



Журнал основан в 1936 году Выходит 12 раз в год



Москва

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН), Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б., Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Поляк Б.Т., Попков Ю.С., Рутковский В.Ю., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М., Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф., Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М., Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США), Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е., Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А., Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталев М.М., Цыбаков А.Б. (Франция), Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

> Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65 Тел./факс: (495) 334-87-70 Электронная почта: redacsia@ipu.ru

> > Зав. редакцией Е.А. Мартехина

Москва ООО «Объединённая редакция»

© Редколлегия журнала «Автоматика и телемеханика» (составитель), 2021

[©] Российская академия наук, 2021

Обзоры

© 2021 г. Б.Р. АНДРИЕВСКИЙ, д-р техн. наук (boris.andrievsky@gmail.com) (Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет), А.Л. ФРАДКОВ, д-р техн. наук (fradkov@mail.ru) (Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет, Университет ИТМО, Санкт-Петербург)

МЕТОД СКОРОСТНОГО ГРАДИЕНТА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ¹

В обзоре рассматривается современное состояние метода скоростного градиента, разработанного в 1970-80-х годах для синтеза алгоритмов управления и адаптации в нелинейных системах, а также многочисленные приложения метода к решению научных и инженерных задач. Приведены краткие сведения об алгоритмах скоростного градиента и условиях их применимости, оптимальности и пассивности. Обсуждаются применения метода к задачам адаптивного управления и идентификации, нелинейного управления, управления энергией и нелинейными колебаниями, управления в сетевых и многоагентных, а также в распределенных системах. Представлены приложения метода к управлению техническими системами и к задачам физики, биологии, экологии. Приводятся современные модификации и обобщения метода, в том числе неевклидовы алгоритмы скоростного градиента на основе функций Ляпунова–Брэгмана.

Ключевые слова: управление, скоростной градиент, пассификация, адаптация, идентификация, нелинейные системы, управление энергией, нелинейные колебания, сети, распределенные системы, технические системы, физика, биология, экология.

DOI: 10.31857/S0005231021090014

1. Введение

Бурное развитие кибернетики и теории управления в 1960-х годах привело к появлению большого числа разнообразных алгоритмов управления, адаптации, распознавания, обучения, оценивания, фильтрации. Возникла потребность обобщения полученных результатов и унификации предложенных алгоритмов. По-видимому, первым эту потребность почувствовал Я.З. Цыпкин [1, 2], предложивший рассматривать различные задачи распознавания, оценивания, управления и т.д. как задачи минимизации среднего некоторой функции потерь. При этом большое число существовавших тогда алгоритмов стало возможным представить в виде вероятностных градиентных итеративных процедур минимизации или оценивания параметров. Однако непрерывные во

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 19-18-50428.

времени алгоритмы адаптации (самонастройки) и управления в эту схему не укладывались, и попытки систематизировать теорию непрерывных адаптивных систем продолжались [3–6].

Оказалось, что унификация различных непрерывных алгоритмов адаптации и управления возможна, если перейти от градиента целевой функции к градиенту скорости ее изменения вдоль траекторий объекта управления. Повидимому, наиболее общая схема построения алгоритмов была предложена в [7]. Получаемые алгоритмы были названы алгоритмами скоростного градиента (АСГ) и строились следующим образом. Пусть уравнение обобщенного объекта управления (обобщенного настраиваемого объекта) имеет вид

(1.1)
$$\dot{x} = F(x, u, t),$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния объекта, $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор управляющих (или настраиваемых) переменных. Пусть цель управления задана в виде

(1.2)
$$Q(x(t),t) \to 0 \quad \text{при} \ t \to \infty,$$

где $Q(x,t) \ge 0$ – скалярная целевая функция. Тогда для синтеза алгоритма АСГ нужно вычислить производную (скорость изменения) функции Q(x,t) вдоль траекторий системы (1.1) при фиксированном u, имеющую вид $w(x,u,t) = \partial Q(x,t)/\partial t + \partial Q(x,t)/\partial xF(x,u,t)$, а затем вычислить градиент от скорости w(x,u,t) по u. Алгоритм скоростного градиента в дифференциальной форме имеет вид

(1.3)
$$\dot{u} = -\Gamma \nabla_u w(x, u, t).$$

а в конечной форме — вид

(1.4)
$$u = -\Gamma \nabla_u w(x, u, t),$$

где $\Gamma = \Gamma^{\mathrm{T}} > 0$ – матричный коэффициент усиления.

Первоначально этот метод был ориентирован в основном на решение задач адаптивного управления и идентификации. Было показано [7, 8], как различные известные к тому времени алгоритмы прямого адаптивного управления, идентификации и оценивания состояния можно классифицировать и систематизировать в рамках данного метода, а также намечены пути получения новых алгоритмов с новыми свойствами и более широкими возможностями. В последующие годы метод получил развитие и применение как универсальный подход к решению различных задач синтеза непрерывных динамических систем в математических, физических, инженерных, биологических и других науках. Простота применения метода, а также доступность строгого математического обоснования полученных алгоритмов обусловили его признание в качестве инструмента исследований как у нас в стране, так и за рубежом. Число публикаций, где метод в том или ином виде применяется, постоянно растет и достигает нескольких сот. В течение последнего десятилетия возрос интерес к методу скоростного градиента и как к инструменту построения законов эволюции, позволяющему лучше понять динамику физических, биологических и других систем. В такой интерпретации этот подход известен как "принцип скоростного градиента".

В обзоре обобщены результаты, полученные российскими и зарубежными учеными в таких областях, как: адаптивное управление и идентификация; управление механическими системами и нелинейными генераторами; управление электромеханическими устройствами, такими как асинхронные двигатели и вибрационные машины; управление и синхронизация хаотических систем; управление транспортными средствами, автомобильными двигателями, летательными аппаратами, воздушными и подводными транспортными средствами, спутниками; управление энергией и применение к энергетическим системам; разработка систем управления нелинейными системами общего вида; управление микроминиатюрными гироскопами; управление сетями; управление пространственно-распределенными системами; управление на уровне микромира, управление квантовыми системами.

Первые публикации, связанные с алгоритмами типа скоростного градиента, появились в 1978 г. Общие формулировки были предложены одновременно и независимо Ю.И. Неймарком и А.Л. Фрадковым в январе 1978 г. на 9-й Всесоюзной школе-семинаре по адаптивным системам [9, 10]. Некоторые близкие формулировки для задачи идентификации были предложены А.А. Красовским [11].

Первые результаты по обоснованию устойчивости алгоритмов типа АСГ были опубликованы в книге [12], где рассмотрена система адаптивной стабилизации коллектива автоматов, изменяющая настраиваемые параметры вдоль вектора скорости уменьшения некоторой оценочной функции V. Модель объекта принимается в виде

$$(1.5) \qquad \qquad \dot{x} = f(x, u),$$

где x обозначает вектор состояния объекта, u – вектор адаптивно настраиваемых параметров. Предполагается, что $f(0, \cdot) = 0$ и $f(\cdot, u)$ линейна по u. Целевая функция V(x) определяется так, что $V(x) \ge \varphi(||x||) \ge 0$, где $\varphi(\rho)$ – возрастающая по ρ функция, V(0) = 0. Также предполагается, что для некоторых $u = u^*, \sigma > 0, M > 0$ выполняется неравенство

(1.6)
$$\dot{V}(x(t)) \equiv \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u^*) < -\min\{\sigma V(x), M\}.$$

Показано, что если закон адаптации имеет вид

(1.7)
$$\dot{u} = -\alpha \nabla_u \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u), \quad \alpha > 0,$$

то для всех решений (1.5), (1.7) выполнено $x(t) \to 0, u(t) \to \bar{u}$ при $t \to \infty$ для некоторого \bar{u} .

В [12] также обсуждается случай стохастических возмущений $\xi(t)$, добавленных в правую часть модели объекта (1.5). Во избежание возможной неустойчивости системы в этом случае предлагается "огрубление" (регуляризация) закона адаптации (1.7) путем введения штрафной функции.

Для частного случая аффинной инвариантной во времени управляемой системы $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ и положительно определенной целевой функции V(x) алгоритм скоростного градиента имеет вид $u = -L_g V(x)$, где $L_g V = \partial V/\partial x g$ – производная Ли вдоль векторного поля g. Он впервые был предложен в [13] и его часто называют "алгоритм Джурджевича–Куинна" (Jurdjevic–Quinn control). Результат исследования устойчивости в [13] охватывает вырожденный случай $\dot{V} \leq 0$ и требует некоторых условий обнаруживаемости (так называемые условия "Джурджевича–Куинна", см., например, [14]).

Неаффинный и нестационарный случай был впервые изучен в [7] для дифференциальной формы СГ-алгоритмов и в [15, 16] для конечной формы.

В процессе развития метода были предложены различные типы СГ-алгоритмов в виде набора схем проектирования и условий их применимости. Этот метод нашел применение в работах многих исследователей по всему миру. В [17] отмечено, что СГ-метод "обеспечивает прозрачный компромисс между качеством управления и выбором параметров. Кроме того, в силу простоты синтеза регулятора метод получил успешное применение в ряде других приложений, преимущественно в физике и механике". В [18] СГ-методология расширена на алгоритмы "скоростной разности", что позволило ослабить условия его применимости (условие достижимости).

В последнее десятилетие возрос интерес к СГ методу как эффективному инструменту не только для решения инженерных задач, но и для понимания законов природы, таких как динамика экологических систем или фундаментальные законы физики. В этой интерпретации подход известен как *принцип скоростного градиента*, см. [19–23].

2. Алгоритмы скоростного градиента и условия их применимости 2.1. Условия применимости АСГ

Теоретические основы метода скоростного градиента достаточно полно представлены в [7, 8, 19, 24–30]. Основные сведения об условиях применимости метода приводятся ниже в данном разделе.

Рассматривается модель объекта управления в виде

(2.1)
$$\dot{x}(t) = f(x,\theta,t),$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния объекта; $\theta(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор управления (вектор входа)²; $f(\cdot)$ – непрерывная по x, θ, t вектор-функция, непрерывно диф-ференцируемая по θ .

² Здесь использован некоторый «обобщенный» входной вектор θ . В дальнейшем θ имеет различный смысл в зависимости от характера решаемой задачи, чем вызвано отступление от принятого ранее обозначения. Например, θ может быть собственно управляющим воздействием (сигналом), поступающим на вход объекта, либо, например, вектором настраиваемых параметров регулятора. Во втором случае (2.1) есть уравнения обобщенного настраиваемого объекта.

Рассматриваются допустимые законы (алгоритмы) управления в виде

(2.2)
$$\theta(t) = \Theta\left(\left\{x(s)_{s=0}^t\right\}, \left\{\theta(s)_{s=0}^t\right\}\right)$$

с некоторым оператором Θ таким, что решения системы (2.1), (2.2) существуют и единственны на некотором интервале для любых начальных значений $x(0), \theta(0)$.

Требуется, чтобы выполнялась цель управления, заданная в виде асимптотического соотношения

или неравенства

$$(2.4) Q_t \leqslant \Delta для \text{ всех} t \ge t_*,$$

где $Q_t = Q\left(\left\{x(s)_{s=0}^t\right\}, \left\{\theta(s)_{s=0}^t\right\}\right)$ – заданный *целевой функционал* (*функционал* (*финкционал* (*финкци*)))

Рассматриваются два вида функционалов [25]:

1. локальный целевой функционал

$$Q_t = Q\big(x(t), t\big);$$

2. интегральный целевой функционал

$$Q_t = \int_0^t q(x(s), \theta(s), s) ds,$$

где Q(x,t), $q(x,\theta,t)$ – заданные целевые функции. В конкретных задачах цель управления может содержать некоторые дополнительные условия. Например, для интегрального целевого функционала обычно ставится цель (2.4) и дополнительная цель управления в виде

(2.5)
$$\lim_{t \to \infty} q(x(t), \theta(t), t) = 0.$$

Рассмотрим основные формы *алгоритмов скоростного градиента* и условия их применимости [8, 24, 25].

Пусть закон управления имеет вид³

(2.6)
$$\frac{d\left(\theta + \psi(x,\theta,t)\right)}{dt} = -\Gamma \nabla_{\theta} w(x,\theta,t),$$

³ Из вида закона управления (2.6) может создаться впечатление, что функция $\psi(\cdot)$ должна быть дифференцируемой по t, что не дает возможность использовать разрывные функции $\psi(\cdot)$. Однако решения (2.6) можно понимать как сумму "интегральной" и "сигнальной" составляющих, где $\psi(\cdot)$ добавляется к результату интегрирования правой части (2.6), т.е. ее производная по времени не вычисляется.

где $\Gamma = \Gamma^{T} > 0 - (m \times m)$ -матрица; $w(x, \theta, t)$ – производная целевого функционала в силу системы (2.1) [31]⁴, $\psi(x, \theta, t)$ – некоторая вектор-функция, удовлетворяющая условию псевдоградиентности [32]:

(2.7)
$$\psi(x,\theta,t)^{\mathrm{T}} \nabla_{\theta} w(x,\theta,t) \ge 0.$$

Например, в качестве $\psi(x, \theta, t)$ можно брать

(2.8)
$$\psi(x,\theta,t) = \Gamma_1 \nabla_\theta w(x,\theta,t),$$

(2.9)
$$\psi(x,\theta,t) = \Gamma_2 \operatorname{sign} \left(\nabla_\theta w(x,\theta,t) \right),$$

где $\Gamma_i=\Gamma_i^{\rm T}>0$ – $(m\times m)$ -матрицы (i=1,2) и Γ_2 – диагональная.

Алгоритмы вида (2.6) называются алгоритмами скоростного градиента (ACГ) в конечно-дифференциальной форме.

Известны следующие условия применимости этих алгоритмов к решению задач управления с локальным целевым функционалом [25]. Пусть:

— вектор-функция $\psi(x, \theta, t)$ удовлетворяет (2.7) и для любого $v \in \mathbb{R}^m$ имеется единственное решение $\theta = \kappa(x, v, t)$ уравнения $\theta + \psi(x, \theta, t) = v$;

— функции $f(x, \theta, t)$, $\nabla_x Q(x, t)$, $\psi(x, \theta, t)$, $\nabla_\theta w(x, \theta, t)$ непрерывны и локально ограничены равномерно по $t \ge 0^5$;

— скалярная функция Q(x,t)неотрицательна и удовлетворяет условию роста: $\inf_{t \ge 0} Q(x,t) \to \infty$ при $\|x\| \to \infty;$

— функция $w(x, \theta, t)$ выпукла по θ ;

— условие достижимости: существуют вектор $\theta_* \in \mathbb{R}^m$ и функция $\rho(Q)$ $(\rho(Q)>0$ при Q>0)такие, что для всех x,tимеет место

(2.10)
$$w(x,\theta_*,t) \leqslant -\rho(Q(x,t)).$$

Тогда все траектории системы (2.1), (2.6) с начальными условиями, принадлежащими множеству $\Omega_0 \stackrel{\Delta}{=} \{(x,\theta) : (\mathbf{I}_m - \Gamma^{\dagger}\Gamma)(\theta_0 - \theta_*) = 0\}$, ограничены и $Q(x(t)) \to 0$ при $t \to \infty$, т.е. цель управления достигается для любого $\Delta > 0$. Здесь и далее через Γ^{\dagger} обозначена матрица, псевдообратная к Γ по Муру– Пенроузу, см. [33].

Для доказательства этого утверждения использована функция Ляпунова вида [8]

(2.11)
$$V(x,\theta,t) = Q(x,t) + \frac{1}{2} \|\theta - \theta_* + \psi(x,\theta,t)\|_{\Gamma^{\dagger}}^2.$$

Вычисляя ее производную по времени в силу системы (2.1), (2.6), получим

(2.12)
$$\dot{V}_t = w(x(t), \theta(t), t) - v_t^{\mathrm{T}} \Gamma^{\dagger} \Gamma \nabla_{\theta} w(x(t), \theta(t), t),$$

⁴ Для локального целевого функционала $w(x, \theta, t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + (\nabla_x Q)^{\mathrm{T}} f(x, \theta, t)$, а для интегрального целевого функционала – $w(x, \theta, t) = q(x, \theta, t)$.

⁵ Ограничены в любом ограниченном множестве $\{ \|x\| + \|\theta\| \leq \beta, t \geq 0 \}$.

где $w(x, \theta, t)$ определяется выражением (2.6), $v_t = \theta_t(t) - \theta_* + \psi(x(t), \theta(t), t)$. Согласно условию $v_0 \in \mathcal{L}(\Gamma)$, где $\mathcal{L}(\Gamma)$ – линейная оболочка столбцов матрицы Γ^{\dagger} . По алгоритму (2.6) $\frac{dv_t}{dt} \in \mathcal{L}(\Gamma)$. Следовательно, $v_t \in \mathcal{L}(\Gamma)$ для всех $t \ge 0$, так что $\Gamma^{\dagger}\Gamma v_t = v_t$ ($\Gamma^{\dagger}\Gamma$ является проектором на множество $\mathcal{L}(\Gamma)$). Таким образом, (2.12) принимает вид $\dot{V}_t = w(x(t), \theta(t), t) + v_t^T \nabla_{\theta} w(x(t), \theta(t), t)$. Применяя теперь условия выпуклости и достижимости (2.10), получаем $\dot{V}_t \le -\rho(Q(x(t), t)) \le 0$. Следовательно, $V(x(t), \theta(t), t) \le V(x(0), \theta(0), 0)$, что доказывает ограниченность траекторий системы (2.1), (2.6). Итак, $\int_0^{\infty} \rho(Q(x(t), t)) dt < \infty$, откуда стандартным образом с помощью леммы Барбалата (см., например, [24, 28]) выводится, что $\lim_{t\to\infty} Q(x(t), t) = 0$, что и требовалось доказать.

Для алгоритма (2.6) с интегральным целевым функционалом имеются следующие условия применимости [8, 24, 25]. Пусть:

— для всех $v \in \mathbb{R}^m$ имеется единственное решение $\theta = \kappa(x, v, t)$ уравнения $\theta + \psi(x, \theta, t) = v;$

— функции $f(x, \theta, t), \nabla_{\theta} w(x, \theta, t), \kappa(x, \theta, t)$ локально ограничены;

— функция $q(x, \theta, t)$ равномерно непрерывна по x, t;

— функция $w(x, \theta, t)$ выпукла по θ ;

— имеется вектор $\theta_* \in \mathbb{R}^m$ такой, что

$$(2.13) w(x,\theta_*,t) \leq 0;$$

— выполнено условие роста.

Тогда для любых x(0), $\theta(0)$ в системе (2.1), (2.6) достигается цель управления (2.4), а также цель (2.5) для $\Delta = Q_0 + 0.5 \|\theta_0 - \theta_* - \psi(x_0, \theta_0, 0)\|_{\Gamma^{\dagger}}^2$.

Заметим, что для единственности решения уравнения $\theta + \psi(x, \theta, t) = v$ достаточно выполнения для $\psi(x, \theta, t)$ условия Липшица по θ с константой Липшица L < 1.

Условие роста можно ослабить, заменив на условие того, что ограниченность Q_t решений (2.1), (2.6) означает ограниченность x(t).

Основными из указанных выше условий являются *условия разрешимости* (2.10), (2.13), которые показывают на принципиальную возможность решения поставленной задачи.

Частным случаем (2.6) являются АСГ в дифференциальной форме

(2.14)
$$\frac{d\theta}{dt} = -\Gamma \nabla_{\theta} w(x, \theta, t).$$

Другой важный частный случай (2.6) — АСГ в *конечной форме*, который можно записать в виде

(2.15)
$$\theta = \theta_0 - \gamma \psi(x, \theta, t),$$

где $\gamma > 0$ – параметр алгоритма (множитель шага).

Условия применимости алгоритма (2.15) для функций $\psi(x, \theta, t)$, удовлетворяющих условию *сильной псевдоградиентности*: существуют $\rho > 0, \delta \ge 1$ такие, что

(2.16)
$$\psi(x,\theta,t)\nabla_{\theta}w(x,\theta,t) \ge \rho \left\| \nabla_{\theta}\omega(x,\theta,t) \right\|^{\delta}$$

имеют следующий вид [8, 25, 28].

Пусть имеется локальный целевой функционал и

— уравнение (2.15) разрешимо относительно θ ;

— функция $w(x, \theta, t)$ выпукла по θ ;

— имеется вектор $\theta_* = \theta_*(x,t)$, удовлетворяющий условию (2.10) и, при некоторых $\rho > 0, \delta \ge 1$, условию

(2.17)
$$\rho\gamma(x,t) \left\| \nabla_{\theta} w(x,\theta,t) \right\|^{\delta-1} \ge \left\| \theta_0 - \theta_*(x,t) \right\|;$$

— выполнено (2.16).

Тогда в системе (2.6), (2.15) обеспечивается выполнение цели управления (2.4).

Пусть имеется интегральный целевой функционал и

— уравнение (2.15) разрешимо относительно θ ,

— функция $w(x, \theta, t)$ выпукла по θ ,

— удовлетворяется условие (2.16),

тогда в системе (2.6), (2.15) обеспечивается выполнение цели управления (2.5).

Негладкие обобщения АСГ предложены в [31, 34]. На основе понятия дифференцирования по направлению по Адамару построены алгоритмы скоростного субградиента⁶ в дифференциальной и конечной формах. Установлены условия, обеспечивающие достижение цели управления (сходимость целевой функции к нулю). Кроме того, получены условия, при которых цель управления достигается за конечное время с использованием негладких или разрывных алгоритмов СГ. Теоретические результаты проиллюстрированы в [31] на примере негладкого энергетического управления для неаффинной по управлению маятниковой системы. В [34] АСГ применен к почти глобальной стабилизации интегратора Брокетта — неголономной системы, ставшей популярным тестовым примером для негладких и разрывных алгоритмов. Доказано, что разработанный закон управления стабилизирует интегратор Брокетта для любой начальной точки, не лежащей на оси x₃. Кроме того, показано, что алгоритм скоростного субградиента обеспечивает стабилизацию при сколь угодно малом уровне управления. Важной особенностью предлагаемого управления является то, что оно непрерывно на траекториях замкнутой системы. Негладкие обобщения АСГ в конечно-дифференциальной форме предложены в [35].

⁶ Вектор $a \in \mathbb{R}^n$ такой, что для выпуклой функции f(x), $(x \in \mathbb{R}^n)$ для всех $y \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство $f(x+y) \ge f(x) + a^T y$, называется субградиентом функции f(x) в точке x и обозначается через $\partial f(x)$ [32]. Для дифференцируемой в точке x функции имеет место $\nabla f(x) \equiv \partial f(x)$.

Идентифицирующие свойства алгоритмов скоростного градиента. Вектор $\theta_* \in \mathbb{R}^m$ в (2.10) можно считать некоторым «идеальным» входным вектором, так как при $\theta = \theta_*$ выполнены целевые условия. С прикладной точки зрения представляет интерес вопрос о сходимости $\theta \kappa \theta_*$, т.е. вопрос о достижении в системе (2.1), (2.2) дополнительной цели управления

(2.18)
$$\lim_{t \to \infty} \theta(t) = \theta_*.$$

Этот вопрос возникает в первую очередь при решении задачи идентификации, когда θ_* является вектором «истинных» значений параметров объекта. Обобщая, алгоритм (2.2) назовем идентифицирующим алгоритмом, если в системе (2.1), (2.2) достигается цель управления (2.18) [24].

Как известно [3, 24, 36], идентифицируемость системы зависит и от вида входного процесса. При достаточном «разнообразии» внешнего воздействия цель (2.18) может быть достигнута. Для точных формулировок используется следующее определение [8, 24].

Определение 1. Матричная функция $\Phi(t)$ размера $m \times N$, ограниченная для всех t > 0, называется интегрально-невырожденной, если существуют $t_0 > 0$, $\alpha_0 > 0$, L > 0 такие, что для всех $t > t_0$ выполнено

(2.19)
$$\int_{t}^{t+L} \Phi(s)\Phi(s)^{\mathrm{T}} ds \ge \alpha_0 \mathbf{I}_m.$$

Это условие показывает, что столбцы матрицы $\Phi(t)$ не стремятся все при $t \to \infty$ ни к какой гиперплоскости пространства \mathbb{R}^N .

Для дифференциальной формы АСГ (2.14) известно следующее утверждение. Пусть:

— функции $f(x, \theta, t)$, $\nabla_x Q(x, t)$, $\psi(x, \theta, t)$, $\nabla_\theta w(x, \theta, t)$ локально ограничены; выполнено условие роста; функция $w(x, \theta, t)$ выпукла по θ ; существуют вектор $\theta_* \in \mathbb{R}^m$ и функция $\rho(Q)$ ($\rho(Q) > 0$ при Q > 0) такие, что для всех x, t имеет место $w(x, \theta_*, t) \leq -\rho(Q)$, и, кроме того,

— $\inf_x Q(x,t)$ достигается в единственной точке $x_*(t)$, где функция $x_*(t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) $\dot{x}(t) = f(x, \theta, t)$;

— функции
$$\frac{\partial f(x,\theta,t)}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 f(x,\theta,t)}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 f(x,\theta,t)}{\partial x \partial \theta}, \nabla_x Q(x,t)$$
 непрерывны;

— функция $\Phi(t) \stackrel{\Delta}{=} \frac{\partial f}{\partial \theta}(x, \theta, t)$ – интегрально-невырожденная.

Тогда АСГ в дифференциальной форме (2.14) является идентифицирующим алгоритмом для всех $x(t_0)$, $\theta(t_0)$ и решение $\operatorname{col}\{x_*(t), \theta_*\}$ системы (2.1), (2.14) асимптотически устойчиво в целом равномерно по ограниченному множеству начальных условий $x(t_0)$, $\theta(t_0)$ и моменту времени t_0 [24].

Практически указанные условия сводятся к требованию, чтобы входной («возбуждающий») сигнал содержал не менее *n* гармоник с различными частотами. Это требование называют также *условием «неисчезающего возбужсдения»* или *«постоянного возбужсдения»*, подробнее см. [25, 28]. Робастность алгоритмов скоростного градиента. Свойства грубости и робастности АСГ подробно исследованы в [25, 28]. В частности, показано [25, теорема 2.10], что АСГ в конечной форме (2.15) робастны по отношению к аддитивным возмущениям: при достаточно малом уровне последних сохраняется ограниченность траекторий системы, а целевое условие (2.4) оказывается возможным обеспечить при том же Δ за счет увеличения коэффициента усиления γ в алгоритме управления (2.15). Базовые алгоритмы АСГ в дифференциальной форме (2.6) обладают робастностью только при существенных дополнительных предположениях, одним из которых является *асимптотическая устойчивость* системы (2.1), (2.6), обеспечивающая устойчивость при постоянно действующих возмущениях [25, теорема 2.12].

Для важных на практике ситуаций указанных условий недостаточно, поэтому рекомендуется применять различные способы *огрубления* (обеспечения грубости) АСГ. Среди них известно использование параметрической обратной связи в АСГ, т.е. переход от (2.6) к алгоритмам вида

(2.20)
$$\frac{d}{dt}(\theta + \psi(x,\theta,t)) = -\Gamma\Big(\varkappa \nabla_{\theta} w(x,\theta,t) + \zeta\big(\theta + \psi(x,\theta,t)\big)\Big),$$

где функция $\psi(\cdot),$ как и выше, удовлетворяет условию псевдоградиентности (2.7), $\zeta(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – функция обратной связи, $\varkappa>0$ – числовой коэффициент.

Еще одним способом огрубления базовых АСГ служит введение в них *зоны* нечувствительности по целевой функции переходом к алгоритмам вида

(2.21)
$$\dot{\theta} = \begin{cases} -\Gamma \nabla_{\theta} w(x, \theta, t) & \text{при } Q(x, t) \ge \Delta, \\ 0 & \text{при } Q(x, t) < \Delta. \end{cases}$$

Робастность адаптивных систем управления на основе АСГ изучается также в [37], где для алгоритма адаптации предложен, совместно с зоной нечувствителности, специальный "барьерный" вид параметрической обратной связи.

2.2. Оптимальность и пассивность алгоритмов скоростного градиента

АСГ обладают еще одним важным свойством, которое кратко можно сформулировать так: для всякого АСГ в конечной форме существует функционал, по отношению к которому АСГ является оптимальным, т.е. АСГ является решением обратной задачи оптимального управления (*inverse optimal control*) [38]. Впервые обратную задачу оптимального управления рассматривал Р. Калман в линейно-квадратичном варианте [39]. Случай аффинных по управлению систем был рассмотрен в ряде работ [14, 40–42], см. также дискуссию в [38]. Пусть модель управляемого объекта аффинна по управлению:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

где f(x), G(x) – гладкие функции. Алгоритм скоростного градиента, синтезированный по некоторой целевой функции $V(x) \ge 0$, можно представить в виде

(2.23)
$$u = -\gamma(x)g^{\mathrm{T}}\nabla V(x) = -\gamma(x)(L_g V)^{\mathrm{T}},$$

где $\gamma(x) = \gamma(x)^{\mathrm{T}} \ge 0$ – заданная матричная функция. Как известно, система (2.22), (2.23) асимптотически устойчива, если при $x \ne 0$ выполняются неравенства V(x) > 0 и L(x) > 0, где

(2.24)
$$L(x) = -\nabla V(x) \left(F(x) - 0.5g\gamma(x)g^{\mathrm{T}}\nabla V(x) \right) = -\dot{V}.$$

Как отмечено в [14, 40–42], при этих условиях система (2.22), (2.23) оптимальна по отношению к функционалу потерь

(2.25)
$$J = \int_{0}^{\infty} (L(x) + u^{\mathrm{T}} \gamma(x)^{-1} u) dt$$

При этом целевая функция V(x) оказывается функцией Беллмана для оптимизационной задачи, причем для ее нахождения нет необходимости в трудоемком решении уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана. Платой за простоту является зависимость функционала потерь от искомого решения. В работах А.А. Красовского [40, 41] рассмотрен также случай, когда слагаемое с управлением в функционале потерь задается не квадратичной формой, а формой порядка p > 1. В этом случае инверсно-оптимальное управление принимает вид

(2.26)
$$u = -\gamma(x)|g^{\mathrm{T}}\nabla V(x)|^{1/(p-1)}\mathrm{sign}(g^{\mathrm{T}}\nabla V(x)).$$

Имеются версии сформулированных результатов для адаптивного [43, 44] и минимаксного [45] инверсно-оптимального управления, однако в них связь с АСГ не упоминается.

С оптимальностью АСГ тесно связана его пассивность. Пусть $y = g^{T} \nabla V(x)$ — выход объекта (2.22). Введем новый вход объекта \bar{u} с помощью обратной связи $u = -\gamma(x)g^{T} \nabla V(x) + \bar{u}$. Тогда при выполнении условия достижимости для АСГ в конечной форме справедливо неравенство

(2.27)
$$\dot{V} - \gamma(x)g^{\mathrm{T}}\nabla V(x)\bar{u} \leqslant 0,$$

что как раз и означает пассивность объекта (2.22) от входа \bar{u} к выходу $y = g^{\mathrm{T}} \nabla V(x)$. Таким образом, АСГ решает задачу пассификации — преобразование системы к пассивной при помощи обратной связи.

Локально-оптимальные алгоритмы непрерывного и дискретного времени. Близким к методу СГ является принцип оптимального демпфирования переходных процессов В.И. Зубова [46], предписывающий выбирать управление из условия

(2.28)

где \dot{V} – производная в силу системы (2.22) от заданной функции $V(x,t) \ge 0$, а $U \subset \mathbb{R}^m$ – заданное множество допустимых значений управления. Нетрудно видеть, что для аффинного объекта (2.22) функция

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + L_f V + L_g V u$$

линейна по управлению. Поэтому, если множество Uвыпукло и $0 \in U,$ то оптимальная по демпфированию обратная связь имеет вид

(2.29)
$$u = -\Psi_U(y),$$

где $y = \nabla u \dot{V}$, а вектор-функция $\Psi_U(y)$ составляет острый угол со скоростным градиентом: $\Psi_U(y)^{\mathrm{T}} y > 0$ при $y \neq 0$. Оптимальное по демпфированию управление является локально-оптимальным для задачи (2.22), (2.25), если в качестве демпфируемой функции V(x,t) в (2.28) выбрана функция Беллмана задачи.

Для систем дискретного времени близкий подход рассмотрен в [47, 48] в рамках локально-оптимального управления. Многошаговый процесс управления динамической системой назван авторами локально-оптимальным в смысле критерия V, если на каждом шаге или каждых τ шагах этого процесса достигается наибольшее убывание величины V.

В [47] рассматривается задача управления линейным дискретным динамическим объектом

(2.30)
$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad y_k = L^{\mathrm{T}}x_k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u_k \in \mathbb{R}^m$ – управление, $y_k \in \mathbb{R}^l$ – наблюдаемый выход. Вводится (локальный) критерий оптимальности

(2.31)
$$V(x) = x^{\mathrm{T}} C x, \quad C = C^{\mathrm{T}} > 0.$$

По смыслу метода соответствующее локально-оптимальное управление u_k^\ast определяется выражением

(2.32)
$$u_k^* = \arg\min_{u_k} \Delta V(x_k, u_k),$$

где $\Delta V(x_k, u_k) = V(Ax_k + Bu_k) - V(x_k)$. В предположении, что весь вектор состояния x_k непосредственно измеряется ($L = \text{diag}\{1, \ldots, 1\}$), показано, что при $B^{\mathrm{T}}CB$ управление (2.32) в форме обратной связи имеет вид

(2.33)
$$u_k^* = -(B^{\mathrm{T}}CB)^{\dagger}B^{\mathrm{T}}CAx_k + \tilde{u},$$

где \tilde{u} удовлетворяет условию $B^{\mathrm{T}}CB\tilde{u} = 0$. При таком управлении $\Delta V(x_k, u_k^*) = -x_k^{\mathrm{T}}Qx_k$, где матрица Q находится из выражения

(2.34)
$$Q = C - A^{\mathrm{T}}CA + A^{\mathrm{T}}CB(B^{\mathrm{T}}CB)^{\dagger}B^{\mathrm{T}}CA.$$

Если, кроме того, $\det B^{\mathrm{T}}CB \neq 0$, управление (2.32) единственно:

(2.35)
$$u_k^* = \theta_*^{\mathrm{T}} x_k, \quad \theta_*^{\mathrm{T}} = -(B^{\mathrm{T}} C B)^{-1} B^{\mathrm{T}} C A.$$

3. Адаптивное управление и идентификация на основе метода СГ

В [7, 49] рассматривается схема синтеза алгоритмов адаптивного управления, состоящая в организации движения в пространстве настраиваемых параметров в направлении градиента от скорости изменения оценочного функционала. В эту схему укладывается ряд известных алгоритмов адаптации и идентификации, синтезированных прямым методом Ляпунова [8, 25]. Получены общие условия устойчивости таких систем. Предлагаются способы регуляризации алгоритмов, придающие системе свойства грубости по отношению к действию на объект неконтролируемых возмущений и к дискретности алгоритма адаптации. Приводятся примеры применения рассмотренной схемы для синтеза алгоритмов адаптации в ряде задач адаптивного управления динамическими объектами.

3.1. Адаптивное управление с эталонными моделями

Беспоисковые самонастраивающиеся системы с эталонными моделями. Беспоисковые самонастраивающиеся системы с эталонными моделями (БСНС с ЭМ, англ. — *Model Reference Adaptive Control*, MRAC) для решения задачи получены в серии фундаментальных работ по теории адаптивного управления, см., например, [3, 24, 50–52], где объект и эталонная модель приняты в виде

(3.1)
$$\dot{x} = Ax + Bu - \text{объект управления,} \\ \dot{x}_M = A_M x_M + B_M r(t) - \text{эталонная модель.}$$

В (3.1) матрицы A, B неизвестны, матрицы A_M, B_M эталонной модели заданы.

Ставится задача обеспечения асимптотической сходимости вектора ошибок $e(t) = x(t) - x_M(t)$ к нулю. Для простоты изложения примем здесь, что можно произвольно изменять матрицы уравнений состояния системы, добавляя к неизвестным матрицам A и B модели объекта (3.1) матрицы тех же размеров ΔA и ΔB соответственно. Уравнения обобщенного настраиваемого объекта (OHO) тогда принимают вид

(3.2)
$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)r(t).$$

Таким образом, вектор настраиваемых параметров $\theta \in \mathbb{R}^N$ имеет вид $\theta =$ = col ($\Delta A, \Delta B$), где N = n(n+m).

Для синтеза алгоритма адаптации СГ-методом выберем локальный квадратичный функционал $Q_t = e^T P e$, где $e(t) = x(t) - x_M(t)$ – вектор ошибки, $P = P^T > 0$ – положительно определенная $(n \times n)$ -матрица, выбор которой будет уточнен ниже, и вычислим функцию $w(x, \theta, t) = \dot{Q}_t$. Находя производную по времени от Q_t в силу системы (3.1), (3.2), получим

$$w(x,\theta,t) = e^{\mathrm{T}}H\big((A+\Delta A)x + (B+\Delta B)r(t) - A_M x_M - B_M r(t)\big).$$

Далее, дифференцированием по настраиваемым параметрам (с учетом правил дифференцирования сложной функции и соотношения $\nabla f(z) = (\partial f / \partial z)^{\mathrm{T}}$) получим

(3.3)
$$\nabla_{\Delta A} w(x,\theta,t) = Pe(t)x(t)^{\mathrm{T}},$$
$$\nabla_{\Delta B} w(x,\theta,t) = Pe(t)r(t)^{\mathrm{T}}.$$

Выбирая, для простот
ы $\Gamma=\gamma I_N$ (где $\gamma>0,$ I_N – единичная матрица) получим алгоритм адаптации

(3.4)
$$\frac{d\Delta A}{dt} = -\gamma P e(t) x(t)^{\mathrm{T}}, \qquad \frac{d\Delta B}{dt} = -\gamma P e(t) r(t).$$

Как следует из условия достижимости (2.10), матрица $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ должна удовлетворять уравнению Ляпунова $PA_M + A_M^{\mathrm{T}}P = -G$ для некоторой матрицы $G = G^{\mathrm{T}} > 0$ [8, 25].

Для предотвращения неограниченного роста коэффициентов регулятора при действии возмущений рекомендуется использовать регуляризованные алгоритмы адаптации вида [8, 24, 25, 28]

(3.5)
$$\frac{d}{dt}\Delta A(t) = -\gamma \left(Pe(t)x(t)^{\mathrm{T}} + \alpha \left(\Delta A(t) - \Delta \widehat{A} \right) \right),$$
$$\frac{d}{dt}\Delta B(t) = -\gamma \left(Pe(t)r(t)^{\mathrm{T}} + \alpha \left(\Delta B(t) - \Delta \widehat{B} \right) \right),$$

где $\Delta \widehat{A}$, $\Delta \widehat{B}$ – некоторые априорные оценки настраиваемых параметров, скалярные величины $\gamma > 0$ – коэффициент усиления алгоритма, $\alpha > 0$ – коэффициент параметрической обратной связи, значения которых выбираются при синтезе.

Адаптивное управление с неявной эталонной моделью. Метод неявной эталонной модели (НЭМ) был разработан в [53], применен для адаптивной настройки ПИД-регуляторов в [54] и распространен на задачи синхронизации в [55]. Законы адаптивного управления с НЭМ выводятся с помощью метода СГ с локальным целевым функционалом $Q = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Px$, где $x \in \mathbb{R}^n$ обозначает вектор состояния объекта, $(n \times n)$ -матрица P положительно определена, $P = P^{\mathrm{T}} > 0$. Настраиваемый закон управления в "основном контуре" принимается в виде u = K(t)y, где u – управляющее воздействие, y – измеряемый выход объекта, K = K(t) – коэффициенты усиления регулятора, скорректированные с помощью алгоритма адаптации

$$\dot{K}(t) = -\gamma \delta(t) y(t), \quad \delta(t) = \sum_{i=1}^{l} g_i y_i(t), \quad u(t) = \sum_{i=1}^{l} \theta_i(t) y_i(t),$$

в котором *l* обозначает число выходов объекта, используемых для формирования управления и настройки коэффициентов регулятора. Адаптивная стабилизация линейных стационарных (инвариантных по времени) объектов с одним входом и выходом. Пусть линейный стационарный объект с одним входом и выходом представлен в форме "входа-выход"

(3.6)
$$A(p)y(t) = B(p)u(t), \quad t \ge 0,$$

где u, y – скалярные входная и выходная переменные, $A(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0, B(p) = b_m p^m + \cdots + b_0$ – многочлены от оператора дифференцирования по времени $p \equiv d/dt$. Определим k как относительную степень системы (3.6), k = n - m > 0. Параметры объекта (3.6) a_i, b_j ($i = 0, \ldots, n - 1, j = 1, \ldots, m$) считаются неизвестными. Желаемая динамика системы с обратной связью выражается в виде некоторого "эталонного" дифференциального уравнения. В классических БСНС с ЭМ это уравнение явно реализовано (интегрируется) в адаптивном регуляторе, см. [3, 50–52]. Чтобы описать адаптивные регуляторы с НЭМ, вводится сигнал ошибки адаптации $\sigma(t)$ как

(3.7)
$$\sigma(t) = G(p)y(t),$$

где $G(p) = p^l + g_{l-1}p^{l-1} + \dots + g_0$ – заданный гурвицев (устойчивый) многочлен от оператора дифференцирования $p \equiv d/dt$. Коэффициенты g_i – расчетные параметры; они выбираются на основе желаемой динамики замкнутой системы. Степень l полинома G(p) определяется ниже. Предполагая, что закон адаптации обеспечивает стремление $\sigma(t)$ к нулю, заметим, что при $\sigma \equiv 0$ выход y(t) удовлетворяет следующему "эталонному уравнению":

$$(3.8) G(p)y(t) = 0.$$

Это уравнение описывает эталонную модель, но эта модель не реализована в адаптивном регуляторе в виде некой динамической подсистемы, а введена неявно через свои параметры g_i (i = 0, 1, ..., l - 1). Следовательно, ее имеет смысл назвать неявной эталонной моделью (НЭМ).

Выберем закон управления с обратной связью в следующем виде:

(3.9)
$$u(t) = \sum_{i=0}^{l} k_i(t) \left(p^i y(t) \right),$$

где $k_i(t)$, $i = 0, \ldots, l$ – настраиваемые параметры регулятора. Для рассматриваемого случая свойство гиперминимальнофазовости [24, 25, 28, 53, 55, 56] приводит к следующему закону адаптации, см. [53]:

(3.10)
$$\dot{k}_i(t) = -\gamma \sigma(t) p^i y(t), \quad k_i(0) = k_i^0,$$

где $\gamma > 0$ – коэффициент адаптации, k_i^0 задаются как начальные значения коэффициентов усиления регулятора, $i = 0, \ldots, l$. Вводя вектор-строку $G = [g_0, g_1, \ldots, 1] \in \mathbb{R}^{l+1}$ и функцию преобразования W(s) объекта W(s) из входа u в вектор выхода $[y, \dot{y}, \ldots y^{(l)}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{l+1}$ как $W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} [1, s, \ldots, s^l]^{\mathrm{T}}$,

 $s \in \mathbb{C}$ в силу теоремы пассификации [53] относительно передаточной функции GW(s), легко вывести следующие условия устойчивости адаптивного регулятора (3.9), (3.10):

1) полином B(s) гурвицев и $b_0 > 0;$

2) l = k - 1, где k = n - m – относительная степень модели объекта (3.6). Алгоритм (3.10) обычно обеспечивает затухание $\sigma(t)$ существенно быстрее, чем переходные процессы в замкнутом контуре. В результате изменение коэффициента усиления (3.9) регулятора прекращается, и выход объекта (3.6) y(t)подчиняется НЭМ (3.8).

Чтобы избежать неограниченного роста коэффициентов передачи регулятора (3.9) при наличии внешних возмущений и ошибок измерения, можно использовать следующую α-модификацию (3.10), см. [55, 57]:

(3.11)
$$\dot{k}_i(t) = -\gamma \sigma(t) p^i y(t) - \alpha \left(k_i(t) - k_i^0 \right), \quad k_i^0 = k_i(0),$$

где введен коэффициент параметрической обратной связи $\alpha > 0$.

Адаптивные системы слежения с НЭМ. Адаптивный закон управления (3.9), (3.11) непосредственно расширены до решения задачи слежения с желаемой динамикой замкнутой системы, см. [54]. Для этого введем задающее воздействие r(t) и определим сигнал ошибки адаптации $\sigma(t)$ в виде

(3.12)
$$\sigma(t) = G(p)y(t) - D(p)r(t),$$

где многочлен G(p) определен выше, а операторный многочлен D(p) имеет вид $D(p) = d_q p^q + \cdots + d_1 p + d_0$. Сигнал $\sigma(t)$ можно трактовать как невязку в уравнении

(3.13)
$$G(p)y(t) = D(p)r(t),$$

рассматривая (3.13) как НЭМ в задаче слежения.

По аналогии с (3.9) возьмем управляющее воздействие в виде

(3.14)
$$u(t) = k_r(t) (D(p)r(t)) + \sum_{i=0}^l k_i(t) (p^i y(t)),$$

где $k_r(t), k_i(t)$ (i = 0, ..., l) – настраиваемые параметры. Закон адаптации имеет вид

(3.15)
$$\dot{k}_{r}(t) = \gamma \sigma(t) D(p) r(t) - \alpha \left(k_{r}(t) - k_{r}^{0}\right), \quad k_{r}^{0} = k_{r}(0), \\ \dot{k}_{i}(t) = -\gamma \sigma(t) p^{i} y(t) - \alpha \left(k_{i}(t) - k_{i}^{0}\right), \quad k_{i}^{0} = k_{i}(0),$$

где $\gamma > 0$, $\alpha \ge 0$ – выбираемые при синтезе параметры; k_r^0 , k_i^0 – это "угаданные" начальные значения коэффициентов передачи регулятора, $i = 0, \ldots, l$. Стоит отметить, что как степень q полинома D(p), так и его коэффициенты могут быть выбраны разработчиком произвольно. Сигнально-параметрические адаптивные регуляторы с НЭМ. Пусть поставлена задача стабилизации $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ для объекта

(3.16)
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t),$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^l, A, B$ – неизвестные матрицы соответствующих размеров.

Следуя [55, 58], введем вспомогательную цель в виде обеспечения движения в скользящем режиме вдоль заданной поверхности, т.е. выполнения $\sigma(t) \equiv 0$, где $\sigma(t) = Gy$, G – заданная ($m \times l$)-матрица.

Воспользуемся следующим законом управления:

(3.17)
$$u = -\gamma \operatorname{sign} \sigma, \quad \sigma = Gy,$$

где $\gamma > 0$ – параметр регулятора. Можно доказать, что для системы (3.16), (3.17) поставленная цель управления может быть достигнута, если существуют матрица $P = P^{T} > 0$ и вектор K_{*} такие, что $PA_{*} + A_{*}^{T}P < 0$, PB = GC, $A_{*} = A + BK^{T}C$. Как следует из теоремы о пассификации, указанные условия выполняются, если и только если: передаточная функция GW(s) – гиперминимальнофазовая (где $W(s) = C(\lambda I_{n} - A)^{-1}B$); знак GCB известен (считаем, что он положительный). При этих условиях цель $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ достигается при достаточно большом γ (относительно начальных условий и фактических параметров объекта).

Чтобы избежать зависимости устойчивости замкнутой системы от начальных условий и параметров объекта, вместо (3.17) можно использовать следующий "*сигнально-параметрический*", или "*комбинированный*", закон управления:

(3.18)
$$\begin{aligned} u &= K^{\mathrm{T}}(t)y(t) - \gamma \operatorname{sign} \sigma(y), \quad \sigma(y) = Gy(t), \\ \dot{K}(t) &= -\sigma(y)\Gamma y(t), \end{aligned}$$

где $\Gamma=\Gamma^{\rm T}>0,\;\gamma>0$ — матричный и скалярный коэффициенты передачи алгоритма адаптации.

3.2. Идентификация параметров объекта

Пусть динамика объекта с неопределенными параметрами описывается уравнением

(3.19)
$$\dot{x}(t) = A_* x(t) + B_* u(t)$$

с неизвестными постоянными матрицами A_* , B_* и измеряемыми векторами состояния и входов $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$. Для идентификации параметров вводится следующая настраиваемая модель [59]:

(3.20)
$$\dot{x}_M(t) = Gx_M(t) + (A(t) - G)x(t) + B(t)u(t)$$

19

с вектором состояния $x_M(t) \in \mathbb{R}^n$ и матрицами A(t), B(t), которые служат оценками матриц A_* , B_* . В этом случае вектор θ определяется как $\theta(t) =$ $= \operatorname{col}(A, B)$. Вводятся сигнал ошибки $e(t) = x_M(t) - x(t)$ и целевая функция

(3.21)
$$Q_t = 1/2e(t)^{\mathrm{T}} P e(t), \quad \text{где} \quad P = P^{\mathrm{T}} > 0.$$

Следуя методу СГ, получим

(3.22)
$$\omega = \dot{Q}_t = 1/2e(t)^{\mathrm{T}} P \big(Ge(t) + (A - A_*)x(t) + (B - B_*)u(t) \big),$$

(3.23) $\nabla_A \omega = Pe(t)x(t)^{\mathrm{T}}, \quad \nabla_B \omega = Pe(t)u(t)^{\mathrm{T}},$

(3.24)
$$\begin{cases} \dot{A}(t) = -\gamma Pex^{\mathrm{T}}, \quad \gamma > 0, \\ \dot{B}(t) = -\gamma Peu^{\mathrm{T}}. \end{cases}$$

4. Общие методы нелинейного управления на основе СГ

Задачи стабилизации заданного подмножества пространства состояний для пассивных нелинейных систем рассмотрены в [60]. Рассмотрим аффинные по управлению системы вида

(4.1)
$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x)u,$$

где $x \in X \in \mathbb{R}^n$, $u \in U \in \mathbb{R}^m$ – состояние и управляющий вход соответственно. Отображения f, q – гладкие векторные функции подходящей размерности.

Введем вспомогательные выходы системы (4.1)

(4.2)
$$y = h_1(x) = \lfloor L_g V(x) \rfloor,$$

$$(4.3) z = h_2(x),$$

где $V(x) = 0.5 ||h_2(x)||^2$, а $h_2: X \to \mathbb{R}^k$ – гладкая вектор-функция.

Предположим, что желаемое аттрактивное множество можно описать как прообраз нулевого значения некоторой гладкой неотрицательной функции V(x) и что эта функция не увеличивается вдоль решений свободной системы. Задача состоит в определении регулятора в обратной связи по состоянию, обеспечивающего свойство

(4.4)
$$V(x(t)) \to 0$$
 (или $h_2(x(t)) \to 0$) при $t \to \infty$,

где $x = x(t, x_0)$ является решением уравнения замкнутой системы с начальными условиями x_0 , принадлежащими к некоторому предписанному множеству \mathscr{D} . Сделаны предположения, что:

(А1) функция V(x) – правильная на пространстве состояний X, т.е. для любого $c \ge 0$ множество $\{x \in X : V(x) \le c\}$ компактно;

(A2) свободная система $\dot{x} = f(x)$ такова, что гладкая функция V(x) не возрастает вдоль ее решений: $L_f V(x) \leq 0, \forall x \in X;$

(АЗ) на множестве $\mathscr{R} = \{x \in X : L_g V(x) = 0\}$ функция $h_2(x)$ инвариантна, т.е. выполнено тождество $L_f h_2(x) \equiv 0, \forall x \in \mathscr{R}.$

Для решения задачи стабилизации (4.1), (4.3), (4.4) в [60] получены вытекающие из СГ-метода достаточные условия, гарантирующие асимптотическую стабилизацию целевого множества $V_0 = \{x \in X : V(x) = 0\}$ с помощью управления с обратной связью по состоянию

(4.5)
$$u = -\Psi\left(\frac{\partial}{\partial u}\dot{V}(x)\right),$$

где $\dot{V}(x)$ – полная производная от V(x) вдоль решения (4.1), а $\Psi(y): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – произвольная гладкая вектор-функция, образующая острый угол с y, т.е. $\Psi(y)^{\mathrm{T}}y > 0$ для всех $y \neq 0$ и $\Psi(0) = 0$.

Подход к анализу и синтезу систем с обратной связью на базе моделей нелинейных систем и непериодических сигналов, генерируемых нелинейными системами, представлен в [61]. Предлагаемый подход основан на показателе возбудимости – нелинейном аналоге амплитудно-частотной характеристики линейной системы. Его можно использовать для анализа устойчивости полностью нелинейных каскадных систем аналогично анализу абсолютной устойчивости систем Лурье. Описаны СГ алгоритмы создания резонанса обратной связи в нелинейных генераторах с несколькими степенями свободы. Для строго диссипативных систем установлены границы изменения энергии и возбудимости по обратной связи.

В [62] известные условия устойчивости сингулярно возмущенных систем расширены, чтобы охватить случай систем управления энергией, синтезированных на основе метода СГ. В частности, таким способом попучены решения задач управления энергией на основе СГ сингулярно возмущенных гамильтоновых систем. Приложение к управляемой синхронизации двух связанных маятников представлено для двух случаев появления в системе малого параметра: малой инерции динамического связующего звена и малой инерции крутящего момента. В обоих случаях проводится сравнение оценок теоретической асимптотической точности с результатами компьютерного моделирования.

Метод управления неполноприводными (*underactuated*) нелинейными системами, основанный на введении искусственных инвариантов и использовании СГ алгоритмов, предложен в [63]. В работе сформулировано и обосновано общее положение о достижении цели управления. Применение предложенного подхода проиллюстрировано на примере стабилизации колебаний тележки-маятника вокруг верхнего положения равновесия.

В [64] рассмотрена задача управления нестационарной динамической системой с нефиксированным временем завершения и терминальным функционалом при наличии неопределенных параметров. Предлагается алгоритм построения управления, использующий элементы необходимых условий оптимальности и принцип СГ, обеспечивающий гарантированное значение функционала качества. Приведены результаты расчета управления и значений функционала для тестовых параметров модели.

Возможности исследования нелинейных физических систем с помощью малой обратной связи обсуждаются в [65]. Установлены аналитические грани-

цы возможного изменения энергии системы по обратной связи. Показано, что для нелинейного осциллятора с одной степенью свободы изменение энергии за счет обратной связи может достигать предела, достижимого для линейного осциллятора за счет гармонического (без обратной связи) воздействия. Такое явление называется резонансом с обратной связью (feedback resonance) или авторезонансом. Описан метод создания резонанса с обратной связью в нелинейных осцилляторах с несколькими степенями свободы на основе АСГ. Пример выхода из потенциальной ямы иллюстрируется результатами компьютерного моделирования.

Задача стабилизации уровня энергии для гамильтоновых систем с одной степенью свободы при наличии ограниченных входных возмущений рассмотрена в [66]. Показано, что для произвольных равномерно ограниченных возмущений с достаточно малой границей СГ закон управления обеспечивает предельную ограниченность энергетической погрешности. В качестве вспомогательного результата получены новые достаточные условия предельной ограниченности функции Ляпунова вдоль траекторий нелинейной нестационарной динамической системы.

5. Управление энергией. Управление нелинейными колебаниями

В развитии метода скоростного градиента в 1990-х годах можно выделить две важные вехи. Во-первых, удалось систематизировать на основе АСГ [67] методы адаптивного управления механическими системами, в том числе роботами-манипуляторами, в основе которых лежит пассивность [68–71].

Во-вторых, было предложено строить алгоритмы управления возбуждением колебаний гамильтоновых систем на основе скоростного градиента с использованием целевых функций, зависящих от гамильтониана (энергии) системы. В частности, для управляемой гамильтоновой системы с гамильтонианом $H(q,p) = H_0(q,p) + H_1(q,p)u$, где $q \in \mathbb{R}^n$ – вектор обобщенных координат, $p \in \mathbb{R}^n$ – вектор обобщенных импульсов, u – скалярное управляющее воздействие, $H_0(q,p)$ – гамильтониан (энергия) свободной системы, $H_1(q,p)u$ – гамильтониан взаимодействия, ставится цель управления

(5.1)
$$H_0(q(t), p(t)) \to H^* \text{ при } t \to \infty,$$

где H^* – желаемое значение энергии системы. Выбирая целевую функцию в виде $Q(x) = 1/2(H_0(x) - H^*)^2$, получаем АСГ в виде

(5.2)
$$u = -\gamma (H_0 - H^*)p,$$

где $\gamma > 0$ – коэффициент усиления [72–75]. Полученные результаты были подытожены в книгах [27, 28, 76] и стали основой для синтеза алгоритмов управления в многочисленных задачах управления колебаниями в системах и сетях. В [67, 74, 75] эти методы были распространены на системы более общие, чем гамильтоновы. Были получены условия применимости метода СГ для управления инвариантами широкого класса нелинейных систем.

