СОДЕРЖАНИЕ

Том 57, номер 2, 2021

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

ХРОНИКА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 2, с. 147–152

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.42

ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЫ В ТЕОРИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ИЗОХРОННЫХ ЦЕНТРОВ СИСТЕМ ЛЬЕНАРА

 В. В. Амелькин

Рассматривается полиномиальная система Льенара $\dot{x}=-y,\ \dot{y}=x+A(x)-B(x)y$ в предположении, что вещественные полиномы $A(x)$, $B(x)$ и производная $A'(x)$ удовлетворяют условиям $A(0)=B(0)=A'(0)=0$. Доказывается, что эта система имеет в особой точке $O(0,0)$ изохронный центр тогда и только тогда, когда полиномы $A(x)$ и $B(x)$ являются нечётными функциями и связаны между собой тождеством $x^3A(x)=(\int_0^x sB(s)\,ds)^2$.

DOI: 10.31857/S0374064121020011

Рассмотрим вещественное полиномиальное уравнение Льенара

$$\ddot{x}+B(x)\dot{x}+x+A(x)=0, \tag{1}$$

полиномы $A(x)$ и $B(x)$ в котором задаются равенствами

$$A(x)=\sum_{k=2}^{n}A_kx^k,\quad B(x)=\sum_{j=1}^{r}B_jx^j,\quad A_n\neq 0,\quad B(x)\not\equiv 0,$$

где $n\geqslant 3$ – нечётное число, $r\leqslant n-1$.

Уравнение (1) всесторонне изучалось и изучается с самых разных точек зрения. Обычный приём здесь – переход к эквивалентной ему двумерной автономной системе. Одной из таких систем является система Льенара в так называемой первой форме

$$\dot{x}=-y,\quad \dot{y}=x+A(x)-B(x)y. \tag{2}$$

Другой является система [1]

$$\dot{x}=-y-x\Phi(x),\quad \dot{y}=x-y\Phi(x)+A(x)-x\Phi^2(x), \tag{3}$$

где

$$\Phi(x)=\frac{1}{x^2}\int_0^x sB(s)\,ds.$$

Заметим, что система (2) переводится в систему (3) (с сохранением в последней обозначений для исходных фазовых переменных) заменой координат

$$u=x,\quad v=y-x\Phi(x).$$

Напомним, что центр $O(0,0)$ системы (2) (или, что то же самое, системы (3)) называется *изохронным*, если период обхода изображающей точкой каждого цикла из области этого центра равен 2π.

В работах [2, 3] и [1, 4] в соответственно полиномиальном и голоморфном случаях доказано, что если функции $A(x)$ и $B(x)$ нечётные, то при условии

$$A(x)=\frac{1}{x^3}\left(\int_0^x sB(s)\,ds\right)^2 \tag{4}$$

система (3) принимает вид

$$\dot{x} = -y - x\Phi(x), \quad \dot{y} = x - y\Phi(x), \tag{5}$$

и это условие является необходимым и достаточным условием изохронности центра $O(0,0)$ системы (2).

Замечание. Из вида системы (5) следует, что точка $O(0,0)$ является единственной конечной вещественной особой точкой этой системы и, следовательно, единственной особой точкой системы (2).

Гипотеза [2, 3] (см. также [4]). *Система (2) с полиномиальными функциями $A(x)$ и $B(x)$ имеет в особой точке $O(0,0)$ изохронный центр тогда и только тогда, когда выполняется равенство (4) и $B(x)$ – нечётная функция.*

Пусть далее y^+ и y^- – соответственно положительная и отрицательная полуоси оси Oy прямоугольной декартовой системы координат xOy. Изохронный центр $O(0,0)$ системы (2) называется *сильно изохронным*, если дополнительно изображающая точка, выходящая из точки полуоси y^+, пересечёт полуось y^- через время π.

Эквивалентным приведённому определению является следующее определение.

Центр $O(0,0)$ системы (2) называется *сильно изохронным*, если диффеоморфизм на $\mathbb{R}^2$ $u = x$, $v = y - x\Phi(x)$ $(x = u,\ y = v + u\Phi(u))$ переводит систему (2) в систему $\dot{u} = -v - u\Phi(u)$, $\dot{v} = u - v\Phi(u)$.

Эквивалентность приведённых определений следует из работ [5, 6].

Отметим, что в работе [7, теорема 3.3.2] в голоморфном (полиномиальном) случае, а также в [6] в голоморфном и полиномиальном (замечание 1) случаях, доказано, что нечётность функции $B(x)$ и выполнение равенства (4) являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы система (2) имела в особой точке $O(0,0)$ сильно изохронный центр. Поэтому приведённую гипотезу можно переформулировать следующим образом: *изохронный центр $O(0,0)$ полиномиальной системы Льенара (2) является сильно изохронным центром.*

По поводу сформулированной гипотезы в работе [8], в частности, отмечается: "... имеются достаточно веские основания считать, если говорить о полиномиальных системах Льенара, что других случаев изохронности не существует, хотя этого пока никто не может доказать".

Обращаясь к этой гипотезе, авторы работы [4] смогли доказать, используя систему REDUCE, её справедливость для полиномиальных систем Льенара с полиномами $A(x)$ и $B(x)$ степени не выше 34-й.

В настоящей работе получено полное доказательство приведённой гипотезы. Перейдём к его изложению.

В работе [9] в голоморфном случае системы Льенара доказано следующее утверждение: существует вещественная замена переменных

$$u = x + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k x^k, \quad v = y + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_k x^k,$$

переводящая систему

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x + \sum_{k=2}^{\infty} A_k x^k - \Big(\sum_{j=1}^{\infty} B_j x^j\Big) y$$

в окрестности особой точки $O(0,0)$ в систему вида

$$\dot{u} = -\Big(v + u\sum_{s=2}^{\infty} \gamma_{s-1} u^{s-1}\Big)\Big(1 + \sum_{s=2}^{\infty} H_s u^{s-1}\Big)^{-1},$$

$$\dot{v} = \Big(u - v\sum_{s=2}^{\infty} \gamma_{s-1} u^{s-1}\Big)\Big(1 + \sum_{s=2}^{\infty} H_s u^{s-1}\Big)^{-1}. \tag{6}$$

Покажем, какие результаты можно получить, основываясь на приведённом утверждении, в случае полиномиальной системы (2), когда диффеоморфизм на $\mathbb{R}^2$ задаётся соотношениями

$$u = x + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k x^k, \quad v = y + \sum_{k=2}^{n} \beta_k x^k. \tag{7}$$

Для этого, как и в голоморфном случае [9], будем использовать метод неопределённых коэффициентов. Сначала дифференцируем каждое из тождеств (7) по t в силу системы (2), а затем полученные равенства приводим с учётом соотношений (6) и (7) к системе

$$y\biggl\{\sum_{k=2}^{n} k\alpha_k x^{k-1} + \sum_{s=2}^{\infty} H_s\biggl(x + \sum_{k=2}^{n}\alpha_k x^k\biggr)^{s-1} + \sum_{k=2}^{n} k\alpha_k x^{k-1}\sum_{s=2}^{\infty} H_s\biggl(x + \sum_{k=2}^{n}\alpha_k x^k\biggr)^{s-1}\biggr\} \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=2}^{n}\beta_k x^k + \sum_{s=2}^{\infty}\gamma_{s-1}\biggl(x + \sum_{k=2}^{n}\alpha_k x^k\biggr)^{s},$$

$$\sum_{k=2}^{n}(A_k - \alpha_k)x^k + \biggl(x + \sum_{k=2}^{n} A_k x^k\biggr)\sum_{s=2}^{\infty} H_s\biggl(x + \sum_{k=2}^{n}\alpha_k x^k\biggr)^{s-1} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n}\beta_k x^k \sum_{s=2}^{\infty}\gamma_{s-1}\biggl(x + \sum_{k=2}^{n}\alpha_k x^k\biggr)^{s-1} \equiv y\biggl\{\sum_{k=2}^{n}(B_{k-1} + k\beta_k)x^{k-1} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n}(B_{k-1} + k\beta_k)x^{k-1}\sum_{s=2}^{\infty} H_s\biggl(x + \sum_{k=2}^{n}\alpha_k x^k\biggr)^{s-1} - \sum_{s=2}^{\infty}\gamma_{s-1}\biggl(x + \sum_{k=2}^{n}\alpha_k x^k\biggr)^{s-1}\biggr\}. \tag{8}$$

Далее, приравнивая к нулю в первом тождестве системы (8) коэффициенты при yx^p, получаем тождество

$$\sum_{s=2}^{\infty} H_s\biggl(x + \sum_{k=2}^{n}\alpha_k x^k\biggr)^{s-1} \equiv -1 + \biggl(1 + \sum_{k=2}^{n} k\alpha_k x^{k-1}\biggr)^{-1}. \tag{9}$$

Так как отображение (7) – диффеоморфизм на $\mathbb{R}^2$, то по теореме о существовании обратной функции [10, с. 26] и по теореме о производной обратной функции [11, с. 74] заключаем, что справедливо неравенство

$$1 + \sum_{k=2}^{n} k\alpha_k x^{k-1} > 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Следовательно, в правой части тождества (9) стоит рациональная функция, определённая на всём множестве $\mathbb{R}$. А значит, левая часть тождества (9) – это сходящийся степенной ряд, определяющий голоморфную на всём множестве $\mathbb{R}$ функцию. Теперь на основании (9), (10) и того, что радиусы сходимости степенного ряда с вещественными коэффициентами в вещественной и комплексной областях одинаковы (формула Коши–Адамара [12, с. 39; 13, с. 114]), приходим к выводу, что тождество (9) возможно лишь при выполнении условий

$$\alpha_k = 0, \quad H_s = 0 \quad \text{для всех} \quad k, s \geqslant 2. \tag{11}$$

Приравнивая к нулю в первом тождестве системы (8) коэффициенты при x^p, с учётом условий (11) получаем тождество

$$\sum_{k=2}^{n}\beta_k x^k + \sum_{s=2}^{\infty}\gamma_{s-1}x^s \equiv 0.$$

Поэтому справедливы соотношения

$$\gamma_s = 0 \quad \text{при всех} \quad s > n \tag{12}$$

и

$$\gamma_{k-1} = -\beta_k, \quad k = \overline{2, n}. \tag{13}$$

Далее, приравнивая к нулю во втором тождестве системы (8) коэффициенты при yx^p, с учётом равенств (11)–(13) получаем, что

$$\beta_k = -\frac{B_{k-1}}{k+1}, \quad k = \overline{2, n}. \tag{14}$$

Из соотношений (11)–(14) следует, что диффеоморфизм (7) и система (6) принимают соответственно вид

$$u = x, \quad v = y - x\sum_{k=2}^{n} \frac{B_{k-1}}{k+1} x^{k-1} \tag{15}$$

и

$$\dot{u} = -v - u\sum_{s=2}^{n} \frac{B_{s-1}}{s+1} u^{s-1}, \quad \dot{v} = u - v\sum_{s=2}^{n} \frac{B_{s-1}}{s+1} u^{s-1}. \tag{16}$$

Приравнивая к нулю во втором тождестве системы (8) коэффициенты при x^p, с учётом равенств (11)–(14) приходим к тождеству

$$\sum_{k=2}^{n} A_k x^k - \sum_{k=2}^{n} \frac{B_{k-1}}{k+1}\, x^k \sum_{s=2}^{n} \frac{B_{s-1}}{s+1} x^{s-1} \equiv 0,$$

или, равносильно, к тождеству

$$\sum_{k=2}^{n} A_k x^{k-1} \equiv \left(\sum_{s=2}^{n} \frac{B_{s-1}}{s+1} x^{s-1}\right)^2. \tag{17}$$

Предположим теперь, что точка $O(0,0)$ – изохронный центр системы (2). Тогда вследствие теоремы 5 из работы [9] и формул (13), (14) получаем, что имеют место равенства

$$B_{2l} = 0, \quad l = \overline{1, (n-1)/2}. \tag{18}$$

Поэтому соотношения (15) и (16) принимают соответственно следующий вид:

$$u = x, \quad v = y - x\sum_{l=1}^{(n-1)/2} \frac{B_{2l-1}}{2l+1} x^{2l-1} \tag{19}$$

и

$$\dot{u} = -v - u\sum_{l=1}^{(n-1)/2} \frac{B_{2l-1}}{2l+1} u^{2l-1}, \quad \dot{v} = u - v\sum_{l=1}^{(n-1)/2} \frac{B_{2l-1}}{2l+1} u^{2l-1}. \tag{20}$$

Но из тождества (17) вытекает, что полином $A(x)$ – нечётная функция, а значит, справедливы равенства

$$A_{2l} = 0, \quad l = \overline{1, (n-1)/2}. \tag{21}$$

Следовательно, с учётом равенств (18) и (21) тождество (17) запишется в виде

$$\sum_{l=1}^{(n-1)/2} A_{2l+1} x^{2l} \equiv \left(\sum_{s=1}^{(n-1)/2} \frac{B_{2s-1}}{2s+1} x^{2s-1}\right)^2. \tag{22}$$

Если обратиться теперь к формулировке гипотезы в предположении, что точка $O(0,0)$ системы (2) является изохронным центром, то тождество (22) (с нечётной функцией-полиномом $B(x)$) оказывается необходимым условием изохронности центра системы (2).

Покажем, что тождество (22) – это и достаточное условие для изохронности центра $O(0,0)$ системы (2).

Действительно, указанное тождество с нечётной функцией-полиномом $B(x)$ (а значит, с нечётным полиномом $A(x)$) эквивалентно условию (4). Но тогда, как показано, например, в работах [2, 3], точка $O(0,0)$ в системе (2) является изохронным центром.

Следовательно, справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы особая точка $O(0,0)$ полиномиальной системы (2) была изохронным центром, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (4) и полином $B(x)$ был нечётной функцией.*

Таким образом, сформулированная выше гипотеза имеет положительное решение.

Выясним вопрос о максимальной степени полинома $B(x)$ в тождестве (22). Для этого заметим, что в левой части тождества (22) максимальная степень полинома $A(x)$ равна $n-1$, а максимальная степень правой части указанного тождества равна $2r$, где r – максимальная степень полинома $B(x)$. Поэтому имеет место равенство

$$r = \frac{n-1}{2}, \tag{23}$$

где

$$r = 2\rho - 1, \quad \rho \in \mathbb{N}, \tag{24}$$

– нечётное число (в силу нечётности функции-полинома $B(x)$). Тогда, выражая ρ из соотношений (23) и (24), заключаем, что максимальная степень полинома $B(x)$ определяется формулой (23) при выполнении условия $(n+1)/4 \in \mathbb{N}$, т.е. условия $n \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$.

Имея же в виду формулы (22)–(24), получаем, что

$$A_{2l+1} = \sum_{k=1}^{l} \frac{B_{2k-1}}{2k+1} \frac{B_{2l-2k+1}}{2l-2k+3}, \quad l = \overline{1,(n-1)/2}, \quad (n+1)/4 \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Следовательно, на основании теоремы 1, диффеоморфизма (7) на $\mathbb{R}^2$, представимого в единственном виде (19), и формулы (25) приходим к выводу, что справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. *Для того чтобы система (2) имела в начале координат $O(0,0)$ изохронный (а значит, и сильно изохронный) центр, необходимо и достаточно, чтобы между коэффициентами полиномов $A(x)$ и $B(x)$ имела место зависимость (25).*

Теорема 3. *Для того чтобы система (2) имела в начале координат $O(0,0)$ изохронный (а значит, и сильно изохронный) центр, необходимо и достаточно существование вещественного преобразования*

$$u = x, \quad v = y - x \sum_{l=1}^{(n-1)/2} \frac{B_{2l-1}}{2l+1} x^{2l-1}, \quad (n+1)/4 \in \mathbb{N},$$

переводящего систему (2) в систему

$$\dot{u} = -v - u \sum_{l=1}^{(n-1)/2} \frac{B_{2l-1}}{2l+1} u^{2l-1}, \quad \dot{v} = u - v \sum_{l=1}^{(n-1)/2} \frac{B_{2l-1}}{2l+1} u^{2l-1}, \quad (n+1)/4 \in \mathbb{N}.$$

Пример. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x + x^3 + 2x^7 + x^{11} - (3x + 7x^5)y.$$

Для этой системы выполняются равенства

$$A_3 = \left(\frac{B_1}{3}\right)^2, \quad A_7 = 2\frac{B_1}{3}\frac{B_5}{7}, \quad A_{11} = \left(\frac{B_5}{7}\right)^2,$$

а значит, согласно теореме 2, её особая точка $O(0,0)$ является сильно изохронным центром. Поэтому по теореме 3 диффеоморфизм на $\mathbb{R}^2$

$$u = x, \quad v = y - x^2 - x^6 \quad (x = u, \quad y = v + u^2 + u^6)$$

переводит исходную систему в систему

$$\dot{u} = -v - u(u + u^5), \quad \dot{v} = u - v(u + u^5).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sabatini M.* On the period function of Liénard systems // J. Differ. Equat. 1999. V. 152. P. 467–487.
2. *Algaba A., Freire E., Gamero E.* Isochronicity via normal form. Preprint. Universidad de Sevilla, 1998.
3. *Algaba A., Freire E., Gamero E.* Isochronicity via normal form // Qual. Theory of Dynam. Systems. 2000. V. 1. № 2. P. 133–156.
4. *Christopher C., Devlin J.* On the classification of Liénard systems with amplitude-independent periods // J. Differ. Equat. 2004. V. 200. № 1. P. 1–17.
5. *Руденок А.Е.* Сильная изохронность центра. О периодах предельных циклов системы Льенара // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 5. С. 811–819.
6. *Амелькин В.В.* Сильная изохронность системы Льенара // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 5. С. 579–582.
7. *Руденок А.Е.* Некоторые применения нормальных форм в теории нелинейных дифференциальных уравнений на плоскости: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Минск, 1978.
8. *Волокитин Е.П., Иванов В.В.* Изохронность и коммутируемость полиномиальных векторных полей // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40. № 1. С. 30–48.
9. *Амелькин В.В.* Об одной гипотезе в теории изохронных систем Льенара // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 10. С. 1283–1289.
10. *Зверович Э.И.* Вещественный и комплексный анализ. Кн. 1. Ч. 1. Введение в анализ и дифференциальное исчисление. Минск, 2006.
11. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Функции вещественных переменных. М., 1972.
12. *Зверович Э.И.* Вещественный и комплексный анализ. Кн. 3. Ч. 4. Функциональные последовательности и ряды. Интегралы, зависящие от параметра. Ч. 5. Кратные интегралы. Интегралы по многообразиям. Минск, 2006.
13. *Зверович Э.И.* Вещественный и комплексный анализ. Кн. 4. Ч. 6. Теория аналитических функций комплексного переменного. Минск, 2008.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 17.04.2020 г.
После доработки 17.04.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 2, с. 153–161

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.984

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРА ДИРАКА НА ПРЯМОЙ

© 2021 г. А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова

Изучается асимптотика спектра оператора Дирака на прямой с потенциалом из L_2. Показано, что спектр такого оператора лежит в симметричной относительно вещественной оси области комплексной плоскости, ограниченной графиком некоторой непрерывной вещественнозначной квадратично суммируемой функции. Для доказательства используется L_1-функциональное исчисление для самосопряжённых операторов и подходящее преобразование подобия.

DOI: 10.31857/S0374064121020023

Введение. Классический оператор Дирака связан с важными задачами математической физики и имеет многочисленные приложения. Истоки изучения этих задач можно найти в работах Биркгофа [1, 2], Тамаркина [3] и самого Дирака [4, 5]. Среди современных исследований, связанных с оператором Дирака, отметим, например, [6–12]; в них есть ссылки и на другие работы, в которых он также рассматривается. Отметим, что обычно одномерный оператор Дирака изучается на отрезке $[0,\omega]$ с теми или иными краевыми условиями. У такого оператора спектр дискретный, и его можно исследовать различными методами – например, резольвентным или методом подобных операторов. В настоящей работе изучаются спектральные свойства оператора Дирака на прямой; у такого оператора спектр дискретным не является.

Введём используемые в статье пространства функций и определим вид изучаемого оператора. Через $L_2(\mathbb{R})$ обозначим гильбертово пространство, состоящее из классов эквивалентности, образованных равными между собой почти всюду по мере Лебега комплекснозначными функциями, определёнными на прямой $\mathbb{R}$, измеримыми по Лебегу и суммируемыми на $\mathbb{R}$ с квадратом модуля, скалярное произведение в котором задаётся равенством

$$(x,y)=\int\limits_{\mathbb{R}} x(t)\overline{y(t)}\,dt,\quad x,y\in L_2(\mathbb{R}),$$

а через $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство $L_2(\mathbb{R},\mathbb{C}^2)\simeq L_2(\mathbb{R})\times L_2(\mathbb{R})$ со скалярным произведением

$$(x,y)=\int\limits_{\mathbb{R}}(x_1(t)\overline{y_1(t)}+(x_2(t)\overline{y_2(t)})\,dt,\quad x=(x_1,x_2)\in\mathcal{H},\quad y=(y_1,y_2)\in\mathcal{H}.$$

Через $W_2^1(\mathbb{R},\mathbb{C}^2)$ обозначаем пространство Соболева абсолютно непрерывных вектор-функций из $L_2(\mathbb{R},\mathbb{C}^2)$, производные которых также принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R},\mathbb{C}^2)$, скалярное произведение в котором задаётся равенством

$$(x,y)_W=(x,y)+(x',y'),\quad x,y\in W_2^1(\mathbb{R},\mathbb{C}^2).$$

Рассмотрим оператор Дирака L на прямой:

$$(Ly)(t)=i\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\frac{dy}{dt}-v(t)y(t),\quad t\in\mathbb{R},$$

где

$$v(t)=\begin{pmatrix}0&v_1(t)\\v_2(t)&0\end{pmatrix},\quad v_i\in L_2(\mathbb{R}),\quad i=1,2,\quad D(L)=W_2^1(\mathbb{R},\mathbb{C}^2).$$

Представим оператор Дирака в виде $L=A-V$, где

$$A:D(L)\subset\mathcal{H}\to\mathcal{H},\quad (Ay)(t)=i\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\frac{dy}{dt}$$

и

$$(Vy)(t) = v(t)y(t) = \begin{pmatrix} 0 & v_1(t) \\ v_2(t) & 0 \end{pmatrix} y(t), \quad y \in \mathcal{H}.$$

Отметим, что спектр $\sigma(A)$ оператора A совпадает с $\mathbb{R}$. Поэтому подходы, наиболее часто применяемые для изучения аналогичного оператора на отрезке, в настоящей работе неприменимы.

В дальнейшем оператор A играет роль невозмущённого оператора, а подчинённый ему оператор V – роль оператора возмущения.

Для оператора L доказывается существование непрерывной неотрицательной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ такой, что спектр $\sigma(L)$ оператора L находится между графиками функций f и $-f$; иными словами, выполняется неравенство $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant f(\operatorname{Re}\lambda)$ для любого $\lambda \in \sigma(L)$.

Для решения поставленной задачи сначала приводится результат о локализации спектра абстрактного самосопряжённого оператора, возмущённого оператором из идеала Гильберта–Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Также описывается алгоритм построения искомой функции f в этом случае и приводится пример для возмущённого оператора импульса на оси.

Так как возмущение V оператора Дирака не принадлежит идеалу Гильберта–Шмидта, то затем рассматривается преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - B_0$, где B – подчинённый A оператор с дополнительными, выполненными для оператора V условиями, и $B_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Для доказательства соответствующих результатов используется спектральная теория банаховых модулей [13–17] и предварительное преобразование подобия метода подобных операторов [18–20]. Отметим, что приводимая схема доказательств совпадает с использованной в работе [17], в которой аналогичный результат получен для оператора с инволюцией. Однако, в отличие от [17], в настоящей работе рассмотрен абстрактный класс возмущённых операторов, для которых эта схема работает (см. п. 2), и показано, что оператор Дирака входит в этот класс (см. п. 3).

1. Теорема о локализации спектра для самосопряжённого возмущённого оператора. В этом и следующем пунктах работы $\mathcal{H}$ – абстрактное (комплексное) гильбертово пространство и $A : D(A) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ – самосопряжённый оператор. Возмутим оператор A оператором B из двустороннего идеала операторов Гильберта–Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Свойства этого идеала можно найти, например, в монографии [21].

Для операторов A и B можно доказать существование и указать алгоритм построения такой непрерывной действительной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$, чтобы спектр $\sigma(A+B)$ оператора $A+B$ находился между графиками функций f и $-f$. Мы полагаем, что такой результат давно известен. Наш вариант доказательства можно найти в [17].

Теорема 1 [17, теорема 4.1]. *Пусть* $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *– самосопряжённый оператор и* $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. *Тогда существует такая непрерывная вещественнозначная функция* $f \in L_2(\mathbb{R})$, *что для всех* $\lambda \in \sigma(A+B)$ *имеет место неравенство*

$$|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant f(\operatorname{Re}\lambda).$$

Отметим, что в теореме 1 неважно, имеет ли оператор A дискретный спектр или нет.

Приведём алгоритм построения функции f, вытекающий из доказательства теоремы 1 в [17]. Обозначим через E_n спектральные проекторы оператора A, построенные по интервалам $[-n, n]$, и положим $B_n = B - E_n B E_n$, $n \in \mathbb{N}$. Для построения (графика) функции f найдём точки с координатами $(\pm(1 + 2\|B\|_2), 2\|B\|_2)$, $(\pm(n + 2\|B\|_2), 3\|B_n\|_2)$, $n \in \mathbb{N}$, и соединим их ломаной линией.

Пример. Пусть A – оператор импульса, $(Ax)(t) = tx(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $D(A) = \{x \in L_2(\mathbb{R}) : Ax \in$ $\in L_2(\mathbb{R})\}$ и $Bx = (x, u)v$, где $u, v \in L_2(\mathbb{R})$ – фиксированные функции. Оператор B является интегральным с ядром $K(t,s) = v(t)\overline{u(s)}$, $t, s \in \mathbb{R}$, суммируемым с квадратом на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, и $\|B\|_2 = \|u\|\|v\|$.

Пусть $\Delta_n = [-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$. Введём в рассмотрение характеристическую функцию

$$\chi_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_n, \\ 0, & t \notin \Delta_n. \end{cases}$$

Тогда $E_n x = \chi_n x,\ \ x \in L_2(\mathbb{R})$. Очевидно, что

$$B_n x = (B - E_n B E_n)x = (x, u)v - (x, u_n)v_n = (x, u)(v - v_n) + (x, u - u_n)v_n =$$

$$= (x, u_n)(v - v_n) + (x, u - u_n)v,$$

где $u_n = \chi_n u,\ \ v_n = \chi_n v,\ \ n \in \mathbb{N}$. Обозначая $\tilde{u}_n = u - u_n$ и $\tilde{v}_n = v - v_n$, имеем

$$\|B_n\| \leqslant \min\{\|\tilde{u}_n\|\|v\| + \|u_n\|\|\tilde{v}_n\|, \|\tilde{u}_n\|\|v_n\| + \|u\|\|\tilde{v}_n\|\} := b_n, \quad n \in \mathbb{N};$$

при этом последовательность (b_n) принадлежит пространству ℓ_2.

Для построения функции f достаточно соединить точки с координатами

$$(\pm(1 + 2\|u\|\|v\|), 2\|u\|\|v\|), \quad (\pm(n + 2\|u\|\|v\|), 3b_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

ломаной линией.

2. Теорема о локализации спектра для возмущений, подчинённых оператору A. Результат предыдущего пункта можно применить не только к самосопряжённым операторам, возмущённым операторами из идеала Гильберта–Шмидта. Например, это возможно, если существует преобразование подобия рассматриваемого оператора в оператор с возмущением из идеала Гильберта–Шмидта. В этом пункте будут получены условия, при которых такое преобразование имеет место.

Пусть $\operatorname{End}\mathcal{H}$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H}$. Через $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ обозначим векторное нормированное пространство линейных операторов, подчинённых оператору A. Оператор B принадлежит пространству $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, если $D(A) \subseteq D(B)$ и при некоторой постоянной C справедливо неравенство

$$\|Bx\| \leqslant C(\|x\| + \|Ax\|), \quad x \in D(A).$$

Норма в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ задаётся равенством

$$\|B\|_A = \{\inf C : \|Bx\| \leqslant C(\|x\| + \|Ax\|)\}.$$

Так как резольвентное множество $\rho(A)$ рассматриваемого оператора A не пусто, то в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ можно ввести эквивалентные нормы, положив

$$\|B\|_\lambda = \|B(A - \lambda I)^{-1}\|, \quad \lambda \in \rho(A).$$

Определение. Два линейных оператора $A_1 : D(A_1) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ и $A_2 : D(A_2) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ называются *подобными*, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ такой, что $UD(A_2) = D(A_1)$ и $A_1 U x = U A_2 x,\ \ x \in D(A_2)$. Оператор U называется *оператором преобразования* оператора A_1 в оператор A_2 или *сплетающим* оператором.

Далее через $L_1(\mathbb{R})$ обозначаем банахову алгебру, состоящую из классов эквивалентности, образованных равными между собой почти всюду по мере Лебега комплекснозначными функциями, определёнными на $\mathbb{R}$, измеримыми по Лебегу и суммируемыми на $\mathbb{R}$, со свёрткой в качестве умножения

$$(f * g)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t - s)g(s)\,ds, \quad f, g \in L_1(\mathbb{R}),$$

и нормой $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt$. Через $\widehat{L}_1(\mathbb{R})$ будем обозначать банахову алгебру преобразований Фурье $\widehat{f}$ функций $f \in L_1(\mathbb{R})$ с поточечным умножением функций в качестве операции и нормой

$$\|\widehat{f}\|_\infty = \max_{\lambda \in \mathbb{R}} |\widehat{f}(\lambda)|.$$

Преобразование Фурье $\widehat{f}$ функции f определяется формулой

$$\widehat{f}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt, \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

в частности, $\widehat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Преобразование Фурье стандартным образом определяется и для функций из $L_2(\mathbb{R})$, при этом имеет место равенство $\|\widehat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$, где $\|\cdot\|_2$ – норма в $L_2(\mathbb{R})$.

Для построения преобразования подобия будут необходимы следующие функции из пространства $L_1(\mathbb{R})\bigcap L_2(\mathbb{R})$. Для $a > 0$ рассмотрим трапецевидную функцию τ_a, заданную условиями

$$\tau_a(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & |\varepsilon| \leqslant a, \\ a^{-1}(2a - |\varepsilon|), & a < |\varepsilon| \leqslant 2a, \\ 0, & |\varepsilon| > 2a. \end{cases}$$

Непосредственный подсчёт показывает, что $\tau_a \in L_2(\mathbb{R})$ и $\|\tau_a\|_2 \leqslant 2\sqrt{2a/3}$. При этом $\tau_a = \widehat{\varphi}_a$, где

$$\varphi_a(t) = \frac{2\sin(3at/2)\sin(at/2)}{\pi a t^2}.$$

О других применениях функции τ_a см., например, [22].

Также рассмотрим функцию ω_a, заданную условиями

$$\omega_a(\varepsilon) = (1 - \tau_a(\varepsilon))/\varepsilon = \begin{cases} 0, & |\varepsilon| \leqslant a, \\ -a^{-1} - \varepsilon^{-1}, & -2a \leqslant \varepsilon < -a, \\ a^{-1} - \varepsilon^{-1}, & a < \varepsilon \leqslant 2a, \\ \varepsilon^{-1}, & |\varepsilon| > 2a. \end{cases}$$

Несложно видеть, что

$$\|\omega_a\|_2 = \sqrt{(4 - 4\ln 2)/a} \leqslant (1,11)/\sqrt{a}.$$

Пусть $\widehat{\psi}_a = \omega_a$. Нам далее также нужна будет оценка $\|\psi_a\|_\infty \leqslant 1 + 1/\pi$, полученная в [17].

Так как оператор A является самосопряжённым, то оператор iA является генератором некоторой сильно непрерывной группы операторов $T(t) = e^{itA}$, $t \in \mathbb{R}$, $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$, согласно теореме Стоуна [23, с. 89]. Наряду с представлением T, введём в рассмотрение также представление $\widetilde{T} : \mathbb{R} \to \operatorname{End}(\mathfrak{L}_A(\mathcal{H}))$, заданное формулой

$$\widetilde{T}(t)X = T(t)XT(-t), \quad X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Кроме того, для каждой функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ и оператора $X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ определим оператор $\widetilde{T}(f)X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ равенством

$$(\widetilde{T}(f)X)x = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)(\widetilde{T}(-t)X)x\,dt, \quad x \in D(A). \tag{1}$$

В работе [17, § 4] показано, что имеет место

Лемма 1. *Для операторов* $\widetilde{T}(\varphi_a)X$ *и* $\widetilde{T}(\psi_a)X$, $X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, $a > 0$, *верно равенство*

$$A(\widetilde{T}(\psi_a)X)x - (\widetilde{T}(\psi_a)X)Ax = Xx - (\widetilde{T}(\varphi_a)X)x, \quad x \in D(A). \tag{2}$$

Замечание 1. В лемме 1 вместо функций φ_a и ψ_a можно использовать любые другие функции $\varphi, \psi \in L_1(\mathbb{R}) \bigcap L_2(\mathbb{R})$ такие, что $\widehat{\varphi} \equiv 1$ в окрестности нуля и

$$\widehat{\psi}(\varepsilon) = (1 - \widehat{\varphi}(\varepsilon))/\varepsilon, \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *– самосопряжённый оператор и* $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$. *Пусть также выполнены условия:*

1) $\widetilde{T}(\psi_a)B \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ *и существует такое* $a > 0$, *что* $\|\widetilde{T}(\psi_a)B\| < 1$;

2) $(\widetilde{T}(\psi_a)B)D(A) \subset D(A)$;

3) $B\widetilde{T}(\psi_a)B + \widetilde{T}(\varphi_a)B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$;

4) для любого $\varepsilon > 0$ *существует* $\lambda_\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = \rho(A)$ *такое, что* $\|B(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$.

Тогда оператор $A - B$ *подобен оператору* $A - B_0$, *где*

$$B_0 = \widetilde{T}(\varphi_a)B + (I + \widetilde{T}(\psi_a)B)^{-1}(B\widetilde{T}(\psi_a)B - (\widetilde{T}(\varphi_a)B)\widetilde{T}(\varphi_a)B) =$$

$$= (I + \widetilde{T}(\psi_a)B)^{-1}(B\widetilde{T}(\psi_a)B + \widetilde{T}(\varphi_a)B). \tag{3}$$

При этом справедливо включение $B_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ *и преобразование подобия оператора* $A - B$ *в* $A - B_0$ *осуществляет обратимый оператор* $I + \widetilde{T}(\psi_a)B$.

Доказательство. Из условия 1) вытекает обратимость оператора $I + \widetilde{T}(\psi_a)B$, т.е. ограниченность оператора $(I + \widetilde{T}(\psi_a)B)^{-1}$.

Отметим, что

$$D(A - B) = D(A - B_0) = D(A).$$

Для доказательства подобия нам надо сначала установить равенство

$$(I + \widetilde{T}(\psi_a)B)^{-1}D(A) = D(A).$$

Действительно, для $\lambda \in \rho(A)$ имеем

$$\widetilde{T}(\psi_a)B(A - \lambda I)^{-1} = (A - \lambda I)^{-1}((A - \lambda I)\widetilde{T}(\psi_a)B(A - \lambda I)^{-1}) =$$

$$= (A - \lambda I)^{-1}(B - \widetilde{T}(\varphi_a)B + \widetilde{T}(\psi_a)BA - \lambda\widetilde{T}(\psi_a)B)(A - \lambda I)^{-1} =$$

$$= (A - \lambda I)^{-1}((B - \widetilde{T}(\varphi_a)B)(A - \lambda I)^{-1} + \widetilde{T}(\psi_a)B)(\widetilde{T}(\psi_a)B)^n(A - \lambda I)^{-1} =$$

$$= (A - \lambda I)^{-1}((B - \widetilde{T}(\varphi_a)B)(A - \lambda I)^{-1} + \widetilde{T}(\psi_a)B)^n.$$

В силу условия 4) можно выбрать такое число $\lambda \in \rho(A)$, что

$$\|(B - \widetilde{T}(\varphi_a)B)(A - \lambda I)^{-1} + \widetilde{T}(\psi_a)B\| < 1.$$

Поскольку

$$(I + \widetilde{T}(\psi_a)B)^{-1}(A - \lambda I)^{-1} = (A - \lambda I)^{-1}(I + (B - \widetilde{T}(\varphi_a)B)(A - \lambda I)^{-1} + \widetilde{T}(\psi_a)B)^{-1},$$

то

$$(I + \widetilde{T}(\psi_a)B)^{-1}D(A) \subseteq D(A).$$

Обратное включение следует из условия 2). Таким образом, операторы определены корректно, а их области определения согласованы.

Теперь нам надо установить равенство

$$(A - B)(I + \widetilde{T}(\psi_a)B) = (I + \widetilde{T}(\psi_a)B)(A - B_0). \tag{4}$$

Рассмотрим каждую из частей равенства (4) отдельно. При этом учтём равенства (2), (3) и согласованность областей определения. Тогда

$$(A-B)(I+\widetilde{T}(\psi_a)B) = A - B + A\widetilde{T}(\psi_a)B - B\widetilde{T}(\psi_a)B =$$

$$= A - B\widetilde{T}(\psi_a)B + (\widetilde{T}(\psi_a)B)A - \widetilde{T}(\varphi_a)B;$$

$$(I+\widetilde{T}(\psi_a)B)(A-\widetilde{T}(\varphi_a)B - (I+\widetilde{T}(\psi_a)B)^{-1}(B\widetilde{T}(\psi_a)B - (\widetilde{T}(\psi_a)B)(\widetilde{T}(\varphi_a)B))) =$$

$$= A + (\widetilde{T}(\psi_a)B)A - \widetilde{T}(\varphi_a)B - (\widetilde{T}(\psi_a)B)(\widetilde{T}(\varphi_a)B) - B\widetilde{T}(\psi_a)B +$$

$$+ (\widetilde{T}(\psi_a)B)(\widetilde{T}(\varphi_a)B) = A + (\widetilde{T}(\psi_a)B)A - \widetilde{T}(\varphi_a)B - B\widetilde{T}(\psi_a)B.$$

Таким образом, равенство (4) имеет место. Теорема доказана.

Итак, в теореме 2 записаны условия, при выполнении которых оператор $A-B$ с $B\in\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ подобен оператору $A-B_0$ с $B_0\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Важно отметить, что помимо использованного выше преобразования подобия подойдёт и любое другое преобразование подобия, переводящее оператор $A-B$, $B\in\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, в оператор $A-B_0$, $B_0\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Мы использовали приведённое выше преобразование, так как оно представляет собой хорошо известное и опробованное предварительное преобразование подобия метода подобных операторов (см. [7; 18–20; 24]).

Из теорем 1 и 2 очевидно следует

Теорема 3. *Пусть $A: D(A)\subset\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ – самосопряжённый оператор, $B\in\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ и для оператора B выполнены условия 1)–4) теоремы 2. Тогда существует такая непрерывная функция $f\in L_2(\mathbb{R})$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для которой при всех $\lambda\in\sigma(A-B)$ имеет место неравенство*

$$|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant f(\operatorname{Re}\lambda).$$

3. Спектральный анализ оператора Дирака. В этом пункте будет показано, что теорема 3 применима для операторов Дирака, рассматриваемых в этой работе. Для этого достаточно проверить выполнение условий теоремы 2, которые позволяют осуществить преобразование подобия оператора $A-V$ в оператор $A-V_0$, где $V_0\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Оператор iA является генератором группы изометрий $T:\mathbb{R}\to\operatorname{End}\mathcal{H}$ вида

$$T(t)x = \begin{pmatrix} S(-t)x_1 \\ S(t)x_2 \end{pmatrix},$$

где $S(t)$ – оператор сдвига аргумента функций из $L_2(\mathbb{R})$ на число $t\in\mathbb{R}$, т.е. $S(t)x = x(\cdot+t)$, $x\in L_2(\mathbb{R})$, $t\in\mathbb{R}$.

Лемма 2. *Для всякой функции $f\in L_1(\mathbb{R})\bigcap L_2(\mathbb{R})$ имеет место равенство*

$$\|\widetilde{T}(f)V\|_2 = \|f\|_2\|V\|_2.$$

Доказательство. Для $f\in L_1(\mathbb{R})\bigcap L_2(\mathbb{R})$ верны равенства

$$(\widetilde{T}(f)V)x = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)VT(t)x(s)\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} f(t)v_1(s+t)x_2(s+2t) \\ f(t)v_2(s-t)x_1(s-2t) \end{pmatrix} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 0 & f((\tau-s)/2)v_1((\tau+s)/2) \\ f((s-\tau)/2)v_2((\tau+s)/2)\,d\tau & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau.$$

Здесь использовались замены переменных $s+2t=\tau$ и $s-2t=\tau$. Таким образом, $\widetilde{T}(f)V$ является интегральным оператором с ядром

$$K(\tau,s) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & f((\tau-s)/2)v_1((\tau+s)/2) \\ f((s-\tau)/2)v_2((\tau+s)/2) & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau,s\in\mathbb{R}.$$

Ядро K суммируемо с квадратом, так как после обратной замены переменных имеем

$$\|K\|_2^2 = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} \|K(t,s)\|_2^2\,dt\,ds = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} |f(t)|^2(|v_1(s+t)|^2 + |v_2(s-t)|^2)\,dt\,ds =$$

$$= \|f\|_2^2(\|v_1\|_2^2 + \|v_2\|_2^2) = \|f\|_2^2\|V\|_2^2.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Оператор V обладает следующими свойствами:*

1) $\widetilde{T}(\varphi_a)V \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $\|\widetilde{T}(\varphi_a)V\|_2^2 \leqslant 4a(3\pi)^{-1}(\|v_1\|_2^2 + \|v_2\|_2^2)$;

2) $\widetilde{T}(\psi_a)V \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $\|\widetilde{T}(\psi_a)V\|_2^2 \leqslant 2(1-\ln 2)(a\pi)^{-1}(\|v_1\|_2^2 + \|v_2\|_2^2)$;

3) $\widetilde{T}(\psi_a)V(W_2^1(\mathbb{R})) \subset W_2^1(\mathbb{R})$;

4) $P(\widetilde{T}(\psi_a))V \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ *и* $\|V(\widetilde{T}(\psi_a))V\|_2^2 \leqslant 2(\pi+1)^2\pi^{-2}\|v_1\|_2^2\|v_2\|_2^2$;

5) для всякого $\varepsilon > 0$ существует число $\lambda_\varepsilon \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ такое, что $\|P(\lambda_\varepsilon I - A)^{-1}\| < \varepsilon$.

Доказательство. Утверждения 1) и 2) вытекают из леммы 2 и оценок норм функций ψ_a и φ_a соответственно.

Пусть $R = R(z,A) = (zI - A)^{-1}$ для некоторого $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Из [17, формула (4.5)] следует равенство

$$Rx = \int\limits_{\mathbb{R}} f_z(t)T(-t)x\,dt, \quad x \in \mathcal{H}, \tag{5}$$

где $\widehat{f}_z(\lambda) = (\lambda - z)^{-1}$. Используя это равенство и определение (1), для всякой функции $h \in L_1$ получаем

$$(\widetilde{T}(h)V)Rx = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} h(t)f_z(s)T(-t)VT(t-s)x\,ds\,dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f_z(s)h(t+s)T(-t-s)VT(t)x\,dt\,ds = R(\widetilde{T}(h_t)V)x,$$

где $h_t(s) = h(t+s)$. Таким образом, утверждение 3) справедливо.

Непосредственным подсчётом нетрудно убедиться, что оператор $V\widetilde{T}(\psi_a)V$ имеет вид

$$((V\widetilde{T}(\psi_a)V)x)(s) = \int\limits_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} v_1(s)\psi_a(\tau)v_2(s-\tau) & 0 \\ 0 & v_2(s)\psi_a(\tau)v_1(s+\tau) \end{pmatrix} x(\tau)\,d\tau.$$

Поэтому $V\widetilde{T}(\psi_a)V \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и выполняется неравенство

$$\|V\widetilde{T}(\psi_a)V\|_2^2 = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} |v_1(s)\psi_a(\tau)v_2(s-\tau)|^2 + |v_2(s)\psi_a(\tau)v_1(s-\tau)|^2\,d\tau\,ds \leqslant$$

$$\leqslant 2\|\psi_a\|_\infty^2\|v_1\|_2^2\|v_2\|_2^2 \leqslant 2\Big(\frac{\pi+1}{\pi}\Big)^2\|v_1\|_2^2\|v_2\|_2^2.$$

Переходим к доказательству утверждения 5). Из равенства (5) (см. также [23, гл. II, формула (1.14)]) следует, что

$$R = R(z,A) = i\int\limits_0^\infty e^{izt}T(t)x\,dt, \quad x \in \mathcal{H}, \quad z \in \rho(A).$$

Тогда

$$VRx = i\int\limits_0^\infty e^{izt}\begin{pmatrix} v_1(s)x(s+t) \\ v_2(s)x(s-t)\end{pmatrix}dt.$$

Интегральный оператор VR принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, и его ядро K_{VR} допускает оценку

$$\|K_{VR}\|_2^2 \leqslant \frac{1}{2|z|}(\|v_1\|_2^2 + \|v_2\|_2^2), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Таким образом, справедливость утверждения 5) обеспечивается за счёт подходящего выбора числа z. Лемма доказана.

Из леммы 3 немедленно вытекает

Лемма 4. *Оператор $A - V$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 для некоторого* $a > 0$.

И, наконец, для оператора $L = A - V$ имеет место

Теорема 4. *Существует такая непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in L_2(\mathbb{R})$, что для всех $\lambda \in \sigma(L)$ имеет место неравенство $|\mathrm{Im}\,\lambda| \leqslant f(\mathrm{Re}\,\lambda)$.*

Замечание 2. Из теоремы 2 следует, что существует такое $a > 0$, что оператор L подобен оператору $A - V_0$, где оператор $V_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ определяется формулой, аналогичной (3). К оператору $A - V_0$ можно применить метод подобных операторов и получить подобие операторов $A - V_0$ и $A - \widetilde{T}(\varphi_a)X$, где $\widetilde{T}(\varphi_a)X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, а X – решение нелинейного операторного уравнения метода подобных операторов. Оператором преобразования оператора $A - V_0$ в оператор $A - \widetilde{T}(\varphi_a)X$ является оператор

$$U = I + \widetilde{T}(\psi_a)X.$$

Преимущество оператора $A - \widetilde{T}(\varphi_a)X$ перед оператором $A - V_0$ заключается в том, что отображение $t \mapsto \widetilde{T}(t)(\widetilde{T}(\varphi_a)X)$ является сужением целой функции экспоненциального типа.

Замечание 3. Аналогичный результат имеет место [17] и для оператора с инволюцией $-id/dt - V$, где $(Vx)(t) = v(t)x(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, $v \in L_2(\mathbb{R})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-01-00732).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Birkhoff G.D.* Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1908. V. 9. № 4. P. 373–395.
2. *Birkhoff G.D.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. 1908. V. 9. № 2. P. 219–231.
3. *Tamarkin J.* Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions // Math. Zeitschr. 1928. Bd 27. H. 1. S. 1–54.
4. *Dirac P.A.M.* The quantum theory of the electron. I // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A. 1928. V. 117. P. 610–624.
5. *Dirac P.A.M.* The quantum theory of the electron. II // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A. 1928. V. 118. P. 351–361.
6. *Djakov P., Mityagin B.S.* Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions // Indiana Univ. Math. J. 2012. V. 61. № 1. P. 359–398.
7. *Баскаков А.Г., Дербушев А.В., Щербаков А.О.* Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряжённого оператора Дирака с негладким потенциалом // Изв. РАН. Сер. мат. 2011. Т. 75. № 3. С. 3–28.
8. *Джаков П., Митягин Б.С.* Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61. № 4 (370). С. 77–182.
9. *Savchuk A.M., Shkalikov A.A.* The Dirac operator with complex-valued summable potential // Math. Notes. 2014. V. 96. № 5. P. 777–810.
10. *Савчук А.М.* О базисности системы собственных и присоединённых функций одномерного оператора Дирака // Изв. РАН. Сер. мат. 2018. Т. 82. № 2. С. 113–139.
11. *Бурлуцкая М.Ш.* Классическое и обобщённое решения смешанной задачи для системы уравнений первого порядка с непрерывным потенциалом // Журн. вычислит. математики и мат. физ. 2019. Т. 59. № 3. С. 380–390.
12. *Baskakov A.G., Krishtal I.A., Uskova N.B.* General Dirac operators as generators of operator groups // arXiv: 1806.10831.

13. *Loomis L.H.* An Introduction of Abstract Harmonic Analysis. Toronto; New York; London, 1963.
14. *Reiter H., Stegeman J.D.* Classical harmonic analysis and locally compact groups // London Math. Soc. Monographs. V. 22. Oxford, 2000.
15. *Баскаков А.Г., Криштал И.А.* Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Изв. РАН. Сер. мат. 2005. Т. 69. № 3. С. 3–54.
16. *Baskakov A.G., Krishtal I.A.* Memory estimation of inverse operators // J. Funct. Anal. 2014. V. 267. P. 2551–2605.
17. *Baskakov A.G., Krishtal I.A., Uskova N.B.* Closed operator functional calculus in Banach modules and applications // J. Math. Anal. Appl. 2020. V. 492. № 2. P. 124473.
18. *Baskakov A.G., Krishtal I.A., Uskova N.B.* Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 477. P. 930–960.
19. *Baskakov A.G., Krishtal I.A., Uskova N.B.* Linear differential operator with an involution as a generator of an operator group // Oper. Matr. 2018. V. 12. № 3. P. 723–756.
20. *Баскаков А.Г., Поляков Д.М.* Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом // Мат. сб. 2017. Т. 208. № 1. С. 3–47.
21. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. М., 1965.
22. *Левитан Б.М.* Почти-периодические функции. М., 1953.
23. *Engel K.-J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. New York, 2000.
24. *Баскаков А.Г., Криштал И.А., Ускова Н.Б.* Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц // Прикл. математика и физика. 2020. Т. 52. № 2. С. 71–85.

Воронежский государственный университет,
Северо-Осетинский государственный университет
им. К.Л. Хетагурова, г. Владикавказ,
Университет Северного Иллинойса,
г. Де-Калб, Иллинойс, США,
Воронежский государственный технический университет

Поступила в редакцию 18.08.2020 г.
После доработки 18.08.2020 г.
Принята к публикации 11.12.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 2, с. 162–168

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51+519.216.73

О КОНЕЧНОСТИ МОМЕНТОВ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА, УПРАВЛЯЕМЫХ СТАНДАРТНЫМИ И ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ

© 2021 г. М. М. Васьковский, А. А. Карпович

Доказано, что сильные решения стохастического дифференциального уравнения смешанного типа, управляемого стандартным и дробным с индексом Хёрста, большим $1/2$, броуновскими движениями, имеют конечные моменты порядка $p \geqslant 1$ в предположении, что коэффициенты уравнения непрерывны и ограничены вместе со всеми частными производными до второго порядка включительно, а начальное условие имеет конечный момент порядка p.

DOI: 10.31857/S0374064121020035

На заданном полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$ рассмотрим многомерное стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = b(X_t)\,dt + h(X_t)\,dW_t + \sigma(X_t)\,dB_t^H, \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

где $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times k}$ – детерминированные функции, а W_t и B_t^H – независимые $\mathcal{F}_t$-согласованные броуновские движения: m-мерное стандартное и k-мерное дробное с показателем Хёрста $H \in (1/2, 1)$ соответственно.

Стохастические дифференциальные уравнения со стандартными и дробными броуновскими движениями вызывают большой интерес исследователей как с теоретической точки зрения, так и с практической стороны. Уравнение (1) объединяет два принципиально различных класса стохастических уравнений: стохастические дифференциальные уравнения Ито и стохастические дифференциальные уравнения с дробными броуновскими движениями, выходящие за рамки теории стохастических уравнений по семимартингалам. Уравнение (1) представляет универсальный инструмент для построения гибких математических моделей реальных физических явлений, экономических и финансовых процессов благодаря возможности учитывать эффект долговременной памяти [1, 2].

В работах [3–12] доказаны теоремы о существовании, единственности, непрерывной зависимости решений от начальных данных, об устойчивости и притяжении решений, построены методы интегрирования уравнений (1). Важное значение при исследовании общих и асимптотических свойств решений уравнения (1) имеют оценки моментов решений уравнений (1). Тем не менее, вопрос о конечности моментов решений таких уравнений в общем случае остаётся открытым.

В статье [13] доказано, что ограниченность правых частей уравнения (1) с $h = 0$ влечёт за собой конечность моментов решений. Наличие слагаемого $h(X_t)\,dW_t$ в уравнении (1) не позволяет применять потраекторные методы статьи [13] для оценки моментов решений уравнения (1), поскольку сумма показателей Гёльдера траекторий процессов X_t и W_t меньше единицы. Эффективные потраекторные методы исследования свойств решений стохастических дифференциальных уравнений с нерегулярными возмущениями разработаны в работах Т. Лайонса [14], М. Губинелли [15], М. Хайрера [16] и других математиков. Совокупность этих методов получила название теории грубых траекторий. Следуя работам [17–19], мы рассматриваем уравнение (1) в контексте теории грубых траекторий: для уравнения (1) строим соответствующее уравнение в грубых траекториях и доказываем потраекторные оценки для решений построенного уравнения, при этом ключевую роль при переходе от уравнения в грубых траекториях к исходному уравнению (1) играет свойство согласованности решений с фильтрацией $\mathcal{F}_t$, а также конечность моментов от гёльдеровских норм процессов W_t и B_t^H.

Основным результатом настоящей работы является теорема 2, гарантирующая конечность моментов всех порядков от гёльдеровских норм решений уравнений (1) в предположении, что коэффициенты уравнения достаточно гладкие и ограниченные.

Определение 1. *Сильным решением* уравнения (1) называется $\mathcal{F}_t$-согласованный процесс X_t такой, что для почти всех $\omega \in \Omega$ для любых $t \in [0,T]$ выполняется равенство

$$X_t = X_0 + \int\limits_0^t b(X_s)ds + \int\limits_0^t h(X_s)\,dW_s + \int\limits_0^t \sigma(X_s)\,dB_s^H,$$

где интеграл по W_s – интеграл Ито, а интеграл по B_s^H – потраекторный интеграл Римана–Стилтьеса [20]. Сильное решение X_t уравнения (1) с начальным условием $X_0 = \xi$, где ξ – $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина, называется *единственным*, если для любого сильного решения Y_t уравнения (1) с начальным условием $Y_0 = \xi$ выполняется условие $P(X_t = Y_t$ для всех $t \in [0,T]) = 1$.

Пусть $d = 1{+}m{+}k$. Определим d-мерный случайный процесс $B_t = (t, W_t, B_t^H)$. Обозначим через H_i показатели Хёрста его компонент $B_t^{(i)}$, т.е. $H_1 = 1$, $H_2 = \ldots = H_{m+1} = 1/2$, $H_{m+2} = \ldots = H_d = H$.

Зафиксируем произвольное $\alpha \in (1/3, 1/2)$. Полагая $f = \operatorname{col}(b,h,\sigma)$, рассмотрим уравнение

$$dX_t = f(X_t)\,dB_t, \quad t \in [0,T]. \tag{2}$$

Для прозвольного случайного процесса Y_t, $t \in [0,T]$, через $Y_{s,t}$ будем обозначать приращение процесса Y, т.е. $Y_{s,t} = Y_t - Y_s$.

Определим кусочно-линейные аппроксимации процесса B_t соотношением

$$B_{m,t} = B_{t_{l-1}^m} + (t - t_{l-1}^m)B_{t_{l-1}^m, t_l^m}; \quad t \in [t_{l-1}^m, t_l^m); \quad l = \overline{1, 2^m}; \quad t_l^m = Tl/2^m.$$

Построим процесс второго порядка $\mathbb{B} : [0,T]^2 \times \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ следующим образом: если $i \neq j$ или $H_i \neq 1/2$, то полагаем

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)} = \lim_{m\to\infty} \int\limits_s^t \int\limits_s^\tau dB_{m,r}^{(i)}\,dB_{m,\tau}^{(j)}; \tag{3}$$

если $H_i = 1/2$, то

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(i,i)} = \int\limits_s^t \int\limits_s^\tau dB_r^{(i)}\,dB_\tau^{(i)}, \tag{4}$$

где интегралы в правой части соотношения (3) понимаются как потраекторные интегралы Римана–Стилтьеса, а интегралы в правой части равенства (4) – как интегралы Ито. Существование предела п.н. в соотношении (3) вытекает из результатов работы [21]. Нетрудно видеть, что определённый выше процесс $\mathbb{B}$ удовлетворяет тождеству Чена

$$\mathbb{B}_{s,t} - \mathbb{B}_{s,u} - \mathbb{B}_{u,t} = B_{s,u} \bigotimes B_{u,t}$$

для любой тройки $(s,u,t) \in [0,T]^3$. Таким образом, для любых $s,t \in [0,T]$ имеет место равенство

$$(1, B_t, \mathbb{B}_{0,t}) = (1, B_s, \mathbb{B}_{0,s}) \boxplus (1, B_{s,t}, \mathbb{B}_{s,t}), \tag{5}$$

где через $\boxplus$ обозначена операция группы Ли $T_1^{(2)}(\mathbb{R}^d) = \{(1,b,c) : b \in \mathbb{R}^d, c \in \mathbb{R}^{d\times d}\}$, определяемая для элементов (a,b,c), $(a',b',c') \in T_1^{(2)}(\mathbb{R}^d)$ правилом:

$$(a,b,c) \boxplus (a',b',c') = (aa', ab' + a'b, ac' + a'c + b \bigotimes b').$$

Траектории процесса $\mathbf{B}_t = (B_t, \mathbb{B}_{0,t})$ п.н. принадлежат множеству $\mathscr{C}^\alpha([0,T],\mathbb{R}^d)$ α-непрерывных по Гёльдеру грубых траекторий [16, гл. 2].

Пусть V – некоторое евклидово пространство. Будем говорить, что процесс Y_t, траектории которого п.н. принадлежат классу $C^\alpha([0,T],\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,V))$ α-непрерывных по Гёльдеру отображений, *управляется процессом* B_t, если существует процесс Y_t' (производная Губинелли от Y_t) такой, что его траектории п.н. принадлежат классу $C^\alpha([0,T],\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,V)))$, а остаточный член $R^Y_{s,t} = Y_{s,t} - Y_s' B_{s,t}$ удовлетворяет п.н. условию

$$|R^Y|_{2\alpha} := \sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\ s\neq t}} \frac{|R^Y_{s,t}|}{|t-s|^{2\alpha}} < \infty.$$

Для процесса Y_t, управляемого процессом B_t, определим полунорму $\mathcal{N}(Y)$ его траекторий равенством

$$\mathcal{N}(Y) = \sup_{t\in[0,T]} |Y_t'| + \sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\ s\neq t}} \frac{|Y_{s,t}| + |Y'_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} + |R^Y|_{2\alpha},$$

а гёльдеровскую норму $\|Y\|_\alpha$ для них зададим соотношением

$$\|Y\|_\alpha = \sup_{t\in[0,T]} |Y_t| + \sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\ s\neq t}} \frac{|Y_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}.$$

Пусть процесс Y_t управляется процессом B_t. Потраекторным интегралом Губинелли от Y по грубой траектории $\mathbf{B}$ называется следующий предел интегральных сумм (в предположении, что этот предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения отрезка $[0,T]$ точками t_i):

$$\int_0^T Y_r\, d\mathbf{B}_r := \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i,t_{i+1}\in\mathcal{P}} (Y_{t_i} B_{t_i,t_{i+1}} + Y'_{t_i}\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}}),$$

где $|\mathcal{P}| = \max_i (t_{i+1} - t_i)$ – диаметр разбиения $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots t_l = T\}$, а произведение $Y'_{t_i}\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}}$ определено корректно в силу изоморфизма $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,V)) \cong \mathcal{L}(\mathbb{R}^{d\times d},V)$. Кроме того, вследствие соотношения (5) элемент $(B_{t_i,t_{i+1}}, \mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}})$ можно интерпретировать как приращение процесса $\mathbf{B}_t$.

Наряду с уравнением (2) рассмотрим соответствующее уравнение в грубых траекториях

$$dX_t = f(X_t)\, d\mathbf{B}_t, \quad t\in[0,T]. \tag{6}$$

Определение 2. *Решением* уравнения (6) будем называть случайный процесс X_t, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$, такой, что п.н. выполняются условия: 1) $X \in C^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)$; 2) процессы X_t и $f(X_t)$ управляются процессом B_t; 3) для любого $t\in[0,T]$ имеет место равенство

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)\, d\mathbf{B}_s,$$

где интеграл в правой части – потраекторный интеграл Губинелли, при этом $X_t' = f(X_t)$, $(f(X_t))' = Df(X_t)f(X_t)$. Пусть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ – $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина. Решение X_t уравнения (6) с начальным условием $X_0 = \xi$ называется *единственным,* если для любого решения Y_t уравнения (6) с начальным условием $Y_0 = \xi$ выполняется равенство $P(X_t = Y_t$ для всех $t\in[0,T]) = 1$. Решение X_t уравнения (6) будем называть *сильным,* если процесс X_t является $\mathcal{F}_t$-согласованным.

Обозначим через $C_b^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times d})$ класс функций $h:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$, непрерывных и ограниченных вместе со своими частными производными до порядка k включительно.

Теорема 1. *Пусть $f \in C_b^4(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times d})$, $p \geqslant 1$. Тогда для любой $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины ξ существует единственное сильное решение X_t уравнения (6) с начальным условием $X_0 = \xi$. Кроме того, если $\mathbb{E}|\xi|^p < \infty$, то $\mathbb{E}(\|X\|_\alpha^p) < \infty$.*

Доказательство. Из теоремы 8.4 [16] вытекает, что для почти всех $\omega \in \Omega$ существует единственное отображение $t \mapsto X_t(\omega)$ такое, что п.н. выполняются следующие условия: 1) отображение $t \mapsto X_t(\omega)$ принадлежит классу $C^\alpha([0,T], \mathbb{R}^n)$; 2) отображения $t \mapsto X_t(\omega)$ и $t \mapsto f(X_t(\omega))$ управляются функцией $t \mapsto B_t(\omega)$, и имеют место равенства $X_t'(\omega) = f(X_t(\omega))$, $(f(X_t(\omega)))' = Df(X_t(\omega))f(X_t(\omega))$; 3) $X_t(\omega) = \xi(\omega) + \int_0^t f(X_s(\omega))\, d\mathbf{B}_s(\omega)$.

Определим процесс второго порядка $\widetilde{\mathbb{B}}_{s,t}$ следующим образом: $\widetilde{\mathbb{B}}_{s,t}^{(i,j)} = \mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)}$ при $i \neq j$ или $H_i \neq 1/2$; $\widetilde{\mathbb{B}}_{s,t}^{(i,i)} = \mathbb{B}_{s,t}^{(i,i)} + (t-s)/2$ при $H_i = 1/2$. Согласно теореме 10.4 [16] траектории процесса $\widetilde{\mathbf{B}}_t = (B_t, \widetilde{\mathbb{B}}_{0,t})$ п.н. принадлежат множеству $\mathscr{C}_g^\alpha([0,T], \mathbb{R}^d)$ α-непрерывных по Гёльдеру геометрических грубых траекторий [16, гл. 2].

Используя аналог формулы корректирующего члена Ито–Стратоновича [16, с. 59], для п.в. ω и всех $t \in [0,T]$ получаем следующее равенство:

$$\int\limits_0^t f(X_s(\omega))\, d\mathbf{B}_s(\omega) = \int\limits_0^t f(X_s(\omega)) d\widetilde{\mathbf{B}}_s(\omega) - \frac{1}{2}\int\limits_0^t Dh(X_s(\omega))h(X_s(\omega))\, ds,$$

из которого вытекает, что для п.в. $\omega \in \Omega$ выполняется соотношение

$$X_t(\omega) = \xi(\omega) + \int\limits_0^t \widetilde{f}(X_t(\omega))\, d\widetilde{\mathbf{B}}_t(\omega), \quad t \in [0,T],$$

здесь $\widetilde{f} = \operatorname{col}(b - 2^{-1}Dh\cdot h, h, \sigma)$. Для каждого натурального m определим сглаженную грубую траекторию $\mathbf{B}_{m,t} = (B_{m,t}, \mathbb{B}_{m,t})$, где

$$\mathbb{B}_{m,t} = \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau dB_{m,r} \bigotimes dB_{m,\tau},$$

а интегралы в правой части понимаются как потраекторные интегралы Римана–Стилтьеса. Тогда для любого натурального m уравнение

$$dX_t = \widetilde{f}(X_t)\, d\mathbf{B}_{m,t}, \quad t \in [0,T],$$

имеет единственное сильное решение $X_{m,t}$ с начальным условием $X_{m,0} = \xi$. Согласно [21] и [16, с. 142] последовательность $\mathbf{B}_{m,t}$ сходится п.н. к геометрической грубой траектории $\widetilde{\mathbf{B}}_t$ в метрике p-вариации при любом $p > 1/H$. Отсюда и из теоремы Лайонса [14, 21] вытекает, что последовательность $X_{m,t}$ сходится п.н. в метрике p-вариации к некоторому случайному процессу $\widetilde{X}_t$. Так как $\widetilde{f} \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times d})$, то, применяя теорему 8.4 [16] к уравнению $dX_t = \widetilde{f}(X_t)\, d\widetilde{\mathbf{B}}_t$, заключаем, что $P(X_t = \widetilde{X}_t$ для всех $t \in [0,T]) = 1$.

Докажем, что решение X_t уравнения (6) с начальным условием $X_0 = \xi$ является сильным решением. Из определения кусочно-линейных аппроксимаций $B_{m,t}$ вытекает, что при каждом натуральном m процесс $X_{m,t}$ является $\widetilde{\mathcal{F}}_t$-согласованным, где $\widetilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{t+1/2^m}$. В силу непрерывности справа семейства σ-алгебр $\mathcal{F}_t$ заключаем, что при каждом $t \in [0,T]$ случайная величина X_t является $\mathcal{F}_t$-измеримой.

Предположим, что $\mathbb{E}|\xi|^p < \infty$. Обозначим через $\widetilde{\Omega}$ множество всех $\omega \in \Omega$, при которых для процесса X_t выполнены условия 1)–3) определения 2. Зафиксируем какое-нибудь $\omega \in \widetilde{\Omega}$. Выберем некоторые постоянные $\tau \in (0,1)$, $M > 0$ (вообще говоря, зависящие от ω;

значения этих постоянных уточним ниже). Возьмём произвольный отрезок $[a, a+\tau] \subset [0, T]$. На множестве $\mathscr{C}^\alpha([a, a+\tau], \mathbb{R}^n)$ α-непрерывных по Гёльдеру грубых траекторий Z с начальным условием $Z_a = X_a(\omega)$ и управляемых функцией $t \mapsto B_t(\omega)$ рассмотрим шар D_M^a радиуса M, т.е.

$$D_M^a = \{Z \in \mathscr{C}^\alpha([a, a+\tau], \mathbb{R}^n) | Z_a = X_a(\omega), \mathcal{N}(Z) \leqslant M\}.$$

Нетрудно видеть, что полунорма $\mathcal{N}(\cdot)$ является нормой на шаре D_M^a, превращая этот шар в полное метрическое пространство [16, гл. 8; 22]. Отображение

$$\mathcal{J} : \mathscr{C}^\alpha([a, a+\tau], \mathbb{R}^n) \to \mathscr{C}^\alpha([a, a+\tau], \mathbb{R}^n)$$

определим следующим образом:

$$(\mathcal{J}(Z))_t = Z_a + \int\limits_a^t f(Z_s)\, d\mathbf{B}_s(\omega), \quad t \in [a, a+\tau].$$

Пусть $Z, \widetilde{Z}, \bar{Z} \in D_M^a$, тогда из предложений 3.9, 3.10 [22] и доказательства теоремы 8.4 [16] вытекают следующие неравенства:

$$\mathcal{N}(\mathcal{J}(Z)) \leqslant c_B(\omega) c_f (1 + \tau^{\gamma-\alpha} \mathcal{N}^2(Z)), \tag{7}$$

$$\mathcal{N}(\mathcal{J}(\widetilde{Z}) - \mathcal{J}(\bar{Z})) \leqslant c_B^2(\omega) c_f^2 \tau^{\gamma-\alpha} \mathcal{N}(\widetilde{Z} - \bar{Z}), \tag{8}$$

где

$$c_B(\omega) = c\biggl(\sup_{\substack{s,t \in [0,T] \\ s \neq t}} \biggl(\frac{|B_{s,t}(\omega)|}{|t-s|^\gamma} + \frac{|\mathbb{B}_{s,t}(\omega)|}{|t-s|^{2\gamma}}\biggr)\biggr) \vee 1,$$

$\gamma \in (\alpha, 1/2)$, c и $c_f \geqslant 1$ – универсальные детерминированные постоянные.

Положим $\tau = (8c_B^2(\omega)c_f^2)^{1/(\alpha-\gamma)}$. Несложно видеть, что при выбранном значении τ существует такое $M = (4 - 2\sqrt{2})c_B(\omega)c_f$, при котором выполняется неравенство

$$c_B(\omega) c_f (1 + \tau^{\gamma-\alpha} M^2) \leqslant M. \tag{9}$$

Таким образом, из соотношений (7)–(9) вытекает, что $\mathcal{J}(D_M^a) \subseteq D_M^a$ и отображение $\mathcal{J}$ является сжимающим в шаре D_M^a. Следовательно, существует единственная неподвижная точка отображения $\mathcal{J}$ в шаре D_M^a, которая совпадает с траекторией $X|_{[a,a+\tau]}(\omega)$. Таким образом, справедлива оценка

$$\mathcal{N}(X|_{[a,a+\tau]}(\omega)) \leqslant (4 - 2\sqrt{2}) c_B(\omega) c_f. \tag{10}$$

Применяя неравенство треугольника и оценку (10) при $a = 0, \tau, 2\tau, \ldots,$ получаем неравенство

$$\mathcal{N}(X|_{[0,T]}(\omega)) \leqslant (4 - 2\sqrt{2}) c_B(\omega) c_f (T\tau^{-1} + 1) = C(c_B(\omega))^{1+2/(\gamma-\alpha)}, \tag{11}$$

где C – универсальная детерминированная постоянная, зависящая лишь от f, T.

Поскольку случайная величина c_B имеет конечные моменты любого порядка $p \geqslant 1$ [16, гл. 10], то из неравенства (11) и конечности величины $\mathbb{E}(|X_0|^p)$ вытекает, что $\mathbb{E}(\|X\|_\alpha^p) < \infty$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть функции b, h, σ непрерывны и ограничены вместе со своими производными до четвёртого порядка включительно. Тогда для любой $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины ξ такой, что $\mathbb{E}|\xi|^p < \infty$, $p \geqslant 1$, существует единственное сильное решение X_t уравнения (1) с начальным условием $X_0 = \xi$, и для любого $\alpha \in (1/3, 1/2)$ выполняется неравенство $\mathbb{E}(\|X\|_\alpha^p) < \infty$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольные $p \geqslant 1$, $\alpha \in (\max\{1/3, 1-H\}, 1/2)$ и $\mathcal{F}_0$-измеримую случайную величину ξ такую, что $\mathbb{E}|\xi|^p < \infty$. Согласно теореме 1 существует единственное сильное решение X_t уравнения (6) с правой частью $f = \mathrm{col}\,(b, h, \sigma)$ и начальным условием $X_0 = \xi$.

Так как почти все траектории процессов W_t и B_t^H непрерывны по Гёльдеру с показателями $1/2 - \varepsilon$ и $H - \varepsilon$ соответственно, где ε – произвольное малое положительное число, то с вероятностью 1 для всех $t \in [0, T]$ выполнены соотношения

$$X_t = \xi + \int\limits_0^t f(X_s)\,d\mathbf{B}_s = \xi + \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i, t_{i+1} \in \mathcal{P}} (f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}} + Df(X_{t_i})f(X_{t_i})\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}}) =$$

$$= \xi + \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i, t_{i+1} \in \mathcal{P}} (b(X_{t_i})(t_{i+1} - t_i) + h(X_{t_i})W_{t_i,t_{i+1}} + \sigma(X_{t_i})B^H_{t_i,t_{i+1}} + Dh(X_{t_i})h(X_{t_i})\mathbb{W}_{t_i,t_{i+1}}),$$

где $\mathbb{W}_{0,t} = \int_0^t \int_0^\tau dW_r \bigotimes dW_\tau$ – процесс второго порядка Ито, а $\mathcal{P}$ – произвольное конечное разбиение отрезка $[0, t]$ точками t_i.

