Заметим, что системы общего положения и, в частности, систему, возникающую в рассматриваемой задаче управления роботом с прицепом, нельзя привести к цепной форме, однако метод нильпотентизации [12], описанный далее, порождает систему в цепной форме.

В исключительных случаях для управляемых систем можно найти точный закон оптимального управления (в смысле минимума заданного функционала качества). Одним из возможных подходов к решению задачи оптимального управления системами, линейными по управлению, с фиксированным временем является метод, разработанный в [13]. Метод основан на разложении функции управления в ряд Фурье и отбрасывании слагаемых выше некоторого порядка N . Решение новой конечномерной задачи сходится к решению исходной задачи при N , стремящимся к бесконечности [13]. Найденное решение называется близким к оптимальному. Задачу оптимального управления можно также решать с помощью инвариантных геометрических методов [6, 14], развитых при решении задач оптимального управления на группах Ли. Численное решение для систем, моделирующих различные типы мобильных роботов на плоскости и в пространстве, предложено в [15].

Один из классов управляемых систем, допускающих точное решение, задается нильпотентными системами. Напомним, что управляемая система является нильпотентной, если скобки Ли управляемых векторных полей обнуляются, начиная со скобок некоторой длины. Метод управления нильпотентными системами был представлен в [16]. Он основан на возможности перемещения в направлении произвольно заданной голономной кривой (априори не удовлетворяющей неголономному ограничению (1)) на основе формулы Кэмпбелла–Хаусдорфа–Бэйкера–Дынкина. Благодаря этому, становится возможным вычисление допустимых кусочно–постоянных управлений, переводящих неголономную систему точно в конечное состояние.

В [17] А. Беллаш с соавторами разработали технику нильпотентизации, которую впоследствии применили к задаче управления неголономными системами. В [18] показано, как перевести любую управляемую систему в каноническую форму, соответствующую нильпотентной аппроксимирующей системе в специальной треугольной форме, позволяющей искать тригонометрические управления.

Представленное в данной статье решение задачи оптимального управления также опирается на нильпотентизацию исходной системы и основано на построении итерационного процесса, на каждой итерации которого решает-

ся задача оптимального управления приближенной системой. Итоговый закон управления формируется последовательным применением найденных на каждой итерации управлений. Будем называть такое управление *субоптимальным*.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 приводится постановка задачи 1, а именно задачи оптимального управления роботом с прицепом без фазовых ограничений. В разделе 3 при помощи алгоритма 1 устанавливается связь между рассматриваемой задачей 1 и более простой задачей (определяемой полиномиальной системой (10)), так называемой нильпотентной субримановой задачей на группе Энгеля [19]¹, которая доставляет нелинейную аппроксимацию исходной задачи. В теореме описывается замена координат между этими задачами. Для решения нильпотентной задачи используется гибридный алгоритм 2. Приводится сравнение известных оптимальных решений с найденными субоптимальными траекториями для близких граничных точек. В разделе 4 уточняется, как построить субоптимальное решение задачи 1 (без фазовых ограничений) в ситуации общего положения (для далеких граничных точек) с помощью алгоритма 3. Раздел 5 посвящен программной реализации представленных алгоритмов. Ставится задача 2 (с ограничением на угол поворота прицепа), а также приводятся несколько примеров ее решения с помощью модифицированного алгоритма 3. В разделе 6 рассматривается частный случай задачи с ограничением — перепарковка прицепа. Для решения этой задачи разработан специализированный алгоритм, протестированный на регулярной сетке значений для угла прицепа и соотношения длин плеч робота l_r, l_t . Результаты тестирования приведены в таблице. В Приложение вынесены определения основных терминов, используемых в работе.

2. Постановка задачи оптимального управления

Задача 1 (без ограничений). Задана управляемая система

$$(2) \quad \dot{q} = \mathbf{u}_1 X_1(q) + \mathbf{u}_2 X_2(q),$$

$$(3) \quad q = (x, y, \theta, \varphi) \in M = \mathbb{R}_{x,y}^2 \times S_\theta^1 \times S_\varphi^1, \quad (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Здесь $q, x, y, \theta, \varphi, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ по умолчанию зависят от параметра времени $t \in [0, t_1]$; управления $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ — вещественнозначные кусочно-непрерывные функции, задающие линейную и угловую скорость движения робота с центром в точке (x, y) ; а векторные поля при управлениях имеют следующий вид:

$$(4) \quad \begin{aligned} X_1(q) &= \left(\cos \theta, \sin \theta, 0, -\frac{\sin \varphi}{l_t} \right), \\ X_2(q) &= \left(0, 0, 1, -\frac{l_r \cos \varphi}{l_t} - 1 \right). \end{aligned}$$

¹ Правила умножения на группе приведены в [20], см. главу 15.

Для некоторого заданного $\mu > 0$ требуется найти кривую $q(t)$, $t \in [0, t_1]$, с заданными граничными значениями в двух точках

$$(5) \quad q(0) = q^0 = (x^0, y^0, \theta^0, \varphi^0), \quad q(t_1) = q^1 = (x^1, y^1, \theta^1, \varphi^1),$$

удовлетворяющую системе (2)–(5) и имеющую минимальное значение функционала

$$(6) \quad J = \int_0^{t_1} \sqrt{\mathbf{u}_1^2(t) + \mu^2 \mathbf{u}_2^2(t)} dt,$$

где коэффициент μ задает компромисс между линейным и угловым перемещением.

Замечание 1. Система (2)–(4) имеет следующую симметрию (растяжение):

$$\delta_\mu : (x, y, \theta, \varphi, l_t, l_r, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \mapsto (\mu x, \mu y, \theta, \varphi, \mu l_t, \mu l_r, \mu \mathbf{u}_1, \mu \mathbf{u}_2).$$

Поэтому минимизация (6) равносильна минимизации субримановой длины [21]

$$(7) \quad \int_0^{t_1} \sqrt{\mathbf{u}_1^2(t) + \mathbf{u}_2^2(t)} dt$$

с пересчитанными граничными значениями и параметрами сцепки робота и прицепа.

Замечание 2. Инвариантность задачи 1 относительно параллельных переносов и поворотов в плоскости \mathbb{R}_{xy}^2 позволяет без ограничения общности фиксировать $q^0 = (0, 0, 0, \varphi^0)$.

Вычислим следующие коммутаторы (скобки Ли):

$$X_3(q) = [X_1, X_2](q) = \left(\sin \theta, -\cos \theta, 0, -\frac{l_r + l_t \cos \varphi}{l_t^2} \right),$$

$$X_4(q) = [X_1, [X_1, X_2]](q) = \left(0, 0, 0, -\frac{l_t + l_r \cos \varphi}{l_t^3} \right).$$

Из теоремы Рашевского–Чжоу [14] следует, что система (2)–(5) вполне управляема, так как в силу начального допущения $l_t > l_r \geq 0$ выполнено условие

$$(8) \quad \det(X_1, X_2, X_3, X_4) = -\frac{l_t + l_r \cos \varphi}{l_t^3} \neq 0.$$

Задача 1 соответствует двухпараметрическому семейству *субримановых задач*, а именно задач оптимального управления с линейной по управлению системой (2), где в качестве критерия оптимальности выступает минимум субримановой длины (7). Решение любой такой задачи с определенными значениями параметров l_r, l_t является открытой проблемой. Цель данной работы — разработать общую схему построения приближенного решения для всего семейства задач.

3. Решение локальной задачи

Локальное приближение управляемой системы другой, более простой системой широко используется в теории управления. Обычно в качестве локальной аппроксимации используется линеаризация управляемой системы. Однако для линейных по управлению систем (2) линеаризация дает слишком грубое приближение. Так как размерность управления меньше размерности состояния, то линеаризация не может быть вполне управляемой. Это следует из теоремы Рашевского–Чжоу [14].

В случае (2)–(4) линеаризация имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \mathbf{u}_1 X_1^0(q) + \mathbf{u}_2 X_2^0(q), \\ X_1^0(q) &= \left(1, 0, 0, -\frac{\sin \varphi^0}{l_t}\right), \\ X_2^0(q) &= \left(0, 0, 1, -1 - \frac{l_r \cos \varphi^0}{l_t}\right).\end{aligned}$$

Легко проверить, что $[X_1^0, X_2^0](q) = (0, 0, 0, 0)$, поэтому линеаризация неуправляема.

Естественную замену линейной аппроксимации в этом случае доставляет нильпотентная аппроксимация — наиболее простая система, сохраняющая свойство полной управляемости. Для системы (2)–(3) она задается управляемой системой вида

$$(9) \quad \dot{\tilde{q}} = \mathbf{u}_1 \widehat{X}_1(\tilde{q}) + \mathbf{u}_2 \widehat{X}_2(\tilde{q}), \quad \tilde{q} \in \mathbb{R}^4, \quad (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbb{R}^2,$$

где $\widehat{X}_1, \widehat{X}_2$ — векторные поля приближающей системы, см. подробнее в Приложении.

Нильпотентная аппроксимация строится по системе (2), записанной в привилегированных координатах (см. определение 6 в Приложении), таким образом, что векторные поля \widehat{X}_i аппроксимирующей системы определяют нильпотентную алгебру Ли, т.е. для некоторого $N \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\left[\widehat{X}_{i_1}, [\widehat{X}_{i_2}, \dots, [\widehat{X}_{i_N}, \widehat{X}_{i_{N+1}}, \dots]] \right] = 0, \quad \forall i_1, \dots, i_{N+1} \in \{1, 2\}.$$

В частности, для системы (2)–(4) обнуляются коммутаторы выше 3 порядка ($N = 3$):

$$\left[\widehat{X}_i, [\widehat{X}_j, [\widehat{X}_1, \widehat{X}_2]] \right] = 0, \quad \forall i, j \in \{1, 2\}.$$

Замечание 3. В отличие от линейной аппроксимации нильпотентная аппроксимация сохраняет такой важный инвариант, как вектор роста, см. определение 1 в Приложении. Для системы (2)–(3) общего положения в точке общего положения вектор роста равен $(2, 3, 4)$, т.е. векторные поля $X_1, X_2, X_3 = [X_1, X_2], X_4 = [X_1, X_3]$ (либо $X_4 = [X_2, X_3]$) формируют базис касательного пространства $T_q M$ в каждой точке $q \in M$. В частности, это выполнено для системы “робот с прицепом” (2)–(4).

Понятие нильпотентной аппроксимации управляемых систем было впервые введено Ж. Стефани [22] и независимо развито А.А. Аграчевым, А.В. Сарычевым [23] и Х. Хермсом [24]. В данной работе использован алгоритм вычисления нильпотентной аппроксимации, предложенный А. Беллаишем [25], конкретизированный для систем (2)–(3) и дополненный переходом в систему координат, в которой нильпотентная аппроксимация имеет канонический вид (10).

Замечание 4. Касательное пространство к субриманову многообразию само является субримановым многообразием. Его можно определить как метрическое пространство, используя определение Громова [26]. Более того, оно имеет алгебраическую структуру нильпотентной группы Ли. Ключевое наблюдение состоит в том, что структура $T_q M$ похожа на структуру вещественного векторного пространства, только группа является не абелевой, а нильпотентной.

3.1. Вычисление нильпотентной аппроксимации

Предложенный А. Беллаишем [25] способ построения нильпотентной аппроксимации в привилегированных координатах конкретизируется для систем с вектором роста (2, 3, 4) в следующем алгоритме 1. В нем получено явное выражение векторных полей аппроксимирующей системы в канонических привилегированных координатах, позволяющих искать оптимальное управление для нильпотентной аппроксимации.

Алгоритм 1. Замена координат $\tau = \Phi \circ \mathcal{A}$, приводящая систему (2)–(3) к каноническому виду, строится следующим образом:

1. Через исходные координаты q вычисляются привилегированные координаты \tilde{q} :

$$\mathcal{A} : \tilde{q} = g(q) - \frac{1}{2} \left(0, 0, 0, \sigma_1(g_1(q))^2 + 2\sigma_2 g_1(q)g_2(q) + \sigma_3(g_2(q))^2 \right),$$

где $g(q) = (g_1(q), \dots, g_4(q)) = \Gamma^{-1}(q - q^0)$, а Γ — это 4×4 матрица, составленная из элементов Γ_{ij} , определяемых соотношением $X_j(q^0) = \sum_{i=1}^4 \Gamma_{ij} \frac{\partial}{\partial q_i} |_{q^0}$, при этом коэффициенты σ_i вычисляются по формулам

$$\sigma_1 = X_1(X_1(g_4))(q^0), \quad \sigma_2 = X_1(X_2(g_4))(q^0), \quad \sigma_3 = X_2(X_2(g_4))(q^0).$$

При такой замене q^0 переходит в начало координат $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0)$, а векторные поля X_i переходят в поля $\tilde{X}_i = \mathcal{A}_* X_i$, формирующие привилегированный базис.

2. С использованием разложения векторных полей $\tilde{X}_i(\tilde{q})$ в ряд Маклорена строится нильпотентная аппроксимация в координатах \tilde{q} :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{q}} &= \mathbf{u}_1 \hat{X}_1(\tilde{q}) + \mathbf{u}_2 \hat{X}_2(\tilde{q}), \quad \tilde{q} \in \mathbb{R}^4, \quad (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbb{R}^2, \\ \hat{X}_i &= \tilde{X}_i^1(\mathbf{0}) \partial_{\tilde{q}_1} + \tilde{X}_i^2(\mathbf{0}) \partial_{\tilde{q}_2} + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \tilde{X}_i^3}{\partial \tilde{q}_k}(\mathbf{0}) \tilde{q}_k \partial_{\tilde{q}_3} + \\ &+ \left(\frac{\partial \tilde{X}_i^4}{\partial \tilde{q}_3}(\mathbf{0}) \tilde{q}_3 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 \tilde{X}_i^4}{\partial \tilde{q}_k^2}(\mathbf{0}) \tilde{q}_k^2 + \frac{\partial^2 \tilde{X}_i^4}{\partial \tilde{q}_1 \partial \tilde{q}_2}(\mathbf{0}) \tilde{q}_1 \tilde{q}_2 \right) \partial_{\tilde{q}_4}. \end{aligned}$$

3. Вычисляется замена переменных $\Phi : \tilde{q} \rightarrow \bar{q} : \bar{q} = e^{T_4 \tilde{X}_4} \circ \dots \circ e^{T_1 \tilde{X}_1}(\mathbf{0})$, где параметры $T_i \geq 0$ находятся из условия $\tilde{q} = e^{T_4 \tilde{X}_4} \circ \dots \circ e^{T_1 \tilde{X}_1}(\mathbf{0})$, для перехода от привилегированных координат \tilde{q} в координаты \bar{q} , в которых

нильпотентная аппроксимация имеет канонический вид:

$$(10) \quad \begin{cases} \dot{\bar{q}}_1 = \mathbf{u}_1, \\ \dot{\bar{q}}_2 = \mathbf{u}_2, \\ \dot{\bar{q}}_3 = \frac{1}{2}(\bar{q}_1 \mathbf{u}_2 - \bar{q}_2 \mathbf{u}_1), \\ \dot{\bar{q}}_4 = \frac{1}{2}(\bar{q}_1^2 + \bar{q}_2^2) \mathbf{u}_2, \end{cases} \quad \bar{q} \in \mathbb{R}^4,$$

т.е. векторные поля \bar{X}_1, \bar{X}_2 имеют вид

$$\bar{X}_1 = \left(1, 0, -\frac{\bar{q}_2}{2}, \frac{\bar{q}_1}{2}\right), \quad \bar{X}_2 = \left(0, 1, 0, \frac{\bar{q}_1^2 + \bar{q}_2^2}{2}\right).$$

Теорема. Для системы (2)–(4) отображение τ имеет вид

$$(11) \quad \begin{aligned} \bar{q}_1 &= x, & \bar{q}_2 &= \theta, & \bar{q}_3 &= \frac{1}{2} x \theta - y, \\ \bar{q}_4 &= \left(l_t \left((l_r^2 + 2) \theta^3 + 6 \theta x (x - l_r) + 6 y (2 l_r - x) - 12 l_t^2 (\varphi - \varphi^0 + \theta) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sin(\varphi^0) \left(-3x (l_r^2 \theta^2 + 4 l_t^2) - 6 l_r l_t^2 \theta^2 + x^3 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \cos(\varphi^0) \left(l_r \theta \left((l_r^2 + 2) \theta^2 + 2 l_t^2 (\theta^2 - 6) + 9 x^2 \right) + 12 y (l_t^2 - l_r x) \right) \right. \\ &\quad \left. + 3 l_t \cos(2 \varphi^0) \left(l_r^2 \theta^3 + 2 l_r \theta x - 2 x y \right) + \right. \\ &\quad \left. + 3 l_t \sin(2 \varphi^0) \left(-l_r^2 \theta^2 + l_r \theta (\theta x + 2 y) + x^2 \right) - x \sin(3 \varphi^0) \left(x^2 - 3 l_r^2 \theta^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + l_r \theta \cos(3 \varphi^0) \left(l_r^2 \theta^2 - 3 x^2 \right) \right) / \left(12 (l_r \cos(\varphi^0) + l_t) \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Вычислим коммутаторы

$$X_3 = \left(\sin \theta, -\cos \theta, 0, -\frac{l_r + l_t \cos \varphi}{l_t^2} \right), \quad X_4 = \left(0, 0, 0, -\frac{l_t + l_r \cos \varphi}{l_t^3} \right).$$

Заметим, что в силу (8) система векторных полей \tilde{X}_i образуют в каждой точке базис. Вычислим коэффициенты σ_i :

$$\sigma_1 = -\frac{l_t \cos \varphi^0 \sin \varphi^0}{l_t + l_r \cos \varphi^0}, \quad \sigma_2 = \frac{l_r l_t \sin^2 \varphi^0}{l_t + l_r \cos \varphi^0}, \quad \sigma_3 = l_r l_t \sin \varphi^0.$$

Известно [28], что любые две нильпотентные системы с вектором роста (2, 3, 4) диффеоморфны. Замена переменных, переводящая одну такую систему в другую, строится следующим образом. Пусть \hat{X}_1, \hat{X}_2 — векторные

поля первой, а \bar{X}_1, \bar{X}_2 — векторные поля второй нильпотентной системы с вектором роста $(2, 3, 4)$. Вычислив коммутаторы \hat{X}_3, \hat{X}_4 и \bar{X}_3, \bar{X}_4 , можно построить диффеоморфизм, переводящий поля \hat{X}_i в окрестности точки \hat{q}^0 в поля \bar{X}_i в окрестности \bar{q}^0 :

$$\Phi : O(\hat{q}^0) \rightarrow O(\bar{q}^0), \quad \Phi_*(\hat{X}_i) = \bar{X}_i.$$

Определим отображения F и G как композицию потоков векторных полей \hat{X}_i и \bar{X}_i соответственно за время T_i :

$$F(T_1, \dots, T_4) = e^{T_4 \hat{X}_4} \circ \dots \circ e^{T_1 \hat{X}_1}(\hat{q}^0),$$

$$G(T_1, \dots, T_4) = e^{T_4 \bar{X}_4} \circ \dots \circ e^{T_1 \bar{X}_1}(\bar{q}^0).$$

Тогда искомым диффеоморфизм имеет вид $\Phi = G \circ F^{-1}$.

Применим пункты 2) и 3) алгоритма 1 к точке $q^0 = (0, 0, 0, \varphi^0)$. Прямые вычисления и элементарные упрощения приводят к замене переменных (11) для перехода в канонические привилегированные координаты.

3.2. Поиск корней для нильпотентной задачи

Алгоритм 1 позволяет отыскать приближенное решение задачи 1 как решение нильпотентной субримановой задачи на группе Энгеля, заданной задачей оптимального управления дифференциальной системой (10) с критерием качества — минимумом функционала субримановой длины (7). Эта задача активно исследуется в последние годы [19, 29–32], ее оптимальный синтез описан в [30]. В общем случае задача сведена к решению четырехмерной системы алгебраических уравнений в эллиптических функциях Якоби sn , cn , dn и эллиптических интегралах I и II рода (F и E). Левая часть этой системы определяется из параметризации экстремальных траекторий, заданной с помощью так называемого *экспоненциального* отображения

$$\begin{aligned} \text{Exp}(u_1, u_2, k, \alpha) = \\ = (\bar{q}_1(u_1, u_2, k, \alpha), \bar{q}_2(u_1, u_2, k, \alpha), \bar{q}_3(u_1, u_2, k, \alpha), \bar{q}_4(u_1, u_2, k, \alpha)). \end{aligned}$$

Явные выражения вычисляются непосредственно из формул, приведенных в [19]. Правая часть системы определяется конечной точкой $\bar{q}(t_1) = \bar{q}^1 = (\bar{q}_1^1, \bar{q}_2^1, \bar{q}_3^1, \bar{q}_4^1)$. Кроме того, имеющаяся в задаче симметрия растяжения по параметру α позволяет избавиться от него и редуцировать систему до трехмерной. В результате для решения задачи в общем случае $\bar{q}_1^1 \bar{q}_3^1 \neq 0$ необходимо решить трехмерную систему следующего вида:

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\bar{q}_2(u_1, u_2, k, 1)}{\bar{q}_1(u_1, u_2, k, 1)} = \frac{\bar{q}_2^1}{\bar{q}_1^1}, \\ \frac{\bar{q}_3(u_1, u_2, k, 1)}{(\bar{q}_1(u_1, u_2, k, 1))^2} = \frac{\bar{q}_3^1}{(\bar{q}_1^1)^2}, \\ \frac{\bar{q}_4(u_1, u_2, k, 1)}{(\bar{q}_1(u_1, u_2, k, 1))^3} = \frac{\bar{q}_4^1}{(\bar{q}_1^1)^3}. \end{cases}$$

При этом искомый вектор (u_1, u_2, k) единственен и лежит в некотором подмножестве ограниченного множества $(0, \pi) \times (0, 2\pi) \times (0, 1)$. Соответствующие подмножества подробно описаны в [30]. Для поиска корня (u_1, u_2, k) системы (12) с фиксированной правой частью использовались различные известные численные методы, такие как метод Ньютона и метод хорд. Так как система (12) задается неэлементарными функциями, то для сходимости стандартных методов необходимы начальные приближения, близкие к искомому корню. Использование стохастических методов в комбинации с мультистартом не дает требуемого эффекта. Поэтому для приближенного решения системы (12) разработан следующий алгоритм.

Алгоритм 2 (гибридный). Рассматривается система алгебраических уравнений $Q(\nu) = Q^1$, имеющая единственное решение $\nu \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ при каждом значении $Q^1 \in \Xi \subset \mathbb{R}^n$. Гибридный алгоритм численного поиска решения с некоторой точностью $\epsilon_e > 0$ и некоторыми константами $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ состоит из следующих шагов:

1. Задаются множества $\Omega_j \subset \Omega$, $j = 0, 1$, каждое из которых состоит из дискретного набора случайных точек ν_i^j , $i = 1, \dots, m_1$.
2. Из каждого множества Ω_j , $j = 0, 1$, выбирается точка, имеющая наименьшую невязку $d_e(\nu) = (Q(\nu) - Q^1)w(Q(\nu) - Q^1)^T$, где $w \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица весовых коэффициентов. Обозначим соответствующие точки: $\nu_j = \arg \min_{\nu_i^j \in \Omega_j} d_e(\nu_i^j)$.
3. На выбранных точках ν_0, ν_1 запускается метод хорд [33] для решения системы $Q(\nu) = Q^1$. Результатом вычисления является точка ν_2 .
4. Для $i = 1, \dots, m_2 - 1$ итеративно запускается метод Ньютона [33] для модифицированной системы $Q(\nu) = \frac{Q^1 + (m_2 - i)Q(\nu_{i+1})}{m_2 - i + 1}$ с начальным приближением $\nu = \nu_{i+1}$. Результатом является точка ν_{i+2} , которая подается в качестве начального приближения для следующей итерации. После выполнения $m_2 - 1$ итераций получается точка ν_{m_2+1} . Если при этом соответствующая невязка достаточно мала $d_e(\nu_{m_2+1}) < \epsilon_e$, то искомый корень найден: $\nu = \nu_{m_2+1}$ является приближенным решением исходной системы $Q(\nu) = Q^1$. Иначе перейдем к п. 1) алгоритма и повторим все шаги заново, пока нужная точность не будет достигнута.

Замечание 5. Алгоритм 2 был реализован в программной системе Wolfram Mathematica для решения системы уравнений (12), при этом выбрана диагональная матрица весовых коэффициентов $w = \text{diag}(\bar{q}_1^1, (\bar{q}_1^1)^2, (\bar{q}_1^1)^3)$. Программа находит вектор $\nu = (u_1, u_2, k)$. При этом возможны два общих случая $\nu \in N_1 \cup N_2$, которые определяют формулы для оптимального управления и соответствующей кривой $\bar{q}(t)$ [19].

3.3. Построение управления для исходной задачи

Итак, предложен алгоритм 1, который позволяет локально свести задачу 1 к нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля. Чтобы построить оптимальное управление в нильпотентной задаче в общем случае используется алгоритм 2 для решения системы алгебраических уравнений (12). Полу-

ченный корень $\nu = (u_1, u_2, k) \in N_c$, $c \in \{1, 2\}$, определяет искомое управление следующим образом:

- вычисляются параметры $p_1 = F(u_1, k)$, $p_2 = F(u_2, k)$ и $\alpha = \frac{\bar{q}_1(u_1, u_2, k, 1) |\bar{q}_1(u_1, u_2, k, 1)|}{\bar{q}_1^+ |\bar{q}_1^-|}$, где F – нормальный эллиптический интеграл Лежандра I рода; параметр k задает модуль эллиптического интеграла;
- параметры t_1 , ϕ_0 определяются с помощью выражений [19]

$$\begin{aligned} c = 1 &\Rightarrow t_1 = \frac{2p_1}{\sqrt{|\alpha|}}, \quad \phi_0 = \frac{p_2 - p_1}{\sqrt{|\alpha|}}, \\ c = 2 &\Rightarrow t_1 = \frac{2kp_1}{\sqrt{|\alpha|}}, \quad \phi_0 = \frac{k(p_2 - p_1)}{\sqrt{|\alpha|}}; \end{aligned}$$

- оптимальное управление определяется следующими формулами:

$$\begin{aligned} (13) \quad c = 1 &\Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= -\frac{2k \operatorname{sign} \alpha}{\mu} \operatorname{sn} \left(\sqrt{|\alpha|}(\phi_0 + t), k \right) \operatorname{dn} \left(\sqrt{|\alpha|}(\phi_0 + t), k \right), \\ \mathbf{u}_2 &= -\operatorname{sign} \alpha \left(1 - 2\operatorname{dn}^2 \left(\sqrt{|\alpha|}(\phi_0 + t), k \right) \right); \end{aligned} \\ c = 2 &\Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mp \frac{2 \operatorname{sign} \alpha}{\mu} \operatorname{sn} \left(\frac{\sqrt{|\alpha|}(\phi_0 + t)}{k}, k \right) \operatorname{cn} \left(\frac{\sqrt{|\alpha|}(\phi_0 + t)}{k}, k \right), \\ \mathbf{u}_2 &= -\operatorname{sign} \alpha \left(1 - 2\operatorname{cn}^2 \left(\frac{\sqrt{|\alpha|}(\phi_0 + t)}{k}, k \right) \right), \end{aligned} \end{aligned}$$

где функции sn , cn и dn суть эллиптический синус, эллиптический косинус и дельта амплитуда.