Введено понятие "раскачивающего управления", обеспечивающего достижение произвольно большого уровня целевой функции при помощи произвольно малого уровня управления. Установлено существование раскачивающего управления для гамильтоновых систем. Приведены результаты моделирования для задачи раскачки маятника. Результаты развиты в [75], где метод синтеза управления колебательными нелинейными системами распространен на задачи с несколькими целевыми функционалами и с ограничениями. Впервые предложен подход на основе метода СГ к задаче управления прохождением через резонансные зоны.

В [77] предложен способ использования метода СГ для управления синхронизацией двух осцилляторов на примере двух маятников, слабо связанных пружиной. В этом случае уравнение управляемого объекта имеет вид

(5.3)
$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 + \rho \dot{\varphi}_1 + \omega^2 \sin \varphi_1 = k(\varphi_2 - \varphi_1) + u, \\ \ddot{\varphi}_2 + \rho \dot{\varphi}_2 + \omega^2 \sin \varphi_2 = k(\varphi_1 - \varphi_2), \end{cases}$$

где $\varphi_i = \varphi_i(t)$ – углы поворота маятников (i = 1, 2); u = u(t) – внешний момент (управляющее воздействие), действующий на первый маятник; ω , k, ρ – параметры системы: ω – частота собственных колебаний малой амплитуды, k – коэффициент связи между маятниками (например, коэффициент упругости пружины), ρ – коэффициент демпфирования.

В качестве целевой функции берется функция вида

(5.4)
$$Q(x) = \alpha Q_{\varphi}(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) + (1 - \alpha)Q_H(x),$$

где $x = [\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2]^{\mathrm{T}}$ – вектор состояния объекта,

(5.5)
$$Q_{\varphi}(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = \frac{1}{2} \delta_{\varphi}^2, \quad Q_H(x) = \frac{1}{2} \left(H(x) - H_* \right)^2,$$

(5.6)
$$H(x) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1^2 + \omega^2(1 - \cos\varphi_1) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_2^2 + \omega^2(1 - \cos\varphi_2) + \frac{k}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)^2$$

– полная энергия системы, $\delta_{\varphi} = \dot{\varphi}_1 + -\dot{\varphi}_2$ – ошибка синхронизации, H_* – заданное целевое значение энергии, $\alpha > 0$ – весовой коэффициент. Очевидно, минимальное (нулевое) значение целевой функции соответствует синхронному движению маятников при заданном уровне энергии колебаний всей системы.

Синтезированный по такой целевой функции АСГ в конечной форме имеет вид

(5.7)
$$u(t) = -\gamma \left(\alpha \delta_{\varphi}(t) + (1 - \alpha) \delta_{H}(t) \dot{\varphi}_{1}(t) \right),$$
$$\delta_{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_{1}(t) + \dot{\varphi}_{2}(t),$$
$$\delta_{H}(t) = H \left(x(t) \right) - H_{*},$$

где $\gamma > 0$ – коэффициент усиления.

Результаты моделирования показывают, что действительно ACГ (5.7) создает в системе с двумя степенями свободы (два связанных маятника) синхронный режим, причем при малом коэффициенте трения $\rho > 0$ энергия, близкая к заданной H_* , может быть достигнута при малом коэффициенте усиления $\gamma > 0$, т.е. в системе наблюдается эффект резонанса с обратной связью.

Сходная задача рассмотрена и в [78], где СГ методом с энергетическим целевым функционалом выполнен синтез закона управления. Произведен анализ системы по упрощенной модели ее динамики. Результаты как компьютерного моделирования, так и экспериментов на лабораторном стенде продемонстрировали работоспособность принятого метода управления.

Задача подъема маятника Фуруты анализируется в [79] путем сравнения результатов, полученных с помощью традиционной стратегии Острема-Фуруты, основанной на модели размерности два, с новой стратегией, основанной на СГ-законе на многообразии размерности три. Приведен контрпример, когда новый закон работает хорошо, а старый нет. Задача приведения маятника Фуруты в верхнее положение обычно решается гибридным регулятором, в котором глобальная задача разбивается на два этапа. Сначала накачка энергии приводит маятник в вертикальное положение. Затем маятник стабилизируется в этом положении. В [80] различные стратегии управления для обеих задач анализируются как путем моделирования, так и с использованием реального лабораторного маятника. Проблема подъема маятника Фуруты решается в [81] с применением метода СГ к модели системы с размерностью четыре. Новый закон сравнивается с традиционной стратегией Острема–Фуруты, основанной на модели размерности два. Приведены результаты сравнительного анализа, включающего моделирование и эксперименты, в которых показаны преимущества и эффективность предложенного закона раскачки маятника.

Задача стабилизации вертикального положения сферического маятника подробно рассмотрена в [82]. Эта задача сводится к стабилизации устойчивого многообразия $\Omega_{\rm st}$ вертикального положения свободного сферического маятника. Показано, что для любого гладкого управления с обратной связью, полученного с помощью СГ алгоритма с целью стабилизации $\Omega_{\rm st}$, замкнутая система имеет предельный цикл Г, который не принадлежит желаемому аттрактору $\Omega_{\rm st}$.

В [83] обобщены и расширены имеющиеся результаты по стабилизации инвариантных множеств для нелинейных систем на основе метода СГ и понятия V-обнаруживаемости. Представлены результаты по управлению колебаниями маятника, маятника на тележке, сферического маятника. Алгоритм, обеспечивающий глобальную аттрактивность вертикального (неустойчивого) положения равновесия маятника, основанный на разрывной версии энергетического СГ метода, получен в [84]. Показано, что глобальная аттрактивность не может быть получена с помощью непрерывной статической обратной связи по состоянию. Представлен подробный глобальный анализ переходного поведения замкнутой системы. Кроме того, показано, что глобальная аттрактивность вертикального положения равновесия может быть достигнута путем применения управления сколь угодно малой величины. В [85] рассмотрена задача численного определения показателя возбудимости колебательных систем. Показано, что возбуждение по методу СГ обеспечивает точное решение задачи достижения максимальной энергии для линейного осциллятора второго порядка на бесконечном интервале времени. Оценены верхняя и нижняя границы полной энергии системы в режиме установившихся колебаний и показатель возбудимости. Найдено точное значение доступной энергии системы для случая гармонического возбуждения.

АСГ управления нелинейными колебаниями динамической системы для задач регулирования и слежения представлен в [86]. Осциллятор Колпитца [87], имеющий хаотическое поведение, рассматривается в качестве примера. Алгоритм использует только структурную информацию о динамической модели для построения закона управления и может глобально асимптотически сходиться к заданным регулярным орбитам или фиксированным точкам.

В [88] рассмотрены задачи возбуждения и синхронизации колебаний в двухсвязанной двойной маятниковой мехатронной системе. Описаны аппаратные средства, интерфейс обмена данными и программное обеспечение для лабораторных экспериментов и управления. Импульсно-модулированный закон управления для возбуждения/синхронизации колебаний получен методом СГ. Лабораторные эксперименты выполнены для проверки и оценки параметров принятой математической модели. Приведены результаты сравнения моделирования и лабораторных экспериментов для анализа возбуждения и синхронизации.

В [89] использована адаптивная настройка усиления в обратной связи с запаздыванием для улучшения процесса управления. Предложенный в [89] адаптивный регулятор применяется для стабилизации неустойчивой неподвижной точки и неустойчивой периодической орбиты, встроенной в хаотический аттрактор. Алгоритм адаптации построен с использованием СГ метода. Представленные в [89] результаты компьютерного моделирования показали, что алгоритм адаптации может найти подходящее значение усиления обратной связи для одиночных и множественных задержек. Кроме того, показано, что метод [89] устойчив к шуму и отличиям в начальных условиях.

Задача адаптивной синхронизации двух связанных неидентичных моделей нейронов Хиндмарша–Роуза (*Hindmarsh–Rose*) рассмотрена в [90]. Показано, что использование разработанного регулятора, основанного на методе СГ, обеспечивает достижение синхронного поведения исследуемых систем. Полученные результаты математически обоснованы и проиллюстрированы моделированием.

Проблема управления маятниковыми механизмами рассматривается в [91]. Для описания динамики маятников используется гамильтонов формализм. Предложен алгоритм достижения равных значений энергии колеблющихся маятников посредством управления с обратной связью на основе СГ метода. Получены условия достижимости цели управления. Установлена связь между синхронизацией энергии и частотой колебаний. Представлены результаты компьютерного моделирования, демонстрирующие достижение цели управления и демонстрирующие динамические свойства замкнутой системы.

В [92] рассмотрена задача управления энергией маятника при наличии нерегулярного входного возмущения. Закон управления с обратной связью выбирается на основе метода СГ. Основным результатом являются точные оценки для начального множества и конечного множества (аттрактора), а также условия, гарантирующие, что все решения, начинающиеся в начальном множестве, попадут в аттрактор за конечное время.

На примере управления энергией маятника, в [93] рассмотрена задача управления нелинейной системой на инвариантном многообразии с помощью квантованной обратной связи по состоянию. Выбран основанный на АСГ закон управления с обратной связью. Основной результат заключается в точном описании границ допустимой ошибки квантования и результирующих границ отклонения энергии.

В [94] ставятся задачи управления энергией для модели Френкеля–Конторовой и обсуждается их связь с управлением маятниковыми цепочками. Предложен и проанализирован алгоритм управления энергией на основе метода СГ. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие сходимость предложенного алгоритма.

В [95, 96] метод СГ распространен на синхронизацию осцилляторов с комплексными переменными. Существующие результаты о частичной устойчивости дифференциальной формы АСГ для сингулярно возмущенных систем распространены в [97] на случай СГ управления в конечной форме. Результаты проиллюстрированы на примере управления энергией и синхронизацией двух связанных маятников с учетом инерции двигателя. Показано, что возмущения, вызванные инерцией соединительного звена, и возмущения, обусловленные инерцией двигателя, влияют по-разному на поведение возмущенной системы.

6. АСГ в сетевых и многоагентных системах

АСГ находят применение в современных исследованиях по управлению и оцениванию в сетевых и многоагентных системах. При этом метод СГ может использоваться для синтеза алгоритмов управления или адаптации как для локальной динамики агентов, так и для изменения связей между агентами, в том числе для изменения топологии сети. Опишем основные подходы к этим задачам. С середины 2000-х годов исследования велись в рамках общей модели сетевой системы управления, имеющей вид [98]

(6.1)
$$x_i(t) = f(x_i(t), u_i(t), t) + c \sum_{j=1}^N G_{ij} x(t) \Gamma \phi(x_j(t) - x_i(t)),$$

где x_i – вектор состояния *i*-го агента, u_i – вектор входов (управления) *i*-го агента, $\Gamma(x), \phi(x)$ – функции фиксированных связей между агентами, $G_{ij}(t)$ – функции изменяемых коэффициентов связи, c – общий коэффициент интенсивности взаимодействия агентов, i, j = 1, ..., N. Искомые модели управления могут быть децентрализованными (локальными, $u_i = U_i(x_i)$), частично децентрализованными, когда u_i зависит от нескольких агентовсоседей, или кооперативными в более общих случаях. В разных работах задаются различные цели управления. Например, в задачах синхронизации или достижения консенсуса агентов цель управления имеет вид

(6.2)
$$\lim_{t \to \infty} ||x_j(t) - x_i(t)|| = 0, \quad i, j, = 1, \dots, N.$$

Рассмотрим задачу слежения за лидером, где целью управления является синхронизация движений агентов с движением лидера (эталонной модели), который может быть реальным или виртуальным. Предположим, что управлениями являются изменения коэффициентов G_{ij} (при этом $u_i = 0$) и выберем целевую функцию

(6.3)
$$Q(x,t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (e_i^{\mathrm{T}} P e_i),$$

где $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ – положительно определенная матрица, а $e_i = x_i - x^*(t)$, где $x^*(t)$ – состояние лидера (желаемая траектория движения агентов). Тогда вычисляя скорость изменения целевой функции вдоль решений (6.1), а затем градиент скорости по управляющим переменным, получим СГ-алгоритм управления в дифференциальной форме

(6.4)
$$\dot{G}_{ij}(t) = -\gamma_{ij}c(e_i)^{\mathrm{T}}P(e_j - e_i),$$

где $\gamma_{ij} > 0$ – коэффициенты усиления. Условия достижимости цели выводятся из общих условий применимости АСГ, см. раздел 2.1.

Алгоритмы, близкие к (6.4), рассматривались в [99], где роль лидера играет "усредненный" агент $x^*(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t)$.

В [100] метод СГ используется для синтеза децентрализованного алгоритма адаптации локальных регуляторов для сетей в случае, когда локальная динамика агентов имеет вид $F(x_i, u_i, t) = Ax_i + Bu_i + \varphi_0(x_i)$, уравнение лидера имеет вид $\dot{x}_i^* = A^* x_i^* + B^* u_i^* + \varphi_0(x_i^*), y_i^* = Cx_i^*$, а локальные адаптивные регуляторы имеют вид

(6.5)
$$u_i = \theta_i^{\mathrm{T}}(y_i - y^*(t)), \quad y_i = Cx_i, \quad \dot{\theta}_i = -\gamma_i g^{\mathrm{T}}(y_i - y^*(t))^{\mathrm{T}} P(x_j - x_i).$$

В [101] рассматривались задачи управления кластерной синхронизацией в сетях из осцилляторов Стюарта–Ландау с запаздыванием в связях, описываемых уравнениями

(6.6)
$$\dot{z}_j(t) = \left(\lambda + i\omega - |z_j|^2\right) z_j + K \sum_{n=1}^N G_{jn}(t) \left(z_n(t-\tau) - z_j(t)\right),$$

где z_j – комплексные числа, $i^2 = -1$, $K = \rho e^{i\beta}$ – комплексный параметр, определяющий интенсивность и фазовый сдвиг функций связей, τ – запаздывание, λ , ω – параметры динамики агентов. Известно, что при изменении величины K в сети могут возникать различные колебательные режимы, в которых фазы колебаний агентов могут все совпадать, или быть все различными, отличающимися на $2\pi/N$, или, в промежуточном случае, агенты могут группироваться в M < N кластеров, в каждом из которых агенты имеют одну и ту же фазу. Целевая функция выбрана в виде

(6.7)
$$Q = 1 - f_d(\varphi) + \frac{N^2}{2} \sum_{p|d, 1 \le p < d} f_p(\varphi),$$

где

(6.8)
$$f_p(\varphi) = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N e^{pi\varphi_j} \sum_{k=1}^N e^{-pi\varphi_k},$$

а символ $p \mid d$ означает, что d делится на p. Построен АСГ в дифференциальной форме для настройки параметра β и в частном случае сети из шести осцилляторов путем моделирования показано, что в системе можно создать режим синхронизации с любым допустимым числом кластеров: 1, 2, 3 или 6. В [101] аналогичные результаты получены при настройке параметров G_{jn} , определяющих топологию сети.

7. Управление техническими системами

7.1. Управление вибрационными машинами

В [102, 103] исследуется задача управляемого прохождения через зону резонанса для механических систем с несколькими степенями свободы. В [102] разработан алгоритм управления, основанный на методе СГ и оценке частоты замедленного движения вблизи резонанса (частота Блехмана). Приведены результаты моделирования двухроторных гибких виброустановок, демонстрирующие эффективность предложенных алгоритмов и фрактальную зависимость времени прохождения от начальных условий. Особенностью исследования, приведенного в [103], является изучение работы замкнутой системы с учетом динамики электропривода. Получено, что время прохождения зоны резонанса может оказаться меньшим, чем для упрощенной модели без учета динамики электропривода. Исследования продолжены в [104]. Отмечено, что существующие алгоритмы управления на основе метода СГ требуют измерения полного вектора состояния системы. Для устранения этого недостатка разработан алгоритм управления на основе частичного наблюдателя для оценки вертикальной скорости опорного тела. Предлагаемый наблюдатель основан на упрощенной нелинейной модели двухмассовой колебательной системы. Эффективность управляемого прохождения через зону резонанса с

алгоритмом управления на основе предложенного наблюдателя проанализирована с помощью компьютерного моделирования для полной модели механической системы.

Работа [105] посвящена управлению колебаниями механических систем при пуске и прохождении через резонансные режимы. В обоих случаях алгоритм управления основан на методе СГ с целевыми функциями на основе энергии. Показано, что для гамильтоновых систем с одной степенью свободы в общем случае возможно переместить систему из любого начального состояния в любое конечное состояние с помощью управляющей силы сколь угодно малой интенсивности. Исследуется управляемое прохождение через резонанс на вибрационной машине с пятью степенями свободы с присутствием сил трения. Моделированием показано, что применение управления с обратной связью делает возможным прохождение через более низкий резонанс с меньшей интенсивностью управления по сравнению с прохождением через резонанс при постоянном управляющем моменте. Особенностью данной статьи является рассмотрение случая, когда постоянные управляющие моменты не позволяют роторам даже начать вращение. Применение управления с обратной связью позволяет роторам преодолевать силу тяжести и начинать вращение. В [105] приведено сравнение результатов моделирования с экспериментальными результатами, полученными на двухроторном лабораторном мехатронном стенде СВ-2М ИПМаш РАН. Большинство результатов качественно совпадают, что подтверждает адекватность принятой модели.

Результаты экспериментального исследования явления самосинхронизации и эффекта Зоммерфельда как в разомкнутом, так и в замкнутом контуре управления представлены в [106]. Эксперименты выполнены на мультирезонансной мехатронной лабораторной установке (*Multiresonance Mechatronic Laboratory Setup*, MMLS) CB-2M ИПМаш РАН, в которую входят неуравновешенные вибровозбудители, установленные на подпружиненной платформе, датчики, электродвигатели, управляющий компьютер, интерфейс для обмена данными. Показано, что управление с обратной связью на основе метода СГ позволяет точнее стабилизировать скорость вращения, чем обычно используемое в вибрационной технике управление двигателями без обратной связи. Некоторые дополнительные эффекты, такие как низкочастотные автоколебания, могут появиться из-за интегральной (И) составляющей сигнала управления с обратной связью.

В [107] изучена синхронизация управляемого неуравновешенного ротора с вязкоупругим основанием и силовым возбуждением. Методом прямого разделения движения выводятся условия существования и устойчивости синхронного режима движения для общего закона управления. Затем с помощью метода СГ разработан закон управления, чтобы передать максимальную энергию от возбуждения к ротору. Свободные параметры закона управления выводятся таким образом, чтобы управляемая синхронизация была устойчивой на пределе ее существования.

В [108, 109] рассмотрена задача об управлении числом проскальзываний циклов ротора электрической машины с помощью воздействия внешнего мо-

мента на примере одной простой математической модели. Для решения задачи применен метод СГ с целевой функцией, определяемой функцией энергии колебаний. Особенностью данного подхода является возможность использования достаточно малого управления, что способствует сбережению энергии. Строится алгоритм управления колебаниями ротора электрической машины, при использовании которого совершается заданное число проскальзываний циклов. В [109] проведено сравнение использования алгоритмов СГ и релейного. При моделировании ставится задача выполнить желаемое количество проскальзываний цикла в его начале, а затем возбудить колебания ротора с постоянной амплитудой. Результаты моделирования показали эффективность предложенных алгоритмов.

В [110] рассматривается адаптивное оценивание неизвестных параметров и состояний сферического робота с маятниковым приводом. С этой целью рассматривается следующая обобщенная задача: для модели нелинейного объекта в виде $\dot{x} = f(x, p, u)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^k$, найти оценку $\dot{x} = f(\hat{x}, \hat{p}, u)$ обеспечения выполнения цели $\lim_{t\to\infty} |p - \hat{p}(t)| = 0$. Для использования метода СГ вводится следующий целевой функционал:

$$J(x, \hat{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i e_i^2,$$

где $e_i = \hat{x}_i - x_i$, w_i – весовые коэффициенты, выбранные разработчиком; $i = 1, \ldots, n$.

Метод синтеза СГ приводит к следующим выражениям:

$$\dot{J} = \frac{\partial J}{\partial t} + \hat{f}(\hat{x}, \hat{p}, u)^{\mathrm{T}} \nabla_{\hat{x}} J = \sum_{i=1}^{n} w_i e_i \left(\dot{e}_i + \hat{f}_i(\hat{x}, \hat{p}, u) \right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} w_i e_i \left(2\hat{f}_i(\hat{x}, \hat{p}, u) - f_i(x, p, u) \right).$$

В итоге получается следующее правило оценивания на основе СГ:

(7.1)
$$\dot{\hat{p}} = -\Gamma \nabla_{\hat{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} w_i e_i \hat{f}_i(\hat{x}, \hat{p}, u) \right).$$

Алгоритм (7.1), используется в [110] для оценки в реальном времени состояний и неизвестных параметров сферического робота для различных значений длины шага и начальных условий. Для адаптивной регулировки этого усиления используется эвристический нечетко-логический регулятор. Представленные в [110] результаты моделирования показывают, что предложенный подход является достаточно обнадеживающим для идентификации этой нелинейной по параметрам хаотической системы, даже если начальные условия меняются и уровень неопределенности возрастает.

7.2.1. Управление летательными аппаратами в атмосфере

Управление нежесткими летательными аппаратами. В [111] разработан робастный автопилот для управления угловым положением летательного аппарата (ЛА) с нежесткостью в конструкции при параметрической неопределенности. Используется следующая модель бокового движения ЛА как твердого тела [112–114]:

(7.2)
$$\begin{cases} \dot{\beta}(t) = r(t) + a_z^\beta \beta(t) + a_z^\delta \delta(t), \\ \dot{\omega}_y(t) = a_m^\beta \beta(t) + a_m^\omega r(t) + a_m^\delta \delta(t), \\ \dot{\psi}(t) = r(t), \end{cases}$$

где $\psi(t)$, r(t) – угол и скорость рыскания соответственно, $\beta(t)$ – угол скольжения, $\delta(t)$ – угол поворота руля направления, a_i^j – параметры модели динамики ЛА. Значения a_i^j зависят от условий полета (таких как высота, число Маха и т.д.) и могут изменяться в широком диапазоне во время полета. Учитывается первый тон изгибных колебаний корпуса ЛА, который в месте расположения датчиков моделируется передаточной функцией

(7.3)
$$W_{\text{bend}}(s) = \frac{\Delta\psi(s)}{\delta_r(s)} = \frac{k_{\text{bend}}}{T_{\text{bend}}^2 s^2 + 2\xi_{\text{bend}} T_{\text{bend}} s + 1},$$

где k_{bend} – коэффициент передачи от отклонения руля направления к изгибу; T_{bend} – постоянная времени первого тона упругих колебаний, $T_{\text{bend}} = \omega_{\text{bend}}^{-1}$, где ω_{bend} – собственная частота первого тона упругих колебаний; ξ_{bend} – коэффициент естественного демпфирования ($\xi_{\text{bend}} \approx 0$). Сигнал ψ_{g} , измеренный гироскопом, представляет собой сумму углов рыскания и изгиба:

(7.4)
$$\psi_{\rm g}(t) = \psi(t) + \Delta \psi(t).$$

Сервопривод руля направления моделируется как фильтр нижних частот второго порядка. На основе СГ-метода в [111] разработан регулятор с высоким коэффициентом усиления с принудительно организованными скользящими режимами. Шунт (параллельный компенсатор в прямой связи) [54, 115–119] используется для обеспечения устойчивости замкнутой системы в условиях недостатка информации о переменных состоянии ЛА. Последовательная эталонная модель используется для определения желаемой динамики системы с обратной связью. Исследована устойчивость системы в широкой области значений параметров ЛА. Результаты моделирования продемонстрировали эффективность и высокую робастность предложенного метода управления.

Адаптивное кодирование при управлении группой дронов. В [120] представлена и численно исследована процедура адаптивного кодирования для передачи данных между квадрокоптерами, движущимися в формации. Параметры квадрокоптера определены с использованием экспериментальных данных по цифровому каналу связи с ограниченной полосой пропускания. Приведено сравнение полученных результатов с теоретическими положениями и проиллюстрирована эффективность процедуры адаптивного кодирования. Робастное управление боковым движением самолета. Синтез робастного управления с обратной связью по выходу для линейных объектов с непрерывным временем в условиях параметрических неопределенностей и внешних ограниченных возмущений рассматривается в [121]. Предлагаемый алгоритм обеспечивает отслеживание выходом эталонного процесса с необходимой точностью. Представлено применение алгоритма для управления боковым движением самолета при параметрических и внешних возмущениях и дано сравнение предложенного алгоритма с H_{∞} и управлением по методу СГ. Результаты моделирования демонстрируют эффективность и робастность предлагаемой системы управления.

Подавление автоколебаний ЛА по крену (wing rock). Явление "wing rock" известно как самовозбуждающееся движение крена при больших углах атаки. Когда возникает это явление, угол крена ЛА испытывает колебания нарастающей амплитуды, которые асимптотически сходятся к устойчивому предельному циклу [122–125]. Динамика автоколебаний по крену описывается существенно нелинейной моделью, параметры которой меняются в широком диапазоне в зависимости от условий полета (высоты, числа Маха, массы нагрузки и др.), а также от угла атаки.

В [126] предлагается адаптивный АСГ в конечной (интегрально-алгебраической) форме для управления ЛА по крену с подавлением автоколебаний. Используется следующая модель динамики движения ЛА:

(7.5)
$$\ddot{\varphi} + a_0\varphi + a_1\dot{\varphi} + a_2|\dot{\varphi}|\dot{\varphi} + a_3\varphi^3 + a_4\varphi^2\dot{\varphi} = bu,$$

где φ обозначает угол крена, u – управляющее воздействие (отклонение элеронов), $a_i = a_i(\alpha), b = b(\alpha) > 0$ – неизвестные параметры модели самолета, зависящие от угла атаки α . Рассмотрена задача отслеживания углом крена φ задающего воздействия φ^* , что означает приведение состояния системы к целевому многообразию $\psi(\varphi, t) \equiv \dot{e} + \lambda e = 0$, где $e = \varphi - \varphi^*(t)$. В [126] представлены сравнительные результаты моделирования для закона управления СГ и закона, полученного с помощью метода "погружения и инвариантности" (*Immersion & Invariance*, I&I) I&I, см. [127–129]. Оба закона адаптации включают в себя интегральный закон обновления и алгебраическую векторную функцию, зависящую от состояния ЛА. Результаты моделирования показали, что обе адаптивные системы способны подавлять автоколебания по крену, несмотря на неопределенности параметров модели при различных углах атаки.

Аналогичная задача управления рассмотрена и в [130] для модели ЛА вида (7.5). Для адаптивного подавления автоколебаний крена используется метод *неявной эталонной модели* (НЭМ) [8, 25, 28, 30, 54, 55]. Законы адаптивного управления с НЭМ выводятся на основе метода СГ, если использовать локальный целевой функционал $Q = \frac{1}{2}x^{T}Px$, где $x \in \mathbb{R}^{n}$ обозначает вектор состояния объекта, $(n \times n)$ -матрица P положительно определена, $P = P^{T} > 0$. Настраиваемый закон управления в "основном контуре" принимается в виде u = K(t)y, где u – управляющее воздействие, y – измеряемый выход объекта, K = K(t) – коэффициенты передачи регулятора, скорректированные с помощью алгоритма адаптации. На основе этого подхода получается следующий адаптивный закон управления креном:

(7.6)
$$e(t) = \varphi(t) - \varphi^*(t), \quad \dot{\xi}(t) = e(t), \quad \xi(0) = 0$$

- ошибка слежения и ее интеграл,

(7.7)
$$\sigma(t) = \tau \varphi(t) + e(t)$$
 – ошибка адаптации,

(7.8)
$$u(t) = -\left(k_i\xi(t) + k_p(t)e(t) + k_d(t)\varphi(t)\right) - \text{сигнал управления},$$

(7.9)
$$\dot{k}_p(t) = \gamma \sigma(t) e(t) - \lambda \left(k_p(t) - k_p^0 \right), \quad k_p(0) = k_p^0$$

 адаптивная настройка коэффициента регулятора для пропорциональной составляющей,

регулятора

(7.10)
$$\dot{k}_d(t) = \gamma \sigma(t) \varphi(t) - \lambda \left(k_d(t) - k_d^0 \right), \quad k_d(0) = k_d^0$$

– адаптивная настройка коэффициента

для дифференциальной составляющей,

где $\varphi^*(t)$ – задающее воздействие по крену, $\tau > 0$ – постоянная времени НЭМ (выбираемый при синтезе параметр), $\gamma > 0$ – коэффициент адаптации (выбираемый при синтезе параметр), $\lambda > 0$ – коэффициент усиления параметрической обратной связи адаптации (выбираемый при синтезе параметр), k_p^0, k_d^0 – начальные значения настраиваемого пропорционального и производного коэффициентов усиления, найденные на основе априорно доступной информации о параметрах объекта (выбираемто при синтезе). Если априорные данные не дают возможности для обоснованного выбора k_p^0, k_d^0 , то разумно выбрать $k_p^0 = 0, k_d^0 = 0$. Следует отметить, что интегральный коэффициент усиления k_i в (7.8) не подвергается настройке. Результаты, полученные с помощью моделирования, показывают, что адаптивный регулятор с НЭМ подавляет колебания предельного цикла колебаний по крену и обеспечивает приемлемые характеристики слежения при различных углах атаки.

Исследования в этом направлении продолжены в [131], где использована более реалистичная, чем (7.5), модель динамики движения ЛА по крену [132–134], в которой учитывается взаимное влияние углов крена и скольжения. В отличие от [132, 135, 136], кроме того, ограничения на угол отклонения элеронов явно учитываются в [131] при синтезе регулятора. С этой целью в [131] предложена и численно исследована для характерных режимов полета модификация схемы адаптивного управления с НЭМ.

Реализация закона адаптивного управления (7.8)–(7.10), как и других типов "простых адаптивных регуляторов" [53, 137–139], требует низких вычислительных затрат. В частности, (7.6), (7.8) соответствуют традиционному ПИД-регулированию с возможным добавлением "релейной" компоненты sign σ . Для усиления адаптивной настройки $k_p(t)$, $k_d(t)$ должны быть включены два интегратора (7.9), (7.10). Адаптивный закон управления приведен в [131] и в дискретной форме, выполнены численные исследования влияния интервала квантования на качество управления. Приведенные в [131] результаты моделирования также демонстрируют очень важное и характерное свойство адаптивных систем управления НЭМ: в процессе адаптации коэффициенты усиления регулятора не стремятся к фиксированным значениям, определяемым параметрами объекта. Это не требуется и, более того, невозможно, поскольку не выполняется условие Эрцбергера [24, 52], которое является естественным для обычных БСНС с ЭМ. Коэффициенты регулятора изменяются в зависимости от, например, задающего воздействия или действующих возмущений, обеспечивая выполнение "эталонного уравнения" для замкнутой системы.

Адаптивное управление лабораторным стендом "Вертолет". В [140, 141] метод СГ и концепция НЭМ используются для разработки двух законов адаптивного управления углом тангажа лабораторного стенда "Вертолет" QuanserTM-LAAS.

Для адаптивной настройки стандартных ПИ и ПИД-регуляторов в реальном времени используется метод СГ с НЭМ [8, 54, 55]. Адаптивное управление с пропорционально-интегрально-дифференцирующим (ПИД) регулятором выглядит следующим образом:

(7.11)
$$u(t) = k_P(t)e(t) + k_I(t) \int_0^t e(\tau) d\tau - k_D(t)\dot{y}(t),$$

где $\theta(t)$ – угол тангажа, $\varepsilon(t)$ – угол места, а $\lambda(t)$ – угол перемещения (разворота штанги стенда). Через e(t) = r(t) - y(t) обозначена "обобщенная" *ошибка слежения* (по соответствующим координатам), $k_P(t)$, $k_I(t)$, $k_D(t)$ – настраиваемые коэффициенты усиления регулятора. Методом СГ получен следующий алгоритм адаптации:

(7.12)
$$\dot{k}_{P}(t) = -\gamma_{P}\sigma(t)e(t) - \alpha_{P}(k_{P}(t) - k_{P}^{0}), \ k_{P}(0) = k_{P}^{0}, \\ \dot{k}_{I}(t) = -\gamma_{I}\sigma(t)\int_{0}^{t}e(\tau)d\tau - \alpha_{I}(k_{I}(t) - k_{I}^{0}), \ k_{I}(0) = k_{I}^{0}, \\ \dot{k}_{D}(t) = \gamma_{D}\sigma(t)\dot{y}(t) - \alpha_{D}(k_{D}(t) - k_{D}^{0}), \ k_{D}(0) = k_{D}^{0},$$

где $\gamma_i > 0, \ \alpha_i \ge 0, \ k_i^0$ – выбираемые при синтезе параметры, $i \in \{P, I, D\}$. Ошибка адаптации $\sigma(t)$ имеет вид

(7.13)
$$\sigma(t) = T^2 \dot{y}(t) + 2\xi T y(t) - \int_0^t e(\tau) d\tau,$$

где $T,\ \xi$ – выбираемые при синтезе параметры, описывающие желаемую динамику замкнутой системы. Уравнения (7.11)–(7.13) задают адаптивный ПИД-регулятор с НЭМ второго порядка. Если выбрана НЭМ первого порядка, то сигнал ошибки адаптации следует брать в виде

(7.14)
$$\sigma(t) = T\dot{y}(t) - e(t),$$

где e(t) = r(t) - y(t). Параметр T задает желаемую постоянную времени замкнутой системы.

Программные среды MATLAB / Simulink и WinCon использованы для реализации законов адаптивного управления при проведении экспериментов. Результаты экспериментов показали достижение требуемого поведения системы и устойчивость предложенных законов управления по отношению к параметрической неопределенности и неучтенной при синтезе динамике объекта.

Подавление изгибно-упругого флаттера крыла адаптивным регулятором с НЭМ. В [142] предложена простая схема адаптивного управления, основанная на НЭМ и СГ-методе для активного подавления флаттера крыла. Рассмотрено двумерное крыло, которое колеблется по тангажу и прогибу. Угол тангажа α – наклон крыла относительно оси упругости. Матрично-векторное уравнение изгибно-упругого флаттера крыла взято в виде [143, 144]:

(7.15)
$$\begin{bmatrix} I_{\alpha} & m_w x_{\alpha} b \\ m_w x_{\alpha} b & m_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{h} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{\alpha} & 0 \\ 0 & c_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{h} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{\alpha} & 0 \\ 0 & k_h(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ -L \end{bmatrix},$$

где m_t – общая масса основного крыла и опорной конструкции, m_w – масса основного крыла, x_{α} – безразмерное расстояние между центром масс и осью изгиба, I_{α} – момент инерции крыла относительно оси вращения, b – средняя хорда крыла, c_{α} , c_h – коэффициенты демпфирования за счет прогиба и тангажа соответственно, $k_h(h)$ и $k_{\alpha}(\alpha)$ – коэффициенты жесткости пружины для прогиба и тангажа соответственно, так что $\alpha k_{\alpha}(\alpha)$ – нелинейное слагаемое, $\alpha k_{\alpha}(\alpha) = k_1 \alpha + k_2 \alpha^2$.

В [142] получен и исследован следующий ПД закон адаптивного управления с НЭМ для системы активного подавления флаттера:

$$u(t) = k_p(t)\alpha(t) + k_d(t)\dot{\alpha}(t),$$

$$\sigma(t) = \dot{\alpha}(t) + g_0\alpha(t),$$

$$\dot{k}_p(t) = \gamma\sigma(t)\alpha(t) - \lambda \left(k_p(t) - k_p^0\right), \quad k_p(0) = k_p^0,$$

$$\dot{k}_d(t) = \gamma\sigma(t)\dot{\alpha}(t) - \lambda \left(k_d(t) - k_d^0\right), \quad k_d(0) = k_d^0,$$

7.2.2. Управление космическими аппаратами. В [145] рассматриваются две задачи управления нелинейными колебаниями космических систем: задача стабилизации угловой скорости вращающегося спутника и задача возбуждения колебаний с заданной амплитудой для буксируемого спутника-зонда.

Стабилизация угловой скорости вращающегося спутника. Предполагается, что спутник снабжен пассивным инерционным диссипатором энергии в виде пружинно-массового демпфера и малых реактивных двигателей. Движение спутника подвергается воздействию комбинации изменяющегося во времени момента возбуждения и управляющего момента. Демпфер центрирован на неподвижной оси X тела и имеет точечную массу m. Эта масса движется по оси, перпендикулярной оси X, на некотором расстоянии от главной оси Z. Используется следующая модель углового движения спутника, приведенная в [146]:

(7.16)
$$\begin{cases} (I+m(1-\mu)y^2)\dot{\omega} + 2m(1-\mu)y\dot{y}\omega - mb\ddot{y} = M(t), \\ m(1-\mu)\ddot{y} + c\dot{y} + (k-(1-\mu)\omega^2)y - b\dot{\omega} = 0, \end{cases}$$

где ω , y – угловая скорость спутника и смещение массы демпфера; I, m, k, c обозначают момент инерции спутника относительно оси Z, массы демпфера, жесткости пружины и усиления вязкого сопротивления; $\mu = m/m_T$, где m_T обозначает полную массу системы. Внешний крутящий момент M(t) представляет собой сумму крутящего момента возбуждения и управляющего крутящего момента, т.е. $M(t) = M_E(t) + M_C(t)$. Предполагается, что $|M_C(t)| \leq \overline{M}, \overline{M} > 0$.

Применение энергетического варианта СГ-метода синтеза управления дает следующие "пропорциональный" и "релейный" законы управления:

(7.17)
$$M_C = \gamma \left(H_{\text{ref}} - H(y, \dot{y}, \omega) \right) \left(\omega + \dot{\ddot{y}} (\tilde{I} + \tilde{y}^2 - 1)^{-1} \right),$$

(7.18)
$$M_C = \gamma \operatorname{sign} \left(H_{\operatorname{ref}} - H(y, \dot{y}, \omega) \right) \operatorname{sign} \left(\omega + \dot{\tilde{y}} (\tilde{I} + \tilde{y}^2 - 1)^{-1} \right),$$

где введены $\tilde{y} = (1 - \mu)b^{-1}y$, $\tilde{I} = (1 - \mu)m^{-1}b^{-2}I$. Закон управления (7.18) может быть непосредственно реализован с помощью двухпозиционных управляющих реактивных двигателей.

В [145] приведены результаты численного моделирования для спутника Intelsat-II, демонстрирующие эффективность стратегии управления по методу СГ с энергетическим целевым функционалом для подавления возможных хаотических колебаний спутника.

Возбуждение колебаний буксируемого зонда-спутника. Метод управления СГ применяется для возбуждения колебаний заданной амплитуды буксируемого спутника-зонда. Рассмотрено относительное движение зондирующего спутника, соединенного с космическим кораблем гибким нерастянутым безынерционным кабелем [147, 148]. Обозначим фиксированную длину кабеля через L, массу спутника через m, а массу космического корабля будем считать намного большей массы спутника. Представим космический аппарат и спутник материальными точками. Принята следующая модель нелинейных колебаний [147]:

(7.19)
$$\ddot{\gamma} + \left(\omega^2 e^{\delta \sin \gamma} - 3\omega_0 \cos \gamma\right) \sin \gamma = 0.$$

Пусть изменение длины кабеля после развертывания привязной системы является регулирующей величиной. Используя метод СГ, в [145] выводится следующий алгоритм:

(7.20)
$$u_{k}' = -\alpha(\gamma_{\max} - \gamma_{*})\dot{\gamma}\sin\gamma,$$
$$u_{k} = \begin{cases} u_{k}' & \text{если } |u_{k}'| \leqslant \bar{u},\\ \bar{u}\operatorname{sign} u' & \text{иначе,} \end{cases}$$
где \bar{u} – максимальное изменение длины кабеля, $\gamma > 0$ – коэффициент усиления.

Устойчивость системы к изменениям модели спутника и амплитуды момента возбуждения установлена с помощью компьютерного моделирования.

7.3. Управление автомобилями

Регулирование скорости большегрузных автомобилей. В [149] рассмотрена задача управления продольной скоростью большегрузных автомобилей, оборудованных регулируемым компрессионным тормозом. Разработаны нелинейные регуляторы, которые выполняют как некритические, так и критические маневры. Техника проектирования основана на СГ-методе. Номинальная целевая функция выбирается для решения задачи регулирования скорости, а затем она соответствующим образом модифицируется барьерными функциями для выполнения критических требований маневра. Чтобы выполнять более активные (критические) маневры торможения или управлять скоростью автомобиля при больших изменениях уклона, компрессионный тормоз должен согласовываться с регулировкой передаточного числа и фрикционными тормозами. Обсуждаются два способа управления неопределенностью уклона дороги: за счет использования интегрального действия регулятора СГ для постоянных (но неизвестных) уклонов и за счет использования дополнительного дифференциального действия для различных уклонов.

Управление работой бензиновых двигателей с прямым впрыском и стратифицированным наддувом. Метод СГ используется в [150] для разработки закона управления скоординированным соотношением воздух-топливо и управления крутящим моментом в бензиновых двигателях с прямым впрыском и стратифицированным наддувом (direct injection stratified charge gasoline engines DISCE). Метод основан на динамической минимизации целевой функции.

Используется следующая модель процесса:

(7.21)
$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

где вектор состояния $x = [p_m, W_f, \delta]^{\mathrm{T}}$ и вектор управления $u = [u_{th}, u_f, u_{\delta}]^{\mathrm{T}}$ складываются из давления во впускном коллекторе p_m , эффективного проходного сечения дроссельной заслонки u_{th} , расхода через дроссель W_f , времени зажигания δ . Для введения интегрального воздействия в закон управления предполагается, что W_f и δ управляются следующими уравнениями: $\dot{W}_f = u_f, \dot{\delta} = u_{\delta}$.

Для синтеза регулятора используется целевая функция $Q = Q_p + Q_b$, где — Q_p – это *штраф за переходный процесс* — квадраты отклонений момента торможения мотора, потока через цилиндры и времени зажигания от их уставок;

— Q_b – это *штраф за нарушение ограничения* $\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}], \lambda(t)$ – соотношение воздух-топливо внутри цилиндра.

Цель управления – стабилизировать желаемое состояние равновесия $x = x_d$ так, чтобы $f(x_d) + g(x_d)u_d = 0$, минимизируя $Q(x(t)) \to 0$.

Для выбранной целевой функции Q скоростной градиент равен $\omega(x) \equiv \sum \nabla_u \dot{Q}(x(t), u) = \left(\frac{\partial Q_p}{\partial x}g(x)\right)^{\mathrm{T}} + \left(\frac{\partial Q_b}{\partial x}g(x)\right)^{\mathrm{T}}$. Тогда для рассматриваемой целевой функции метод СГ приводит к следующему закону управления:

(7.22)
$$u = u_d - \Gamma \omega(x).$$

В [150] предлагается численная процедура, которая может использоваться на практике для проверки условий устойчивости рассматриваемой системы с обратной связью.

7.4. Управление автономными подводными роботами

Адаптивное управление автономным подводным манипуляционным роботом. Работы [17, 86, 151] посвящены адаптивному управлению автономным подводным аппаратом (АПА, autonomous underwater vehicle, AUV) с манипулятором. В этих статьях разработана основанная на методе СГ нелинейная адаптивная система управления АПА с шестью степенями свободы. При адаптивном подходе проблемы позиционирования и кинематического слежения решаются совместно. Для разработки алгоритма управления не требуется предварительных знаний о параметрах динамики и гидродинамики АПА, кроме динамики двигателя. Адаптация проводилась с помощью нелинейного адаптивного закона управления СГ. При проектировании учитывается динамика двигателей с использованием метода обратной динамики и наблюдения за состоянием/возмущением.

В [17] рассматривается класс полноуправляемых АПА с двумя плоскостями симметрии и шестью степенями свободы. Модель динамики АПА основана на результатах [152, 153] и имеет следующий вид:

(7.23) $M\dot{\mathbf{v}} = -C(\mathbf{v})\mathbf{v} - D(|\mathbf{v}|)\mathbf{v} + \mathbf{F}_b(\eta) + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_t,$

(7.24)
$$\dot{\eta} = J(\eta)\mathbf{v}$$

с системными матрицами $M(t) = M_b(t) + M_a(t), C(t, \mathbf{v}) = C_b(t, \mathbf{v}) + C_a(t, \mathbf{v}),$ где M_b – матрица инерции тела; M_a – матрица добавленных масс (масса окружающей жидкости); $C_b(t, \mathbf{v}), C_a(t, \mathbf{v})$ – кориолисова и центростремительная матрицы, $D(|\mathbf{v}|) = D_l + D_q \operatorname{diag}(|\mathbf{v}|)$. В (7.23), (7.24) введены следующие обобщенные координаты и скорости: $\eta = [x, y, z, \varphi, \theta, \psi]^{\mathrm{T}}$ – обобщенное положение в системе отсчета, закрепленной с Землей, $\mathbf{v} = [u, v, w, p, q, r]^{\mathrm{T}}$ – вектор обобщенной скорости на траектории полета АПА в системе отсчета, закрепленной с телом аппарата; $J(\eta)$ – матрица поворотов с углами Эйлера (φ, θ, ψ); \mathbf{F}_b – чистая выталкивающая сила, \mathbf{F}_c – сила реакции троса, \mathbf{F}_t – обобщенная тяга.

Из (7.24) следует, что $\mathbf{v} = J(\eta)^{-1}\dot{\eta}$. С подстановкой этого отношения в (7.23) модель АПА принимает вид

(7.25)
$$M_{\eta}(\eta)\ddot{\eta} + \frac{1}{2}\dot{M}_{\eta}(\eta)\dot{\eta} + D_{\eta}(\mathbf{v},\eta)\dot{\eta} + g_{\eta}(\eta) = \tau_{\eta},$$

где τ_{η} – обобщенный управляющий момент. Введением ошибок ориентации и скорости как $\tilde{\eta}(t) = \eta(t) - \eta^*(t)$, $\tilde{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}^*(t)$ в [17] ставится следующая задача слежения: обеспечить предельные отношения $\lim_{t\to\infty} \tilde{\eta}(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \tilde{\mathbf{v}}(t) = 0$.

Для решения этой задачи в [17] используется энергетический оценочный функционал $Q(\tilde{\eta}, \tilde{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2}\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}\tilde{\eta} + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{v}}^{\mathrm{T}}M\tilde{\mathbf{v}}$ и выбирается следующая цель управления: $Q(\tilde{\eta}, \tilde{\mathbf{v}}) \to 0$ при $t \to \infty$. Процедура синтеза по методу СГ состоит из следующих шагов: $\dot{Q}(\eta, \mathbf{v})$, следовательно, $\nabla_{\tau}\dot{Q}(\eta, \mathbf{v})$ и, наконец, закон управления СГ имеет вид $\tau(\eta, \mathbf{v}, \tilde{\eta}, \tilde{\mathbf{v}})$.

Из-за неопределенности параметров модели АПА использован СГ-адаптивный закон управления

(7.26)
$$\dot{U}_i = -\Gamma_i \frac{\partial \dot{Q}(U_i)}{\partial U_i}, \quad i = 1, \dots, 6,$$

где U_i – матричные параметры регулятора, $\Gamma_i=\Gamma_i^{\rm T}>0$ – коэффициенты усиления.

В [17, 151] приведены результаты моделирования, отражающие особенности предлагаемого подхода.

В [154] представлен подход к прямому адаптивному управлению и разработке быстрой навигационной системы для трехмерного отслеживания пути полноприводных дистанционно управляемых транспортных средств, сочетающих алгоритм СГ с оптимальным по времени алгоритмом отслеживания пути.

Нейросетевая система управления подводным роботом. Работы [155–157] посвящены проектированию систем управления подводным роботом на основе интеллектуальной нейронной сети. Получен новый алгоритм обучения интеллектуального регулятора с использованием метода СГ. Предлагаемые системы обеспечивают динамику робота, близкую к желаемой.

Изложим подробнее результаты [157]. В качестве исходной модели подводного робота (ПР) в [157] используется его стандартное описание в виде совокупности кинематических и динамических уравнений [158]

(7.27)
$$\dot{q}_1 = J(q_1)q_2,$$

(7.28)
$$D(q_1)\dot{q}_2 + B(q_1, q_2)q_2 + G(q_1, q_2) = U,$$

где J – кинематическая матрица; q_1 , q_2 – векторы обобщенных координат и скоростей ПР в связанной системе координат; U – вектор управляющих сил и моментов; D – матрица инерции с учетом присоединенной массы воды; B – матрица кориолисовых и центробежных сил; G – вектор обобщенных сил и моментов тяготения, плавучести и нелинейного демпфирования. В [157] предлагается преодолеть имеющуюся неполноту априорной информации о параметрах модели ПР на основе интеллектуального нейросетевого (HC) управления.

Ставится задача отслеживания ПР заданной траектории $q_1^*(t)$, $q_2^*(t)$. Сначала рассматривается отслеживание скоростей $q_2^*(t)$. Вводится ошибка слеже-

ния $e_2(t) = q_2^*(t) - q_2(t)$, относительно которой строится локальный целевой функционал

$$(7.29) Q = \frac{1}{2}e_2^{\mathrm{T}}De_2$$

с некоторой матрицей $D(t) = D(t)^{\mathrm{T}} > 0$. Следуя СГ-методу, вычисляется производная \dot{Q} в силу системы:

(7.30)
$$\dot{Q} = e_2^{\mathrm{T}} D \dot{e}_2 + \frac{1}{2} e_2^{\mathrm{T}} \dot{D} e_2,$$

откуда после подстановок получаем

(7.31)
$$\dot{Q} = e_2^{\mathrm{T}} \big(D(q_1) \dot{q}_2^* + B(q_1, q_2) q_2^* + G(q_1, q_2) - U \big).$$

Закон управления ПР предлагается реализовать с помощью двухслойной HC [159], т.е. в виде

$$(7.32) U = Wf(w, x),$$

где W – матрица коэффициентов передачи от нейронов внутреннего (скрытого) слоя к выходным нейронам, $f(\cdot)$ – функции активации нейронов скрытого слоя, w – матрица коэффициентов передачи от входных нейронов к нейронам скрытого слоя.

Выражения (7.31), (7.32) приводят к следующей формуле для производной по коэффициентам матрицы W от скорости изменения целевой функции:

(7.33)
$$\frac{\partial \dot{Q}}{\partial W} = -e_2 f^{\mathrm{T}}(w, x).$$

Функции активации нейронов взяты в экспоненциальной форме $f(w, x) = 1/(1 + e^{-\tau wx})$ с некоторым $\tau > 0$.

Работа [157] иллюстрируется результатами компьютерного моделирования.

7.5. Управление энергосистемами

Задача управляемой синхронизации многомашинной энергосистемы с потерями рассмотрена в [160], где получены условия существования инвариантов в системе и разработан алгоритм синхронизации на основе метода СГ для целевой функции, штрафующей за отклонение от имеющегося инварианта. Оценка качества замкнутой системы выполнена по результатам моделирования.

В [161, 162] представлен инверсный оптимальный нейронный регулятор по методу СГ для нелинейных систем с дискретным временем при наличии внешних возмущений и неопределенностей параметров для энергосистемы с различными типами неисправностей в линиях передачи, включая колебания нагрузки. Регулятор основан на дискретной рекуррентной нейронной сети высокого порядка (discrete-time recurrent high order neural network, RHONN), обученной с помощью алгоритма на основе расширенного фильтра Калмана (extended Kalman filter, EKF). В [162] предлагается упрощенная нейронная модель синхронной машины для стабилизации системы из девяти шин при наличии неисправности в трех различных случаях на линиях передачи.

Проблема повышения устойчивости и качества работы электрических сетей с помощью управления рассмотрена в [163]. Расширен подход, основанный на использовании инвариантной функции, зависящей от системных переменных, и метода СГ для синтеза управления, предложенный в [160], а именно, в алгоритм этой работы внесены изменения для большей гибкости при разработке системы управления. Исследованы устойчивость и работоспособность замкнутой системы для сети, состоящей из трех генераторов. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие динамику системы.

7.6. Управление гироскопическими устройствами

Работы [164, 165] посвящены управлению нелинейными колебаниями кольцевого вибрационного микрогироскопа, резонатор которого представляет собой тонкое упругое кольцо толщины *h*, связанное с основанием при помощи восьми полукруглых спиц [166, 167]. Осевая линия резонатора в недеформированном состоянии имеет вид окружности радиуса *R*. Его колебания возбуждаются и регистрируются системой управляющих и измерительных электродов. В [164, 165] исследованы погрешности вибрационного микрогироскопа, возникающие из-за нелинейных упругих свойств материала кольцевого резонатора. Целью работы является синтез закона управления колебаниями резонатора для снижения влияния нелинейной упругости материала кольца на ошибки гироскопа. С использованием СГ-метода построено управление потенциалами электродов, позволяющее поддерживать заданную амплитуду нормального прогиба резонатора и парировать погрешности гироскопа из-за нелинейных упругих свойств материала.

При описании динамики резонатора вводятся величины v, w – упругие смещения элемента кольца резонатора в окружном и радиальном направлении соответственно. Для упрощения решения используется одномодовое приближение, т.е. считается, что $w = f \sin(n\varphi) + g \cos(n\varphi)$, где n – номер моды колебаний резонатора; $f = f(\tau), g = g(\tau)$ – функции безразмерного времени $\tau = \omega_n t$, определяемые системой двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, полученных из уравнения нормального прогиба с применением процедуры Бубнова–Галеркина. Правые части уравнений для $f(\tau), g(\tau)$ содержат управляющие напряжения \tilde{U}_1 (для f) и \tilde{U}_2 (для g), которые выбраны в виде

(7.34)
$$\tilde{U}_1 = u_1 \sin \tau + u_2 \cos \tau,$$

$$\tilde{U}_2 = u_3 \sin \tau + u_4 \cos \tau,$$

где u_1, \ldots, u_4 – медленно изменяющиеся управляющие воздействия.

Для исследования системы методом усреднения Крылова–Боголюбова [168] выполнена следующая замена переменных:

(7.36)
$$f = p_1 \sin \tau + q_1 \cos \tau, \quad g = p_2 \sin \tau + q_2 \cos \tau,$$

где введены медленно изменяющиеся переменные p_1, q_1, p_2, q_2 .

Далее уравнения системы представляются в гамильтоновой форме:

(7.37)
$$q_i = \varepsilon \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{1}{2}\gamma q_i\right), \quad p_i = \varepsilon \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\gamma p_i\right), \quad i = 1, 2$$

с функцией Гамильтона

(7.38)
$$H = -\frac{1}{2\nu}(p_2q_1 - p_1q_2) - \frac{1}{8\xi}(p_2q_1 - p_1q_2)^2 + \frac{3}{32\xi}(q_1^2 + p_1^2 + q_2^2 + p_2^2)^2 + \frac{1}{2}(p_2u_1 + q_1u_2 + p_2u_3 + q_2u_4).$$

Коэффициент γ в (7.37) соответствует демпфированию системы (диссипации энергии). В [164, 165] показано, что при отсутствии демпфирования $(\gamma=0)$ функции

(7.39)
$$G_1 = q_1^2 + p_1^2 + q_2^2 + p_2^2, \quad G_2 = p_2 q_1 - p_1 q_2$$

являются первыми интегралами системы (7.37), что дает возможность сведения задачи о нелинейных колебаниях кольцевого резонатора к квадратурам.

Рассматриваемая задача возбуждения и стабилизации колебаний кольцевого резонатора формализована в [164, 165] при помощи скалярных целевых функций G_1 , G_2 , при этом цель управления задается как достижение предельного равенства

(7.40)
$$\lim_{t \to \infty} G_i = G_i^*, \qquad i = 1, 2,$$

где

$$G_1^* = r_\infty^2, \quad G_2^* = 0.$$

Для возбуждения и поддержания заданной амплитуды колебаний резонатора в форме стоячей волны вводится квадратичная целевая функция

(7.41)
$$V = 0.5 \left(\zeta (G_1 - G_1^*)^2 + (1 - \zeta) G_2^2 \right).$$

где $0\leqslant \zeta\leqslant 1$ – выбранный при синтезе весовой коэффициент.

Алгоритм управления выводится на основе метода СГ. Для этого вычисляется производная по времени функции (7.41)

(7.42)
$$\dot{V} = \zeta (G_1 - G_1^*) \dot{G}_1 + (1 - \zeta) G_2 \dot{G}_2,$$

где производные функций G_i в силу (7.37) имеют вид

(7.43)
$$\dot{G}_{i} = \varepsilon \left(-\gamma G_{i} + \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \{ \bar{\mathbf{H}}, G_{i} \} \right), \quad i = 1, 2, \\ \bar{\mathbf{H}} = 1/2(p_{1}, q_{1}, p_{2}, q_{2})^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{u} = (u_{1}, u_{2}, u_{3}, u_{4})^{\mathrm{T}},$$

где **u** – вектор управления, $\{\bar{\mathbf{H}}, G_i\}$ – вектор-столбец скобок Пуассона [169].