Поскольку почти все траектории процесса X_t непрерывны по Гёльдеру с показателем $\alpha > 1 - H$, то с вероятностью 1 справедливы равенства

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i, t_{i+1} \in \mathcal{P}} b(X_{t_i})(t_{i+1} - t_i) = \int\limits_0^t b(X_s)ds, \quad t \in [0, T], \tag{12}$$

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i, t_{i+1} \in \mathcal{P}} \sigma(X_{t_i})B^H_{t_i,t_{i+1}} = \int\limits_0^t \sigma(X_s)\,dB^H_s, \quad t \in [0, T]. \tag{13}$$

Так как процесс X_t является $\mathcal{F}_t$-согласованным, то имеет место сходимость в $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$:

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i, t_{i+1} \in \mathcal{P}} h(X_{t_i})W_{t_i,t_{i+1}} = \int\limits_0^t h(X_s)\,dW_s, \quad t \in [0, T]. \tag{14}$$

Определим дискретный мартингал S_k рекуррентным образом:

$$S_0 = 0, \quad S_{k+1} = S_k + Dh(X_{t_k})h(X_{t_k})\mathbb{W}_{t_k,t_{k+1}}.$$

Тогда из ограниченности функции $Dh(X) \cdot h(X)$ вытекают соотношения

$$\mathbb{E}\Big|\sum_{t_i, t_{i+1} \in \mathcal{P}} Dh(X_{t_i})h(X_{t_i})\mathbb{W}_{t_i,t_{i+1}}\Big|^2 = \sum_{t_i, t_{i+1} \in \mathcal{P}} \mathbb{E}|S_{i+1} - S_i|^2 \leqslant C \sum_{t_i, t_{i+1} \in \mathcal{P}} \mathbb{E}|\mathbb{W}_{t_i,t_{i+1}}|^2 = O(|\mathcal{P}|).$$

Отсюда и из равенств (12)–(14) следует, что с вероятностью 1 для всех $t \in [0, T]$ справедливо равенство

$$X_t = \xi + \int\limits_0^t b(X_s)ds + \int\limits_0^t h(X_s)\,dW_s + \int\limits_0^t \sigma(X_s)\,dB^H_s.$$

Таким образом, процесс X_t является сильным решением уравнения (1) с начальным условием $X_0 = \xi$. Согласно теореме 1 величина $\mathbb{E}(\|X\|^p_\alpha)$ является конечной. Единственность сильного решения вытекает из результатов работы [4]. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Biagini F., Hu Y., Oksendal B., Zhang T.* Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications. London, 2008.
2. *Mishura Y.S.* Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes. Berlin; Heidelberg, 2008.
3. *Guerra J., Nualart D.* Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion // Stochastic Anal. and Appl. 2008. V. 26. № 5. P. 1053–1075.
4. *Mishura Y.S., Shevchenko G.M.* Existence and uniqueness of the solution of stochastic differential equation involving Wiener process and fractional Brownian motion with Hurst index H>1/2 // Commun. in Statistics. Theory and Methods. 2011. V. 40. № 19–20. P. 3492–3508.
5. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями и с разрывными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 2. С. 187–200.
6. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями, с разрывными коэффициентами и с частично вырожденным оператором диффузии // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 8. С. 1060–1076.
7. *Васьковский М.М.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием и стандартным и дробным броуновскими движениями // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 22–34.
8. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Существование решений стохастических дифференциальных включений со стандартным и дробным броуновскими движениями // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 8. С. 997–1003.
9. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 8. С. 1011–1019.
10. *Васьковский М.М.* Устойчивость и притяжение решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 2. С. 160–173.
11. *Васьковский М.М., Качан И.В.* Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, управляемых дробными броуновскими движениями // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2019. Т. 55. № 2. С. 135–151.
12. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Стохастические дифференциальные уравнения и включения. Минск, 2019.
13. *Nualart D., Rascanu A.* Differential equations driven by fractional Brownian motion // Collect. Math. 2002. V. 53. № 1. P. 55–81.
14. *Lyons T.* Differential equations driven by rough signals // Revista Matematica Iberoamericana. 1998. V. 14. № 2. P. 215–310.
15. *Gubinelli M.* Controlling rough paths // J. of Func. Anal. 2004. V. 216. № 1. P. 86–140.
16. *Friz P., Hairer M.* A Course on Rough Paths with an Introduction to Regularity Structures. Cham, 2014.
17. *Васьковский М.М., Качан И.В.* Асимптотические разложения решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями // Докл. НАН Беларуси. 2018. Т. 62. № 4. С. 398–405.
18. *Vaskouski M., Kachan I.* Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than 1/3 // Stochastic Anal. and Appl. 2018. V. 36. № 6. P. 909–931.
19. *Васьковский М.М.* Стохастические дифференциальные уравнения смешанного типа со стандартными и дробными броуновскими движениями с индексами Херста, большими 1/3 // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2020. Т. 56. № 1. С. 36–50.
20. *Zahle M.* Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. I // Probability Theory and Related Fields. 1998. V. 111. № 3. P. 333–374.
21. *Coutin L., Qian Z.* Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions // Probability Theory Related Fields. 2002. V. 122. № 1. P. 108–140.
22. *Neuenkirch A., Nourdin I., Robler A., Tindel S.* Trees and asymptotic expansions for fractional stochastic differential equations // Annal. de Inst. Henri Poincare (B) Probability and Statistics. 2009. V. 45. № 1. P. 157–174.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 24.08.2020 г.
После доработки 07.12.2020 г.
Принята к публикации 11.12.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 2, с. 169–178

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925

О СУЩЕСТВОВАНИИ ДВУХТОЧЕЧНО-КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЁННОЙ РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ГИСТЕРЕЗИСОМ

© 2021 г. В. В. Евстафьева

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка, правая часть которой представляет собой сумму линейной с постоянной матрицей функции от решения, существенной нелинейности типа реле с гистерезисом и возмущающей непрерывной периодической функции. Матрица линейной функции имеет только вещественные простые ненулевые собственные числа, среди которых по крайней мере одно положительное. Изучается вопрос о существовании у таких систем непрерывных решений с двумя точками переключения в фазовом пространстве (двухточечно-колебательные решения), при этом возвращение решения в каждую из этих точек происходит за время, которое в целое число раз меньше периода возмущающей функции или равно ему. Установлено достаточное условие отсутствия таких решений и доказана теорема, дающая достаточные условия существования двухточечно-колебательного решения с временем возврата, равным периоду возмущающей функции. Приведён подтверждающий пример.

DOI: 10.31857/S0374064121020047

Введение. Постановка задачи. Системы с нелинейностями типа реле являются существенно нелинейными системами с разрывными правыми частями (относительно термина "существенная нелинейность" см. [1, с. 45]). Исследования таких систем, в частности систем с гистерезисом, представляют не только теоретический, но и прикладной интерес и проводятся, начиная с середины прошлого века. Из последних работ в данном направлении отметим работы [2–11].

В приложениях часто встречаются периодические внешние возмущения, которые в существенно нелинейных системах влияют на наличие у возмущённых систем периодических решений и их период. Известно [12], что в случае периодического внешнего возмущения в нелинейных системах могут существовать три типа периодических решений: во-первых, основные решения с периодом, равным периоду возмущения (гармонические колебания с основной частотой, совпадающей с частотой внешней силы); во-вторых, сопутствующие им решения с периодами, кратными периоду возмущения (субгармонические колебания с частотой, в целое число раз меньшей основной частоты); и, в-третьих, решения, период которых в целое число раз меньше периода возмущения (супергармонические колебания с частотой, кратной основной частоте).

Первые два типа решений (гармонические и субгармонические колебания) исследовались в работах [2, 3, 6–11]. В них в качестве возмущающей функции рассматривались функция синуса и укороченный ряд Фурье (сумма константы и двух функций синуса, периоды которых различны, но соизмеримы). В [2, 3] доказано существование периодических решений в случае, когда среди ненулевых вещественных собственных чисел матрицы системы по крайней мере одно является положительным. В [6] рассмотрена система с гурвицевой матрицей. В работе [7] исследован случай комплексных собственных чисел матрицы системы, а в [8, 9] – случай вещественных ненулевых кратных собственных чисел. Случай нулевого собственного числа матрицы системы изучен в работе [10]. В указанных работах исследовалось двухпозиционное реле. Трёхпозиционное реле, которое также часто используется на практике, рассматривалось в [11].

В данной работе в случае двухпозиционного реле рассматривается вопрос о существовании у возмущённой системы одного специального типа гармонических колебаний.

Исследуется n-мерная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{Y} = AY + BF(\sigma) + Kf(t), \quad \sigma = (C, Y). \tag{1}$$

Здесь $n \times n$-матрица A и векторы $B = (b_1, \ldots, b_n)^{\text{т}}$, $K = (k_1, \ldots, k_n)^{\text{т}}$ являются вещественными и не зависят от времени (здесь и ниже символом т обозначается операция транспонирования), Y – вектор состояний системы. Вектор $C = (c_1, \ldots, c_n)^{\text{т}}$ определяет обратную связь в системе, является вещественным и постоянным. Функция $F(\sigma)$ представляет собой неидеальное двухпозиционное реле с двумя пороговыми числами ℓ_1, ℓ_2 $(\ell_1 \neq \ell_2)$, двумя выходными числами m_1, m_2 $(m_1 \neq m_2)$, где ℓ_1, ℓ_2, m_1, m_2 – вещественные числа. Для определённости считаем, что $\ell_1 < \ell_2$ и $m_1 < m_2$. Функция $F(\sigma(t))$ определена при непрерывном входе $\sigma(t)$ для $t \geqslant 0$ в классе кусочно-непрерывных функций и задаётся в соответствии с [13] следующим образом: из неравенства $\sigma(t) \leqslant \ell_1$ следует равенство $F(\sigma) = m_1$, из неравенства $\sigma(t) \geqslant \ell_2$ следует равенство $F(\sigma) = m_2$, а из неравенств $\ell_1 < \sigma(t) < \ell_2$ $(t_1 < t \leqslant t_2)$ – равенство $F(\sigma(t_1)) = F(\sigma(t_2))$. Другими словами, $F(\sigma(t))$ принимает постоянное значение на замкнутом промежутке $[t_1, t_2]$, если либо $F(\sigma(t_1)) = m_1$ и $\sigma(t) < \ell_2$ при $t \in [t_1, t_2]$, либо $F(\sigma(t_1)) = m_2$ и $\sigma(t) > \ell_1$ при $t \in [t_1, t_2]$. Петля гистерезиса на плоскости $(\sigma, F(\sigma(t)))$ обегается против хода часовой стрелки. Возмущающая функция $f(t)$ принадлежит классу непрерывных T-периодических функций и имеет вид

$$f(t) = f_0 + f_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + f_2 \sin(2\omega t + \varphi_2), \tag{2}$$

где f_0, f_1, f_2, φ_1, φ_2 – вещественные постоянные, причём f_0, f_1 и f_2 ненулевые. Период возмущающей функции равен $T = 2\pi/\omega$ $(\omega > 0)$.

В данной работе используем каноническое преобразование системы (1) и специальный подход к выбору её параметров, при которых существуют непрерывные решения $Y(t)$, $t \geqslant 0$, с двумя точками переключения в фазовом пространстве (двухточечно-колебательные решения), и при этом возвращение изображающей точки решения в каждую из точек переключения происходит за время T/k, где $k = \text{fix} \in \mathbb{N}$. Под *точкой переключения* понимается такое состояние системы, при котором аргумент $\sigma(t) = (C, Y(t))$ релейной функции $F(\sigma(t))$ достигает одного из пороговых чисел, а значит, релейная функция при этом меняет значение выходного числа. Точки переключения принадлежат гиперплоскостям вида $\sigma = \ell_\kappa$ $(\kappa = 1, 2)$, которые далее в работе называем *гиперплоскостями переключения*. В точках переключения происходит "сшивание" по непрерывности траекторий изображающей точки решения $Y(t)$ в фазовом пространстве в силу систем

$$\dot{Y} = AY + Bm_\mu + Kf(t), \quad \mu = 1, 2. \tag{3}$$

Для аналитического представления решения системы (1) используем форму Коши

$$Y(t) = e^{A(t-t_0)}Y(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-A(\tau - t)}(Bm_\mu + Kf(\tau))\, d\tau, \quad \mu = 1, 2, \tag{4}$$

где t_0 – начальный момент времени.

Далее через L_κ $(\kappa = 1, 2)$ обозначаем гиперплоскости переключения. Дадим

Определение 1. Если в некоторый момент времени t' изображающая точка принадлежит гиперплоскости L_κ $(\kappa = 1, 2)$, то наименьший момент времени $t'' > t'$, в который изображающая точка принадлежит гиперплоскости $L_{3-\kappa}$, назовём *моментом первой встречи* изображающей точки с гиперплоскостью $L_{3-\kappa}$.

Сформулируем теперь основное в работе

Определение 2. Решение $Y(\cdot)$ назовём *двухточечно-колебательным с временем возврата* Δ *на гиперплоскости*, если существуют точки $Y^\kappa \in L_\kappa$ $(\kappa = 1, 2)$ такие, что в моменты первой встречи изображающей точки решения с гиперплоскостью L_κ изображающая точка попадает в точку Y^κ, а сами моменты первой встречи с каждой из гиперплоскостей периодичны с периодом Δ.

В дальнейшем такое решение будем для краткости называть *двухточечно-колебательным с временем возврата* Δ.

Ставится задача о достаточных условиях, при выполнении которых система (1) имеет двухточечно-колебательное решение с временем возврата T/k. Согласно определению 2 искомое решение $Y(\cdot)$ удовлетворяет условию T/k-периодической возвращаемости в точки переключения Y^1 и Y^2 (где $(C,Y^\kappa)=\ell_\kappa$, $\kappa=1,2$), т.е. $Y^\kappa = Y(t_0+mT/k)$, $\kappa=1,2$, $m\in\in\mathbb{Z}_+\equiv\mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Несложно видеть, что для системы (1) двухточечно-колебательное решение с временем возврата T является T-периодическим.

Итак, предположим, что существует двухточечно-колебательное решение $Y(\cdot)$ с временем T/k возврата на гиперплоскости переключения, а его поведение удовлетворяет следующим условиям. Изображающая точка решения $Y(\cdot)$ системы (1) начинает своё движение в точке Y^1 на гиперплоскости L_1 в момент времени $t_0=0$, движется в силу системы (3) при $m_\mu=m_1$ и в момент $t=t_1$ $(t_1<T/k)$ первой встречи с гиперплоскостью L_2 попадает в точку Y^2. Затем она продолжает своё движение в силу системы (3) при $m_\mu=m_2$ и в момент её первой встречи (который равен T/k) с гиперплоскостью L_1 возвращается в точку Y^1, и т.д.: изображающая точка решения движется между точками Y^1 и Y^2, попадая попеременно в каждую из них через время T/k. При этом обе точки являются точками первой встречи изображающей точки с гиперплоскостями, и от точки Y^1 к точке Y^2 изображающая точка движется в силу системы (1) при $m_\mu=m_1$, а от точки Y^2 к точке Y^1 – в силу системы (1) при $m_\mu==m_2$. Таким образом, согласно предписанной последовательности движения изображающей точки решения системы (1) условие T/k-периодической возвращаемости на гиперплоскости переключения принимает вид $Y(mT/k)=Y^1$ и $Y(t_1+mT/k)=Y^2$, $m\in\mathbb{Z}_+$, при этом на полуинтервалах $[mT/k,t_1+mT/k)$ вектор-функция $Y(t)$ представляет собой решение системы (3) при $m_\mu=m_1$, а на полуинтервалах $[t_1+mT/k,t_1+(m+1)T/k)$ – системы (3) при $m_\mu=m_2$. Кроме того, как отмечалось, $(C,Y^1)=\ell_1$ и $(C,Y^2)=\ell_2$. В соответствии с этими условиями строим вспомогательную систему уравнений.

Пространство параметров системы (1) изучаем на основе исследования этой вспомогательной системы – системы трансцендентных уравнений, которая содержит параметры исходной системы и параметры решения. Под *параметрами решения* понимаем моменты времени и точки переключения.

В работе получены условия разрешимости указанной системы трансцендентных уравнений относительно первого и второго моментов времени переключения реле (теорема 1). Доказана теорема существования T-периодического решения системы (1) с двумя точками переключения за период (теорема 2). Кроме того, получены условия неразрешимости системы трансцендентных уравнений (теорема 3) и при $k\geqslant 1$ установлено достаточное условие, при выполнении которого исходная система не имеет двухточечно-колебательного с временем возврата T/k решения, изображающая точка которого движется в предписанной ей последовательности (следствие к теореме 3).

1. Построение системы трансцендентных уравнений. Предположим, что существует хотя бы одно двухточечно-колебательное с временем возврата T/k решение, изображающая точка которого движется, попадая на гиперплоскости в соответствии с заданной в постановке задачи последовательностью. Используя формулу (4), строим систему трансцендентных уравнений относительно точек переключения Y^1 и Y^2, момента времени первого переключения t_1 и времени возврата T/k. Имеем

$$\ell_1=(C,Y^1),\quad \ell_2=(C,Y^2), \tag{5}$$

где

$$Y^2=e^{At_1}Y^1+\int\limits_0^{t_1}e^{A(t_1-\tau)}(Bm_1+Kf(\tau))\,d\tau,$$

$$Y^1=e^{A(T/k-t_1)}Y^2+\int\limits_{t_1}^{T/k}e^{A(T/k-\tau)}(Bm_2+Kf(\tau))\,d\tau.$$

В общем виде система (5) является достаточно сложной для аналитического исследования, поэтому для возможности её изучения примем некоторые дополнительные предположения.

Пусть выполняются условия обратимости преобразования исходной системы в канонический вид: 1) $\det(B\ AB\ A^2B\ \ldots\ A^{n-1}B) \neq 0$; 2) матрица A имеет простые собственные числа λ_i $(i = \overline{1,n})$. Кроме того, для упрощения выкладок будем считать, что собственные числа являются ненулевыми и вещественными. При этих предположениях после неособого преобразования $Y = SX$ получаем следующий канонический вид системы (1):

$$\dot{X} = A_0X + B_0F(\sigma) + K_0f(t), \quad \sigma = (\Gamma, X), \tag{6}$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad B_0 = S^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K_0 = S^{-1}K = \begin{pmatrix} k_1^0 \\ \vdots \\ k_n^0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

Компоненты γ_i $(i = \overline{1,n})$ вектора Γ вычисляются по формуле

$$\gamma_i = \frac{-1}{D'(\lambda_i)} \sum_{h=1}^{n} c_h N_h(\lambda_i), \tag{7}$$

где

$$D'(\lambda_i) = \frac{dD(p)}{dp}\bigg|_{p=\lambda_i}, \quad D(p) = |A - pE|, \quad N_h(p) = \sum_{i=1}^{n} b_i D_{ih}(p).$$

Здесь λ_i – корни характеристического уравнения $D(p) = 0$, E – единичная матрица, $D_{ih}(p)$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ih} в определителе $D(p)$, стоящего на пересечении i-й строки и h-го столбца, b_i – компоненты вектора B, c_h – компоненты вектора C, p – некоторый вещественный параметр. Матрица S имеет вид

$$S = -\begin{pmatrix} \dfrac{N_1(\lambda_1)}{D'(\lambda_1)} & \ldots & \dfrac{N_1(\lambda_n)}{D'(\lambda_n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{N_n(\lambda_1)}{D'(\lambda_1)} & \ldots & \dfrac{N_n(\lambda_n)}{D'(\lambda_n)} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Далее полагаем $\gamma_s \neq 0$ и $\gamma_j = 0$, где $j \neq s$.

После канонического преобразования системы (1) при выбранных ограничениях на преобразованный вектор обратной связи Γ система (5) разбивается на подсистему относительно моментов времени переключения и формулы для нахождения точек переключения. Итак, система трансцендентных уравнений относительно t_1 и T/k принимает следующий вид:

$$\ell_2 = \left(\ell_1 + \frac{\gamma_s m_1}{\lambda_s}\right)e^{\lambda_s t_1} - \frac{\gamma_s m_1}{\lambda_s} + \gamma_s k_s^0 \int\limits_0^{t_1} e^{\lambda_s(t_1-\tau)} f(\tau)\,d\tau,$$

$$\ell_1 = \left(\ell_2 + \frac{\gamma_s m_2}{\lambda_s}\right)e^{\lambda_s(T/k-t_1)} - \frac{\gamma_s m_2}{\lambda_s} + \gamma_s k_s^0 \int\limits_{t_1}^{T/k} e^{\lambda_s(T/k-\tau)} f(\tau)\,d\tau. \tag{9}$$

Точки переключения $X^1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1)^{\mathrm{т}}$, $X^2 = (x_1^2, \ldots, x_n^2)^{\mathrm{т}}$ преобразованной системы (6) принадлежат гиперплоскостям переключения $\sigma = \ell_\mu$ $(\mu = 1, 2)$ и определяются по следующим формулам:

$$x_s^1 = \ell_1/\gamma_s, \quad x_s^2 = \ell_2/\gamma_s, \tag{10}$$

$$x_j^1=\frac{e^{\lambda_jT/k}}{1-e^{\lambda_jT/k}}\bigg(m_1\int\limits_0^{t_1}e^{-\lambda_j\tau}\,d\tau+m_2\int\limits_{t_1}^{T/k}e^{-\lambda_j\tau}\,d\tau+k_j^0\int\limits_0^{T/k}e^{-\lambda_j\tau}f(\tau)\,d\tau\bigg),$$

$$x_j^2=\frac{e^{\lambda_jt_1}}{1-e^{\lambda_jT/k}}\bigg(\int\limits_{t_1}^{T/k}e^{-\lambda_j(T/k-\tau)}(m_2+k_j^0f(\tau))\,d\tau+\int\limits_0^{t_1}e^{-\lambda_j\tau}(m_1+k_j^0f(\tau))\,d\tau\bigg),$$

$$j=\overline{1,n},\quad j\ne s. \tag{11}$$

Равенства (11) получаются в результате решения линейной алгебраической системы

$$x_j^2=\bigg(x_j^1+\frac{m_1}{\lambda_j}\bigg)e^{\lambda_jt_1}-\frac{m_1}{\lambda_j}+k_j^0e^{\lambda_jt_1}\int\limits_0^{t_1}e^{-\lambda_j\tau}f(\tau)\,d\tau,$$

$$x_j^1=\bigg(x_j^2+\frac{m_2}{\lambda_j}\bigg)e^{\lambda_j(T/k-t_1)}-\frac{m_2}{\lambda_j}+k_j^0e^{\lambda_jT/k}\int\limits_{t_1}^{T/k}e^{-\lambda_j\tau}f(\tau)\,d\tau$$

относительно неизвестных $x_j^1=x_j(T/k)$ и $x_j^2=x_j(t_1)$, $j=\overline{1,n}$, $j\ne s$, поскольку определитель этой системы

$$\begin{vmatrix}e^{\lambda_jt_1} & -1\\ 1 & -e^{\lambda_j(T/k-t_1)}\end{vmatrix}=-e^{\lambda_jT/k}+1$$

отличен от нуля.

2. Основные результаты. Положим

$$\delta_1=\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\lambda_s},\quad \delta_2=\operatorname{arctg}\frac{2\omega}{\lambda_s},\quad H=\gamma_sk_s^0\bigg(\frac{f_1\sin(\varphi_1+\delta_1)}{\sqrt{\lambda_s^2+\omega^2}}+\frac{f_2\sin(\varphi_2+\delta_2)}{\sqrt{\lambda_s^2+4\omega^2}}\bigg).$$

Для упрощения записи также обозначим

$$H_s(t)=\gamma_sk_s^0\bigg(\frac{f_1\sin(t+\varphi_1+\delta_1)}{\sqrt{\lambda_s^2+\omega^2}}+\frac{f_2\sin(2t+\varphi_2+\delta_2)}{\sqrt{\lambda_s^2+4\omega^2}}\bigg),\quad t\in\mathbb{R},$$

в частности, $H_s(0)=H$, и

$$L=-\bigg(\frac{\lambda_s}{\gamma_s}\ell_1+k_s^0f_0\bigg)+\frac{\lambda_s(H_s(\omega T/k)-He^{\lambda_sT/k})}{\gamma_s(e^{\lambda_sT/k}-1)}.$$

Условия разрешимости системы (9) содержит

Теорема 1. *Пусть* $\gamma_s\ne0$, $\lambda_s>0$ *и выполняются следующие условия:*
1) при некотором $k\in\mathbb{N}$ *имеют место неравенства*

$$m_2-m_1e^{\lambda_sT/k}+(e^{\lambda_sT/k}-1)L>0, \tag{12}$$

$$m_1<L<m_2 \tag{13}$$

и равенство

$$t_1=\frac{T}{k}+\frac{1}{\lambda_s}\ln\frac{m_2-m_1}{(e^{\lambda_sT/k}-1)L+m_2-m_1e^{\lambda_sT/k}}; \tag{14}$$

2) определяемая равенством (14) величина t_1 *удовлетворяет первому уравнению системы (9).*

Тогда система трансцендентных уравнений (9) имеет решение $(t_1,T/k)$, *где* $t_1\in(0,T/k)$.

Доказательство. Система уравнений (9) при условии $\lambda_s > 0$ принимает вид

$$\ell_2 = (\ell_1 + \lambda_s^{-1}\gamma_s(m_1 + k_s^0 f_0) + H)e^{\lambda_s t_1} - \lambda_s^{-1}\gamma_s(m_1 + k_s^0 f_0) - H_s(\omega t_1),$$

$$\ell_1 = (\ell_2 + \lambda_s^{-1}\gamma_s(m_2 + k_s^0 f_0) + H_s(\omega t_1))e^{\lambda_s(T/k - t_1)} - \lambda_s^{-1}\gamma_s(m_2 + k_s^0 f_0) - H_s(\omega T/k). \qquad (15)$$

Сложив уравнения системы (15), получим равенство

$$(m_2 - m_1)e^{\lambda_s(T/k - t_1)} = (e^{\lambda_s T/k} - 1)L + m_2 - m_1 e^{\lambda_s T/k}, \qquad (16)$$

из которого однозначно находим величину t_1, определяемую равенством (14). Следовательно, если при заданном k существует решение системы (9), то оно единственно. В (14) стоящее под логарифмом выражение должно быть положительным. Учитывая предположение $m_2 > m_1$, получаем неравенство (12). Величина t_1 должна принадлежать промежутку $(0, T/k)$. Согласно условию теоремы 1 имеем $\lambda_s > 0$. Поэтому следует потребовать выполнение неравенств

$$m_2 - m_1 < (e^{\lambda_s T/k} - 1)L + m_2 - m_1 e^{\lambda_s T/k},$$

$$m_2 - m_1 > (e^{\lambda_s T/k} - 1)e^{-\lambda_s T/k}L + m_2 e^{-\lambda_s T/k} - m_1,$$

откуда получаем двойное неравенство (13).

Теперь докажем обратное: если выполнены предположения 1) и 2) теоремы 1, то система (9) имеет решение $(t_1, T/k)$, где $t_1 \in (0, T/k)$. Действительно, t_1 удовлетворяет уравнению (16) и первому уравнению системы (9), а значит, и равносильной системе (15). Из неравенств (12), (13) условия 1) теоремы вытекает, что точка t_1 принадлежит промежутку $(0, T/k)$. Теорема доказана.

Докажем теорему, дающую достаточные условия существования двухточечно-колебательных с временем возврата T решений системы (1) (в частности, такие решения системы (1), как отмечено выше, являются T-периодическими).

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) внешнее возмущение $f(t)$ системы (1) является T-периодической функцией вида (2);

2) система (1) полностью управляема по отношению ко входу $F(\sigma)$, и матрица A имеет простые ненулевые вещественные собственные числа, среди которых по крайней мере одно положительное, пусть $\lambda_s > 0$;

3) система (1) приведена неособым преобразованием $Y = SX$ с матрицей S вида (8) к каноническому виду (6), в котором

$$\sum_{h=1}^{n} c_h N_h(\lambda_s) \neq 0, \quad \sum_{h=1}^{n} c_h N_h(\lambda_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, s-1, s+1, \ldots, n, \qquad (17)$$

где c_h – компоненты вектора обратной связи C, N_h – определитель матрицы A, в которой h-й столбец заменён вектором B, s – некоторый индекс, принимающий значение от единицы до n;

4) система уравнений (9), параметры которой удовлетворяют условиям теоремы 1, имеет решение $(t_1, T/k)$ при $k = 1$ (т.е. t_1 и T – первый и второй моменты времени переключения соответственно).

Тогда существует T-периодическое решение системы (1) с двумя точками Y^1, Y^2 переключения за период на гиперплоскостях $(C, Y^\kappa) = \ell_\kappa$ $(\kappa = 1, 2)$, где $Y^1 = SX^1$, $Y^2 = SX^2$, а координаты точек X^1, X^2 выражаются по формулам (10) и (11) при $k = 1$.

Доказательство. Рассматривается двухточечно-колебательное с временем возврата T/k решение системы (1) в классе непрерывных функций. По построению для обеспечения непрерывности решения $Y(t)$ (согласно методу припасовывания) точки переключения совпадают с точками “сшивания” траекторий, построенных в силу систем (3). Поскольку t_1 – момент времени первого переключения изображающей точки решения системы, то имеет место условие $0 < t_1 < T/k$. Исходя из необходимых условий существования двухточечно-колебательного решения с заданными параметрами и с учётом заданного в постановке задачи поведения изображающей точки искомого решения, строим систему (5) относительно точек переключения Y^1 и Y^2, момента времени первого переключения t_1 и времени возврата T/k. Для упрощения системы трансцендентных уравнений используем каноническое преобразование исходной системы в соответствии с условием 2) теоремы 2. Система (1) полностью управляема по отношению ко входу $F(\sigma)$, если

$$\det(B\ AB\ A^2B\ \ldots\ A^{n-1}B) \neq 0.$$

Далее предполагаем, что $n-1$ корней уравнения $D(p)=0$ совпадают с $n-1$ корнями уравнения $\sum_{h=1}^n c_h N_h(p) = 0$, т.е. имеет место условие (17). Тогда $n-1$ величин γ_i, определяемых по формуле (7), обращаются в нуль, при этом γ_s отлично от нуля, что отражено в условии 3) теоремы 2.

При указанном выборе величин γ_i $(i=\overline{1,n})$ гиперплоскости переключения в фазовом пространстве канонической системы являются ортогональными оси x_s, а каноническая система n-го порядка распадается на системы более низкого порядка, которые могут быть последовательно проинтегрированы, а именно, функция $\sigma(t) = (\Gamma, X(t)) = \gamma_s x_s$ определяется из уравнения первого порядка

$$\dot{x}_s = \lambda_s x_s + F(\sigma) + k_s^0 f(t),$$

а решения x_j, где $j=\overline{1,n}$, $j\neq s$, определяются из уравнений

$$\dot{x}_j = \lambda_j x_j + F(\sigma) + k_j^0 f(t).$$

Дифференциальное уравнение

$$\dot{\sigma}(t) = \lambda_s \sigma(t) + \gamma_s(F(\sigma(t)) + k_s^0 f(t))$$

относительно функции $\sigma(t)$ имеет общее решение

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{\lambda_s(t-t_0)} + \gamma_s e^{\lambda_s t}\biggl(m_\mu \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\lambda_s\tau}\,d\tau + k_s^0 \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\lambda_s\tau} f(\tau)\,d\tau\biggr), \quad \sigma_0 = \sigma(t_0).$$

Начальные и граничные условия удобно записать в развёрнутом виде, в котором отражено поведение изображающей точки решения и условие T/k-периодической возвращаемости на гиперплоскости переключения, а именно, начальное условие $\ell_1 = \sigma(\ell_1, 0, m_1, 0)$ и граничные условия $\ell_2 = \sigma(\ell_1, 0, m_1, t_1)$, $\ell_1 = \sigma(\ell_2, t_1, m_2, T/k)$ (в двух последних равенствах правые части – обозначения для правых частей первого и второго уравнений системы (5)).

Система (5) после канонического преобразования упрощается и принимает вид (9)–(11) в новых переменных. Система трансцендентных уравнений в новых переменных разделяется на систему относительно t_1, T/k и формулы для нахождения точек переключения.

Пусть выполнены условия теоремы 1 для заданного $k\in\mathbb{N}$, тогда система (9) имеет единственное решение $(t_1, T/k)$. Это означает, что на промежутке $(0, T/k)$ нет других моментов времени попадания на гиперплоскость L_2, и изображающая точка решения движется между гиперплоскостями. Далее по формулам (10), (11) однозначно находятся соответствующие точки X^1, X^2. Система трансцендентных уравнений, из которой получены эти формулы, составлена с учётом предписанной последовательности движения изображающей точки решения. Поэтому полученные точки являются точками переключения и принадлежат траектории решения канонической системы на отрезке $[0, T/k]$ при первом обходе петли гистерезиса. Нетрудно заметить, что в силу T-периодичности функции $f(t)$ при последующих обходах петли на отрезках $[mT/k, (m+1)T/k]$, где $m\in\mathbb{N}$, изображающая точка решения достигает каждый раз гиперплоскости $(\Gamma, X) = \ell_\mu$ за один и тот же промежуток времени T/k и возвращается в одну и ту же точку X^μ по одной и той же траектории, если $k=1$. В этом случае $X(t+T) = X(t)$ для любого $t>0$, т.е. решение $X(t)$ является T-периодическим в положительном направлении. Значит, при выполнении условия 1) теоремы 2 двухточечно-колебательное с временем возврата T решение системы (6) является T-периодическим.

Системы (1) и (6) в силу неособого преобразования эквивалентны, поэтому полученные для канонической системы результаты верны и для исходной системы. Таким образом, существует одно T-периодическое решение системы (1) с двумя точками переключения Y^1 и Y^2 за период на гиперплоскостях вида $(C,Y)=\ell_\mu$ $(\mu=1,2)$, где $Y^1=SX^1$, $Y^2=SX^2$. Теорема доказана.

Отметим, что условия существования у системы (1) двухточечно-колебательных решений с временем возврата T/k при $k>1$, $k\in\mathbb{N}$, требуют отдельного исследования и дополнительных ограничений на параметры.

Далее приведём условия неразрешимости системы (9).

Введём обозначение

$$\Phi_s(t)=[\ell_1+\lambda_s^{-1}\gamma_s(m_1+k_s^0f_0)+H]e^{\lambda_s t}-[\ell_2+\lambda_s^{-1}\gamma_s(m_1+k_s^0f_0)],\quad t\in\mathbb{R}.$$

Теорема 3. *Пусть* $\gamma_s\neq 0$, $\lambda_s>0$ *и при некотором* $k\in\mathbb{N}$ *имеют место неравенства*

$$\ell_1+{\lambda_s}^{-1}\gamma_s(m_1+k_s^0f_0)+H<0, \tag{18}$$

$$H_s(\omega t_{\min})\geqslant \ell_1-\ell_2+H, \tag{19}$$

где $t_{\min}$ – *точка, доставляющая функции* $H_s(\omega t)$ *на отрезке* $[0,T/k]$ *минимальное значение.*

Тогда система трансцендентных уравнений (9) не имеет решения $(t_1,T/k)$, *где* $t_1\in$ $\in(0,T/k)$.

Доказательство. Исследуем первое уравнение системы (15) относительно $t_1>0$. Запишем это уравнение в виде

$$\Phi_s(t_1)=H_s(\omega t_1). \tag{20}$$

Заметим, что в точке $t_1=0$ левая часть уравнения (20) меньше его правой части (поскольку $\Phi_s(0)=H+\ell_1-\ell_2$, $H_s(0)=H$ и $\ell_2>\ell_1$). Неравенство (18) означает, что коэффициент при экспоненте у функции $\Phi_s(t)$ отрицателен. Значит, функция $\Phi_s(t)$ убывает, а её наибольшее на отрезке $[0,T/k]$ значение равно $\Phi_s(0)$ – правой части неравенства (19). Поэтому при выполнении неравенства (19) уравнение (20) не может иметь положительного решения t_1. Это означает, что система (9) не имеет решения. Теорема доказана.

Из теоремы 3 очевидно вытекает следующее

Следствие. *Пусть выполнены условия 1)–3) теоремы 2. Пусть, кроме того, параметры системы трансцендентных уравнений (9) удовлетворяют условию теоремы 3.*

Тогда система (1) не имеет двухточечно-колебательного с временем возврата T/k *решения, изображающая точка которого начинает своё движение на гиперплоскости* L_1 *и движется согласно предписанной последовательности.*

3. Пример. Пусть внешнее воздействие описывает функция

$$f(t)=1+2\sin(t+\pi/3)+5\sin(2t)$$

с периодом $T=2\pi$ (условие 1) теоремы 2).

Рассмотрим систему (1) третьего порядка с матрицей

$$A=\begin{pmatrix}-13.5 & -12.5 & -43\\ 5.2 & 4.2 & 17.8\\ 2.1 & 2.1 & 6.4\end{pmatrix}$$

и векторами $B=(1,0,0)^{\mathrm{т}}$, $K=(12.5,-4.5,-2.5)^{\mathrm{т}}$. Среди собственных чисел матрицы A есть положительное $\lambda_1=0.1$ (положим $\lambda_s=\lambda_1$), $\lambda_2=-1$ и $\lambda_3=-2$. Векторы B, AB, A^2B являются линейно независимыми, так как

$$\begin{vmatrix}1 & -13.5 & 26.95\\ 0 & 5.2 & -10.98\\ 0 & 2.1 & -3.99\end{vmatrix}=2.31\neq 0.$$

Матрица S преобразования, приводящего матрицу системы к диагональной матрице A_0, имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\det S = -1 \neq 0$. Тогда $B_0 = (1,1,1)^{\text{т}}$, $K_0 = (-2,1,0.5)^{\text{т}}$. Условия 2) и 3) теоремы 2 выполнены.

Положим $\Gamma = (-0.14,0,0)^{\text{т}}$. Согласно условию 3) теоремы 2 из неоднородной системы линейных алгебраических уравнений, построенной в соответствии с (7), имеем следующие значения параметров вектора обратной связи: $c_1 = -0.14$, $c_2 = -0.14$ и $c_3 = -0.56$.

Обратимся к условию 4) теоремы 2. Сначала проверим условие 1) теоремы 1 и найдём решение системы трансцендентных уравнений (9). Имеем $\delta_1 \approx 1.47$, $\delta_2 \approx 1.52$ и $H \approx 1.02$ (здесь и далее расчёты проведены с точностью 10^{-2}). Пусть $\ell_1 = 0.75$, тогда $L \approx 3.27$. Пусть $k = 1$, $m_1 = -1.11$ и $m_2 = 5.30$. Имеют место неравенства (12), (13), согласно которым $8.89 > 0$ и $-1.11 < 3.27 < 5.30$. Находим $t_1 \approx 1.60$ в соответствии с равенством (14). Условие 2) теоремы 1 имеет место, если $\ell_2 \approx 4.00$. Согласно теореме 1 система трансцендентных уравнений (9) имеет решение $(t_1,T) \approx (1.60, 2\pi)$ при выбранных значениях параметров ℓ_1, ℓ_2, m_1, m_2 и $\gamma_s = \gamma_1$.

Пусть $k = 2$ при тех же значениях параметров. Условие 1) теоремы 1 выполняется. Величина $t_1 \approx 0.33$ не удовлетворяет условию 2) теоремы 1. Однако при $m_2 = 11.39$ величина $t_1 \approx 1.60$ удовлетворяет этому условию, и, следовательно, система (9) имеет решение $(t_1, T/2) \approx (1.60, \pi)$ при значениях параметров, которые отличаются только значением параметра m_2.

В соответствии с условием 4) теоремы 2 для решения (t_1,T) системы (9) рассчитываем точки переключения X^1, X^2 решения канонической системы по формулам (10), (11). Имеем

$$X^1 \approx (-5.36, 4.62, 2.52)^{\text{т}}, \quad X^2 \approx (-28.57, 4.46, 0.77)^{\text{т}}.$$

Далее находим точки переключения Y^1, Y^2 решения исходной системы. Получаем

$$Y^1 \approx (39.82, -13.66, -7.88)^{\text{т}}, \quad Y^2 \approx (-725.67, 265.65, 143.82)^{\text{т}}.$$

Таким образом, в пространстве параметров исходной системы определены значения, которым соответствует T-периодическое решение с двумя точками переключения за период.

На рисунке представлена траектория этого 2π-периодического решения с двумя точками переключения в фазовом пространстве (x_1,x_2,x_3) канонической системы с параметрами $\ell_1 = 0.75$, $m_1 = -1.11$, $m_2 = 5.30$, $\ell_2 \approx 4.00$ и первым моментом времени переключения $t_1 \approx 1.60$. Для построения траектории решения в качестве начальной точки выбрана X^1. Отмечены точки переключения X^1 и X^2 на плоскостях переключения L_1 и L_2 соответственно; эти плоскости ортогональны оси x_1, поскольку первая компонента γ_1 вектора обратной связи Γ ненулевая, причём $-28.57 \leqslant x_1 \leqslant -5.36$.

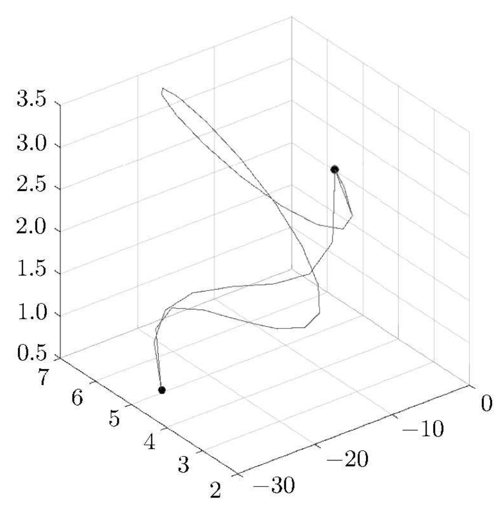

Рисунок. Периодическое решение с параметрами $(t_1, 2\pi, X^1, X^2)$.

Заключение. Для ненулевых простых вещественных собственных чисел матрицы системы (1) доказана теорема существования T-периодического решения с двумя точками переключения за период. Численный пример подтверждает конструктивность условий теоремы и демонстрирует её применение. Найдены условия, при которых система (1) не имеет двухточечно-колебательного с временем возврата T/k решения, изображающая точка которого начинает своё движение на гиперплоскости L_1 и движется по траектории согласно предписанной ей последовательности. Отметим, что предложенный в работе подход можно применить к более широкому, чем рассмотренный, классу систем – к системам, в которых нелинейность представляет собой монотонную функцию неидеального реле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 2. М., 2004.
2. *Евстафьева В.В.* О необходимых условиях существования периодических решений в динамической системе с разрывной нелинейностью и внешним периодическим воздействием // Уфимск. мат. журн. 2011. Т. 3. № 2. С. 20–27.
3. *Yevstafyeva V.V.* Existence of a unique kT-periodic solution for one class of nonlinear systems // J. Sib. Fed. Univ. Math. & Phys. 2013. V. 6. № 1. P. 136–142.
4. *Visintin A.* Ten issues about hysteresis // Acta Appl. Math. 2014. V. 132. № 1. P. 635–647.
5. *Fang L., Wang J., Zhang Q.* Identification of extended Hammerstein systems with hysteresis-type input nonlinearities described by Preisach model // Nonlin. Dyn. 2015. V. 79. № 2. P. 1257–1273.
6. *Евстафьева В.В.* Об условиях существования двухточечно-колебательного периодического решения в неавтономной релейной системе с гурвицевой матрицей // Автоматика и телемеханика. 2015. № 6. С. 42–56.
7. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of periodic solutions to automatic control system with relay nonlinearity and sinusoidal external influence // Int. J. Robust Nonlin. Contr. 2017. V. 27. № 2. P. 204–211.
8. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of subharmonic solutions to a hysteresis system with sinusoidal external influence // Electron. J. Differ. Equat. 2017. № 140. P. 1–10.
9. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* On uniqueness and properties of periodic solution of second-order nonautonomous system with discontinuous nonlinearity // J. Dyn. Contr. Syst. 2017. V. 23. № 4. P. 825–837.
10. *Евстафьева В.В.* Периодические решения системы дифференциальных уравнений с гистерезисной нелинейностью при наличии нулевого собственного числа // Укр. мат. журн. 2018. Т. 70. № 8. С. 1085–1096.
11. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay // Int. J. Contr. 2020. V. 93. № 4. P. 763–770.
12. *Пановко Я.Г.* Основы прикладной теории колебаний и удара. Л., 1976.
13. *Покровский А.В.* Существование и расчёт устойчивых режимов в релейных системах // Автоматика и телемеханика. 1986. № 4. С. 16–23.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 06.02.2019 г.
После доработки 11.11.2019 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 2, с. 179–186

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕМОНОТОННЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЛЯПУНОВА

© 2021 г. Л. Б. Княжище

Представлены приёмы доказательства новых достаточных признаков устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения неавтономного дифференциального уравнения с использованием немонотонных незнакоопределённых функций Ляпунова. В качестве примера применения доказанных утверждений установлены новые признаки устойчивости градиентной системы, положение равновесия которой не является изолированным, а функция, задающая правую часть, не имеет минимума в точке покоя. Указан признак устойчивости гамильтоновой системы для случая нестрогого минимума потенциальной энергии в точке покоя.

DOI: 10.31857/S0374064121020059

В настоящей работе представлены новые условия устойчивости решений дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = f(t, y), \quad f(t, 0) \equiv 0, \tag{1}$$

где $t \in \mathbb{R}_+$, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Относительно функции f предполагается, что её свойства обеспечивают существование, единственность и непрерывную зависимость от начальных данных задачи Коши для уравнения (1). Решение этого уравнения с начальными данными $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ обозначим через $y(t, t_0, y_0)$. Всюду, где указание на конкретные начальные данные (t_0, y_0) несущественно, будем использовать для обозначения решения уравнения (1) укороченную запись $y(t)$.

Через $B(y, H)$ обозначаем шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса H с центром в точке y, а через S_r – сферу в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в нуле. Граница множества M обозначается через $\operatorname{Fr} M$, а множество натуральных чисел – через $\mathbb{N}$. Стандартную норму и скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ обозначаем через $\|\cdot\|$ и $(\cdot\,,\cdot)$ соответственно.

Очевидно, что $y(t, 0, 0) \equiv 0$ является решением уравнения (1), которое ниже называется нулевым решением и устойчивость по Ляпунову которого будем изучать для начального момента времени $t_0 = 0$.

Скалярную монотонную функцию $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такую, что $a(0) = 0$ и $a(\tau) > 0$ для всех $\tau > 0$, традиционно будем называть функцией *класса Хана*. Функция $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $V(t, 0) \equiv 0$, называется определённо положительной (определённо отрицательной), если для некоторой класса Хана функции a верно неравенство $V(t, y) \geqslant a(\|y\|)$ (неравенство $V(t, y) \leqslant -a(\|y\|)$) для всех (t, y), принадлежащих множеству $\mathbb{R}_+ \times B(0, H)$. Если же на этом множестве выполнено неравенство $V(t, y) \geqslant 0$ (неравенство $V(t, y) \leqslant 0$), то функция V называется знакоположительной (знакоотрицательной). Определённо положительные и определённо отрицательные функции называются знакоопределёнными, а знакоположительные и знакоотрицательные – знакопостоянными. Говорят, что функция V допускает бесконечно малый высший предел, если для некоторой класса Хана функции b верно неравенство $V(t, y) \leqslant a(\|y\|)$ при всех $(t, y) \in \mathbb{R}_+ \times B(0, H)$.

Хорошо известны классические достаточные условия устойчивости или асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1), формулируемые с помощью знакоопределённых функций Ляпунова.

Устойчивость нулевого решения уравнения (1) при любом начальном моменте времени будет гарантирована, если верно

Утверждение 1. *Если для уравнения (1) найдётся непрерывная положительно определённая функция $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $V(t, 0) \equiv 0$, такая, что для всех начальных данных $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}_+ \times B(0, H)$ функция $V(t, y(t, t_0, y_0))$ переменной $t \geqslant t_0$ не возрастает, то нулевое решение $y \equiv 0$ уравнения (1) устойчиво.*

Здесь не требуется гладкости функции $V(t, y)$. При этом проверка условия "не возрастания функции $V(t, y)$ вдоль решений" для негладких функций может оказаться непростой задачей. Для дифференцируемых функций $V(t, y)$ такая задача упрощается и может быть выполнена без знания решений, поскольку верна следующая

Теорема 1. *Если для уравнения (1) найдётся непрерывно дифференцируемая положительно определённая функция $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $V(t, 0) \equiv 0$, такая, что для всех $(t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \times B(0, H)$ верно неравенство*

$$\dot{V}(t, y) = V'_t(t, y) + V'_y(t, y) f(t, y) \leqslant 0, \tag{2}$$

то нулевое решение $y \equiv 0$ уравнения (1) устойчиво.

Если дополнительно функция V допускает бесконечно малый высший предел и вместо условия знакоотрицательности (2) выполняется для всех $(t, y) \in \mathbb{R}_+ \times B(0, H)$ условие отрицательной определённости производной функции Ляпунова вдоль решений уравнения (1)

$$\dot{V}(t, y) = V'_t(t, y) + V'_y(t, y) f(t, y) \leqslant -\omega(\|y\|), \tag{3}$$

то нулевое решение $y \equiv 0$ уравнения (1) асимптотически устойчиво.

Анализируя условия теоремы 1, нетрудно увидеть, что условия (2), (3) гарантируют монотонное поведение функции Ляпунова вдоль решений уравнений (1). Совершенно очевидно, что монотонный характер поведения функции V вдоль всех решений связан с тем, что условия (2) и (3) означают соответственно знакоотрицательность и определённую отрицательность производной $\dot{V}(t, y)$ функции Ляпунова вдоль решений во всех точках окрестности $\mathbb{R}_+ \times B(0, H)$ нулевого решения $y \equiv 0$ уравнения (1).

1. Немонотонные вдоль решений знакоопределённые функции Ляпунова. Нашей первой целью будет формулировка и доказательство условий устойчивости нулевого решения уравнения (1), использующих менее жёсткие, чем в теореме 1, требования к производной функции Ляпунова в точках множества $\mathbb{R}_+ \times B(0, H)$. Точнее говоря, мы попытаемся отказаться от требования повсеместного в $\mathbb{R}_+ \times B(0, H)$ выполнения условия (2). При этом всюду ниже будем называть такие вспомогательные функции *функциями Ляпунова*, возможно, несколько отступая от классического понимания этого термина.

Введём предварительно несколько обозначений. Пусть задана непрерывная на $\mathbb{R}_+ \times B(0, H)$ функция V и задано некоторое решение $y(t, 0, y_0)$ с начальными данными $(0, y_0)$. Положим $V_r(t) = \max\limits_{y_0 \in S_r} V(t, y(t, 0, y_0))$ для всякого $t \geqslant 0$. Обозначим

$$M_r(t) = \{y_0 \in S_r : V(t, y(t, 0, y_0)) = V_r(t)\}$$

для всех $t \geqslant 0$, $r > 0$. Образ любого множества начальных данных S из $\mathbb{R}^n$ при отображении $y_0 \mapsto y(t, 0, y_0)$ будем обозначать $y(t, 0, S)$. Очевидно, что множество $M_r(t)$ не пусто вследствие непрерывности функции $V(t, y)$. По построению множеств $M_r(t)$ при всяком $t > 0$ функция $V(t, y(t, 0, y_0))$ достигает максимума по $y_0 \in S_r$ при $y_0 \in M_r(t)$. С другой стороны, при всяком $t > 0$ функция $V(t, y)$ достигает максимального значения на множестве $y(t, 0, S_r)$ в точках множества $y(t, 0, M_r(t))$.

Одну из основных идей данной работы, лежащих в основе поиска минимального (в некотором смысле) множества, содержащего информацию об устойчивости положения равновесия, описывает

Лемма 1. *Если для уравнения (1) найдётся непрерывная положительно определённая функция $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $V(t, 0) \equiv 0$, такая, что функция $V_r(t)$ при любом $0 \leqslant r \leqslant H$ является невозрастающей, то нулевое решение $y \equiv 0$ уравнения (1) устойчиво.*

Доказательство. Пусть задано некоторое число $0 < \varepsilon \leqslant H$. Укажем число $\delta > 0$ такое, что решения уравнения (1), начинающиеся в шаре радиуса $\delta > 0$, не выходят из шара радиуса $\varepsilon > 0$. Для этого вычислим $v = \min\limits_{y \in S_\varepsilon} V(0, y)$. В силу положительной определённости функции $V(0, y)$ можно утверждать, что $v > 0$. По числу $v > 0$, используя непрерывность функции $V(0, y)$, выберем число $\delta(\varepsilon) > 0$ таким, чтобы число $V_\delta = \max\limits_{y \in B(0,\delta)} V(0, y)$ удовлетворяло неравенству $V_\delta < v$. По определению функции $V_r(t)$ и в силу условия её невозрастания для всякого $y_0 \in B(0, \delta)$ и всех $t \geqslant 0$ верны неравенства

$$V(t, y(t, 0, y_0)) \leqslant V_{\|y_0\|}(t) \leqslant V_\delta < v.$$

Отсюда очевидно следует, что решения уравнения (1), начинающиеся в шаре радиуса $\delta(\varepsilon) > 0$, не выходят из шара радиуса $\varepsilon > 0$, что и означает устойчивость по Ляпунову нулевого решения $y \equiv 0$ уравнения (1). Лемма доказана.

Для дальнейшего наиболее существенно то, что при выполнении условий леммы 1 функция $V(t, y(t, 0, y_0))$, $t \geqslant 0$, может и не быть монотонной вдоль всех решений уравнения (1). На основании леммы 1 можно сформулировать признак устойчивости, описывающий минимальное (в некотором смысле) множество, на котором требуется проверка условий (2) или (3) для заключения соответственно об устойчивости или асимптотической устойчивости нулевого решения $y \equiv 0$ уравнения (1).

Лемма 2. *Если для уравнения (1) найдётся непрерывно дифференцируемая положительно определённая функция $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $V(t, 0) \equiv 0$, такая, что при любом $0 < r \leqslant H$ неравенства (2) выполнены для каждого $t \geqslant 0$ и всех $y = y(t, 0, y_0)$, для которых $y_0 \in M_r(t)$, то нулевое решение $y \equiv 0$ уравнения (1) устойчиво.*

Если дополнительно функция V допускает бесконечно малый высший предел и для каждого $t \geqslant 0$ и всех $y = y(t, 0, y_0)$, для которых $y_0 \in M_r(t)$, выполняется условие (3), то нулевое решение $y \equiv 0$ уравнения (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство получается, если учесть компактность множества $M_r(t)$, непрерывность функции $\dot{V}(t, y) = V'_t(t, y) + V'_y(t, y) f(t, y)$ – производной функции $V(t, y)$ вдоль решений – и условия (2) или (3), гарантирующие неположительность или определённую отрицательность величины $\dot{V}(t, y)$ в тех точках $y = y(t, 0, y_0)$, в которых функция $V(t, y)$ достигает максимального значения на множестве $y(t, 0, S_r)$, т.е. в точках множества $y(t, 0, M_r(t))$.

Для продолжения доказательства леммы нам понадобится следующее вспомогательное

Утверждение 2. *Пусть для некоторой непрерывно дифференцируемой (не обязательно знакопостоянной) функции $V(t, y)$ при некотором $r > 0$ и каждом $t > 0$ для точек $y = y(t, 0, y_0)$, в которых функция $V(t, y)$ достигает максимального значения на множестве $y(t, 0, S_r)$, т.е. для точек множества $y(t, 0, M_r(t))$, верно неравенство $\dot{V}(t, y(t, 0, y_0)) \leqslant 0$. Тогда функция $V_r(t)$ является невозрастающей.*

Если же выполнено более сильное условие $\dot{V}(t, y(t, 0, y_0)) < -\varepsilon < 0$, то функция $V_r(t)$ является монотонно убывающей и при этом для $\tau > 0$ верна оценка $V_r(t+\tau) - V_r(t) < -\varepsilon\tau$.

Доказательство утверждения. Покажем сначала, что функция $V_r(t)$ является невозрастающей, если выполнено условие $\dot{V}(t, y(t, 0, y_0)) < -\varepsilon < 0$ для всех точек $y_0 \in M_r(t)$. Предположим, что это не так: найдётся $t^* \geqslant 0$ и последовательность точек $t_n > t^*$, $t_n \to t^*$ при $n \to \infty$, таких, что $V_r(t_n) > V_r(t^*)$. Очевидно, что найдутся точки $y_0^n \in M_r(t_n)$, для которых $V(t_n, y(t_n, 0, y_0^n)) = V_r(t_n)$. Тогда последовательность $y_0^n \in M_r(t_n)$ в силу компактности сферы S_r может быть выбрана такой, что для некоторой точки $y_0^* \in S_r$ верно, что $y_0^n \to y_0^*$ при $n \to \infty$. Очевидно, что $y_0^* \in M_r(t^*)$ и $V(t_n, y(t_n, 0, y_0^n)) = V(t_n, y(t_n, t^*, y(t^*, 0, y_0^n)))$. Поскольку $\dot{V}(t, y(t, 0, y_0^*)) < -\varepsilon < 0$ при $t \geqslant t^*$, то, в силу непрерывности $\dot{V}(t, y)$ и непрерывной зависимости решений от начальных данных, для достаточно больших n выполняется неравенство $\dot{V}(t, y(t, t^*, y(t^*, 0, y_0^n))) \leqslant -\varepsilon < 0$ при $t^* \leqslant t \leqslant t_n$. Отсюда легко следуют соотношения

$$V_r(t_n) = V(t_n, y(t_n, 0, y_0^n)) = V(t_n, y(t_n, t^*, y(t^*, 0, y_0^n))) \leqslant$$

$$\leqslant V(t^*, y(t^*, 0, y_0^n)) - \varepsilon(t_n - t^*) < V_r(t^*) - \varepsilon(t_n - t^*) < V_r(t^*).$$

Полученное противоречие с выбором точек $t_n > t^*$, $t_n \to t^*$ при $n \to \infty$, доказывает, что функция $V_r(t)$ является невозрастающей, если выполнено условие $\dot V(t, y(t,0,y_0)) < -\varepsilon < 0$ для точек множества $y(t,0,M_r(t))$.

Докажем теперь, что функция $V_r(t)$ является невозрастающей, если выполнено условие $\dot V(t, y(t,0,y_0)) \leqslant 0$ для точек множества $y(t,0,M_r(t))$. Рассмотрим функции

$$V_\varepsilon(t,y) = V(t,y) - \varepsilon t.$$

Через M_r^ε обозначим множество M_r для функции V_ε. Для каждой из этих функций очевидно верны неравенства $\dot V_\varepsilon(t, y(t,0,y_0)) < -\varepsilon < 0$ для точек соответствующего этой функции множества $y(t,0,M_r^\varepsilon(t))$, так как множество $y(t,0,M_r^\varepsilon(t))$ не изменяется и при любом $\varepsilon > 0$ совпадает с множеством $y(t,0,M_r(t))$. Согласно только что доказанному, функции $V_r^\varepsilon(t)$ являются невозрастающими. Следовательно, не возрастает и функция $V_r(t)$, являющаяся поточечным пределом функций $V_r^\varepsilon(t)$.

Теперь для завершения доказательства утверждения нам остаётся показать, что если $\dot V(t, y(t,0,y_0)) < -\varepsilon < 0$ для точек множества $y(t,0,M_r(t))$, то для всех $t > 0$ и $\tau > 0$ верна оценка $V_r(t+\tau) - V_r(t) < -\varepsilon\tau$. Рассмотрим функцию $V_\varepsilon(t,y) = V(t,y) + \varepsilon t$. Для этой функции верно неравенство $\dot V_\varepsilon(t, y(t,0,y_0)) \leqslant 0$ для точек множества $y(t,0,M_r^\varepsilon(t))$, совпадающего с множеством $y(t,0,M_r(t))$. Следовательно, функция $V_r^\varepsilon(t)$, которая совпадает с функцией $V_r(t) + \varepsilon t$, не возрастает, а значит, для $\tau > 0$ верна оценка

$$V_r(t+\tau) - V_r(t) < -\varepsilon\tau.$$

Утверждение доказано.

Вернёмся к доказательству леммы. Устойчивость нулевого решения $y \equiv 0$ уравнения (1) очевидна, так как при выполнении условий данной леммы вследствие справедливости утверждения 2 выполнены условия леммы 1.

Установим асимптотическую устойчивость нулевого решения $y \equiv 0$ уравнения (1), если выполнены указанные в формулировке леммы дополнительные условия.

Поскольку нулевое решение $y \equiv 0$ устойчиво, то по числу H можно указать число $h > 0$ такое, что решения, начинающиеся в шаре радиуса h, не покидают шар радиуса H. Покажем, что всякое решение, начинающееся в шаре радиуса h, с течением времени стремится к нулевому решению $y \equiv 0$ уравнения (1).

Предположим, что это не так. Это означает, что найдутся решение $y(t,0,y_0)$, $\|y_0\| < h$, и последовательность моментов времени $t_n > 0$, $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$, такие, что $\|y(t_n,0,y_0)\| > \varepsilon > 0$ для некоторого ε и всех n. Поскольку функция $V(t,y)$ положительно определена, то существует число $v > 0$ такое, что $V(t, y(t_n,0,y_0)) > v$ для всех n. Положим $r = \|y_0\|$ и рассмотрим функцию $V_r(t)$. Согласно определению этой функции выполняется неравенство $V_r(t_n) \geqslant V(t, y(t_n,0,y_0)) > v$ для всех n. Отсюда в силу того, что функция $V_r(t)$ является невозрастающей, следует неравенство $V_r(t) \geqslant v$ для всех $t > 0$.

Учитывая, что $V(t, y(t,0,y_0)) = V_r(t) > v$ для всех $y_0 \in M_r(t)$ и каждого $t > 0$, и используя наличие бесконечно малого высшего предела у функции $V(t,y)$, приходим к заключению, что для всех $y_0 \in M_r(t)$ и каждого $t > 0$ при некотором $\varepsilon_1 > 0$ выполняется неравенство $\|y(t,0,y_0)\| > \varepsilon_1 > 0$. Теперь из того, что для всех $y_0 \in M_r(t)$ и каждого $t > 0$, согласно условиям леммы 2, выполняется неравенство (3), вытекает неравенство

$$\dot V(t, y(t,0,y_0)) \leqslant -\omega(\varepsilon_1) < 0.$$

Таким образом, выполнены условия второй части утверждения 2, а значит, имеет место неравенство $V_r(t) < V_r(0) - \omega(\varepsilon_1)t$. Для больших t это неравенство противоречит тому, что $V(t, y(t,0,y_0)) = V_r(t) > v$. Полученное противоречие доказывает асимптотическую устойчивость. Лемма доказана.

Очевидно, что совокупность множеств $(t, y(t,0,M_r(t)))$, как правило, значительно меньше множества $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, однако её построение может быть сопряжено с трудностями, сравнимыми с нахождением решений.

На основании леммы 2 установим следующий признак устойчивости, не требующий непосредственного построения множеств $M_r(t)$.

Теорема 2. *Если для уравнения (1) найдётся непрерывно дифференцируемая положительно определённая функция* $V:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$, $V(t,0)\equiv 0$, *такая, что неравенства (2) выполнены для каждого* $t\geqslant 0$ *и всех* $y=y(t,0,y_0)$, *для которых найдётся константа* $c(t,y_0)\in\mathbb{R}$ *такая, что*

$$V'_y(t,y(t,0,y_0))y'_{y_0}(t,0,y_0)=c(t,y_0)y_0, \tag{4}$$

то нулевое решение $y\equiv 0$ *уравнения (1) устойчиво.*

Если дополнительно V *допускает бесконечно малый высший предел и для каждого* $t\geqslant 0$ *и всех* $y=y(t,0,y_0)$, *для которых выполняется условие (4), выполнено условие (3), то нулевое решение* $y\equiv 0$ *уравнения (1) асимптотически устойчиво.*

Доказательство получить достаточно просто, если заметить, что условие (4) является необходимым условием [1, с. 205] достижения функцией $V(t,y(t,0,y_0))$ экстремума в точке $(t,y(t,0,y_0))$ на сфере $S_{\|y_0\|}$. Пусть $M^1_{\|y_0\|}(t)$ – это множество, при каждом $t\geqslant 0$ включающее точки $y=y(t,0,y_0)$, для которых найдётся константа $c(t,y_0)\in\mathbb{R}$ такая, что выполнено условие (4). Очевидно включение $M_{\|y_0\|}(t)\subset M^1_{\|y_0\|}(t)$. Отсюда следует, что неравенства (2) справедливы для каждого $t\geqslant 0$ и всех $y=y(t,0,y_0)$, для которых $y_0\in M_{\|y_0\|}(t)$. Это означает, что выполнены условия леммы 2. Теорема доказана.

В приведённых выше леммах и в теореме 2 используются положительно определённые функции, которые, в принципе, могут быть, в отличие от функций, удовлетворяющих классическим требованиям второго метода Ляпунова, немонотонными вдоль решений уравнения (1). Это связано с тем, что требования к знаку производной $\dot V(t,y)$ вдоль решений уравнения (1) предъявляются не на всей окрестности положения равновесия, а только в тех точках $y_0\in M_{\|y_0\|}(t)$, в которых при заданном t функция Ляпунова $V(t,y(t,0,y_0))$ достигает максимума на сфере $S_{\|y_0\|}$.

2. Условия устойчивости для незнакопостоянных функций Ляпунова. Приведём теперь достаточное условие устойчивости, допускающее использование даже знакопеременных функций, не обязательно являющихся монотонными вдоль решений уравнения (1). Для случая знакопостоянных, но не знакоопределённых функций данные утверждения представляют собой дополнения к результатам работы [2].

Теорема 3. *Пусть для уравнения (1) найдутся число* $H>0$, *непрерывно дифференцируемая функция* $V:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $V(t,0)\equiv 0$, *последовательность чисел* r_n, $n\in\mathbb{N}$, $r_n\to 0$ *при* $n\to\infty$, *и последовательность окрестностей* $M_n\subset B(0,r_n)$ *точки* $y=0$ *такие, что неравенства (2) выполнены для каждого* $t\geqslant 0$ *и всех* $y\in B(0,H)$, *для которых* $V(t,y)>0$. *Если при этом для любого* $t\geqslant 0$ *верно неравенство*

$$\min_{y\in \operatorname{Fr} M_n} V(t,y)>0, \tag{5}$$

то нулевое решение $y\equiv 0$ *уравнения (1) устойчиво.*

Доказательство. Установим устойчивость по Ляпунову нулевого решения $y\equiv 0$ уравнения (1).

Выберем произвольное $\varepsilon>0$. Покажем существование $\delta>0$ такого, что $\|y(t,0,y_0)\|\leqslant\varepsilon$, если $\|y_0\|\leqslant\delta$. Для этого по величине $\varepsilon>0$ выберем число r_{n_ε} из последовательности, указанной в условиях теоремы, таким, чтобы выполнялось неравенство $r_{n_\varepsilon}<\varepsilon$. Из условия (5) следует, что

$$\min_{y\in \operatorname{Fr} M_{n_\varepsilon}} V(t,y)>m(\varepsilon)>0$$

для некоторого $m(\varepsilon)$. Непрерывность функции V позволяет выбрать $\delta>0$ таким образом, что $V(0,y_0)\leqslant m(\varepsilon)$, если $\|y_0\|\leqslant\delta$.

Покажем, что выбранное выше число $\delta>0$ является искомым. Действительно, рассмотрим величину $\|y(t,0,y_0)\|$, где $\|y_0\|\leqslant\delta$, и допустим, что при некотором t верно равенство

$\|y(t,0,y_0)\| = \varepsilon$. Тогда при некотором t^* справедливо включение $\|y(t^*,0,y_0)\| \in \operatorname{Fr} M_{n_\varepsilon}$, а значит,

$$V(t^*, y(t^*,0,y_0)) > m(\varepsilon) \tag{6}$$

согласно построению числа $m(\varepsilon)$.

Рассмотрим теперь функцию $V(t, y(t,0,y_0))$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t^*$. Если при всех $0 \leqslant t \leqslant t^*$ верно неравенство $V(t, y(t,0,y_0)) > 0$, то $\dot V(t, y(t,0,y_0)) \leqslant 0$, а значит, функция $V(t, y(t,0,y_0))$ не возрастает на интервале $0 \leqslant t \leqslant t^*$. Отсюда несложно следует, что

$$V(t^*, y(t^*,0,y_0)) \leqslant V(0,y_0) \leqslant m(\varepsilon),$$

а это противоречит неравенству (6). Если же при некотором $0 \leqslant t_1 \leqslant t^*$ верно неравенство $V(t_1, y(t_1,0,y_0)) \leqslant 0$, то $V(t, y(t,0,y_0)) \leqslant 0$ при всех $t_1 \leqslant t \leqslant t^*$, поскольку $\dot V(t, y(t,0,y_0)) \leqslant 0$ при $V(t, y(t,0,y_0)) > 0$. Отсюда получаем $V(t^*, y(t^*,0,y_0)) \leqslant 0 < m(\varepsilon)$, что также противоречит неравенству (6). Теорема доказана.

Функцию, удовлетворяющую условиям теоремы 3, будем называть *вспомогательной функцией.* Теорема 3 предполагает использование вспомогательных функций, являющихся не знакопостоянными, т.е., возможно, имеющих отрицательные значения в сколь угодно малой окрестности нулевого решения, но заведомо имеющих знакоотрицательную производную. Хорошо известными примерами здесь могут служить градиентные и ряд механических систем с заданной функцией полной энергии.

Прежде чем перейти к рассмотрению этих примеров, приведём одно утверждение, в котором используются знакопостоянные вспомогательные функции для автономных уравнений (1). Пусть $\nabla f(y)$ и $Jf(y)$ обозначают градиент и матрицу вторых производных скалярной функции f в точке y.

Утверждение 3. *Пусть для автономного уравнения (1) найдутся число $H > 0$, непрерывно дифференцируемая функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V(0) \equiv 0$, последовательность чисел $r_n < H$, $n \in \mathbb{N}$, $r_n \to 0$ при $n \to \infty$, и последовательность чисел $\delta_n > 0$ такие, что неравенства (2) выполнены для всех $y \in B(0,H)$, для которых $V(y) > 0$. Если при этом $V(y) \geqslant 0$ при $r_n - \delta_n < \|y\| < r_n$, а для $y \in S_{r_n}$, для которых справедливы соотношения*

$$\nabla V(y) = c(y)y \quad \text{и} \quad (x, JV(y)x) - c(y) \geqslant 0 \tag{7}$$

для всех $x \in S_1$ таких, что $(y,x) = 0$, верно и неравенство $c(y) > 0$, то нулевое решение $y \equiv 0$ уравнения (1) устойчиво.

Доказательство легко следует из теоремы 3. Действительно, множество тех точек сферы $y \in S_{r_n}$, для которых верны соотношения (7), содержит в себе все точки, в которых функция $V(y)$ достигает минимума на сфере S_{r_n}. В свою очередь выполнение неравенства $c(y) > 0$ гарантирует, что функция $\min\limits_{y \in S_r} V(y)$ возрастает при r, близких к r_n. Поскольку $V(y) \geqslant 0$ при $r_n - \delta_n < \|y\| < r_n$, то $\min\limits_{y \in S_{r_n}} V(y) > 0$. Утверждение доказано.

3. Примеры. Проиллюстрируем применение теоремы 3 и утверждения 3 на нескольких примерах.

Пример 1. Градиентная система. Рассмотрим градиентную дифференциальную систему

$$\dot y = -\nabla f(y), \quad \nabla f(0) = 0, \quad y \in B(0,H). \tag{8}$$

Основываясь на теореме 3, нетрудно установить признак устойчивости положения равновесия системы (8), который можно использовать для изучения таких систем с функцией f, не имеющей даже нестрогого минимума в точке покоя.

Теорема 4. *Пусть для функции f найдутся последовательность чисел r_n, $n \in \mathbb{N}$, $r_n \to 0$ при $n \to \infty$, и последовательность окрестностей $M_n \subset B(0, r_n)$ точки $y = 0$ такие, что верно неравенство*

$$\min_{y \in \operatorname{Fr} M_n} f(y) > 0. \tag{9}$$

Тогда точка покоя $y \equiv 0$ системы (8) устойчива.

Доказательство следует из того, что в качестве вспомогательной функции можно взять функцию $V(y) = f(y)$. Здесь очевидно $\dot{V}(y) = -(\nabla f(y), \nabla f(y)) \leqslant 0$, а значит, выполнены все требования теоремы 3.

Если функция f оказывается не знакопеременной, а знакоположительной, т.е. имеет в точке покоя $y = 0$ нестрогий локальный минимум, то более удобным может оказаться использование утверждения 3. Применяя это утверждение, легко установить следующий признак устойчивости системы (8), не требующий построения набора окрестностей $M_n \subset B(0, r_n)$ точки $y = 0$.

Теорема 5. *Пусть функция f знакоположительна и найдётся последовательность чисел r_n, $n \in \mathbb{N}$, $r_n \to 0$ при $n \to \infty$, таких, что для всякого $\|y\| = r_n$, для которого выполняются соотношения*

$$\nabla f(y) = c(y)y \quad \text{и} \quad (x, Jf(y)x) - c(y) \geqslant 0 \tag{10}$$

для всех $x \in S_1$ таких, что $(y, x) = 0$, верно и неравенство $c(y) > 0$.

Тогда положение равновесия $y \equiv 0$ системы (8) устойчиво.

Доказательство очевидным образом следует из утверждения 3.

Нетрудно убедиться, что условия устойчивости теорем 3, 4 дополняют соответствующие результаты работ [3, 4], поскольку включают более широкий класс знакопеременных функций f и могут применяться тогда, когда точка покоя $y \equiv 0$ является не изолированной точкой покоя.

Пример 2. Гамильтонова система. Рассмотрим гамильтонову систему с традиционными уравнениями движения

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p), \tag{11}$$

где $q, p \in \mathbb{R}^n$, гамильтониан $H(q, p) = T(q, p) + U(q)$ – сумма кинетической и потенциальной энергий. Полная производная гамильтониана вдоль траекторий движения системы (11) тождественно равна нулю.

Здесь будем считать, что $T(q, p) = 2^{-1} p^{\mathrm{T}} B(q) p$ и матрица $B(q)$ непрерывно дифференцируемая и симметрическая, а $B(0)$ положительно определена. Потенциальная энергия $U(q)$ непрерывно дифференцируема и $U(0) = 0$, $\partial U(0)/\partial q = 0$.

Хорошо известна теорема Лагранжа–Дирихле, согласно которой если потенциальная энергия имеет в точке $q = 0$ строгий минимум, то положение равновесия $q = 0$, $p = 0$ устойчиво. В этом случае гамильтониан оказывается положительно определённой функцией Ляпунова. Вопрос о наличии устойчивости для случая нестрогого минимума потенциальной энергии в точке $q = 0$ оказывается очень сложным и наиболее полно изучен для случая, когда функция $U(q)$ аналитична в некоторой окрестности точки $q = 0$ [5, с. 82]. При этом Пенлеве, а затем и Уинтнер отмечали, что положение равновесия может быть устойчивым в некоторых ситуациях даже при не имеющей нестрогого локального минимума потенциальной энергии, а значит, при знакопеременном гамильтониане.

Приведём один из известных результатов для того, чтобы показать, что такого рода утверждения, обычно опирающиеся на собственные доказательства, непосредственно следуют из теоремы 3.

Утверждение 4. *Пусть для системы (11) найдётся последовательность чисел r_n, $n \in \mathbb{N}$, $r_n \to 0$ при $n \to \infty$, и последовательность окрестностей $M_n \subset B(0, r_n)$ точки $q = 0$ такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство*

$$\min_{q \in \operatorname{Fr} M_n} U(q) > 0. \tag{12}$$

Тогда положение равновесия $q = 0$, $p = 0$ системы (11) устойчиво.

Нетрудно видеть, что проверка выполнения условий утверждения 4 связана с необходимостью построения специального набора окрестностей, которые фигурируют в теореме 3. В то же время использование утверждения 3 для случая знакоположительной функции $U(q)$ позволяет избежать такой процедуры и свести проверку к более простым условиям.

Утверждение 5. *Пусть в системе (11) функция U знакоположительна и найдётся последовательность чисел r_n, $n \in \mathbb{N}$, $r_n \to 0$ при $n \to \infty$, таких, что для тех $q \in S_{r_n}$, для которых выполняются соотношения*

$$\nabla U(q) = c(q)q \quad \text{и} \quad (x, JU(q)x) - c(q) \geqslant 0 \tag{13}$$

для всех $x \in S_1$ таких, что $(q, x) = 0$, верно и неравенство $c(q) > 0$.

Тогда положение равновесия $q = 0$, $p = 0$ системы (11) устойчиво.

