

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

---

Экспериментальные исследования процессов деформирования, разрушения и фильтрации в горных породах <i>В. И. Карев, В. В. Химуля, Н. И. Шевцов</i>	3
Моделирование вязкоупруго-вязкопластического поведения гибких армированных пластин <i>А. П. Янковский</i>	27
Управление формой слоистых композитных пластин с пьезоэлектрическими накладками при тепловом нагружении на основе метода отсчетных поверхностей <i>Г. М. Куликов, С. В. Плотникова</i>	45
Использование комбинированного критерия качества в динамической задаче оптимального разворота твердого тела (космического аппарата) с ограничением на фазовые переменные <i>М. В. Левский</i>	64
К расчету нелинейного продольного изгиба стержня <i>К. Н. Анахаев</i>	92
Расчет формообразования космической зонтичной антенны при сильном изгибе радиальных стержней, связанных по параллелям растяжимыми тросами <i>С. В. Русских, Ф. Н. Шклярчук</i>	99
Теоретические аспекты применения волн Похгаммера–Кри к задачам определения динамического коэффициента Пуассона <i>Т. А. Гаджибеков, А. В. Ильяшенко</i>	113
Траектории плоского движения тела вращения в среде <i>К. Ю. Осипенко</i>	127
Динамический анализ установившегося колебательного процесса земного полюса <i>В. В. Перепёлкин, И. В. Скоробогатых, Мьо Зо Аунг</i>	141
Установившиеся движения симметричного равногранного тетраэдра в центральном поле сил <i>А. А. Буров, Е. А. Никонова</i>	152

---



УДК 531.782

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ, РАЗРУШЕНИЯ И ФИЛЬТРАЦИИ В ГОРНЫХ ПОРОДАХ

© 2021 г. В. И. Карев<sup>a,\*</sup>, В. В. Химуля<sup>a,\*\*</sup>, Н. И. Шевцов<sup>a,\*\*\*</sup>

<sup>a</sup> *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

<sup>\*</sup>*e-mail: wikarev@ipmnet.ru*

<sup>\*\*</sup>*e-mail: valery.khim@gmail.com*

<sup>\*\*\*</sup>*e-mail: red3991@yandex.ru*

Поступила в редакцию 13.11.2020 г.

После доработки 11.01.2021 г.

Принята к публикации 11.01.2021 г.

В работе представлен обзор современного состояния экспериментальных исследований процессов деформирования, разрушения и фильтрации в горных породах, влияния напряженного состояния на их деформационные, прочностные, реологические и фильтрационные характеристики. Проведен анализ основных результатов, полученных в этой области в последние годы. Представлено краткое описание наиболее распространенных методов экспериментальных исследований. Подчеркнуты ключевые различия и особенности основных методов. Более подробно описана уникальная научная установка, созданная в Институте проблем механики Российской академии наук – Испытательная система трехосного независимого нагружения (ИСТНН). Представлены основные научные результаты, как фундаментального, так и прикладного характера, полученные с ее помощью. Описаны пути модернизации, совершенствования установки, которые позволят существенно расширить спектр решаемых с ее помощью задач. Отдельное внимание в статье уделено анализу работ по математическому моделированию механического поведения горных пород, обсуждены теоретические проблемы, требующие экспериментальных исследований.

*Ключевые слова:* горные породы, напряженно-деформированное состояние, прочность, ползучесть, проницаемость, истинно трехосное нагружение

DOI: 10.31857/S0572329921050056

**1. Введение.** Геомеханические и геофизические исследования показали, что возникающее в породах напряженное состояние оказывает большое влияние на их механические и фильтрационные свойства. Строительство подземных сооружений, работы, связанные с добычей твердых полезных ископаемых и углеводородов, приводят к изменению трехмерного напряженного состояния части горного массива. Изучая механизмы деформирования породы при изменении напряженного состояния, можно узнать характер ее разрушения и эволюции механических свойств, что имеет ключевое значение для предотвращения аварийных ситуаций, надежного строительства различного рода конструкций, а также эффективной и безопасной разработки и эксплуатации скважин и горных выработок. В настоящее время проводится широкий спектр исследований деформационных, прочностных и фильтрационных характеристик горных пород в условиях трехмерного напряженного состояния. Все они основаны на экспериментальном изучении, так как эти свойства определены самой природой и не могут быть получены расчетным путем. Для горных пород характерны существенные

различия свойств, даже если они залегают в непосредственной близости друг от друга. Сегодня большая часть лабораторных исследований проводится по традиционной условно трехосной схеме с использованием установок кармановского типа. Образцы для испытаний имеют цилиндрическую форму, нагрузка прикладывается по оси образца и по его боковой поверхности, что не позволяет в полной мере воспроизводить реальные трехмерные напряженные состояния, возникающие в массиве горных пород. В реальных геотехнических условиях в горных породах, грунтах напряжения, действующие в трех направлениях могут быть существенно различными. Для моделирования напряженно-деформированного состояния геоматериалов в реальных условиях конструируются установки истинно трехосного нагружения (УИТН), которые способны независимо и одновременно изменять напряжения или деформации по каждой из трех осей. Такие установки позволяют проводить физическое моделирование геомеханических процессов, происходящих в массиве горных пород при проведении тех или иных технологических операций. УИТН используются для изучения деформационных, прочностных, фильтрационных и реологических свойств горных пород в условиях неравнокомпонентного трехосного сжатия, служат незаменимым инструментом для определения параметров математических моделей, создаваемых для расчетов процессов деформирования и разрушения геоматериалов с учетом анизотропии их свойств.

Актуальным направлением исследований является изучение закономерностей ползучести горных пород. Характер деформирования при длительном воздействии неизменных напряжений изучен недостаточно даже для однородных материалов, не говоря о горных породах. Существующие сегодня модели ползучести построены на основе умозрительных заключений, имеют формальный характер и содержат большое число параметров, варьирующихся и подлежащих определению. Для выделения какой-либо из них по-прежнему необходимо большее количество экспериментальных данных. К горным породам это относится в еще большей степени. Обзору проводимых в последние годы исследований в данных областях посвящена эта работа.

**2. Обзор методов и оборудования по определению деформационных, прочностных и фильтрационных свойств горных пород и грунтов. Современное состояние исследований.** Используемые сегодня лабораторные методы исследования деформационных и прочностных свойств горных пород весьма разнообразны. Существует целый ряд гостированных методов и приборов для измерения механических свойств материалов: одноплоскостного среза, одноосного сжатия, трехосного сжатия (условно трехосного), компрессионного сжатия в одометрах, исключаяющего возможность бокового расширения образца грунта при его нагружении вертикальной нагрузкой, суффозионного сжатия, основанного на способности засоленных грунтов к уменьшению объема вследствие выщелачивания солей при длительной фильтрации воды и постоянной сжимающей нагрузке. Гостированы также испытания с целью определения изменения объема глинистых грунтов при водонасыщении (набухании) или высыхании (усадке). Характеристики набухания определяют в приборах свободного набухания грунтов (ПНГ) и в компрессионных приборах при насыщении грунта водой или химическим раствором. Усадку грунта определяют в условиях свободной трехосной деформации образца при высыхании грунта. Во всех этих методах проводятся испытания образцов в форме цилиндра. Есть методы определения твердости материалов, в том числе горных пород. Первый связан с использованием твердомера. На образец давят шариком и измеряют глубину впадины на образце при заданном давлении. Вторым получил название *scratch test*. Суть его в следующем: по образцу проводят резцом при определенном давлении и определяют глубину образовавшегося следа. При проведении испытаний решается основная задача определения критической нагрузки, при которой происходит аномальное изменение глубины вдавливания резца. По величине силы судят о характере разрушения поверхности, износостойкости и др. Очевидно,

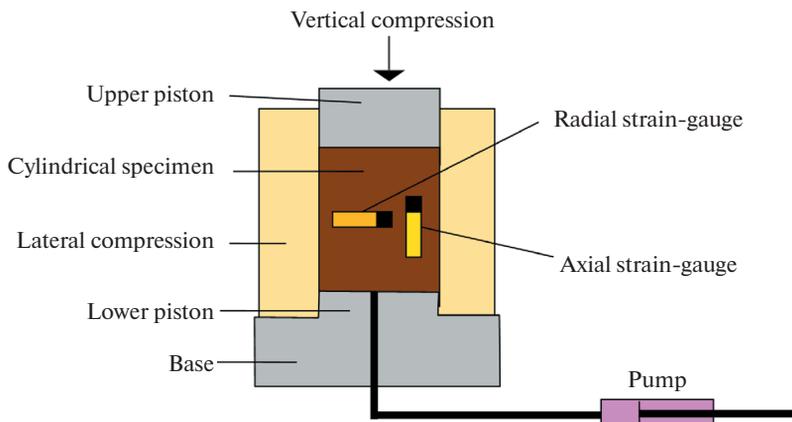


Рис. 1. Схема установки кармановского типа

что использование различных резцов позволяет получать только относительные результаты, которые сравнимы лишь для одинаковых условий испытаний [1].

2.1. *Исследования механических свойств горных пород с использованием условно трехосных установок.* Наиболее распространенный метод связан с использованием установок, основанных на принципе Кармана. В 1911 г. Карман [2] поставил первые опыты с образцами песчаников и мрамора. В своих экспериментах он подвергал цилиндрические образцы пород всестороннему боковому давлению жидкости при одновременном независимом одностороннем сжатии плитами. Вскоре его сотрудник и коллега Бекер [3] исследовал мрамор уже на растяжение по оси цилиндра при условии всестороннего сжатия жидкостью. Позднее совершенствованием такого подхода занимались М.П. Воларович [4, 5], Хориба, Кобаяси [6], Паттерсон [7]. Методика проведения экспериментов Карманом положила начало целому направлению исследований, которые продолжают и на сегодняшний день. Принцип работы установки Кармана сегодня используется в большинстве лабораторий по исследованию механических свойств горных пород во всех странах и признан классическим. Установки такого типа производятся серийно. Они осуществляют так называемое “условно трехосное нагружение” – нагрузка прикладывается по всей поверхности образца, но регулировать ее можно только в двух направлениях: по оси и по радиусу образца, образец для испытаний имеет форму цилиндра. На рис. 1 схематично представлена конструкция установки кармановского типа. На установке кармановского типа также возможно проведение исследований по схеме “полюй цилиндр”. Суть ее заключается в следующем: по оси цилиндрического образца просверливается отверстие. Далее образец нагружается по всей поверхности. В процессе нагружения образца отверстие продувается воздушным потоком, фиксируются осевые и радиальные деформации и количество вынесенного песка, образующегося при разрушении стенок отверстия.

Главным недостатком аппаратов данного типа является то, что установки, построенные по кармановской схеме, не позволяют моделировать реальные геомеханические условия в горном массиве, которые являются трехмерными. Кроме того, определение деформационных и прочностных характеристик анизотропных пород с использованием таких установок вызывает существенные затруднения. Далее приведен ряд результатов, полученных в последние годы на установках кармановского типа.

В настоящее время существует ряд основных направлений исследований, которые проводятся с использованием установок трехосного нагружения. Это изучение меха-

нического поведения горных пород различных литотипов в зависимости от уровня и характера нагружения, влияния начальной структуры пород (наличия начальной трещиноватости, ориентации макротрещин относительно главных напряжений) на их деформационные и прочностные свойства, характер неупругого деформирования, в том числе ползучести.

В [8] условно трехосным методом проведено изучение прочностных свойств норвежских гранита и мрамора. Исследовались взаимосвязи начальной трещиноватости образца с изменением его механических параметров после прохождения предела прочности, а также с углом наклона образовавшейся трещины. По результатам условно трехосных опытов с последующим разрушением цилиндрических образцов авторами предложен индекс повреждения (Damage index) для описания степени повреждения горных пород определенного типа после прохождения предела прочности. Его определяют как отношение энергии разрушения, рассеянной при данной деформации после прохождения предельной точки во время трехосных испытаний, к полной энергии разрушения при одноосном нагружении образца.

В [9] исследовано поведение цилиндрических образцов песчаников с повреждениями и без при условно трехосном нагружении с целью изучения параметров, влияющих на характер ползучести. Авторами показан линейный рост деформаций ползучести с увеличением разности прикладываемых боковых и осевых напряжений, а также подчеркнута увеличение скорости ползучести с ростом компонент девиаторной составляющей тензора напряжений и ее снижение с ростом всестороннего сжатия. При этом скорость ползучести на близких к разрушению этапах может как постоянно расти, так и оставаться длительное время постоянной до перехода к неустановившейся ползучести. В другой работе авторов [10] внимание акцентировано на влиянии степени разрушенности образца на прочностные и деформационные характеристики.

В [11] приведены результаты испытаний образцов зеленого сланца, проводившихся по кармановской схеме. В работе подчеркивается, что увеличение всестороннего давления оказывает большее влияние на ползучесть в радиальном направлении, нежели в осевом, и предлагается метод определения длительной прочности с помощью точек перегиба кривых деформации.

Большой объем работ по изучению физических характеристик кобургского известняка проводится на протяжении многих лет канадскими исследователями. В одной из последних работ [12], являющейся своего рода резюмированием более ранних исследований, авторы обобщили результаты лабораторных трехосных испытаний на глинистых кобургских известняках с измерением коэффициента проницаемости. Среди прочих важных выводов отмечается, что эволюция проницаемости изучаемых образцов при нагружении следует определенным закономерностям. Начальный участок кривых проницаемости характеризуется более высокими значениями проницаемости. На втором участке наблюдается ухудшение фильтрационных свойств по мере сжатия. На третьем участке заметно увеличение проницаемости еще до достижения предела прочности, что связано с возникновением и слиянием микротрещин. На постпредельном этапе исследователи наблюдают либо увеличение, либо уменьшение проницаемости в зависимости от того, возникает ли сеть макротрещин или происходит вязкое деформирование аналогично пластилину. Проницаемость, измеренная после разрушения некоторых образцов, была на 2–3 порядка выше начальной. Авторы отмечают необходимость дальнейших детальных исследований для изучения такого поведения породы. Ключевым результатом серии работ является разработанная математическая модель для интерпретации гидромеханических процессов в этих породах при испытаниях.

Эволюция газопроницаемости при пластических деформациях, а также вопросы влияния неравномерного напряженного состояния и начальной трещиноватости образца на ползучесть горной породы рассмотрены в работе [13]. Исследования прово-

дидлись кармановским методом на цилиндрических образцах красного песчаника с одиночной искусственной трещиной и всестороннем давлении 30 МПа. В ходе эксперимента осевое давление менялось циклически, при этом создавалась длительная неравномерная нагрузка в каждом из состояний, параллельно с чем измерялись проницаемость, упругие и пластические деформации, определялись прочностные и реологические характеристики. Мгновенные упругие и вязкоупругие деформации линейно увеличивались с ростом отношения осевого напряжения к радиальному как для неповрежденных, так и для образцов с трещинами, а вязкопластические деформации росли нелинейно. Скорости ползучести нелинейно росли с увеличением разности главных напряжений. В работе сделан вывод о влиянии угла наклона изначальной трещины на реологические и прочностные характеристики. Указано, что проницаемость трещиноватого красного песчаника определяется уровнем напряжений, величиной деформации образца и длительностью выдержки под нагрузкой. Во время многостадийного процесса нагружения/разгрузки деформации ползучести приводили сперва к снижению проницаемости, а затем внезапному увеличению при переходе к третьей стадии ползучести.

В другой работе одного из авторов предыдущей статьи [14] также приведены результаты условно трехосных испытаний образцов песчаника с целью определения влияния всестороннего давления и пространственных дефектов породы на предел прочности и способ образования магистральных трещин. Также проводилась оценка влияния наличия флюида (солевого раствора) в порах образца на прочность породы. Во время опытов предел прочности ненасыщенных соевым раствором образцов увеличивался линейно при увеличении всестороннего сжатия и угла первоначального надреза образца (дефекта), в то время как у насыщенных образцов рост был нелинейным.

Весьма объемные исследования ползучести горных пород были проведены британским коллективом на образцах алевролита [15]. В экспериментах испытывались образцы с трещинами и без, которые нагружались как одноосно, так и условно трехосно. Результаты показали, что и мгновенная деформация, и деформация ползучести коррелируют с прикладываемой разностью осевого и бокового напряжений, что отчетливо наблюдалось в трещиноватых образцах, где большая разность напряжений приводила к увеличению скорости деформации ползучести. Как и ожидалось, параметры ползучести для цельных и трещиноватых образцов существенно различались, но несмотря на это различие, результаты показали значительную корреляцию между параметрами ползучести обоих типов образцов горных пород и их текущим модулем упругости. Используя регрессионный анализ, авторы обосновали, что параметры ползучести могут быть оценены по текущему модулю упругости с использованием экспоненциальной функции.