3.4. Сравнение с оптимальными решениями

Задача 1 в общем случае не решена, однако известны оптимальные (в смысле минимума функционала (7)) управления для парковки робота (без прицепа), см. [34–36]. Соответствующая субриманова задача вкладывается в задачу 1: взяв оптимальные управления $(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t))$, $t \in [0, t_1]$ для робота (без прицепа) и подставив их в систему (2), можно ее численно проинтегрировать при фиксированных значениях φ^0, l_r, l_t и получить траекторию $q(t)$, $t \in [0, t_1]$, приходящую в точку $q^1 = q(t_1)$. Заметим, что эта траектория будет оптимальна в задаче 1 при $\mu = 1$.

Этот класс оптимальных траекторий был использован для сравнения с найденными в данной работе субоптимальными траекториями, построенными методом нильпотентной аппроксимации. Для этого получившиеся значения $q^1 = (x^1, y^1, \theta^1, \varphi^1)$ подставлялись в формулу (11) для вычисления конечной точки \bar{q}^1 в нильпотентной задаче. С использованием алгоритма 2 находились соответствующие значения корня ν , определяющего искомое управление по формулам (13). Наконец интегрированием системы (2) с полученным управлением вычислялось субоптимальное решение для задачи 1.

Для сравнения полученных решений введем следующую меру близости между конечной точкой и точкой на найденной субоптимальной траектории:

$$d(q(t), q^1) := \left((x(t) - x^1)^2 + (y(t) - y^1)^2 + (\theta(t) - \theta^1)^2 + (\varphi(t) - \varphi^1)^2 + 4l_r^2 \sin^2 \frac{\theta(t) - \theta^1}{2} + 4l_t^2 \sin^2 \frac{\varphi(t) - \varphi^1}{2} \right).$$

Дополнительно будем выбирать конечное время T на субоптимальной траектории

$$(14) \quad T = \arg \min_t d(q(t), q^1).$$

Замечание 6. При выборе натуральной параметризации $\mathbf{u}_1^2 + \mathbf{u}_2^2 \equiv 1$ при $\mu = 1$ имеем $J = t_1$ для оптимального решения и $J = T$ для субоптимального.

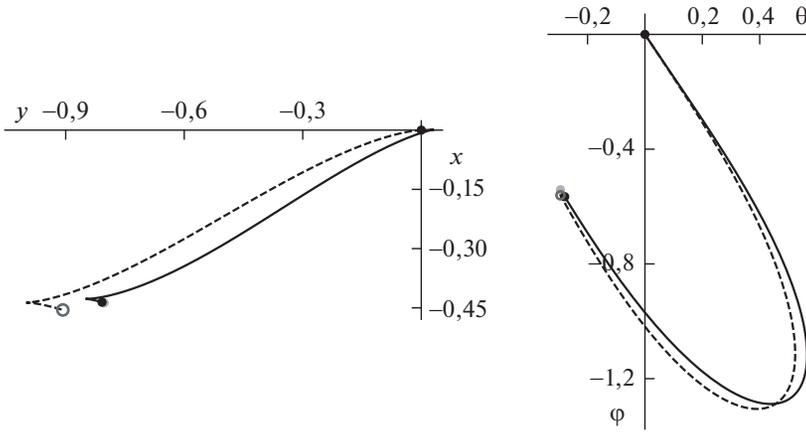


Рис. 2. $q^1 = (-0,90724; -0,45537; -0,29433; -0,5608)$, точность $d(q(T), q^1) = 0,1025$, для оптимального решения $J = 2$ (для субоптимального $J = 1,975927$).

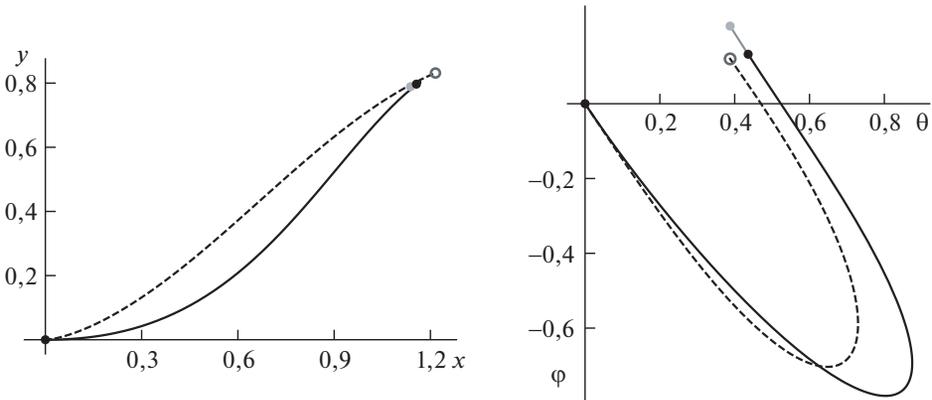


Рис. 3. $q^1 = (1,21571; 0,831468; 0,387799; 0,119918)$, точность $d(q(T), q^1) = 0,08905$, для оптимального решения $J = 2$ (для субоптимального $J = 2,10794$).

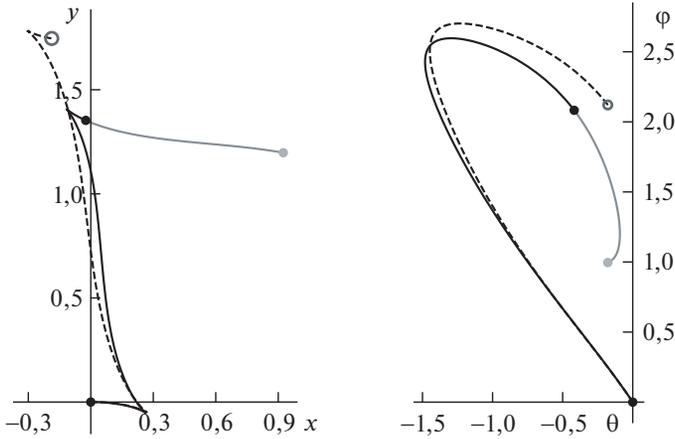


Рис. 4. $q^1 = (-0,18761; 1,74623; -0,178081; 2,12067)$, точность $d(q(T), q^1) = 0,50614$, для оптимального решения $J = 4$ (для субоптимального $J = 3,51347$).

На рис. 2–4 приведено сравнение найденных траекторий: пунктирной линией обозначено оптимальное решение, сплошной линией — субоптимальное, серая окружность малого размера задает конечную точку q^1 , серая точка соответствует исходной конечной точке на субоптимальном решении, черная точка есть $q(T)$, вычисленное по формуле (14). Рисунки 2, 3 с малым временем $t_1 = 2$ показывают достаточно близкое соответствие между оптимальным и субоптимальным решением, однако как видно из рис. 4 при достаточно большом t_1 такое соответствие нарушается. Поэтому возникает необходимость в создании алгоритма глобального решения.

4. Общая схема решения: сведение к серии локальных задач

На основе алгоритма 1, приближенно решающего задачу 1 локально, разработан глобальный алгоритм для общего случая далеких граничных точек q^0, q^1 .

Алгоритм 3. Рассмотрим задачу управления (2)–(5), в которой условие попадания траектории $q(t)$ в конечную точку $q(t_1) = q^1$ заменено на условие попадания в некоторую ϵ -окрестность точки q^1 , т.е. $d(q(t_1), q^1) < \epsilon$.

Пусть $m_3 \in \mathbb{N}$ — некоторая константа, тогда субоптимальное управление рассматриваемой задачи строится следующим образом.

1. Воспользуемся алгоритмом 1 и вычислим точку \bar{q}^1 с помощью формулы (11) для $q = q^1$. С помощью алгоритма 2 находим корень ν^1 системы (12) и по формулам (13) строим управление. Далее, подставив его в систему (2)–(5) и проинтегрировав полученные выражения численно, получаем траекторию $q_0(t)$, $t \in [0, t_1^0]$ с начальным условием $q_0(0) = q^0$.
2. Если расстояние $d_0 = d(q_0(t_1^0), q^1) < \epsilon$, то траектория $q_0(t)$, $t \in [0, t_1^0]$, доставляет приближенное решение с требуемой точностью. Иначе отрезок $[0, t_1^0]$ делится на m_3 одинаковых частей. После чего последовательно за-

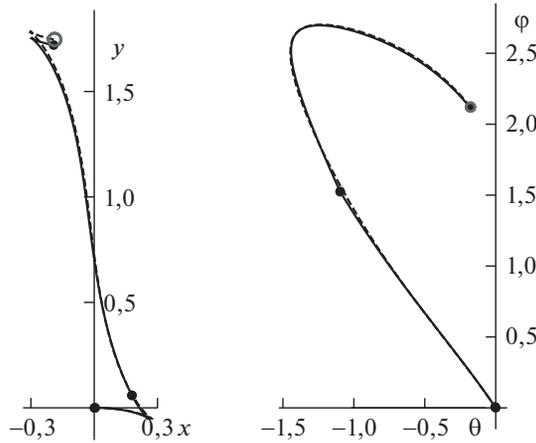


Рис. 5. $q^1 = (-0,18761; 1,74623; -0,178081; 2,12067)$, точность $d(q(t_1), q^1) = 0,02739$, для оптимального решения $J = 4$ (для субоптимального $J = 3,9688$).

пускается вычисление нильпотентных аппроксимаций в точках $q_0 \left(\frac{it_1^0}{m_3} \right)$, $i = 1, \dots, m_3$, как это сделано в первом пункте для точки q^0 . Обозначим соответствующие траектории через $q_i(t)$, $t \in [0, t_1^i]$, для которых выполнено начальное условие $q_i(0) = q_0 \left(\frac{it_1^0}{m_3} \right)$, и соответствующие расстояния через $d_i = d(q_i(t_1^i), q^1)$. Затем выбирается номер $j = \arg \min_{i=0 \dots m_3} d_i$ и процедура, описанная в данном пункте, применяется уже для траектории $q_j(t)$, $t \in [0, t_1^j]$.

На рис. 5 приведен пример улучшения решения с помощью алгоритма 3, черная точка на траектории соответствует некоторой промежуточной точке $q_i(0)$, в которой была вычислена дополнительная аппроксимация. Как видно из рисунка, в этом случае достаточно одной дополнительной итерации, чтобы получить приемлемую близость оптимального и субоптимального решений.

5. Программная реализация и примеры работы алгоритма для парковки

В среде Wolfram Mathematica разработаны программы построения субоптимального управления для приближенного решения задачи 1 на основе нильпотентной аппроксимации. Программы по входным данным l_r , l_t , φ^0 , x^1 , y^1 , θ^1 , φ^1 , ϵ строят функции управления \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 и соответствующую траекторию движения робота с прицепом $q(t)$, выходящую из точки $q^0 = (0, 0, 0, \varphi^0)$ и приходящую в ϵ -окрестность точки $q^1 = (x^1, y^1, \theta^1, \varphi^1)$.

Программа парковки была протестирована для различных конфигураций робота $0 \leq l_r < l_t$. В результате тестирования оказалось, что для большинства тестов программа строит управление, при котором имеет место эффект складного ножа (от англ. jackknifing [37]), означающий столкновение робота с прицепом. На практике такие решения не допустимы, поэтому дополнительно

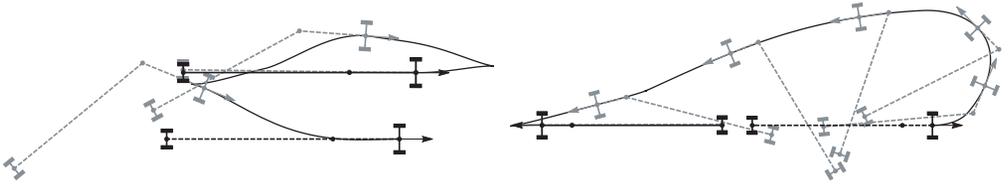


Рис. 6. Пример парковки. Слева: $(l_t, l_r) = (10, 4)$, $x^1 = 1$, $y^1 = 4$, $\theta^1 = \varphi^1 = \varphi^0 = 0$, $\varphi_{\max} = \pi/2$ с $\mu = 0,15$ и $d(q(t_1), q^1) = 0,061644$. Справа: $(l_t, l_r) = (10, 2)$, $x^1 = -26$, $\theta^1 = \pi$, $y^1 = \varphi^1 = \varphi^0 = 0$, $\varphi_{\max} = 3\pi/4$ с $\mu = 0,05$ и $d(q(t_1), q^1) = 0,0264575$.

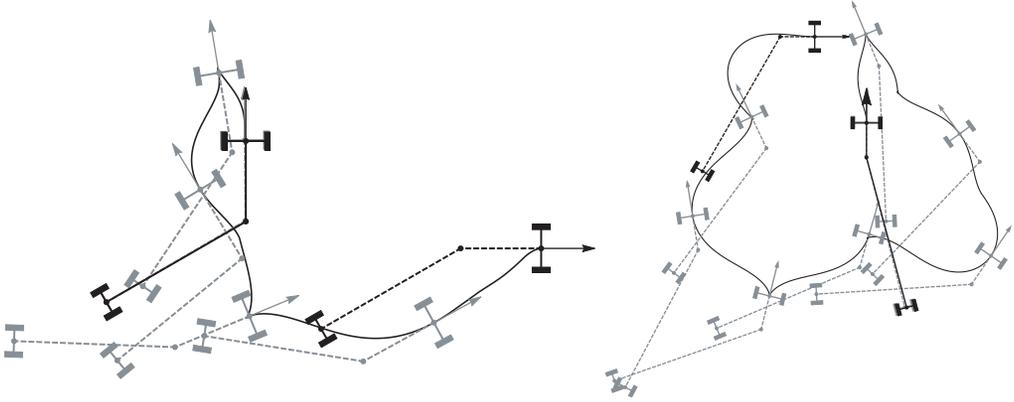


Рис. 7. Пример парковки. Слева: $(l_t, l_r) = (6, 3)$, $x^1 = -11$, $y^1 = 4$, $\theta^1 = \pi/2$, $\varphi^1 = -\pi/3$, $\varphi^0 = \pi/6$, $\varphi_{\max} = 3\pi/4$ с $\mu = 0,5$ и $d(q(t_1), q^1) = 0,057446$. Справа: $(l_t, l_r) = (9, 2)$, $x^1 = 3$, $y^1 = -5$, $\theta^1 = \pi/2$, $\varphi^1 = \pi/12$, $\varphi^0 = \pi/3$, $\varphi_{\max} = 3\pi/4$ с $\mu = 0,512$ и $d(q(t_1), q^1) = 0,046904$.

была рассмотрена следующая задача, учитывающая естественное ограничение на угол поворота прицепа.

Задача 2 (с ограничениями). Дана система “робот с прицепом” (2)–(4). Задано следующее ограничение на угол поворота прицепа:

$$(15) \quad |\varphi(t)| \leq \varphi_{\max} < \pi.$$

Требуется найти кривую $q(t) = (x(t), y(t), \theta(t), \varphi(t))$, удовлетворяющую граничным условиям (5) и минимизирующую функционал качества (6).

Для решения задачи 2 использовалась естественная модификация алгоритма 3, в которой соответствующие траектории $q_i(t)$, $i = 0, 1, \dots$, строятся на урезанном интервале $t \in [0, \tilde{t}_1^i]$, $\tilde{t}_1^i \leq t_1^i$, на котором выполнено условие (15). В программной реализации параметр μ считается свободным, его значение подбирается в начале работы программы так, что невязка $d(q_0(t_1^0), q^1)$ имеет наименьшее значение. На рис. 6–8 представлено несколько примеров парковки с помощью разработанной программы. Черным пунктиром обозначено начальное положение робота; требуемое конечное положение обозначено черным сплошным цветом; черная линия соответствует траектории движения

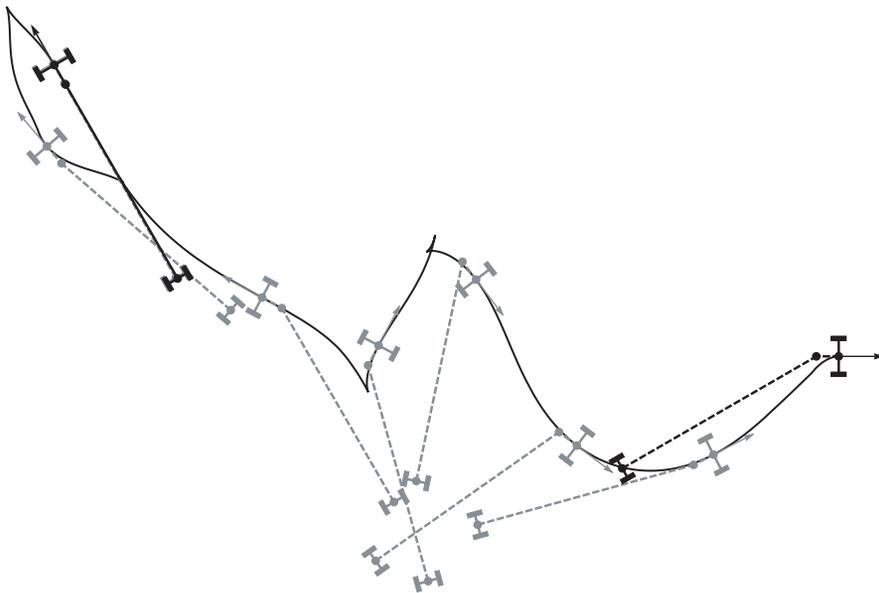


Рис. 8. Пример парковки: $(l_t, l_r) = (10, 1)$, $x^1 = -35$, $y^1 = 13$, $\theta^1 = 2\pi/3$, $\varphi^1 = 0$, $\varphi^0 = \pi/6$, $\varphi_{\max} = 3\pi/4$ с $\mu = 0,5$ и $d(q(t_1), q^1) = 0,042426$.

робота, построенной с помощью программы; серым пунктиром обозначены некоторые промежуточные состояния робота с прицепом вдоль построенной траектории (в том числе конечное состояние). Отметим, что задача 1 до сих пор остается открытой, а существующие методы решения задачи управления (2)–(5) не учитывают критерий оптимальности (6). Сравнение найденных траекторий парковки с траекториями, полученными другими методами, требует отдельного исследования. Известные методы решения [37, 38] задачи управления (2)–(5) нацелены в основном на учет фазовых ограничений в плоскости (x, y) , которые зачастую и определяют искомую траекторию. А именно, в плоскости (x, y) ищется так называемая голономная траектория, соединяющая граничные значения (5) без учета неголономных ограничений, представленных дифференциальной системой (2). Затем на построенной голономной траектории выделяется набор промежуточных значений и с помощью различных локальных методов ищется неголономная траектория, соединяющая близкие друг к другу промежуточные значения. В ситуации общего положения такой подход приводит к решению с большой величиной маневра.

Далее рассматривается частный случай задачи 2, в котором начальное и конечное положение робота совпадают.

6. Тестирование алгоритма перепарковки прицепа

На основе общего алгоритма парковки был разработан специальный алгоритм для перепарковки прицепа, т.е. для случая парковки с условием $x^1 = y^1 = \theta^1 = 0$. Конечная точка для нильпотентной аппроксимации перепар-

ковки в каноническом виде вычисляется по формуле

$$\bar{q}^1 = \left(0, 0, 0, \frac{l_t^3(\varphi^1 - \varphi^0)}{l_t + l_r \cos \varphi^1} \right).$$

Этот случай интересен тем, что для нильпотентной задачи в каждую точку такого вида приходит однопараметрическое семейство оптимальных траекторий (в отличие от ситуации общего положения, в котором существует лишь единственное оптимальное решение) — эластик, имеющих форму восьмерки (лемнискаты Бернулли). Вместе с вариацией по параметру μ в этом случае имеется двухпараметрическое семейство нильпотентных аппроксимаций, среди которых возможно отыскать то решение, которое переводит исходную систему из начального положения в конечное достаточно точно и которое удовлетворяет фазовому ограничению (15). Решение такой задачи с помощью алгоритма 3 находится в виде траектории $q_0(t)$ без рассмотрения траекторий $q_i(t)$, $i = 1, \dots, m_3$.

Заметим, что выбор масштаба позволяет без ограничения общности зафиксировать значение $l_t > 0$ произвольным образом.

В программной системе Wolfram Mathematica разработана программа, которая строит решение задачи перепарковки $q(t)$, $t \in [0, t_1]$ с точностью $d(q(t_1), q^1) < 1/10$ и дополнительным условием на максимальный угол прицепа

$$\max_{t \in [0, t_1]} |\varphi(t)| - \varphi_{\max} < 1/10.$$

Программа для поиска подходящего решения использует стандартные функции программной системы ParametricNDSolveValue и FindMinimum.

Рассмотрен следующий набор тестов. Пусть $l_t = 10$, а $l_r = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, 5$. Зададим максимальный угол $\varphi_{\max} = 3\pi/4$, а также сетку для угла прицепа

$$\varphi^0, \varphi^1 \in \Phi = \{\pi i/12 \mid i \in \{-6, \dots, 6\}\}, \quad \varphi^0 \neq \varphi^1.$$

Обозначим траекторию, которую строит программа по параметрам $l_r, \varphi^0, \varphi^1$, через

$$q_{(l_r, \varphi^0, \varphi^1)}(t), \quad t \in [0, t_1]$$

(формально значение t_1 также зависит от $l_r, \varphi^0, \varphi^1$, далее будем это подразумевать).

Определим максимальную погрешность

$$d_{\Phi}(l_r) = \max_{\varphi^0, \varphi^1 \in \Phi} d(q_{(l_r, \varphi^0, \varphi^1)}(t_1), q^1),$$

а также максимальное отклонение от максимального угла:

$$\max_{\Phi}(l_r) = \max_{\varphi^0, \varphi^1 \in \Phi} \left(\max_{t \in [0, t_1]} |\varphi_{(l_r, \varphi^0, \varphi^1)}(t)| - \varphi_{\max} \right),$$

где $\varphi_{(l_r, \varphi^0, \varphi^1)}(t)$ — соответствующая компонента траектории $q_{(l_r, \varphi^0, \varphi^1)}(t)$.

Тестирование перепарковки прицепа

l_r	0	1/2	1	3/2	2	5/2	3	7/2	4	9/2	5
d_Φ	0,027	0,028	0,027	0,03	0,078	0,03	0,026	0,03	0,038	0,071	0,058
\max_Φ	0	0	0	0	0	0	0	0	0,059	0,085	0,038

В таблице приведены результаты тестирования в виде максимальной погрешности и максимального отклонения от φ_{\max} .

Проведенное тестирование показало, что при любых $l_t > 2l_r$ и $\varphi^0, \varphi^1 \in [-\pi/2, \pi/2]$ найдется нильпотентная аппроксимация, позволяющая перевести робота со связкой (l_t, l_r) из состояния $(0, 0, 0, \varphi^0)$ в состояние $(0, 0, 0, \varphi^1)$ с погрешностью $d_\Phi(l_r) < 1/10$ и максимальным абсолютным значением угла поворота прицепа $3\pi/4 + 1/10$. Для конкретных значений (l_t, l_r) , которые вычисляются из реальной модели робота, можно разработать более точный специализированный алгоритм перепарковки.

Известно решение для субримановой задачи, описывающей оптимальное управление роботом без прицепа [34–36]. Соответствующая субриманова длина доставляет нижнюю грань для субримановой длины (7) в задаче, рассматриваемой в данной работе. При этом случай перепарковки позволяет описать верхнюю грань для субримановой длины (7), что поможет при дальнейшем анализе рассматриваемой задачи.

7. Заключение

В данной работе рассмотрена задача управления мобильным роботом с прицепом, движущимся по плоскости. Получены следующие основные новые результаты:

- предложен алгоритм построения нильпотентной аппроксимации для системы “робот с прицепом” в канонических координатах (алгоритм 1);
- в явном виде найдена замена переменных, приводящая нильпотентную аппроксимацию к каноническому виду (теорема); при этом замена оптимального управления нильпотентной аппроксимацией системы “робот с прицепом” сводится к нильпотентной задаче на группе Энгеля;
- разработан гибридный алгоритм и программа решения системы алгебраических уравнений, определяющие оптимальное управление в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля (алгоритм 2);
- разработан алгоритм и программа глобального решения задачи парковки робота с прицепом без ограничений на фазовые переменные (алгоритм 3);
- на основе разработанных алгоритмов созданы специализированный алгоритм и программа перепарковки, решающие частный случай задачи и учитывающие фазовое ограничение на угол поворота прицепа.

Для поиска оптимального управления в нильпотентной субримановой задаче используется алгоритм 2 для решения системы из трех уравнений, зависящих от эллиптических интегралов первого и второго рода. Следует отметить, что при введении фазовых ограничений на угол прицепа, могут возникнуть случаи, когда глобальный алгоритм 3, модифицированный для решения

задачи 2 с ограничением, требует слишком много итераций. Для устранения этой проблемы перспективным направлением представляется разработка алгоритма, использующего нильпотентную аппроксимацию в субримановом случае только для перепарковки прицепа: сначала робот с прицепом переводится в конечное положение без учета прицепа при движении только вперед (например, вдоль пути машины Дубинса, состоящего из комбинации дуг окружностей и отрезков прямых [39], либо вдоль элаستيку Эйлера [40]), а затем переводит прицеп в нужное положение с помощью алгоритма перепарковки. В дальнейшем планируется сравнение предложенных алгоритмов согласно критерию (6) и апробация разработанных программ для управления реальной моделью робота в рамках решения задачи 2 с ограничением на угол поворота прицепа исходя из конкретной модели робота.

В данной статье подразумевается, что у робота есть возможность задавать произвольную скорость приводных колес и соответственно свою линейную и угловую скорость. Математическая модель, учитывающая ограничение на скорости колес робота естественным образом приводит к понятию субфинслеровой структуры на M . Соответствующая субфинслерова задача по определению задается системой (2)–(5) с минимизацией времени $t_1 \rightarrow \min$ (или длины траектории на плоскости (x, y)) и ограничением управления на некоторое выпуклое множество $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ [41]. Заметим, что рассматриваемая задача 1 эквивалента субфинслеровой задаче при $\Omega = \Omega_\mu := \{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{u}_1^2 + \mu^2 \mathbf{u}_2^2 \leq 1\}$. В общем субфинслеровом случае множество Ω определяется исходя из конкретной модели, например случай, когда Ω есть выпуклый многоугольник (четырёхугольник), представляет собой важный подкласс субфинслеровых задач, в котором оптимальное управление, как правило, кусочно-постоянно.

В завершение отметим, что предложенные алгоритм 1 и теорему можно использовать не только для приближения субримановых задач, т.е. задач без ограничения на управление и с минимизацией субримановой длины (7), но и для более общего класса субфинслеровых задач.

Авторы благодарны проф. Ю.Л. Сачкову за ценные замечания и поддержку на протяжении всего исследования задачи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть M — гладкое многообразие размерности $\dim M = n$.

Обозначим через $T_q M$ касательное пространство к M в точке $q \in M$.