Доказательство непосредственно вытекает из утверждения 3, применённого к функции $H(q,p) = T(q,p) + U(q)$ как соответствующей вспомогательной функции. Действительно, во множестве точек q, удовлетворяющих условиям (13), содержатся все точки, в которых функция $U(q)$ достигает минимума на соответствующей сфере S_{r_n}. Выполнение для этих точек неравенства $c(q) > 0$ означает, что функция $\min\limits_{q \in S_r} U(q)$ возрастает по r в некоторой окрестности r_n. Теперь, учитывая, что функция U знакоположительна, а функция $T(q,p)$ положительно определена, получаем, что в пространстве пар (q,p) существует набор окрестностей $M_n \subset B(0, r_n)$ точки $(0,0)$, для которых верны неравенства $\min\limits_{(q,p) \in \operatorname{Fr} M_n} H(q,p) > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гороховик В.В.* Конечномерные задачи оптимизации. Минск, 2007.
2. *Гайшун И.В., Княжище Л.Б.* Условия устойчивости решений автономных вполне интегрируемых уравнений // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 8. С. 1453–1456.
3. *Княжище Л.Б.* Условия экстремума и признаки устойчивости градиентных систем // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 348–355.
4. *Absil P.A., Kurdyka K.* On the stable equilibrium points of gradient systems // Systems & Control Letters. 2006. V. 55. № 7. P. 573–577.
5. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М., 1980.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию 10.10.2020 г.
После доработки 10.10.2020 г.
Принята к публикации 11.12.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 2, с. 187–195

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926+531.36

О ЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КВАДРАТИЧНЫМ ИНТЕГРАЛОМ

© 2021 г. В. В. Козлов

Рассматриваются неавтономные линейные системы дифференциальных уравнений, допускающие зависящий от времени первый интеграл в виде квадратичной формы. Установлена двойственность между взаимно сопряжёнными линейными системами с квадратичными интегралами. Указаны условия симметричности спектра таких линейных систем относительно нуля. Доказано, что линейная система устойчива тогда и только тогда, когда она допускает первый интеграл в виде положительно определённой квадратичной формы. Исследованы инвариантные меры линейных систем с квадратичным интегралом, плотности которых – положительные функции времени. Указана в явном виде серия квадратичных интегралов, если известен один из них. Показано, что степень неустойчивости правильной линейной системы (число положительных точек спектра с учётом кратностей) не превосходит минимального из индексов инерции приводимого квадратичного интеграла.

DOI: 10.31857/S0374064121020060

1. Введение. Пусть

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

– автономная система линейных дифференциальных уравнений в n-мерном пространстве, допускающая первый интеграл в виде *невырожденной* квадратичной формы

$$F(x) = (Bx, x)/2, \quad B^* = B. \tag{1.2}$$

Скобка $(\,,)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

В [1] отмечены следующие свойства такой линейной системы (1.1):

1° $\operatorname{div}(Ax) = \operatorname{tr} A = 0$;

2° $f(-\lambda) = f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, где $f(\lambda) = |A - \lambda I|$ – характеристический многочлен матрицы A.

Далее, если система (1.1) невырождена (т.е. $|A| \neq 0$), то:

3° размерность n чётна;

4° система (1.1) допускает $n/2$ независимых квадратичных интеграла;

5° система устойчива тогда и только тогда, когда она имеет положительно определённый квадратичный интеграл.

В общем невырожденном случае (когда $|A| \neq 0$ и $|B| \neq 0$) линейная система (1.1) с квадратичным интегралом (1.2) оказывается гамильтоновой: симплектическую структуру в $\mathbb{R}^n$ задаёт невырожденная кососимметрическая матрица $\Omega = BA^{-1}$, а гамильтонианом служит квадратичный интеграл (1.2) [1]. Это наблюдение распространено на линейные системы в гильбертовом пространстве в работе [2]. Полная интегрируемость таких бесконечномерных гамильтоновых систем обсуждается в [3].

С этой точки зрения свойство 1° отвечает классической теореме Лиувилля о сохранении фазового объёма потоком гамильтоновой системы, а свойство 2° соответствует хорошо известному свойству спектра линейной гамильтоновой системы (он симметричен не только относительно вещественной оси, но и относительно чисто мнимой оси комплексной плоскости). Следует подчеркнуть, что свойства 1° и 2° имеют место и в случае вырожденной матрицы A, когда линейная система (1.1), вообще говоря, не гамильтонова.

Пусть u – степень неустойчивости невырожденной линейной системы (1.1): количество собственных значений матрицы A в правой комплексной полуплоскости (с учётом кратности), а i^- и i^+ – индексы инерции квадратичной формы (1.2) (ввиду её невырожденности $i^- + i^+ = n$). Тогда имеют место следующие соотношения:

6° $u \leqslant \min\{i^-, i^+\}$;

7° $u \equiv i^- \mod 2$.

Неравенство 6° доказано в [4] с помощью теории нормальных форм Вильямсона линейных гамильтоновых систем; другое доказательство дано в [5]. Сравнение 7° представляет собой обобщение классической теоремы Кельвина о возможности гироскопической стабилизации положений равновесия натуральных механических систем [1].

В настоящей работе рассматривается более общий случай, когда матрицы A и B зависят от времени. Установлены аналоги свойств 1°–6° для неавтономных линейных систем. При этом спектр линейной системы определяется обычным способом через характеристические показатели Ляпунова. Чтобы доказать (и правильно сформулировать) аналог теоремы Кельвина (свойство 7°) в неавтономном случае, надо использовать более тонкие характеристики решений (например, характеристические частоты [6, 7]). Но этот вопрос здесь не рассматривается.

Предполагается, что читатель знаком с основными определениями и свойствами характеристических показателей Ляпунова решений неавтономных линейных систем дифференциальных уравнений (см. по этому поводу, например, [8]).

Приведём пример из теории малых колебаний механических систем около положения равновесия с учётом так называемых гироскопических сил. Линеаризованное уравнение движения имеет следующий вид:

$$M\ddot{x} + G(t)\dot{x} + Px = 0, \quad x \in \mathbb{R}^m. \tag{1.3}$$

Здесь $M^* = M > 0$ – матрица инерции, P – симметрическая матрица, задающая потенциальную энергию системы

$$V = (Px, x)/2,$$

а G – кососимметрическая матрица (в нашем случае зависящая от времени), порождающая гироскопическую силу $-G\dot{x}$.

Уравнение (1.3) допускает интеграл энергии

$$F = \frac{1}{2}(M\dot{x}, \dot{x}) + \frac{1}{2}(Px, x). \tag{1.4}$$

Гироскопические силы не оказывают влияния на сохранность полной энергии системы.

2. Линейные неавтономные системы. Наш основной объект – линейная неавтономная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

допускающая квадратичный интеграл

$$F(x, t) = (B(t)x, x)/2. \tag{2.2}$$

Элементы матрицы A (матрицы B) считаются непрерывными (непрерывно дифференцируемыми) функциями времени $t \in \mathbb{R}$. Матрицы A и B связаны следующим соотношением:

$$\dot{B} + BA + A^*B = 0. \tag{2.3}$$

В дальнейшем существенную роль играет линейная система дифференциальных уравнений, сопряжённая к системе (2.1):

$$\dot{y} = -A^*(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.4}$$

Предложение 2.1. *Если матрица $B(t)$ невырождена при всех t, то квадратичная форма*

$$H(y, t) = (B^{-1}(t)y, y)/2 \tag{2.5}$$

является первым интегралом сопряжённой системы (2.4).

Действительно, умножая тождество (2.3) справа и слева на B^{-1} и используя легко проверяемое равенство

$$(B^{-1})^{\cdot} = -B^{-1}\dot{B}B^{-1},$$

получаем

$$(B^{-1})^{\cdot} + B^{-1}(-A^*) + (-A)B^{-1} = 0,$$

что доказывает инвариантность квадратичной формы (2.5) относительно потока сопряжённой системы.

Каждое из отображений

$$A \mapsto -A^* \quad \text{и} \quad B \mapsto B^{-1}$$

инволютивно: его квадрат – тождественное отображение. Предложение 2.1 устанавливает любопытную двойственность между сопряжёнными линейными системами с невырожденными квадратичными интегралами. Эту двойственность более выразительно представляет

Предложение 2.2. *Пусть $|B(t)| \neq 0$ при всех t. Тогда линейная подстановка*

$$y = B(t)x \tag{2.6}$$

переводит линейную систему (2.4) в сопряжённую ей систему (2.1).

Обратная подстановка $x = B^{-1}(t)y$ переводит систему (2.1) в (2.4).

Доказательство. Проводя замену переменных (2.6) в линейной системе дифференциальных уравнений (2.4), получаем

$$B\dot{x} + \dot{B}x = -A^*Bx,$$

или

$$\dot{x} = -(B^{-1}\dot{B} + B^{-1}A^*B)x. \tag{2.7}$$

Далее, из тождества (2.3) следует, что

$$-(B^{-1}\dot{B} + B^{-1}A^*B) = A.$$

Следовательно, линейные системы (2.7) и (2.1) совпадают между собой, что и требовалось доказать.

Напомним, что невырожденная при всех t из рассматриваемого временнóго промежутка матрица $L(t)$ с непрерывно дифференцируемыми элементами называется *матрицей Ляпунова*, если на рассматриваемом промежутке $L(t)$ и $\dot{L}(t)$ ограничены и $|L(t)| \geqslant l > 0$. Матрица $L^{-1}(t)$ также будет матрицей Ляпунова.

Следствие 2.1. *Если $B(t)$ – матрица Ляпунова, то спектры линейных систем (2.1) и (2.4), содержащие, возможно, и несобственные значения, совпадают между собой.*

Действительно, при линейных преобразованиях, задаваемых матрицами Ляпунова, характеристические показатели решений сохраняются.

Пусть матрица $A(t)$ ограничена (в промежутке $[t_0, \infty)$). Тогда (по теореме Ляпунова) полный спектр линейной системы (2.1) (и ей сопряжённой) состоит из n вещественных чисел.

Теорема 2.1. *Пусть $B(t)$ – матрица Ляпунова. Тогда линейная система (2.1) с ограниченной матрицей $A(t)$ правильная тогда и только тогда, когда её полный спектр симметричен относительно нуля.*

Тем же свойством обладает и сопряжённая линейная система.

Доказательство. Согласно теореме Перрона критерий правильности линейной системы заключается в условии симметричности относительно нуля полных спектров этой системы и системы, ей сопряжённой. Остаётся воспользоваться следствием 2.1. Теорема доказана.

Заключение теоремы 2.1 – это аналог свойства 2° для автономных систем, приведённого во введении. Здесь роль автономности играет условие правильности линейной неавтономной системы.

Следствие 2.2. *Пусть $B(t)$ – матрица Ляпунова, а линейная система (2.1) с ограниченной матрицей $A(t)$ правильная. Если её спектр не содержит нуля, то n чётно.*

Следствие 2.2 представляет собой аналог для неавтономных линейных систем с зависящим от времени квадратичным интегралом свойства 3°.

Следствие 2.3. *Пусть* $B(t)$ *– матрица Ляпунова, а линейная система (2.1) с ограниченной матрицей* $A(t)$ *правильная. Тогда*

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\operatorname{tr}A(t)\,dt=0.$$

Действительно, поскольку система (2.1) правильная, то предел слева существует и равен сумме всех характеристических показателей (с учётом кратностей) из спектра этой системы. Но (по теореме 2.1) эта сумма равна нулю.

На самом деле утверждение следствия 2.3 справедливо и без предположения о правильности системы (2.1). Это вытекает из доказанного ниже следствия 3.3: из формулы (3.8) вытекает ограниченность интеграла

$$\int\limits_{t_0}^{t}\operatorname{tr}A(s)\,ds,$$

если $B(t)$ – матрица Ляпунова.

Следствие 2.4. *Если* $B(t)$ *– матрица Ляпунова, то линейные системы (2.1) и (2.4) одновременно устойчивы или неустойчивы.*

Это сразу же вытекает из предложения 2.2.

Следствие 2.5. *Пусть выполнены условия следствия 2.4. Если система (2.1) устойчива, то её спектр нулевой и она приводится (по Ляпунову) к системе с нулевой матрицей.*

Действительно, если спектр содержит положительное вещественное число, то у системы (2.1) найдётся неограниченное решение.

Пусть теперь спектр содержит отрицательное число. Тогда система (2.1) имеет ненулевое решение $t\mapsto x(t)$ такое, что $x(t)\to 0$ при $t\to\infty$. По следствию 2.4 все решения $t\mapsto y(t)$ сопряжённой системы ограничены. Выберем $y(0)$ так, чтобы

$$(x(0),y(0))=c\neq 0. \tag{2.8}$$

По теореме Лагранжа

$$(x(t),y(t))=c$$

при всех t. Так как $y(t)$ ограничена, а $x(t)\to 0$, то $c=0$, что противоречит неравенству в (2.8). Итак, спектр линейной системы (2.1) нулевой.

Наконец, поскольку линейная система (2.1) устойчива одновременно со своей сопряжённой системой (следствие 2.4), то, как отмечено в [8, с. 228, упр. 14], она приводится к линейной системе с нулевой матрицей.

Теорема 2.2. *В предположениях следствия 2.4 линейная система (2.1) устойчива тогда и только тогда, когда она допускает первый интеграл в виде положительно определённой квадратичной формы.*

Доказательство. Если линейная система допускает положительно определённый квадратичный интеграл, то его можно принять за функцию Ляпунова, что доказывает устойчивость системы (2.1).

Пусть теперь система (2.1) устойчива. Тогда (по следствию 2.5) заменой переменных $x=L(t)z$ с некоторой матрицей Ляпунова L система дифференциальных уравнений преобразуется к виду $\dot z=0$. Это уравнение допускает квадратичный интеграл $f=(z,z)/2$, который в старых переменных имеет вид

$$f(x,t)=(L^{-1}(t)x,L^{-1}(t)x)/2. \tag{2.9}$$

Так как $L(t)$ является матрицей Ляпунова, то (2.9) будет положительно определённым квадратичным интегралом исходной линейной системы (2.1). В самом деле, так как $\|x\| \leqslant \leqslant \|L\|\|z\|$, то

$$2f = \|z\|^2 \geqslant \|L(t)\|^{-2}\|x\|^2.$$

Остаётся учесть, что $\|L(t)\|$ – ограниченная положительная функция времени. Поэтому выполняется неравенство $\|L(t)\|^{-2} \geqslant \mathrm{const} > 0$.

Теорема 2.2 обобщает свойство 5° на неавтономные линейные системы с зависящим от времени квадратичным интегралом.

3. Инвариантные меры. Нестационарная мера

$$d\mu_t = \rho(x,t)\, d^n x$$

с непрерывно дифференцируемой плотностью $\rho > 0$ будет инвариантной относительно потока линейной системы (2.1) тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \tag{3.1}$$

где $v = A(t)x$. Уравнение (3.1) – известное уравнение Лиувилля, играющее ключевую роль в статистической механике.

Пусть плотность зависит лишь от времени. Тогда уравнение (3.1) примет следующий вид:

$$\dot\rho + \rho a = 0, \quad a(t) = \operatorname{tr} A(t). \tag{3.2}$$

Его общее решение:

$$\rho(t) = \rho_0 \exp\biggl[-\int\limits_0^t a(\tau)\, d\tau\biggr], \quad \rho_0 = \rho(0).$$

Следовательно, решение существует на всей временнóй оси (если, конечно, матрица $A(t)$ определена при всех t) и плотность $\rho(t)$ положительна, если $\rho_0 > 0$.

Уравнение (3.2) полезно сравнить с уравнением (также полученным Лиувиллем) для определителя Вронского $w(t)$ фундаментальной матрицы решений линейной системы (2.1):

$$\dot w = aw. \tag{3.3}$$

Сопоставляя (3.2) и (3.3), получаем

$$\rho = cw^{-1}, \quad c = \mathrm{const}\,. \tag{3.4}$$

Имеет место очевидное

Предложение 3.1. *Поток линейной системы (2.1) сохраняет стандартную меру* $d^n x$ *в том и только том случае, когда* $\operatorname{tr} A(t) \equiv 0$.

Следствие 3.1. *Потоки линейной системы и системы, ей сопряжённой, сохраняют меру Лебега одновременно.*

Предложение 3.2. *Предположим, что линейная система (2.1) допускает не зависящий от времени интеграл в виде невырожденной квадратичной формы. Тогда её поток сохраняет обычную меру Лебега в* $\mathbb{R}^n$.

Действительно, в этом случае условие (2.3) принимает вид

$$BA + A^*B = 0 \tag{3.5}$$

и, кроме того, $|B| \neq 0$. Из (3.5) находим $A = -B^{-1}A^*B$. Следовательно,

$$\operatorname{tr} A = -\operatorname{tr}(A^*BB^{-1}) = -\operatorname{tr} A^* = -\operatorname{tr} A.$$

Откуда $\operatorname{tr} A = 0$, что и требовалось.

Вернёмся к общему случаю, когда симметрическая матрица B зависит от времени.

Теорема 3.1. *Пусть* $|B(t)|\neq 0$ *при всех* t. *Тогда*

$$\rho(t)=c[\,|\det B(t)|\,]^{1/2},\quad c=\mathrm{const}>0. \tag{3.6}$$

В частности, если $B=\mathrm{const}$, то получаем заключение предложения 3.2.

Следствие 3.2. *Если система (2.1) допускает квадратичный интеграл (2.2), невырожденный при некотором* $t=t_0$, *то* $|B(t)|\neq 0$ *при всех значениях* t.

Докажем теперь теорему 3.1.

Лемма 3.1. *Если* $x(t)$ *и* $z(t)$ *– любые решения линейной системы (2.1), то*

$$(B(t)x(t),z(t))=\mathrm{const}\,. \tag{3.7}$$

Действительно, ввиду линейности уравнения (2.1) сумма $x(t)+z(t)$ также будет его решением. Следовательно,

$$(B(x+z),x+z)=\mathrm{const}\,.$$

Так как $(Bx,x)=\mathrm{const}$ и $(Bz,z)=\mathrm{const}$, то отсюда вытекает (3.7).

Следствие 3.3. *Если* $W(t)$ *– фундаментальная матрица системы (2.1), то*

$$W^*(t)B(t)W(t)=\mathrm{const}\,. \tag{3.8}$$

Это утверждение вытекает из леммы 3.1, применённой ко всем линейно независимым решениям системы (2.1), порождающим фундаментальную матрицу W.

Соотношение (3.8) также легко выводится из тождества (2.3). Умножая (2.3) справа на W, а слева на W^* и учитывая равенства $\dot W=AW$, $\dot W^*=W^*A^*$, получаем

$$W^*\dot BW+W^*B\dot W+\dot W^*BW=0.$$

Но это соотношение эквивалентно (3.8).

Из тождества (3.8) вытекает, что

$$|B(t)|w^2(t)=\alpha=\mathrm{const}\,. \tag{3.9}$$

При этом знаки определителя матрицы B и постоянной α совпадают. После этих замечаний формула (3.6) сразу же следует из (3.4) и (3.9). Теорема 3.1 доказана.

В случае, когда матрицы $A(t)$ и $B(t)$ периодичны с одним и тем же периодом $\tau>0$, можно воспользоваться результатами эргодической теории. Пусть $x(t,x_0)$ – решение линейной системы (2.1) с начальным условием x_0 при $t=0$. Ввиду периодичности отображения

$$z\mapsto x(n\tau,z),\quad n\in\mathbb{Z}, \tag{3.10}$$

образуют группу.

Предложение 3.3. *Предположим, что матрица* $B(t)$, $t \mod \tau$, *положительно определена при всех значениях* t *и пусть* $D\subset\mathbb{R}^n$ *– ограниченная измеримая подобласть, имеющая положительную меру Лебега. Тогда для почти всех начальных данных* $x_0\in D$ *точка* $x(n\tau,x_0)$, $n\in\mathbb{N}$, *бесконечно много раз попадёт в область* D.

В частности, для почти всех $x_0\in\mathbb{R}^n$ решение с начальным данным x_0 бесконечно много раз (при $t\to\infty$) будет сколь угодно мало отличаться от x_0.

Докажем предложение 3.3. Согласно теореме 3.1 система (2.1) имеет инвариантную меру с τ-периодической по t плотностью. Следовательно, отображение (3.10) сохраняет обычную меру в $\mathbb{R}^n$. Далее, ввиду положительной определённости τ-периодической матрицы $B(t)$ ограниченная измеримая область D расположена в области

$$\{x\in\mathbb{R}^n:(B(0)x,x)\leqslant C\}, \tag{3.11}$$

где C – достаточно большая положительная константа. Все области вида (3.11), очевидно, инвариантны при отображении (3.10), и их мера конечна. Значит, можно воспользоваться классической теоремой Пуанкаре о возвращении траекторий.

Замечание. Если периодическая матрица $B(t)$ не является положительно определённой, но невырождена, то справедлива теорема Хопфа: для почти всех начальных условий решение линейной системы либо бесконечно много раз (при $t \to \infty$) подходит сколь угодно близко к начальному условию, либо уходит в бесконечность.

4. Квадратичные интегралы. Всегда ли линейная система дифференциальных уравнений (2.1) имеет невырожденный квадратичный интеграл? Ответ оказывается положительным.

Предложение 4.1. *Если матрица $A(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, то линейная система (2.1) допускает квадратичный первый интеграл (2.2), причём симметрическая матрица $B(t)$ непрерывно дифференцируема и $B(t) > 0$ при всех t.*

Действительно, пусть $y_1(t),\ \ldots,\ y_n(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ – линейно независимые решения сопряжённой системы (2.4). Тогда, согласно Лагранжу, линейные функции

$$f_1 = (x, y_1(t)), \quad \ldots, \quad f_n = (x, y_n(t))$$

будут первыми интегралами линейной системы (2.1). Далее,

$$f = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} f_k^2(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x, y_k(t))^2 \tag{4.1}$$

– квадратичный первый интеграл системы (2.1).

Покажем, что эта квадратичная форма положительно определена при всех $t \in \mathbb{R}$. Другими словами, если форму (4.1) представить в виде (2.2), то $B(t) > 0$. Предположим противное, т.е. $f = 0$ при некотором $x \neq 0$. Но тогда все векторы $y_1, \ldots, y_n$ в некоторый момент времени будут ортогональны x. Следовательно, они лежат в $(n-1)$-мерном пространстве, проходящем через начало координат и ортогональном вектору x. Но это противоречит их линейной независимости. Что и требовалось.

Замечания.

1. Пусть Y – фундаментальная матрица сопряжённой системы, состоящая из вектор-столбцов линейно независимых решений $y_1(t),\ \ldots,\ y_n(t)$. Если вектор-столбцы сопряжённой матрицы Y^* (тоже невырожденной) обозначить через $a_1(t),\ \ldots,\ a_n(t)$, то матрица B будет матрицей Грама набора векторов $a_1,\ \ldots,\ a_n$.

2. Не следует думать, что квадратичная форма (4.1) будет функцией Ляпунова для линейной системы (2.1). Для этого необходимо ещё условие её положительной определённости:

$$f(x,t) \geqslant c\|x\|^2, \quad c = \mathrm{const} > 0.$$

Например, если A – единичная матрица, то это условие заведомо не выполняется.

3. Кроме невырожденного интеграла (4.1) линейная система (2.1) имеет целое семейство невырожденных квадратичных интегралов

$$f = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} c_k f_k^2,$$

где $c_1,\ \ldots,\ c_n$ – ненулевые вещественные числа. Среди таких интегралов ровно n функционально независимых.

4. Пусть $A = \mathrm{const}$. Тогда линейная система (2.1) в общем случае не допускает ненулевых квадратичных интегралов, не зависящих от времени. Самый простой пример: A – единичная $n \times n$-матрица. Однако (по предложению 4.1) для системы (2.1) зависящие от времени невырожденные квадратичные интегралы всегда существуют.

Предложение 4.1 неконструктивно: чтобы указать квадратичный интеграл, надо прежде решить сопряжённую систему. В ряде случаев можно указать целую серию квадратичных интегралов, если известен один из них.

Предложение 4.2. *Если* $A = \mathrm{const}$, *то линейная система (2.1) допускает квадратичные интегралы*

$$f_k = \frac{1}{2}(A^{*k}B(t)A^k x, x), \quad k \geqslant 0. \tag{4.2}$$

При $k = 0$ имеем исходный интеграл (2.2). Если матрица A обратима, то в формуле (4.2) число k может быть произвольным целым. Конечно, среди бесконечного набора квадратичных интегралов (4.2) функционально независимых не более n. Вопрос о точном количестве функционально независимых интегралов среди (4.2) не очевидный.

Доказательство предложения 4.2 совсем простое: все матрицы $B_k(t) = A^{*k}B(t)A^k$ удовлетворяют соотношению (2.3).

5. Степени асимптотической устойчивости и неустойчивости. Если матрица $A(t)$ ограничена, то все решения линейной системы имеют конечные характеристические показатели. Назовём *степенью асимптотической устойчивости* системы (2.1) и обозначим через a количество отрицательных элементов (с учётом кратности) её спектра. Если весь спектр лежит слева от нуля $(a = n)$, то линейная система (2.1) асимптотически устойчива. Будем называть *степенью неустойчивости* и обозначать через u количество положительных элементов (с учётом кратности) в спектре линейной системы (2.1). Если $B(t)$ – матрица Ляпунова и линейная система (2.1) правильная, то (по теореме 2.1) $a = u$.

Пусть i^- и i^+ – индексы инерции квадратичной формы (2.2) – первого интеграла линейной системы (2.1). Согласно следствию 3.3 эти целые числа не зависят от времени.

Квадратичную форму $(B(t)x, x)$ назовём *приводимой*, если существует матрица Ляпунова $L(t)$ такая, что

$$L^*(t)B(t)L(t) = C$$

– постоянная матрица. Эту квадратичную форму можно разными способами приводить к форме с постоянными коэффициентами. Например, согласно следствию 3.3, квадратичный интеграл линейной системы приводится с помощью её фундаментальной матрицы W. Однако $W(t)$ будет матрицей Ляпунова только для устойчивой линейной системы. Квадратичная форма приводима в том и только том случае, когда $B(t) = L_1^*(t)C_1L_1(t)$, где C_1 – постоянная матрица, а $L_1(t)$ – некоторая матрица Ляпунова.

Теорема 5.1. *Если матрица* $A(t)$ *ограничена, а (2.2) – приводимая квадратичная форма, то*

$$a \leqslant \min\{i^-, i^+\}. \tag{5.1}$$

Следствие 5.1. *Если, кроме того, система (2.1) правильная, то*

$$u \leqslant \min\{i^-, i^+\}.$$

В качестве иллюстрации обратимся к примеру из введения: это уравнение второго порядка (1.3) в предположении, что элементы кососимметрической матрицы $G(t)$ ограничены. Напомним, что *степенью неустойчивости Пуанкаре* p механической системы называется отрицательный индекс инерции квадратичной формы V – потенциальной энергии системы. Очевидно, что в невырожденном случае (когда $|P| \neq 0$) индексы инерции квадратичной формы (1.4) (первого интеграла уравнения (1.3)) равны $i^- = p$, $i^+ = 2n - p \geqslant p$. В частности, $\min\{i^-, i^+\} = p$. Таким образом, из теоремы 5.1 вытекает неравенство для степени асимптотической устойчивости линейной системы (1.3): $a \leqslant p$. В автономном случае (когда матрица гироскопических сил не зависит от времени) $a = u$ и поэтому $u \leqslant p$. Это неравенство установлено в работе [9] (см. также [10]).

Доказательство теоремы 5.1. Приведём квадратичную форму (2.2) к виду, не зависящему от времени (теперь $B = \mathrm{const}$). При таком преобразовании её индексы инерции не изменятся. Точно также у преобразованной линейной системы (2.1) набор показателей Ляпунова (следовательно, и её спектр) останется неизменным.

Пусть $-\infty < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_s < 0$ – часть спектра линейной системы, лежащая слева от нуля, и пусть $n_1, n_2, \ldots, n_s$ – соответственно кратности этих точек спектра. Пусть N_s –

максимальное число линейно независимых решений системы (2.1), обладающих характеристическим показателем α_s.

Введём множество Γ_s всех решений $x(t)$, включая нулевое, характеристические показатели которых не превосходят числа α_s. Из известных свойств характеристических показателей следует, что если $x_1(t), x_2(t) \in \Gamma_s$, то

1) $cx_j(t) \in \Gamma_s$, $c = \mathrm{const}$;

2) $x_1(t) + x_2(t) \in \Gamma_s$.

Следовательно, Γ_s – векторное пространство над $\mathbb{R}$.

Известно, что [8, гл. III, § 4]

$$N_s = \dim \Gamma_s \tag{5.2}$$

и

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_s = N_s. \tag{5.3}$$

Так как все α_j отрицательны, то $(Bx(t), x(t)) \to 0$ при $t \to +\infty$ для всех решений $x(t)$ из пространства Γ_s. Поскольку квадратичная форма (2.2) – первый интеграл, то все эти решения (точнее, их траектории) лежат в конусе

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : (Bx, x) = 0\}. \tag{5.4}$$

В каждый момент времени t совокупность векторов $\{x(t)\} \subset \mathbb{R}^n$, где $x(t)$ – решения из Γ_s, будет плоскостью $\Sigma(t)$, проходящей через начало координат и размерность которой равна $\dim \Gamma_s$. В геометрии такие плоскости называются *сингулярными*: они целиком лежат в изотропном конусе (5.4). Хорошо известно, что размерность каждой сингулярной плоскости не превосходит

$$\min\{i^-, i^+\} \tag{5.5}$$

(см., например, [11, гл. 13.2]). С учётом равенств (5.2) и (5.3) получаем, что число точек отрицательной части спектра линейной системы (2.1) (с учётом кратности) не превосходит величины (5.5). Откуда вытекает искомое неравенство (5.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Козлов В.В.* Линейные системы с квадратичным интегралом // Прикл. математика и механика. 1992. Т. 56. № 6. С. 900–906.
2. *Трещёв Д.В., Шкаликов А.А.* О гамильтоновости линейных динамических систем в гильбертовом пространстве // Мат. заметки. 2017. Т. 101. № 6. С. 911–918.
3. *Козлов В.В.* Квадратичные законы сохранения уравнений математической физики // Успехи мат. наук. 2020. Т. 75. № 3. С. 253–304.
4. *Козлов В.В., Карапетян А.А.* О степени устойчивости // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 186–192.
5. *Kozlov V.V.* Linear Hamiltonian systems: quadratic integrals, singular subspaces and stability // Regul. Chaotic. Dyn. 2018. V. 23. № 1. P. 26–46.
6. *Сергеев И.Н.* Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2006. № 25. С. 249–294.
7. *Сергеев И.Н.* Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. мат. 2012. Т. 76. № 1. С. 149–172.
8. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
9. *Wimmer H.K.* Inertia theorems for matricies, controllability and linear vibratios // Linear Algebra Appl. 1974. № 8. P 337–343.
10. *Shkalikov A.A.* Operator pencils arising in elasticity and hydrodynamics: the instability index formula // Oper. Theory Adv. Appl. V. 87. Basel, 1996. P. 358–385.
11. *Берже М.* Геометрия. Т. 2. М., 1984.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
г. Москва

Поступила в редакцию 25.12.2020 г.
После доработки 25.12.2020 г.
Принята к публикации 28.12.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 2, с. 196–202

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

ЯВНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПУАНКАРЕ ЛИНЕЙНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

© 2021 г. В. И. Мироненко, В. В. Мироненко

Для линейной периодической системы дифференциальных уравнений указан метод, позволяющий найти в явной форме матрицу, подобную матрице отображения Пуанкаре.

DOI: 10.31857/S0374064121020072

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

с непрерывно дифференцируемой 2ω-периодической $n \times n$-матрицей $P(t)$.

Для 2ω-периодических линейных систем известна [1, с. 183; 2, с. 79] теорема Флоке, согласно которой фундаментальная матрица решений $X(t)$ периодической системы (1) представима в виде $X(t) = \Phi(t)e^{A_0 t}$, где $\Phi(t)$ – 2ω-периодическая матрица, а A_0 – постоянная матрица, которая, в частности, определяет наличие у системы (1) периодических решений и их устойчивость.

Важную роль в исследовании периодических решений дифференциальных систем играет отображение Пуанкаре, или отображение за период, [3, с. 209] (см. также [4, с. 216], где дано определение отображения Пуанкаре и для параболических уравнений в частных производных).

В 1984 г. Мироненко В.И. ввёл понятие отражающей функции [5]. Дальнейшее применение этого понятия показало его большую эффективность при изучении обыкновенных дифференциальных систем.

Основные работы авторов на русском языке, относящиеся к этой тематике, опубликованы преимущественно в журнале "Дифференциальные уравнения". Ключевые положения теории отражающей функции последовательно и систематически изложены в монографиях [6, 7]. Англоязычные работы [8–10] содержат существенные результаты, не вошедшие в эти монографии.

Отметим появление серьёзных исследований по теории отражающей функции, опубликованных зарубежными математиками в научных журналах на английском и китайском языках. Значимая часть этих исследований обобщена в монографии [11].

Приведём сведения, необходимые для понимания статьи.

Отражающая функция $F(t,x)$ дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

связывает прошлое состояние $x(-t)$ этой системы с её будущим состоянием $x(t)$ формулой $x(-t) = F(t, x(t))$. Дифференцируемая функция $F(t,x)$ является отражающей функцией системы (2) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет основному соотношению

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}X(t,x) + X(-t,F) = 0, \quad F(0,x) \equiv x.$$

Если $F(t,x)$ является отражающей функцией 2ω-периодической системы (2) с продолжимыми на отрезок $[-\omega,\omega]$ решениями, то отображение Пуанкаре этой системы за период $[-\omega,\omega]$ задаётся соответствием $x \mapsto F(-\omega,x)$. Этим объясняется целесообразность применения отражающей функции к изучению периодических систем дифференциальных уравнений.

В частности, если система (2) 2ω-периодична и нечётна по t, т.е. $X(-t,x)+X(t,x)\equiv 0$, то, как легко проверить, $F(t,x)\equiv x$ и, значит, все продолжимые на $[-\omega,\omega]$ решения такой системы являются 2ω-периодичными. Таким образом, отображение за период $[-\omega,\omega]$ иногда удаётся найти даже для систем, неинтегрируемых в квадратурах.

Для линейных систем (1), о которых будет идти речь в этой статье, теория отражающей функции особенно прозрачна – потому, в частности, что все решения линейной системы продолжимы на $\mathbb{R}$. Приведём основные свойства отражающей функции для линейной системы (1). Доказательства этих фактов настолько просты, что могут быть получены без особых усилий; при желании эти доказательства можно найти в [6, с. 30–31; 7, с. 91].

1. Пусть $X(t)$ – фундаментальная матрица системы (1), матрица коэффициентов которой не обязательно периодическая. Отражающая функция этой системы линейна и имеет вид $\bar{x} = F(t)x = X(-t)X^{-1}(t)x$.

Матрица $F(t)=X(-t)X^{-1}(t)$ называется *отражающей матрицей* системы (1). Если $F(t)$ – отражающая матрица системы (1), то для любого решения $x(t)$ системы (1) при всех $t\in\mathbb{R}$ верно соотношение $x(-t)=F(t)x(t)$.

2. Дифференцируемая матрица $F(t)$ является отражающей матрицей системы (1) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет основному соотношению

$$\frac{dF}{dt}+FP(t)+P(-t)F=0,\quad F(0)=E, \tag{3}$$

где E – единичная матрица.

3. Если матрица $P(t)$ нечётна по t, то отражающая матрица системы (1) является единичной матрицей, т.е. $F(t)\equiv E$, и все решения этой системы чётны.

4. Если $F(t)$ – отражающая матрица 2ω-периодической системы (1), то её отображение за период $[-\omega,\omega]$ задаётся формулой $x(\omega)=F(-\omega)x(-\omega)$.

Таким образом, матрица $F(-\omega)$ является матрицей отображения Пуанкаре на периоде $[-\omega,\omega]$.

Основные результаты. Далее для всякой функции $P(t)$ через $P_{\text{ч}}$ и $P_{\text{н}}$ будем обозначать её чётную и нечётную части, т.е.

$$P_{\text{ч}}(t):=\frac{1}{2}(P(t)+P(-t)),\quad P_{\text{н}}(t):=\frac{1}{2}(P(t)-P(t)).$$

Теорема 1. *Пусть для $n\times n$-матриц $A(t)$, $S(t)$, $\Phi(t)$, из которых $A(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, $S(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и нечётна, $\Phi(t)$ дифференцируема и не вырождается на $\mathbb{R}$, выполняются условия*

$$P_{\text{ч}}\Phi=\Phi A;\quad \frac{d\Phi}{dt}=P_{\text{н}}(t)\Phi+\Phi S(t).$$

Тогда матрица $\Phi(t)$ – чётная, а отражающая матрица $F(t)$ системы $dx/dt=P(t)x$ задаётся формулой $F(t)=\Phi(t)B(t)\Phi^{-1}(t)$, где $B(t)$ – решение задачи Коши

$$\frac{dB}{dt}+BA(t)+A(t)B+S(t)B-BS(t)=0,\quad B(0)=E.$$

Доказательство. Чётность матрицы $\Phi(t)$ следует из свойства 3 отражающей матрицы, так как элементы матрицы $\Phi(t)$ удовлетворяют дифференциальной системе с нечётными коэффициентами. Проверим выполнение основного соотношения для отражающей матрицы:

$$F'+FP(t)+P(-t)F=\Phi'B\Phi^{-1}+\Phi B'\Phi^{-1}-\Phi B\Phi^{-1}\Phi'\Phi^{-1}+\Phi B\Phi^{-1}P(t)+P(-t)\Phi B\Phi^{-1}=$$
$$=(P_{\text{н}}\Phi+\Phi S)B\Phi^{-1}-\Phi B\Phi^{-1}(P_{\text{н}}\Phi+\Phi S)\Phi^{-1}+\Phi B'\Phi^{-1}+\Phi B\Phi^{-1}P(t)+P(-t)\Phi B\Phi^{-1}=$$
$$=P_{\text{н}}\Phi B\Phi^{-1}+\Phi SB\Phi^{-1}-\Phi B\Phi^{-1}P_{\text{н}}-\Phi BS\Phi^{-1}+\Phi B'\Phi^{-1}+\Phi B\Phi^{-1}(P_{\text{ч}}+P_{\text{н}})+(P_{\text{ч}}-P_{\text{н}})\Phi B\Phi^{-1}=$$
$$=\Phi SB\Phi^{-1}-\Phi BS\Phi^{-1}+\Phi B'\Phi^{-1}+\Phi B\Phi^{-1}P_{\text{ч}}+P_{\text{ч}}\Phi B\Phi^{-1}=\Phi(B'+BA+AB+SB-BS)\Phi^{-1}=0.$$

Основное соотношение выполнено. Теорема доказана.

Следствие. *Если выполнены условия теоремы 1, то матрица $F(-\omega)$ отображения Пуанкаре системы (1) на периоде $[-\omega,\omega]$ задаётся формулой $F(-\omega)=\Phi(\omega)B(-\omega)\Phi^{-1}(\omega)$.*

Доказательство следует из свойства 4 отражающей матрицы.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия:*

1) $P(t)$ *– непрерывно дифференцируемая* 2ω*-периодическая* $n\times n$*-матрица;*

2) $A = A(t)$ *– чётная* $n\times n$*-матрица, подобная матрице* $P_ч(t)$ *и коммутирующая со своим интегралом* $\int_0^t A(\tau)\,d\tau$*;*

3) существуют нечётные непрерывные на $\mathbb{R}$ *скалярные функции* $\alpha_k(t)$ $(k=\overline{0,n-1})$*, для которых справедливы соотношения*

$$\frac{dP_ч}{dt}+P_чP_н-P_нP_ч=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_kP_ч^k,\quad \frac{dA}{dt}+\frac{dA}{dt}A-A\frac{dA}{dt}=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_kA^k;$$

4) матрица $\Phi(t)$ *является решением задачи Коши*

$$\frac{d\Phi}{dt}=P_н\Phi+\Phi\frac{dA}{dt},\quad \Phi(\omega)=\Phi_\omega,$$

где матрица Φ_ω *находится из условия* $P_ч(\omega)\Phi_\omega=\Phi_\omega A(\omega)$.

Тогда имеют место следующие утверждения:

i) матрица $\Phi(t)$ *является чётной,* 2ω*-периодической и удовлетворяет тождеству*

$$P_ч(t)\Phi(t)\equiv\Phi(t)A(t);$$

ii) отражающая матрица $F(t)$ *системы (1) задаётся формулой*

$$F(t)=\Phi(t)\exp\biggl(-2\int\limits_0^t A(\tau)\,d\tau\biggr)\Phi^{-1}(t);$$

iii) для матрицы отображения Пуанкаре за период $[-\omega,\omega]$ *справедлива формула*

$$F(-\omega)=\Phi(\omega)\exp\biggl(2\int\limits_0^\omega A(\tau)\,d\tau\biggr)\Phi^{-1}(\omega).$$

Доказательство. Чётность и 2ω-периодичность матрицы $\Phi(t)$ следует из приведённых выше свойств 3 и 4.

Далее будем пользоваться следующим легко проверяемым тождеством:

$$P_ч^k\Phi-\Phi A^k=\sum_{j=1}^{k}P_ч^{k-j}(P_ч\Phi-\Phi A)A^{j-1}.$$

Пусть $\Delta := P_ч\Phi-\Phi A$. Тогда

$$\frac{d\Delta}{dt}=\frac{dP_ч}{dt}\Phi+P_ч\frac{d\Phi}{dt}-\frac{d\Phi}{dt}A-\Phi\frac{dA}{dt}=\frac{dP_ч}{dt}\Phi+P_ч\biggl(P_н\Phi+\Phi\frac{dA}{dt}\biggr)-\biggl(P_н\Phi+\Phi\frac{dA}{dt}\biggr)A-\Phi\frac{dA}{dt}=$$

$$=\biggl(\frac{dP_ч}{dt}+P_чP_н-P_нP_ч\biggr)\Phi-\Phi\biggl(\frac{dA}{dt}+\frac{dA}{dt}A-A\frac{dA}{dt}\biggr)+P_н(P_ч\Phi-\Phi A)+(P_ч\Phi-\Phi A)\frac{dA}{dt}=$$

$$=\biggl(\frac{dP_ч}{dt}+P_чP_н-P_нP_ч\biggr)\Phi-\Phi\biggl(\frac{dA}{dt}+\frac{dA}{dt}A-A\frac{dA}{dt}\biggr)+P_н\Delta+\Delta\frac{dA}{dt}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_kP_ч^k\Phi-\Phi\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_kA^k+P_н\Delta+\Delta\frac{dA}{dt}=P_н\Delta+\Delta\frac{dA}{dt}+\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(P_ч^k\Phi-\Phi A^k)=$$

$$=P_н\Delta+\Delta\frac{dA}{dt}+\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\sum_{j=1}^{k}P_ч^{k-j}\Delta A^{j-1}.$$

Таким образом, элементы матрицы Δ являются решением задачи Коши

$$\frac{d\Delta}{dt} = P_{\text{н}}\Delta + \Delta\frac{dA}{dt} + \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\sum_{j=1}^{k}P_{\text{ч}}^{k-j}\Delta A^{j-1}, \quad \Delta(\omega) = 0.$$

Отсюда в силу теоремы существования и единственности [2, с. 19] имеем

$$\Delta(t) = P_{\text{ч}}(t)\Phi(t) - \Phi(t)A(t) \equiv 0,$$

и утверждение i) теоремы доказано.

Так как матрица $A(t)$ коммутирует со своим интегралом $\int_0^t A(t)\,d\tau,$ то согласно теореме Лаппо-Данилевского [1, с. 117] для матрицы $B(t) := \exp(-2\int_0^t A(\tau)\,d\tau)$ верно соотношение

$$\frac{dB}{dt} = -AB - BA = -2AB.$$

Кроме того,

$$0 = \frac{d}{dt}(AB - BA) = \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt} - \frac{dB}{dt}A - B\frac{dA}{dt} =$$
$$= \left(\frac{dA}{dt}B - B\frac{dA}{dt}\right) + \left(A\frac{dB}{dt} - \frac{dB}{dt}A\right) = \frac{dA}{dt}B - B\frac{dA}{dt},$$

т.е. матрицы $S := dA/dt$ и B коммутируют между собой. Отсюда следует выполнимость всех условий теоремы 1, а значит, верны и её выводы о виде отражающей матрицы, а также о виде матрицы $F(-\omega)$ отображения Пуанкаре за период $[-\omega, \omega]$.

Лемма. *Если $F(t)$ – отражающая матрица 2ω-периодической системы (1), то для каждого целого k и каждого $t_0 \in [-\omega, \omega]$ верно равенство*

$$x(t_0 + 4k\omega) = F(-t_0 - 2k\omega)x(-t_0).$$

Доказательство. Согласно свойству 1 отражающей матрицы $F(t)$ для любого решения $x(t)$ системы (1) верно равенство $x(-t) = F(t)x(t)$. Хорошо известно, что если $x(t)$ – решение 2ω-периодической системы (1), то $y(t) := x(t + 2k\omega)$ также является решением этой системы. Поэтому при любом $t \in \mathbb{R}$ и любом натуральном k имеет место равенство

$$x(-t + 2k\omega) = F(t)x(t + 2k\omega).$$

Положив здесь $t = -t_0 - 2k\omega,$ получим доказываемое соотношение.

Теорема 3. *Пусть отражающая матрица $F(t)$ 2ω-периодической системы (1) ограничена на $(-\infty, 0]$. Тогда любое решение $x(t)$ этой системы ограничено на $\mathbb{R}$, а система (1) устойчива.*

Если при $t \to -\infty$ отражающая матрица $F(t)$ стремится к нулевой матрице, то любое решение $x(t)$ системы (1) стремится к нулю при $t \to +\infty$ и система (1) асимптотически устойчива при $t \to +\infty$.

Доказательство теоремы следует непосредственно из леммы и теорем 1, 2 из [1, с. 82–83].

Полученные выше результаты применим к изучению двумерной системы

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{pmatrix} x, \tag{4}$$

где $P_{\text{ч}} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ – чётная и $P_{\text{н}} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ – нечётная дифференцируемые 2ω-периодические матрицы.

Для собственных значений $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ матрицы $P_{\text{ч}}(t)$ получаем уравнение
$$\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (p_n + p_{22})\lambda + (p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}) = 0.$$
Отсюда находим
$$\lambda_{1,2} = \frac{p_{11}+p_{22}}{2} \pm \frac{\sqrt{(p_{11}-p_{22})^2 + 4p_{12}p_{21}}}{2}.$$

Рассмотрим случай, когда $(p_{11}-p_{22})^2 + 4p_{12}p_{21} = -b^2 < 0$. В этом случае в качестве матрицы $A(t)$ возьмём матрицу
$$A(t) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a := \frac{p_{11}+p_{22}}{2}, \quad b(t) := \frac{\sqrt{-(p_{11}-p_{22})^2 - 4p_{12}p_{21}}}{2}.$$

Для выбранной матрицы A существует матрица Φ_ω такая, что $P_{\text{ч}}(\omega)\Phi_\omega = \Phi_\omega A(\omega)$. Определим матрицу $\Phi(t)$ как решение задачи Коши
$$\frac{d\Phi}{dt} = P_{\text{н}}\Phi + \Phi\frac{dA}{dt}, \quad \Phi(\omega) = \Phi_\omega.$$

Тогда, если выполнено условие 3) теоремы 2, то выполнены и все условия этой теоремы. Чтобы установить выполнимость условия 3), нужно доказать, что существуют нечётные скалярные функции $\alpha_0(t)$ и $\alpha_1(t)$, при которых выполняется соотношение
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \alpha_0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_1\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Эти функции определяются формулами
$$\alpha_1 = \frac{1}{b}\frac{db}{dt}, \quad \alpha_0 = \frac{da}{dt} - \frac{a}{b}\frac{db}{dt}.$$

Подставляя их в использованное нами соотношение, придадим третьему условию форму
$$\frac{dP_{\text{ч}}}{dt} + P_{\text{ч}}P_{\text{н}} - P_{\text{н}}P_{\text{ч}} = \left(\frac{da}{dt} - \frac{a}{b}\frac{db}{dt}\right)E + \frac{1}{b}\frac{db}{dt}P_{\text{ч}}.$$

Так мы приходим к следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть для системы (4) с дифференцируемой 2ω-периодической матрицей $P(t)$ выполнено условие*
$$\frac{dP_{\text{ч}}}{dt} + P_{\text{ч}}P_{\text{н}} - P_{\text{н}}P_{\text{ч}} = \left(\frac{da}{dt} - \frac{a}{b}\frac{db}{dt}\right)E + \frac{1}{b}\frac{db}{dt}P_{\text{ч}},$$
где
$$a = \frac{p_{11}+p_{22}}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{-(p_{11}-p_{22})^2 - 4p_{12}p_{21}}}{2} > 0.$$

Тогда отражающая матрица $F(t)$ системы (4) задаётся формулой
$$F(t) = \exp(-2\tilde{a}(t))\Phi(t)\begin{pmatrix} \cos(2\tilde{b}(t)) & -\sin(2\tilde{b}(t)) \\ \sin(2\tilde{b}(t)) & \cos(2\tilde{b}(t)) \end{pmatrix}\Phi^{-1}(t),$$
где функции $\tilde{a}(t)$ и $\tilde{b}(t)$ определены равенствами
$$\tilde{a}(t) = \int\limits_0^t a(\tau)\,d\tau \quad \text{и} \quad \tilde{b}(t) = \int\limits_0^t b(\tau)\,d\tau,$$
а $\Phi(t)$ – чётная матрица, являющаяся решением задачи Коши
$$\frac{d\Phi}{dt} = P_{\text{н}}\Phi - \Phi\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad \Phi(\omega) = \Phi_\omega,$$
и матрица Φ_ω находится из условия $P_{\text{ч}}(\omega)\Phi_\omega = \Phi_\omega A(\omega)$.

Доказательство. Справедливость теоремы 4 вытекает из теоремы 2 с учётом того, что в рассматриваемом случае

$$\exp\left(-2\int\limits_0^t A(\tau)\,d\tau\right) = \exp(-2\tilde{a}(t))\begin{pmatrix}\cos(2\tilde{b}(t)) & -\sin(2\tilde{b}(t))\\ \sin(2\tilde{b}(t)) & \cos(2\tilde{b}(t))\end{pmatrix}.$$

В качестве следствия из этой теоремы получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть для системы (4) выполнены все условия теоремы 4. Тогда:*

1) матрица отображения за период $[-\omega,\omega]$ этой системы задаётся формулой

$$F(-\omega) = \exp(2\tilde{a}(\omega))\Phi(\omega)\begin{pmatrix}\cos(2\tilde{b}(\omega)) & \sin(2\tilde{b}(\omega))\\ -\sin(2\tilde{b}(\omega)) & \cos(2\tilde{b}(\omega))\end{pmatrix}\Phi^{-1}(\omega);$$

2) если $\tilde{a}(\omega)<0,$ то все решения системы 4 стремятся к нулю при $t\to+\infty,$ а система является асимптотически устойчивой;

3) если $\tilde{a}(\omega)=0,$ то все решения системы (4) ограничены на $\mathbb{R},$ а система (4) устойчива;

4) если $\tilde{a}(\omega)=0,$ а число $\omega^{-1}\tilde{b}(\omega)=k/m$ является рациональным, то все решения системы (4) периодические с периодом $m\omega$.

В том случае когда $(p_{11}-p_{22})^2+4p_{12}p_{21}>0$ при всех $t\in\mathbb{R},$ мы аналогичным образом приходим к теореме 6.

Теорема 6. *Пусть для 2ω-периодической системы (4) выполнено условие*

$$\frac{dP_ч}{dt}+P_чP_н-P_нP_ч=\left(\frac{da}{dt}-\frac{a}{b}\frac{db}{dt}\right)E+\frac{1}{b}\frac{db}{dt}P_ч,$$

где

$$a=\frac{p_{11}+p_{22}}{2},\quad b=\frac{\sqrt{(p_{11}-p_{22})^2+4p_{12}p_{21}}}{2}>0.$$

Тогда матрица отображения за период $[-\omega,\omega]$ системы (4) задаётся формулой

$$F(-\omega) = \exp(2\tilde{a}(\omega))\Phi(\omega)\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\,(2\tilde{b}(\omega)) & \mathrm{sh}\,(2\tilde{b}(\omega))\\ \mathrm{sh}\,(2\tilde{b}(\omega)) & \mathrm{ch}\,(2\tilde{b}(\omega))\end{pmatrix}\Phi^{-1}(\omega),$$

где

$$\Phi(\omega)=\begin{pmatrix}b(\omega) & p_{11}(\omega)-a(\omega)+p_{12}(\alpha\omega)\\ b(\omega) & p_{21}(\omega)+p_{22}(\omega)-a(\omega)\end{pmatrix}.$$

Зная матрицу $F(-\omega)$ за период $[-\omega,\omega],$ мы можем найти начальные данные 2ω-периодических решений и исследовать характер их устойчивости. Так, система (4) является асимптотически устойчивой, если выполнены неравенства

$$\tilde{a}(\omega)<0,\quad |\tilde{b}(\omega)|<|\tilde{a}(\omega)|.$$

В заключение сделаем одно полезное замечание. Пусть отражающая матрица F системы (1) полностью определяется чётной частью $P_ч$ матрицы коэффициентов, т.е.

$$\frac{dF}{dt}+FP_ч+P_чF=0.$$

Тогда, вычитая это тождество из тождества (3), т.е. из тождества

$$\frac{dF}{dt}+F(P_ч+P_н)+(P_ч-P_н)F=0,$$

придём к тождеству $P_нF=FP_н,$ используя которое вместе с его производной получаем возможность полностью определить матрицу $F,$ а значит, и отображение Пуанкаре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
2. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1990.
3. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1984.
4. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М., 1985.
5. *Мироненко В.И.* Отражающая функция и классификация периодических дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 9. С. 1635–1638.
6. *Мироненко В.И.* Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Минск, 1986.
7. *Мироненко В.И.* Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем. Гомель, 2004.
8. *Mironenko V.I., Mironenko V.V.* How to construct equivalent differential systems // Appl. Math. Let. 2009. V. 22. P. 1356–1359.
9. *Mironenko V.I., Mironenko V.V.* Time symmetries and in-period transformations // Appl. Math. Let. 2011. V. 24. P. 1721–1723.
10. *Мироненко В.И., Мироненко В.В.* The new method for the searching periodic solutions of periodic differential systems // J. of Appl. Anal. and Comp. 2016. V. 6. № 3. P. 876–883.
11. *Zhou Zhengxin.* The Theory of Reflecting Function of Differential Equations and Applications. Beijing, 2014.

Гомельский государственный университет
им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 20.03.2020 г.
После доработки 20.03.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 2, с. 203–209

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.4

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПЛОСКОСТИ

© 2021 г. Э. М. Мухамадиев, А. Н. Наимов, М. М. Кобилзода

Для одного класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка на плоскости исследован вопрос о существовании периодических решений. В условиях априорной оценки периодических решений: 1) установлена гомотопическая инвариантность свойства разрешимости периодической задачи; 2) приведено описание гомотопических классов; 3) доказана теорема о необходимом и достаточном условии разрешимости периодической задачи.

DOI: 10.31857/S0374064121020084

Введение. В работе изучается периодическая задача

$$z' = P(t,z) + f(t,z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad t \in (0,2\pi), \quad z(0) = z(2\pi), \tag{1}$$

где $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $z = x+iy$, $P \in \mathcal{P}_m$, $f \in \mathcal{R}_m$, $m > 1$. Здесь $\mathcal{P}_m$ – множество отображений $P : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $P(t,z)$ непрерывно по совокупности переменных и 2π-периодично по t;

б) $P(t,\lambda z) \equiv \lambda^m P(t,z)$ при любом $\lambda > 0$, т.е. $P(t,z)$ положительно однородно по z;

в) при любом фиксированном $t_0 \in [0,2\pi]$ автономная система

$$w' = P(t_0, w) \tag{2}$$

не имеет ненулевых ограниченных траекторий.

Множество $\mathcal{R}_m$ состоит из непрерывных отображений $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, которые 2π-периодичны по t и удовлетворяют условию

$$\lim_{|z|\to\infty} \Big(|z|^{-m} \max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} |f(t,z)|\Big) = 0.$$

Задача (1), как и в работах [1; 2, с. 331–335; 3], исследуется методом априорной оценки и методом вычисления вращения векторных полей. В настоящей работе получены следующие результаты:

1) установлена гомотопическая инвариантность свойства разрешимости задачи (1) при любом возмущении $f \in \mathcal{R}_m$;

2) приведено описание гомотопических классов множества $\mathcal{P}_m$;

3) для $P \in \mathcal{P}_m$ сформулировано и доказано необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (1) при любом возмущении $f \in \mathcal{R}_m$.

При исследовании разрешимости задачи (1), как в работе [3], выведена формула вычисления вращения вполне непрерывного векторного поля, порождённого этой задачей.

Схема исследования, приводящего к результатам 1)–3), ранее реализована в работах [4, 5] применительно к третьей двухточечной краевой задаче для скалярных и двумерных систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

1. Основные результаты. Два отображения $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}_m$ назовём *гомотопными* и обозначим $Q_1 \sim Q_2$, если существует семейство отображений $Q(t,z,\lambda)$, принадлежащее при каждом фиксированном $\lambda \in [0,1]$ множеству $\mathcal{P}_m$, непрерывное по совокупности переменных и такое, что $Q(t,z,0) = Q_1(t,z)$, $Q(t,z,1) = Q_2(t,z)$. Гомотопность отображений является отношением эквивалентности на множестве $\mathcal{P}_m$, а его классы эквивалентности называются *гомотопическими классами*. Таким образом, множество $\mathcal{P}_m$ разбивается на гомотопические классы. В каждом гомотопическом классе сохраняется свойство разрешимости задачи (1) при любом возмущении $f \in \mathcal{R}_m$. Именно, имеет место следующая

Теорема 1. *Если $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}_m$, $Q_1 \sim Q_2$ и для $P = Q_1$ задача (1) разрешима при любом $f \in \mathcal{R}_m$, то для $P = Q_2$ задача (1) также разрешима при любом $f \in \mathcal{R}_m$.*

Теорему 1 можно считать теоремой типа Лере–Шаудера [6, с. 417], которая обеспечивает возможность продолжения по параметру решения задачи (1).

Для описания гомотопических классов множества $\mathcal{P}_m$ определим для $P \in \mathcal{P}_m$ два целых числа: $\gamma_0(P)$ – вращение двумерного векторного поля $e^{i\varphi} \mapsto P(t_0, e^{i\varphi})$ при фиксированном t_0, $\gamma_1(P)$ – вращение двумерного векторного поля $e^{it} \mapsto P(t, w_0)$ при фиксированном $w_0 \neq \neq 0$. Числа $\gamma_0(P)$ и $\gamma_1(P)$ не зависят от выбора значений t_0 и w_0, так как $P(t,w) \neq 0$ при любых t и $w \neq 0$. Кроме того, если $P \sim Q$, то $\gamma_0(P) = \gamma_0(Q)$ и $\gamma_1(P) = \gamma_1(Q)$. Для $P \in \mathcal{P}_m$, согласно формуле из монографии [7, с. 205], справедливо неравенство $\gamma_0(P) \leqslant 1$.

В следующей теореме даётся описание гомотопических классов множества $\mathcal{P}_m$.

Теорема 2. *Пусть $P \in \mathcal{P}_m$ и $\gamma_0(P) = p_0$, $\gamma_1(P) = p_1$. Тогда если $p_0 < 1$, то имеет место гомотопия $P \sim e^{ip_1 t}|z|^{m-p_0} z^{p_0}$, а если $p_0 = 1$, то $P \sim |z|^{m-1} z$ или $P \sim |z|^{m-1}(-z)$.*

При доказательстве теоремы 2 существенно используется свойство Гомори автономных систем вида (2), не имеющих ненулевых ограниченных траекторий (см. [2, с. 84–85; 8]).

Таким образом, согласно теореме 2, множество тех $P \in \mathcal{P}_m$, для которых $\gamma_0(P) < 1$, состоит из счётного числа гомотопических классов, параметризованных парами чисел (p_0, p_1), где $p_0 \in -\mathbb{N} \bigcup \{0\}$ и $p_1 \in \mathbb{Z}$, и содержащих отображения $e^{ip_1 t}|z|^{m-p_0} z^{p_0}$. Множество же тех $P \in \mathcal{P}_m$, для которых $\gamma_0(P) = 1$, состоит из двух гомотопических классов, в одном из которых содержится отображение $|z|^{m-1} z$, а в другом – отображение $|z|^{m-1}(-z)$. Следовательно, в случае $\gamma_0(P) = 1$ имеет место равенство $\gamma_1(P) = 0$.

Относительно разрешимости задачи (1) верна следующая

Теорема 3. *Для $P \in \mathcal{P}_m$ задача (1) разрешима при любом $f \in \mathcal{R}_m$ тогда и только тогда, когда $\gamma_0(P) \neq 0$.*

Разрешимость задачи (1) доказана с помощью вычисления вращения $\gamma_\infty(\Phi)$ вполне непрерывного векторного поля

$$\Phi(z) \equiv z(t) - z(2\pi) - \int_0^t (P(s, z(s)) + f(s, z(s)))\, ds \tag{3}$$

на сферах $\|z\| = r$ достаточно больших радиусов r пространства $C([0, 2\pi]; \mathbb{C})$. Если $\gamma_\infty(\Phi)$ определено и отлично от нуля, то, согласно принципу ненулевого вращения [2, с. 324], существует нуль векторного поля $\Phi(z)$, который будет решением задачи (1). Из результатов работ [1; 2, с. 334] следует, что если $P \in \mathcal{P}_m$ и P не зависит от t, то $\gamma_\infty(\Phi) = \gamma_0(P)$. Для вычисления вращения $\gamma_\infty(\Phi)$ в доказательстве теоремы 3 выведена для любого $P \in \mathcal{P}_m$ следующая формула (аналогичная формуле работы [3]):

$$\gamma_\infty(\Phi) = \begin{cases} \gamma_0(P), & \text{если } \gamma_0(P) < 1 \text{ и } \gamma_1(P)/(1 - \gamma_0(P)) \text{ – целое,} \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{4}$$

2. Доказательство теоремы 1. Пусть отображения $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}_m$ гомотопны посредством семейства $Q(t, z, \lambda)$, $\lambda \in [0, 1]$, где $Q(t, z, 0) = Q_1(t, z)$, $Q(t, z, 1) = Q_2(t, z)$. Сначала докажем лемму, из которой будет следовать общая априорная оценка 2π-периодических решений, соответствующих семейству $Q(t, z, \lambda)$, $\lambda \in [0, 1]$, при любом $f \in \mathcal{R}_m$. В пространстве $C([0, 2\pi]; \mathbb{C})$ определим норму формулой

$$\|z\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} |z(t)|.$$

Лемма. *Существуют числа $M > 0$ и $\sigma > 0$ такие, что для каждой функции $z \in \in C^1([0, 2\pi]; \mathbb{C})$, $\|z\| \geqslant M$, верна оценка*

$$\|z' - Q(\,\cdot\,, z, \lambda)\| + |z(0) - z(2\pi)|^m \geqslant \sigma \|z\|^m \tag{5}$$

при любом значении $\lambda \in [0, 1]$.

Доказательство. Предположим, что оценка (5) не верна. Тогда существуют последовательности $z_n \in C^1([0,2\pi];\mathbb{C})$ и $\lambda_n \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\|z_n' - Q(\,\cdot\,, z_n, \lambda_n)\| + |z_n(0) - z_n(2\pi)|^m < \frac{1}{n}\|z_n\|^m, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\rho_n := \|z_n\| = |z_n(t_n)| \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Можно считать, что $t_n \to t_0$ и $\lambda_n \to \lambda_0$ при $n \to \infty$.

Пусть $t_n\rho_n^{m-1} \to \infty$ и $(2\pi - t_n)\rho_n^{m-1} \to \infty$ при $n \to \infty$. Рассмотрим последовательность функций

$$w_n(t) = \rho_n^{-1} z_n(t_n + t\rho_n^{1-m}), \quad t \in [-t_n\rho_n^{m-1}, (2\pi - t_n)\rho_n^{m-1}], \quad n \in \mathbb{N}.$$

При каждом $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$|w_n(t)| \leqslant |w_n(0)| = 1, \quad |w_n'(t) - Q(t_n + t\rho_n^{1-m}, w_n(t), \lambda_n)| < \frac{1}{n}, \quad t \in [-t_n\rho_n^{m-1}, (2\pi - t_n)\rho_n^{m-1}].$$

Последовательность функций $\{w_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на каждом конечном отрезке $[-a, a] \subset \mathbb{R}$. Переходя к пределу на расширяющихся отрезках, получим функцию $w_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, обладающую следующими свойствами:

$$|w_0(t)| \leqslant |w_0(0)| = 1, \quad w_0'(t) = Q(t_0, w_0(t), \lambda_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Существование такой функции $w_0(t)$ противоречит тому, что $Q(\,\cdot\,, \cdot\,, \lambda_0) \in \mathcal{P}_m$.

В случае, когда $t_n\rho_n^{m-1} \to \tau_0$ при $n \to \infty$ и $\tau_0 < \infty$, рассмотрим две последовательности функций

$$w_n^+(t) = \rho_n^{-1} z_n(t\rho_n^{1-m}), \quad t \in [0, 2\pi\rho_n^{m-1}], \quad w_n^-(t) = \rho_n^{-1} z_n(2\pi + t\rho_n^{1-m}), \quad t \in [-2\pi\rho_n^{m-1}, 0].$$

Для этих функций имеем

$$|w_n^+(t)| \leqslant |w_n^+(t_n\rho_n^{m-1})| = 1, \quad |w_n^-(t)| \leqslant |w_n^-(-(2\pi - t_n)\rho_n^{m-1})| = 1,$$

$$|w_n^+(0) - w_n^-(0)|^m < \frac{1}{n},$$

$$|(w_n^{\pm})'(t) - Q(t\rho_n^{1-m}, w_n^{\pm}(t), \lambda_n)| < \frac{1}{n}, \quad \pm t \in [0, 2\pi\rho_n^{m-1}].$$

Переходя к пределу, получим две ограниченные функции $w_0^{\pm}(t)$, $\pm t \in [0, +\infty)$, которые обладают следующими свойствами:

$$(w_0^{\pm})'(t) = Q(0, w_0^{\pm}(t), \lambda_0), \quad \pm t \in (0, +\infty), \quad w_0^+(0) = w_0^-(0), \quad |w_0^+(\tau_0)| = 1.$$

Но это противоречит включению $Q(\,\cdot\,, \cdot\,, \lambda_0) \in \mathcal{P}_m$.

Аналогичным образом рассматривается случай, когда $(2\pi - t_n)\rho_n^{m-1} \to \tau_1$ при $n \to \infty$ и $\tau_1 < \infty$. Лемма доказана.

Из доказанной леммы вытекает

Следствие. *Если* $f \in \mathcal{R}_m$ *и* $|f(t,w)| \leqslant \varepsilon|w|^m + M_\varepsilon$, *где* $\varepsilon \in [0, \sigma)$, *то для* 2π*-периодических решений семейства уравнений*

$$z' = Q(t, z, \lambda) + \mu f(t, z), \quad \lambda, \mu \in [0,1], \tag{6}$$

имеет место априорная оценка

$$\|z\| \leqslant \max(M, (M_\varepsilon(\sigma - \varepsilon)^{-1})^{1/m}).$$

Действительно, если функция $z(t)$ является 2π-периодическим решением (6) при некоторых $\lambda, \mu \in [0,1]$, то либо $\|z\| \leqslant M$, либо $\|z\| > M$ и в силу леммы имеем

$$\sigma\|z\|^m \leqslant \mu\|f(\,\cdot\,,z)\| \leqslant \varepsilon\|z\|^m + M_\varepsilon, \quad \|z\| \leqslant (M_\varepsilon(\sigma-\varepsilon)^{-1})^{1/m}.$$

Перейдём непосредственно к доказательству теоремы 1.

Разобьём отрезок $[0,1]$ изменения параметра λ на k равных частей точками $\lambda_j = j/k$, $j=\overline{0,k}$, так, чтобы при любых $j=\overline{1,k}$ и $z\in\mathbb{C}$ выполнялось неравенство

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} |Q(t,z,\lambda_j) - Q(t,z,\lambda_{j-1})| < \frac{\sigma}{4}|z|^m,$$

где σ – число, определяемое леммой.

Покажем индукцией по $j=1,\ldots,k$, что если для $P = Q(\,\cdot\,,\cdot\,,\lambda_{j-1})$ задача (1) разрешима при любом $f\in\mathcal{R}_m$, то для $P = Q(\,\cdot\,,\cdot\,,\lambda_j)$ задача (1) также разрешима при любом $f\in\mathcal{R}_m$. Этим самым теорема 1 будет доказана.

Пусть $f\in\mathcal{R}_m$ и $|f(t,z)| < (\sigma/4)|z|^m + M_1$. Выберем $R > M$, $R^m > 2M_1/\sigma$, где M – число из леммы, и положим

$$f_R(t,z) = \eta_R(|z(t)|)[Q(t,z,\lambda_j) - Q(t,z,\lambda_{j-1})] + f(t,z),$$

где $\eta_R(s)$, $s\in[0,+\infty)$, – непрерывная неотрицательная возрастающая функция, равная нулю при $s \geqslant R+1$ и равная единице при $s\leqslant R$. Очевидно, $f_R\in\mathcal{R}_m$. По предположению индукции существует 2π-периодическое решение $z_R(t)$ системы уравнений

$$z' = Q(t,z,\lambda_{j-1}) + f_R(t,z).$$

Проверим, что $\|z_R\| < R$. Тогда функция $z_R(t)$ будет 2π-периодическим решением системы уравнений

$$z' = Q(t,z,\lambda_j) + f(t,z).$$

Действительно, для $z_R(t)$ имеем

$$\|z_R' - Q(\,\cdot\,,z_R,\lambda_{j-1})\| = \|f_R(\,\cdot\,,z)\| \leqslant \frac{\sigma}{2}\|z_R\|^m + M_1 < \frac{\sigma}{2}\|z_R\|^m + \frac{\sigma}{2}R^m.$$

Отсюда следует, что если $\|z_R\| \geqslant R$, то $\|z_R\| > M$ и выполнено неравенство

$$\|z_R' - Q(\,\cdot\,,z_R,\lambda_{j-1})\| < \sigma\|z_R\|^m,$$

что противоречит лемме. Следовательно, $\|z_R\| < R$. Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Пусть $P\in\mathcal{P}_m$ и $\gamma_0(P) = p_0$, $\gamma_1(P) = p_1$. Так как $P(t,z)\neq 0$ при любых t и $z\neq 0$, то верно представление $P(t,e^{i\varphi}) = |P(t,e^{i\varphi})|e^{i\theta(t,\varphi)}$, где $0\leqslant \theta(0,0) < 2\pi$. Для угловой функции $\theta(t,\varphi)$ по определению вращения двумерного векторного поля имеем $\theta(t,2\pi) - \theta(t,0) = 2\pi p_0$, $\theta(2\pi,\varphi) - \theta(0,\varphi) = 2\pi p_1$.

Рассмотрим случай $p_0 < 1$. В этом случае, как показано в работах [2, с. 84–85; 3; 8], условие в) – одно из условий принадлежности отображения P множеству $\mathcal{P}_m$ – равносильно следующему условию:

в$'$) если при некоторых $t_0,\varphi_0\in[0,2\pi)$ и целом k_0 справедливо равенство $\theta(t_0,\varphi_0) - \varphi_0 = \pi k_0$, то при $\varphi > \varphi_0$ выполняется неравенство $\theta(t_0,\varphi) - \varphi < \pi(k_0+1)$ (свойство Гомори).

Учитывая условие в$'$) и пользуясь представлениями $z = |z|e^{i\varphi}$, $P(t,z) = |z|^m P(t,e^{i\varphi})$, несложно проверить, что имеют место следующие гомотопии:

1) $P(t,z)$ гомотопно $P_1(t,z)\equiv |z|^m e^{i\theta_1^{(1)}(t,\varphi)}$ посредством семейства отображений

$$[(1-\lambda)|P(t,e^{i\varphi})| + \lambda]|z|^m e^{i\theta_\lambda^{(1)}(t,\varphi)}, \quad \lambda\in[0,1],$$

где

$$\theta_\lambda^{(1)}(t,\varphi)=\varphi+(1-\lambda)(\theta(t,\varphi)-\varphi)+\lambda\min_{0\leqslant s\leqslant\varphi}(\theta(t,s)-s);$$

2) $P_1(t,z)$ гомотопно $P_2(t,z)\equiv|z|^m e^{i[\theta(t,0)+p_0\varphi]}$ посредством семейства отображений $|z|^m\times$ $\times\, e^{i\theta_\lambda^{(2)}(t,\varphi)}$, $\lambda\in[0,1]$, где

$$\theta_\lambda^{(2)}(t,\varphi)=(1-\lambda)[\varphi+\min_{0\leqslant s\leqslant\varphi}(\theta(t,s)-s)]+\lambda[\theta(t,0)+p_0\varphi];$$

3) $P_2(t,z)$ гомотопно $P_3(t,z)\equiv|z|^{m-p_0}z^{p_0}e^{i[\theta(0,0)+p_1t]}$ посредством семейства отображений $|z|^{m-p_0}z^{p_0}e^{i\theta_\lambda^{(3)}(t,\varphi)}$, $\lambda\in[0,1]$, где

$$\theta_\lambda^{(3)}(t,\varphi)=(1-\lambda)\theta(t,0)+\lambda[\theta(0,0)+p_1t];$$

4) $P_3(t,z)$ гомотопно $P_4(t,z)\equiv|z|^{m-p_0}z^{p_0}e^{ip_1t}$ посредством семейства отображений $|z|^{m-p_0}\times$ $\times\, z^{p_0}e^{ip_1t}e^{i(1-\lambda)\theta(0,0)}$, $\lambda\in[0,1]$.

Из утверждений 1)–4) и транзитивности отношения гомотопичности следует, что

$$P(t,z)\sim e^{ip_1t}|z|^{m-p_0}z^{p_0}.$$

Если $p_0=1$, то, согласно формуле из монографии [7, с. 205], возможен только один из двух случаев: 1) при любом фиксированном $t_0\in[0,2\pi]$ все ненулевые траектории автономной системы (2) ограничены при убывании t и не ограничены при возрастании t; 2) при любом фиксированном $t_0\in[0,2\pi]$ все ненулевые траектории автономной системы (2) ограничены при возрастании t и не ограничены при убывании t. В случае 1) отображение $P(t,z)$ гомотопно $|z|^{m-1}z$ посредством семейства отображений $(1-\lambda)P(t,z)+\lambda|z|^{m-1}z$, $\lambda\in[0,1]$. В случае 2) отображение $P(t,z)$ гомотопно $|z|^{m-1}(-z)$ посредством семейства отображений $(1-\lambda)P(t,z)+\lambda|z|^{m-1}(-z)$, $\lambda\in[0,1]$.