В [16] проводились классические эксперименты по кармановской схеме на известняках. В результате серии опытов на керне установлено, что для трещиноватых образцов при росте эффективного давления происходит резкое снижение проницаемости. В дальнейшем при снижении, а также полном снятии напряжений фильтрационно-емкостные свойства трещиноватых коллекторов не восстанавливаются до исходного значения. В работе [17] представлены аналогичные исследования, сопровождающиеся также программным моделированием полученных корреляционных зависимостей [18, 19]. В данных работах цилиндрические образцы пород подвергались циклическому сжатию и изучались их упругие и упруго-пластические свойства. В процессе первого нагружения образцы деформировались упруго-пластически, при этом происходили необратимые ухудшения фильтрационно-емкостных свойств. Разгрузка и повторные нагружения показали лишь упругий отклик породы. Авторы провели физическое моделирование снижения пластового давления и получили при этом эффект необратимого снижения проницаемости породы, наблюдаемый на практике. С использованием полученных экспериментальных данных был создан программный модуль, кото-

рый позволяет, по словам авторов, выявить дополнительные зоны ухудшения проницаемости в окрестности нагнетательных скважин.

В описанных выше работах достаточно подробно исследуется влияние разности возникающих в цилиндрическом образце осевых и боковых напряжений на прочностные и фильтрационные свойства и процессы ползучести, однако условно трехосное нагружение не позволяет воспроизводить реально возникающие в натуральных условиях напряженные состояния, которые приводят к иной реакции горных пород и изменению их физических свойств.

*2.2. Установки истинно трехосного нагружения.* Начиная с первых поставленных опытов и вплоть до второй половины 20 века большинство лабораторных испытаний, связанных с изучением механических характеристик горных пород в условиях *in situ*, проводилось примерно по однотипной схеме: при достаточно высоком сжимающем всестороннем давлении к верхней и нижней граням образца породы прикладывается дополнительное сжимающее или растягивающее напряжение. Во второй половине 20 века были предприняты первые попытки экспериментов по более сложным схемам [20], в которых напряжения по всем трем пространственным направлениям были не равны между собой, однако в силу своей новизны, сложности и повышенных технических требований такие опыты не получили общего признания в то время, несмотря на их более широкие возможности по сравнению с классическими. Одна из первых установок такого типа была спроектирована и сконструирована К. Моги [21], после чего подобные стенды получили название установок истинно трехосного нагружения (УИТН). С тех пор развитием его идей занимаются многие научные коллективы вплоть до наших дней [22–25]. Исследования с применением УИТН дают наиболее полную информацию о свойствах горной породы. Установки истинно трехосного нагружения распространены в мире недостаточно широко, несмотря на очевидные преимущества по сравнению с установками кармановского типа. В отличие от установок условно трехосного нагружения образец для испытаний на УИТН имеет форму параллелепипеда, и нагрузка прикладывается одновременно и независимо по каждому из трех взаимно перпендикулярных направлений. Система измерений УИТН в процессе испытания регистрирует силы и перемещения в каждом из трех направлений, которые пересчитываются в напряжения и деформации. По полученным данным строятся кривые деформирования образца, по которым определяются параметры модели механических свойств породы. Возможность истинно трехосного нагружения образца обуславливает появление ряда трудностей при создании установки. Универсального решения конструкции таких установок нет, поэтому в мире нет двух одинаковых УИТН. Во многом это связано с существенной сложностью конструкции, высокой стоимостью и отсутствием конвейерного производства такого оборудования. В последние годы появилась возможность изготовления типовых установок такого рода коммерческими структурами на заказ [26, 27].

УИТН могут быть снабжены различными дополнительными системами в зависимости от решаемых данной лабораторией задач. Это может быть система создания и регулирования порового давления в образце, подогрева образца и измерения температуры, что необходимо для моделирования реальных термобарических пластовых условий. УИТН может быть оборудована системой измерения проницаемости в ходе испытания, что особенно важно для решения задач нефтегазодобычи. Ряд установок снабжен акустическими системами, которые позволяют измерять скорости распространения продольных и поперечных упругих волн в образце и акустическую эмиссию в процессе нагружения, что чрезвычайно важно для изучения разрушения материала под нагрузкой и создания средств диагностики поврежденности геоматериала. Каждая лаборатория создает установку своей конструкции, предназначенную для реше-

ния стоящих перед ней задач. Тем не менее, все существующие УИТН можно классифицировать по способу нагружения и ряду других признаков:

1. Установки I типа (с жесткими плитами).
2. Установки II типа (с гибкими плитами).
3. Установки III типа (смешанного типа).

Каждый тип имеет свои достоинства и недостатки.

1. Установки I типа.

Нагружающий узел данного типа установок состоит из 3 гидравлических поршней, передающих нагрузку на грани образца через жесткие (металлические) плиты. Данный тип установок позволяет создавать напряжения значительно большие, чем установки двух других типов, обладает необходимой устойчивостью нагружающей системы, позволяет осуществлять различные траектории нагружения по осям и возможность исследовать образцы больших размеров. Данный тип установок можно разделить на два подтипа:

- 1) установки, у которых нажимные плиты двигаются только по оси сжатия.

- 2) установки, у которых нажимные плиты могут двигаться не только по оси сжатия, но и перпендикулярно ей.

Для установок первого подтипа наконечники нажимных плит приходится делать меньше размеров граней образца, чтобы избежать надавливания на соседние плиты. Такой способ приложения нагрузки порождает граничные и угловые эффекты. У установок второго подтипа этого недостатка нет из-за возможности движения плит перпендикулярно оси сжатия, но возникает другая проблема, трение между образцом и плитами, которое приводит к дополнительной погрешности измерений.

2. Установки II типа.

Данный тип установок в двух или более направлениях имеет гибкие плиты. Под гибкой плитой подразумевается подушка из прочного эластичного материала, которая наполняется жидкостью и принимает форму поверхности образца, тем самым, исключая краевые эффекты. В другом случае давление жидкости может передаваться напрямую к грани образца, помещенного в изолирующий карман или мембрану. Но на этих установках нельзя создавать большие напряжения из-за недостаточной прочности материалов подушек и мембран, также нельзя добиться высокой устойчивости нагружающей системы. Имеются ограничения по размерам самих образцов.

3. Установки III типа.

Такие установки принято называть аппаратами смешанного типа. Усилия в одном или двух направлениях прикладываются жесткими плитами, а по другим осям – жидкой средой (давлением масла или мембранами). Конечно, превзойти по величине напряжения, создаваемые в установках I-го типа, или избежать краевых эффектов, как это было в установках 2-го типа, они не могут, зато позволяют на определенном уровне сочетать в себе обе возможности сразу.

Ниже приводятся примеры конкретных установок различных типов.

1. University of Mons – FPMs, Mons, Belgium. Руководители: J.-P. Tshibangu & F. Desamps.

Установка сделана для изучения эффекта комплексного граничного давления на поведение скальных пород, находящихся на большой глубине. Установка относится к 1-му типу [28]. Развивает давление на каждом направлении до 500 МПа. Для установки делают специальные образцы размером 31\*30\*30 мм. Прочность машины оценивается в 3.2 МН/мм.

На установке, среди прочего, проводят общепринятые трехосные испытания. Такое испытание проходит в три этапа. На первом этапе увеличиваются все три значения напряжения до заданного уровня  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . На втором этапе значение напряжения  $\sigma_3$  остается постоянным, а два других увеличиваются до заданного уровня  $\sigma_1 = \sigma_2$ . На третьем этапе увеличивается только значение  $\sigma_1$  до конца испытания, а именно до

предельного состояния, после достижения которого начинается пластическая деформация образца. Потом образец разгружается. Этот тест может проводиться с вариацией значений параметра Лоде от общепринятого условно трехосного сжатия ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ) до трехосного расширения ( $\sigma_1 = \sigma_2$ ).

В одной из последних работ [29] данного коллектива исследователей проводились испытания сухих и водонасыщенных пород и твердых грунтов мелового карьера Malogne. Широкий спектр лабораторных испытаний, включая истинно трехосные тесты 16 кубических образцов с исходными всесторонними обжатиями в 5 и 10 МПа, проводился с целью определения механических свойств. Полученные данные использовались в качестве входных параметров для разработанной модели устойчивости и разрушения подземных выработок в карьере.

2. Lassonde Institute and Department of Civil Engineering University of Toronto, Toronto, Canada. Руководители: R.P. Young & M.H.B. Nasserli.

На установке проводится изучение типов разломов в горных породах, которые индуцируют сейсмику, изменения упругих свойств и фильтрации жидкости. Фильтрация жидкости через образец осуществляется за счет того, что в жестких плитах сделаны поры, через которые при помощи насосов подается жидкость к граням образца. Это позволяет исследовать проницаемость породы во всех трех направлениях. Установка относится к 1-му типу. Размеры образца 80\*80\*80 мм. Нагружающий узел системы допускает осевое усилие 6800 кН и поперечное усилие 3400 кН. На установке имеются 18 датчиков акустической эмиссии. 16 пьезоэлектрических индукторов, смонтированных в жесткие плиты нагружающего узла и находящихся в прямом контакте с поверхностями граней образца, позволяют исследовать скорости прохождения высокочастотных волн и акустическую эмиссию. Так же плиты оснащены системой контроля температуры, которая позволяет нагревать образец до 200°C [30].

3. Department of Petroleum Engineering, Curtin University, Perth, Australia. Руководитель Dr Mohammad Sarmadivaleh.

Организованная в 2007 году научная группа, занимающаяся геомеханическими исследованиями, располагает четырьмя различными истинно трехосными ячейками нагружения (одна находится на стадии разработки), каждая из которых имеет отдельное применение.

1) Blue TTSC позволяет моделировать различные сценарии бурения и разработки пласта в крупном масштабе с применением анизотропных напряжений. Аппарат может прикладывать независимо силы в 315 кН и 1000 кН в горизонтальном и вертикальном направлениях, соответственно, на кубических образцах размером от 30 мм до 300 мм [31]. Для самого маленького образца, таким образом, напряжение может достигать 350 МПа и 1110 МПа в горизонтальном и вертикальном направлениях соответственно. Во время испытания также может создаваться поровое давление до 21 МПа. Отверстие, просверленное в центре образца, позволяет закачивать жидкость, имитируя гидроразрыв пласта. Установка относится к первому типу [32].

2) Истинно трехосная ячейка 50 mm NGL TTSC позволяет моделировать напряженные состояния на кубических образцах с гранью 50 мм. Куб с диаметром 50 мм – это самый крупный образец, который может быть извлечен при обычном бурении нефтяных и газовых скважин. Установка позволяет приложить вертикальное и два независимых горизонтальных равномерных напряжения до 70 МПа в каждом направлении к образцу. Кроме того, может быть создано поровое давление вплоть до 65 МПа при 100°C. 6 комплектов тензодатчиков LVDT и 24 акустических преобразователя замеряют деформации и акустические явления в породе. Можно вводить и выводить жидкость с каждой из шести сторон ячейки. Жидкость может закачиваться в образцы

для моделирования гидроразрыва пласта или для исследования повторной активации трещин во время закачки  $\text{CO}_2$  [33]. Установка относится ко второму типу.

3) Swing NGL TTSC позволяет прикладывать вертикальную и две независимые горизонтальные составляющие сил до 1619 кН в каждом направлении. В ячейку помещаются образцы горных пород размером 150, 100 и 50 мм. Напряжение, которое может быть приложено к образцу куба с длиной ребра 50 мм, достигает 645 МПа. Кроме того, температура может достигать  $100^\circ\text{C}$ . Акустическая эмиссия регистрируется 60 датчиками. Особенностью установки является возможность моделирования процесса гидроразрыва в условиях неравнокомпонентного трехосного сжатия путем впрыскивания под определенным давлением рабочей жидкости внутрь крупных образцов через предварительно созданные осевые отверстия. Установка относится к первому типу.

Группа обладает широкими возможностями в проведении фундаментальных исследований. Исследовательская деятельность, проводимая группой, включает такие темы, как химико-механическая стабильность сланцев, анализ устойчивости ствола скважины, трехмерный геомеханический анализ, оценка порового давления, влияние истощения коллектора на напряжения и физические свойства коллектора, взаимосвязь между напряжениями и проницаемостью коллектора, эффекты проседания и тепловые эффекты [34, 35].

4. State Key Laboratory for GeoMechanics and Deep Underground Engineering. China University of Mining and Technology. Руководитель: Miao Xiexing.

Установка относится к 1 типу, 2 подтипу – нажимные плиты способны сдвигать друг друга во избежание краевых эффектов. Максимальные усилия для каждой оси – 2000 кН, 500 кН и 300 кН соответственно. Используются образцы размерами  $50 \times 50 \times 100$  мм, однако ячейка может изменять свой размер в случае необходимости. Установка имеет возможность регистрации акустической эмиссии, датчик для измерения которой помещен в отверстие внутри плиты и находится в непосредственном контакте с образцом за счет пружины. В недавней статье исследователей [36] проведено сравнение результатов, полученных с использованием условно трехосного (традиционного) и истинно трехосного метода исследований горных пород. Авторы приводят анализ серии экспериментов, проведенных на одинаковых породах с изменением двух или трех компонент сжимающих напряжений. Среди прочего, делается вывод о том, что эксперименты кармановским методом не позволяют провести полноценные исследования влияния напряжений на физические свойства пород, в том числе невозможно изучить влияние средней компоненты напряжений на характер деформации. Также подчеркивается разный характер деформирования и разрушения при использовании двух описанных методов, что указывает на острую необходимость в исследованиях именно истинно трехосным способом ввиду того, что реальные напряженные состояния в натуральных условиях являются трехмерными неравнокомпонентными.

5. Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия. Руководитель: В.И. Карев, Ю.Ф. Коваленко.

Установка относится к 1-му типу, 2-му подтипу. Установка используется для физического моделирования механических и фильтрационных процессов, возникающих в нефтегазосодержащих пластах при бурении, освоении и эксплуатации скважин, для изучения взаимосвязи напряженно-деформированного состояния пород-коллекторов и их фильтрационных свойств. Более подробно установка и полученные с ее помощью результаты описаны ниже.

6. Unconventional Natural Gas and Oil Institute, Colorado School of Mines, USA. Руководители: Dr. Azra Nur Tutuncu, Dr. Ali I Mese.

Установку относят к 2 типу. Отличительной особенностью аппарата является конструкция с цилиндрической ячейкой нагружения. Цилиндрический образец нагружается в осевом направлении жестким поршнем. В радиальном направлении образец на-

гружается всесторонним давлением жидкости, прикладываемым непосредственно к резиновой оболочке. Среднее главное напряжение создается набором из двух гибких полукруглых резиновых мембран, передающих давление жидкости на оставшиеся противоположные стороны образца. Установка также позволяет измерять проницаемость насыщенных и ненасыщенных образцов, регистрировать акустическую эмиссию. Авторы утверждают, что подобная конструкция нагружающего узла позволяет избежать негативных эффектов, которым подвержены установки 1 и 3 типа, однако, очевидно, в таком случае возрастают ограничения на максимальные прикладываемые усилия. В недавней работе сотрудников лаборатории [37] проведены измерения проницаемости при различных неравномерных напряженных состояниях образцов с циклической нагрузкой. Показано влияние средней компоненты напряжений на фильтрационные свойства пород, а также экспериментально установлено уменьшение проницаемости при приложении нагрузки, перпендикулярной направлению течения флюида, в силу закрытия микротрещин, ориентированных вдоль линий тока.

7. Key Laboratory of Ministry of Education on Safe Mining of Deep Metal Mines, North-eastern University, China. Руководитель Xia-Ting Feng.

Установка относится к 3 типу. Истинно трехосный аппарат представляет собой испытательную машину с двумя жесткими и одной гибкой плитой, и в основном используется для исследования зависящих от времени деформационных характеристик, характера разрушения горных пород при высоких нагрузках. Максимальные нагрузки вдоль вертикальной и горизонтальных осей составляют 3000 и 6000 кН. Размеры образцов 50\*50\*100 мм [38]. В установке реализован механизм, позволяющий избегать смещения центра образца в ходе неравномерного деформирования, что является одной из проблем в установках 1 типа.

*2.3. Исследования механических свойств горных пород с использованием установок истинно трехосного нагружения.* В современных исследованиях механических свойств горных пород и влияния на них напряженного состояния большое внимание уделяется истинно трехосным методам. Ниже представлен обзор современных исследований, выполненных с использованием установок истинно трехосного нагружения.