Для целевой функции (7.41) выводится следующий АСГ в конечной форме

(7.44)
$$\mathbf{u} = -\eta \left(\zeta (G_1 - G_1^*) \{ \bar{\mathbf{H}}, G_1 \} + (1 - \zeta) G_2 \{ \bar{\mathbf{H}}, G_2 \} \right),$$

где $\eta > 0$ – коэффициент усиления алгоритма управления.

Далее в [164, 165] выполнен анализ свойств замкнутой системы с АСГ, исследовано влияние коэффициента усиления η на вид фазовых траекторий и на расположение особых точек в пространстве (G_1, G_2), а также приведены соотношения для выбора весового коэффициента ζ в (7.41), обеспечивающего наибольшую степень затухания колебаний в зависимости от параметров модели.

7.7. Управление асинхронными электродвигателями

Пуск асинхронного электродвигателя с короткозамкнутым ротором. Статья [170] посвящена задаче плавного пуска асинхронного электродвигателя (АД) с короткозамкнутым ротором. Отмечена неудовлетворительная динамика пусковых процессов АД, которая особенно сильно проявляется у электроприводов с частыми пусками или работающих в повторно-кратковременном режиме. Для улучшения пусковых процессов АД можно использовать устройство плавного пуска — специальный пускатель на основе силовых полупроводниковых приборов. В [170] предлагается закон управления плавным пуском АД на основе метода СГ исходя из предположения, что при неизменной частоте питающего напряжения пусковое устройство способно изменять его амплитуду с неограниченно большой скоростью.

Для описания процесса пуска в [170] используется следующая модель обобщенной двухфазной электрической машины, записанная для системы координат x-y, вращающихся синхронно с вектором напряжения статора:

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u,$$

где

$$(7.46) A(x) = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1}\psi_{1x} + \frac{R_1}{L_1}k_2\psi_{2x} + \omega_0\psi_{1y} \\ -\frac{R_1}{L_1}\psi_{1y} + \frac{R_1}{L_1}k_2\psi_{2y} + \omega_0\psi_{1x} \\ -\frac{R_2}{L_2}\psi_{2x} + \frac{R_2}{L_2}k_1\psi_{1x} + (\omega_0 - p\omega)\psi_{2y} \\ -\frac{R_2}{L_2}\psi_{2y} + \frac{R_2}{L_2}k_1\psi_{1y} - (\omega_0 - p\omega)\psi_{2x} \\ \frac{1}{J}(M - M_c) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

 $u = U_m, \ x = \left[\psi_{1x} \,\psi_{1y} \,\psi_{2x} \,\psi_{2y} \,\omega\right]^{\mathrm{T}}$ – составляющие потокосцеплений статора (индекс 1) и ротора (индекс 2); R_1, R_2, L_1, L_2 – соответственно активные со-

противления и полные индуктивности статора и ротора; ω_0, ω – соответственно частота вращения поля и частота вращения ротора; p – число пар полюсов; $M = c(\psi_{1y}\psi_{2x} - \psi_{1x}\psi_{2y})$ – электромагнитный момент, развиваемый двигателем; M_c – момент сопротивления; J – момент инерции электропривода; $k_1 = L_m/L_1; k_2 = L_m/L_2; L_m$ – индуктивность цепи намагничивания.

Поставлены две цели управления: стабилизация момента и стабилизация модуля вектора потокосцепления. Первая цель направлена на минимизацию пульсаций электромагнитного момента, а вторая – для исключения насыщения магнитной системы. Эти цели управления выражены через локальный целевой функционал

(7.47)
$$Q(x,t) = \frac{1}{2} (y - y^*)^{\mathrm{T}} H (y - y^*),$$

где $y = [M \psi_1^2]^T$ – вектор регулируемых величин; $y^* = [M^* \psi_1^{*2}]^T$ – вектор задающих воздействий; H – единичная матрица порядка 2; $\psi_1^2 = \psi_{1x}^2 + \psi_{1y}^2$ – квадрат модуля вектора потокосцепления статора; M^*, ψ_1^{*2} – соответственно заданные значения электромагнитного момента и квадрата модуля вектора потокосцепления статора.

Объект управления (7.46) аффинный по входу, поэтому АСГ в интегральной форме имеет вид

(7.48)
$$u = \int \left(-\Gamma B(x)^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} H(y - y^*)\right) \,\mathrm{d}t$$

где $\Gamma = \Gamma^{T} > 0, C = \frac{\partial y(x)}{\partial x}$ – матрица Якоби для вектора регулируемых величин. С учетом (7.45), (7.47) выводится алгоритм управления

(7.49)
$$U_m = -\gamma \int \left(2\psi_{1x}(\psi_1^2 - \psi_1^{*2}) - \psi_{2y}(M - M^*) \right) \mathrm{d}t,$$

в котором $\gamma > 0$ – выбранный коэффициент усиления.

В [170] проведено моделирование полученного алгоритма управления для двигателя 4A80A4У3, результаты которого показали, что при использовании алгоритма (7.49) временные зависимости электромагнитного момента и модуля потокосцепления имеют гораздо меньшие пульсации, чем при пуске прямым включением в сеть.

Приводится вывод алгоритма управления пусковым устройством и результаты компьютерного моделирования.

Управление многодвигательным электроприводом. Задача управления многодвигательным асинхронным электроприводом рассматривается в [171]. При ее решении необходимо обеспечить согласование значений электромагнитного момента, развиваемого каждым из n асинхронных двигателей (АД), поддерживая на требуемом уровне величину суммарного момента M_{Σ} . Кроме того, требуется поддерживать значения каждого АД на заданном уровне.

В [171] используется следующая математическая модель АД, работающих на один вал:

(7.50)
$$\dot{x} = A(x,t) + B(x,t)u,$$

где $x = \operatorname{col} \{x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$ – вектор-столбец, составленный из векторов состояния каждого двигателя $x_i = [\psi_{1\alpha,i}, \psi_{1\beta,i}, \psi_{2\alpha,i}, \psi_{2\beta,i}, \omega]^{\mathrm{T}}, i = 1, \ldots, n, \psi$. – составляющие векторов потокосцепления статора и ротора, ω – угловая скорость ротора; $u_i = [u_{1,\alpha}, u_{1,\beta}]^{\mathrm{T}}$ – составляющие вектора напряжения, подводимого к статору АД в неподвижной системе координат $\alpha - \beta$ (вектор управления). Матрица A имеет блочную форму.

Вводится вектор рассогласования регулируемых величин $[y(t) - y^*(t)]$, отдельные компоненты которого определяются следующим образом:

(7.51)
$$\left[y(t) - y^*(t) \right] = \begin{bmatrix} p_i \sigma_i L_{12,i}(\psi_{1\beta,i}\psi_{2\alpha,i} - \psi_{1\alpha,i}\psi_{2\beta,i}) - M_i^*(t) \\ [\psi_{1\alpha,i}^2 + \psi_{1\beta,i}^2 - \psi_{1,i}^*] \end{bmatrix}$$

где $L_1 = L_{12} + L_{\sigma 1}, L_2 = L_{12} + L_2$ – полные индуктивности статора и ротора соответственно; $\sigma = 1/(L_1L_2 - L_{12}^2)$ – коэффициент рассеяния двигателя; p – число пар полюсов; M^* – заданный электромагнитный момент двигателя.

Для синтеза алгоритма управления вводится локальный целевой функционал

(7.52)
$$Q(x,t) = 0.5(y(t) - y^*(t))^{\mathrm{T}} H(y(t) - y^*(t)).$$

В результате применения СГ метода для целевого функционала (7.52) найдены выражения составляющих вектора напряжения на выходе преобразователя частоты, необходимые для достижения поставленной цели управления. Отмечено, что полученные выражения трудоемки в вычислительном отношении, а также требуют информацию о составляющих векторов потокосцепления ротора каждого АД в режиме реального времени, поэтому применять полученный АСГ на практике затруднительно. Чтобы избежать указанных недостатков, в [171], следуя [172], принят ряд допущений, с учетом которых закон управления моментом многодвигательного асинхронного электропривода принимает вид:

$$u_{1\alpha} = -\gamma \int \left(\sum_{i=1}^{n} \left(h_i \left(\frac{-M_i - M_i^*}{M_{Hi}} \psi_{1\beta,i} + \frac{|\psi_{1,i}|^2 - \psi_{1,i}^*}{\psi_{1H,i}^2} \psi_{1\alpha,i} \right) \right) \right) dt,$$

(7.53) $u_{1\beta} = -\gamma \int \left(\sum_{i=1}^{n} \left(h_i \left(\frac{-M_i - M_i^*}{M_{Hi}} \psi_{1\alpha,i} + \frac{|\psi_{1,i}|^2 - \psi_{1,i}^*}{\psi_{1H,i}^2} \psi_{1\beta,i} \right) \right) \right) dt.$

Проверка работоспособности предложенного закона управления выполнена компьютерным моделированием для взрывозащищенных асинхронных электродвигателей ДКВ355L4, работающих на один вал и управляемых при помощи одного преобразователя частоты. В результате исследований показано, что с применением закона (7.53) для многодвигательных асинхронных электроприводов с групповым подключением двигателей к преобразователю частоты можно добиться высокого качества управления суммарным моментом привода при разбросе параметров АД в широком диапазоне.

8. АСГ в задачах физики, биологии, экологии

В ряде задач управления природными системами возникает необходимость изменить интенсивность колебательных процессов с целью создать или подавить резонансные режимы. Цель управления при этом часто удобно переформулировать как управление энергией физической системы или, в более общем случае, управление инвариантом ее свободного движения. АСГ с успехом применяются в подобных ситуациях. В [173] исследуется возможность использования управления с обратной связью для изменения условий индуцированного шумом перехода в модели из двух нелинейных уравнений, описывающих работу преобразователя изображения "полупроводник-газоразрядный промежуток" в переменных Е – напряженность электрического поля в разрядном промежутке устройства и N – плотность свободных носителей заряда в зазоре. Управление пропорционально напряжению источника питания. В качестве целевой функции берется квадратичная форма отклонения состояния системы от неустойчивого равновесия, а для управления используется АСГ в конечной форме. Путем компьютерного моделирования установлено, что достаточно слабое управление позволяет существенно снизить возможность индуцированного шумом перехода, выводящего систему из области нормального функционирования.

Аналогичные задачи возникают при управлении экологическими системами, где требуется отдалить осциллирующую траекторию от области, где возможно вырождение популяции за счет исчезновения одного или нескольких видов. Решение подобных задач облегчается, если у свободной системы (при отсутствии управления) имеется инвариант – функция состояния системы, остающаяся постоянной вдоль движений свободной системы. Достаточно широкий класс моделей таких систем может быть сведен к многовидовой системе Лотки–Вольтерра, управление которой СГ-методом рассматривалось в [174]. Система описывается уравнениями

(8.1)
$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_i(t) \left(S_i + \sum_{j=1}^m M_{ij} x_j(t) \right), & i = 1, \dots, l_*, \\ \dot{x}_l = x_l(t) \left(S_l + \sum_{j=1}^m M_{lj} x_j(t) + u_l(t) \right), & l = l_*, \dots, m, \end{cases}$$

где x_i – переменные состояния, u_i – управляющие воздействия, S_i , M_{ij} – параметры системы (считается, что имеется $m - l_*$ управляющих воздействий и они прилагаются к последним $m - l_*$ уравнениям системы. Известно, что

если у системы (8.1) при $u_i = 0$ существует равновесие $x^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)^T$ в положительном ортанте:

(8.2)
$$x_i^* = n_i > 0, \quad i = 1, \dots, m_i$$

то при выполнении условий

(8.3)
$$M_{ii} = 0, \quad M_{ij} = -M_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, m$$

функция

(8.4)
$$V_{qp}(x) = \sum_{i=1}^{m} n_i \left(\frac{x_i}{n_i} - \log \frac{x_i}{n_i}\right)$$

является инвариантом системы (8.1) при $u_l = 0, l = l_* + 1, \dots, m, l_* \ge 1$.

В [174] предложено брать в качестве цели управления достижение заданной величины V_{ap}^* , т.е.

(8.5)
$$V_{qp}(x(t)) \to V_{qp}^* \text{ при } t \to \infty.$$

Задавая V_{qp}^* , можно увеличивать или уменьшать желаемый размах колебаний. Выбираем целевую функцию Q(x):

(8.6)
$$Q(x) = \frac{1}{2} \left(V_{qp}(x) - V_{qp}^* \right)^2.$$

Получаем АСГ в конечной форме

(8.7)
$$u_l(t) = -\gamma_l \left(V_{qp}(x) - V_{qp}^* \right) \left(x_l(t) - n_l \right),$$

где $\gamma_l > 0, \ l = l_*, \ldots, m, \ l_* \ge 1$ – коэффициенты усиления. В [174] показано, что такой АСГ обеспечивает достижение цели.

В [175] метод СГ применен к назначению лечения синдрома поликистозных яичников (СПКЯ) (*синдром Штейна–Левенталя*) – одной из типичных причин бесплодия, которым страдают около 10% женщин репродуктивного возраста. Назначение лечения основано на использовании математической модели, предложенной в [176] и представляющей собой систему из 13 нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Переменными состояния являются концентрации гормонов в гипофизе, в крови, массы фолликулярной ткани в фазе роста, масса лютеинизирующих фолликулов, масса лютеиновой ткани, обусловленной фазой роста, концентрации эстрадиола, прогестерона и ингибина. Для определения нужного количества лекарства в [175] применен АСГ в интегральной форме на основе локального целевого функционала в виде квадрата нормы разности переменных состояния пациентки и здоровой женщины. Поскольку не все нужные переменные измеряются, строится наблюдатель состояния, использующий операцию приближенного дифференцирования. Управление энергией на микроуровне при помощи АСГ было предложено в качестве способа управления диссоциацией и изомеризацией молекулярных систем [177–179]. В [177] изучается проблема управления изомеризацией в классических ансамблях малых многоатомных нежестких молекул на примере системы LiNC/LiCN. Описаны и численно проанализированы два метода управления изомеризацией в классическом ансамбле молекулярной системы LiNC/LiCN, основанные на управлении полной энергией и изменении профиля минимальной энергии для определенной "репрезентативной" молекулы. Оба алгоритма управления разработаны с использованием принципа СГ. Показано, что разработанные алгоритмы управления достаточно эффективны (примерно в два раза эффективнее, чем интенсивный равновесный нагрев).

В [180] метод скоростного градиента применен к синтезу управления наблюдаемыми в конечно-уровневых квантово-механических системах. Показано, что при выполнении условий типа невырожденности цель управления достигается, если между начальным и целевым значениями наблюдаемой нет ее собственных чисел. Показано, что погрешность достижения цели управления пропорциональна погрешности задания начального состояния системы и погрешности реализации управляющего воздействия. Представлены численные результаты для задачи управления предиссоциацией молекулы фторводорода (HF). В [181] предложена версия АСГ в комплексном пространстве с ограничениями, которая была применена к синтезу алгоритмов селективного управления наблюдаемыми квантово-механических систем. Показана возможность достижения заданных значений энергии системы при ограничениях на энергию подсистем и показано, что погрешность достижения цели управления пропорциональна погрешности задания начального состояния системы и погрешности реализации управляющего воздействия. Представлены численные результаты для задачи селективного управления энергией молекул водорода (H₂) с разными изотопами.

Алгоритм расчета классического внешнего поля для эффективного управления состоянием кубита с обратной связью получен в [182]. Подход иллюстрируется двухуровневой атомной системой (с распадом), управляемой классическим оптическим полем. Аналитически и с помощью моделирования показано, что предложенный метод позволяет достичь желаемого состояния, выраженного как разность диагональных элементов матрицы плотности. В [183] продемонстрирована возможность применения этого подхода к защите запутанности (entaglement) от декогеренции в системе из двух кубитов при наличии шума в квантовом канале связи. АСГ для перевода энергии в двухуровневой квантовой системе на заданный уровень с использованием в качестве управления спектральной плотности некогерентных фотонов предложен в [184]. В [185] дается общая формулировка метода скоростного градиента для задачи генерации унитарных процессов в *n*-уровневых квантовых системах, изолированных от окружения, и анализируется условие стабилизируемости для АСГ в дифференциальной форме. Показано, что условие достижимости в дифференциальной форме в этой задаче не выполняется, и делается вывод о целесообразности исследования возможности применения АСГ в конечной

форме. Отметим, что аналогичная ситуация имеет место и в задаче управления энергией в классических гамильтоновых системах.

9. Метод СГ в задачах управления распределенными системами

В цикле работ [186–191] СГ метод применен для задач управления волновыми процессами в системах с распределенными параметрами. Целевые функции взяты как меры отклонения движений системы от локализованных волн постоянной формы и скорости, которые поддерживают заданный уровень энергии системы и соответствуют ее динамическому равновесному состоянию. Разработаны АСГ распределенного управления с обратной связью для локализации решений уравнения синус-Гордона в виде бризера и волны огибающей. Во всех случаях достигнуто решение требуемой формы и скорости. Показано, что АСГ могут также обеспечить распространение требуемых волн только в одном направлении. Исследовано поведение АСГ для разных значений параметров начальных условий и показано, что алгоритм при этом работает устойчиво.

9.1. АСГ локализации нелинейных волновых процессов

Более подробно приведем результаты [188] по построению АСГ для локализации нелинейных волновых процессов.

В [188] рассматривается одномерная цепочка, описываемая уравнением синус-Гордона

(9.1)
$$x_{tt}(r,t) - x_{rr}(r,t) + \sin x(r,t) + u(r,t) = 0,$$

которое модифицировано введением распределенного управления u(r,t).

В цепочке (9.1) требуется получить желаемую бегущую волну $x^*(r,t)$ в виде "антикинка", заданную уравнением

(9.2)
$$x^{*}(r,t) = \pi \left(1 - \tanh\left(k(r - Wt)\right)\right) + A \operatorname{sech}^{2} \left(k(r - Wt - r_{1})\right) - B \operatorname{sech}^{2} \left(k(r - Wt - r_{2})\right),$$

где k, r_1, r_2, r_1, r_2 – начальные фазы, W – фазовая скорость. В отсутствие управления (т.е. при $u \equiv 0$) процесс (9.2) не соответствует никакому аналитическому решению уравнения (9.1).

Начальные условия в (9.1) взяты в виде

(9.3)
$$x(r,0) = 4 \arctan\left(\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{1-V^2}}(r-r_0)\right)\right),$$
$$x_t(r,0) = \frac{2V \operatorname{sech}\left(\frac{r-r_0}{\sqrt{1-V^2}}\right)}{\sqrt{1-V^2}}.$$

Вводится следующая цель управления:

(9.4)
$$e(r,t) = x(r,t) - x^*(r,t) \to 0$$
 при $t \to \infty$.

Для применения СГ-метода в [188] используется локальный целевой функционал

(9.5)
$$Q(u) = \frac{1}{2} \left(\tau e_t(r, t) + e(r, t) \right)^2,$$

в котором параметр $\tau > 0$ служит для задания желаемой скорости убывания рассогласования e(r,t) во времени. Действуя далее по схеме СГ, запишем:

(9.6)
$$Q_t = (\tau e_t + e) \big(\tau (x_{rr} - \sin x - u) + \dots \big),$$

где ... обозначает не зависящие от u слагаемые. Вычисляя согласно СГ методу функцию $w(r,t) = \frac{\partial Q_t(u)}{\partial u}$, получим АСГ вида

(9.7)
$$u(r,t) = \gamma \big(\tau e_t(r,t) + e(r,t)\big),$$

в котором параметр $\gamma > 0$ – коэффициент усиления алгоритма.

Численные исследования в [188] выполнены при V = 0.95, k = 0.5, A = 3, B = 1.5, $r_0 = 0$, $r_1 = -1$, $r_2 = 2$, W = 1.1, $\gamma = 40$, $\tau = 1.25$. Как показывают результаты моделирования, по истечении некоторого времени, цель управления (9.2) выполняется, а управляющее воздействие затухает.

9.2. Управление энергией одномерной распределенной цепочки с помощью АСГ в скользящем режиме

Применение метода СГ для управления энергией и оценивания состояния распределенных одномерных цепочек показано в [192–195] (управление и оценивание через граничные условия) и [196–198] (управление, распределенное по пространственной координате). В отличие от большинства имеющихся публикаций в этих работах ставится цель управления, направленная не только на снижение, но и на увеличение энергии объекта управления, что имеет важное значение для вибрационных технологий, генерирования волновых колебаний в радиолокационных и лазерных системах и в других приложениях [74, 145, 199]. Рассмотрим некоторые результаты подробнее.

Управление и оценивание через граничные условия. Задача граничного управления энергией для класса полулинейных гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных изучается в [193], где приводится ее решение на основе гладкого и разрывного АСГ для нелинейной системы Клейна–Гордона.

Рассмотрена одномерная цепочка, описываемая нелинейным уравнением Клейна–Гордона с указанными начальными и граничными условиями

(9.8)
$$x_{tt}(t,r) - kx_{rr}(t,r) + \Pi'(x(t,r)) = 0, \quad t \ge 0, \quad r \in [0,1],$$

(9.9)
$$x(0,r) = x^0(r), \quad x_t(0,r) = x^1(r),$$

(9.10)
$$x(t,0) = 0, \quad x_r(t,1) = u(t),$$

$$y(t) = \left(x_t(t,1), H(x(t))\right)$$

где П $\in C^1(\mathbb{R})$ – неотрицательная функция, k > 0 – заданный параметр, u(t) – управляющий вход, y(t) – выход, $x^0, x^1 : [0, 1] \to R$ – заданные функции и

(9.11)
$$H(x) = \int_{0}^{1} \left(\frac{x_t^2}{2} + k\frac{x_r^2}{2} + \Pi(x)\right) \, \mathrm{d}r$$

– гамильтониан уравнения (9.8), который рассматривается как энергия системы (9.8) в момент времени t.

Ставится задача нахождения закона управления u(t), обеспечивающего выполнение цели управления

(9.12)
$$H(x(t)) \to H^*,$$

где x(t) – решение (9.8)–(9.10), $H^* \ge 0$ – заданное значение.

Синтез управления выполняется по методу СГ. Для этого вводится целевая функция

$$Q_1(x(t)) = \frac{1}{2} (H(x(t)) - H^*)^2$$

как мера разности между текущим и заданным значениями энергии. Дифференцируя $Q_1(x(t))$ по времени вдоль решений (9.8)–(9.10), получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q_1(x(t)) = \left(H(x(t)) - H^*\right) \int_0^1 \left(x_t x_{tt} + k x_r x_{rt} + \Pi'(x) x_t\right) \mathrm{d}r.$$

Подстановкой $x_{tt} = kx_{rr}(t,r) - \Pi'(x(t,r))$ (согласно (9.8)), интегрированием слагаемого $x_r x_{rt}$ по частям и с учетом того, что из (9.9) следует $x_t(t,0) = 0$, получим

$$w(t,u) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q_1(x(t)) = \left(H(x(t)) - H^*\right)ku(t)x_t(t,1).$$

Метод СГ приводит к закону управления

(9.13)
$$u(t) = -\gamma \psi \Big(H\big(x(t)\big) - H^* \Big) x_t(t, 1),$$

где $\gamma > 0$ – скалярный коэффициент усиления, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функция, удовлетворяющая условию псевдоградиентности $\psi(s)s > 0$ для всех $s \neq 0$ и $\psi(0) = 0$ (см. (2.7)). При $\psi(s) = \text{sign}(s)$ получается разрывный ("релейный") закон управления

(9.14)
$$u(t) = -\gamma \operatorname{sign} \left(H(x(t)) - H^* \right) x_t(t, 1),$$

который соответствует целевой функции $Q_2(x(t)) = |H(x(t)) - H^*|.$

В [193] показано, что при H(0) > 0 разрывный АСГ (9.14) приводит систему к любому заранее заданному ненулевому уровню энергии за конечное время, в то время как гладкий (непрерывный) АСГ обеспечивает только асимптотическую сходимость. В статье приводятся результаты моделирования системы (9.8)–(9.10), (9.13) с $\psi(s) = s$, $\Pi(x) = \beta x^{2\kappa}$, $\beta = 0.2$, $\kappa = 2$, k = 0.12, $\gamma = 0.25$, $x^0(r) = \mu(1 - \cos(2\pi r))$, $x^1(r) \equiv 0$ для $\mu = 0.05$ и $\mu = 2.5$, $H^* = 5$ и $H^* = 20$, согласующиеся с теоретическими выводами.

Исследование наблюдателя типа Луенбергера (Luenberger) для распределенной одномерной цепочки синус-Гордона выполнено в [195], где получены явные ограничения на параметры системы, обеспечивающие экспоненциальное затухание ошибки оценивания. В основу синтеза наблюдателя положен метод СГ.

Рассматривается следующее уравнение синус-Гордона:

(9.15)
$$x_{tt}(t,r) - kx_{rr}(t,r) + \beta \sin x(t,r) = 0, \quad t \ge 0, \quad r \in [0,1],$$

(9.16)
$$x(0,r) = x^0(r), \quad x_t(0,r) = x^1(r),$$

(9.17)
$$x(t,0) = 0, \quad x_r(t,1) = u(t),$$

(9.18)
$$y(t) = x_t(t, 1),$$

где $k > 0, \beta$ – заданные параметры; u(t) – управляющий вход; y(t) – измеряемый выход; $x^0, x^1: [0,1] \to R$ – заданные функции.

Синтез наблюдателя состояния для системы (9.15)–(9.18) выполняется в [195] при предположении, что измеряется только переменная $y(t) = x_t(t, 1)$ (а также известен сигнал управления u(t), который вырабатывается регулятором). По аналогии с [200, 201] вводится следующий наблюдатель состояния луенбергерского типа:

(9.19)
$$\widehat{x}_{tt}(t,r) - k\widehat{x}_{rr}(t,r) + \beta \sin \widehat{x}(t,r) = 0, \quad t \ge 0, \quad r \in [0,1],$$

(9.20)
$$\widehat{x}(0,r) = \widehat{x}^0(r), \quad \widehat{x}_t(0,r) = \widehat{x}^1(r),$$

(9.21)
$$\widehat{x}(t,0) = 0, \quad \widehat{x}_r(t,1) = u(t) + \alpha (y(t) - \widehat{x}_t(t,1)),$$

где $\hat{x}(t,r)$ служит оценкой состояния x(t,r) системы (9.15), $\alpha > 0$ – выбираемый при синтезе коэффициент усиления.

Обоснование сходимости процесса наблюдения выполнено в [195] с использованием СГ метода. Для этого вводится ошибка оценивания $e(t,r) = x(t,r) - \hat{x}(t,r)$ и квадратичный ("энергетический") целевой функционал $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (e_t^2 + ke_r^2) dr$. Решена задача нахождения параметров k, β, α наблюдателя (9.19)–(9.21), гарантирующих экспоненциальное убывание E(t).

С использованием наблюдателя (9.19)–(9.21) для управления энергией системы синус-Гордона по измеряемому выходу цепочки методом СГ находится обратная связь, имеющая вид

(9.22)
$$u(t) = -\gamma \psi \left(H(\widehat{x}(t)) - H^* \right) y(t).$$

В [195] показано, что время переходного процесса по энергии близко к времени процесса по ошибке наблюдения, тем самым основную роль в переходном режиме играет процесс оцеивания состояния. Также показано, что условия, налагаемые на коэффициент усиления наблюдателя, достаточные для сходимости ошибки оценки состояния, "почти" необходимы в том смысле, что нарушение этих условий делает переходные процессы ошибки оценки состояния слишком затянутыми.

Управление, распределенное по пространственной координате. Следуя [202], рассмотрим задачу управления энергией цепочки, заданной волновым уравнением

(9.23)
$$x_{tt}(r,t) = x_{rr}(r,t) - \rho x_t(r,t) + u(r,t),$$

где x = x(r, t) – состояние объекта; t – время; $r \in (0, 1)$ – пространственная переменная; u(r, t) – распределенное по пространству управление; $\rho \ge 0$ – параметр диссипации. Заданы следующие граничные условия Дирихле: x(0, t) = 0, x(1, t) = 0.

Полная энергия цепочки находится из выражения

(9.24)
$$E(x_r, x_t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left((x_t)^2 + (x_r)^2 \right) \, \mathrm{d}r.$$

Ставится задача управления энергией – обеспечение предельного соотношения

(9.25)
$$\lim_{t \to \infty} E(x_r(t), x_t(t)) = E^*$$

при заданном постоянном значении энергии $E^* \ge 0$.

Выведем АСГ, решающий поставленную задачу. Введем целевую функцию (согласно СГ-методу – "локальный целевой функционал")

(9.26)
$$V(t) = \frac{1}{2} \left(E(x_r, x_t) - E^* \right)^2.$$

Вычислим производную от целевой функции (9.26) по времени в силу системы. Получим

(9.27)
$$w(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv \dot{V} = \left(E(x_r, x_t) - E^*\right) \int_0^1 (u_\gamma - \rho x_t) x_t \, \mathrm{d}u.$$

Выберем функцию $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, удовлетворяющую условию псевдоградиентности $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{u})^{\mathrm{T}} \nabla_{u} w(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \ge 0$ в виде (2.9), т.е. примем $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \gamma x_{t} \operatorname{sign}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. Отсюда следует АСГ в релейной форме

(9.28)
$$u(x_r, x_t) = -\gamma x_t \operatorname{sign} \left(E(x_r, x_t) - E^* \right).$$

53

Проверим выполнение условия достижимости (2.10). Поскольку

$$\dot{V} \leqslant -(\gamma - \rho) \times \left| E(x_r(t), x_t(t)) - E^* \right| \int_0^1 x_t^2 dr \leqslant 0,$$

то при $\gamma > \rho$ энергия $E(x_r(t), x_t(t))$ под управлением предложенного алгоритма стремится к E^* и, следовательно, цель управления достигается.

В [202] проведено моделирование процесса управления энергией при значениях параметров $\rho = 1$, $\gamma = 10$, $E^* = 10$ и начальном состоянии $x(r, 0) = A(1 - \cos(2\pi r))^7$, $x_t(r, 0) = 0$, демонстрирующее достижение поставленной цели как для случая $A = 10^{-3}$ (начальная энергия меньше заданной), так и для A = 0.02 (начальная энергия больше заданной).

Работа [197] посвящена численной оценке эффективности алгоритмов СГ, разработанных в [196, 202] для управления энергией пространственно-распределенных систем синус-Гордона с несколькими внутренними параметрами и доменными приводами. Влияние квантования по уровню сигнала управления с обратной связью по состоянию (возможно, связанного с временной дискретизацией) на установившуюся ошибку энергии и устойчивость замкнутой системы исследуются путем моделирования. Учитываются следующие типы квантования: квантование сигнала управления по времени дискретизации, квантование уровня для управления, непрерывное во времени; квантование сигнала управления по уровню совместно с временной дискретизацией; передача управляющего сигнала по двоичному каналу связи с инвариантным во времени кодером первого порядка; передача сигнала управления по времени; передача управляющего сигнала по двоичному каналу связи с адаптивным кодером первого порядка.

10. Принцип скоростного градиента в динамике физических процессов

В монографии [25] предложено использовать метод СГ для вывода законов динамики физических систем. Оказывается, известные и новые уравнения движения ряда физических систем могут быть выведены как АСГ при соответствующем выборе структуры уравнения объекта и целевой функции. В физике подобные постановки рассматриваются на основе вариационных принципов построения моделей систем. По аналогии можно сформулировать "Вариационный принцип скоростного градиента" (ВПСГ): среди всех возможных движений в системе реализуются лишь те, для которых входные переменные изменяются пропорционально скоростному градиенту от некоторого "целевого" функционала Q_t .

Как показано в [25], применяя ВПСГ, можно получить ряд классических уравнений механики и физики. Кроме того, принцип позволяет получить законы динамики для новых задач, некоторые из которых перечислены ниже. В [203] предложено применять ВПСГ для построения моделей и предсказания переходных процессов в системах, установившееся движение которых подчиняется принципу максимума энтропии (принципу Гиббса–Джейнса). Вычислительный эксперимент по проверке ВПСГ на примере прогнозирования с его помощью динамики процессов в методе частиц описан в [204].

Новая концепция высокоскоростных процессов в твердых телах разработана в [205, 206] с использованием нелокальной теории неравновесного переноса и метода скоростного градиента. В разработанной теории общая интегральная зависимость напряжения от деформации в зависимости от скорости деформации и длительности внешнего импульса описывает как реакцию упругой среды на внешнюю нагрузку, так и переход к пластическому течению. Модель показывает разницу между ударным нагружением и непрерывным, которая растет с увеличением скорости нагружения. Построенная на интегральном соотношении модель упруго-пластической ударной волны, изменяющей свою форму при распространении вдоль материала, способна описать весь комплекс экспериментально наблюдаемых закономерностей, которые не могут быть объяснены в рамках традиционной механики сплошных сред.

В [207–209] предложены новые уравнения, описывающие динамику нестационарных процессов максимизации и минимизации различных энтропийных функционалов: энтропий Шеннона, Цаллиса, Реньи, относительной энтропии Кульбака–Лейблера (*Kullback–Liebler*), Бурга (*Burg*), энтропии Кресси–Рида (*Cressie–Read*) и других. Исследуются единственность и устойчивость предельного распределения вероятностей при ограничениях сохранения массы и энергии. Предлагаемые уравнения позволяют просто прогнозировать динамику сложных неравновесных систем.

Применение СГ принципа к неравновесным распределенным системам вдали от термодинамического равновесия исследовано в [21]. Обсуждаются варианты применения принципа СГ для описания процессов неравновесного переноса в реальных средах. Исследование эволюции неравновесной системы на различных масштабных уровнях с помощью принципа СГ позволяет по-новому взглянуть на проблемы термодинамики, связанные с поведением энтропии системы. Предлагаются обобщенные динамические уравнения для конечного и бесконечного числа ограничений. Показано, что стационарное решение уравнений, вытекающее из принципа СГ, полностью совпадает с локально равновесной функцией распределения, полученной Д.Н. Зубаревым [210]. Предлагается новый подход к описанию временной эволюции систем, далеких от равновесия, основанный на применении принципа СГ на промежуточном масштабном уровне внутренней структуры системы. Обсуждается проблема высокоскоростного сдвигового течения вязкой жидкости вблизи жесткой плоской пластины. Показано, что принцип СГ позволяет строить замкнутые математические модели неравновесных процессов.

В [211] исследуется взаимосвязь между структурой GENERIC (общее уравнение для неравновесной обратимо-необратимой связи, англ. – general equation for the quilibrium reversible-irreversible coupling), возникшей в неравновесной термодинамике, и принципом СГ. GENERIC известен как общая

структура для различных уравнений эволюции во времени для неравновесных систем. Рассмотрены несколько примеров применения СГ-принципа и показано его соответствие рамкам GENERIC. Результат [211] также может быть использован для демонстрации того, как соотносятся уравнения Фоккера– Планка и принцип СГ. Развитый подход распространен на квантовомеханические системы применительно к задаче максимизации энтропии фон Неймана [212].

11. Модификации и обобщения АСГ

11.1. Модификации АСГ

За полвека существования АСГ подвергались различным модификациям и обобщениям. В [213] предложена версия АСГ для систем с запаздыванием. Для постановки задачи и для доказательства используются функционалы Ляпунова–Красовского. Например, в задаче адаптивной стабилизации линейного объекта с запаздыванием по состоянию для синтеза алгоритма адаптации используется функционал

$$J(x_t(s)) = 0.5 \left(x^{\mathrm{T}} H x + \int_{t-\tau}^t x^{\mathrm{T}}(s) K x(s) \,\mathrm{d}s \right),$$

где $x_t(s) = \{x(t+s)\}, s \in [t-\tau,t], \tau$ – запаздывание, H, K – положительно определенные матрицы. При этом алгоритм адаптации имеет тот же вид, что и для систем без запаздывания.

В [18] предложены алгоритмы, названные "алгоритмами скоростной разности" (АСР), позволяющие ослабить обычное для АСГ условие выпуклости. В [18] доказан следующий результат.

Пусть объект управления описывается уравнениями

(11.1)
$$\dot{x} = F(x, v, t),$$

(11.2)
$$\dot{v} = \Phi(x, v, t)$$

где $x \in \mathbb{R}^N$, u, v – скаляры, $t \ge 0$. Пусть для нее выполнены стандартные условия применимости АСГ, см. раздел 2.1 и [18, 25]. Тогда алгоритм управления

(11.3)
$$u = u(x, v, t) = \begin{cases} \Psi(x, v, -\gamma_0(v - U_*(x, t))) - \gamma_1 \frac{\partial_0 Q(x, v, t) - \partial_0 Q(x, U_*, t)}{v - U_*} + \partial_0 U_*(x, v, t) \\ & \text{при } v \neq U_*, \end{cases}$$
$$\Psi(x, v, -\gamma_0(v - U_*(x, t))) - \gamma_1 \frac{\partial}{\partial v} (\partial_0 Q(x, U_*, t)) + \partial_0 U_*(x, v, t) \\ & \text{при } v = U_*, \end{cases}$$

где $\partial_0 U_*(x, v, t) = \partial/\partial t (U_*(x, t)) + \partial/\partial x (U_*(x, t)) F(x, v, t), \gamma_0 > 0, \gamma_1 > 0$, обеспечивает ограниченность траекторий системы (11.1), (11.2) и достижение целей управления $Q(x(t), t) \to 0, v(t) - U_*(x(t), t) \to 0$. Предложены также схемы итеративного синтеза алгоритмов управления, для ACГ и для ACP, аналогичные известным схемам бэкстеппинга [14]. В книге [25] представлены обобщения ACГ на объекты управления, описываемые неявно заданными уравнениями $F(x, \dot{x}, \theta, t)$, объекты, заданные дифференциально-алгебраическими уравнениями, а также стохастические объекты, описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями Ито. Рассмотрены ACГ с коэффициентом усиления, зависящим от времени и от состояния объекта, в частности ACГ с $\Gamma(t)$, изменяющимся по алгоритмам, аналогичным алгоритму фильтра Калмана.

11.2. Дискретизация АСГ

Цифровая (компьютерная) реализация алгоритмов управления ставит вопрос о сохранении свойств непрерывной динамической системы при дискретном (sampled data) алгоритме управления. Вопросы дискретизации линейных и нелинейных систем рассматривались во многих работах. Применительно к алгоритмам скоростного градиента сошлемся на результат, сформулированный в [25, теорема 5.5]. Пусть объект

(11.4)
$$\dot{x} = F(x,\theta,t) + f(t),$$

где f(t) – ограниченное возмущение, управляется дискретизованным регуляризованным АСГ

(11.5)
$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta(t_k) \quad \text{при} \quad \theta(t_k) \leq \theta(t) < \theta(t_{k+1}), \\ \theta(t_{k+1}) &= \theta(t_k) - \gamma_k \Big(\gamma \nabla_\theta w \big(x(t_k), \theta(t_k) \big) - \alpha \big(\theta(t_k) - \bar{\theta} \big) \Big). \end{aligned}$$

Если система (11.4), управляемая непрерывным алгоритмом скоростного градиента

(11.6)
$$\dot{\theta}(t) = \gamma \nabla_{\theta} w \left(x(t), \theta(t) \right) - \alpha \left(\theta(t) - \bar{\theta} \right)$$

экспоненциально диссипативна, то при дискретизации алгоритма управления с достаточно малыми шагами γ_k система сохраняет предельную диссипативность при $\gamma_k \rightarrow 0$ и оценка предельного множества приближается к оценке предельного множества для непрерывной системы. В [25] предложена и дискретизованная версия АСГ с зоной нечувствительности [25, теорема 5.6]. В этом случае условие экспоненциальной диссипативности не выполняется, применимость АСГ обеспечивается введением в алгоритм "памяти", предотвращающей возникновение нежелательных скользящих режимов.

11.3. Неевклидовы алгоритмы скоростного градиента

Идея связать переменность матрицы коэффициентов усиления в ACГ с переменностью метрики в пространстве состояний объекта или в пространстве настраиваемых параметров (управлений) имеет далеко идущее развитие. Повидимому, впервые она возникла в [25, Приложение 4], где введена функция Ляпунова

(11.7)
$$V(x,\theta,t) = Q(x,t) + 0.5(\theta - \theta_*)^{\mathrm{T}} R(x,t)(\theta - \theta_*).$$

Метрическая матрица R(x,t) в (11.7) симметрична, положительно определена и определяет вид расширенного "неевклидова" АСГ

(11.8)
$$R(x,t)\ddot{\theta} = -\nabla \dot{Q} - \dot{R}(\theta - \theta_*),$$

где $\dot{R} = \partial R(x,t) / \partial t + \partial R(x,t) / \partial x F(x,\theta,t).$

В работе Н. Боффи и Ж.Ж. Слотина [214] получен целый ряд новых "неевклидовых" алгоритмов управления, оценивания, адаптации, обучения на основе функций Ляпунова, в которых используется так называемая дивергенция Брэгмана [215], введенная Л.М. Брэгманом в 1967 г. и получившая в последние годы многочисленные применения в различных областях прикладной математики. По заданной гладкой функции $\varphi(\theta)$ дивергенция Брегмана $d_{\varphi}(\theta_*|\theta)$ определяется следующим образом:

(11.9)
$$d_{\varphi}(\theta_*|\theta) = \varphi(\theta_*) - \varphi(\theta) - \left(\nabla\varphi(\theta)\right)^{\mathrm{T}}(\theta_* - \theta).$$

Для строго выпуклых функций $\varphi(\theta)$ дивергенция $d_{\varphi}(\theta_*|\theta)$ также строго выпукла и $d_{\varphi}(\theta_*|\theta) > 0$ при $\theta \neq \theta_*$. Дивергенция от положительно определенной квадратичной формы совпадает с ней самой.

В [214] новые алгоритмы типа АСГ строятся на основе замены стандартной функции Ляпунова

(11.10)
$$V(x,\theta,t) = Q(x,t) + 0.5(\theta - \theta_*)^{\mathrm{T}} \Gamma^{-1}(\theta - \theta_*),$$

используемой для обоснования АСГ в диф
ференциальной форме (2.14), на функцию

(11.11)
$$V(x,\theta,t) = Q(x,t) + d_{\varphi}(\theta_*|\theta).$$

Стандартные вычисления приводят к алгоритму управления/адаптации вида

(11.12)
$$\dot{\theta} = -\left(\nabla^2 \varphi\right)^{-1} \nabla_{\theta} \dot{Q}.$$

Выбор неквадратичных функций $\phi(\theta)$ открывает новые возможности для модификаций и обобщения АСГ, соответствующие введению в пространстве управлений или настраиваемых параметров неевклидовой (римановой) метрики. Например, функцию $\varphi(\theta)$ можно рассматривать как барьерную функцию, ограничивающую траектории в пространстве настраиваемых параметров, и выбирать ее по заданному множеству Θ допустимых значений θ , чтобы исключить сложнореализуемое проектирование на Θ . Новый класс алгоритмов — это конечно-дифференциальные неевклидовы АСГ

(11.13)
$$\frac{d}{dt} (\theta + \psi(x, t)) = - (\nabla^2 \varphi(\theta))^{-1} \nabla_\theta \dot{Q}$$

для заданной ограниченной вектор-функции $\psi(x,t)$. Для их обоснования используется функция Ляпунова

(11.14)
$$V(x,\theta,t) = Q(x,t) + d_{\varphi}(\theta_*|\theta - \psi(x,t)).$$

Новый, расширенный класс функций Ляпунова можно назвать функциями Ляпунова–Брэгмана. В [214] рассмотрены расширения АСГ, получающиеся при включении в функцию Ляпунова дивергенций от различных функций, приводящие к новым классам алгоритмов, в том числе высших порядков.

11.4. АСГ для нелинейно параметризованных систем

Начиная с самых первых результатов [7, 24] условия применимости АСГ допускали нелинейную параметризацию объекта управления, иногда встречающуюся в приложениях. При этом требовалась выпуклость по θ скорости изменения целевой функции $w(x, \theta, t)$. В дальнейшем эти результаты были расширены [216-218] для различных классов нелинейно параметризованных систем адаптивного управлении. Были разработаны различные модификации для случаев выпуклой и вогнутой параметризации. В работах [127, 129] и др. развит метод "погружения и инвариантности" (Immersion & Invariance, I&I), в рамках которого глобальная сходимость устанавливается при выполнении некоторого условия типа монотонности. В [219] на основе аналогичного подхода решается задача идентификации системы. В [220] вводится условие монотонности, которое по существу идентично условиям, необходимым для обучения обобщенных линейных моделей в машинном обучении и статистике, и позволяет разработать устойчивые алгоритмы адаптивного управления для нелинейно параметризованных систем в этих условиях. Эти результаты можно обобщить и далее на основе функций Ляпунова-Брэгмана. Подобные обобщения подробно рассмотрены в [214, 221, 222], где получаемые алгоритмы названы "естественными" (natural) алгоритмами адаптации.

12. Заключение

В статье представлены основные положения и результаты применения метода скоростного градиента. Показано, что это полезный и эффективный инструмент для решения широкого спектра инженерных задач, подтверждающий, что он «обеспечивает прозрачный компромисс между характеристиками управления и проектными параметрами» [17]. На протяжении более чем 40 лет существования СГ-метод используется многими авторами, которые применяют его для решения широкого круга задач в различных областях. В течение последнего десятилетия возрос интерес к методу скоростного градиента и как к эффективному инструменту для понимания законов природы, таких как динамика экологических систем или фундаментальные законы физики. Недавние исследования [214] показывают, что метод может служить мостиком между теорией управления и областью машинного обучения, вскрывающим общность многих подходов в этих областях. Однако есть и недостаточно изученные вопросы, такие как сходимость АСГ при наличии ограничений и при вырождении условия достижимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Цыпкин Я.З. Адаптация, обучение и самообучение в автоматических системах // АнТ. 1966. № 1. С. 23–61.
- 2. *Цыпкин Я.З.* Адаптация и обучение в автоматических системах. М.: Наука, 1968.
- Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Крутова И.Н., Земляков С.Д. Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем. М.: Машиностроение, 1972.
- Lindorff D.P., Carroll R.L. Survey of Adaptive Control Using Liapunov Design // Int. J. Control. 1973. No. 5. P. 897–914.
- Landau I.D. A Survey of Model Reference Adaptive Techniques Theory and Applications // Automatica. 1974. Jan. Vol. 10. No. 4. P. 353–379.
- Asher R., Andrisani D., Dorato P. Bibliography on Adaptive Control Systems // Proc. IEEE. 1976. Aug. Vol. 64. No. 8. P. 1226–1240.
- Фрадков А.Л. Схема скоростного градиента и ее применение в задачах адаптивного управления // АиТ. 1979. № 9. С. 90–101.
 Fradkov A.L. A Scheme of Speed Gradient and its Application in Problems of Adaptive Control // Autom. Remote Control. 1980. Vol. 40. No. 9. P. 1333–1342.
- Андриевский Б.Р., Стоцкий А.А., Фрадков А.Л. Алгоритмы скоростного градиента в задачах управления и адаптации // АиТ. 1988. № 12. С. 3–39.
 Andriievskii B.R., Stotskii A.A. Fradkov A.L. Velocity Gradient Algorithms in Control and Adaptation // Autom. Remote Control. 1988. Vol. 49. No. 12. P. 1533–1564.
- 9. Фрадков А.Л. Схема скоростного градиента в задачах адаптивного управления // Сб. тр. 9-й Всесоюзной школы-семинара по адаптивным системам. Алма-Ата: КазПТИ, 1979. С. 139–143.
- Неймарк Ю.И. Автоматные модели управления и адаптации // Сб. тр. 9-й Всесоюзной школы-семинара по адаптивным систмам. Алма-Ата: КазПТИ, 1979. С. 107–110.
- Красовский А.А. Оптимальные алгоритмы в задаче идентификации с адаптивной моделью // АнТ. 1976. № 12. С. 75–82.
 Krasovskii A.A. Optimal Algorithms in the Problem of Identification with an Adaptive Model // Autom. Remote Control. 1976. Vol. 37. No. 12. P. 1851–1857.
- 12. *Неймарк Ю.И.* Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978.
- Jurdjevic V., Quinn J.P. Controllability and Stability // J. Different. Equat. 1978. June. Vol. 28. No. 3. P. 381–389.
- 14. Sepulchre R., Janković M., Kokotović P.V. Constructive Nonlinear Control. New York: Springer-Verlag, 1997.

- Фрадков А.Л. Методы адаптивного управления в системных исследованиях // Всесоюзная школа "Прикладные проблемы управления макросистемами". Тезисы докладов (Всесоюзная школа "Прикладные задачи управления макросистемами". Тезисы докладов). М.: ВНИИСИ, 1985.
- 16. Фрадков А.Л. Интегродифференцирующие алгоритмы скоростного градиента // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286. № 4. С. 832–835.
- Jordán M., Bustamante J. A Speed-Gradient Adaptive Control With State/Disturbance Observer for Autonomous Subaquatic Vehicles // Proc. 45th IEEE Conf. Decision Control, CDC 2006. 2006. P. 2008–2013.
- 18. Дружинина М.В., Фрадков А.Л. Алгоритмы скоростного градиента и скоростной разности в задаче нелинейного управления: Пошаговый синтез // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 11. С. 1861–1867.
- 19. *Fradkov A.L.* Cybernetical Physics: From Control of Chaos to Quantum Control. Berlin-Heiderlberg: Springer-Verlag, 2007.
- Селиванов А.А. Динамика процессов максимизации квантовой энтропии в конечноуровневых системах // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2011. Т. 44. № 4. С. 71–79.
- Khantuleva T., Shalymov D. Modelling Non-Equilibrium Thermodynamic Systems from the Speed-Gradient Principle // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2017. Vol. 375. No. 2088.
- Khantuleva T., Shalymov D. Evolution of Complex Equilibrium Systems Based on Extensive Statistical Mechanics // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. No. 33. P. 175–179.
- Plotnikov S.A., Lehnert J., Fradkov A.L., Schöll E. Adaptive Control of Synchronization in Delay-Coupled Heterogeneous Networks of Fitzhugh-Nagumo Nodes // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2016. Vol. 26. No. 04.
- 24. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат лит-ры, 1981.
- Фрадков А.Л. Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат лит-ры, 1990.
- Fradkov A.L., Pogromsky A.Y. Speed-Gradient Control of Chaotic Continuous-Time Systems // IEEE Trans. Circuits Syst. I. 1996. Vol. 43. No. 11. P. 907–913.
- Fradkov A.L., Pogromsky A.Y. Introduction to Control of Oscillations and Chaos. Singapore: World Scientific Publishers, 1998. 391 p.
- 28. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
- 29. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке МАТLAB. СПб.: Наука, 1999. 467 с.
- Андриевский Б.Р., Бобцов А.А., Фрадков А.Л. Методы анализа и синтеза нелинейных систем управления. М., Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2018.
- Dolgopolik M., Fradkov A.L. Nonsmooth and Discontinuous Speed-Gradient Algorithms // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2017. Vol. 25. P. 99–113.
- 32. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат лит-ры, 1983.
- 33. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977.
- Dolgopolik M., Fradkov A.L. Speed-Gradient Control of the Brockett Integrator // SIAM J. Control Optim. 2016. Vol. 54. No. 4. P. 2116–2131.

- 35. Dolgopolik M.V., Fradkov A.L. Finite-Differential Nonsmooth Speed-Gradient Control: Stability, Passivity, Robustness // SIAM J. Control Optim. 2021. (in press).
- Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя / Под. ред. Я.З. Цыпкина. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1999.
- Peaucelle D., Fradkov A.L. Robust Adaptive L2-Gain Control of Polytopic MIMO LTI Systems – LMI results // Syst. Control. Lett. 2008. Vol. 57. P. 881–887.
- Полушин И.Г., Фрадков А.Л., Хилл Д. Пассивность и пассификация нелинейных систем (обзор) // АнТ. 2000. № 3. С. 3–37.
 Polushin I.G., Fradkov A.L., Khill D.D. Passivity and Passification of Nonlinear Systems // Autom. Remote Control. 2000. Vol. 61. No. 3. P. 355–388.
- Kalman R.E. When is a Linear Control System Optimal? // Trans. ASME Ser. D: J. Basic Eng. 1964. Vol. 86. P. 1–10.
- 40. Красовский А.А. Задачи аналитического конструирования регуляторов при заданной работе управлений и управляющих сигналов // АиТ. 1969. № 7. С. 7–17. Krasovsky A.A. Generalization of Problem of Constructing Regulators at Set Functioning of Controls and Controlling Signals // Autom. Remote Control. 1970. Vol. 30. No. 7. P. 1023–1031.
- 41. Krasovski A.A. A New Solution to the Problem of a Control System Analytical Design // Automatica. 1971. Vol. 7. P. 45–50.
- 42. Moylan P.J., Anderson B.D.O. Nonlinear Regulator Theory and an Inverse Optimal Control Problem // IEEE Trans. Automat. Contr. 1973. Vol. 18. P. 460–465.
- Luo W., Chu Y.-C., Ling K.-V. Inverse Optimal Adaptive Control for Attitude Tracking of Spacecraft // IEEE Trans. Automat. Contr. 2005. Vol. 50. No. 11. P. 1639–1654.
- Krstic M. Inverse Optimal Adaptive Control The Interplay Between Update Laws, Control Laws, and Lyapunov Functions // Proc. American Control Conf. 2009. P. 1250–1255.
- 45. Коган М.М. Решение некоторых обратных вариационных задач минимаксного управления нелинейными системами // АиТ. 1999. № 1. С. 9–19. *Kogan M.M.* Solution of Some Inverse Variational Problems of the Minimax Control of Nonlinear Systems // Autom. Remote Control. 1999. Vol. 60. No. 1. P. 6–14.
- 46. Зубов В.И. Теория оптимального управления. Л.: Судостроение, 1966.
- 47. Коган М.М., Неймарк Ю.И. Адаптивное локально-оптимальное управление // АиТ. 1987. № 8. С. 126–136.
- 48. Коган М.М. Локально-минимаксное и минимаксное управления линейными дискретными системами // АиТ. 1997. № 11. С. 33–44. *Kogan M.M.* Local Minimax and Minimax Control of Linear Discrete System// Autom. Remote Control. 1997. Vol. 58. No. 11. P. 1732–1741.
- Фрадков А.Л. Квадратичные функции Ляпунова в задаче адаптивной стабилизации линейного динамического объекта // Сиб. мат. журн. 1976. № 2. С. 436–446.
- 50. Земляков С.Д., Рутковский В.Ю. О синтезе самонастраивающейся системы управления с эталонной моделью // АиТ. 1966. № 3. С. 70–77.
- Земляков С.Д., Рутковский В.Ю. Обобщенные алгоритмы адаптации одного класса беспоисковых самонастраивающихся систем с моделью // АиТ. 1967. Т. 28. № 6. С. 88–94.
- 52. Landau Y.D. Adaptive Control: The Model Reference Approach. New York: Marcel Dekker, 1979.