Действительно, пусть имеет место случай 1). Предположим, что при некотором $\lambda_0\in(0,1)$ отображение $(1-\lambda_0)P(t,z)+\lambda_0|z|^{m-1}z$ не принадлежит множеству $\mathcal{P}_m$. Тогда при некотором $t_0\in[0,2\pi)$ автономная система

$$w'=(1-\lambda_0)P(t_0,w)+\lambda_0|w|^{m-1}w$$

имеет ненулевую ограниченную траекторию. Такая траектория при $t\to+\infty$ или $t\to-\infty$ приближается к инвариантному лучу μz_0, $\mu\in(0,+\infty)$, где $z_0\neq0$ и $(1-\lambda_0)P(t_0,z_0)+$ $+\lambda_0|z_0|^{m-1}z_0=-z_0$. Отсюда следует, что $P(t_0,z_0)=-(1-\lambda_0)^{-1}(1+\lambda_0|z_0|^{m-1})z_0$ и траектория автономной системы $w'=P(t_0,w)$, проходящая через точку $w(0)=z_0$, ограничена при возрастании t. Пришли к противоречию. Аналогичным образом рассматривается случай 2). Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 3. Необходимость. Пусть $P\in\mathcal{P}_m$ и $\gamma_0(P)=0$, $\gamma_1(P)=$ $=p_1$. Покажем, что задача (1) не разрешима при некотором $f\in\mathcal{R}_m$. Учитывая теоремы 1 и 2, без нарушения общности рассуждений будем считать, что $P(t,z)=e^{ip_1t}|z|^m$. Возьмём $f(t,z)=e^{ip_1t}+ip_1z$. Тогда получим систему уравнений

$$z'=e^{ip_1t}|z|^m+e^{ip_1t}+ip_1z, \tag{7}$$

которую можно представить в следующем виде:

$$(ze^{-ip_1t})'=|ze^{-ip_1t}|^m+1.$$

Отсюда вытекает, что любое решение $z(t)$ этой системы неограничено, а сама система уравнений (7) не имеет 2π-периодических решений.

Достаточность. Пусть $P \in \mathcal{P}_m$, $f \in \mathcal{R}_m$ и $\gamma_0(P) \neq 0$. Покажем, что задача (1) разрешима. Разрешимость задачи (1) равносильна существованию нуля вполне непрерывного векторного поля $\Phi(z)$, определённого формулой (3).

В силу следствия векторное поле $\Phi(z)$ не обращается в нуль на сферах $\|z\| = r$ достаточно больших радиусов r пространства $C([0,2\pi];\mathbb{C})$. Поэтому определено вращение $\gamma_\infty(\Phi)$ векторного поля $\Phi(z)$ на бесконечности (на сферах больших радиусов). Покажем, что для $\gamma_\infty(\Phi)$ верна формула (4). Тогда $\gamma_\infty(\Phi) \neq 0$ и, согласно принципу ненулевого вращения [2, с. 324], существует нуль векторного поля $\Phi(z)$, который будет решением задачи (1).

Заметим, что в силу теоремы 2 и следствия имеет место равенство $\gamma_\infty(\Phi) = \gamma_\infty(\Phi_0)$, где

$$\Phi_0(z) \equiv z(t) - z(2\pi) - \int\limits_0^t P_0(s, z(s))\, ds.$$

Здесь $P_0(t,z) = e^{ip_1 t}|z|^{m-p_0} z^{p_0}$, если $\gamma_0(P) = p_0 < 1$, $\gamma_1(P) = p_1$, и $P_0(t,z) = |z|^{m-1}z$ или $P_0(t,z) = |z|^{m-1}(-z)$, если $p_0 = 1$. В случае $P_0(t,z) = \pm|z|^{m-1}z$ из результатов работ [1; 2, с. 334] следует равенство $\gamma_\infty(\Phi_0) = 1$.

Для завершения доказательства теоремы 3 остаётся установить, что

$$\gamma_\infty(\Phi_0) = \begin{cases} p_0, & \text{если } p_0 < 1 \text{ и } p_1/(1-p_0) \text{ – целое,} \\ 1, & \text{если } p_0 < 1 \text{ и } p_1/(1-p_0) \text{ – нецелое.} \end{cases} \tag{8}$$

Покажем, что векторное поле $\Phi_0(z)$ на сферах $\|z\| = r$ достаточно больших радиусов r пространства $C([0,2\pi];\mathbb{C})$ гомотопно векторному полю

$$\Psi_0(z) \equiv z(t) - z(2\pi)e^{i2\pi\delta} - \int\limits_0^t |z(s)|^{m-p_0} z(s)^{p_0}\, ds,$$

где $\delta = p_1/(1-p_0)$. Для этого рассмотрим два семейства векторных полей:

$$\Phi_\lambda(z) = e^{-i\lambda\delta t}\Phi_0(ze^{i\lambda\delta t}), \quad \lambda \in [0,1],$$

и

$$\Psi_\lambda(z) \equiv z(t) - e^{-i\lambda\delta t} z(2\pi)e^{i2\pi\delta} - \int\limits_0^t e^{-i\lambda\delta(t-s)}|z(s)|^{m-p_0} z(s)^{p_0}\, ds, \quad \lambda \in [0,1].$$

Очевидно, что первое семейство векторных полей не обращается в нуль на сферах достаточно больших радиусов. Проверим, что второе семейство также невырождено на бесконечности.

Предположим, что существуют последовательности $\lambda_n \in [0,1]$ и $z_n \in C([0,2\pi];\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, такие, что $\Psi_{\lambda_n}(z_n) = 0$ и $\|z_n\| > n$ при $n \in \mathbb{N}$. При каждом n для функции $z_n(t)$ имеем равенства

$$z_n'(t) = |z_n(t)|^{m-p_0} z_n^{p_0}(t) - i\lambda\delta z_n(t), \quad t \in (0,2\pi), \quad z_n(0) = z_n(2\pi)e^{i2\pi\delta}.$$

Далее, рассуждая так же, как при доказательстве леммы 1, приходим к следующему выводу: либо существует ненулевая ограниченная траектория автономной системы

$$w' = |w|^{m-p_0} w^{p_0}, \tag{9}$$

либо существует пара ненулевых ограниченных решений $w^{\pm}(t)$, $\pm t \in [0,+\infty)$, автономной системы (9), для которой имеет место равенство $w^+(0) = w^-(0)e^{i2\pi\delta}$. Первый случай невозможен из-за того, что $|z|^{m-p_0} z^{p_0} \in \mathcal{P}_m$. Во втором случае, согласно фазовому портрету автономной системы (9), должно выполняться равенство $2\pi\delta = (2k+1)\pi/(1-p_0)$ при некотором целом k. Отсюда следует, что число $p_1 = k + 1/2$ нецелое. Получили противоречие. Таким образом, доказано равенство

$$\gamma_\infty(\Phi_0) = \gamma_\infty(\Psi_0). \tag{10}$$

Из результатов работ [1; 2, с. 334] следует, что

$$\gamma_\infty(\Psi_0) = p_0, \quad \text{если} \quad \delta \text{ – целое.} \tag{11}$$

Если δ нецелое, то имеем: а) $\Psi_0(z) \neq 0$ при $z \neq 0$; б) $\gamma_\infty(\Psi_0) = \gamma_0(\Psi_0)$, где $\gamma_0(\Psi_0)$ – вращение векторного поля $\Psi_0(z)$ на сферах $\|z\| = \varepsilon$ малых радиусов ε; в) $\gamma_0(\Psi_0) = 1$. Действительно, если а) не верно и $\Psi_0(z) = 0$ при некоторой ненулевой функции $z(t) \in C([0, 2\pi]; \mathbb{C})$, то $z(t)$ будет решением автономной системы (9) и $z(0) = z(2\pi)e^{i2\pi\delta}$. Тогда, согласно фазовому портрету автономной системы (9), должно выполняться неравенство $2\pi|\delta| < \pi/(1-p_0)$, отсюда следует, что $0 < |p_1| < 1/2$. Пришли к противоречию. Справедливость равенства б) вытекает из а) вследствие свойства вращения векторных полей. Равенство $\gamma_0(\Psi_0) = 1$ выводится из легко проверяемых равенств $\gamma_0(\Psi_0) = \gamma_0(F)$ и $\gamma_0(F) = 1$, где $F(z) \equiv z(t) - z(2\pi)e^{i2\pi\delta}$, с использованием общих свойств вращения векторных полей. Таким образом,

$$\gamma_\infty(\Psi_0) = 1, \quad \text{если} \quad \delta \text{ – нецелое.} \tag{12}$$

Из соотношений (10)–(12) непосредственно вытекает равенство (8). Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мухамадиев Э.* К теории периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1970. Т. 194. № 3. С. 510–513.
2. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М., 1975.
3. *Мухамадиев Э.* Формула для вычисления вращения одного класса векторных полей // Докл. АН Тадж. ССР. 1977. Т. 20. № 5. С. 11–14.
4. *Мухамадиев Э., Наимов А.Н.* К теории двухточечных краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 10. С. 1372–1381.
5. *Мухамадиев Э., Наимов А.Н.* Критерий разрешимости одного класса нелинейных двухточечных краевых задач на плоскости // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 334–341.
6. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1980.
7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.
8. *Бобылев Н.А.* О построении правильных направляющих функций // Докл. АН СССР. 1968. Т. 183. № 2. С. 265–266.

Вологодский государственный университет,
Таджикский национальный университет,
г. Душанбе, Таджикистан

Поступила в редакцию 27.10.2019 г.
После доработки 27.10.2019 г.
Принята к публикации 11.12.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 2, с. 210–223

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.911+517.925.51

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ОГРАНИЧЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ИХ РЕШЕНИЙ. II

© 2021 г. М. С. Филипковская

Доказаны теоремы об устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости по Ляпунову положения равновесия нестационарных полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ), а также теоремы об асимптотической (полной) устойчивости этих уравнений. В качестве примера применения доказанных в первой части работы теорем о глобальной разрешимости нестационарных полулинейных ДАУ исследована математическая модель некоторой электрической цепи.

DOI: 10.31857/S0374064121020096

Настоящая работа является второй частью работы [1], поэтому в ней продолжается начатая в [1] нумерация пунктов, формул, лемм и теорем.

В данной работе, как и в [1], рассматриваются неявные дифференциальные уравнения

$$\frac{d}{dt}[A(t)x(t)] + B(t)x(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [t_+, \infty), \tag{1.1}$$

$$A(t)\frac{d}{dt}x(t) + B(t)x(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [t_+, \infty), \tag{1.2}$$

и начальное условие

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.3}$$

где $t_0 \geqslant t_+ \geqslant 0$, $A, B\colon [t_+, \infty) \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ (через $\mathrm{L}(X, Y)$ обозначается векторное пространство непрерывных линейных операторов, действующих из векторного пространства X в векторное пространство Y; $\mathrm{L}(X, X) = \mathrm{L}(X)$) и $f\colon [t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Операторы $A(t)$ и $B(t)$ могут быть вырожденными (необратимыми). Уравнения вида (1.1), (1.2) с вырожденным (при некотором t) оператором $A(t)$ называют *вырожденными дифференциальными уравнениями* или *дифференциально-алгебраическими уравнениями*. В терминологии ДАУ уравнения вида (1.1), (1.2) принято называть *полулинейными*. Поскольку операторы $A(t)$ и $B(t)$ нестационарны, то уравнения (1.1), (1.2) называются *нестационарными* полулинейными ДАУ или нестационарными вырожденными дифференциальными уравнениями. В дальнейшем, для общности, уравнения (1.1) и (1.2), где $A(t)$ $(A\colon [t_+, \infty) \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$ – произвольный (не обязательно вырожденный) оператор, будем называть *нестационарными полулинейными ДАУ*.

Левой (линейной) части уравнений (1.1) и (1.2) отвечает пучок операторов $\lambda A(t) + B(t)$ ($\lambda \in \mathbb{C}$ – параметр). Пусть для каждого $t \geqslant t_+$ пучок регулярен, т.е. для каждого $t \geqslant t_+$ множество его регулярных точек не пусто (множеством регулярных точек пучка $\lambda A(t) + B(t)$ является множество регулярных точек его комплексного расширения). Для регулярных точек λ существует резольвента $R(\lambda, t) = (\lambda A(t) + B(t))^{-1}$.

Ниже даны некоторые сведения из [1, п. 1] относительно нестационарных спектральных проекторов $P_j(t)$, $Q_j(t)$, $j = 1, 2$, и оператора $G(t)$, использующиеся в работе. Эти проекторы и оператор $G(t)$ и их свойства подробно описаны в монографии [2].

В дальнейшем предполагается, что для каждого $t \geqslant t_+$ пучок регулярен и выполнено следующее условие: существуют функции $C_1\colon [t_+, \infty) \to (0, \infty)$ и $C_2\colon [t_+, \infty) \to (0, \infty)$ такие, что для любого $t \in [t_+, \infty)$ выполнена оценка

$$\|R(\lambda, t)\| \leqslant C_1(t), \quad |\lambda| \geqslant C_2(t). \tag{1.4}$$

Тогда для каждого $t \in [t_+, \infty)$ существуют две пары взаимно дополнительных проекторов $P_1(t)$, $P_2(t)$ и $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ ($P_i(t)P_j(t) = \delta_{ij}P_i(t)$, $P_1(t)+P_2(t) = I_{\mathbb{R}^n}$, и $Q_i(t)Q_j(t) = \delta_{ij}Q_i(t)$, $Q_1(t)+Q_2(t) = I_{\mathbb{R}^n}$, где $I_{\mathbb{R}^n}$ – тождественный оператор в $\mathbb{R}^n$, δ_{ij} – символ Кронекера), которые могут быть определены по формулам [1, (1.15)] (см. [2, с. 82–83]), являются вещественными (поскольку $A(t)$ и $B(t)$ вещественные) и порождают прямые разложения пространств

$$\mathbb{R}^n = X_1(t)\dot{+}X_2(t), \quad X_j(t) = P_j(t)\mathbb{R}^n, \quad \mathbb{R}^n = Y_1(t)\dot{+}Y_2(t), \quad Y_j(t) = Q_j(t)\mathbb{R}^n, \quad j = 1, 2,$$

такие, что пары подпространств $X_1(t)$, $Y_1(t)$ и $X_2(t)$, $Y_2(t)$ инвариантны относительно $A(t)$, $B(t)$ (т.е. $A(t), B(t)\colon X_j(t) \to Y_j(t)$), а суженные операторы $A_j(t) = A(t)|_{X_j(t)}\colon X_j(t) \to Y_j(t)$, $B_j(t) = B(t)|_{X_j(t)}\colon X_j(t) \to Y_j(t)$, $j = 1, 2$, таковы, что $A_2(t) = 0$ и существуют $A_1^{-1}(t)$ (если $X_1(t) \neq \{0\}$) и $B_2^{-1}(t)$ (если $X_2(t) \neq \{0\}$). Проекторы $P_j(t)$, $Q_j(t)$ удовлетворяют следующим свойствам:

$$A(t)P_1(t) = Q_1(t)A(t) = A(t), \quad A(t)P_2(t) = Q_2(t)A(t) = 0, \quad B(t)P_j(t) = Q_j(t)B(t), \quad j = 1, 2.$$

Они также используются при построении вспомогательного оператора

$$G(t) = A(t) + B(t)P_2(t) = A(t) + Q_2(t)B(t) \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n),$$

$G(t)\colon X_j(t) \to Y_j(t)$ $(G(t)X_j(t) = Y_j(t))$, который имеет обратный $G^{-1}(t) = A_1^{-1}(t)Q_1(t) + B_2^{-1}(t)Q_2(t) \in L(\mathbb{R}^n)$ $(G^{-1}(t)\colon Y_j(t) \to X_j(t))$.

Пусть $A, B \in C^1([t_+, \infty), \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$ и $C_2 \in C^1([t_+, \infty), (0, \infty))$, тогда проекторы $P_i(t)$, $Q_i(t)$, $i = 1, 2$, и операторы $G(t)$, $G^{-1}(t)$ также непрерывно дифференцируемы как оператор-функции на $[t_+, \infty)$, т.е. $P_i, Q_i, G, G^{-1} \in C^1([t_+, \infty), \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$.

Для каждого t любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ единственным образом представим в виде

$$x = P_1(t)x + P_2(t)x = x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t), \quad x_{p_i}(t) = P_i(t)x \in X_i(t).$$

Функцию $x \in C([t_0, t_1), \mathbb{R}^n)$, $[t_0, t_1) \subseteq [t_+, \infty)$, называют *решением уравнения (1.1) на промежутке* $[t_0, t_1)$, если $A(t)x(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_0, t_1)$ и $x(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) на $[t_0, t_1)$. Функцию $x \in C^1([t_0, t_1), \mathbb{R}^n)$ называют *решением уравнения (1.2) на промежутке* $[t_0, t_1)$, если $x(t)$ удовлетворяет уравнению (1.2) на $[t_0, t_1)$. Если решение $x(t)$ уравнения (1.1) (уравнения (1.2)) удовлетворяет начальному условию (1.3), то его называют *решением задачи Коши* или *начальной задачи* (1.1), (1.3) (*решением задачи Коши* или *начальной задачи* (1.2), (1.3)).

В первой части настоящей работы, т.е. в [1], для ДАУ (1.1) и (1.2) получены теоремы, дающие достаточные условия существования и единственности глобальных решений, теоремы об устойчивости по Лагранжу, диссипативности (предельной ограниченности) и неустойчивости по Лагранжу. Устойчивость по Лагранжу (диссипативность ДАУ) означает существование глобальных решений для всех согласованных начальных значений, т.е. для всех возможных начальных значений, и ограниченность (предельную ограниченность) всех решений.

Одной из особенностей теорем о существовании и единственности глобальных решений, представленных в [1], является то, что в них не используется глобальное условие Липшица или подобные ему ограничения. Подробнее это обсуждается в [1, пп. 2.1]. В настоящей работе в п. 5 продемонстрировано применение теорем 2.1, 2.2 [1] о глобальной разрешимости (которые не содержат глобальных условий Липшица) для решения одной задачи по электротехнике, а также показано, что условия теорем могут выполняться для функций, не удовлетворяющих условию утверждения 2.1 [1] о глобальной разрешимости, в котором требуется, чтобы "алгебраическая часть" ДАУ удовлетворяла глобальному условию Липшица по компоненте $P_2(t)x$ переменной x (некоторые условия теорем 2.1, 2.2 и утверждения 2.1 совпадают), а для функций, удовлетворяющих условиям утверждения, условия теорем также будут выполнены. Вообще, из доказательства утверждения 2.1 [1] следует, что если его условия выполнены, то выполнены и условия теорем 2.1, 2.2 [1].

В настоящей работе получены теоремы об устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости по Ляпунову положения равновесия ДАУ (1.1) и (1.2), а также теоремы об асимптотической (полной) устойчивости ДАУ (1.1) и (1.2).

3. Устойчивость и асимптотическая устойчивость по Ляпунову. Рассмотрим ДАУ (1.1) и (1.2), где $f(t,0)\equiv 0$. Их иногда называют ДАУ возмущённого движения (по аналогии с соответствующим термином для явных ОДУ). Эти ДАУ имеют положение равновесия (стационарное решение) $x_*(t)\equiv 0$. Напомним, что согласованной начальной точкой для задачи Коши (1.1), (1.3) (задачи Коши (1.2), (1.3)) называется точка (t_0,x_0), принадлежащая многообразию L_{t_+} (многообразию $\widehat{L}_{t_+}$), где L_{t_+} и $\widehat{L}_{t_+}$ имеют вид (см. [1, формулы (1.21), (1.22)])

$$L_{t_+}=\{(t,x)\in[t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n \mid Q_2(t)[A'(t)P_1(t)x+B(t)x-f(t,x)]=0\},$$

$$\widehat{L}_{t_+}=\{(t,x)\in[t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n \mid Q_2(t)[B(t)x-f(t,x)]=0\}.$$

Очевидно, точка $(t,0)$ принадлежит L_{t_+} и $\widehat{L}_{t_+}$ для каждого $t\in[t_+,\infty)$ (если $f(t,0)\equiv 0$).

Ниже через $U_R^x(0)$, $B_{r_1}(0)$ и $B_{r_1,r_2}^{x_{p_1},x_{p_2}}(0)$ обозначаются множества

$$U_R^x(0)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|<R\},\quad B_{r_1}(0)=\{z\in\mathbb{R}^n \mid \|z\|\leqslant r_1\}$$

и

$$B_{r_1,r_2}^{x_{p_1},x_{p_2}}(0)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x_{p_i}(t)\|\leqslant r_i,\ x_{p_i}(t)=P_i(t)x,\ i=1,2\}.$$

Пусть $f\colon[t_+,\infty)\times U_R^x(0)\to\mathbb{R}^n$.

Определение 3.1. Положение равновесия $x_*(t)\equiv 0$ ДАУ (1.1), где $f(t,0)\equiv 0$, называется *устойчивым по Ляпунову*, или просто *устойчивым*, если для любых $\varepsilon>0$ $(\varepsilon<R)$, $t_0\in[t_+,\infty)$ существует число $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$ $(\delta\leqslant\varepsilon)$ такое, что для любой согласованной начальной точки (t_0,x_0), удовлетворяющей условию $\|x_0\|<\delta$, существует глобальное решение $x(t)$ задачи Коши (1.1), (1.3) и это решение удовлетворяет неравенству $\|x(t)\|<\varepsilon$ для всех $t\in[t_0,\infty)$. Если, кроме того, существует $\widetilde{\delta}=\widetilde{\delta}(t_0)>0$ $(\widetilde{\delta}\leqslant\delta)$ такое, что для каждого решения $x(t)$ с начальной точкой (t_0,x_0), удовлетворяющей условию $\|x_0\|<\widetilde{\delta}$, выполнено требование $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$, то положение равновесия $x_*(t)\equiv 0$ называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову* (или просто *асимптотически устойчивым*).

Если в определении 3.1 число δ не зависит от t_0, т.е. $\delta=\delta(\varepsilon)$, то положение равновесия называется *равномерно устойчивым по Ляпунову*, или просто *равномерно устойчивым*, (на $[t_+,\infty)$).

Определение 3.2. Положение равновесия $x_*(t)\equiv 0$ ДАУ (1.1), где $f(t,0)\equiv 0$, называется *неустойчивым по Ляпунову*, или просто *неустойчивым*, если для некоторых $\varepsilon>0$ $(\varepsilon<R)$, $t_0\in[t_+,\infty)$ и любого $\delta>0$ существуют решение $x_\delta(t)$ задачи Коши (1.1), (1.3) и момент времени $t_1>t_0$ такие, что $\|x_0\|<\delta$ и $\|x_\delta(t_1)\|\geqslant\varepsilon$.

Пусть теперь $f\colon[t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$.

Определение 3.3. Если положение равновесия $x_*(t)\equiv 0$ ДАУ (1.1), где $f(t,0)\equiv 0$, асимптотически устойчиво и, более того, для каждой точки $(t_0,x_0)\in L_{t_+}$ (т.е. для каждой согласованной начальной точки) существует глобальное решение $x(t)$ задачи Коши (1.1), (1.3) и $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$, то положение равновесия $x_*(t)\equiv 0$ называется *асимптотически устойчивым в целом*, а ДАУ – *полностью устойчивым*, или *асимптотически устойчивым*.

Аналогичные определения имеют место для ДАУ (1.2), где $f(t,0)\equiv 0$.

Приведённые определения устойчивости и асимптотической устойчивости положения равновесия ДАУ подобны тем, что даны в [3–5], и представляют собой обобщения соответствующих классических определений для (явных) ОДУ, а определение асимптотической устойчивости в целом положения равновесия (полной устойчивости) ДАУ обобщает соответствующее определение для (явных) ОДУ из [6, с. 35–36] ([7, с. 85]).

Заметим, что для полулинейного ДАУ (невозмущённого движения), так же, как и в случае явного нелинейного ОДУ, из устойчивости по Ляпунову нестационарного решения, в общем, не следует его устойчивость по Лагранжу. Также из устойчивости по Лагранжу решения полулинейного ДАУ, вообще говоря, не следует его устойчивость по Ляпунову.

Замечание 3.1. Поскольку из неустойчивости решения по Лагранжу следует его неустойчивость по Ляпунову, то теоремы о неустойчивости по Лагранжу ДАУ можно рассматривать и как теоремы о неустойчивости по Ляпунову.

Теорема 3.1 (устойчивость и асимптотическая устойчивость по Ляпунову положения равновесия ДАУ (1.1)). *Пусть* $f \in C([t_+,\infty) \times U_R^x(0), \mathbb{R}^n)$, $f(t,0) \equiv 0$, $\partial f/\partial x \in C([t_+,\infty) \times U_R^x(0), \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, $A, B \in C^1([t_+,\infty), \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$ *и пучок* $\lambda A(t) + B(t)$ *удовлетворяет условию (1.4), где* $C_2 \in C^1([t_+,\infty),(0,\infty))$. *Пусть для каждого* $t_* \in [t_+,\infty)$ *и* $x_{p_1}^*(t_*) = 0$, $x_{p_2}^*(t_*) = 0$ *оператор**)

$$\Phi_{t_*,x_{p_1}^*(t_*),x_{p_2}^*(t_*)} = \left[\frac{\partial}{\partial x}[Q_2(t_*) f(t_*, x_{p_1}^*(t_*) + x_{p_2}^*(t_*))] - B(t_*)\right] P_2(t_*)\colon X_2(t_*) \to Y_2(t_*)$$

имеет обратный. Тогда верны следующие утверждения.

1. Пусть существуют числа $r_1, r_2 > 0$, $r_1 + r_2 < R$, *и положительно определённая функция* $V \in C^1([t_+,\infty) \times B_{r_1}(0), \mathbb{R})$ *такие, что для всех* $t \in [t_+,\infty)$ *и* $x \in B_{r_1,r_2}^{x_{p_1},x_{p_2}}(0)$ *выполнено неравенство*

$$V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t)) \leqslant 0, \tag{3.1}$$

где $V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t))$ *имеет вид***)

$$V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t)) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x_{p_1}(t)) + \left(\frac{\partial V}{\partial z}(t, x_{p_1}(t)), [P_1'(t) - G^{-1}(t) Q_1(t) [A'(t) + B(t)]] x_{p_1}(t) + \right.$$
$$\left. + G^{-1}(t) Q_1(t) f(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t))\right).$$

Тогда положение равновесия $x_*(t) \equiv 0$ *ДАУ (1.1) устойчиво по Ляпунову.*

2. Пусть существуют числа $r_1, r_2 > 0$, $r_1 + r_2 < R$, *и положительно определённые функции* $V \in C^1([t_+,\infty) \times B_{r_1}(0), \mathbb{R})$, $W \in C(B_{r_1}(0), \mathbb{R})$, $U \in C(B_{r_1}(0), \mathbb{R})$ *такие, что* $V(t,z) \leqslant W(z)$ *для всех* $t \in [t_+,\infty)$, $z \in B_{r_1}(0)$ *и*

$$V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t)) \leqslant -U(x_{p_1}(t)) \tag{3.2}$$

для всех $t \in [t_+,\infty)$, $x \in B_{r_1,r_2}^{x_{p_1},x_{p_2}}(0)$, $x_{p_1}(t) \neq 0$; *пусть также выполнено условие:*

$$G^{-1}(t) Q_2(t) [f(t, P_1(t)x + P_2(t)x) - A'(t) P_1(t) x] \to 0$$

$$\text{при } x \to 0 \text{ равномерно по } t \text{ на } [T,\infty) \text{ для некоторого } T > t_+. \tag{3.3}$$

Тогда положение равновесия $x_*(t) \equiv 0$ *ДАУ (1.1) асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Доказательство утверждения 1. Введём отображения $\Pi, F \in C([t_+,\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ вида (2.5), (2.6) и рассмотрим систему (2.9), (2.10). Очевидно, $f(t,0) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $\Pi(t,0,0) \equiv 0$ и $F(t,0,0) \equiv 0$. Напомним, что ДАУ (1.1) эквивалентно системе (1.14), (1.15) (или (1.12), (1.13)).

Без потери общности можем считать, что оператор $A(t)$ не является нулевым или обратимым при всех t, так как в случае, если $A(t)$ обратим (при всех t), ДАУ можно свести к явному ОДУ, а в случае, если $A(t)$ тождественно равен нулю, ДАУ становится чисто алгебраическим уравнением, т.е. не содержит производной. Для этих особых случаев теорема остаётся верной, но её доказательство представляет интерес именно для ДАУ. Поэтому в дальнейшем будем

*) См. [1, формула (2.2)]. Здесь и ниже в формулировках теорем мы для удобства воспроизводим некоторые формулы работы [1].

**) См. [1, формула (2.4)].

предполагать, что $X_1(t) \neq \{\mathbf{0}\}$ и $X_2(t) \neq \{\mathbf{0}\}$. Напомним, что размерности подпространств $X_1(t)$, $X_2(t)$ постоянны при всех $t \in [t_+, \infty)$ (см. замечание 1.1).

Очевидно, что существуют некоторые области $D^z, D^u \subset \mathbb{R}^n$, содержащие начало координат, для которых определены отображения Π, F, т.е. $P_1(t)D^z + P_2(t)D^u \subset U_R^x(0)$ и $\Pi(t,z,u)\colon [t_+,\infty) \times D^z \times D^u \to \mathbb{R}^n$, $F(t,z,u)\colon [t_+,\infty)\times D^z \times D^u \to \mathbb{R}^n$. Отображения $\Pi, F \in C([t_+,\infty) \times D^z \times D^u, \mathbb{R}^n)$ непрерывно дифференцируемы по z, u и частные производные отображения $F(t,z,u)$ имеют вид (2.7), (2.8), где $\Phi_{t,P_1(t)z,P_2(t)u}$ – оператор (2.2). Обозначим $\tilde{\Phi}_{t,z,u} = \Phi_{t,P_1(t)z,P_2(t)u}$ как в теореме 2.1. Очевидно, что лемма 2.1 остаётся в силе. Заметим, что если $u(t) \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет равенству $F(t,z(t),u(t)) = 0$ (т.е. равенству (2.10)), то $u(t) \in X_2(t)$.

По условию теоремы для каждого $t_* \in [t_+,\infty)$ обратим оператор $\tilde{\Phi}_{t_*,0,0} = \Phi_{t_*,0,0}$. Следовательно, для каждой точки $(t,z,u) = (t_*,0,0)$ обратим оператор $\Psi_{t,z,u} = \partial F(t,z,u)/\partial u$ (см. (2.12)). Пусть $t_* \in [t_+,\infty)$ – произвольный фиксированный элемент. Так как $F(t_*,0,0) = 0$ и выполнены условия теорем о неявной функции, то существуют окрестности $U_{\sigma_1}(t_*) \times U^z_{\delta_1}(0) \subset [t_+,\infty) \times D^z$ $(U_{\sigma_1}(t_*) = [t_*, t_* + \sigma_1)$ при $t_* = t_+)$, $U^u_{\gamma_1}(0) \subset D^u$ и единственная функция $u = \mu(t,z) \in C(U_{\sigma_1}(t_*) \times U^z_{\delta_1}(0), U^u_{\gamma_1}(0))$, которая является непрерывно дифференцируемой по z на $U_{\sigma_1}(t_*) \times U^z_{\delta_1}(0)$ и удовлетворяет уравнению (2.11), т.е. $F(t,z,\mu(t,z)) = 0$ для $(t,z) \in U_{\sigma_1}(t_*) \times U^z_{\delta_1}(0)$, и $\mu(t_*,0) = 0$. Так как $u = \mu(t,z)$ удовлетворяет (2.11) для $(t,z) \in U_{\sigma_1}(t_*) \times U^z_{\delta_1}(0)$, то $\mu(t,z) \in X_2(t)$ и $(t, P_1(t)z + \mu(t,z)) \in L_{t_+}$ для каждого $(t,z) \in U_{\sigma_1}(t_*) \times U^z_{\delta_1}(0)$. Таким образом, доказано, что для каждого $t \in [t_+,\infty)$ и каждого z из достаточно малой окрестности $U^z_{\delta_1}(0)$ существует единственное u из достаточно малой окрестности $U^u_{\gamma_1}(0)$, удовлетворяющее (2.11). Поскольку полученная неявная функция $u = \mu(t,z)$ непрерывна в точке $(t_*,0)$, то для всякого $\varepsilon_1 > 0$ найдутся $\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_1(\varepsilon_1,t_*) > 0$, $\tilde{\delta}_1 = \tilde{\delta}_1(\varepsilon_1,t_*) > 0$ $(\tilde{\sigma}_1 \leqslant \sigma_1,\ \tilde{\delta}_1 \leqslant \delta_1)$ такие, что для $(t,z) \in U_{\tilde{\sigma}_1}(t_*) \times U^z_{\tilde{\delta}_1}(0)$ выполнено неравенство $\|\mu(t,z)\| < \varepsilon_1$ и, следовательно, $\|u\| < \varepsilon_1$ при $u = \mu(t,z)$. Таким образом, доказана следующая

Лемма 3.1. *Для любых $\varepsilon_u > 0$, $t \in [t_+,\infty)$ и любого $z \in U^z_{\delta_*}(0)$, где $\delta_* > 0$ достаточно мало, существует единственное $u \in U^u_{\varepsilon_u}(0)$, удовлетворяющее уравнению (2.11), и это и принадлежит $X_2(t)$ (т.е. $\|u\| < \varepsilon_u$, $F(t,z,u) = 0$ и $u = P_2(t)u$).*

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число $(\varepsilon < R)$. Представим его в виде суммы $\varepsilon = \varepsilon_z + \varepsilon_u$ чисел $\varepsilon_z > 0$, $\varepsilon_u > 0$, которые будут указаны ниже.

Подобно тому, как это сделано выше, используя теоремы о неявной функции и лемму 3.1, получаем следующее утверждение. Для любого фиксированного $t_* \in [t_0,\infty)$ существуют промежуток $U_{\sigma_2}(t_*) \subset [t_+,\infty)$ $(\sigma_2 = \sigma_2(\varepsilon_u,t_*)$, $U_{\sigma_2}(t_+) = [t_+, t_+ + \sigma_2))$, окрестность $U^z_{\delta_2}(0)$ $(\delta_2 = \delta_2(\varepsilon_u,t_*) \leqslant \varepsilon_z)$ и единственная функция $\nu_{t_*}(t,z) \in C(U_{\sigma_2}(t_*) \times U^z_{\delta_2}(0), U^u_{\varepsilon_u}(0))$, являющаяся решением уравнения (2.11) относительно u (т.е. $F(t,z,\nu_{t_*}(t,z)) = 0$ для $(t,z) \in U_{\sigma_2}(t_*) \times U^z_{\delta_2}(0))$, непрерывно дифференцируемая по z и принадлежащая $X_2(t)$ для каждого $(t,z) \in U_{\sigma_2}(t_*) \times U^z_{\delta_2}(0)$, а также удовлетворяющая равенству $\nu_{t_*}(t_*,0) = 0$. Введём функцию $u = \eta(t,z)\colon [t_+,\infty) \times U^z_{\delta_2}(0) \to U^u_{\varepsilon_u}(0)$ и определим $\eta(t,z) = \nu_{t_*}(t,z)$ в точке $(t,z) = (t_*,z_*)$ для каждой точки $(t_*,z_*) \in [t_+,\infty) \times U^z_{\delta_2}(0)$. Тогда функция $u = \eta(t,z)$, непрерывная по (t,z) и непрерывно дифференцируемая по z, является единственным решением уравнения (2.11) и принадлежит $X_2(t)$ для каждого $(t,z) \in [t_+,\infty) \times U^z_{\delta_2}(0)$. Очевидно, $\eta(t,0) \equiv 0$.

Подставим полученную функцию $u = \eta(t,z)$ в (2.5) и обозначим $\widetilde{\Pi}(t,z) = \Pi(t,z,\eta(t,z))$. Тогда уравнение (2.9) примет вид (2.13), т.е. $z'(t) = \widetilde{\Pi}(t,z(t))$. В силу свойств функций η и Π функция $\widetilde{\Pi}$ непрерывна по (t,z) и непрерывно дифференцируема по z на $[t_+,\infty) \times U^z_{\delta_2}(0)$, а также $\widetilde{\Pi}(t,0) \equiv 0$. Очевидно, что для каждой начальной точки $(t_0,z_0) \in [t_+,\infty) \times U^z_{\delta_2}(0)$ существует единственное локальное решение уравнения (2.13).

Возьмём любое начальное значение $t_0 \in [t_+,\infty)$ и выберем любое согласованное начальное значение x_0, т.е. $(t_0,x_0) \in L_{t_+}$, или $F(t_0, P_1(t_0)x_0, P_2(t_0)x_0) = 0$, удовлетворяющее условию $\|x_0\| < \delta \leqslant \varepsilon$, где $\delta = \delta(\varepsilon,t_0) > 0$ выбрано так, что $\|P_1(t_0)x_0\| < \delta_z \leqslant \min\{\varepsilon_z, \delta_2\}$ и δ_z – достаточно малое число, которое будет определено ниже, и $\|P_2(t_0)x_0\| < \varepsilon_u$. Обозначим $z_0 = P_1(t_0)x_0$ и $u_0 = P_2(t_0)x_0$, тогда $\eta(t_0, z_0) = u_0$ (поскольку $F(t_0, z_0, u_0) = 0$). Для выбранной начальной точки (t_0, z_0) существует единственное локальное решение $z = \zeta(t)$ уравнения (2.13), удовлетворяющее начальному условию $\zeta(t_0) = z_0$. Тогда функции $z = \zeta(t)$, $u = \eta(t, \zeta(t))$ являются единственным локальным решением системы (2.9), (2.10), удовлетворяющим начальным условиям $\zeta(t_0) = z_0$, $\eta(t_0, \zeta(t_0)) = u_0$, и по лемме 2.1 функция $x(t) = \zeta(t) + \eta(t, \zeta(t))$ $(\zeta(t) = P_1(t)x(t) = x_{p_1}(t) \in X_1(t),\ \eta(t, \zeta(t)) = P_2(t)x(t) = x_{p_2}(t) \in X_2(t))$ является единственным локальным решением ДАУ (1.1), удовлетворяющим начальному условию (1.3), где $x_0 = z_0 + u_0$. Без потери общности можем считать, что $\delta_2 \leqslant r_1$ и $\varepsilon_u \leqslant r_2$, где числа r_1, r_2 определены в утверждении 1. В силу условия (3.1) для любых $t \in [t_0, \infty)$ и $z \in X_1(t)$ таких, что $\|z\| < \delta_2$, производная функции V в силу уравнения (2.13) удовлетворяет неравенству

$$V'_{(2.13)}(t, z) \leqslant 0. \tag{3.4}$$

Напомним, что $\|z_0\| < \delta_z \leqslant \min\{\varepsilon_z, \delta_2\}$, где $z_0 = P_1(t_0)x_0 = \zeta(t_0)$. Далее, как и в доказательстве классической теоремы Ляпунова об устойчивости, получаем, что число $\delta_z = \delta_z(\varepsilon_z, t_0) > 0$ можно выбрать таким, что решение $z = \zeta(t)$ имеет продолжение на $[t_0, \infty)$ (т.е. является глобальным) и $\|\zeta(t)\| < \varepsilon_z$ для всех $t \in [t_0, \infty)$. Это выполнено для любого $\varepsilon_z > 0$. Выберем такие δ_z, ε_z и ε_u, что $\varepsilon_z + \varepsilon_u = \varepsilon$, $\|\zeta(t)\| < \varepsilon_z$ для $t \in [t_0, \infty)$ и $\|\eta(t, \zeta(t))\| < \varepsilon_u$ при $\|\zeta(t)\| < \varepsilon_z$, $t \in [t_0, \infty)$. Тогда $\|x(t)\| = \|\zeta(t) + \eta(t, \zeta(t))\| < \varepsilon_z + \varepsilon_u = \varepsilon$ для всех $t \in [t_0, \infty)$. Поскольку $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in [t_+, \infty)$ выбирались произвольно, то утверждение 1 доказано.

Доказательство утверждения 2. Устойчивость по Ляпунову положения равновесия $x_*(t) \equiv 0$ доказывается так же, как и выше. Покажем, что решение $x(t) = \zeta(t) + \eta(t, \zeta(t))$ с начальной точкой (t_0, x_0) $(x_0 = z_0 + u_0)$, построенное в доказательстве утверждения 1, удовлетворяет требованию $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$ при $\|x_0\| < \delta$ и достаточно малом $\delta = \delta(t_0) > 0$. Как и выше, δ выбрано так, что $\|z_0\| = \|P_1(t_0)x_0\| < \delta_z$, где δ_z – достаточно малое число, которое будет определено ниже. Очевидно, что числа δ и δ_z отличаются от тех, которые были выбраны в доказательстве утверждения 1, но для удобства мы сохраняем за ними прежние обозначения.

Так как по условию утверждения 2 существует функция $W \in C(B_{r_1}(0), \mathbb{R})$ такая, что $W(0) = 0$ и $0 \leqslant V(t, z) \leqslant W(z)$ для всех $t \in [t_+, \infty)$, $z \in B_{r_1}(0)$, то $V(t, z)$ допускает бесконечно малый высший предел в $B_{r_1}(0)$ (см. определение [6, с. 11, определение 1.7]). Поскольку в силу условия (3.2) вместо неравенства (3.4) выполнено неравенство $V'_{(2.13)}(t, z) \leqslant -U(z)$, где скалярная функция $U(z)$ непрерывна и положительно определена, то, как и в доказательстве классической теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, получаем, что число $\delta_z = \delta_z(t_0) > 0$ можно выбрать таким, чтобы $\lim\limits_{t\to\infty} \zeta(t) = 0$. Тогда, учитывая условие (3.3) и равенства (2.31) и $\eta(t, 0) \equiv 0$, получаем, что $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t, \zeta(t)) = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$ и утверждение 2 доказано. Теорема 3.1 доказана.

Теорема 3.2 (асимптотическая устойчивость в целом (полная устойчивость ДАУ (1.1))). *Пусть $f \in C([t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $f(t, 0) \equiv 0$, $\partial f/\partial x \in C([t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, $A, B \in C^1([t_+, \infty), \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$ и пучок $\lambda A(t) + B(t)$ удовлетворяет условию (1.4), где $C_2 \in C^1([t_+, \infty), (0, \infty))$. Пусть выполнены условия 1), 2) теоремы 2.1 или 1), 2) теоремы 2.2, а также условие (3.3). Пусть, кроме того, существуют положительно определённые функции $V \in C^1([t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $W \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $U \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ такие, что:*

1) $V(t, z) \leqslant W(z)$ для всех $t \in [t_+, \infty)$, $z \in \mathbb{R}^n$;

2) $V(t, z) \to \infty$ равномерно по t на $[t_+, \infty)$ при $\|z\| \to \infty$;

3) для всех $(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)) \in L_{t_+}$, $x_{p_1}(t) \neq 0$ $(x_{p_i}(t) = P_i(t)x,\ i = 1, 2)$, выполнено неравенство (3.2).

Тогда положение равновесия $x_*(t) \equiv 0$ ДАУ (1.1) асимптотически устойчиво в целом (ДАУ (1.1) полностью устойчиво).

Доказательство. Поскольку условия теоремы включают условия утверждения 2 теоремы 3.1, то положение равновесия асимптотически устойчиво. Как и в доказательстве теорем 2.1 или 2.2, где вместо неравенства (2.15) выполнено неравенство $v' \leqslant 0$, получаем, что для каждой согласованной начальной точки (t_0, x_0) существует единственное глобальное решение $x(t) = \zeta(t) + \eta(t, \zeta(t))$ задачи Коши (1.1), (1.3), где $\zeta(t) = P_1(t)x(t) = x_{p_1}(t)$, $\eta(t, \zeta(t)) = P_2(t)x(t) = x_{p_2}(t)$. Докажем, что $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. Поскольку $f(t,0) \equiv 0$, то, как и в доказательстве теоремы 3.1, $\eta(t,0) \equiv 0$. Заметим, что для $t \geqslant t_0$, $\zeta(t) \neq 0$ выполнено неравенство $V'_{(2.13)}(t,\zeta(t)) \leqslant -U(\zeta(t))$ (так как выполнено неравенство (3.2)), где функция $U(z)$ непрерывна и положительно определена, и $V'_{(2.13)}(t,0) \equiv 0$. Из свойств функций $V(t,z)$ и $W(z)$ следует, что $V(t,z)$ допускает бесконечно малый высший предел в $\mathbb{R}^n$ (см. определение в [6, с. 11, определение 1.7]). Учитывая свойства функций $V(t,z)$, $W(z)$ и $U(z)$, как и в доказательстве теоремы Барбашина–Красовского об асимптотической устойчивости в целом [6, с. 36, теорема 5.2], получаем, что $\lim\limits_{t\to\infty} \zeta(t) = 0$. Тогда так же, как и в доказательстве утверждения 2 теоремы 3.1, получаем, что $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t,\zeta(t)) = 0$, и, значит, $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 3.3 (неустойчивость по Ляпунову положения равновесия ДАУ (1.1)). *Пусть* $f \in C([t_+,\infty) \times U_R^x(0), \mathbb{R}^n)$, $f(t,0) \equiv 0$, $\partial f/\partial x \in C([t_+,\infty) \times U_R^x(0), \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, $A, B \in C^1([t_+,\infty), \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$ *и пучок* $\lambda A(t) + B(t)$ *удовлетворяет условию (1.4), где* $C_2 \in C^1([t_+,\infty),(0,\infty))$. *Пусть для каждого* $t_* \in [t_+,\infty)$ *оператор (2.2), где* $x^*_{p_1}(t_*) = 0$ *и* $x^*_{p_2}(t_*) = 0$, *имеет обратный. Пусть, кроме того, существуют числа* $T \geqslant t_+$ *и* $r_1, r_2 > 0$, $r_1 + r_2 < R$, *и функция* $V \in C^1([T,\infty) \times B_{r_1}(0), \mathbb{R})$ *такие, что:*

1) $V(t,z) \to 0$ *равномерно по* t *на* $[T,\infty)$ *при* $\|z\| \to 0$;

2) существует положительная функция $U \in C(B_{r_1}(0),[0,\infty))$ *такая, что*

$$V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t)) \geqslant U(x_{p_1}(t)) > 0 \quad \textit{или} \quad V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t)) \leqslant -U(x_{p_1}(t)) < 0$$

для всех $t \in [T,\infty)$, $x \in B^{x_{p_1},x_{p_2}}_{r_1,r_2}(0)$, $x_{p_1}(t) \neq 0$ $(V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t))$ *имеет вид (2.4));*

3) для любых $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_i \leqslant r_i$ *найдутся* $x_{p_1}(T) \neq 0$, $x_{p_2}(T)$ *такие, что* $\|x_{p_i}(T)\| < \Delta_i$, $i = 1,2$, *и* $V(T, x_{p_1}(T))V'_{(1.14)}(T, x_{p_1}(T)) > 0$ *(т.е. знак функции* V *совпадает со знаком производной* $V'_{(1.14)}$ *в точке* $(T, x_{p_1}(T))$*).*

Тогда положение равновесия $x_*(t) \equiv 0$ *ДАУ (1.1) неустойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon_u > 0$ – произвольное число, удовлетворяющее неравенству $\varepsilon_u \leqslant r_2$, где r_2 определено в условиях настоящей теоремы. Как и в доказательстве утверждения 1 теоремы 3.1 (где $\varepsilon_z = r_1$), строим такую функцию $\eta(t,z) \in C([t_+,\infty) \times U^z_{\delta_2}(0), U^u_{\varepsilon_u}(0))$, где $0 < \delta_2 \leqslant r_1$ (r_1 определено в условиях настоящей теоремы), что $u = \eta(t,z)$ непрерывно дифференцируема по z, принадлежит $X_2(t)$ для каждого $(t,z) \in [t_+,\infty) \times U^z_{\delta_2}(0)$, удовлетворяет тождеству $\eta(t,0) \equiv 0$ и является единственным решением уравнения (2.11). Подставляя полученную функцию $u = \eta(t,z)$ в (2.5) и обозначая $\widetilde{\Pi}(t,z) = \Pi(t,z,\eta(t,z))$, получаем уравнение (2.13) (т.е. $z'(t) = \widetilde{\Pi}(t,z(t))$). В силу свойств функции $\widetilde{\Pi}$ для каждой начальной точки $(t_0,z_0) \in [t_+,\infty) \times U^z_{\delta_2}(0)$ существует единственное локальное решение этого уравнения.

Как и в доказательстве утверждения 1 теоремы 3.1, получаем, что для любой согласованной начальной точки (t_0,x_0), для которой выполняется неравенство $\|x_0\| < \Delta$, где $\Delta = \delta_2 + \varepsilon_u > 0$ выбрано так, что $\|P_1(t_0)x_0\| < \delta_2$ и $\|P_2(t_0)x_0\| < \varepsilon_u$, существует единственное локальное решение $z = \zeta(t)$, $u = \eta(t,\zeta(t))$ системы (2.9), (2.10), удовлетворяющее начальным условиям $\zeta(t_0) = z_0 = P_1(t_0)x_0$, $\eta(t_0,\zeta(t_0)) = u_0 = P_2(t_0)x_0$. Тогда по лемме 2.1 функция $x(t) = \zeta(t) + \eta(t,\zeta(t))$ $(\zeta(t) = P_1(t)x(t) = x_{p_1}(t)$, $\eta(t,\zeta(t)) = P_2(t)x(t) = x_{p_2}(t))$ является единственным локальным решением ДАУ (1.1), удовлетворяющим начальному условию (1.3), где $x_0 = z_0 + u_0$.

Из условия 1) следует, что для некоторых чисел $M > 0$ и $\delta_2' > 0$ выполнено неравенство $|V(t,z)| < M$ при всех $t \in [T,\infty)$, $\|z\| \leqslant \delta_2' < \delta_2$. Пусть $\delta_z > 0$, $\delta_u > 0$ $(\delta_z < \delta_2'$, $\delta_u < \varepsilon_u)$ – произвольные сколь угодно малые числа. Возьмём начальное значение $t_0 = T$, где T удовлетворяет условиям теоремы. Предположим, что в условии 2) имеет место неравенство $V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t)) \geqslant U(x_{p_1}(t)) > 0$. Тогда в силу условия 3) найдётся такое согласованное начальное значение x_0 (т.е. $(t_0,x_0) \in L_{t_+}$), удовлетворяющее неравенствам $\|x_0\| < \delta = \delta_z + \delta_u$, $0 < \|P_1(t_0)x_0\| < \delta_z$ и $\|P_2(t_0)x_0\| < \delta_u$, что $V(t_0, P_1(t_0)x_0) = m > 0$, где m – некоторое число. Следовательно, как и в доказательстве классической теоремы Ляпунова о неустойчивости, получаем, что для решения $z=\zeta(t)$ уравнения (2.13), удовлетворяющего начальному условию $\zeta(t_0)=z_0=P_1(t_0)x_0$, где $t_0=T$, $0<\|z_0\|<\delta_z$, существует $t_1>t_0$ такое, что $\|\zeta(t_1)\|>\delta_2'$. Значит, для соответствующего решения $x(t)=\zeta(t)+\eta(t,\zeta(t))$ с начальной точкой (t_0,x_0) выполнены неравенства $\|x_0\|<\delta$ и $\|x(t_1)\|>\varepsilon=\delta_2'/\|P_1(t_1)\|>0$ (так как $\|\zeta(t_1)\|=\|P_1(t_1)x(t_1)\|$). Это доказывает теорему.

Аналогичным образом доказываются следующие теоремы для ДАУ (1.2).

Теорема 3.4 (устойчивость и асимптотическая устойчивость по Ляпунову положения равновесия ДАУ (1.2)). *Пусть* $f\in C^1([t_+,\infty)\times U_R^x(0),\mathbb{R}^n)$, $f(t,0)\equiv 0$, $A,B\in C^1([t_+,\infty),\mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$ *и пучок* $\lambda A(t)+B(t)$ *удовлетворяет условию (1.4), где* $C_2\in C^1([t_+,\infty),(0,\infty))$. *Пусть для каждого* $t_*\in[t_+,\infty)$ *и* $x_{p_1}^*(t_*)=0$, $x_{p_2}^*(t_*)=0$ *оператор (2.2) имеет обратный. Тогда верны следующие утверждения.*

1. Пусть выполнены условия утверждения 1 теоремы 3.1, где производная $V'_{(1.14)}(t,x_{p_1}(t))$ *заменена на**)

$$V'_{(1.19)}(t,x_{p_1}(t))=\frac{\partial V}{\partial t}(t,x_{p_1}(t))+\biggl(\frac{\partial V}{\partial z}(t,x_{p_1}(t)),G^{-1}(t)[-B(t)x_{p_1}(t)+$$
$$+Q_1(t)f(t,x_{p_1}(t)+x_{p_2}(t))]+P_1'(t)[x_{p_1}(t)+x_{p_2}(t)]\biggr).$$

Тогда положение равновесия $x_*(t)\equiv 0$ *ДАУ (1.2) устойчиво по Ляпунову.*

2. Пусть выполнены условия утверждения 2 теоремы 3.1, где производная $V'_{(1.14)}(t,x_{p_1}(t))$ *заменена на* $V'_{(1.19)}(t,x_{p_1}(t))$ *(см. (2.21)) и условие (3.3) имеет вид*

$$G^{-1}(t)Q_2(t)f(t,P_1(t)x+P_2(t)x)\to 0 \text{ при } x\to 0$$
$$\text{равномерно по } t \text{ на } [T,\infty) \text{ для некоторого } T>t_+. \tag{3.5}$$

Тогда положение равновесия $x_*(t)\equiv 0$ *ДАУ (1.2) асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Теорема 3.5 (асимптотическая устойчивость в целом (полная устойчивость ДАУ (1.2))). *Пусть* $f\in C^1([t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, $f(t,0)\equiv 0$, $A,B\in C^1([t_+,\infty),\mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$ *и пучок* $\lambda A(t)+B(t)$ *удовлетворяет условию (1.4), где* $C_2\in C^1([t_+,\infty),(0,\infty))$. *Пусть выполнены условия 1), 2) теоремы 2.3 или 1), 2) теоремы 2.4, а также условие (3.5), и, кроме того, существуют положительно определённые функции* $V\in C^1([t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $W\in C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $U\in C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ *такие, что выполнены условия 1), 2) теоремы 3.2 и условие 3) теоремы 3.2, где* L_{t_+} *заменено на* $\widehat{L}_{t_+}$ *и производная* $V'_{(1.14)}(t,x_{p_1}(t))$ *в левой части неравенства (3.2) заменена на* $V'_{(1.19)}(t,x_{p_1}(t))$ *(см. (2.21)). Тогда положение равновесия* $x_*(t)\equiv 0$ *ДАУ (1.2) асимптотически устойчиво в целом (ДАУ (1.2) полностью устойчиво).*

Теорема 3.6 (неустойчивость по Ляпунову положения равновесия ДАУ (1.2)). *Пусть выполнены условия теоремы 3.3, в которые внесены следующие изменения:* $f\in C^1([t_+,\infty)\times U_R^x(0),\mathbb{R}^n)$, *производная* $V'_{(1.14)}(t,x_{p_1}(t))$ *заменена на* $V'_{(1.19)}(t,x_{p_1}(t))$ *(см. (2.21)). Тогда положение равновесия* $x_*(t)\equiv 0$ *ДАУ (1.2) неустойчиво по Ляпунову.*

4. Замечание относительно выбора функции V. Положительно определённую скалярную функцию $V(t,z)$ будем называть *функцией Ляпунова*, если она удовлетворяет теоремам (полученным в п. 3) об устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости по Ляпунову, а также асимптотической устойчивости в целом, и *функцией типа Ляпунова*, если она удовлетворяет теоремам, полученным в [1, п. 2]. Эту функцию часто удобно выбирать в виде

$$V(t,z)=(H(t)z,z), \tag{4.1}$$

где $H\in C^1([t_+,\infty),\mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$ – положительно определённая самосопряжённая оператор-функция (см. [1, определение 1.1]). Тогда функция (4.1) удовлетворяет условиям теорем 2.1–2.6, 2.9,

*) См. [1, формула (2.21)].

2.10 о глобальной разрешимости, устойчивости и неустойчивости по Лагранжу, а также условиям утверждения 1 об устойчивости по Ляпунову из теоремы 3.1 и утверждения 1 об устойчивости по Ляпунову из теоремы 3.4, но выполнение условий на производные $V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t))$ и $V'_{(1.19)}(t, x_{p_1}(t))$ в этих теоремах, естественно, требует проверки. Если дополнительно

$$\sup_{t\in[t_+,\infty)} \|H(t)\| < \infty,$$

то функция (4.1) удовлетворяет также условиям теорем 2.7, 2.8, 3.2, 3.5, 3.3, 3.6 о предельной ограниченности (диссипативности), асимптотической устойчивости в целом и неустойчивости по Ляпунову, а также условиям утверждения 2 об асимптотической устойчивости из теоремы 3.1 и утверждения 2 об асимптотической устойчивости из теоремы 3.4, но условия на производные $V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t))$ и $V'_{(1.19)}(t, x_{p_1}(t))$, естественно, остаются в теоремах и нуждаются в проверке.

Функция $V(t,z)$ вида
$$V(t,z) \equiv (Hz, z),$$
где $H \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ – положительный самосопряжённый оператор, удовлетворяет условиям всех теорем, но выполнение условий на производные $V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t))$ и $V'_{(1.19)}(t, x_{p_1}(t))$ в теоремах, естественно, требует проверки.

Производная $V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t))$ (2.4) функции V (см. (4.1)) в силу уравнения (1.14) имеет вид

$$V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t)) = (H'(t)x_{p_1}(t), x_{p_1}(t)) + 2(H(t)x_{p_1}(t), [P_1'(t) - G^{-1}(t)Q_1(t)[A'(t)+B(t)]]x_{p_1}(t) + \\ + G^{-1}(t)Q_1(t)f(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t))). \tag{4.2}$$

Производная $V'_{(1.19)}(t, x_{p_1}(t))$ (2.21) функции V (см. (4.1)) в силу уравнения (1.19) имеет вид

$$V'_{(1.19)}(t, x_{p_1}(t)) = (H'(t)x_{p_1}(t), x_{p_1}(t)) + \\ + 2(H(t)x_{p_1}(t), G^{-1}(t)[-B(t)x_{p_1}(t) + Q_1(t)f(t, x_{p_1}(t)+x_{p_2}(t))] + P_1'(t)[x_{p_1}(t)+x_{p_2}(t)]).$$

5. Применение к исследованию математических моделей. В качестве примера применения доказанных в [1] теорем (а также утверждения) о глобальной разрешимости ДАУ рассмотрим математическую модель электрической цепи с нестационарными и нелинейными параметрами: индуктивностью $L(t)$, проводимостью $G_3(t)$ и сопротивлениями $R_1(t)$, $R_2(t)$, $\varphi_1(I_1)$, $\varphi_2(I_2)$ и $\varphi_3(I_{31})$. Схема электрической цепи представлена на рисунке (направления отсчёта токов и напряжений на элементах цепи совпадают).

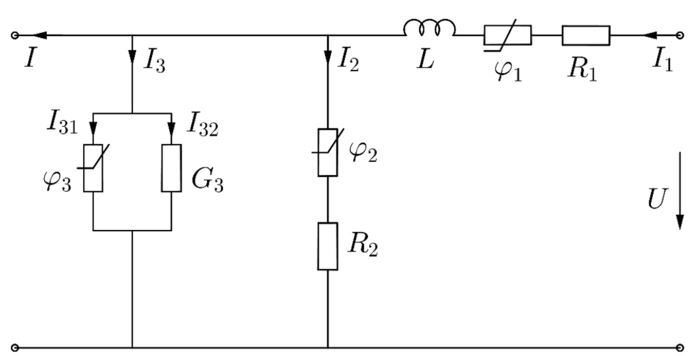

Рисунок. Схема электрической цепи.

Учитывая законы Кирхгофа и связи между токами и напряжениями на элементах цепи, получаем систему уравнений

$$\frac{d}{dt}[L(t)I_1(t)] + R_1(t)I_1(t) = U(t) - \varphi_1(I_1(t)) - \varphi_3(I_{31}(t)), \tag{5.1}$$

$$I_1(t) - I_{31}(t) - I_2(t) = I(t) + G_3(t)\varphi_3(I_{31}(t)), \tag{5.2}$$

$$R_2(t)I_2(t) = \varphi_3(I_{31}(t)) - \varphi_2(I_2(t)), \tag{5.3}$$

которая описывает переходный процесс в электрической цепи. Ток $I(t)$ и напряжение $U(t)$ заданы. Решив полученную систему, найдём токи $I_1(t)$, $I_{31}(t)$ и $I_2(t)$. Остальные токи и напряжения в цепи однозначно выражаются через искомые и заданные.

Обозначим неизвестные токи через $x_1(t) = I_1(t)$, $x_2(t) = I_{31}(t)$ и $x_3(t) = I_2(t)$ и в дальнейшем, для краткости, будем опускать зависимость от t в обозначениях $x_j(t)$ $(j = 1, 2, 3)$. Векторная форма системы (5.1)–(5.3) имеет вид нестационарного полулинейного ДАУ (1.1), где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} L(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} R_1(t) & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & R_2(t) \end{pmatrix},$$

$$f(t,x) = \begin{pmatrix} U(t) - \varphi_1(x_1) - \varphi_3(x_2) \\ I(t)+G_3(t)\varphi_3(x_2) \\ \varphi_3(x_3) - \varphi_2(x_2) \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Предполагается, что $L, R_1, R_2 \in C^1([t_+,\infty),\mathbb{R})$, $I, U, G_3 \in C([t_+,\infty),\mathbb{R})$ и $\varphi_j \in C^1(\mathbb{R})$, $j = 1, 2, 3$. Тогда $A, B \in C^1([t_+,\infty), \mathrm{L}(\mathbb{R}^3))$, $f \in C([t_+,\infty)\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ и $\partial f/\partial x \in C([t_+,\infty)\times$ $\times\,\mathbb{R}^3, \mathrm{L}(\mathbb{R}^3))$. Также предполагается, что функции $L(t)$, $R_1(t)$, $R_2(t)$ и $G_3(t)$ положительны при всех $t \in [t_+,\infty)$. Тогда при каждом t пучок $\lambda A(t) + B(t)$ регулярен и, следовательно, существует резольвента (для регулярных точек λ)

$$R(\lambda,t) = (\lambda A(t) + B(t))^{-1} = \begin{pmatrix} (\lambda L(t) + R_1(t))^{-1} & 0 & 0 \\ (\lambda L(t) + R_1(t))^{-1} & -1 & -R_2^{-1}(t) \\ 0 & 0 & R_2^{-1}(t) \end{pmatrix},$$

а также для всех $t \in [t_+,\infty)$ выполнена оценка (1.4), где $C_1(t) = \sqrt{2}(1+R_2^{-1}(t))+1$ и $C_2(t) =$ $= L^{-1}(t)(1 + R_1(t)) + 1$.

Проекционные матрицы $P_j(t)$, $Q_j(t)$, $j = 1, 2$, и матрица $G^{-1}(t)$ (см. (1.5), (1.8)) представляются в виде

$$P_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G^{-1}(t) = \begin{pmatrix} L^{-1}(t) & 0 & 0 \\ L^{-1}(t) & -1 & -R_2^{-1}(t) \\ 0 & 0 & R_2^{-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Компоненты (проекции) $x_{p_j}(t) = P_j(t)x \in X_j(t)$ вектора x имеют вид

$$x_{p_1}(t) = x_{p_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{p_2}(t) = x_{p_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $z = x_1$, $u = x_2 - x_1$, $w = x_3$, тогда $x_{p_1} = (z, z, 0)^{\mathrm{т}}$, $x_{p_2} = (0, u, w)^{\mathrm{т}}$.

Условие согласования $(t, x) \in L_{t_+}$ выполняется, если (t, x) удовлетворяет алгебраическим уравнениям (5.2), (5.3), т.е.

$$x_1 - x_2 - x_3 = I(t) + G_3(t)\varphi_3(x_2), \tag{5.5}$$

$$R_2(t)x_3 = \varphi_3(x_2) - \varphi_2(x_3), \tag{5.6}$$

которые в векторной форме представимы в виде уравнения $Q_2(t)[A'(t)P_1(t)x + B(t)P_2(t)x - - f(t,x)] = 0$, определяющего многообразие L_{t_+}. Используя введённые выше обозначения, запишем систему (5.2), (5.3) в виде

$$u = -I(t) - G_3(t)\varphi_3(u+z) - w, \tag{5.7}$$

$$w = R_2^{-1}(t)[\varphi_3(u+z) - \varphi_2(w)]. \tag{5.8}$$

Преобразуем систему (5.7), (5.8) к виду

$$w = -I(t) - u - G_3(t)\varphi_3(u+z), \tag{5.9}$$

$$u = \psi(t,z,u), \tag{5.10}$$

где $\psi(t,z,u) = -I(t) - (G_3(t) + R_2^{-1}(t))\varphi_3(u+z) + R_2^{-1}(t)\varphi_2(-I(t) - u - G_3(t)\varphi_3(u+z))$.

Условие 1) теоремы 2.1 (теоремы 2.2) принимает следующий вид: для каждых $t \in [t_+, \infty)$, $z \in \mathbb{R}$ существуют единственные $u, w \in \mathbb{R}$ (существуют $u, w \in \mathbb{R}$) такие, что выполнены равенства (5.9), (5.10). Поскольку для каждых $t \in [t_+, \infty)$, $z \in \mathbb{R}$ и любого $u \in \mathbb{R}$ существует единственный $w \in \mathbb{R}$ такой, что справедливо равенство (5.9), то условие 1) теоремы 2.1 выполнено, если

для каждых $t \in [t_+, \infty)$, $z \in \mathbb{R}$ существует
единственный $u \in \mathbb{R}$ такой, что $u = \psi(t,z,u)$ (т.е. выполняется (5.10)). (5.11)

Условие 1) теоремы 2.2 выполнено, если имеет место (5.11) без требования единственности u.

Легко убедиться, что условие (5.11) выполнено, если функции φ_2 и φ_3 являются возрастающими (неубывающими) на $\mathbb{R}$, например,

$$\varphi_2(y) = ay^{2k-1}, \quad \varphi_3(y) = by^{2m-1} \quad \text{или}$$

$$\varphi_2(y) = ay^{1/(2k-1)}, \quad \varphi_3(y) = by^{1/(2m-1)}, \quad a, b > 0, \quad k, m \in \mathbb{N}. \tag{5.12}$$

Заметим, что в случае (5.12) отображение $\psi(t,z,u)$ не является глобально сжимающим по u (см. (5.13) ниже) и не выполнено условие (2.22). Очевидно, что если $\psi(t,z,u)$ является глобально сжимающим по u для любых t, z, т.е. существует константа $\alpha < 1$ такая, что для любых $t \in [t_+, \infty)$, $z \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\begin{gathered}|\psi(t,z,u_1) - \psi(t,z,u_2)| = |(G_3(t) + R_2^{-1}(t))[\varphi_3(u_1+z) - \varphi_3(u_2+z)] - \\ - R_2^{-1}(t)[\varphi_2(-I(t) - u_1 - G_3(t)\varphi_3(u_1+z)) - \varphi_2(-I(t) - u_2 - G_3(t)\varphi_3(u_2+z))]| \leqslant \\ \leqslant \alpha|u_1 - u_2|, \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R},\end{gathered} \tag{5.13}$$

то условие (5.11) выполнено. Условие Липшица (5.13) можно заменить на

$$\begin{gathered}\left|\frac{\partial\psi(t,z,u)}{\partial u}\right| = |(G_3(t) + R_2^{-1}(t))\varphi_3'(u+z) + \\ + R_2^{-1}(t)\varphi_2'(-I(t) - u - G_3(t)\varphi_3(u+z))[1 + G_3(t)\varphi_3'(u+z)]| \leqslant \alpha, \quad u \in \mathbb{R}.\end{gathered} \tag{5.14}$$

В частном случае при

$$\varphi_2(y) = a\sin y, \quad \varphi_3(y) = b\sin y, \quad a, b \in \mathbb{R}, \tag{5.15}$$

условие (5.11) и, соответственно, условие 1) теоремы 2.1 выполнены, если

$$G_3(t)|b| + R_2^{-1}(t)(|a| + |b| + G_3(t)|a||b|) < 1, \quad t \in [t_+, \infty), \tag{5.16}$$

а условие 1) теоремы 2.2 выполнено всегда.

Возьмём любые фиксированные t_*, $x^*_{p_1} = (x^*_1, x^*_1, 0)^{\text{т}} = (z_*, z_*, 0)^{\text{т}}$, $x^*_{p_2} = (0, x^*_2 - x^*_1, x^*_3)^{\text{т}} = (0, u_*, w_*)^{\text{т}}$ такие, что $(t_*, x^*_{p_1} + x^*_{p_2}) \in L_{t_+}$, т.е. выполнены равенства (5.9), (5.10) (или (5.7), (5.8)). Рассмотрим оператор

$$\widehat{\Phi}_{t_*, x^*_{p_1}(t_*), x^*_{p_2}(t_*)} = \left[\frac{\partial}{\partial x}[Q_2(t_*) f(t_*, x^*_{p_1}(t_*) + x^*_{p_2}(t_*))] - B(t_*)\right] P_2(t_*) \colon \mathbb{R}^3 \to Y_2(t_*)$$

($x^*_{p_i}(t_*) = x^*_{p_i} \in X_i(t_*)$, $i = 1, 2$, $\widehat{\Phi}_{t_*, x^*_{p_1}(t_*), x^*_{p_2}(t_*)} \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^3)$), которому относительно стандартного базиса в $\mathbb{R}^3$ соответствует матрица

$$\widehat{\Phi}_{t_*, x^*_{p_1}(t_*), x^*_{p_2}(t_*)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -(1 + G_3(t_*)\varphi_3'(u_* + z_*)) & 1 + G_3(t_*)\varphi_3'(u_* + z_*) & 1 \\ -\varphi_3'(u_* + z_*) & \varphi_3'(u_* + z_*) & -\varphi_2'(w_*) - R_2(t_*) \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Очевидно, что $\widehat{\Phi}_{t_*, x^*_{p_1}(t_*), x^*_{p_2}(t_*)}$ обратим как оператор, действующий из $X_2(t_*)$ в $Y_2(t_*)$ (т.е. оператор $\Phi_{t_*, x^*_{p_1}(t_*), x^*_{p_2}(t_*)} = \widehat{\Phi}_{t_*, x^*_{p_1}(t_*), x^*_{p_2}(t_*)}|_{X_2(t_*)}$ (см. (2.2)) имеет обратный $\Phi^{-1}_{t_*, x^*_{p_1}(t_*), x^*_{p_2}(t_*)} \in L(Y_2(t_*), X_2(t_*))$), если

$$\varphi_3'(u_* + z_*) + [\varphi_2'(w_*) + R_2(t_*)][1 + G_3(t_*)\varphi_3'(u_* + z_*)] \neq 0. \quad (5.18)$$

Таким образом, если

$$\text{для каждых } t_* \in [t_+, \infty), \ z_* \in \mathbb{R} \text{ и } u_*, w_* \in \mathbb{R},$$
$$\text{удовлетворяющих равенствам (5.9), (5.10), выполнено соотношение (5.18),} \quad (5.19)$$

то выполнено условие 2) теоремы 2.1. Заметим, что если записать (5.18) в виде

$$(G_3(t_*) + R_2^{-1}(t_*))\varphi_3'(u_* + z_*) + R_2^{-1}(t_*)\varphi_2'(w_*)[1 + G_3(t_*)\varphi_3'(u_* + z_*)] \neq -1$$

и учесть, что t_*, z_*, u_*, w_* удовлетворяют (5.9), т.е. $w_* = -I(t_*) - u_* - G_3(t_*)\varphi_3(u_* + z_*)$, а равенство (5.10) не учитывать, т.е. рассматривать любые $t_* \in [t_+, \infty)$, $z_* \in \mathbb{R}$, $u_* \in \mathbb{R}$, то условие (5.19) примет вид: для каждых $t_* \in [t_+, \infty)$, $z_* \in \mathbb{R}$ и $u_* \in \mathbb{R}$ выполнено соотношение

$$\frac{\partial \psi(t_*, z_*, u_*)}{\partial u} \neq -1.$$

Снова возьмём любые фиксированные число t_* и векторы $x^*_{p_1} = (x^*_1, x^*_1, 0)^{\text{т}} = (z_*, z_*, 0)^{\text{т}}$, $x^j_{p_2} = (0, x^*_{2,j} - x^*_{1,j}, x^*_{3,j})^{\text{т}} = (0, u^j_*, w^j_*)^{\text{т}}$ такие, что $(t_*, x^*_{p_1} + x^j_{p_2}) \in L_{t_+}$, $j = 1, 2$, т.е. t_*, z_*, u^j_*, w^j_* удовлетворяют равенствам (5.9) и (5.10), $j = 1, 2$. Выберем проекторы $\Theta_k(t_*) \colon \mathbb{R}^3 \to Y_2(t_*)$, $k = 1, 2$, $\Theta_i(t_*)\Theta_j(t_*) = \delta_{ij}\Theta_i(t_*)$, $\Theta_1(t_*) + \Theta_2(t_*) = Q_2(t_*)$ ($\Theta_k(t_*) \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^3)$), которым относительно стандартного базиса в $\mathbb{R}^3$ соответствуют матрицы

$$\Theta_1(t_*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta_2(t_*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда система проекторов $\{\tilde{\Theta}_k(t_*) = \Theta_k(t_*)|_{Y_2(t_*)}\}_{k=1}^2$ будет аддитивным разложением единицы $Q_2(t_*)|_{Y_2(t_*)}$ в $Y_2(t_*)$. Рассмотрим оператор-функцию $\widehat{\Phi}_{t_*, x^*_{p_1}(t_*)} \colon X_2(t_*) \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^3, Y_2(t_*))$,

$$\widehat{\Phi}_{t_*, x^*_{p_1}(t_*)}(x_{p_2}(t_*)) = \left[\frac{\partial}{\partial x}[Q_2(t_*) f(t_*, x^*_{p_1}(t_*) + x_{p_2}(t_*))] - B(t_*)\right] P_2(t_*)$$

$(x^*_{p_i}(t_*)=x^*_{p_i},\ i=1,2)$, и оператор-функцию $\Phi_{t_*,x^*_{p_1}(t_*)}\colon X_2(t_*)\to \mathrm{L}(X_2(t_*),Y_2(t_*))$ (см. (2.16)), т.е. $\Phi_{t_*,x^*_{p_1}(t_*)}(x_{p_2}(t_*)) = \widehat{\Phi}_{t_*,x^*_{p_1}(t_*)}(x_{p_2}(t_*))|_{X_2(t_*)}$. Очевидно, при каждом $x_{p_2}(t_*) = x^*_{p_2}(t_*)$ справедливо равенство $\widehat{\Phi}_{t_*,x^*_{p_1}(t_*)}(x^*_{p_2}(t_*)) = \widehat{\Phi}_{t_*,x^*_{p_1}(t_*),x^*_{p_2}(t_*)}$ и этому оператору (относительно стандартного базиса в $\mathbb{R}^3$) соответствует матрица (5.17). Следовательно, оператору

$$\widehat{\Lambda} = \Theta_1(t_*)\widehat{\Phi}_{t_*,x^*_{p_1}(t_*)}(x_{p_2,1}(t_*)) + \Theta_2(t_*)\widehat{\Phi}_{t_*,x^*_{p_1}(t_*)}(x_{p_2,2}(t_*)) \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^3, Y_2(t_*)),$$

где $x_{p_2,k}(t_*) = x_{p_2,k} = (0,u_k,w_k)^{\mathrm{T}}$ $(k=1,2)$ – произвольные элементы из $[x^1_{p_2},x^2_{p_2}]$, относительно стандартного базиса в $\mathbb{R}^3$ соответствует матрица

$$\widehat{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -(1+G_3(t_*)\varphi_3'(u_1+z_*)) & 1+G_3(t_*)\varphi_3'(u_1+z_*) & 1 \\ -\varphi_3'(u_2+z_*) & \varphi_3'(u_2+z_*) & -\varphi_2'(w_2)-R_2(t_*) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что оператор $\widehat{\Lambda}$ обратим как оператор из $X_2(t_*)$ в $Y_2(t_*)$ (т.е. оператор $\Lambda = \widehat{\Lambda}|_{X_2(t_*)}\colon X_2(t_*)\to Y_2(t_*)$ обратим), если

$$\varphi_3'(u_2+z_*) + [\varphi_2'(w_2)+R_2(t_*)][1+G_3(t_*)\varphi_3'(u_1+z_*)] \neq 0. \tag{5.20}$$

Таким образом, если

$$\begin{gathered}\text{для каждых } t_*\in[t_+,\infty),\ \ z_*\in\mathbb{R} \text{ и } u^j_*, w^j_*\in\mathbb{R},\ \ j=1,2, \text{ удовлетворяющих}\\ \text{равенствам (5.9), (5.10), выполнено соотношение (5.20)}\\ \text{при любых } u_k\in[u^1_*,u^2_*],\ \ w_k\in[w^1_*,w^2_*],\ \ k=1,2,\end{gathered} \tag{5.21}$$

то выполнено условие 2) теоремы 2.2. Очевидно, что условие 2) также выполнено, если (5.20) справедливо для каждых $t_*\in[t_+,\infty)$, $z_*\in\mathbb{R}$ и любых $u_k,w_k\in\mathbb{R}$.