На истинно трехосных установках, как и на установках условно трехосного нагружения основными направлениями исследований являются: изучение механического поведения горных пород различных литотипов в зависимости от уровня и характера нагружения, влияния начальной структуры пород, различного рода дефектов на деформационные и прочностные свойства, изучение упруговязкопластического деформирования пород, влияния порового давления на механические процессы, влияния напряжений и фильтрации. Однако в отличие от установок кармановского типа на истинно трехосных аппаратах нагружение производится независимо и одновременно по трем осям, что позволяет моделировать реальные напряжения, возникающие в массиве горных пород, и изучать анизотропию свойств геоматериалов. Наибольшее внимание на протяжении всей истории истинно трехосных испытаний уделяется изучению влияния средней компоненты главных напряжений на процессы деформирования, разрушения и фильтрации.

В работе японских исследователей Национального института передовых промышленных наук и технологий [39, 40] проводились истинно трехосные тесты на образцах японского песчаника Кимачи с целью реактивации трещиносодержащих плоскостей внутри образцов путем увеличения давления поровой жидкости и изучения влияния этого процесса на механические и фильтрационные характеристики породы. Опыты подтвердили, что увеличение порового давления ведет к уменьшению эффективных напряжений, что приводит к расширению трещин и пор и увеличению проницаемости. Выявлен гистерезис деформаций при циклическом изменении порового давления. Авторы отмечают необходимость проведения дополнительных испытаний для изучения влияния длительности нагружения (ползучести) на исследуемые процессы.

Исследования характера ползучести горных пород при истинном трехосном нагружении проводятся в Северо-восточном университете в Китае. В 2018 году исследователи представили новую истинно трехосную установку для проведения экспериментов на твердых породах при высоких напряжениях [41]. В этой же работе описаны первые результаты исследований мрамора на данном стенде. В цикле связанных работ [42–44] подтверждено ключевое влияние средней компоненты напряжений на характер деформирования и длительную прочность Цзинпинского мрамора, а также подчеркнута невозможность получения достоверных результатов по изучению неравномерного напряженного состояния при использовании общепринятой условно трехосной методики. В работах представлены кривые ползучести мрамора, показано влияние средней компоненты напряжений на характер ползучести. Обнаружено, что дилатансия образцов в основном проявлялась вдоль направления минимального прикладываемого напряжения с увеличением максимального главного напряжения. Причем образцы демонстрировали определенную прочность даже после прохождения предела прочности, что авторы связывают с возникновением в них нового равновесного состояния, вызванного релаксацией. На основе результатов истинных трехосных испытаний была разработана нелинейная упруговязкопластическая модель ползучести, которая может описывать ускоренный этап ползучести [42]. В статье предложен метод выбора параметров модели, а также проверена целесообразность ее использования. Зафиксировано, что при значениях максимального главного напряжения меньших предела длительной прочности породы, проявляется только начальная стадия ползучести. При достижении максимальным напряжением предела длительной прочности образец демонстрирует установившийся режим ползучести. Из-за короткого времени нагружения активная стадия ползучести не развивается, однако дальнейшее увеличение максимального главного напряжения приводит к возрастанию скорости ползучести и появлению третьей стадии ползучести, сопровождающейся разрушением образцов. С увеличением средней компоненты напряжений деформация ползучести, начальная и установившаяся скорости ползучести и время перехода от начального к установившемуся режиму ползучести уменьшаются. Авторами также получено уравнение, описывающее установившийся режим ползучести породы.

В работах данных исследователей проводятся сравнения характера разрушения мраморной породы при условно и истинно трехосном нагружении [43]. Отмечается, что мрамор проявляет определенную пластичность после прохождения предела прочности при истинно трехосном испытании. Отдельный акцент делается на переходе образцов от хрупкого к хрупко-пластическому характеру разрушения при изменении отношения минимальной и средней компоненты главных напряжений. По результатам исследований коллективом предложено разделение характера хрупко-пластического разрушения на три вида в зависимости от различных напряженных состояний. Также указывается, что при низких минимальных главных напряжениях ( $\sigma_3 = 5$  МПа) влияние средней компоненты  $\sigma_2$  на характер разрушения и ползучести невелико, причем наблюдается только хрупкое разрушение [44]. При этом скорость деформации ползучести возрастает примерно линейно с увеличением разности максимального и минимального главных напряжений. Однако при больших  $\sigma_3$  (20 МПа, 35 МПа) рост средней компоненты  $\sigma_2$  оказывает существенное влияние на характер разрушения и ползучести: горная порода переходит из пластичного состояния разрушения в хрупкое, а скорость установившейся ползучести приобретает нелинейную тенденцию роста с увеличением разности главных напряжений.

Этим же коллективом позже были проведены испытания по схожей схеме с использованием песчаников и гранитов [45]. В данных исследованиях средняя компонента главных напряжений варьировалась в диапазоне от значения минимальной до максимальной компоненты. Помимо представленного подтверждения о влиянии вида на-

пряженного состояния на процессы деформирования, предел прочности и характер разрушения, вновь подчеркивается роль средней компоненты напряжений в эволюции трещинообразования и возникновении сильной анизотропии деформаций. При приближении значений средней компоненты главных напряжений ( $\sigma_2$ ) к величине максимальной ( $\sigma_1$ ) деформация вдоль второй оси становится примерно нулевой, но существенно возрастает деформация по третьей оси. Кроме того, наблюдалась деформация со ступенчатым падением напряжений после прохождения предела прочности, что иллюстрирует наличие многоступенчатой остаточной прочности в процессе разрушения породы. Отдельное внимание в данном исследовании уделялось изучению анизотропии свойств пород, что является важным направлением современных исследований. Исследователями рассматривается анизотропия свойств пород, вызванная напряжениями и возникающая вследствие негидростатического сжатия. Как известно, такая анизотропия отличается от собственной анизотропии породы и должна учитываться при описании поведения пород при неравнокомпонентном нагружении. Во время испытаний по классической схеме ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ) коэффициент анизотропной деформации был нулевым. Однако при увеличении модуля средней компоненты напряжений он значительно увеличивался и достигал, к примеру, значения 23.3 для пород-песчаников. Авторы утверждают, что этот результат указывает на то, что промежуточное главное напряжение существенно повлияло на раскрытие трещин и привело к вызванной напряжением анизотропии деформации, которую следует учитывать при разработке механической модели.

Изучение процесса разрушения и деформирования анизотропных горных пород было выполнено данным коллективом в недавней работе [46]. Исследователями проведен ряд истинно трехосных циклических испытаний на нагружение и разгрузку трех типов горных пород (гранита, мрамора и песчаника) для исследования эволюции свойств породы в зависимости от накопленных повреждений. Было обнаружено, что породы обладают значительной анизотропией деформации и направленным расширением: наибольшие деформации наблюдались в направлении напластования. В силу трансверсальной анизотропии пород были рассчитаны пять упругих констант для каждого цикла нагружения. Эволюция прочностных свойств пород при истинном трехосном сжатии была исследована с использованием линейного трехмерного критерия разрушения. Также изучено влияние промежуточного главного напряжения на эволюцию свойств пород. Кроме того, установлено, что минимальное и среднее напряжения оказывают значительное влияние на относительное изменение упругих констант.

Анизотропная структура материала может влиять не только на деформационные и прочностные, но и на фильтрационные свойства геоматериалов.

Изучение анизотропии фильтрационных свойств геоматериалов проводится преимущественно на образцах угля в силу более ярко выраженной структурной анизотропией по сравнению с горными породами. В работе [47] изучено изменение трехмерной проницаемости при истинно трехосном нагружении. Подтверждено, что анизотропия фильтрационных свойств существенно определяется направлением напластования и напряженным состоянием. Основываясь на результатах истинных трехосных испытаний исследователями построена модель динамической анизотропной (D-A) проницаемости с учетом влияния напластования и напряженного состояния. Было исследовано влияние начального коэффициента анизотропии проницаемости на распределение давления газа в угольном пласте во время добычи газа, что дает возможность разрабатывать теоретические рекомендации по оптимизации схемы расположения ствола скважины для добычи газа в угольной шахте. Обсуждено влияние начального коэффициента анизотропии проницаемости на изменение давления газа и скорость отбора.

Аналогичные исследования проводились с целью изучения поведения газового потока в условиях напряженного состояния коллектора для добычи метана из угольных

пластов, подземной добычи угля и связывания  $\text{CO}_2$  в глубоких пластах [48]. В работе проведено экспериментальное и теоретическое изучение эволюции анизотропной проницаемости угля при различных условиях истинного трехосного напряженного состояния. Результаты показали, что проницаемость сильно зависит от изменений напряженного состояния и ориентации плоскостей фильтрации. Этот факт может оказать значительное влияние на расположение газовых дренажных скважин при подземной добыче угля и оптимальную конструкцию скважины для добычи. Проницаемость угля демонстрировала большую анизотропию в вертикальном направлении из-за присутствия минералов в фильтрационных трещинах, расположенных поперек плоскости напластования. Данные по анизотропной проницаемости, измеренные в условиях истинного трехосного напряжения, были хорошо выражены экспоненциальным уравнением, содержащим различные средние значения сжимаемости трещин и значения возникающих напряжений.

Другой подход к проведению истинно трехосных исследований предлагается исследователями из Саудовской Аравии. В [49] представлена истинно трехосная установка университета KAUST, созданная для исследования свойств трещиноватых пород. Нагружающий узел вмещает огромные образцы  $50*50*50$  см, для создания которых используются предварительно нарезанные блоки пород размерами  $2.5*2.5*5$  см. Однако максимальное давление, создаваемое узлом, ограничивается значением в 3 МПа. Несколько вспомогательных систем измеряют прикладываемые напряжения и деформации во всех трех основных направлениях, скорости длинноволновых продольных волн, акустическую эмиссию и тепловые изменения. Данная установка не предназначена для изучения процессов разрушения и деформирования пород, однако размеры исследуемых образцов позволяют проводить детальные исследования влияния трещиноватости на другие свойства пород, в том числе изучать распространение продольных волн на крупных масштабах. Между образцом и нагружающими плитами располагается слой резины толщиной 3 мм, позволяющий уменьшить трение и способствующий уменьшению краевых эффектов. Насосная система позволяет исследовать гидро-механо-химические процессы в трещиноватых породах, например, раскрытие трещин гидроразрыва. В упомянутой работе представлены данные о скорости продольных волн, собранные в условиях изотропного и анизотропного напряжения, которые подтверждают выраженную зависимость скорости волн от напряженного состояния в трещиноватой породе.

С использованием истинно трехосного метода проводились исследования прочностных характеристик Вогезского песчаника (Франция) [50]. Результаты их экспериментов подтверждают влияние неравномерного по всем трем осям приложения напряжений на переход от хрупкого к пластичному состоянию для изотропных пористых пород. Помимо среднего уровня напряжений, ключевое влияние на предел прочности и режим разрушения оказывает распределение напряжений внутри породы.

В [51] проводятся исследования влияния средней нагрузки и девиаторной составляющей тензора напряжений на деформационные и фильтрационные характеристики песчаника как при условных, так и истинных трехосных испытаниях. Результаты эксперимента показывают, что изменение вида напряженного состояния оказывает существенное влияние на механические свойства, деформирование и проницаемость породы. Более того, влияние среднего уровня напряжений и девиаторной составляющей тензора напряжений на деформацию и проницаемость различно. Для постоянного девиатора тензора напряжений и переменного среднего уровня напряжений пластическая деформация уменьшалась с уменьшением средней нагрузки, а проницаемость росла. Для постоянной же средней нагрузки и переменной девиаторной составляющей тензора напряжений проницаемость сначала уменьшалась, а затем увеличивалась с ростом компонент девиатора тензора напряжений. Вновь отмечено, что

средняя компонента главных напряжений оказывает существенное влияние на деформацию породы. Результаты эксперимента показывают, что проницаемость породы напрямую связана с объемной и девиаторной составляющей тензора деформаций, причем эта связь выведена авторами в математическом виде.

Таким образом, основное внимание исследователей, проводящих истинно трехосные испытания горных пород, уделяется роли средней компоненты главных напряжений, влиянию начальной трещиноватости горных пород на механические свойства, характеру распространения имеющих в породе трещин при нагружении. Однако физическому моделированию реальных процессов в нефтегазовых пластах, происходящих при проведении различных технологических операций на скважинах уделяется недостаточно внимания. Влияние неравнокомпонентности напряженного состояния на процессы фильтрации и ползучести изучено еще недостаточно, и для фундаментального понимания механических и фильтрационных процессов необходимо исследовать напряженные состояния, максимально приближенные к состояниям, возникающим в пластах в реальных условиях эксплуатации месторождений. Наиболее точно моделирование таких условий, как говорилось ранее, возможно только на установках истинно трехосного нагружения. Результаты исследований влияния напряженно-деформированного состояния на проницаемость пород-коллекторов и характера ползучести горных пород на установке истинно трехосного нагружения ИПМех РАН приведены в [52, 53]. Исследователи проводят физическое моделирование напряженного состояния в прискважинной области при уменьшении давления в скважине для условий различных нефтегазовых месторождений. Исследованы зависимости проницаемости от напряжений и при сложном неравнокомпонентном нагружении. Представлены зависимости деформаций от времени при ступенчатом нагружении, а также обоснованы основные требования к построению модели напряженно-деформированного состояния, учитывающей влияние временных эффектов.

На основе явления резкого возрастания проницаемости горных пород при неравнокомпонентном нагружении в Институте проблем механики РАН был разработан новый метод повышения дебита нефтяных и газовых скважин — метод направленной разгрузки пласта [54]. На сегодняшний день активно проводятся исследования горных пород с целью совершенствования методики и расширения возможности ее применения [55, 56].

**3. Испытательная система трехосного независимого нагружения ИПМех РАН.** Уникальная научная установка Института проблем механики Российской академии наук — Испытательная система трехосного независимого нагружения (ИСТНН) является главным инструментом проводимых в лаборатории геомеханики ИПМех РАН экспериментальных исследований процессов деформирования и разрушения горных пород продуктивных и вмещающих пластов нефтяных и газовых месторождений, рис. 2.

ИСТНН относится к классу электрогидравлических испытательных машин, она оборудована автоматизированной системой управления с обратной связью. В состав Испытательной системы входят:

- силовой агрегат — установка неравнокомпонентного трехосного нагружения (УНТН);
- маслонасосная станция (МНС);
- система автоматического измерения проницаемости (САИП);
- система автоматического управления (САУ), включающая информационно-измерительную систему (ИИС).

Технические характеристики ИСТНН:

- образцы — куб с ребром 40 мм или 50 мм;
- независимое нагружение по трем осям;
- управление по нагрузке и по перемещениям;
- регистрация деформаций в трех направлениях;



Рис. 2. Испытательная система трехосного независимого нагружения (ИСТНН)

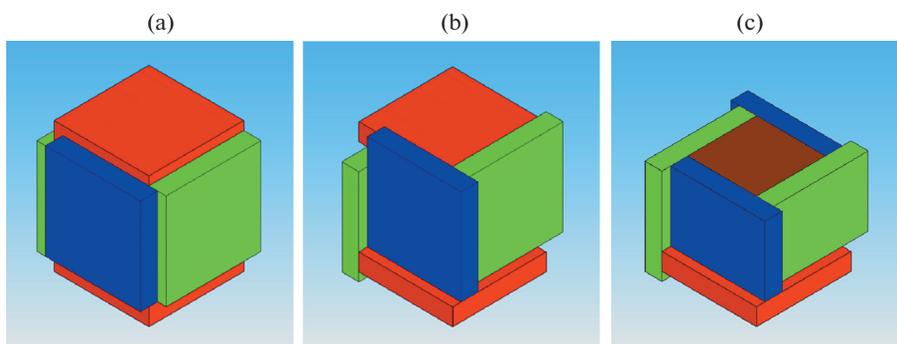


Рис. 3. Схема кинематики нажимных плит нагружающего узла ИСТНН

- измерение проницаемости в ходе нагружения;
- максимальное усилие по каждой оси – 500 кН;
- максимальная деформация – 20%;
- максимальная скорость нагружения – 10 МПа/с;
- максимальная скорость перемещения – 3 мм/с.

Возможность независимо нагружать образец по каждой из трех осей и при этом прикладывать усилие со стороны нажимных плит по всей площади граней образца имеется благодаря примененной в конструкции нагружающего узла оригинальной кинематической схеме, которая позволяет нажимным плитам сближаться в трех направлениях, не создавая препятствия друг другу. На рис. 3 изображена кинематика нажимных плит: начальное положение (а), после деформации образца (б), разрез нагружающего узла после деформации образца (с). Система автоматического измерения проницаемости позволяет измерять проницаемость образца в ходе нагружения.

В состав экспериментального исследовательского комплекса помимо ИСТНН входят универсальный обрабатывающий комплекс для изготовления образцов пород с

высокой точностью, установка для определения скорости распространения упругих волн в образцах горных пород, позволяющая определять степень упругой анизотропии геоматериала.