Пусть на M задано семейство $\mathcal{F} = \{X_1, X_2\}$ из двух гладких векторных полей $X_1, X_2 \in \text{Vec}(M)$, удовлетворяющих условию полного ранга, т.е. для которых выполнено

$$\text{Lie}_q \mathcal{F} = T_q M, \quad \forall q \in M,$$

где $\text{Lie}_q \mathcal{F}$ обозначает алгебру Ли, порождаемую системой \mathcal{F} в точке q

$$\begin{aligned} \text{Lie}_q \mathcal{F} = \text{span}(X_1(q), X_2(q), [X_1, X_2](q), \dots \\ \dots, [X_i, [\dots, [X_1, X_2] \dots]](q) \mid X_i \in \mathcal{F}). \end{aligned}$$

Здесь квадратные скобки обозначают коммутатор (скобку Ли) векторных полей

$$[X_1, X_2](q) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(e^{-\sqrt{t}X_2} \circ e^{-\sqrt{t}X_1} \circ e^{\sqrt{t}X_2} \circ e^{\sqrt{t}X_1}(q) \right) \in \text{Vec}(M),$$

где через $e^{tX_i}(q)$ обозначен поток векторного поля $X_i \in \text{Vec}(M)$ из точки $q \in M$ за время t , т.е. решение задачи Коши $\dot{\gamma}(t) = X_i(\gamma(t))$, $\gamma(0) = q$.

Обозначим через $\mathbf{L}^s(q)$, $s \in \mathbb{N}$, векторные пространства, порождаемые значениями в точке q скобок Ли полей X_1, X_2 длины $\leq s$, (сами поля X_i — скобки длины 1):

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^1(q) &= \text{span}(X_1(q), X_2(q)), \\ \mathbf{L}^2(q) &= \text{span}(\mathbf{L}^1(q) + [\mathbf{L}^1, \mathbf{L}^1](q)), \\ &\dots \\ \mathbf{L}^s(q) &= \text{span}(\mathbf{L}^{s-1}(q) + [\mathbf{L}^1, \mathbf{L}^{s-1}](q)). \end{aligned}$$

Условие полного ранга гарантирует, что для любой точки $q \in M$ существует наименьшее целое число $r = r(q)$ такое, что $\dim \mathbf{L}^r(q) = n$. Другими словами, система \mathcal{F} задает распределение в касательном пространстве с флагом

$$(P.1) \quad \mathbf{L}^1(q) \subseteq \mathbf{L}^2(q) \subseteq \dots \subseteq \mathbf{L}^{r-1}(q) \subset \mathbf{L}^r(q) = T_q M.$$

Определение 1. Вектором роста системы \mathcal{F} в точке q называется вектор

$$(\dim \mathbf{L}^1(q), \dots, \dim \mathbf{L}^r(q)).$$

Зафиксируем размерность $\dim M = 4$ и рассмотрим управляемую систему

$$(P.2) \quad \dot{q} = \mathbf{u}_1 X_1(q) + \mathbf{u}_2 X_2(q),$$

где траектория $q = q(t) \in M$, $t \geq 0$ — кусочно-гладкая кривая, управления $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ — вещественнозначные кусочно-непрерывные функции, а гладкие векторные поля $X_1, X_2 \in \text{Vec}(M)$ образуют систему с вектором роста (2, 3, 4):

$$\text{span}(X_1(q), X_2(q), [X_1, X_2](q), [X_1, [X_1, X_2]](q)) = T_q M, \quad \forall q \in M.$$

Далее для системы (P.2) будет описана конструкция нильпотентной аппроксимации — в некотором смысле простейшей системы с вектором роста (2, 3, 4), траектории которой локально приближают траектории исходной системы. Под простейшей понимается следующее свойство: векторные поля приближенной системы образуют нильпотентную алгебру Ли, все скобки Ли которой обнуляются начиная с третьего порядка. Такая приближенная система наиболее легко строится в специальных координатах, описывающих перемещение системы в направлениях базовых векторных полей и их коммутаторов — так называемых привилегированных координатах. Перед описанием самой конструкции введем несколько определений, см. подробнее в [27].

Определение 2. Заменой координат для системы (П.2) называется диффеоморфизм $\sigma : M \rightarrow M : q \mapsto \sigma(q)$. Дифференциал этой замены обозначим через $\sigma_* : T_q M \rightarrow T_{\sigma(q)} M : X_i \mapsto \sigma_*(X_i)$, $i = 1, \dots, 4$.

Определение 3. Для системы (П.2) порядком дифференциального оператора X в точке q^0 называется такое минимальное число $s \in \mathbb{N}$, что для любой функции σ , имеющей порядок $p = \min \{p \in \mathbb{N} \mid X_{k_1} \dots X_{k_p}(\sigma)(q^0) = 0, k_j \in \{1, 2\}\}$, все производные порядка $s + p$ вдоль полей X_1, X_2 от $X(\sigma)$ обнуляются в этой точке:

$$X_{k_1} \dots X_{k_{s+p}} X(\sigma)(q^0) = 0, \quad k_j \in \{1, 2\}.$$

Определение 4. Система локальных координат $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_4)$ на M с центром в точке q^0 , определяемая заменой $(\tilde{q}_1(q), \dots, \tilde{q}_4(q)) = (\sigma_1(q), \dots, \sigma_4(q))$, называется линейно адаптированной в точке q^0 , если дифференциалы $d\tilde{q}_1, \dots, d\tilde{q}_4$ образуют базис $T_{q^0}^* M$, адаптированный к флагу $\{0\} = \mathbf{L}^0(q^0) \subset \mathbf{L}^1(q^0) \subset \mathbf{L}^2(q^0) \subset \mathbf{L}^3(q^0)$, т.е. $\mathbf{L}^i(q^0) = \text{span}(\frac{\partial}{\partial \tilde{q}_1}|_{q^0}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{q}_i}|_{q^0})$, $i = 1, 2, 3$. При этом порядком координаты \tilde{q}_i в точке q^0 называется минимальное число $p \in \mathbb{N}$, такое что все производные порядка p вдоль полей X_{k_j} от σ_i обнуляются в этой точке: $X_{k_1} \dots X_{k_p}(\sigma_i)(q^0) = 0$, $k_j \in \{1, 2\}$, где $X_{k_j}(f) = \langle \nabla f, X_{k_j} \rangle$ обозначает производную функции f по направлению поля X_{k_j} , оператор \langle, \rangle — скалярное произведение, а ∇ — взятие градиента.

Определение 5. Для системы (П.2), записанной в линейно адаптированных координатах \tilde{q} , весом координаты \tilde{q}_i называется наименьшее число $\omega_i \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathbf{L}^{\omega_i}(q^0)$ не обнуляется тождественно.

Определение 6. Система локальных координат $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_4)$ с центром в точке q^0 называется привилегированной для системы (П.2), если выполнено

- $(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_4)$ линейно адаптированы в точке q^0 ;
- порядок координаты \tilde{q}_i в точке q^0 равен весу ω_i .

Теперь, когда даны все необходимые определения, опишем конструкцию нильпотентной аппроксимации. Нильпотентная аппроксимация для системы (П.2) строится в пространстве \mathbb{R}^4 следующим образом:

1) система (П.2) записывается в привилегированных координатах \tilde{q}

$$(П.3) \quad \dot{\tilde{q}} = \mathbf{u}_1 X_1(\tilde{q}) + \mathbf{u}_2 X_2(\tilde{q}), \quad \tilde{q} \in M, \quad (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbb{R}^2;$$

2) векторные поля $X_i(\tilde{q})$ раскладываются в ряд Маклорена с последующей группировкой слагаемых одинакового порядка

$$X_i(\tilde{q}) = X_i^{(-1)}(\tilde{q}) + X_i^{(0)}(\tilde{q}) + X_i^{(1)}(\tilde{q}) + X_i^{(2)}(\tilde{q}) + \dots;$$

3) отбрасываются слагаемые начиная с нулевого порядка, и оставшиеся слагаемые порядка -1 формируют базисные векторные поля $\widehat{X}_i(\tilde{q}) = X_i^{(-1)}(\tilde{q})$ приближенной системы — нильпотентной аппроксимации

$$(П.4) \quad \dot{\hat{q}} = \mathbf{u}_1 \widehat{X}_1(\hat{q}) + \mathbf{u}_2 \widehat{X}_2(\hat{q}), \quad \hat{q} \in \mathbb{R}^4, \quad (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Нильпотентная аппроксимация (П.4) для исходной системы (П.3) обладает следующими ключевыми свойствами:

- 1) все коммутаторы порядка ≥ 3 векторных полей $\widehat{X}_1, \widehat{X}_2$ равны нулю;
- 2) вектор роста системы (П.4) равен $(2, 3, 4)$;
- 3) под действием управлений $\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t)$ траектория $\hat{q}(t)$ системы (П.4) локально (при малых $t > 0$) приближает траекторию $\tilde{q}(t)$ системы (П.3).

В главе 8 книги Р. Монтогомери [21] объясняется связь между исходной системой и ее нильпотентизацией (нильпотентной аппроксимацией), она дана теоремой Громова–Митчелла (8.4.1). Оценка на близость траекторий приведена в разделе 8.7. Более детально с конструкцией нильпотентной аппроксимации можно познакомиться в работе Беллаиша [25]. Раздел 7 посвящен оценкам на расстояния, в частности см. Утверждение 7.29 о близости траекторий исходной и приближающей систем.

Замечание 7. В общем случае $\dim M = n$, для исходной $\tilde{q}(t) = (\tilde{q}_1(t), \dots, \tilde{q}_n(t))$ и приближающей траекторий $\hat{q}(t) = (\hat{q}_1(t), \dots, \hat{q}_n(t))$ в привилегированных координатах, выходящих из одной точки, выполнена локальная оценка $|\tilde{q}_i(t) - \hat{q}_i(t)| \leq Ct^{w_i+1}$, где C — константа, w_i — вес координаты \tilde{q}_i (степень неголономности в направлении \tilde{q}_i , которая вычисляется как наименьшая глубина флага распределения (П.1), не обнуляющая i -е направление).

В данной работе для траекторий $\tilde{q}(t)$ и $\hat{q}(t)$ систем (П.3) и (П.4) выполнена оценка

$$|\tilde{q}_i(t) - \hat{q}_i(t)| \leq Ct^{w_i+1}, \quad w = (1, 1, 2, 3),$$

где C — константа, определяемая видом векторных полей X_i и начальной точкой q^0 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Laumond J.-P.* Nonholonomic Motion Planning for Mobile Robots. Tutorial notes. LAAS-CNRS. Toulouse, 1998.
2. *Ardentov A.A.* Controlling of a Mobile Robot with a Trailer and Its Nilpotent Approximation // Regular. Chaot. Dynam. 2016. V. 21. No. 7–8. P. 775–791.
3. *Маштаков А.П.* Алгоритмическое и программное обеспечение решения конструктивной задачи управления неголономными пятимерными системами // Программные системы: теория и приложения. 2012. Т. 3. № 1(10). С. 3–29.
4. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
5. *Chitour Y., Jean F., Long R.* A Global Steering Method for Nonholonomic Systems // J. Differ. Equat. 2013. V. 254. P. 1903–1956.
6. *Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N.* Contact Geometry and Nonlinear Differential Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
7. *Murray R.M., Sastry S.* Steering Nonholonomic Systems Using Sinusoids // IEEE Int. Conf. on Decision and Control. 1990. P. 2097–2101.
8. *Murray R.M.* Robotic Control and Nonholonomic Motion Planning // PhD Thesis. Memorandum No. UCB/ERL M90/117. University of California. Berkeley. 1990.
9. *Tilbury D., Murray R., Sastry S.* Trajectory Generation for the n-Trailer Problem Using Goursat Normal Form // IEEE TAC. 1995. V. 40. No. 5. P. 802–819.

10. Monaco S., Norman-Cyrot D. On Carnot-Carathéodory Metrics // J. Differ. Geom. etry. 1985. V. 21. P. 35–45.
11. Murray R.M. Nilpotent Bases for a Class on Nonintegrable Distributions with Applications to Trajectory Generation for Nonholonomic Systems // Math. Control Signal Syst. University of California. Berkeley, 1990.
12. Venditelli M., Oriolo G., Jea F., Laumond J.P. Nonhomogeneous Nilpotent Approximations for Nonholonomic Systems with Singularities // Transact. Autom. Control. 2004. V. 49. No. 2. P. 261–266.
13. Fernandes C., Gurvits L., Li Z.X. A Variational Approach to Optimal Nonholonomic Motion Planning // IEEE ICRA. Sacramento. 1991. P. 680–685.
14. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.
15. Duits R., Meesters S.P.L., Mirebeau J.M., Portegies J.M. Optimal Paths for Variants of the 2D and 3D Reeds-Shepp Car with Applications in Image Analysis // J. Math. Imaging and Vision. 2018. V. 60. No. 6. P. 816–848.
16. Lafferriere G., Sussmann H.J. A Differential Geometric Approach to Motion Planning. Nonholonomic Motion Planing. 1992. Editors: Zexiang Li, J.F. Canny.
17. Bellaïche A., Laumond J. P., Chyba M. Canonical Nilpotent Approximation of Control Systems: Application to Nonholonomic Motion Planning. 32nd IEEE CDC. 1993.
18. Bellaïche A., Laumond J.P., Riser J.J. Nilpotent Infinitesimal Approximations to a Control Lie Algebra // IFAC NCSDS. Bordeaux. 1992. P. 174–181.
19. Ардентов А.А., Сачков Ю.Л. Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля // Матем. сб. 2011. Т. 202. № 11. С. 31–54.
20. Сачков Ю.Л. Управляемость и симметрии инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах. М.: Физматлит, 2007.
21. Montgomery R. A Tour of Sub-Riemannian Geometries, Their Geodesics and Applications. Vol. 91 of Mathematical Surveys and Monographs. 2002.
22. Stefani G. Polynomial Approximations to Control Systems and Local Controllability // Proc. 24th. I.E.E.E. Conference on Decision and Control. Ft. Lauderdale. Fla. 1985. P. 33–38.
23. Аграчев А.А., Сарычев А.В. Фильтрация алгебры Ли векторных полей и нильпотентная аппроксимация управляемых систем // ДАН СССР. 1987. Т. 295. С. 777–781.
24. Hermes H. Nilpotent and High-Order Approximations of Vector Fields Systems // SIAM. 1991. V. 33. P. 238–264.
25. Bellaïche A. The Tangent Space in Sub-Riemannian Geometry // Sub-Riemannian Geometry. Birkhauser. Basel. P. 1–78.
26. Gromov, M. (avec J. Lafontaine, P. Pansu), Structures métriques pour les variétés riemanniennes / Textes Mathématiques. Paris: CEDIC/Fernand Nathan. 1981.
27. Jean F. Control of Nonholonomic Systems: from Sub-Riemannian Geometry to Motion Planning. Springer, 2014.
28. Sachkov Yu.L. Symmetries of Flat Rank Two Distributions and Sub-Riemannian Structures // Transact. Amer. Math. Soc. 2004. V. 356. P. 457–494.
29. Ardentov A.A., Sachkov Yu.L. Conjugate Points in Nilpotent Sub-Riemannian Problem on the Engel Group // JMS. 2013. V. 195. No. 3. P. 369–390.
30. Ardentov A.A., Sachkov Yu.L. Cut Time in Sub-Riemannian Problem on Engel Group // ESAIM: COCV. 2015. V. 21. No. 4. P. 958–988.

31. *Ardentov A.A., Sachkov Yu.L.* Maxwell Strata and Cut Locus in Sub-Riemannian Problem on Engel Group // RCD. 2017. V. 22. No. 8. P. 909–936.
32. *Ардентов А.А., Сачков Ю.Л.* Множество разреза в субримановой задаче на группе Энгеля // ДАН. 2018. Т. 478. № 6. С. 623–626.
33. *Уиттекер Ю.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. М.: УРСС, 2002.
34. *Moiseev I., Sachkov Yu.L.* Maxwell Strata in Sub-Riemannian Problem on the Group of Motions of a Plane // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2010. V. 16. P. 380–399.
35. *Sachkov Yu.L.* Conjugate and Cut Time in the Sub-Riemannian Problem on the Group of Motions of a Plane // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2010. V. 16. P. 1018–1039.
36. *Sachkov Yu.L.* Cut Locus and Optimal Synthesis in the Sub-Riemannian Problem on the Group Of Motions of a Plane // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2011. V. 17. P. 293–321.
37. *David J., Manivannan P.V.* Control of Truck-Trailer Mobile Robots: A Survey // Intelligent Service Robotics. 2014. V. 7. No. 4. P. 245–258.
38. *Lamirault F., Sekhavat S., Laumond J.-P.* Motion Planning and Control for Hilare Pulling a Trailer // IEEE Transact. Robot. Autom. 1999. V. 15. No. 4. P. 640–652.
39. *Dubins L.E.* On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents // Amer. J. Math. 1957. V. 79. No. 3. P. 497–516.
40. *Ardentov A.A., Karavaev Y.L., Yefremov K.S.* Euler Elastics for Optimal Control of the Motion of Mobile Wheeled Robots: the Problem of Experimental Realization // RCD. 2019. V. 24. No. 3. P. 312–328.
41. *Локуцевский Л.В.* Выпуклая тригонометрия с приложениями к субфинслеровой геометрии // Матем. сб. 2019. Т. 210. № 8. С. 120–148.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 13.10.2019

После доработки 14.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020

© 2021 г. С.А. ВАВИЛОВ, д-р физ.-мат. наук (savavilov@inbox.ru)
(Санкт-Петербургский государственный университет)

ОБ АДАПТИВНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В УСЛОВИЯХ ЧАСТИЧНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ВОЗМУЩАЮЩЕГО ПОЛЯ

Рассматривается построение адаптивного алгоритма решения краевой задачи, обеспечивающей попадание траектории, выпущенной из некоторой точки, в мишень конечного размера на заданный момент времени, в условиях частичной неопределенности возмущающего поля. Несмотря на то, что некоторая составляющая возмущающего поля неизвестна в явном виде, но существенна для обеспечения попадания в мишень заданного размера, при выполнении ряда условий, построена итерационная процедура решения поставленной задачи за конечное число шагов. Алгоритм основан на использовании пробных траекторий, допускающих в качестве обратной связи измерение их отклонений от центра мишени, что оказывается достаточным для компенсации неполноты информации относительно внешнего поля возмущений.

Ключевые слова: адаптивное управление, двухточечные краевые задачи, условия неопределенности, дифференциальные уравнения.

DOI: 10.31857/S0005231021010062

1. Введение

Примерами адаптивного подхода к решению двухточечной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) могут служить метод пристрелки [1], а также использование таблиц стрельбы в рамках методологии решения задач внешней баллистики (ЗВБ) [2, 3], когда некоторая составляющая внешнего поля, влияющая на изменение траектории движения и существенная для обеспечения требуемой точности, не поддается точному описанию. В этом случае отсутствие указанной информации пытаются компенсировать использованием “пробных траекторий”, когда, исходя из отклонений траекторий, отвечающих всему внешнему полю, ставят вопрос о решении некоторой двухточечной краевой задачи, не прибегая при этом к восстановлению явной структуры всего существенного поля, воздействующего на траекторию движения, а лишь используя определенную модель с неизвестными коэффициентами, подлежащими определению опытным путем. Приведенные соображения лежат в основе полуэмпирических таблиц стрельбы, широко используемых в теории и практике науки о внешней баллистике [4, 5]. Слово “полуэмпирический” в их названии подчеркивает тот факт, что указанные таблицы не претендуют на построение математически строго обоснованных конечносходящихся алгоритмов (КСА) [6], отвечающих решению ЗВБ, а лишь только “подсказывают” рекомендуемую последовательность

действий, разработанных частично эмпирическим путем и доказавших свою эффективность на практике. Понятно, что такой подход имеет изъяны не только с теоретической, но и практической точки зрения. В частности, подобные таблицы жестко привязаны к конкретным внешним условиям, что существенно ограничивает географию их применения. Кроме того, наличие большого количества учитываемых в таблицах факторов, вызванных стремлением увеличить точность попадания, может привести к тому, что возможные ошибки в определении параметров одного из них, становятся по своей значимости сопоставимыми с влиянием непосредственно других факторов на траекторию движения. В связи с вышесказанным возникает обоснованное стремление сформулировать и математически строго обосновать, при выполнении определенных условий, КСА решения ЗВБ, адаптированный применительно к широкому классу неизвестных внешних возмущений и не требующий детальной априорной информации о структуре возмущающего поля. Исследованию обозначенной проблемы в рамках определенных, наложенных ниже ограничений, посвящена данная статья.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему ОДУ

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = F(x),$$

где $x = \begin{pmatrix} r \\ v \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$. Здесь r имеет смысл координаты, а v – скорости материальной точки, в то время как функция $F(x)$ определяет ее ускорение, при этом предполагается, что $F(x) \in C^1(\mathbb{R}^{2n})$. Относительно (1) поставим следующую краевую задачу:

$$(2) \quad r(0) = 0, \quad r(T) \in R_c,$$

где величина T задана, R_c представляет собой шар с центром в точке r_c и радиусом d , определяемый нормой вектора b с элементами (b_1, \dots, b_n) :

$$\|b\|_1 = \max_i |b_i|.$$

Кроме того, в дальнейшем будет использоваться согласованная с ней норма матрицы A :

$$\|A\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

где a_{ij} – элементы матрицы $A[n \times n]$.

Наряду с (1) рассмотрим “укороченное” уравнение

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = F_0(x),$$

где F_0 отвечает явно заданной части внешнего поля, предполагается, что $F_0(x) \in C^1(\mathbb{R}^{2n})$, остальная часть поля $F - F_0$ является “малой” в определенном далее смысле и, вообще говоря, не известна в явном виде, хотя относительно нее существует некоторая приведенная ниже оценка сверху.

Для уравнения (3) поставим следующую краевую задачу:

$$(4) \quad r(0) = 0, \quad r(T) = r_c.$$

Предположим, что задача (3), (4) разрешима, и обозначим через $\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{r}(t) \\ \tilde{v}(t) \end{pmatrix}$ одно из ее решений. Введем в рассмотрение вектор $y(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$, положим $y(t) = \begin{pmatrix} \delta r(t) \\ \delta v(t) \end{pmatrix}$, $\delta r \in \mathbb{R}^n$, $\delta v \in \mathbb{R}^n$ и запишем вместо (1) уравнение в вариациях

$$(5) \quad \frac{dy}{dt} = A(t)y + \varepsilon f(t, y),$$

где матрица $A(t)[n \times n]$, определяемая зависимостью $A(t) = \frac{\partial F_0}{\partial x}(\tilde{x}(t))$, представляет собой матрицу Якоби, вычисленную на траектории решения задачи (3), (4), и является непрерывной в силу указанной выше гладкости функции F_0 , вектор-функция $f(t, y) = F(\tilde{x}(t) + y) - F_0(\tilde{x}(t)) - A(t)y$ непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по y в силу предположенной выше гладкости функций $F_0(x)$ и $F(x)$, при этом $f(t, y)$, вообще говоря, не обязательно должна допускать представление в явном виде, ε – малый параметр, характеризующий малость поля $f(t, y)$ в малой окрестности траектории $\tilde{x}(t)$. Соответственно задача (2) для уравнения (5) переписывается следующим образом:

$$(6) \quad \delta r(0) = 0, \quad \delta r(T) \in R_0,$$

где R_0 – шар в норме $\|\cdot\|_1$ с центром в нуле и диаметром $d = O(\varepsilon^\gamma)$, $\gamma \geq 1$. Смысл последнего условия относительно d означает, что размер мишени может быть величиной сколь угодно большого порядка малости относительно величины отклонения траектории от центра мишени под воздействием неизвестной составляющей возмущающего поля.

Используя метод вариации произвольных постоянных, введем в рассмотрение функцию $z(t)$ исходя из соотношения $y(t) = B(t)z(t)$, где $B(t)$ – матрица фундаментальных решений линейной части системы (5), отвечающей $\varepsilon = 0$, при этом $B(0) = E$, где E – единичная матрица. Таким образом, относительно $z(t)$ получим уравнение

$$(7) \quad \frac{dz}{dt} = \varepsilon B^{-1}(t)f(t, B(t)z(t)) = \varepsilon g(t, z),$$

где

$$z(t) = \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}, \quad p \in \mathbb{R}^n, \quad q \in \mathbb{R}^n, \quad g(t, z)$$

— введенное для краткости обозначение, при этом матрица фундаментальных решений имеет структуру

$$B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) & B_2(t) \\ B_3(t) & B_4(t) \end{pmatrix},$$

где каждая из матриц $B_i(t)$ имеет размерность $[n \times n]$. Соответственно, задача (2) для уравнения (7) примет следующий вид:

$$(8) \quad p(0) = 0, \quad B_1(T)p(T) + B_2(T)q(T) \in R_0.$$

Дополнительно потребуем существования матрицы $B_2^{-1}(T)$ и справедливости оценки

$$(9) \quad \left| \frac{\partial g_i}{\partial z_j} \right| \leq K(t),$$

где $K(t)$ — известная непрерывная функция. Кроме того, введем в рассмотрение следующие обозначения:

$$(10) \quad \delta z(t) = z(t) - z(0), \quad \delta p(t) = p(t) - p(0), \quad \delta q(t) = q(t) - q(0),$$

при этом $p(0) \equiv 0$ и в дальнейшем для удобства будем обозначать $q(0)$ через q_0 . Таким образом, окончательно исходная задача (1), (2) сводится к следующей: требуется выяснить условия существования КСА решения задачи (7), (8) для всех достаточно малых ε на основе измерений отклонения траектории системы (5), а именно вектора δr от нулевой точки на момент времени T .

Наряду с основной задачей (8) рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$(11) \quad p(0) = 0, \quad B_1(T)p(T) + B_2(T)q(T) = 0$$

для уравнения (7), при этом имеет место

Теорема 1. Для всех достаточно малых ε решение задачи (7), (11) существует и единственно.

Основной результат данной работы использует утверждение теоремы 1, доказательство которой приводится в Приложении.

3. Основной результат

Введем в рассмотрение следующий итерационный процесс:

$$(12) \quad q_0^{k+1} = q_0^k - B_2^{-1}(T)\delta r(T) \Big|_{q_0^k}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

при этом $q_0^0 = 0$, $\delta r(T) \Big|_{q_0^k}$ обозначает значение величины δr , отвечающей начальной скорости q_0^k и вычисленной на момент времени T .

Теорема 2. Для всех достаточно малых ε итерационный процесс (12) является КСА решения задачи (7), (8) при $d = O(\varepsilon^N)$, где $N > 1$ – любое конечное число.

Доказательство теоремы 2 дано в Приложении.

Таким образом, алгоритм (12) заключается в осуществлении процедуры перенацеливания, т.е. выбора на каждом последующем шаге скорректированной начальной скорости по результатам измерения отклонения пробной траектории на момент времени T от центра мишени, отвечающей значению начальной скорости на предыдущем шаге.