В частности, условия (5.19), (5.21) выполнены для возрастающих (неубывающих) на $\mathbb{R}$ функций φ_2, φ_3, например, для φ_2, φ_3 вида (5.12), и выполнены для функций (5.15), если справедливо требование (5.16).

Заметим, что вместо условий 1), 2) теоремы 2.1 (или теоремы 2.2) можно использовать условие (2.22) утверждения 2.1, которое будет выполнено, если существует константа $\alpha<1$ такая, что

$$\begin{gathered}G_3(t)|\varphi_3(u_1+z)-\varphi_3(u_2+z)| + R_2^{-1}(t)|\varphi_3(u_1+z)-\varphi_3(u_2+z)-\varphi_2(w_1)+\varphi_2(w_2)| \leqslant \\ \leqslant \alpha\sqrt{|u_1-u_2|^2+|w_1-w_2|^2}\end{gathered} \tag{5.22}$$

для любых $t\in[t_+,\infty)$, $z\in\mathbb{R}$ и $u_i,w_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2$, или использовать (эквивалентное) условие (2.23), которое будет выполнено, если

$$\sqrt{2}\sqrt{([G_3(t)+R_2^{-1}(t)]^2+R_2^{-2}(t))|\varphi_3'(u+z)|^2+R_2^{-2}(t)|\varphi_2'(w)|^2} \leqslant \alpha < 1 \tag{5.23}$$

для любых $t\in[t_+,\infty)$, $z\in\mathbb{R}$ и $u,w\in\mathbb{R}$, однако эти условия являются более ограничительными. Если учесть, что график решения $x(t)$ должен лежать в многообразии L_{t_+} и, соответственно, t, z, u, w связаны соотношениями (5.9), (5.10), то, используя эти соотношения, можно преобразовать неравенства (5.22), (5.23) так, что они будут схожи с (5.13), (5.14).

Возьмём оператор $H=0.5I_{\mathbb{R}^3}$ ($I_{\mathbb{R}^3}$ – единичный оператор в $\mathbb{R}^3$). Тогда условие 3) теоремы 2.1 (теорема 2.2 содержит такое же условие), где $V'_{(1.14)}(t,x_{p_1}(t))$ имеет вид (4.2) и $H(t)\equiv H$, будет выполнено, если найдутся функции $U\in C(0,\infty)$ и $k\in C([t_+,\infty),\mathbb{R})$ такие, что $\int_{v_0}^{\infty}(U(v))^{-1}\,dv=\infty$ $(v_0>0)$ и при некотором $R>0$ неравенство

$$2L^{-1}(t)[-(L'(t)+R_1(t))z^2+U(t)z-(\varphi_1(z)+\varphi_3(u+z))z] \leqslant k(t)U(z^2) \tag{5.24}$$

выполнено для любых $t \in [t_+, \infty)$, $z, u, w \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих равенствам (5.9), (5.10) и неравенству $|z| \geqslant R$. Легко проверить, что условие (5.24), где $k(t) = 2L^{-1}(t)(|L'(t)| + |U(t)|)$, $U(v) = v$ (напомним, что $L(t) > 0$, $R_1(t) > 0$), выполнено, если существует $R > 0$ такое, что

$$-(\varphi_1(z) + \varphi_3(u + z))z \leqslant R_1(t)z^2 \tag{5.25}$$

для любых $t \in [t_+, \infty)$, $z, u, w \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих равенствам (5.9), (5.10) и неравенству $|z| \geqslant R$.

В общем случае, согласно теореме 2.1, для каждой начальной точки $(t_0, x_0) \in [t_+, \infty) \times \mathbb{R}^3$, где $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3})^{\mathrm{T}}$, для которой справедливы равенства (5.5), (5.6) (т.е. $(t_0, x_0) \in L_{t_+}$), существует единственное глобальное решение $x(t)$ ДАУ (1.1) с (5.4), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, если $L, R_1, R_2 \in C^1([t_+, \infty), \mathbb{R})$, $I, U, G_3 \in C([t_+, \infty), \mathbb{R})$, $\varphi_j \in \in C^1(\mathbb{R})$, $j = 1, 2, 3$; $L(t) > 0$, $R_1(t) > 0$, $R_2(t) > 0$ и $G_3(t) > 0$ при всех $t \in [t_+, \infty)$; выполнены условия (5.11) и (5.19) и существует $R > 0$ такое, что неравенство (5.25) имеет место для любых $t \in [t_+, \infty)$, $z, u, w \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих равенствам (5.9), (5.10) и неравенству $|z| \geqslant R$.

Аналогичное утверждение имеет место согласно теореме 2.2, если выполнены приведённые выше условия со следующими изменениями: в условии (5.11) нет требования, чтобы u был единственным; условие (5.19) заменено на (5.21).

Возможные изменения или уточнения приведённых условий, а также частные случаи функций (классов функций), для которых эти условия выполняются, указаны выше.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Национальной академии наук Украины (проект “Качественный, асимптотический и численный анализ различных классов дифференциальных уравнений и динамических систем, их классификация и практическое применение”, государственный регистрационный номер 0119U102376).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Филипковская М.С.* Глобальная разрешимость нестационарных полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений, ограниченность и устойчивость их решений. I // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 1. С. 22–42.
2. *Власенко Л.А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. Днепропетровск, 2006.
3. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск, 2003.
4. *Lamour R., März R., Tischendorf C.* Differential-Algebraic Equations: A Projector Based Analysis. Heidelberg, 2013.
5. *Riaza R.* Differential-Algebraic Systems: Analytical Aspects and Circuit Applications. New Jersey, 2008.
6. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.
7. *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М., 1964.

Физико-технический институт низких температур
им. Б.И. Веркина НАН Украины, г. Харьков

Поступила в редакцию 02.01.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 2, с. 224–234

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

© 2021 г. **Н. В. Зайцева**

Для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в прямоугольной области исследована краевая задача с нелокальным интегральным условием первого рода в зависимости от числового параметра, входящего в уравнение. Установлен критерий единственности и доказаны теоремы существования и устойчивости решения поставленной задачи. Построено решение задачи в явном виде и приведено обоснование сходимости ряда в классе регулярных решений.

DOI: 10.31857/S0374064121020102

Введение. Краевые задачи для уравнений смешанного типа являются одним из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. К исследованию таких задач приводят математические модели теплообмена в капиллярно-пористых средах, формирования температурного поля, движения вязкой жидкости и многие другие (см. монографию [1] и имеющуюся в ней библиографию).

Интерес же к вырождающимся уравнениям вызван не только необходимостью решения прикладных задач, но и внутренними потребностями, обусловленными развитием теории уравнений смешанного типа. Первая граничная задача для вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа с переменными коэффициентами впервые изучена в работе [2]. Особое место в теории вырождающихся уравнений занимают исследования уравнений, содержащих дифференциальный оператор Бесселя. Изучение этого класса уравнений начато работами Эйлера, Пуассона, Дарбу и продолжено в теории обобщённого осесимметрического потенциала [3]. Уравнения трёх основных классов, содержащие оператор Бесселя, согласно терминологии [4], называются B-эллиптическими, B-гиперболическими и B-параболическими соответственно. Обширное исследование B-гиперболических уравнений представлено в монографии [5]. Краевые задачи для параболических уравнений с оператором Бесселя подробно изучены в работе [6], достаточно полный обзор работ, посвящённых изучению краевых задач для эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами, приведён в работе [7]. Исследование краевых задач для уравнений с сингулярными коэффициентами проводили многие математики (см. работы [8–11], а также имеющуюся в них библиографию).

В прямоугольной области $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0<x<l,\ -\alpha<y<\beta\}$, где l, α, β – заданные положительные действительные числа, рассмотрим уравнение

$$Lu\equiv u_{xx}+(\operatorname{sgn} y)u_{yy}+\frac{p}{x}u_x=0. \tag{1}$$

Здесь $p>-1$, $p\neq 0$, – заданное действительное число.

Введём обозначения $D_+=D\bigcap\{y>0\}$ и $D_-=D\bigcap\{y<0\}$. В данной работе для уравнения (1) в области D исследуется следующая нелокальная задача с интегральным условием первого рода при $p\geqslant 1$ и $|p|<1$, $p\neq 0$.

1. Постановка задачи 1. Пусть $p\geqslant 1$. Требуется найти функцию $u(x,y)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$u(x,y)\in C^1(\overline{D})\bigcap C^2(D_+\bigcup D_-), \tag{2}$$

$$Lu(x,y)\equiv 0,\quad (x,y)\in D_+\bigcup D_-, \tag{3}$$

$$u(x,\beta)=\varphi(x),\quad u(x,-\alpha)=\psi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{4}$$

$$\int\limits_0^l x^p u(x,y)\,dx = A = \mathrm{const},\quad -\alpha\leqslant y\leqslant\beta, \tag{5}$$

где A – заданное действительное число, а $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие, как вытекает из равенств (4) и (5), условиям

$$\int\limits_0^l x^p\varphi(x)\,dx = \int\limits_0^l x^p\psi(x)\,dx = A. \tag{6}$$

В постановке краевой задачи (2)–(6) отсутствуют локальные граничные условия на боковых сторонах*) прямоугольника D. При $p\geqslant 1$ в области эллиптичности D_+ уравнения (1), согласно результатам работы [2], в классе ограниченных решений отрезок $x=0$ освобождается от граничного условия Дирихле, при этом производная по нормали u_x на отрезке $x=0$ равна нулю. Разделив переменные, нетрудно показать, что и в области гиперболичности D_- уравнения (1) справедливо равенство

$$u_x(0,y)=0,\quad -\alpha\leqslant y\leqslant\beta. \tag{7}$$

2. Постановка задачи 2. Пусть $|p|<1$, $p\neq 0$. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (2)–(6) и условию

$$\lim_{x\to 0+} x^p u_x(x,y)=0,\quad -\alpha\leqslant y\leqslant\beta. \tag{8}$$

Интегральное условие (5) ранее возникало в работах [12–14] для уравнения теплопроводности; в работе [14], например, при изучении вопроса об устойчивости разреженной плазмы, и в этом случае нелокальное условие (5) означает постоянство внутренней энергии системы. Краевые задачи с интегральными условиями вида (5) исследовались многими авторами (см., например, работы [15, 16] и имеющуюся в них библиографию).

3. Единственность решения задачи 1. Умножим уравнение (1) на x^p и проинтегрируем при фиксированном $y\in(-\alpha,0)\bigcup(0,\beta)$ по переменной x на промежутке от ε до $l-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ – достаточно малое число. В результате получим

$$\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^p\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + (\operatorname{sgn} y)\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} x^p u_{yy}(x,y)\,dx = 0, \tag{9}$$

или

$$\left(x^p\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_\varepsilon^{l-\varepsilon} + (\operatorname{sgn} y)\frac{d^2}{dy^2}\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} x^p u(x,y)\,dx = 0. \tag{10}$$

Перейдём здесь к пределу при $\varepsilon\to 0$, тогда в силу условий (2) и (5) получим локальное граничное условие

$$u_x(l,y)=0,\quad -\alpha\leqslant y\leqslant\beta. \tag{11}$$

В дальнейшем вместо задачи (2)–(6) будем рассматривать задачу (2)–(4), (11).

*) Для определённости считаем систему координат Oxy правой.

Частные решения уравнения (1), не равные нулю в области $D_+ \bigcup D_-$ и удовлетворяющие условиям (2) и (11), будем искать в виде $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Подставив это произведение в уравнение (1) и в условие (11), получим относительно функции $X(x)$ спектральную задачу

$$X''(x) + \frac{p}{x}X'(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{12}$$

$$|X(0)| < +\infty, \quad X'(l) = 0, \tag{13}$$

где λ^2 – постоянная разделения.

Общее решение уравнения (12) имеет вид

$$X(x; C_1, C_2) = C_1 x^{(1-p)/2} J_{(p-1)/2}(\lambda x) + C_2 x^{(1-p)/2} Y_{(p-1)/2}(\lambda x),$$

где $J_\nu(\xi)$, $Y_\nu(\xi)$ – функции Бесселя первого и второго рода соответственно, $\nu = (p-1)/2$, а C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Поэтому одним из решений уравнения (12), удовлетворяющих первому условию из (13), является функция

$$X(x) = x^{(1-p)/2} J_{(p-1)/2}(\lambda x).$$

Заметим, что её производная $X'(0)$ равна нулю, что подтверждает справедливость свойства (7).

Потребуем теперь, чтобы эта функция удовлетворяла второму граничному условию из (13). Для этого вычислим её производную в точке l и приравняем к нулю:

$$\left.\frac{dX(x)}{dx}\right|_{x=l} = (-\lambda x^{(1-p)/2} J_{(p+1)/2}(\lambda x))|_{x=l} = -\lambda l^{(1-p)/2} J_{(p+1)/2}(\lambda l) = 0,$$

откуда получим

$$\lambda_0 = 0,$$

$$J_{(p+1)/2}(\mu) = 0, \quad \mu = \lambda l. \tag{14}$$

Известно [17, с. 530], что функция $J_\nu(\xi)$ при $\nu > -1$ имеет счётное множество вещественных нулей. Тогда, обозначив n-й корень уравнения (14) через μ_n при заданном p, находим собственные значения $\lambda_n = \mu_n / l$ задачи (12) и (13). Согласно [18, с. 317] для нулей уравнения (14) при больших n справедлива асимптотическая формула

$$\mu_n = \lambda_n l = \pi n + \frac{\pi}{4} p + O(n^{-1}). \tag{15}$$

Заметим, что при $\lambda_0 = 0$ спектральная задача (12) и (13) имеет собственную функцию, равную константе, которую примем за единицу. Таким образом, система собственных функций задачи (12), (13) имеет вид

$$\widetilde{X}_0(x) = 1, \quad \lambda_0 = 0, \tag{16}$$

$$\widetilde{X}_n(x) = x^{(1-p)/2} J_{(p-1)/2}\left(\frac{\mu_n x}{l}\right) = x^{(1-p)/2} J_{(p-1)/2}(\lambda_n x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

где собственные значения λ_n, $n \in \mathbb{N}$, определяются как нули уравнения (14).

Отметим, что система собственных функций (16) и (17) ортогональна в пространстве $L_2[0,l]$ с весом x^p, а также образует полную систему в этом пространстве [19, с. 343].

Для дальнейших вычислений будем использовать ортонормированную систему функций:

$$X_n(x) = \frac{1}{\|\widetilde{X}_n(x)\|} \widetilde{X}_n(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+ \equiv \mathbb{N} \bigcup \{0\}, \tag{18}$$

где $\|\cdot\|$ – норма в пространстве $L_2[0,l]$ с весом x^p, т.е.

$$\|\widetilde{X}_n(x)\|^2=\int\limits_0^l x^p\widetilde{X}_n^2(x)\,dx. \tag{19}$$

Пусть, далее, $u(x,y)$ – решение задачи (2)–(4), (11). Следуя [20], рассмотрим функции

$$u_n(y)=\int\limits_0^l u(x,y)x^pX_n(x)\,dx,\quad n\in\mathbb{Z}_+, \tag{20}$$

$$u_{n,\varepsilon}(y)=\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x,y)x^pX_n(x)\,dx,\quad n\in\mathbb{N}, \tag{21}$$

где $\varepsilon>0$ – достаточно малое число. Продифференцируем дважды тождество (21) по переменной y при $y\in(-\alpha,0)\bigcup(0,\beta)$, тогда с учётом уравнения (1) получим

$$u''_{n,\varepsilon}(y)=\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon}u_{yy}(x,y)x^pX_n(x)\,dx=-(\operatorname{sgn}y)\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon}\left(u_{xx}+\frac{p}{x}u_x\right)x^pX_n(x)\,dx=$$

$$=-(\operatorname{sgn}y)\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}(x^pu_x)X_n(x)\,dx=-(\operatorname{sgn}y)\left[x^pu_xX_n(x)|_\varepsilon^{l-\varepsilon}-\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon}x^pu_xX'_n(x)\,dx\right]. \tag{22}$$

Из тождества (21) в силу уравнения (12) следует, что

$$u_{n,\varepsilon}(y)=-\frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon}u(x,y)x^p\left[X''_n(x)+\frac{p}{x}X'_n(x)\right]dx=$$

$$=-\frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon}u(x,y)\frac{d}{dx}(x^pX'_n(x))\,dx=-\frac{1}{\lambda_n^2}\left[u(x,y)x^pX'_n(x)\|_\varepsilon^{l-\varepsilon}-\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon}x^pu_xX'_n(x)\,dx\right],$$

т.е.

$$\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon}x^pu_xX'_n(x)\,dx=\lambda_n^2u_{n,\varepsilon}(y)+u(x,y)x^pX'_n(x)|_\varepsilon^{l-\varepsilon}.$$

Подставив полученное выражение для интеграла в равенство (22), будем иметь

$$u''_{n,\varepsilon}(y)=-(\operatorname{sgn}y)[x^pu_xX_n(x)|_\varepsilon^{l-\varepsilon}-\lambda_n^2u_{n,\varepsilon}(y)-u(x,y)x^pX'_n(x)|_\varepsilon^{l-\varepsilon}].$$

Перейдя в последнем равенстве в силу включения (2) к пределу при $\varepsilon\to0$, получаем вследствие условий (11) и (13), что функция (20) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u''_n(y)-(\operatorname{sgn}y)\lambda_n^2u_n(y)=0,\quad y\in(-\alpha,0)\bigcup(0,\beta), \tag{23}$$

общее решение которого имеет вид

$$u_n(y)=\begin{cases}a_ne^{\lambda_ny}+b_ne^{-\lambda_ny}, & y>0,\\ c_n\cos(\lambda_ny)+d_n\sin(\lambda_ny), & y<0,\end{cases} \tag{24}$$

где a_n, b_n, c_n, d_n – произвольные постоянные, требующие определения.

С учётом включения (2) подберём постоянные a_n, b_n, c_n и d_n таким образом, чтобы выполнялись условия сопряжения $u_n(0+) = u_n(0-)$, $u_n'(0+) = u_n'(0-)$, которые справедливы при $a_n = (c_n+d_n)/2$, $b_n = (c_n-d_n)/2$, $n \in \mathbb{N}$. Подставив найденные значения в представление (24), будем иметь

$$u_n(y) = \begin{cases} c_n \operatorname{ch}(\lambda_n y) + d_n \operatorname{sh}(\lambda_n y), & y > 0, \\ c_n \cos(\lambda_n y) + d_n \sin(\lambda_n y), & y < 0. \end{cases} \tag{25}$$

Для функции (20) в силу граничных условий (4) получаем равенства

$$u_n(\beta) = \int\limits_0^l \varphi(x) x^p X_n(x)\, dx =: \varphi_n, \quad u_n(-\alpha) = \int\limits_0^l \psi(x) x^p X_n(x)\, dx =: \psi_n. \tag{26}$$

В результате для нахождения постоянных c_n и d_n приходим к линейной алгебраической системе

$$\begin{cases} c_n \operatorname{ch}(\lambda_n \beta) + d_n \operatorname{sh}(\lambda_n \beta) = \varphi_n, \\ c_n \cos(\lambda_n \alpha) - d_n \sin(\lambda_n \alpha) = \psi_n, \end{cases} \tag{27}$$

которая имеет единственное решение

$$c_n = \frac{\varphi_n \sin(\lambda_n \alpha) + \psi_n \operatorname{sh}(\lambda_n \beta)}{\sin(\lambda_n \alpha) \operatorname{ch}(\lambda_n \beta) + \cos(\lambda_n \alpha) \operatorname{sh}(\lambda_n \beta)}, \quad d_n = \frac{\varphi_n \cos(\lambda_n \alpha) - \psi_n \operatorname{ch}(\lambda_n \beta)}{\sin(\lambda_n \alpha) \operatorname{ch}(\lambda_n \beta) + \cos(\lambda_n \alpha) \operatorname{sh}(\lambda_n \beta)}, \tag{28}$$

если при всех $n \in \mathbb{N}$ её определитель $\Delta_n(\alpha, \beta)$ отличен от нуля, т.е.

$$\Delta_n(\alpha, \beta) := \sin(\lambda_n \alpha) \operatorname{ch}(\lambda_n \beta) + \cos(\lambda_n \alpha) \operatorname{sh}(\lambda_n \beta) \neq 0. \tag{29}$$

Подставив найденные значения (28) в представление (25), найдём окончательный вид функций (20):

$$u_n(y) = \begin{cases} \Delta_n^{-1}(\alpha, \beta)(\varphi_n \Delta_n(\alpha, y) + \psi_n \operatorname{sh}(\lambda_n(\beta - y))), & y > 0, \\ \Delta_n^{-1}(\alpha, \beta)(\varphi_n \sin(\lambda_n(\alpha + y)) + \psi_n \Delta_n(-y, \beta)), & y < 0. \end{cases} \tag{30}$$

Аналогично находим

$$u_0(y) = \frac{\alpha \varphi_0 + \beta \psi_0}{\alpha + \beta} + \frac{\varphi_0 - \psi_0}{\alpha + \beta} y, \quad y \in (-\alpha, 0) \bigcup (0, \beta), \tag{31}$$

$$u_0(\beta) = l^{-(p+1)/2} \sqrt{p+1} \int\limits_0^l \varphi(x) x^p\, dx =: \varphi_0, \quad u_0(-\alpha) = l^{-(p+1)/2} \sqrt{p+1} \int\limits_0^l \psi(x) x^p\, dx =: \psi_0. \tag{32}$$

При выполнении условия (29) задача (2)–(4), (11) имеет единственное решение. Действительно, пусть $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$ и $\Delta_n(\alpha, \beta) \neq 0$. Тогда из (26) и (32) следует, что $\varphi_n = \psi_n \equiv 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, а из (30) и (31) – что $u_n(y) = 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$. В силу (20) имеем $\int_0^l u(x, y) x^p X_n(x)\, dx = 0$. Отсюда вследствие полноты системы (18) в пространстве $L_2[0, l]$ с весом x^p следует, что $u(x, y) = 0$ почти всюду на промежутке $x \in [0, l]$ и при любом $y \in [-\alpha, \beta]$. Поскольку, согласно (2), функция $u(x, y) \in C(\overline{D})$, то $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть теперь при некоторых значениях p, l, α, β и некотором $n = m$ условие (29) нарушено. При $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$ и $\Delta_m(\alpha, \beta) = 0$ система (27) равносильна любому из её уравнений, например, первому

$$c_m \operatorname{ch}(\lambda_m \beta) + d_m \operatorname{sh}(\lambda_m \beta) = 0,$$

которое имеет континуальное множество решений: $d_m \in \mathbb{R}$ – произвольная постоянная и $c_m = -d_m \operatorname{sh}(\lambda_m\beta)/\operatorname{ch}(\lambda_m\beta)$. Подставив найденные значения в представление (25), будем иметь

$$u_m(y) = \begin{cases} \widetilde{d_m}(\operatorname{sh}(\lambda_m y)\operatorname{ch}(\lambda_m\beta) - \operatorname{sh}(\lambda_m\beta)\operatorname{ch}(\lambda_m y)), & y > 0, \\ \widetilde{d_m}(\operatorname{ch}(\lambda_m\beta)\,\sin(\lambda_m y) - \operatorname{sh}(\lambda_m\beta)\,\cos(\lambda_m y)), & y < 0, \end{cases}$$

где $\widetilde{d_m} = d_m/\operatorname{ch}(\lambda_m\beta)$ – произвольная постоянная, не равная нулю.

Таким образом, однородная задача (2)–(4), (11) имеет ненулевое решение

$$u_m(x,y) = \begin{cases} \widetilde{d_m}(\operatorname{sh}(\lambda_m y)\operatorname{ch}(\lambda_m\beta) - \operatorname{sh}(\lambda_m\beta)\operatorname{ch}(\lambda_m y))X_m(x), & y > 0, \\ \widetilde{d_m}(\operatorname{ch}(\lambda_m\beta)\,\sin(\lambda_m y) - \operatorname{sh}(\lambda_m\beta)\,\cos(\lambda_m y))X_m(x), & y < 0, \end{cases} \tag{33}$$

где функции $X_m(x)$ определяются формулой (18). Нетрудно проверить, что построенная функция (33) удовлетворяет всем условиям задачи (2)–(4), (11) при $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$.

Тем самым, доказана

Теорема 1. *Если существует решение задачи (2)–(4), (11), то оно единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие (29) при всех* $n \in \mathbb{Z}_+$.

4. Существование решения задачи 1. Выясним, при каких значениях параметров p, l, α и β нарушается условие (29). Представим определитель $\Delta_n(\alpha,\beta)$ в следующем виде:

$$\Delta_n(\alpha,\beta) = \sin(\lambda_n\alpha)\operatorname{ch}(\lambda_n\beta) + \cos(\lambda_n\alpha)\operatorname{sh}(\lambda_n\beta) = \sin(\lambda_n\alpha)\operatorname{ch}\xi + \cos(\lambda_n\alpha)\operatorname{sh}\xi,$$

где $\xi = \alpha_n\beta$. Поскольку $\sqrt{\operatorname{ch}^2(\lambda_n\beta) + \operatorname{sh}^2(\lambda_n\beta)} = \sqrt{\operatorname{ch}(2\lambda_n\beta)}$, то

$$\Delta_n(\alpha,\beta) = \sqrt{\operatorname{ch}(2\lambda_n\beta)}\left(\sin(\lambda_n\alpha)\cos\arcsin\frac{\operatorname{sh}(\lambda_n\beta)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2\lambda_n\beta)}} + \cos(\lambda_n\alpha)\sin\arcsin\frac{\operatorname{sh}(\lambda_n\beta)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2\lambda_n\beta)}}\right) =$$

$$= \sqrt{\operatorname{ch}(2\lambda_n\beta)}\,\sin\left(\lambda_n\alpha + \arcsin\frac{\operatorname{sh}(\lambda_n\beta)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2\lambda_n\beta)}}\right) = \sqrt{\operatorname{ch}(2\lambda_n\beta)}\,\sin(\mu_n\widetilde{\alpha} + \gamma_n), \tag{34}$$

здесь

$$\mu_n = \lambda_n l, \quad \widetilde{\alpha} = \frac{\alpha}{l}, \quad \gamma_n = \arcsin\frac{\operatorname{sh}(\lambda_n\beta)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2\lambda_n\beta)}} \to \frac{\pi}{4} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Из равенства (34) следует, что $\Delta_n(\alpha,\beta) = 0$, если и только если $\sin(\mu_n\widetilde{\alpha} + \gamma_n) = \sin(\pi k)$, $k \in \mathbb{N}$, т.е. при $\widetilde{\alpha} = (\pi k - \gamma_n)/\mu_n$, $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, уравнение $\Delta_n(\alpha,\beta) = 0$ имеет счётное множество нулей. Найдём оценки величины $\Delta_n(\alpha,\beta)$, входящей в знаменатели формулы (30), при достаточно больших n.

Лемма 1. *Если* $\widetilde{\alpha} = a/b$ *– рациональное число, где* a, b *– взаимно простые натуральные числа, и* $p \neq (4bd - b - 4r)/a$, *где* $r = \overline{0, b-1}$, $d \in \mathbb{Z}$, *то существуют постоянные* $C_0 > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ *такие, что при любом* $n > n_0$ *выполняется оценка*

$$|\Delta_n(\alpha,\beta)| \geqslant C_0 e^{\lambda_n\beta}. \tag{35}$$

Доказательство. Заменим в выражении (34) величину μ_n согласно формуле (15):

$$\Delta_n(\alpha,\beta) = \sqrt{\operatorname{ch}(2\lambda_n\beta)}\,\sin\left(\pi n\widetilde{\alpha} + \frac{\pi}{4}p\widetilde{\alpha} + O(n^{-1}) + \gamma_n\right).$$

Пусть $\widetilde{\alpha} = a/b$, $a, b \in \mathbb{N}$, $(a,b) = 1$. Разделив na на b с остатком, будем иметь $na = bq + r$, $q \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leqslant r \leqslant b-1$. Тогда

$$\Delta_n(\alpha,\beta) = \sqrt{\operatorname{ch}(2\lambda_n\beta)}\,(-1)^q \sin\left(\frac{\pi r}{b} + \frac{\pi a}{4b}p + \gamma_n + O(n^{-1})\right) =$$

$$= \frac{e^{\lambda_n\beta}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+e^{-4\lambda_n\beta}}\,(-1)^q\sin\left(\frac{\pi r}{b}+\frac{\pi a}{4b}p+\frac{\pi}{4}-\varepsilon_n+O(n^{-1})\right),$$

где $\varepsilon_n>0$ и $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to+\infty$. Из последнего равенства следует, что найдётся номер n_0, начиная с которого будет выполняться неравенство

$$|\Delta_n(\alpha,\beta)|\geqslant \frac{e^{\lambda_n\beta}}{2\sqrt{2}}\left|\sin\left(\frac{\pi r}{b}+\frac{\pi a}{4b}p+\frac{\pi}{4}\right)\right| = C_0e^{\lambda_n\beta}.$$

Для того чтобы постоянная C_0 была отлична от нуля, необходимо, чтобы

$$\frac{\pi r}{b}+\frac{\pi a}{4b}p+\frac{\pi}{4}\neq \pi d,\quad d\in\mathbb{Z},$$

откуда имеем

$$p\neq\frac{1}{a}(4bd-b-4r),\quad d\in\mathbb{Z}. \tag{36}$$

Условие (36) выполняется при любом иррациональном значении $p\geqslant 1$.

Лемма 2. *Если при $n>n_0$ выполнена оценка (35), то справедливы оценки*

$$|u_n(y)|\leqslant C_1(|\varphi_n|+|\psi_n|)\quad и \quad |u_n'(y)|\leqslant C_2n(|\varphi_n|+|\psi_n|),\quad y\in[-\alpha,\beta], \tag{37}$$

$$|u_n''(y)|\leqslant C_3n^2(|\varphi_n|+|\psi_n|),\quad y\in[-\alpha,0),\quad и\quad |u_n''(y)|\leqslant C_4n^2(|\varphi_n|+|\psi_n|),\quad y\in(0,\beta], \tag{38}$$

где C_i – здесь и далее положительные постоянные.

Доказательство. Из формулы (30) с учётом оценки (35) найдём

$$|u_n(y)|\leqslant\frac{1}{|\Delta_n(\alpha,\beta)|}(|\varphi_n|(\operatorname{sh}(\lambda_n\beta)+\operatorname{ch}(\lambda_n\beta))+|\psi_n|\operatorname{sh}(\lambda_n\beta))\leqslant$$

$$\leqslant C_0^{-1}e^{-\lambda_n\beta}(|\varphi_n|(\operatorname{sh}(\lambda_n\beta)+\operatorname{ch}(\lambda_n\beta))+|\psi_n|\operatorname{sh}(\lambda_n\beta))\leqslant\widetilde{C}_1(|\varphi_n|+|\psi_n|),\quad y\geqslant 0,$$

$$|u_n(y)|\leqslant C_0^{-1}e^{-\lambda_n\beta}(|\varphi_n|+|\psi_n|(\operatorname{sh}(\lambda_n\beta)+\operatorname{ch}(\lambda_n\beta)))\leqslant\widetilde{C}_2(|\varphi_n|+|\psi_n|),\quad y\leqslant 0,$$

где $\widetilde{C}_i$ – здесь и далее положительные постоянные. Обозначив через $C_1=\max\{\widetilde{C}_1,\widetilde{C}_2\}$, получим первую оценку в (37) при всех $n>n_0$ и $y\in[-\alpha,\beta]$.

Вычислим теперь, используя представление (30), производную $u_n'(y)$, тогда с учётом оценки (35) и асимптотической формулы (15) будем иметь

$$|u_n'(y)|\leqslant C_0^{-1}e^{-\lambda_n\beta}n(|\varphi_n|(\operatorname{ch}(\lambda_n\beta)+\operatorname{sh}(\lambda_n\beta))-|\psi_n|\operatorname{ch}(\lambda_n\beta))\leqslant\widetilde{C}_3n(|\varphi_n|+|\psi_n|),\quad y\geqslant 0,$$

$$|u_n'(y)|\leqslant C_0^{-1}e^{-\lambda_n\beta}n(|\varphi_n|-|\psi_n|(\operatorname{sh}(\lambda_n\beta)+\operatorname{ch}(\lambda_n\beta)))\leqslant\widetilde{C}_4n(|\varphi_n|+|\psi_n|),\quad y\leqslant 0.$$

Из полученных неравенств следует справедливость второй оценки в (37) при всех $n>n_0$ и $y\in[-\alpha,\beta]$, где $C_2=\max\{\widetilde{C}_3,\widetilde{C}_4\}$.

Справедливость оценок (38) вытекает из равенств (15), (23) и оценки (37).

Лемма 3. *Для достаточно больших n и при всех $x\in[0,l]$ выполнены оценки*

$$|X_n(x)|\leqslant C_5,\quad |X_n'(x)|\leqslant C_6n,\quad |X_n''(x)|\leqslant C_7n^2.$$

Доказательство приведено в работе [20].

Лемма 4. *Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принадлежат пространству $C^2[0,l]$, существуют производные $\varphi'''(x)$, $\psi'''(x)$, имеющие конечное изменение на $[0,l]$, и справедливы равенства*

$$\varphi'(0)=\varphi''(0)=\psi'(0)=\psi''(0)=\varphi'(l)=\psi'(l)=0,$$

то выполняются оценки

$$|\varphi_n|\leqslant C_8n^{-4},\quad |\psi_n|\leqslant C_9n^{-4}.$$

Доказательство аналогично доказательству соответствующей леммы в работе [20].

На основании найденных частных решений (18), (30) и (31) при выполнении условий (29) и (35) решение задачи (2)–(4), (11) определяется в виде ряда Фурье–Бесселя

$$u(x,y) = u_0(y)X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)X_n(x). \tag{39}$$

Вместе с рядом (39) рассмотрим следующие ряды:

$$u_y(x,y) = u_0'(y)X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(y)X_n(x), \quad u_x(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)X_n'(x); \tag{40}$$

$$u_{yy}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(y)X_n(x), \quad u_{xx}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)X_n''(x). \tag{41}$$

Согласно леммам 2 и 3 при любом $(x,y) \in \overline{D}$ ряды (39) и (40) мажорируются соответственно рядами $C_{10}\sum_{n=1}^{\infty}(|\varphi_n| + |\psi_n|)$, $C_{11}\sum_{n=1}^{\infty} n(|\varphi_n| + |\psi_n|)$, а ряды (41) при любом $(x,y) \in \overline{D}_+ \bigcup \overline{D}_-$ мажорируются рядом $C_{12}\sum_{n=1}^{\infty} n^2(|\varphi_n| + |\psi_n|)$. Все эти мажорирующие ряды в свою очередь, согласно лемме 4, оцениваются сверху числовым рядом $C_{13}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$. Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряды (39), (40) в замкнутой области $\overline{D}$, а ряды (41) в замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$ сходятся равномерно. Таким образом, построена функция $u(x,y)$, определяемая рядом (39), которая удовлетворяет всем условиям задачи (2)–(4), (11).

Если для чисел $\widetilde{\alpha}$ в лемме 1 при некоторых натуральных $n = m = m_1, \ldots, m_k$, где $1 \leqslant m_1 < \ldots < m_k \leqslant n_0$, $k \in \mathbb{N}$, выполняется равенство $\Delta_m(\alpha,\beta) = 0$, то для разрешимости задачи (2)–(4), (11) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\psi_m \operatorname{ch}(\lambda_m\beta) - \varphi_m\cos(\lambda_m\alpha) = 0, \quad m = m_1, \ldots, m_k. \tag{42}$$

В этом случае решение задачи (2)–(4), (11) определяется рядом

$$u(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{m_1-1} + \ldots + \sum_{n=m_{k-1}+1}^{m_k-1} + \sum_{n=m_k+1}^{\infty}\right) u_n(y)X_n(x) + \sum_{n=1} u_m(x,y), \tag{43}$$

где m принимает значения $m_1, \ldots, m_k$, а функция $u_m(x,y)$ определяется по формуле (33). В случае, если в некоторых суммах нижний предел окажется больше верхнего, то эти суммы следует считать равными нулю.

Тем самым, доказана

Теорема 2. *Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 4 и выполнено условие (35) при $n > n_0$. Тогда существует единственное решение $u(x,y)$ задачи (2)–(4), (11), определяемое рядом (39), если $\Delta_n(\alpha,\beta) \neq 0$ при всех $n = \overline{1,n_0}$; если же $\Delta_m(\alpha,\beta) = 0$ при некоторых $m = m_1, \ldots, m_k \leqslant n_0$, то задача имеет решение, определяемое рядом (43), тогда и только тогда, когда выполнены условия (42).*

Теорема 3. *Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 4, условиям (6) и выполнено неравенство (35) при $n > n_0$. Тогда существует единственное решение $u(x,y)$ задачи (2)–(6), определяемое рядом (39), если $\Delta_n(\alpha,\beta) \neq 0$ при всех $n = \overline{1,n_0}$; если же $\Delta_m(\alpha,\beta) = 0$ при некоторых $m = m_1, \ldots, m_k \leqslant n_0$, то задача имеет решение, определяемое рядом (43), тогда и только тогда, когда выполнены условия (42).*

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ – решение задачи (2)–(4), (11) и функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы. Тогда равенство (1) выполняется всюду в области D. Умножим равенство (1) на x^p и проинтегрируем при фиксированном $y \in (-\alpha,0) \bigcup (0,\beta)$ по переменной x на промежутке от ε до $l-\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. В результате получим тождество (9). Перейдём в нём к пределу при $\varepsilon \to 0$, тогда с учётом условий (2) и (11) будем иметь

$$\int_0^l u_{yy}(x,t)x^p\,dx = 0.$$

Проинтегрировав это равенство по переменной y дважды, получим, что

$$\int_0^l u(x,y)x^p\,dx = K_1 y + K_2, \quad K_1,\, K_2 = \mathrm{const}. \tag{44}$$

Положим в равенстве (44) $y=\beta$, а затем $y=-\alpha$, тогда с учётом условий (4), (6) будем иметь соответственно

$$\int_0^l u(x,\beta)x^p\,dx = \int_0^l \varphi(x)x^p\,dx = K_1\beta + K_2 = A,$$

$$\int_0^l u(x,-\alpha)x^p\,dx = \int_0^l \psi(x)x^p\,dx = -\alpha K_1 + K_2 = A,$$

откуда находим значения констант $K_1 = 0$ и $K_2 = A$. Тогда из равенства (44) следует, что

$$\int_0^l u(x,y)x^p\,dx = A,$$

т.е. справедливо условие (5).

Пусть теперь $u(x,y)$ – решение задачи (2)–(6). Тогда справедливо тождество (10). Переходя в нём к пределу при $\varepsilon \to 0$, в силу условий (2) и (5) получим локальное граничное условие второго рода $u_x(l,y)=0$, т.е. условие (11).

Тем самым нами показано, что при выполнении условий согласования (6) условия (5) и (11) эквивалентны, а значит, эквивалентны и задачи (2)–(6) и (2)–(4), (11).

5. Устойчивость решения задачи 1.

Теорема 4. *Для решения задачи (2)–(6) при каждом $y \in [-\alpha,\beta]$ справедлива оценка*

$$\|u(x,y)\| \leqslant C_{14}(\|\varphi(x)\| + \|\psi(x)\|),$$

где $\|\cdot\|$ – норма в пространстве $L_2[0,l]$ с весом x^p, а постоянная C_{14} не зависит от функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Доказательство. Воспользовавшись равенством (39) с учётом первой оценки в (37), получаем

$$\|u(x,y)\|^2 = \int_0^l x^p u^2(x,y)\,dx = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_n(y)u_m(y)\int_0^l x^p X_n(x)X_m(x)\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(y)\int_0^l x^p X_n^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(y) \leqslant C_1^2\sum_{n=1}^{\infty}(|\varphi_n| + |\psi_n|)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2C_1^2\sum_{n=1}^{\infty}(|\varphi_n|^2 + |\psi_n|^2) \leqslant 2C_1^2\biggl(\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^2\biggr) = 2C_1^2(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2).$$

Теорема доказана.

6. Решение задачи 2. Умножим уравнение (1) на x^p и проинтегрируем при фиксированном $y \in (-\alpha, 0) \bigcup (0, \beta)$ по переменной x на промежутке от ε до $l-\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. В результате получим тождество (10).

В этом тождестве в силу условий (2), (5) и (8) можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$, так как все слагаемые имеют конечные пределы при $\varepsilon \to 0$. В результате получим локальное граничное условие (11). В дальнейшем вместо задачи (2)–(6), (8) будем рассматривать задачу (2)–(4), (8), (11).

Подставив произведение $u(x,y) = X(x)Y(y)$ в уравнение (1) и в условия (8) и (11), получим для уравнения (12) следующую задачу:

$$\lim_{x\to 0+} x^p X'(x) = 0, \quad X'(l) = 0.$$

Система собственных функций спектральной задачи при $|p| < 1$ и $p \neq 0$ имеет вид

$$\widetilde{X}_0(x) = 1, \quad \lambda_0 = 0,$$

$$\widetilde{X}_n(x) = x^{(1-p)/2} J_{(p-1)/2}(\lambda_n x), \quad n \in \mathbb{N},$$

где собственные значения $\lambda_n = \mu_n/l$, $n \in \mathbb{N}$, определяются как нули μ_n уравнения (14); для μ_n при больших n справедлива асимптотическая формула (15). Введём норму по формуле (19) и далее будем рассматривать функции (18).

Решение задачи (2)–(4), (8), (11), как и при рассмотрении задачи 1, строим в виде суммы ряда Фурье–Бесселя (39), в котором функции $X_n(x)$ определяются по формуле (18), функции $u_0(y)$ – по формуле (31), функции $u_n(y)$ имеют вид

$$u_n(y) = \begin{cases} \Delta_n^{-1}(\alpha,\beta)(\varphi_n \Delta_n(\alpha, y) + \psi_n \operatorname{sh}(\lambda_n(\beta - y))), & y > 0, \\ \Delta_n^{-1}(\alpha,\beta)(\varphi_n \sin(\lambda_n(\alpha + y)) + \psi_n \Delta_n(-y, \beta)), & y < 0, \end{cases}$$

где величина $\Delta_n(\alpha, \beta)$ определена равенством (29), а числа φ_n и ψ_n – равенствами (26).

Аналогично теореме 1 доказывается

Теорема 5. *Если существует решение задачи (2)–(4), (8), (11), то оно единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие* $\Delta_n(\alpha, \beta) \neq 0$ *при всех* $n \in \mathbb{Z}_+$.

Аналогично тому, как это сделано при решении задачи 1, устанавливаются оценки лемм 1–4, согласно которым ряд (39) и его производные первого порядка сходятся равномерно в замкнутой области $\overline{D}$, а производные второго порядка сходятся равномерно в областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$, а функция (39) удовлетворяет условиям (2) и (3).

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 6. *Пусть функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы 4 и выполнено условие (35) при* $n > n_0$. *Тогда существует единственное решение* $u(x,y)$ *задачи (2)–(4), (8), (11), определяемое рядом (39), если* $\Delta_n(\alpha,\beta) \neq 0$ *при всех* $n = \overline{1, n_0}$; *если же* $\Delta_m(\alpha, \beta) = 0$ *при некоторых* $m = m_1, \ldots, m_k \leqslant n_0$, *то задача имеет решение, определяемое рядом (43), тогда и только тогда, когда выполнены условия (42).*

Теорема 7. *Пусть функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы 4, условиям (6) и выполнено неравенство (35) при* $n > n_0$. *Тогда существует единственное решение* $u(x,y)$ *задачи (2)–(6), (8), определяемое рядом (39), если* $\Delta_n(\alpha,\beta) \neq 0$ *при всех* $n = \overline{1, n_0}$; *если же* $\Delta_m(\alpha,\beta) = 0$ *при некоторых* $m = m_1, \ldots, m_k \leqslant n_0$, *то задача имеет решение, определяемое рядом (43), тогда и только тогда, когда выполнены условия (42).*

Теорема 8. *Для решения задачи (2)–(6), (8) справедлива оценка*

$$\|u(x,y)\| \leqslant C_{15}(\|\varphi(x)\| + \|\psi(x)\|),$$

где постоянная C_{15} *не зависит от функций* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$.

Работа выполнена при содействии Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Моисеев Е.И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М., 1988.
2. *Келдыш М.В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. № 2. С. 181–183.
3. *Weinstein A.* Discontinuous integrals and generalized theory of potential // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. V. 63. № 2. P. 342–354.
4. *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., 1997.
5. *Carroll R.W., Showalter R.E.* Singular and Degenerate Cauchy Problems. New York, 1976.
6. *Муравник А.Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши // Совр. математика. Фунд. направления. 2014. Т. 52. С. 3–143.
7. *Катрахов В.В., Ситник С.М.* Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Совр. математика. Фунд. направления. 2018. Т. 64. № 2. С. 211–426.
8. *Ломов И.С.* Теорема о безусловной базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 9. С. 1550–1563.
9. *Белянцев О.В., Ломов И.С.* О свойстве базисности собственных функций одного сингулярного дифференциального оператора второго порядка // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 8. С. 1187–1189.
10. *Fitouhi A., Jebabli I., Shishkina E.L., Sitnik S.M.* Applications of integral transforms composition method to wave-type singular differential equations and index shift transmutations // Electr. J. Differ. Equat. 2018. T. 130. P. 1–27.
11. *Sabitov K.B., Zaitseva N.V.* Initial-boundary value problem for hyperbolic equation with singular coefficient and integral condition of second kind // Lobachevskii J. of Math. 2018. T. 39. № 9. P. 1419–1427.
12. *Cannon I.R.* The solution of heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. T. 21. № 2. P. 155–160.
13. *Камынин Л.И.* Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1964. Т. 4. № 6. С. 1006–1024.
14. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теплопроводности с неклассическим краевым условием// Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 276–304.
15. *Пулькина Л.С.* Нелокальная задача с интегральным условием для гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 7. С. 887–892.
16. *Ломов И.С.* Равномерная сходимость разложений по корневым функциям дифференциального оператора с интегральными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 486–497.
17. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Т. 1. М., 1945.
18. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. М., 1986.
19. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1981.
20. *Сабитов К.Б., Зайцева Н.В.* Начальная задача для B-гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 1. С. 123–135.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 20.09.2020 г.
После доработки 20.09.2020 г.
Принята к публикации 11.12.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 2, с. 235–254

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.226+517.956.227

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ТИПА ПРЫГАЮЩЕГО МЯЧИКА ОПЕРАТОРА $\nabla D(x)\nabla$ В ОБЛАСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ПОЛУЖЁСТКИМИ СТЕНКАМИ

 А. И. Клевин

Рассматривается задача о квазиклассическом спектре оператора $\nabla D(x)\nabla$ с вырождением бесселева типа на границе двумерной области (полужёсткие стенки). Известно, что можно построить асимптотические собственные функции, связанные с лагранжевыми многообразиями, используя модификацию метода канонического оператора Маслова. Получены асимптотические собственные функции, связанные с простейшими периодическими траекториями соответствующей гамильтоновой системы с отражениями на границе области.

DOI: 10.31857/S0374064121020114

1. Введение.

1.1. Асимптотики типа прыгающего мячика оператора Лапласа с условиями Дирихле в эллипсе. Хорошо известна задача об асимптотическом при $k\to\infty$ спектре оператора Лапласа в области M, ограниченной эллипсом ∂M, с нулевыми условиями Дирихле на границе:

$$-\Delta u = k^2 u, \quad u|_{\partial M} = 0. \tag{1}$$

Согласно [1] (см. также [2]) существуют асимптотические собственные функции, сконцентрированные в окрестности малой оси эллипса и быстро убывающие при отдалении от неё.

Рассмотрим биллиардную систему внутри эллипса с обычными отражениями от границы. Такая система имеет периодическую траекторию, лежащую на малой оси эллипса. Существуют асимптотические собственные функции, соответствующие этой траектории (моды *прыгающего мячика*). Динамическим свойством периодической траектории, лежащей на малой оси эллипса, которое обуславливает их существование, является орбитальная устойчивость периодического движения в линейном приближении. Этим свойством не обладает, например, периодическое движение на большой оси эллипса.

Приведём асимптотические собственные значения, соответствующие модам прыгающего мячика, представленные в [2, с. 100]. Пусть g – длина малой оси эллипса, ρ – радиус кривизны эллипса в точке пересечения с малой осью. Собственные значения имеют вид

$$k_{n,\nu} = \frac{\pi}{g}\left[n+1+\frac{2\nu+1}{n}\arcsin\sqrt{\frac{g}{2\rho}}+O\left(\left(\frac{\nu}{n}\right)^2\right)\right]$$

и нумеруются квантовыми номерами $\mathbb{N}\ni n\gg 1$, $\mathbb{Z}_+\ni\nu\ll n$. Видно, что если менять один из квантовых номеров, то все соседние точки будут располагаться "почти" на одинаковом расстоянии друг от друга.

1.2. Системы с жёсткими, мягкими и полужёсткими стенками. Асимптотические при $h\to+0$ собственные функции, соответствующие периодическим траекториям, можно рассматривать и для оператора Шрёдингера с гладкой функцией $V(x)$, задающей потенциальную яму (система с *мягкими стенками*):

$$-h^2\Delta\psi + V(x)\psi = E\psi.$$

В одном из частных случаев такая система рассматривалась в [3]. Типичной ситуацией здесь является наличие семейства периодических траекторий гамильтоновой системы с гамильтонианом $p^2+V(x)$, параметризованных значениями полной энергии, т.е. постоянными на траекториях значениями функции Гамильтона. Проквантованному множеству орбитально устойчивых в линейном приближении периодических траекторий мы можем поставить в соответствие серию асимптотических мод.

Задачу (1) с условиями Дирихле можно (по крайней мере на уровне нестрогих рассуждений) представить в виде спектральной задачи для уравнения Шрёдингера, если сделать замену $E=k^2h^2$ и положить $V(x)=0$, если $x\in M$, и $V(x)=+\infty$, если $x\notin M$. Такую систему называют системой с *жёсткими стенками.*

Перейдём к спектральной задаче, которая рассматривается в настоящей работе. Пусть $(x_1,x_2)\in[b_1,b_2]\times\mathbb{R}=M\subset\mathbb{R}^2$ – полоса. Будем рассматривать частный случай спектральной задачи (конкретная её постановка будет приведена ниже)

$$\Big[-h^2\frac{\partial}{\partial x_1}D_1(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}-h^2\frac{\partial}{\partial x_2}D_2(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}\Big]\Psi=E\Psi,\quad \Psi=\Psi(x_1,x_2,h), \tag{2}$$

где оператор в левой части является оператором с *бесселевым вырождением* (термин введён в [4]), т.е. $D_i(x_1,x_2)>0$ при $b_1<x_1<b_2$, $D_i(b_s,x_2)=0$, $(\partial D_i/\partial x_1)(b_s,x_2)\neq 0$, $i=1,2$, $s=1,2$. Оператору в левой части (2) соответствует движение в области M по геодезическим траекториям метрики $ds^2=(D_1(x_1,x_2))^{-1}\,dx_1^2+(D_2(x_1,x_2))^{-1}\,dx_2^2$ с обычным отражением от границы ∂M, на которой метрика обращается в бесконечность. В терминах гамильтоновой системы это движение задаётся гамильтонианом $H(x_1,x_2,p_1,p_2)=D_1(x_1,x_2)p_1^2+D_2(x_1,x_2)p_2^2$. Из свойств функций D_1, D_2 следует обращение в бесконечность импульсной переменной за конечное время при достижении границы. Подобные системы названы в [5] биллиардами с *полужёсткими стенками.*

Мы рассматриваем асимптотические при $h\to+0$ собственные функции спектральной задачи (2), которые соответствуют периодическим движениям такой системы с траекториями, лежащими на отрезке (в общем случае можно рассматривать и криволинейные траектории), ограниченном двумя точками на границе ∂M. Такие асимптотические собственные функции мы также будем называть функциями типа *прыгающего мячика.*

Отметим, что задачи, рассмотренные во введении, можно соотнести с резонаторами различных типов.

2. Постановка задачи и результат.

2.1. Постановка задачи. Пусть заданы числа $b_1<b_2$ и вещественные гладкие в окрестности полосы $b_1\leqslant x_1\leqslant b_2$ функции $D_1(x_1,x_2)$, $D_2(x_1,x_2)$ такие, что

$$\begin{gathered}D_i(x_1,x_2)>0\quad\text{при}\quad b_1<x_1<b_2,\quad D_i(b_s,x_2)=0,\\ \frac{\partial D_i}{\partial x_1}(b_s,x_2)\neq 0,\quad \frac{\partial D_1}{\partial x_2}(x_1,0)=0,\quad i=1,2,\quad s=1,2.\end{gathered} \tag{3}$$

Введём дифференциальный оператор

$$\widehat{L}\equiv -h^2\frac{\partial}{\partial x_1}D_1(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}-h^2\frac{\partial}{\partial x_2}D_2(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

В данной работе мы построим серию асимптотических при $h\to+0$ собственных $E(h)$ значений и соответствующих им собственных функций $\Psi(x_1,x_2)$, локализованных в окрестности множества $\{x_2=0\}$, которая удовлетворяет условиям квазиклассической спектральной задачи в полосе $b_1\leqslant x_1\leqslant b_2$:

$$\|\widehat{L}\Psi-E\Psi\|_{L^2([b_1,b_2]\times\mathbb{R})}=O(h^{3/2}),\quad \|\Psi\|_{L^2([b_1,b_2]\times\mathbb{R})}=\Theta(1).$$

Напомним, что отношение $f=\Theta(g)$ между функциями f и g по определению означает, что одновременно выполняются отношения $f=O(g)$ и $g=O(f)$. В нашем случае это означает равномерную ограниченность нормы сверху и снизу положительными константами.

От функции Ψ будем требовать выполнения условия конечности энергетического интеграла

$$(\Psi,(\widehat{L}-E)\Psi)_{L^2([b_1,b_2]\times\mathbb{R})}<\infty. \tag{4}$$

Рассматривая замыкание в $L^2([b_1,b_2]\times\mathbb{R})$ симметрического оператора $\widehat{L}$, заданного на функциях из $C_0^\infty([b_1,b_2]\times\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию (4), получаем самосопряжённое расширение оператора $\widehat{L}$ методом Фридрихса. Условие (4) для оператора с вырождающимися коэффициентами является аналогом граничных условий, которые обычно возникают при рассмотрении операторов, действующих на функции, заданные в какой-нибудь области. Обсуждение этого вопроса и дальнейшие ссылки можно найти в [6].

2.2. Результат. Введём функции $t(x_1)$, $\widetilde{t}(x_1)$, заданные на множестве $x_1\in[b_1,b_2]$, и число T:

$$t(x_1)=\int\limits_{b_1}^{x_1}\frac{dq}{2\sqrt{D_1(q,0)}},\quad \frac{T}{2}=t(b_2),\quad \widetilde{t}(x_1)=\frac{T}{2}-t(x_1). \tag{5}$$

Обратную к $t(x_1)$ функцию, заданную на множестве $[0,T/2]$, продолжим чётным образом на множество $[-T/2,T/2]$, после чего периодически распространим её на всё множество $\mathbb{R}$. Полученная функция $X_1(t)$ является T-периодическим решением задачи Коши

$$\dot{x}_1^2=4D_1(x_1,0),\quad x_1(0)=b_1.$$

Рассмотрим фундаментальную систему решений $(\widetilde{z}_2(t),\widetilde{w}_2(t))$, $(\widetilde{\widetilde{z}}_2(t),\widetilde{\widetilde{w}}_2(t))$ линейной системы с периодическими коэффициентами

$$\dot{z}_2=2D_2(X_1(t),0)w_2,\quad \dot{w}_2=-\frac{(\partial^2D_1/\partial x_2^2)(X_1(t),0)}{D_1(X_1(t),0)}z_2 \tag{6}$$

относительно неизвестных функций $z_2(t)$, $w_2(t)$ с начальными условиями

$$\widetilde{z}_2(0)=1,\quad \widetilde{w}_2(0)=0,\quad \widetilde{\widetilde{z}}_2(0)=0,\quad \widetilde{\widetilde{w}}_2(0)=1.$$

Составим из них матрицу монодромии

$$R=\begin{pmatrix}\widetilde{z}_2(T) & \widetilde{\widetilde{z}}_2(T)\\ \widetilde{w}_2(T) & \widetilde{\widetilde{w}}_2(T)\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Предположим, что выполнено условие

$$|\operatorname{tr}R|<2. \tag{8}$$

У периодической системы (6) при правильном выборе знака числа β существует решение Флоке $(Z_2(t),W_2(t))$ с показателем β и комплексно-сопряжённое решение Флоке $(\overline{Z}_2(t),\overline{W}_2(t))$ с показателем $-\beta$, и при таком выборе выполнено условие положительности:

$$(Z_2(t+T),W_2(t+T))=(\exp(i\beta)Z_2(t),\exp(i\beta)W_2(t)),\quad \operatorname{Im}(W_2Z_2^{-1})>0, \tag{9}$$

где левая часть неравенства в зависимости от выбора знака β будет всегда либо положительной, либо отрицательной. Известно, что такое решение единственно с точностью до умножения на ненулевую постоянную. Пусть $\operatorname{Arg}Z_2(t)$ – непрерывная ветвь аргумента комплекснозначной функции $Z_2(t)$, не обращающейся в нуль. Произвол по модулю 2π в выборе β мы устраняем, полагая $\beta=\operatorname{Arg}Z_2(T)-\operatorname{Arg}Z_2(0)$.

Пусть на отрезке $[b_1,b_2]$ заданы некоторые гладкие функции $f_1(x_1)$, $f_2(x_1)$ со связными носителями $\operatorname{supp}f_s\subset[b_1,b_2]$, $s=1,2$, такие, что $b_1\notin\operatorname{supp}f_2$, $b_2\notin\operatorname{supp}f_1$, $f_1(x_1)+f_2(x_1)=1$.

Введём числовые серии ω_n, $E_{n,\nu}(h)$ равенствами

$$\omega_n = \frac{\pi}{T}\left(n + \frac{1}{2} + \frac{\beta}{4\pi}\right), \quad E_{n,\nu}(h) = h^2\left(\omega_n^2 + \omega_n \frac{\beta\nu}{T}\right),$$
$$n \in \mathbb{N}, \quad n = O(1/h), \quad \nu \in \mathbb{Z}_+, \quad \nu = O(1), \tag{10}$$

и серию функций

$$\Psi_{n,\nu}(x_1, x_2) = \left(\frac{2\omega_n\pi}{\sqrt{D_1(x_1,0)}}\right)^{1/2} |Z_2(t(x_1))|^{\nu-1/2} (\operatorname{Im} W_2 Z_2^{-1}(t(x_1)))^{\nu/2} \times$$
$$\times H_\nu\left(x_2\sqrt{\omega_n \operatorname{Im} W_2 Z_2^{-1}(t(x_1))}\right)\Big[f_1(x_1)\sqrt{t(x_1)} \times$$
$$\times \Big(J_0(2\omega_n t(x_1)) \operatorname{Re}(G_{n,\nu}(x_1,x_2)) - J_1(2\omega_n t(x_1)) \operatorname{Im}(G_{n,\nu}(x_1,x_2))\Big) +$$
$$+ (-1)^n f_2(x_1)\sqrt{\widetilde{t}(x_1)}\Big(J_0(2\omega_n \widetilde{t}(x_1)) \operatorname{Re}(\exp(i\beta/4) G_{n,\nu}(x_1,x_2)) +$$
$$+ J_1(2\omega_n \widetilde{t}(x_1)) \operatorname{Im}(\exp(i\beta/4) G_{n,\nu}(x_1,x_2))\Big)\Big], \tag{11}$$

где J_k – функция Бесселя первого рода порядка k, функция H_ν – ν-й полином Эрмита в физическом определении ($H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$) и

$$G_{n,\nu}(x_1,x_2) = \exp\left(-i\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \operatorname{Arg} Z_2(t(x_1)) + i\frac{\beta\nu t(x_1)}{T} + i\omega_n W_2 Z_2^{-1}(t(x_1))\frac{x_2^2}{2}\right).$$

Утверждение. *Пусть выполнено неравенство (8). Тогда*

$$\|(\widehat{L} - E_{n,\nu}(h))\Psi_{n,\nu}(x_1,x_2)\|_{L^2([b_1,b_2]\times\mathbb{R})} = O(h^{3/2}), \quad \|\Psi_{n,\nu}(x_1,x_2)\|_{L^2([b_1,b_2]\times\mathbb{R})} = \Theta(1).$$

(Символ Θ определён в п. 2.1.)

2.3. Замечание о доказательстве утверждения. В работе [4] квазиклассическая теория, связанная с дифференциальными операторами, коэффициенты которых имеют вырождение бесселева типа, сведена к стандартной ситуации без вырождения с помощью рассмотрения задачи в более сложном пространстве. К такой регуляризованной задаче можно затем применить метод канонического оператора Маслова, соответствующего или лагранжевому многообразию, или, в нашей ситуации, изотропному многообразию с комплексным ростком (определение дано в [7, с. 56]). Последний случай является предметом теории комплексного ростка Маслова.

В лагранжевом случае, используя результаты работы [8], можно получить выражение для канонического оператора в виде интеграла по естественно возникающей координате лагранжева многообразия. Асимптотику полученного интеграла можно затем представить в виде функции Бесселя при помощи формул из работы [9]. Подробное изложение описанной процедуры анонсировано в [4]. В настоящей работе сформулированное выше утверждение доказывается при помощи адаптации данного подхода к изотропному случаю.

2.4. Пример. Введём функцию

$$D(x_1,x_2) = (1 - x_1^2)(1 - a x_2^2),$$

где $a \neq 0$ – вещественный параметр. Рассмотрим пример, когда

$$D_1(x_1,x_2) = D_2(x_1,x_2) = D(x_1,x_2).$$

Для параметров $a = \pm 1$ графики функции $-D(x_1, x_2)$ представлены на рис. 1, а, рис. 1, б. При $a > 0$ функции D_1, D_2 удовлетворяют условиям (3) лишь вблизи множества $\{x_2 = 0\}$. Добавлением к D_1, D_2 гладкой функции, равной нулю в окрестности $\{x_2 = 0\}$, можно добиться выполнения условий (3). При такой модификации оператора его асимптотическая собственная функция, локализованная в окрестности $\{x_2 = 0\}$, не изменится. В нашем примере $b_1 = -1$, $b_2 = 1$, $t(x_1) = (\pi + 2\arcsin x_1)/4$, $T = \pi$, $\widetilde{t}(x_1) = (\arccos x_1)/2$, $X_1(t) = -\cos 2t$.

Уравнение (6), которое принимает вид

$$\dot{z}_2 = 2\sin^2(2t)w_2, \quad \dot{w}_2 = 2az_2, \tag{12}$$

исключая переменную z_2, представим в виде уравнения Матьё $\ddot{w}_2 = 4a\sin^2(2t)w_2$. Известно (см., например, [10, с. 206]), что для выполнения условия $|\operatorname{tr} R| < 2$ необходимо, чтобы $a < 0$. На рис. 2 изображён график зависимости $\operatorname{tr} R$ от параметра a.

(а) (б)

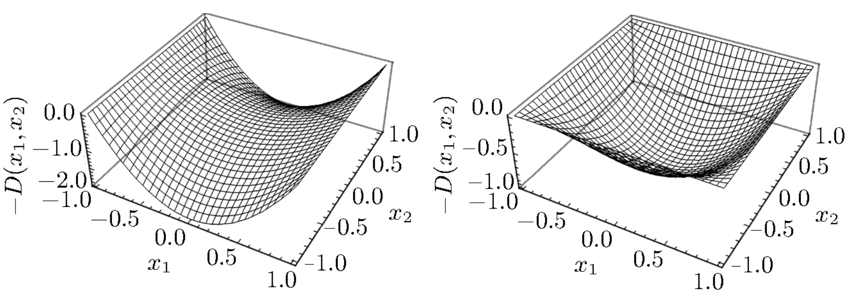

Рис. 1. Графики функции $-D(x_1, x_2)$ при $a = -1$ (а) и при $a = 1$ (б).

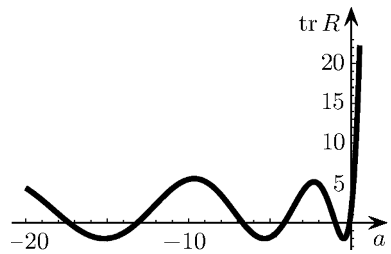

Рис. 2. График зависимости величины $\operatorname{tr} R$ от параметра a.

Положим далее $a = -4$. Тогда $\operatorname{tr} R \approx 0.416935$. Функции $Z_2(t)$, $W_2(t)$ определены как решения системы (12) с начальными условиями $Z_2(0) \approx -0.112821$, $W_2(0) = 1$. Тогда $\operatorname{Im}(W_2 Z_2^{-1}(0)) \approx 8.86362$ и условие положительности (9) выполнено. Вычисления дают $\beta = \operatorname{Arg} Z_2(T) - \operatorname{Arg} Z_2(0) \approx 7.64397$.

В качестве примера положим далее $h = 0.05$. Точки асимптотического спектра $E_{n,\nu}$ изображены на рис. 3, а. По вертикальной оси отложен номер n. Большие точки соответствуют значению $\nu = 0$, по горизонтали точки следуют друг за другом в порядке увеличения параметра ν. Для $n = 20$, $\nu = 0$ (в этом случае $E_{20,0} \approx 1.1139$) на рис. 3, б представлен график асимптотической собственной функции $\Psi_{n,\nu}$.

(а) (б)

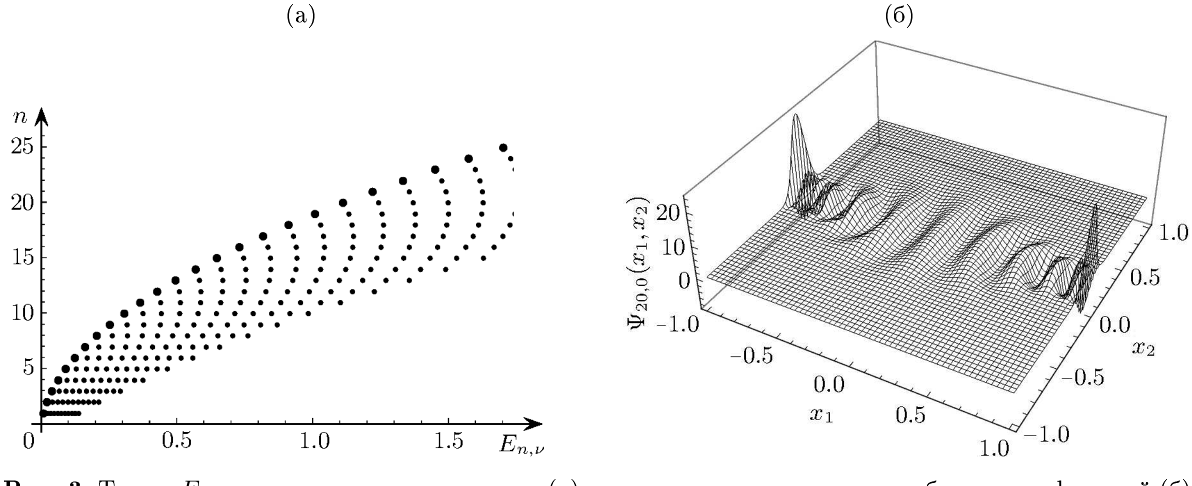

Рис. 3. Точки $E_{n,\nu}$ асимптотического спектра (а) и одна из асимптотических собственных функций (б).

3. Формулировка в виде спектральной задачи для квазиклассического ПДО.

3.1. Символ оператора и гамильтониан. Оператор $\widehat{L}$ можно рассматривать как квазиклассический псевдодифференциальный оператор с вейлевским символом $L(x,p,h)$, который с точностью до $O(h^2)$ представляется функцией $H(x,p) = H(x_1,x_2,p_1,p_2)$:

$$\widehat{L} = L\biggl(\overset{2}{x}, \frac{-ih\overset{1}{\nabla} - ih\overset{3}{\nabla}}{2}, h\biggr), \quad L(x,p,h) = H(x,p) + O(h^2),$$

$$H(x,p) = D_1(x_1,x_2)p_1^2 + D_2(x_1,x_2)p_2^2. \tag{13}$$

Разложим функции D_1, D_2 по формуле Тейлора по координате x_2, учитывая при этом условия (3) на эти функции. Введём коэффициенты разложения $D_{10}(x_1)$, $D_{20}(x_1)$, $D_{12}(x_1)$:

$$D_1(x_1,x_2) = D_{10}(x_1) + \frac{x_2^2}{2}D_{12}(x_1) + O(x_2^3), \quad D_2(x_1,x_2) = D_{20}(x_1) + O(x_2),$$

$$D_{i0}(x_1) > 0 \quad \text{при} \quad b_1 < x_1 < b_2, \quad D_{i0}(b_s) = 0, \quad D_{12}(b_s) = 0,$$
$$D_{i0}'(b_s) \neq 0, \quad s = 1,2, \quad i = 1,2.$$

3.2. Быстроубывающие асимптотики. Мы рассматриваем асимптотики, локализованные в окрестности множества $\{x_2 = 0\}$. Согласно [7] такого вида асимптотики можно рассматривать, когда асимптотическая собственная функция в обычной ситуации без учёта фокальных точек является комбинацией функций вида

$$\Psi(x_1,x_2,h) = A(x_1, x_2/\sqrt{h})\exp((i/h)(S(x_1) + P_2(x_1)x_2 + G(x_1)x_2^2)),$$

где S, P_2 – вещественнозначные, а A, G – комплекснозначные функции, причём $\operatorname{Im} G > 0$. Последнее неравенство делает функцию Ψ убывающей как гауссова экспонента при $x_2^2/h \to \to \infty$.

Геометрический объект, соответствующий такого вида функциям, – периодическая траектория (одномерное изотропное многообразие) гамильтоновой системы с гамильтонианом $H(x,p)$ в фазовом пространстве (x,p). Проекция траектории на конфигурационное пространство (пространство с координатами x) определяет множество, вне которого функция Ψ является быстроубывающей. В нашем случае таким множеством является отрезок $[b_1,b_2] \times \times \{0\}$. При этом функции S и P_2 являются соответственно действием и второй импульсной координатой на этой траектории, выраженными через координату x_1.

Для того чтобы периодической траектории соответствовали асимптотические собственные функции необходимо, чтобы она была орбитально устойчива в линейном приближении. Обычно мы имеем семейство периодических траекторий, параметризованных полной энергией (значением функции Гамильтона). Из этого семейства выбираются траектории, устойчивые в линейном приближении. Проквантовав их, мы получаем дискретный набор орбитально устойчивых в линейном приближении траекторий, которым соответствует серия асимптотических собственных функций.

В нашей задаче гамильтониан по импульсной переменной p однороден со степенью 2. Поэтому все траектории указанного семейства получаются из одной траектории заменой времени и растяжением по переменной p. В результате все траектории одновременно либо устойчивы, либо неустойчивы.

3.3. Каустики, соответствующие границе. Известно, что в фазовом пространстве траектория гамильтоновой системы над точками $(b_s,0)$, $s = 1,2$, уходит на бесконечность по импульсным координатам за конечное время. При этом говорят, что возникает *сильная каустика*. От неё можно избавиться с помощью рассмотрения задачи на большем фазовом пространстве (см. [4]). С точки зрения траектории гамильтоновой системы результат выражается в добавлении точки $p = \infty$. При этом траектория становится периодической.

4. Квантование устойчивых траекторий гамильтоновой системы.

4.1. Система Гамильтона. Система Гамильтона с гамильтонианом $H(p,x)$ имеет вид

$$\dot{x}_1 = 2p_1 D_1(x_1,x_2), \quad \dot{p}_1 = -p_1^2 \frac{\partial D_1}{\partial x_1}(x_1,x_2) - p_2^2 \frac{\partial D_2}{\partial x_1}(x_1,x_2),$$

$$\dot{x}_2 = 2p_2 D_2(x_1,x_2), \quad \dot{p}_2 = -p_1^2 \frac{\partial D_1}{\partial x_2}(x_1,x_2) - p_2^2 \frac{\partial D_2}{\partial x_2}(x_1,x_2). \tag{14}$$

Подпространство с координатами $x_2 = p_2 = 0$ является инвариантным по отношению к данной системе. На это подпространство система ограничивается как система Гамильтона с приведённым гамильтонианом $\mathcal{H}(x_1,p_1) = H(x_1,0,p_1,0)$:

$$\mathcal{H}(x_1,p_1) = D_{10}(x_1)p_1^2, \quad \dot{x}_1 = 2D_{10}(x_1)p_1, \quad \dot{p}_1 = -D_{10}'(x_1)p_1^2. \tag{15}$$

Траектории системы (15) над точками $(b_s,0)$, $s=1,2$, уходят на бесконечность по переменной p_1 за конечное время. Эта система инвариантна относительно замены $(x_1,p_1,t) \mapsto (x_1,-p_1,-t)$, где t – независимая переменная (время). Мы будем склеивать над точками $(b_s,0)$, $s=1,2$, две траектории, симметричные относительно отражения $(x_1,p_1) \mapsto (x_1,-p_1)$. При этом будем считать, что точка склейки имеет координаты $(x_1,p_1) = (b_s,\infty)$, $s=1,2$. Далее там, где точки склейки могут быть естественным образом учтены, мы будем обращаться с такими склеенными траекториями как с обычными.