На ИСТНН был проведен большой цикл исследований влияния напряженно-деформированного состояния на проницаемость для различных типов горных пород-коллекторов. Были проведены исследования свойств пород из коллекторов нефтяных и газовых месторождений из различных регионов Российской Федерации, разного литологического состава, залегающих на глубинах от ста метров до семи километров, с разным коэффициентом аномальности пластового давления. Эти работы позволили установить, что проницаемость пород существенно зависит от действующих в породе напряжений. При этом в зависимости от типа породы и величины напряжений проницаемость может, как уменьшаться, так и увеличиваться, причем необратимо [54].

Проведено экспериментальное и теоретическое изучение закономерностей взаимовлияния напряженно-деформированного состояния и фильтрационных процессов в массиве горных пород [54]. На основе этих исследований предложена классификация пород-коллекторов по этому признаку. Выделено три категории пород.

К первой категории относятся плотные крепко сцементированные мелкозернистые песчаники, аргиллиты, доломиты и т.п. Эти породы деформируются под действием приложенных напряжений чисто упруго. Проницаемость их по мере роста напряжений уменьшается, но обратимо, т.е. после снятия напряжений она возвращается к начальному значению, таким образом влияние напряжений на фильтрационные свойства этих пород незначительно и его можно не учитывать.

Вторую категорию составляют мелко- и среднезернистые песчаники с небольшим содержанием глины, алевролиты и известняки. Эти породы при небольших депрессиях также деформируются упруго, их проницаемость при этом, как правило, не меняется или немного уменьшается. При достижении касательными напряжениями определенной величины, зависящей от свойств породы, условий залегания, пластового давления и других факторов, начинается неупругое деформирование породы при неизменной нагрузке (ползучесть). По мере роста неупругих деформаций проницаемость породы значительно уменьшается (на десятки процентов и даже в разы). Это падение проницаемости носит необратимый характер, то есть при снятии напряжений она остается пониженной. При дальнейшем увеличении сдвиговых напряжений (при увеличении депрессии) скорость ползучести образцов увеличивается, и, когда деформация достигает некоторой критической величины, порода начинает растрескиваться и разрушаться, что сопровождается резким увеличением ее проницаемости даже по сравнению с первоначальным значением. Характер разрушения при этом различен. В более прочных породах разрушение образцов происходит путем образования в них нескольких макротрещин. Менее прочные породы, такие как средне- и крупнозернистые песчаники, превращаются практически в песок (дезинтегрируются). Ко второй категории относится большинство пород-коллекторов, их проницаемость существенно зависит от напряжений.

К третьей категории относятся песчаники и алевролиты с большим содержанием глины. Такие породы уже при незначительных касательных напряжениях начинают интенсивно “ползти”, а их проницаемость при этом падает. Однако даже при значительных деформациях разрушение образцов не наступает, они продолжают деформироваться практически с постоянной скоростью (подобно пластилину), а проницаемость при этом постепенно уменьшается вплоть до нуля.

Исследования, проведенные на ИСТНН, позволили разработать новый геомеханический подход к решению проблем нефтегазодобычи. На его основе предложена новая эффективная технология повышения продуктивности скважин и нефтегазоотдачи пластов с помощью управления напряженно-деформированным состоянием в окрестности скважины – метод направленной нагрузки пласта (НРП). Он основан на

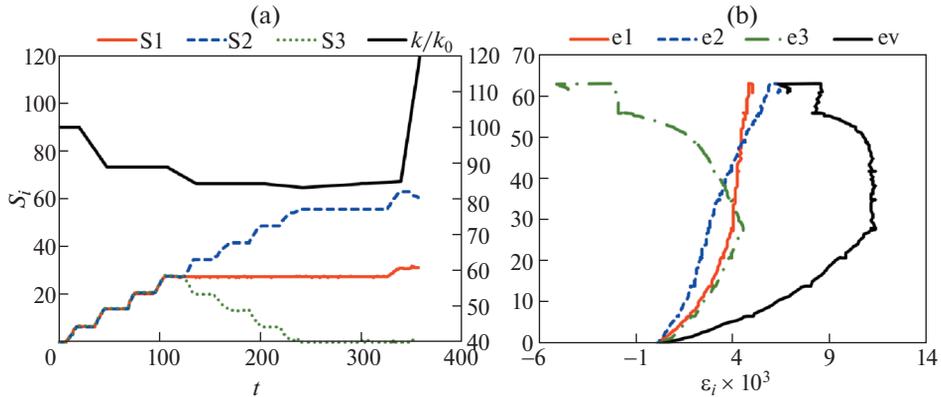


Рис. 4. Результаты испытаний на ИСТНН образца породы из ачимовских отложений Уренгойского газоконденсатного месторождения при моделировании применения метода направленной разгрузки пласта

инициации трещинообразования в призабойной зоне пласта за счет создания в пласте поля повышенных сдвиговых напряжений путем понижения давления в скважине до определенного уровня и выбора определенной геометрии забоя. Выбор уровня депрессии в скважине и конструкции ее забоя определяется на основе предварительных испытаний образцов породы конкретного месторождения на установке ИСТНН и проведения соответствующих расчетов. Метод НРП прошел успешные опытно-промысловые испытания на ряде месторождений в Западной Сибири и в Приуралье и показал свою высокую эффективность. В результате применения метода продуктивность необсаженных скважин удалось повысить в 2–4 раза, обсаженных в 1.5–2 раза.

На рис. 4 в качестве примера поведения пород второй категории представлены результаты испытаний на ИСТНН образца породы из ачимовских отложений Уренгойского газоконденсатного месторождения при моделировании применения метода направленной разгрузки пласта. На рис. 4,а показана программа нагружения образца, а также изменение относительной проницаемости в ходе нагружения. Три компоненты эффективных напряжений  $S_i$ , действующих на грунтовый скелет породы, измеряются в МПа, отношение конечной проницаемости к начальной в каждый момент времени – в процентах; время нагружения указано в секундах. На рис. 4,б представлены кривые деформирования по каждой из осей, а также объемная деформация. Монотонно возрастающее напряжение  $S_2$  выбрано параметром нагружения, оно откладывается по оси ординат в МПа. Величины деформаций по каждой из осей образца отложены по оси абсцисс в безразмерных единицах. Наглядно продемонстрирован резкий скачок проницаемости при создании в породе касательных напряжений определенного уровня.

На основе испытаний, проведенных на ИСТНН, предложены и научно обоснованы способы обеспечения устойчивости стволов скважин, прежде всего, наклонно направленных, пробуренных в анизотропных пластах. Техничко-технологические решения и рекомендации, разработанные на основе полученных научных результатов, прошли успешные нефтепромысловые испытания. Было проведено геомеханическое моделирование бурения и эксплуатации наклонных и горизонтальных скважин на месторождениях ОАО “Газпром”, НК “ЛУКОЙЛ”, ОАО “Сургутнефтегаз”, АО “Штокман Девелопмент АГ” с выдачей практических рекомендаций по снижению рисков разрушения стволов скважин и обоснованию допустимых максимальных дебитов.

Разработан научный подход к экспериментальному исследованию упруго-вязко-пластического поведения горных пород в условиях сложного трехосного нагружения на ИСТНН. Предложен и реализован для нескольких типов горных пород способ определения пластических параметров моделей Кулона–Мора и Друкера–Прагера путем проведения экспериментов по достаточно простым траекториям нагружения.

На ИСТНН исследуются реологические свойства горных пород. В настоящее время проводятся исследования с целью создания модели ползучести геоматериалов, которая существенно отличается от известных моделей, разработанных для металлов.

Таким образом в ИПМех РАН был создан способ разработки геомеханических моделей месторождений углеводородного сырья. Проведен комплекс экспериментальных и теоретических исследований для определения деформационных, прочностных и фильтрационных характеристик пород-коллекторов, что необходимо для наполнения геомеханико-фильтрационной модели. Расчеты по разработанным на основе предложенного способа моделям хорошо согласуются с экспериментальными данными.

По результатам исследований, проведенных на ИСТНН опубликовано более 200 научных работ, получено 11 патентов, в том числе международных.

*3.1. Модернизация ИСТНН. Новые задачи.* В настоящее время лабораторией геомеханики проводится существенная модернизация ИСТНН, фактически создается новый аппарат.

Во-первых, разработан и построен значительно более жесткий корпус машины, представляющий собой толстостенный металлический куб (толщина стенки 80 мм), позволяющий проводить испытания твердых скальных пород со значительно большей точностью. Использована более мощная и современная маслonaсосная станция фирмы Хьюдак (мощностью 350 ат) и более мощные гидроцилиндры. Мощность машины увеличена в 2 раза, максимальное усилие, которое достигается при нагружении составляет 1000 кН. Это позволит моделировать на установке напряжения, возникающие в пластах глубоких и сверхглубоких месторождений (до 10 км). С участием компании National Instruments разработана и внедрена новая более совершенная быстрая и надежная автоматизированная система управления машиной. Новая машина и ее система управления создавалась с учетом дальнейшего подключения к ней системы измерения скоростей распространения упругих волн (продольных и поперечных различной поляризации) и акустической эмиссии в ходе механических испытаний. Начаты работы по созданию такой системы и ее адаптации в комплексе ИСТНН. Это позволит проводить более глубокое и всестороннее изучение процессов деформирования и разрушения горных пород, влияния напряженно-деформированного состояния на их деформационные и прочностные свойства. На рис. 5 представлена модернизированная установка.

**4. Экспериментальные исследования – основа для математического моделирования поведения горных пород.** Важнейшими задачами экспериментальных исследований является получение данных для теоретических исследований. Эксперименты позволяют строить адекватные модели физических процессов [57–64], определять параметры для наполнения этих моделей. Однако на сегодняшний день все теоретические модели опираются на ограниченное число экспериментальных фактов и хорошо описывают поведение лишь отдельных пород, не позволяя расширить область их применения в целом. Например, в работе [58] предлагается новый критерий прочности для анизотропных горных пород. Предложенный критерий является переносом двумерного анизотропного критерия Джагера на трехмерный с использованием критерия прочности Моги–Кулона. В другой недавней работе [59] проводится исследование, направленное на проверку применимости методов машинного обучения для прогнозирования проницаемости. Используется специальное 3D-оборудование, сканирующее песчаник Берея методом рентгеновской микротомографии, и симулируются соответ-



Рис. 5. Модернизированная установка ИСТНН

ствующие значения проницаемости. Как утверждают авторы, полученные результаты моделирования демонстрируют применимость машинного обучения для прогнозирования проницаемости на основе изображений и открывают новую область цифровых исследований горных пород.

Важным нерешенным вопросом остается отсутствие актуального и сколь-нибудь универсального модельного подхода к вопросам проницаемости и ползучести. И хотя активно предпринимаются попытки обобщения уже имеющихся моделей и экспериментальных данных [53, 56, 60, 63] с целью создания общей модели ползучести, вследствие большого отличия характеристик пород хотя бы в пределах одного интервала залегания, возникают существенные сложности в разработке моделей даже для близких по свойствам пород, не говоря об общих моделях. Как отмечалось ранее, некоторые авторы по-прежнему указывают на недостаток качественных экспериментальных данных для продвижения в создании модельных подходов, особенно это касается результатов истинно трехосных испытаний.

Одна из недавних моделей ползучести предложена, например, в работе [63]. Авторами представлена нелинейная нестационарная вязкопластическая модель ползучести (NNPV), которая хорошо описывает кривые ползучести песчаника, построенные по результатам условно трехосных опытов, проведенных исследователями для изучения влияния фильтрационного давления флюида на механические свойства породы. Помимо самой математической модели, получено ее аналитическое решение для трехмерного случая и определены соответствующие параметры модели на основании экспериментальных данных. Отмечается, что новая модель хорошо описывает не только первую и вторую, но и третью, ускоренную, стадию ползучести.

Другая модель представлена в статье 2018 года [60], построенная по результатам серии условно трехосных испытаний на ползучесть образцов трещиноватого известняка в условиях многоуровневых циклов нагружения и разгрузки. Предложенная нелинейная упруговязкопластическая (EVP) модель ползучести основана на синтезе моделей упругого тела Гука, тел Сен-Венана, Кельвина и вязкопластического тела Бингама. Предложенная модель, по мнению авторов, точно описывает как нагружающий, так и разгружающий этапы проведенных испытаний. Кривые, полученные из модели, хорошо согласуются с экспериментальными результатами и соответствуют всем стадиям ползучести, особенно третьей.

Стоит отметить работу [64], посвященную поиску модели фильтрации в трещиновато-пористом массиве для условий Ярегского месторождения высоковязкой нефти. В статье проведен сравнительный анализ существующих моделей фильтрации в плане учитываемых механизмов массопереноса флюидов и получаемых в результате моделирования физических эффектов. Авторами выведен метод оценки относительного вклада течения Дарси в поровой матрице и течения Пуазейля в системе трещин пласта. Предложена комбинированная модель нестационарного фильтрационного течения флюидов в трещиновато-пористом песчанике Ярегского месторождения, основанная на уравнениях Эйлера для движения флюидов в сети трещин с учетом линейного сопротивления и модели массопереноса нефти в матрице и трещинах.

В [57] представлен геомеханический подход к моделированию деформирования и фильтрации пород-коллекторов с учетом анизотропии упругопластических свойств. Описаны три этапа моделирования, а именно: выбор соответствующей механической модели и ее адаптация к рассматриваемому случаю, получение параметров модели из прямых экспериментов, вычисление напряженного состояния и параметров течения жидкости для отдельных конфигураций скважины. Предложенный подход позволяет описать основные специфические характеристики механического поведения коллектора: влияние порового давления, сдвигового и всестороннего напряжений на характер деформации и переход к неупругому деформированию; возникновение неупругой объемной деформации и ее зависимость от напряженного состояния; анизотропию упругих, прочностных и фильтрационных свойств; неочевидную зависимость проницаемости от напряженно-деформированного состояния.

На сегодняшний день активно предпринимаются попытки математического описания процессов ползучести, деформирования и эволюции проницаемости при изменении напряженного состояния горных пород. Дальнейшее развитие такого подхода видится в расширении области применимости созданных моделей либо создании новых, более точных и универсальных методов, для чего по-прежнему необходимо большее количество качественных экспериментальных данных.

**5. Заключение.** В настоящее время исследования фильтрационных, деформационных, реологических и прочностных характеристик горных пород при изменении напряженного состояния проводятся весьма активно. Экспериментальные исследования свойств горных пород и процессов в них имеют исключительное значение в силу существенной дифференциации свойств горных пород и их гетерогенности. Также экспериментальные исследования позволяют определить параметры геомеханических моделей, проверить их адекватность.

Наиболее распространенным видом лабораторных исследований остаются испытания цилиндрических образцов горных пород условно трехосным методом. Такой подход позволяет проводить традиционные опыты по определению прочностных, фильтрационных и деформационных характеристик большинства горных пород, однако не дает возможности для изучения влияния неравнокомпонентных нагрузок, соответствующих реальным напряженным состояниям, возникающим в массиве горных пород, и исследований горных пород с анизотропными свойствами. С этой целью в настоящее время все шире проводятся испытания на истинно трехосных установках.