- 53. Фрадков А.Л. Синтез адаптивной системы стабилизации линейного динамического объекта // АнТ. 1974. № 12. С. 96–103. Fradkov A.L. Synthesis of Adaptive System of Stabilization of Linear Dynamic Plants // Autom. Remote Control. 1974. Vol. 35. No. 12. P. 1960–1966.
- Andrievsky B., Fradkov A.L. Implicit Model Reference Adaptive Controller Based On Feedback Kalman-Yakubovich Lemma // Proc. IEEE Intern. Conf. on Control and Applications (CCA'94), Glasgow, UK, 24–26 Aug. 1994. Vol. 2. IEEE, 1994. P. 1171–1174.
- 55. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Метод пассификации в задачах адаптивного управления, оценивания и синхронизации // АиТ. 2006. № 11. С. 3–37. Andrievskii B.R., Fradkov A.L. Method of Passification in Adaptive Control, Estimation, and Synchronization // Autom. Remote Control. 2006. Vol. 67. No. 11. P. 1699–1731.
- 56. Андриевский Б.Р., Селиванов А.А. Новые результаты по применению метода пассификации. Обзор // АнТ. 2018. № 6. С. 3–48. Andrievskii B.R., Selivanov A.A. New Results on the Application of the Passification Method. A Survey //Autom. Remote Control. 2018. Vol. 79. No. 6. P. 957–995.
- 57. Ioannou P., Kokotovic P. Instability Analysis And Improvement of Robustness of Adaptive Control // Automatica. 1984. Vol. 20. No. 5. P. 583–594.
- Hsu L., Costa R. Variable Structure Model Reference Adaptive Control Using Only Input and Output Measurements: Part 1 // Int. J. Control. 1989. Vol. 49. No. 2. P. 399–416.
- Narendra K.S., Kudva P. Stable Adaptive Schemes for System Identification and Control – Part I // IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. 1974. Vol. SMC-4. No. Nov. P. 542–551.
- Shiriaev A., Fradkov A.L. Stabilization of Invariant Sets for Nonlinear Non-Affine Systems // Automatica. 2000. Vol. 36. No. 11. P. 1709–1715.
- Fradkov A.L. A Nonlinear Philosophy for Nonlinear Systems // Proc. IEEE Conf. Decision and Control, CDC 2000. Vol. 5. 2000. P. 4397–4402.
- Fradkov A.L., Andrievsky B. Singular Perturbation Analysis of Energy Control Systems // J. Vibration and Control. 2006. Vol. 12. No. 4. P. 331–353.
- Aracil J., Fradkov A.L., Gordillo F. Speed-Gradient Algorithms for Underactuated Nonlinear Systems // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2005. Vol. 16. P. 842–847.
- 64. *Григоренко Н.Л.* Задача управления с доминирующей неопределенностью // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19. № 4. С. 64–72.
- Fradkov A.L. Feedback Resonance in Nonlinear Oscillators // Proc. European Control Conf., ECC 1999. 2015. P. 3599–3604.
- Polushin I., Fradkov A.L., Putov V., Rogov K. Energy Control of One-Degree-Of-Freedom Oscillators in Presence of Bounded Force Disturbances // Proc. European Control Conf., ECC 1999. 2015. P. 3440–3445.
- Fradkov A.L., Stotsky A. Speed Gradient Adaptive Control Algorithms for Mechanical Systems // Int. J. Adaptive Control Signal Processing. 1992. Vol. 6. No. 3. P. 211–220.
- Дунская Н.В., Пятницкий Е.С. Стабилизация управляемых механических и электромеханических систем // АнТ. 1988. № 12. С. 40–51. Dunskaya N.V., Pyatnitskii E.S. Stabilization of mechanical and electromechanical systems // Autom. Remote Control. 1988. Vol. 49. No.12. P. 1565–1574.

- Ortega R., Spong M.W. Adaptive Motion Control of Rigid Robots: A Tutorial // Automatica. 1989. Vol. 25. P. 877–888.
- Slotine J., Li W. On The Adaptive Control of Robot Manipulators // Int. J. Robot. Res. 1987. Vol. 6. No. 3. P. 49–59.
- Slotine J., Li W. Applied Nonlinear Control. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1990.
- 72. Fradkov A.L. Nonlinear Adaptive Control: Regulation-Tracking-Oscillations // IFAC Proceedings Volumes. 1994. Vol. 27. No. 11. P. 385-390. IFAC Workshop on New Trends in Design of Control Systems. Smolenice, Slovak Republic, 7-10 September. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/ pii/S1474667017476804.
- Fradkov A.L. Swinging Control of Nonlinear Oscillations // Int. J. Control. 1996. Vol. 64. No. 6. P. 1189–1202.
- Андриевский Б.Р., Гузенко П.Ю, Фрадков А.Л. Управление нелинейными колебаниями механических систем методом скоростного градиента // АиТ. 1996. № 4. С. 4–17.

Andrievskii B.R., Guzenko P.Yu., Fradkov A.L. Control of Nonlinear Oscillation in Mechanic Systems by the Steepest Gradient Method // Autom. Remote Control 1996. Vol.57. No. 4. P. 456–467.

- Fradkov A.L., Makarov I.A., Shiriaev A.S., Tomchina O. P. Control of Oscillations in Hamiltonian Systems // Proc. European Control Conf., ECC'97. 1997. P. 1243– 1248.
- Fradkov A.L., Miroshnik I., Nikiforov V. Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems. Dordrecht: Kluwer, 1999.
- Andrievsky B., Fradkov A.L. Feedback Resonance in Single and Coupled 1-DOF Oscillators // Int. J. Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 1999. Vol. 9. No. 10. P. 2047–2057.
- Kumon M., Washizaki R., Sato J., et al. Controlled Synchronization of Two 1-DOF Coupled Oscillators // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2002. Vol. 15. No. 1. P. 109–114.
- 79. Acosta J., Gordillo F., Aracil J. Swinging Up the Furuta Pendulum By the Speed Gradient Method // Proc. European Control Conf., ECC 2001. 2001. P. 469–474.
- Acosta J., Aracil J., Gordillo F. Nonlinear Control Strategies for the Furuta Pendulum // Control and Intelligent Systems. 2001. Vol. 29. No. 3. P. 101–107.
- Gordillo F., Acosta J., Aracil J. A New Swing-Up Law for the Furuta Pendulum // Int. J. Control. 2003. Vol. 76. No. 8. P. 836–844.
- Ludvigsen H., Shiriaev A., Egeland O. Stabilization of Stable Manifold of Upright Position of the Spherical Pendulum // Modeling, Identification and Control. 2001. Vol. 22. No. 1. P. 3–14.
- Shiriaev A., Fradkov A.L. Stabilization of Invariant Sets for Nonlinear Systems with Applications to Control of Oscillations // Int. J. Robust and Nonlinear Control. 2001. Vol. 11. No. 3. P. 215–240.
- Shiriaev A., Egeland O., Ludvigsen H., Fradkov A.L. VSS-Version of Energy-Based Control for Swinging Up a Pendulum // Syst. Control Lett. 2001. Vol. 44. No. 1. P. 45–56.
- Andrievsky B. Computation of The Excitability Index For Linear Oscillators // Proc. 44th IEEE Conf. Decision and Control, and the European Control Conf., CDC-ECC '05. Vol. 2005. 2005. P. 3537–3540.

- Jordän M., Bonitatibus J. Speed-Gradient Control With Non-Linearity in The Parameters For A Chaotic Colpitts Oscillator // Proc. Int. Conf. on Physics and Control, PhysCon 2005. Vol. 2005. 2005. P. 266–271.
- Kennedy M. Chaos in the Colpitt's Oscillator // IEEE Trans. Circuits Syst. I. 1994. Vol. 41. No. 11. P. 771–774.
- Fradkov A., Andrievsky B., Boykov K. Control of the Coupled Double Pendulums System // Mechatronics. 2005. Vol. 15. No. 10. P. 1289–1303.
- Lehnert J., Hövel P., Flunkert V., et al. Adaptive Tuning of Feedback Gain in Time-Delayed Feedback Control // Chaos. 2011. Vol. 21. No. 4.
- Semenov D., Fradkov A.L. Adaptive Synchronization of Two Coupled Non-Identical Hindmarsh-Rose Systems by the Speed Gradient Method // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. No. 33. P. 12–14.
- Fradkov A.L., Lashkov S., Andrievsky B. Energy Synchronization of Pendulum Mechanisms // Proc. 5th Int. Conf. on Control, Automation, Robotics and Vision, ICARCV 2018. 2018. P. 1257–1262.
- Seifullaev R., Plotnikov S. Attractor Estimates for an Energy-Controlled Pendulum in Presence of Irregular Bounded Disturbance // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. No. 33. P. 132–137.
- Seifullaev R., Fradkov A., Liberzon D. Energy Control of a Pendulum With Quantized Feedback // Automatica. 2016. Vol. 67. P. 171–177.
- Fradkov A.L., Usik E., Andrievsky B. Simple Energy Control in Frenkel-Kontorova Model // Advanced Structured Materials. Switzerland: Springer Nature, 2019. Vol. 103. P. 209–222.
- Zhang F.-F., Liu S.-T., Yu W.-Y. Modified Projective Synchronization With Complex Scaling Factors of Uncertain Real Chaos and Complex Chaos // Chinese Physics B. 2013. Vol. 22. No. 12.
- Zhang F., Liu S. Adaptive Complex Function Projective Synchronization of Uncertain Complex Chaotic Systems // J. Comput. Nonlinear Dynam.. 2016. Vol. 11. No. 1.
- Fradkov A., Andrievsky B. Singular Perturbations of Systems Controlled by Energy-Speed-Gradient Method // Proc. IEEE Conf. Decision and Control, CDC 2004. Vol. 4. 2004. P. 3441–3446.
- Yao J., Guan Z.-H., Hill D.J., Wang H.O. On Passivity and Impulsive Control of Complex Dynamical Networks with Coupling Delays // Proc. 44th IEEE Conf. Decision and Control and the European Control Conf. 2005. P. 1595–1600.
- Yu W., DeLellis P., Chen G., et al. Distributed Adaptive Control of Synchronization in Complex Networks // IEEE Trans. Automat. Contr. 2012. Vol. 57. No. 8. P. 2153–2158.
- 100. Джунусов И.А., Фрадков А.Л. Адаптивная синхронизация сети взаимосвязанных нелинейных систем Лурье // АнТ. 2009. № 7. С. 111–126. Dzhunusov I.A., Fradkov A.L. Adaptive Synchronization of a Network of Interconnected Nonlinear Lur'e Systems // Autom. Remote Control. 2009. Vol. 70. No. 7. P. 1190–1205.
- 101. Selivanov A., Lehnert J., Dahms T., et al. Adaptive Synchronization in Delay-Coupled Networks of Stuart-Landau Oscillators // Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. 2012. Vol. 85. No. 1.
- 102. Tomchin D., Tomchina O., Fradkov A.L. Controlled Passage Through Resonance for Flexible Vibration Units // Mathematical Problems in Engineering. 2015. Vol. 2015. 8 p.

- 103. Gorlatov D., A. Tomchin D., Tomchina O. Controlled Passage through Resonance for Two-Rotor Vibration Unit: Influence of Drive Dynamics // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48. No. 11. P. 313–318.
- 104. Fradkov A.L., Tomchina O., Tomchin D., Gorlatov D. Time-Varying Observer of The Supporting Body Velocity for Vibration Units // IFAC-PapersOnLine. 2016. Vol. 49. No. 14. P. 18–23.
- 105. Fradkov A.L., Gorlatov D., Tomchina O., Tomchin D. Control of Oscillations in Vibration Machines: Start Up and Passage Through Resonance // Chaos. 2016. Vol. 26. No. 11.
- 106. Boikov V., Andrievsky B., Shiegin V. Experimental Study of Unbalanced Rotors Synchronization of the Mechatronic Vibration Setup // Cybernetics and Physics. 2016. Vol. 5. No. 1. P. 5–11.
- 107. Bartkowiak R. Controlled Synchronization at The Existence Limit for an Excited Unbalanced Rotor // Int. J. Non-Linear Mechanics. 2017. Vol. 91. P. 95–102.
- 108. Плотников С.А., Фрадков А.Л., Шепелявый А.И. Метод скоростного градиента в обратной задаче Стокера для синхронной электрической машины // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). № 1. С. 111–118.
- 109. Plotnikov S., Shepeljavyi A. Energy Control of Electric Machine: Inverse Stoker Problem // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. No. 33. P. 22–26.
- 110. Roozegar M., Mahjoob M., Ayati M. Adaptive Estimation of Nonlinear Parameters of a Nonholonomic Spherical Robot Using a Modified Fuzzy-based Speed Gradient Algorithm // Regular and Chaotic Dynamics. 2017. Vol. 22. No. 3. P. 226–238.
- Fradkov A.L., Andrievsky B. Passification-Based Robust Flight Control Design // Automatica. 2011. Vol. 47. No. 12. P. 2743–2748.
- 112. Боднер В.А. Системы управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1973. 698 с.
- 113. *Буков В.Н.* Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М.: Наука, 1987. 230 с.
- 114. Ефремов А.В., Захарченко В.Ф., Овчаренко В.Н., Суханов В.Л. Динамика полета: учебник для студентов высших учебных заведений / Под. ред. Г.С. Бюшгенса. М.: Машиностроение, 2011.
- 115. Andrievsky B.R., Churilov A., Fradkov A. Feedback KAlman–YAkubovich LEmma and its Applications to Adaptive Control // Proc. 35th IEEE Conf. Dec. Contr. Kobe, Japan: 1996. P. 4537–4542.
- Fradkov A.L. Adaptive Stabilization for Minimum-Phase Multi-Input Plants Without Output Derivatives Measurement // Physics-Doklady. 1994. Vol. 39. No. 8. P. 550–552.
- Iwai Z., Mizumoto I. Robust and Simple Adaptive Control Systems // Int. J. Control. 1992. Vol. 55. P. 1453–1470.
- 118. Kaufman H., Bar-Kana I., Sobel K. Direct Adaptive Control Algorithms. New York: Springer Verlag, 1994.
- Bar-Kana I. Adaptive Control Can Robustify Uncertain Control systems // Proc. American Control Conf., ACC 1994. Baltimore, Maryland: 1994. June. P. 63–67.
- 120. Amelin K., Andrievsky B., Tomashevich S., Fradkov A.L. Data Exchange with Adaptive Coding between Quadrotors in a Formation // Autom. Remote Control. 2019. Vol. 80. No. 1. P. 150–163.
- Furtat I., Fradkov A.L., Peaucelle D. Robust Control of Aircraft Lateral Movement // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2014. Vol. 19. P. 5199– 5204.

- 122. Hsu C., Lan E. Theory of Wing Rock // J. Aircraft. 1985. Vol. 22. P. 920–924.
- 123. Ng T., Malcolm G., Lewis L. Experimental Study of Vortex Flows Over Delta Wings in Wing-Rock Motion // AIAA paper 89-2187-CP. 1989.
- 124. Ng T., Ong L., Suarez J., Malcolm G. Wing Rock Suppression Using Forebody Vortex Control // Proc. 9th Applied Aerodynamics Conf. Baltimore, MD, USA. AIAA, 1991. 23–25 September. art. No. A91-53745.
- Katz J. Wing/Vortex Interactions and Wing Rock // Progress in Aerospace Sciences. 1999. Vol. 35. P. 727–750.
- 126. Lee K., Ghorawat P., Singh S. Wing Rock Control by Finite-Form Adaptation // J. Vibration and Control. 2016. Vol. 22. No. 11. P. 2687–2703.
- 127. Astolfi A., Ortega R. Immersion And Invariance: A New Tool for Stabilization and Adaptive Control of Nonlinear Systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 2003. Vol. 48. No. 4. P. 590–606.
- Lee K., Singh S. Noncertainty-Equivalent Adaptive Wing-Rock Control via Chebyshev Neural Network // J. Guidance, Control, and Dynamics. 2014. Vol. 37. No. 1. P. 123–133.
- 129. Liu X., Ortega R., Su H., Chu J. Immersion and Invariance Adaptive Control of Nonlinearly Parameterized Nonlinear Systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 2010. Vol. 55. No. 9. P. 2209–2214.
- 130. Andrievsky B., Kudryashova E., Kuznetsov N., et al. Suppression of Nonlinear Wing-Rock Oscillations by Adaptive Control with the Implicit Reference Model // AIP Conf. Proc. 2018. Vol. 2046.
- Andrievsky B., Kudryashova E., Kuznetsov N., Kuznetsova O. Aircraft Wing Rock Oscillations Suppression by Simple Adaptive Control // Aerospace Sci. Technology. 2020. Oct. Vol. 105.
- Zribi M., Alshamali S., Al-Kendari M. Suppression of the Wing-Rock Phenomenon Using Nonlinear Controllers // Nonlinear Dynamics. 2013. Vol. 71. No. 1–2. P. 313–322.
- 133. Kori D., Kolhe J., Talole S. Extended State Observer Based Robust Control of Wing Rock Motion // Aerospace Sci. Technology. 2014. Vol. 33. No. 1. P. 107–117.
- 134. Tewari A. Nonlinear Optimal Control of Wing Rock Including Yawing Motion // Proc. AlAA Guidance, Navigation, and Controls Conf. Denver, U.S.A.: 2000. Aug. 14–17. Paper No. AIAA-2000-4251.
- 135. Malekzadeh M., Khosravi A., Rasouli H., Noei A. Wing Rock Suppression via Backstepping Controller // Proc. 2015 2nd Int. Conf. Knowledge-Based Engineering and Innovation (KBEI-2015), Tehran, Iran. IEEE, 2016. P. 792–796.
- 136. Andrievsky B., Kudryashova E., Kuznetsov N. et al. Simple Adaptive Control of Aircraft Roll Angle, Suppressing the Wing Rock Oscillations // Mathem. Engineer. Sci. Aerospace. 2019. Vol. 10. No. 3. P. 373–386.
- 137. Sobel K., Kaufman H., Mabius I. Implicit Adaptive Control for a Class of MIMO Systems // IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. 1982. Vol. 18. P. 576–589.
- Iwai Z., Mizumoto I. Robust and Simple Adaptive Control Systems // Int. J. Control. 1992. Vol. 55. P. 1453–1470.
- Barkana I. Adaptive Control? But is so Simple!: A Tribute to the Efficiency, Simplicity and Beauty of Adaptive Control // J. Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications. 2016. Vol. 83. No. 1. P. 3–34.
- 140. Andrievsky B., Fradkov A., Peaucelle D. Adaptive Control Experiments for LAAS "Helicopter" Benchmark // Proc. Int. Conf. on Physics and Control, PhysCon 2005. 2005. P. 760–765.

- 141. Andrievsky B., Peaucelle D., Fradkov A.L. Adaptive Control of 3DOF Motion for LAAS Helicopter Benchmark: Design and Experiments // Proc. American Control Conf., ACC 2007. 2007. P. 3312–3317.
- 142. Andrievsky B., Kudryashova E., Kuznetsov N., et al. Simple Adaptive Control for Airfoil Flutter Suppression // Mathem. Engineer. Sci. Aerospace. 2018. Vol. 9. No. 1. P. 5–20.
- 143. Chen C.-L., Peng C.C., Yau H.-T. High-Order Sliding Mode Controller With Backstepping Design for Aeroelastic Systems // Commun. Nonlinear Sci. Numerical Simulation. 2012. Vol. 17. No. 4. P. 1813 - 1823. URL: http://www.sciencedirect. com/science/article/pii/S1007570411005028.
- 144. Abdelkefi A., Vasconcellos R., Nayfeh A., Hajj M. An Analytical and Experimental Investigation into Limit-Cycle Oscillations of an Aeroelastic System // Nonlinear Dynamics. 2013. Vol. 71. No. 1–2. P. 159–173.
- 145. Andrievsky B., Guzenko P.Y. Energy Speed-Gradient Control of Nonlinear Satellite Oscillations // Cybernetics and Physics. 2014. Vol. 3. No. 1. P. 9-15. URL: http://lib.physcon.ru/doc?id=e7ac7c9cefa5.
- 146. Meehan P.A., Asokanthan S.F. Analysis of Chaotic Instabilities in a Rotating Body With Internal Energy Dissipation // Int. J. Bifurc. Chaos. 2006. Jan. Vol. 16. No. 1. P. 1–19.
- 147. Shahov E.M. Oscillations of Probe Satellite Towed by Non-Stretched Thread in Heterogeneous Atmosphere // Appl. Math. and Mech. 1988. Vol. 52. No. 4. P. 567– 572.
- 148. Beletsky V.V., Levin E.M. Dynamics of Space Tethered Systems. San Diego: Am. Astronautical Soc., 1993.
- Druzhinina M., Stefanopoulou A., Moklegaard L. Speed Gradient Approach to Longitudinal Control of Heavy-Duty Vehicles Equipped With Variable Compression Brake // IEEE Trans. Contr. Syst. Technol. 2002. Vol. 10. No. 2. P. 209–220.
- 150. Kolmanovsky I., Druzhinina M., Sun J. Speed-Gradient Approach to Torque and Air-To-Fuel Ratio Control in DISC Engines // IEEE Trans. Contr. Syst. Technol. 2002. Vol. 10. No. 5. P. 671–678.
- 151. Jordán M., Bustamante J. A Totally Stable Adaptive Control for Path Tracking of Time-Varying Autonomous Underwater Vehicles // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2008. Vol. 41. No. 2. P. 15985–15990.
- 152. Fossen T. Guidance and Control of Ocean Vehicles. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 1994.
- 153. Kreuzer E., Pinto F. Controlling the Position of a Remotely Operated Underwater Vehicle // App. Math. Comp. 1996. Vol. 78. P. 175–185.
- 154. Jordán M., Bustamante J. An Adaptive Control System for Perturbed Rovs in Discrete Sampling Missions with Optimal-Time Characteristics // Proc. IEEE Conf. Decision and Control, CDC 2007. 2007. P. 1300–1305.
- 155. Dyda A., Os'kin D. Underwater Robot Intelligent Control Based on Multilayer Neural Network // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2010. Vol. 43. No. 20. P. 179–183.
- 156. Oskin D., Dyda A. Underwater Robot Intelligent Control Based on Multilayer Neural Network // Proc. 2013 IEEE 7th Int. Conf. on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems, IDAACS 2013. Vol. 2. 2013. P. 921–924.
- 157. Dyda A., Oskin D., Dyda P. An Application of Speed Gradient Method to Neural Network Control for Underwater Robot // CEUR Workshop Proc. Vol. 1623. 2016. P. 689–700.

- 158. Fossen T.I. Marine Control Systems: Guidance, Navigation and Control of Ships, Rigs and Underwater Vehicles. Trondheim, Norway: Marine Cybernetics, 2002. ISBN: 82-92356-00-2.
- 159. Дыда А.А. Адаптивное и нейросетевое управление сложными динамическими объектами. Владивосток: Дальнаука, 2007. ISBN: 9785804408115.
- Pchelkina I., Fradkov A.L. Combined Speed-Gradient Controlled Synchronization of Multimachine Power Systems // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2013. Vol. 46. No. 12. P. 59–63.
- 161. Lastire E., Alanis A., Sanchez E. Inverse Optimal Neural Control with Speed Gradient for a Power Electric System With Changes in Loads // Proc. 9th Int. Conf. on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, CCE 2012. 2012.
- 162. Alanis A., Lastire E., Arana-Daniel N., Lopez-Franco C. Inverse Optimal Control with Speed Gradient for A Power Electric System Using a Neural Reduced Model // Mathematical Problems in Engineering. 2014. Vol. 2014.
- Furtat I., Tergoev N., Tomchina O., et al. Speed-Gradient-Based Control of Power Network: Case Study // Cybernetics and Physics. 2016. Vol. 5. No. 3. P. 85–90.
- 164. Gavrilenko A., Merkuryev I., Podalkov V. Algorithms for the Control of Oscillations of the Wave Solid-State Gyroscope Resonator // Proc. 15th Saint Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems, ICINS 2008. 2008. P. 34–36.
- 165. *Мартыненко Ю.Г., Меркурьев И.В., Подалков В.В.* Управление нелинейными колебаниями вибрационного кольцевого микрогироскопа // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 77–89.
- 166. Putty M., Najafi K. A Micromachined Vibrating Ring Gyroscope // Proc. Digest, Solid-State Sensors and Actuators Workshop, Hilton Head, SC. 1994. P. 213–220.
- 167. Ayazi F., Najafi K. A HARPSS Polysilicon Vibrating Ring Gyroscope // J. Microelectromechanical System. 2001. Vol. 10. No. 2. P. 169–179.
- 168. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974.
- 169. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. В 10-ти т. 4-е изд., испр. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. Т. І. Механика.
- 170. Каширских В.Г., Завъялов В.М., Переверзев С.С. Формирование алгоритма управления плавным пуском асинхронного электродвигателя на основе метода скоростного градиента // Вестник КузГТУ. 2005. № 2. С. 7–9.
- 171. Семыкина И.Ю., Завъялов В.М., Глазко М.А. Градиентное управление многодвигательным асинхронным электроприводом // Изв. Томского политехн. ун-та. 2009. Т. 315. № 4. С. 65–69.
- 172. Завъялов В.М. Снижение динамических нагрузок в трансмиссиях горных машин. Кемерово: КузГТУ, 2008.
- 173. Astrov Y., Fradkov A.L., Guzenko P. Control of a Noise-Induced Transition in a Nonlinear Dynamical System // Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. 2008. Vol. 77. No. 2.
- 174. Pchelkina I., Fradkov A.L. Control of Oscillatory Behavior of Multispecies Populations // Ecological Modelling. 2012. Vol. 227. P. 1–6.
- 175. Saito H., Ohmori H. Control of an Abnormal Human Menstrual Cycle in PCOS by Speed Gradient Algorithm // SICE Annual Conf. 2011, Tokyo, Japan. 2011. Sep. 13–18. P. 1436–1441.

- 176. Selgrade J. F. Bifurcation Analysis of a Model for Hormonal Regulation of The Menstrual Cycle // Mathematical Biosciences. 2010. Vol. 225. No. 2. P. 108-114. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0025556410000350.
- 177. Efimov A., Ananyevskiy M., Borondo F., et al. Control of Isomerization In Ensembles of Nonrigid Molecules Based on Classical and Quantum-Mechanical Models, LiCN // Proc. 20th European Conf. Modelling and Simulation: Modelling Methodologies and Simulation Key Technologies in Academia and Industry, ECMS 2006. 2006. P. 495–500.
- 178. Efimov A., Borondo F., Benito R. Control of Isomerization in Classical Ensembles of Nonrigid Molecular Systems, LiCN // Proc. Int. Conf. on Physics and Control, PhysCon 2005. Vol. 2005. P. 933–938.
- 179. Ananjevsky M.S., Vetchinkin A., Sarkisov O., et al. Quantum Control of Dissociation of an Iodine Molecule by One and Two Femtosecond Laser Pulses Excitation // Proc. 2005 International Conf. Physics and Control, 2005., St. Petersburg, Russia. IEEE, 2005. P. 636–641.
- 180. Ананьевский М.С., Фрадков А.Л. Управление наблюдаемыми в конечноуровневых квантовомеханических системах // АиТ. 2005. № 5. С. 63–75. Anan'evskii M.S., Fradkov A.L. Control of the Observables in the Finite-Level Quantum Systems // Autom. Remote Control. 2005. Vol. 66. No. 5. P. 734–745.
- 181. Ананьевский М.С. Селективное управление наблюдаемыми в ансамбле квантовомеханических молекулярных систем // АиТ. 2007. № 8. С. 32–43. Anan'evskii M. Selective Control of the Observables in the Ensemble of Quantum

Anan evsku M. Selective Control of the Observables in the Ensemble of Quantum Mechanical Molecular Systems // Autom. Remote Control. 2007. Vol. 68. No. 8. P. 1322–1332.

- 182. Borisenok S., Fradkov A.L., Proskurnikov A. Speed Gradient Control of Qubit State // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2010. Vol. 4. No. PART 1. P. 81–85.
- 183. Alaubaidy M.N. Quantum Entanglement Recovery Using Speed Gradient over Noisy Quantum Channels // Journal of Critical Reviews. 2020. Vol. 7. No. 6. P. 1012– 1020. http://www.jcreview.com/?mno=104261. URL: http://www.jcreview. com/?mno=104261.
- 184. Pechen A., Borisenok S. Energy Transfer in Two-Level Quantum Systems via Speed Gradient-Based Algorithm // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48. No. 11. P. 446–450.
- 185. Печень А.Н. О методе скоростного градиента для генерации унитарных квантовых операций в замкнутых квантовых системах // УМН. 2016. Т. 71. № 3 (429). С. 205–206.
- 186. Porubov A., Fradkov A.L., Andrievsky B. Feedback Control for Some Solutions of the Sine-Gordon Equation // Applied Mathematics and Computation. 2015. Vol. 269. P. 17–22.
- 187. Porubov A., Fradkov A.L., Andrievsky B., Bondarenkov R. Feedback Control of the Sine-Gordon Antikink // Wave Motion. 2016. Vol. 65. P. 147–155.
- 188. Porubov A., Andrievsky B. Control Methods for Localization of Nonlinear Waves // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2017. Vol. 375. No. 2088.
- 189. Porubov A., Bondarenkov R., Bouche D., Fradkov A. Two-Step Shock Waves Propagation for Isothermal Euler Equations // Appl. Math. Comput. 2018. Vol. 332. P. 160–166.

- 190. Porubov A., Antonov I., Indeitsev D., Fradkov A.L. Mechanical System Allowing Distributive Control with Feedback // Mechanics Research Communications. 2018. Vol. 93. P. 124–127.
- Porubov A., Antonov I., Fradkov A.L. Boundary Control of Nonlinear Strain Waves in Di-Atomic Crystal Layer // Wave Motion. 2019. Vol. 91.
- Dolgopolik M., Fradkov A.L., Andrievsky B. Boundary Energy Control of the Sine-Gordon Equation // IFAC-PapersOnLine. 2016. Vol. 49. No. 14. P. 148–153.
- 193. Dolgopolik M., Fradkov A.L., Andrievsky B. Boundary Energy Control of a System Governed by The Nonlinear Klein–Gordon Equation // Mathematics of Control, Signals, and Systems. 2018. Vol. 30. No. 1.
- 194. Dolgopolik M., Fradkov A.L. Energy Tracking for the Sine-Gordon Equation with Dissipation via Boundary Control // Proc. European Control Conf., ECC 2018. 2018. P. 3025–3030.
- 195. Dolgopolik M., Fradkov A., Andrievsky B. Observer-Based Boundary Control of the Sine-Gordon Model Energy // Automatica. 2020. Vol. 113.
- 196. Orlov Y., Fradkov A.L., Andrievsky B. Energy Control of Distributed Parameter Systems via Speed-Gradient Method: Case Study of String and Sine-Gordon Benchmark Models // Int. J. Control. 2017. Vol. 90. No. 11. P. 2554–2566.
- 197. Andrievsky B., Orlov Y. Numerical Evaluation of Sine-GOrdon Chain Energy Control via Subdomains State Feedback under Quantization and Time Sampling // Cybernetics and Physics. 2019. Vol. 8. No. 1. P. 18–28.
- 198. Orlov Y., Fradkov A., Andrievsky B. Output Feedback Energy Control of the Sine-Gordon PDE Model Using Collocated Spatially Sampled Sensing and Actuation // IEEE Transactions on Automatic Control. 2020. Vol. 65. No. 4. P. 1484–1498. cited By 3.
- 199. Андриевский Б.Р., Блехман И.И., Борцов Ю.А., и др. Управление мехатронными вибрационными установками / Под. ред. Блехмана И.И., Фрадкова А.Л. Сер.: Анализ и синтез нелинейных систем. СПб: Наука, 2001.
- 200. Fridman E. Observers and Initial State Recovering for a Class of Hyperbolic Systems via Lyapunov Method // Autom. 2013. Vol. 49. P. 2250–2260.
- 201. Fridman E., Terushkin M. New Stability and Exact Observability Conditions for Semilinear Wave Equations // Automatica. 2016. Vol. 63. P. 1–10.
- 202. Orlov Y., Fradkov A.L., Andrievsky B. Sliding Mode-based Speed-gradient Control of the String Energy // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50. No. 1. P. 8484–8489.
- Fradkov A.L. Speed-gradient Entropy Principle for Nonstationary Processes // Entropy. 2008. Vol. 10. No. 4. P. 757–764.
- 204. Fradkov A., Krivtsov A. Speed-Gradient Principle for Description of Transient Dynamics in Systems Obeying Maximum Entropy Principle // AIP Conf. Proc. 2010. Vol. 1305. P. 399–406.
- 205. Fradkov A.L., Khantuleva T. Cybernetic Model of The Shock Induced Wave Evolution in Solids // Procedia Structural Integrity. 2016. Vol. 2. P. 994–1001.
- 206. Khantuleva T. Thermodynamic Evolution Far From Equilibrium // AIP Conf. Proc. 2018. Vol. 1959. URL: https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/ 1.5034750.
- 207. Fradkov A.L., Shalymov D. Speed Gradient and MaxEnt Principles for Shannon and Tsallis Entropies // Entropy. 2015. Vol. 17. No. 3. P. 1090–1102.
- 208. Shalymov D., Fradkov A.L. Dynamics of the F-Divergence Minimization Processes Based on the Speed-Gradient Principle // Proc. IEEE Conf. Norbert Wiener in the 21st Century, 21CW 2016. 2016. P. 7–11.

- 209. Shalymov D., Fradkov A., Liubchich S., Sokolov B. Dynamics of the Relative Entropy Minimization Processes // Cybernetics and Physics. 2017. Vol. 6. No. 2. P. 80–87.
- 210. Зубарев Д.Н. Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971.
- 211. Shalymov D., Fradkov A.L. GENERIC and Speed-Gradient Principle // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. No. 33. P. 121–126.
- 212. Селиванов А.А. Динамика процессов максимизации квантовой энтропии в конечноуровневых системах // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2011. № 4. С. 71–79.
- 213. Цыкунов А.М. Алгоритмы скоростного градиента для систем с запаздыванием // АиТ. 1987. № 3. С. 97–106.
- Boffi N., Slotine J. Implicit Regularization and Momentum Algorithms in Nonlinearly Parameterized Adaptive Control and Prediction // Neural Computation. 2021. Vol. 33. P. 590–673.
- 215. *Брэгман Л.М.* Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач выпуклого программирования // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1967. Т. 7. № 3. С. 620–631.
- 216. Ai-Poh Loh, Annaswamy A., Skantze F. Adaptation in the Presence of a General Nonlinear Parameterization: An Error Model Approach // IEEE Trans. Automat. Contr. 1999. Vol. 44. No. 9. P. 1634–1652.
- 217. Fradkov A.L., Ortega R., Bastin G. Semi-Adaptive Control of Convexly Parametrized Systems with Application to Temperature Regulation of Chemical Reactors // Int. J. Adaptive Control Signal Processing. 2001. Vol. 15. No. 4. P. 415–426.
- Tyukin I., Prokhorov D., Terekhov V. Adaptive Control with Nonconvex Parameterization // IEEE Trans. Automat. Contr. 2003. Vol. 48. No. 4. P. 554–567.
- Ortega R., Gromov V., Nuño E., et al. Parameter Estimation of Nonlinearly Parameterized Regressions without Overparameterization: Application to adaptive control // Automatica. 2021. Vol. 127. P. 109544.
- 220. Tyukin I., Prokhorov D., van Leeuwen C. Adaptation and Parameter Estimation in Systems with Unstable Target Dynamics and Nonlinear Parametrization // IEEE Trans. Automat. Contr. 2007. Vol. 52. No. 9. P. 1543–1559.
- 221. Lee T., Kwon J., Park F. A Natural Adaptive Control Law for Robot Manipulators // Proc. 2018 IEEE/RSJ Int. Conf. Intelligent Robots and Systems. Piscataway, NJ: IEEE, 2018. P. 1–9.
- Wensing P., Slotine J.-J. Beyond Convexity Contraction and Global Convergence of Gradient Descent // PLoS ONE. 2020. Vol. 15. No. 8. e0236661.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 31.08.2020 После доработки 12.04.2021

Принята к публикации 29.04.2021
Линейные системы

© 2021 г. В.С. ВЕРБА, член-корр. РАН, д-р техн. наук (vvs.msk@gmail.com) (АО "Концерн "Вега", Москва)

МЕТОДЫ НАВЕДЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ СО СМЕНОЙ ПРИОРИТЕТОВ УПРАВЛЕНИЯ ¹

Рассмотрены варианты реализации смены управленческих приоритетов в процессе наведения летательных аппаратов, основанные на использовании нестационарных моделей состояния, переменных коэффициентов штрафов функционалов качества и учете несоответствия динамических свойств перехватчика и цели. Для каждого варианта приведены конкретные примеры синтеза метода наведения и проведен их анализ.

Ключевые слова: смена управленческих приоритетов, локальная оптимизация систем наведения, нестационарные методы самонаведения.

DOI: 10.31857/S0005231021090026

1. Введение

Современное противоборство в воздушно-космической сфере характеризуется групповым применением как средств нападения, так и защиты с быстрой сменой обстановки и скоротечностью боестолкновений уже в процессе применения средств поражения [1, 2].

Изменение текущей обстановки, связанное с появлением более опасных или более благоприятных для поражения целей, при групповом противостоянии или выявлении либо защите приоритетных целей (авиационных комплексов радиолокационного дозора и наведения [3], самолетов-ретрансляторов, топливозаправщиков [4] и т.д.) предопределяет необходимость изменения приоритетов уже пущенных ракет.

Кроме того, весьма перспективным при групповых действиях является пуск ракет-перехватчиков в центр группы с выбором конкретной цели, в том числе и приоритетной в процессе приближения к группе [5].

При этом необходимо отметить все нарастающую сложность требований, предъявляемых к используемым методам наведения [6], обусловленную необходимостью одновременного удовлетворения нескольким, зачастую противоречащим друг другу, критериям. В частности, к таким задачам можно отнести индивидуальное наведение на отдельную цель (например, наиболее опасную, приоритетную и т.д.) в составе плотной неразрешаемой по угловым коор-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00060-а).

динатам классическими способами группы, когда вначале необходимо разрешить цели за счет траекторного управления наблюдением [5, 7], обеспечивая тем самым ее автоматическое сопровождение, а затем на конечном участке обеспечить минимизацию линейного промаха [8] по выбранной цели.

Еще одним примером необходимости решения двухкритериальных задач для летательных аппаратов (ЛА) является формирование сигналов совместного группового управления, которое должно обеспечить и полет по маршруту, и построение требуемой топологии (строя) участников.

Можно привести еще целый ряд новых многокритериальных задач управления.

В связи с этим весьма актуальной становится задача оптимизации законов управления ЛА со сменой приоритетов в процессе функционирования. Эта задача может решаться различными способами. Наиболее простой способ принудительная смена закона управления через определенное время полета, в том числе и путем введения в него дополнительных слагаемых, либо принудительная смена в используемом законе требуемых координат состояния [9]. Однако такой способ приводит к появлению дополнительных, достаточно значительных переходных процессов, которые отрицательно сказываются как на стабильности траектории полета, так и на работе информационных систем, особенно систем сопровождения по угловым координатам.

Более рациональным является способ постепенной смены приоритетов управления на основе использования нестационарных методов наведения [6], не приводящий к появлению значительных переходных процессов при формировании траектории полета.

Частично вопросы такого управления летательными аппаратами в изменяющейся обстановке рассмотрены в [10–14].

Цель статьи — рассмотреть на конкретных примерах возможные наиболее эффективные варианты синтеза нестационарных законов наведения ЛА, обеспечивающих плавное перераспределение управленческих приоритетов в процессе полета.

В основу этих вариантов будут положены:

- использование нестационарных моделей состояния;
- использование переменных коэффициентов в матрице штрафов за величину управления;
- использование переменных коэффициентов в матрицах штрафов за точность функционирования;
- учет несоответствия динамических свойств цели и перехватчика.

В свою очередь, определение момента начала перераспределения управленческих функций может выполняться по различным признакам:

- по достижении координатами состояний тех или иных значений (дальности, скорости, углов и т.д.);
- по факту приближения к максимально допустимым ошибкам управления либо ошибкам автоматического сопровождения;
- по факту достижения определенных перегрузок и т.д.

В общем случае задача синтеза управления с перераспределением приоритетов в процессе траекторного управления может решаться различными способами [15]. Далее она будет решаться на основе наиболее простой разновидности локальной оптимизации статистической теории оптимального управления. Эта модификация позволяет для системы [8]

(1)
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \xi_x(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

включающей *п*-мерную модель требуемого движения цели

(2)
$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{T}}(t) = \mathbf{F}_{\mathrm{T}}(t)\mathbf{x}_{\mathrm{T}}(t), \quad \mathbf{x}_{\mathrm{T}}(0) = \mathbf{x}_{\mathrm{T}0}$$

и *п*-мерную модель перехватчика

(3)
$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{F}_{\mathbf{y}}(t)\mathbf{x}_{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{B}_{\mathbf{y}}(t)\mathbf{u}(t) + \xi_{y}(t), \quad \mathbf{x}_{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{x}_{\mathbf{y}0},$$

при наличии измерений

(4)
$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \xi_{\mathbf{H}}(t)$$

сформировать управление

(5)
$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_{y}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q} \left(\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{T}}(t) - \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{y}}(t) \right),$$

минимизирующее функционал качества

(6)
$$I = M \left\{ \int_{0}^{t} \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t) \mathbf{K}(t) \mathbf{u}(t) dt + (\mathbf{x}_{\mathrm{T}}(t) - \mathbf{x}_{\mathrm{y}}(t))^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}(t) (\mathbf{x}_{\mathrm{T}}(t) - \mathbf{x}_{\mathrm{y}}(t)) \right\}$$

в каждый текущий момент времени t.

Здесь **u** — *r*-мерный ($r \leq n$) вектор управления; $\hat{\mathbf{x}}_{T}$ и $\hat{\mathbf{x}}_{y}$ — векторы оптимальных оценок процессов (2) и (3) формируемых по измерениям (4), $\xi_{x}(t)$, $\xi_{y}(t)$ и $\xi_{u}(t)$ — центрированные векторы гауссовских возмущений состояния и измерений с известными матрицами интенсивностей.

 $\mathbf{F}_{\mathrm{T}}(t)$, $\mathbf{F}_{\mathrm{y}}(t)$ и $\mathbf{B}_{\mathrm{y}}(t)$ — в общем случае нестационарные матрицы внутренних связей и эффективности управления; $\mathbf{Q}(t)$ и $\mathbf{K}(t)$ — неотрицательно и положительно определенные матрицы штрафов за неточность функционирования и величину сигналов управления; \mathbf{z} — *m*-мерный ($m \leq 2n$) вектор измерений; \mathbf{H} — матрица связи измерений и состояния; \mathbf{M} – знак операции математического ожидания.

2. Перераспределение приоритетов управления при использовании нестационарных моделей состояния

В математическом плане задача синтеза закона управления в горизонтальной плоскости формулируется следующим образом. Для объекта управления, угловое положение которого относительно подвижной цели определяется системой уравнений [8]:

(7)
$$\dot{\varphi}_{\Gamma} = \omega_{\Gamma} + \frac{j_{\Gamma} - j_{\Pi\Gamma}}{\dot{\Pi}},$$

(8)
$$\dot{\omega}_{\Gamma} = -\frac{2\dot{\Pi}}{\Pi}\omega_{\Gamma} - \frac{j_{\Gamma} - j_{\Pi\Gamma}}{\Pi} + \xi_{\omega\Gamma},$$

предназначенного для наведения в упрежденную точку встречи под углом $\varphi_{\Gamma T}$, необходимо сформировать сигнал управления j_{Γ} , оптимальный по минимуму функционала

(9)
$$I = M_y \left\{ \begin{bmatrix} \varphi_{\Gamma\Gamma} - \varphi_{\Gamma} \\ 0 - \omega_{\Gamma} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} q_{\varphi} & 0 \\ 0 & q_{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{\Gamma\Gamma} - \varphi_{\Gamma} \\ 0 - \omega_{\Gamma} \end{bmatrix} + \int_0^t j_{\Gamma}^2 k_j dt \right\},$$

который обеспечивает устранение угловых ошибок

(10)
$$\Delta \varphi = \varphi_{\Gamma T} - \varphi_{\Gamma}$$

и линейных промахов [8]

(11)
$$h = \frac{\underline{\Pi}^2 \omega_{\Gamma}}{V_{\text{отн}}}.$$

Здесь $\varphi_{\Gamma T}$ – требуемый и φ_{Γ} – текущий бортовые пеленги, ω_{Γ} – угловая скорость линии визирования, Д и $\dot{\Pi}$ – дальность до цели и скорость ее изменения, $j_{\Pi\Gamma}$ – поперечное ускорение цели, q_{φ} , q_{ω} и k_j – коэффициенты штрафов за величину угловых ошибок $\varphi_{\Gamma T} - \varphi_{\Gamma}$, линейного промаха (11) и величину сигнала управления. Геометрия взаимного расположения цели и перехватчика при использовании (7)–(10) показана на рис. 1, на котором O_{Π} , O_{Π} и $O_{\rm YTB}$ – соответственно точки расположения перехватчика, цели и упрежденной точки встречи, а V_{Π} и V_{Π} – векторы скорости цели и перехватчика.

Выбор в качестве управляющего сигнала наводимого объекта (7), (8) поперечного ускорения j_{Γ} , а не углов отклонения аэродинамических рулей обусловлен необходимостью обеспечить его инвариантность к высоте полета, поскольку эффективность рулей зависит от плотности воздуха (высоты полета). При таком подходе с увеличением высоты (снижении плотности воздуха) автоматически будут увеличиваться углы отклонения рулей до величин, реализующих требуемые значения поперечной перегрузки.

Поставив в соответствие (7)–(10) с (1)–(6), будем иметь совокупность векторно-матричных соотношений, в которых для упрощения записей будет опущена зависимость векторов и матриц от времени

(12)
$$\mathbf{x}_{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \varphi_{\Gamma\mathrm{T}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{\mathrm{y}} = \begin{bmatrix} \varphi_{\Gamma} \\ \omega_{\Gamma} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = j_{\Gamma} - j_{\mathrm{H}\Gamma}, \quad \boldsymbol{\xi}_{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_{y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\mathrm{y}} = \begin{bmatrix} 1/\dot{\mathcal{I}} \\ -1/\mathcal{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{\varphi} & 0 \\ 0 & q_{\omega} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = k_{j}.$$

76



Рис. 1. Геометрия взаимного расположения цели и перехватчика при использовании представлений (7)–(10).

Используя (12) в (5), получим

$$\begin{split} \mathbf{u} &= \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{T}} - \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}) = \frac{1}{k_{j}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{\boldsymbol{\mathcal{I}}}} & -\frac{1}{\hat{\boldsymbol{\mathcal{I}}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{\varphi} & 0\\ 0 & q_{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_{\Gamma\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_{\Gamma}\\ 0 - \hat{\omega}_{\Gamma} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{q_{\varphi}}{k_{j} \hat{\boldsymbol{\mathcal{I}}}} & -\frac{q_{\omega}}{k_{j} \hat{\boldsymbol{\mathcal{I}}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_{\Gamma\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_{\Gamma}\\ 0 - \hat{\omega}_{\Gamma} \end{bmatrix}. \end{split}$$

Тогда:

(13)
$$j_{\Gamma} = K_{\varphi}(\hat{\varphi}_{\Gamma\Gamma} - \hat{\varphi}_{\Gamma}) + K_{\omega}\hat{\omega}_{\Gamma} + \hat{j}_{U\Gamma};$$

(14)
$$K_{\varphi} = \frac{q_{\varphi}}{k_j \dot{\Xi}}, \quad \dot{\Xi} < 0; \qquad K_{\omega} = \frac{q_{\omega}}{k_j \dot{\Xi}}, \quad K_{\omega} \leqslant K_{\omega \max}.$$

Анализ (13), (14) позволяет сделать следующие выводы.

На больших расстояниях, когда $\omega_{\Gamma} \to 0$, коэффициент передачи угловой скорости q_{ω}/k_{j} Д также мал. Основным приоритетом управления, определяемого первым слагаемым (13), становится устранение угловой ошибки $\varphi_{\Gamma T} - \varphi_{\Gamma}$ (рис. 1), что обеспечивает полет по требуемому направлению $\varphi_{\Gamma T}$. По мере подлета к цели увеличиваются как значения ω_{Γ} , так и коэффициента ее передачи q_{ω}/k_{j} Д. В итоге, начиная с некоторой дальности при малых значениях уже устраненной угловой ошибки $\varphi_{\Gamma T} - \varphi_{\Gamma}$, превалирующим становится второе слагаемое, реализующее устранение линейного промаха (11).

Специфической особенностью (13), (14) является гиперболический характер изменения коэффициента передачи K_{ω} , нелинейно нарастающего по мере уменьшения дальности (рис. 2). С одной стороны, это усиливает тенденцию уменьшения линейных промахов (11), а с другой стороны, предопределяет введение ограничения на K_{ω} .



Рис. 2. Зависимость K_{ω} от дальности.

В состав системы наведения, реализующей (13), (14), должны входить устройства формирования оценок дальности Д, скорости Д, требуемого бортового пеленга $\varphi_{\Gamma T}$, текущего пеленга φ_{Γ} , угловой скорости ω_{Γ} и поперечного ускорения цели $j_{\Pi\Gamma}$.

Сигнал управления зависит не от абсолютных значений штрафов, а от их соотношения q_{φ}/k_j и q_{ω}/k_j , что существенно облегчает их выбор. Правила выбора рациональных соотношений коэффициентов штрафов рассмотрены в [8, 16].

В заключение необходимо отметить, что метод (13), (14), обеспечивая перехват маневрирующих целей за счет учета $j_{\rm Ц\Gamma}$, также является всеракурсным и всевысотным [8] и при наведении в упрежденную точку встречи обеспечивает полет по более прямолинейной траектории с соответствующим уменьшением затрат на управление.

3. Перераспределение управляющих функций при использовании нестационарной матрицы штрафов за величину сигнала управления

Задача синтеза управления летательным аппаратом в горизонтальной плоскости формулируется следующим образом.

Для объекта управления (7), (8) необходимо сформировать сигнал управления j_{Γ} , оптимальный по минимуму функционала

(15)
$$I = M_y \left\{ \begin{bmatrix} \varphi_{\Gamma\Gamma} - \varphi_{\Gamma} \\ 0 - \omega_{\Gamma} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} q_{\varphi} & 0 \\ 0 & q_{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{\Gamma\Gamma} - \varphi_{\Gamma} \\ 0 - \omega_{\Gamma} \end{bmatrix} + \int_{0}^{t} j_{\Gamma}^2 \left(\frac{-k_j}{\dot{\varPi}} \right) dt \right\}.$$

Сравнивая (7), (8) и (15) с (2), (3), (6), получим

(16)
$$\mathbf{x}_{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \varphi_{\Gamma\mathrm{T}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{\mathrm{y}} = \begin{bmatrix} \varphi_{\Gamma} \\ \omega_{\Gamma} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = j_{\Gamma} - j_{\mathrm{H}\Gamma}, \quad \boldsymbol{\xi}_{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_{y} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{B}_{\mathrm{y}} = \begin{bmatrix} 1/\dot{\mathcal{I}} \\ -1/\mathcal{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{\varphi} & 0 \\ 0 & q_{\omega} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = -\frac{k_{j}}{\dot{\mathcal{I}}}.$$

78

Отличием (15) и (16) от (9) и (12) является зависимость матрицы штрафа ${\bf K}$ от скорости сближения.

Подставляя (16) в (5), получим:

$$\mathbf{u} = -\frac{\dot{\vec{\mu}}}{k_j} \begin{bmatrix} \frac{1}{\dot{\vec{\mu}}} & -\frac{1}{\dot{\vec{\mu}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{\varphi} & 0\\ 0 & q_{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_{\Gamma\Gamma} - \hat{\varphi}_{\Gamma}\\ 0 - \hat{\omega}_{\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{q_{\varphi}}{k_j} & \frac{q_{\omega}\dot{\vec{\mu}}}{k_j\dot{\vec{\mu}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_{\Gamma\Gamma} - \hat{\varphi}_{\Gamma}\\ 0 - \hat{\omega}_{\Gamma} \end{bmatrix};$$

(17)
$$j_{\Gamma k} = K_{\varphi k} (\hat{\varphi}_{\Gamma \Gamma} - \hat{\varphi}_{\Gamma}) - K_{\omega k} \hat{\omega}_{\Gamma} + \hat{j}_{I \downarrow \Gamma};$$

(18)
$$K_{\varphi k} = -\frac{q_{\varphi}}{k_j}; \quad K_{\omega k} = \frac{q_{\omega}\dot{\underline{\Pi}}}{k_j\hat{\underline{\Pi}}}, \quad K_{\omega k} \leqslant K_{\omega \max}.$$

Алгоритм траекторного управления (17), (18) качественно повторяет закон (13), (14), поэтому для него справедливы выводы, сделанные при анализе в разделе 2. Отличия состоят в утрате зависимости $K_{\varphi k}$ от скорости сближения, что упрощает выбор значений коэффициентов штрафов q_{φ} и q_{ω} , при которых начинается превалирование управления, минимизирующего линейный промах (11). При этом усложняется зависимость коэффициента $K_{\omega k}$ от условий применения, поскольку он учитывает еще и зависимость от скорости сближения.

4. Перераспределение приоритетов управления при использовании нестационарных матриц штрафов за точность функционирования

В основе любого способа перераспределения управленческих функций в процессе функционирования лежат нестационарные методы управления [6], которые могут быть получены не только за счет использования нестационарных моделей состояния, но и за счет использования переменных матриц штрафов за неточность функционирования, связанных с законами изменения тех или иных координат состояния.

Далее в качестве примера будет рассмотрен один из простейших приемов синтеза такого управления в рамках представлений (1)–(6).

В простейшем случае постановка задачи синтеза нестационарного управления может быть сформулирована следующим образом.

Для системы

(19)
$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{\Gamma} &= \omega_{\Gamma}, \quad \varphi_{\Gamma}(0) = \varphi_{\Gamma 0}; \\ \dot{\omega}_{\Gamma} &= -\frac{2\dot{\varPi}}{\varPi}\omega_{\Gamma} - \frac{1}{\varPi}j_{\Gamma} + \xi_{\omega}, \quad \omega_{\Gamma}(0) = \omega_{\Gamma 0}, \end{aligned}$$

предназначенной для отработки требуемых значений направления полета $\varphi_{\Gamma T}$ и угловой скорости $\omega_{\Gamma T}$, необходимо сформировать сигнал управления j_{Γ} , оптимальный по минимуму функционала

(20)
$$I = M_y \left\{ \begin{bmatrix} \varphi_{\Gamma T} - \varphi_{\Gamma} \\ \omega_{\Gamma T} - \omega_{\Gamma} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} q_{11} & \frac{q_{12}\underline{\mu}}{\underline{\dot{\mu}}} \\ \frac{q_{21}\underline{\mu}}{\underline{\dot{\mu}}} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{\Gamma T} - \varphi_{\Gamma} \\ \omega_{\Gamma T} - \omega_{\Gamma} \end{bmatrix} + \int_{0}^{t} j_{\Gamma}^{2} k_{j} dt \right\}.$$

Поставив в соответствие (19) с (2), (3), а (20) с (6), будем иметь:

(21)
$$\mathbf{x}_{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \varphi_{\Gamma\mathrm{T}} \\ \omega_{\Gamma\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{\mathrm{y}} = \begin{bmatrix} \varphi_{\Gamma} \\ \omega_{\Gamma} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\mathrm{y}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\mathcal{A} \end{bmatrix};$$
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & \frac{q_{12}\mathcal{A}}{\dot{\mathcal{A}}} \\ \frac{q_{21}\mathcal{A}}{\dot{\mathcal{A}}} & q_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = k_j, \quad \mathbf{u} = j_{\Gamma}.$$

Используя (21) в (5), получим:

$$j_{\Gamma} = \frac{1}{k_j} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\hat{\varPi}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & \frac{q_{12}\varPi}{\dot{\varPi}} \\ \frac{q_{21}\varPi}{\dot{\varPi}} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_{\Gamma T} - \hat{\varphi}_{\Gamma} \\ \hat{\omega}_{\Gamma T} - \hat{\omega}_{\Gamma} \end{bmatrix};$$
$$i_{\Gamma} = K_{\rm ex}(\hat{\varphi}_{\Gamma T} - \hat{\varphi}_{\Gamma}) - K_{\rm ex}(\hat{\psi}_{\Gamma T} - \hat{\psi}_{\Gamma});$$

(22)
$$j_{\Gamma} = K_{\varphi q}(\hat{\varphi}_{\Gamma T} - \hat{\varphi}_{\Gamma}) - K_{\omega q}(\hat{\omega}_{\Gamma T} - \hat{\omega}_{\Gamma});$$

(23)
$$K_{\varphi q} = \frac{q_{21}}{\hat{\mu}k_j}, \quad \dot{\Pi} < 0; \quad K_{\omega q} = \frac{q_{22}}{k_j\hat{\Pi}}, \quad K_{\omega q} \leqslant K_{\omega \max}.$$

Анализ полученного соотношения позволяет сделать следующие заключения:

 — сигнал управления характеризует нестационарную систему с обратными связями по углу и угловой скорости;

— сигнал управления определяется взвешенными ошибками управления, которые обусловлены несоответствием текущих значений φ_{Γ} и ω_{Γ} требуемым $\varphi_{\Gamma T}$ и $\omega_{\Gamma T}$.