Пара $(X_1(t),P_1(t))$, где функция $X_1(t)$ определена в п. 2.2, а функция $P_1(t)$ определяется равенством $P_1(t) = \dot{X}_1(t)/(2D_{10}(X_1(t)))$, является периодическим решением системы (15) с периодом T, определённым в (5). Вектор-функция $(X_1(t),0,P_1(t),0)$ представляет собой решение системы (14). Гамильтониан $\mathcal{H}$ однороден по p_1 со степенью 2. Это позволяет вложить решение $(X_1(t),0,P_1(t),0)$ в зависящее от параметра $E>0$ семейство $T(E)$-периодических решений $(X(t,E),P(t,E))$ такое, что

$$H(X(t,E),P(t,E)) = \mathcal{H}(X_1(t,E),P_1(t,E)) = E, \quad X_2(t,E) = P_2(t,E) = 0,$$

$$X(t,E) = X(\sqrt{E}t,1), \quad P(t,E) = \sqrt{E}P(\sqrt{E}t,1), \quad T(1) = \sqrt{E}T(E).$$

Решение $(X_1(t),0,P_1(t),0)$ соответствует значению $E=1$. При каждом E имеем

$$\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \{X(t,E)\} = [b_1,b_2]\times\{0\}.$$

Введём обозначение для замкнутой кривой $\mathbb{R}^4_{xp} \supset \Lambda(E) = \{(X(t,E),P(t,E))\} \cong \mathbb{S}^1$ и для её накрывающей $\Lambda_C(E) \cong \mathbb{R}$. Параметр $t\in\mathbb{R}$ является координатой на $\Lambda_C(E)$ с координатными функциями $X(t,E)$, $P(t,E)$. На $\Lambda(E)$ лежат две точки, для которых $p_1 = \infty$. На $\Lambda_C(E)$ такие точки образуют счётное множество.

4.2. Система в вариациях. Рассмотрим систему в вариациях для пары неизвестных вектор-функций $w(t)$ и $z(t)$, каждая из которых принимает значения из $\mathbb{C}^2$:

$$\dot{z} = H_{px}z + H_{pp}w, \quad \dot{w} = -H_{xx}z - H_{xp}w. \tag{16}$$

Здесь матричные функции $H_{px}(x,p)$, $H_{pp}(x,p)$, $H_{xx}(x,p)$, $H_{xp}(x,p)$ состоят из вторых производных:

$$H_{xx} = \begin{pmatrix} H_{x_1x_1} & H_{x_1x_2} \\ H_{x_2x_1} & H_{x_2x_2} \end{pmatrix}, \quad H_{pp} = \begin{pmatrix} H_{p_1p_1} & H_{p_1p_2} \\ H_{p_2p_1} & H_{p_2p_2} \end{pmatrix},$$

$$H_{xp} = \begin{pmatrix} H_{x_1p_1} & H_{x_1p_2} \\ H_{x_2p_1} & H_{x_2p_2} \end{pmatrix}, \quad H_{px} = H_{xp}^{\mathrm{т}} = \begin{pmatrix} H_{p_1x_1} & H_{p_1x_2} \\ H_{p_2x_1} & H_{p_2x_2} \end{pmatrix},$$

и в их аргументы производится подстановка $X(t,E)$, $P(t,E)$. Таким образом, система (16) задаёт семейство систем, зависящее от параметра E. Запишем эту систему в явном виде:

$$\dot z = \begin{pmatrix} 2D'_{10}(X_1(t,E))P_1(t,E) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 2D_{10}(X_1(t,E)) & 0 \\ 0 & 2D_{20}(X_1(t,E)) \end{pmatrix} w,$$

$$\dot w = -\begin{pmatrix} D''_{10}(X_1(t,E)) & 0 \\ 0 & D_{12}(X_1(t,E))P_1^2(t,E) \end{pmatrix} z - \begin{pmatrix} 2D'_{10}(X_1(t,E))P_1(t,E) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w.$$

Пусть векторная функция $(z(t),w(t))$ – некоторое её решение при $E=1$. Тогда вектор $(z(\sqrt{E}t),\sqrt{E}w(\sqrt{E}t))$ является решением этой системы при произвольном $E>0$.

4.3. Редуцированная система в вариациях. Система в вариациях распадается на две системы для (z_1,w_1) и для (z_2,w_2). Для координат (z_2,w_2) система имеет вид

$$\dot z_2 = 2D_{20}(X_1(t,E))w_2, \quad \dot w_2 = -D_{12}(X_1(t,E))P_1^2(t,E)z_2 \tag{17}$$

и при $E=1$ совпадает с системой (6).

Рассмотрим решения $(\widetilde z_2(t,E),\widetilde w_2(t,E))$, $(\widetilde{\widetilde z}_2(t,E),\widetilde{\widetilde w}_2(t,E))$ системы (17) такие, что

$$\widetilde z_2(0,E)=1, \quad \widetilde w_2(0,E)=0, \quad \widetilde{\widetilde z}_2(0,E)=0, \quad \widetilde{\widetilde w}_2(0,E)=1.$$

Эти семейства решений, зависящие от параметра E, выражаются через решения, соответствующие значению $E=1$, следующим образом:

$$\widetilde z_2(t,E)=\widetilde z_2(\sqrt{E}t,1), \quad \widetilde w_2(t,E)=\sqrt{E}\widetilde w_2(\sqrt{E}t,1),$$

$$\widetilde{\widetilde z}_2(t,E)=\frac{1}{\sqrt{E}}\widetilde{\widetilde z}_2(\sqrt{E}t,1), \quad \widetilde{\widetilde w}_2(t,E)=\widetilde{\widetilde w}_2(\sqrt{E}t,1).$$

При $E=1$ эти решения введены выше: $\widetilde z_2(t)=\widetilde z_2(t,1)$, $\widetilde w_2(t)=\widetilde w_2(t,1)$, $\widetilde{\widetilde z}_2(t)=\widetilde{\widetilde z}_2(t,1)$, $\widetilde{\widetilde w}_2(t)=\widetilde{\widetilde w}_2(t,1)$.

4.4. Устойчивость траектории. Согласно [7] для существования асимптотических собственных функций, соответствующих периодической траектории, необходима орбитальная устойчивость периодической траектории в линейном приближении, т.е. линеаризация соответствующего ей отображения Пуанкаре, ограниченного на поверхность уровня $\{H=E\}$, должна иметь норму, не превышающую единицу. Как сказано выше, все замкнутые кривые $\Lambda(E)$ устойчивы или неустойчивы одновременно. Таким образом, существование асимптотических функций обусловлено конкретным видом функций D_{10}, D_{20}, D_{12}, входящих в условие задачи.

Поставим более сильное условие устойчивости. Будем требовать *сильную устойчивость* траекторий. По определению это означает, что линеаризованные отображения Пуанкаре, ограниченные на поверхность уровня $\{H=E\}$, которые всегда являются симплектическими отображениями, не имеют близких симплектических отображений с нормой, большей единицы. Невыполнение этого условия приводит к таким усложнениям, как вырожденность асимптотического спектра в главном приближении, что требует рассмотрения поправок к нему. Случай сильной устойчивости является более простым и с точки зрения топологии в пространстве линейных симплектических отображений: для него отображения, соответствующие по описанному выше правилу сильно устойчивым замкнутым кривым, образуют в этом пространстве открытое множество. В общем случае структура этого множества исследована в работе [11].

Введём симплектическую матрицу монодромии, зависящую от параметра E:

$$R(E)=\begin{pmatrix} \widetilde z_2(T(E),E) & \widetilde{\widetilde z}_2(T(E),E) \\ \widetilde w_2(T(E),E) & \widetilde{\widetilde w}_2(T(E),E) \end{pmatrix}.$$

Её собственные значения λ_1, λ_2 не зависят от E, поскольку её характеристический многочлен от E не зависит. Из симплектичности матрицы $R(E)$ следует равенство $\lambda_1\lambda_2=1$. Матрица $R=R(1)$ определена равенством (7).

Условие сильной устойчивости равносильно следующему свойству: собственные значения λ_1, λ_2 лежат на единичной окружности в комплексной плоскости и отличны от ± 1. Эквивалентно, $|\operatorname{tr} R(E)| < 2$. Очевидно, что это свойство также не зависит от E. Поэтому можно положить $E = 1$ и получить неравенство (8).

Если последнее неравенство выполнено, то возможно представление $\lambda_{1,2} = \exp(\pm i\beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq \pi k$, $k \in \mathbb{N}$. При $E = 1$ выше были определены решения Флоке $Z_2(t)$, $W_2(t)$ с показателем β. При остальных E введём следующие решения Флоке с показателем β:

$$Z_2(t, E) = Z_2(\sqrt{E}t), \quad W_2(t, E) = \sqrt{E} W_2(\sqrt{E}t). \tag{18}$$

Известно, что (при фиксированном E) величина $-2i(W_2\overline{Z}_2 - Z_2\overline{W}_2)$ принимает вещественное ненулевое значение, не зависящее от t. Очевидно, что знак этой величины не зависит от E. В теории комплексного ростка требуется выполнение условия $-2i(W_2\overline{Z}_2 - Z_2\overline{W}_2) > 0$, которое вследствие равенства $4|Z_2|^2 \operatorname{Im} W_2 Z_2^{-1} = -2i(W_2\overline{Z}_2 - Z_2\overline{W}_2)$ эквивалентно условию положительности из (9). Таким образом, имеем

$$(Z_2(t + T(E), E), W_2(t + T(E), E)) = (\exp(i\beta) Z_2(t, E) \exp(i\beta) W_2(t, E)),$$

$$4|Z_2|^2 \operatorname{Im} W_2 Z_2^{-1} \equiv -2i(W_2\overline{Z}_2 - Z_2\overline{W}_2) > 0.$$

Функция $\operatorname{Arg} Z_2(t, E) = \operatorname{Arg} Z_2(\sqrt{E}t)$ – непрерывная ветвь аргумента не обращающейся в нуль комплекснозначной функции $Z_2(t, E)$. Число β в п. 2.2 было выбрано так, что

$$\beta = \operatorname{Arg} Z_2(T(E), E) - \operatorname{Arg} Z_2(0, E) = \operatorname{Arg} Z_2(T) - \operatorname{Arg} Z_2(0).$$

4.5. Условие квантования. Согласно общей теории при каждом значении параметра h из семейства устойчивых периодических траекторий выделяется дискретное множество тех траекторий, которые удовлетворяют условию квантования. В общем виде это условие записывается следующим образом (см. [7, с. 215]):

$$\frac{1}{2\pi h} \oint\limits_{\Lambda(E)} p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 = \frac{\beta}{4\pi} + \frac{1}{2} + n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n = O\left(\frac{1}{h}\right).$$

В приведённой формуле слагаемое $1/2$ равно разделённому на 4 индексу Маслова кривой $\Lambda(E)$, рассматриваемой в плоскости (x_1, p_1) (согласно [12] этот индекс равен 2). Интеграл по $\Lambda(E)$ от формы $p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2$ равен

$$\oint\limits_{\Lambda(E)} p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 = \int\limits_0^{T(E)} P_1(t, E)\dot{X}_1(t, E)\,dt = 2ET(E) = 2\sqrt{E}T(1).$$

Поэтому условие квантования принимает вид

$$\frac{ET(E)}{\pi h} = \frac{\beta}{4\pi} + \frac{1}{2} + n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n = O\left(\frac{1}{h}\right). \tag{19}$$

Из семейства траекторий выбираются те, которые удовлетворяют этому условию, а именно те, которые соответствуют следующим значениям параметра E:

$$E(n, h) = \left(\frac{\pi h}{T(1)}\left(\frac{\beta}{4\pi} + \frac{1}{2} + n\right)\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n = O\left(\frac{1}{h}\right).$$

Серия асимптотических собственных значений, соответствующая проквантованному семейству периодических сильно устойчивых траекторий, принимает вид (см. [7, с. 218])

$$E_{n,\nu}(h) = E(n, h) + \frac{h\beta\nu}{T(E(n, h))}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n = O\left(\frac{1}{h}\right), \quad \nu \in \mathbb{Z}_+, \quad \nu = O(1).$$

Последнее выражение эквивалентно выражению (10) для серии асимптотических собственных значений.

Далее мы будем заниматься построением асимптотических собственных функций.

5. Вспомогательные конструкции.

5.1. Карты и разбиение единицы, симметричные относительно отражения. Пусть выбраны значения h и n. Положим $E = E(n,h)$. Кривая $\Lambda(E)$ симметрична относительно отображения плоскости $\mathrm{Ref}\,(x_1,p_1) = (x_1,-p_1)$. Введём функцию $g = \mathrm{Ref}\,|_{\Lambda(E)}$.

Пусть $t_1^*, t_2^* \in \Lambda(E)$ – две точки такие, что $X(t_s^*) = (b_s, 0)$, $s = 1,2$. Покроем кривую $\Lambda(E)$ двумя областями U_1, U_2 такими, что $t_s^* \in U_s$, $g(U_s) = U_s$, $s = 1,2$. Введём разбиение единицы, подчинённое данному покрытию, которое реализуется функциями $e_1(t)$, $e_2(t)$ с носителями в U_1 и U_2 такими, что $e_s = e_s \circ g$, $s = 1,2$.

5.2. Индексы, обращение координатной функции. На кривой $\Lambda(E)$ определена ориентация, совпадающая с направлением гамильтоновой системы. Поэтому локально можно говорить об одной точке из $\Lambda(E)$, стоящей перед (или после) другой точкой из $\Lambda(E)$.

Выберем начальную точку $t^0 \in \Lambda(E)$ такую, что $t^0 \neq t_1^*$, $t^0 \neq t_2^*$. Пусть γ_s, $s = 1,2$, – произвольный путь, соединяющий точки t^0 и t_s^*. Введём полуцелые числа m_1, m_2 равенством $2m_s = \mathrm{Ind}\,(\gamma_s \bigcup \{t_s^* \to t_s^* - 0\}) + \mathrm{Ind}\,(\gamma_s \bigcup \{t_s^* \to t_s^* + 0\})$, где $\mathrm{Ind}\,(\gamma_s \bigcup \{t_s^* \to t_s^* - 0\})$ (соответственно $\mathrm{Ind}\,(\gamma_s \bigcup \{t_s^* \to t_s^* + 0\})$) – индекс Маслова пути, получающегося объединением пути γ_s и кратчайшего пути, соединяющего точку t_s^* и близкую к ней точку перед (соответственно после) t_s^*. Таким образом, m_s – среднее значение индексов Маслова двух областей, разделённых особой точкой t_s^*. Известно (см. [13]), что

$$\mathrm{Ind}\,(\gamma_s \bigcup \{t_s^* \to t_s^* - 0\}) + 1/2 = m_s = \mathrm{Ind}\,(\gamma_s \bigcup \{t_s^* \to t_s^* + 0\}) - 1/2.$$

Для каждого $s = 1,2$ выберем произвольным образом ветвь обратной к $X_1(t)$ функции $t_s(x_1)$, принимающую значения в U_s. Введём также число σ_s, равное -1, если $t_s(x_1)$ принимает значения, лежащие перед t_s^*, и равное 1, если $t_s(x_1)$ принимает значения, лежащие после t_s^*. Таким образом, $\sigma_s = \mathrm{sign}\,(t_s(x_1) - t_s^*)$ при $b_1 < x_1 < b_2$.

Рассмотрим пример. Пусть

$$X_1(0) = b_1, \quad t_1^* = 0, \quad t_2^* = \frac{T(E)}{2}, \quad t^0 = +0, \tag{20}$$

γ_1 – путь нулевой длины, γ_2 – кратчайший путь по направлению гамильтоновой системы. Пусть функции $t_1(x_1)$, $t_2(x_1)$ принимают значения в точках $t_1^* \leqslant t \leqslant t_2^*$. Тогда

$$t_1(x_1) = t_2(x_1) = \frac{t(x_1)}{\sqrt{E}}, \quad m_1 = -\frac{1}{2}, \quad m_2 = \frac{1}{2}, \quad \sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = -1. \tag{21}$$

5.3. Вспомогательные функции. Далее для удобства будем пользоваться накрытием $\Lambda_C(E)$. Поднимем на него точку t^0 произвольным образом. Кривые γ_1, γ_2 и точки t_1^*, t_2^* будем рассматривать как кривые и точки на $\Lambda_C(E)$, которые по поднятию точки t^0 определяются однозначным образом. Также однозначно определены поднятия областей U_1, U_2 и функций e_1, e_2.

Пусть $\nu \in \mathbb{Z}_+$. Введём вспомогательные числа и функции

$$A\biggl(t, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\biggr) = \frac{\exp(-\frac{i}{2}\,\mathrm{Arg}\,Z_2(t,E))}{\sqrt{|Z_2(t,E)|}} \exp\biggl(i\frac{t\beta\nu}{T(E)} + \frac{i}{2} W_2 Z_2^{-1}(t,E)\frac{x_2^2}{h}\biggr)(\overline{Z}_2(t,E))^{\nu} \times$$

$$\times (\mathrm{Im}\, W_2 Z_2^{-1}(t,E))^{\nu/2} H_\nu\biggl((\mathrm{Im}\, W_2 Z_2^{-1}(t,E))^{1/2}\frac{x_2}{\sqrt{h}}\biggr),$$

$$A_s\biggl(t, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\biggr) = e_s(t) A\biggl(t, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\biggr), \quad \tau(t) = \int\limits_{t^0}^{t} P(t,E)\dot{X}(t,E)\,dt = 2E(t - t^0),$$

$$\tau_s^* = \tau(t_s^*), \quad \widetilde{\tau}_s(x_1) = |\tau(t_s(x_1)) - \tau(t_s^*)|, \quad s = 1,2. \tag{22}$$

Функция A зависит от вещественного параметра E и от целого неотрицательного параметра ν.

Лемма 1. *Выполняются равенства*

$$\begin{pmatrix} X_1(t_s^*+t,E) \\ P_1(t_s^*+t,E) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1(t_s^*-t,E) \\ -P_1(t_s^*-t,E) \end{pmatrix}, \quad e_s(t_s^*+t) = e_s(t_s^*-t).$$

Доказательство. Подстановкой в уравнение (15) непосредственно проверяется, что векторные функции, стоящие в обеих частях первого равенства, являются решениями уравнения (15). Первое равенство следует из определения введённой склейки траекторий в точках $(x_1,p_1)=(b_s,\infty)$, соответствующих значению параметра $t=0$.

Последнее равенство следует из определения функций e_1, e_2. Лемма доказана.

Лемма 2. *Выполняются равенства*

$$|Z_2(t_s^*-t,E)| = |Z_2(t_s^*+t,E)|,$$

$$\operatorname{Arg} Z_2(t_s^*+t,E) - \operatorname{Arg} Z_2(t_s^*,E) = \operatorname{Arg} Z_2(t_s^*,E) - \operatorname{Arg} Z_2(t_s^*-t,E),$$

$$iW_2Z_2^{-1}(t_s^*-t,E) = \overline{iW_2Z_2^{-1}(t_s^*+t,E)}, \quad \operatorname{Im} W_2Z_2^{-1}(t_s^*-t,E) = \operatorname{Im} W_2Z_2^{-1}(t_s^*+t,E).$$

Доказательство. Прямой подстановкой проверяется, что пара функций

$$(Z_2(2t_s^*-t,E), -W_2(2t_s^*-t,E))$$

является решением системы (17). Это решение является решением Флоке с показателем $-\beta$. Пара комплексно-сопряжённых функций $(\overline{Z}_2(t,E),\overline{W}_2(t,E))$ также является решением Флоке системы (17) с вещественными коэффициентами, соответствующим показателю $-\beta$. Из единственности решения Флоке с показателем $-\beta\neq\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, с точностью до умножения на постоянную и неравенства нулю $Z_2(t,E)$ следует (в определённых выше векторных функциях сделаем замену $t\mapsto t+t_s^*$), что

$$\overline{Z}_2(t_s^*,E)\begin{pmatrix} Z_2(t_s^*-t,E) \\ -W_2(t_s^*-t,E) \end{pmatrix} = Z_2(t_s^*,E)\begin{pmatrix} \overline{Z}_2(t_s^*+t,E) \\ \overline{W}_2(t_s^*+t,E) \end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы.

Лемма 3. *Выполняются равенства*

$$A_s\biggl(t_s^*+|t-t_s^*|,\frac{x_2}{\sqrt{h}}\biggr) + A_s\biggl(t_s^*-|t-t_s^*|,\frac{x_2}{\sqrt{h}}\biggr) = A_s\biggl(t,\frac{x_2}{\sqrt{h}}\biggr) + A_s\biggl(2t_s^*-t,\frac{x_2}{\sqrt{h}}\biggr) =$$

$$= e_s(t)|Z_2(t,E)|^{\nu-1/2}(\operatorname{Im} W_2Z_2^{-1}(t,E))^{\nu/2}H_\nu\biggl((\operatorname{Im} W_2Z_2^{-1}(t,E))^{1/2}\frac{x_2}{\sqrt{h}}\biggr)\times$$

$$\times\exp\biggl(-i\biggl(\nu+\frac{1}{2}\biggr)\operatorname{Arg} Z_2(t_s^*,E)+\frac{it_s^*\beta\nu}{T(E)}\biggr)\times$$

$$\times 2\operatorname{Re}\biggl[\exp\biggl(-i\biggl(\nu+\frac{1}{2}\biggr)(\operatorname{Arg} Z_2(t,E)-\operatorname{Arg} Z_2(t_s^*,E))+\frac{i(t-t_s^*)\beta\nu}{T(E)}+\frac{i}{2}W_2Z_2^{-1}(t,E)\frac{x_2^2}{h}\biggr)\biggr],$$

$$A_s\biggl(t_s^*+|t-t_s^*|,\frac{x_2}{\sqrt{h}}\biggr) - A_s\biggl(t_s^*-|t-t_s^*|,\frac{x_2}{\sqrt{h}}\biggr) = \sigma_s\biggl(A_s\biggl(t,\frac{x_2}{\sqrt{h}}\biggr) - A_s\biggl(2t_s^*-t,\frac{x_2}{\sqrt{h}}\biggr)\biggr) =$$

$$= e_s(t)|Z_2(t,E)|^{\nu-1/2}(\operatorname{Im} W_2Z_2^{-1}(t,E))^{\nu/2}H_\nu\biggl((\operatorname{Im} W_2Z_2^{-1}(t,E))^{1/2}\frac{x_2}{\sqrt{h}}\biggr)\times$$

$$\times\exp\biggl(-i\biggl(\nu+\frac{1}{2}\biggr)\operatorname{Arg} Z_2(t_s^*,E)+\frac{it_s^*\beta\nu}{T(E)}\biggr)\times$$

$$\times 2i\sigma_s\operatorname{Im}\biggl[\exp\biggl(-i\biggl(\nu+\frac{1}{2}\biggr)(\operatorname{Arg} Z_2(t,E)-\operatorname{Arg} Z_2(t_s^*,E))+\frac{i(t-t_s^*)\beta\nu}{T(E)}+\frac{i}{2}W_2Z_2^{-1}(t,E)\frac{x_2^2}{h}\biggr)\biggr].$$

Доказательство. Сначала следует записать действие операторов Re, Im на их аргументы в виде комбинации аргументов с их комплексными сопряжениями, затем воспользоваться леммой 1 и леммой 2, в которых нужно сделать замену $t \mapsto t - t_s^*$. Лемма доказана.

Для рассмотренного выше примера, т.е. при выполнении соотношений (20), (21), можно взять

$$\operatorname{Arg} Z_2(t_1^*, E) = 0, \quad \operatorname{Arg} Z_2(t_2^*, E) = \beta/2, \quad e_s(t_s(x_1)) = f_s(x_1), \quad s = 1, 2,$$
$$\tau_1^* = 0, \quad \tau_2^* = ET(E), \quad \widetilde{\tau}_1 = 2\sqrt{E}t(x_1), \quad \widetilde{\tau}_2 = 2\sqrt{E}\,\widetilde{t}(x_1). \tag{23}$$

6. Асимптотика спектральной задачи.

6.1. Канонический оператор в случае лагранжевой кривой. Рассмотрим кривую $\Lambda(E)$ как лагранжеву кривую, вложенную в двумерное пространство (x_1, p_1). Для каждой функции $a(t)$ на этой кривой введём локализованные функции $a_s(t) = a(t)e_s(t)$, $s = 1, 2$. Пусть $y_s(t, E) = 2\sqrt{|X_1(t, E) - b_s|}$, $s = 1, 2$. Канонический оператор, соответствующий кривой $\Lambda(E)$, на которой функция действия представлена линейной функцией $\tau(t)$, определяется следующим выражением (см. [13]):

$$[K_{\Lambda(E)}a](x_1) = \sum_{s=1,2} \exp\biggl(-\frac{i\pi m_s}{2} + \frac{i\tau_s^*}{h}\biggr)\biggl(\frac{\pi\widetilde{\tau}_s(x_1)}{hy_s(t_s(x_1), E)}\biggr)^{1/2} \times$$
$$\times \sum_{q=\pm1}\biggl[J_0\biggl(\frac{\widetilde{\tau}_s(x_1)}{h}\biggr) + (-1)^{(q-1)/2} iJ_1\biggl(\frac{\widetilde{\tau}_s(x_1)}{h}\biggr)\biggr]\frac{a_s(t_s^* + q|t_s(x_1) - t_s^*|)}{|\dot{y}_s(t_s^* + q|t_s(x_1) - t_s^*|, E)|^{1/2}}. \tag{24}$$

6.2. Асимптотические собственные функции. Имеем

$$y_s(t, E)|\dot{y}_s(t, E)| = \frac{1}{2}\biggl|\frac{d}{dt}y_s^2(t, E)\biggr| = 2|\dot{X}_1(t, E)| = 4\sqrt{ED_{10}(X_1(t, E))}.$$

Воспользовавшись симметрией $X(t^* + t, E) = X(t^* - t, E)$, получим

$$y_s(t_s(x_1), E)|\dot{y}_s(t_s^* + q|t_s(x_1) - t_s^*|, E)| = 4\sqrt{ED_{10}(x_1)}.$$

Подставив в выражение для канонического оператора (24) в качестве функции $a(t)$ функцию $A_s(t, x_2/\sqrt{h})$, зависящую также от $x_2/\sqrt{h}$, будем иметь

$$\biggl[K_{\Lambda(E)}A_s\biggl(t, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\biggr)\biggr](x_1) = \sum_{s=1,2}\exp\biggl(-\frac{i\pi m_s}{2} + \frac{i\tau_s^*}{h}\biggr)\biggl(\frac{\pi\widetilde{\tau}_s(x_1)}{4h\sqrt{ED_{10}(x_1)}}\biggr)^{1/2} \times$$
$$\times \biggl[\biggl(J_0\biggl(\frac{\widetilde{\tau}_s(x_1)}{h}\biggr) + iJ_1\biggl(\frac{\widetilde{\tau}_s(x_1)}{h}\biggr)\biggr)A_s\biggl(t_s^* + |t_s(x_1) - t_s^*|, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\biggr) +$$
$$+ \biggl(J_0\biggl(\frac{\widetilde{\tau}_s(x_1)}{h}\biggr) - iJ_1\biggl(\frac{\widetilde{\tau}_s(x_1)}{h}\biggr)\biggr)A_s\biggl(t_s^* - |t_s(x_1) - t_s^*|, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\biggr)\biggr]. \tag{25}$$

Данное выражение определяет асимптотическую собственную функцию. Такое её определение путём подстановки функции $A_s(t, x_2/\sqrt{h})$ в аргумент канонического оператора (24) не является строго обоснованным. Обоснование приводится ниже.

Раскроем в представлении (25) скобки, содержащие линейные комбинации функций Бесселя J_0, J_1, и приведём затем подобные члены относительно этих функций:

$$\biggl[K_{\Lambda(E)}A_s\biggl(t, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\biggr)\biggr](x_1) = \sum_{s=1,2}\exp\biggl(-\frac{i\pi m_s}{2} + \frac{i\tau_s^*}{h}\biggr)\biggl(\frac{\pi\widetilde{\tau}_s(x_1)}{4h\sqrt{ED_{10}(x_1)}}\biggr)^{1/2} \times$$

$$\times\left[J_0\left(\frac{\widetilde{\tau}_s(x_1)}{h}\right)\left(A_s\left(t_s^*+|t_s(x_1)-t_s^*|,\frac{x_2}{\sqrt{h}}\right)+A_s\left(t_s^*-|t_s(x_1)-t_s^*|,\frac{x_2}{\sqrt{h}}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+iJ_1\left(\frac{\widetilde{\tau}_s(x_1)}{h}\right)\left(A_s\left(t_s^*+|t_s(x_1)-t_s^*|,\frac{x_2}{\sqrt{h}}\right)-A_s\left(t_s^*-|t_s(x_1)-t_s^*|,\frac{x_2}{\sqrt{h}}\right)\right)\right].$$

Воспользовавшись леммой 3, придём к представлению

$$\left[K_{\Lambda(E)}A_s\left(t,\frac{x_2}{\sqrt{h}}\right)\right](x_1)=\sum_{s=1,2}\exp\left(-\frac{i\pi m_s}{2}+\frac{i\tau_s^*}{h}\right)\left(\frac{\pi\widetilde{\tau}_s(x_1)}{4h\sqrt{ED_{10}(x_1)}}\right)^{1/2}\times$$

$$\times|Z_2(t_s(x_1),E)|^{\nu-1/2}(\operatorname{Im}W_2Z_2^{-1}(t_s(x_1),E))^{\nu/2}e_s(t_s(x_1))\times$$

$$\times H_\nu\left((\operatorname{Im}W_2Z_2^{-1}(t_s(x_1),E))^{1/2}\frac{x_2}{\sqrt{h}}\right)\exp\left(-i\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Arg}Z_2(t_s^*,E)+\frac{it_s^*\beta\nu}{T(E)}\right)\times$$

$$\times\left[2J_0\left(\frac{\widetilde{\tau}_s(x_1)}{h}\right)\operatorname{Re}\left(\exp\left(-i\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(\operatorname{Arg}Z_2(t_s(x_1),E)-\operatorname{Arg}Z_2(t_s^*,E))+\frac{i(t_s(x_1)-t_s^*)\beta\nu}{T(E)}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{i}{2}W_2Z_2^{-1}(t_s(x_1),E)\frac{x_2^2}{h}\right)\right)-2\sigma_sJ_1\left(\frac{\widetilde{\tau}_s(x_1)}{h}\right)\operatorname{Im}\left(\exp\left(-i\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(\operatorname{Arg}Z_2(t_s(x_1),E)-\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\operatorname{Arg}Z_2(t_s^*,E))+\frac{i(t_s(x_1)-t_s^*)\beta\nu}{T(E)}+\frac{i}{2}W_2Z_2^{-1}(t_s(x_1),E)\frac{x_2^2}{h}\right)\right)\right].$$

Выражение (11) получается после подстановок (18)–(21), (23) и умножения на число $\exp(-i\pi/4)E^{(1-\nu)/4}$.

6.3. Асимптотические собственные функции в форме ВКБ вдали от границы. Рассмотрим собственные функции на подмножествах, в которых значения координаты x_2 отделены от граничных значений b_1, b_2. Такие подмножества не содержат каустики, соответствующие границе, и на них асимптотические собственные функции допускают представление в форме ВКБ (см. [7, с. 223])

$$\sum_{s=1,2}\frac{\exp(-i\pi m_s/2+i\tau_s^*/h)}{\sqrt{2}(ED_{10}(x_1))^{1/4}}\left[\exp\left(-i\frac{\pi}{4}+i\frac{\widetilde{\tau}_s(x_1)}{h}\right)A_s\left(t_s^*+|t_s(x_1)-t_s^*|,\frac{x_2}{\sqrt{h}}\right)+\right.$$

$$\left.+\exp\left(i\frac{\pi}{4}-i\frac{\widetilde{\tau}_s(x_1)}{h}\right)A_s\left(t_s^*-|t_s(x_1)-t_s^*|,\frac{x_2}{\sqrt{h}}\right)\right].\qquad(26)$$

Множители $m_s\pm1/2$, $s=1,2$, в показателях экспонент соответствуют индексам Маслова четырёх областей на $\Lambda_C(E)$, каждая из которых расположена по одну из сторон точек t_s^*, $s=1,2$.

Если в представлении (25) воспользоваться для функций Бесселя асимптотическими формулами

$$J_0(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\left(\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)+O(z^{-1})\right),\quad J_1(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\left(\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)+O(z^{-1})\right)$$

при $z\to+\infty$, то получим с точностью до $O(h)$ выражение (26). Обратно, начав с представления (26), получим выражение (25), справедливое вдали от граничных точек b_1, b_2. Это выражение распространим затем на весь отрезок $[b_1,b_2]$. Тем самым, если не стремиться к строгости рассуждений, можно получить справедливое на всём отрезке $[b_1,b_2]$ выражение для асимптотической собственной функции.

7. Технические подробности доказательства.

7.1. Устранение каустики, связанной с вырождением на границе. Пусть $M = [b_1, b_2] \times \mathbb{R}$. Следуя [4], рассмотрим многообразие $\widetilde{M} \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ вместе с проекцией $\lambda\colon \widetilde{M} \to M$.

Для некоторых положительных чисел $\varepsilon_s < |b_2 - b_1|$, $s = 1, 2$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > |b_2 - b_1|$, введём множества $V_1 = [b_1, b_1 + \varepsilon_1) \times \mathbb{R}$, $V_2 = (b_2 - \varepsilon_2, b_2] \times \mathbb{R}$, покрывающие множество $[b_1, b_2] \times \mathbb{R}$. Определим линейные функции $z_1(x_1) = x_1 - b_1$, $z_2(x_1) = b_2 - x_1$ и обратные к ним $z_1^{-1}(\zeta) = b_1 + \zeta$, $z_2^{-1}(\zeta) = b_2 - \zeta$.

Рассмотрим три карты, покрывающие $\widetilde{M} = \lambda^{-1}(M)$. Карта $\lambda^{-1}((b_1, b_2) \times \mathbb{R})$ имеет координаты (ϕ, x_1, x_2), $\phi \in \mathbb{S}^1$. При каждом $s = 1, 2$ карта $\lambda^{-1}(V_s)$ имеет координаты (y_1, y_2, x_2), $|y|^2 < 4\varepsilon_s$. Проекция в этих картах записывается в виде

$$\lambda(\phi, x_1, x_2) = (x_1, x_2), \quad \lambda(y_1, y_2, x_2) = \left(z_s^{-1}\left(\frac{y_1^2 + y_2^2}{4}\right), x_2\right).$$

На пересечении $\lambda^{-1}((b_1, b_2) \times \mathbb{R}) \bigcap \lambda^{-1}(V_s)$ отображения склейки принимают вид

$$g(\phi, x_1, x_2) = (2\sqrt{z_s(x_1)}\cos\phi, 2\sqrt{z_s(x_1)}\sin\phi, x_2),$$

$$g^{-1}(y_1, y_2, x_2) = (\operatorname{Arg}(y_1 + iy_2), z_s^{-1}(\frac{y_1^2 + y_2^2}{4}, x_2)).$$

Рассматриваются функции на многообразии $\widetilde{M}$, постоянные на множествах вида $\lambda^{-1}(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in M$, которые можно интерпретировать как функции на M, и дифференциальные операторы, для которых множество таких функций является инвариантным. Согласно [4] для оператора $\widehat{L}$, заданного формулой (13), существует дифференциальный оператор $\widetilde{\widehat{L}}$, который сохраняет множество функций, постоянных на множествах вида $\lambda^{-1}(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in M$, и действует на такие функции как оператор $\widehat{L}$, если их рассматривать как функции на M.

Введём фазовое пространство в виде кокасательного расслоения $T^*\widetilde{M}$ с двумя типами координат: $(\phi, x_1, x_2; p_\phi, p_1, p_2)$ и $(y_1, y_2, x_2; \xi_1, \xi_2, p_2)$, где p_ϕ, p_1, p_2, ξ_1, ξ_2 – импульсные координаты. Теперь при рассмотрении оператора $\widetilde{\widehat{L}}$ не возникает каустик, связанных с обращением в бесконечность импульсных переменных, и можно обычным методом построить его асимптотические собственные функции, требуя при этом, чтобы они были постоянными на множествах вида $\lambda^{-1}(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in M$.

На многообразии $\widetilde{M}$ можно ввести действие группы $U(1)$ сдвигами по углу ϕ (в других координатах – вращениями в плоскости (y_1, y_2) на соответствующий угол). Тогда множества вида $\lambda^{-1}(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in M$, являются орбитами этого действия. Это действие переносится и на многообразие $T^*\widetilde{M}$.

Для построения асимптотических собственных функций, быстроубывающих при отдалении от одномерной кривой в M, мы используем изложенный в [7] метод комплексного ростка Маслова. Основным объектом здесь является изотропное многообразие с комплексным ростком, инвариантное относительно гамильтонова потока. Инвариантное относительно гамильтонова потока изотропное многообразие в $T^*\widetilde{M}$ с комплексным ростком должно принадлежать множеству $\{p_\phi = 0\} \subset T^*\widetilde{M}$ (в координатах $(y_1, y_2, x_2; \xi_1, \xi_2, p_2)$ это множество задаётся уравнением $y_1\xi_2 - y_2\xi_1 = 0$) и быть инвариантным (вместе с комплексным ростком) относительно введённого выше $U(1)$-действия.

В нашем случае изотропное многообразие лежит в подпространстве $\{x_2 = p_2 = 0\}$ и имеет размерность 2, а комплексный росток представляет собой прямую сумму комплексифицированной касательной плоскости к изотропному многообразию и прямой в комплексифицированной плоскости (x_2, p_2).

7.2. Изотропное многообразие с комплексным ростком. Далее мы рассмотрим канонический оператор на изотропном многообразии с комплексным ростком следующего вида. Пусть изотропное многообразие с координатами $\psi\in\mathbb{S}^1$, t в шестимерном пространстве с координатами $(y_1,y_2,x_2,\xi_1,\xi_2,p_2)$ задано функциями $Y(t,\psi)=(Y_1(t,\psi),Y_2(t,\psi))$, $X_2(t,\psi)$, $\Xi(t,\psi)=(\Xi_1(t,\psi),\Xi_2(t,\psi))$, $P_2(t,\psi)$ вида

$$Y(t,\psi)=\eta(t)\boldsymbol{n}(\psi),\quad \Xi(t,\psi)=\rho(t)\boldsymbol{n}(\psi),\quad X_2(t,\psi)=0,\quad P_2(t,\psi)=0,$$

где $\boldsymbol{n}(\psi)=(\cos\psi,\sin\psi)$, а η, ρ – некоторые функции со свойствами $\eta(-t)=-\eta(t)$, $\rho(t)>0$, $\dot\eta(t)>0$. Пусть на изотропном многообразии задан комплексный росток, натянутый на векторы

$$\frac{\partial}{\partial t}(Y_1(t,\psi),Y_2(t,\psi),0,\Xi_1(t,\psi),\Xi_2(t,\psi),0),$$

$$\frac{\partial}{\partial\psi}(Y_1(t,\psi),Y_2(t,\psi),0,\Xi_1(t,\psi),\Xi_2(t,\psi),0),\quad (0,0,Z_2(t),0,0,W_2(t)),$$

где $Z_2(t)$, $W_2(t)$ – некоторые комплекснозначные функции.

Если выбрать подходящим образом функции η, ρ (а именно так, чтобы при всех t выполнялось тождество $D_{10}((\eta(t))^2/4)(2\rho(t)/\eta(t))^2=E)$, а в качестве $Z_2(t)$, $W_2(t)$ взять функции, определённые равенством (18), то под действием проекции λ на множестве $\lambda^{-1}(M)$ данное изотропное многообразие с комплексным ростком перейдёт в кривую, определённую траекторией системы (14), с инвариантным относительно этой системы комплексным ростком над ней.

Якобиан $\det[\partial(Y_1,Y_2)/\partial(t,\psi)]=\eta(t)\dot\eta(t)$ равен нулю в точке $t=0$, поэтому канонический оператор, согласно общей теории, должен быть записан в виде интеграла по крайней мере по одной из импульсных переменных ξ_1 или ξ_2.

7.3. Канонический оператор в виде интеграла по импульсным переменным. Рассмотрим функции вида

$$A\biggl(t,\frac{x_2}{\sqrt h}\biggr)=a\biggl(t,\frac{x_2}{\sqrt h}\biggr)\exp\biggl(\frac{i}{2}W_2(t)Z_2^{-1}(t)\frac{x_2^2}{h}\biggr),\quad \operatorname{Im}W_2(t)Z_2^{-1}(t)>0,\quad Z_2(t)\neq 0, \tag{27}$$

где a – некоторая гладкая комплекснозначная функция. Функция A, определённая в (22), является функцией такого вида. Введём также функцию действия $\tau(t)$ такую, что

$$d\tau(t)=\Xi_1(t,\psi)\,dY_1(t,\psi)+\Xi_2(t,\psi)\,dY_2(t,\psi)=\rho(t)\,d\eta(t).$$

Для построения канонического оператора в виде интеграла по импульсным переменным обобщим формулы, полученные в работе [14]. На изотропном многообразии введём карты $\Omega_1=\{\psi\in(-3\pi/8,3\pi/8)\}$, $\Omega_3=\{\psi\in(5\pi/8,11\pi/8)\}$ с координатами (y_1,ξ_2) и карты $\Omega_2=\{\psi\in(\pi/8,7\pi/8)\}$, $\Omega_4=\{\psi\in(9\pi/8,15\pi/8)\}$ с координатами (ξ_1,y_2). Введём также подчинённое покрытию многообразия этими картами разбиение единицы

$$e_1(\psi)+e_2(\psi)+e_3(\psi)+e_4(\psi)=1.$$

Асимптотическая собственная функция $u(y,x_2,h)$ оператора $\widetilde{\widetilde{L}}$ в окрестности точки $y_1=y_2=x_2=0$ строится методом комплексного ростка Маслова и имеет следующий вид (см. [7, с. 223]):

$$\frac{\sqrt{2\pi h}}{\exp(i\pi/4)}u(y,x_2,h)=\sum_{j=1,3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\biggl|\det\frac{\partial(y_1,\xi_2)}{\partial(t,\psi)}\biggr|^{-1/2}A\biggl(t,\frac{x_2}{\sqrt h}\biggr)\times$$

$$\times e_j(\psi)\exp\biggl(\frac{i}{h}(\tau(t)-Y_2(t,\psi)\Xi_2(t,\psi)+y_2\xi_2)\biggr)\bigg|_{\substack{t=t(y_1,\xi_2)\\ \psi=\psi(y_1,\xi_2)}}d\xi_2+\sum_{j=2,4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\biggl|\det\frac{\partial(\xi_1,y_2)}{\partial(t,\psi)}\biggr|^{-1/2}A\biggl(t,\frac{x_2}{\sqrt h}\biggr)\times$$

$$\times\, e_j(\psi)\exp\left(\frac{i}{h}(\tau(t) - Y_1(t,\psi)\Xi_1(t,\psi) + y_1\xi_1)\right)\Bigg|_{\substack{t=t(\xi_1,y_2)\\ \psi=\psi(\xi_1,y_2)}} d\xi_1, \tag{28}$$

где пары функций $t(y_1,\xi_2)$, $\psi(y_1,\xi_2)$ и $t(\xi_1,y_2)$, $\psi(\xi_1,y_2)$ являются обращениями функций $Y(t,\psi)$, $\Xi(t,\psi)$ в областях Ω_j, $j=1,2,3,4$.

7.4. Канонический оператор в виде интеграла по окружности. Сделаем замену переменной $\xi_2 \mapsto \psi$ в первом интеграле в (28), которая задаётся функцией $\xi_2 = \Xi_2(t(y_1,\xi_2),\psi)$, и замену переменной $\xi_1 \mapsto \psi$ во втором интеграле, которая задаётся функцией

$$\xi_1 = \Xi_1(t(\xi_1,y_2),\psi).$$

Вычислим матрицы Якоби обратных отображений и нужные нам частные производные:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial t}{\partial y_1} & \dfrac{\partial t}{\partial \xi_2} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \psi}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial(y_1,\xi_2)}{\partial(t,\psi)}\right)^{-1} = \left(\det\frac{\partial(y_1,\xi_2)}{\partial(t,\psi)}\right)^{-1}\begin{pmatrix} \rho\cos\psi & \eta\sin\psi \\ -\dot\rho\sin\psi & \dot\eta\cos\psi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial t}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial t}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial \psi}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial(\xi_1,y_2)}{\partial(t,\psi)}\right)^{-1} = \left(\det\frac{\partial(\xi_1,y_2)}{\partial(t,\psi)}\right)^{-1}\begin{pmatrix} \eta\cos\psi & \rho\sin\psi \\ -\dot\eta\sin\psi & \dot\rho\cos\psi \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi_2} = \dot\eta\cos\psi\left(\det\frac{\partial(y_1,\xi_2)}{\partial(t,\psi)}\right)^{-1} = \frac{\dot\eta\cos\psi}{\dot\eta\rho\cos^2\psi + \eta\dot\rho\sin^2\psi},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1} = -\dot\eta\sin\psi\left(\det\frac{\partial(\xi_1,y_2)}{\partial(t,\psi)}\right)^{-1} = \frac{\dot\eta\sin\psi}{\eta\dot\rho\cos^2\psi + \dot\eta\rho\sin^2\psi}.$$

Пусть η^{-1} – обратная к η функция. После замены переменных получаем

$$\frac{\sqrt{2\pi h}}{\exp(i\pi/4)}u(y,x_2,h) = \sum_{j=1,3}\int_0^{2\pi} A\left(t,\frac{x_2}{\sqrt h}\right)e_j(\psi)\frac{|\dot\eta(t)\rho(t)\cos^2\psi + \eta(t)\dot\rho(t)\sin^2\psi|^{1/2}}{|\dot\eta(t)\cos\psi|}\times$$

$$\times\exp\left(\frac{i}{h}(\tau(t) + \rho(t)(\langle y,\boldsymbol n(\psi)\rangle - \eta(t)))\right)\bigg|_{t=\eta^{-1}(y_1/\cos\psi)} d\psi + \sum_{j=2,4}\int_0^{2\pi} A\left(t,\frac{x_2}{\sqrt h}\right)e_j(\psi)\times$$

$$\times\frac{|\eta(t)\dot\rho(t)\cos^2\psi + \dot\eta(t)\rho(t)\sin^2\psi|^{1/2}}{|\dot\eta(t)\sin\psi|}\exp\left(\frac{i}{h}(\tau(t)+\rho(t)(\langle y,\boldsymbol n(\psi)\rangle-\eta(t)))\right)\bigg|_{t=\eta^{-1}(y_2/\sin\psi)} d\psi. \tag{29}$$

Рассмотрим первый интеграл в (29). Запишем фазовую функцию, стоящую в аргументе экспоненты в следующем виде:

$$\widetilde\Phi(y_1,y_2,\psi) = \tau\left(\eta^{-1}\left(\frac{y_1}{\cos\psi}\right)\right) + \rho\left(\eta^{-1}\left(\frac{y_1}{\cos\psi}\right)\right)\left(\langle y,\boldsymbol n(\psi)\rangle - \frac{y_1}{\cos\psi}\right).$$

Введём функцию

$$\Phi(y_1,y_2,\psi) = \tau(\eta^{-1}(\langle y,\boldsymbol n(\psi)\rangle)).$$

Множества нулей у функций $\partial\widetilde\Phi/\partial\psi$ и $\partial\Phi/\partial\psi$ в пространстве (y_1,y_2,ψ) одинаковы и совпадают с множеством

$$C_\Phi = \{(y_1,y_2,\psi) : y = \alpha\boldsymbol n(\psi),\quad \alpha\in\mathbb R\} \subset \mathbb R^2\times\mathbb S^1.$$

Более того, разность функций $\widetilde{\Phi}$ и Φ на множестве C_Φ имеет нуль второго порядка. Чтобы это увидеть, достаточно воспользоваться формулой Тейлора:

$$\tau(\eta^{-1}(\langle y, \boldsymbol{n}(\psi)\rangle)) = \tau\biggl(\eta^{-1}\biggl(\frac{y_1}{\cos\psi}\biggr)\biggr) + \rho\biggl(\eta^{-1}\biggl(\frac{y_1}{\cos\psi}\biggr)\biggr)\biggl(\langle y, \boldsymbol{n}(\psi)\rangle - \frac{y_1}{\cos\psi}\biggr) +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\dot\rho(\eta^{-1}(y_1/\cos\psi))}{\dot\eta(\eta^{-1}(y_1/\cos\psi))}\biggl(\langle y, \boldsymbol{n}(\psi)\rangle - \frac{y_1}{\cos\psi}\biggr)^2 + O\biggl(\biggl(\langle y, \boldsymbol{n}(\psi)\rangle - \frac{y_1}{\cos\psi}\biggr)^3\biggr).$$

Из теории осциллирующих интегралов следует, что существует замена переменной в интеграле, приводящая его к осциллирующему интегралу с фазовой функцией Φ. Пусть отношение для двух функций $f_1 \overset{C_\Phi}{=} f_2$ означает их равенство на множестве C_Φ, т.е. $f_1|_{C_\Phi} = f_2|_{C_\Phi}$ (если функции зависят также от параметра $x_2/\sqrt{h}$, то равенство понимается в смысле равенства при всех фиксированных его значениях). Введём для амплитудной функции в первом интеграле в (29) обозначение

$$\widetilde{a}\biggl(y_1, y_2, \psi, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\biggr) = A\biggl(t, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\biggr)e_j(\psi)\frac{|\dot\eta(t)\rho(t)\cos^2\psi + \eta(t)\dot\rho(t)\sin^2\psi|^{1/2}}{|\dot\eta(t)\cos\psi|}\bigg|_{t=\eta^{-1}(y_1/\cos\psi)}.$$

Для некоторой функции $a(y_1, y_2, \psi, x_2/\sqrt{h})$ такой, что

$$a\biggl(y_1, y_2, \psi, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\biggr) \overset{C_\Phi}{=} \biggl|\det\frac{\partial(t, \psi, \Phi'_\psi)}{\partial(y_1, y_2, \psi)}\biggr|^{1/2}\biggl|\det\frac{\partial(t, \psi, \widetilde{\Phi}'_\psi)}{\partial(y_1, y_2, \psi)}\biggr|^{-1/2}\widetilde{a}\biggl(y_1, y_2, \psi, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\biggr), \tag{30}$$

где $t(y_1, y_2, \psi) = \eta^{-1}(\langle y, \boldsymbol{n}(\psi)\rangle)$, $\psi(y_1, y_2, \psi) = \psi$, верно равенство (см. [15, раздел 3.2])

$$\int_0^{2\pi}\widetilde{a}\biggl(y_1, y_2, \psi, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\biggr)\exp\biggl(\frac{i}{h}\widetilde{\Phi}(y_1, y_2, \psi)\biggr)\,d\psi = \int_0^{2\pi} a\biggl(y_1, y_2, \psi, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\biggr)\exp\biggl(\frac{i}{h}\Phi(y_1, y_2, \psi)\biggr)\,d\psi.$$

Вычислим в равенстве (30) отношение определителей, ограниченное на множество C_Φ. Преобразуем это отношение следующим образом:

$$\biggl(\det\frac{\partial(t, \psi, \widetilde{\Phi}'_\psi)}{\partial(y_1, y_2, \psi)}\biggr)^{-1}\det\frac{\partial(t, \psi, \Phi'_\psi)}{\partial(y_1, y_2, \psi)} =$$
$$= \biggl(\det\frac{\partial(t, \psi, \Phi'_\psi)}{\partial(y_1, y_2, \psi)} - \det\frac{\partial(t, \psi, (\Phi - \widetilde{\Phi})'_\psi)}{\partial(y_1, y_2, \psi)}\biggr)^{-1}\det\frac{\partial(t, \psi, \Phi'_\psi)}{\partial(y_1, y_2, \psi)} =$$
$$= \biggl(1 - \biggl(\det\frac{\partial(t, \psi, \Phi'_\psi)}{\partial(y_1, y_2, \psi)}\biggr)^{-1}\det\frac{\partial(t, \psi, (\Phi - \widetilde{\Phi})'_\psi)}{\partial(y_1, y_2, \psi)}\biggr)^{-1}. \tag{31}$$

Для частной производной Φ'_ψ верно равенство $\Phi'_\psi = \rho(\eta^{-1}(\langle y, \boldsymbol{n}(\psi)\rangle))\langle y, \boldsymbol{n}'(\psi)\rangle$. Один из определителей равен

$$\det\frac{\partial(t, \psi, \Phi'_\psi)}{\partial(y_1, y_2, \psi)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial t}{\partial y_1} & \dfrac{\partial t}{\partial y_2} & * \\ 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{\partial \Phi'_\psi}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \Phi'_\psi}{\partial y_2} & * \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial t}{\partial y_1} & \dfrac{\partial t}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial \Phi'_\psi}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \Phi'_\psi}{\partial y_2} \end{pmatrix} =$$
$$= -\det\begin{pmatrix} \dfrac{\cos\psi}{\dot\eta(\eta^{-1}(\langle y, \boldsymbol{n}(\psi)\rangle))} & \dfrac{\sin\psi}{\dot\eta(\eta^{-1}(\langle y, \boldsymbol{n}(\psi)\rangle))} \\ \rho(\eta^{-1}(\langle y, \boldsymbol{n}(\psi)\rangle))(-\sin\psi) & \rho(\eta^{-1}(\langle y, \boldsymbol{n}(\psi)\rangle))\cos\psi \end{pmatrix} = -\frac{\rho(\eta^{-1}(\langle y, \boldsymbol{n}(\psi)\rangle))}{\dot\eta(\eta^{-1}(\langle y, \boldsymbol{n}(\psi)\rangle))}.$$

Для разности функций

$$\Phi-\widetilde{\Phi}=\frac{1}{2}\frac{\dot\rho(\eta^{-1}(y_1/\cos\psi))}{\dot\eta(\eta^{-1}(y_1/\cos\psi))}\left(\langle y,\boldsymbol{n}(\psi)\rangle-\frac{y_1}{\cos\psi}\right)^2+O\left(\left(\langle y,\boldsymbol{n}(\psi)\rangle-\frac{y_1}{\cos\psi}\right)^3\right)$$

рассмотрим частную производную второго порядка на множестве C_Φ:

$$(\Phi-\widetilde{\Phi})''_{\psi y}\overset{C_\Phi}{=}\frac{\dot\rho(\eta^{-1}(y_1/\cos\psi))}{\dot\eta(\eta^{-1}(y_1/\cos\psi))}\left(\langle y,\boldsymbol{n}(\psi)\rangle-\frac{y_1}{\cos\psi}\right)'_\psi\left(\langle y,\boldsymbol{n}(\psi)\rangle-\frac{y_1}{\cos\psi}\right)'_y\overset{C_\Phi}{=}$$

$$\overset{C_\Phi}{=}\frac{\dot\rho(\eta^{-1}(\langle y,\boldsymbol{n}(\psi)\rangle))}{\dot\eta(\eta^{-1}(\langle y,\boldsymbol{n}(\psi)\rangle))}\left(-\frac{y_1\sin\psi}{\cos^2\psi}\right)\begin{pmatrix}-1/\cos\psi\\0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{n}(\psi)(\ldots)\overset{C_\Phi}{=}$$

$$\overset{C_\Phi}{=}\frac{\dot\rho(\eta^{-1}(\langle y,\boldsymbol{n}(\psi)\rangle))}{\dot\eta(\eta^{-1}(\langle y,\boldsymbol{n}(\psi)\rangle))}\langle y,\boldsymbol{n}(\psi)\rangle\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{n}(\psi)(\ldots).$$

На множестве C_Φ вычислим определитель

$$\det\frac{\partial(t,\psi,(\Phi-\widetilde{\Phi})'_\psi)}{\partial(y_1,y_2,\psi)}\overset{C_\Phi}{=}-\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial t}{\partial y_1}&\dfrac{\partial t}{\partial y_2}\\[2mm]\dfrac{\partial(\Phi-\widetilde{\Phi})'_\psi}{\partial y_1}&\dfrac{\partial(\Phi-\widetilde{\Phi})'_\psi}{\partial y_2}\end{pmatrix}\overset{C_\Phi}{=}\frac{\dot\rho(\eta^{-1}(\langle y,\boldsymbol{n}(\psi)\rangle))}{\dot\eta^2(\eta^{-1}(\langle y,\boldsymbol{n}(\psi)\rangle))}\langle y,\boldsymbol{n}(\psi)\rangle\frac{\sin^2\psi}{\cos^2\psi}.$$

Подставив результаты вычислений в равенство (31), получим отношение определителей в (30) на множестве C_Φ:

$$\left(\det\frac{\partial(t,\psi,\widetilde{\Phi}'_\psi)}{\partial(y_1,y_2,\psi)}\right)^{-1}\det\frac{\partial(t,\psi,\Phi'_\psi)}{\partial(y_1,y_2,\psi)}\overset{C_\Phi}{=}\left(1+\frac{\dot\rho(\eta^{-1}(\langle y,\boldsymbol{n}(\psi)\rangle))\langle y,\boldsymbol{n}(\psi)\rangle}{\dot\eta(\eta^{-1}(\langle y,\boldsymbol{n}(\psi)\rangle))\rho(\eta^{-1}(\langle y,\boldsymbol{n}(\psi)\rangle))}\frac{\sin^2\psi}{\cos^2\psi}\right)^{-1}.$$

Запишем соотношение (30) следующим образом:

$$a\left(y_1,y_2,\psi,\frac{x_2}{\sqrt h}\right)\overset{C_\Phi}{=}A\left(\eta^{-1}(\langle y,\boldsymbol{n}(\psi)\rangle),\frac{x_2}{\sqrt h}\right)e_j(\psi)\sqrt{\frac{\rho(\eta^{-1}(\langle y,\boldsymbol{n}(\psi)\rangle))}{|\dot\eta(\eta^{-1}(\langle y,\boldsymbol{n}(\psi)\rangle))|}}.$$

Получаем

$$\int\limits_0^{2\pi}\widetilde{a}\left(y,\psi,\frac{x_2}{\sqrt h}\right)\exp\left(\frac{i}{h}\widetilde{\Phi}(y,\psi)\right)d\psi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(a_0\left(y,\psi,\frac{x_2}{\sqrt h}\right)e_j(\psi)+a_1\left(y,\psi,\frac{x_2}{\sqrt h}\right)\right)\exp\left(\frac{i}{h}\Phi(y,\psi)\right)d\psi,$$

где a_1 – некоторая функция, удовлетворяющая отношению $a_1\overset{C_\Phi}{=}0$, и

$$a_0\left(y,\psi,\frac{x_2}{\sqrt h}\right)=A\left(\eta^{-1}(\langle y,\boldsymbol{n}(\psi)\rangle),\frac{x_2}{\sqrt h}\right)\sqrt{\frac{\rho(\eta^{-1}(\langle y,\boldsymbol{n}(\psi)\rangle))}{|\dot\eta(\eta^{-1}(\langle y,\boldsymbol{n}(\psi)\rangle))|}}.$$

При этом имеем стандартную оценку для интеграла

$$\int\limits_0^{2\pi}a_1\left(y,\psi,\frac{x_2}{\sqrt h}\right)\exp\left(\frac{i}{h}\Phi(y,\psi)\right)d\psi=O(h),\tag{32}$$

которая может быть доказана интегрированием по частям (см., например, рассуждения в [16, раздел 4.2]). Из вида функции A следует, что функции a_0 и a_0+a_1, а следовательно, и a_1, являются ограниченными по y и $x_2/\sqrt{h}$ вместе со всеми производными по переменным $x_2/\sqrt{h}$, y, ψ. Поскольку оценка (32) может быть доказана интегрированием по частям, из ограниченности функции a_1 вместе с производными следует, что оценка (32) является равномерной по переменным y, $x_2/\sqrt{h}$.

Такие же, как и проведённые выше, рассуждения справедливы и для второго интеграла в (29). В результате получаем

$$\frac{\sqrt{2\pi h}}{\exp(i\pi/4)}u(y,x_2,h)=\int\limits_0^{2\pi}a_0\biggl(y,\psi,\frac{x_2}{\sqrt{h}}\biggr)\exp\biggl(\frac{i}{h}\Phi(y,\psi)\biggr)\,d\psi+O(h). \tag{33}$$

7.5. Асимптотика интеграла в виде функций Бесселя. Для интеграла из равенства (33) воспользуемся асимптотикой, предложенной в работе [9] (чтобы привести интеграл из (33) к рассматриваемому в [9] типу нужно сделать замену $\psi=\operatorname{Arg}(y_1+iy_2)+\phi$, переводящую функцию $\langle y,\boldsymbol{n}(\psi)\rangle$ в $|y|\cos\phi$). Тогда будем иметь

$$u(y,x_2,h)=\frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{2\pi h}}\int\limits_0^{2\pi}a_0\biggl(y,\psi,\frac{x_2}{\sqrt{h}}\biggr)\exp\biggl(\frac{i}{h}\Phi(y,\psi)\biggr)\,d\psi=\sqrt{\frac{\pi F_{\mathrm{odd}}(|y|)}{2h|y|}}\times$$

$$\times\exp\biggl(\frac{i\pi}{4}+\frac{i}{h}F_{\mathrm{ev}}(|y|)\biggr)\biggl\{\biggl[J_0\biggl(\frac{F_{\mathrm{odd}}(|y|)}{h}\biggr)+iJ_1\biggl(\frac{F_{\mathrm{odd}}(|y|)}{h}\biggr)\biggr]\biggl(\frac{A(\eta^{-1}(|y|),x_2/\sqrt{h})}{\sqrt{|\dot\eta(\eta^{-1}(|y|))|}}+O(h)\biggr)+$$

$$+\biggl[J_0\biggl(\frac{F_{\mathrm{odd}}(|y|)}{h}\biggr)-iJ_1\biggl(\frac{F_{\mathrm{odd}}(|y|)}{h}\biggr)\biggr]\biggl(\frac{A(\eta^{-1}(-|y|),x_2/\sqrt{h})}{\sqrt{|\dot\eta(\eta^{-1}(-|y|))|}}+O(h)\biggr)\biggr\}, \tag{34}$$

где $2F_{\mathrm{ev}}(r)=\tau(\eta^{-1}(r))+\tau(\eta^{-1}(-r))$, $2F_{\mathrm{odd}}(r)=\tau(\eta^{-1}(r))-\tau(\eta^{-1}(-r))$. Полученная асимптотика инвариантна относительно вращения в плоскости (y_1,y_2). Если теперь положить

$$|y|=2\sqrt{z_s(x_1)},\quad \eta(t)=\operatorname{sign}(t)\cdot 2\sqrt{z_s(X_1(t,E))},\quad \tau(t)=2Et,$$

то функция (34) в окрестности точки $x_1=b_s$ с точностью до умножения на не зависящую от h постоянную совпадёт с формулой (24) для канонического оператора, соответствующего одномерной кривой в двумерном пространстве. Таким образом, асимптотика спектральной задачи может быть выражена через канонический оператор (24) на одномерной кривой в двумерном пространстве с аргументом, включающим зависимость от $x_2/\sqrt{h}$ вида (27).

Автор благодарен С. Ю. Доброхотову за постановку задачи и помощь в работе. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 16-11-10282).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Keller J.B., Rubinow S.I.* Asymptotic solution of eigenvalue problems // Annals of Physics. 1960. V. 9. P. 24–75.
2. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., 1972.
3. *Клевин А.И.* Асимптотические собственные функции типа “прыгающего мячика” двумерного оператора Шрёдингера с симметричным потенциалом // ТМФ. 2019. Т. 199. № 3. С. 429–444.
4. *Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е.* Униформизация уравнений с граничным вырождением бесселева типа и квазиклассические асимптотики // Мат. заметки. 2020. Т. 107. № 5. С. 780–786.
5. *Аникин А.Ю., Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Цветкова А.В.* Асимптотики собственных функций двумерного оператора $\nabla D(x)\nabla$, связанные с бильярдами с полужёсткими стенками, и захваченные береговые волны // Мат. заметки. 2019. Т. 105. № 5. С. 792–797.

6. *Назайкинский В.Е.* Канонический оператор Маслова на лагранжевых многообразиях в фазовом пространстве, соответствующем вырождающемуся на границе волновому уравнению // Мат. заметки. 2014. Т. 96. № 2. С. 261–276.
7. *Maslov V.P.* The Complex WKB Method for Nonlinear Equations I. Birkhäuser, Basel, 1994.
8. *Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Шафаревич А.И.* Новые интегральные представления канонического оператора Маслова в особых картах // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. № 2. С. 53–96.
9. *Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е.* Об асимптотике интеграла типа Бесселя, имеющего приложения в теории набега волн на берег // Мат. заметки. 2017. Т. 102. № 6. С. 828–835.
10. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. СПб, 2008.
11. *Гельфанд И.М., Лидский В.Б.* О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Успехи мат. наук. 1955. Т. 10. № 1(63). С. 3–40.
12. *Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е.* Нестандартные лагранжевы особенности и асимптотические собственные функции вырождающегося оператора $-\frac{d}{dx}D(x)\frac{d}{dx}$ // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 2019. Т. 306. С. 83–99.
13. *Аникин А.Ю., Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е.* Простые асимптотики обобщённого волнового уравнения с вырождающейся скоростью и их приложения в линейной задаче о набеге длинных волн на берег // Мат. заметки. 2018. Т. 104. № 4. С. 483–504.
14. *Доброхотов С.Ю., Макракис Г.Н., Назайкинский В.Е., Тудоровский Т.Я.* Новые формулы для канонического оператора Маслова в окрестности фокальных точек и каустик в двумерных квазиклассических асимптотиках // ТМФ. 2013. Т. 177. № 3. С. 355–386.
15. *Hörmander L.* Fourier integral operators. I // Acta Mathematica. 1971. V. 127. P. 79–183.
16. *Dobrokhotov S.Y., Makrakis G., Nazaikinskii V.E.* Fourier integrals and a new representation of Maslov's canonical operator near caustics // Amer. Math. Soc. Transl. 2014. V. 233. P. 95–115.

Институт проблем механики
им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 26.06.2020 г.
После доработки 24.09.2020 г.
Принята к публикации 11.12.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 2, с. 255–264

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.222+517.968.21

ПОЛНОТА АСИММЕТРИЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

© 2021 г. М. Ю. Кокурин

Устанавливается свойство полноты в пространстве $L_2(D)$, где D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, произведений всевозможных регулярных решений уравнения $\Delta u - \kappa^2 u = 0$, $\kappa \in \mathbb{R}_+ \bigcup i\mathbb{R}_-$, и фундаментальных решений этого уравнения с особенностями на прямой, не пересекающей $\overline{D}$. Результат используется при установлении единственности решения коэффициентной обратной задачи волновой томографии в непереопределённой постановке.

DOI: 10.31857/S0374064121020126

1. Постановка задачи и основной результат. Пусть $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ – некоторые семейства функций из $C^2(\overline{D})$, удовлетворяющих в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, уравнению $\Delta u - \kappa^2 u = 0$, где κ – постоянная, $\kappa \in \mathbb{R} \bigcup i\mathbb{R}$. В работе рассматривается вопрос о том, в каких случаях семейство всех попарных произведений

$$\pi(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) = \{u_1 u_2 : u_j \in \mathcal{H}_j, \quad j = 1, 2\}$$

образует полную систему в $L_2(D)$.

Обозначим $O_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leqslant r\}$. В частном случае $\kappa = 0$ для уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, справедливы следующие утверждения.

Предложение 1.1 [1; 2, с. 138]. *Семейство $\{u_1 u_2\}$, состоящее из попарных произведений гармонических в области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, функций $u_1, u_2 \in C^2(\overline{D})$, полно в пространстве $L_2(D)$.*

Предложение 1.2 [3, теорема 7.1]. *Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, точка $x_0 \in \partial D$ фиксирована и $\partial D \in C^\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что семейство $\{u_1 u_2\}$, состоящее из попарных произведений гармонических в области $D \subset \mathbb{R}^n$ и обращающихся в нуль на $\partial D \setminus O_\varepsilon(x_0)$ функций $u_1, u_2 \in C^2(\overline{D})$, полно в пространстве $L_2(D \setminus O_\delta(x_0))$.*

Утверждения такого типа широко используются при установлении единственности решений коэффициентных обратных задач для различных классов уравнений в частных производных [2]. Следуя [4–6], поясним роль утверждений типа предложений 1.1, 1.2 в этом круге вопросов. В работах [4, 5] М.М. Лаврентьев предложил подход к решению нелинейных коэффициентных обратных задач, позволяющий редуцировать такие задачи к линейным интегральным уравнениям. Подход использует преобразование Лапласа исследуемого уравнения по соответствующим переменным.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, обратную задачу волновой томографии ограниченной неоднородности набором точечных источников, расположенных вне этой неоднородности. Волновое поле $u(x;t) = u_y(x;t)$, возбуждаемое в момент $t = 0$ источником, находящимся в точке y, определяется решением задачи Коши

$$\frac{1}{c^2(x)} u_{tt}(x,t) = \Delta u(x,t) - \lambda^2 u(x,t) - \delta(x-y) g(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0;$$

$$u(x,0)|_{t<0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Здесь λ – заданное неотрицательное число, $c(x) > 0$ – скорость сигнала в точке $x \in \mathbb{R}^n$ и предполагается, что $c(x) \equiv c_0$ вне априори заданной ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$ с известной постоянной c_0, а значения $c(x)$ при $x \in D$ неизвестны. Для определённости функцию $c = c(x)$ считаем кусочно-непрерывной. Гладкая функция g удовлетворяет условиям

$$\int_0^\infty g(t)\,dt \neq 0; \quad |g(t)| \leqslant C_0 e^{-\beta t}, \quad \beta > 0, \quad t \geqslant 0.$$

Для отыскания $c(x)$, $x \in D$, рассеянное поле $u = u_y(x;t)$ измеряется при $t > 0$ в точках $x = z \in X$, где $X \subset \mathbb{R}^n$ – множество детекторов, $X \bigcap \overline{D} = \varnothing$. Будем считать, что в эксперименте зондирования используется множество источников $y \in Y$, $Y \bigcap \overline{D} = \varnothing$, $X \bigcap Y = \varnothing$. Для суммируемой функции $f = f(t)$, $t \geqslant 0$, определим преобразование Лапласа $\widetilde{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$. Будем считать, что все функции $u_y(x,t)$, $y \in Y$, и их производные по t до второго порядка включительно равномерно относительно $x \in X$ интегрируемы по t и, кроме того, $u_y(x,t) \to 0$, $y \in Y$, при $|x| \to \infty$ равномерно по $t > 0$. Необходимые для этого условия на функцию $c(x)$ можно оценить, исходя из результатов [7, гл. X; 8]. Обозначим

$$\xi(x) = \frac{1}{c^2(x)} - \frac{1}{c_0^2}, \quad x \in D,$$

и запишем уравнение (1.1) в виде

$$\Delta u - \frac{1}{c_0^2} u_{tt}(x,t) - \lambda^2 u(x,t) = \xi(x) u_{tt}(x,t) + \delta(x-y) g(t). \tag{1.2}$$

Функция c однозначно определяется по функции ξ, поэтому далее ограничимся отысканием $\xi(x)$ при $x \in D$. Нас будет интересовать единственность решения поставленной обратной задачи в зависимости от вида пространственного носителя данных $X \times Y$. Имея это в виду, обозначим рассматриваемую обратную задачу через $\{X, Y\}$.

Применяя к обеим частям уравнения (1.2) преобразование Лапласа по времени, получаем

$$\Delta \widetilde{u}_y(x,p) - \kappa^2(p) \widetilde{u}_y(x,p) = p^2 \xi(x) \widetilde{u}_y(x,p) + \widetilde{g}(p)\delta(x-y), \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash \{y\}, \tag{1.3}$$

$\kappa(p) = \sqrt{\lambda^2 + p^2/c_0^2}$. В силу сделанных предположений имеем $\widetilde{u}_y(x,p) \to 0$ при $|x| \to \infty$ для $y \in Y$, $p \geqslant 0$.

Обозначим через $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ множества соответственно положительных и отрицательных действительных чисел. Нам понадобится функция Грина уравнения

$$\Delta v(x) - \kappa^2 v(x) = -\delta(x - x'), \tag{1.4}$$

$\kappa \in \mathbb{R}_+ \bigcup i\mathbb{R}_-$, имеющая вид [9, с. 98]

$$G(x,x';\kappa) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \left(\frac{\kappa}{|x-x'|}\right)^{(n-2)/2} K_{(n-2)/2}(\kappa|x-x'|). \tag{1.5}$$

Здесь $K_\nu(z)$ – функция Макдональда [10, с. 196],

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(iz). \tag{1.6}$$

Если $\kappa > 0$, то функция (1.5) есть фундаментальное решение уравнения (1.4) с условием на бесконечности: $v(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$.

В случае $\kappa = -iq$, $q > 0$, функция (1.5) есть фундаментальное решение уравнения Гельмгольца $\Delta v(x) + q^2 v(x) = -\delta(x - x')$, описывающее волновое поле точечного источника, зависящего от времени по закону e^{iqt}. Указанное решение выделяется условием излучения на бесконечности

$$\lim_{r\to\infty} r^{(n-1)/2}\left|\frac{\partial v(x)}{\partial r} + iqv(x)\right| = 0, \quad \text{где} \quad r = |x|.$$

Из уравнения (1.3) следует равенство

$$\widetilde{u}_y(x,p) = p^2 \int\limits_D G(x,x';\kappa(p))\xi(x')\widetilde{u}_y(x',p)\,dx' + \widetilde{g}(p)G(x,y;\kappa(p)), \quad x \in \mathbb{R}^n\backslash\{y\}.$$

Отсюда получаем

$$\widetilde{u}_y(x,p) = p^4 \int\limits_D\int\limits_D G(x,x';\kappa(p))G(x',x'';\kappa(p))\widetilde{u}_y(x'',p)\xi(x')\,dx'\,dx'' +$$

$$+\, p^2\widetilde{g}(p)\int\limits_D G(x,x';\kappa(p))G(x',y;\kappa(p))\xi(x')\,dx' + \widetilde{g}(p)(x,y;\kappa(p)), \quad x \in X. \tag{1.7}$$

Деление обеих частей равенства (1.7) на $p^2\widetilde{g}(p)$ и затем переход к пределу при $p \to 0+$ приводит к линейному интегральному уравнению относительно искомой функции ξ:

$$\int\limits_D G(x,x';\lambda)G(y,x';\lambda)\xi(x')\,dx' = f(x,y), \quad (x,y) \in X \times Y. \tag{1.8}$$

Здесь

$$f(x,y) = \lim_{p\to 0+}\frac{\widetilde{u}_y(x,p) - \widetilde{g}(p)G(x,y;\kappa(p))}{\widetilde{g}(0)p^2}.$$

Таким образом, правая часть уравнения (1.8) вычисляется по данным наблюдения $\{u_y(x;t) : t > 0,\ x \in X,\ y \in Y\}$.

К уравнению (1.8) с $\lambda \in i\mathbb{R}_-$ сводятся также обратные задачи зондирования неоднородности точечными гармоническими по времени источниками с частотой $\omega \in (0, \omega_0]$ (см. подробнее в [11, с. 223; 12, § 3.1]). К аналогичному уравнению с заменой (1.5) функцией Грина в ограниченной области Ω сводится обратная задача зондирования неоднородного включения $D \subset \Omega$ [13].