Достаточно детально исследователями, проводящими истинно трехосные испытания горных пород, изучена роль средней компоненты главных напряжений, влияние начальной трещиноватости горных пород на механические свойства, характер распространения имеющих в породе трещин при нагружении. Однако физическому моделированию реальных процессов в нефтегазовых пластах, происходящих при проведении различных технологических операций на скважинах, уделяется недостаточно внимания. Влияние неравнокомпонентности напряженного состояния на процессы фильтрации и ползучести изучено недостаточно. Для фундаментального понимания механических и фильтрационных процессов необходимо моделирование напряженных со-

стояний, максимально приближенных к возникающим в пластах в реальных условиях при эксплуатации месторождений. На данный момент отсутствуют универсальные модели ползучести горных пород, остается затруднительным предсказание изменения фильтрационных свойств при неравномерном трехосном нагружении. Проведение широкого спектра лабораторных исследований необходимо для более полного изучения закономерностей механических процессов в горных породах *in situ* и создания адекватных математических моделей.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-11-50047 Экспансия.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Селиванов К.С. Оценка прочности материала поверхности при его испытании методом “скретч-тест” // Вестник УГАТУ. 2015. Т. 19. № 1 (67). С. 100–106.
2. Karman T. Festigkeitsversuche unter allseitigem Druck // Z. ver. deutsch. Ing., 1911.
3. Böker R. Die Mechanik der bleibenden Formänderungen in Kristallinisch aufgebauten Körpern. Mitt. Forschungsarb. ver. deutsch. Ing., 1915. 175 p.
4. Воларович М.П., Томашевская И.С., Будников В.А. Механика горных пород при высоких давлениях. Деформационные и прочностные свойства. М.: Наука, 1979. 152 с.
5. Воларович М.П., Баюк Е.И. Влияние всестороннего давления до 4000 кг/см<sup>2</sup> на упругие свойства образцов горных пород // Докл. АН СССР. 1960. Т. 135. № 1. С. 65–69.
6. Horibe T., Kobayashi R. Physical properties of coal-measures rocks under triaxial pressure // J. Min. Soc. Japan. 1958. V. 74. P. 142–146.
7. Paterson M.S. A high-pressure, high-temperature apparatus for rock deformation // Intern. J. Rock Mech. Mining Sci. 1970. V. 7. P. 517–526.
8. Zhang H., Li C.C. Effects of Confining Stress on the Post-Peak Behaviour and Fracture Angle of Fauske Marble and Iddefjord Granite // Rock Mech. Rock En. 2019. V. 52. P. 1377–1385. <https://doi.org/10.1007/s00603-018-1695-7>
9. Zong Y., Han L., Jin Y., Zhao W., Meng L. Experimental Investigation on the Post-Peak Short-Term and Creep Behavior of Fractured Sandstone // Energies. 2020. V. 13. P. 598. <https://doi.org/10.3390/en13030598>
10. Zong Y., Han L., Meng Q., Wang Y., Strength properties and evolution laws of cracked sandstone samples in re-loading tests // Inter. J. Mining Sci. Tech. 2020. V. 30. Iss. 2. P. 251–258, <https://doi.org/10.1016/j.ijmst.2019.03.004>
11. Wang Z., Shen M., Gu L., Zhang F. Creep Behavior and Long-Term Strength Characteristics of Greenschist Under Different Confining Pressures // Geotech. Test. J. 2018. V. 41. № 1. P. 55–71. <https://doi.org/10.1520/GTJ20170143>
12. Nguyen T.S., Li Z., Su G., Nasser M.H.B., Young R.P. Hydro-mechanical behavior of an argillaceous limestone considered as a potential host formation for radioactive waste disposal // J. Rock Mech. Geotech. En. 2018. V. 10. № 6. P. 1063–1081. <https://doi.org/10.1016/j.jrmge.2018.03.010>
13. Yang S., Hu B. Creep and permeability evolution behavior of red sandstone containing a single fissure under a confining pressure of 30 MPa // Sci. Rep. 2020. V. 10. № 1900. <https://doi.org/10.1038/s41598-020-58595-2>
14. Yang S., Huang Y.-H., Ranjith P.G. Failure mechanical and acoustic behavior of brine saturated-sandstone containing two pre-existing flaws under different confining pressures // Engineering Fracture Mech. 2018. V. 193. P. 108–121. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2018.02.021>
15. Hamza O., Stace R. Creep properties of intact and fractured muddy siltstone // Int. J. Rock Mech. Mining Sci. 2018. V. 106. P. 109–116.
16. Мартюшев Д.А., Галкин С.В., Шелепов В.В. Влияние напряженного состояния горных пород на матричную и трещинную проницаемость в условиях различных литолого-фациальных зон турне-фаменских нефтяных залежей Верхнего Прикамья // Вестник Московского университета. Геология. 2019. № 5. С. 44–52. <https://doi.org/10.33623/0579-9406-2019-5-44-52>

17. *Хашпер А.Л., Аминов Т.Р., Федоров А.И., Жонин А.В.* Исследование зависимости проницаемости горной породы от ее напряженно-деформированного состояния // Геол. Вестник. 2019. № 1. С. 133–140.  
<https://doi.org/10.31084/2619-0087/2019-1-10>
18. *Хашпер А.Л., Аминов Т.Р., Федоров А.И., Жонин А.В.* Исследование влияния напряженно-деформированного состояния горной породы на ее проницаемость // Геология, геоэкология и ресурсный потенциал Урала и сопредельных территорий. 2019. № 7. С. 193–196.
19. *Хашпер А.Л., Аминов Т.Р., Федоров А.И., Жонин А.В.* Исследование зависимости проницаемости горной породы от ее напряженно-деформированного состояния // Геология, геоэкология и ресурсный потенциал Урала и сопредельных территорий. 2018. № 6. С. 185–188.
20. *Протодьяконов М.М., Ильиницкая Е.И., Карпов В.И.* Методы исследования механических свойств горных пород в условиях объемного напряженного состояния // Механические свойства горных пород. М.: Изд-во АН СССР, 1963. С. 151–156.
21. *Mogi K.* Fracture and flow of rocks under high triaxial compression // J. Geophys. Res. 1971. V. 76 P. 1255–1269.  
<https://doi.org/10.1029/JB076i005p01255>
22. *Lade P.V.* Rock strength criteria: the theories and the evidence // Comprehensive rock engineering. 1993. № 1. P. 255–284.
23. *Labuz J., Dai S.-T., Papamichos E.* Plane-strain compression of rock-like materials // Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr. 1996. № 33. P. 573–584.
24. *Shi L., Li X., Bai B., Wang A., Zeng Z., He H.* A Mogi-type true triaxial testing apparatus for rocks with two moveable frames in horizontal layout for providing orthogonal loads // Geotech. Test. J. 2017. № 40. P. 542–558.  
<https://doi.org/10.1520/GTJ20160242>
25. *Sato M., Takemura T., Takahashi M.* Development of the permeability anisotropy of submarine sedimentary rocks under true triaxial stresses // Int. J. Rock Mech. Mining Sci. 2018. V. 108. P. 118–127.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2018.06.010>
26. GCTS Testing Systems. URL: [https://www.gcts.com/?s=prod\\_ver&p=products&ID=199#tab-1](https://www.gcts.com/?s=prod_ver&p=products&ID=199#tab-1) (дата обращения 10.02.2021).
27. GDS Instruments. URL: <https://www.gdsinstruments.com/gds-products/gds-true-triaxial-apparatus> (Дата обращения 10.02.2021).
28. True triaxial testing of rocks / Ed. by *Kwasniewski M.*, Leiden: CRC Press/Balkema, 2013. 365 p.
29. *Georgieva T., Descamps F., Gonze N. et al.* Stability assessment of a shallow abandoned chalk mine of Malogne (Belgium) // Eur. J. Environ. Civ. En. 2020. P. 1–15.  
<https://doi.org/10.1080/19648189.2020.1762752>
30. *Young R.P., Nasser M.H.B., Lombos L.* Imaging the effect of the intermediate principal stress on strength, deformation and transport properties of rocks using seismic methods // True triaxial testing of rocks / Ed. by *Kwasniewski M.* et al. Leiden: CRC Press/Balkema, 2013. P. 311–318.
31. *Minaeian V., Dewhurst D.N., Rasouli V.* An Investigation on Failure Behaviour of a Porous Sandstone Using Single-Stage and Multi-stage True Triaxial Stress Tests // Rock Mech. Rock Eng. V. 53. P. 3543–3562. 2020.  
<https://doi.org/10.1007/s00603-020-02134-y>
32. *Rasouli V.* A true triaxial stress cell (TTSC) used for simulations of real field operations in the lab // True triaxial testing of rocks / Ed. by *M. Kwasniewski et al.* 2013. V. 4. P. 311–318.
33. *Rezagholilou A., Sarmadivaleh M.* Design and Application of a High-performance True Triaxial Stress Cell // Insights Min. Sci. Technol. 2019. V. 1 (5): 555573.  
<https://doi.org/10.19080/IMST.2019.01.555573>
34. *Nabipour A.* Experimental and numerical study of ultrasonic monitoring of hydraulic fracture propagation. Doctoral dissertation. Curtin University. Australia, 2013. 222 p.
35. *Minaeian V.* True triaxial testing of sandstones and shales. Doctoral dissertation. Curtin University. Australia, 2014. 220 p.
36. *Li Z., Wang L., Lu Y. et al.* Experimental investigation on True Triaxial Deformation and Progressive Damage Behaviour of Sandstone // Sci. Rep. 2019. V. 9. N. 3386.  
<https://doi.org/10.1038/s41598-019-39816-9>

37. *Baizhanov B., Katsuki D., Tutuncu A.N. et al.* Experimental Investigation of Coupled Geomechanical, Acoustic, and Permeability Characterization of Berea Sandstone Using a Novel True Triaxial Assembly // *Rock. Mech. Rock. Eng.* 2019. V. 52. P. 2491–2503.  
<https://doi.org/10.1007/s00603-019-01816-6>
38. *Feng X.-T., Zhang X., Kong R., Wang G.* A novel mogi type true triaxial testing apparatus and its use to obtain complete stress–strain curves of hard rocks // *Rock. Mech. Rock. Eng.* 2015. V. 49. № 5. P. 1649–1662.  
<https://doi.org/10.1007/s00603-015-0875-y>
39. *Asahina D., Sato M., Takahashi M.* Laboratory observations of fracture plane reactivation induced by pore pressure in Kimachi sandstone // *Proceed. Rock Dyn. Summit.* 2019. P. 101–105.  
<https://doi.org/10.1201/9780429327933-14>
40. *Asahina D., Pan P., Sato M. et al.* Hydraulic and Mechanical Responses of Porous Sandstone During Pore Pressure-Induced Reactivation of Fracture Planes: An Experimental Study // *Rock. Mech. Rock. Eng.* 2019. V. 52. P. 1645–1656.  
<https://doi.org/10.1007/s00603-018-1706-8>
41. *Feng X., Zhao J., Zhang X. et al.* A Novel True Triaxial Apparatus for Studying the Time-Dependent Behaviour of Hard Rocks Under High Stress // *Rock. Mech. Rock. Eng.* 2018. V. 51. P. 2653–2667.  
<https://doi.org/10.1007/s00603-018-1516-z>
42. *Zhao J., Feng X.-T., Zhang X. et al.* Time-dependent behaviour and modeling of Jinping marble under true triaxial compression. // *Int. J. Rock Mech. Mining. Sci.* 2018. V. 110. P. 218–230.
43. *Zhao J., Feng X.-T., Zhang X. et al.* Brittle-ductile transition and failure mechanism of Jinping marble under true triaxial compression // *En. Geol.* 2018. V. 232. P. 160–170.
44. *Zhao J., Feng X.-T., Zhang X., Yang C.* Brittle and ductile creep behavior of Jinping marble under true triaxial stress // *En. Geol.* 2019. V. 258. P. 105157.  
<https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2019.105157>
45. *Feng X.-T., Kong R., Zhang X., Yang C.* Experimental Study of Failure Differences in Hard Rock Under True Triaxial Compression // *Rock. Mech. Rock. Eng.* 2019. V. 52. P. 2109–2122.  
<https://doi.org/10.1007/s00603-018-1700-1>
46. *Feng X.-T. et al.* Evolution of the mechanical and strength parameters of hard rocks in the true triaxial cyclic loading and unloading tests // *Int. J. Rock Mech. Mining Sci.* 2020. V. 131. P. 104349.
47. *Duan M., Jiang C., Gan Q. et al.* Study on Permeability Anisotropy of Bedded Coal Under True Triaxial Stress and Its Application // *Transp. Porous Med.* 2020. V. 131. P. 1007–1035.  
<https://doi.org/10.1007/s11242-019-01375-y>
48. *Liu Y. et al.* Permeability evolution of anthracite coal considering true triaxial stress conditions and structural anisotropy // *J. Nat. Gas Sci. Eng.* 2018. V. 52. P. 492–506.
49. *Garcia A.V., Rached R.M., Santamarina J.C.* Large-Scale True Triaxial Apparatus for Geophysical Studies in Fractured Rock // *Geotech. Test. J.* 2018. V. 41. № 4. P. 821–829.
50. *Couture C., Bésuelle P.* Diffuse and localized deformation of a porous Vosges sandstone in true triaxial conditions // *In. E3S Web. Conf.* 2019. V. 92. № 06007.  
<https://doi.org/10.1051/e3sconf/20199206007>
51. *Lu J., Yin G., Li X. et al.* Deformation and CO<sub>2</sub> gas permeability response of sandstone to mean and deviatoric stress variations under true triaxial stress conditions // *Tunnelling and Underground Space Tech.* 2019. V. 84. P. 259–272.
52. *Klimov D.M., Karev V.I., Kovalenko Y.F.* Experimental study of the influence of a triaxial stress state with unequal components on rock permeability // *Mech. Solids.* 2015. V. 50. № 6. P. 633–640.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654415060047>
53. *Карев В.И., Климов Д.М., Коваленко Ю.Ф., Устинов К.Б.* Экспериментальное исследование ползучести горных пород при истинно трехосном нагружении // *Изв. РАН. МТТ.* 2019. № 6. С. 30–37.
54. *Karev V.I., Kovalenko Y.F., Ustinov K.B.* Geomechanics of Oil and Gas Wells. *Advances in Oil and Gas Exploration and Production.* Cham: Springer, 2020. 166 p.
55. *Карев В.И., Коваленко Ю.Ф., Химуля В.В.* Влияние напряжений на прочностные и фильтрационные свойства пород в окрестности горизонтальной скважины // *Процессы в геосредах.* 2018. № 1 (14). С. 746–756.

56. Karev V.I., Klimov D.M., Kovalenko Y.F., Ustinov K.B. Modelling of mechanical and filtration processes near the well with regard to anisotropy // *J. Phys.: Conf. Series*. 2018. V. 991. № 1. P. 012039. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/991/1/012039>
57. Tang H., Wang D., Huang R. et al. A new rock creep model based on variable-order fractional derivatives and continuum damage mechanics // *Bull. Eng. Geol. Environ.* 2048. V. 77. P. 375–383. <https://doi.org/10.1007/s10064-016-0992-1>
58. Singh A., Kumar A., Rao K.S. Strength behaviour of anisotropic rock under true triaxial stress state // *Int. Society Rock Mech. Rock En. 10th Asian Rock Mechanics Symposium, Singapore*. 2018. N. ISRM-ARMS10-2018-227.
59. Li X., Qi C., Shao Z. A microcrack growth-based constitutive model for evaluating transient shear properties during brittle creep of rocks // *En. Fract. Mech.* 2018. V. 194. P. 9–23. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2018.02.034>
60. Zhao Y., Lianyang Z., Wang W. et al. Separation of elastoviscoplastic strains of rock and a nonlinear creep model // *Int. J. Geomech.* 2018. V. 18. Iss.1. P. 04017129. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GM.1943-5622.0001033](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0001033)
61. Zhao Y., Wang Y., Wang W. et al. Modeling of rheological fracture behavior of rock cracks subjected to hydraulic pressure and far field stresses // *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2019. V. 101. P. 59–66. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2019.01.026>
62. Sudakov O., Burnaev E., Koroteev D. Driving digital rock towards machine learning: Predicting permeability with gradient boosting and deep neural networks // *Comp. Geosci.* 2019. V. 127. P. 91–98. <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2019.02.002>
63. Wang X., Yin Y., Wang J. et al. A nonstationary parameter model for the sandstone creep tests // *Landslides*. 2018. V. 15. № 7. P. 1377–1389. <https://doi.org/10.1007/s10346-018-0961-9>
64. Семин М.А., Зайцев А.В., Левин Л.Ю. Моделирование фильтрации нефти в трещиновато-пористом пласте в условиях Ярегского месторождения высоковязких нефтей // *Изв. ТГУ. Науки о земле*. 2018. № 3. С. 270–284.

УДК 539.4

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЯЗКОУПРУГО-ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ГИБКИХ АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИН

© 2021 г. А. П. Янковский

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,  
Новосибирск, Россия*

*e-mail: lab4nemir@rambler.ru*

Поступила в редакцию 28.02.2020 г.

После доработки 05.08.2020 г.

Принята к публикации 17.09.2020 г.

Разработана модель вязкоупруго-вязкопластического деформирования армированных пластин. Вязкопластическое поведение компонентов композиции описывается уравнениями теории течения с изотропным упрочнением при учете зависимости функции нагружения от интенсивности скоростей деформаций. Вязкоупругое деформирование этих материалов определяется уравнениями модели тела Максвелла–Больцмана. Геометрическая нелинейность задачи учитывается в приближении Кармана. Возможное слабое сопротивление армированных пластин поперечным сдвигам учитывается в рамках теории Амбарцумяна. Численное решение сформулированной начально-краевой задачи получается с использованием явной схемы типа «крест». Исследовано неупругое динамическое поведение гибких стеклопластиковых пластин с плоско-перекрестными и пространственными структурами армирования. Конструкции нагружаются в поперечном направлении избыточным давлением, соответствующим воздушной взрывной волне. Показано, что даже для относительно тонких композитных пластин неучет чувствительности компонентов композиции к скорости их деформирования приводит к существенному завышению величины остаточного прогиба и интенсивности остаточных деформаций этих материалов. Продемонстрировано, что даже для относительно тонких стеклопластиковых конструкций замена традиционной плоско-перекрестной структуры армирования на пространственную структуру позволяет существенно уменьшить величину интенсивности остаточных деформаций компонентов композиции (особенно связующей матрицы). С увеличением относительной толщины пластин положительный эффект от такой замены структур армирования резко возрастает. Обнаружено, что тонкая прямоугольная удлиненная стеклопластиковая пластина после неупругого динамического деформирования может приобретать гофрированную остаточную форму со складками, ориентированными в продольном направлении.