4. Иллюстрирующий пример

Рассмотрим пример возмущенной системы, отвечающей (1), но уже записанной в квазилинейной форме

$$(13) \quad \dot{x} = Ax + b + \varepsilon f(x),$$

где

$$x = (r_1, r_2, v_1, v_2)^T, \quad b = (0, 0, 0, -g)^T, \quad g = 10, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = \left(0, 0, -\sqrt{v_1^2 + v_2^2}v_1, -\sqrt{v_1^2 + v_2^2}v_2 \right).$$

Поставим для (13) краевую задачу, соответствующую (4):

$$(14) \quad r_1(0) = r_2(0) = 0, \quad r_{c1} = 12000, \quad r_{c2} = 4500, \quad T = 30.$$

Нетрудно проверить, что решение задачи (13), (14) при отсутствии возмущений ($\varepsilon = 0$) обеспечивается значениями $v_1(0) = 400$ и $v_2(0) = 300$. Разложим уравнение (13) в окрестности указанного невозмущенного решения. Соответственно, уравнение в вариациях примет вид

$$\delta \dot{r}_1 = \delta v_1, \quad \delta \dot{r}_2 = \delta v_2,$$

$$\delta \dot{v}_1 = -\varepsilon \sqrt{(\tilde{v}_1(t) + \delta v_1)^2 + (\tilde{v}_2(t) + \delta v_2)^2} (\tilde{v}_1(t) + \delta v_1),$$

$$\delta \dot{v}_2 = -\varepsilon \sqrt{(\tilde{v}_1(t) + \delta v_1)^2 + (\tilde{v}_2(t) + \delta v_2)^2} (\tilde{v}_2(t) + \delta v_2),$$

где

$$\tilde{v}_1(t) = 400, \quad \tilde{v}_2(t) = 300 - 10t,$$

при этом

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B_2^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

Величина d_k для различных k и ε

$k \backslash \varepsilon$	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}
0	0,91	9,12	90,53	839,16	4991,85
1	0,00012	0,01	1,20	101,94	3052,98
2	$1,6 \cdot 10^{-8}$	0,0002	0,016	12,75	2029,26
3	–	$2,2 \cdot 10^{-8}$	0,0002	1,601	1402,47
4	–	$3,9 \cdot 10^{-11}$	$2,85 \cdot 10^{-6}$	0,201	991,13
5	–	–	$3,76 \cdot 10^{-8}$	0,025	710,3
6	–	–	$2 \cdot 10^{-9}$	0,0031	513,77

соответственно. Тогда итерационный процесс (12), обеспечивающий корректировку начальных скоростей в данной задаче, примет вид

$$\delta v_1^{k+1}(0) = \delta v_1^k(0) - \frac{1}{T} \delta r_1(T) \Big|_{\delta v_1^k(0), \delta v_2^k(0)},$$

$$\delta v_2^{k+1}(0) = \delta v_2^k(0) - \frac{1}{T} \delta r_2(T) \Big|_{\delta v_1^k(0), \delta v_2^k(0)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

при этом

$$\delta v_1^0(0) = \delta v_2^0(0) = 0.$$

Введем в рассмотрение величину

$$d_k = \sqrt{[\delta r_1^k(T)]^2 + [\delta r_2^k(T)]^2},$$

где

$$\delta r_1^k(T) = \delta r_1(T) \Big|_{\delta v_1^k(0), \delta v_2^k(0)}, \quad \delta r_2^k(T) = \delta r_2(T) \Big|_{\delta v_1^k(0), \delta v_2^k(0)}$$

представляют собой отклонения компонент траектории материальной точки от центра мишени на момент времени T , отвечающие k -й итерации и вариациям начальных скоростей $\delta v_1^k(0)$ и $\delta v_2^k(0)$.

Из анализа приведенных в таблице значений d_k видно, что сходимость итерационного процесса выглядит обоснованной начиная с $\varepsilon = 10^{-5}$, при этом точность проводимых вычислений отвечает 10^{-12} .

5. Заключение

Приведенное в статье решение поставленной задачи не является типичным при сравнении с классическими подходами к решению задач адаптивного управления, поскольку в ее постановке отсутствует набор конечного числа неизвестных параметров, обусловленный выбором конкретной динамической модели. Кроме того, наряду с задачей (2) для уравнения (1) не меньший интерес представляет следующая краевая задача:

$$(15) \quad r(0) = 0, \quad r(T) \in R_c, \quad \|v(0)\| = v^*,$$

где величина T не фиксирована и подлежит определению, $\|\cdot\|$ представляет собой евклидову норму вектора. Смысл задачи (15) заключается в том, что не всегда начальное значение скорости может варьироваться относительно произвольным образом, в данной постановке величина вектора начальной скорости жестко фиксирована. Примечательно, что разрешимость задачи (3), (15) в случае когда $r(T) = r_c$ на основе методов функционального анализа была исследована сравнительно недавно [7–10], включая построение конструктивных методов ее решения. Проблема существования КСА решения задачи (1), (15) может быть поставлена аналогично тому, как это было сделано ранее, тем не менее соответствующая постановка представляется существенно более сложной. С другой стороны, не исключено, что в определенных условиях в основе ее решения может быть использован в качестве вспомогательного алгоритм (12) с последующим варьированием получаемой промежуточной скорости для обеспечения ее требуемой нормировки и одновременной корректировкой величины T с целью сохранения “подкорректированных” траекторий на момент времени T в последовательности вложенных шаров, аналогичной описанной в процессе доказательства теоремы 2 (см. Приложение), причем радиусы шаров относительно центра мишени стремятся к нулю. Здесь же возникает вопрос и о целесообразности измерения не только отклонений пробных траекторий, но и использования оценок флуктуации их скоростей на определенные моменты времени. Кроме того, не менее важной при построении КСА решения задачи (15) является проблема робастности, связанная как с возможной ошибкой в определении величины v^* , так и с допустимыми отклонениями при выборе последовательности промежуточных значений T , что также является предметом дальнейших исследований.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Лемма 1. Пусть $z(t)$ – решение системы (7). Тогда имеет место оценка

$$(П.1) \quad \left| \frac{\partial \delta z_i(t)}{\partial z_j(0)} \right| \leq \exp \left(2\varepsilon n \int_0^t K(\tau) d\tau \right) - 1$$

относительно всех i, j , равных $1, \dots, 2n$.

Доказательство леммы. Рассмотрим систему (7) и введем в рассмотрение вектор

$$s = \left(\frac{\partial z_1(t)}{\partial z_k(0)}, \dots, \frac{\partial z_{2n}(t)}{\partial z_k(0)} \right),$$

где k фиксированно. Известно [11], что $s_i, i = 1, \dots, 2n$ удовлетворяют следующей линейной системе ОДУ:

$$(П.2) \quad \frac{ds_i}{dt} = \varepsilon \sum_{j=1}^{2n} \left(\frac{\partial g_i}{\partial z_j} \right) s_j,$$

где частные производные вычисляются исходя из (7) и, кроме того,

$$(П.3) \quad s_i(0) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Рассмотрим

$$\|s(t)\|_1 = \max_i \left| \frac{\partial z_i(t)}{\partial z_k(0)} \right|,$$

при этом в силу (П.3) $|s_i(0)| \leq 1$. Таким образом, из (П.2) следует оценка

$$\|s(t)\|_1 \leq 1 + 2\varepsilon n \int_0^t K(\tau) \|s(\tau)\|_1 d\tau.$$

Из последнего соотношения в силу леммы Гронуолла [12] вытекает неравенство

$$(П.4) \quad \|s(t)\|_1 \leq \exp \left(2\varepsilon n \int_0^t K(\tau) d\tau \right).$$

Введем в рассмотрение величину

$$e_i = \frac{\partial \delta z_i(t)}{\partial z_{k0}},$$

где

$$\delta z_i(t) = z_i(t) - z_i(0).$$

Соответственно $e_i(0) = 0$ для любых i и k . С другой стороны,

$$\frac{de_i}{dt} = \varepsilon \sum_{j=1}^{2n} \left(\frac{\partial g_i}{\partial z_j} \right) \frac{\partial z_j}{\partial z_k(0)}$$

и в силу (П.4) справедливо неравенство

$$|e_i| \leq \int_0^t 2\varepsilon n K(\tau) \exp \left(2\varepsilon n \int_0^\tau K(s) ds \right) d\tau = \exp \left(2\varepsilon n \int_0^t K(\tau) d\tau \right) - 1.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Разрешимость краевой задачи (7), (11) эквивалентна разрешимости относительно q_0 следующего уравнения:

$$(П.5) \quad 0 = B_2(T)q_0 + B_1(T)\delta p(T) \Big|_{q_0} + B_2(T)\delta q(T) \Big|_{q_0},$$

где символы $\delta p(T) \Big|_{q_0}$ и $\delta q(T) \Big|_{q_0}$ обозначают величины соответствующих компонент (10), отвечающих начальному условию q_0 и вычисляемых на момент времени T . Соотношение (II.5) можно переписать следующим образом:

$$(II.6) \quad q_0 = -B_2^{-1}(T)B_1(T)\delta p(T) \Big|_{q_0} - \delta q(T) \Big|_{q_0} = F(q_0),$$

где под $F(q_0)$ понимается обозначение правой части (II.6). Заметим, что в силу формулы Тейлора для случая функций нескольких переменных можно записать

$$\begin{aligned} & F(q_1) - F(q_2) = \\ & = -B_2^{-1}(T)B_1(T) \left(\frac{\partial \delta p(T)}{\partial q_0} \right) \Big|_{\bar{q}} (q_1 - q_2) - \left(\frac{\partial \delta q(T)}{\partial q_0} \right) \Big|_{\bar{q}} (q_1 - q_2), \end{aligned}$$

где соответствующие частные производные вычисляются вдоль траекторий (7), отвечающих некоторым начальным условиям \bar{q} , расположенным на прямой, соединяющей точки q_1 и q_2 . Соответственно, в силу леммы имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \|F(q_1) - F(q_2)\|_1 \leq n \left[\|B_2^{-1}(T)B_1(T)\|_1 + 1 \right] \times \\ & \times \left[\exp \left(2\varepsilon n \int_0^T K(\tau) d\tau \right) - 1 \right] \|q_1 - q_2\|_1 = C_1(\varepsilon) \|q_1 - q_2\|_1, \end{aligned}$$

где $C_1(\varepsilon)$ – введенное для краткости обозначение. Поскольку $C_1(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то для всех достаточно малых ε таких, что выполняется неравенство $C_1(\varepsilon) < 1$, уравнение (II.6) в силу принципа сжимающих отображений [13] имеет единственное решение, что доказывает теорему 1.

Доказательство теоремы 2. Обозначим начальное значение, обеспечивающее решение задачи (7), (11), через q_0^* , существование и единственность которого следует из теоремы 1. Соответственно имеет место соотношение

$$(II.7) \quad 0 = B_2(T)q_0^* + B_1(T)\delta p(T) \Big|_{q_0^*} + B_2(T)\delta q(T) \Big|_{q_0^*}.$$

Имея в виду рассматриваемый алгоритм пристрелки (12), можем записать

$$(II.8) \quad \delta r(T) \Big|_{q_0^k} = B_2(T)q_0^k + B_1(T)\delta p(T) \Big|_{q_0^k} + B_2(T)\delta q(T) \Big|_{q_0^k}.$$

Введем в рассмотрение обозначение $\delta q_0^k = q_0^k - q_0^*$. С учетом процедуры (12) справедливо равенство

$$(II.9) \quad \delta q_0^{k+1} = \delta q_0^k - B_2^{-1}(T)\delta r(T) \Big|_{q_0^k}.$$

Вычитая (П.7) из (П.8) получим

$$(П.10) \quad \begin{aligned} \delta r(T) \Big|_{q_0^k} &= B_2(T) \delta q_0^k + B_1(T) \left[\delta p(T) \Big|_{q_0^k} - \delta p(T) \Big|_{q_0^*} \right] + \\ &+ B_2(T) \left[\delta q(T) \Big|_{q_0^k} - \delta q(T) \Big|_{q_0^*} \right], \end{aligned}$$

или

$$(П.11) \quad \begin{aligned} \delta q_0^k &= B_2^{-1}(T) \delta r(T) \Big|_{q_0^k} - B_2^{-1}(T) B_1(T) \left[\delta p(T) \Big|_{q_0^k} - \delta p(T) \Big|_{q_0^*} \right] - \\ &- \left[\delta q(T) \Big|_{q_0^k} - \delta q(T) \Big|_{q_0^*} \right]. \end{aligned}$$

Из (П.9) и (П.11) следует, что

$$\delta q_0^{k+1} = -B_2^{-1}(T) B_1(T) \left[\delta p(T) \Big|_{q_0^k} - \delta p(T) \Big|_{q_0^*} \right] - \left[\delta q(T) \Big|_{q_0^k} - \delta q(T) \Big|_{q_0^*} \right],$$

откуда, повторяя предыдущие рассуждения, приходим к оценке

$$\|\delta q_0^{k+1}\|_1 \leq n \left[\|B_2^{-1}(T) B_1(T)\|_1 + 1 \right] \left[\exp \left(2\varepsilon n \int_0^T K(\tau) d\tau \right) - 1 \right] \|\delta q_0^k\|_1,$$

или с учетом предыдущих обозначений

$$(П.12) \quad \|\delta q_0^{k+1}\|_1 \leq C_1(\varepsilon) \|\delta q_0^k\|_1.$$

С другой стороны, из (П.11) вытекает соотношение

$$\delta q_0^k = h + D \delta q_0^k,$$

где вектор

$$h = B_2^{-1}(T) \delta r(T) \Big|_{q_0^k},$$

матрица

$$D = -B_2^{-1}(T) B_1(T) \left(\frac{\partial \delta p(T)}{\partial q_0} \right) \Big|_{\bar{q}} - \left(\frac{\partial \delta q(T)}{\partial q_0} \right) \Big|_{\bar{q}}.$$

Соответственно, имеет место оценка

$$\|D\|_1 \leq C_1(\varepsilon).$$

Тогда в случае достаточно малых ε , когда $\|D\|_1 < 1$, можно записать цепочку неравенств [14]

$$\|\delta q_0^k\|_1 - \|h\|_1 \leq \|\delta q_0^k - h\|_1 \leq \frac{\|D\|_1}{1 - \|D\|_1} \|h\|_1,$$

или

$$(II.13) \quad \begin{aligned} \|\delta q_0^k\|_1 &\leq \frac{1}{1 - \|D\|_1} \|h\|_1 \leq \\ &\leq \frac{\|B_2^{-1}(T)\|_1}{1 - \|D\|_1} \left\| \delta r(T) \right\|_{q_0^k} = C_2 \left\| \delta r(T) \right\|_{q_0^k}, \end{aligned}$$

где C_2 – введенное для краткости обозначение. Аналогично (II.10) имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \delta r(T) \Big|_{q_0^{k+1}} &= B_2(T) \delta q_0^{k+1} + B_1(T) \left[\delta p(T) \Big|_{q_0^{k+1}} - \delta p(T) \Big|_{q_0^*} \right] + \\ &+ B_2(T) \left[\delta q(T) \Big|_{q_0^{k+1}} - \delta q(T) \Big|_{q_0^*} \right]. \end{aligned}$$

С учетом (II.12), (II.13) имеет место последовательность оценок

$$\begin{aligned} &\left\| \delta r(T) \Big|_{q_0^{k+1}} \right\|_1 \leq \\ &\leq \left\{ \|B_2(T)\|_1 + n \left(\|B_1(T)\|_1 + \|B_2(T)\|_1 \right) \left[\exp \left(2\varepsilon n \int_0^T K(\tau) d\tau \right) - 1 \right] \right\} \times \\ &\times \|\delta q_0^{k+1}\|_1 = C_3 \|\delta q_0^{k+1}\|_1 \leq C_3 C_1(\varepsilon) \|\delta q_0^k\|_1 \leq C_3 C_2 C_1(\varepsilon) \left\| \delta r(T) \Big|_{q_0^k} \right\|_1, \end{aligned}$$

где C_3 – соответствующее обозначение. Тогда, если $C_3 C_2 C_1(\varepsilon) < 1$, что имеет место при всех достаточно малых ε , итерационный процесс (12) является КСА решения задачи (7), (8). Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.
2. *Лысенко Л.Н.* Внешняя баллистика. М.: МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2018.
3. *Коновалов А.А., Николаев Ю.В.* Внешняя баллистика. М.: ЦНИИ информации, 1979
4. *Козлитин И.А.* Полуэмпирическая баллистическая модель с четырьмя степенями свободы // Электронные информационные системы. 2018. № 2. С. 83–100.

5. *Козлитин И.А.* Восстановление входных параметров расчета внешней баллистики тела по результатам траекторных измерений // Матем. моделирование. 2017. Т. 29. № 9. С. 121–134.
6. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
7. *Вавилов С.А.* О разрешимости одного класса краевых задач // ДАН СССР. 1989. Т. 305. № 2. С. 268–270.
8. *Вавилов С.А.* Исследование разрешимости одного класса краевых задач со свободной границей // Диффер. уравнения. 1989. Т. 25. № 12. С. 2075–2081.
9. *Vavilov S.A.* On the Solvability of One Class of Boundary Value Problems // Differ. Integral Equat. 1990. V. 3. No. 1. P. 175–179.
10. *Stepanov E., Vavilov S.A.* The Main Problem of External Ballistics // Comput. Math. Appl. 1997. V. 33. No. 5. P. 95–101.
11. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970.
12. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
13. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
14. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.М. Хрустальевым.

Поступила в редакцию 15.11.2019

После доработки 21.06.2020

Принята к публикации 09.07.2020

Управление в социально-экономических системах

© 2021 г. А.Н. ИГНАТОВ, канд. физ.-мат. наук (alexei.ignatov1@gmail.com),
А.В. НАУМОВ, д-р физ.-мат. наук (naumovav@mail.ru)
(Московский авиационный институт)

О ЗАДАЧЕ УВЕЛИЧЕНИЯ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ СТАНЦИИ¹

Рассматривается задача увеличения пропускной способности железнодорожной станции с учетом некоторого базового расписания движения по станции. С этой целью определяются время и маршрут для каждого дополнительного поезда путем решения набора задач смешанного целочисленного линейного программирования. Предлагается схема по учету влияния случайных задержек в движении поездов на возможность их пропуска через железнодорожную станцию. Приводятся результаты численного эксперимента.

Ключевые слова: железнодорожная станция, пропускная способность, граф, смешанное целочисленное линейное программирование.

DOI: 10.31857/S0005231021010074

1. Введение

В рамках национальных проектов развития Российской Федерации предполагается увеличение количества перевозимых грузов, в частности с использованием железной дороги. Для увеличения количества перевозимых грузов возможны два пути: расширение действующей и строительство новой железнодорожной инфраструктуры и увеличение эффективности использования действующей инфраструктуры. Первый путь предполагает большие материальные затраты, длителен по времени и может быть осуществлен вследствие дороговизны только на некотором относительно небольшом участке железнодорожной сети. Второй же путь существенно дешевле и может быть масштабирован в пределах всей Российской Федерации. Для увеличения эффективности действующей инфраструктуры необходимо, в частности, увеличить количество поездов, обращающихся по железнодорожным перегонам. Однако увеличение интенсивности движения на железнодорожных перегонах невозможно без оценки пропускной способности станции и оптимизации движения на ней, что составляет предмет настоящей статьи.

В то же время большая часть математических постановок задач, посвященных увеличению пропускной способности, как правило, касаются состав-

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-07-00046 А).

ления оптимального расписания движения поездов по железнодорожным перегонам [1–4], оптимальной подвязки локомотивов к поездам [5–9], назначению “технологического окна” – времени, в течение которого прекращается движение поездов по отдельным железнодорожным путям для производства ремонтно-строительных работ – на железнодорожных перегонах [10–13]. Моделированию движения на станции и его оптимизации уделяется меньше внимания. Среди российских публикаций, посвященных данной проблематике, выделим [14, 15]. В [14] была представлена задача по оптимизации движения маневровых составов по станции с целью исполнения всех маневровых работ в рамках оценки вероятности бокового столкновения на станции между маневровыми составами и пассажирскими/грузовыми поездами. В [15] изучалась задача назначения “технологического окна” на железнодорожной станции на основе различных критериев. Отметим, что большая часть исследований по моделированию и оптимизации движения на станции отражена в зарубежных публикациях. В [16] представлен подробный обзор исследований, посвященных оценке и оптимизации пропускной способности станции, на начало 2000-х гг. В [16] выделено несколько подходов для оценки пропускной способности: использование некоторых аналитических формул, которые могут использоваться в качестве начального приближения для оценки пропускной способности; подход, основанный на оптимизации расписания движения в котором предполагается встраивать новые поезда в действующее, возможно пустое, расписание; имитационное моделирование. Наиболее близок настоящей статье подход, основанный на оптимизации расписания. Среди публикаций, посвященных оптимизационному подходу, выделим [17, 18]. В [17] ставилась задача по поиску циклического, т.е. повторяющегося через некоторый промежуток времени, расписания в части времени движения по перегонам и времени нахождения на станции. Рассматривалась однопутная однонаправленная железнодорожная сеть, учитывались различные технологические ограничения, в том числе количество станционных путей на железнодорожных станциях. Критерием оптимизации выступала взвешенная сумма из длины цикла и суммарного времени поездов в пути. Таким образом, в [17] использовалась пропускная способность станции, которая неявно оптимизировалась. В [18] рассматривалась наиболее близкая настоящей статье постановка задачи. В этой статье исследовалась задача по назначению платформы прибытия поездов на станцию и выбору маршрутов движения связанных с этими поездами отцепляющихся и прицепляющихся вагонов. Авторы [18] отметили среди недостатков своей работы то, что оптимизация по выбору маршрута движения из одной точки входа-выхода со станции до платформы не проводится, при этом возможность движения для других поездов по всему железнодорожному пути из этого маршрута полностью исключается, хотя по некоторым участкам пути из этого маршрута движение безопасно. Данный недостаток обуславливается тем, что авторы [18] не используют графовую структуру станции, а используют лишь маршруты, которые в [18], по сути, представляют пару: платформа–точка входа-выхода со станции. В настоящей статье эти недостатки отсутствуют.

В настоящей статье рассматривается задача по увеличению пропускной способности железнодорожной станции. Станция представляется в ви-

де неориентированного нагруженного графа. Имеется некоторое базовое расписание движения поездов, позволяющее определить свободу дуг графа станции для движения. Ставится задача по поиску времени и маршрута движения дополнительных поездов по станции с учетом возможности стоянки поезда на станции, а также смены поездных локомотивов. Эта задача формулируется в виде набора задач смешанного целочисленного линейного программирования. Если существует решение в хотя бы одной задаче из этого набора, то рассматриваемый поезд может быть пропущен через станцию. Подобная процедура по “встраиванию” новых поездов в действующее расписание проводится для каждого поезда, который планируется пропустить через станцию в порядке приоритетности этих поездов.

2. Основные обозначения и предположения

Пусть имеется неориентированный граф станции $G = \langle V, E \rangle$, где V – множество вершин (стрелочных переводов, стыков между рельсами и точек входа и выхода со станции (границ станции)), а E – множество ребер (железнодорожных путей), соединяющих данные вершины. Также задана функция $D : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, характеризующая длину ребра. Пусть количество ребер в графе G равно m . Пронумеровав ребра графа G от единицы до m , составим новый граф $G' = \langle V', E' \rangle$, множеством вершин V' которого являются номера ребер графа G , т.е. $V' = \{1, 2, \dots, m\}$. Множество ребер E' включает в себя ребра между вершинами из V' , если эти вершины являются смежными ребрами в графе G . На элементах множества V' введем функцию $D' : V' \rightarrow \mathbb{R}_+$, характеризующую “вес” вершин в графе G' , т.е. длину соответствующих ребер в графе G .

Пусть на станции имеется некоторое базовое расписание движения пассажирских поездов и некоторое расписание маневровых работ. Методами из [14] можно составить совместное расписание движения пассажирских поездов и маневровых составов и таким образом составить функцию $F : V' \times \mathbb{R}_+^1 \rightarrow \{0, 1\}$:

$$F(j, t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & \text{ребро (графа } G) \text{ с номером } j \text{ свободно} \\ & \text{для движения в момент времени } t, \\ 1 & \text{иначе,} \end{cases}$$

характеризующую занятость ребра железнодорожной станции для движения в момент времени t от некоторого момента отсчета, например начала суток. Пусть $t_{\text{макс}}$ – момент времени, не позднее которого осуществляется движение на станции в планируемый период, например конец суток.

Пусть требуется пропустить через станцию пассажирский/грузовой поезд из перечня дополнительных поездов со следующими характеристиками:

- время (начиная от некоторого момента отсчета) прибытия $t_{\text{приб}}$;
- минимальное время стоянки на станции $\Delta_{\text{ост}}$;
- длина поездного локомотива $d_{\text{л}}$;
- общая длина поезда $d_{\text{п}}$;
- средняя скорость движения поезда/поездного локомотива по станции $v_{\text{ср}}$.

Пусть L – количество возможных маршрутов пропуска поезда, а $J = \{j_1, j_2, \dots, j_L\}$ – множество возможных маршрутов пропуска поезда. Произвольный маршрут $j_l = \{j_{1,l}, j_{2,l}, \dots, j_{K_l,l}\}$ из множества J характеризуется величиной K_l – количеством дуг на этом маршруте – и представляет собой конечный набор номеров попарно смежных ребер из графа G , являющихся вершинами графа G' , т.е. $j_{k,l} \in V'$, $k = \overline{1, K_l}$, и имеется ребро в графе G' между вершинами с номерами $j_{k,l}$ и $j_{k+1,l}$, $k = \overline{1, K_l - 1}$, $l = \overline{1, L}$. Отметим, что множество J является конечным в силу того, что пассажирский/грузовой поезд не может менять направление своего движения без смены локомотива. Смена же локомотива не может происходить в произвольной точке железнодорожной станции, а только в местах, где поезд может останавливаться. Пусть для каждого маршрута j_l , $l = \overline{1, L}$, из множества J задано ребро остановки – место, где поезд может останавливаться. Пусть для маршрута j_l такое ребро находится на S_l по порядку месте.

Отметим, что в силу “плечей обслуживания” – определенных участков железнодорожной сети, обслуживаемых тем или иным локомотивным депо, на железнодорожной станции может осуществляться смена поездного локомотива пассажирского/грузового поезда. В случае когда требуется смена поездного локомотива, к каждому маршруту j_l из множества J должны быть дополнительно указаны множества $J_l^{\text{отп}}$ и $J_l^{\text{приц}}$, которые состоят из маршрутов следования по станции отцепляющегося (старого) поездного локомотива и прицепляющегося (нового) поездного локомотива, т.е.

$$J_l^{\text{отп}} = \{j_{1,l}^{\text{отп}}, j_{2,l}^{\text{отп}}, \dots, j_{K_l^{\text{отп}},l}^{\text{отп}}\}, \quad J_l^{\text{приц}} = \{j_{1,l}^{\text{приц}}, j_{2,l}^{\text{приц}}, \dots, j_{K_l^{\text{приц}},l}^{\text{приц}}\},$$

где $K_l^{\text{отп}}$ – количество возможных маршрутов следования отцепляющегося локомотива, а $K_l^{\text{приц}}$ – количество возможных маршрутов следования прицепляющегося локомотива при условии, что поезд проследует станцию по маршруту j_l из множества J . Произвольные элементы $j_{\hat{p},l}^{\text{отп}}$, $j_{\tilde{p},l}^{\text{приц}}$ из множеств $J_l^{\text{отп}}$ и $J_l^{\text{приц}}$ соответственно имеют вид

$$j_{\hat{p},l}^{\text{отп}} = \{j_{1,\hat{p},l}^{\text{отп}}, j_{2,\hat{p},l}^{\text{отп}}, \dots, j_{\hat{K}_{\hat{p},l},l}^{\text{отп}}\}, \quad j_{\tilde{p},l}^{\text{приц}} = \{j_{1,\tilde{p},l}^{\text{приц}}, j_{2,\tilde{p},l}^{\text{приц}}, \dots, j_{\tilde{K}_{\tilde{p},l},l}^{\text{приц}}\},$$

где $j_{\hat{k},\hat{p},l}^{\text{отп}} \in V'$, $j_{\tilde{k},\tilde{p},l}^{\text{приц}} \in V'$ и $\hat{K}_{\hat{p},l}$ – количество дуг, которые проследует отцепляющийся локомотив, выбрав маршрут $j_{\hat{p},l}^{\text{отп}}$, а $\tilde{K}_{\tilde{p},l}$ – количество дуг, которые проследует прицепляющийся локомотив, выбрав маршрут $j_{\tilde{p},l}^{\text{приц}}$, $l = \overline{1, L}$, $\hat{p} = \overline{1, K_l^{\text{отп}}}$, $\tilde{p} = \overline{1, K_l^{\text{приц}}}$, $\hat{k} = \overline{1, \hat{K}_{\hat{p},l}}$, $\tilde{k} = \overline{1, \tilde{K}_{\tilde{p},l}}$. Имеется ребро в графе G' между вершинами с номерами $j_{\hat{k},\hat{p},l}^{\text{отп}}$ и $j_{\hat{k}+1,\hat{p},l}^{\text{отп}}$, $\hat{p} = \overline{1, K_l^{\text{отп}}}$, $\hat{k} = \overline{1, \hat{K}_{\hat{p},l} - 1}$, а также с номерами $j_{\tilde{k},\tilde{p},l}^{\text{приц}}$ и $j_{\tilde{k}+1,\tilde{p},l}^{\text{приц}}$, $\tilde{k} = \overline{1, \tilde{K}_{\tilde{p},l} - 1}$, $\tilde{p} = \overline{1, K_l^{\text{приц}}}$, $l = \overline{1, L}$. Следует отметить, что также имеют место равенства:

$$j_{1,\hat{p},l}^{\text{отп}} = j_{S_l,l}, \quad j_{\tilde{K}_{\tilde{p},l},l}^{\text{приц}} = j_{S_l,l},$$

$l = \overline{1, L}$, $\hat{p} = \overline{1, K_l^{\text{отп}}}$, $\tilde{p} = \overline{1, K_l^{\text{приц}}}$, так как первое ребро движения старого локомотива и последнее ребро движения нового локомотива должно совпадать с

местом остановки. Также далее будем рассматривать только такие маршруты старого локомотива, которые не содержат повторяющихся ребер. Аналогичное ограничение наложим и на маршруты нового локомотива.