Начиная с работы [5], значительное число публикаций было посвящено установлению условий, при которых уравнение (1.8) имеет не более одного решения (см. [2, 12]). Уравнение (1.8) имеет не более одного решения, например, если X, Y – открытые области на гиперплоскости, не пересекающей D, или на замкнутой гиперповерхности, содержащей множество D внутри себя. В этих случаях соответствующее (1.8) однородное уравнение эквивалентно равенству

$$\int\limits_D u_1(x')u_2(x')\xi(x')\,dx' = 0, \quad u_j \in \mathcal{H}_j, \quad j = 1, 2, \tag{1.9}$$

где $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ – семейство всех функций из $C^2(\overline{D})$, удовлетворяющих уравнению $\Delta u(x) - \lambda^2 u(x) = 0$, $x \in D$. Таким образом, полнота семейства $\pi(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ в $L_2(D)$ влечёт за собой равенство $\xi = 0$ п.в. Поэтому задача $\{X, Y\}$ имеет единственное решение.

В описанном случае размерность пространственного носителя данных $X \times Y$ в уравнении (1.8) равна $2(n-1)$, в то время как искомая функция ξ зависит от n переменных. Поскольку $2(n-1) > n$ при $n \geqslant 3$, рассматриваемая обратная задача относится к классу переопределённых, т.е. задач с завышенными требованиями к объёму входных данных. Эквивалентная трактовка указанной переопределённости заключается в том, что полнота семейства $\pi(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ в $L_2(D)$ вероятно может иметь место и при замене пространств $\mathcal{H}_j$ более узкими семействами. Напомним, что в предложениях 1.1, 1.2 классы $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ совпадают с множествами всех регулярных решений соответствующих уравнений, возможно, с наложением граничного условия. В настоящей работе рассмотрим асимметричный случай, когда один из классов $\mathcal{H}_j$ является по-прежнему семейством всех регулярных решений уравнения $\Delta u-\kappa^2u=0$ в $D\subset\mathbb{R}^n$, тогда как другой класс образован фундаментальными решениями этого уравнения с особенностями в точках прямой, не пересекающей $\overline{D}$. Хотя последний класс значительно уже класса всех регулярных решений, порождаемое ими семейство $\pi(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ попарных произведений сохраняет свойство полноты в $L_2(D)$.

Перейдём к строгой формулировке результата. Для $x\in\mathbb{R}^n$ обозначим $x=(\widehat{x},x_n)$, $\widehat{x}=(x_1,\ldots,x_{n-1})$. Определим прямую

$$\mathcal{L}=\{x\in\mathbb{R}^n:\widehat{x}=0,\quad x_n\in\mathbb{R}\}.$$

Пусть $D\subset\mathbb{R}^n$ – ограниченная область, замыкание которой не имеет общих точек с $\mathcal{L}$.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1.1. *Пусть $\kappa\in\mathbb{R}_+\bigcup i\mathbb{R}_-$ – фиксированное число. Тогда линейные комбинации функций семейства $\pi(\mathcal{H}_1^*,\mathcal{H}_2^*)$, где*

$$\mathcal{H}_1^*=\{u\in C^2(\overline{D}):\Delta u-\kappa^2u=0\ \ \text{в}\ \ D\},\quad \mathcal{H}_2^*=\{G(x,z;\kappa):z\in\mathcal{L}\},$$

плотны в пространстве $L_2(D)$.

В случае $\kappa=0$ утверждение теоремы 1.1 доказано в [14].

Доказательству теоремы 1.1 посвящены пп. 2, 3. В п. 4 обсуждается приложение этой теоремы к обратной задаче $\{X,Y\}$.

2. Вспомогательные построения. Обозначим $S_R^{n-2}=\{\widehat{x}\in\mathbb{R}^{n-1}:|\widehat{x}|=R\}$. Пусть $\{Y_{k,l}(\varphi):k=0,1,\ldots,\ \ l=\overline{1,d_k}\}$, $\varphi\in S_1^{n-2}$, – семейство ортонормированных в $L_2(S_1^{n-2})$ сферических функций, где [15, с. 160]

$$d_0=1,\quad d_1=n-1;\quad d_k=C^k_{n-2+k}-C^{k-2}_{n-4+k},\quad k\geqslant 2.$$

Введём в $\mathbb{R}^{n-1}=\{\widehat{x}\}$ сферические координаты $\rho\geqslant 0$, $\varphi\in S_1^{n-2}$, где $\rho=|\widehat{x}|$, $\varphi=\widehat{x}/|\widehat{x}|$. В угловых координатах $(\phi_1,\ldots,\phi_{n-3},\phi_{n-2})\in[0,\pi]^{n-3}\times[0,2\pi]$ вектор $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$ записывается в виде

$$\varphi_1=\cos\phi_1,\quad \varphi_2=\sin\phi_1\cos\phi_2,\quad\ldots$$
$$\ldots,\quad \varphi_{n-2}=\sin\phi_1\sin\phi_2\cdots\sin\phi_{n-3}\cos\phi_{n-2},\quad \varphi_{n-1}=\sin\phi_1\sin\phi_2\cdots\sin\phi_{n-3}\sin\phi_{n-2}.\quad (2.1)$$

Для доказательства теоремы 1.1 достаточно убедиться в том, что соотношение

$$\int\limits_D h(x)u(x)G(x,z;\kappa)\,dx=0\ \ \text{для любых}\ \ z\in\mathcal{L}\ \ \text{и всех}\ \ u\in C^2(\overline{D}),\quad \Delta u-\kappa^2u=0\ \ \text{в}\ \ D,\quad (2.2)$$

с $h\in L_2(D)$ влечёт за собой равенство $h=0$ п.в. в D.

Рассмотрим вначале случай $\kappa\in\mathbb{R}_+$. Уравнению $\Delta u-\kappa^2u=0$ удовлетворяет экспоненциальная функция $u(x)=u(\widehat{x},x_n)=e^{-i(\widehat{\lambda},\widehat{x})+\lambda_nx_n}$, где $\lambda_n^2=\kappa^2+|\widehat{\lambda}|^2$. Здесь и далее $(\widehat{\lambda},\widehat{x})=\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_{n-1}x_{n-1}$. Таким образом, из (1.5) и (2.2) следует, что при значении

$$\lambda_n=\sqrt{\kappa^2+|\widehat{\lambda}|^2}\qquad (2.3)$$

выполняется равенство

$$\int\limits_D\frac{h(x)e^{-i(\widehat{\lambda},\widehat{x})+\lambda_nx_n}K_{(n-2)/2}(\kappa\sqrt{|\widehat{x}|^2+(z_n-x_n)^2})}{(|\widehat{x}|^2+(z_n-x_n)^2)^{(n-2)/4}}\,dx=0\qquad (2.4)$$

для любого $z_n\in\mathbb{R}$ и всех $\widehat{\lambda}\in\mathbb{R}^{n-1}$.

Применим к левой части равенства (2.4) преобразование Фурье по переменной z_n. Согласно [16, с. 59] будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu z_n}\frac{K_{(n-2)/2}(\kappa\sqrt{|\widehat{x}|^2+(z_n-x_n)^2})}{(|\widehat{x}|^2+(z_n-x_n)^2)^{(n-2)/4}}\,dz_n = e^{-i\mu x_n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu u}\frac{K_{(n-2)/2}(\kappa\sqrt{|\widehat{x}|^2+u^2})}{(|\widehat{x}|^2+u^2)^{(n-2)/4}}\,du =$$

$$= 2e^{-i\mu x_n}\int_0^{\infty}\cos(\mu u)\frac{K_{(n-2)/2}(\kappa\sqrt{|\widehat{x}|^2+u^2})}{(|\widehat{x}|^2+u^2)^{(n-2)/4}}\,du =$$

$$= \sqrt{2\pi}e^{-i\mu x_n}\kappa^{-(n-2)/2}|\widehat{x}|^{-(n-3)/2}(\kappa^2+\mu^2)^{(n-3)/4}K_{(n-3)/2}(|\widehat{x}|\sqrt{\kappa^2+\mu^2}).$$

Поэтому из (2.2), (2.3) следует, что

$$\int_D h(\widehat{x},x_n)e^{-i(\widehat{\lambda},\widehat{x})+(\sqrt{\kappa^2+|\widehat{\lambda}|^2}-i\mu)x_n}|\widehat{x}|^{-(n-3)/2}K_{(n-3)/2}(|\widehat{x}|\sqrt{\kappa^2+\mu^2})\,d\widehat{x}\,dx_n = 0 \qquad (2.5)$$

для всех $\widehat{\lambda}\in\mathbb{R}^{n-1}$ и любого $\mu\in\mathbb{R}$. Нетрудно видеть, что функция в левой части равенства (2.5) аналитична по $\mu\in\mathbb{C}\backslash\{\pm i\kappa\}$ при каждом $\widehat{\lambda}\in\mathbb{R}^{n-1}$. Отсюда следует, что это равенство продолжается по аналитичности на все значения $\mu\in\mathbb{C}\backslash\{\pm i\kappa\}$.

Полагая в (2.5) $\mu = p - i\sqrt{\kappa^2+|\widehat{\lambda}|^2}$, $p\in\mathbb{R}$, получаем, что для всех $\widehat{\lambda}\in\mathbb{R}^{n-1}$ имеет место равенство

$$\int_D h(\widehat{x},x_n)e^{-ipx_n}e^{-i(\widehat{\lambda},\widehat{x})}|\widehat{x}|^{-(n-3)/2}K_{(n-3)/2}\left(|\widehat{x}|\sqrt{p^2-2pi\sqrt{\kappa^2+|\widehat{\lambda}|^2}-|\widehat{\lambda}|^2}\right)d\widehat{x}\,dx_n = 0. \qquad (2.6)$$

Рассмотрим преобразование Фурье в $\mathbb{R}^{n-1}$,

$$(\mathcal{F}f)(\widehat{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\widehat{x},\widehat{y})}f(\widehat{x})d\widehat{x}, \quad \widehat{y}\in\mathbb{R}^{n-1},$$

на функциях вида $f(\widehat{x}) = F(\rho)Y_{k,l}(\varphi)$, $\rho = |\widehat{x}|$, $\varphi = \widehat{x}/|\widehat{x}|$. Обозначим $r = |\widehat{y}|$, $\theta = \widehat{y}/|\widehat{y}|$. Угловые координаты точки $\theta\in S_1^{n-2}$ определяются формулами (2.1) с заменой в них φ на θ. Нам понадобится известное утверждение из [17, с. 83], которое ниже формулируется в виде, адаптированном к нашим обозначениям.

Лемма. *Пусть F – непрерывная финитная функция с компактным носителем в $(0,\infty)$. Тогда для $f(\widehat{x}) = F(\rho)Y_{k,l}(\varphi)$ справедливо равенство*

$$(\mathcal{F}f)(r,\theta) = (-i)^k(2\pi)^{(n-1)/2}r^{(3-n)/2}Y_{k,l}(\theta)\int_0^{\infty} J_{(n-3+2k)/2}(sr)F(s)s^{(n-1)/2}\,ds. \qquad (2.7)$$

Зафиксируем финитную на $\mathbb{R}_+$ функцию $\eta = \eta(s)$, $s\geqslant 0$, и сферическую функцию $Y_{k,l}$ для некоторых $k\geqslant 0$ и $1\leqslant l\leqslant d_k$. Умножим обе части равенства (2.6) на $\eta(|\widehat{\lambda}|)Y_{k,l}(\zeta)$, где $\zeta = \widehat{\lambda}/|\widehat{\lambda}|$, и проинтегрируем результат по $\widehat{\lambda}\in\mathbb{R}^{n-1}$. Функцию h считаем продолженной нулём вне D. Получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{h(\widehat{x},x_n)}{|\widehat{x}|^{(n-3)/2}}e^{-ipx_n}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i(\widehat{\lambda},\widehat{x})}K_{(n-3)/2}\left(|\widehat{x}|\sqrt{p^2-2pi\sqrt{\kappa^2+|\widehat{\lambda}|^2}-|\widehat{\lambda}|^2}\right)\eta(|\widehat{\lambda}|)Y_{k,l}(\zeta)\,d\widehat{\lambda}\right)d\widehat{x}\,dx_n=0. \tag{2.8}$$

Согласно (2.7) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i(\widehat{\lambda},\widehat{x})}K_{(n-3)/2}\left(|\widehat{x}|\sqrt{p^2-2pi\sqrt{\kappa^2+|\widehat{\lambda}|^2}-|\widehat{\lambda}|^2}\right)\eta(|\widehat{\lambda}|)Y_{k,l}(\zeta)\,d\widehat{\lambda}=$$

$$=(-i)^k(2\pi)^{(n-1)/2}\rho^{(3-n)/2}Y_{k,l}(\varphi)\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty J_{(n-3+2k)/2}(sr)K_{(n-3)/2}\left(\rho\sqrt{p^2-2pi\sqrt{\kappa^2+s^2}-s^2}\right)\eta(s)s^{(n-1)/2}\,ds, \tag{2.9}$$

где $\varphi=\widehat{x}/|\widehat{x}|$, $\rho=|\widehat{x}|$. Выбирая в (2.9) в качестве η элемент последовательности финитных функций $\{\eta_n(s)\}$, сходящейся к $\delta(s-t)$, $t>0$, и переходя к пределу при $n\to\infty$, вследствие равенства (2.8) получаем

$$\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_{-\infty}^\infty\left(\int\limits_{S_1^{n-2}}\rho h(\widehat{x}(\rho,\varphi),x_n)Y_{k,l}(\varphi)\,d\varphi\right)e^{-ipx_n}\,dx_n\right)\times$$

$$\times J_{(n-3+2k)/2}(t\rho)K_{(n-3)/2}\left(\rho\sqrt{p^2-2pi\sqrt{\kappa^2+t^2}-t^2}\right)d\rho=0 \tag{2.10}$$

для любых $t>0$ и $p\in\mathbb{R}$. Здесь $\widehat{x}(\rho,\varphi)=\rho\varphi$ и при выводе использовалась формула [18, с. 774]

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\widehat{x})\,d\widehat{x}=\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_{S_\rho^{n-2}} f(\widehat{x})\,d\varphi\right)d\rho=\int\limits_0^\infty\rho^{n-2}\left(\int\limits_{S_1^{n-2}} f(\widehat{x})\,d\varphi\right)d\rho,$$

в которой f – интегрируемая на $\mathbb{R}^{n-1}$ функция. Перейдём к анализу тождества (2.10).

3. Завершение доказательства основной теоремы. Введём обозначения

$$G_{k,l}(\rho,x_n)=\int\limits_{S_1^{n-2}}\rho h(\widehat{x}(\rho,\varphi),x_n)Y_{k,l}(\varphi)\,d\varphi,$$

$$f_{p,k,l}(\rho)=\int\limits_{-\infty}^\infty G_{k,l}(\rho,x_n)e^{-ipx_n}\,dx_n.$$

Из тождества (2.10) следует, что

$$\int\limits_0^\infty J_{(n-3+2k)/2}(t\rho)K_{(n-3)/2}\left(\rho\sqrt{p^2-2pi\sqrt{\kappa^2+t^2}-t^2}\right)f_{p,k,l}(\rho)\,d\rho=0 \tag{3.1}$$

для любых $t>0$ и $p\in\mathbb{R}$.

Имеет место равенство

$$f_{p,k,l}(\rho)=\sum_{j=0}^\infty\frac{(-ip)^j}{j!}\int\limits_{-\infty}^\infty G_{k,l}(\rho,x_n)x_n^j\,dx_n.$$

Обозначим через $\widehat{D}$ ортогональную проекцию области D на гиперплоскость $\mathbb{R}^{n-1} = \{\widehat{x}\}$. Поскольку $\overline{D} \bigcap \mathcal{L} = \varnothing$, то $0 \notin \overline{\widehat{D}}$. Поэтому $G_{k,l} \equiv 0$ вне прямоугольника $\{(\rho, x_n)\} = [a_1, a_2] \times \times [H_1, H_2]$ для некоторых $0 < a_1 < a_2$, $H_1 < H_2$ и соответственно $f_{p,k,l} \equiv 0$ вне отрезка $[a_1, a_2]$.

Зафиксируем какие-либо номера $k = k_0$, $l = l_0$. Возможны два случая.

Случай 1. При всех $j = 0, 1, \ldots$ справедливо равенство $\int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, x_n) x_n^j \, dx_n = 0$ для п.в. $\rho \geqslant 0$. Таким образом, в этом случае $f_{p,k,l} = 0$ п.в. для всех $p \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Случай 2. Найдётся такое $m \geqslant 0$, что $\int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, x_n) x_n^j \, dx_n = 0$ для п.в. $\rho \geqslant 0$ и при всех $0 \leqslant j < m$, но функция $\int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, x_n) x_n^m \, dx_n$ отлична от нуля на множестве положительной меры в $[a_1, a_2]$.

В случае 1 по теореме Мюнца [19, с. 54; 20, с. 171] для п.в. $\rho \geqslant 0$, $x_n \in \mathbb{R}$ имеем $G_{k,l}(\rho, x_n) = = 0$, т.е.

$$\int\limits_{S_1^{n-2}} \rho h(\widehat{x}(\rho, \varphi), x_n) Y_{k,l}(\varphi) \, d\varphi = 0. \tag{3.2}$$

Рассмотрим случай 2. В этом случае при $p \to 0+$ справедливо равенство

$$f_{p,k,l}(\rho) = \frac{(-ip)^m}{m!} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, x_n) x_n^m \, dx_n + O(p^{m+1}), \tag{3.3}$$

а значит, при малых $p > 0$ будем иметь

$$\|f_{p,k,l}\|_{L_2(0,\infty)} = \frac{p^m}{m!} \bigg\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\,\cdot\,, x_n) x_n^m \, dx_n \bigg\|_{L_2(0,\infty)} + O(p^{m+1}). \tag{3.4}$$

Из равенства (3.4) следует, что если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то $\|f_{p,k,l}\|_{L_2(0,\infty)} > 0$ при $0 < < p \leqslant \varepsilon$.

Положим

$$\widetilde{f}_{p,k,l}(\rho) = \frac{f_{p,k,l}(\rho)}{\|f_{p,k,l}\|_{L_2(0,\infty)}}, \quad \rho \geqslant 0, \quad 0 < p \leqslant \varepsilon.$$

Используя (3.3) и (3.4), заключаем, что

$$\widetilde{f}_{p,k,l}(\rho) = \bigg(\bigg\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\,\cdot\,, x_n) x_n^m \, dx_n \bigg\|_{L_2(0,\infty)} + O(p) \bigg)^{-1} \bigg((-i)^m \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, x_n) x_n^m \, dx_n + O(p) \bigg).$$

Отсюда следует соотношение

$$\lim_{p \to 0} \|\widetilde{f}_{p,k,l} - \widetilde{g}_{k,l}\|_{L_2(0,\infty)} = 0, \tag{3.5}$$

в котором обозначено

$$\widetilde{g}_{k,l}(\rho) = (-i)^m \bigg\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\,\cdot\,, x_n) x_n^m \, dx_n \bigg\|_{L_2(0,\infty)}^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, x_n) x_n^m \, dx_n.$$

Очевидно, что

$$\|\widetilde{g}_{k,l}\|_{L_2(0,\infty)} = 1 \tag{3.6}$$

и $\widetilde{g}_{k,l} \equiv 0$ вне отрезка $[a_1, a_2]$. Согласно (3.1) для выбранных номеров $k = k_0$, $l = l_0$ выполняется тождество

$$\int_0^\infty J_{(n-3+2k)/2}(t\rho) K_{(n-3)/2}\left(\rho\sqrt{p^2 - 2pi\sqrt{\kappa^2 + t^2} - t^2}\right) \widetilde{f}_{p,k,l}(\rho)\, d\rho = 0 \tag{3.7}$$

для всех $t > 0$ и $p \in \mathbb{R}$. Здесь интегрирование фактически ведётся по отрезку $[a_1, a_2]$. Переходя в (3.7) к пределу при $p \to 0$, с учётом соотношения (3.5) получаем

$$\int_0^\infty J_{(n-3+2k)/2}(t\rho) K_{(n-3)/2}(it\rho) \widetilde{g}_{k,l}(\rho)\, d\rho = 0 \quad \text{для всех} \quad t > 0. \tag{3.8}$$

Отсюда следует, что $\widetilde{g}_{k,l} = 0$ п.в. на $\mathbb{R}$. Действительно, умножая обе части тождества (3.8) на t^{-s}, $s \in (0,1)$, и интегрируя, находим

$$\int_0^\infty \widetilde{g}_{k,l}(\rho) \left(\int_0^\infty t^{-s} J_{(n-3+2k)/2}(t\rho) K_{(n-3)/2}(it\rho)\, dt \right) d\rho = \Psi(s) \int_0^\infty \rho^{s-1} \widetilde{g}_{k,l}(\rho)\, d\rho = 0, \tag{3.9}$$

$$\Psi(s) = \int_0^\infty \tau^{-s} J_{(n-3+2k)/2}(\tau) K_{(n-3)/2}(i\tau)\, d\tau. \tag{3.10}$$

В силу известных асимптотических оценок поведения функций $J_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ при $z \to 0, \infty$, $z \in \mathbb{C}$ [10, гл. 9], функция Ψ аналитична по $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s \in (0,1)$. Если $\Psi(s) = 0$ для всех $s \in (0,1)$, то по теореме Мюнца [20, с. 172] из (3.10) вытекает противоречивое равенство $J_{(n-3+2k)/2}(\tau) K_{(n-3)/2}(i\tau) \equiv 0$. Поэтому найдётся отрезок $[\alpha, \beta] \subset (0,1)$, для которого $\Psi(s) \neq 0$, $s \in [\alpha, \beta]$. Но тогда из (3.9) следует, что

$$\int_0^\infty \rho^{s-1} \widetilde{g}_{k,l}(\rho)\, d\rho = 0 \tag{3.11}$$

для любого $s \in [\alpha, \beta]$. Напомним, что функция $\widetilde{g}_{k,l}$ имеет носитель, содержащийся в отрезке $[a_1, a_2] \subset (0, \infty)$. Следовательно, функция в левой части равенства (3.11) аналитична по s. Поэтому это равенство распространяется на все значения $s > 0$. Из теоремы об обращении преобразования Меллина [21, с. 73] теперь следует, что $\widetilde{g}_{k,l} = 0$ п.в. на $\mathbb{R}$. Полученное равенство противоречит (3.6). Тем самым показано, что случай 2 невозможен ни при каких k и l.

Таким образом, реализуется случай 1, поэтому в силу равенства (3.2) имеем

$$\int_{S_1^{n-2}} h(\widehat{x}(\rho, \varphi), x_n) Y_{k,l}(\varphi)\, d\varphi = 0$$

для всех $k = 0, 1, \ldots$, $l = \overline{1, d_k}$ и для п.в. $\rho \geqslant 0$, $x_n \in \mathbb{R}$. Поскольку система сферических функций $\{Y_{k,l}(\varphi)\}$ образует ортонормированный базис в $L_2(S_1^{n-2})$, отсюда следует, что

$$h(\widehat{x}(\rho, \varphi), x_n) = 0$$

для п.в. $\rho \geqslant 0$, $x_n \in \mathbb{R}$, $\varphi \in S_1^{n-2}$. Следовательно, $h(x) = 0$ для п.в. $x \in D$. Рассмотрение случая $\kappa \in \mathbb{R}_+$ завершено.

В случае $\kappa \in i\mathbb{R}_-$ имеем $\kappa = -qi$, $q > 0$. В данном случае

$$\lambda_n = \sqrt{|\widehat{\lambda}|^2 - q^2}. \tag{3.12}$$

Из вида функций (1.5), (1.6) следует, что вместо (2.4) имеем равенство

$$\int\limits_D \frac{h(x)e^{-i(\widehat{\lambda},\widehat{x})+\lambda_n x_n} H^{(1)}_{(n-2)/2}(q\sqrt{(|\widehat{x}|^2+(z_n-x_n)^2)})}{(|\widehat{x}|^2+(z_n-x_n)^2)^{(n-2)/4}}\,dx=0 \tag{3.13}$$

для любого $z_n\in\mathbb{R}$ и всех $\widehat{\lambda}\in\mathbb{R}^{n-1}$. Применяя к равенству (3.13) преобразование Фурье по z_n с учётом значения (3.12), представления $H^{(1)}_\nu(z)=J_\nu(z)+iY_\nu(z)$ и формул [21, с. 210, 214], получаем

$$\int\limits_D h(\widehat{x},x_n)e^{-i(\widehat{\lambda},\widehat{x})+(\sqrt{|\widehat{\lambda}|^2-q^2}-i\mu)x_n}|\widehat{x}|^{-(n-3)/2}H^{(1)}_{(n-3)/2}(|\widehat{x}|\sqrt{q^2-\mu^2})\,d\widehat{x}\,dx_n=0$$

для любого $\mu\in\mathbb{R}$ и всех $\widehat{\lambda}\in\mathbb{R}^{n-1}$. Дальнейшие рассуждения точно такие же, как и в случае $\kappa>0$. Теорема доказана.

4. Приложение теоремы. Прокомментируем утверждение теоремы 1.1 в применении к поставленной выше обратной задаче для уравнения (1.1). Обозначим $\Pi=\{x\in\mathbb{R}^n: x_n=0\}$. Без ограничения общности можем считать, что $\Pi\bigcap\overline{D}=\varnothing$ и $\mathcal{L}\bigcap\overline{D}=\varnothing$. Выберем в качестве X и Y открытую область в Π и открытый интервал в $\mathcal{L}$ соответственно такие, что $\overline{X}\bigcap\overline{Y}=\varnothing$. Рассмотрим соответствующее (1.8) однородное уравнение

$$\int\limits_D G(x,x';\lambda)G(y,x';\lambda)\xi(x')\,dx'=0,\quad (x,y)\in X\times Y. \tag{4.1}$$

Поскольку функция в левой части уравнения (4.1) аналитична по $x\in\Pi$, $y\in\mathcal{L}$, равенство (4.1) выполняется также для всех $(x,y)\in\Pi\times\mathcal{L}$. Заметим, что семейство $\{G(x,\cdot\,;\kappa)\}_{x\in\Pi}$ полно в пространстве $\{u\in C^2(\overline{D}):\Delta u-\kappa^2u=0 \text{ в } D\}$ [12, с. 41]. Поэтому из (4.1) следует равенство (1.9) для семейств $\mathcal{H}_j=\mathcal{H}_j^*$, $j=1,2$, указанных в формулировке теоремы 1.1. Применение теоремы 1.1 даёт равенство $\xi=0$ п.в. Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть X и Y – открытая область в Π и открытый интервал в $\mathcal{L}$ соответственно, $\overline{X}\bigcap\overline{Y}=\varnothing$. Тогда уравнение (1.8) имеет не более одного решения.*

Пусть для определённости $D\subset\{x\in\mathbb{R}^n: x_n<0\}$. Обозначим

$$D_R^+=\{x\in O_R(0): x_n\geqslant 0\},\quad S_R^+=\{x\in\partial O_R(0): x_n\geqslant 0\}.$$

Функция $v(x)$, определённая левой частью равенства (4.1), при любом $y\in\mathcal{L}$ удовлетворяет в D_R^+ уравнению $\Delta v-\lambda^2v=0$. Используя принцип максимума [22, с. 40], получаем

$$\max_{x\in D_R^+}|v(x)|=\mu_R\triangleq\max_{x\in S_R^+}|v(x)|.$$

Из (1.5) следует, что $\lim\limits_{R\to\infty}\mu_R=0$. Поэтому $v(x)=0$ для $x\in\mathbb{R}^n$ с $x_n\geqslant 0$. В силу аналитичности v справедливо равенство $v(x)=0$ для всех $x\in\mathbb{R}^n\backslash D$. Поэтому утверждение теоремы 4.1 имеет место и в том случае, когда гиперплоскость $\Pi\subset\mathbb{R}^n$, не имеющая общих точек с $\overline{D}$, произвольным образом ориентирована относительно прямой $\mathcal{L}$. Тем самым доказана следующая

Теорема 4.2. *Пусть Π_0 и $\mathcal{L}_0$ – произвольные гиперплоскость и прямая в $\mathbb{R}^n$ соответственно такие, что $\mathcal{L}_0$ не лежит в Π_0 и выполняются соотношения $\Pi_0\bigcap\overline{D}=\varnothing$ и $\mathcal{L}_0\bigcap\overline{D}=\varnothing$, а X и Y – открытая область в Π_0 и открытый интервал в $\mathcal{L}_0$ соответственно, $\overline{X}\bigcap\overline{Y}=\varnothing$. Тогда обратные задачи $\{\Pi_0,\mathcal{L}_0\}$, $\{\mathcal{L}_0,\Pi_0\}$ имеют единственное решение.*

Замечание. В условиях теоремы 4.2 размерность пространственного носителя данных $X \times Y = \Pi_0 \times \mathcal{L}_0$ равна n и совпадает с размерностью носителя искомой функции ξ. Таким образом, пространственную переопределённость исходной обратной задачи удаётся снять.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20085).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Calderon A.-P.* On an inverse boundary value problem // Seminar on Numerical Analysis and Its Applications to Continuum Physics. Sociedade Brasileira de Matematica. Rio de Janeiro, 1980. P. 65–73.
2. *Isakov V.* Inverse Problems for Partial Differential Equations. New York, 2006.
3. *Kenig C., Salo M.* Recent progress in the Calderon problem with partial data // Contemporary Mathematics. V. 615. Inverse problems and applications. Providence, 2014. P. 193–222.
4. *Лаврентьев М.М.* Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157. № 3. С. 520–521.
5. *Лаврентьев М.М.* Об одном классе обратных задач для дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160. № 1. С. 32–35.
6. *Бакушинский А.Б, Козлов А.И., Кокурин М.Ю.* Об одной обратной задаче для трёхмерного волнового уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2003. Т. 43. № 8. С. 1201–1209.
7. *Вайнберг М.М.* Асимптотические методы в уравнениях математической физики. М., 1982.
8. *Романов В.Г.* О гладкости фундаментального решения для гиперболического уравнения второго порядка // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50. № 4. С. 883–889.
9. *Maz'ya V., Schmidt G.* Approximate Approximations. Providence, 2007.
10. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М., 1979.
11. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М., 1980.
12. *Рамм А.Г.* Многомерные обратные задачи рассеяния. М., 1994.
13. *Кокурин М.Ю., Паймеров С.К.* Об обратной коэффициентной задаче для волнового уравнения в ограниченной области // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2008. Т. 48. № 1. С. 115–126.
14. *Кокурин М.Ю.* О полноте произведений гармонических функций и единственности решения обратной задачи акустического зондирования // Мат. заметки. 2018. Т. 104. № 5. С. 708–716.
15. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М., 1974.
16. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. I. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М., 1969.
17. *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., 1997.
18. *Шварц Л.* Анализ. Т. I. М., 1972.
19. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. М., 1965.
20. *Borwein P., Erdelyi T.* Polynomials and Polynomial Inequalities. New York, 1995.
21. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., 1961.
22. *Гилбарг Д., Трудингер М.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М., 1989.

Марийский государственный университет,
г. Йошкар-Ола

Поступила в редакцию 05.07.2020 г.
После доработки 18.11.2020 г.
Принята к публикации 11.12.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 2, с. 265–285

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.929+517.977

О ТОЧНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

© 2021 г. А. В. Метельский, В. Е. Хартовский

Для линейных систем нейтрального типа строится финитный наблюдатель в виде выхода системы запаздывающего типа с соизмеримыми сосредоточенными запаздываниями и конечным спектром, позволяющий за конечное время получить точную оценку решения исходной системы. Результаты иллюстрируются примером.

DOI: 10.31857/S0374064121020138

Введение. Различные постановки задач, связанные с вопросами оценки и/или наблюдения решения линейных автономных систем запаздывающего типа, неоднократно встречались в литературе [1–9]. Наиболее распространённый метод исследования таких задач основывается [1–6] на связи задачи проектирования асимптотических наблюдателей для системы наблюдения и задачи управления спектром двойственной системы управления, а также на различных вариациях этой идеи [7]. В частности, возможность обеспечить системе управления конечный асимптотически устойчивый спектр [6] позволяет обеспечить аналогичный спектр системе, определяющей динамику ошибки оценивания. К недостаткам такого подхода следует отнести возможность только асимптотически точного восстановления решения системы наблюдения.

В работах [8, 9] для систем с запаздыванием предложен новый тип наблюдателя – финитный наблюдатель – который позволяет за конечное время получить точное решение системы наблюдения. Здесь в качестве основной выступает задача выбора параметров наблюдателя таким образом, чтобы система, определяющая динамику ошибки оценивания, была точечно вырожденной в направлениях, соответствующих компонентам ошибки (размерность наблюдателя больше размерности исходной системы).

Системы нейтрального типа обладают более сложной динамикой по сравнению с системами запаздывающего типа, что отражается и на свойствах наблюдаемости их текущего состояния [10, 11], а поэтому вопросы проектирования наблюдателей для систем нейтрального типа изучены несколько слабее. Для таких систем в работах [12, 13] предложены методы синтеза асимптотических наблюдателей при наличии свойств модальной управляемости в различных классах регуляторов для двойственной системы управления или при наличии свойства асимптотической наблюдаемости у исходной системы, а в [14] разработан метод синтеза финитного наблюдателя. Однако полученный в [14] финитный наблюдатель содержит распределённое запаздывание, в то время как исходная система является системой с сосредоточенными запаздываниями. Кроме того, наличие интегральных слагаемых, соответствующих распределённым запаздываниям, порождает ряд трудностей при практической реализации таких объектов [15, 16].

В настоящей работе предлагается новый тип финитного наблюдателя для систем нейтрального типа, который, в отличии от [14], не содержит распределённого запаздывания и определяется системой запаздывающего типа с сосредоточенными соизмеримыми запаздываниями и конечным спектром.

1. Постановка задачи. Предварительные сведения. Рассмотрим линейную автономную дифференциально-разностную систему нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^{m} D_i \dot{x}(t-ih) = \sum_{i=0}^{m} A_i x(t-ih), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^{m} C_i x(t-ih), \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

где $D_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C_i \in \mathbb{R}^{l\times n}$, x – вектор решения, y – вектор выходных величин, доступных наблюдению (выход), $h = \mathrm{const} > 0$. Решение уравнения (1) однозначно задаётся начальной функцией

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-mh, 0]. \tag{3}$$

Далее считаем, что функция $\varphi \in \widetilde{\boldsymbol{C}}([-mh, 0], \mathbb{R}^n)$ является неизвестной, здесь и ниже через $\widetilde{\boldsymbol{C}}([a, b], \mathbb{R}^n)$ обозначается линейное пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, имеющих на этом отрезке кусочно-непрерывную производную.

Обозначим: $I_i \in \mathbb{R}^{i\times i}$ – единичная матрица, λ_h – оператор сдвига, определяемый для заданного $h > 0$ правилом $(\lambda_h)^k f(t) = f(t - kh)$, $k \in \mathbb{N}$ (для произвольной функции f). Введём полиномиальные матрицы

$$D(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i D_i, \quad A(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i, \quad C(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i C_i$$

и запишем систему (1), (2) в операторном виде

$$(I_n - D(\lambda_h))\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t), \quad t > 0, \tag{4}$$

$$y(t) = C(\lambda_h)x(t), \quad t \geqslant 0. \tag{5}$$

В дальнейшем будем использовать запись исходной системы (1), (2) в виде (4), (5).

Задача. Требуется построить линейную автономную дифференциальную систему запаздывающего типа с выходом $\bar{x}$ такую, что при входном сигнале y, определяемом формулой (5), выход $\bar{x}$, начиная с некоторого момента времени $t_1 > 0$, является точной оценкой неизвестного решения x уравнения (4):

$$\bar{x}(t) - x(t) \equiv 0, \quad t \geqslant t_1. \tag{6}$$

Дифференциальную систему с выходом $\bar{x}$, реализующую оценку x уравнения (4), назовём *финитным наблюдателем* для системы (1), (2).

Пусть $x(t)$, $t > 0$, – решение уравнения (4). Под состоянием уравнения (4) в момент времени $t > 0$ будем понимать [17] функцию $x_t(\tau) = x(t + \tau)$, $\tau \in [-mh, 0]$.

Рассмотрим множество Y_{t_1} всех выходов (5) на отрезке $[0, t_1]$:

$$Y_{t_1} = \{y : \text{существует } \ \varphi \in \widetilde{\boldsymbol{C}}([-mh, 0], \mathbb{R}^n), \ \ x(t) = \varphi(t), \ \ t \in [-mh, 0],$$
$$(I_n - D(\lambda_h))\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t), \ \ t \in (0, t_1], \ \ y(t) = C(\lambda_h)x(t), \ \ t \in [0, t_1]\}.$$

Множество Y_{t_1} представляет собой линейное многообразие в пространстве непрерывных функций $\boldsymbol{C}([0, t_1], \mathbb{R}^n)$. Пусть $x(t)$, $t \in [0, t_1]$, – решение уравнения (4) и $y(t) = C(\lambda_h)x(t)$, $t \in [0, t_1]$, – соответствующий ему выход. Введём оператор $\mathcal{L}_{t_1} y = x_{t_1}$, $y \in Y_{t_1}$, который будем называть *оператором восстановления текущего состояния* x_{t_1}.

Обозначим через $W(p, \lambda)$ характеристическую матрицу $p(I_n - D(\lambda)) - A(\lambda)$ системы (4) (при $\lambda = e^{-ph}$). Если для системы (4), (5) существует финитный наблюдатель, задаваемый линейной автономной дифференциальной системой запаздывающего типа, то существует непрерывный оператор $\mathcal{L}_{t_1} : \boldsymbol{C}([0, t_1], \mathbb{R}^n) \to \boldsymbol{C}([-mh, 0], \mathbb{R}^n)$, имеющий вид интеграла Римана–Стилтьеса, такой, что $\mathcal{L}_{t_1} y = x_{t_1}$, $y \in Y_{t_1}$. Последнее [10, 11] равносильно одновременному выполнению условий

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C}; \tag{7}$$

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) \\ C(\lambda) \end{bmatrix} = n, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{8}$$

Поэтому условия (7), (8) являются необходимыми для существования финитного наблюдателя.

Цель дальнейших рассуждений статьи состоит в том, чтобы показать, что выполнение условий (7), (8) достаточно для существования финитного наблюдателя. Доказательство проведём в два этапа. Вначале построим финитный наблюдатель для системы запаздывающего типа, после чего перейдём к исследованию системы нейтрального типа. Далее в работе будет предложен модифицированный финитный наблюдатель и приведён пример реализации двух типов наблюдателей.

2. Случай системы запаздывающего типа с одномерным выходом. Рассмотрим случай, когда в системе (4) матрица $D(\lambda)$ является нулевой, а выход (5) одномерным, $C(\lambda) = c(\lambda)$, $c(\lambda) = [c_1(\lambda), \ldots, c_n(\lambda)]$, где $c_i(\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, – полиномы. Другими словами, вместо системы (4), (5) будем изучать систему

$$\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t), \quad t > 0, \tag{9}$$

$$y(t) = c(\lambda_h)x(t), \quad t \geqslant 0. \tag{10}$$

Заметим, что для системы (9), (10) условие (8) выполнено всегда, а условие (7) принимает вид

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} pI_n - A(e^{-ph}) \\ c(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C}. \tag{11}$$

Финитный наблюдатель будем строить в следующем виде:

$$\dot{z}(t) = \overline{A}(p_{_D}, \lambda_h)z(t) - e_{n+1}y(t), \quad t > t_0, \tag{12}$$

$$\bar{x}(t) = [I_n, 0_{n\times 3}]z(t), \quad t \geqslant t_0, \tag{13}$$

где $p_{_D} = d/(dt)$ – оператор дифференцирования $((p_{_D})^k z(t) = z^{(k)}(t))$; $z = [z_1, \ldots, z_{n+3}]'$ – вектор решения уравнения (12) (штрих $(')$ обозначает операцию транспонирования), $\bar{x} = [\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n]'$ – выход уравнения (12), определяющий оценку решения x системы (4), e_{n+1} – $(n+1)$-й столбец единичной матрицы I_{n+3}; t_0 – момент “включения” наблюдателя. Матрица $\overline{A}(p, \lambda)$ выбирается такой, чтобы характеристическая матрица системы (12) имела вид $(\lambda = e^{-ph})$

$$pI_{n+3} - \overline{A}(p, \lambda) = \begin{bmatrix} p - a_{11}(\lambda) & \ldots & -a_{1n}(\lambda) & -\varphi_1(\lambda) & -b_1 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ -a_{n1}(\lambda) & \ldots & p - a_{nn}(\lambda) & -\varphi_n(\lambda) & -b_n & 0 \\ -c_1(\lambda) & \ldots & -c_n(\lambda) & p - \varphi_{n+1}(p, \lambda) & -1 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -\lambda f_1(p, \lambda) & p - f_2(p, \lambda) & -a_1(\lambda) \\ 0 & \ldots & 0 & -\lambda q_1(\lambda) & -q_2(\lambda) & p - a_2(\lambda) \end{bmatrix}, \tag{14}$$

а спектр системы (12) был конечным, т.е.

$$|pI_{n+3} - \overline{A}(p, \lambda)| = d(p), \tag{15}$$

где $d(p)$ – некоторый полином. Здесь $a_{ij}(\lambda)$, $i, j = \overline{1,n}$, – элементы матрицы $A(\lambda)$, $\varphi(p, \lambda) = [\varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_n(\lambda), \varphi_{n+1}(p, \lambda)]'$ – векторный полином, $b = [b_1, \ldots, b_n, 1]'$ – столбец действительных чисел; $a_i(\lambda)$, $q_i(\lambda)$, $f_i(p, \lambda)$ – полиномы $(i = \overline{1,2})$, причём $p - f_2(p, \lambda)$ – полином запаздывающего типа.

Замечание 1. Здесь и далее под полиномом запаздывающего типа понимаем полином $f(p, \lambda)$ вида $f(p, \lambda) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} p^i g_i(\lambda)$, где $n \in \mathbb{N}$, $g_i(\lambda)$ – произвольные полиномы. Использование термина “запаздывающий тип” обусловлено тем, что любая система запаздывающего типа вида (9) имеет характеристический квазиполином вида $f(p, e^{-ph})$.

Заметим, что компонента z_{n+1} решения системы (12) зависит от выхода y. Значит, для существования слагаемого $\lambda_h f_1(p_{_D}, \lambda_h)z_{n+1}$ в системе (12) функция $z_{n+1}(t)$ должна быть дифференцируема достаточное количество раз. Поэтому при выборе момента времени t_0 руководствуемся тем, что решение системы запаздывающего типа с течением времени сглаживается.

В частности, при увеличении времени на величину mh максимальный порядок непрерывной производной решения системы (9) увеличивается на единицу. Вследствие этого полагаем $t_0 = (\rho_0 - 1)mh$, где $\rho_0 = \max\{\deg_p f_1(p,\lambda) - \deg_p(\varphi_{n+1}(p,\lambda) - p),\ 0\}$.

Считаем, что компоненты $z_i(t)$, $t \in [t_0 - h_0, t_0]$, $i = \overline{1, n+3}$ (h_0 – длина отрезка последействия системы (12)), начальной функции $z(t)$, $t \in [t_0 - h_0, t_0]$, являются достаточно гладкими с кусочно-непрерывной старшей производной (порядок старшей производной для каждой компоненты определяется максимальной степенью переменной p соответствующих полиномов в матрице (14)). В частности, можно положить $z(t) \equiv 0$, $t \in [t_0 - h_0, t_0]$.

Сравнивая элементы матриц в уравнениях (9), (10) с элементами первых $n+1$ строк матрицы (14), видим, что погрешность $\zeta_i(t) = \bar{x}_i(t) - x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, оценки решения уравнения (9) наблюдателем (12), (13) являются первыми n компонентами решения однородной ($y = 0$) системы (12), т.е. системы

$$\dot{\zeta}(t) = \overline{A}(p_{_D}, \lambda_h)\zeta(t), \quad t > t_0, \tag{16}$$

где $\zeta = [\zeta_1, \ldots, \zeta_n, z_{n+1}, z_{n+2}, z_{n+3}]'$.

Пусть $W_\varphi(p,\lambda)$ – блок матрицы (14), состоящий из её первых $n+1$ строк и $n+1$ столбцов:

$$W_\varphi(p,\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} pI_n - A(\lambda) & \begin{matrix} -\varphi_1(\lambda) \\ \cdots \\ -\varphi_n(\lambda) \end{matrix} \\ \hline -c(\lambda) & p - \varphi_{n+1}(\lambda) \end{array}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} p - a_{11}(\lambda) & \ldots & -a_{1n-1}(\lambda) & -a_{1n}(\lambda) & -\varphi_1(\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n-11}(\lambda) & \ldots & p - a_{n-1n-1}(\lambda) & -a_{n-1n}(\lambda) & -\varphi_{n-1}(\lambda) \\ -a_{n1}(\lambda) & \ldots & -a_{nn-1}(\lambda) & p - a_{nn}(\lambda) & -\varphi_n(\lambda) \\ -c_1(\lambda) & \ldots & -c_{n-1}(\lambda) & -c_n(\lambda) & p - \varphi_{n+1}(p,\lambda) \end{bmatrix}.$$

Обозначим через $\widetilde{M}(p,\lambda) = [\widetilde{M}_1(p,\lambda), \ldots, \widetilde{M}_{n+1}(p,\lambda)]'$ алгебраические дополнения к элементам (начиная с первого) последнего столбца матрицы $W_\varphi(p,\lambda)$.

Лемма 1. *Пусть выполняется условие (11). Тогда существуют полиномы $\varphi_i(\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, $\varphi_{n+1}(p,\lambda)$ и приведённый полином $d_0(p)$ степени $\mu = \deg d_0(p) \geqslant n+1$ такие, что*

$$|W_\varphi(p,\lambda)| = [-\varphi_1(\lambda), \ldots, -\varphi_n(\lambda), p - \varphi_{n+1}(p,\lambda)]\widetilde{M}(p,\lambda) = d_0(p), \tag{17}$$

и полином $p - \varphi_{n+1}(p,\lambda)$ имеет запаздывающий тип.

В статье [9] описан способ построения полиномов из леммы 1, для реализации которого достаточно выполнения условия (11). Поэтому доказательство леммы 1 не приводится.

Далее считаем, что полиномы, указанные в лемме 1, построены. Введём ряд обозначений. Предположим, что полином $d_0(p)$ из равенства (17) имеет $\tilde{\mu}$ различных корней p_i, кратности которых обозначим через $\tilde{l}_i$, т.е.

$$d_0(p) = \prod_{i=1}^{\tilde{\mu}} (p - p_i)^{\tilde{l}_i}.$$

Определим множество P_0, состоящее из корней полинома $d_0(p)$: $P_0 = \{p_i \in \mathbb{C} : i = \overline{1, \tilde{\mu}}\}$.

Используя матрицу $W_\varphi(p,\lambda)$, построим матрицу $W_c(p,\lambda)$ следующим образом:

$$W_c(p,\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} W_\varphi(p,\lambda) & \begin{matrix} -b_1 \\ \cdots \\ -b_n \\ -1 \end{matrix} \\ \hline 0 \ \ldots \ 0 & p \end{array}\right] = \begin{bmatrix} p - a_{11}(\lambda) & \ldots & -a_{1n}(\lambda) & -\varphi_1(\lambda) & -b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n1}(\lambda) & \ldots & p - a_{nn}(\lambda) & -\varphi_n(\lambda) & -b_n \\ -c_1(\lambda) & \ldots & -c_n(\lambda) & p - \varphi_{n+1}(p,\lambda) & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & p \end{bmatrix}.$$

Также определим матрицу $W_b(p,\lambda)$, которая получается из матрицы $W_c(p,\lambda)$ удалением в ней столбца с номером $(n+1)$ и последней строки, $w_b(p,\lambda)=|W_b(p,\lambda)|$. Рассмотрим алгебраические дополнения

$$\widehat{M}(p,\lambda)=[M_{n+1}(p,\lambda),M_{n+2}(p)]',\quad M_{n+1}(p,\lambda)=-w_b(p,\lambda),\quad M_{n+2}(p)=d_0(p)$$

к двум последним элементам последней строки матрицы $W_c(p,\lambda)$. Обозначим

$$q'(\lambda)=[\lambda q_1(\lambda),q_2(\lambda)],\quad f'(p,\lambda)=[\lambda f_1(p,\lambda),f_2(p,\lambda)],$$

$$k(p,\lambda)=(a_1(\lambda)q'(\lambda)\widehat{M}(p,\lambda)+d(p))/(a_2(\lambda)-p),\quad K(p,\lambda)=k(p,\lambda)+pM_{n+2}(p), \tag{18}$$

где $d(p)$ – полином, определённый в (15).

Пусть выполнено условие (11). Приведём процедуру (шаги 1)–5)) построения финитного наблюдателя (12), (13) (реализация и обоснование процедуры приводятся ниже).

1) Выбираем полином $d(p)$ таким, чтобы выполнялось условие: если функция $k(p,\lambda)$ является полиномом, то система (16) имеет запаздывающий тип.

2) Выбираем столбец действительных чисел $b=[b_1,\ldots,b_n,1]'$ так, чтобы система уравнений

$$\lambda w_b(p,\lambda)=0,\quad d_0(p)=0 \tag{19}$$

имела конечное множество решений $(p,\lambda)\in\mathbb{C}^2$.

3) Выбираем полиномы $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$ такими, чтобы функции $a_1(e^{-ph})/d(p)$, $(a_2(e^{-ph})-p)/d(p)$ были целыми, а полиномы $\lambda w_b(a_2(\lambda),\lambda)$ и $d_0(a_2(\lambda))$ взаимно простыми.

4) Выбираем векторный полином $q'(\lambda)$ таким, чтобы функция $k(p,\lambda)$ являлась полиномом.

5) Выбираем полиномы $f_i(p,\lambda)$, $i=\overline{1,2}$, такими, чтобы выполнялось равенство

$$f'(p,\lambda)\widehat{M}(p,\lambda)=K(p,\lambda). \tag{20}$$

Опишем реализацию приведённой процедуры.

1) Выбор полинома $d(p)$. Пусть $\mu_d=\deg d(p)$.

Лемма 2. *Пусть $\mu_d\geqslant\mu+3$ и функция $k(p,\lambda)$ является полиномом. Тогда полином $p-f_2(p,\lambda)$ в матрице (14) имеет запаздывающий тип.*

Доказательство. Если $k(p,\lambda)$ – полином, то $K(p,\lambda)$ также является полиномом. Поскольку $\deg_p(pM_{n+2}(p))=\mu+1$, то $\deg_p K(p,\lambda)=\mu_d-1$, а старший член полинома $K(p,\lambda)$ (относительно переменной p) имеет вид $(-p^{\mu_d-1})$, $\mu_d-1\geqslant\mu+2$. Согласно (20) получаем $K(p,\lambda)=\lambda f_1(p,\lambda)M_{n+1}(p,\lambda)+f_2(p,\lambda)M_{n+2}(p)$. Так как у старшего члена $(-p^{\mu_d-1})$ полинома $K(p,\lambda)$ нет множителя λ, то он является также старшим членом полинома (относительно переменной p) $f_2(p,\lambda)M_{n+2}(p)$. Значит, старший член полинома (относительно переменной p) $f_2(p,\lambda)$ имеет вид $(-p^{\mu_d-\mu-1})$. Соответственно компонента z_{n+2} в системе (16) определяется уравнением запаздывающего типа. Лемма доказана.

Равенство (15) справедливо при любом $\lambda\in\mathbb{C}$. Из представления (14) при $\lambda=0$ следует, что корни полинома $d_0(p)$ принадлежат спектру системы (16). Поэтому полином $d(p)$ берём в виде $d(p)=d_2(p)d_0(p)$, где $d_2(p)$ – полином с действительными коэффициентами, старший член которого равен $p^{\mu_d-\mu}$. Поскольку полиномы $p-\varphi_{n+1}(p,\lambda)$ и $p-f_2(p,\lambda)$ в силу лемм 1, 2 имеют запаздывающий тип, то и система (16) имеет запаздывающий тип.

2) Выбор столбца действительных чисел $b=[b_1,\ldots,b_n,1]'$.

Лемма 3. *Существуют действительные числа b_1, $\ldots$, b_n такие, что*

$$w_b(p,e^{-ph})\neq 0,\quad p\in P_0. \tag{21}$$

Доказательство. Запишем соотношение (21) в виде

$$\widetilde{M}_1(p_i,e^{-p_ih})b_1+\ldots+\widetilde{M}_n(p_i,e^{-p_ih})b_n+\widetilde{M}_{n+1}(p_i,e^{-p_ih})\neq 0,\quad p_i\in P_0,\quad i=\overline{1,\tilde{\mu}}. \tag{22}$$

Пусть

$$\bar{M}(p)=[\widetilde{M}_1(p,e^{-ph}),\ldots,\widetilde{M}_{n+1}(p,e^{-ph})],\quad \operatorname{Re}\bar{M}(p)=[\operatorname{Re}\widetilde{M}_1(p,e^{-ph}),\ldots,\operatorname{Re}\widetilde{M}_{n+1}(p,e^{-ph})].$$

Аналогично определяется $\operatorname{Im}\bar{M}(p)$. В силу условия (11) вектор $\bar{M}(p)$ не равен нулю при любом $p\in\mathbb{C}$. Поэтому либо $\operatorname{Re}\bar{M}(p_i)\neq 0$, либо $\operatorname{Im}\bar{M}(p_i)\neq 0$, $i=\overline{1,\tilde{\mu}}$. Для каждого $i=\overline{1,\tilde{\mu}}$ положим $[\widetilde{M}_{i1},\ldots,\widetilde{M}_{in},\widetilde{M}_{in+1}]=\operatorname{Re}\bar{M}(p_i)$, если этот вектор ненулевой, или $[\widetilde{M}_{i1},\ldots,\widetilde{M}_{in},\widetilde{M}_{in+1}]=\operatorname{Im}\bar{M}(p_i)$ в противном случае.

Рассмотрим объединение гиперплоскостей

$$\widetilde{M}=\bigcup_{i=0}^{\tilde{\mu}}\Big\{(\xi_1,\ldots,\xi_n)'\in\mathbb{R}^n:\sum_{j=1}^{n}\widetilde{M}_{ij}\xi_j+\widetilde{M}_{in+1}=0\Big\}.$$

Очевидно, что множество $\widetilde{M}$ не совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$ (те равенства в (22), для которых $\widetilde{M}_{ij}=0$, $j=\overline{1,n}$, $\widetilde{M}_{in+1}\neq 0$ не рассматриваем, поскольку на выбор чисел b_i они не влияют). Поэтому в $\mathbb{R}^n$ существует точка $(b_1,\ldots,b_n)'$, не принадлежащая множеству $\widetilde{M}$. Очевидно, что для этой точки выполняется соотношение (22). Лемма доказана.

Выберем действительные числа $b_1,\ \ldots,\ b_n$, удовлетворяющие соотношению (21). Это можно сделать следующим образом. Вначале найдём числа $\alpha_i\in\mathbb{R}$, $\alpha_i\neq 0$, $i=\overline{1,\tilde{\mu}}$, при которых совместна система линейных алгебраических уравнений

$$\widetilde{M}_{i1}b_1+\ldots+\widetilde{M}_{in}b_n=-\alpha_i-\widetilde{M}_{in+1},\quad p_i\in P_0,\quad i=\overline{1,\tilde{\mu}}, \tag{23}$$

относительно неизвестных $b_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$. Существование таких чисел гарантирует лемма 3, а выбрать их можно из условия разрешимости алгебраических систем: вектор

$$[\widetilde{M}_{1n+1}+\alpha_1,\ldots,\widetilde{M}_{\tilde{\mu}n+1}+\alpha_{\tilde{\mu}}]$$

должен быть ортогонален всем векторам фундаментальной системы решений однородной системы, сопряжённой к системе (23). Затем в качестве набора чисел $b_1,\ \ldots,\ b_n$ можно взять любое решение системы уравнений (23).

Несложно показать (методом от противного), что в силу (21) система алгебраических уравнений (19) может иметь не более чем конечное множество решений.

3) Выбор полиномов $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$.

Пусть

$$d(p)=\prod_{i=1}^{s_1}(p-p_i)^{k_i},$$

$P^*=\{p_i\in\mathbb{C}:i=\overline{1,s_1}\}$ – множество различных действительных или комплексно сопряжённых корней полинома $d(p)$; корень p_i имеет алгебраическую кратность k_i. Полином $a_1(\lambda)$ берём в виде

$$a_1(\lambda)=\prod_{i=1}^{s_1}(\lambda-\lambda_i)^{k_i},\quad \lambda_i\in\Lambda^*=\{\lambda_i=e^{-p_ih}:p_i\in P^*,\quad i=\overline{1,s_1}\}. \tag{24}$$

Для того чтобы функция $(a_2(e^{-ph})-p)/d(p)$ была целой, необходимо и достаточно, чтобы для всех $p_i\in P^*$ значения функции $a_2(e^{-ph})-p$ и её производных по переменной p обращались в нуль, т.е.

$$(a_2(e^{-ph})-p)^{(k)}|_{p=p_i}=0,\quad i=\overline{1,s_1},\quad k=\overline{0,k_i-1}.$$

Поэтому для всех $\lambda_i = e^{-p_i h} \in \Lambda^*$ $(p_i \in P^*)$ должны выполняться равенства

$$a_2(\lambda_i) = p_i, \quad a_2^{(k)}(\lambda_i) = \frac{(-1)^k (k-1)!}{h\lambda_i^k}, \quad k = \overline{1, k_i - 1}, \quad \text{если} \quad k_i > 1, \quad i = \overline{1, s_1}. \tag{25}$$

Замечание 2. Поясним возможную трудность при реализации равенства (25). Если набор корней полинома $d(p)$ содержит комплексно сопряжённые корни, то возможна ситуация, когда $p_{k_1} \neq p_{k_2}$, но $\lambda_{k_1} = \lambda_{k_2} = e^{-p_{k_{1,2}} h}$, и первое равенство в (25) выполнить нельзя, так как в этом случае $a_2(\lambda_{k_1}) = a_2(\lambda_{k_2})$. Для преодоления этой трудности введём в наблюдателе запаздывание $h_1 = h/k$, где $k \in \mathbb{N}$ – некоторое число. Тогда матрицей системы (9) будет $A(\lambda) = A_0 + A_1 \lambda^k + \ldots + A_m \lambda^{km}$ и $\lambda^i x_k(t) = x_k(t - ih_1)$. Натуральное k можно выбрать так, чтобы разным значениям $p_i \in P^*$ соответствовали различные $\lambda_i = e^{-p_i h/k}$. Это требование учитываем и при выборе полинома $d_2(p)$ в п. 1) описываемой процедуры.

Пусть $\Lambda_0 = \{\lambda_k \in \mathbb{C} : k = \overline{1, \mu_2}\}$ – множество различных чисел таких, что при некотором $p^* \in P_0$ выполняется равенство $\lambda_k w_b(p^*, \lambda_k) = 0$. В силу п. 2) множество Λ_0 конечно.

Согласно п. 3) процедуры построения наблюдателя полиномы $\lambda w_b(a_2(\lambda), \lambda)$ и $d_0(a_2(\lambda))$ должны быть взаимно простыми. Если эти полиномы имеют общие корни λ_i^0, то вследствие равенств (25) имеем $\lambda_i^0 \in \Lambda_0 \backslash \Lambda^*$. В таком случае к (25) добавим равенства

$$a_2(\lambda_i^0) = p^0, \quad \lambda_i^0 \in \Lambda_0 \backslash \Lambda^*, \tag{26}$$

где $p^0 \in \mathbb{R}$, $p^0 \notin P_0$, причём значение p^0 возьмём одним и тем же для всех $\lambda_i^0 \in \Lambda_0 \backslash \Lambda^*$. Полином $a_2(\lambda)$ найдём как решение известной в теории полиномов интерполяционной задачи (25), (26), т.е. как полином Лагранжа–Сильвестра [18, с. 104].

Лемма 4. *Пусть полином $a_2(\lambda)$ удовлетворяет условиям (25), (26). Тогда полиномы $\lambda w_b(a_2(\lambda), \lambda)$ и $d_0(a_2(\lambda))$ взаимно просты.*

Доказательство. Предположим противное: существует $\lambda_* \in \mathbb{C}$, при котором выполняются равенства $\lambda_* w_b(a_2(\lambda_*), \lambda_*) = 0$, $d_0(a_2(\lambda_*)) = 0$. Тогда $a_2(\lambda_*) = p_* \in P_0$, $\lambda_* \in \Lambda_0$. Если предположить, что $\lambda_* \in \Lambda^*$, то $\lambda_* = e^{-p_* h}$ в силу (25), откуда получаем противоречие с соотношением (21). Значит, $\lambda_* \notin \Lambda^*$. Поэтому $\lambda_* \in \Lambda_0 \backslash \Lambda^*$. Но в силу (26) величины $\lambda_i w_b(a_2(\lambda_i), \lambda_i)$ и $d_0(a_2(\lambda_i))$ одновременно не равны нулю для всех $\lambda_i \in \Lambda_0 \backslash \Lambda^*$. Получили противоречие. Лемма доказана.

4) Вычисление векторного полинома $q'(\lambda)$.

Покажем, как выбрать векторный полином $q'(\lambda) = [\lambda q_1(\lambda), q_2(\lambda)]$ таким, чтобы функция $k(p, \lambda)$ была полиномом. В силу теоремы Безу векторный полином $q'(\lambda)$ должен обеспечивать тождество

$$a_1(\lambda) q'(\lambda) \widehat{M}(a_2(\lambda), \lambda) + d(a_2(\lambda)) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Согласно (24), (25) все корни полинома $a_1(\lambda)$ являются корнями полинома $d(a_2(\lambda))$ не меньшей кратности, поэтому $d(a_2(\lambda))$ делится без остатка на $a_1(\lambda)$. Значит, полином $q'(\lambda)$ можно искать как решение полиномиального уравнения

$$q'(\lambda) \widehat{M}(a_2(\lambda), \lambda) + d(a_2(\lambda))/a_1(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Согласно лемме 4 полиномы $\lambda w_b(a_2(\lambda), \lambda)$ и $d_0(a_2(\lambda))$ взаимно просты. Поэтому, следуя алгоритму Евклида, найдём полиномы $v_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, такие, что

$$-\lambda v_1(\lambda) w_b(a_2(\lambda), \lambda) + v_2(\lambda) d_0(a_2(\lambda)) = 1, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Возьмём $\tilde{q}'(\lambda) = [\lambda v_1(\lambda), v_2(\lambda)]$, тогда $\tilde{q}'(\lambda) \widehat{M}(a_2(\lambda), \lambda) = 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Положим

$$q'(\lambda) = -\tilde{q}'(\lambda) d(a_2(\lambda))/a_1(\lambda). \tag{27}$$

Согласно теореме Безу функция $k(p, \lambda)$ является полиномом. Действительно, обозначим $k_1(p, \lambda) = a_1(\lambda) q'(\lambda) \widehat{M}(p, \lambda) + d(p)$ (см. определение $k(p, \lambda)$ в (18)). Так как $k_1(a_2(\lambda), \lambda) = 0$, то $p = a_2(\lambda)$ – корень полинома $k_1(p, \lambda)$ при любом λ. Значит, в разложении $k_1(p, \lambda)$ на множители присутствует множитель $p - a_2(\lambda)$. Поэтому $k(p, \lambda)$ – полином.

5) Нахождение векторного полинома $f'(p,\lambda)$.

Полином $k(p,\lambda)$ запишем следующим образом:

$$k(p,\lambda)=\frac{(d(p)-d(p)\tilde q'(\lambda)\widehat M(p,\lambda))+(d(p)\tilde q'(\lambda)\widehat M(p,\lambda)+a_1(\lambda)q'(\lambda)\widehat M(p,\lambda))}{a_2(\lambda)-p}.$$

Заменяя в числителе этой дроби слагаемое $d(p)$ в первой скобке на $d(p)=d_2(p)d_0(p)=$ $=[0;d_2(p)]\widehat M(p,\lambda)$ и во второй скобке $q'(\lambda)$ согласно (27), получаем

$$k(p,\lambda)=\left(\frac{1-\tilde q'(\lambda)\widehat M(p,\lambda)}{a_2(\lambda)-p}[0,d_2(p)]+\frac{d(p)-d(a_2(\lambda))}{a_2(\lambda)-p}\tilde q'(\lambda)\right)\widehat M(p,\lambda). \tag{28}$$

Здесь в силу теоремы Безу $(1-\tilde q'(\lambda)\widehat M(p,\lambda))/(a_2(\lambda)-p)$ и $(d(p)-d(a_2(\lambda)))/(a_2(\lambda)-p)$ – полиномы.

Взяв полином

$$f'(p,\lambda)=\frac{1-\tilde q'(\lambda)\widehat M(p,\lambda)}{a_2(\lambda)-p}[0;d_2(p)]+\frac{d(p)-d(a_2(\lambda))}{a_2(\lambda)-p}\tilde q'(\lambda)+[0,p], \tag{29}$$

имеем вследствие (28) равенство (20). Из вида вектора $\tilde q(\lambda)$ вытекает равенство $f'(p,\lambda)=$ $=[\lambda f_1(p,\lambda),f_2(p,\lambda)]$. Итак, шаги 1)–5) процедуры построения наблюдателя (12), (13) реализованы.

Обоснуем предложенную процедуру построения финитного наблюдателя (12), (13), доказав тождество (6). Для этого понадобится следующее утверждение (см. лемму 2.1 в [19]).

Лемма 5. *Пусть $F(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb C$, – целая функция экспоненциального типа, т.е. $|F(\lambda)|\leqslant$ $\leqslant l_1e^{l_2|\lambda|}$, $\lambda\in\mathbb C$, для некоторых положительных чисел l_1, l_2. Тогда для того чтобы существовали неотрицательные постоянные $\underline t$, $\bar t$ и интегрируемая в квадрате функция $f(t)$, $t\in\mathbb R$, такая, что $f(t)\equiv 0$, $t\notin[-\underline t,\bar t]$, и*

$$F(\lambda)=\int\limits_{-\underline t}^{\bar t}e^{-\lambda t}f(t)\,dt,$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $F(\lambda)$ была интегрируема в квадрате на мнимой оси. При выполнении условия леммы наименьшие возможные числа $\underline t$, $\bar t$ определяются по формулам

$$\underline t=\limsup_{\substack{\lambda\to\infty\\ \lambda\in\mathbb R}}(1/\lambda)\ln|F(\lambda)|,\quad \bar t=\limsup_{\substack{\lambda\to\infty\\ \lambda\in\mathbb R}}(1/\lambda)\ln|F(-\lambda)|.$$

Теорема 1. *Существует момент времени $t_1>0$ такой, что, каково бы ни было начальное состояние системы (16), выполняются тождества*

$$\zeta_i(t)\equiv 0,\quad t\geqslant t_1,\quad i=\overline{1,n}. \tag{30}$$

Доказательство. Покажем, что система (16) имеет характеристический полином $d(p)$. Разлагая определитель характеристической матрицы (14) по последнему столбцу и учитывая равенства (18) и (20), получаем

$$|pI_{n+3}-\overline A(p,\lambda)|=(p-a_2(\lambda))((p-f_2(p,\lambda))M_{n+2}(p)-\lambda f_1(p,\lambda)M_{n+1}(p,\lambda))$$
$$-a_1(\lambda)(\lambda q_1(\lambda)M_{n+1}(p,\lambda)+q_2(\lambda)M_{n+2}(p))=$$
$$=(p-a_2(\lambda))(pM_{n+2}(p)-f'(p,\lambda)\widehat M(p,\lambda))-a_1(\lambda)q'(\lambda)\widehat M(p,\lambda)=$$
$$=(p-a_2(\lambda))(a_1(\lambda)q'(\lambda)\widehat M(p,\lambda)+d(p))/(p-a_2(\lambda))-a_1(\lambda)q'(\lambda)\widehat M(p,\lambda)=d(p).$$

Пусть $\bar{a}_{ij}(p,\lambda)$ – элементы матрицы (14), т.е. $pI_{n+3} - \overline{A}(p,\lambda) = [\bar{a}_{ij}(p,\lambda)]_{i,j=1}^{n+3}$. Положим $m_1 = \max\{\deg_\lambda \bar{a}_{ij}(p,\lambda) : i,j = \overline{1,n+1}\}$, $\bar{t}_0 = t_0 + \rho_1 h$, где $\rho_1 = m_1 \deg_p f_1(p,\lambda) + \deg_\lambda f_1(p,\lambda) + 1$. В силу того, что первые $n+1$ компонент системы (16) определяются системой запаздывающего типа, при $t > \bar{t}_0$ старшие производные всех компонент системы (16) либо непрерывны, либо кусочно-непрерывны, а производные более низких порядков непрерывны. Поэтому к системе (16) при $t > \bar{t}_0$ применимо преобразование Лапласа. Согласно лемме 5 для выполнения тождеств (30) достаточно (см. теорему 2.2 в [19]), чтобы элементы первых n строк матрицы $(pI_{n+3} - \overline{A}(p, e^{-ph}))^{-1}$ являлись целыми функциями экспоненциального типа, интегрируемыми в квадрате на мнимой оси. Выражая элементы обратной матрицы через элементы присоединённой матрицы, заключаем, что для этого достаточно, чтобы целыми функциями экспоненциального типа, интегрируемыми в квадрате на мнимой оси, были $r_{ij}(p, e^{-ph})$, $i = \overline{1,n+3}$, $j = \overline{1,n}$, где $r_{ij}(p,\lambda) = m_{ij}(p,\lambda)/d(p)$, а $m_{ij}(p,\lambda)$ – минор элемента $\bar{a}_{ij}(p,\lambda)$ характеристической матрицы (14). Разлагая указанные миноры по последнему столбцу матрицы (14), в силу шага 3) процедуры построения наблюдателя убеждаемся, что $r_{ij}(p, e^{-ph})$, $i = \overline{1,n+3}$, $j = \overline{1,n}$, – целые функции экспоненциального типа. Кроме того, очевидны неравенства $\deg_p r_{ij}(p,\lambda) < \deg d(p)$, поэтому $r_{ij}(p, e^{-ph}) = O(|p|^{-1})$ при $|p| \to \infty$ на мнимой оси. Отсюда следует [19] интегрируемость в квадрате на мнимой оси функций $r_{ij}(p, e^{-ph})$, $i = \overline{1,n+3}$, $j = \overline{1,n}$.

Из леммы 5 вытекает, что момент времени t_1 будет определяться равенством $t_1 = \bar{t}_0 + \delta h$, где $\delta = \max\{\delta_i : i = \overline{1,n}\}$, а δ_i – максимальная степень переменной λ в i-й строке матрицы $(pI_{n+3} - \overline{A}(p,\lambda))^{-1}$. Теорема доказана.

Замечание 3. Систему (12) с помощью введения дополнительных переменных всегда можно записать в нормальной форме. Поскольку $(p - \varphi_{n+1}(p,\lambda))$ и $(p - f_2(p,\lambda))$ – полиномы запаздывающего типа, то система (12) в нормальной форме будет неоднородной линейной автономной дифференциально-разностной системой запаздывающего типа с соизмеримыми запаздываниями, причём неоднородная часть будет непрерывной функцией. Такая система при указанных начальных условиях имеет единственное решение [17, с. 51]. Также отметим, что тождество (30) показывает, что система (12) является точечно вырожденной [19]. Таким свойством может обладать только система с запаздыванием, поэтому характеристическая матрица (14) всегда будет зависеть от переменной λ.

Рассмотрим теперь неоднородную систему запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t) + U(t), \quad t > 0, \tag{31}$$

$$y(t) = c(\lambda_h)x(t), \quad t \geqslant 0, \tag{32}$$

где $U(t)$, $t > 0$, – некоторая известная кусочно-непрерывная функция. При дальнейшем проектировании финитного наблюдателя для системы нейтрального типа (4), (5) понадобится финитный наблюдатель для системы (31), (32), который можно записать в виде

$$\dot{z}(t) = \overline{A}(p_{_D}, \lambda_h)z(t) - e_{n+1}y(t) + \overline{U}(t), \quad t > t_0, \tag{33}$$

$$\bar{x}(t) = [I_n, 0_{n\times 3}]z(t), \quad t \geqslant t_0, \tag{34}$$

где $\overline{U} = \operatorname{col}[U,0,0,0]$, матрицы $\overline{A}(p,\lambda)$, $[I_n, 0_{n\times 3}]$ и число t_0 те же, что и в формулах (12), (13). Пусть $\xi_i = \bar{x}_i - x_i$, $i = \overline{1,n}$, – погрешность наблюдателя (33), (34).

Следствие. *Существует момент времени $t_1 > 0$ такой, что имеют место тождества*

$$\xi_i(t) \equiv 0, \quad t \geqslant t_1, \quad i = \overline{1,n}. \tag{35}$$

Доказательство. Сделаем в системе (33) замену переменных $z_i = \xi_i - x_i$, $i = \overline{1,n}$, и введём вектор $\xi = [\xi_1, \ldots, \xi_n, z_{n+1}, z_{n+2}, z_{n+3}]'$. Учитывая, что функция x удовлетворяет системе (31), получаем систему

$$\dot{\xi}(t) = \overline{A}(p_{_D}, \lambda_h)\xi(t)$$

с такой же матрицей $\overline{A}(p,\lambda)$, что и в системе (16). В доказательстве теоремы 1 показано, что найдётся момент времени $t_1 > 0$ такой, что, каково бы ни было начальное состояние системы с матрицей $\overline{A}(p,\lambda)$, её первые n компонент при $t \geqslant t_1$ тождественно равны нулю, т.е. имеет место тождество (35). Следствие доказано.

3. Финитный наблюдатель для системы нейтрального типа. Напомним [20, с. 230], что для любой полиномиальной матрицы $R(\lambda)$ существует пара унимодулярных матриц (т.е. невырожденных матриц с определителем, не зависящим от λ) $P_1(\lambda)$, $P_2(\lambda)$, приводящих матрицу $R(\lambda)$ к нормальной форме Смита $\widetilde{R}(\lambda)$, т.е. $\widetilde{R}(\lambda) = P_1(\lambda)R(\lambda)P_2(\lambda)$ (см. также [18, с. 139] – канонический вид λ-матриц). Матрица $\widetilde{R}(\lambda)$ характеризуется тем, что левый верхний квадратный блок этой матрицы, размер которого совпадает с рангом матрицы $R(\lambda)$, имеет вид $\operatorname{diag}[r_1(\lambda),\ldots,r_k(\lambda)]$, а все остальные элементы матрицы $\widetilde{R}(\lambda)$ являются нулями. Многочлены $r_i(\lambda)$, $i=\overline{1,k}$, называются инвариантными многочленами матрицы $\widetilde{R}(\lambda)$ и определяются равенством $r_i(\lambda) = d_i(\lambda)/d_{i-1}(\lambda)$, где $d_i(\lambda)$ – наибольший общий делитель всех миноров порядка i матрицы $\widetilde{R}(\lambda)$.