Ключевые слова: вязкоупруго-вязкопластическое деформирование, гибкая пластина, армирование, теория Амбарцумяна, динамическое нагружение, явная численная схема

DOI: 10.31857/S0572329921040140

**1. Введение.** Конструкции из композиционных материалов (КМ) широко внедряются в инженерную практику [1–6]. Современные КМ-изделия часто подвергаются высокоинтенсивному нагружению [5, 7], при котором компоненты композиции деформируются неупруго. Следовательно, моделирование неупругого поведения арми-

рованных конструкций является актуальной проблемой, которая на сегодняшний день находится на стадии становления [8, 9].

Упругопластическое поведение тонкостенных конструкций слоистой структуры (с изотропными слоями) исследовалось в [10]; вязкоупругопластическое деформирование армированных пластин моделировалось в [11], где впервые удалось рассчитать остаточные перемещения КМ-конструкции и остаточное напряженно-деформированное состояние (НДС) компонентов композиции после ее пластического динамического деформирования. Неупругое поведение многих материалов зависит от скорости их деформирования [12, 13], поэтому в [14] моделировалось упруговязкопластическое поведение КМ-пластин. Структурная же теория неупругого деформирования армированных сред, использующая определяющие соотношения теории пластического течения с учетом чувствительности материалов компонентов композиции к скорости их деформирования, а также с учетом их вязкоупругих свойств до настоящего времени не разработана. Используя терминологию, принятую в [15], такую модель неупругого поведения материалов компонентов композиции будем называть теорией вязкоупруго-вязкопластического деформирования.

Для описания слабого сопротивления тонкостенных армированных конструкций поперечному сдвигу (которое может проявляться даже при некоторых пространственных структурах армирования [16–18]) традиционно используют неклассические теории Тимошенко–Рейсснера [4, 5, 10, 19, 20], Амбарцумяна [11, 14, 21] или Редди [3, 22]; реже используется теория, базирующаяся на кинематической гипотезе ломаной линии [4].

Для численного интегрирования физически и геометрически нелинейных динамических задач механики тонкостенных конструкций, как правило, применяют явные методы [10, 11, 14, 23], чаще всего схему “крест”.

В связи со всем вышеизложенным данное исследование посвящено моделированию вязкоупруго-вязкопластического поведения гибких армированных пластин с учетом их возможного слабого сопротивления поперечным сдвигам. Численное решение соответствующих начально-краевых задач, возникающих при этом, предполагается строить по явной схеме типа “крест”.

**2. Численно-аналитическое моделирование вязкоупруго-вязкопластического поведения КМ.** Как и в [11, 14], считаем, что малые деформации  $\epsilon_{ij}$  можно разложить на сумму сжимаемых вязкоупругих  $e_{ij}$  и несжимаемых пластических  $p_{ij}$  составляющих

$$\epsilon_{ij} = e_{ij} + p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (p_{ii} = 0) \quad (2.1)$$

При этом вязкопластическое течение материала ассоциировано с мгновенной поверхностью нагружения  $f = 0$ , которая для конкретности задается в форме, соответствующей обобщению условия текучести Мизеса [14]:

$$f(T, \chi, H) \equiv T^2 - \tau_s^2(\chi, H) = 0 \quad (2.2)$$

где

$$T = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}}, \quad H = \sqrt{2 \xi_{ij} \xi_{ij}}, \quad \chi = \int_0^t \sqrt{2 \dot{p}_{ij} \dot{p}_{ij}} dt, \quad \xi_{ij} \equiv \dot{e}_{ij} + \dot{p}_{ij} \quad (2.3)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{ll}, \quad \bar{e}_{ij} = e_{ij} - \delta_{ij} \epsilon_0, \quad \epsilon_0 = \frac{1}{3} \epsilon_{ll}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

$\bar{e}_{ij}$  – компоненты девиатора вязкоупругих деформаций;  $\xi_{ij}$  – компоненты девиатора скорости деформаций;  $\sigma_{ij}$ ,  $s_{ij}$  – компоненты тензора и девиатора напряжений;  $\sigma_0$ ,  $\epsilon_0$  – средние напряжение и деформация;  $T$  – интенсивность касательных напряжений;  $\chi$  – параметр Одквиста;  $H$  – интенсивность скоростей деформаций сдвига;  $\tau_s$  – мгновен-

ный предел текучести при чистом сдвиге, который равен  $T$  при определенных значениях  $H$  и  $\chi$  в данный момент времени  $t$ ;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера; точка – производная по времени. Начальная поверхность нагружения  $T = \tau_s(H) \equiv \tau_s(0, H)$  – обычный предел текучести, зависящий от скорости деформирования  $H$  [12, 13]. (В настоящем разделе, если не оговорено, по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3.)

В работе [24] вязкоупругое поведение материала описывалось интегральными определяющими соотношениями. Однако в [25] показано, что для адекватного моделирования затухающих колебаний образцов целесообразно использовать не интегральную, а дифференциальную форму определяющих уравнений вязкоупругости [26]. В связи с этим, как и в [11, 27], считаем, что вязкоупругое деформирование материала описывается соотношениями модели Максвелла–Больцмана

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\dot{s}_{ij}}{2G} + \frac{s_{ij}}{2\eta}, \quad \dot{\varepsilon}_0 = \dot{\varepsilon}_0 = \frac{\dot{\sigma}_0}{3K} + \frac{\sigma_0}{3\mu}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

где  $G$  – модуль сдвига;  $K$  – объемный модуль упругости;  $\eta$  – коэффициент линейной вязкости при сдвиге;  $\mu$  – коэффициент объемной вязкости.

Используя ассоциированный закон пластического течения [15, 24, 26, 27] при учете (2.2) и (2.3), получаем (см. равенство (1.12) в [14])

$$\dot{p}_{ij} = \frac{s_{ij}}{2\tau_s^2(\chi, H)} s_{ml} \dot{p}_{ml}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.5)$$

В случае пластического деформирования материала при чистом сдвиге ( $\tau = \tau_s(\chi, H)$ ) выполняется соотношение (см. равенства (1.15)–(1.18) в [14])

$$\dot{\tau} = \tau_\chi \dot{\chi} + \tau_H \dot{H} = \tau_\chi \dot{\gamma}_p + \tau_H \dot{\xi} \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_\chi &\equiv \frac{\partial \tau_s}{\partial \chi} = \frac{\partial \tau_s}{\partial \gamma_p} \equiv \bar{G}, & \tau_H &\equiv \frac{\partial \tau_s}{\partial H} = \frac{\partial \tau_s}{\partial \xi}, \\ \chi &= \int_0^t \dot{\gamma}_p dt = \int_0^{\gamma_p} d\gamma_p = \gamma_p, & \dot{\chi} &= \dot{\gamma}_p, & \xi &\equiv H = \dot{\gamma} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$\tau$  – касательное напряжение при чистом сдвиге;  $\gamma_p$  – пластическая составляющая полной угловой деформации  $\gamma$ ;  $\xi$  – скорость деформации  $\gamma$ ;  $\tau_\chi \equiv \bar{G} = \tau_\chi(\chi, H) = \tau_\chi(\gamma_p, \xi)$  и  $\tau_H = \tau_H(\chi, H) = \tau_H(\gamma_p, \xi)$  – известные из эксперимента функции, причем  $\tau_\chi \equiv \bar{G}$  – касательный модуль при постоянстве скорости деформирования ( $\xi = \text{const}$ ) на диаграмме  $\tau \sim \gamma_p$  (для простоты предполагаем, что угловые деформации  $\gamma_p$ ,  $\gamma$  и напряжение  $\tau$  положительны).

Изменение касательного напряжения  $\tau$  сопровождается приращением вязкоупругой части угловой деформации  $\gamma_e$  ( $\gamma_e = \gamma - \gamma_p$ ). Согласно этому в случае чистого сдвига из первого равенства (2.4) с учетом (2.3) получаем

$$\frac{\dot{\gamma}_e}{2} = \frac{\dot{\tau}}{2G} + \frac{\tau}{2\eta}$$

Выразим отсюда  $\dot{\tau}$  и подставим в левую часть равенства (2.6), после чего при учете  $\gamma_e = \gamma - \gamma_p$  получим соотношение

$$\dot{\gamma}_p = \frac{1}{1+g} \left( \dot{\gamma} - \frac{\tau_H}{G} \dot{\xi} - \frac{\tau}{\eta} \right) \quad (2.8)$$

где (см. (2.7))

$$g = g(\chi, H) = \frac{\bar{G}(\chi, H)}{G} = \frac{\tau_\chi(\chi, H)}{G} \quad (2.9)$$

Умножим (2.8) на  $\tau$ , тогда получим энергетическое соотношение

$$\tau \dot{\gamma}_p = \frac{1}{1+g} \left( \tau \dot{\gamma} - \frac{\tau_H}{G} \tau \dot{\xi} - \frac{\tau^2}{\eta} \right) \quad (2.10)$$

Как и в рамках теории Прандтля–Рейсса–Хилла ( $\tau_H = 0$ ,  $\eta \rightarrow \infty$ ) [23], теории вязкоупругопластического ( $\tau_H = 0$ ) [11] и теории упруговязкопластического ( $\eta \rightarrow \infty$ ) [14] деформирования материала, предполагаем, что энергетическое равенство, аналогичное (2.10), справедливо при любых видах НДС. На основании этого, учитывая (2.3), будем иметь равенство

$$s_{ml} \dot{p}_{ml} = \frac{1}{1+g} \left( s_{ml} \dot{\epsilon}_{ml} - \frac{\tau_H}{G} s_{ml} \dot{\xi}_{ml} - \frac{s_{ml} s_{ml}}{2\eta} \right) = \frac{1}{1+g} \left( s_{ml} \dot{\epsilon}_{ml} - \frac{\tau_H}{G} s_{ml} \ddot{\epsilon}_{ml} - \frac{T^2}{\eta} \right) \quad (2.11)$$

которое обобщает энергетические уравнения (20) в [11] и (1.24) в [14].

Подставим выражение (2.11) в правую часть равенства (2.5) и учтем разложение, аналогичное (2.1), для дивергента деформаций, тогда получим

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\xi}_{ij} + \frac{s_{ij}}{2T^2(1+g)} \left( s_{ml} \dot{\epsilon}_{ml} - \frac{\tau_H}{G} s_{ml} \ddot{\epsilon}_{ml} - \frac{T^2}{\eta} \right), \quad i, j = 1, 2, 3$$

В правой части этого равенства учтем первое соотношение (2.4), после чего будем иметь

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\dot{s}_{ij}}{2G} + \frac{s_{ij}}{2\eta} + \frac{s_{ij}}{2T^2(1+g)} \left( s_{ml} \dot{\epsilon}_{ml} - \frac{\tau_H}{G} s_{ml} \ddot{\epsilon}_{ml} - \frac{T^2}{\eta} \right), \quad i, j = 1, 2, 3$$

откуда следует

$$\dot{s}_{ij} = 2G\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{G}{\eta} \left( 1 - \frac{c}{1+g} \right) s_{ij} - \frac{c s_{ml}}{T^2(1+g)} (G\dot{\epsilon}_{ml} - \tau_H \ddot{\epsilon}_{ml}) s_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.12)$$

где  $c$  – параметр переключения:  $c = 0$  при чисто вязкоупругом деформировании, разгрузке и нейтральном нагружении,  $c = 1$  при активном вязкоупруго-вязкопластическом деформировании. Повторяя рассуждения из работы [14] (см. там соотношения (1.28)–(1.36)), получим

$$c = \begin{cases} 0 & \text{при } T < \tau_s(\chi, H) \quad \text{или} \quad T = \tau_s(\chi, H) \\ \text{и} & s_{ij} \dot{s}_{ij} - 4\tau_s \tau_H H^{-1} \xi_{ij} \ddot{\epsilon}_{ij} \leq 0 \\ 1 & \text{при } T = \tau_s(\chi, H) \\ \text{и} & s_{ij} \dot{s}_{ij} - 4\tau_s \tau_H H^{-1} \xi_{ij} \ddot{\epsilon}_{ij} > 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Подставим в (2.13) соотношение (2.12) и учтем постулат Друккера [15], тогда будем иметь выражение

$$c = \begin{cases} 0 & \text{при } T < \tau_s(\chi, H) \quad \text{или} \quad T = \tau_s(\chi, H) \\ \text{и} & s_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - 2\tau_s \tau_H (GH)^{-1} \xi_{ij} \ddot{\epsilon}_{ij} \leq \eta^{-1} \tau_s^2(\chi, H) \\ 1 & \text{при } T = \tau_s(\chi, H) \\ \text{и} & s_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - 2\tau_s \tau_H (GH)^{-1} \xi_{ij} \ddot{\epsilon}_{ij} > \eta^{-1} \tau_s^2(\chi, H) \end{cases} \quad (2.14)$$

Используя второе равенство (2.4) и учитывая соотношения (2.1) и (2.3), равенства (2.12) можно преобразовать к окончательному виду

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} = & 2G\dot{\varepsilon}_{ij} + \delta_{ij}\lambda\dot{\varepsilon}_{ll} - B\sigma_{ij} + \frac{\delta_{ij}}{3}\left(B - \frac{K}{\mu}\right)\sigma_{ll} - \\ & - As_{ij}s_{ml}\dot{\varepsilon}_{ml} + \frac{A\tau_H}{G}s_{ij}s_{mn}\dot{\varepsilon}_{mn}, \quad i, j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.15)$$

где

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad A \equiv \frac{cG}{(1+g)T^2} = \frac{cG}{(1+g)\tau_s^2(\chi, H)}, \quad B \equiv \frac{G}{\eta}\left(1 - \frac{c}{1+g}\right) \quad (2.16)$$

$E$ ,  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона при мгновенном деформировании материала;  $\lambda$  – параметр Ламе; параметр переключения  $c$  определяется по формуле (2.14) или (2.13).

Если вязкость при упругом деформировании не учитывается ( $\eta \rightarrow \infty$ ) и пластическое поведение материала не зависит от скорости его деформирования ( $\tau_H \equiv 0$ ), то из (2.15) при учете (2.14) и (2.16) получаются определяющие соотношения теории Прандтля–Рейсса–Хилла [23]. Если материал не чувствителен к скорости деформирования ( $\tau_H \equiv 0$ ), то из (2.14)–(2.16) вытекают определяющие уравнения вязкоупруго-пластической теории [11, 27]. Если же пренебречь вязкостью при упругом деформировании материала ( $\eta \rightarrow \infty$ ), то равенства (2.15) с учетом (2.14), (2.16) редуцируются в определяющие соотношения упруговязкопластической теории [14].