При этом на больших расстояниях, когда $\omega_{\Gamma} \approx 0$ и $\frac{q_{22}}{k_j \mathcal{A}} \approx 0$, основной вклад в управление вносит первое слагаемое, обеспечивая устранение ошибок по угловым координатам. По мере уменьшения дальности возрастает вклад второго слагаемого, обеспечивая плавный переход к превалирующему управлению по угловой скорости, реализующему те или иные режимы (минимизацию линейного промаха (11), обеспечение требуемого линейного разрешения по угловым координатам [5, 17] и т.д.);

– веса ошибок управления зависят от соотношения коэффициентов штрафов q_{21}/k_j и q_{22}/k_j и условий применения (Д и Д́). При этом манипулируя их величинами, можно изменять моменты перехода от управления по углу к управлению по угловой скорости, переходя к другим режимам работы системы управления либо ее информационных систем;

– в зависимости от требуемых законов изменения $\varphi_{\Gamma T}$ и $\omega_{\Gamma T}$ могут быть получены системы самого различного назначения, реализующие самые разнообразные траектории полета: от высокоточных систем наведения при $\varphi_{\Gamma T} = \frac{\square \omega_{\Gamma}}{K_{DV}}$ и $\omega_{\Gamma T} = 0$ [8] до траекторий полета, реализующих синтезирование апертуры антенны [5, 7] при

(24)
$$\omega_{\Gamma T} = \frac{\Delta F \lambda}{2\Delta l_T},$$

где $K_{\rm ДV}$ – коэффициент, зависящий от скорости сближения, ΔF – полоса пропускания доплеровского фильтра, λ – длина волны, Δl_T – требуемое линейное разрешение по азимуту;

— требования неотрицательно определенной матрицы **Q** [8] накладывают определенные ограничения на выбор коэффициентов q_{11} , q_{22} и $q_{12} = q_{21}$, обеспечивающих функционирование системы в заданном диапазоне изменения дальности и скорости сближения;

— для реализации (22), (23) бортовая радиолокационная система должна формировать типовой набор оценок дальности, скорости сближения, углов и угловой скорости линии визирования.

Анализ законов, рассмотренных в разделах 2–4, показывает, что, несмотря на различные приемы обеспечения нестационарности, они приводят к одинаковым алгоритмам траекторного управления, в которых в качестве переключателя приоритетов используется дальность. В то же время возможны и другие варианты законов управления со сменой приоритетов управления.

В заключение необходимо отметить, что, используя более сложные модели состояния и функционалы качества с нестационарными коэффициентами матриц штрафов не только за неточность функционирования, но и за величину сигналов управления, можно получить более сложные законы управления с неоднократной сменой управленческих приоритетов, что особенно актуально при решении многокритериальных задач управления [18–20].

5. Перераспределение приоритетов управления при учете несоответствия динамических свойств цели и перехватчика

Несоответствие динамических свойств перехватчика и цели является типовым проявлением боестолкновений. При этом под динамическими свойствами понимаются не только инерционность систем управления и летательных аппаратов, но и динамика изменения координат состояния, определяемая условиями боя [21]. В связи с этим весьма востребованными являются методы наведения, в которых это несоответствие учитывается автоматически. Следует подчеркнуть, что задача учета этого несоответствия может быть решена различными способами [22, 23].

Далее будет рассмотрен один из самых простых способов учета несоответствия динамических свойств цели и перехватчика при использовании локальной оптимизации на основе представлений (1)–(6) [23].

В общем случае несоответствие динамических свойств системы (3), предназначенной для отработки процесса (2), определяется величиной детерминированной ошибки.

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{T}} - \dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{y}} = \mathbf{F}_{\mathrm{T}} \mathbf{x}_{\mathrm{T}} - \mathbf{F}_{\mathrm{y}} \mathbf{x}_{\mathrm{y}} - \mathbf{B}_{\mathrm{y}} \mathbf{u} + \mathbf{F}_{\mathrm{y}} \mathbf{x}_{\mathrm{T}} - \mathbf{F}_{\mathrm{y}} \mathbf{x}_{\mathrm{T}};$$
(25)
$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{\mathrm{y}} [\mathbf{x}_{\mathrm{T}} - \mathbf{x}_{\mathrm{y}}] - \mathbf{B}_{\mathrm{y}} \mathbf{u} + [\mathbf{F}_{\mathrm{T}} - \mathbf{F}_{\mathrm{y}}] \mathbf{x}_{\mathrm{T}}; \quad \mathbf{x}_{\mathrm{T}}(0) = \mathbf{x}_{\mathrm{T0}}, \quad \mathbf{x}_{\mathrm{y}}(0) = \mathbf{x}_{\mathrm{y0}}.$$

Анализ (25) дает возможность сделать следующие заключения.

Если динамические свойства системы (3) адекватны аналогичным свойствам (2), т.е. $\mathbf{F}_{y} = \mathbf{F}_{T}$, то при $\mathbf{u} = 0$ система (25) самостоятельно отрабатывает первоначальные ошибки $\Delta \mathbf{x}_{0}$.

Если $\mathbf{F}_{y} \neq \mathbf{F}_{T}$, то в (25) появляются вынужденные составляющие ошибки, которые могут быть компенсированы соответствующим выбором управления.

В [23] получено правило, которое позволяет для системы (2), (3), (25) сформировать сигнал управления

(26)
$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_{y}^{T} \Big\{ \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{x}}_{T} - \hat{\mathbf{x}}_{y}) - \mathbf{G} (\mathbf{F}_{T} - \mathbf{F}_{y}) \hat{\mathbf{x}}_{T} \Big\},$$

оптимальный по минимуму функционала

(27)
$$I = M \left\{ [\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{T}} - \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{y}}]^{\mathrm{T}} \mathbf{Q} [\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{T}} - \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{y}}] + 2[\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{T}} - \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{y}}]^{\mathrm{T}} \mathbf{G} [\mathbf{F}_{\mathrm{T}} - \mathbf{F}_{\mathrm{y}}] \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{T}} + \left\{ [\mathbf{F}_{\mathrm{T}} - \mathbf{F}_{\mathrm{y}}] \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{T}} \right\}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q} [\mathbf{F}_{\mathrm{T}} - \mathbf{F}_{\mathrm{y}}] \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{T}} + \int_{0}^{t} \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{K} \mathbf{u} dt \right\},$$

в котором **Q** и **K** – матрицы штрафов за неточность функционирования и величины сигналов управления, **G** – матрица, учитывающая влияние несоответствия динамических свойств цели и перехватчика, а $\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{T}}$ и $\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{y}}$ – оптимальные оценки процессов (2) и (3).

В математическом плане задачу можно сформулировать следующим образом. Для перехватчика, моделируемого системой уравнений

(28)

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{\Pi} &= \omega_{\Pi}, \qquad \qquad \varphi_{\Pi}(0) &= \varphi_{\Pi 0}; \\ \dot{\omega}_{\Pi} &= -\frac{1}{T}\omega_{\Pi} + \frac{b}{T}j_{\Pi} + \xi_{\Pi}, \quad \omega_{\Pi}(0) &= \omega_{\Pi 0}, \end{aligned}$$

предназначенного для перехвата в горизонтальной плоскости цели, моделируемой системой

(29)
$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{\mathrm{II}} &= \omega_{\mathrm{II}}, \qquad \qquad \varphi_{\mathrm{II}}(0) &= \varphi_{\mathrm{II}0}; \\ \dot{\omega}_{\mathrm{II}} &= -\frac{2\dot{\underline{\Pi}}}{\underline{\Pi}}\omega_{\mathrm{II}} + \frac{1}{\underline{\Pi}}(j_{\mathrm{II}} - j_{\mathrm{II}}) + \xi_{\mathrm{II}}, \quad \omega_{\mathrm{II}}(0) &= \omega_{\mathrm{II}0}, \end{aligned}$$

необходимо при наличии соответствующих измерений сформировать управляющий сигнал поперечного ускорения j_{Π} , оптимальный по минимуму функционала (27).

Здесь: φ_{Π} – угол направления полета перехватчика; ω_{Π} – угловая скорость его изменения; T – постоянная времени маневра; b – коэффициент передачи сигнала управления; φ_{Π} , ω_{Π} и j_{Π} – соответственно угол линии визирования цели, ее угловая скорость и поперечное ускорение цели; Π и $\dot{\Pi}$ – дальность



Рис. 3. Геометрия взаимного расположения цели и перехватчика.

до цели и скорость ее изменения; ξ_{Π} и ξ_{\amalg} – центрированные гауссовские возмущения с известными интенсивностями.

Геометрические соотношения перехватчика и цели показаны на рис. 3, на котором $O_{\rm II}$ и O_{Π} – точки расположения цели и перехватчика, а $V_{\rm II}$ и V_{Π} – векторы их скорости.

Поставив в соответствие (28), (29) с (3), (2), получим

(30)
$$\mathbf{x}_{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \varphi_{\mathrm{II}} \\ \omega_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\dot{\Pi}}{\underline{\Pi}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{\mathrm{y}} = \begin{bmatrix} \varphi_{\Pi} \\ \omega_{\Pi} \end{bmatrix};$$
$$\mathbf{F}_{\mathrm{y}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\mathrm{y}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b}{T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = j_{\Pi}, \quad \boldsymbol{\xi}_{x} = \begin{bmatrix} \xi_{\mathrm{II}} \\ \xi_{\Pi} \end{bmatrix}.$$

Рассматривая матрицы **Q**, **G** и **K** в (27) в приложении к (28), (29), будем иметь:

(31)
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = k_j.$$

Используя (30)-(31) в (26), получим:

(52)
$$J_{\Pi} = K_{\varphi s}(\varphi_{\Pi} - \varphi_{\Pi}) + K_{\omega s}(\omega_{\Pi} - \omega_{\Pi}) + K_{sy}\omega_{\Pi};$$

(33)
$$K_{\varphi s} = \frac{bq_{21}}{k_j T}, \quad K_{\omega s} = \frac{bq_{22}}{k_j T}, \quad K_{sy} = \frac{bg_{22}}{k_j T} \left(\frac{1}{T} - \frac{2\underline{\mathcal{I}}}{\underline{\hat{\mathcal{I}}}}\right).$$

Анализ (32), (33) позволяет сделать следующие выводы.

На больших расстояниях, когда $\omega_{\text{Ц}} \to 0$, метод вырождается в стационарную разновидность пропорционально-дифференциального метода со всеми особенностями его применения [8]. При этом перераспределение управления от устранения угловых ошибок к линейным промахам определяется соотношением штрафов q_{21} к q_{22} .

Добиться постоянного согласования динамических свойств перехватчика и цели в течение всего процесса наведения не удается, поскольку $T \approx \text{const}$, а Д и $\dot{Д}$ изменяются в процессе наведения. В связи с этим всегда будет иметь место текущая вынужденная составляющая ошибок $\Delta \varphi$ и $\Delta \omega$.

Специфической особенностью метода является резкое нарастание роли третьего слагаемого на малых дальностях, что позволяет существенно повысить конечную точность наведения [23].

6. Заключение

В обзоре на качественном уровне рассмотрены варианты методов наведения на воздушные объекты различных типов, позволяющие автоматически изменять управленческие приоритеты в процессе самонаведения, обеспечивая его более высокую адекватность современным условиям воздушного противоборства.

Использование рассмотренных вариантов позволяет оптимизировать системы наведения в классе широко распространенных двухкритериальных задач, когда система должна быть одновременно наилучшей по различным, зачастую противоречащим друг другу критериям. Кроме того, комбинированное использование всех четырех подходов позволяет оптимизировать системы и для трехкритериальных задач. При этом в зависимости от используемых моделей и функционалов качества можно получить большой набор методов наведения, адаптированных под решение различных задач.

В целом можно утверждать, что использование рассмотренных выше приемов изменения приоритетов управления позволит расширить области применения летательных аппаратов различного назначения, не требуя усложнения информационного обеспечения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Попов И.М., Хамзатов М.И. Война будущего. Концептуальные основы и практические выводы. М.: Кучково поле, 2017, 832 с.
- 2. Федосов Е.А. Реализация сетецентрической технологии ведения боевых действий потребует создания БРЛС нового поколения // Фазатрон. 2007. № 1,2. С. 11–44.
- 3. Верба В.С. Авиационные комплексы радиолокационного дозора и наведения. Принципы построения, проблемы разработки и особенности функционирования. М.: Радиотехника, 2014, 528 с.
- 4. Авиация BBC России и научно-технический прогресс. Боевые комплексы и системы вчера, сегодня, завтра / под. ред. Е.А. Федосова. М.: Дрофа, 2005, 734 с.
- 5. Верба В.С., Загребельный И.Р., Меркулов В.И. Метод наведения на воздушную цель в составе плотной группы // Радиотехника и электроника. 2020. № 11. С. 1091–1100.

- 6. *Меркулов В.И.* Нестационарные методы самонаведения // Вестник воздушнокосмической обороны. 2020. № 1. С. 25–39.
- 7. Меркулов В.И., Забелин Н.В. Разработка алгоритмов траекторного управления носителем, обеспечивающих разрешение воздушных целей в плотной группе // Радиотехника. 2012. № 10. С. 107–111.
- Авиационные системы радиоуправления: учебник для военных и гражданских ВУЗов / Под ред. В.И. Меркулова. М.: Изд-во ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 2008, 423 с.
- 9. *Меркулов В.И.* Адаптация алгоритмов траекторного управления самолетом к режимам работы бортовой РЛС // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2010. № 9. С. 23–26.
- 10. Paul Zarchan. Tactical and Strategic Missile Guidance. Sixth Edition, 2012.
- 11. John H. Blakelock. Automatic Control of Aircraft and Missiles. Second Edition, 1991.
- 12. *Shneydor N.A.* Missile Guidance And Pursuit Kinematics, Dynamics and Control, 1998.
- 13. George M. Siouris. Missile Guidance and Control Systems, New York: Springer, 2004.
- 14. Rafael Yanushevsky. Modern Missile Guidance, CRC Press, 2008.
- 15. Верба В.С., Капустян С.Г., Меркулов В.И., Харъков В.И. Оптимизация радиоэлектронных систем управления ч. 2. Прикладные методы и алгоритмы теории оптимального управления // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2013. № 3. С. 3–21.
- 16. Крутько П.Д., Максимов А.И., Скворцов Л.М. Алгоритмы и программы проектирования автоматических систем. М.: Радио и связь, 1988.
- 17. Верба В.С., Меркулов В.И., Садовский П.А. Алгоритм индивидуального наведения на воздушную цель в составе плотной группы // Информационноизмерительные и управляющие системы. 2009. Т. 7. № 9. С. 3–7.
- 18. Kaissa M. Miettinen. Nonlinear Multiobjective Optimization. 1999, 298 p.
- 19. Matthias Ehrgott. Multicriteria Optimization, Second Edition, Springer, 2005, 323 p.
- Oscar Brito Augusto, Fouad Bennis, Stephane Caro. Multiobjective Optimization Involving Quadratic Functions // J. Optim. Vol. 2014, Article ID 406092, 11 p.
- 21. Меркулов В.И. Учет динамичности летательных аппаратов при синтезе алгоритмов, сопровождения бортовыми РЛС // Успехи современной радиоэлектроники. 2012. № 8. С. 68–74.
- Меркулов В.И., Соколов Д.А. Учет несоответствия динамических свойств подсистем при их совместном функционировании // АиТ. 2017. № 5. С. 3–15.
 Merkulov V.I., Sokolov D.A. Account Of The Mismatch Between The Dynamic Properties Of Jointly Operating Systems // Autom. Remote Control. 2017. No. 5. P. 771–781.
- 23. Информационно-измерительные и управляющие радиоэлектронные системы и комплексы / Под ред. В.С. Вербы. М.: Радиотехника. 2020, 490 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Р.А. Мунасыповым.

Поступила в редакцию 08.12.2020 После доработки 22.04.2021 Принята к публикации 29.04.2021

© 2021 г. Б.Т. ПОЛЯК, д-р техн. наук (boris@ipu.ru), М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru) (Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СИНТЕЗ СТАТИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ПОДАВЛЕНИЯ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ КАК ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ¹

В последнее время стал очень популярным подход к линейным системам управления с точки зрения оптимизации. Например, в классической задаче о линейно-квадратичном регуляторе можно рассматривать матрицу линейной обратной связи как переменную и сводить проблему к минимизации показателя качества по этой переменной. Для этого можно применять градиентный метод и получать обоснование сходимости. Такой подход был успешно применен для ряда задач, включая оптимизацию обратной связи по выходу. В настоящей статье такой подход впервые применяется к задаче подавления ограниченных внешних возмущений. Выписан градиентный метод для отыскания статической обратной связи по состоянию или выходу и дано его обоснование. Рассмотрен ряд примеров, включающих в себя простой и двойной маятники.

Ключевые слова: линейные системы, внешние возмущения, обратная связь по выходу, обратная связь по состоянию, оптимизация, градиентный метод, метод Ньютона, сходимость.

DOI: 10.31857/S0005231021090038

1. Введение

Задача о подавлении ограниченных внешних возмущений (*peak-to-peak gain minimization*) формулируется следующим образом. Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему в непрерывном времени

(1)
$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Dw, \quad x(0) = x_0, \\ y &= C_1 x, \\ z &= C_2 x + B_1 u, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{r \times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{r \times n}$, с состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, измеряемым выходом $y(t) \in \mathbb{R}^l$, регулируемым выходом $z(t) \in \mathbb{R}^r$, управлением $u(t) \in \mathbb{R}^p$ и измеримым по t внешним возмущением $w(t) \in \mathbb{R}^m$, ограниченным в каждый момент времени:

$$|w(t)| \leq 1$$
 для всех $t \geq 0$.

 $^{^1}$ Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда, проек
т \aleph 21-71-30005.

Никаких других ограничений на возмущение w(t) не накладывается; так, оно не предполагается ни случайным, ни гармоническим. Задача заключается в выборе стабилизирующего управления в форме обратной связи по состоянию (если оно доступно) u = Kx или по выходу u = Ky, чтобы уменьшить "пик" выхода z(t), т.е. величину max |z(t)|. Точное решение такой задачи затруднительно, однако возможна минимизация верхней грани этой величины, формулируемой с помощью понятия инвариантного эллипсоида. Такой подход впервые был применен в монографии С. Бойда и соавт. [1] и развит в публикациях [2–4]. Подробное изложение этой техники можно найти в книге [5]. При этом задача управления по состоянию с помощью замен переменных сводится к параметрической задаче полуопределенного программирования, т.е. к задаче выпуклой оптимизации при ограничениях в форме линейных матричных неравенств при наличии скалярного параметра. Для таких задач существуют удобные численные методы решения [6, 7]. В задаче управления по выходу такое сведение невозможно (впрочем, можно применять не статический, а динамический регулятор, и тогда задача записывается как выпуклая, см. [5]). Авторы настоящей статьи, однако, задаются управлением в форме статической обратной связи в силу простоты таких регуляторов; для таких задач требуются новые методы решения.

В связи с этим напомним о новых подходах для классической проблемы линейно-квадратичного регулирования. Ее можно рассматривать как задачу оптимизации, где переменной является матрица обратной связи, а минимизируется интегральный квадратичный показатель качества переходного процесса. Градиент такой функции (для управления по состоянию) выписан еще в основополагающей работе Калмана [8], а для обратной связи по выходу в статье Левина и Атанса [9]. С тех пор неоднократно применялись итеративные методы оптимизации градиентного типа (см., например, обзор [10]), однако обоснование подобных методов появилось лишь недавно, в [11–15]. В настоящей статье аналогичный подход впервые применяется к задачам с внешними возмущениями.

Структура статьи следующая. В разделе 2 мы напоминаем технику инвариантных эллипсоидов и приводим формулировку задачи анализа (нахождения минимального инвариантного эллипсоида для замкнутой системы). При этом предлагается новый эффективный алгоритм однопараметрической оптимизации. В разделе 3 задача синтеза регулятора, оптимально подавляющего помехи, записывается как задача невыпуклой матричной оптимизации. Раздел 4 посвящен исследованию возникающей функции, вычислению ее градиента, формулировке и обоснованию итеративного алгоритма оптимизации. Раздел 5 содержит описания результатов вычислений для нескольких примеров. В заключении обсуждаются возможные обобщения полученных результатов.

Всюду далее $|\cdot|$ — евклидова норма вектора, $||\cdot||$ — спектральная норма матрицы, $||\cdot||_F$ — фробениусова норма матрицы, ^Т — символ транспонирования, tr — след матрицы, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение Фробениуса для матриц, I — единичная матрица соответствующей размерности, $\lambda_i(A)$ —

собственные значения матрицы A, а $\sigma(A) = -\max_i \operatorname{Re}(\lambda_i(A)) > 0$ — степень устойчивости гурвицевой матрицы A. Все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

2. Метод инвариантных эллипсоидов и задача анализа

2.1. Формулировка задачи и алгоритм оптимизации

Для дальнейшего изложения напомним концепцию метода инвариантных эллипсоидов. Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему в непрерывном времени

(2)
$$\dot{x} = Ax + Dw, \quad x(0) = x_0, \\ z = Cx,$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, с состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, выходом $z(t) \in \mathbb{R}^n$ и измеримым по t внешним возмущением $w(t) \in \mathbb{R}^l$, ограниченным в каждый момент времени:

(3)
$$|w(t)| \leq 1$$
 для всех $t \geq 0$.

Никаких других ограничений на возмущение w(t) не накладывается; так, оно не предполагается ни случайным, ни гармоническим. Будем полагать, что система (2) устойчива (т.е. матрица A гурвицева), пара A, D управляема, C матрица полного ранга. Заметим, что наложены более жесткие требования к постановке задачи, чем обычно [3, 5, 16]: предполагается, что размерности выхода и состояния совпадают, а матрица C — невырожденная. Это предположение можно было бы ослабить, но цель авторов сейчас — получить наиболее простые и наглядные результаты.

Определение 1. Эллипсоид с центром в начале координат

(4)
$$\mathcal{E}_x = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad x^\top P^{-1} x \leqslant 1 \right\}, \quad P \succ 0,$$

называется инвариантным для динамической системы (2), (3), если из условия $x(0) \in \mathcal{E}_x$ следует $x(t) \in \mathcal{E}_x$ для всех моментов времени $t \ge 0$.

Иными словами, любая траектория системы, исходящая из точки, лежащей в эллипсоиде \mathcal{E}_x , при всех допустимых внешних возмущениях, действующих на систему, в любой момент времени будет находиться в этом эллипсоиде.

Инвариантный эллипсоид обладает следующим свойством:

$$x(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \mathcal{E}_x$$
 при $x(0) \notin \mathcal{E}_x$

(при этом, возможно, $x(t) \in \mathcal{E}_x$ при $t \ge T$ для некоторого T > 0), т.е. траектория системы, исходящая из точки вне эллипсоида \mathcal{E}_x , стремится к эллипсоиду \mathcal{E}_x с течением времени. Таким образом, инвариантный эллипсоид является также и притягивающим.

Соответственно, если начальное состояние системы принадлежит инвариантному эллипсоиду, имеем равномерную оценку поведения траекторий системы — в любой момент времени траектории принадлежат этому эллипсоиду при любых допустимых внешних возмущениях; если же начальные условия произвольны, имеем асимптотическую оценку поведения траекторий системы: при любых допустимых внешних возмущениях траектории будут стремиться к этому эллипсоиду с течением времени.

Инвариантные эллипсоиды можно рассматривать как характеристику влияния внешних возмущений на траектории динамической системы. А именно в рамках задачи анализа проблема состоит в оценке степени влияния внешних возмущений на вектор выхода системы. В этой связи естественно интересоваться минимальными в том или ином смысле эллипсоидами, содержащими выход системы.

Нетрудно видеть, что если \mathcal{E}_x — инвариантный эллипсоид (4) с матрицей P, то выход системы (2) при $x_0 \in \mathcal{E}_x$ принадлежит эллипсоиду

(5)
$$\mathcal{E}_z = \left\{ z \in \mathbb{R}^n \colon z^\top (CPC^\top)^{-1} z \leqslant 1 \right\}.$$

Эллипсоид (5) будем называть ограничивающим (по выходу). Часто в качестве критерия его минимальности рассматривается линейная функция $f(P) = \operatorname{tr} CPC^{\top}$, значение которой равно сумме квадратов полуосей ограничивающего эллипсоида. Нетрудно видеть, что справедлива оценка

$$|z(t)|^2 \leqslant \operatorname{tr} CPC^{\top}.$$

Таким образом, получаем верхнюю оценку выхода при ограниченной помехе, ее и будем минимизировать.

В [1] был установлен результат, дающий критерий инвариантности эллипсоида в терминах линейных матричных неравенств. Несколько уточняя этот критерий (см. [5]), приходим к следующей одномерной оптимизационной задаче при наличии матричных ограничений типа равенств.

Теорема 1. Пусть матрица A гурвицева, $\sigma = -\max_i \operatorname{Re}(\lambda_i(A)) > 0$, пара (A, D) управляема, матрица C — квадратная невырожденная, а матрица $P(\alpha) > 0, 0 < \alpha < 2\sigma$, удовлетворяет уравнению Ляпунова

(6)
$$\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)P + P\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)^{\top} + \frac{1}{\alpha}DD^{\top} = 0.$$

Тогда задача об оптимальном ограничивающем эллипсоиде сводится к минимизации одномерной функции

$$f(\alpha) = \operatorname{tr} CP(\alpha)C^{\mathsf{T}}$$

на интервале $0 < \alpha < 2\sigma$ и если α^* — точка минимума и x(0) удовлетворяет условию $x^{\top}(0)P^{-1}(\alpha^*)x(0) \leq 1$, то гарантируется оценка

$$|z(t)|^2 \leqslant f(\alpha^*), \quad 0 \leqslant t < \infty.$$

89

Поскольку уравнение (6) нелинейно по совокупности переменных P и α , то в литературе по этой проблематике (см. [4] и др.) поиск минимального ограничивающего эллипсоида предлагалось проводить на одномерной сетке по параметру α ; при этом вместо матричного уравнения (6) рассматривалось соответствующее матричное неравенство Ляпунова. В статье предлагается более эффективный способ оптимизации, основанный на свойствах минимизируемой функции и на явном виде ее производных. Сформулируем эти свойства.

Лемма 1. Пусть матрица A гурвицева, $0 < \alpha < 2\sigma$, пара (A, D) управляема, а матрица C такова, что $C^{\top}C \succ 0$. Тогда функция $f(\alpha) = \operatorname{tr} CPC^{\top}$, где $P = P(\alpha)$ удовлетворяет (6), обладает следующими свойствами:

а) функция $f(\alpha)$ определена, положительна и сильно выпукла на интервале $0 < \alpha < 2\sigma$, а ее значения стремятся к бесконечности на концах интервала, причем существует c > 0 такое, что

$$f(\alpha) \ge \frac{c}{\alpha(2\sigma - \alpha)}, \quad 0 < \alpha < 2\sigma;$$

б) производная функции $f(\alpha)$ имеет вид

(7)
$$f'(\alpha) = \operatorname{tr} Y\left(P - \frac{1}{\alpha^2} D D^{\top}\right),$$

где Ү — решение уравнения Ляпунова

(8)
$$\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)^{\top}Y + Y\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right) + C^{\top}C = 0;$$

в) вторая производная функции $f(\alpha)$ определяется формулой

(9)
$$f''(\alpha) = 2 \operatorname{tr} Y\left(X + \frac{1}{\alpha^3} D D^{\top}\right),$$

где Х — решение уравнения Ляпунова

(10)
$$\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)X + X\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)^{\top} + P - \frac{1}{\alpha^2}DD^{\top} = 0,$$

причем $f''(\alpha^*) > 0$ и $f''(\alpha)$ монотонно возрастает слева и справа от α^* .

Доказательства этого и последующих утверждений приведены в Приложении. Заметим, что для вычисления функции $f(\alpha)$ и двух ее производных достаточно решить три уравнения Ляпунова.

Указанные свойства функции позволяют применить метод Ньютона для ее минимизации. Задаемся начальным приближением $0 < \alpha_0 < 2\sigma$, например $\alpha_0 = \sigma$, и применяем итерационный процесс

(11)
$$\alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{f'(\alpha_j)}{f''(\alpha_j)}.$$

Следующая теорема 2 гарантирует глобальную сходимость алгоритма.

Теорема 2. В методе (11) справедливы оценки

$$|\alpha_{j} - \alpha^{*}| \leq \frac{f''(\alpha_{0})}{2^{j} f''(\alpha^{*})} |\alpha_{0} - \alpha^{*}|, \qquad |\alpha_{j+1} - \alpha^{*}| \leq c |\alpha_{j} - \alpha^{*}|^{2},$$

 $cde \ c > 0$ — некоторая константа (она может быть выписана явно).

Этот результат следует из утверждений леммы 1 и по существу является небольшой модификацией теорем 3.3 и 3.5 публикации [17], поэтому опускаем его доказательство. Таким образом, первая оценка гарантирует глобальную сходимость метода (быстрее, чем геометрическая прогрессия с коэффициентом 1/2), а вторая — квадратичную сходимость в окрестности решения. Реально требуется не более 3–4 итераций для получения решения с большой точностью (если только начальная точка не слишком близка к границам интервала).

Таким образом, авторы располагают быстрым алгоритмом для оптимизации по параметру α .

3. Задача синтеза

3.1. Формулировка задачи оптимизации

Перейдем к задаче синтеза и рассмотрим линейную непрерывную систему управления

(12)
$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Dw, \quad x(0) = x_0, \\ y &= C_1 x, \\ z &= C_2 x. \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, с состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, наблюдаемым выходом $y(t) \in \mathbb{R}^l$, регулируемым выходом $z(t) \in \mathbb{R}^n$, управлением $u(t) \in \mathbb{R}^p$ и внешним возмущением $w(t) \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющим ограничению (3); матрицы D и C_2 — квадратные невырожденные. Отметим, что вновь рассматривается не самая общая постановка задачи по сравнению с (2): размерности x, w и z совпадают, матрицы D, C_2 невырожденные, а в выходе z отсутствует управление (смысл последнего отличия будет пояснен далее).

Целью является нахождение регулятора К в форме статической линейной обратной связи по выходу

(13)
$$u = Ky, \quad K \in \mathbb{R}^{p \times l},$$

который стабилизирует замкнутую систему и подавляет воздействие внешних возмущений w, минимизируя размер ограничивающего эллипсоида для выхода z. В качестве критерия оптимальности рассмотрим величину

(14)
$$\operatorname{tr} C_2 P C_2^\top + \rho \|K\|_F^2$$

91

Первая компонента (14) определяет размер ограничивающего эллипсоида по критерию следа, а вторая представляет штраф за величину управления (при этом коэффициент $\rho > 0$ регулирует его важность). Наличие второй компоненты позволяет избежать появления больших значений матрицы регулятора: в частности, если управление и возмущение "приложены в одной точке" (т.е. матрицы *B* и *D* совпадают), то за счет больших величин *K* линейный выход системы может быть сделан сколь угодно малым. Обычно штраф за управление вводится путем добавления члена с управлением в регулируемый выход (см. выражение $B_1 u$ в (1)); авторам статьи удобнее использовать форму показателя качества (14).

В целом вид целевой функции (14) аналогичен критерию оптимальности в задаче о линейно-квадратичном регуляторе, где также присутствуют члены, отвечающие за величину отклонения траектории и за величину управления; разница лишь в том, что там эти члены имеют вид интегралов, а не максимальных значений.

Таким образом, задача о синтезе регулятора, подавляющего внешние возмущения, свелась к следующей матричной оптимизационной задаче:

$$\min f(K,\alpha), \quad f(K,\alpha) = \operatorname{tr} C_2 P C_2^\top + \rho \|K\|_F^2$$

при ограничении

(15)
$$\left(A_K + \frac{\alpha}{2}I\right)P + P\left(A_K + \frac{\alpha}{2}I\right)^\top + \frac{1}{\alpha}DD^\top = 0, \quad A_K = A + BKC_1,$$

относительно матричных переменных $P = P^{\top} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$ и скалярного параметра $\alpha > 0$. Запись $f(K, \alpha)$ подчеркивает, что при заданных K и α матрица P находится из уравнения Ляпунова (15); тем самым независимыми переменными являются K и α . Однако минимизацию по α можно производить достаточно эффективно, см. подраздел 2.1; нужно лишь матрицу Aзаменить на A_K . Поэтому будем интересоваться функцией

(16)
$$f(K) = \min_{\alpha} f(K, \alpha);$$

ее минимизацией и займемся. Предварительно исследуем свойства этой функции.

3.2. Свойства функции f(K)

В дальнейшем делаем следующее предположение.

Предположение. Известен стабилизирующий регулятор K_0 , т.е. такой, что матрица $A + BK_0C_1$ гурвицева.

Это предположение существенно, поскольку проблема существования стабилизирующего статического регулятора по выходу является нерешенной.

Перейдем к описанию свойств функции f(K).

Лемма 2. Функция f(K) определена и положительна на множестве S стабилизирующих регуляторов.

Действительно, если матрица $A_K = A + BKC_1$ гурвицева, то $\sigma(A_K) > 0$ и для $0 < \alpha < 2\sigma(A_K)$ решение $P \succ 0$ уравнения Ляпунова (15) существует. Тем самым определена функция $f(K, \alpha) > 0$; при этом f(K) > 0 в силу леммы 1. Множество ее определения S может быть невыпуклым и несвязным, причем его границы могут быть негладкими, см. примеры далее.

Лемма 3. На множестве S стабилизирующих регуляторов функция f(K) коэрцитивна (т.е. стремится к бесконечности на границе области), причем справедливы следующие оценки:

(17)
$$f(K) \ge \frac{\lambda_{\min}(DD^{\top})\lambda_{\min}(C_2C_2^{\top})}{4\sigma^2(A_K)},$$

 $f(K) \ge \rho \|K\|^2.$

Введем в рассмотрение множество уровня

$$\mathcal{S}_0 = \{ K \in \mathcal{S} \colon f(K) \leqslant f(K_0) \}.$$

Из леммы 3 вытекает очевидное следствие 1.

Следствие 1. Для любого регулятора $K_0 \in S$ множество S_0 ограничено.

С другой стороны, у функции f(K) на множестве S_0 существует точка минимума (как у непрерывной функции на компактном множестве), но множество S_0 не имеет общих точек с границей S в силу (17). Впоследствии будет показано, что f(K) дифференцируема на S_0 . Следовательно, справедливо следствие 2.

Cледствие 2. Существует точка минимума K_* на множестве S, и в ней градиент обращается в нуль.

Перейдем к свойствам функции $f(K, \alpha)$.

Лемма 4. Функция $f(K, \alpha)$ определена на множестве стабилизирующих обратных связей K и для $0 < \alpha < 2\sigma(A_K)$. На этом допустимом множестве она дифференцируема, причем градиент дается выражениями

(18)
$$\nabla_K f(K,\alpha) = 2\left(\rho K + B^\top Y P C_1^\top\right),$$

(19)
$$\nabla_{\alpha} f(K, \alpha) = \operatorname{tr} Y\left(P - \frac{1}{\alpha^2} D D^{\top}\right)$$

где матрица У является решением уравнения Ляпунова

(20)
$$\left(A_K + \frac{\alpha}{2}I\right)^\top Y + Y\left(A_K + \frac{\alpha}{2}I\right) + C_2^\top C_2 = 0.$$

Минимум $f(K, \alpha)$ достигается во внутренней точке допустимого множества и определяется условиями

$$\nabla_K f(K, \alpha) = 0, \quad \nabla_\alpha f(K, \alpha) = 0.$$

При этом $f(K, \alpha)$ как функция от α строго выпукла на $0 < \alpha < 2\sigma(A_K)$ и достигает минимума во внутренней точке этого интервала (см. подраздел 2.1).

Свойства гессиана функци
и $f(K,\alpha)$ представлены следующим утверждением.

Лемма 5. Функция $f(K, \alpha)$ дважды дифференцируема по K, причем действие гессиана функции на произвольную матрицу² $E \in \mathbb{R}^{p \times l}$ дается выражением

(21)
$$\frac{1}{2}\nabla_K^2 f(K)[E,E] = \rho \langle E,E \rangle + 2 \langle B^\top Y P' C_1^\top,E \rangle,$$

где Р' — решение уравнения Ляпунова

(22)
$$\left(A_K + \frac{\alpha}{2}I\right)P' + P'\left(A_K + \frac{\alpha}{2}I\right)^\top + BEC_1P + P(BEC_1)^\top = 0.$$

Градиент функции $f(K, \alpha)$ по K не является липшицевым на множестве S стабилизирующих регуляторов, однако он обладает этим свойством на его подмножестве S_0 . Соответствующий результат представлен далее.

Лемма 6. На множестве \mathcal{S}_0 градиент функции $f(K,\alpha)$ по K липшицев с константой

(23)
$$L = \rho + 8\sqrt{n} \|B\|_{F} \|C_{1}\| \frac{f^{2}(K_{0})}{\lambda_{\min}(C_{2}^{\top}C_{2})\lambda_{\min}^{2}(DD^{\top})} \times \left(\|A\| + \sqrt{f(K_{0})} \|B\| \|C_{1}\| \right)^{2} \left(\frac{f^{2}(K_{0})}{\lambda_{\min}^{2}(C_{2}^{\top}C_{2})} + \|B\|^{2} \|C_{1}\|^{2} \right).$$

Полученные свойства минимизируемой функции и ее производных позволяют построить метод минимизации и обосновать его сходимость.

3.3. Алгоритм оптимизации

Ограничение в оптимизационной задаче (15) невыпукло по совокупности переменных P и K. В случае управления по состоянию (т.е. при $C_1 = I$) задачу можно свести к эквивалентной линейной, введя вспомогательную матричную переменную и исключив матрицу регулятора K (подробнее см. [4]). Однако в случае управления по выходу такой подход неприменим. Отметим еще, что даже в случае управления по состоянию минимизирумая функция не является выпуклой.

Авторы предлагают итеративный подход к решению этой задачи; в его основе лежит применение градиентного метода по переменной K и минимизации по α , описанной в подразделе 2.1. Приведем принципиальную схему алгоритма.

² Понимаемое в смысле второй производной по направлению.

Aлгоритм 1 для минимизации $f(K, \alpha)$:

- 1) Задаемся параметрами $\varepsilon > 0, \gamma > 0, 0 < \tau < 1$ и начальным стабилизирующим приближением K_0 . Вычисляем величину $\alpha_0 = \sigma(A + BK_0C_1)$.
- 2) На *j*-й итерации заданы K_j , α_j . Вычисляем $A_j = A + BK_jC_1$, решаем уравнение (20) и находим Y, вычисляем градиент $H_j = \nabla_K f(K_j, \alpha_j)$ из уравнения (18). Если $||H_j|| \leq \varepsilon$, то K_j принимаем за приближенное решение.
- 3) Делаем шаг градиентного метода

$$K_{j+1} = K_j - \gamma_j H_j.$$

Длину шага $\gamma_j > 0$ подбираем дроблением γ до выполнения условий:

- а. *K*_{*i*+1} стабилизирующий регулятор;
- 6. $f(K_{j+1}) \leq f(K_j) \tau \gamma_j ||H_j||^2$.
- 4) Для полученного K_{j+1} решаем задачу минимизации $f(K_{j+1}, \alpha)$ по α (см. раздел 2), получаем α_{j+1} . Переходим к п. 2.

Предлагаемый метод сходится в следующем смысле.

Tеорема 3. В алгоритме 1 на каждой итерации реализуется лишь конечное число дроблений γ_j , функция $f(K_j)$ монотонно убывает и градиент стремится к нулю

$$\lim_{j \to \infty} \|H_j\| = 0$$

со скоростью геометрической прогрессии.

Доказательство (в Приложении) использует обычную схему анализа градиентного метода для безусловной минимизации функций с липшицевым градиентом [18], при этом способ подбора шага в алгоритме гарантирует, что величины K_j остаются в области S_0 , для которой лемма 6 обеспечивает липшицевость градиента. Естественно, что трудно рассчитывать на сходимость к глобальному минимуму, поскольку область определения f(K) может быть даже несвязной. Однако, по-видимому, для задачи управления по состоянию $(C_1 = I)$ можно гарантировать и глобальную сходимость к единственной точке минимума подобно тому, как это удается доказать для задачи о линейноквадратичном регуляторе [15].

Заметим еще, что способ выбора шага в алгоритме 1 отнюдь не является самым быстрым с вычислительной точки зрения. Например, весьма перспективным является способ, аналогичный предложенному в [15] и основанный на использовании вторых производных. При этом пробный шаг выбирается по формуле

(24)
$$\gamma_j = \frac{\|H_j\|^2}{\nabla_K^2 f(K)[H_j, H_j]}$$

где вычисление выражения в знаменателе делается с помощью формулы (21), после чего он корректируется так же, как в алгоритме 1. Отметим, что использование вторых производных требует всего лишь решения еще одного уравнения Ляпунова, т.е. не сильно усложняет вычисления. Смысл формулы (24) в том, что это один шаг метода Ньютона для минимизации одномерной функции $\phi(\gamma) = f(K_j - \gamma H_j)$. Свойства такого метода описаны в [15]; как правило, он (назовем его в нашем контексте *Алгоритмом 2*) дает заметно более быструю сходимость, чем алгоритм 1; это подтверждается приводимыми далее примерами.

4. Примеры

Пример 1. Рассмотрим математический маятник (рис. 1), движущийся в вязкой среде, на который действует ограниченное внешнее возмущение. Полагая параметры единичными, приходим к линеаризованной системе

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

 $\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + w, \quad |w| \le 1,$

или в матричной форме

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Рассматривая в качестве выхода состояние системы (C = I), приходим к задаче

min tr P при
$$AP + PA^{\top} + \alpha P + \frac{1}{\alpha}DD^{\top} = 0$$

относительно $P = P^{\top} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ и $0 < \alpha < -2 \max \operatorname{Re} \lambda(A) = 1$.

Зная первую (7) и вторую (9) производные минимизируемой функции, с помощью метода Ньютона находим оптимальное значение $\alpha^* = 0,4618$ и соответствующую матрицу

$$P^* = \begin{pmatrix} 2,4461 & -0,5649 \\ -0,5649 & 2,1422 \end{pmatrix}$$

эллипса, содержащего траектории системы; при этом tr $P^* = 4,5883$.



Рис. 1. Математический маятник из примера 1.



Рис. 2. Оптимизационная процедура в примере 1.

На рис. 2,*а* показан график функции $f(\alpha) = \operatorname{tr} P(\alpha)$, а на рис. 2, δ — динамика оптимизационной процедуры (линия 1 соответствует функции $f(\alpha)$, а линия 2 — собственно оптимизационной процедуре). По существу, уже первая итерация дает решение с достаточной точностью.

Пример 2. Рассмотрим математический маятник, на который воздействует ограниченное внешнее возмущение, для компенсации которого к нему приложено управляющее воздействие:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

 $\dot{x}_2 = -x_1 + u + w, \quad |w| \le 1.$

При этом измеряемым выходом служит все состояние системы (т.е. y = x). Отметим, что в данном примере (и ряде следующих) не выполнено одно из предположений теоремы 3: здесь размерность возмущений меньше числа состояний, однако алгоритм оптимизации применим и работает.

В результате имеем

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = I, \quad K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}.$$

Для

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho = 1,$$

решая на двумерной сетке по k_1 и k_2 уравнение Ляпунова (15) и вычисляя min tr $C_2P(\alpha)C_2^{\top}$, численным образом находим функцию

$$f(k_1, k_2) = C_2 P(K) C_2^{\top} + ||K||^2.$$

Ее линии уровня показаны на рис. 3. В данном случае линии уровня гладкие и выпуклые.



Рис. 3. Линии уровня и оптимизационная процедура в примере 2.

Для начального регулятора

$$K_0 = \begin{pmatrix} -3 & -3 \end{pmatrix}$$

вычисления в соответствии с алгоритмом 1 доставляют на 119-й итерации регулятор

$$K_* = (-0,7224 \ -1,2205),$$

при котором $f(K_*) = 2,9377$ (линия 1 на рис. 3). Алгоритм 2 требует всего лишь 7 итераций и приводит к регулятору

$$K_* = \begin{pmatrix} -0,6477 & -1,2038 \end{pmatrix},$$

для которого $f(K_*) = 2.8670$ (линия 2 на рис. 3).

Пример 3. Рассмотрим систему с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}, \quad B = D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$C_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = I, \quad \rho = 1.$$

При a = -1,4 функция

$$f(k) = \operatorname{tr}\left(C_2 P(k) C_2^{\top}\right) + k^2$$



Рис. 4. Графики целевой функции в примере 3.



Рис. 5. Линии уровня в примере 4.

имеет два локальных минимума (см. рис. 4,a), а при a = -1 ее область определения несвязна (см. рис. $4, \delta$). Ясно, что отыскивать глобальный минимум в такой задаче очень трудно.

Заметим, что в данном примере используется управление по выходу, тогда как в предыдущем — управление по состоянию.



Рис. 6. Двухмассовая система из примера 5.

Пример 4. Для системы с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = C_2 = I, \quad \rho = 1,$$

сечение области определения функции $f(K) = \text{tr} (C_2 P(K) C_2^{\top}) + ||K||_F^2$ плоскостью $k_2 = k_3$ невыпукло, см. рис. 5. Более того, сама область S негладкая, а области уровня S_0 — гладкие.

Пример 5. Рассмотрим задачу управления двухмассовой системой из двух твердых тел с массами m_1 и m_2 , соединенных пружиной с коэффициентом упругости k, скользящих без трения вдоль неподвижного горизонтального стержня (см. рис. 6); к левому телу приложено управление u, а к правому — внешнее возмущение $|w| \leq 1$. Эта задача часто используется как тестовая для различных методов синтеза регуляторов, чему способствуют ее реальное происхождение и разумная размерность модели.

Обозначим через x_1, v_1 координату и скорость левого тела, а через x_2, v_2 — правого тела. Тогда

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & v_1 & v_2 \end{pmatrix}^{\top}$$

есть вектор фазового состояния рассматриваемой динамической системы, полностью описывающий ее поведение.

Непрерывная модель колебаний системы описывается уравнениями

$$\begin{split} \dot{x}_1 &= v_1, \\ \dot{x}_2 &= v_2, \\ \dot{v}_1 &= -\frac{k}{m_1} x_1 + \frac{k}{m_2} x_2 + \frac{1}{m_1} u, \\ \dot{v}_2 &= \frac{k}{m_2} x_1 - \frac{k}{m_2} x_2 + \frac{1}{m_2} w. \end{split}$$

При единичных параметрах системы $(k = m_1 = m_2 = 1)$ приходим к системе с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

100



Рис. 7. Оптимизационная процедура в примере 5.

Пусть измерению доступно все состояние системы $(C_1 = I)$, а в качестве минимизируемого выхода возьмем координаты левого и правого тела:

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть также $\rho = 1$.

Сначала в качестве начальной точки выберем некоторый начальный стабилизирующий регулятор

$$K_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и соответствующее ему допустимое начальное значение параметра

$$\alpha_0 = \sigma(A + BK_0C_1).$$

Критерием остановки процесса будет служить уменьшение целевой функции на некотором шаге менее, чем на 0,001.

На рис. 7,*а* линия 1 соответствует динамике изменения критерия f(K) == tr $C_2 P C_2^\top + ||K||_F^2$ в соответствии с алгоритмом 1. Процесс завершился нахождением регулятора

$$K_* = (-1,3800 \quad -0,0836 \quad -1,5482 \quad -0,8047),$$

при этом $f(K_*) = 17,5974.$

Линия 2 на рис. 7, *a* соответствует вычислениям по алгоритму 2. Получен регулятор

$$K_* = \begin{pmatrix} -1,0921 & -0,1720 & -1,4263 & -0,5916 \end{pmatrix}.$$

При этом значение целевой функции $f(K_*) = 17,3148$ улучшилась менее, чем на 2%, однако число итераций сократилось.



Рис. 8. Двойной математический маятник из примера 6.

Далее, для начального регулятора

$$K_0 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

итерационный процесс на порядок более длителен; его динамика показана на рис. 7,6. Линией 1 показан расчет в соответствии с алгоритмом 1; на 125-й итерации процесс завершился нахождением регулятора

$$K_* = \begin{pmatrix} -1,6245 & -0,0794 & -1,5570 & -0,9869 \end{pmatrix};$$

при этом $f(K_*) = 18,0417.$

Линия 2 на рис. 7,6 соответствует алгоритму 2. Процесс завершается быстрее (61 итерация) и доставляет регулятор

$$K_* = (-1,6234 \quad -0,0793 \quad -1,5565 \quad -0,9843);$$

при этом значение целевой функции $f(K_*) = 18,0367$ практически не изменилось.

Таким образом, здесь из разных начальных точек получаем очень близкие оптимальные регуляторы и близкое значение критерия.

 Πp и м е р 6. Рассмотрим двойной математический маятник, состоящий из двух невесомых стержней длины l_1 и l_2 , на концах которых укреплены грузики массами m_1 и m_2 . Система движется в вязкой среде с коэффициентом сопротивления γ , в вертикальной плоскости xy, и положение маятника определяется углами φ_1 и φ_2 отклонения стержней от вертикали, см. рис. 8.

На "нижнее" тело воздействует ограниченное внешнее возмущение $|w| \leq 1$, для компенсации которого к "верхнему" телу приложено управляющее воздействие u.

Вводя переменные

$$\varphi_3 = \dot{\varphi}_1, \quad \varphi_4 = \dot{\varphi}_2,$$

$$\begin{split} \dot{\varphi}_1 &= \varphi_3, \\ \dot{\varphi}_2 &= \varphi_4, \\ \dot{\varphi}_3 &= -\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \frac{g}{l_1} \varphi_1 + \frac{m_2}{m_1} \frac{g}{l_1} \varphi_2 - \frac{\gamma}{m_1} \varphi_3 + \frac{1}{m_1} u, \\ \dot{\varphi}_4 &= \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \frac{g}{l_2} \varphi_1 - \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \frac{g}{l_2} \varphi_2 - \frac{\gamma}{m_2} \varphi_4 + \frac{1}{m_2} w. \end{split}$$

При

$$m_1 = m_2 = 1, \quad l_1 = l_2 = g, \quad \gamma = 0,2$$

матрицы системы имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -0,2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -0,2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве наблюдаемого выхода выберем

$$y = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а в качестве регулируемого выхода — вектор

$$z = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Положим также $\rho = 1$.

Поскольку разомкнутая система устойчива, в качестве начального приближения для регулятора выберем

$$K_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

103



Рис. 9. Оптимизационная процедура в примере 6.

При расчете по алгоритму 1 динамика изменения критерия f(K) == tr $C_2 P C_2^{\top} + ||K||_F^2$ показана линией 1 на рис. 9,*a*. Процесс завершился на 10-м шаге нахождением стабилизирующего регулятора по выходу

$$K_* = (0,0088 - 0,8657);$$

при этом $f(K_*) = 29,0021$. При выборе шага по алгоритму 2 (линия 2 на рис. 9,*a*) процесс завершается на 7-м шаге и доставляет регулятор

$$K_* = (0,0083 - 0,8680);$$

при этом значение целевой функции $f(K_*) = 29,0029$ практически не изменилось.

Теперь в качестве начального выберем регулятор

$$K_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

При выборе шага в соответствии с алгоритмом 1 процесс (линия 1 на рис. 9,6) завершается на 16-й итерации и доставляет стабилизирующий регулятор по выходу

$$K_* = (0,0086 - 0,8697),$$

при этом целевая функция $f(K_*) = 29,0040$. При выборе шага по алгоритму 2 (линия 2 на рис. 9,6) процесс вновь завершается раньше — на 8-й итерации — и дает регулятор

$$K_* = \begin{pmatrix} 0,0165 & -0,8711 \end{pmatrix},$$

при этом значение целевой функции $f(K_*) = 29,0071$ вновь практически не изменилось.

5. Обсуждение

1. Рассмотрены проблемы подавления внешних возмущений при достаточно жестких ограничениях: предполагалось, что размерность возмущений и регулируемых выходов совпадает с числом состояний. Это было сделано для того, чтобы получить строгое доказательство сходимости предлагаемого алгоритма (теорема 3). Однако метод применим и в более общей ситуации. В частности, рассмотренные примеры демонстрируют, что метод работает и достаточно эффективен и при отсутствии таких ограничений. Его обоснование представляет важную задачу.

2. Второй открытой проблемой является обоснование глобальной сходимости метода к единственной точке минимума в случае управления по состоянию (т.е. когда измеряемый выход *y* совпадает с *x*). Можно ожидать, что в этом случае минимизируемая функция удовлетворяет *условию градиентного доминирования* подобно ситуации с линейно-квадратичным регулятором [15].

3. В статье рассмотрена задача управления по выходу. Возможно обобщение на более широкий класс задач (в [10] аналогичные задачи названы *параметрическими LQR*); именно управление имеет вид

$$u = \sum_{i=1}^{m} k_i C_i x,$$

где k_i — параметры управления. К такому классу управлений относятся, например, ПИД-регуляторы.

4. Возможны заметно более быстрые методы минимизации первого порядка, чем градиентный метод (алгоритм 1). В частности, формула (24) дает основу для применения метода сопряженных градиентов подобно тому, как это сделано в [15]. Подробная проверка более эффективных методов на задачах большой размерности предполагается в будущем; в данной статье авторам важна принципиальная возможность нового подхода к задачам подавления возмущений.

5. В статье рассмотрена лишь задача синтеза статического регулятора. Для динамических регуляторов в принципе возможен аналогичный подход матрицы, задающие динамический регулятор, можно рассматривать как переменные и вести по ним оптимизацию. Однако развитие такого подхода требует серьезного обоснования.

6. Заключение

Предложен новый подход к задаче синтеза регулятора, оптимально подавляющего ограниченные внешние возмущения. Он основан на сведении проблемы к задаче матричной оптимизации, где переменной является матрица обратной связи (по состоянию или по выходу). Далее эта задача решается градиентным методом; его сходимость теоретически обосновывается для ряда важных частных случаев. Многочисленные примеры демонстрируют эффективность предлагаемого алгоритма. Представляет интерес обобщение данного подхода на новые классы задач, в частности на параметрические регуляторы типа ПИД-регуляторов, где переменными являются коэффициенты этих регуляторов, а также на случай динамических регуляторов.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность A.A. Трембе и анонимному рецензенту за интерес к статье, критические замечания и предложения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Лемма П.1. Пусть X и Y — решения двойственных уравнений Ляпунова с гурвицевой матрицей А:

$$A^{\top}X + XA + W = 0$$

u

$$AY + YA^{\top} + V = 0.$$

Тогда

$$\operatorname{tr}\left(XV\right) = \operatorname{tr}\left(YW\right).$$

Доказательство леммы П.1. В самом деле, прямым вычислением имеем

$$\operatorname{tr}(XV) = \operatorname{tr}\left(X(-AY - YA^{\top})\right) =$$
$$= -\operatorname{tr}(XAY) - \operatorname{tr}(XYA^{\top}) =$$
$$= -\operatorname{tr}(XAY)^{\top} - \operatorname{tr}(A^{\top}XY)^{\top} =$$
$$= \operatorname{tr}\left(Y(-A^{\top}X - XA)\right) = \operatorname{tr}(YW).$$

Лемма П.1 доказана.

Следующая лемма содержит некоторые хорошо известные результаты (см., например, [19]), необходимые для дальнейшего изложения.

Лемма П.2.

1. Для матриц A и B соответствующих размерностей справедливы соотношения

$$\begin{split} \|AB\|_F \leqslant \|A\|_F \|B\|, \\ |\operatorname{tr} AB| \leqslant \|A\|_F \|B\|_F, \\ \|A\| \leqslant \|A\|_F, \\ AB + B^{\top} A^{\top} \leqslant \varepsilon A A^{\top} + \frac{1}{\varepsilon} B^{\top} B \quad \textit{для любого } \varepsilon > 0. \end{split}$$

106

2. Для неотрицательно определенных матриц A и B справедливы соотношения

$$0 \leqslant \lambda_{\min}(A)\lambda_{\max}(B) \leqslant \lambda_{\min}(A) \operatorname{tr} B \leqslant \operatorname{tr} AB \leqslant \lambda_{\max}(A) \operatorname{tr} B \leqslant \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B$$

Лемма П.З. Для решения Р уравнения Ляпунова

$$AP + PA^{\top} + Q = 0$$

с гурвицевой матрицей А и $Q \succ 0$ справедливы оценки:

(II.1)
$$\lambda_{\max}(P) \ge \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\sigma}, \quad \lambda_{\min}(P) \ge \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\|A\|},$$

 $\operatorname{rde} \sigma = -\max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A).$

Если же $Q = DD^{\top}$ и пара (A, D) управляема, то

(II.2)
$$\lambda_{\max}(P) \ge \frac{\|u^* D\|^2}{2\sigma} > 0,$$

где

$$u^*A = \lambda u^*, \quad \operatorname{Re} \lambda = -\sigma, \quad ||u|| = 1,$$

т.е. u — левый собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению λ матрицы A с наибольшей вещественной частью. Вектор и и число λ могут быть комплексными; здесь и^{*} означает комплексное сопряжение и транспонирование.