Поскольку движение между железнодорожными станциями осуществляется только по определенным железнодорожным путям в определенные промежутки времени по “подниткам”, будем предполагать, что выехать за границы станции пассажирский/грузовой поезд, используя маршрут j_l , может только в один из промежутков $[t_{1,l}^{\text{нач}}, t_{1,l}^{\text{кон}}]$, $[t_{2,l}^{\text{нач}}, t_{2,l}^{\text{кон}}]$, \dots , $[t_{T,l}^{\text{нач}}, t_{T,l}^{\text{кон}}]$. Заметим, что момент пересечения границ со станции может выбираться именно из набора промежутков, а не набора точек вследствие того, что внутри одной “поднитки” возможны различные режимы ведения поезда.

3. Математическая модель движения по станции

Построим математическую модель движения пассажирского/грузового поезда по маршруту j_l из множества J с отцепляющимся локомотивом, следующим по маршруту $j_{\hat{p},l}^{\text{отп}}$ из множества $J_l^{\text{отп}}$, с прицепляющимся локомотивом, следующим по маршруту $j_{\hat{p},l}^{\text{прип}}$ из множества $J_l^{\text{прип}}$, с выходом поезда за границы станции в промежуток времени $[t_{q,l}^{\text{нач}}, t_{q,l}^{\text{кон}}]$, т.е. зафиксируем параметры l, \hat{p}, \tilde{p}, q .

Для этой цели сформируем множество \mathcal{T}_j , состоящее из левой и правой границ интервалов времени, когда ребро с номером j свободно для движения поезда в рамках действующего расписания. С помощью множества \mathcal{T}_j выделим моменты времени, в которые ребро с номером j свободно. Упорядочим элементы множества \mathcal{T}_j по возрастанию, составим из них вектор τ_j . Пусть

$$\dim \tau_j = 2I_j,$$

где I_j – количество промежутков времени, когда ребро с номером j свободно для движения.

Введем новые переменные $\delta_{k,l}^i$, равные единице, если движение по ребру с номером $j_{k,l}$ будет осуществляться поездом в промежуток времени между $\tau_{j_{k,l}}^{2i-1}$ и $\tau_{j_{k,l}}^{2i}$, и равные нулю, если движение по ребру с номером $j_{k,l}$ в промежуток времени между $\tau_{j_{k,l}}^{2i-1}$ и $\tau_{j_{k,l}}^{2i}$ не осуществляется, $k = \overline{1, K_l}$, $i = \overline{1, I_{j_{k,l}}}$.

Также введем переменные $\hat{\delta}_{\hat{k},\hat{p},l}^i$, равные единице, если движение по ребру с номером $j_{\hat{k},\hat{p},l}^{\text{отп}}$ будет осуществляться старым локомотивом в промежуток времени между $\tau_{j_{\hat{k},\hat{p},l}}^{2i-1}$ и $\tau_{j_{\hat{k},\hat{p},l}}^{2i}$, и равные нулю, если движение по ребру с номером $j_{\hat{k},\hat{p},l}^{\text{отп}}$ в промежуток времени между $\tau_{j_{\hat{k},\hat{p},l}}^{2i-1}$ и $\tau_{j_{\hat{k},\hat{p},l}}^{2i}$ не осуществляется, $\hat{k} = \overline{1, \hat{K}_{\hat{p},l}}$, $i = \overline{1, I_{j_{\hat{k},\hat{p},l}}}$.

Аналогичным образом введем переменные $\tilde{\delta}_{\tilde{k},\tilde{p},l}^i$, равные единице, если движение по ребру с номером $j_{\tilde{k},\tilde{p},l}^{\text{прип}}$ будет осуществляться новым локомотивом в промежуток времени между $\tau_{j_{\tilde{k},\tilde{p},l}}^{2i-1}$ и $\tau_{j_{\tilde{k},\tilde{p},l}}^{2i}$, и равные нулю, если движение по ребру с номером $j_{\tilde{k},\tilde{p},l}^{\text{прип}}$ в промежуток времени между $\tau_{j_{\tilde{k},\tilde{p},l}}^{2i-1}$ и $\tau_{j_{\tilde{k},\tilde{p},l}}^{2i}$ не осуществляется, $\tilde{k} = \overline{1, \tilde{K}_{\tilde{p},l} - 1}$, $i = \overline{1, I_{j_{\tilde{k},\tilde{p},l}}}$.

Пусть $t_{k,l}$ – время, когда голова поезда проехала полностью ребро с номером $j_{k,l}$, $k = \overline{1, K_l}$, а $t_{0,l} = t_{\text{приб}}$. Пусть также $\hat{t}_{\hat{k}, \hat{p}, l}$ – время, когда голова старого локомотива проехала полностью ребро с номером $j_{\hat{k}, \hat{p}, l}^{\text{отп}}$, $\hat{k} = \overline{1, \hat{K}_{\hat{p}, l}}$, и $\tilde{t}_{\tilde{k}, \tilde{p}, l}$ – время, когда голова нового локомотива проехала полностью ребро с номером $j_{\tilde{k}, \tilde{p}, l}^{\text{приц}}$, $\tilde{k} = \overline{1, \tilde{K}_{\tilde{p}, l} - 1}$. Также введем переменную $\tilde{t}_{0, \tilde{p}, l}$ – время, когда голова нового локомотива появилась в пределах станции.

Вначале запишем множество ограничений в решаемой задаче. Поскольку ребро $j_{k,l}$ имеет длину $D'(j_{k,l})$, а поезд имеет скорость движения $v_{\text{сп}}$, то время проезда поездом ребра с номером $j_{k,l}$ не может быть меньше $\frac{D'(j_{k,l})}{v_{\text{сп}}}$, что запишем в виде

$$(1) \quad t_{k,l} - t_{k-1,l} \geq \frac{D'(j_{k,l})}{v_{\text{сп}}}, \quad k = 1, \dots, S_l - 1, S_l + 1, \dots, K_l.$$

Время нахождения поезда на ребре остановки $j_{S_l,l}$ не должно быть меньше, чем минимальное время стоянки $\Delta_{\text{ост}}$ и время пересечения ребра остановки

$$(2) \quad t_{S_l,l} - t_{S_l-1,l} \geq 2 \frac{D'(j_{S_l,l})}{v_{\text{сп}}} + \Delta_{\text{ост}}.$$

Отметим, что коэффициент 2 перед дробью в последней формуле вызван тем, что если поезд меняет направление своего движения, то ребро остановки он пересекает дважды. Так как движение поезда осуществляется только в промежутки свободы ребра, то на каждом ребре из своего маршрута поезд должен находиться исключительно в промежутки свободы этого ребра для движения:

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{I_{j_{k,l}}} \delta_{k,l}^i = 1, \quad k = \overline{1, K_l},$$

$$(4) \quad t_{k,l} \leq \delta_{k,l}^i \left(\tau_{j_{k,l}}^{2i} - \frac{d_{\text{п}}}{v_{\text{сп}}} \right) + (1 - \delta_{k,l}^i) t_{\text{макс}}, \quad k = \overline{1, K_l}, \quad i = \overline{1, I_{j_{k,l}}},$$

$$(5) \quad t_{k-1,l} \geq \delta_{k,l}^i \tau_{j_{k,l}}^{2i-1}, \quad k = \overline{1, K_l}, \quad i = \overline{1, I_{j_{k,l}}}.$$

Прокомментируем ограничения (3)–(5). Ограничение (3) гарантирует, что поезд будет занимать k -е по порядку ребро из маршрута j_l в один промежуток свободы, $k = \overline{1, K_l}$. Если переменная $\delta_{k,l}^i$ будет равна нулю, то ограничения (4)–(5) выполняются автоматически, если же переменная $\delta_{k,l}^i$ равна единице, то получится, что хвост поезда пересечет k -е по порядку ребро из маршрута j_l не позднее окончания промежутка свободы с номером i для этого ребра, при этом голова поезда попадает на k -е по порядку ребро из маршрута j_l не ранее начала промежутка свободы с номером i , $k = \overline{1, K_l}$, $i = \overline{1, I_{j_{k,l}}}$. Так как выезд поезда со станции может быть осуществлен только в промежуток времени $[t_{q,l}^{\text{нач}}, t_{q,l}^{\text{кон}}]$, введем ограничение

$$(6) \quad t_{q,l}^{\text{нач}} \leq t_{K_l,l} \leq t_{q,l}^{\text{кон}}.$$

Время пересечения первого по порядку следования ребра отцепляющегося поездного локомотива не может быть раньше момента остановки поезда, поэтому введем ограничение

$$(7) \quad \hat{t}_{1,\hat{p},l} \geq t_{S_{l-1,l}} + \frac{D'(j_{S_{l-1,l}})}{v_{\text{ср}}}$$

Аналогично ограничениям (1), (3)–(5) на движение поезда по станции наложим следующие ограничения на движение отцепляющегося поездного локомотива по всем ребрам в его маршруте следования за исключением ребра остановки поезда:

$$(8) \quad \hat{t}_{\hat{k},\hat{p},l} - \hat{t}_{\hat{k}-1,\hat{p},l} \geq \frac{D'(j_{\hat{k},\hat{p},l}^{\cdot\text{отп}})}{v_{\text{ср}}}, \quad \hat{k} = \overline{2, \hat{K}_{\hat{p},l}}$$

$$(9) \quad \sum_{\hat{i}=1}^{j_{\hat{k},\hat{p},l}} \hat{\delta}_{\hat{k},\hat{p},l}^{\hat{i}} = 1, \quad \hat{k} = \overline{2, \hat{K}_{\hat{p},l}}$$

$$(10) \quad \hat{t}_{\hat{k},\hat{p},l} \leq \hat{\delta}_{\hat{k},\hat{p},l}^{\hat{i}} \left(\tau_{j_{\hat{k},\hat{p},l}}^{2\hat{i}} - \frac{d_{\text{л}}}{v_{\text{ср}}} \right) + \left(1 - \hat{\delta}_{\hat{k},\hat{p},l}^{\hat{i}} \right) t_{\text{макс}}, \quad \hat{k} = \overline{2, \hat{K}_{\hat{p},l}}, \quad \hat{i} = \overline{1, I_{j_{\hat{k},\hat{p},l}}}$$

$$(11) \quad \hat{t}_{\hat{k}-1,\hat{p},l} \geq \hat{\delta}_{\hat{k},\hat{p},l}^{\hat{i}} \tau_{j_{\hat{k},\hat{p},l}}^{2\hat{i}-1}, \quad \hat{k} = \overline{2, \hat{K}_{\hat{p},l}}, \quad \hat{i} = \overline{1, I_{j_{\hat{k},\hat{p},l}}}$$

Поскольку первое по порядку следования ребро отцепляющегося поездного локомотива совпадает с ребром остановки поезда, то отцепляющийся поездной локомотив должен занимать это ребро в тот же промежуток свободности, что и поезд

$$(12) \quad \hat{t}_{1,\hat{p},l} \leq \hat{\delta}_{S_{l,l}}^{\hat{i}} \left(\tau_{j_{S_{l,l}}}^{2\hat{i}} - \frac{d_{\text{л}}}{v_{\text{ср}}} \right) + \left(1 - \hat{\delta}_{S_{l,l}}^{\hat{i}} \right) t_{\text{макс}}, \quad \hat{i} = \overline{1, I_{j_{S_{l,l}}}}$$

Введем теперь ограничения на движение прицепляющегося локомотива по станции:

$$(13) \quad \tilde{t}_{\tilde{k},\tilde{p},l} - \tilde{t}_{\tilde{k}-1,\tilde{p},l} \geq \frac{D'(j_{\tilde{k},\tilde{p},l}^{\text{приц}})}{v_{\text{ср}}}, \quad \tilde{k} = \overline{1, \tilde{K}_{\tilde{p},l} - 1}$$

$$(14) \quad \sum_{\tilde{i}=1}^{j_{\tilde{k},\tilde{p},l}} \tilde{\delta}_{\tilde{k},\tilde{p},l}^{\tilde{i}} = 1, \quad \tilde{k} = \overline{1, \tilde{K}_{\tilde{p},l} - 1}$$

$$(15) \quad \tilde{t}_{\tilde{k},\tilde{p},l} \leq \tilde{\delta}_{\tilde{k},\tilde{p},l}^{\tilde{i}} \left(\tau_{j_{\tilde{k},\tilde{p},l}}^{2\tilde{i}} - \frac{d_{\text{л}}}{v_{\text{ср}}} \right) + \left(1 - \tilde{\delta}_{\tilde{k},\tilde{p},l}^{\tilde{i}} \right) t_{\text{макс}},$$

$$\tilde{k} = \overline{1, \tilde{K}_{\tilde{p},l} - 1}, \quad \tilde{i} = \overline{1, I_{j_{\tilde{k},\tilde{p},l}}}$$

$$(16) \quad \tilde{t}_{\tilde{k}-1,\tilde{p},l} \geq \tilde{\delta}_{\tilde{k},\tilde{p},l}^{\tilde{i}} \tau_{j_{\tilde{k},\tilde{p},l}}^{2\tilde{i}-1}, \quad \tilde{k} = \overline{1, \tilde{K}_{\tilde{p},l} - 1}, \quad \tilde{i} = \overline{1, I_{j_{\tilde{k},\tilde{p},l}}}$$

Ограничения (13)–(16) идентичны ограничениям (1), (3)–(5). Так как время пересечения головой поезда ребра остановки составляет $t_{S_i,l}$, а прицепляющийся локомотив после прицепки вместе с поездом мог поехать в обратную своему первоначальному движению сторону и таким образом проехать ребро остановки дважды, то, чтобы гарантированно успеть осуществить прицепку, введем ограничение

$$(17) \quad \tilde{t}_{K_{\hat{p},l}^{\text{приц}}-1,\hat{p},l} \leq t_{S_i,l} - 2 \frac{D'(j_{S_i,l})}{v_{\text{ср}}}.$$

Прицепка нового локомотива не может быть осуществлена ранее, чем старый локомотив полностью пересечет ребро остановки, поэтому введем ограничение

$$(18) \quad \tilde{t}_{K_{\hat{p},l}^{\text{приц}}-1,\hat{p},l} \geq \hat{t}_{1,\hat{p},l} + \frac{d_{\text{л}}}{v_{\text{ср}}}.$$

Теперь введем ограничения на безопасность движения, а именно исключим возможные столкновения между поездом, старым и новым локомотивами. Для этого предварительно отметим, что k -е по порядку следования ребро из своего маршрута поезд занимает в промежуток $[t_{k-1,l}, t_{k,l} + d_{\text{п}}/v_{\text{ср}}]$, старый локомотив \hat{k} -е ребро по порядку следования из своего маршрута – в промежуток $[\hat{t}_{\hat{k}-1,\hat{p},l}, \hat{t}_{\hat{k},\hat{p},l} + d_{\text{л}}/v_{\text{ср}}]$, новый локомотив \tilde{k} -е ребро по порядку следования из своего маршрута – в промежуток $[\tilde{t}_{\tilde{k}-1,\hat{p},l}, \tilde{t}_{\tilde{k},\hat{p},l} + d_{\text{л}}/v_{\text{ср}}]$. Сформируем множества $\hat{K} = \emptyset$, $\tilde{K} = \emptyset$, $\bar{K} = \emptyset$. Вначале исключим возможность столкновений между поездом и локомотивами. Для этого для каждого ребра следования $j_{k,l}$, кроме ребра остановки $j_{S_i,l}$, из маршрута поезда j_l проверяются равенства

$$(19) \quad j_{k,l} \cap j_{\hat{p},l}^{\text{отц}} = \emptyset$$

и

$$(20) \quad j_{k,l} \cap j_{\hat{p},l}^{\text{приц}} = \emptyset.$$

Если оба равенства выполняются, то никаких дополнительных ограничений вводить не нужно. Если не выполняется равенство (19), то определяется порядковый номер \hat{n}_k ребра из маршрута следования старого локомотива, которое совпадает с ребром $j_{k,l}$. Во множество \hat{K} добавляется номер k . Далее вводятся бинарные переменные $\hat{\alpha}_k$ и $\hat{\beta}_k$ с целью наложения ограничений:

$$(21) \quad t_{k,l} + d_{\text{п}}/v_{\text{ср}} - \hat{t}_{\hat{n}_k-1,\hat{p},l} \geq -(1 - \hat{\alpha}_k)t_{\text{макс}},$$

$$(22) \quad t_{k-1,l} - (\hat{t}_{\hat{n}_k,\hat{p},l} + d_{\text{л}}/v_{\text{ср}}) \leq (1 - \hat{\beta}_k)t_{\text{макс}},$$

$$(23) \quad \hat{\alpha}_k + \hat{\beta}_k \geq 1.$$

Ограничения (21)–(23) гарантируют, что либо поезд раньше полностью пересечет k -е по порядку следования ребро из своего маршрута, нежели старый

локомотив на него заедет, либо старый локомотив быстрее пересечет k -е по порядку следования ребро из маршрута поезда, нежели последний на него заедет.

Если не выполняется равенство (20), то определяется порядковый номер \tilde{n}_k ребра из маршрута следования нового локомотива, которое совпадает с ребром $j_{k,l}$. Во множество $\tilde{\mathcal{K}}$ добавляется номер k . Далее вводятся бинарные переменные $\tilde{\alpha}_k$ и $\tilde{\beta}_k$ с целью наложения ограничений:

$$(24) \quad t_{k,l} + d_{\text{п}}/v_{\text{ср}} - \tilde{t}_{\tilde{n}_k-1,\tilde{p},l} \geq -(1 - \tilde{\alpha}_k)t_{\text{макс}},$$

$$(25) \quad t_{k-1,l} - (\tilde{t}_{\tilde{n}_k,\tilde{p},l} + d_{\text{п}}/v_{\text{ср}}) \leq (1 - \tilde{\beta}_k)t_{\text{макс}},$$

$$(26) \quad \tilde{\alpha}_k + \tilde{\beta}_k \geq 1,$$

которые идентичны ограничениям (21)–(23).

Теперь исключим возможные столкновения старого и нового локомотивов. Для этого для каждого ребра следования $j_{\hat{k},\hat{p},l}^{\text{отп}}$, кроме ребра остановки $j_{S_l,l}$, из маршрута старого локомотива $j_{\tilde{p},l}^{\text{отп}}$ проверяется равенство

$$(27) \quad j_{\hat{k},\hat{p},l}^{\text{отп}} \cap j_{\tilde{p},l}^{\text{приц}} = \emptyset.$$

Если равенство (27) выполняется, то никаких дополнительных ограничений не вводится. В противном случае определяется порядковый номер $\tilde{n}_{\hat{k}}$ ребра из маршрута следования нового локомотива, которое совпадает с ребром $j_{\hat{k},\hat{p},l}^{\text{отп}}$.

Во множество $\overline{\mathcal{K}}$ добавляется номер \hat{k} . Далее вводятся бинарные переменные $\overline{\alpha}_{\hat{k}}$ и $\overline{\beta}_{\hat{k}}$ с целью наложения ограничений:

$$(28) \quad \hat{t}_{\hat{k},l} + d_{\text{п}}/v_{\text{ср}} - \tilde{t}_{\tilde{n}_{\hat{k}}-1,\tilde{p},l} \geq -(1 - \overline{\alpha}_{\hat{k}})t_{\text{макс}},$$

$$(29) \quad \hat{t}_{\hat{k}-1,l} - (\tilde{t}_{\tilde{n}_{\hat{k}},\tilde{p},l} + d_{\text{п}}/v_{\text{ср}}) \leq (1 - \overline{\beta}_{\hat{k}})t_{\text{макс}},$$

$$(30) \quad \overline{\alpha}_{\hat{k}} + \overline{\beta}_{\hat{k}} \geq 1.$$

Ограничения (28)–(30) идентичны ограничениям (21)–(23).

Учитывая бинарность переменных $\delta_{k,l}^i$, $\hat{\delta}_{\hat{k},\hat{p},l}^{\hat{i}}$, $\tilde{\delta}_{\tilde{k},\tilde{p},l}^{\tilde{i}}$, $k = \overline{1, K_l}$, $i = \overline{1, I_{j_{k,l}}}$, $\hat{k} = \overline{1, \hat{K}_{\hat{p},l}}$, $\hat{i} = \overline{1, I_{j_{\hat{k},\hat{p},l}}}$, $\tilde{k} = \overline{1, \tilde{K}_{\tilde{p},l} - 1}$, $\tilde{i} = \overline{1, I_{j_{\tilde{k},\tilde{p},l}}}$ по определению, введем ограничения:

$$(31) \quad \delta_{k,l}^i \in \{0, 1\}, \quad k = \overline{1, K_l}, \quad i = \overline{1, I_{j_{k,l}}},$$

$$(32) \quad \hat{\delta}_{\hat{k},\hat{p},l}^{\hat{i}} \in \{0, 1\}, \quad \hat{k} = \overline{1, \hat{K}_{\hat{p},l}}, \quad \hat{i} = \overline{1, I_{j_{\hat{k},\hat{p},l}}},$$

$$(33) \quad \tilde{\delta}_{\tilde{k},\tilde{p},l}^{\tilde{i}} \in \{0, 1\}, \quad \tilde{k} = \overline{1, \tilde{K}_{\tilde{p},l} - 1}, \quad \tilde{i} = \overline{1, I_{j_{\tilde{k},\tilde{p},l}}}.$$

Также по определению

$$(34) \quad \hat{\alpha}_{k'} \in \{0, 1\}, \quad \hat{\beta}_{k'} \in \{0, 1\}, \quad k' \in \hat{\mathcal{K}},$$

$$(35) \quad \tilde{\alpha}_{k''} \in \{0, 1\}, \quad \tilde{\beta}_{k''} \in \{0, 1\}, \quad k'' \in \tilde{\mathcal{K}},$$

$$(36) \quad \overline{\alpha}_{k'''} \in \{0, 1\}, \quad \overline{\beta}_{k'''} \in \{0, 1\}, \quad k''' \in \overline{\mathcal{K}}.$$

4. Постановка задачи

Для максимизации прибыли от перевозок людей/грузов следует увеличивать объемы перевозок, что можно осуществить, максимально эффективно используя станционные ресурсы. Для этой цели следует максимально быстро освобождать станционные пути, поэтому в качестве критерия оптимизации выберем минимизацию времени нахождения поезда на станции. Таким образом, задача оптимизации имеет вид

$$(37) \quad t_{K,l} \rightarrow \min,$$

в которой оптимизируемыми переменными выступают $\delta_{k,l}^i, \hat{\delta}_{\hat{k},\hat{p},l}^i, \tilde{\delta}_{\tilde{k},\tilde{p},l}^i, t_{k,l}, \hat{t}_{\hat{k},\hat{p},l}, \tilde{t}_{\tilde{k},\tilde{p},l}, \hat{\alpha}_{k'}, \tilde{\alpha}_{k''}, \bar{\alpha}_{k'''}, \hat{\beta}_{k'}, \tilde{\beta}_{k''}, \bar{\beta}_{k'''}, k = \overline{1, K_l}, i = \overline{1, I_{j_{k,l}}}, \hat{k} = \overline{1, \hat{K}_{\hat{p},l}}, \hat{i} = \overline{1, I_{j_{\hat{k},\hat{p},l}}}, \tilde{k} = \overline{1, \tilde{K}_{\tilde{p},l}} - 1, \tilde{i} = \overline{1, I_{j_{\tilde{k},\tilde{p},l}}}, k' \in \hat{\mathcal{K}}, k'' \in \tilde{\mathcal{K}}, k''' \in \bar{\mathcal{K}}$.

Заметим, что задача (37) с ограничениями (1)–(36) является задачей смешанного целочисленного линейного программирования и может быть решена, например, в пакете Matlab или CPLEX, а также VNS-методом [19], доказавшим свою эффективность на ряде практических примеров.

Решение задачи (37) при ограничениях (1)–(36) позволяет определить время движения пассажирского/грузового поезда, старого и нового локомотивов по станции при некотором зафиксированном маршруте их движения. Выберем теперь наилучший маршрут следования пассажирского/грузового поезда, старого и нового локомотивов с целью наискорейшего выхода пассажирского/грузового поезда за пределы станции. Пусть решение в задаче (37) с ограничениями (1)–(36) существует и оптимальное значение критерия равно $t_{l,\hat{p},\tilde{p},q}^*$. С использованием этой переменной введем

$$\bar{T}_{l,\hat{p},\tilde{p},q} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} t_{l,\hat{p},\tilde{p},q}^*, & \text{решение в задаче (37) с ограничениями (1)–(36)} \\ & \text{существует,} \\ +\infty & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для решения общей задачи поиска маршрута и времени движения поезда и поездных локомотивов по станции надо определить

$$\bar{T}^* = \min_{l=1,\dots,L} \min_{\hat{p}=1,\dots,K_l^{\text{отн}}} \min_{\tilde{p}=1,\dots,K_l^{\text{прин}}} \min_{q=1,\dots,T} \bar{T}_{l,\hat{p},\tilde{p},q}.$$

Если \bar{T}^* конечно, то надо найти l, \hat{p}, \tilde{p}, q , при которых $\bar{T}_{l,\hat{p},\tilde{p},q}$ будет равно \bar{T}^* , и использовать полученные времена и маршруты движения поезда и локомотивов. В противном случае, когда \bar{T}^* бесконечно, поезд пропустить по станции невозможно. Подобная процедура по “встраиванию” новых поездов в действующее расписание проводится для каждого поезда, который планируется пропустить через станцию в порядке приоритетности этих поездов.