Как и в работах [11, 14], для удобства последующего изложения определяющие уравнения для  $k$ -го компонента композиции целесообразно записать в матричной форме (см. (2.14)–(2.16))

$$\dot{\sigma}_k = \mathbf{V}_k \sigma_k + \mathbf{Z}_k \dot{\varepsilon}_k + \mathbf{Y}_k \ddot{\varepsilon}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (2.17)$$

Здесь и далее:

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \{\sigma_1^{(k)}, \sigma_2^{(k)}, \sigma_3^{(k)}, \sigma_4^{(k)}, \sigma_5^{(k)}, \sigma_6^{(k)}\}^T \equiv \{\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{23}^{(k)}, \sigma_{31}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}\}^T \\ \varepsilon_k &= \{\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \varepsilon_3^{(k)}, \varepsilon_4^{(k)}, \varepsilon_5^{(k)}, \varepsilon_6^{(k)}\}^T \equiv \{\varepsilon_{11}^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)}, \varepsilon_{33}^{(k)}, 2\varepsilon_{23}^{(k)}, 2\varepsilon_{31}^{(k)}, 2\varepsilon_{12}^{(k)}\}^T \\ s_k &= \{s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, s_3^{(k)}, s_4^{(k)}, s_5^{(k)}, s_6^{(k)}\}^T \equiv \{s_{11}^{(k)}, s_{22}^{(k)}, s_{33}^{(k)}, s_{23}^{(k)}, s_{31}^{(k)}, s_{12}^{(k)}\}^T \\ \xi_k &= \{\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \xi_3^{(k)}, \xi_4^{(k)}, \xi_5^{(k)}, \xi_6^{(k)}\}^T \equiv \{\xi_{11}^{(k)}, \xi_{22}^{(k)}, \xi_{33}^{(k)}, \xi_{23}^{(k)}, \xi_{31}^{(k)}, \xi_{12}^{(k)}\}^T \end{aligned} \quad (2.18)$$

$\mathbf{V}_k = (v_{ij}^{(k)})$ ,  $\mathbf{Z}_k = (z_{ij}^{(k)})$ ,  $\mathbf{Y}_k = (y_{ij}^{(k)})$  – симметричные  $6 \times 6$ -матрицы, характеризующие механическое состояние материала ( $\mathbf{Z}_k$  условно можно трактовать как матрицу “жесткости”, а  $\mathbf{V}_k$  – как матрицу “вязкости” материала), причем  $\mathbf{Z}_k$  и  $\mathbf{Y}_k$  можно представить в виде

$$\mathbf{Z}_k = \bar{\mathbf{Z}}_k - \bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k, \quad \mathbf{Y}_k = \frac{\tau_H^{(k)}}{G^{(k)}} \bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (2.19)$$

$\bar{\mathbf{Z}}_k = (\bar{z}_{ij}^{(k)})$ ,  $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k = (\bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)})$  – симметричные  $6 \times 6$ -матрицы. Ненулевые элементы матриц  $\mathbf{V}_k$ ,  $\bar{\mathbf{Z}}_k$  и  $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k$  определяются так:

$$\begin{aligned} v_{ij}^{(k)} &= -\frac{K^{(k)}}{3\mu^{(k)}} + \left(\frac{1}{3} - \delta_{ij}\right) B^{(k)}, \quad \bar{z}_{ij}^{(k)} = 2\delta_{ij}G^{(k)} + \lambda^{(k)} = \text{const}, \quad v_{mm}^{(k)} = -B^{(k)} \\ \bar{z}_{mm}^{(k)} &= G^{(k)} = \text{const} \quad (i, j = \overline{1, 3}, \quad m = \overline{4, 6}), \quad \bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)} = A^{(k)}s_i^{(k)}s_j^{(k)} \quad (i, j = \overline{1, 6}) \\ A^{(k)} &= \frac{c^{(k)}G^{(k)}}{(1 + g^{(k)})\tau_s^{(k)2}(\chi^{(k)}, H^{(k)})}, \quad B^{(k)} = \frac{G^{(k)}}{\eta^{(k)}} \left(1 - \frac{c^{(k)}}{1 + g^{(k)}}\right) \\ g^{(k)} &= \frac{\bar{G}^{(k)}}{G^{(k)}} = \frac{\tau_\chi^{(k)}}{G^{(k)}}, \quad G^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{2(1 + v^{(k)})}, \quad \lambda^{(k)} = \frac{v^{(k)}E^{(k)}}{(1 + v^{(k)})(1 - 2v^{(k)})} \\ c^{(k)} &= \begin{cases} 0 & \text{при } T^{(k)} < \tau_s^{(k)} \text{ или } T^{(k)} = \tau_s^{(k)}, \quad W^{(k)} \leq 0 \\ 1 & \text{при } T^{(k)} = \tau_s^{(k)}, \quad W^{(k)} > 0 \end{cases} \\ W^{(k)} &= \mathbf{s}_k^T \dot{\mathbf{e}}_k - \frac{2\tau_s^{(k)}\tau_H^{(k)}}{G^{(k)}H^{(k)}} \xi_k^T \dot{\mathbf{e}}_k - \frac{\tau_s^{(k)2}}{\eta^{(k)}}, \quad T^{(k)2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 s_i^{(k)2} + \sum_{i=4}^6 s_i^{(k)2} \\ H^{(k)2} &= 2 \sum_{i=1}^3 \xi_i^{(k)2} + 4 \sum_{i=4}^6 \xi_i^{(k)2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.20)$$

$\tau$  – операция транспонирования.

В соотношениях (2.18)–(2.20) все величины имеют прежний смысл, индекс  $k$  – номер компонента композиции:  $k = 0$  – связующий материал,  $k = 1, 2, \dots, N$  – арматура  $k$ -го семейства;  $N$  – количество семейств армирующих волокон. (В выражениях (2.20) по повторяющемуся индексу  $m$  суммирования нет.) Равенства (2.18) задают соответствия между шестью элементами  $f_i^{(k)}$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) некоторого вектора-столбца  $\mathbf{f}_k$  и компонентами симметричного тензора второго ранга  $f_{jl}^{(k)}$ ,  $j, l = \overline{1, 3}$ . (Согласно введенным обозначениям (2.18),  $\xi_k \neq \dot{\mathbf{e}}_k$ ,  $0 \leq k \leq N$ .)

Как уже отмечалось во Введении, численное решение рассматриваемой задачи будем строить с использованием метода шагов по времени [10, 11, 14, 23], т.е. будем определять значения искоемых функций в дискретные моменты времени  $t_{n+1} = t_n + \Delta$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), где  $\Delta = \text{const} > 0$  – шаг по времени. При этом предполагаем, что в предыдущий момент времени  $t_m$  уже известны значения следующих векторных функций:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_k^m(\mathbf{r}) &\equiv \mathbf{s}_k(t_m, \mathbf{r}), \quad \mathbf{\sigma}_k^m(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{\sigma}_k(t_m, \mathbf{r}), \quad \mathbf{\dot{e}}_k^m(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{\dot{e}}_k(t_m, \mathbf{r}) \\ \mathbf{\ddot{e}}_k^m(\mathbf{r}) &\equiv \mathbf{\ddot{e}}_k(t_m, \mathbf{r}), \quad m = n - 1, \quad 0 \leq k \leq N, \quad \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\} \end{aligned} \quad (2.21)$$

где  $x_i$  – координаты точек тела.

Так как в дальнейшем предполагается разработка явной схемы типа «крест» на трехточечном шаблоне по времени ( $t_{n-1}$ ,  $t_n$ ,  $t_{n+1}$ ), имеющей второй порядок точности по  $\Delta$  [10], согласно результатам работ [11, 14], преобразуем первое и последнее слагаемые в правой части соотношения (2.17), используя формулу трапеций, также имею-

щую второй порядок точности по  $\Delta$  [28]. В текущий момент времени  $t_n$  на основании формулы трапеций имеем выражения

$$\overset{n}{\sigma}_k - \overset{n-1}{\sigma}_k = \frac{\Delta}{2} \left( \overset{n}{\dot{\sigma}}_k + \overset{n-1}{\dot{\sigma}}_k \right), \quad \overset{n}{\dot{\epsilon}}_k - \overset{n-1}{\dot{\epsilon}}_k = \frac{\Delta}{2} \left( \overset{n}{\ddot{\epsilon}}_k + \overset{n-1}{\ddot{\epsilon}}_k \right), \quad 0 \leq k \leq N$$

откуда

$$\overset{n}{\sigma}_k = \frac{\Delta}{2} \overset{n}{\dot{\sigma}}_k + \overset{n-1/2}{\sigma}_k, \quad \overset{n}{\dot{\epsilon}}_k = \frac{2}{\Delta} \overset{n}{\dot{\epsilon}}_k - \frac{2}{\Delta} \overset{n-1/2}{\dot{\epsilon}}_k, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.22)$$

где

$$\overset{n-1/2}{\sigma}_k \equiv \overset{n-1}{\sigma}_k + \frac{\Delta}{2} \overset{n-1}{\dot{\sigma}}_k, \quad \overset{n-1/2}{\dot{\epsilon}}_k \equiv \overset{n-1}{\dot{\epsilon}}_k + \frac{\Delta}{2} \overset{n-1}{\ddot{\epsilon}}_k, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.23)$$

Из равенств (2.23) с учетом предположений (2.21) вытекает, что шестикомпонентные векторы-столбцы  $\overset{n-1/2}{\sigma}_k$  и  $\overset{n-1/2}{\dot{\epsilon}}_k$  в выражении (2.22) при  $t = t_n$  уже известны.

Подстановка соотношений (2.22) в уравнение (2.17) приводит к матричному равенству

$$\overset{n}{\dot{\sigma}}_k = \overset{n}{\mathbf{B}}_k \overset{n}{\dot{\epsilon}}_k + \overset{n}{\mathbf{p}}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (2.24)$$

где

$$\overset{n}{\mathbf{B}}_k \equiv \overset{n}{\bar{\mathbf{V}}}_k^{-1} \left( \overset{n}{\mathbf{Z}}_k + \frac{2}{\Delta} \overset{n}{\mathbf{Y}}_k \right), \quad \overset{n}{\mathbf{p}}_k \equiv \overset{n}{\bar{\mathbf{V}}}_k^{-1} \left( \overset{n}{\mathbf{V}}_k \overset{n-1/2}{\sigma}_k - \frac{2}{\Delta} \overset{n}{\mathbf{Y}}_k \overset{n-1/2}{\dot{\epsilon}}_k \right) \quad (2.25)$$

$$\overset{n}{\bar{\mathbf{V}}}_k \equiv \mathbf{I} - \frac{\Delta}{2} \overset{n}{\mathbf{V}}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N$$

$\mathbf{I}$  – единичная  $6 \times 6$ -матрица;  $\overset{n}{\bar{\mathbf{V}}}_k^{-1}$  – матрица, обратная  $6 \times 6$ -матрице  $\overset{n}{\bar{\mathbf{V}}}_k$ . В данный момент времени  $t_n$  соотношение (2.24) – определяющее уравнение для вязкоупруго-вязкопластического материала  $k$ -го компонента композиции.

Так как элементы матриц  $\overset{n}{\mathbf{V}}_k$  и  $\overset{n}{\mathbf{Z}}_k$  зависят от решения задачи (см. выражения (2.19) и (2.20)), равенство (2.24) при учете (2.23) и (2.25) является нелинейным. Для линеаризации этого соотношения, как и в [11, 14], целесообразно использовать метод, аналогичный методу переменных параметров упругости [29]. Тогда в текущий момент времени  $t_n$  на каждой итерации этого метода  $6 \times 6$ -матрица  $\overset{n}{\mathbf{B}}_k = (b_{ij}^{(k)})$  и шестикомпонентный вектор-столбец  $\overset{n}{\mathbf{p}}_k = \{p_i^{(k)}\}$  ( $i, j = \overline{1, 6}$ ) в соотношении (2.24) будут известны.

Линеаризованное матричное уравнение (2.24) формально совпадает с аналогичными равенствами (51) в [11] и (2.10) в [14]. Следовательно, используя результаты работ [11, 14], на базе определяющего соотношения (2.24) можем построить структурную модель вязкоупруго-вязкопластического деформирования армированной среды. При этом в момент времени  $t_n$  на данной итерации для КМ получаем следующее линейное определяющее соотношение, записанное в матричной форме:

$$\overset{n}{\dot{\sigma}} = \overset{n}{\mathbf{B}} \overset{n}{\dot{\epsilon}} + \overset{n}{\mathbf{p}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

где  $\overset{n}{\dot{\sigma}}$ ,  $\overset{n}{\dot{\epsilon}}$  – шестикомпонентные векторы-столбцы скоростей осредненных напряжений  $\overset{n}{\dot{\sigma}}_{ij}$  и деформаций  $\overset{n}{\dot{\epsilon}}_{ij}$  в композиции, по структуре аналогичные (2.18);  $\overset{n}{\mathbf{B}} = (b_{ij})$  – из-

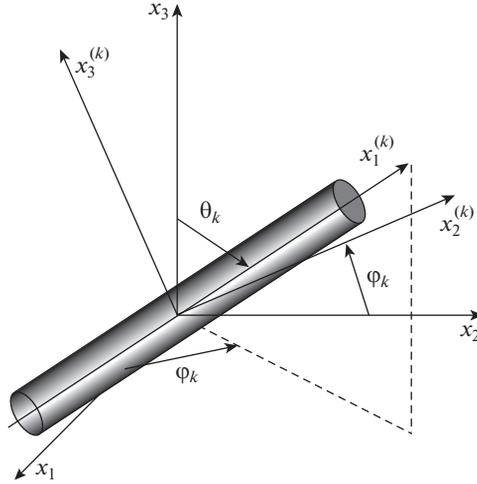


Рис. 1. Локальная система координат, связанная с траекторией волокна  $k$ -го семейства

вестная  $6 \times 6$ -матрица,  $\mathbf{p} = \{p_i\}$  – известный шестикомпонентный вектор-столбец, которые вычисляются по формулам (2.17) из [14] и зависят от текущего механического состояния (определенного на предыдущей итерации) компонентов композиции (от  $\mathbf{V}_k$  и  $\mathbf{p}_k$ ; см. (2.24)) и структуры армирования, т.е. от плотностей  $\omega_k$  и направлений армирования. Направление траектории волокна  $k$ -го семейства однозначно задается двумя углами сферической системы координат  $\theta_k$  и  $\varphi_k$ ,  $0 \leq k \leq N$  (рис. 1).

Связь между скоростями деформаций  $k$ -го компонента  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$  (см. (2.24)) и скоростями осредненных деформаций композиции  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  (см. (2.26)) определяется соотношениями (2.19) из [14].

**3. Моделирование динамического поведения гибкой КМ-пластины.** Рассматриваем армированную пластину толщиной  $2h$ , с которой свяжем декартову прямоугольную систему координат  $x_i$  так, что плоскость  $x_1x_2$  ( $x_3 = 0$ ) – срединная плоскость конструкции ( $|x_3| \leq h$ ). Пластина усилена  $N$  семействами волокон с плотностями армирования  $\omega_k$  ( $0 \leq k \leq N$ ); структура армирования в поперечном направлении  $x_3$  однородна (рис. 2).

Предполагаем, что на лицевых поверхностях конструкции ( $|x_3| = h$ ) можно пренебречь действием касательных распределенных внешних нагрузок. Для учета слабого сопротивления КМ-пластины поперечным сдвигам используем кинематические соотношения теорий Амбарцумяна или Редди [3, 21], согласно которым осредненные деформации композиции  $\varepsilon_{ij}$  и перемещения точек  $U_i$  гибкой КМ-пластины аппроксимируем так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \frac{x_3}{3h^2}(3h^2 - x_3^2)(\partial_i \varepsilon_{j3}^0 + \partial_j \varepsilon_{i3}^0) + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w \\ \varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) &= \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \varepsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad i, j = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

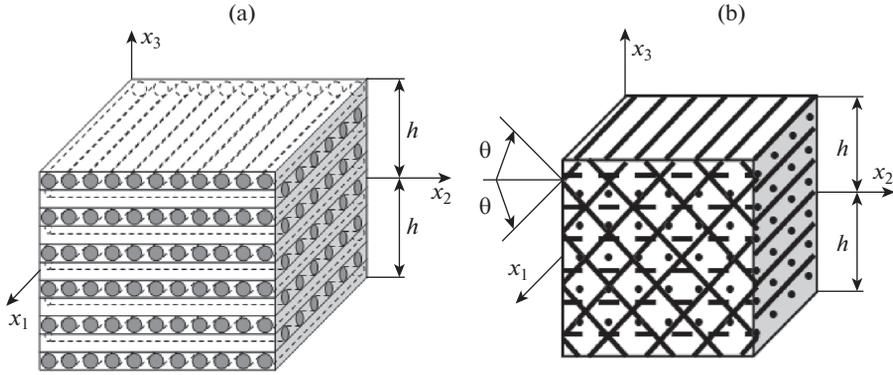


Рис. 2. Элемент пластины с плоской структурой 2D-армирования (a) и пространственной структурой 4D-армирования (b)

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + \frac{2x_3}{3h^2} (3h^2 - x_3^2) \epsilon_{i3}^0 \quad (3.2)$$

$$U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2$$

где  $u_i$  – перемещения точек отсчетной плоскости ( $x_3 = 0$ ) в тангенциальных направлениях  $x_i$ ;  $w$  – прогиб;  $\epsilon_{i3}^0$  – деформации поперечных сдвигов в точках отсчетной плоскости;  $t_0$  – начальный момент времени;  $\partial_i$  – оператор частного дифференцирования по переменной  $x_i$ ;  $\Omega$  – область, занимаемая конструкцией в плане. В равенствах (3.1), (3.2) неизвестными являются функции  $u_i$ ,  $w$  и  $\epsilon_{i3}^0$ , которые зависят от времени  $t$  и двух пространственных координат  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Моделируется механическое поведение КМ-конструкции как гибкой тонкостенной системы, поэтому напряжение  $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$  с приемлемой для практических приложений точностью можно линейно аппроксимировать по поперечной координате  $x_3$  [20]:

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) \equiv \sigma_3(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0 \quad (3.3)$$

где  $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$  – нормальные напряжения на верхней (+) и нижней (–) лицевых плоскостях, известные из соответствующих силовых граничных условий.