Перейдём к вопросу о проектировании финитного наблюдателя для систем нейтрального типа. Считаем, что параметры системы (4), (5) удовлетворяют условиям (7), (8). В силу условия (8) наибольший общий делитель всех миноров порядка n матрицы

$$\begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) \\ C(\lambda) \end{bmatrix} \tag{36}$$

равен единице. Поэтому нормальная форма Смита матрицы (36) имеет вид $\operatorname{col}[I_n, 0_{l\times n}]$, здесь и ниже через $0_{i\times j}$ обозначается нулевая матрица размера $i\times j$. Обозначим $\mathbb{R}^{n\times m}[\lambda]$ множество $n\times m$-матриц, элементы которых являются полиномами переменной λ. Пусть унимодулярные матрицы $N(\lambda) \in \mathbb{R}^{(n+l)\times(n+l)}[\lambda]$ и $N_1(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}[\lambda]$ обеспечивают преобразование

$$N(\lambda)\begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) \\ C(\lambda) \end{bmatrix} N_1(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{l\times n} \end{bmatrix}. \tag{37}$$

Умножим матрицу

$$\widehat{W}(p,\lambda) = \begin{bmatrix} p(I_n - D(\lambda))N_1(\lambda) - A(\lambda)N_1(\lambda) & 0_{n\times l} \\ pC(\lambda)N_1(\lambda) & -pI_l \end{bmatrix}$$

слева на матрицу

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} N_{11}(\lambda) & N_{12}(\lambda) \\ N_{21}(\lambda) & N_{22}(\lambda) \end{bmatrix},$$

где блоки $N_{11}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}[\lambda]$, $N_{12}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times l}[\lambda]$, $N_{21}(\lambda) \in \mathbb{R}^{l\times n}[\lambda]$, $N_{22}(\lambda) \in \mathbb{R}^{l\times l}[\lambda]$. Полученную в результате матрицу

$$\widehat{W}_1(p,\lambda) = N(\lambda)\widehat{W}(p,\lambda) \tag{38}$$

запишем в силу (37) в виде

$$\widehat{W}_1(p,\lambda) = \begin{bmatrix} pI_n - \widehat{A}(\lambda) & -pN_{12}(\lambda) \\ \widehat{C}_1(\lambda) & -pN_{22}(\lambda) \end{bmatrix},$$

где $\widehat{A}(\lambda) = N_{11}(\lambda)A(\lambda)N_1(\lambda)$, $\widehat{C}_1(\lambda) = -N_{21}(\lambda)A(\lambda)N_1(\lambda)$.

В системе (4), (5) перейдём к новой переменной

$$\hat{x}(t) = N_1^{-1}(\lambda_h)x(t), \quad t \geqslant (-m + \deg_\lambda N_1^{-1}(\lambda))h. \tag{39}$$

Тогда

$$x(t) = N_1(\lambda_h)\hat{x}(t), \quad t \geqslant (-m+\gamma)h, \tag{40}$$

где $\gamma = \deg_\lambda N_1^{-1}(\lambda) + \deg_\lambda N_1(\lambda)$. Продифференцируем равенство (5) и присоединим к полученному равенству систему (4), перейдя в них к переменной $\hat{x}$. Тогда получим систему, которой удовлетворяют переменные $\hat{x}$, y (записанную в операторном виде)

$$\widehat{W}(p_{_D}, \lambda_h)\mathrm{col}\,[\hat{x}(t), y(t)] = 0_{(n+l)\times 1}, \quad t > \gamma h. \tag{41}$$

Если $p = 0$ является спектральным значением системы (4), то для однородной системы (41) будет нарушаться условие, аналогичное условию (7) (заметим, что множества спектральных значений систем (4) и (41) совпадают между собой). В этом случае нулевому выходу $(y = 0)$ системы (41) может соответствовать [10, 11], в отличии от системы (4), (5), ненулевое текущее состояние $\hat{x}_t$. Это означает, что любое состояние $\hat{x}_t$ системы (41), найденное по известному выходу y системы (41), при преобразовании (40) не совпадёт с состоянием системы (4), (5), отвечающим этому же выходу. Для того чтобы избежать такой ситуации, к соотношениями (41) добавим равенство

$$y(t) = C(\lambda_h)N_1(\lambda_h)\hat{x}(t), \quad t > \gamma h. \tag{42}$$

Простая проверка показывает, что для системы (41), (42) выполняется условие, аналогичное условию (7).

Подействуем на обе части системы (41) слева оператором $N(\lambda_h)$. На основании формулы (38) получим

$$\widehat{W}_1(p_{_D}, \lambda_h)\mathrm{col}\,[\hat{x}(t), y(t)] = 0_{(n+l)\times 1}, \quad t > \gamma_1 h, \tag{43}$$

где $\gamma_1 = \gamma + \nu$, $\nu = \deg_\lambda N(\lambda)$. Воспользовавшись блочной структурой матрицы $\widehat{W}_1(p, \lambda)$, систему (42), (43) запишем в виде двух уравнений, одно из которых описывает динамику изменения состояния системы (42), (43), а другое – выход этой системы:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \widehat{A}(\lambda_h)\hat{x}(t) + N_{12}(\lambda_h)\dot{y}(t), \quad t > \gamma_1 h, \tag{44}$$

$$\hat{y}(t) = \widehat{C}(\lambda_h)\hat{x}(t), \quad t > \gamma_1 h, \tag{45}$$

где

$$\widehat{C}(\lambda) = \begin{bmatrix} \widehat{C}_1(\lambda) \\ C(\lambda)N_1(\lambda) \end{bmatrix}$$

и функция $\hat{y}$ определяется равенством

$$\hat{y}(t) = \begin{bmatrix} N_{22}(\lambda_h)\dot{y}(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad t > \gamma_1 h. \tag{46}$$

Лемма 6. *Если выполнено условие (7), то*

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} pI_n - \widehat{A}(e^{-ph}) \\ \widehat{C}(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C}. \tag{47}$$

Доказательство. Предположим, что условие (47) нарушается при некотором $p_0 \in \mathbb{C}$. Тогда найдётся ненулевой вектор $\widehat{g} \in \mathbb{C}^n$ такой, что

$$(p_0 I_n - \widehat{A}(e^{-p_0 h}))\widehat{g} = 0_{n\times 1}, \quad \widehat{C}(e^{-p_0 h})\widehat{g} = 0_{2l\times 1}.$$

Эти соотношения запишем в развёрнутом виде:

$$(p_0 I_n - N_{11}(e^{-p_0 h})A(e^{-p_0 h})N_1(e^{-p_0 h}))\widehat{g} = 0_{n\times 1},$$

$$N_{21}(e^{-p_0 h})A(e^{-p_0 h})N_1(e^{-p_0 h})\widehat{g} = 0_{l\times 1},$$

$$C(e^{-p_0 h})N_1(e^{-p_0 h})\widehat{g} = 0_{l\times 1}. \tag{48}$$

В силу первых двух равенств (48) заключаем, что выполняется равенство

$$N(e^{-p_0h})\begin{bmatrix} p_0(I_n - D(e^{-p_0h}))N_1(e^{-p_0h}) - A(e^{-p_0h})N_1(e^{-p_0h}) & 0_{n\times l} \\ p_0C(e^{-p_0h})N_1(e^{-p_0h}) & -p_0I_l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widehat{g} \\ 0_{l\times 1} \end{bmatrix} = 0_{(n+l)\times 1},$$

из которого в силу третьего равенства в (48) следует, что

$$(p_0(I_n - D(e^{-p_0h})) - A(e^{-p_0h}))N_1(e^{-p_0h})\widehat{g} = 0_{n\times 1}, \quad C(e^{-p_0h})N_1(e^{-p_0h})\widehat{g} = 0_{l\times 1}. \tag{49}$$

Поскольку матрица $N_1(\lambda)$ является унимодулярной, то равенства (49) противоречат условию (7). Лемма доказана.

Пусть $\hat{c}_i(\lambda)$ – это строка матрицы $\widehat{C}(\lambda)$ с номером i, т.е. $\widehat{C}(\lambda) = \operatorname{col}[\hat{c}_1(\lambda), \ldots, \hat{c}_{2l}(\lambda)]$. В силу условия (47) для любого натурального i_0, $i_0 \in \{1, \ldots, 2l\}$, найдётся [6] матрица $L_{i_0}(\lambda) \in \in \mathbb{R}^{n\times 2l}[\lambda]$ такая, что

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} pI_n - \widehat{A}(e^{-ph}) - L_{i_0}(e^{-ph})\widehat{C}(e^{-ph}) \\ \hat{c}_{i_0}(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C}. \tag{50}$$

Используя матрицу $L_{i_0}(\lambda)$, обеспечивающую соотношение (50), и уравнения (44), (45), исходную систему (4), (5) заменим системой

$$\dot{\hat{x}}(t) = \widehat{A}_L(\lambda_h)\hat{x}(t) + Y(t), \quad t > \hat{t}_2, \tag{51}$$

$$\hat{y}_{i_0}(t) = \hat{c}_{i_0}(\lambda_h)\hat{x}(t), \quad t > \hat{t}_2, \tag{52}$$

где $\widehat{A}_L(\lambda) = \widehat{A}(\lambda) + L_{i_0}(\lambda)\widehat{C}(\lambda)$,

$$Y(t) = -L_{i_0}(\lambda_h)\hat{y}(t) + N_{12}(\lambda_h)\dot{y}(t), \tag{53}$$

$\hat{y}_{i_0}$ – компонента вектора $\hat{y}$ с номером i_0, число $\hat{t}_2$ определяется равенством $\hat{t}_2 = \gamma_2 h$, $\gamma_2 = = \gamma_1 + \nu_0$, $\nu_0 = \deg_\lambda L_{i_0}(\lambda)$.

Обозначим через $\hat{x}_0(t)$, $t > \hat{t}_2$, решение однородной системы (51) $(Y \equiv 0)$, порождаемое некоторой неизвестной начальной функцией $\hat{x}(t)$, $t \leqslant \hat{t}_2$, зависящей в силу замены (39) от решения системы (4), а через $\widehat{F}(t)$ фундаментальную матрицу однородной системы (51). Тогда по формуле Коши решение системы (51) запишется в виде

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_0(t) + \int\limits_{\hat{t}_2}^{t} \widehat{F}(t-\tau)Y(\tau)\,d\tau, \quad t > \hat{t}_2. \tag{54}$$

Согласно формуле (54) для восстановления решения x системы (4), (5) достаточно восстановить функцию $\hat{x}_0$, которая определяется системой

$$\dot{\hat{x}}_0(t) = \widehat{A}_L(\lambda_h)\hat{x}_0(t), \quad t > \hat{t}_2,$$
$$\hat{y}^0(t) = \hat{c}_{i_0}(\lambda_h)\hat{x}_0(t), \quad t > \hat{t}_3. \tag{55}$$

Здесь $\hat{y}^0$ – наблюдаемый выход, который определяется формулой

$$\hat{y}^0(t) = \hat{y}_{i_0}(t) - \hat{c}_{i_0}(\lambda_h)\int\limits_{\hat{t}_2}^{t} \widehat{F}(t-\tau)Y(\tau)\,d\tau, \quad t > \hat{t}_3,$$

а $\hat{t}_3 = \hat{t}_2 + (m + \deg_\lambda N_{21}(\lambda) + \deg_\lambda N_1(\lambda))h$. Система (55) представляет собой линейную автономную дифференциально-разностную систему запаздывающего типа с одномерным выходом.

Поскольку выполняется условие (50), то для этой системы существует финитный наблюдатель, который можно построить следуя п. 2. Для определённости считаем, что для системы (55) построен финитный наблюдатель (12), (13), при этом систему (12) запишем в виде

$$\dot{z}(t) = \overline{A}_L(p_D, \lambda_h)z(t) - e_{n+1}\hat{y}^0(t), \quad t > \hat{t}_0, \tag{56}$$

где матрица $\overline{A}_L(p,\lambda)$ имеет ту же структуру, что и матрица $\overline{A}(p,\lambda)$ системы (14), $\hat{t}_0 = \hat{t}_3 + t_0$, число t_0 определяется согласно п. 2. Для системы (56) определим выход

$$\bar{x}(t) = N_1(\lambda_h)\left([I_n, 0_{n\times 3}]z(t) + \int\limits_{\hat{t}_2}^{t} \widehat{F}(t-\tau)Y(\tau)\,d\tau\right), \quad t > \hat{t}_0 + \nu_1 h, \tag{57}$$

где $\nu_1 = \deg N_1(\lambda)$.

Уравнения (56), (57) определяют финитный наблюдатель для системы (4), (5). Действительно, в силу определения финитного наблюдателя, построенного для системы (55), существует момент времени $\hat{t}_1 > 0$ такой, что

$$[I_n, 0_{n\times 3}]z(t) - \hat{x}_0(t) \equiv 0, \quad t \geqslant \hat{t}_1. \tag{58}$$

Погрешность наблюдателя (56), (57) в силу формул (40), (54) удовлетворяет равенству

$$\bar{x}(t) - x(t) = N_1(\lambda_h)\left([I_n, 0_{n\times 3}]z(t) + \int\limits_{\hat{t}_2}^{t} \widehat{F}(t-\tau)Y(\tau)\,d\tau - \hat{x}(t)\right) =$$

$$= N_1(\lambda_h)([I_n, 0_{n\times 3}]z(t) - \hat{x}_0(t)), \quad t > \hat{t}_0 + \nu_1 h.$$

Поэтому из тождества (58) следует, что

$$\bar{x}(t) \equiv x(t), \quad t \geqslant t_1, \tag{59}$$

где $t_1 = \hat{t}_1 + h\nu_1$.

Рассуждения пп. 2, 3 резюмируем в виде следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть для системы (4), (5) выполняются условия (7), (8). Тогда существует финитный наблюдатель (56), (57), который реализует оценку $\bar{x}$ решения уравнения (4), удовлетворяющую тождеству (59).*

Замечание 4. Предположим, что класс начальных функций (3) системы (4), (5) состоит из функций $\varphi(t)$, $t \in [-mh, 0]$, имеющих на отрезке $[-mh, 0]$ кусочно-непрерывные производные до порядка ρ_0+1 включительно (напомним, что $\rho_0 = \max\{\deg_p f_1(p,\lambda) - \deg_p(\varphi_{n+1}(p,\lambda)-p), 0\}$, см. также (14)). Тогда, наряду с наблюдателем (56), (57), можно построить наблюдатель, для которого не требуется вычислять фундаментальную матрицу $\widehat{F}(t)$.

Пусть для системы (55) построен финитный наблюдатель, определяемый системой (56). Построим финитный наблюдатель для системы (51), (52). Рассмотрим систему

$$\dot{z}(t) = \overline{A}_L(p_D, \lambda_h)z(t) + F_y(t), \quad t > \hat{t}_2 + t_0, \tag{60}$$

где $F_y(t) = \overline{Y}(t) - e_{n+1}\hat{y}_{i_0}(t)$, $\overline{Y}(t) = \operatorname{col}[Y(t), 0_{3\times 1}]$. В силу утверждения 1 для решения системы (60) выполняется тождество

$$[I_n, 0_{n\times 3}]z(t) - \hat{x}(t) \equiv 0, \quad t \geqslant \hat{t}_1,$$

поэтому в силу формулы (40) справедливо равенство

$$x(t) = N_1(\lambda_h)[I_n, 0_{n\times 3}]z(t), \quad t \geqslant t_1.$$

Замечание 5. Финитный наблюдатель, задаваемый формулами (56), (57), определяется системой запаздывающего типа с конечным спектром. При этом функции $\hat{y}^0(t)$ и $\widehat{F}(t-\tau)Y(\tau)$, входящие в соотношения (56), (57), зависят от производной выхода исходной системы $\dot{y}$. Известно, что операция дифференцирования является чувствительной к малым изменениям функции. Поясним, как при формировании оценки решения системы (4), (5), избежать дифференцирования функции y.

Рассмотрим функцию Y, определяемую равенством (53). Заменив в нём функцию $\hat{y}$ согласно равенству (46), получим

$$Y(t) = -L_{i_0}(\lambda_h)\begin{bmatrix} N_{22}(\lambda_h)\dot{y}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + N_{12}(\lambda_h)\dot{y}(t). \tag{61}$$

Очевидно, что найдутся полиномиальные матрицы $Q_1(\lambda)$ и $Q_2(\lambda)$, с помощью которых функцию Y, заданную равенством (61), можно записать в виде

$$Y(t) = Q_1(\lambda_h)y(t) + Q_2(\lambda_h)\dot{y}(t).$$

Тогда, вычисляя интеграл (57) по частям, получаем

$$\int\limits_{\hat{t}_2}^{t} \widehat{F}(t-\tau)Y(\tau)\,d\tau = \int\limits_{\hat{t}_2}^{t} \widehat{F}(t-\tau)Q_1(\lambda_h)y(\tau)\,d\tau + \int\limits_{\hat{t}_2}^{t} \widehat{F}(t-\tau)Q_2(\lambda_h)\dot{y}(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{\hat{t}_2}^{t} \widehat{F}(t-\tau)Q_1(\lambda_h)y(\tau)\,d\tau + Q_2(\lambda_h)y(t) - \widehat{F}(t-\hat{t}_2)(Q_2(\lambda_h)y(\tau))\Big|_{\tau=\hat{t}_2} -$$

$$- \int\limits_{\hat{t}_2}^{t} \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\widehat{F}(t-\tau)\right) Q_2(\lambda_h)y(\tau)\,d\tau, \quad t > \hat{t}_0.$$

При нахождении решения z системы (56) по формуле Коши также следует воспользоваться интегрированием по частям вследствие равенства (53).

4. Финитный наблюдатель, не содержащий производную выхода. Рассмотрим другой подход к синтезу финитного наблюдателя, позволяющий избежать использования в его структуре производной выхода (5). По-прежнему предполагаем, что параметры системы (4), (5) удовлетворяют условиям (7), (8).

Рассмотрим систему (4), (5). В силу условия (8) найдутся [21] матрицы $\widetilde{L}_1(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times l}[\lambda]$ и $\widetilde{L}_2(\lambda) \in \mathbb{R}^{l\times l}[\lambda]$ такие, что справедливо тождество

$$|I_{n+r} - D_{\widetilde{L}}(\lambda)| \equiv 1, \tag{62}$$

где матрица $D_{\widetilde{L}}(\lambda)$ определяется равенством

$$D_{\widetilde{L}}(\lambda) = \begin{bmatrix} D(\lambda) & \lambda\widetilde{L}_1(\lambda) \\ C(\lambda) & \lambda\widetilde{L}_2(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Пусть

$$\Pi(\lambda) = \begin{bmatrix} \Pi_{11}(\lambda) & \Pi_{12}(\lambda) \\ \Pi_{21}(\lambda) & \Pi_{22}(\lambda) \end{bmatrix}$$

– матрица, обратная к матрице $(I_{n+r} - D_{\widetilde{L}}(\lambda))$, т.е. $\Pi(\lambda) = (I_{n+r} - D_{\widetilde{L}}(\lambda))^{-1}$. Здесь выполняются включения $\Pi_{11}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}[\lambda]$, $\Pi_{12}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times l}[\lambda]$, $\Pi_{21}(\lambda) \in \mathbb{R}^{l\times n}[\lambda]$, $\Pi_{22}(\lambda) \in \mathbb{R}^{l\times l}[\lambda]$.

В силу условия (62) имеем $\Pi(\lambda) \in \mathbb{R}^{(n+l)\times(n+l)}[\lambda]$, т.е. матрица $\Pi(\lambda)$ является полиномиальной. Введём функцию

$$\tilde{x}(t) = (I_n - D(\lambda_h))x(t), \quad t \geqslant 0. \tag{63}$$

Пусть $\chi(t)$, $(\chi \in \mathbb{R}^r,\ t \in \mathbb{R})$ – произвольная функция. Умножая очевидное равенство

$$\begin{bmatrix} I_n - D(\lambda_h) & -\lambda_h \widetilde{L}_1(\lambda_h) \\ -C(\lambda_h) & I_r - \lambda_h \widetilde{L}_2(\lambda_h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \chi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ -y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda_h \widetilde{L}_1(\lambda_h)\chi(t) \\ (I_r - \lambda_h \widetilde{L}_2(\lambda_h))\chi(t) \end{bmatrix}, \quad t \geqslant 0,$$

слева на матрицу $\Pi(\lambda)$, приходим к соотношению

$$x(t) = \Pi_{11}(\lambda_h)\tilde{x}(t) - \Pi_{12}(\lambda_h)y(t), \quad t \geqslant \gamma_2 h, \tag{64}$$

где $\gamma_2 = \max\{\tilde{\nu}_{1j},\ j = 1, 2\}$, $\tilde{\nu}_{ij} = \deg_\lambda \Pi_{ij}(\lambda)$. На основании формул (63), (64) систему (4), (5) запишем в виде

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \widetilde{A}(\lambda_h)\tilde{x}(t) - A(\lambda_h)\Pi_{12}(\lambda_h)y(t), \quad t > \gamma_3 h, \tag{65}$$

$$\tilde{y}(t) = \widetilde{C}(\lambda_h)\tilde{x}(t), \quad t \geqslant \gamma_3 h, \tag{66}$$

где $\widetilde{A}(\lambda) = A(\lambda)\Pi_{11}(\lambda)$,

$$\widetilde{C}(\lambda) = \begin{bmatrix} C(\lambda)\Pi_{11}(\lambda) \\ (I_n - D(\lambda))\Pi_{11}(\lambda) - I_n \end{bmatrix},$$

выходной сигнал $\tilde{y}(t)$, $t \geqslant \gamma_3 h$, является известной функцией и определяется формулой

$$\tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} I_r + C(\lambda_h)\Pi_{12}(\lambda_h) \\ (I_n - D(\lambda_h))\Pi_{12}(\lambda_h) \end{bmatrix} y(t), \quad t \geqslant \gamma_3 h,$$

$\gamma_3 = m + \gamma_2$. Уравнение (65) является неоднородным линейным автономным дифференциально-разностным уравнением запаздывающего типа с соизмеримыми запаздываниями и известной неоднородной частью $(-A(\lambda_h)\Pi_{12}(\lambda_h)y)$.

Лемма 7. *Если выполнено условие (7), то*

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} pI_n - \widetilde{A}(e^{-ph}) \\ \widetilde{C}(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C}. \tag{67}$$

Доказательство. Предположим противное: условие (7) выполнено, а равенство (67) нарушается при некотором $p = p_0 \in \mathbb{C}$. Выберем в качестве ненулевого вектора $q \in \mathbb{C}^n$ решение алгебраической системы

$$(p_0 I_n - \widetilde{A}(e^{-p_0 h}))q = 0, \quad \widetilde{C}(e^{-p_0 h})q = 0. \tag{68}$$

Положим $q_1 = \Pi_{11}(e^{-p_0 h})q$. Из второго равенства в (68) следует, что вектор q_1 отличен от нулевого. Тогда на основании (68) имеем $W(p_0, e^{-p_0 h})q_1 = 0_{n\times 1}$ и $C(e^{-p_0 h})q_1 = 0_{l\times 1}$. Но эти равенства противоречат условию (7). Лемма доказана.

Зафиксируем произвольный номер $i_0 \in \{1, \ldots, n+l\}$. В силу условия (67) найдётся [6] матрица $V_{i_0}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times(n+l)}[\lambda]$ такая, что

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} pI_n - \widetilde{A}(e^{-ph}) - V_{i_0}(e^{-ph})\widetilde{C}(e^{-ph}) \\ \tilde{c}_{i_0}(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C}, \tag{69}$$

где $\tilde{c}_{i_0}(\lambda)$ – строка матрицы $\widetilde{C}(\lambda)$ с номером i_0. Положим

$$\widetilde{A}_V(\lambda) = \widetilde{A}(\lambda) + V_{i_0}(\lambda)\widetilde{C}(\lambda), \quad \widetilde{Y}(t) = -A(\lambda_h)\Pi_{12}(\lambda_h)y(t) - V_{i_0}(\lambda_h)\tilde{y}(t),$$

$\tilde{y}_{i_0}(t)$ – компонента вектора $\tilde{y}$ с номером i_0. После этого, используя уравнения (65) и (66), систему (4), (5) заменим системой

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \widetilde{A}_V(\lambda_h)\tilde{x}(t) + \widetilde{Y}(t), \quad t > \tilde{t}_2,$$
$$\tilde{y}_{i_0}(t) = \tilde{c}_{i_0}(\lambda_h)\tilde{x}(t), \quad t \geqslant \tilde{t}_2, \tag{70}$$

где $\tilde{t}_2 = (\tilde{\nu}_0 + \gamma_3)h$, $\tilde{\nu}_0 = \deg_\lambda V_{i_0}(\lambda)$.

Решение системы (70) запишем по формуле Коши

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0(t) + \int\limits_{\tilde{t}_2}^{t} \widetilde{F}(t-\tau)\widetilde{Y}(\tau)\,d\tau, \quad t > \tilde{t}_2, \tag{71}$$

где $\tilde{x}_0(t)$, $t > \tilde{t}_2$, – решение однородной системы (70) ($\widetilde{Y} \equiv 0$), порождаемое некоторой неизвестной начальной функцией, зависящей, согласно формуле (63), от решения системы (4), а $\widetilde{F}(t)$ – фундаментальная матрица системы (70).

В силу формул (64), (71) для восстановления решения x системы (4), (5) достаточно восстановить функцию $\tilde{x}_0$, которая определяется системой

$$\dot{\tilde{x}}_0(t) = \widetilde{A}_V(\lambda_h)\tilde{x}_0(t), \quad t > \tilde{t}_2,$$
$$\tilde{y}^0(t) = \tilde{c}_{i_0}(\lambda_h)\tilde{x}_0(t), \quad t \geqslant \tilde{t}_3. \tag{72}$$

Здесь $\tilde{y}^0$ – наблюдаемый выход, определяемый формулой

$$\tilde{y}^0(t) = \tilde{y}_{i_0}(t) - \tilde{c}_{i_0}(\lambda_h)\int\limits_{\tilde{t}_2}^{t} \widetilde{F}(t-\tau)\widetilde{Y}(\tau)\,d\tau, \quad t > \tilde{t}_3,$$

а $\tilde{t}_3 = \tilde{t}_2 + (m + \tilde{\nu}_{11})h$. Система (72) представляет собой линейную автономную дифференциально-разностную систему запаздывающего типа с одномерным выходом, для которой выполняется условие (69). Поэтому для этой системы существует финитный наблюдатель, который можно построить следуя п. 2. Для определённости считаем, что для системы (72) построен финитный наблюдатель (12), (13), а система (12) записана в виде

$$\dot{z}(t) = \overline{A}_V(p_D\lambda_h)z(t) - e_{n+1}\tilde{y}^0(t), \quad t > \tilde{t}_0, \tag{73}$$

где матрица $\overline{A}_V(p,\lambda)$ имеет структуру, описываемую правой частью равенства (14), $\tilde{t}_0 = \tilde{t}_3 + t_0$, число t_0 определяется в п. 2. На основании соотношений (64) и (71) получаем следующую оценку $\bar{x}$ решения x системы (4), (5):

$$\bar{x}(t) = \Pi_{11}(\lambda_h)\bigg([I_n, 0_{n\times 3}]z(t) + \int\limits_{\tilde{t}_2}^{t} \widetilde{F}(t-\tau)\widetilde{Y}(\tau)\,d\tau\bigg) - \Pi_{12}(\lambda_h)y(t), \quad t > \tilde{t}_0 + \tilde{\nu}_{11}h. \tag{74}$$

Уравнения (73), (74) определяют финитный наблюдатель для системы (4), (5). Покажем это. В силу определения финитного наблюдателя, построенного для системы (72), существует момент времени $\tilde{t}_1 > 0$ такой, что

$$[I_n, 0_{n\times 3}]z(t) - \tilde{x}_0(t) \equiv 0, \quad t \geqslant \tilde{t}_1. \tag{75}$$

Погрешность оценки $\bar{x}$ наблюдателя (73), (74) в силу (64) и (71) удовлетворяет равенству

$$\bar{x}(t) - x(t) = \Pi_{11}(\lambda_h)\bigg([I_n, 0_{n\times 3}]z(t) + \int\limits_{\tilde{t}_2}^{t} \widetilde{F}(t-\tau)\widetilde{Y}(\tau)\,d\tau - \tilde{x}(t)\bigg) =$$
$$= \Pi_{11}(\lambda_h)([I_n, 0_{n\times 3}]z(t) - \tilde{x}_0(t)), \quad t > \tilde{t}_0 + \tilde{\nu}_{11}h.$$

Поэтому вследствие тождества (75) получаем, что

$$\bar{x}(t) \equiv x(t), \quad t \geqslant t_1, \tag{76}$$

где $t_1 = \tilde{t}_1 + \tilde{\nu}_{11} h$.

Подводя итог рассуждениям п. 2 и 4, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть для системы (4), (5) выполняются условия (7), (8). Тогда существует финитный наблюдатель (73), (74), который реализует оценку $\bar{x}$ решения уравнения (4), удовлетворяющую тождеству (76).*

Замечание 6. Если предположить, что класс начальных функций (3) системы (4), (5) состоит из функций, имеющих кусочно-непрерывные производные до порядка ρ_0 включительно, то, используя рассуждения замечания 4, можно построить финитный наблюдатель, не требующий вычисления фундаментальной матрицы $\widetilde{F}(t)$. Такой наблюдатель будет определяться системой

$$\dot{z}(t) = \overline{A}_V(p_D, \lambda_h) z(t) + \widetilde{F}_y(t), \quad t > \tilde{t}_2 + t_0,$$
$$x(t) \equiv \Pi_{11}(\lambda_h)[I_n, 0_{n\times 3}] z(t) - \Pi_{12}(\lambda_h) y(t), \quad t \geqslant t_1,$$

где $\widetilde{F}_y(t) = \overline{\overline{Y}}(t) - e_{n+1}\tilde{y}_{i_0}(t)$, $\overline{\overline{Y}}(t) = \mathrm{col}\,[\widetilde{Y}(t), 0_{3\times 1}]$.

5. Пример. Рассмотрим систему (4), (5) с матрицами

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C(\lambda) = [1+\lambda, 0]$$

и запаздыванием $h = \ln 2$. Простая проверка показывает, что условия (7), (8) выполнены.

а) Проиллюстрируем реализацию оценки (57). Вначале находим унимодулярные матрицы $N(\lambda)$ и $N_1(\lambda)$, обеспечивающие преобразование (37):

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1-\lambda & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}, \quad N_1(\lambda) = I_2,$$

и составляем блоки $N_{ij}(\lambda)$, $i, j = 1, 2$. После этого вычисляем матрицы $\widehat{A}(\lambda)$ и $\widehat{C}(\lambda)$ и записываем систему (44), (45), которая в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} (1-\lambda_h)/2 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{y}(t),$$

$$\hat{y}(t) = \begin{bmatrix} 1-\lambda_h^2 & 1+\lambda_h \\ 1+\lambda_h & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(t),$$

где

$$\hat{y}(t) = \begin{bmatrix} (1-\lambda_h)\dot{y}(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Далее выбираем число $i_0 = 2$ (вторую строку матрицы $\widehat{C}(\lambda)$) и находим матрицу $L_2(\lambda)$,

$$L_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

которая позволяет получить систему (51), (52) $(\hat{t}_2 = h)$:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{y}(t) - \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{y}(t), \quad t > \hat{t}_2,$$

$$\hat{y}_2(t) = [1+\lambda_h, 0]\hat{x}(t), \quad t \geqslant \hat{t}_2.$$

Далее для системы (55) при $\hat{t}_3 = 3h$ строим финитный наблюдатель (12), следуя шагам предложенной в п. 2 процедуры.

1) Вначале выбираем полиномы $\varphi_i(\lambda)$, $i = \overline{1,3}$, $d_0(p)$, обеспечивающие равенство (17). В данном случае можем взять $\varphi_i(\lambda) = 0$, $i = 1, 2$, $\varphi_3(\lambda) = -1$, $d_0(p) = p(p+1)(p-1)$. Теперь зададим характеристический полином матрицы (14). Согласно п. 1) процедуры его можно взять, например, в виде $d(p) = d_0(p)(p+2)(p-2)(p+3)$.

2) Далее следует обеспечить конечность множества решений системы (19). Для этого выберем $b_1 = 0$, $b_2 = 2$.

3) Находим полиномы $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, а именно:

$$a_1(\lambda) = (\lambda-8)(\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda-1)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\left(\lambda-\frac{1}{4}\right),$$

$$a_2(\lambda) = -(1/31)\lambda^5 + \frac{31\lambda^4}{60} - \frac{155\lambda^3}{56} + \frac{155\lambda^2}{24} - \frac{31\lambda}{4} + \frac{3879}{1085}.$$

4) Определяем векторный полином $q(\lambda) = [\lambda q_1(\lambda), q_2(\lambda)]$. После необходимых вычислений получаем

$$q_1(\lambda) = \frac{-1}{2781016066080000}(1811 - 2481\lambda + 790\lambda^2)(67056 - 67698\lambda + 32779\lambda^2 - 6517\lambda^3 + 420\lambda^4)\times$$
$$\times(93096 - 108714\lambda + 59461\lambda^2 - 12614\lambda^3 + 840\lambda^4)(59568 - 71121\lambda + 48527\lambda^2 - 11774\lambda^3 + 840\lambda^4),$$
$$q_2(\lambda) = \frac{-1}{6621466824000}(47789639902512 - 370092952633644\lambda + 1102423544237376\lambda^2 -$$
$$-1495170574909779\lambda^3 + 1222044685296108\lambda^4 - 648099963764831\lambda^5 + 227930209931054\lambda^6 -$$
$$-51881901955156\lambda^7 + 7207393605160\lambda^8 - 547550774400\lambda^9 + 17280144000\lambda^{10}).$$

5) Согласно (29) находим векторный полином $f(p,\lambda) = [\lambda f_1(p,\lambda), f_2(p,\lambda)]$, здесь

$$f_1(p,\lambda) = \frac{1}{854382816000}(-8+\lambda)(-4+\lambda)(-1+4\lambda)(1811 - 2481\lambda + 790\lambda^2)\times$$
$$\times(7988783616 + 2424219840p + 678081600p^2 - 37575407520\lambda - 5255132400p\lambda + 72040115700\lambda^2 +$$
$$+4379277000p\lambda^2 - 81298581900\lambda^3 - 1876833000p\lambda^3 + 59878769293\lambda^4 +$$
$$+350342160p\lambda^4 - 29829131010\lambda^5 - 21873600p\lambda^5 + 10059099325\lambda^6 - 2221928100\lambda^7 +$$
$$+302096116\lambda^8 - 22602720\lambda^9 + 705600\lambda^{10}),$$
$$f_2(p,\lambda) = \frac{-1}{2034244800}(39681595008 + 11341149120p + 2034244800p^2 - 400956231504\lambda -$$
$$-109327742160p\lambda + 2364797481444\lambda^2 + 550649886360p\lambda^2 - 6948849607388\lambda^3 - 750485377320p\lambda^3 +$$
$$+10681166767235\lambda^4 + 387578526720p\lambda^4 - 9634085091384\lambda^5 - 78584241120p\lambda^5 + 5490542253471\lambda^6 +$$
$$+5101756800p\lambda^6 - 2025337510542\lambda^7 + 474916910292\lambda^8 - 67225325032\lambda^9 +$$
$$+5170883200\lambda^{10} - 164572800\lambda^{11}).$$

Пользуясь видом матрицы (14), окончательно получаем наблюдатель (12). Непосредственной проверкой убеждаемся, что определитель характеристической матрицы (14) равен $d(p)$. Окончательно оценку решения находим по формуле (57), где $t_0 = 0$, $\hat{t}_0 = \hat{t}_3 + t_0 = 3h$, $\bar{t}_0 = 19h$. Вычисляя матрицу, присоединённую к матрице (14), получаем, что $\delta = 7$ (см. доказательство теоремы 1), поэтому $\hat{t}_1 = \hat{t}_0 + \bar{t}_0 + \delta h = 29h$, $t_1 = \hat{t}_1 = 29h$.

б) Рассмотрим теперь реализацию оценки (74). Находим [21] матрицы $\widetilde{L}_1(\lambda)$, $\widetilde{L}_2(\lambda)$, обеспечивающие тождество (62):

$$\widetilde{L}_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{L}_2(\lambda) = [-1/2].$$

Далее вычисляем матрицу $\Pi(\lambda)$, обратную к матрице $(I_3 - D_{\widetilde{L}}(\lambda))$:

$$\Pi(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-\lambda/2 & 0 & -\lambda/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda+1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}.$$

Теперь строим систему (65), (66), которая будет иметь следующий вид:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1-\lambda_h/2-\lambda_h^2/2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} - \begin{bmatrix} \lambda_h^2/2-\lambda_h/2 \\ 0 \end{bmatrix} y(t),$$

$$\tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_h^2/2+3\lambda_h/2+1 & 0 \\ -\lambda_h^2/2-\lambda_h/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t),$$

где

$$\tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_h^2/2+\lambda_h/2+1 \\ \lambda_h^2/2-\lambda_h/2 \\ 0 \end{bmatrix} y(t).$$

Далее выбираем номер $i_0 = 2$ и находим матрицу $V_2(\lambda)$ (см. (69)):

$$V_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Окончательно получаем неоднородную систему запаздывающего типа (70) $(\tilde{t}_2 = 2h)$:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) - \begin{bmatrix} \lambda_h^2/2-\lambda_h/2 \\ 0 \end{bmatrix} y(t) - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{y}(t), \quad t > \tilde{t}_2,$$

$$\tilde{y}_2(t) = [-\lambda_h^2/2 - 1/2, 0]\tilde{x}(t), \quad t \geqslant \tilde{t}_2.$$

На основании полученной системы записываем однородную систему (72) $(\tilde{t}_3 = 4h)$, для которой строим финитный наблюдатель (12). В данном случае функции $\varphi_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, $\varphi_3(p, \lambda)$, числа b_1, b_2, полиномы $d_0(p)$, $d(p)$, $a_1(\lambda)$, $a_2(p)$ возьмём такими же, как и в пункте а). После этого находим

$$q_1(\lambda) = \frac{1}{11124064264320000}(15439 - 22221\lambda + 7262\lambda^2)(67056 - 67698\lambda + 32779\lambda^2 - 6517\lambda^3 +$$

$$+420\lambda^4)(93096-108714\lambda+59461\lambda^2-12614\lambda^3+840\lambda^4)(59568-71121\lambda+48527\lambda^2-11774\lambda^3+840\lambda^4),$$

$$q_2(\lambda) = \frac{-1}{13242933648000}(95579279805024 + 1530780291432936\lambda - 4510961571442104\lambda^2 +$$

$$+ 6456712956921228\lambda^3 - 5380997274462633\lambda^4 + 2890251963977114\lambda^5 - 1026288639816701\lambda^6 +$$

$$+ 235362880595332\lambda^7 - 32883400769716\lambda^8 + 2508786225120\lambda^9 - 79423041600\lambda^{10}),$$

$$f_1(p, \lambda) = \frac{-1}{3417531264000}(-8 + \lambda)(-4 + \lambda)(-1 + 4\lambda)(15439 - 22221\lambda + 7262\lambda^2)(7988783616 +$$

$$+2424219840p+678081600p^2-37575407520\lambda-5255132400p\lambda+72040115700\lambda^2+4379277000p\lambda^2-$$
$$-81298581900\lambda^3-1876833000p\lambda^3+59878769293\lambda^4+350342160p\lambda^4-29829131010\lambda^5-21873600p\lambda^5+$$
$$+10059099325\lambda^6-2221928100\lambda^7+302096116\lambda^8-22602720\lambda^9+705600\lambda^{10}),$$

$$f_2(p,\lambda)=\frac{-1}{4068489600}(79363190016+22682298240p+4068489600p^2+706950535008\lambda+$$
$$+367284513120p\lambda-8550986632632\lambda^2-2292547069680p\lambda^2+28547458488080\lambda^3+$$
$$+3298289807400p\lambda^3-45868205683952\lambda^4-1747400945640p\lambda^4+42302146281009\lambda^5+$$
$$+358866145680p\lambda^5-24452419069086\lambda^6-23448707520p\lambda^6+9114030394725\lambda^7-$$
$$-2153950061364\lambda^8+306684620308\lambda^9-23691492832\lambda^{10}+756409920\lambda^{11}).$$

Подставляя найденные полиномы в матрицу (14), завершаем построение наблюдателя (12). Непосредственной проверкой убеждаемся, что определитель характеристической матрицы равен $d(p)$. Далее по формуле (74) получаем оценку решения системы (4), (5) с матрицами данного примера. В рассматриваемом случае $t_0=0$, $\tilde{t}_0=4h$, $\bar{t}_0=19h$, $\delta=11$, $\tilde{t}_1=\tilde{t}_0+\bar{t}_0+$ $+\delta h=34h$, $t_1=\hat{t}_1+h=35h$.

Замечание 7. В некоторых случаях момент времени $\bar{t}_0$, указанный в п. 2, можно уменьшить [9]. В частности для данного примера в части а) можно взять $\bar{t}_0=12h$, а в части б) $\bar{t}_0=0$. Также при непосредственных вычислениях иногда можно уменьшить и моменты времени $\hat{t}_i$, $\tilde{t}_i$, $i=1,2$. Так, в части а) данного примера можно взять $\hat{t}_3=2h$.

Заключение. Для линейной автономной дифференциально-разностной системы нейтрального типа предложены методы проектирования двух видов финитных наблюдателей, представляющих собой линейные автономные дифференциально-разностные системы запаздывающего типа с выходом. При этом указанные системы имеют конечный спектр, что существенно облегчает процесс восстановления решения. Реализация наблюдателя (56), (57) представляется в общем случае проще, поскольку процесс приведения полиномиальной матрицы к нормальной форме Смита относится к операции, встроенной в современные пакеты компьютерной алгебры. Кроме того, размер выхода вспомогательной системы (44), (45) равен $2l$, в то время как размер выхода вспомогательной системы (65), (66) равен $n+l$. В то же время недостатком наблюдателя (56), (57) (в отличии от наблюдателя (73), (74)) является наличие в его структуре производной выхода, от которой можно избавиться, применяя формулу интегрирования по частям.

В случае, если множество начальных состояний исходной системы нейтрального типа состоит из достаточное количество раз дифференцируемых функций, оценку решения можно записать в виде выхода системы запаздывающего типа, не содержащего слагаемых с фундаментальными матрицами $\widehat{F}(t)$ и $\widetilde{F}(t)$ (см. замечания 4, 6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sename O.* New trends in design of observers for time-delay systems // Kybernetika. 2001. V. 37. № 4. P. 427–458.
2. *Lee E.B., Olbrot A.W.* Observability and related structural results for linear hereditary systems // Int. J. Contr. 1981. № 34. P. 1061–1078.
3. *Pourboghrat F., Chyung D.H.* Exact state-variable reconstruction of delay systems // Int. J. Contr. 1986. V. 44. № 3. P. 867–877.
4. *Emre E., Khargonekar P.P.* Regulation of split linear systems over rings: coefficient-assignment and observers // IEEE Trans. Aut. Contr. 1982. V. 27. № 1. P. 104–113.
5. *Bhat K.P., Koivo H.N.* Modal characterization of controllability and observability of time-delay systems // IEEE Trans. on Aut. Contr. 1976. V. AC-21. № 2. P. 292–293.
6. *Watanabe K.* Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays // IEEE Trans. Aut. Contr. 1986. V. AC-31. № 6. P. 543–550.
7. *Ильин А.В., Буданова А.В., Фомичев В.В.* Синтез наблюдателей для асимптотически наблюдаемых систем с запаздыванием // Докл. РАН. 2013. Т. 448. № 4. С. 399–402.

8. *Метельский А.В.* Построение наблюдателей для дифференциальной системы запаздывающего типа с одномерным выходом // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 396–408.
9. *Метельский А.В.* Дифференциально-разностный наблюдатель для системы запаздывающего типа с одномерным выходом // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 4. С. 516–533.
10. *Минюк С.А., Метельский А.В.* Критерии конструктивной идентифицируемости и полной управляемости линейных стационарных систем нейтрального типа // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. № 5. С. 15–23.
11. *Хартовский В.Е., Павловская А.Т.* Полная управляемость и управляемость линейных автономных систем нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 2013. № 5. С. 59–80.
12. *Хартовский В.Е.* Синтез наблюдателей для линейных систем нейтрального тип // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 409–422.
13. *Хартовский В.Е.* К вопросу об асимптотической оценке решения линейных стационарных систем нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1701–1716.
14. *Метельский А.В., Хартовский В.Е.* Синтез финитного наблюдателя для линейных систем нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 2019. № 12. С. 80–102.
15. *Харитонов В.Л.* Управления на основе предиктора: задача реализации // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2015. № 4. С. 51–65.
16. *Mondie S., Mihiels W.* Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation // IEEE Trans. on Aut. Contr. 2003. V. 48. № 12. P. 2207–2212.
17. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984.
18. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1988.
19. *Kappel F.* On degeneracy of functional-differential equations // J. Differ. Equat. 1976. V. 22. № 2. P. 250–267.
20. *Прасолов В.В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. М., 1996.
21. *Хартовский В.Е.* Спектральное приведение линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 3. С. 375–390.

Белорусский национальный технический университет, г. Минск,
Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

Поступила в редакцию 09.10.2020 г.
После доработки 10.12.2020 г.
Принята к публикации 11.12.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 2, с. 286–292

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО ПРОБЛЕМАМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ ПРИ МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ им. М.В. ЛОМОНОСОВА*)

Ниже публикуются краткие аннотации докладов, состоявшихся в осеннем семестре 2020 г. (предыдущее сообщение о работе семинара дано в журнале “Дифференц. уравнения”. 2020. Т. 56. № 8; за дополнительной информацией обращаться по адресу: nds@cs.msu.su)**).

DOI: 10.31857/S037406412102014X

А.С. Фурсов, Ю.М. Мосолова, А. Османов (Москва, Россия, ВМК МГУ). “Особенности численной реализации алгоритма построения цифрового стабилизатора для параметрически неопределённой переключаемой системы” (14.09.2020).

Исследуется вопрос о построении численной процедуры расчёта цифрового регулятора для переключаемых систем с интервальной неопределённостью. Предлагаемая численная процедура основана на результатах работ [1, 2].

Рассматривается непрерывная скалярная переключаемая интервальная линейная система

$$\dot{x} = [A_\sigma]x + [b_\sigma]u, \quad y = [c_\sigma]x, \quad \sigma \in S_\tau, \tag{1}$$

где $\sigma\colon \mathbb{R}_+ \to I = \{1, \ldots, m\}$ – кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном промежутке; S_τ – множество всех переключающих сигналов σ, для которых время между любыми двумя соседними переключениями не меньше τ $(\tau = \text{const} > 0)$; $x \in \mathbb{R}^2$ – вектор состояния, $y \in \mathbb{R}$ – измеряемый скалярный выход, $u \in \mathbb{R}$ – управляющий вход; $[A_\sigma] = [A] \circ \sigma$ – композиция отображения $[A] : I \to \{[A_1], \ldots, [A_m]\}$ и переключающего сигнала σ; $[b_\sigma] = [b] \circ \sigma$ и $[c_\sigma] = [c] \circ \sigma$ – аналогичные композиции для отображений $[b]\colon I \to \{[b_1], \ldots, [b_m]\}$ и $[c]\colon I \to \{[c_1], \ldots, [c_m]\}$. Здесь $[A_i]$, $[b_i]$, $[c_i]$ $(i = \overline{1, m})$ – интервальные матрицы соответствующих размеров.

Определение 1 [1]. *Решением* уравнения состояния системы (1) при фиксированных режимах (c_i, A_i, b_i) $(c_i \in [c_i],\ A_i \in [A_i],\ b_i \in [b_i],\ i \in \{1, \ldots, m\})$, заданном управлении u, переключающем сигнале $\sigma \in S_\tau$ и начальном условии $x(0) = x_0$ называем вектор-функцию $x(t)$, являющуюся кусочно-дифференцируемым решением линейной нестационарной системы

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + b_{\sigma(t)}u, \quad x(0) = x_0.$$

Определение 2 [1]. *Пучком траекторий* уравнения состояния системы (1) при заданном управлении u, переключающем сигнале $\sigma \in S_\tau$ и начальном условии $x(0) = x_0$ называем множество $\mathfrak{X}$ решений $x(t)$ уравнения состояния системы (1) в смысле определения 1 при всех возможных режимах (c_i, A_i, b_i), где $c_i \in [c_i]$, $A_i \in [A_i]$, $b_i \in [b_i]$ $(i = \overline{1, m})$.

Для заданного алгоритма управления u (в форме обратной связи), наряду с каждым пучком траекторий $\mathfrak{X}$ системы (1), будем рассматривать соответствующий пучок управляющих сигналов $\mathfrak{U}$.

Определение 3 [1]. *Сечением* пучка траекторий $\mathfrak{X}$ уравнения состояния системы (1) в момент времени $t = t^*$ при заданном управлении u, переключающем сигнале $\sigma \in S_\tau$ и начальном условии $x(0) = x_0$ называем множество $\mathfrak{X}_{t^*}$ значений решений $x \in \mathfrak{X}$ при $t = t^*$, т.е. $\mathfrak{X}_{t^*} = \{x(t^*) : x(\cdot) \in \mathfrak{X}\}$.

---

*) Семинар основан академиками РАН С.В. Емельяновым и С.К. Коровиным.

**) Составитель хроники А.В. Ильин.

Аналогично определяем сечение пучка управляющих сигналов $\mathfrak{U}_{t^*} = \{u(t^*) : u(\cdot) \in \mathfrak{U}\}$. Норму сечения пучка траекторий $\|\mathfrak{X}_{t^*}\|$ и соответствующую норму пучка управляющих сигналов $\|\mathfrak{U}_{t^*}\|$ определяем следующим образом:

$$\|\mathfrak{X}_{t^*}\| = \sup_{x(t^*)\in\mathfrak{X}} \|x(t^*)\| \quad \text{и} \quad \|\mathfrak{U}_{t^*}\| = \sup_{u(t^*)\in\mathfrak{U}} \|u(t^*)\|.$$

Для положительных чисел T и τ через $S_{\tau,T}$ обозначим множество переключающих сигналов σ таких, что точки разрыва функций $\sigma(t)$ принадлежат последовательности $\{lT\}_{l=0}^{\infty}$ и расстояние между любыми точками разрыва не меньше τ.

Определение 4 [1]. Переключаемую интервальную линейную систему (1) при заданном управлении u (в форме обратной связи; в частности, при $u \equiv 0$) будем называть S_τ-*устойчивой* ($S_{\tau,T}$-*устойчивой*), если при любых $x(0) = x_0$ и $\sigma \in S_\tau$ $(\sigma \in S_{\tau,T})$ для соответствующих пучков траекторий и управляющих сигналов выполнено условие

$$\|\mathfrak{X}_t\| + \|\mathfrak{U}_t\| \to 0 \quad \text{при } t \to \infty.$$

Постановка задачи цифровой $S_{\tau,T}$-стабилизации. Для объекта (1) с заданным $\tau > 0$ необходимо построить цифровой регулятор по выходу

$$v[(l+1)T] = Qv[lT] + qy[lT], \quad u[lT] = Hv[lT] + hy[lT], \quad T < \tau, v \in \mathbb{R}^1, \quad Q, q, H, h \in \mathbb{R}^1, \tag{2}$$

который обеспечивает $S_{l_0T,T}$-устойчивость в нуле замкнутой непрерывно-дискретной переключаемой системы при некотором натуральном l_0 таком, что $l_0 T \leqslant \tau$.

Для решения задачи цифровой стабилизации системы (1) осуществляется переход (на основе метода точной дискретизации, описанного в [1, 2]) от исходной непрерывной переключаемой системы к её дискретной модели

$$\begin{aligned} x[(l+1)T] &= [\Lambda_\sigma]x[lT] + [\mu_\sigma]u[lT], \\ y[lT] &= [c_\sigma]x[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,T}, \end{aligned} \tag{3}$$

для которой решается задача $S_{\tau,T}$-стабилизации. Рассчитанный для системы (3) регулятор решает также задачу $S_{\tau,T}$-стабилизации системы (1).

В соответствии с работой [1] поиск регулятора (2), обеспечивающего $S_{\tau,T}$-стабилизацию системы (3), осуществляем следующим образом: в пространстве параметров регулятора $(Q, q, H, h) \in \mathbb{R}^4$ фиксируем прямоугольную окрестность нуля и накладываем на неё сетку с шагом d (выбор размера окрестности и шага сетки произволен, отсчёт узлов сетки ведётся с нуля в $\mathbb{R}^4$). При этом каждому узлу сетки соответствует конкретный регулятор.

Для каждого узла сетки, замыкая систему (3) регулятором (2), получаем точную дискретную модель замкнутой системы с m режимами вида

$$\begin{aligned} x[(l+1)T] &= ([\Lambda_i] + [\mu_i]h[c_i])x[lT] + [\mu_i]Hv[lT], \\ v[(l+1)T] &= q[c_i]x[lT] + Qv[lT], \quad i = \overline{1,m}. \end{aligned} \tag{4}$$

При этом осуществляется проверка того, является ли данный цифровой регулятор одновременно стабилизирующим для конечного семейства систем (4) с помощью системы линейных матричных неравенств относительно неизвестных матриц L_i $(i = \overline{1,m})$:

$$\begin{gathered} L_i > 0, \\ \widetilde{\Lambda}_{i,\nu}^{\mathrm{T}} L_i \widetilde{\Lambda}_{i,\nu} - L_i < 0, \\ \widetilde{\Lambda}_{i,\nu}^{\mathrm{T}} L_i \widetilde{\Lambda}_{i,\eta} + \widetilde{\Lambda}_{i,\eta}^{\mathrm{T}} L_i \widetilde{\Lambda}_{i,\nu} - 2L_i < 0, \quad \nu, \eta \in \{1, \ldots, 512\}, \quad \nu \neq \eta, \end{gathered} \tag{5}$$

где $\widetilde{\Lambda}_{i,\nu}$, $\widetilde{\Lambda}_{i,\eta}$ – вершинные матрицы для интервального семейства:

$$\widetilde{x}[(l+1)T] = [\widetilde{\Lambda}_i]\widetilde{x}[lT], \quad i = \overline{1,m},$$

где $\widetilde{x} = (x, v)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^3$;

$$[\widetilde{\Lambda}_i] = \begin{pmatrix} [\Lambda_{11}^i] & [\Lambda_{12}^i] \\ [\Lambda_{21}^i] & \Lambda_{22}^i \end{pmatrix},$$

$$[\Lambda_{11}^i] = [\Lambda_i] + [\mu_i]h[c_i], \quad [\Lambda_{12}^i] = [\mu_i]H, \quad [\Lambda_{21}^i] = q[c_i], \quad \Lambda_{22}^i = Q.$$

Если система (5) имеет решение, то соответствующий регулятор является одновременно стабилизирующим для семейства (4). При этом он обеспечивает $S_{\tau,T}$-стабилизацию системы (1) при $\tau \geqslant l_0T$, где $l_0 = [-2\log_{\gamma_*} C_*] + 1$. Здесь $[\cdot]$ – целая часть числа. Константы C_*, γ_* зависят от собственных значений матриц L_i (формулы для их вычислений указаны в работе [1]).

Для уменьшения величины l_0 предлагается вместо системы (5) рассмотреть систему линейных матричных уравнений:

$$L_i = -\varkappa_i I,$$

$$\widetilde{\Lambda}_{i,\nu}^{\text{т}} L_i \widetilde{\Lambda}_{i,\nu} - L_i = -\varkappa_i I,$$

$$\widetilde{\Lambda}_{i,\nu}^{\text{т}} L_i \widetilde{\Lambda}_{i,\eta} + \widetilde{\Lambda}_{i,\eta}^{\text{т}} L_i \widetilde{\Lambda}_{i,\nu} - 2L_i = -\varkappa_i I, \quad \nu, \eta \in \{1, \ldots, 512\}, \quad \nu \neq \eta.$$

Предполагается, что если варьировать положительные параметры $\varkappa_i$ от 0 до $\varkappa_i^*$, то можно получить такие решения L_i системы (5), на которых минимизируется величина l_0.

Предложенная численная процедура позволит уменьшить время задержки, при котором цифровой регулятор с заданной структурой стабилизирует переключаемую линейную интервальную систему (1).

Подчеркнём, что предложенная численная процедура построения цифрового стабилизатора может быть использована и в случае произвольной размерности параметрически неопределённой переключаемой системы. При этом, естественно, увеличение размерности потребует существенно бо́льших вычислительных затрат.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 20-57-001_Бел-а, 20-07-00827_а) и содействии Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

Литература.

1. Фурсов А.С., Миняев С.И., Мосолова Ю.М. Синтез цифрового стабилизатора по выходу для переключаемой интервальной линейной системы // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 11. С. 1545–1559. 2. Фурсов А.С., Мосолова Ю.М., Миняев С.И. Цифровая сверхстабилизация переключаемой интервальной линейной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1516–1527.

С.С. Будзинский (Москва, Россия, ВМК МГУ). “Автоколебания в иерархии моделей нелинейной оптической системы с запаздыванием” (26.10.2020).

Рассматривается модель оптической системы с узкой кольцевой апертурой с близкими между собой внутренним r и внешним R радиусами и запаздыванием в контуре обратной связи (КОС)

$$u_t(\theta,\rho,t) = -u(\theta,\rho,t) + D\Delta u(\theta,\rho,t) + K|\mathbf{B}[e^{iu(\theta,\rho,t-T)}]|^2, \quad r < \rho < R,$$
$$u_\rho|_{\rho=r} = u_\rho|_{\rho=R} = 0. \tag{1}$$

Здесь $\Delta = \partial^2/\partial\rho^2 + \rho^{-1}\partial/\partial\rho + \rho^{-2}\partial^2/\partial\theta^2$ – оператор Лапласа в полярных координатах, а D, T и K – положительные постоянные. Искомая функция $u(\theta,\rho,t)$ имеет смысл фазового набега, а нелинейное слагаемое описывает распределение интенсивности излучения на апертуре в конце КОС. Параметр K пропорционален интенсивности используемого излучения, а линейный оператор $\mathbf{B}$ ставит в соответствие комплексной амплитуде в начале КОС, $A(\theta,\rho,z)|_{z=0}$, её же на расстоянии z_0 в конце КОС, $A(\theta,\rho,z)|_{z=z_0}$, где $A(\theta,\rho,z)$ – решение задачи Коши для линейного уравнения Шрёдингера:

$$A_z(\theta,\rho,z) + i\Delta A(\theta,\rho,z) = 0, \quad r < \rho < R, \quad z > 0,$$
$$A_\rho|_{\rho=r} = A_\rho|_{\rho=R} = 0, \quad A(\theta,\rho,0) = e^{iu(\theta,\rho,t-T)}. \tag{2}$$

Задача (1) имеет постоянное решение $u(\theta,\rho,t)\equiv K$. В докладе исследуется, как при изменении параметра K потеря этой точкой покоя устойчивости может приводить к образованию автоколебаний. В частности изучается возможность конструктивно предсказывать наличие автоколебаний по физическим параметрам системы (1).

Придадим параметру нелинейности малое возмущение μ и рассмотрим локализованную в окрестности точки покоя систему

$$v_t(\theta,\rho,t)=-v(\theta,\rho,t)+D\Delta v(\theta,\rho,t)+(K+\mu)\{|\mathbf{B}[e^{iv(\theta,\rho,t-T)}]|^2-1\} \tag{3}$$

как абстрактную динамическую систему. Система (3) обладает группой симметрий $O(2)$: вместе с $v(\theta,\rho,t)$ решениями будут также $v(2\pi-\theta,\rho,t)$ и $v([\theta+\delta]\bmod 2\pi,\rho,t)$ для произвольного $0<\delta<2\pi$. Поэтому при выполнении условий бифуркации Андронова–Хопфа динамика описывается следующей нормальной формой на центральном многообразии:

$$\dot s_1=s_1(C_1\mu+C_2s_1^2+C_3s_2^2),\quad \dot\phi_1=\omega,$$
$$\dot s_2=s_2(C_1\mu+C_2s_2^2+C_3s_1^2),\quad \dot\phi_2=\omega. \tag{4}$$

Соотношения между коэффициентами C_2 и C_3 определяют существование автоколебаний. У задачи (1) есть орбитально асимптотически устойчивые решения вида вращающихся волн при

$$C_2<0,\quad C_2+C_3<0,\quad C_2-C_3>0,$$

а орбитально асимптотически устойчивое решение вида стоячей волны существует при

$$C_2<0,\quad C_2+C_3<0,\quad C_2-C_3<0.$$

Однако коэффициенты C_2 и C_3 нормальной формы (4) для задачи (1) не выражаются явным образом через физические параметры модели, что препятствует конструктивному предсказанию автоколебаний [1]. В то же время динамика задач в тонких областях тесно связана с динамикой предельных задач в областях меньшей размерности [2].

Для задачи (1) предельная задача на окружности ставится, исходя из известных асимптотических свойств спектра оператора Лапласа–Неймана:

$$\widetilde u_t(\theta,t)=-\widetilde u(\theta,t)+\widetilde D\widetilde u_{\theta\theta}(\theta,t)+K|\widetilde{\mathbf{B}}[e^{i\widetilde u(\theta,t-T)}]|^2,\quad 0\leqslant\theta<2\pi,$$
$$\widetilde u|_{\theta=0}=\widetilde u|_{\theta=2\pi},\quad \widetilde u_\theta|_{\theta=0}=\widetilde u_\theta|_{\theta=2\pi}. \tag{5}$$

Здесь $\widetilde D=D/r^2$, а оператор $\widetilde{\mathbf{B}}$ решает одномерный аналог задачи Коши (2) с $\widetilde z_0=z_0/r^2$. Задача (5) также обладает группой симметрий $O(2)$, в отличие от (1) для неё все коэффициенты нормальной формы (4) вычисляются явно [3], и значит, существует конструктивный критерий проверки существования автоколебаний на окружности.

Численные эксперименты показывают, что в случае узкого кольца, исходя из данных “одномерных” критериев, можно делать выводы о существовании автоколебаний в кольце [1]. Таким образом, возникает иерархия моделей:

модель в тонком кольце $\to$ модель на окружности $\to$ нормальная форма.

Схожие рассуждения можно применить для анализа задачи вида (1), снабжённой краевыми условиями на наклонную производную

$$(\rho u_\rho-\operatorname{tg}(\alpha)u_\theta)|_{\rho=r,R}=0,\quad \alpha\neq 0. \tag{6}$$

Спектр оператора Лапласа с краевыми условиями (6) обладает аналогичными асимптотическими свойствами [4], что позволяет поставить предельную задачу на окружности вида (5) с $\widetilde D=D/(r\cos\alpha)^2$ и $\widetilde z_0=z_0/(r\cos\alpha)^2$. Использование иерархии моделей для анализа автоколебаний в данном случае приводит к обнаружению в численных экспериментах вращающихся и пульсирующих спиральных волн в тонком кольце. При этом пульсирующие спирали – ранее не описанный класс решений, который образуется вследствие несоответствия групп симметрий исходной задачи с наклонной производной, $SO(2)$, и предельной задачи, $O(2)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение № 075-15-2019-1624).

Литература. 1. Budzinskiy S.S., Larichev A.V., Razgulin A.V. Reducing dimensionality to model 2D rotating and standing waves in a delayed nonlinear optical system with thin annulus aperture // Nonlin. Anal. Real World Appl. 2018. V. 44. P. 559–572. 2. Hale J., Raugel G. Reaction-diffusion equation on thin domains // J. de Math. Pures et Appl. 1992. T. 71. № 1. P. 33–95. 3. Budzinskiy S., Razgulin A. Normal form of $O(2)$ Hopf bifurcation in a model of a nonlinear optical system with diffraction and delay // Electr. J. of Qualit. Theory of Differ. Equat. 2017. № 50. P. 1–12. 4. Будзинский С.С. О нулях перекрестных произведений функций Бесселя из краевых задач с наклонной производной // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2020. № 2. С. 3–10.

Ю.А. Комаров (Москва, Россия, ВМК МГУ). “Векторный гамильтонов формализм для задач оптимизации управляемого движения” (09.11.2020).

Доклад посвящён методам решения задач оптимизации движения управляемых динамических систем в непрерывном и дискретном времени с векторным критерием. В то время как скаляризация многомерного функционала порождает ошибку аппроксимации и не позволяет отыскать всю границу Парето, необходимую для принятия решения в реальных векторных задачах, предлагаемый в настоящей работе векторный гамильтонов формализм позволяет описать эволюцию во времени всего паретовского фронта.

В докладе рассматриваются векторные функционалы качества, принимающие значения в частично упорядоченном пространстве $(\mathbb{R}^p, \leqslant)$ с паретовским отношением порядка.

Определение 1. Будем говорить, что вектор $y = (y_1, \ldots, y_p)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^p$ *доминируется по Парето* вектором $\hat{y} = (\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_p)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^p$, если $y \neq \hat{y}$ и выполнены покомпонентные неравенства $\hat{y}_i \leqslant y_i, \quad i = \overline{1, p}$.

Введённое отношение на $\mathbb{R}^p$ является отношением порядка, которое будем называть *порядком по Парето* и обозначать через $\leqslant$, т.е. $\hat{y} \leqslant y$, если выполнены условия определения 1.

Определение 2. *Границей Парето*, или *паретовским фронтом*, множества $Y \subset (\mathbb{R}^p, \leqslant)$ будем называть множество $\mathbf{Min}\, Y$ всех минимальных в смысле порядка по Парето элементов из Y, т.е.

$$\mathbf{Min}\, Y = \{\hat{y} \in Y : \text{не существует } y \in Y \text{ такого, что } y \leqslant \hat{y}\}.$$

В первой части доклада рассматривается управляемая динамическая система в дискретном времени вида

$$x_{t+1} = f(t, x_t, u_t), \quad t = \overline{0, T-1},$$
$$x_0 = x^0, \quad u_t \in \mathcal{P}_t,$$
$$x_t \in \mathbb{R}^n, \quad u_t \in \mathbb{R}^m.$$

Необходимо описать динамику границы Парето значений векторного функционала

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}(0, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \sum_{s=0}^{T-1} \boldsymbol{\mathcal{L}}(s, x_s, u_s) + \boldsymbol{\varphi}(x_T),$$

где функции $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ заданы и $\boldsymbol{\mathcal{J}}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{\mathcal{L}}(s, x, u), \boldsymbol{\varphi}(x) \in \mathbb{R}^p$, а также найти все допустимые стратегии управления $\boldsymbol{u} = [u_0, \ldots, u_{T-1}]$, приводящие на границу $\mathbf{Min}\, \boldsymbol{\mathcal{J}}(0, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$.

Подход к построению решения этой задачи основан на методе динамического программирования. Для этого вводится векторная функция цены (многозначная функция) вида $\boldsymbol{\mathcal{V}}(t, x) = \mathcal{Z}(t, x)$. Для неё справедливы следующие аналоги принципа оптимальности и уравнения Беллмана.

Предложение 1. *Пусть существует граница Парето* $\mathbf{Min}\,\mathcal{Z}(0,x^0)$. *Тогда для любого* $t=\overline{0,T}$ *для* $\boldsymbol{\mathcal{V}}(\,\cdot\,,\cdot\,)$ *выполняется соотношение*

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(0,x^0)=\mathbf{Min}\bigg\{\sum_{s=0}^{t}\boldsymbol{\mathcal{L}}(s,\bar{x}_s,\bar{u}_s)+\boldsymbol{\mathcal{V}}(t+1,x_{t+1}[\bar{\boldsymbol{u}}]):\bar{\boldsymbol{u}}=\{\bar{u}_s\}_{s=0}^{t},\quad \bar{u}_s\in\mathcal{P}_s\bigg\}.$$

Предложение 2. *Пусть существует граница Парето* $\mathbf{Min}\,\mathcal{Z}(0,x^0)$. *Тогда функция* $\boldsymbol{\mathcal{V}}(t,x)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(t,x)=\mathbf{Min}\,\{\boldsymbol{\mathcal{L}}(t,x,u)+\boldsymbol{\mathcal{V}}(t+1,f(t,x,u)):u\in P_t\},\quad t=\overline{T-1,0},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(T,\cdot\,)=\boldsymbol{\varphi}(\cdot).$$

В отличие от задач со скалярным критерием последнее предложение определяет лишь необходимые, но не достаточные условия для отыскания векторной функции цены.

Во второй части доклада рассматривается управляемая динамическая система в непрерывном времени вида

$$\dot{x}=f(t,x,u),\quad t\in[t_0,\vartheta],$$
$$x(t_0)=x^0,$$
$$u(t)\in\mathcal{P}(t),\quad t\in[t_0,\vartheta],$$

с векторным функционалом в форме Майера–Больца:

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}(t_0,x(\cdot),u(\cdot))=\int_{t_0}^{\vartheta}\boldsymbol{\mathcal{L}}(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau+\boldsymbol{\varphi}(x(\vartheta)).$$

Здесь $x(t)\in\mathbb{R}^n$, $u(t)\in\mathbb{R}^m$, а функции $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ заданы и $\boldsymbol{\mathcal{J}}(t,x(\cdot),u(\cdot)),\boldsymbol{\mathcal{L}}(\tau,x,u),\boldsymbol{\varphi}(x)\in\mathbb{R}^p$. Необходимо описать динамику границы Парето значений указанного векторного функционала, а также отыскать все минимизирующие стратегии управления $u(\cdot)$.

Для векторной функции цены вида $\boldsymbol{\mathcal{V}}(t,x)=\mathbf{Min}\,\mathcal{Z}(t,x)$ справедливы векторные аналоги принципа оптимальности и уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана.

Предложение 3. *Пусть граница Парето* $\mathbf{Min}\,\mathcal{Z}(t_0,x^0)$ *существует. Тогда для любого* $t\in[t_0,\vartheta]$ *для* $\boldsymbol{\mathcal{V}}(\cdot\,,\cdot\,)$ *выполняется векторный аналог принципа оптимальности в виде*

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(t_0,x^0)=\mathbf{Min}\bigg\{\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\mathcal{L}}(\tau,\bar{x}[\tau],\bar{u}(\tau))\,d\tau+\boldsymbol{\mathcal{V}}(t,\bar{x}[t]):\bar{u}(\tau)\in\mathcal{P}(\tau)\bigg\}.$$

Предложение 4. *Пусть граница Парето множества* $\mathcal{Z}(t_0,x^0)$ *существует. Тогда введённая векторная функция цены* $\boldsymbol{\mathcal{V}}(t,x)$ *удовлетворяет эволюционному уравнению*

$$\lim_{\sigma\to+0}\frac{1}{\sigma}\boldsymbol{h}\bigg(\boldsymbol{\mathcal{V}}(t,x),\mathbf{Min}\bigg\{\int_{t}^{t+\sigma}\boldsymbol{\mathcal{L}}(\tau,\bar{x}[\tau],\bar{u}(\tau))\,d\tau+\boldsymbol{\mathcal{V}}(t+\sigma,\bar{x}[t+\sigma])\bigg\}\bigg)=0,$$
$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(\vartheta,\cdot\,)=\boldsymbol{\varphi}(\cdot).$$

А.С. Фурсов, А.В. Мальцева, Д. Миниахметов (Москва, Россия, ВМК МГУ). “Некоторые аспекты вычислительной процедуры построения стабилизатора для переключаемых систем с режимами различных порядков” (30.11.2020).

Решается задача разработки вычислительной процедуры построения стабилизатора для переключаемых систем с режимами различных порядков в соответствии с методами, изложенными в работе [1]. Для реализации указанной процедуры предполагается использовать систему MATLAB, в которой для нахождения решений дифференциальных уравнений будем использовать метод Эйлера первого порядка.

Рассматривается переключаемая линейная система

$$\dot{x}^{(\sigma)} = A_\sigma x^{(\sigma)} + b_\sigma u, \tag{1}$$

где $\sigma \in \{1, \ldots, m\}$ – переключающий сигнал, m – количество различных режимов (динамических систем вида $\dot{x}^{(i)} = A_i x^{(i)} + b_i u$). Считаем, что режимы могут иметь различные динамические порядки от первого до третьего. В каждый момент времени функционирование системы определяется каким-то одним из этих m режимов, а моменты переключения кратны некоторой положительной величине (моменты переключения и режим функционирования системы между моментами переключения определяются случайным образом).

Преемственность режимов в моменты переключений обеспечивается матрицами преемственности $Z_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$, где Z_{ij} осуществляет преобразование конечного состояния j-го режима в начальное состояние i-го режима в момент времени t_{ij} по правилу $x^{(i)}(t_{ij}) = Z_{ij} x^{(j)}(t_{ij})$.

Основные шаги вычислительной процедуры. В работе [1] для системы (1) предлагается использовать метод расширения динамического порядка, позволяющий преобразовать все режимы к одному (максимальному) порядку

$$\dot{x} = \bar{A}_i x + \bar{b}_i u, \quad i = \overline{1, m}. \tag{2}$$

Задача поиска регулятора $u = -kx$, стабилизирующего все расширенные режимы (2), сводится к решению системы линейных матричных неравенств

$$\bar{H}\bar{A}_i^{\mathrm{T}} + \bar{A}_i\bar{H} - (\bar{k}^{\mathrm{T}}\bar{b}_i^{\mathrm{T}} + \bar{b}_i\bar{k}) < 0, \quad \bar{H} > 0. \tag{3}$$

Численное решение системы (3) может быть реализовано в MatLab с помощью пакета LMI.

В случае существования решения системы (3) вектор параметров регулятора задаётся равенством $k = \bar{k}H$, где $H = \bar{H}^{-1}$.

Полученный регулятор $u = -kx$ будет стабилизировать систему (1), если для всех матриц преемственности выполняются неравенства $\|Z_{ij}\|_2^2 \leqslant \theta$, где $\theta = \lambda_{\min}(\bar{H}^{-1})/\lambda_{\max}(\bar{H}^{-1})$, $\lambda_{\min}(\bar{H}^{-1})$ и $\lambda_{\max}(\bar{H}^{-1})$ – минимальное и максимальное собственные значения матрицы $\bar{H}^{-1}$ соответственно.

В связи с этим предлагается немного модифицировать алгоритм нахождения вектора k с целью максимизации соответствующего параметра θ. Для этого вместо системы линейных матричных неравенств (3) будем решать систему линейных уравнений

$$\bar{H}\bar{A}_i^{\mathrm{T}} + \bar{A}_i\bar{H} - (\bar{k}^{\mathrm{T}}\bar{b}_i^{\mathrm{T}} + \bar{b}_i\bar{k}) = -\mu I, \quad \bar{H} > 0, \tag{4}$$

где I – единичная матрица, а положительный параметр μ пробегает с некоторым шагом фиксированный промежуток $(0, \mu^*]$.

Пусть M – множество параметров μ, при которых разрешима система (4). Для каждого $\mu_i \in M$ найдём вектор параметров регулятора k_i и значение θ_i. Обозначим $\bar{\theta} = \max \theta_i$. Тогда, если для всех матриц преемственности будут выполнены неравенства $\|Z_{ij}\|_2^2 \leqslant \bar{\theta}$, то регулятор $u = -k_i x$ решает задачу стабилизации системы (1).

Отметим, что предложенная численная процедура может быть также применена для поиска стабилизирующего регулятора в случае произвольной размерности режимов переключаемой системы. При этом увеличение размерности, естественно, потребует существенно бóльших вычислительных затрат.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-57-001 Бел-а).

Литература. 1. Фурсов А.С., Капалин И.В. Некоторые подходы к стабилизации переключаемых линейных систем с режимами различных динамических порядков // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1693–1700.