Отметим, что если не требуется смена поездных локомотивов, то следует решать задачу

$$t_{K,l} \rightarrow \min_{\delta_{k,l}^i, t_{k,l}, k=\overline{1, K_l}, i=\overline{1, I_{j_{k,l}}}}$$

при ограничениях (1)–(6), (31). Отметим, что полученная задача практически совпадает с задачей поиска маршрута и времени движения маневрового состава по станции из [14]. Отличием представленной постановки от постановки из [14] является то, что в [14] маневровый состав, по сути, представлялся материальной точкой, а в настоящей статье у поезда и локомотивов есть длина. Также в [14] не предполагалась остановка длительностью не меньше заданной маневрового состава на некотором пути.

Для учета влияния случайных задержек поездов на возможность пропуска дополнительных поездов через станцию возможны два способа. Первый способ заключается в непосредственном использовании апостериорных расписаний, получающихся по результату функционирования станции в день недели, в который предполагается “вставка” дополнительных поездов. Второй способ заключается в статистическом моделировании. Для второго пути необходимо исключить из базового расписания (т.е. из функции $F(j, t)$) задерживающиеся поезда, методом Монте-Карло получить их времена прибытия на станцию и далее по указанной в настоящей статье процедуре осуществить процедуру вставки в оставшееся от базового расписание задерживающихся поездов. После этого методами из [14] следует пересчитать расписание маневровых работ. Закон распределения задержек можно оценить, исходя из апостериорных расписаний из первого способа, либо экспертным путем. Для каждой реализации расписания, сформированного с учетом задержек, производится процедура “вставки” дополнительных поездов. Отметим, что предложенная схема позволяет не только оценить возможность (вероятность) пропуска некоторого поезда из перечня дополнительных поездов, но и проверить устойчивость базового расписания на возможность его исполнения с учетом задержек.

Заметим, что задача по поиску оптимального маршрута движения дополнительного поезда и поездных локомотивов через станцию может быть распараллелена. А именно для различных l, \hat{p}, \tilde{p}, q задача (37) с ограничениями (1)–(36) может быть решена на различных ядрах процессора/на различных компьютерах. При этом сами маршруты движения по станции могут быть определены заранее с использованием теории графов. Это позволяет сократить время поиска оптимального маршрута движения дополнительного поезда и поездных локомотивов через станцию.

5. Пример

Пусть через станцию, часть схемы которой приведена на рисунке, требуется пропустить поезд длиной $d_{\text{п}} = 250$ м со временем прибытия 7:30 (отсчитывая время от начала суток, получим, что $t_{\text{приб}} = 27000$ с), минимальным временем стоянки 30 мин ($\Delta_{\text{ост}} = 1800$ с), единственным промежутком выхода со станции 8:10–8:20 ($t_{1,1}^{\text{нач}} = 29400$ с, $t_{1,1}^{\text{кон}} = 30000$ с). Пусть средняя скорость движения по станции $v_{\text{ср}}$ составляет 5 м/с, а длина поездных локомотивов $d_{\text{л}}$ равна 30 м. Пусть зафиксировано некоторое базовое расписание движения, а $t_{\text{макс}} = 86400$ с. Приведем промежутки свободности для некоторых ребер станции с 7:00 до 9:00. Предварительно отметим, что схема рассматриваемой станции и промежутки свободности ребер практически повторяют схему

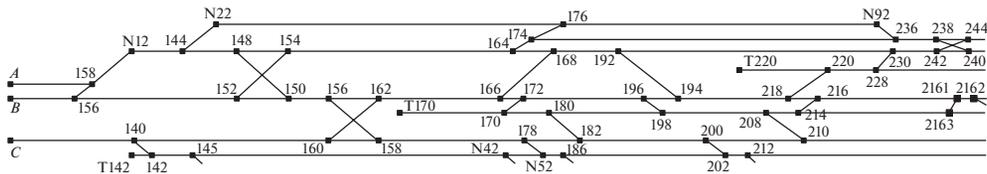


Схема станции.

и промежутки свободности ребер пассажирского парка станции Челябинск-Главный.

Пусть поезд возможно пропустить только по одному маршруту, т.е. $L = 1$ и $J = \{j_1\}$, причем

$$j_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 11, 12, 13, 14, 15\},$$

а ребром остановки выступает ребро с номером 10, которое по порядку десятое, т.е. $S_1 = 10$, а $K_1 = 21$. Также предположим, что множества возможных маршрутов старого $J_1^{\text{отп}}$ и нового $J_1^{\text{приц}}$ локомотивов для маршрута j_1 состоят из одного элемента, т.е. $K_1^{\text{отп}} = 1$, $K_1^{\text{приц}} = 1$, $J_1^{\text{отп}} = \{j_{1,1}^{\text{отп}}\}$, $J_1^{\text{приц}} = \{j_{1,1}^{\text{приц}}\}$. Пусть также

$$j_{1,1}^{\text{отп}} = \{10, 21, 20, 16, 17, 18, 19, 6, 5, 4, 3, 2, 1\},$$

$$j_{1,1}^{\text{приц}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$

т.е. $\hat{K}_{1,1} = 13$, $\tilde{K}_{1,1} = 10$.

Для краткости изложения не приведены остальные промежутки свободности (до 7:00 и после 9:00), участвующие в расчете, которых насчитывается 535. Однако и по промежуткам, представленным в таблице, заметно, что за короткий промежуток времени вручную крайне затруднительно отыскать времена движения по станции поезда, а также старого и нового локомотивов.

Решая задачу (37) с ограничениями (1)–(36) в пакете CPLEX, получим расписание движения поезда

$$\begin{aligned} & 1[27000 - 27067] \rightarrow 2[27017 - 27101,2] \rightarrow 3[27051,2 - 27116,8] \rightarrow \\ & \rightarrow 4[27066,8 - 27141] \rightarrow 5[27091 - 27152,4] \rightarrow 6[27102,4 - 27160,6] \rightarrow \\ & \rightarrow 7[27110,6 - 27172,6] \rightarrow 8[27122,6 - 27196] \rightarrow 9[27146 - 27213,4] \rightarrow \\ & \rightarrow 10[27163,4 - 29271] \rightarrow 9[29221 - 29288,4] \rightarrow 8[29238,4 - 29311,8] \rightarrow \\ & \rightarrow 7[29261,8 - 29323,8] \rightarrow 6[29273,8 - 29332] \rightarrow 5[29282 - 29343,4] \rightarrow \\ & \rightarrow 4[29293,4 - 29367,6] \rightarrow 11[29317,6 - 29383,2] \rightarrow 12[29333,2 - 29387,6] \rightarrow \\ & \rightarrow 13[29337,6 - 29403,2] \rightarrow 14[29353,2 - 29442,6] \rightarrow 15[29392,6 - 29450], \end{aligned}$$

где слева от квадратных скобок записан номер пересекаемого поездом ребра, а справа – соответствующий промежуток занятости. Отметим, что для получения времени пересечения головой поезда k -го по порядку ребра в маршруте, нужно взять левую границу промежутка занятости для $k + 1$ по порядку ребра, $k = \overline{1, 20}$.

Таблица. Свободность некоторых ребер железнодорожной станции с 7:00 до 9:00

Ребро на схеме станции	№ ребра	Свободность ребра с-до	Длина ребра, м
1	2	3	4
C ↔ 140	1	25191–25380	85
		25416–30900	
		30944–31398	
		31455–32227	
		32284–32926	
140 ↔ 160	2	25134–25416	171
		25490–30944	
		31033–31341	
		31398–31455	
		31512–32170	
		32227–32284	
160 ↔ 162	3	22805–31512	78
		31538–33811	
162 ↔ 166	4	24391–28219	121
		28278–29894	
		29951–31538	
		31578–33025	
166 ↔ 172	5	22864–28278	57
		28305–29951	
		29978–31578	
		31597–33752	
172 ↔ 196	6	17984–28305	41
		28325–29978	
		29997–33738	
196 ↔ 194	7	23563–33718	60
194 ↔ 218	8	21581–25547	117
		25606–26861	
		26921–30300	
		30339–33679	
218 ↔ 216	9	19787–25503	87
		25547–30339	
		30778–33360	
216 ↔ 2161	10	25503–30127	500
198 ↔ 196	19	23585–28325	66
		28357–29997	
		30028–34745	
156 ↔ 162	11	24302–28181	78
		28219–29857	
		29894–33088	

Таблица (окончание)

1	2	3	4
156 ↔ 150	12	24245–28171	22
		28181–29847	
		29857–29887	
		29894–33128	
150 ↔ 152	13	24229–28133	78
		28171–29810	
		29847–29894	
		29920–33139	
152 ↔ 136	14	24780–26908	197
		27060–27448	
		27602–28037	
		28133–29116	
		29203–29717	
		29810–29920	
136 ↔ B	15	29986–33179	37
		24628–26880	
		26908–27420	
		27448–28020	
		28037–29100	
		29116–29700	
214 ↔ 2163	16	29717–33280	500
		23317–31786	
214 ↔ 208	17	32050–32313	2
		23053–30087	
		30088–31049	
		31049–31786	
208 ↔ 198	18	31786–32577	125
		23627–28357	
		28418–30028	
		30087–31049	
		31091–31744	
2162 ↔ 2161	20	31786–32577	50
2161 ↔ 2163	21	25503–30127	50
		0–86400	

Расписание движения старого локомотива имеет вид

$10[? - 27669,4] \rightarrow 21[27663,4 - 27679,4] \rightarrow 20[27673,4 - 27689,4] \rightarrow$
 $\rightarrow 16[27683,4 - 27789,4] \rightarrow 17[27783,4 - 27789,8] \rightarrow 18[27783,8 - 27814,8] \rightarrow$
 $\rightarrow 19[27808,8 - 27828] \rightarrow 6[27822 - 27836,2] \rightarrow 5[27830,2 - 27847,6] \rightarrow$
 $\rightarrow 4[27841,6 - 27871,8] \rightarrow 3[27865,8 - 27887,4] \rightarrow 2[27881,4 - 27921,6] \rightarrow$
 $\rightarrow 1[27915,6 - 27938,6],$

где указание знака вопроса в промежутке занятости ребра № 10 вызвано тем, что априори неизвестно, где именно на ребре остановки поезд осуществит стоянку.

Расписание движения нового локомотива имеет вид

$$\begin{aligned} &1[28857,6 - 28880,6] \rightarrow 2[28874,6 - 28914,8] \rightarrow 3[28908,8 - 28930,4] \rightarrow \\ &\rightarrow 4[28924,4 - 28954,6] \rightarrow 5[28948,6 - 28966] \rightarrow 6[28960 - 28974,2] \rightarrow \\ &\rightarrow 7[28968,2 - 28986,2] \rightarrow 8[28980,2 - 29009,6] \rightarrow \\ &\rightarrow 9[29003,6 - 29027] \rightarrow 10[29021-?], \end{aligned}$$

где указание знака вопроса в промежутке занятости ребра № 10 вызвано тем, что априори неизвестно, где именно на ребре остановки поезд осуществит стоянку.

Результаты численного эксперимента были получены с помощью математического пакета ILOG CPLEX на персональном компьютере (Intel Core i5 4690, 3.5 GHz, 8 GB DDR3 RAM). Расчеты заняли менее 1 секунды, что позволяет сделать вывод о применимости предлагаемого подхода на практике, когда имеется несколько маршрутов движения поезда и несколько маршрутов старого и нового локомотивов.

6. Заключение

В настоящей статье рассмотрена задача по увеличению пропускной способности станции. Для этой цели в виде задачи смешанного целочисленного линейного программирования сформулирована задача по вставке в действующее базовое расписание некоторого дополнительного поезда, у которого возможна смена поездных локомотивов. Предложена схема по учету влияния случайных задержек в движении поездов на возможность их пропуска через железнодорожную станцию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cordeau J.-F., Toth P., Vigo D.* A Survey of Optimization Models for Train Routing and Scheduling // *Transp. Sci.* 1998. V. 32. No. 4. P. 380–404.
2. *Kroon L., Maroti G., et al.* Stochastic Improvement of Cyclic Railway Timetables // *Transp. Res. Part B: Method.* 2008. V. 42. No. 6 P. 553–570.
3. *Лазарев А.А., Мусатова Е.Г.* Целочисленные постановки задачи формирования железнодорожных составов и расписания их движения // *Управление большими системами.* 2012. № 38. С. 161–169.
4. *Зиндер Я.А., Лазарев А.А. и др.* Построение расписаний двухстороннего движения на однопутной железной дороге с разъездом // *АиТ.* 2018. № 3. С. 144–166.
Zinder Y., Lazarev A.A., et al. Scheduling the Two-Way Traffic on a Single-Track Railway with a Siding // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 3. P. 506–523.
5. *Ziarati K., Soumis F., et al.* Locomotive Assignment with Heterogeneous Consists at CN North America // *Eur. J. Oper. Res.* 1997. No. 97. P. 281–292.
6. *Ahuja R.K., Liu J., et al.* Solving Real-Life Locomotive-Scheduling Problems // *Transp. Sci.* 2005. V. 39. No. 4. P. 503–517.

7. Буянов М.В., Иванов С.В. и др. Развитие математической модели управления грузоперевозками на участке железнодорожной сети с учетом случайных факторов // Информатика и ее применения. 2017. Т. 11. № 4. С. 85–93.
8. Буянов М.В., Наумов А.В. Оптимизация функционирования подвижного состава при организации грузовых перевозок на участке железнодорожной сети // АиТ. 2018. № 9. С. 143–158.
Buyanov M.V., Naumov A.V. Optimizing the Operation of Rolling Stock in Organizing Cargo Transportation at a Railway Network Segment // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 9. P. 1661–1672.
9. Powell W.B., Simao H.P., Bouzaiene-Ayari B. Approximate Dynamic Programming in Transportation and Logistics: a Unified Framework // Eur. J. Transp. Logist. 2012. No. 1. P. 237–284.
10. Albrecht A.R., Panton D.M., Lee D.H. Rescheduling Rail Networks with Maintenance Disruptions Using Problem Space Search // Comput. Oper. Res. 2013. V. 40. No. 3. P. 703–712.
11. Forsgren M., Aronsson M., Gestrelus S. Maintaining Tracks and Traffic Flow at the Same Time // J. Rail Transp. Plan. & Management. 2013. V. 3. No. 3. P. 111–123.
12. Liden T., Joborn M. An Optimization Model for Integrated Planning of Railway Traffic and Network Maintenance // Transp. Res. Part C: Emerging Tech. 2017. No. 74. P. 327–347.
13. Гайнанов Д.Н., Игнатов А.Н. и др. О задаче назначения “технологического окна” на участках железнодорожной сети // АиТ. 2020. № 6. С. 3–16.
Gainanov D.N., Ignatov A.N., et al. On Track Possession Assignment Problem at the Railway Network Sections // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 6. P. 967–977.
14. Босов А.В., Игнатов А.Н., Наумов А.В. Модель передвижения поездов и маневровых локомотивов на железнодорожной станции в приложении к оценке и анализу вероятности бокового столкновения // Информатика и ее применения. 2018. Т. 12. № 3. С. 107–114.
15. Ignatov A.N., Naumov A.V. On time selection for track possession assignment at the railway station // Bull. of the South Ural State University. Ser. Math. Model. Progr. Comp. Soft. 2019. V. 12. No. 3. P. 5–16.
16. Abril M., Barber F., et al. An Assessment of Railway Capacity // Transp. Res. Part E: Logistics and Transp. Rev. 2008. V. 44. No. 5. P. 774–806.
17. Petering M.E.H., Heydar M., Bergmann D.R. Mixed-Integer Programming for Railway Capacity Analysis and Cyclic, Combined Train Timetabling and Platforming // Transp. Sci. 2016. V. 50. No. 3. P. 892–909.
18. Sels P., Vansteenwegen P., et al. The Train Platforming Problem: The Infrastructure Management Company Perspective // Transp. Res. Part B: Methodological. 2014. V. 61. P. 55–72.
19. Hansen P., Mladenovic N., et al. Variable Neighborhood Search in Handbook of Metaheuristics. Eds., by Gendreau M., Potvin J.-Y. 2010. P. 61–86.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 23.02.2020

После доработки 10.06.2020

Принята к публикации 09.07.2020

© 2021 г. А.В. МАТВЕЕВ, канд. физ.-мат. наук (matav@mail.ru)
(Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕТИКИ ЙОДСОДЕРЖАЩИХ РАДИОФАРМПРЕПАРАТОВ В ЗАДАЧАХ ЯДЕРНОЙ МЕДИЦИНЫ

Рассмотрены методы моделирования и разработан единый подход к построению математических моделей кинетики радиофармпрепаратов с изотопами йода в организме человека при диагностических и терапевтических процедурах ядерной медицины. Предложены различные способы идентификации модельных параметров на основе количественных данных радионуклидных исследований функционального состояния органов. Приведены и проанализированы результаты фармакокинетического моделирования при радионуклидной диагностике печени, почек и щитовидной железы с помощью йодсодержащих радиофармпрепаратов. Также обсуждаются особенности и результаты моделирования и дозиметрического планирования радиойодтерапии щитовидной железы.

Ключевые слова: математическое моделирование, ядерная медицина, кинетика, радиофармпрепарат, камерная модель.

DOI: 10.31857/S0005231021010086

1. Введение

В настоящее время в ядерной медицине насчитывается более сотни радионуклидных фармацевтических препаратов (РФП), которые применяются для диагностики (радионуклидная диагностика) и терапии (радионуклидная терапия) целого ряда неонкологических и онкологических заболеваний [1–6]. Самым распространенным радионуклидом здесь является технеций (^{99m}Tc). Однако РФП, меченные им, находят применение только для целей диагностики. Второе место занимают препараты, меченные радиоактивными изотопами йода (^{123}I , ^{125}I , ^{131}I). Причем эти РФП применяются и в диагностике, и в терапии. Например, изотоп ^{131}I , впервые внедренный в 1946 г. для лечения рака щитовидной железы, остается самым эффективным методом для лечения тиреотоксикоза и злокачественной опухоли щитовидной железы [7].

Для целей радионуклидной диагностики РФП с изотопами йода широко применяются как в не визуализирующих, так и в визуализирующих методах [8]. В настоящее время актуальными с практической точки зрения по-прежнему остаются следующие не визуализирующие методы диагностики с применением изотопов ^{125}I и ^{131}I : радиоиммунный анализ, иммунорадиометрический анализ, измерение йодпоглотительной функции щитовидной железы (радиойодзахват, радиойодметрия), определение объема циркулирующей

крови, определение скорости клубочковой фильтрации и эффективного почечного плазматока. В визуализирующих методах используются изотопы ^{123}I и ^{131}I в составе разнообразных РФП: для выявления и оценки ЗНО в онкологии (йодорганические РФП, меченые моноклональные антитела), при оценке метаболизма миокарда (меченые жирные кислоты), при диагностике почек и мочевыделительной системы (гипсуран), при оценке функциональности печени и гепатобилиарной системы (бенгалроз), для визуализации желез в эндокринологии (йодорганические РФП, йодид натрия), для сцинтиграфии головного мозга и оценки мозгового кровообращения (сывороточный альбумин, йодорганические РФП), для исследования нейротрансмиссии в неврологии (меченые радиолиганды, йодорганические РФП).

Радиоизотоп ^{131}I уже более 60 лет успешно используется для терапии (в связи с наличием β -излучения) и диагностики (γ -излучение) заболеваний щитовидной железы, в том числе дифференцированного рака щитовидной железы и его метастазов. В последнее десятилетие в нашей стране при проведении радионуклидной диагностики вместо ^{131}I начали применять радиоизотоп ^{123}I . Данный изотоп обладает следующими преимуществами по сравнению с ^{131}I : 1) оптимальный для регистрации спектр энергии γ -излучения – 159 кэВ, 2) отсутствие β -излучения и 3) относительно короткий период полураспада, что способствует уменьшению лучевой нагрузки на пациента. Однако из-за сложностей его производства в непосредственной близости от места применения (высокая стоимость циклотронного получения) и сильно ограниченного времени его транспортировки в отдаленные от производителя клиники в отечественной медицине до сих пор в диагностике нередко используется ^{131}I .

Одним из основных методов при оценке результатов радионуклидных исследований, использующих γ -излучение радиоизотопов с энергиями от нескольких десятков до нескольких сотен кэВ и играющих важную роль в диагностике структурно-функционального состояния жизненно важных органов организма человека, является фармакокинетическое моделирование [9]. Количественные данные о кинетике РФП в организме представляются в виде фармакокинетических кривых “Активность-время”, которые отражают пространственно-временные процессы изменения концентрации радиоиндикатора в зонах интереса и характеризуют скорость процессов “накопления-выведения” в исследуемом органе или ткани. Это дает возможность проследить изменения сцинтиграфических изображений во времени для оценки функций биосистемы, а также рассчитать соответствующие количественные показатели, характеризующие различные функции исследуемых органов и тканей. Сложность же такого моделирования заключается в двух аспектах. С одной стороны, в чрезмерном упрощении анатомо-физиологических особенностей организма при разбиении его на кинетические камеры, что может приводить к потере или искажению значимой для диагностики информации, с другой – в излишнем учете всех возможных взаимосвязей функционирования органов и систем, что, наоборот, приведет к появлению избыточного количества абсолютно бесполезных для клинической интерпретации математических данных либо модель становится вообще неразрешимой.

В настоящей статье вырабатывается единый подход к построению камерных моделей кинетики различных РФП с изотопами йода как при диагностике функционального состояния органов и систем организма с помощью не визуализирующих и визуализирующих радионуклидных методов, так и при терапии заболеваний щитовидной железы с помощью радиойода. На основе данного подхода разработаны фармакокинетические модели и созданы соответствующие им расчетные программы на языке программирования C++ для обработки и оценки результатов радионуклидной диагностики и терапии. В качестве клинических данных, необходимых для идентификации параметров моделирования (транспортных констант), были использованы результаты диагностических обследований пациентов радиологического отделения БУЗОО «Областная клиническая больница». Работа основана на принципах и методах фармакокинетики (камерное моделирование) [10, 11]. Для численного решения систем дифференциальных уравнений некоторых моделей автор использовал методы Рунге–Кутты и метод Розенброка [12, 13], а для нахождения минимума функции нескольких переменных при идентификации параметров моделирования – метод Хука–Дживса [14, 15].

2. Модель кинетики при исследовании щитовидной железы и радиойодтерапии

Исследование функционального состояния щитовидной железы по поглощению радиоактивных изотопов йода (используется ^{131}I или ^{123}I) позволяет оценить внутритиреоидный этап обмена йода в организме, выявить нарушение неорганической и органической фаз его обмена в ткани железы [8]. Суть метода (радиойодзахват, радиойодметрия) состоит в оценке скорости накопления радиоизотопа в тиреоидной ткани после перорального приема водного раствора неорганического РФП «Натрия йодид» (вводимая в организм диагностическая активность A_0 может изменяться от 600 кБк до 11 МБк в зависимости от используемого радиоизотопа и целей исследования). Гамма-излучение радиойода, захваченного щитовидной железой, регистрируют с помощью тиреоидометра через 2, 4 и 24 ч после приема РФП. Показатели нормального поглощения РФП щитовидной железой зависят от географических особенностей местности, поэтому в лабораториях должны быть определены свои нормативные стандарты [7, 8].

Радиойодметрия широко используется не только как самостоятельный метод при оценке функциональной активности щитовидной железы, но также при индивидуальном дозиметрическом планировании радиойодтерапии ее неонкологических и онкологических заболеваний [16, 17]. Успешность проведения радиойодтерапии зависит от того, удалось ли реализовать лечебную поглощенную дозу в щитовидной железе, которая в свою очередь зависит от того, насколько точно определена кинетика накопления РФП в ней. Огромное значение здесь приобретает фармакокинетическое моделирование транспорта радиойода в организме. Предварительно измеренная на этапе радиойодметрии накопленная активность радиойода в щитовидной железе используется для идентификации параметров фармакокинетической модели, с помощью которой удается рассчитать вводимую в организм активность РФП для до-

стижения запланированной врачом лечебной поглощенной дозы в щитовидной железе на этапе радиоiodтерапии. Особенности моделирования и дозиметрического планирования радиоiodтерапии посвящены публикации автора [18, 19].

Для описания фармакокинетики РФП с учетом его перорального поступления в организм автором предложена четырехкамерная модель (из четырех компарментов), геометрическая схема которой представлена на рис. 1. Данная модель включает в себя камеру желудочно-кишечного тракта (Gastro), камеру кровеносной системы (Haema), камеру щитовидной железы (Thyreoidea) и камеру мочевыделительной системы (Urina). Функции удержания активности РФП в четырех камерах обозначены нами как F_G , F_H , F_T и F_U соответственно.

В публикациях также встречаются и другие модели для описания кинетики РФП при диагностике и терапии щитовидной железы. Например, в [20–23] рассматриваются модели без камеры желудочно-кишечного тракта, предполагая мгновенное всасывание РФП в кровь при его пероральном приеме или внутривенное введение РФП. Отсутствие данной камеры позволяет ввести разделение камеры щитовидной железы на две камеры по отношению к химической форме радиоiodа – неорганическая форма и органическая форма, что является правильным с точки зрения фармакокинетики. Однако в рамках таких моделей невозможно рассчитать поглощенную радиационную дозу на желудочно-кишечный тракт, что имеет существенное значение при индивидуальном дозиметрическом планировании радиоiodтерапии. В публикации автора [24] дан обзор и проведено сравнение разных камерных моделей при радионуклидной диагностике и терапии щитовидной железы. Используемая в данной статье четырехкамерная модель (см. рис. 1) является, с точки зрения автора, наиболее простой в математическом плане и в тоже время позволяет описать кинетику РФП и осуществить дозиметрическое планирование радиоiodтерапии не хуже других аналогичных моделей.

Математическая интерпретация данной четырехкамерной модели сводится к следующей системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dF_G(t)}{dt} = -(K_{GH} + \lambda) F_G(t), \\ \frac{dF_H(t)}{dt} = K_{GH} F_G(t) + K_{TH} F_T(t) - (K_{HT} + K_{HU} + \lambda) F_H(t), \\ \frac{dF_T(t)}{dt} = K_{HT} F_H(t) - (K_{TH} + \lambda) F_T(t), \\ \frac{dF_U(t)}{dt} = K_{HU} F_H(t) - \lambda F_U(t), \end{cases}$$

где λ – постоянная распада радиоiodа ($0,0036 \text{ ч}^{-1}$ – для ^{131}I и $0,0522 \text{ ч}^{-1}$ – для ^{123}I), а K_{GH} , K_{HT} , K_{TH} и K_{HU} – параметры межкамерных коммуникаций (см. рис. 1). С фармакокинетической точки зрения, параметры K_{GH} , K_{HT} , K_{TH} и K_{HU} задают удельные скорости обмена РФП между соседними

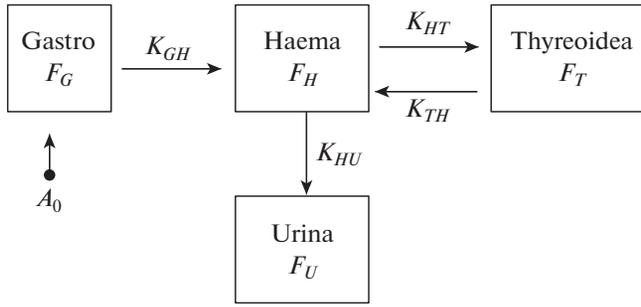


Рис. 1. Геометрическая иллюстрация модели при радиоодметрии и радиоодтерпии.