Доказательство леммы П.3. Оценки (П.1) хорошо известны, см., например, [20]. Докажем справедливость оценки (П.2). Явное решение уравнения Ляпунова для гурвицевой матрицы имеет вид

$$P = \int_{0}^{+\infty} e^{At} D D^{\top} e^{A^{\top} t} dt.$$

Умножая это равенство справа на uи слева на u^* и учитывая, что $u^*e^{At}==e^{\lambda t}u^*,~e^{A^\top t}u=e^{\lambda^* t}u,$ получаем, что

$$\lambda_{\max}(P) \ge u^* P u = \int_{0}^{+\infty} u^* e^{At} D D^\top e^{A^\top t} u dt =$$
$$= \int_{0}^{+\infty} e^{(\lambda + \lambda^*)t} u^* D D^\top u dt = \frac{\|u^* D\|^2}{2\sigma},$$

причем $||u^*D|| > 0$ в силу управляемости пары (A, D), см., например, [5, теорема Д.1.5]. Лемма П.3 доказана.

Доказательство леммы 1.

а. Уравнение (6) представимо в виде

$$\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)P + P\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)^{\top} = -\frac{1}{\alpha}DD^{\top}$$

и согласно [5, лемма 1.2.3] имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрица $A + \frac{\alpha}{2}I$ гурвицева: $\operatorname{Re} \lambda_i (A + \frac{\alpha}{2}I) < 0$, т.е. при $0 < \alpha < 2\sigma$.

Оценим величин
у $f(\alpha) = \operatorname{tr} CP(\alpha)C^\top,$ используя лемму П.3 с очевидными заменами:

$$f(\alpha) = \operatorname{tr} CP(\alpha)C^{\top} \ge \lambda_{\min}(C^{\top}C)\lambda_{\max}\left(P(\alpha)\right) \ge \frac{\|u^*D\|^2\lambda_{\min}(C^{\top}C)}{\alpha(2\sigma - \alpha)}$$

где u имеет тот же смысл, что и в лемме П.3, а величина $||u^*D||^2$ положительна в силу предположения об управляемости пары (A, D) (а тем самым и пары $(A + \frac{\alpha}{2}I, D))$.

Покажем теперь, что функция $f(\alpha) = \operatorname{tr} CP(\alpha)C^{\top}$ строго выпукла на интервале $(0, 2\sigma)$. В соответствии с [5, лемма 1.2.3] решение уравнения (6) представимо в явном виде как

$$P(\alpha) = \int_{0}^{+\infty} e^{(A + \frac{\alpha}{2}I)t} \frac{1}{\alpha} D D^{\top} e^{(A + \frac{\alpha}{2}I)^{\top}t} dt = \int_{0}^{+\infty} \underbrace{\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}}_{g(\alpha,t)} \underbrace{\frac{e^{At} D D^{\top} e^{A^{\top}t}}_{h(t)}}_{h(t)} dt.$$

Но $g(\alpha,t)>0,\,h(t)\succ 0$ при $\alpha>0,$ поэтому на интервале $(0,2\sigma)$ имеем

$$P(\alpha) = \int_{0}^{+\infty} g(\alpha, t)h(t)dt \succ 0, \quad f(\alpha) = \operatorname{tr} P(\alpha)C_2^{\top}C_2 > 0.$$

Прямым вычислением получаем

$$g''(\alpha,t) = \left((\alpha t - 1)^2 + 1\right) \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^3} \ge \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^3} = \frac{1}{\alpha^2}g(\alpha,t)$$

(здесь дифференцирование производится по α), так что

$$f''(\alpha) = \int_{0}^{+\infty} g''(\alpha, t)h(t)dt \ge \frac{1}{\alpha^2}f(\alpha) \ge \frac{1}{4\sigma^2}f(\alpha^*) > 0.$$

Таким образом, вторая производная функции $f(\alpha)$ положительна и стремится к бесконечности на концах интервала $(0, 2\sigma)$.

Аналогичным образом прямым вычислением четвертой производной получаем

$$g^{(IV)}(\alpha,t) = \left((\alpha t - 2)^2 \alpha^2 t^2 + 2(2\alpha t - 3)^2 + 6\right) \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^5} \ge \frac{6}{\alpha^5} e^{\alpha t} = \frac{6}{\alpha^4} g(\alpha,t),$$
таким образом,

$$f^{(IV)}(\alpha) \ge \frac{6}{\alpha^4} f(\alpha) > 0,$$

т.е. вторая производная $f''(\alpha)$ сама является выпуклой и растет на границах интервала.

б. Выведем теперь формулу для производной функции $f(\alpha)$. В уравнении (6) решение P является функцией от α . Продифференцируем это уравнение; под P' будем понимать производную по α :

$$AP' + P'A^{\top} + \alpha P' + P - \frac{1}{\alpha^2}DD^{\top} = 0.$$

Сравнивая уравнения для P'
иYи применяя лемму П.1, получаем жела
емую формулу

$$f'(\alpha) = \operatorname{tr} CP'C^{\top} = \operatorname{tr} Y\left(P - \frac{1}{\alpha^2}DD^{\top}\right).$$

в. Аналогично получим выражение для второй производной $f(\alpha)$. Дифференцируя уравнение для P' по α , получаем

$$AP'' + P''A^{\top} + \alpha P'' + 2P' + \frac{2}{\alpha^3}DD^{\top} = 0.$$

Вновь применяя лемму П.1 к этому уравнению и уравнению (10) (и имея в виду, что X = P'), получаем

$$f''(\alpha) = \operatorname{tr} CP''C^{\top} = 2\operatorname{tr} Y\left(X + \frac{1}{\alpha^3}DD^{\top}\right).$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 3. Рассмотрим последовательность стабилизирующих регуляторов $\{K_j\} \subseteq S$ такую, что $K_j \to K \in \partial S$, т.е. $\sigma(A+BKC_1) = 0$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $N = N(\varepsilon)$ такое, что неравенство

$$|\sigma(A + BK_jC_1) - \sigma(A + BKC_1)| = \sigma(A + BK_jC_1) < \varepsilon$$

справедливо для всех $j \ge N(\varepsilon)$.

Пусть P_j — решение уравнения Ляпунова (15), ассоциированного с регулятором K_j :

$$\left(A_{K_j} + \frac{\alpha_j}{2}I\right)P_j + P_j\left(A_{K_j} + \frac{\alpha_j}{2}I\right)^\top + \frac{1}{\alpha_j}DD^\top = 0,$$

а Y_j — решение двойственного к нему уравнения Ляпунова

$$\left(A_{K_j} + \frac{\alpha_j}{2}I\right)^{\top} Y_j + Y_j \left(A_{K_j} + \frac{\alpha_j}{2}I\right) + C_2 C_2^{\top} = 0.$$

109

Тогда

$$f(K_j) = \operatorname{tr} \left(C_2 P_j C_2^\top \right) + \rho \|K_j\|_F^2 \ge \operatorname{tr} \left(P_j C_2 C_2^\top \right) = \operatorname{tr} \left(Y_j \frac{1}{\alpha_j} D D^\top \right) \ge$$
$$\ge \frac{1}{\alpha_j} \lambda_{\min}(Y_j) \|D\|_F^2 \ge \frac{1}{\alpha_j} \frac{\lambda_{\min}(C_2 C_2^\top)}{2\|A + BK_j C + \frac{\alpha_j}{2}I\|} \|D\|_F^2 \ge$$
$$\ge \frac{\lambda_{\min}(C_2 C_2^\top)}{4\sigma (A + BK_j C_1) \|A + BK_j C + \frac{\alpha_j}{2}I\|} \|D\|_F^2 \ge$$
$$\ge \frac{\lambda_{\min}(C_2 C_2^\top)}{4\varepsilon (\|A + BK_j C\| + \varepsilon)} \|D\|_F^2 \xrightarrow{\varepsilon \to 0} +\infty,$$

поскольку

$$0 < \alpha_j < 2\sigma(A + BK_jC_1) \quad \text{if} \quad \sigma\left(A + BK_jC_1 + \frac{\alpha_j}{2}I\right) \leqslant \sigma(A + BK_jC_1).$$

С другой стороны,

$$f(K_j) = \operatorname{tr} (C_2 P_j C_2^{\top}) + \rho \|K_j\|_F^2 \ge \rho \|K_j\|_F^2 \ge \rho \|K_j\|^2 \xrightarrow[\|K_j\| \to +\infty]{} + \infty$$

Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Система (12), замкнутая обратной связью (13), принимает замкнутый вид

(II.3)
$$\dot{x} = (A + BKC_1)x + Dw,$$
$$z = C_2 x.$$

Применяя к системе (П.3) теорему 1, приходим к задаче

$$\min f(K,\alpha), \quad f(K,\alpha) = \operatorname{tr} C_2 P C_2^\top + \rho \|K\|_F^2$$

при ограничении в виде уравнения Ляпунова относительно матрицы *P* инвариантного эллипсоида:

$$(A + BKC_1)P + P(A + BKC_1)^{\top} + \alpha P + \frac{1}{\alpha}DD^{\top} = 0.$$

Дифференцирование по α делается так же, как и выше, с заменой A на $A_K = A + BKC_1$. Для дифференцирования по K дадим ему приращение ΔK и обозначим соответствующее приращение P через ΔP :

$$(A + B(K + \Delta K)C_1)(P + \Delta P) + (P + \Delta P)(A + B(K + \Delta K)C_1)^{\top} + \alpha(P + \Delta P) + \frac{1}{\alpha}DD^{\top} = 0$$

или, после линеаризации и вычитания этого и предыдущего уравнений,

(II.4)
$$\left(A + BKC_1 + \frac{\alpha}{2}I\right)\Delta P + \Delta P \left(A + BKC_1 + \frac{\alpha}{2}I\right)^\top + B\Delta KC_1 P + P \left(B\Delta KC_1\right)^\top = 0.$$

Вычислим приращение функционала f(K), линеаризуя соответствующие величины:

$$\Delta f(K) = \operatorname{tr} C_2 \Delta P C_2^\top + \rho \operatorname{tr} K^\top \Delta K + \rho \operatorname{tr} (\Delta K)^\top K =$$
$$= \operatorname{tr} C_2^\top C_2 \Delta P + 2\rho \operatorname{tr} K^\top \Delta K.$$

Рассмотрим уравнение Ляпунова (20), двойственное к (П.4). По лемме П.1 из уравнений (П.4) и (20) имеем

$$\Delta f(K) = \operatorname{tr} 2C_1 PYB\Delta K + 2\rho \operatorname{tr} K^{\top} \Delta K = \langle 2(\rho K + B^{\top} YPC_1^{\top}), \Delta K \rangle.$$

Таким образом,

$$\nabla_K f(K, \alpha) = 2(\rho K + B^\top Y P C_1^\top).$$

Лемма 4 доказана.

Доказательство леммы 5. Вычислим

$$\nabla_K^2 f(K)[E,E] = \langle \nabla_K^2 f(K)[E], E \rangle,$$

взяв производную по направлению $E \in \mathbb{R}^{p \times l}$ от $\nabla_K f(K)[E] = \langle \nabla_K f(K), E \rangle$.

Линеаризуя соответствующие величины, вычислим приращение функционала $\nabla_K f(K)[E]$ по направлению E:

$$\Delta \nabla_{K} f(K)[E] = 2 \left(\rho K + \rho \delta E + B^{\top} (Y + \Delta Y)(P + \Delta P)C_{1}^{\top} \right) - 2 \left(\rho K + B^{\top} Y P C_{1}^{\top} \right) =$$

= 2 $\left(\rho K + \rho \delta E + B^{\top} (Y + \delta Y'(K)[E])(P + \delta P'(K)[E])C_{1}^{\top} \right) - 2 \left(\rho K + B^{\top} Y P C_{1}^{\top} \right) = 2\delta \left(\rho E + B^{\top} \left(Y P'(K)[E] + Y'(K)[E]P \right) C_{1}^{\top} \right),$

где

$$\Delta P = P(K + \delta E) - P(K) = \delta P'(K)[E],$$

$$\Delta Y = Y(K + \delta E) - Y(K) = \delta Y'(K)[E].$$

Таким образом, обозначая P' = P'(K)[E]
иY' = Y'(K)[E], имеем

$$\frac{1}{2}\nabla_K^2 f(K)[E,E] = \langle \rho E + B^\top (YP' + Y'P)C_1^\top, E \rangle.$$

Далее, P = P(K) есть решение уравнения (15); запишем его в приращениях по направлению E:

$$(A + B(K + \delta E)C_1)(P + \delta P') + (P + \delta P')(A + B(K + \delta E)C_1)^\top + \alpha(P + \delta P') + \frac{1}{\alpha}DD^\top = 0,$$

ИЛИ

$$(A + BKC_1)(P + \delta P') + (P + \delta P')(A + BKC_1)^{\top} + \alpha(P + \delta P') + \delta \left(BEC_1P + P(BEC_1)^{\top}\right) + \frac{1}{\alpha}DD^{\top} = 0.$$

Вычитая из полученного соотношения уравнение (6), приходим к уравнению (22).

Далее, Y = Y(K) есть решение уравнения Ляпунова (20); запишем его в приращениях по направлению E:

$$(A + B(K + \delta E)C_1)^{\top}(Y + \delta Y') + (Y + \delta Y')(A + B(K + \delta E)C_1) + \alpha(Y + \delta Y') + C_2^{\top}C_2 = 0,$$

ИЛИ

$$(A + BKC_1)^{\top}(Y + \delta Y') + (Y + \delta Y')(A + BKC_1) + \alpha(Y + \delta Y') + \delta\left((BEC_1)^{\top}Y + YBEC_1\right) + C_2^{\top}C_2 = 0.$$

Вычитая из полученного соотношения уравнение (8), имеем

(II.5)
$$\left(A + BKC_1 + \frac{\alpha}{2}I\right)^{\top}Y' + Y'\left(A + BKC_1 + \frac{\alpha}{2}I\right) + (BEC_1)^{\top}Y + YBEC_1 = 0.$$

Из (22) и (П.5) имеем соотношение

$$\operatorname{tr} P'YBEC_1 = \operatorname{tr} Y'BEC_1P,$$

так что

$$\frac{1}{2}\nabla_K^2 f(K)[E,E] = \rho \langle E,E \rangle + \langle B^\top (YP'+Y'P)C_1^\top,E \rangle =$$
$$= \rho \langle E,E \rangle + 2 \langle B^\top YP'C_1^\top,E \rangle.$$

Лемма 5 доказана.

Следствие П.1. Для действия гессиана функции f(K) на матрицу $E \in \mathbb{R}^{p \times l}$, такую что $||E||_F = 1$, справедлива оценка

$$\frac{1}{2} \sup_{\|E\|_F=1} |\nabla_K^2 f(K)[E, E]| \leq \rho + 2\|P'\|_F \|Y\| \|B\|_F \|C_1\|.$$

Доказательство следствия П.1. Согласно (21)

$$\frac{1}{2} \sup_{\|E\|_{F}=1} |\nabla_{K}^{2} f(K)[E,E]| \leq \sup_{\|E\|_{F}=1} \rho \langle E,E \rangle + 2 \sup_{\|E\|_{F}=1} |\langle B^{\top} Y P' C_{1}^{\top},E \rangle| = \\ = \rho \sup_{\|E\|_{F}=1} \|E\|_{F}^{2} + 2 \sup_{\|E\|_{F}=1} |\langle P', YBEC_{1} \rangle| \leq \rho + 2\|P'\|_{F} \sup_{\|E\|_{F}=1} \|YBEC_{1}\|_{F} \leq \\ \leq \rho + 2\|P'\|_{F} \|Y\|\|B\|_{F} \|C_{1}\|,$$

поскольку с учетом леммы П.2

$$||YBEC_1||_F \leq ||Y|| ||B||_F ||E||_F ||C_1||.$$

Следствие П.1 доказано.

Доказательство леммы 6. Согласно следствию П.1 достаточно оценить сверху величину

$$\rho + 2 \|P'\|_F \|Y\| \|B\|_F \|C_1\|.$$

Имеем оценку для ||Y||:

$$\frac{1}{\alpha}\lambda_{\min}(DD^{\top})\|Y\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\lambda_{\min}(DD^{\top})\operatorname{tr} Y \leqslant \frac{1}{\alpha}\operatorname{tr} YDD^{\top} = \operatorname{tr} Y\frac{1}{\alpha}DD^{\top} = \operatorname{tr} PC_2^{\top}C_2 = \operatorname{tr} C_2PC_2^{\top} = f(K) - \rho\|K\|_F^2 \leqslant f(K) \leqslant f(K_0),$$

откуда

(II.6)
$$||Y|| \leq \frac{\alpha}{\lambda_{\min}(DD^{\top})} f(K_0).$$

Оценка для α устанавливается следующим образом:

$$\alpha < 2\sigma(A + BKC_1) \leq 2||A + BKC_1|| \leq \leq 2(||A|| + ||B|||K|||C_1||) \leq 2(||A|| + ||B|||K||_F ||C_1||) \leq \leq 2(||A|| + ||B||\sqrt{f(K)}||C_1||) \leq 2(||A|| + \sqrt{f(K_0)}||B||||C_1||),$$

так что

$$||Y|| \leq 2 \frac{||A|| + \sqrt{f(K_0)}||B|| ||C_1||}{\lambda_{\min}(DD^{\top})} f(K_0).$$

Теперь оценим сверху ||P||:

$$\lambda_{\min}(C_2^{\top}C_2)\|P\| \leqslant \operatorname{tr}(C_2PC_2^{\top}) = f(K) - \rho\|K\|_F^2 \leqslant f(K) \leqslant f(K_0),$$

откуда

$$\|P\| \leqslant \frac{f(K_0)}{\lambda_{\min}(C_2^\top C_2)}.$$

Наконец, оценим сверху $\|P'\|_F$. С учетом леммы П.2 заметим, что

$$\lambda_{\max} \left(BEC_1 P + P(BEC_1)^\top \right) = \\ = \|BEC_1 P + P(BEC_1)^\top \| \leq \|P^2 + BEC_1(BEC_1)^\top \| \leq \\ \leq \|P\|^2 + \|B\|^2 \|C_1\|^2 \|E\|_F^2 \leq \frac{f^2(K_0)}{\lambda_{\min}^2(C_2^\top C_2)} + \|B\|^2 \|C_1\|^2 = \xi \frac{1}{\alpha} \lambda_{\min}(DD^\top)$$

при

$$\xi = \frac{\alpha}{\lambda_{\min}(DD^{\top})} \left(\frac{f^2(K_0)}{\lambda_{\min}^2(C_2^{\top}C_2)} + \|B\|^2 \|C_1\|^2 \right).$$

Поэтому для решения Р' уравнения Ляпунова (22) справедлива оценка

$$P' \preccurlyeq \xi P \preccurlyeq \frac{\alpha}{\lambda_{\min}(DD^{\top})} \left(\frac{f^2(K_0)}{\lambda_{\min}^2(C_2^{\top}C_2)} + \|B\|^2 \|C_1\|^2 \right) \frac{f(K_0)}{\lambda_{\min}(C_2^{\top}C_2)} I \preccurlyeq \\ \preccurlyeq 2f(K_0) \frac{\|A\| + \sqrt{f(K_0)} \|B\| \|C_1\|}{\lambda_{\min}(DD^{\top}) \lambda_{\min}(C_2^{\top}C_2)} \left(\frac{f^2(K_0)}{\lambda_{\min}^2(C_2^{\top}C_2)} + \|B\|^2 \|C_1\|^2 \right) I,$$

откуда

$$||P'||_F \leq 2\sqrt{n}f(K_0) \times (\Pi.7) \times \frac{||A|| + \sqrt{f(K_0)}||B|| ||C_1||}{\lambda_{\min}(DD^{\top})\lambda_{\min}(C_2^{\top}C_2)} \left(\frac{f^2(K_0)}{\lambda_{\min}^2(C_2^{\top}C_2)} + ||B||^2 ||C_1||^2\right).$$

С учетом оценок (П.6) и (П.7) приходим к величине (23). Лемма 6 доказана.

Доказательство теоремы 3. Прежде всего, алгоритм 1 определен корректно в начальной точке, так как K_0 является стабилизирующим регулятором в силу предположения. Далее, при достаточно малых γ_j в алгоритме происходит монотонное уменьшение f(K) (движение по антиградиенту), т.е. K_j остаются в области S_0 и тем самым можно применять результаты леммы 6 о липшицевости градиента.

Таким образом, применимы результаты о сходимости градиентного метода для безусловной минимизации [18]. В частности, условие б на шаге 3 алгоритма 1 будет выполнено после конечного числа дроблений, а в градиентном методе будет иметь место сходимость по градиенту с линейной скоростью. Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., et al. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
- Abedor J., Nagpal K., Poolla K. A Linear Matrix Inequality Approach to Peak-to-Peak Gain Minimization // Int. J. Robust Nonlinear Control. 1996. V. 6. No. 9–10. P. 899–927.
- 3. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // АиТ. 2007. № 3. С. 106–125.

Nazin S.A., Polyak B.T., Topunov M.V. Rejection of Bounded Exogenous Disturbances by the Method of Invariant Ellipsoids // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 3. P. 467–486.

 Хлебников М.В., Поляк Б.Т., Кунцевич В.М. Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) // АиТ. 2011. № 11. С. 9–59.

Khlebnikov M.V., Polyak B.T., Kuntsevich V.M. Optimization of Linear Systems Subject to Bounded Exogenous Disturbances: The Invariant Ellipsoid Technique // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 11. P. 2227–2275.

- Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
- 6. *Grant M., Boyd S.* CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 2.1. URL http://cvxr.com/cvx
- 7. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
- Kalman R.E. Contributions to the Theory of Optimal Control // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. 1960. V. 5. No. 1. P. 102–119.
- Levine W., Athans M. On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1970. V. 15. No. 1. P. 44–48.
- Mäkilä P.M., Toivonen H.T. Computational Methods for Parametric LQ Problems A Survey // IEEE Trans. Automat. Control. 1987. V. 32. No. 8. P. 658–671.
- Fazel M., Ge R., Kakade S., Mesbahi M. Global Convergence of Policy Gradient Methods for the Linear Quadratic Regulator // Proc. 35th Int. Conf. Machine Learning. Stockholm, Sweden, July 10–15, 2018. V. 80. P. 1467–1476.
- Mohammadi H., Zare A., Soltanolkotabi M., Jovanović M.R. Global Exponential Convergence of Gradient Methods Over the Nonconvex Landscape of the Linear Quadratic Regulator // Proc. 2019 IEEE 58th Conf. Decision Control. Nice, France, December 11–13, 2019. P. 7474–7479.
- 13. Zhang K., Hu B., Başar T. Policy Optimization for \mathcal{H}_2 Linear Control with \mathcal{H}_{∞} Robustness Guarantee: Implicit Regularization and Global Convergence // arXiv: 1910.09496, 2020.
- Bu J., Mesbahi A., Fazel M., Mesbahi M. LQR through the Lens of First Order Methods: Discrete-Time Case // arXiv:1907.08921, 2019.
- Fatkhullin I., Polyak B. Optimizing Static Linear Feedback: Gradient Method // SIAM J. on Control and Optimization (in press), arXiv:2004.09875, 2020.
- Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Линейные матричные неравенства в системах управления с неопределенностью // АнТ. 2021. № 1. С. 3–54. Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Linear Matrix Inequalities in Control Systems with Uncertainty // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 1. P. 1–40.
- Nesterov Y., Protasov V.Y. Computing Closest Stable Non-Negative Matrices // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2020. V. 41. Iss. 1. P. 1–28.
- 18. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. 2-е изд. М.: УРСС, 2014.
- 19. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
- Lee C.-H. New Results for the Bounds of the Solution for the Continuous Riccati and Lyapunov Equations // IEEE Trans. Automat. Control. 1997. V. 42. No. 1. P. 118–123.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 25.01.2021 После доработки 16.04.2021 Принята к публикации 29.04.2021

Стохастические системы

© 2021 г. В.И. ВОРОТНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (vorotnikov-vi@rambler.ru) (Сочинский институт Российского университета дружбы народов), Ю.Г. МАРТЫШЕНКО, канд. физ.-мат. наук (j-mart@mail.ru) (Российский государственный университет нефти и газа, Москва)

К ЗАДАЧЕ ЧАСТИЧНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается система нелинейных дискретных уравнений, подверженных воздействию дискретного случайного процесса типа "белого" шума. Предполагается, что система допускает "частичное" (по некоторой части переменных состояния) нулевое положение равновесия. Ставится задача частичной устойчивости по вероятности: устойчивости данного положения равновесия не по всем, а только по отношению к части определяющих его переменных. Для решения применяется дискретно-стохастический вариант метода функции Ляпунова при соответствующей конкретизации требований к функции Ляпунова. С целью расширения возможностей используемого метода предлагается проводить корректировку области, в которой строится вспомогательная функция Ляпунова; это достигается посредством введения дополнительной (векторной, вообще говоря) вспомогательной функции. Получены условия частичной устойчивости и асимптотической устойчивости по вероятности указанного вида. Приводится пример, показывающий особенности предложенного подхода.

Ключевые слова: система нелинейных дискретных (конечно-разностных) стохастических уравнений, частичная устойчивость, метод функций Ляпунова.

DOI: 10.31857/S000523102109004X

1. Введение

Задачи устойчивости относятся к основным задачам качественного анализа и синтеза нелинейных динамических систем, подверженных воздействию случайных возмущений и изменениям структуры. Как и в случае детерминированных систем, для их решения используется метод функций Ляпунова.

Существенное влияние на развитие стохастического варианта метода функций Ляпунова оказала идея И.Я. Каца и Н.Н. Красовского [1] использования *усредненной производной* функции Ляпунова, для вычисления которой достаточно знать лишь правые части системы и вероятностные характеристики воздействующего на систему случайного процесса. Данный подход, предложенный для систем дифференциальных уравнений, правая часть которых содержит однородную марковскую цепь с конечным числом состояний, в значительной степени предопределил многие последующие исследования: систем стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито [2, 3], а также более общих классов стохастических систем со случайными параметрами и (или) структурой [4, 5].

Отдельное направление исследований связано с анализом устойчивости *дискретных* (конечно-разностных) систем, подверженных воздействию случайных факторов. Повышенный интерес к дискретным системам связан с использованием цифровых систем управления, проблемами финансовой математики, динамики биоценозов, а также с задачами численного решения систем стохастических дифференциальных уравнений. На этом пути разработан [2, 6–13] соответствующий дискретно-стохастический вариант метода функций Ляпунова применительно к обладающей большой общностью задаче устойчивости по отношению ко всем переменным нулевого положения равновесия. Рассмотрена также [14] задача устойчивости компактных множеств в фазовом пространстве системы. Усредненная производная (или дифференциальный производящий оператор [2, 3, 5]) заменяется в данных случаях усредненной конечной разностью функции Ляпунова [6].

Начиная с публикаций В.В. Румянцева [15, 16] в теории устойчивости детерминированных систем, а затем и стохастических систем с непрерывной динамикой рассматриваются задачи *частичной устойчивости* (см. обзор [17]): устойчивости по отношению к части переменных нулевого положения равновесия, а также устойчивости по всем и по части переменных "частичного" (нулевого) положения равновесия. С формально-математической точки зрения задача устойчивости по всем переменным "частичного" положения равновесия относится к задаче устойчивости некомпактных (замкнутых, но неограниченных) множеств, в то время как задачи устойчивости по части переменных имеют самостоятельное значение и не сводятся, вообще говоря, к каким-либо задачам устойчивости множеств. Дело в том, что устойчивость по отношению к части переменных не предполагает близости траекторий, соответствующих возмущенным движениям и невозмущенному движению (положению равновесия) системы.

Содержательно указанные задачи частичной устойчивости естественным образом возникают в приложениях как исходя из требования нормального функционирования, так и при оценке возможностей проектируемой системы. Они также могут рассматриваться и как вспомогательные задачи при анализе устойчивости по всем переменным выделенных положений равновесия. Кроме того, возникают соответствующие задачи частичной стабилизации нелинейных управляемых систем, активно рассматриваемые в последние годы. Однако для систем стохастических дискретных уравнений задачи частичной устойчивости и стабилизации практически не изучались.

В данной статье рассматривается система нелинейных дискретных (конечно-разностных) уравнений общего вида, подверженных воздействию дискретного случайного процесса типа "белого" шума. Предполагается, что система допускает "частичное" (по некоторой части переменных состояния) нулевое положение равновесия. Дается постановка задачи устойчивости по вероятности этого положения равновесия; устойчивость рассматривается по отношению к части определяющих его фазовых переменных. Анализируется возможность решения поставленной задачи на основе метода функций Ляпунова.

2. Определения. Постановка задачи

Рассмотрим линейное конечномерное пространство векторов **x** с евклидовой нормой $||\mathbf{x}||$. Введем разбиение вектора **x** на две части: $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ (Т обозначает транспонирование). Обозначим через $\mathbb{Z}_{+} = \{k = 0, 1, 2, ...\}$ множество целых неотрицательных чисел.

Пусть дана конечномерная нелинейная система стохастических дискретных (конечно-разностных) уравнений [2, 6–14]

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{X}(k, \mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k)),$$

в которой: $k \in \mathbb{Z}_+$ – дискретное время; $\mathbf{x}(k)$ – последовательность значений фазового вектора, определяющих состояние системы; $\boldsymbol{\xi}(k)$ – последовательность независимых случайных векторов, заданных на вероятностном пространстве (Ω, F, \mathbf{P}), с одинаковыми законами распределения для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$. Здесь Ω – пространство элементарных событий { ω } с заданными на нем σ -алгеброй F измеримых множеств с фильтрацией F_k и вероятностной мерой $\mathbf{P}: F \to [0, 1]$.

С учетом сделанного разбиения $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^T, \mathbf{z}^T)^T$ представим рассматриваемую систему в виде двух групп уравнений

(1)
$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{Y}(k, \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k), \boldsymbol{\xi}(k)), \quad \mathbf{z}(k+1) = \mathbf{Z}(k, \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k), \boldsymbol{\xi}(k)).$$

Если имеет место условие

$$\mathbf{Y}(k, \mathbf{0}, \mathbf{z}(k), \boldsymbol{\xi}(k)) \equiv \mathbf{0},$$

то множество $M = {\mathbf{x}(k) : \mathbf{y}(k) = \mathbf{0}}$ является "частичным" положением равновесия системы (1).

Допустим также, что вектор-функция $\mathbf{X} = (\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{Z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, определяющая правую часть системы (1), при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ непрерывна по \mathbf{x} , $\boldsymbol{\xi}$ в области $\|\mathbf{x}\| < \infty$. Начальное значение \mathbf{x}_0 фазового вектора будем считать *де*терминированным. Тогда (см., например, [9, 11]) для всех $k_0 \ge 0$, \mathbf{x}_0 существует единственный случайный многомерный марковский процесс, согласованный с потоком σ -алгебр F_k и являющийся в пространстве $\{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\}$ случайной вектор-функцией $\{\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0), \boldsymbol{\xi}(k)\}$, реализации $\{\mathbf{x}(k, \omega) = \mathbf{x}(k, \omega; k_0, \mathbf{x}_0), \boldsymbol{\xi}(k, \omega)\}$ которой удовлетворяют системе (1). Данный случайный процесс и соответствующий ему набор реализаций случайной векторфункции при всех $k \ge k_0$ определяют решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(k_0; k_0, \mathbf{x}_0)$, а также соответствующий этому решению набор выборочных траекторий системы (1). Марковское свойство решений системы (1) используется далее при обосновании условий частичной устойчивости по вероятности. При сделанных предположениях "частичное" положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) является инвариантным множеством этой системы. Предположение $\mathbf{X}(k, \mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}(k)) \equiv \mathbf{0}$ о существовании "полного" положения равновесия $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ не является необходимым и даже может противоречить смыслу решаемых задач.

Следуя подходу теории частичной устойчивости, будем анализировать устойчивость "частичного" положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ не по всем определяющим его переменным, а только по отношению к их некоторой наперед заданной части. Для этого предположим, что $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}_2)^{\mathrm{T}}$, причем вектор \mathbf{y}_1 включает те компоненты вектора \mathbf{y} , устойчивость по отношению к которым рассматривается.

В данном случае входящие в вектор **z** переменные являются "неконтролируемыми", хотя они существенно влияют на динамику **y**₁-переменных. Для расширения функциональных возможностей рассматриваемых далее понятий **y**₁-устойчивости "частичного" положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ введем произвольным образом разбиение $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ вектора **z** на две группы переменных.

Обозначим через D_{δ} область значений \mathbf{x}_0 таких, что $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$, $\|\mathbf{z}_{10}\| \le L$, $\|\mathbf{z}_{20}\| < \infty$; область D_{Δ} получается заменой δ на Δ .

Определение. "Частичное" положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) при больших значениях \mathbf{z}_{10} в целом по \mathbf{z}_{20} (for a large values of \mathbf{z}_{10} and on the whole with respect to \mathbf{z}_{20}):

1) **у**₁-устойчиво по вероятности, если для каждого $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа L > 0 найдется число $\delta(\varepsilon, \gamma, L, k_0) > 0$ такое, что для всех $k \ge k_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_{\delta}$ имеет место соотношение

(2)
$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k\geq k_0} ||\mathbf{y}_1(k;k_0,\mathbf{x}_0)|| > \varepsilon\right\} < \gamma;$$

2) равномерно \mathbf{y}_1 -устойчиво, если $\delta = \delta(\varepsilon, \gamma, L);$

3) асимптотически \mathbf{y}_1 -устойчиво, если оно равномерно \mathbf{y}_1 -устойчиво по вероятности и, кроме того, для каждого $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ и для любого наперед заданного числа L > 0 найдется число $\Delta(L) > 0$ такое, что для всех $k \ge k_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{|\mathbf{y}_0||\to 0} \mathbf{P}\left\{\lim_{k\to+\infty} ||\mathbf{y}_1(k;k_0,\mathbf{x}_0)|| = 0\right\} = 1.$$

Замечание 1. Можно показать (см., например, [5]), что если \mathbf{x}_0 – случайная величина (не зависящая от $\boldsymbol{\xi}(k)$), а включения $\mathbf{x}_0 \in D_{\delta}$ и $\mathbf{x}_0 \in D_{\Delta}$ выполняются почти наверное (с вероятностью единица), то получаем определения, эквивалентные введенным определениям частичной устойчивости.

Замечание 2. Наиболее близкими к введенным являются понятия частичной устойчивости: по всем [18, 19] и по отношению к части переменных [20] "частичного" положения равновесия стохастических систем дифференциальных уравнений в форме Ито. Предположения "в целом по \mathbf{z}_0 " или "при больших значениях \mathbf{z}_0 " характерны для определений устойчивости (как по всем, так и по части переменных) "частичного" положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1), но приводят к различным требованиям к функциям Ляпунова. За счет разделения вектора \mathbf{z}_0 на две части возникают "промежуточные" понятия \mathbf{y}_1 -устойчивости в смысле введенных определений 1–3. При этом надлежащий выбор разбиения $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ зависит от структуры системы (1) и является результатом поиска компромисса между содержательным смыслом понятия \mathbf{y}_1 -устойчивости "частичного" положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ и соответствующими требованиями к функциям Ляпунова. Кроме того, введенные понятия устойчивости возникают при переходе (посредством обозначений $w = k, r = k - k_0$) от системы (1) к *стационарной* дискретной системе

$$\mathbf{x}(r+1) = \mathbf{X}(\mathbf{x}(r), w(r), \boldsymbol{\xi}(r)), \quad w(r+1) = w(r) + 1,$$

когда требования равномерности (неравномерности) по k_0 в задачах \mathbf{y}_1 -устойчивости при больших значениях \mathbf{z}_0 или в целом по \mathbf{z}_0 "частичного" положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ заменяются требованиями "в целом по w_0 " ("при больших значениях w_0 ").

3. Условия частичной устойчивости

В контексте метода функций Ляпунова будем рассматривать однозначные непрерывные по **x** при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ скалярные функции $V = V(k, \mathbf{x})$, $V(k, \mathbf{0}) \equiv 0$, определенные в области

(3)
$$\|\mathbf{y}_1\| < h, \quad \|\mathbf{y}_2\| + \|\mathbf{z}\| < \infty.$$

Аналогом производных этих функций в силу исследуемой системы (1) являются их *усредненные разности* (приращения), вычисляемые по формуле [6, 9]

$$\mathbf{L}V(k,\mathbf{x}) = \mathbf{E}[V(k+1,\mathbf{X}(k,\mathbf{x}(k),\boldsymbol{\xi}(k)))|\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}] - V(k,\mathbf{x}),$$

где оператор $\mathbf{E}[V(k+1, \mathbf{X}(k, \mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k)))|\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}]$ определяет условное математическое ожидание при $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}$ случайной величины $V(k+1, \mathbf{X}(k, \mathbf{x}(k)\boldsymbol{\xi}(k)))$, порожденной набором реализаций $\{\mathbf{x}(k, \omega), \boldsymbol{\xi}(k, \omega)\}$ процесса $\{\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k)\}$, являющегося решением системы (1).

Также для формулировки условий частичной устойчивости дополнительно будут использоваться следующие вспомогательные функции.

1) Скалярные функции $V^*(k, \mathbf{y}, \mathbf{z}_1), V^*(\mathbf{y}, \mathbf{z}_1)$, необходимые для конкретизации (в соответствии с постановкой задачи) требований к V-функции Ляпунова, и вспомогательная векторная функция $\boldsymbol{\mu}(k, x), \boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, посредством которой корректируется область, где строится основная V-функция Ляпунова. Эти функции при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ непрерывны по **x** в области (3). 2) Непрерывные монотонно возрастающие по r > 0 скалярные функции $a_i(r), a_i(0) = 0$ (i = 1, 2, 3) (функции типа Хана [16]), определяющие стандартные требования к основной V-функции Ляпунова.

Введение, наряду с основной V-функцией Ляпунова, дополнительной вспомогательной $\mu(k, \mathbf{x})$ -функции мотивируется следующим обстоятельством. При исследовании \mathbf{y}_1 -устойчивости по вероятности "частичного" положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) в общем случае имеет место зависимость V-функций Ляпунова не только от k, \mathbf{y}_1 , но и от \mathbf{y}_2 , \mathbf{z} . В такой ситуации анализ поставленной задачи \mathbf{y}_1 -устойчивости в обычно рассматриваемой области

(4)
$$\|\mathbf{y}_1\| < h_1 < h, \quad \|\mathbf{y}_2\| + \|\mathbf{z}\| < \infty$$

не всегда дает возможность выявить желаемые свойства V-функции Ляпунова или наделить ее этими свойствами. Причина в требовании $\|\mathbf{y}_2\| + \|\mathbf{z}\| < \infty$, которое существенно затрудняет возможность получения необходимых оценок для V-функции Ляпунова и ее усредненной конечной разности.

Указанное требование представляет, по сути, расчет на "наихудший" случай изменения переменных \mathbf{y}_2 , \mathbf{z} , и его можно заменить более "мягким" требованием

(5)
$$\|\mathbf{y}_1\| + \|\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x})\| < h_1 < h, \quad \|\mathbf{y}_2\| + \|\mathbf{z}\| < \infty,$$

если иметь в виду "расширенную" ($\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu}$)-устойчивость "частичного" положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1). В данном случае $\boldsymbol{\mu}$ -функция не является изначально заданной и подбирается в процессе решения исходной задачи \mathbf{y}_1 -устойчивости, причем расширение понятия \mathbf{y}_1 -устойчивости может происходить за счет зависимости $\boldsymbol{\mu}$ -функции не только от k, \mathbf{y} , но и от \mathbf{z} .

Поэтому выбор подходящей V-функции Ляпунова не только возможно, но и целесообразно согласовывать с выбором области (k, \mathbf{x}) -пространства, в которой эта функция рассматривается. Указанного согласования можно добиться введением, наряду с *основной* V-функцией Ляпунова, *дополнительной* (векторной, вообще говоря) вспомогательной $\mu(k, \mathbf{x})$ -функции для корректировки области, в которой строится основная V-функция Ляпунова.

Теорема 1. Пусть для системы (1), наряду с основной скалярной V-функцией Ляпунова, можно указать дополнительную векторную функцию $\mu(k, \mathbf{x}), \ \mu(k, \mathbf{0}) \equiv 0$, для которых при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ и достаточно малом $h_1 > 0$ в области (5) выполняются условия:

(6)
$$V(k, \mathbf{x}) \ge a_1(\|\mathbf{y}_1\| + \|\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x})\|),$$

(7)
$$V(k,\mathbf{x}) \le V^*(k,\mathbf{y},\mathbf{z}_1), \quad V^*(k,\mathbf{0},\mathbf{z}_1) \equiv 0,$$

(8)
$$\mathbf{L}V(k,\mathbf{x}) = \mathbf{E}[V(k+1,\mathbf{X}(k,\mathbf{x}(k),\boldsymbol{\xi}(k))|\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}] - V(k,\mathbf{x}) \le 0.$$

Тогда "частичное" положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) \mathbf{y}_1 -устойчиво по вероятности при больших значениях \mathbf{z}_{10} в целом по \mathbf{z}_{20} . Если условия (7) заменить условиями

(9)
$$V(k,\mathbf{x}) \le V^*(\mathbf{y},\mathbf{z}_1), \quad V^*(\mathbf{0},\mathbf{z}_1) \equiv 0,$$

то "частичное" положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) равномерно \mathbf{y}_1 -устойчиво по вероятности при больших значениях \mathbf{z}_{10} в целом по \mathbf{z}_{20} .

Доказательства теоремы 1 и последующей теоремы 2 вынесены в Приложение.

В рамках рассматриваемого подхода можно сформулировать также и условия *асимптотической* **y**₁-устойчивости по вероятности при больших значениях **z**₁₀ в целом по **z**₂₀ "частичного" положения равновесия **y**(k) = **0** системы (1). Приведем один из вариантов таких условий.

Теорема 2. Пусть для системы (1), наряду с основной скалярной V-функцией Ляпунова, можно указать дополнительную векторную функцию $\mu(\mathbf{x}), \mu(\mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, для которых при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ и достаточно малом $h_1 > 0$ в области (5) выполняются условия:

(10)
$$a_1(\|\mathbf{y}_1\| + \|\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})\|) \le V(k, \mathbf{x}) \le a_2(\|\mathbf{y}_1\| + \|\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})\|),$$

(11)
$$\mathbf{L}V(k,\mathbf{x}) \le -a_3(\|\mathbf{y}_1\| + \|\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})\|)$$

а также условия (9).

Тогда "частичное" положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) асимптотически \mathbf{y}_1 -устойчиво по вероятности при больших значениях \mathbf{z}_{10} в целом по \mathbf{z}_{20} .

Замечание 3. Вспомогательная V-функция Ляпунова и ее усредненная разность (приращение) $\mathbf{L}V(k, \mathbf{x})$ в силу системы (1) в теоремах 1, 2 при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ являются, вообще говоря, *знакопеременными* функциями в области (4). Наряду с основной V-функцией Ляпунова дополнительная вспомогательная $\boldsymbol{\mu}$ -функция вводится для наиболее рациональной замены области (4) областью (5).

Условия (7) являются "промежуточными" между менее ограничительным условием $V(k, \mathbf{0}, \mathbf{z}) \equiv 0$ и более ограничительными условиями $V(k, \mathbf{x}) \leq \leq V^*(k, \mathbf{y}), V^*(k, \mathbf{0}) \equiv 0$, при выполнении которых "частичное" положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) соответственно \mathbf{y}_1 -устойчиво по вероятности при больших значениях \mathbf{z}_0 или \mathbf{y}_1 -устойчиво по вероятности в целом по \mathbf{z}_0 .

Замечание 4. В рамках предложенного подхода нелинейные V-функции Ляпунова могут быть построены как знакоопределенные квадратичные формы (или формы более высокого порядка) $V(k, \mathbf{x}) \equiv V^*(k, \mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}))$ переменных $\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu}$. При этом выбор $\boldsymbol{\mu}$ -функций должен быть согласован с условиями (7), (9): допустимы, например, вспомогательные $\boldsymbol{\mu}$ -функции вида $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{y}_2, \mathbf{z}_1), \boldsymbol{\mu}(\mathbf{0}, \mathbf{z}_1) \equiv \mathbf{0}.$

Если от исходной системы (1) можно отделить подсистему вида

$$\mathbf{y}_1(k+1) = \mathbf{Y}_1\Big(k, \mathbf{y}_1(k), \boldsymbol{\mu}(k), \boldsymbol{\xi}(k)\Big),$$
$$\boldsymbol{\mu}(k+1) = \mathbf{Y}_1^*\Big(k, \mathbf{y}_1(k), \boldsymbol{\mu}(k), \boldsymbol{\xi}(k)\Big),$$

то построение V-функции Ляпунова можно провести, используя численный метод [11] применительно к задаче устойчивости по всем переменным (по $\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu}$) нулевого положения равновесия этой подсистемы.

Замечание 5. Если система (1) допускает "полное" положение равновесия $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$, то в случае $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\xi}(k) \equiv \mathbf{0}$, $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ при выполнении условий (6), (8) имеем дискретный вариант классической теоремы В.В. Румянцева [15] об устойчивости по отношению к части переменных. В случае $\boldsymbol{\xi}(k) \equiv \mathbf{0}$ теорема 1 переходит в дискретные варианты [21, 22] соответствующих теорем из [23, 24].

Замечание 6. Устойчивость по части переменных "в среднем" нулевого положения равновесия систем дискретных стохастических уравнений изучалась в [25, 26] на основе выделения "усеченных" подсистем [25], а также путем построения вспомогательных систем [26]. Возможности использования метода функций Ляпунова анализировались для решения задач частичной устойчивости (стабилизации) систем стохастических дифференциальных уравнений [27–31], в том числе для систем со случайной структурой [32–34]; для квазилинейных систем стохастических дифференциальных уравнений на модельном примере дано сравнение задач оптимальной стабилизации по всем и по части переменных [35].

4. Пример

Пусть дискретная система (1) состоит из уравнений

(12)

$$y_1(k+1) = [a + \alpha \xi_1(k)]y_1(k) + ly_2(k)z_1(k),$$

$$y_2(k+1) = [b + dy_1(k)]y_2(k),$$

$$z_1(k+1) = [c + ey_1(k)]z_1(k), \quad z_2(k+1) = Z_2(k, \mathbf{x}(k)),$$

где $\xi_1(k)$ – последовательность независимых случайных величин с одинаковым стандартным нормальным распределением при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$; функция Z_2 произвольна и удовлетворяет только общим требованиям к системе (1); a, b, c, d, e, l, α – постоянные параметры.

Система (12) допускает "частичное" положение равновесия

(13)
$$y_1(k) = y_2(k) = 0.$$

Наряду с основной функцией Ляпунова

(14)
$$V(\mathbf{x}) = y_1^2 + 2y_2^2 z_1^2$$

также рассмотрим вспомогательную функцию $\mu_1 = y_2 z_1$.

Для V-функции Ляпунова в области (5) выполняются условия (9) и (10), а ее усредненная разность (приращение) $LV(\mathbf{x})$ в силу системы (12) при всех $k \in \mathbb{Z}_+$ определяется следующим образом:

$$\begin{split} \mathbf{L}V(\mathbf{x}) &= \mathbf{E}\Big[\left(ay_1(k) + ly_2(k)z_1(k) + \alpha y_1(k)\xi_1(k) \right)^2 + \\ &+ 2y_2^2(k)z_1^2(k)(b + dy_1(k))^2(c + ey_1(k))^2 |\mathbf{x}(k) = \mathbf{x} \Big] - y_1^2 - 2y_2^2 z_1^2 = \\ &= a^2y_1^2 + 2aly_1y_2z_1 + l^2y_2^2 z_1^2 + \alpha^2y_1^2 + 2b^2c^2y_2^2 z_1^2 + \\ &+ r_1y_1y_2^2 z_1^2 + r_2y_1^2y_2^2 z_1^2 + r_3y_1^3y_2^2 z_1^2 + 2d^2e^2y_1^4y_2^2 z_1^2 - y_1^2 - 2y_2^2 z_1^2 = \\ &= (a^2 + \alpha^2 - 1)y_1^2 + 2aly_1\mu_1 + (l^2 + 2b^2c^2 - 2)\mu_1^2 + r_1y_1\mu_1^2 + \\ &+ r_2y_1^2\mu_1^2 + r_3y_1^3\mu_1^2 + 2d^2e^2y_1^4\mu_1^2, \\ r_1 = bcr_0, \quad r_2 = 2(b^2e^2 + 4bcde + c^2d^2), \quad r_3 = der_0, \quad r_0 = 4(be + cd); \end{split}$$

вычисление условного математического ожидания проведено с учетом соотношений $\mathbf{E}[\xi_1(k)] = 0$, $\mathbf{E}[\xi_1^2(k)] = 1$, определяющих стандартное нормальное распределение случайных величин $\xi_1(k)$.

При выполнении неравенств

(15)
$$a^2 + \alpha^2 < 1, \quad (a^2 + \alpha^2 - 1)(l^2 + 2b^2c^2 - 2) > a^2l^2$$

для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ при достаточно малом $h_1 > 0$ в области (5) (но не в области (4)) при любых значениях параметров d, e имеет место оценка $\mathbf{L}V(\mathbf{x}) \leq \leq -\beta(y_1^2 + \mu_1^2), \beta = \text{const} > 0$. Это значит, что для V-функции Ляпунова (14) в области (5) помимо условий (9), (10) также выполняется условие (11).

На основании теоремы 2 заключаем, что при выполнении условий (15) "частичное" положение равновесия (13) системы (12) при больших значениях z_{10} в целом по z_{20} асимптотически y_1 -устойчиво по вероятности.

Поясним геометрически данное свойство частичной устойчивости применительно к введенным в разделе 2 определениям 2, 3. Для каждого $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < h_1$), $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа L > 0 в трехмерном пространстве $Oy_1y_2z_1$ граница допустимой области $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$ начальных возмущений является цилиндром $\|\mathbf{y}_0\| = \delta$ высоты 2L, расположенном между двумя плоскостями $y_1 = \pm \varepsilon$ (рис. 1); при этом $\delta = \delta(\varepsilon, \gamma, L)$. Если решения системы (12) начинаются при $k = k_0$ внутри этого δ -цилиндра (при произвольном значении z_{20}), то соответствующие указанным решениям выборочные траектории в пространстве $Oy_1y_2z_1$ будут с вероятностью, не меньшей $1 - \gamma$, оставаться при всех $k \ge k_0$ между указанными двумя ε -плоскостями.

Также можно указать число $\Delta = \Delta(\gamma, L, h_1) > 0$ такое, что

(16)

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k\geq k_{0}}|y_{1}(k;k_{0},\mathbf{x}_{0})|\geq h_{1}\right\} < \gamma,$$

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{k\to+\infty}y_{1}(k;k_{0},\mathbf{x}_{0})=0\right\} \geq 1-\gamma$$

124



Рис. 1. Области допустимых начальных и текущих отклонений от инвариантного множества $y_1(k) = y_2(k) = 0$.



Рис. 2. Области допустимых начальных и текущих отклонений (в проекции на плоскости Oy_2z_1 .

для всех $k \geq k_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$. Если решения системы (12) начинаются при $k = k_0$ внутри Δ -цилиндра $\|\mathbf{y}_0\| = \Delta$ высоты 2L (при произвольном значении z_{20}), то соответствующие этим решениям выборочные траектории в пространстве $Oy_1y_2z_1$ будут с вероятностью, не меньшей $1 - \gamma$, не только оставаться при всех $k \geq k_0$ между ε -плоскостями, но и при $k \to \infty$ будут сходиться к плоскости $y_1 = 0$.

Однако в рамках рассматриваемого подхода, основанного на переходе от области (4) к области (5), имеет место "расширенная" равномерная (y_1, μ_1) -устойчивость "частичного" положения равновесия (13) системы (12), обеспечивающая правомерность такого перехода. Поэтому δ -цилиндр распо-

Idoningu								
k	$\xi_1(k)$	$y_1(k)$	$y_2(k)$	$z_1(k)$	$\xi_1(k)$	$y_1(k)$	$y_2(k)$	$z_1(k)$
0	0	0,1	0,1	1	0	0,1	0,1	1
1	0	$0,\!15$	0,16	$0,\!4333$	-1	$0,\!1167$	0,16	$0,\!4333$
2	0	0,1443	0,2640	0,2094	1	0,1665	0,2587	0,1950
3	0	$0,\!1275$	0,4340	0,1000	1	0,1891	$0,\!4311$	0,0975
4	0	0,1072	0,7063	0,0461	0	0,1366	0,7282	0,0509
5	0	0,0861	1,1352	0,0203	-1	0,0599	$1,\!1918$	0,0239
6	0	0,0661	1,8005	0,0085	-1	0,0385	$1,\!8590$	0,0094
7	0	0,0484	2,8198	0,0034	1	0,0496	2,8601	0,0035
8	0	0,0338	4,3662	0,0013	0	0,0348	$4,\!4320$	0,0013
9	0	0,0226	6,6969	0,0005	0	0,0233	6,8022	0,0005
10	0	0,0145	10,197	0,00017	1	0,0227	10,362	0,00017
15	0	0,0009	79,001	$7,6 \times 10^{-7}$	-1	0,0007	82,073	$9,1 \times 10^{-7}$
20	0	0,000048	600,69	$3,2 \times 10^{-9}$	-1	0,000017	623,28	$3,7 \times 10^{-9}$

ложен в области D^* пространства $Oy_1y_2z_1$, ограниченной поверхностью $y_1^2 + y_2^2z_1^2 = \varepsilon^2$. (На рис. 2 расположение δ -цилиндра показано в проекции на плоскость Oy_2z_1 ; соответствующий прямоугольник со сторонами длины 2δ и 2L находится в области, границами которой являются ветви гипербол $y_2z_1 = = \pm \varepsilon$.) Если решения системы (12) начинаются при $k = k_0$ внутри δ -цилиндра (при произвольном значении z_{20}), то соответствующие указанным решениям выборочные траектории в пространстве $Oy_1y_2z_1$ будут с вероятностью, не меньшей $1 - \gamma$, оставаться при всех $k \geq k_0$ в области D^* .

Анализ структуры системы (12) позволяет дополнить сделанные выводы: при выполнении условий (15) выборочные траектории в пространстве $Oy_1y_2z_1$, соответствующие решениям системы (12), начинающимся внутри Δ -цилиндра $||\mathbf{y}_0|| = \Delta$ высоты 2L (при произвольном значении z_{20}), с вероятностью, не меньшей $1 - \gamma$, "фокусируются" при $k \to \infty$ или вдоль оси Oy_2 , или вдоль оси Oz_1 . Действительно, в силу имеющей место "расширенной" асимптотической (y_1, μ_1) -устойчивости "частичного" положения равновесия (13) системы (12) второе и третье уравнения этой нелинейной системы можно представить в виде *линейных* рекуррентных уравнений

$$y_2(k+1) = [b + dy_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)] y_2(k),$$

$$z_1(k+1) = [c + ey_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)] z_1(k),$$

причем для компоненты $y_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)$ любого решения системы (12), начавшегося внутри Δ -цилиндра высоты 2L, выполнены соотношения (16). Поэтому при выполнении условий (15) для этих решений системы (12) при $k \to \infty$ с вероятностью, не меньшей $1 - \gamma$, имеют место соотношения $|y_2(k)| \to \infty$ и $|z_1(k)| \to 0$ (при |b| > 1, |c| < 1) или соотношения $|y_2(k)| \to 0$ и $|z_1(k)| \to \infty$ (при |b| < 1, |c| > 1).

Для численной конкретизации сделанных выводов в левой части таблицы для "невозмущенного" случая $\xi_1(k) \equiv 0$ приводятся результаты вычисле-

Таблица

ний по рекуррентным соотношениям (12) на отрезке $k \in [0, 20]$ при $y_1(0) = y_2(0) = 0,1$ и $z_1(0) = 1$, а также при значениях параметров a = 1/2, b = 3/2, c = 1/3, d = e = l = 1. При случайном воздействии $\xi_1(k)$ выборочные траектории группируются около "невозмущенной" траектории, фокусирующейся при $k \to \infty$ вдоль оси Oy_2 . Для оценки влияния случайного воздействия на динамику системы (12) в правой части таблицы при $\alpha = 1/3$ и тех же значениях параметров приводятся результаты вычислений в случае, когда допустимая реализация $\xi_1(k)$ на отрезке $k \in [0, 20]$ определяется последовательностью $\{0, -1, 1, 1, 0, -1, -1, 1, 0, 0, 1, 1, -1, 0, 0, -1, 1, 0, -1, 1, -1\}$.