камерами и носят название транспортных констант [10, 11]. В дальнейшем эти модельные параметры подлежат идентификации на основе индивидуальных количественных данных радиоодметрии для каждого пациента. Функции удержания активности в камерах удобно выражать в относительных единицах, принимая введенную активность РФП A_0 за условную единицу. Таким образом, эти функции задают относительную активность РФП в камерах и могут принимать значения от 0 до 1. С учетом перорального введения РФП в организм начальные условия для системы уравнений (1) запишутся как

$$(2) \quad F_G(0) = 1, \quad F_H(0) = 0, \quad F_T(0) = 0, \quad F_U(0) = 0.$$

Решение системы уравнений (1) с начальными условиями (2) может быть найдено аналитически или численно, например с помощью методов Рунге–Кутты или Розенброка. Аналитическое решение данной системы приведено в [18]. Особенности численного решения с помощью метода Розенброка рассмотрены в [19]. Автор настоящей статьи разработал программный комплекс численного решения системы дифференциальных уравнений (1) в среде Borland C++. Идентификация транспортных констант модели реализована в программе с помощью функционала невязки, который задает меру отклонения расчетной (теоретической, модельной) характеристики от ее клинических значений в заданные моменты времени t_i . Для радиоодметрии – это измеренные клиническим тиреоидометром значения накопленной активности F_T в щитовидной железе через 2, 4 и 24 ч от момента введения РФП в организм. Функционал невязки в данном случае записывается в виде:

$$(3) \quad F(\vec{K} = K_{GH}, K_{HT}, K_{TH}, K_{HU}) = \sum_{i=1}^N \left\{ F_T^{\text{расч}}(t_i) - F_T^{\text{клин}}(t_i) \right\}^2$$

при $N = 3$ ($t_1 = 2, t_2 = 4, t_3 = 24$ ч). Далее решалась вариационная задача по нахождению его минимума методом Хука–Дживса:

$$(4) \quad \delta F(\vec{K}) \Big|_{\substack{K_{GH} > 0, K_{HT} > 0, \\ K_{TH} > 0, K_{HU} > 0}} = 0, \quad \delta^2 F > 0$$

Таблица 1. Рассчитанные индивидуальные фармакокинетические характеристики

Номер пациента	Транспортные константы, ч^{-1}				T_H , ч	T_T , ч	t_{\max} , ч	A_{\max}/A_0
	K_{GH}	K_{HT}	K_{TH}	K_{HU}				
1	5,029	0,117	0,018	0,022	5,12	208,66	23,43	0,648
2	3,876	0,084	0,044	0,048	7,00	64,17	15,69	0,392
3	23,430	0,347	0,001	0,042	2,01	201,72	12,06	0,847
4	24,310	0,425	0,001	0,113	1,50	193,33	9,32	0,760
5	5,890	0,064	0,001	0,027	8,21	220,54	34,83	0,578
6	4,590	0,300	0,086	0,232	2,26	26,07	4,39	0,411
7	5,009	0,688	0,020	0,181	1,46	96,71	5,62	0,742
8	5,580	0,092	0,034	0,038	4,41	194,39	20,24	0,449
9	12,980	0,410	0,001	0,315	1,44	180,54	7,21	0,550
10	5,003	0,111	0,001	0,145	3,65	186,71	16,27	0,404
11	9,380	0,323	0,001	0,103	2,08	194,28	11,27	0,723
12	5,670	0,226	0,001	0,155	2,52	188,10	12,29	0,562
13	5,149	0,571	0,001	0,206	1,38	188,26	7,31	0,715
14	6,840	0,122	0,001	0,226	2,56	178,68	12,76	0,327
15	12,870	0,167	0,001	0,117	2,79	191,42	15,10	0,546
16	16,430	0,300	0,001	0,064	2,11	198,97	12,59	0,779
17	5,123	0,312	0,001	0,007	3,00	208,50	14,00	0,917
18	4,577	0,171	0,008	0,091	6,65	129,3	14,50	0,577
19	15,192	0,232	0,038	0,078	2,65	69,10	10,00	0,598
20	11,163	0,263	0,051	0,090	2,75	65,50	9,00	0,581
Среднее значение	9,405	0,266	0,016	0,115	3,28	159,25	13,39	0,61

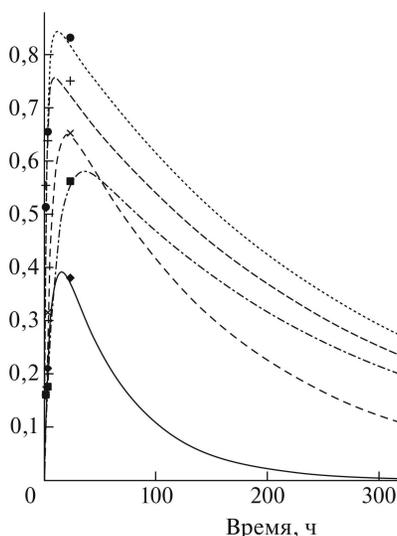
при условии положительных значений всех транспортных констант, которые в данном случае приобретают смысл вариационных параметров. Идентифицированные таким образом значения транспортных констант использовались для построения кривых “Активность–время” и расчета индивидуальных фармакокинетических и дозиметрических характеристик.

В табл. 1 приведены полученные автором значения параметров фармакокинетической модели – индивидуальные транспортные константы для 20 пациентов, рассчитанные на их основе значения максимальной относительной активности радиоiodа в щитовидной железе (A_{\max}/A_0) и соответствующие им промежутки времени от начала исследования (t_{\max}), а также эффективные периоды полувыведения РФП из плазмы крови (T_H) и щитовидной железы (T_T). Из данной таблицы видно, что для почти всех рассмотренных нами пациентов значения их индивидуальных транспортных констант удовлетворяют неравенствам:

$$K_{GH} > K_{HT} > K_{HU} > K_{TH}.$$

Эти неравенства находят вполне оправданное фармакокинетическое объяснение о всасывании, распределении, биотрансформации и экскреции фармпрепарата с учетом его тропности к щитовидной железе. Фармакокинетика РФП во всех камерах подробно описана в [18].

Активность, отн. ед.



Активность, отн. ед.

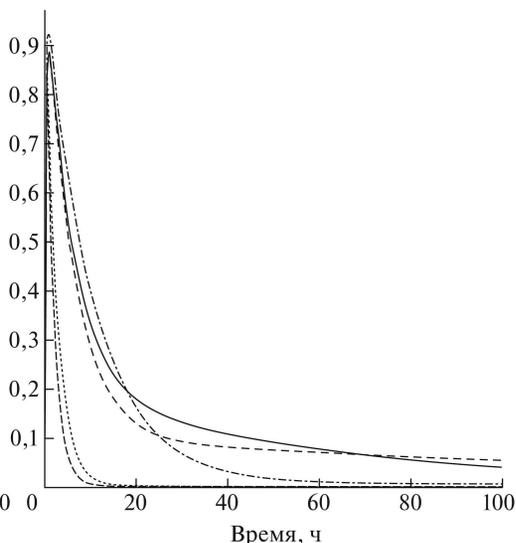


Рис. 2. Кривые “Активность–время” для щитовидной железы и клинические значения относительной активности радиоiodа в ней (слева) и кривые клиренса крови (справа). Пояснения даны в тексте.

В качестве примера на рис. 2 приведены рассчитанные кривые “Активность–время” для щитовидной железы и плазмы крови (клиренс), а также результаты клинических радиометрических измерений в моменты времени 2, 4 и 24 ч от начала исследования. Для удобства представления результатов приводим данные только для первых пяти пациентов (табл. 1): пациент № 1 – разреженная штриховая линия и наклонные крестики, пациент № 2 – сплошная линия и ромбы, пациент № 3 – пунктирная линия и кружки, пациент № 4 – штриховая линия и крестики, пациент № 5 – штрихпунктирная линия и квадратики.

Как видно из рис. 2 (слева), в модели достигнуто хорошее согласие расчетных значений кинетики радиоiodа в щитовидной железе с клиническими значениями с учетом их погрешности (до 20 %). Сложность в идентификации транспортных констант и расчете кинетических кривых заключается в малом количестве клинических радиометрических значений для каждого пациента (всего три точки). Однако получение большего количества радиометрических значений приводит к существенной нагрузке на медицинский персонал, а также к излишним проблемам для самого пациента (непрерывное пребывание в стационаре во время исследования, значительные материальные затраты на обследование и т.д.). Кроме того, для определения функции радиоiodзахвата (гипо-, гипер- или эутиреоз, блокада щитовидной железы и т.п.) в большинстве случаев достаточно трех клинических радиометрических значений, снятых в строго фиксированные промежутки времени от начала введения РФП в организм. Для нормальной функции щитовидной железы относительная активность радиоiodа в ней составляет: 5–10 % – через 2 ч, 10–19 % – через 4 ч, 10–30 % – через 24 ч [7, 8].

Уровни поглощения 10–13% и 27–30% через 24 ч рассматривают как соответственно низшая и высшая границы нормы. При диффузно-токсическом зобе (ДТЗ) или раке максимальное поглощение радиойода в щитовидной железе в среднем увеличивается до 55–82%, хотя в некоторых случаях оно может быть в пределах нормы [7]. Как видно из рис. 2 (слева) и табл. 1 (A_{\max}/A_0), для всех пациентов рассчитанные кривые “Активность–время” и кинетические данные соответствуют гипертиреозу, что характерно для диагноза ДТЗ. При этом времена максимального накопления активности радиойода в щитовидной железе (t_{\max}) и эффективные периоды его полувыведения из нее (T_T), рассчитанные автором, лежат в пределах 4–35 ч и 26–221 ч соответственно и согласуются с реально наблюдаемыми значениями на практике [7, 17].

Фармакокинетическая модель позволяет определить кинетику РФП в органах и тканях, в которых его активность невозможно или затруднительно измерить клиническими методами. На рис. 2 приведены рассчитанные кривые клиренса крови от РФП, восстановленные по радиометрическим данными поглощенной активности радиойода в щитовидной железе согласно соотношениям (1)–(4). Камера крови является центральной камерой в фармакокинетической модели и взаимодействует со всеми другими компартментами. Поэтому кинетика РФП в плазме крови особо чувствительна к значениям всех четырех транспортных констант, приведенных в табл. 1. В клинической функциональной диагностике клиренс крови и параметры, его характеризующие, имеют существенное значение при постановке диагноза. Как видно из рис. 2 (справа), на кривых клиренса отчетливо выделяются два участка – быстрый спад активности в плазме крови (α -фаза) и последующие (после 10–20 ч) медленно убывающие ее значения (β -фаза) [18]. При этом рассчитанные автором эффективные периоды полувыведения РФП из плазмы крови лежат в пределах от 1 до 9 ч (см. табл. 1).

Рассчитанные индивидуальные фармакокинетические параметры транспорта РФП в организме (табл. 1) и кривые “Активность–время” (рис. 2) в дальнейшем могут быть использованы для целей дозиметрического планирования радиойодтерапии неонкологических и онкологических заболеваний щитовидной железы у пациентов, в ней нуждающихся (в рассмотренном случае – это все пациенты с ДТЗ, перечисленные в табл. 1). При этом предполагается, что кинетика радиойода в организме пациента при введении ему диагностической и терапевтической активностей РФП одинакова на протяжении всех проводимых исследований. Как показали ранее авторы публикаций [7, 20, 21] на основе статистического анализа, выдвинутая гипотеза вполне оправдана. Методика индивидуального дозиметрического планирования и подходы к назначению активности РФП при радиойодтерапии рассмотрены в публикациях автора [19, 25].

Поглощенные радиационные дозы D в камерах модели (см. рис. 1), соответствующих органам и тканям (щитовидная железа, желудок, кровь, мочевой пузырь), рассчитывались с помощью разработанного автором программного комплекса на основе индивидуальных фармакокинетических парамет-

Таблица 2. Рассчитанные индивидуальные дозиметрические характеристики

Номер пациента	Запланированная доза D_T , Гр	Индивидуальная активность A_0 , МБк	D_G , Гр	D_H , Гр	D_U , Гр
1	100	144	0,01	0,02	0,13
2	60	141	0,02	0,04	0,27
3	100	104	0,01	0,01	0,01
4	100	115	0,01	0,01	0,10
5	80	67	0,01	0,02	0,06
6	60	559	0,20	0,02	1,79
7	80	592	0,06	0,03	0,87
8	80	78	0,01	0,01	0,13
9	100	152	0,01	0,01	0,32
10	60	85	0,01	0,01	0,18
11	120	703	0,04	0,04	0,70
12	100	133	0,01	0,01	0,22
13	100	85	0,01	0,01	0,11
14	80	300	0,02	0,02	0,79
15	80	63	0,01	0,01	0,10
16	100	81	0,01	0,01	0,06
17	60	122	0,01	0,01	0,01
18	60	333	0,03	0,02	0,45
19	50	500	0,02	0,05	0,87
20	50	503	0,02	0,05	0,98
Среднее значение	81	242	0,03	0,02	0,41

ров по интегральным формулам вида [19]

$$(5) \quad D = k \frac{A_0 \langle E_\beta \rangle}{m} \int_0^\infty F(t) dt,$$

где $\langle E_\beta \rangle$ – средняя энергия β -частиц распада изотопа ^{131}I , равная 0,19 МэВ/распад, A_0 – вводимая терапевтическая активность РФП, m – масса органа или ткани, k – размерный коэффициент. Расчет поглощенной дозы на мочевой пузырь проводился с учетом его периодического опорожнения в процессе радиойодтерапии. Формула (5) также использовалась для расчета индивидуальной вводимой терапевтической активности РФП A_0 по запланированной врачом поглощенной дозе в щитовидной железе D_T согласно методике индивидуального дозиметрического планирования радиойодтерапии.

В табл. 2 приведены основные результаты индивидуального дозиметрического планирования – индивидуальная вводимая активность РФП, вычисленная по запланированной врачом лечебной поглощенной дозе в щитовидной железе D_T , а также дозовые нагрузки на желудок D_G , кровеносную систему D_H и мочевой пузырь D_U , соответствующие вводимой активности A_0 . Запланированная поглощенная доза лежит в пределах 50–120 Гр для всех пациентов и коррелирует с предварительными клинико-диагностическими данными, прежде всего, с объемом щитовидной железы и ее функцией радио-

йодзахвата. Как видно из табл. 2, рассчитанная индивидуальная вводимая активность РФП, необходимая для достижения соответствующих запланированных поглощенных доз в щитовидной железе, варьирует от 63 до 703 МБк. Среднее же ее значение составляет 242 МБк и примерно соответствует стандартной активности РФП, которая вводится в организм всех пациентов, когда индивидуальное дозиметрическое планирование не проводится (см. [19]). Как показывают результаты моделирования, при индивидуальном дозиметрическом планировании практически отсутствуют случаи недо- или переоблучения ткани щитовидной железы, а дозовые нагрузки на другие органы и ткани остаются в пределах нормы. Однако, как видно из табл. 2, для пациента № 6 получены слишком высокие расчетные значения поглощенной дозы в желудке (0,20 Гр) и в мочевом пузыре (1,79 Гр), что, несомненно, связано с его индивидуальными фармакокинетическими характеристиками и, прежде всего, с быстрым выведением радиоiodа из щитовидной железы (у него самая большая константа K_{TH} по сравнению с другими пациентами, см. табл. 1). При подготовке данного пациента к процедуре радиоiodтерапии ему необходимо дополнительное диагностическое обследование и более точное определение функции радиоiodзахвата при радиометрии щитовидной железы.

Следует также отметить, что при терапии рака щитовидной железы вводимая в организм активность РФП лежит в пределах от 2000 до 7000 МБк (значительно выше, чем при ДТЗ). Такие активности приводят к эффектам абляции ткани щитовидной железы [26]. Рассмотренная выше камерная модель также может быть использована при радиоiodтерапии рака щитовидной железы. В этом случае необходимо изменить математическую интерпретацию модели, которая будет учитывать эффекты абляции ткани щитовидной железы и уменьшение ее массы в процессе радиоiodтерапии. Особенности фармакокинетического моделирования и индивидуального дозиметрического планирования радиоiodтерапии дифференцированного рака щитовидной железы рассматриваются в публикации автора [27].

Таким образом, на основе камерного моделирования показано, что фармакокинетические характеристики вводимого в организм РФП для каждого пациента являются сугубо индивидуальными и не могут быть описаны усредненными кинетическими параметрами. При этом значения поглощенных радиационных доз при радиоiodтерапии очень чувствительны к кинетическим параметрам камерной модели (транспортным константам). Поэтому при индивидуальном дозиметрическом планировании следует уделять особое внимание получению точных количественных данных ультразвукового исследования (объем щитовидной железы) и радиоiodметрии (значения накопленной активности в щитовидной железе) и на их основе идентификации параметров моделирования.

3. Модель кинетики при исследовании печени

Гепатография применяется для изучения поглотительной и выделительной функции печени с помощью РФП, вводимого в вену [28]. В основе метода лежит регистрация кинетики двух гепатотропных красок: бенгальского ро-

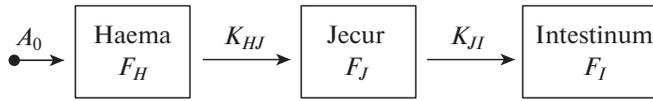


Рис. 3. Геометрическая иллюстрация модели при гепатографии.

зового (бенгалроз, или калийная соль тетрайдхлорфлюоресцеина) и бромсульфалеина, меченных радиоизотопами ^{131}I или ^{123}I .

С помощью радиометрического прибора (клинический радиограф, радиометр) регистрируют три кинетические кривые: клиренс крови (с помощью датчика, расположенного над областью сердца или ушной раковины), гепатограмму (датчик над правой долей печени) и энтерограмму (в левой половине эпигастральной области или центральной части живота). Измерение радиоактивности регистрируют в течение 90 мин, а при серьезных заболеваниях оно может быть продлено до 24 ч. По кривым определяют количественные параметры, важные для диагностики, такие как время достижения максимума активности в печени t_{\max} , время продолжительности плато t_{plat} , время поступления индикатора в кишечник ($\geq 20\%$) t_{int} , эффективный период полуочистения крови от РФП T_H и др. [8]. Огромное значение в оценке этих параметров имеет параллельное кинетическое моделирование транспорта РФП в организме.

Для описания кинетики РФП с учетом особенностей регистрации радиоактивности при проведении гепатографии автором предложена трехкамерная модель (из трех компартментов), геометрическая схема которой представлена на рис. 3. Данная математическая модель включает в себя камеру плазмы крови (Наема), камеру печени с желчными протоками и пузырьем (Jecur), камеру кишечника (Intestinum). Функции удержания активности РФП в камерах обозначены как F_H , F_J и F_I соответственно.

Система дифференциальных уравнений в рамках данной модели принимает вид:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{dF_H(t)}{dt} = -(K_{HJ} + \lambda) F_H(t), \\ \frac{dF_J(t)}{dt} = K_{HJ} F_H(t) - (K_{JI} + \lambda) F_J(t), \\ \frac{dF_I(t)}{dt} = K_{JI} F_J(t) - \lambda F_I(t). \end{cases}$$

С клинко-диагностической точки зрения, транспортная константа K_{HJ} здесь отражает поглотительную функцию печени и задает скорость очищения крови от РФП, а K_{JI} – выделительную функцию печени и скорость поступления РФП в двенадцатиперстную кишку. Функции удержания активности также выражаются в относительных единицах (вводимая в организм активность A_0 составляет 5–15 кБк/кг). С учетом внутривенного введения РФП начальные условия для системы уравнений (6) запишутся как

$$(7) \quad F_H(0) = 1, \quad F_J(0) = 0, \quad F_I(0) = 0.$$

Решение системы уравнений (6) с начальными условиями (7) легко находится аналитически:

$$F_H = \exp(-K_{HJ}t) \cdot \exp(-\lambda t),$$

$$(8) \quad F_J = \frac{K_{HJ} \exp(-\lambda t)}{K_{HJ} - K_{JI}} \{ \exp(-K_{JI}t) - \exp(-K_{HJ}t) \},$$

$$F_I = \frac{K_{HJ} \exp(-\lambda t)}{K_{HJ} - K_{JI}} \{ 1 - \exp(-K_{JI}t) \} - \frac{K_{JI} \exp(-\lambda t)}{K_{HJ} - K_{JI}} \{ 1 - \exp(-K_{HJ}t) \}.$$

С целью построения кривых “Активность–время” в соответствии с найденными выражениями для относительных активностей (8) необходимо идентифицировать кинетические параметры – транспортные константы K_{HJ} и K_{JI} . Значения транспортных констант для каждого пациента являются индивидуальными и зависят от целого ряда их анатомо-физиологических и биохимических характеристик, наличия заболеваний гепатобилиарной системы и других патологий. Как правило, для этого используются количественные клинические данные, полученные в процессе радиографии (графики клиренса крови и гепатограмма) или радиометрии (набор точек регистрации активности в разные моменты времени с области печени). Также могут быть использованы эмпирические формулы и закономерности. В настоящей статье транспортные константы определялись несколькими способами, рассмотрим их.

Константа K_{HJ} может быть определена по клиническому графику клиренса крови. Прологарифмировав первое выражение в (8), получим:

$$\ln(F_H) = -(K_{HJ} + \lambda)t.$$

В полулогарифмической шкале координат график этой зависимости – прямая, и константа K_{HJ} определяется как

$$K_{HJ} = -\operatorname{tg} \alpha - \lambda,$$

т.е. тангенс угла наклона этой прямой к оси времени, взятый с противоположным знаком. Однако если клинический график построить в виде экспоненциальной зависимости, то α – это аналогичный угол наклона касательной, проведенной к графику клиренса крови на начальном участке согласно

$$dF_H/dt (t = 0) = -(K_{HJ} + \lambda) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Аналогично производная по времени от второго выражения в (8)

$$dF_J/dt (t = 0) = K_{HJ} = \operatorname{tg} \alpha,$$

что позволяет определить данную константу также по тангенсу угла наклона касательной на начальном участке к клиническому графику гепатограммы. Еще один способ определения константы клиренса крови возможен через эффективный период полувыведения РФП из крови T_H , который может быть определен по графику клиренса крови или по эмпирической формуле [28]:

$$3/T_H \approx \lg (A_5/A_{15}),$$

Таблица 3. Основные показатели исследования печени и численные результаты моделирования

Показатели	Контрольная группа	Хронический гепатит	Цирроз печени	Алкогольная гепатопатия
t_{\max} , мин	22–27	31,4–37,0	35–60	17,3–22,1
t_{plat} , мин	23,2–27,8	33,0–41,6	40	9,4–21,0
t_{int} , мин	23,6–32,9	48,4–58,6	46,7–60,0	13,2–23,4
T_H , мин	8,6–10,5	10,1–14,3	12,9–17,0	6,9–8,7
K_{HJ} , мин ⁻¹	0,07–0,08	0,05–0,07	0,04–0,05	0,08–0,10
K_{JI} , мин ⁻¹	0,01–0,03	0,01–0,02	0,00–0,02	0,02–0,04
A_{\max}/A_0	0,55–0,70	0,55–0,75	0,50–0,80	0,50–0,75

где A_5 и A_{15} – это активности выведения РФП на 5 и 15 мин соответственно. С учетом первого выражения из (8) нетрудно получить, что

$$K_{HJ} = \ln 2/T_H - \lambda.$$

Константа K_{JI} также может быть идентифицирована несколькими способами. С учетом того, что $K_{JI} \ll K_{HJ}$, согласно выражению (8) для F_J оценить значение K_{JI} можно, аппроксимируя экспонентой нисходящий участок клинического графика гепатограммы, поскольку на этом участке зависимость близка к $\exp(-K_{JI}t)$. Также эта константа может быть рассчитана через время t_{\max} достижения максимального значения F_J^{\max} , которое легко определить по графику. Решив простое уравнение $dF_J/dt(t = t_{\max}) = 0$, получим

$$(9) \quad t_{\max} = \ln \left(\frac{K_{HJ} + \lambda}{K_{JI} + \lambda} \right) / (K_{HJ} - K_{JI}).$$

При известных значениях K_{HJ} , λ и t_{\max} из уравнения (9) может быть найдено значение константы K_{JI} . Еще один способ вычисления константы K_{JI} возможен через эффективный период полувыведения РФП из печени T_J , который может быть определен по клиническому графику гепатограммы. В этом случае используется приближенная формула:

$$T_J \approx t_{\max} + \ln 2 / (K_{JI} + \lambda).$$

В случае если имеется набор точек регистрации активности с области печени в разные моменты времени t_i , то задача идентификации транспортных констант K_{HJ} и K_{JI} может быть решена с использованием функционала невязки аналогично формулам (3),–(4) с использованием функции $F_J(K_{HJ}, K_{JI}, t)$ из (8). Для реализации задачи идентификации транспортных констант модели автор написал программу на языке программирования C++. С помощью данной программы также осуществлялись расчеты фармакокинетических параметров и построения кривых “Активность–время”.

В табл. 3 приведены основные показатели радионуклидного исследования печени с применением РФП “Бенгалроз- $I-131$ ” (по В.К. Поленко и др.), взятые из [28], и рассчитанные автором транспортные константы в норме (контрольная группа) и при различных заболеваниях. Обозначения всех величин приведены в тексте выше. Также в табл. 3 приведен еще один значимый

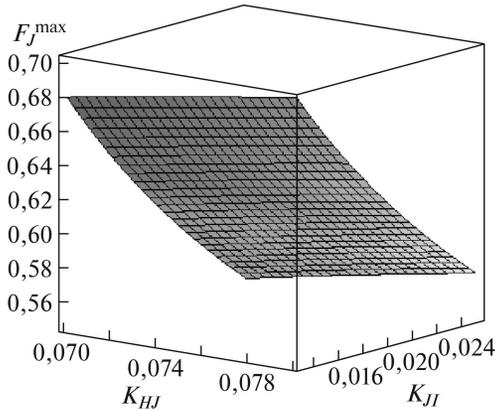


Рис. 4. Графическая зависимость относительной максимальной активности РФП в печени при гепатографии для контрольной группы обследуемых пациентов.

для диагностики параметр–максимальное значение активности РФП в печени A_{\max}/A_0 (или F_J^{\max}), достигаемое при $t = t_{\max}$. Подставляя выражение (9) в (8) для F_J , получаем следующее выражение для максимума относительной активности в печени

$$(10) \quad F_J^{\max}(K_{HJ}, K_{JI}) = \frac{K_{HJ}}{K_{HJ} - K_{JI}} \left\{ \left(\frac{K_{JI} + \lambda}{K_{HJ} + \lambda} \right)^{\frac{K_{JI} + \lambda}{K_{HJ} - K_{JI}}} - \left(\frac{K_{JI} + \lambda}{K_{HJ} + \lambda} \right)^{\frac{K_{HJ} + \lambda}{K_{HJ} - K_{JI}}} \right\}.$$

Как видно из (10), F_J^{\max} является функцией двух аргументов K_{HJ} и K_{JI} , в трехмерном пространстве – это поверхность. Подставляя из табл. 3 крайние границы значений кинетических констант в (10), можно рассчитать диапазон возможных значений максимума активности в печени для разных групп обследуемых пациентов. Минимальная граница диапазона возможных значений F_J^{\max} достигается при минимальном значении K_{HJ} и максимальном K_{JI} , а максимальная граница – при максимальном K_{HJ} и минимальном K_{JI} во всех группах, приведенных в табл. 3. В качестве примера на рис. 4 приведена графическая зависимость $F_J^{\max}(K_{HJ}, K_{JI})$ для контрольной группы.