5. Заключение

Для нелинейной системы стохастических дискретных (конечно-разностных) уравнений, подверженных действию дискретного случайного процесса типа "белого" шума, дана поставка задачи устойчивости (асимптотической устойчивости) по части переменных "частичного" нулевого положения равновесия. Начальные значения "неконтролируемых" переменных, не определяющих рассматриваемое "частичное" положение равновесия, предполагаются большими (ограниченными по норме любым наперед заданным числом) по одной их части и произвольными по другой.

Приводятся достаточные условия разрешимости этой задачи в контексте дискретно-стохастического варианта метода функций Ляпунова в соответствующей модификации. Наряду с основной V-функцией Ляпунова рассматривается дополнительная (векторная, вообще говоря) вспомогательная μ -функция для корректировки области, в которой строится основная V-функция Ляпунова. Целесообразность такого подхода заключается в том, что в результате основная V-функция Ляпунова, а также ее усредненная разность (приращение) в силу рассматриваемой системы могут быть знако-переменными.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. І. Пусть при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ и достаточно малом $h_1 > 0$ в области (5) выполняются условия (6)–(8).

Возьмем произвольное число ε ($0 < \varepsilon < h_1$), рассмотрим произвольный момент времени k_0 , а также начальную точку \mathbf{x}_0 из области

$$D_{\varepsilon} = \Big\{ \|\mathbf{y}_0\| < \varepsilon, \ \|\mathbf{z}_{10}\| \le L, \ \|\mathbf{z}_{20}\| < \infty \Big\}.$$

Рассмотрим случайный процесс $\mathbf{x}(k; t_0, \mathbf{x}_0)$ $(k \ge k_0)$, являющийся решением системы (1), и обозначим через τ_{ε} "целочисленный" момент первого выхода этого процесса из области $\|\mathbf{y}_1\| \le \varepsilon$. Если некоторые траектории ни за какое конечное время не выходят из области $\|\mathbf{y}_1\| \le \varepsilon$, то для них τ_{ε} считаем равным ∞ . Положим

$$\tau(k) = \min(\tau_{\varepsilon}, k); \quad \tau(k_0) = k_0.$$

Имеют место равенства

$$V\Big(\tau(k), \mathbf{x}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0)\Big) - V(k_0, \mathbf{x}_0) =$$

$$= V\Big(\tau(k), \mathbf{x}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0)\Big) - V\Big(\tau(k-1), \mathbf{x}(\tau(k-1); k_0, \mathbf{x}_0)\Big) +$$

$$+ V\Big(\tau(k-1), \mathbf{x}(\tau(k-1); k_0, \mathbf{x}_0)\Big) - V\Big(\tau(k-2), \mathbf{x}(\tau(k-2); k_0, \mathbf{x}_0)\Big) +$$

$$\dots$$

$$+ V\Big(\tau(k_0+1), \mathbf{x}(\tau(k_0+1); k_0, \mathbf{x}_0)\Big) - V(k_0, \mathbf{x}_0) =$$

$$= \sum_{s=k_0}^{k-1} \Delta V\Big(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0)\Big);$$

$$\Delta V\Big(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0)\Big) =$$

$$= V\Big(\tau(s+1), \mathbf{x}(\tau(s+1); k_0, \mathbf{x}_0)\Big) - V\Big(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0)\Big).$$

Из этих равенств следует, что для последовательности v(k) случайных величин $v(k) = V(\tau(k), \mathbf{x}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0))$, порожденных реализациями $\{\mathbf{x}(k,\omega), \boldsymbol{\xi}(k,\omega)\}$ случайного процесса $\{\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k)\}$, определяемого системой (1), имеют место "усредненные" соотношения

$$\mathbf{E} \Big[V\big(\tau(k), \mathbf{x}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0)\big) - V(k_0, \mathbf{x}_0) \Big] =$$

=
$$\mathbf{E} V\big(\tau(k), \mathbf{x}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0)\big) - V(k_0, \mathbf{x}_0) =$$

=
$$\sum_{s=k_0}^{k-1} \mathbf{E} \Delta V\big(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0)\big).$$

Учитывая равенства (полученные с учетом правила вычисления повторного математического ожидания)

$$\mathbf{E}[\Delta V(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0))] =$$

$$= \mathbf{E}[V(\tau(s+1), \mathbf{X}(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0), \boldsymbol{\xi}(\tau(s))) - V(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0)))] =$$

$$= \mathbf{E}\{\mathbf{E}[V(\tau(s+1), \mathbf{X}(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s), \boldsymbol{\xi}(\tau(s))|\mathbf{x}(\tau(s))))] = \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0))]\} - \mathbf{E}[V(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0))] =$$

$$= \mathbf{E}\{\mathbf{E}[V(\tau(s+1), \mathbf{X}(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s), \boldsymbol{\xi}(\tau(s))))|\mathbf{x}(\tau(s)) = \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0))] - V(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0))\}] =$$

приходим к соотношению (дискретный вариант формулы Дынкина) [9]

$$\mathbf{E}V(\tau(k), \mathbf{x}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0)) - V(k_0, \mathbf{x}_0) =$$
$$= \sum_{s=k_0}^{k-1} \mathbf{E} \big[\mathbf{L}V(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0)) \big].$$

В результате на основании условия (8) получаем неравенство

(II.1)
$$\mathbf{E}V(\tau(k), \mathbf{x}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0)) \le V(k_0, \mathbf{x}_0) < \infty.$$

Если справедливо неравенство $k > \tau_{\varepsilon}$ (в этом случае имеем $\tau(k) = \tau_{\varepsilon}$), то выполняются соотношения $\|\mathbf{y}_1(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0)\| = \|\mathbf{y}_1(\tau_{\varepsilon}; k_0, \mathbf{x}_0)\| \ge \varepsilon$. Если же справедливо неравенство $k < \tau_{\varepsilon}$ (в этом случае имеем $\tau(k) = k$), то на основании неравенства Чебышева–Маркова и оценки (П.1) находим

$$(\Pi.2) \qquad \mathbf{P} \Big[\|\mathbf{y}_{1}(k;k_{0},\mathbf{x}_{0})\| > \varepsilon \Big] \le a_{1}^{-1}(\varepsilon) \mathbf{E} \Big[a_{1}(||\mathbf{y}_{1}(k;k_{0},\mathbf{x}_{0})||) \Big] \le \\ \le a_{1}^{-1}(\varepsilon) \mathbf{E} \Big[a_{1}(||\mathbf{y}_{1}(k;k_{0},\mathbf{x}_{0})|| + ||\boldsymbol{\mu}(k,\mathbf{x}(k;k_{0},\mathbf{x}_{0}))||) \Big] \le \\ \le a_{1}^{-1}(\varepsilon) \mathbf{E} \Big[V \Big(k,\mathbf{x}(k;k_{0},\mathbf{x}_{0}) \Big) \Big] = \\ = a_{1}^{-1}(\varepsilon) \mathbf{E} \Big[V \big(\tau(k),\mathbf{x}(\tau(k);k_{0},\mathbf{x}_{0}) \big) \Big] \le a_{1}^{-1}(\varepsilon) V(k_{0},\mathbf{x}_{0}).$$

Поскольку при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ функция Ляпунова $V(k, \mathbf{x})$ непрерывна, $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, а также выполняются условия (7), то для всех $k_0 \geq 0$ и для любого заданного числа L > 0 предельное соотношение

(II.3)
$$\lim_{||\mathbf{y}_0|| \to 0} V(k_0, \mathbf{x}_0) = 0$$

выполняется при $\|\mathbf{z}_{10}\| \leq L$ равномерно по $\|\mathbf{z}_{20}\| < \infty$.

Поэтому для всех $k_0 \ge 0$ и для любого заданного числа L > 0 на основании неравенств (П.2), (П.3) имеем предельное соотношение

$$\lim_{||\mathbf{y}_0||\to 0} \mathbf{P}\left[\sup_{k>k_0} ||\mathbf{y}_1(k;t_0,\mathbf{x}_0)|| > \varepsilon\right] = 0,$$

выполняющееся при $\|\mathbf{z}_{10}\| \leq L$ равномерно по $\|z_{20}\| < \infty$.

В результате для каждого $k_0 \leq 0$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа L > 0 найдется число $\delta(\varepsilon, \gamma, L, k_0) > 0$ такое, что неравенство (2) имеет место для всех $k \geq k_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_{\delta}$. Следовательно, при больших значениях \mathbf{z}_{10} в целом по \mathbf{z}_{20} "частичное" положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) \mathbf{y}_1 -устойчиво по вероятности.

II. Если вместо условий (7) выполняются условия (9), то для любого заданного числа L > 0 предельное соотношение (П.3) выполняется при $\|\mathbf{z}_{10}\| \leq L$ равномерно не только по $\|\mathbf{z}_{20}\| < \infty$, но и по $k_0 \geq 0$. В результате для каждого $k_0 \geq 0$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа L > 0 найдется независимое от k_0 число $\delta(\varepsilon, \gamma, L) > 0$ такое, что неравенство (2) имеет место для всех $k \geq k_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_{\delta}$. Следовательно, при больших значениях \mathbf{z}_{10} в целом по \mathbf{z}_{20} "частичное" положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) равномерно \mathbf{y}_1 -устойчиво по вероятности. Теорема 1 доказана.

 \mathcal{A} оказательство теоремы 2. При выполнении условий теоремы "частичное" положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) равномерно \mathbf{y}_1 -устойчиво по вероятности при больших значениях \mathbf{z}_{10} в целом по \mathbf{z}_{20} .

На основании неравенства (П.1) последовательность v(k) случайных величин $v(k) = V(\tau(k), \mathbf{x}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0))$, порожденных реализациями $\{\mathbf{x}(k, \omega),$ $\boldsymbol{\xi}(k, \omega)\}$ случайного процесса $\{\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k)\}$, определяемого системой (1), образует неотрицательный супермартингал, являющийся аналогом монотонно убывающей последовательности в детерминированном случае. Поэтому на основании неравенства (П.1) для каждой начальной точки \mathbf{x}_0 из области D_{ε} с вероятностью единица имеет место предельное соотношение [36]

$$v(k) = V(\tau(k), \mathbf{x}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0)) \to v_*, \quad k \to \infty.$$

Используя известную схему [2, 3, 9] анализа, можно показать, что равенство $v_* = 0$ выполняется с вероятностью единица. Действительно, применяя операцию математического ожидания и переходя к пределу в обеих частях неравенства (11), с вероятностью единица получаем

$$\mathbf{E}[a_3(||\mathbf{y}_1(\tau(k);k_0,\mathbf{x}_0)||)] \to 0, \quad k \to \infty.$$

Поэтому в силу условий (10), (11) и леммы Фату справедливо равенство $\mathbf{E}[a_3(a_2^{-1}(v_*))] = 0$, которое означает, что $v_* = 0$. Но в случае $v_* = 0$ при $\|\mathbf{y}_0\| \to 0$ имеет место предельное соотношение

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{k \to +\infty} ||\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)|| = 0\right\} = 1$$

и, следовательно, "частичное" положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) асимптотически \mathbf{y}_1 -устойчиво по вероятности при больших значениях \mathbf{z}_{10} в целом по \mathbf{z}_{20} . Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Кац И.Я., Красовский Н.Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. матем. и механика. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 809–823.
- 2. Кушнер Г.Дж. Стохастическая устойчивость и управление. М.: Мир, 1969.
- 3. Хасъминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.
- 4. *Kats I.Ya., Martynyuk A.A.* Stability and Stabilization of Nonlinear Systems with Random Structure. London: Taylor & Francis, 2002.
- 5. *Mao X.R., Yuan C.G.* Stochastic Differential Equations with Markovian Swit-ching. London: Imperial College Press, 2006.
- 6. Ахметкалиев Т. О связи между устойчивостью стохастических систем разностных и дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 8. С. 1016–1026.
- 7. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.

- 8. Константинов В.М. Об устойчивости стохастических разностных систем // Пробл. передачи информ. 1970. Т. 6. Вып. 1. С. 81–86.
- 9. *Пакшин П.В.* Дискретные системы со случайными параметрами и структурой. М.: Физматлит, 1994.
- Ажмяков В.В., Пятницкий Е.С. Нелокальный синтез систем стабилизации дискретных стохастических объектов управления // АиТ. 1994. № 2. С. 68–78. Azhmyakov V.V., Pyatnitskiy E.S. Nonlocal Synthesis of Systems for Stabilization of Discrete Stochastic Controllable Objects // Autom. Remote Control. 1994. V. 55. No. 2. P. 202–210.
- 11. Барабанов И.Н. Построение функций Ляпунова для дискретных систем со случайными параметрами // АиТ. 1995. № 11. С. 31–41.

Barabanov I.N. Construction of Lyapunov Functions for Discrete Systems with Stochastic Parameters // Autom. Remote Control. 1995. V. 56. No. 11. P. 1529–1537.

- Jian X.S., Tian S.P., Zhang T.L., Zhang W.H. Stability and Stabilization of Nonlinear Discrete-Time Stochastic Systems // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2019. V. 29. No. 18. P. 6419–6437.
- Qin Y., Cao M., Anderson B.D.O. Lyapunov Criterion for Stochastic Systems and its Applications in Distributed Computation // IEEE Trans. Autom. Control. 2020. V. 65. No. 2. P. 546–560.
- Teel A.R., Hespanha J.P., Subbaraman A. Equivalent Characterizations of Input-to-State Stability for Stochastic Discrete-Time Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2014. V. 59. No. 2. P. 516–522.
- Румянцев В.В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. Матем., Механика, Физика, Астрономия, Химия. 1957. № 4. С. 9–16.
- 16. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987.
- Воротников В.И. Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // АиТ. 2005. № 4. С. 3–59.
 Vorotnikov V.I. Partial Stability and Control: the State of the Art and Developing Prospects // Autom. Remote Control. 2005. V. 66. No. 4. P. 511–561.
- Rajpurohit T., Haddad W.M. Stochastic Finite-Time Partial Stability, Partial-State Stabilization, and Finite-Time Optimal Feedback Control // Math. Control, Signals, Syst. 2017. V. 29. No. 2. art. 10.
- Rajpurohit T., Haddad W.M. Partial-State Stabilization and Optimal Feedback Control for Stochastic Dynamical Systems // J. Dynam. Syst., Measurement, and Control. 2017. V. 139. No. 9. P. DS-15-1602.
- Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г. К задаче частичной устойчивости по вероятности нелинейных стохастических систем // АнТ. 2019. № 5. С. 86–98. Vorotnikov V.I., Martyshenko Y.G. On the Partial Stability in Probability of Nonlinear Stochastic Systems // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 5. P. 856–866.
- Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г. К задаче частичной устойчивости нелинейных дискретных систем // Мехатроника. Автоматизация. Управление. 2017. Т. 18. № 6. С. 371–375.
- Ramírez-Llanos E., Martínez S. Distributed and Robust Fair Optimization Applied to Virus Diffusion Control // IEEE Trans. Network Sci. Engineer. 2017. V. 4. No. 1. P. 41–54.

- 23. Воротников В.И. Об устойчивости и устойчивости по части переменных "частичных" положений равновесия нелинейных динамических систем // Докл. РАН. 2003. Т. 389. № 3. С. 332–337.
- 24. Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г. К теории частичной устойчивости нелинейных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. Т. 51. Вып. 5. С. 23–31.
- 25. *Юдаев Г.С.* Об устойчивости стохастических разностных систем // Изв. Вузов. Матем. 1979. № 8. С. 74–78.
- Phillis Y.A. y-Stability and Stabilization in the Mean of Discrete-Time Sto-chastic Systems // Int. J. Control. 1984. V. 40. No. 1. P. 149–160.
- Шаров В.Ф. Устойчивость и стабилизация стохастических систем по отношению к части переменных // АиТ. 1978. № 11. С. 63–71. Sharov V.F. Stability and Stabilization of Stochastic Systems vis-a-vis Some of the Variables // Autom. Remote Control. 1978. V. 39. No. 11. P. 1629–1636.
- 28. Vorotnikov V.I. Partial Stability and Control. Boston: Birkhauser, 1998.
- 29. Ignatyev O. Partial Asymptotic Stability in Probability of Stochastic Differential Equations // Statist. Probab. Lett. 2009. V. 79. No. 5. P. 597–601.
- Zuyev A., Vasylieva I. Partial Stabilization of Stochastic Systems with Application to Rotating Rigid Bodies // IFAC-PapersOnLine. 2019. V. 52. No. 16. P. 162–167.
- Sultanov O. Capture into Parametric Autoresonance in the Presence of Noise // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2019. V. 75. P. 14–21.
- Kao Y., Wang C., Zha F., Cao H. Stability in Mean of Partial Variables for Stochastic Reaction-Diffusion Systems with Markovian Switching // J. Franklin Institute. 2014. V. 351. No. 1. P. 500–512.
- Socha L., Zhu Q.X. Exponential Stability with Respect to Part of the Variab-les for a Class of Nonlinear Stochastic Systems with Markovian Switching // Math. Comp. Simul. 2019. V. 155. P. 2–14.
- Socha L. Stability and Positivity with Respect to Part of the Variables for Positive Markovian Jump Systems // Bull. Polish Acad. Sci.: Tech. Sci. 2019. V. 67. No. 4. P. 769–775.
- 35. *Хрусталев М.М., Онегин Е.Е.* Необходимые и достаточные условия в задаче оптимальной стабилизации квазилинейных стохастических систем // АиТ. 2019. № 7. С. 89–104.

Khrustalev M.M., Onegin E.E. Necessary and Sufficient Conditions for Optimal Stabilization of Quasi-Linear Stochastic Systems // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 7. P. 1252–1264.

36. Дуб Дж.Л. Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакшиным.

Поступила в редакцию 05.10.2020 После доработки 20.02.2021 Принята к публикации 16.03.2021 © 2021 г. В.В. ХУТОРЦЕВ, д-р техн. наук (hvv.56@mail.ru) (Ростовский-на-Дону научно-исследовательский институт радиосвязи)

УПРАВЛЕНИЕ ПОИСКОМ ОБЪЕКТОВ ИЗ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА ПРИ НЕОДНОРОДНОЙ ОБЛАСТИ ОБЗОРА ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрена задача поиска объектов наблюдения для случая, когда модель их появления удовлетворяет закономерностям пространственно-временного пуассоновского потока, а область обзора информационно-измерительной системы является неоднородной. Дано вероятностное описание подобластей неоднородности, выявлены закономерности их учета при формировании апостериорной плотности интенсивности случайного потока. Определена процедура синтеза закона управления поиском для неоднородной области обзора. Приведен пример.

Ключевые слова: поиск объектов, неоднородная область обзора, пространственно-временной пуассоновский поток.

DOI: 10.31857/S0005231021090051

1. Введение

Поиск объектов наблюдения относится к одному из классов задач управления измерительными процессами, решаемых информационно-измерительными системами (ИИС) [1–4]. Рациональное распределение поисковых усилий актуально для повышения эффективности функционирования ИИС, связанной с сокращением времени поиска, повышением достоверности обнаружения объектов наблюдения, перераспределением энергетического потенциала ИИС при реализации различных режимов их работы и т.д.

Одной из разновидностей задач поиска, характерных для систем контроля воздушного и космического пространства, систем контроля транспортных потоков и т.д., является задача поиска объектов наблюдения, возникающих в области обзора (ОО) ИИС последовательно, как правило, в соответствии с закономерностями случайного потока. В [5–8] рассмотрены подходы к синтезу управления поиском объектов для пространственно-временной пуассоновской модели их появления при однородной ОО ИИС. Последнее условие часто оказывается неправомерным, например, из-за необходимости одновременного решения информационно-измерительной системой задачи сопровождения уже обнаруженных объектов наблюдения (как правило нескольких), находящихся в области обзора. В связи с этим дополнительных исследований требует вопрос формирования поисковых стратегий в случае, когда ОО ИИС является неоднородной, включающей подобласти неоднородности, характеристики которых необходимо учитывать при задании плотности интенсивности пространственно-временного пуассоновского потока объектов наблюдения.

К таким подобластям можно отнести, в частности, подобласти, порождаемые апостериорными плотностями распределения векторов состояний объектов наблюдения, уже находящихся в области обзора (сопровождаемых объектов), параметры траекторий которых измеряются ИИС.

Подходы к решению отдельных разновидностей аналогичных задач без привязки к модели пространственно-временного пуассоновского потока появления объектов наблюдения рассмотрены, в частности, в [1–3].

Представляется актуальным анализ особенностей управления поиском объектов для пространственно-временной пуассоновской модели их появления при неоднородной структуре ОО ИИС.

2. Постановка задачи

Рассмотрим область обзора $X \in \mathbb{R}^n$ $(0 < n \leq 3)$ с введенной в ней декартовой системой координат $\{x_1, \ldots, x_n\}$, в которой объекты наблюдения появляются в соответствии с закономерностями пространственно-временного пуассоновского потока φ [6–12].

Пусть для непересекающихся измеримых подмножеств X_r области X выполняются условия $X = \bigcup_r X_r$, $X_p \bigcap X_j = \emptyset$, $p \neq j$. Тогда любые два временных потока, определяемые как $\varphi_{p\Sigma}(t) = \varphi(X_p, t)$, $\varphi_{j\Sigma}(t) = \varphi(X_j, t)$, будут независимыми и пуассоновскими, а интегральный временной пуассоновский поток событий определяется из φ в соответствии с соотношением [9]

(2.1)
$$\varphi_{\Sigma}(t) = \varphi(X, t) = \sum_{r} \varphi(X_{r}, t).$$

Через $\nu(x,t)$ обозначим априорную (не учитывающую изменений, происходящих в ОО в процессе наблюдений) плотность интенсивности потока φ [6–9]. Меры интенсивности или интенсивности временных потоков событий, порождаемых φ , зададим через интеграл по мере Лебега от плотности интенсивности $\nu(x,t)$ пространственно-временного пуассоновского потока [9, 12]

(2.2)
$$\xi_p(t) = \int_{X_p} \nu(x,t) dx, \quad \xi_j(t) = \int_{X_j} \nu(x,t) dx,$$
$$\xi(t) = \int_X \nu(x,t) dx = \sum_r \int_{X_r} \nu(x,t) dx,$$

где $\xi_p(t)$, $\xi_j(t)$ – меры интенсивности независимых временных пуассоновских потоков соответственно $\varphi_{p_{\Sigma}}(t)$, $\varphi_{j_{\Sigma}}(t)$; $\xi(t)$ – мера интенсивности интегрального временного потока $\varphi_{\Sigma}(t)$; $dx = \prod_{i=1}^n dx_i$, $0 < n \leq 3$.

Распределение вероятностей для суммарного потока $\varphi_{\Sigma}(t)$ на интервале времени [0,t] в соответствии с (2.2) составляет [13, 14] $p_s(t) = = \frac{1}{s!} \left[\int_0^t \xi(t) dt \right]^s \exp\left\{ -\int_0^t \xi(t) dt \right\}, s = 0, 1, 2, \dots$ Мера интенсивности $\xi(t)$ в (2.2) определяет среднее количество \overline{M} объектов наблюдения, появляющихся в ОО ИИС на [0,t]: $\overline{M} = \int_0^t \xi(t) dt$.

Объекты наблюдения будем рассматривать как распределенные, занимающие подобласти пространства $D_k(x,t) = D_k(t) \in \mathbb{R}^n, \, k = \overline{1,K}$. Очевидно, что

(2.3)
$$\bigcap_{k} D_{k}(t) = \varnothing.$$

Будем полагать, что формы и угловые положения $D_k(t)$, $k = \overline{1, K}$ относительно их центров определены и неизменны, а положение самих центров меняется в X случайным образом. Предположим, что обнаруживаемые в ходе поиска объекты наблюдения берутся ИИС на сопровождение. Наличие в ОО ИИС сопровождаемых объектов приводит к необходимости корректировки модели плотности интенсивности случайного потока, используемой для формирования закона управления поиском. Действительно, с учетом (2.3) в области пространства, занимаемой сопровождаемым объектом, появление очередного объекта наблюдения полагается невозможным. Пусть ИИС осуществляет контроль X в течение времени

(2.4)
$$t \in \omega, \quad \omega = [0, \overline{t}].$$

Разобьем (2.4) на подынтервалы поиска

(2.5)
$$\omega_q = [t_q, t_{q+1}), \quad q = \overline{0, (Q-1)},$$

где t_q , $q = \overline{1, (Q-1)}$ – моменты обнаружения в области обзора очередных объектов наблюдения из потока; $t_0 = 0$; $t_Q = \overline{t}$.

Будем полагать, что априорная плотность интенсивности $\nu(x,t)$ пространственно-временного пуассоновского потока φ и априорная интенсивность $\xi(t)$ временного потока $\varphi_{\Sigma}(t)$, определяемого в соответствии с (2.1), имеют место при $t \in \omega_0$, а неоднородности ОО ИИС порождаются наличием в ней обнаруженных при $t \ge t_1$ объектов наблюдения, взятых ИИС на сопровождение. Рассмотрим подынтервал ω_q , q > 0. Внутри области обзора может находиться $K = K_q$ сопровождаемых объектов, где $K_q \le q$. Знак неравенства связан с возможностью выхода некоторых сопровождаемых объектов на $[t_0, t_{q+1})$ за пределы области обзора X и завершением относительно них процесса сопровождения.

Для каждой из подобластей $D_k(t), k = \overline{1, K_q}$ (2.3) при $t \ge t_k, k = \overline{1, K_q}$ поставим в соответствие случайный процесс $\eta_k(t) \in X, \eta_k(t_k) = \eta_{k0}$, с плотностью распределения $w_k(x, t)$, описывающий координаты центра $D_k(t), k = \overline{1, K_q}$. Здесь $\eta_{k0} \in \mathbb{R}^n$ – случайный вектор с плотностью распределения $w_k(x, t_k)$. С учетом этого будем полагать, что $D_k(t) = D_k(x + \eta_k(t)), t \ge t_k$, $k = \overline{1, K_q}, D_k(t_k) = D_k(x + \eta_{k0}), D_k = D_k(x)$. Последнее обозначение соответствует случаю, когда центр объекта наблюдения находится в начале координат.

Плотности вероятности $w_k(x,t)$, $k = \overline{1, K_q}$ полагаются апостериорными и могут быть получены в ИИС по результатам динамической фильтрации векторов состояния сопровождаемых объектов.

Определение. Под апостериорной плотностью интенсивности $\tilde{\nu}_q(x,t)$ пространственно-временного пуассоновского потока, соответствующей подынтервалу ω_q , будем понимать плотность интенсивности, учитывающую апостериорные вероятностные характеристики координат местоположения сопровождаемых объектов, находящихся в ОО ИИС.

Рассмотрим закон управления поиском (стратегию поиска [1]) $\lambda(x,t)$, для которого

(2.6)
$$\lambda(x,t) \begin{cases} >0, & x \in X, \\ =0, & x \notin X. \end{cases}$$

Функция $\lambda(x,t)\Delta t + o(\Delta t)$ определяет вероятность наступления события, связанного с тем, что за интервал времени $(t, t + \Delta t)$ очередной объект наблюдения будет найден при условии, что он находится в точке $x \in X$ и до сих пор не обнаружен [1, 6–8]. Здесь $o(\Delta t)$ – остаток порядка малости выше, чем Δt .

Определим на $X \times \omega_q$, $q = \overline{0, (Q-1)}$ плотность ненормированной вероятностной меры y(x, t) как функцию, непрерывно дифференцируемую по совокупности своих аргументов и определяющую вероятность наличия в X необнаруженного объекта [1, 6, 8],

(2.7)
$$\int_{X} y(x,t)dx = p_{1X}(t),$$

где $p_{1X}(t)$ – вероятность нахождения в области обзора очередного необнаруженного объекта наблюдения.

С учетом (2.6), (2.7) рассмотрим критерий качества оптимизации поиска [6, 8]

(2.8)
$$\Psi = \int_{X} \left[\alpha y(x,t) + \frac{1}{2} \beta \int_{\tau}^{t} \lambda^{2}(x,t) dt \right] dx \to \min_{\lambda(x,t), \ t \in \omega_{q}}$$

где $\alpha, \ \beta > 0$ – весовые коэффициенты; $t - \tau \ll 1; \ t \le t_{q+1}; \ t - \tau \ge t_q.$

Целевая функция критерия (2.8) включает две составляющие. Первая из них связана с вероятностью нахождения в X необнаруженного объекта наблюдения, вторая – с энергетическими характеристиками закона поиска.

Поставим задачу для неоднородной области обзора, подобласти неоднородности которой порождаются апостериорными плотностями вероятностей сопровождаемых объектов $w_k(x,t), t \ge t_k, k = \overline{1, K_q}$, при условии (2.3) определить закон управления поиском (2.6), удовлетворяющий (2.8).

3. Закономерности учета структуры и характеристик подобластей неоднородности при формировании апостериорной плотности интенсивности потока объектов наблюдения

Рассмотрим последовательность формирования математической модели вероятностных характеристик подобластей неоднородности области обзора X.

Если некоторая точка декартовой системы координат $\{x_1, \ldots, x_n\}$ принадлежит подобласти $D_k(t), k = \overline{1, K_q}$ с центром в $\eta_k(t)$, то ей для каждого момента времени $t \ge t_k$ может быть поставлена в соответствие случайная величина

(3.1)
$$\varsigma_k(t) = \eta_k(t) + \gamma_k(0),$$

где $\gamma_k^T(0) = \gamma_k^T = [\gamma_{k1} \dots \gamma_{kn}]$ – координаты точки $\{x_{k1}, \dots, x_{kn}\}$, в случае, если центр объекта перенесен в начало координат, т.е. $\gamma_k \in D_k$; $\varsigma_k(t) \in D_k(t)$, $t \ge t_k$.

С учетом (3.1) плотность распределения точек k-го сопровождаемого объекта может быть представлена как

(3.2)
$$w_k(x - \gamma_k, t), \quad t \ge t_k, \quad k = \overline{1, K_q},$$

Вероятностные характеристики (3.2) подобластей неоднородности области обзора лежат в основе формирования для $t \in \omega_q$ апостериорной плотности интенсивности $\tilde{\nu}_q(x,t)$ пространственно-временного пуассоновского потока. Определение $\tilde{\nu}_q(x,t)$ основано на предположении о том, что очередной объект наблюдения не может появиться в областях пространства, занятых сопровождаемыми объектами.

Будем полагать, что $\nu(x,t)$ и $\tilde{\nu}_q(x,t)$ являются функциями интегрируемыми и непрерывными по совокупности своих аргументов.

 $T \, e \, o \, p \, e \, m \, a$. Для $t \in \omega_q$ при наличии в области обзора $X \, K_q \leq q$ сопровождаемых объектов, занимающих подобласти $D_k(t), \ k = \overline{1, K_q}, \ \bigcap_k D_k(t) = \varnothing$ с центрами в точках $\eta_k(t)$, характеризуемых плотностями вероятности $w_k(x, t)$, апостериорная плотность интенсивности пространственновременного пуассоновского потока объектов наблюдения определяется соотношением

(3.3)
$$\tilde{\nu}_q(x,t) = \nu(x,t) \times \left(1 - \sum_{k=1}^{K_q} \left[\int_{D_k} w_k(x - \gamma_k, t) d\gamma_k \prod_{m \neq k}^{K_q} \left(1 - \int_{D_m} w_m(x - \gamma_m, t) d\gamma_m \right) \right] \right), \quad x \in X,$$

где γ_k рассматривается как векторная переменная; $d\gamma_k = \prod_{i=1}^n d\gamma_{ki}, \, 0 < n \leq 3.$

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

В соответствии с (3.3) определим подобласть неоднородности как подобласть, внутри которой относительное рассогласование между априорной $\nu(x,t)$ и апостериорной $\tilde{\nu}_{q}(x,t)$ плотностями интенсивности превышает

некоторое заданное значение
$$\frac{\nu(x,t)-\tilde{\nu}_q(x,t)}{\nu(x,t)} \ge \mu$$
, или $\mu \le \sum_{k=1}^{K_q} \left[\int_{D_k} w_k(x-\gamma_k,t) \times d\gamma_k \prod_{m \ne k}^{K_q} \left(1 - \int_{D_m} w_m(x-\gamma_m,t) d\gamma_m \right) \right].$

4. Пример определения апостериорной плотности интенсивности

Для $t \in \omega_1, K_q = 1$ результат (3.3), в частности, приобретает вид

(4.1)
$$\tilde{\nu}_1(x,t) = \nu(x,t) \left(1 - \int_{D_1} w_1(x - \gamma_1, t) d\gamma_1 \right).$$

Характеристики вариации апостериорной интенсивности и, как следствие, характеристики подобласти неоднородности зависят от двух факторов – параметров плотности распределения координат местоположения центра сопровождаемого объекта и характеристик подобласти D₁.

Покажем, что в зависимости от характеристик апостериорной плотности распределения размеры подобласти неоднородности (подобласти, внутри которой апостериорная плотность интенсивности отличается от априорной) могут существенно превышать физические размеры сопровождаемого объекта. Пусть, $X \in R^1$, $D_1 = \left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right]$, $w_1(x) = N\{0, \delta_1^2\}$, где $N\{0, \delta_1^2\}$ – нормальная плотность распределения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией δ_1^2 , и $\nu(x,t) = \nu = \text{const.}$ Тогда $\tilde{\nu}_1(x) = \nu \left(1 - \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} w_1(x - \gamma_1) d\gamma_1\right)$ или $\tilde{\nu}_1(x) = \nu \left(1 - \Phi\left[\frac{\frac{\Delta}{2}-x}{\delta_1}\right] + \Phi\left[\frac{-\frac{\Delta}{2}-x}{\delta_1}\right]\right)$, где $\Phi[\bullet]$ – интеграл вероятности.

Графики зависимостей $\tilde{\nu}_1(x)$ при различных значениях δ_1^2 для $\nu = 1, \Delta = 1$ представлены на рис. 1. Кривые 1, 2, 3 соответствуют $\delta_1^2 = 0,1, 1, 10$ (здесь и далее – в безразмерных единицах).

Рассчитать значения нижней $x_{\rm H}$ и верхней $x_{\rm B}$ границ подобласти неоднородности в условиях примера можно из решения уравнения $\mu = \Phi\left[\frac{x+\frac{\Delta}{2}}{\delta_1}\right] - \Phi\left[\frac{x-\frac{\Delta}{2}}{\delta_1}\right]$, где μ – заданное относительное отклонение апостериорной плотности интенсивности от априорной (обычно $\mu \ll 1$). При малых значениях μ $x_{\rm H} < -\frac{\Delta}{2}$, $x_{\rm B} > \frac{\Delta}{2}$. Кроме того, из приведенного соотношения следует, что $\lim_{\delta_1 \to 0} x_{\rm H} = -\frac{\Delta}{2}$, $\lim_{\delta_1 \to 0} x_{\rm B} = \frac{\Delta}{2}$.

График зависимости $\chi = \frac{\Delta_{\mu}}{\Delta}$, определяемой как отношение ширины $\Delta_{\mu} = x_{\rm B} - x_{\rm H}$ подобласти неоднородности по уровню пятипроцентного отклоне-



Рис. 2.

ния $\tilde{\nu}_1$ от ν ($\mu = 0.05$) к размеру сопровождаемого объекта Δ , от δ_1^2 представлен на рис. 2. Из рисунка следует, что размеры подобласти неоднородности могут во много раз превосходить физические размеры сопровождаемого объекта.

Конкретизируем интеграл в (4.1). Для R^3 , например, получим

$$(4.2) \qquad \int_{D_1} w_1(x-\gamma_1,t)d\gamma_1 = \\ = \int_{\Delta_{\mathrm{H}1}}^{\Delta_{\mathrm{B}1}} \left\{ \int_{\phi_{\mathrm{H}1}(\gamma_{11})}^{\phi_{\mathrm{B}1}(\gamma_{11},\gamma_{12})} \int_{\psi_{\mathrm{H}1}(\gamma_{11},\gamma_{12})}^{\psi_{\mathrm{B}1}(\gamma_{11},\gamma_{12})} w_1(x_1-\gamma_{11},x_2-\gamma_{12},x_3-\gamma_{13},t)d\gamma_{13} \right\} d\gamma_{12} \right\} d\gamma_{11},$$

где $\{\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}\}$ – оси системы декартовых координат с центром в точке η_1 ; $\Delta_{\text{H1}}, \Delta_{\text{B1}}$ – соответственно нижняя и верхняя границы проекции подобласти D_1 на ось γ_{11} ; $\gamma_{12} = \phi_{\text{H1}}(\gamma_{11}), \gamma_{12} = \phi_{\text{B1}}(\gamma_{11})$ – уравнения нижней и верхней частей кривой, ограничивающей площадь проекции подобласти D_1 на плоскость $\{\gamma_{11}, \gamma_{12}\}$ при $\gamma_{11} \in [\Delta_{\text{H1}}, \Delta_{\text{B1}}]; \gamma_{13} = \psi_{\text{H1}}(\gamma_{11}, \gamma_{12}), \gamma_{13} = \psi_{\text{B1}}(\gamma_{11}, \gamma_{12})$ – уравнения нижней и верхней частей поверхности, ограничивающих подобласть D_1 . Необходимо отметить, что

(4.3)
$$\int_X \int_{D_1} w_1(x-\gamma_1,t)d\gamma_1 dx = |D_1|,$$

где $|D_1|$ – мера Лебега множества D_1 .

В частности, для $X \in \mathbb{R}^1$, $D_1 = \left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right]$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} w_1(x-\gamma_1) d\gamma_1 \right) dx = \Delta.$$

Иными словами, определенный интеграл в (4.3) инвариантен к параметрам апостериорной плотности распределения и полностью определяется размерами подобласти D_1 .

В дальнейшем будем полагать, что для всех сопровождаемых объектов размеры и форма занимаемых ими подобластей известны.

5. Синтез закона управления поиском для неоднородной области обзора

Решение задачи будем искать в условиях следующих ограничений [6]:

(5.1)
$$\begin{aligned} \xi(t) < C\lambda(x,t), \quad \tilde{\xi}_q(t) < C\lambda(x,t), \\ C = 10^{-2}, \ \forall x, x \in X, \ \forall t, \quad t \in \omega_q, \quad q = \overline{1, Q - 1} \end{aligned}$$

где

(5.2)
$$\tilde{\xi}_q(t) = \int_X \tilde{\nu}_q(x, t) dx$$

 – апостериорная мера интенсивности потока объектов наблюдения в неоднородной области обзора.

Указанные ограничения, как показано в [6], позволяют приближенно свести модель эволюции во времени вероятностных характеристик, описывающих процесс поиска и обнаружения объектов наблюдения, к модели дискретного марковского процесса с двумя состояниями [6, 8]. Условие (5.1) связано с высоким энергетическим потенциалом ИИС и существенным преобладанием интенсивности поисковых усилий такой системы над интенсивностью потока объектов наблюдения в области обзора. Указанное условие характерно для большого класса систем контроля воздушного и космического пространства, систем контроля морской поверхности, систем контроля транспортных потоков и т.д.

Рассмотрим вначале интервал времени ω_q , для которого предполагается присутствие в ОО ИИС K_q сопровождаемых объектов. Уравнение относительно y(x,t) для этого случая предполагает использование апостериорной

плотности интенсивности $\tilde{\nu}_q(x,t)$ пространственно-временного пуассоновского потока. В соответствии с [6] такое уравнение имеет вид

(5.3)
$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -y(x,t)(\lambda(x,t) + \tilde{\xi}_q(t)) + \tilde{\nu}_q(x,t), \quad y(x,t_q) = y_{q0}, \quad t \in \omega_q,$$

где $\tilde{\nu}_q(x,t)$ определяется из (3.3).

Для критерия качества (2.8) оптимальное управление поиском задается соотношением [6, 8]

(5.4)
$$\lambda_{\text{опт}}(x,t) = \frac{\alpha}{\beta} y(x,t).$$

С учетом (5.4) уравнение (5.3) для эволюции на $\{\omega_q, X\}$ оптимальной плотности ненормированной вероятностной меры приобретает вид

(5.5)
$$\frac{\partial y_{\text{опт}}(x,t)}{\partial t} = -\frac{\alpha}{\beta} y_{\text{опт}}^2(x,t) - y_{\text{опт}}(x,t) \tilde{\xi}_q(t) + \tilde{\nu}_q(x,t),$$
$$y(x,t_q) = y_{q0}, \quad t \in \omega_q.$$

Решение (5.5) полностью определяет на $\{\omega_q, X\}$ закон управления параллельным поиском [6, 8]

(5.6)
$$\lambda_{\text{опт}}(x,t) = \frac{\alpha}{\beta} y_{\text{опт}}(x,t).$$

Таким образом, последовательность формирования $\lambda_{\text{опт}}(t)$ для неоднородной ОО предполагает:

1) определение по результатам динамической фильтрации апостериорных плотностей распределения $w_k(x,t), t \ge t_k, k = \overline{1, K_q}$ объектов наблюдения, обнаруженных на интервале времени $[0, t_{q-1}]$ и взятых ИИС на сопровождение;

2) формирование в соответствии с (3.3) апостериорной плотности интенсивности $\tilde{\nu}_q(x,t)$ пространственно-временного потока объектов наблюдения;

3) определение из (5.2) апостериорной интенсивности $\tilde{\xi}_q(t)$ потока объектов наблюдения в неоднородной ОО;

4) решение уравнения (5.5) и формирование на ω_q плотности ненормированной вероятностной меры $y_{\text{опт}}(x,t)$;

5) определение в соответствии с (5.6) оптимального плана поиска $\lambda_{\text{опт}}(t)$.

По своему содержанию рассмотренная процедура может быть интерпретирована как процедура совместного поиска объектов наблюдения и фильтрации параметров траекторий сопровождаемых объектов.

6. Анализ влияния характеристик неоднородной области обзора на качественные показатели поиска

Анализ влияния характеристик неоднородной ОО на качественные показатели поиска проведем для случая, когда $X \in \mathbb{R}^1$, $X = [\underline{x}, \overline{x}]$, где \underline{x} – нижняя,





 \overline{x} – верхняя границы области обзора, $\tilde{\nu}_q(x,t) = \tilde{\nu}_q(x)$, $\tilde{\xi}_q(t) = \tilde{\xi}_q$. Предположим, что до обнаружения очередного объекта наблюдения на ω_q плотность ненормированной вероятностной меры $y_{\text{опт}}(x,t)$ успевает достичь установившегося значения $\overline{y}_{\text{опт}}(x)$, описываемого с учетом условия $\frac{\partial \overline{y}_{\text{опт}}(x)}{\partial t} = 0$ алгебраическим уравнением

(6.1)
$$-\frac{\alpha}{\beta}\overline{y}_{\text{опт}}^2(x) - \overline{y}_{\text{опт}}(x)\tilde{\xi}_q + \tilde{\nu}_q(x) = 0.$$

Анализ влияния характеристик неоднородной ОО на качественные показатели поиска осуществлялся на основании решений (6.1).

Полагалось, что q = 40, $K_q = 1 \div 40 \le q$ (т.е. на ω_q рассматривалось количество сопровождаемых объектов от одного до сорока), апостериорные плотности вероятности для центров сопровождаемых объектов полагались гауссовскими $w_k(x,t) = w_k(x) = N\{m_k, \delta_k^2\}, t \ge t_k, k = \overline{1, K_q}$. Решение задачи проводилось при следующих значениях параметров: $\underline{x} = 10\,000, \overline{x} = 20\,000,$ $m_k = \underline{x} + k \cdot 200, \Delta = 30, 60, 90$. Априорная плотность интенсивности потока объектов наблюдения полагалась равной $\nu = 1, 2 \cdot 10^{-6}$.

Для каждого значения K_q в соответствии с (3.3) определялась апостериорная плотность интенсивности пространственно-временного потока объектов наблюдения, т.е. $\tilde{\nu}_q(x) = \tilde{\nu}_{K_q}(x)$, и соответствующая ей мера интенсивности потока $\tilde{\xi}_q = \tilde{\xi}_{K_q}$. По результатам решения (6.1) формировалась вероятность нахождения в области обзора очередного необнаруженного объекта наблюдения

(6.2)
$$\int_{X} \overline{y}_{\text{опт}}(x) dx = \overline{p}_{1X}.$$

Графики зависимостей \overline{p}_{1X} от K_q для различных размеров объектов наблюдения представлены на рис. 3. Кривая 1 получена для $\Delta = 30$, кривая 2 – для $\Delta = 60$, кривая 3 – для $\Delta = 90$. Отметим, что качественные характеристики поиска для случая неучета неоднородности области обзора определялись для $K_q = 0$ и соответствовали априорной плотности интенсивности потока объектов наблюдения $\nu = 1, 2 \cdot 10^{-6}$.

Необходимо отметить, что в соответствии с (4.3) представленные на рис. З зависимости инвариантны к значениям δ_k^2 .

Учет при поиске объектов наблюдения характеристик подобластей неоднородности, порождаемых вероятностными характеристиками координат местоположения сопровождаемых объектов, влечет за собой снижение вероятности \overline{p}_{1X} нахождения в области обзора необнаруженного очередного объекта наблюдения. Уменьшение \overline{p}_{1X} тем существеннее, чем больше размеры сопровождаемых объектов и чем больше их находится в X. Это в первую очередь связано с рациональным перераспределением поисковых усилий ИИС за счет снижения их интенсивности в подобластях неоднородности и, напротив, увеличения интенсивности в подобластях, не занятых сопровождаемыми объектами.

Наибольший относительный выигрыш по сравнению с поиском, осуществляемым по закону, сформированному с использованием априорной плотности интенсивности (без учета характеристик подобластей неоднородности), в условиях примера составил $\varepsilon = (\overline{p}_{1X}^{pr} - \overline{p}_{1X}^{ps}) / \overline{p}_{1X}^{pr} = 0,104$, где $\overline{p}_{1X}^{pr} -$ вероятность нахождения в ОО очередного необнаруженного объекта наблюдения, полученная для априорной плотности интенсивности потока объектов наблюдения; \overline{p}_{1X}^{ps} – аналогичная вероятность, соответствующая апостериорной плотности интенсивности интенсивности выигрыш имеет место при $K_q = 40$, $\Delta = 90$.

7. Заключение

Рассмотренные особенности решения задачи поиска объектов наблюдения основаны на учете свойств неоднородной структуры ОО ИИС. Такая область включает подобласти неоднородности, порождаемые апостериорными плотностями распределения, формируемыми по результатам решения задачи фильтрации параметров траекторий, уже обнаруженных и взятых информационно-измерительной системой на сопровождение объектов наблюдения. Показано, что размеры подобластей неоднородности могут во много раз превосходить физические размеры сопровождаемых объектов.

Выявленные закономерности влияния апостериорных вероятностных характеристик координат местоположения сопровождаемых объектов на плотность интенсивности потока объектов наблюдения позволяют определять эволюцию во времени вероятностных характеристик поиска и формировать на их основе закон управления наблюдениями.

Синтез стратегии поиска проводился в условиях ограничений (5.1). Они дают возможность приближенно интерпретировать процедуру поиска в терминах дискретного марковского процесса с двумя состояниями [6, 8]. Проведенный анализ влияния характеристик неоднородной области обзора на качество поиска показал, что увеличение в ней количества обнаруженных и взятых на сопровождение объектов наблюдения и учет апостериорных вероятностных характеристик их местоположения (вероятностных характеристик подобластей неоднородностей) влечет за собой снижение вероятности нахождения в ОО очередного необнаруженного объекта наблюдения. Это обусловлено рациональным перераспределением поисковых усилий ИИС, направленным на их уменьшение в подобластях неоднородности и увеличение в подобластях, не связанных с сопровождаемыми объектами. В условиях примера максимальный относительный выигрыш составил более десяти процентов.

Рассмотренный подход предполагает использование апостериорных плотностей распределения векторов состояний сопровождаемых объектов, формируемых на основании решения задачи динамической фильтрации. В силу этого его можно рассматривать как базу для решения комплексной задачи совместного поиска и сопровождения объектов наблюдения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы. Рассмотрим подобласть области обзора

где $X_{\Im}(x)$ – малая окрестность точки xс мерой Лебега $|X_{\Im}| \ll 1,$ и определим для нее две гипотезы

(II.2)
$$H_0: X_{\mathfrak{I}}(x) \notin \bigcup_k D_k(t), \quad H_1: X_{\mathfrak{I}}(x) \in \bigcup_k D_k(t), \\ t \in [t, t + \Delta t], \quad \Delta t \ll 1,$$

для которых $P{H_0} = P_0, P{H_1} = P_1, P_0 + P_1 = 1.$

Обозначим через A событие, связанное с появлением в $X_{\ni}(x)$ последующих объектов наблюдения из потока на интервале времени $[t, t + \Delta t]$. Ему соответствуют две условные вероятности $P(A/H_0)$, $P(A/H_1)$. Тогда [13]

(II.3)
$$P(A) = P(A/H_0)P_0 + P(A/H_1)P_1.$$

В рамках допущения о невозможности появления очередного объекта наблюдения в областях пространства, занимаемых сопровождаемыми объектами, полагается, что $P(A/H_1) = 0$, тогда

(II.4)
$$P(A) = P(A/H_0)(1 - P_1).$$

Определим значения P(A), $P(A/H_0)$:

$$P(A) = P\left\{\varphi_{q\Im}(x, t + \Delta t) - \varphi_{q\Im}(x, t) = 1, 2, 3, \dots\right\} =$$

$$(\Pi.5) \qquad \qquad = 1 - \exp\left\{-\int_{t}^{t+\Delta t} \tilde{\xi}_{q\Im}(x, t)dt\right\},$$
$$P(A/H_0) = P\left\{\varphi_{\Im}(x, t + \Delta t) - \varphi_{\Im}(x, t) = 1, 2, 3, \dots\right\} =$$
(II.6)
$$= 1 - \exp\left\{-\int_{t}^{t+\Delta t} \xi_{\Im}(x, t)dt\right\},$$

где $\varphi_{q\ni}(x,t) = \varphi_q(X_{\ni}(x),t); \ \varphi_{\ni}(x,t) = \varphi(X_{\ni}(x),t); \ \tilde{\xi}_{q\ni}(x,t), \ \xi_{\ni}(x,t)$ – апостериорная и априорная меры интенсивности случайного потока в $X_{\ni}(x)$ соответственно для $P\{H_1\} = P_1$ и $P\{H_0\} = 1$.

С учетом малости $|X_{\Im}|$ получим

(II.7)

$$\begin{aligned} \xi_{\Im}(x,t) &= \int\limits_{X_{\Im}(x)} \nu(x,t)dx = \nu(x,t) |X_{\Im}| + o(|X_{\Im}|), \\ \tilde{\xi}_{q\Im}(x,t) &= \int\limits_{X_{\Im}(x)} \tilde{\nu}_{q}(x,t)dx = \tilde{\nu}_{q}(x,t) |X_{\Im}| + o(|X_{\Im}|), \end{aligned}$$

где $o(|X_{\mathfrak{B}}|)$ – остаток порядка малости выше, чем $|X_{\mathfrak{B}}|$.

С учетом (П.5), (П.6) соотношение (П.4) приобретает вид

$$(\Pi.8) \quad 1 - \exp\left\{-\int_{t}^{t+\Delta t} \tilde{\xi}_{q \ni}(x,t)dt\right\} = \left\{1 - \exp\left\{-\int_{t}^{t+\Delta t} \xi_{\ni}(x,t)dt\right\}\right\} (1 - P_1).$$

Разложим левую и правую части (П.8) в ряд в окрестности t. С учетом условия $\Delta t \ll 1$ получим

(II.9)
$$\tilde{\xi}_{q\Im}(x,t)\Delta t + o(\Delta t) = (\xi_{\Im}(x,t)\Delta t + o(\Delta t))(1-P_1).$$

Разделим левую и правую части (П.9) на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. Учитывая, что $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$, из (П.9) следует, что

(II.10)
$$\tilde{\xi}_{q\Im}(x,t) = \xi_{\Im}(x,t)(1-P_1).$$

Подставляя в (П.10) значения из (П.7), получим

(II.11)
$$\tilde{\nu}_q(x,t) |X_{\mathfrak{H}}| + o(|X_{\mathfrak{H}}|) = (\nu(x,t) |X_{\mathfrak{H}}| + o(|X_{\mathfrak{H}}|))(1-P_1).$$

Разделив левую и правую части (П.10) на $|X_{\Im}|$, переходя к пределу при $|X_{\Im}| \to 0$ и учитывая, что $\lim_{|X_{\Im}|\to 0} \frac{o(|X_{\Im}|)}{|X_{\Im}|} = 0$, придем к соотношению, связывающему априорную и апостериорную плотности интенсивности пространственно-временного пуассоновского потока,

(II.12)
$$\tilde{\nu}_q(x,t) = \nu(x,t)(1-P_1)$$

145

Необходимо отметить, что соотношение (П.10) по своей структуре аналогично соотношению, определяющему интенсивность пуассоновского потока, получаемого при случайном разряжении [14].

Определим значение P_1 . Для этого для составляющих векторной переменной γ_k , соответственно $\{\gamma_{k1} \dots \gamma_{kn}\}$ $0 < n \leq 3$, введем дискретизацию $\{\gamma_{k1}^{-L_k} = -L_k \Delta \gamma_k, \dots, \gamma_{k1}^{-l_{k1}} = -l_{k1} \Delta \gamma_k, \dots, \gamma_{k1}^{-1} = -\Delta \gamma_k, 0, \gamma_{k1}^1 = \Delta \gamma_k, \dots, \gamma_{k1}^{l_{k1}} = l_{k1} \Delta \gamma_k, \dots, \gamma_{k1}^{-L_k} = L_k \Delta \gamma_k\}, \dots, \{\gamma_{kn}^{-L_k} = -L_k \Delta \gamma_k, \dots, \gamma_{kn}^{-l_{kn}} = -l_{kn} \Delta \gamma_k, \dots, \gamma_{kn}^{-1} = -\Delta \gamma_k, 0, \gamma_{k1}^1 = \Delta \gamma_k, \dots, \gamma_{kn}^{-1} = -\Delta \gamma_k, 0, \gamma_{k1}^1 = \Delta \gamma_k, \dots, \gamma_{kn}^{-1} = -\Delta \gamma_k, 0, \gamma_{kn}^1 = \Delta \gamma_k, \dots, \gamma_{kn}^{l_{kn}} = l_{kn} \Delta \gamma_k, \dots, \gamma_{kn}^{-1} = -L_k \Delta \gamma_k\}$ с ша-гом $\Delta \gamma_k$, где $[l_{k1} \dots l_{kn}] = \overline{l_k}^T$ – вектор индексов, $l_{k1} = -\overline{L_k}, \overline{L_k}, \dots, l_{kn} = -\overline{L_k}, \overline{L_k}$.

Значения L_k и $\Delta \gamma_k$ для всех *n* полагаются одинаковыми. Мера Лебега *n*-мерного куба $\Delta_{\gamma k}$ со сторонами $\Delta \gamma_k$, определяемая как $|\Delta_{\gamma k}| = (\Delta \gamma_k)^n$, существенно меньше единицы $|\Delta_{\gamma k}| \ll 1$.

Значения L_k и $\Delta \gamma_k$ выбираются таким образом, чтобы область D_k , соответствующая положению объекта наблюдения в начале координат, полностью попадала в *n*-мерный куб со сторонами $[-L_k \Delta \gamma_k, L_k \Delta \gamma_k]$.

Поставим в соответствие k-му сопровождаемому объекту в момент времени $t \in \omega_q$ случайные величины, порождаемые векторами индексов $\overline{l}_{D_k}^T = [l_{1D_k} \dots l_{nD_k}]$, такими что $\overline{l}_{D_k} \Delta \gamma_k \in D_k$

(II.13)
$$\varsigma_k^{\overline{l}_k}(t) = \eta_k(t) + \overline{l}_{D_k} \Delta \gamma_k.$$

Условие $\overline{l}_{D_k} \Delta \gamma_k = \begin{bmatrix} l_{1D_k} \Delta \gamma_k \\ \vdots \\ l_{nD_k} \Delta \gamma_k \end{bmatrix} \in D_k$ определяет точки, принадлежащие

области D_k , когда центр объекта наблюдения находится в начале координат. Очевидно, что $M(\overline{l}_{D_k}) \in M(\overline{l}_k)$, где $M(\overline{l}_k)$ – множество точек, соответствующих векторам индексов \overline{l}_k , $M(\overline{l}_{D_k})$ – множество точек, соответствующих векторам индексов \overline{l}_{D_k} .