Расчитанные и приведенные в табл. 3 границы возможных значений транспортных констант K_{HJ} и K_{JI} для каждой из групп обследуемых пациентов далее использовались для построения кривых “Активность–время” в зонах интереса (плазма крови, печень, кишечник) согласно выражениям (8). Данные зависимости отражают фармакокинетику РФП в организме, а потому несут значимую клинико-диагностическую информацию. В идеале они должны совпадать с клиническими графиками с учетом всех погрешностей и артефактов. Для удобства при построении фармакокинетических зависимостей были объединены две группы сходных с диагностической точки зрения заболеваний – хронический гепатит и цирроз печени, для которых строили один общий график во всех зонах интереса. Данные зависимости для трех

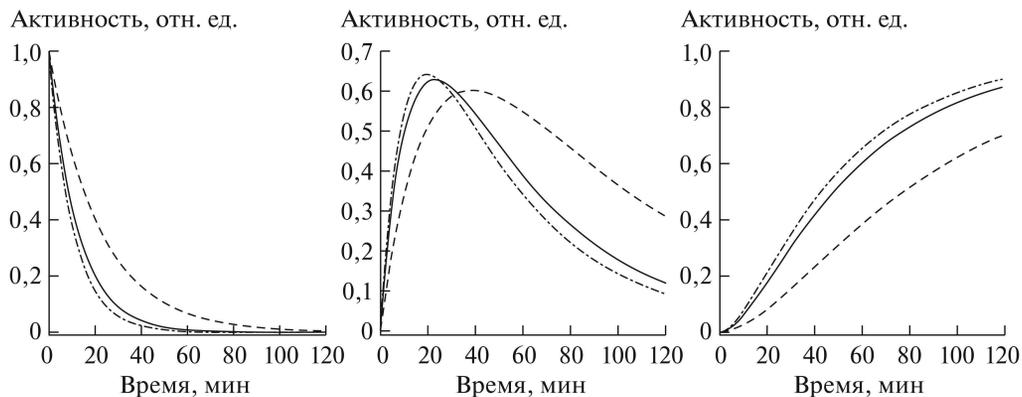


Рис. 5. Рассчитанные кривые “Активность–время” при гепатографии с РФП “Бенгалроз- $I-131$ ” для плазмы крови (слева), печени (посередине), кишечника (справа). Пояснения даны в тексте.

групп при значениях транспортных констант из указанных в табл. 3 диапазонов приведены на рис. 5. Сплошные кривые соответствуют контрольной группе ($K_{HJ} = 0,08$, $K_{JI} = 0,02 \text{ мин}^{-1}$), штриховые – группе с гепатитом и циррозом ($K_{HJ} = 0,045$, $K_{JI} = 0,013 \text{ мин}^{-1}$), штрихпунктирные – группе с алкогольной гепатопатией ($K_{HJ} = 0,095$, $K_{JI} = 0,022 \text{ мин}^{-1}$).

Анализируя результаты кинетического моделирования при радиоизотопной гепатографии, можно отметить следующее. У больных хроническим гепатитом и особенно циррозом наблюдается снижение поглотительной функции печени относительно контрольной группы – уменьшается высота подъема гепатограммы, удлиняется плато, замедляется очищение крови от РФП (рис. 5), что численно отражается на увеличении значения периода T_H и уменьшении значения константы K_{HJ} примерно в два раза. Также увеличивается время поступления РФП в кишечник (рис. 5). При алкогольном гепатозе наблюдаются обратные закономерности – высота подъема гепатограммы увеличивается, плато укорачивается, ускоряется очищение крови от РФП (рис. 5), что численно отражается на небольшом уменьшении значения периода T_H и увеличении значения константы K_{HJ} по сравнению с контрольной группой. Также немного уменьшается время поступления РФП в кишечник (рис. 5). Такие изменения гепатограммы наблюдаются при нетяжелых алкогольных гепатопатиях [29].

4. Модель кинетики при исследовании почек

Ренография применяется для изучения фильтрационной и эвакуаторной функции почек с помощью РФП, в качестве которого в данном методе используется гипсуран, меченный радиоизотопами ^{131}I или ^{123}I (натриевая соль ортоидгипсуровой кислоты) [30]. РФП вводят внутривенно из расчета 0,01–0,02 МБк/кг и осуществляют запись регистрации активности в течение 20 мин. Исследование можно выполнять, используя положение пациента сидя

или лежа. В связи с этим количественные параметры нормы, в зависимости от положения обследуемого, могут значительно отличаться [8].

С помощью радиометрического прибора регистрируют три (иногда две) кинетические кривые “Активность–время”: две ренограммы (с помощью датчиков, расположенных по центру проекции каждой почки) и клиренс крови (с помощью датчика, расположенного над областью сердца, если он имеется). По кривым “Активность–время” определяют количественные параметры, важные для функциональной диагностики, такие как клиренс крови или эффективный период полуочистения крови от РФП T_H (отражает суммарную фильтрационную функцию почек, в норме не превышает 14 мин), эффективный период полувыведения РФП почкой $T_{1/2}$ (отражает эвакуаторную функцию каждой почки, в норме примерно 5–9 мин), время достижения максимума активности в почке t_{\max} (отражает фильтрационную или секреторную способность почки, в норме 2–5 мин) и др. [8].

Для описания кинетики РФП с учетом вышеописанных особенностей регистрации радиоактивности при проведении радионуклидной диагностики почек автором предложена четырехкамерная модель, геометрическая схема которой представлена на рис. 6. Данная математическая модель включает в себя камеры: плазмы крови (H), левой (LR) и правой (RR) почек и камеру мочевого пузыря (U). Функции удержания активности РФП в камерах обозначены как F_H , F_L , F_R и F_U соответственно. Транспортные константы K_{HL} и K_{HR} отражают фильтрационную функцию каждой почки, а их сумма $K_H = K_{HL} + K_{HR}$ определяет скорость очищения крови от РФП (клиренс крови), константы K_{LU} и K_{RU} отражают эвакуаторную функцию левой и правой почки. Транспортные константы K_{UL} и K_{UR} (для левой и правой почки соответственно) учитывают ретроградный ток (заброс) мочи из мочевого пузыря в мочеточник по направлению к почке при описании кинетики РФП в организме пациентов с пузырно-мочеточниковым рефлюксом (ПМР), если он имеется.

С учетом особенностей проявления ПМР [31] моделирование кинетики РФП в организме осуществлялось в три этапа. Первый этап заключается во внутривенном введении РФП, фильтрации его почками и последующей эвакуации с мочой в камеру мочевого пузыря до момента проявления ПМР, т.е. при $0 \leq t \leq t_1$, где t_1 – время начала ПМР (появления обратного тока мочи). На данном этапе $K_{UL} = 0$ и $K_{UR} = 0$ (см. рис. 6) и кинетика РФП полностью описывается системой дифференциальных уравнений без учета ПМР:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dF_H(t)}{dt} = -(K_{HL} + K_{HR} + \lambda)F_H(t), \\ \frac{dF_L(t)}{dt} = K_{HL}F_H(t) - (K_{LU} + \lambda)F_L(t), \\ \frac{dF_R(t)}{dt} = K_{HR}F_H(t) - (K_{RU} + \lambda)F_R(t), \\ \frac{dF_U(t)}{dt} = K_{LU}F_L(t) + K_{RU}F_R(t) - \lambda F_U(t) \end{array} \right.$$

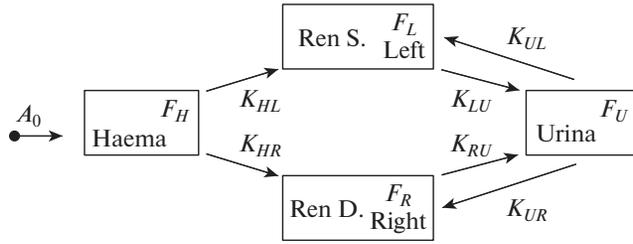


Рис. 6. Геометрическая иллюстрация модели при ренографии.

с начальными условиями для функций относительной активности:

$$(12) \quad F_H(0) = 1, \quad F_L(0) = 0, \quad F_R(0) = 0, \quad F_U(0) = 0.$$

Решение системы уравнений (11) с начальными условиями (12) находится аналитически:

$$\begin{aligned}
 F_H &= \exp(-(K_{HL} + K_{HR})t) \cdot \exp(-\lambda t), \\
 F_L &= \frac{K_{HL} \exp(-\lambda t)}{K_{HL} + K_{HR} - K_{LU}} \{ \exp(-K_{LU}t) - \exp(-(K_{HL} + K_{HR})t) \}, \\
 (13) \quad F_R &= \frac{K_{HR} \exp(-\lambda t)}{K_{HL} + K_{HR} - K_{RU}} \{ \exp(-K_{RU}t) - \exp(-(K_{HL} + K_{HR})t) \}, \\
 F_U &= \frac{K_{HL}K_{LU} \exp(-\lambda t)}{K_{HL} + K_{HR} - K_{LU}} \left\{ \frac{1 - \exp(-K_{LU}t)}{K_{LU}} - \frac{1 - \exp(-(K_{HL} + K_{HR})t)}{K_{HL} + K_{HR}} \right\} + \\
 &+ \frac{K_{HR}K_{RU} \exp(-\lambda t)}{K_{HL} + K_{HR} - K_{RU}} \left\{ \frac{1 - \exp(-K_{RU}t)}{K_{RU}} - \frac{1 - \exp(-(K_{HL} + K_{HR})t)}{K_{HL} + K_{HR}} \right\}.
 \end{aligned}$$

Отметим, что этот этап полностью описывает кинетику РФП в организме пациентов без ПМП (в этом случае параметр $t_1 \rightarrow \infty$).

Второй этап заключается в появлении обратного тока мочи с РФП в мочеточнике (при $t \geq t_1$). В этом случае $K_{UL} \neq 0$ и $K_{UR} \neq 0$. Система дифференциальных уравнений с учетом ПМП в рамках второго этапа принимает вид:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \frac{dF_H(t)}{dt} &= -(K_{HL} + K_{HR} + \lambda)F_H(t), \\
 \frac{dF_L(t)}{dt} &= K_{HL}F_H(t) + K_{UL}F_U(t) - (K_{LU} + \lambda)F_L(t), \\
 \frac{dF_R(t)}{dt} &= K_{HR}F_H(t) + K_{UR}F_U(t) - (K_{RU} + \lambda)F_R(t), \\
 \frac{dF_U(t)}{dt} &= K_{LU}F_L(t) + K_{RU}F_R(t) - (K_{UL} + K_{UR} + \lambda)F_U(t)
 \end{aligned} \right.$$

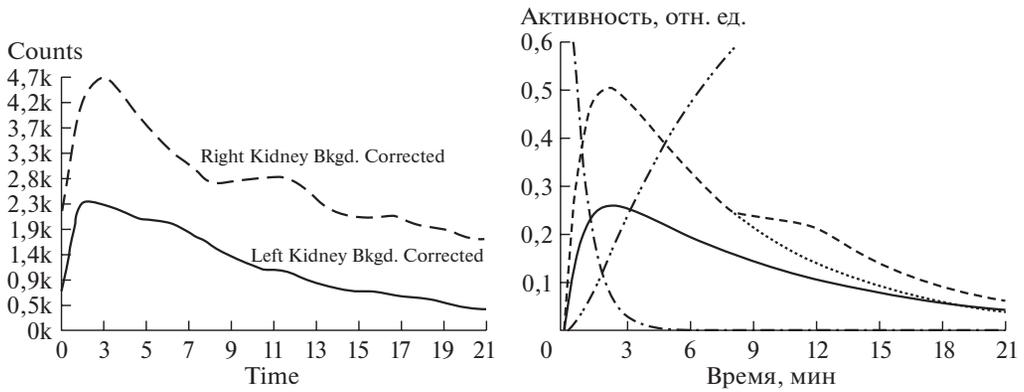


Рис. 7. Кривые “Активность–время” для пациента с ПМР правого мочеточника при ренографии с РФП “Гиппуран-И-131” (слева приведены клинические результаты, справа – результаты моделирования). Пояснения даны в тексте.

с начальными условиями:

$$(15) \quad F_H(t_1) = F_{H1}, \quad F_L(t_1) = F_{L1}, \quad F_R(t_1) = F_{R1}, \quad F_U(t_1) = F_{U1},$$

где F_{H1} , F_{L1} , F_{R1} , F_{U1} – значения функций относительной активности на первом этапе моделирования при $t = t_1$. Решение системы уравнений (14) с начальными условиями (15) может быть найдено аналитически или численно, например с помощью методов Рунге–Кутты или Розенброка [12, 13]. При аналитическом решении получаются очень громоздкие математические выражения, которые здесь не приводим.

Третий этап связан с отсутствием обратного тока мочи в мочеточнике при $t \geq t_2$ ($t_2 > t_1$), где k_2 – время окончания заброса мочи из мочевого пузыря в мочеточник. На этом этапе $K_{UL} = 0$, $K_{UR} = 0$ и кинетика РФП вновь описывается системой дифференциальных уравнений (11) с начальными условиями:

$$(16) \quad F_H(t_2) = F_{H2}, \quad F_L(t_2) = F_{L2}, \quad F_R(t_2) = F_{R2}, \quad F_U(t_2) = F_{U2},$$

где F_{H2} , F_{L2} , F_{R2} , F_{U2} – значения функций относительной активности на втором этапе моделирования при $t = t_2$. Если наличие обратного тока мочи присутствует до конца исследования, то третий этап отсутствует.

Совместные решения систем уравнений (11) и (14) с начальными условиями (12), (15), (16) и с идентифицированными на основе клинических данных транспортными константами K_{HL} , K_{HR} , K_{LU} , K_{RU} , K_{UL} и K_{UR} использовались автором для построения кривых “Активность–время”. Идентификация транспортных констант осуществлялась по аналогии с описанными выше способами (в предыдущих разделах статьи). Расчеты фармакокинетических параметров и построения кривых “Активность–время” были выполнены в разработанном программном комплексе в среде Borland C++.

В качестве примера на рис. 7 приведены клинические и рассчитанные в рамках четырехкамерной модели кривые “Активность–время” для па-

циента с ПМР правого мочеточника. Ренограммы для левой почки изображены сплошными линиями, для правой – штриховыми. Штрихпунктирной и штрихдишпунктирной линиями показаны рассчитанные кривые для камер крови и мочевого пузыря соответственно. Получены следующие значения индивидуальных транспортных констант: $K_{HL} = 0,39 \text{ мин}^{-1}$, $K_{HR} = 0,80 \text{ мин}^{-1}$, $K_{LU} = 0,10 \text{ мин}^{-1}$, $K_{RU} = 0,14 \text{ мин}^{-1}$, $K_{UL} = 0$ (отсутствии ПМР) и $K_{UR} = 0,10 \text{ мин}^{-1}$ (ПМР при $t_1 = 8 \text{ мин}$ и $t_2 = 12 \text{ мин}$). Пунктирной линией показано продолжение ренограммы для правой почки при $t > t_1$, если бы ПМР не было (при $K_{UR} = 0$). Ренограмма для левой почки имеет нормальный тип. Рассчитанные с использованием выражений (13) значения t_{\max} и $T_{1/2}$ для левой почки равны 2,27 и 9,20 мин соответственно. Для правой почки – $t_{\max} = 2,04 \text{ мин}$ и с учетом ПМР $T_{1/2} \approx 7,9 \text{ мин}$. Следует отметить, что при отсутствии ПМР для правой ренограммы (пунктирная линия) получается более низкое значение $T_{1/2} = 7,00 \text{ мин}$.

Также автором был осуществлен расчет фармакокинетических параметров и выполнено построение кривых “Активность–время” на основе клинических данных радионуклидной диагностики пациентов без ПМР, но с различными типами ренограмм: нормальный, афункциональный и обструктивный тип [32]. При анализе идентифицированных транспортных констант модели установлено, что ренограммы афункционального типа характеризуются более низкими значениями констант фильтрации и более высокими значениями констант эвакуации по сравнению с ренограммами нормального типа. Особенностью ренограмм обструктивного типа является равенство константы эвакуации нулю. Также восстановлены и проанализированы модельные кривые клиренса крови и накопления РФП в моче (при их отсутствии в клинических данных диагностики).

5. Заключение

В данной статье разработан единый подход к построению камерных моделей кинетики различных радиофармацевтических препаратов с изотопами йода как при диагностике функционального состояния органов, тканей и систем организма с помощью невузуализирующих и визуализирующих радионуклидных методов, так и при терапии заболеваний щитовидной железы с помощью радиоiodа. Представлены три математические модели транспорта радиофармпрепаратов в организме человека и реализованные на их основе алгоритмы обработки количественных данных радионуклидной диагностики печени и желчевыделительной системы, почек и мочевыделительной системы, а также функциональной диагностики и радионуклидной терапии щитовидной железы. Предложены различные способы идентификации модельных параметров межкамерных коммуникаций – транспортных констант. Рассмотрены подходы к индивидуальному дозиметрическому планированию радиойодтерапии заболеваний щитовидной железы на основе камерного моделирования.

Применение фармакокинетического моделирования при функциональном и морфофункциональном исследовании органов, тканей и систем организма позволяет научно обосновать полученные в процессе радионуклидной диагно-

стики и/или терапии количественные результаты и сцинтиграммы, связать их с определенными морфофункциональными характеристиками биосистемы, показателями гемодинамики и дать, таким образом, их более объективную интерпретацию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kar N.R.* Production and Applications of Radiopharmaceuticals: A Review // *Int. J. Pharm. Investigation.* 2019. V. 9. No. 2. P. 36–42. <https://doi.org/10.5330/ijpi.2019.2.8>
2. *Payolla F.B., Massabni A.C., Orvig C.* Radiopharmaceuticals for Diagnosis in Nuclear Medicine: A Short Review // *Eclética Quím. J.* 2019. V. 44. No. 3. P. 11–19. <https://doi.org/10.26850/1678-4618eqj.v44.3.2019.p11-19>
3. *Debnath S., Babu M.N., Kumar G.V.* Radiopharmaceuticals and their Therapeutic Applications in Health Care System // *Pharma Times.* 2016. V. 48. No. 3. P. 15–18. <https://doi.org/10.5958/2231-5659.2015.00032.6>
4. *Зырянов С.К., Затолочина К.Э.* Перспективы применения радионуклидных лекарственных препаратов при лечении злокачественных новообразований в РФ // *Качественная клиническая практика.* 2018. № 2. С. 51–57. <https://doi.org/10.24411/2588-0519-2018-10044>
5. *Чернов В.И., Медведева А.А., Синилкин И.Г., Сельчан Р.В., Брагина О.Д., Чойнзонов Е.Л.* Ядерная медицина в диагностике и адресной терапии злокачественных новообразований // *Бюллетень сибирской медицины.* 2018. Т. 17. № 1. С. 220–231. <https://doi.org/10.20538/1682-0363-2018-1-220-231>
6. *Матвеев А.В.* Ядерная медицина: радиоизотопы и фармпрепараты. Омск: Изд-во ОмГУ, 2016.
7. *Цыб А.Ф., Древаль А.В., Гарбузов П.И. и др.* Радиойодтерапия тиреотоксикоза: руководство. М.: ГЭОТАР-Медиа, 2009.
8. *Радионуклидная диагностика для практических врачей / Под ред. Лишманова Ю.Б., Чернова В.И.* Томск: СТТ, 2004.
9. *Синякова О.Г.* Методы математического моделирования в задачах оценки состояния организма (радионуклидная диагностика) // *АиТ.* 2005. № 1. С. 142–153. *Sinyakova O.G.* Methods of Mathematical Modeling for Estimation of the Organism Condition (Radionuclide Diagnostics) // *Autom. Remote Control.* 2005. V. 66. No. 1. P. 129–138. <https://doi.org/10.1007/s10513-005-0013-5>
10. *Сергиенко В.И., Джемеллифф Р., Бондарева И.Б.* Прикладная фармакокинетика: основные положения и клиническое применение. М.: Изд-во РАМН, 2003.
11. *Бондарева И.Б.* Математическое моделирование в фармакокинетике и фармакодинамике. Дисс. . . д.б.н. Москва, 2001.
12. *Галанин М.П., Ходжаева С.Р.* Разработка и тестирование методов решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений // *Математическое моделирование и численные методы.* 2014. № 4. С. 95–119.
13. *Калиткин Н.Н., Корякин П.В.* Численные методы: в 2 кн. Кн. 2. Методы математической физики: учебник для студентов вузов. М.: Изд. центр “Академия”, 2013.
14. *Сулминов В.Д., Шкапов П.М., Носачев С.К.* Локальный поиск методом Хука–Дживса в гибридном алгоритме глобальной оптимизации // *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана.* 2014. № 6. С. 107–123. <https://doi.org/10.7463/0614.0716155>

15. Хук Р., Дживс Т.А. Прямой поиск решения для числовых и статистических проблем. М.: Мир, 1961.
16. Al-jubei W., Shaheen A., Zalloum O. Radioiodine I-131 for Diagnosing and Treatment of Thyroid Diseases // Conf. Paper. 2012. No. 6.
URL: <https://www.researchgate.net/publication/295919808>
17. Tang J., Kong D., Cui Q., Wang K., Zhang D., Liao X., Gong Y., Wu G. The Role of Radioactive Iodine Therapy in Papillary Thyroid Cancer: an Observational Study Based on SEER // OncoTargets and Therapy. 2018. V. 11. P. 3551–3560.
<https://doi.org/10.2147/OTT.S160752>
18. Матвеев А.В., Носковец Д.Ю. Фармакокинетическое моделирование и дозиметрическое планирование радиойодтерапии тиреотоксикоза // Вестн. Ом. ун-та. 2014. № 4. С. 57–64.
19. Матвеев А.В., Носковец Д.Ю. Особенности дозиметрического планирования радиойодтерапии на основе фармакокинетического моделирования // Вестн. Ом. ун-та. 2016. № 3. С. 74–83.
20. Власова О.П., Клепов А.Н., Матусевич Е.С., Поцулко Е.П. Математическое моделирование для дозиметрического планирования радиойодтерапии пациентов с заболеваниями щитовидной железы // ВНМТ. 2008. Т. 15. № 1. С. 17–19.
21. Липанова Н.Н., Клепов А.Н., Наркевич Б.Я. Дозиметрическое планирование и дозовый контроль в радиойодтерапии рака щитовидной железы // Медицинская радиология и радиационная безопасность. 2012. Т. 57. № 3. С. 53–65.
22. Липанова Н.Н. Радиобиологическое и дозиметрическое обоснование радионуклидной терапии заболеваний щитовидной железы. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, 2012.
23. Власова О.П. Метод идентификации параметров метаболизма радиойода и расчет поглощенных доз при радионуклидной терапии щитовидной железы. Дисс. ... канд. биол. наук. Москва, 2010.
24. Лизогуб Д.С., Матвеев А.В. Радиоизотопные методы исследования в диагностике заболеваний щитовидной железы // Молодёжь третьего тысячелетия [Электронный ресурс]: сб. науч. статей / [отв. ред. С.В. Белим]. Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2017. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см.
URL: https://omsu.ru/science/materialy-konferentsiy/2017/M-III_2017.pdf
25. Лизогуб Д.С., Матвеев А.В. Индивидуальное дозиметрическое планирование радиойодтерапии на основе камерного моделирования // Проблемы научной мысли. 2019. Т. 7. № 3. С. 15–17.
26. Silberstein E.B. Comparison of Outcomes After ¹²³I Versus ¹³¹I Preablation Imaging Before Radioiodine Ablation in Differentiated Thyroid Carcinoma // J. Nucl. Med. 2007. V. 48. No. 7. P. 1043–1046. <https://doi.org/10.2967/jnumed.107.040311>
27. Матвеев А.В. Фармакокинетическая модель и расчет поглощенных доз при радионуклидной терапии рака щитовидной железы // Лучевая диагностика и терапия. 2019. № 4. С. 80–86. <https://doi.org/10.22328/2079-5343-2019-10-4-80-86>
28. Поленко В.К., Пономарев П.С., Чибисов В.А. и др. Радиоизотопная диагностика. Метод. пос. М.: Воениздат, 1984.
29. Матвеев А.В., Корнеева М.Ю. Особенности моделирования кинетики радиофармпрепаратов при функциональном исследовании гепатобилиарной системы // Вестн. Ом. ун-та. 2015. № 3. С. 42–51.
30. Кундин В.Ю., Поспелов С.В. Радиофармацевтические препараты для визуализации и оценки функционального состояния мочевыделительной системы // Урология. Український науково-практичний журнал урологів, андрологів та нефрологів. 2012. Т. 16. № 2(61). С. 58–64.

31. *Лопаткин Н.А., Пугачев А.Г.* Пузырно-мочеточниковый рефлюкс. М.: Медицина, 1990.
32. *Матвеев А.В.* Особенности моделирования кинетики радиофармпрепаратов при функциональном исследовании мочевыделительной системы // Вестн. Ом. ун-та. 2019. Т. 24. № 3. С. 58–68. [https://doi.org/10.25513/1812-3996.2019.24\(3\).58-68](https://doi.org/10.25513/1812-3996.2019.24(3).58-68)

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Михальским.

Поступила в редакцию 29.02.2020

После доработки 15.04.2020

Принята к публикации 09.07.2020

СОДЕРЖАНИЕ

Обзоры

- Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.** Линейные матричные неравенства в системах управления с неопределенностью 3

Линейные системы

- Шестаков А.Л., Загребина С.А., Манакова Н.А., Сагадеева М.А., Свиридюк Г.А.** Алгоритм численного нахождения оптимального измерения, искаженного инерционностью, резонансами и деградацией измерительного устройства 55
- Юрченков А.В.** Лемма об ограниченности анизотропийной нормы для систем с мультипликативными шумами при нецентрированном возмущении 68

Нелинейные системы

- Морозов М.В.** Критерий асимптотической устойчивости периодического селекторно-линейного дифференциального включения 83

Робастное, адаптивное и сетевое управление

- Ардентов А.А., Маштаков А.П.** Управление мобильным роботом с прицепом на основе нильпотентной аппроксимации 95
- Вавилов С.А.** Об адаптивном подходе к решению двухточечной краевой задачи в условиях частичной неопределенности возмущающего поля 119

Управление в технических системах

- Игнатов А.Н., Наумов А.В.** О задаче увеличения пропускной способности железнодорожной станции 131
- Матвеев А.В.** Математическое моделирование кинетики йодсодержащих радиофармпрепаратов в задачах ядерной медицины 147

C O N T E N T S

Surveys

- Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S.** Linear Matrix Inequalities in Control Systems Subject to Uncertainty 3

Linear Systems

- Shestakov A.L., Zagrebina S.A., Manakova N.A., Sagadeeva M.A., Sviridyuk G.A.** Algorithm for Numerical Construction of an Optimal Measurement Distorted by Inertia, Resonances, and Degradation of the Measuring Transducer 55
- Yurchenkov A.V.** Anisotropy-based Bounded Real Lemma for Time Varying Multiplicative Noise Systems with Noncentered Disturbances 68

Nonlinear Systems

- Morozov M.V.** Asymptotic Stability Criterion for Periodic Selector-Linear Differential Inclusion 83

Robust, Adaptive and Network Control

- Ardentov A.A., Mashtakov A.P.** Controlling of a Mobile Robot with a Trailer via Nilpotent Approximation 95
- Vavilov S.A.** On the Adaptive Approach to Solve Two-Point Boundary Value Problem under the Perturbation Field Partial Uncertainty 119

Control in Technical Systems

- Ignatov A.N., Naumov A.V.** On the Problem of Increasing Crossing Capacity of a Railroad Station 131
- Matveev A.V.** Mathematical Modeling of the Kinetics of Iodine-Containing Radiopharmaceuticals in Nuclear Medicine 147