Плотности распределения случайных величин (П.13) представим в виде

$$w_k^{\overline{l}_k}(x-\overline{l}_k\Delta\gamma_k,t) = \begin{cases} w_k(x-\overline{l}_k\Delta\gamma_k,t), & \overline{l}_k \in \mathcal{M}(\overline{l}_{D_k}), \\ 0, & \overline{l}_k \notin \mathcal{M}(\overline{l}_{D_k}). \end{cases}$$

Вероятность попадания $\varsigma_k^{\overline{l}_k}(t)$ в момент времени t в $X_{\Im}(x)$ при некотором \overline{l}_k определяется соотношением

(II.14)
$$P\left\{\varsigma_k^{\overline{l}_k}(t) \in X_{\mathfrak{S}}(x)\right\} = P_{1k\overline{l}_k}^{\Delta}(x,t) = w_k^{\overline{l}_k}\left(x - \overline{l}_k\Delta\gamma_k, t\right)|X_{\mathfrak{S}}| + o(|X_{\mathfrak{S}}|).$$

Положим, что

$$(\Pi.15) \qquad \qquad |\Delta_{\gamma k}| = |X_{\mathfrak{Z}}| \,.$$

События, связанные с попаданием случайных величин из совокупности (П.13), соответствующей *k*-му сопровождаемому объекту, в $X_{\Im}(x)$, являются несовместными. Действительно, два различных элемента одного и того же сопровождаемого объекта из дискретной совокупности элементов, определяемых в соответствии с (П.13), в силу (П.15) не могут одновременно находиться в одной элементарной области пространства $X_{\Im}(x)$. Для несовместных событий имеет место соотношение

(II.16)
$$P_{1k}^{\Delta}(x,t) = \sum_{l_{k1}=-L_k}^{L_k} \dots \sum_{l_{kn}=-L_k}^{L_k} w_k^{\overline{l}_k}(x-\overline{l}_k\Delta\gamma_k,t) |X_{\Im}| + o(|X_{\Im}|), \quad 0 < n \le 3.$$

Учитывая (П.15) и переходя в (П.16) к пределу, получим вероятность нахождения в точке x какого-либо из элементов k-го сопровождаемого объекта

$$P_{1k}(x,t) = \lim_{\substack{|\Delta_{\gamma}| \to 0 \\ L_k \to \infty}} P_{1k}^{\Delta}(x,t) =$$

$$(\Pi.17) \qquad = \lim_{\substack{|\Delta_{\gamma k}| \to 0 \\ L_k \to \infty}} \sum_{l_{k1}=-L_k}^{L_k} \dots \sum_{l_{kn}=-L_k}^{L_k} w_k^{\overline{l}_k} \left(x - \overline{l}_k \Delta \gamma_k, t\right) |\Delta_{\gamma k}| + o(|\Delta_{\gamma k}|) =$$

$$= \int_{D_k} w_k (x - \gamma_k, t) d\gamma_k.$$

Если в точку x попал какой-либо элемент k-го сопровождаемого объекта, то ей не может принадлежать никакой элемент других сопровождаемых объектов.

Вероятность события, связанного с тем, что никакой элемент *m*-го сопровождаемого объекта ($m = \overline{1, K_q}, m \neq k$) не принадлежит x, может быть определена в соответствии с (П.17)

(II.18)
$$1 - P_{1m}(x,t) = 1 - \int_{D_m} w_m(x - \gamma_m, t) d\gamma_m.$$

Рассмотрим событие B, состоящее в попадании в момент времени t в элементарную область пространства $X_{\ni}(x)$ одной из случайных величин из совокупностей $\{\varsigma_k^{\bar{l}_k}(t), \bar{l}_k \in \mathcal{M}(\bar{l}_{D_k}), k = \overline{1, K_q}\}$, соответствующих всем сопровождаемым объектам. Это событие может осуществляться несколькими способами, т.е. распадается на несколько несовместных вариантов:

– в момент времени t в $X_{\mathfrak{I}}(x)$ попадает одна из случайных величин первой группы $\{\varsigma_1^{\overline{l}_1}(t), \overline{l}_1 \in \mathcal{M}(\overline{l}_{D_1})\}$ (событие B_1), а случайные величины остальных групп $\{\varsigma_m^{\overline{l}_m}(t), \overline{l}_m \in \mathcal{M}(\overline{l}_{D_m}), m = \overline{2, K_q}\}$ в $X_{\mathfrak{I}}(x)$ не попадают (события $\overline{B}_2, \overline{B}_3, \ldots, \overline{B}_{K_q}$); – в момент времени t в $X_{\Im}(x)$ попадает одна из случайных величин второй группы $\{\varsigma_2^{\overline{l}_2}(t), \overline{l}_2 \in \mathcal{M}(\overline{l}_{D_2})\}$ (событие B_2), а случайные величины остальных групп $\{\varsigma_m^{\overline{l}_m}(t), \overline{l}_m \in \mathcal{M}(\overline{l}_{D_m}), m = 1, 3, \ldots, K_q\}$ в X_{\Im} не попадают (события $\overline{B}_1, \overline{B}_3, \ldots, \overline{B}_{K_q}$); и т.д.

Следовательно,

$$(\Pi.19) \quad B = B_1 \overline{B}_2 \overline{B}_3 \dots \overline{B}_{K_q} + B_2 \overline{B}_1 \overline{B}_3 \dots \overline{B}_{K_q} + \dots + B_{K_q} \overline{B}_1 \overline{B}_2 \dots \overline{B}_{K_q-1}.$$

Применяя теоремы сложения и умножения вероятностей и используя свойство противоположных событий, получим

(II.20)
$$P_1 = P(B) = P(B_1)P(\overline{B}_2)\dots P(\overline{B}_{K_q}) + P(B_2)P(\overline{B}_1)P(\overline{B}_3)\dots P(\overline{B}_{K_q}) + \dots + P(B_{K_q})P(\overline{B}_1)\dots P(\overline{B}_{K_q-1}).$$

С учетом (П.17), (П.18) для (П.20) получим

(II.21)
$$P_1(x,t) = \sum_{k=1}^{K_q} \left[\int_{D_k} w_k(x-\gamma_k,t) d\gamma_k \prod_{m\neq k}^{K_q} \left(1 - \int_{D_m} w_m(x-\gamma_m,t) d\gamma_m \right) \right],$$
$$x \in X.$$

Из (П.12), (П.21) следует утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Хеллман О. Введение в теорию оптимального поиска. М.: Наука, 1985.
- 2. Альведе Р., Вегснер И. Задачи поиска. М.: Мир, 1985.
- 3. Абчук В.А., Суздаль В.Г. Поиск объектов. М.: Сов. радио, 1977.
- 4. *Аркин В.И.* Задача оптимального распределения поисковых усилий // Теория вероятностей и ее применения. 1964. Т. 9. № 1. С. 179–180.
- Болдырихин Н.В., Хуторцев В.В. Управление наблюдениями за потоками случайных процессов // АнТ. 2006. № 12. С. 43–55.
 Boldyrikhin N.V., Khutortsev V.V. Control of observations over random processes fluxes // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 12. P. 1900–1912.
- 6. Баранов И.В., Хуторцев В.В. Текущая оптимизация поиска объектов для модели распределенного пуассоновского потока их появления // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 6. С. 24–34.
- Хуторцев В.В., Баранов И.В. Оптимальное управление наблюдениями в задаче дискретного поиска для пуассоновской модели потока объектов наблюдения // Радиотехника. 2010. № 3. С. 20–24.
- 8. *Хуторцев В.В.* Оптимизация последовательно-параллельного поиска объектов для модели распределенного пуассоновского потока их появления // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 31–41.
- 9. Кингман Дж. Пуассоновские процессы. М.: МЦНМО, 2007, 136 с.
- 10. Last G. Stochastic analysis for Poisson processes // Peccati G. and Reitzner M. (eds.) Stochastic Analysis for Poisson Point Processes. Springer, Milan. 2016. P. 1–36.

- 11. Daley D.J., Vere-Jones D. An introduction to the theory of point processes. New York: Springer, 2013. 702 p.
- 12. *Хуторцев В.В.* Плотность интенсивности пространственно-временного пуассоновского потока с нулевой вероятностью наступления событий на стохастических подмножествах его пространственной области определения // Математика и математическое моделирование. 2020. № 3. С. 15–28.
- 13. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1964.
- 14. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 20.11.2020 После доработки 15.04.2021 Принята к публикации 29.04.2021

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2021 г. В.К. ЛЕОНТЬЕВ, д-р физ.-мат. наук (vkleontiev@yandex.ru) (ВЦ им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва), Э.Н. ГОРДЕЕВ, д-р физ.-мат. наук (werhorn@yandex.ru) (МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва)

О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ БУЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ¹

Рассматриваются вопросы, касающиеся разрешимости и числа решений систем булевых уравнений. Многие математические модели, возникающие как в исследовании операций, так и в криптографии, описываются на языке таких систем. Это связано, в частности, и с тем, что в общем виде проблема проверки совместности таких систем уравнений является NP-полной, поэтому исследование качественных свойств системы булевых уравнений дает дополнительную информацию, позволяющую либо выделить полиномиально разрешимые частные случаи, либо повысить эффективность переборных схем. Основное внимание уделено двум аспектам. Первый касается исследования наличия и числа решений булева уравнения и системы уравнений при параметризации задачи по правым частям. Даются формулы и оценки для подсчета этого числа как в общем, так и в частных случаях. Исследуется и его максимум в зависимости от указанного параметра. Второй аспект посвящен частному случаю задачи, когда уравнение задается так называемой непрерывной линейной формой. Изучаются свойства таких форм и различные критерии непрерывности.

Ключевые слова: NP-полнота, булевы уравнения, задача булева программирования, линейное преобразование, непрерывная линейная форма.

DOI: 10.31857/S0005231021090063

1. Введение

Линейные диофантовы уравнения и неравенства являются стандартным объектом для различного рода математических моделей, относящихся к целочисленной оптимизации, защите информации, теории чисел, геометрии и т.д.

Классическая задача о ранце с булевыми переменными имеет вид

(1)
$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b,$$

где $x = (x_1, ..., x_n) - n$ -мерный булевский вектор.

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00645).

Пусть $L(x_1, \ldots, x_n)$ – линейная форма

(2)
$$L(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

где все параметры $\{a_i\}$ и неизвестные $\{x_i\}$ – натуральные числа. Накладывая определенные условие на вид этой формы, можно получить разные частные случаи общей задачи. Так, в булевой задаче о ранце переменные полагаются булевыми.

Таким образом, множество допустимых решений должно удовлетворять условию $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$, т.е. векторы $x = (x_1, \ldots, x_n)$ должны лежать ниже гиперплоскости $L(x_1, \ldots, x_n) = b$.

В матричной форме система ограничений имеет вид

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

где $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ – матрица.

Накладывая определенные ограничения на матрицу **A** и вектор **b**, получаем различные частные случаи задачи, см., например, [1, 2].

Если все параметры и переменные – произвольные вещественные числа, то вопрос о разрешимости системы решается в терминах ранга матрицы ограничений.

Из этих результатов линейной алгебры можно получить необходимые условия разрешимости и для таких частных случаев задачи, как задача целочисленного линейного программирования и задача булева программирования, см., например, [1–3].

В области исследования операций и комбинаторной оптимизации данная задача целочисленного линейного программирования или ее обобщения и сужения занимают ключевое место, как это показано, например, в [1]. То, что задача является NP-полной, было установлено в числе первых результатов подобных исследований. Кроме того, в классической публикации [2] можно найти многочисленные примеры известных задач, которые к ней сводятся, и, наоборот, задача целочисленного линейного программирования (или ее булев вариант) сводится к той или иной проблеме.

Данная статья в одной из своих частей является продолжением исследований авторов этой работы, опубликованных в [4, 5], где речь шла про задачу о рюкзаке. Ключевую роль в получении результатов там сыграл аппарат производящих функций, который используется и в настоящей статье. Как видно из подробнейшей монографии [6], данный подход позволил получить ряд новых и оригинальных результатов.

Следует заметить, что вопросы, поставленные в статье, ранее с той или иной точки зрения, рассматривались в статьях В.К. Леонтьева и Г.П. Тонояна [7, 8]. В монографии [9] ряд результатов получен на основе комбинаторных подходов в задачах рюкзачного типа.

С прикладной точки зрения, изучаемая проблематика затрагивалась авторами в связи с криптографическими объектами: аннигиляторами и алгебраической иммунностью. Одно из ключевых утверждений публикации [10], посвященной аннигиляторам и алгебраической иммунности, базируется на анализе совместимости системы уравнений и сводится к нахождению комбинаторной характеристики (аналога ранга) матрицы.

В [10, 11], где речь идет о булевых полиномах, как частный случай возникают линейные булевы полиномы.

Исследования в той же области, но другими методами проводились в институтах Екатеринбурга и Новосибирска. В качестве примеров можно привести работы [12, 13].

Статья состоит из четырех разделов. Раздел 2 посвящен применению метода производящих функций для исследования решений системы уравнений. Затем рассматривается как общий случай, так и частные случаи задачи. Раздел 3 посвящен комбинаторным свойствам линейных форм $L(x_1, \ldots, x_n)$. В разделе 4 приведены выводы.

Некоторые определения, понятия и методы доказательств ранее были использованы авторами этой статьи в публикациях [4, 5, 14–16].

Везде в дальнейшем будем считать, что все параметры рассматриваемой задачи, числа $c_1, \ldots, c_n; a_1, \ldots, a_n; b$ – неотрицательные целые числа.

2. О числе решений системы булевых уравнений

Актуальность исследования наличия решений системы булевых уравнений вытекает из того факта, что NP-полной проблемой является уже ответ на вопрос: совместна ли система булевых уравнений?

Поэтому получение нижней оценки числа решений системы булевых уравнений является достаточно естественной задачей. Если хотя бы в каких-то случаях оценка эта дает значение, не меньшее единицы, то это может иметь прикладное значение, так как решается NP-полная задача. Кроме того, получение такой оценки основывается на учете комбинаторики задачи, в то время как очевидный алгоритм проверки разрешимости задачи булева программирования – перебор всех 2^m булевых векторов – не дает понимания, от чего зависит разрешимость системы (в отличие от классического случая системы линейных уравнений).

Обозначим через $t_{b_1...b_m}(A)$ – число решений задачи булева программирования с системой ограничений вида $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ – матрица.

Зафиксируем матрицу ограничений и будем варьировать вектор правых частей. Получим последовательность чисел $\{t_{b_1...b_m}(A)\}$, где $t_{b_1...b_m}(A)$ – количество решений системы для фиксированного вектора правых частей.

Для этой последовательности имеем производящую функцию $F_A(z_1,\ldots,z_n)$ в виде полинома

$$F_A(z_1,\ldots,z_n) = \sum_{\{b_1,\ldots,b_m\}} z_1^{b_1} z_2^{b_2} \ldots z_n^{b_m} t_{b_1\ldots b_m}(A).$$

Заметим, что согласно введенным выше обозначениям вектор (a_{1k}, \ldots, a_{mk}) – это k-й столбец матрицы ограничений.

Лемма 1. Справедлива формула

(4)
$$F_A(z_1, \dots, z_m) = \prod_{k=1}^n \left(1 + z_1^{a_{1k}} \dots z_m^{a_{mk}} \right).$$

Доказательство.

$$F_{A}(z_{1},...,z_{m}) = \sum_{\{b_{1},...,b_{m}\}} z_{1}^{b_{1}} z_{2}^{b_{2}} \dots z_{m}^{b_{m}} t_{b_{1}...b_{m}}(A) =$$

$$= \sum_{x \in B^{n}} z_{1}^{a_{11}x_{1}+...+a_{1n}x_{n}} z_{2}^{a_{21}x_{1}+...+a_{2n}x_{n}} \dots z_{m}^{a_{m1}x_{1}+...+a_{mn}x_{n}} =$$

$$= \sum_{x_{1}=0}^{1} z_{1}^{a_{11}x_{1}} z_{2}^{a_{21}x_{1}} \dots z_{m}^{a_{m1}x_{1}} \sum_{x_{2}=0}^{1} z_{1}^{a_{21}x_{2}} z_{2}^{a_{22}x_{2}} \dots z_{m}^{a_{m2}x_{2}} \dots$$

$$\dots \sum_{x_{B}=0}^{1} z_{1}^{a_{1n}x_{n}} z_{2}^{a_{2n}x_{n}} \dots z_{m}^{a_{mn}x_{n}} =$$

$$= (1 + z_{1}^{a_{11}} z_{2}^{a_{21}} \dots z_{m}^{a_{m1}}) (1 + z_{1}^{a_{12}} z_{2}^{a_{22}} \dots z_{m}^{a_{m2}}) \dots (1 + z_{1}^{a_{1n}} z_{2}^{a_{2n}} \dots z_{m}^{a_{mn}}) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (1 + z_{1}^{a_{1k}} \dots z_{m}^{a_{mk}}).$$

Лемма 1 доказана.

Этот подход дает возможность найти число решений задачи булева программирования в зависимости от параметров **A** и **b**.

Пример 1. Рассмотрим задачу:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = b_1,$$

 $x_2 + x_3 + \ldots + x_{n+1} = b_2.$

Здесь матрица ограничений задана и имеет вид

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c} 11\dots10\\ 01\dots11 \end{array}\right).$$

Из леммы 1 следует, что $F_A(z_1, z_2) = (1 + z_1)(1 + z_1 z_2)^{n-1}(1 + z_2)$. Отсюда видно, что мономы с положительными коэффициентами $z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}$ определяют те векторы (b_1, b_2) , для которых система уравнений разрешима.

В частности, для n = 3 рассмотрим следующий пример:

$$x_1 + x_2 + x_3 = b_1,$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = b_2.$$

Здесь матрица ограничений задана и имеет вид

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c} 1110\\0111\end{array}\right).$$

Из леммы 1 следует, что

$$F_A(z_1, z_2) = (1+z_1)(1+z_1z_2)^2(1+z_2) =$$

= 1 + z_1 + z_2 + 3z_1z_2 + 2z_1^2z_2 + 2z_1z_2^2 + 2z_1^2z_2^2 + z_1^3z_2^3.

Отсюда видим, что система разрешима для следующих векторов правых частей: (0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3).

Кроме того, непосредственно из доказанной леммы 1 следует утверждение.

Следствие 1. Число разрешимых систем булевых уравнений вида $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ равно числу мономов, входящих с ненулевыми коэффициентами в полином $F_A(z_1, ..., z_n)$.

Так как в рассматриваемом случае матрица системы фиксируется, то будем считать, что различные *разрешимые системы* отличаются значением вектора правых частей, при котором обе системы имеют решение. Заметим теперь, что число различных мономов в полиноме $F_A(z_1, \ldots, z_n)$ не может превышать его степени. Поэтому отсюда получаем еще одно утверждение.

Cледствие 2. Число разрешимых систем булевых уравнений вида Ax = b не превышает степени полинома $F_A(z_1, ..., z_n)$.

Рассмотрим теперь еще одну комбинаторную задачу, которую можно решить с помощью доказанной леммы 1.

Пусть система разрешима. Мы ищем ее решения с помощью какой-нибудь эвристики, задающей правило перебора по всему B^n . Чем больше у системы решений, тем быстрее на какое-то из них можно "наткнуться". Если решаем не произвольную систему уравнений, а отражающую специфику некоторой прикладной задачи исследования операций, то особенности этой задачи отражаются на параметрах системы, в частности на векторе правых частей.

В связи с этим могут быть интересны оценки числа $t_{b_1...b_m}(A)$. Следующая теорема дает одну такую оценку.

$$T \, e \, o \, p \, e \, ma \, 1. \, \Pi y cmb \, v = \sum_{k=1}^{n} \max_{r=1,...,m} a_{rk}, \, morda \, cnpasedливо \, неравенство$$

(5)
$$\max_{\{b_1,\dots,b_m\}} t_{b_1\dots b_m}(A) \ge \frac{2^n}{m^v}.$$

Доказательство. С одной стороны, сумма всех коэффициентов полинома $F_A(z_1,...,z_n)$ равна $F_A(1,...,1)$, т.е. равна 2^n .

Из леммы 1 имеем

(6)
$$F_A(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\{b_1, \dots, b_m\}} z_1^{b_1} z_2^{b_2} \dots z_n^{b_m} t_{b_1 \dots b_m}(A) = \prod_{k=1}^n (1 + z_1^{a_{1k}} \dots z_m^{a_{mk}}).$$

Поэтому, с другой стороны, можно оценить общее число мономов в (6). Положим по определению, что степень монома $W = z_1^{v_1} \dots z_m^{v_m}$ равна

$$\deg W = \max_{i=1,\dots,m} v_i.$$

Тогда справедливо неравенство:

$$\deg(W_1W_2) \le \deg W_1 + \deg W_2.$$

Теперь имеем сначала равенство

$$\deg W = \deg(z_1^{a_{1k}} \dots z_m^{a_{mk}}) = \max_{r=1,\dots,m} a_{rk},$$

а затем получаем соотношение

$$\deg\left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 + z_1^{a_{1k}} \dots z_m^{a_{mk}}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \max_{r=1,\dots,m} a_{rk} = v.$$

Отсюда следует, что степень любого монома в (6) не превосходит v. Поэтому общее число мономов на превосходит m^v .

Но это означает, что хотя бы один коэффициент у полинома $F_A(z_1, \ldots, z_n)$ не меньше $\frac{2^n}{m^v}$.

Теорема 1 доказана.

Конечно, оценка (5) очень слабая и бывает полезна только в специальных случаях. Но так и должно быть, так как проблема проверки разрешимости задачи булева программирования является NP-трудной, а проверка соотношения (5) осуществляется с полиномиальной трудоемкостью. (Заметим, что в рассматриваемой ситуации имеем не конкретную индивидуальную задачу булева программирования, а семейство таких задач, параметризованное по $\{b_1, \ldots, b_m\}$.)

 $\Pi p \, u \, m \, e \, p \, 2$. Пусть есть два уравнения и $\mathbf{A} = (a_{ij})_{2 \times n}$ – матрица из нулей и единиц.

Тогда при m = 2 и $v \le n$ из (5) получаем, что $\max_{\{b_1, b_2\}} t_{b_1 b_2}(A) \ge 1.$

Но это очевидно, так как число единиц в строке матрицы определяет вектор правых частей того набора, на котором достигается максимум. В более сложных случаях структура подобного набора не всегда очевидна. Однако и сам подход к проблеме нахождения $\max_{\{b_1,b_2\}} t_{b_1b_2}(A)$ на основе схемы доказательства теоремы 1 может быть полезен, что показывает следующий пример.

Пример 3. Рассмотрим систему уравнений:

(7)

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= b_1, \\
2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= b_2. \\
F_A(z_1, z_2) &= \left(1 + z_1 z_2^2\right) \left(1 + z_1^2 z_2\right) \left(1 + z_1^3 z_2\right) \left(1 + z_1^4 z_2^3\right)
\end{aligned}$$

Раскрывая скобки, видим, что моном максимальной степени $z_1^{10} z_2^7$. Поэтому правая часть (5) меньше единицы: $\frac{2^n}{m^{\nu}} = \frac{2^4}{2^{17}} < 1$.

Но приводя подобные в (7), видим, что $\max_{\{b_1,b_2\}} t_{b_1b_2}(A) = 2$ и максимум достигается на парах $b_1 = 4$, $b_2 = 3$ и $b_1 = 6$, $b_2 = 4$. (Для первого случая это решения (0,0,0,1) и (1,0,1,0), а для второго – (0,1,0,1) и (1,1,1,0).)

Пример 4. Рассмотрим систему уравнений:

(8)

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= b_1, \\
x_2 + 2x_4 &= b_2. \\
F_A(z_1, z_2) &= (1 + z_1 z_2)(1 + z_1)^2 (1 + z_1 z_2^2).
\end{aligned}$$

Раскрывая скобки, видим, что моном максимальной степени $z_1^4 z_2^3$. Поэтому правая часть (5) вновь меньше единицы.

Но приводя подобные в (8), видим, что $\max_{\{b_1,b_2\}} t_{b_1b_2}(A) = 2$ и максимум достигается на парах $b_1 = 2, b_2 = 1, b_1 = 2, b_2 = 2$ и $b_1 = 3, b_2 = 3$. (Для первого случая это решения (1,1,0,0) и (0,1,1,0), для второго – (0,0,1,1) и (1,0,0,1), а для третьего – (0,1,1,1) и (1,1,0,1).)

Рассмотрим теперь вопрос о числе решений системы булевых уравнений с несколько иной точки зрения. Пусть дана линейная форма (2) с булевыми переменными. Множество значений этой линейной формы обозначим через $L^*(a_1, \ldots, a_n)$. (А если это не вызывает неопределенности, то просто через L^* .)

Сама же форма $L^*(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, зависящая от переменных x_1, \ldots, x_n , будет для краткости обозначаться через L.

Пример 5. Если $a_i = 1, i = 1, \dots, n$, то $L^* = \{0, 1, 2, \dots, n\}.$

Пример 6. Если $a_i = 2^{i-1}, i = 1, \dots, n$, то $L^* = \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}.$

Пример 7. Если $L(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + nx_n$, то $L^* = \{0, 1, \ldots, n, n+1, \ldots, 2n-1\}.$

В этом случае уравнение $L(x_1, \ldots, x_n) = b$ имеет решение для всех b, удовлетворяющих условию $0 \le b \le 2n - 1$.

 Πp имер 8. Если $L(x_1, \ldots, x_n) = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4$, то $L^* = \{0, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11\}$. В этом случае уравнение $L(x_1, \ldots, x_n) = b$ имеет решение для всех b, удовлетворяющих условию $0 \le b \le 11$, кроме b = 1, 4, 7, 10.

Просто из введенных определений получаем следующее утверждение.

Утверждение 1. Уравнение L(x) = b разрешимо тогда и только тогда, когда $b \in L^*$.

Заметим, что $L^*(a_1,\ldots,a_n)$ не зависит от упорядоченности элементов a_1,\ldots,a_n , поэтому в дальнейшем будем считать, что

$$(9) a_1 \le a_2 \dots \le a_n.$$

Определение 1. Формы $L_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $L_2(x_1, \ldots, x_n)$ называются эквивалентными, если $L_1^* = L_2^*$.

Пусть, как обычно, *n* – число переменных, а *N* – целое число такое, что

(10)
$$1 \le a_k \le N, \quad k = 1, \dots, n.$$

Через t(n, N) обозначим число линейных форм с параметрами n и N.

Лемма 2. Справедливо равенство $t(n,N) = C_{N+n-1}^n$.

Доказательство. Каждая линейная форма с условиями (9) и (10) может быть закодирована в алфавите $\{1, \ldots, N\}$ словом вида $1^{y_1}2^{y_2} \ldots N^{y_N}$, где $y_r, r = 1, \ldots, N, -$ число коэффициентов, равных r, среди чисел a_1, \ldots, a_n . Отсюда следует, что искомое число слов t(n, N) – это число решений уравнения $y_1 + y_2 + \ldots + y_N = n, y_i \ge 0, i = 1, \ldots, N$. Но отсюда и следует равенство $t(n, N) = C_{N+n-1}^n$.

Лемма 2 доказана.

(13)

Пусть, как и раньше, $t_b(a_1, \ldots, a_n)$ – число решений уравнения $L(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i = b$, а $n t_b(a_1, \ldots, a_n)$ – число решений неравенства $L(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b$. Исследуем эти величины. Обозначим через V_b множество решений соответствующей задачи (уравнения или неравенства).

Пусть производящая функция для числа решений неравенства

(11)
$$P_b(z_1, \dots, z_n) = \sum_{x \in V_b} z_1^{a_1 x_1} z_2^{a_2 x_2} \dots z_n^{a_n x_n} n t_b(a_1, \dots, a_n).$$

Лемма 3. Справедлива формула

(12)
$$\sum_{b=0}^{\infty} P_b(z_1, \dots, z_n) u^b = \frac{(1+(z_1u)^{a_1})\dots(1+(z_nu)^{a_n})}{1-u}.$$

Доказательство. Преобразуем сумму (11), используя метод коэффициентов (в первом равенстве цепочки нижеприведенных выкладок учтено соотношение $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$),

$$P_{b}(z_{1},...,z_{n}) = \sum_{t=0}^{b} \sum_{x \in V_{t}} z_{1}^{a_{1}x_{1}} z_{2}^{a_{2}x_{2}} \dots z_{n}^{a_{n}x_{n}} C_{u}^{oef} \left\{ \frac{u^{\sum_{i=1}^{b} a_{i}x_{i}}}{u^{t+1}} \right\} =$$

$$= C_{u}^{oef} \left\{ \sum_{t=0}^{b} \frac{1}{u^{t+1}} \sum_{x=0}^{1} (z_{1}u)^{a_{1}x_{1}} \dots \sum_{x=0}^{1} (z_{n}u)^{a_{n}x_{n}} \right\} =$$

$$= C_{u}^{oef} \left\{ \frac{\frac{1}{u} - \frac{1}{u^{b+2}}}{1 - \frac{1}{u}} \prod_{k=1}^{n} (1 + (z_{k}u)^{a_{k}}) \right\} =$$

$$= C_{u}^{oef} \left\{ \frac{1}{u^{b+1}(1-u)} \prod_{k=1}^{n} (1 + (z_{k}u)^{a_{k}}) \right\}.$$

Сравним (12) и (13) и увидим, что (12) просто "содержится" в (13).

Лемма 3 доказана.

Рассмотрим теперь следствие 3 из леммы 3 и с его помощью проиллюстрируем ее смысл. (Все нижеприведенные интегралы берутся по контуру, который указан под знаком интеграла.)

Следствие 3. Пусть 0 < ho < 1. Тогда для объема области решений имеет место равенство

(14)
$$nt_b(a_1,\ldots,a_n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{(1+u^{a_1})\ldots(1+u^{a_n})}{(1-u)u^{b+1}} du.$$

Сам смысл метода коэффициентов – это выражение коэффициента при минус первой степени переменной (оно представлено формулой (13)) через сумму вычетов, что представлено формулой (14). Именно это и приведено в качестве следствия 3 из леммы 3.

 Πp имер 9. Пусть все $a_j = 0, j = 1, \dots, n$.

Очевидно, что в этом случае множество решений совпадает со всем булевым кубом. Но это и следует из (14):

$$|V_b| = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{(1+u^{a_1})\dots(1+u^{a_n})}{(1-u)u^{b+1}} du =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{1}{(1-u)u^{b+1}} du = \frac{2^n}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} u^{k-b+1} \right\} du = 2^n.$$

Пример 10. Пусть все $a_j = 1, j = 1, \ldots, n$.

Очевидно, что в этом случае объем множества решений равен $\sum_{k=0}^{b} C_n^k$. Но это и следует из (14):

$$|V_b| = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{(1+u^{a_1})\dots(1+u^{a_n})}{(1-u)u^{b+1}} du =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{(1+u)^n}{(1-u)u^{b+1}} du = \sum_{k=0}^b C_n^k.$$

Пример 11. Пусть все $a_j = 2^{j-1}$, j = 1, ..., n. Тогда в неравенстве $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$ слева стоит некоторая двоичная запись натурального числа. Поэтому при $b > 2^n$ допустимые решения – весь булев куб. В противном случае решений ровно b, так как любое натуральное число однозначно представимо в двоичной записи. Отсюда следует, что объем множества решений равен min $\{b, 2^n\}$.

В рассматриваемом случае из (14) следует:

$$|V_b| = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{(1+u^{a_1})\dots(1+u^{a_n})}{(1-u)u^{b+1}} du =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{(1+u)(1+u^2)\dots(1+u^{2^{n-1}})}{(1-u)u^{b+1}} du =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \left\{ \sum_{m=0}^{2^n-1} u^m \right\} du = \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{1}{(1-u)u^{b-k+1}} du \right) = \min\left\{b, 2^n\right\}.$$

Здесь тот факт, что любое натуральное число однозначно представимо в двоичной системе исчисления, заключается в использовании соотношения

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1+u^{2^k}) = \sum_{m=0}^{2^n-1} u^m.$$

Очевидно, что интеграл в последнем равенстве равен единице при b > k - 1 и нулю в противном случае. (Заметим, что единица не является особой точкой!)

Теперь перейдем к рассмотрению числа решений уравнения.

Лемма 4. Справедливо соотношение

$$t_b(a_1,\ldots,a_n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{(1+u^{a_1})\ldots(1+u^{a_n})}{u^{b+1}} du, \quad \rho < 1.$$

Доказательство. Из леммы 1 совершенно аналогично доказательству леммы 3 получаем:

(15)

$$F_{A}(z_{1},...,z_{n}) = \sum_{x \in V_{b}} z_{1}^{a_{1}x_{1}} \dots z_{n}^{a_{n}x_{n}} Coe_{u}^{o} f\left\{\frac{u^{\sum_{i=1}^{n} a_{i}x_{i}}}{u^{b+1}}\right\} = Coe_{u}^{o} f\left\{\frac{1}{u^{b+1}} \sum_{x=0}^{1} (z_{1}u)^{a_{1}x_{1}} \dots \sum_{x=0}^{1} (z_{n}u)^{a_{n}x_{n}}\right\} = Coe_{u}^{o} f\left\{\frac{1}{u^{b+1}} \prod_{k=1}^{n} (1 + (z_{k}u)^{a_{k}})\right\}.$$

Откуда и следует утверждение леммы. Лемма 4 доказана.

Рассмотрим теперь вопрос о среднем значении $t_b(a_1, \ldots, a_n)$ для фиксированного значения *b* по всему булеву кубу при условиях (9) и (10).

Обозначим это число через $\overline{t_b}$. (То есть это среднее значение $\overline{t_b}(a_1, \ldots, a_n)$ по всему множеству $1 \le a_k \le N, \ k = 1, \ldots, n$.)

С учетом (9), (10) из леммы 4 имеем следующее соотношение

(16)
$$\overline{t_b} = \frac{1}{C_{n+N-1}^n} \sum_{i=1}^n \sum_{a_i=a_{i-1}}^N t_b(a_1, \dots, a_n).$$

Здесь считаем, что $a_0 = 1$.

Лемма 5. Справедлива формула

(17)
$$\overline{t_b} = \frac{1}{C_{n+N-1}^n} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{\left(N + \frac{u - u^{N+1}}{1 - u}\right)^n}{u^{b+1}} du, \quad \rho < 1.$$

Для доказательства леммы 5 непосредственно подставляем (15) в (16) и проводим суммирование, используя наличие геометрической прогрессии.

Рассмотрим в качестве примера случай трех переменных при произвольном N. (Всюду далее считаем, что $\rho < 1$.)

В этом случае $C_{N+n-1}^n = C_{N+2}^3$, а отсюда

$$\left(N + \frac{u - u^{N+1}}{1 - u}\right)^3 = N^3 + 3N^2 \left(\frac{u - u^{N+1}}{1 - u}\right) + 3N \left(\frac{u - u^{N+1}}{1 - u}\right)^2 + \left(\frac{u - u^{N+1}}{1 - u}\right)^3.$$

Из (17) следует

$$\overline{t_b} = \frac{1}{C_{N+2}^3} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{N^3 + 3N^2 \left(\frac{u-u^{N+1}}{1-u}\right) + 3N \left(\frac{u-u^{N+1}}{1-u}\right)^2 + \left(\frac{u-u^{N+1}}{1-u}\right)^3}{u^{b+1}} du = \frac{N^3}{C_{N+2}^3} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{1}{u^{b+1}} \frac{1}{u^{b+1}} du + \frac{3N^2}{C_{N+2}^3} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{1-u^N}{(1-u)u^b} du + \frac{3N}{C_{N+2}^3} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{1-u^{N-1}}{(1-u)^2 u^{b-1}} du + \frac{1}{C_{N+2}^3} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{(1-u^{N-2})^3}{(1-u)^3 u^{b-2}} du.$$

Для двух переменных при произвольном N имеем следующее.

В этом случа
е $C_{N+n-1}^n=C_{N+1}^2,$ а отсюда

$$\left(N + \frac{u - u^{N+1}}{1 - u}\right)^2 = N^2 + 2N\left(\frac{u - u^{N+1}}{1 - u}\right) + \left(\frac{u - u^{N+1}}{1 - u}\right)^2.$$

Из (17) следует

$$\begin{split} \overline{t_b} &= \frac{1}{C_{N+1}^2} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=\rho} \frac{N^2 + 2N\left(\frac{u-u^{N+1}}{1-u}\right) + \left(\frac{u-u^{N+1}}{1-u}\right)^2}{u^{b+1}} du = \\ &= \frac{N^2}{C_{N+1}^2} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=\rho} \frac{1}{u^{b+1}} du + \frac{2N}{C_{N+1}^2} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=\rho} \frac{1-u^N}{(1-u)u^b} du + \\ &\quad + \frac{1}{C_{N+1}^2} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=\rho} \frac{(1-u^N)^2}{(1-u)^2 u^{b-1}} du = \\ &= \frac{N^2}{C_{N+1}^2} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=\rho} \frac{1}{u^{b+1}} du + \frac{2N}{C_{N+1}^2} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=\rho} \frac{1-u^N}{(1-u)u^b} du + \\ &\quad + \frac{1}{C_{N+1}^2} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=\rho} \frac{(1-u)^{-2}}{u^{b-1}} (1-u^N)^2 du = \\ &= \frac{N^2}{C_{N+1}^2} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=\rho} \frac{1}{u^{b+1}} du + \frac{2N}{C_{N+1}^2} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=\rho} \frac{du}{(1-u)u^b} + \\ &\quad + \frac{2N}{C_{N+1}^2} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=\rho} \frac{1}{(1-u)u^{b-N}} + \frac{1}{C_{N+1}^2} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=\rho} \frac{(1-u)^{-2}}{u^{b-1}} \frac{(1-u^N+u^{2N})}{u^{b-1}} du. \end{split}$$

Представим это выражение в виде двух слагаемых, которые рассмотрим по отдельности, т.е. $\overline{t_b}={\rm A}+{\rm B},$ где

$$\mathbf{A} = \frac{N^2}{C_{N+1}^2} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{1}{u^{b+1}} du + \frac{2N}{C_{N+1}^2} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{du}{(1-u)u^b} + \frac{2N}{C_{N+1}^2} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{du}{(1-u)u^{b-N}},$$
$$\mathbf{B} = \frac{1}{C_{N+1}^2} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{(1-u)^{-2} \left(1-2u^N+u^{2N}\right)}{u^{b-1}} du.$$

Пусть δ – некоторая константа. Тогда первое слагаемо
е можно представить в виде

$$\begin{split} \mathbf{A} &= \frac{N^2}{C_{N+1}^2} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{1}{u^{b+1}} du + \frac{2N}{C_{N+1}^2} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{\sum\limits_{j=0}^{\infty} u^j}{u^b} du + \\ &+ \frac{2N}{C_{N+1}^2} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{\sum\limits_{j=0}^{\infty} u^j}{u^{b-N}} du = \frac{N^2}{C_{N+1}^2} \delta^b + \frac{2N}{C_{N+1}^2} + \frac{2N}{C_{N+1}^2} \delta^{b-N}. \end{split}$$

А второе имеет вид

$$\mathbf{B} = \frac{1}{C_{N+1}^2} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{(1-u)^{-2} \left(1-2u^N+u^{2N}\right)}{u^{b-1}} du.$$

Далее получаем

$$\begin{split} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=\rho} \frac{(1-u)^{-2} \left(1-2u^N+u^{2N}\right)}{u^{b-1}} du = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=\rho} \frac{(1-u)^{-2}}{u^{b-1}} du + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=\rho} \frac{(1-u)^{-2}}{u^{b-N}} du + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=\rho} \frac{(1-u)^{-2}}{u^{b-2N-1}} du = \\ &= (-1)^{b-2} C_{b-2}^{-2} + 2(-1)^{b-N-2} C_{b-N-2}^{-2} + (-1)^{b-2N-2} C_{b-2N-2}^{-2} = \\ &= C_{2+b-2-1}^{b-2} + 2C_{2+b-N-2-1}^{b-N-2} + C_{2+b-2N-2-1}^{b-2N-2} = \\ &= C_{b-1}^{b-2} + 2C_{b-N-1}^{b-N-2} + C_{b-2N-1}^{b-2N-2} = \\ &= (b-1) - 2C_{b-N-1}^{1} + C_{b-2N-1}^{1} = 0. \end{split}$$

Окончательно имеем:

$$\overline{t_b} = \frac{N^2}{C_{N+1}^2} \delta^b + \frac{2N}{C_{N+1}^2} + \frac{2N}{C_{N+1}^2} \delta^{b-N}.$$

Рассмотрим теперь случай N = 2 при произвольном количестве переменных. Пусть, как обычно, $||x|| = \sum_{i=1}^{n} x_i$. В рассматриваемом случае b можно представить в виде $b = \sum_{i=1}^{p} x_i + 2 \sum_{i=p+1}^{n} x_i$. Очевидно, что $b \le p + 2(n-p) = 2n-p$.

Утверждение 2. При N = 2 справедливо соотношение

(18)
$$\overline{t_b} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n C_n^k C_k^{b-k} 2^{n-k}.$$

Доказательство. В рассматриваемом случае из (17) имеем

$$\overline{t_b} = \frac{1}{C_{n+N-1}^n} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{\left(N + \frac{u-u^{N+1}}{1-u}\right)^n}{u^{b+1}} du = \frac{1}{C_{n+1}^n} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{\left(2 + \frac{u-u^3}{1-u}\right)^n}{u^{b+1}} du = \frac{1}{n+1} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{\left(2 + \frac{u-u^3}{1-u}\right)^n}{u^{b+1}} du = \frac{1}{n+1} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{\sum_{k=0}^n C_n^k u^k (1+u)^k 2^{n-k}}{u^{b+1}} du = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n C_n^k 2^{n-k} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{u^k (1+u)^k}{u^{b+1}} du = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n C_n^k C_k^{b-k} 2^{n-k},$$

где $b/2 \le k \le b$.

Утверждение 2 доказано.

 Πp имер 12. Пусть N = 2, n = 3. Из (12) имеем

$$\overline{t_b} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_k^{b-k} 2^{n-k} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} C_3^k C_k^{b-k} 2^{3-k}.$$

Отсюда получаем

$$\overline{t_1} = \frac{1}{4}(2+3+1+0) = 3/2, \quad \overline{t_2} = \frac{1}{4}(2+3+2+3) = 5/2,$$
$$\overline{t_3} = \frac{1}{4}(2+1+2+0) = 5/4, \quad \overline{t_4} = \frac{1}{4}(1+0+1+3) = 5/4, \quad \overline{t_5} = \frac{1}{4}, \quad \overline{t_6} = \frac{1}{4}$$

Видно, что максимальное значение достигается при b = 2.

3. О некоторых свойствах множества L^*

3.1. Структура множества L*

Следуя обозначениям и определениям, введенным ранее, напомним, что множество значений линейной формы $L(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ (сама эта форма, если это не вызывает неопределенности, обозначается через L(x) или даже через L) обозначено через $L^*(a_1, \ldots, a_n)$ (или просто через L^*).

Уравнение L(x) = b разрешимо тогда и только тогда, когда $b \in L^*$. В связи с этим актуальной задачей является исследование структуры и свойств множества L^* .

Очевидно следующее утверждение.

Утверждение 3. Справедливо соотношение

$$|L^*| \le \min\left\{2^n, 1 + \sum_{i=1}^n a_i\right\}.$$

Следствие 4. Если $a_i \leq N, i = 1, \dots, n, mo |L^*| \leq \min\{2^n, 1 + nN\}.$ Лемма 6. Если $L(x) = \sum_{i=1}^n ix_i, mo L^* = [0, C_{n+1}^2].$

Эта лемма следует из того факта, доказанного в [12], что при $L(x) = \sum_{i=1}^{n} i x_i$ форма L(x) принимает на булевом кубе все значения от нуля до $\sum_{i=1}^{n} i = C_{n+1}^2$.

3.2. Множества L* и сложение по Минковскому

Определение 2. Пусть M_1 и M_2 – два множества из натуральных чисел. Их суммой по Минковскому называется множество $M = M_1 \oplus M_2 = \{a + b, a \in M_1, b \in M_2\}.$

 $\Pi p u M e p$ 13. Если Z_{2n} – множество всех четных чисел, а $M = \{0, 1\}$, то $Z_{2n} \oplus M$ – весь натуральный ряд.

 $\Pi p \, u \, m \, e \, p \, 14$. Сумма по Минковскому двух отрезков натурального ряда – это отрезок натурального ряда: $[a, b] \oplus [c, d] = [a + b, c + d]$.

Обозначим через P_L множество переменных формы $L(x_1, \ldots, x_n)$, т.е. $P_L = \{x_1, \ldots, x_n\}.$

Лемма 7. Если $P_{L_1} \cap P_{L_2} = \emptyset$, то $(L_1 + L_2) * = L_1^* \oplus L_2^*$.

Доказательство. По определению

$$(L_1 + L_2) * = \left(\sum_{i=1}^p a_i x_i + \sum_{i=p+1}^q a_i x_i\right)^* = \{a_i + a_j, 1 \le i \le p, p+1 \le j \le q\}.$$

Далее замечаем, что $\{a_i + a_j, 1 \le i \le p, p+1 \le j \le q\} = L_1^* \oplus L_2^*.$

Лемма 7 доказана.

Приведем некоторые соотношения, связывающие обычное сложение линейных форм, сложение по Минковскому и стандартные теоретико-множественные операции.

1.
$$(L_1 + L_2) = \sum_{i=1}^n (a_i + a_i) x_i = \sum_{i=1}^n c_i x_i.$$

2. $L^* = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i, x \in B^n \right\}.$
3. $A \oplus B = \{a + b, a \in A, b \in B\}.$

4.
$$(L_1 + L_2) * = L_1^* \oplus L_2^* \text{ при } P_{L_1} \cap P_{L_2} = \emptyset$$

5. Если
$$L_1(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$
, $L_2 = a_{n+1} x_{n+1}$ и $a_{n+1} \le \sum_{i=1}^n a_i$,
a $L_1^* = \left[0, \sum_{i=1}^n a_i\right]$, то $(L_1 + L_2)^* = \left[0, \sum_{i=1}^{n+1} a_i\right]$.

164

Рассмотрим один специальный класс линейных форм.

Определение 3. Форма $L(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ называется непрерывной, если $L^* = [0, \sum_{i=1}^n a_i].$

Таким образом, непрерывная форма принимает все значения от минимально возможного до максимального. (Напоминаем, что переменные булевы, а коэффициенты – целые положительные числа.) Впервые данное определение было введено в [14].

Пример 15. Следующие классы функций являются непрерывными:

1.
$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i;$$

2. $L(x) = \sum_{i=1}^{n} ix_i;$
3. $L(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i 2^{i-1};$
4. $L(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i + nx_n;$
5. $L(x) = \sum_{i=2}^{n} 2x_i + x_1.$

При n = 2 существует всего две непрерывные формы: $L_1 = x_1 + x_2$; $L_2 = x_1 + 2x_2$.

При n = 3 существует пять непрерывных форм: $L_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $L_2 = x_1 + x_2 + 2x_3$, $L_3 = x_1 + 2x_2 + 2x_3$, $L_4 = x_1 + 2x_2 + 3x_3$, $L_5 = x_1 + 2x_2 + 4x_3$.

Для n = 4 таких форм уже 13: $L_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, $L_2 = x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4$, $L_3 = x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4$, $L_4 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4$, $L_5 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4$, $L_6 = x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4$, $L_7 = x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4$, $L_8 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4$, $L_9 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$, $L_{10} = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4$, $L_{11} = x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4$, $L_{12} = x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4$, $L_{13} = x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4$.

Важность и актуальность проверки линейной формы на непрерывность объясняется следующим их свойством. Решение системы булевых уравнений, левые части которых образованы непрерывными линейными формами, становится простой задачей. Достаточно для каждого уравнения взять правую часть b и сравнить с $\sum_{i=1}^{n} a_i$ в правой части. Если $b \leq \sum_{i=1}^{n} a_i$, то уравнение разрешимо, например, на единичном векторе. А если $b > \sum_{i=1}^{n} a_i$, то решения оно не может иметь.

Замечание 1. Сумма непрерывных функций не обязана быть непрерывной.

 $\Pi p \, u \, M \, e \, p \, 16.$ Функции $L_1 = x_1 + x_2$ и $L_2 = x_1 + 2x_2$ являются непрерывными, а их сумма $L_3 = 2x_1 + 3x_2$ не является непрерывной (она не принимает значений 1 и 4).

Однако если это функции от разных переменных, то справедливо утверждение.

Утверждение 4. Если L_1 и L_2 – две непрерывные линейные формы, зависящие от разных переменных, то форма $L_1 + L_2$ является непрерывной.

 \mathcal{A} оказательство. Так как L_1 и L_2 – непрерывны, то $L_1^* = [0, a], L_2^* = [0, b]$ для некоторых a и b. Из леммы 7 следует: $[L_1 + L_2]^* = L_1^* \oplus L_2^* = [0, a] \oplus [0, b] = [0, a + b].$

Утверждение 4 доказано.

Утверждение 5. Если форма $L = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ является непрерывной и $L \neq 0$, то справедливы соотношения: $a_k \leq \sum_{i=1}^{k-1} a_i + 1, \ k = 2, 3, \dots, n.$

Доказательство. Так как выполняется (9), $L \neq 0$ и $L^* = [0, \sum_{i=1}^n a_i]$, то $a_1 = 1$ в силу того, что $1 \in L^*$. Далее берем минимальное k > 1 такое, что $a_k \neq 0$. Вновь в силу (9) имеем $a_k \leq 2$, так как $L^* = [0, \sum_{i=1}^n a_i]$ и $2 \in L^*$. И так для всех $k = 2, 3, \ldots, n$.

Утверждение 5 доказано.

Пусть теперь $L = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ и все $a_i \leq N, i = 1, ..., n$. Обозначим множество таких форм через L(n, N) и пусть $l(n, N) = \max_{L(n,N)} |L^*|$.

Значение l(n, N)и его оценки могут представлять интерес при оценке качества переборных алгоритмов.

Тогда справедливо следующее соотношение.

Теорема 2. Если N = n, то

$$l(n,N) \sim n^2.$$

Доказательство. Для доказательства получим верхнюю и нижнюю границу этой асимптотики, а из их равенства установим утверждение теоремы. Верхняя граница здесь очевидна и имеет вид

(19)
$$l(n,n) \le \min\left\{2^n, n^2\right\} = n^2.$$

Для получения нижней оценки рассмотрим линейную форму специального вида

$$L = x_1 + \sum_{i=2}^{m} ix_i + n \sum_{i=m+1}^{n} x_i.$$

Здесь *т* – некоторый параметр. Теперь выберем *т* из условия:

$$C_{m+1}^2 \ge n.$$

Отсюда следует, что $L^*(x_1 + \sum_{i=2}^m ix) = [0, C_{m+1}^2]$, а с учетом вида выбранной линейной формы начинаем добавлять слагаемые. При добавлении первого слагаемого получаем:

$$L^*\left(x_1 + \sum_{i=1}^m ix + nx_{m+1}\right) = \left[0, n + C_{m+1}^2\right].$$

И далее, продолжая добавлять слагаемые, имеем:

$$L^*\left(x_1 + \sum_{i=2}^m ix_i + n\sum_{i=m+1}^n x_i\right) = \left[0, n(n-m) + C_{m+1}^2\right].$$

Из этого равенства видно, что для завершения доказательства теоремы 2 требуется выбрать параметр $m \sim \sqrt{2n}$. При таком выборе мощность множества значений линейной формы удовлетворяет соотношению:

(20)
$$\left| L^* \left(x_1 + \sum_{i=2}^m i x_i + n \sum_{i=m+1}^n x_i \right) \right| \sim n^2.$$

Из (19) и (20) следует утверждение теоремы.

Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Для доказательства нижней оценки в теореме использовалась линейная форма достаточно специального вида, поэтому на практике, видимо, следует ожидать для $|L^*|$ значений существенно меньших. Вопрос же о среднем значении этой величины – отдельная задача теории чисел.

4. Заключение

В статье рассмотрены вопросы, связанные с разрешимостью систем булевых уравнений. Даны формулы и оценки числа допустимых решений системы в зависимости от значения правых частей уравнений. Эта часть работы использует метод производящих функций и является продолжением предыдущих исследований авторов.

Рассмотрен один частный случай систем, когда уравнения ограничений задаются так называемыми непрерывными линейными формами.

Результаты могут представлять интерес для конструирования прикладных алгоритмов в различных областях дискретной оптимизации и исследования операций, а также в распознавании образов, криптографии и системах защиты информации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Пападимитриу Х., Стайглиц С. Комбинаторная оптимизация. М.: Мир, 1989.
- Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

- 3. *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования. М.: Мир, 1991.
- 4. Леонтьев В.К., Гордеев Э.Н. Производящие функции в задаче о ранце // ДАН. 2018. Т. 481. № 5. С. 478–480. https://doi.org/10.31857/S086956520002139-5.
- 5. *Леонтьев В.К., Гордеев Э.Н.* О некоторых комбинаторных свойствах задачи о рюкзаке // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 8. С. 1439–1447. https://doi.org/10.1134/S0044466919080076.
- 6. Kellerer H., Pferschy U., Pisinger D. Knapsack problems. Berlin: Springer, 2004.
- 7. Леонтьев В.К., Тоноян Г.П. Приближенные решения систем булевых уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т. 33. № 9. С. 1383–1390.
- 8. *Леонтьев В.К., Тоноян Г.П.* О системах булевых уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 5. С. 109–116.
- 9. *Кузюрин Н.Н., Фомин С.А.* Эффективные алгоритмы и сложность вычислений. М.: МФТИ, 2007.
- Леонтьев В.К., Гордеев Э.Н. Об алгебраической иммунности систем кодирования // Вопросы кибербезопасности. 2019. № 1. С. 59–89. https://doi.org/ 10.21681/2311-3456-2019-1-59-68.
- 11. Гордеев Э.Н., Леонтьев В.К., Медведев Н.В. О свойствах булевых полиномов, актуальных для криптосистем // Вопросы кибербезопасности. 2017. № 3. С. 63–69. https://doi.org/10.21681/2311-3456-2017-3-63-69.
- Мазуров И.Д., Хачай М.Ю. Комитеты систем линейных неравенств // АиТ. 2004. № 2. С. 43–54.
 Mazurov V.D., Khachai M.Yu. Committees of Systems of Linear Inequalities // Autom. Demostr Control. 2004. V. 65. No. 2, D. 102, 202.

Autom. Remote Control. 2004. V. 65. No. 2. P. 193–203. https://doi.org/10.1023/ B:AURC.0000014716.77510.61.

- 13. Береснев В.Л. Эффективный алгоритм решения задачи минимизации полиномов от булевых переменных, обладающих свойством связности // Дискретн. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2005. Т. 12. № 1. С. 3–11.
- 14. Леонтьев В.К. О псевдобулевых полиномах // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 11. С. 1952–1958. https://doi.org/10.7868/S0044466915110113.
- 15. *Леонтьев В.К.* Комбинаторика и информация. Ч. 1. Комбинаторный анализ. М.: МФТИ, 2015.
- 16. *Леонтьев В.К.* Комбинаторика и информация. Ч. 2. Информационные модели. М.: МФТИ, 2015.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.Е. Пальчуновым.

Поступила в редакцию 12.01.2021 После доработки 01.03.2021 Принята к публикации 16.03.2021

СОДЕРЖАНИЕ

Обзоры

Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.	Метод скоростного градиента и его прило-
жения	

Линейные системы

Верба В.С.	Методы наведени	ия летательных аппаратов со сменой приоритетов	
управлен	ия		73
Поляк Б.Т.,	Хлебников М.В.	Синтез статического регулятора для подавления	
внешних	возмущений как	задача оптимизации	86

Стохастические системы

Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г. К задаче частичной устойчивости нели-	
нейных дискретных стохастических систем	. 116
Хуторцев В.В. Управление поиском объектов из пространственно-временного	
пуассоновского потока при неоднородной области обзора информационно-	
измерительной системы	133

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

Леонтьев В.К., Гордеев Э.Н. О числе решений системы булевых уравнений...150

CONTENTS

Surveys

Andrievskiy B.R., Fradkov A.L. Method of Speed-gradient and Its Applications 3				
Linear Systems				
 Verba V.S. Aircraft Guidance Methods with a Change of Control Priorities				
Stochastic Systems				
Vorotnikov V.I., Martyshenko Yu.G. On the Partial Stability in Probability of Nonlinear Discrete-Time Stochastic Systems				
Khutortsev V.V. The Search Control for Objects from the Space-Time Poisson Flow for an Inhomogeneous Overview Area of the Information and Measurement System				
Optimization, System Analysis, and Operations Research				

Leontiev V.K., Gordeev E.N.	On the Number of Solutions to a System of Boolean	
Equations		50