Матричное соотношение (2.26) – система шести линейных алгебраических уравнений. Из третьего равенства этой системы, согласно соотношениям соответствия (2.18), можно определить скорость линейной поперечной деформации:

$$\dot{\epsilon}_{33} \equiv \dot{\epsilon}_3 = (b_{33})^{-1} \left( \dot{\sigma}_3 - p_3 - \sum_{i=1}^6 (1 - \delta_{3i}) b_{3i} \dot{\epsilon}_i \right) \quad (3.4)$$

где скорость нормального напряжения  $\dot{\sigma}_3$  в момент времени  $t_n$  известна из (3.3) после его дифференцирования по времени  $t$ . Скорости деформаций  $\dot{\epsilon}_i$  в правой части (3.4) вычисляются путем дифференцирования по времени соотношений (3.1), т.е. зависят от функций  $w$ ,  $\dot{w}$ ,  $\dot{u}_l$  и  $\dot{\epsilon}_{l3}^0$  ( $l = 1, 2$ ).

Уравнения движения гибкой КМ-пластины при учете равенств (3.2) и (3.3) имеют вид (массовые нагрузки не учитываются) [21]:

$$\begin{aligned} 2h\rho\ddot{w} &= \sum_{i=1}^2 \partial_i \left( F_{i3} + \sum_{j=1}^2 F_{ij} \partial_j w \right) + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \quad \frac{2}{3} h^3 \rho \dot{\gamma}_i = \sum_{j=1}^2 \partial_j M_{ij} - F_{i3} \\ 2h\rho \dot{u}_i &= \sum_{j=1}^2 \partial_j (F_{ij} - F_{j3} \partial_i w) - (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) \partial_i w, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} \rho &= \omega_0 \rho_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k \rho_k, \quad \omega_0 \equiv 1 - \sum_{k=1}^N \omega_k, \\ F_{ij} &= \int_{-h}^h \sigma_{ij} dx_3, \quad F_{i3} = \int_{-h}^h \sigma_{i3} dx_3, \quad M_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} x_3 dx_3 \\ \gamma_i(t, \mathbf{x}) &\equiv \frac{8}{5} \varepsilon_{i3}^0 - \partial_i w, \quad \varepsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}) = \frac{5}{8} (\gamma_i + \partial_i w), \quad i, j = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

$\rho_0, \rho_k$  — объемная плотность материалов связующего и волокон  $k$ -го семейства;  $\gamma_i$  — введенные для удобства функции;  $F_{ij}, F_{i3}, M_{ij}$  — внутренние силовые факторы.

Для однозначного интегрирования исследуемой задачи необходимо использовать начальные и граничные условия. Силовые граничные условия, заданные на кромке  $\Gamma_p$ , определяются равенствами [21]:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 n_j (F_{ij} - F_{j3} \partial_i w) &= P_i \quad (i = 1, 2), \quad \sum_{i=1}^2 n_i \left( F_{i3} + \sum_{j=1}^2 F_{ij} \partial_j w \right) = P_{n3} \\ M_{11} n_1^2 + M_{22} n_2^2 + 2M_{12} n_1 n_2 &= M_{nn}, \\ (M_{22} - M_{11}) n_1 n_2 + M_{12} (n_1^2 - n_2^2) &= M_{nt}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_p, \quad t \geq t_0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Кинематические граничные условия, заданные на кромке  $\Gamma_u$ , имеют вид (см. (3.2) и (3.7)):

$$\begin{aligned} w(t, \mathbf{x}) &= w_*(t, \mathbf{x}), \quad 2hu_i(t, \mathbf{x}) = \bar{u}_i(t, \mathbf{x}), \\ \frac{2}{3} h^3 \gamma_i(t, \mathbf{x}) &= \bar{\bar{u}}_i(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Начальные условия при  $t = t_0$  определяются так [21]:

$$\begin{aligned} w(t_0, \mathbf{x}) &= w_0(\mathbf{x}), \quad \dot{w}(t_0, \mathbf{x}) = \dot{w}_0(\mathbf{x}), \\ 2hu_i(t_0, \mathbf{x}) &= \bar{u}_{0i}(\mathbf{x}), \quad \frac{2}{3} h^3 \gamma_i(t_0, \mathbf{x}) = \bar{\bar{u}}_{0i}(\mathbf{x}) \\ 2h\dot{u}_i(t_0, \mathbf{x}) &= \bar{v}_{0i}(\mathbf{x}), \quad \frac{2}{3} h^3 \dot{\gamma}_i(t_0, \mathbf{x}) = \bar{\bar{v}}_{0i}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_{i*}(t, \mathbf{r}) dx_3, \quad \bar{\bar{u}}_i(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_{i*}(t, \mathbf{r}) x_3 dx_3, \quad \bar{u}_{0i}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) dx_3 \\ \bar{\bar{u}}_{0i}(\mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) x_3 dx_3, \quad \bar{v}_{0i}(\mathbf{x}) \equiv \\ &\equiv \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) dx_3, \quad \bar{\bar{v}}_{0i}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) x_3 dx_3 \quad (i = 1, 2) \\ n_1 &= \cos \beta, \quad n_2 = \sin \beta \end{aligned} \quad (3.11)$$

$P_i$  – заданные на кромке  $\Gamma_p$  мембранные силы по направлениям  $x_i$  ( $i = 1, 2$ );  $P_{n3}$  – заданная на  $\Gamma_p$  поперечная сила;  $M_{nn}, M_{n\tau}$  – заданные на кромке  $\Gamma_p$  изгибающий и крутящий моменты;  $w_*$  – заданный на кромке  $\Gamma_u$  прогиб;  $U_{i*}$  – заданные на торцевой поверхности пластины перемещения в тангенциальных направлениях  $x_i$ ;  $w_0, \dot{w}_0, U_{0i}, V_{0i}$  ( $i = 1, 2$ ) – заданные в начальный момент времени  $t_0$  перемещения и скорости точек конструкции;  $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_u$  – контур, ограничивающий область  $\Omega$ , занимаемую пластиной в плане;  $\beta$  – угол, задающий направление внешней нормали к  $\Gamma$ . Возможно задание и пяти смешанных из (3.8) и (3.9) граничных условий, например при моделировании шарнирного опирания кромки [21].

**4. Численный метод расчета.** Как отмечалось в разделе 2, численное интегрирование рассматриваемой задачи будем строить на основе алгоритма шагов по времени [7, 10, 11, 14, 23, 30]. Поэтому считаем, что в дискретные моменты времени  $t_m$  помимо величин, указанных в (2.21), известны значения следующих функций:

$$\begin{aligned}
 u_l(\mathbf{x}) &\equiv u_l(t_m, \mathbf{x}), & w(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}) \\
 \gamma_l(\mathbf{x}) &\equiv \gamma_l(t_m, \mathbf{x}), & \sigma_{ij}(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}), & \sigma_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}) \\
 \sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), & \varepsilon_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \varepsilon_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), & \chi^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \chi^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}) \\
 \dot{p}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \dot{p}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}), & l &= 1, 2, & i, j &= \overline{1, 3} \\
 m &= n-1, n, & 0 \leq k \leq N, & \mathbf{x} \in \Omega, & |x_3| &\leq h
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

следовательно, используя (3.6), при  $t = t_n$  можем определить все силовые факторы и внешние нагрузки, входящие в (3.3) и (3.5).

Производные по времени (за исключением второго равенства (2.22)) будем аппроксимировать центральными конечными разностями [11, 14], что позволяет построить явную численную схему интегрирования исходной задачи. После замены вторых производных по  $t$  в левых частях равенств (3.5) их конечно-разностными аналогами, учитывая обозначения, аналогичные (4.1), получим

$$\begin{aligned}
 \frac{2h\rho}{\Delta^2} \left( w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) &= \sum_{l=1}^2 \partial_l \left( F_{l3} + \sum_{j=1}^2 F_{lj} \partial_j w^n \right) + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \\
 \frac{2h\rho}{\Delta^2} \left( u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( F_{ij} - F_{j3} \partial_j w^n \right) - \left( \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \right) \partial_i w^n \\
 \frac{2h^3 \rho}{3\Delta^2} \left( \gamma_i^{n+1} - 2\gamma_i^n + \gamma_i^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j M_{ij} - F_{i3}, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad n = 1, 2, 3 \dots
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Правые части здесь известны, поэтому при учете (4.1) и необходимых граничных условий (3.8) и (3.9) из уравнений (4.2) можем вычислить по явной схеме значения неизвестных функций  $w$ ,  $u_i$  и  $\gamma_i$  в следующий момент времени  $t_{n+1}$ . При известных  $w$ ,  $u_i$ ,  $\gamma_i$  по формулам (3.1) с учетом (3.7) определяем осредненные деформации композиции  $\varepsilon_{ij}$ . Согласно (3.1) и (3.7) при учете предположений (4.1), деформации  $\varepsilon_{ij}$  уже известны, поэтому на основании формул численного дифференцирования по  $t$  с ис-

**Таблица 1.** Физико-механические характеристики материалов компонентов композиции [31, 32]

Материал	$\dot{\epsilon}$ , с <sup>-1</sup>	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$E$ , ГПа	$\nu$	$\sigma_s$ , МПа	$E_s$ , ГПа	$\eta$ , МПа · с	$a$ , м/с
Эпоксидная смола	$5 \times 10^{-4}$	1210	2.8	0.33	20	1.114	250	1521
	100.0	1210	2.8	0.33	22	1.238	250	1521
Стекланные волокна	$5 \times 10^{-4}$	2520	86.8	0.25	4500	6.230	1000	5869
	100.0	2520	86.8	0.25	4600	6.314	1000	5869

пользованием (3.4) можно вычислить и скорости осредненных деформаций  $\dot{\epsilon}_{ij}^n$  при  $t = t_n$ . Затем по формулам (2.19) из [14] вычисляем скорости деформаций материалов композиции  $\dot{\epsilon}_k^n$  (см. (2.18)), а из соотношений (2.24) и (2.22) – скорости напряжений  $\dot{\sigma}_k^n$  и ускорения деформаций  $\ddot{\epsilon}_k^n$  ( $0 \leq k \leq N$ ) в тех же компонентах. Используя третье соотношение (2.3) и формулу трапеций, параметр Одквиста  $\chi^{(k)}$  в момент времени  $t_n$  с точностью порядка  $\Delta^2$  можно вычислить так:

$$\begin{aligned} \chi^{(k)}(\mathbf{r}) &= \int_0^{t_n} \sqrt{2\dot{p}_{ij}^{(k)} \dot{p}_{ij}^{(k)}} dt = \chi^{(k)}(\mathbf{r}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sqrt{2\dot{p}_{ij}^{(k)} \dot{p}_{ij}^{(k)}} dt \approx \\ &\approx \chi^{(k)}(\mathbf{r}) + \frac{\Delta}{2} \left( \sqrt{2\dot{p}_{ij}^{(k)} \dot{p}_{ij}^{(k)}} + \sqrt{2\dot{p}_{ij}^{(k)} \dot{p}_{ij}^{(k)}} \right), \quad 0 \leq k \leq N \end{aligned} \quad (4.3)$$

где согласно (4.1) функции  $\chi^{(k)}$  и  $\dot{p}_{ij}^{(k)}$  уже известны. Скорости пластических деформаций компонентов композиции  $\dot{p}_{ij}^{(k)}$  в (4.3) при  $t = t_n$  можно определить по формуле (2.5) при учете (2.11). Так как при этом  $\dot{p}_{ij}^{(k)}$  уточняются в процессе реализации метода переменных параметров упругости, то по формуле (4.3) итерационно уточняется значение  $\chi^{(k)}(\mathbf{r})$ . В качестве начального приближения можно принять  $\chi^{(k)} = \chi^{(k)}$ . Дальнейшее решение рассматриваемой задачи строится так же, как и в [11, 14].

Согласно структуре левых частей уравнений (4.2), для начала расчетов по разработанной численной схеме необходимо знать значения функций  $w$ ,  $u_i$  и  $\gamma_i$  ( $m = 0, 1$ ). Функции  $w$ ,  $u_i$  и  $\gamma_i$  известны из начальных условий, а значения функций  $w$ ,  $u_i$  и  $\gamma_i$  определяются по формуле Тейлора при использовании начальных условий (3.10) и уравнений движения (3.5) в начальный момент времени  $t = t_0$  (см. выражения (69) в [11]).

Если область  $\Omega$ , занимаемая конструкцией в плане, прямоугольна, то после замены в уравнениях (4.2) и граничных условиях (3.8) производных  $\partial_i(\bullet)$  их конечно-разностными аналогами получим окончательно явную численную схему типа “крест”. Если область  $\Omega$  имеет неканоническую форму, то дискретизацию соотношений (4.2) и (3.8) можно провести на основе вариационно-разностного подхода, использованного в [10]. Необходимые условия устойчивости схемы типа “крест” вытекают из критерия

устойчивости Куранта и для тонкостенных однородных конструкций приведены в [10]. Если эти условия выполняются для каждого компонента композиции, то они с запасом выполняются и для КМ-пластины.

**5. Обсуждение результатов расчетов.** Исследуем неупругое динамическое деформирование относительно тонкой прямоугольной пластины ( $\Omega: |x_1| \leq a, |x_2| \leq b; a = 3b, b = 50$  см,  $2h = 2$  см;  $2h/2b = 1/50$ ). По всем кромкам ( $\Gamma = \Gamma_u$ ) конструкция жестко закреплена (см. (3.9) и (3.11) при  $w_* = U_{i*} = 0$ ) и при  $t = t_0 = 0$  покоится (см. (3.10) и (3.11) при  $w_0 = U_{0i} = 0$  и  $\dot{w}_0 = V_{0i} = 0, i = 1, 2$ ). Пластина нагружена избыточным давлением со стороны нижней лицевой плоскости, вызванным приходом воздушной взрывной волны [30]:

$$\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0, \quad -\sigma_{33}^{(-)} \equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max} \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max} \end{cases} \quad (5.1)$$

где

$$\alpha = -\ln(0.01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max} \quad (5.2)$$

$t_{\max}$  – время, при котором давление  $p(t)$  достигает наибольшего значения  $p_{\max} > 0$ ;  $t_{\min}$  – время, при превышении которого можно пренебречь  $p(t)$  по сравнению с  $p_{\max}$  (соотношение (5.2) получено при условии  $p(t_{\min}) = 0.01p_{\max}$ ). Согласно экспериментальным данным [30], в расчетах примем  $t_{\max} = 0.1$  мс,  $t_{\min} = 2$  мс и  $p_{\max} = 3$  МПа.

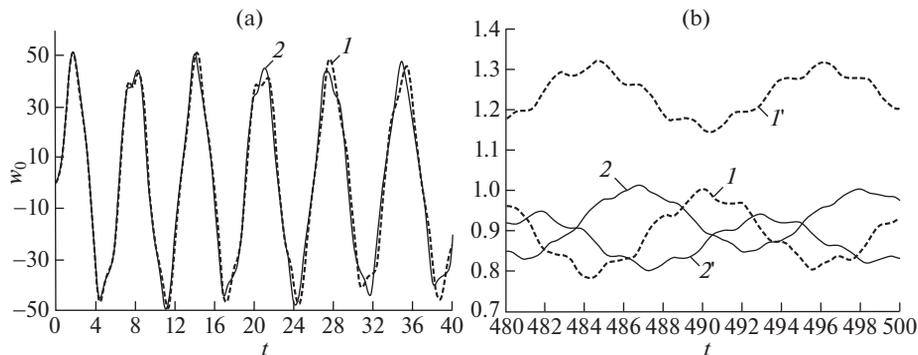
Конструкция изготовлена из эпоксидной смолы [31] и армирована стеклянными волокнами [32]. Диаграмма неупругого деформирования материала композиции при активном нагружении и постоянстве скорости деформации определяется следующей зависимостью при растяжении–сжатии:

$$\sigma = \text{sign}(\epsilon_p) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} \epsilon_p, \quad 0 \leq k \leq N \quad (5.3)$$

где  $\sigma, \epsilon_p$  – осевое напряжение и соответствующая пластическая составляющая линейной деформации  $\epsilon$ ;  $E_s^{(k)} = E_s^{(k)}(\dot{\epsilon})$  – модуль линейного упрочнения  $k$ -го материала композиции;  $\sigma_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\dot{\epsilon})$  – условный предел текучести при значении скорости деформирования  $\dot{\epsilon} = \text{const}$ . Физико-механические характеристики компонентов композиции представлены в таблице 1, где  $a = \sqrt{E/\rho}$  – скорость звука в соответствующем материале. Объемная вязкость материалов в расчетах не учитывается:  $\mu^{(k)} \rightarrow \infty, 0 \leq k \leq N$  (см. (2.4) и (2.20)). Диаграмму неупругого деформирования при чистом сдвиге  $\tau \sim \gamma_p$  можно рассчитать, используя зависимость (5.3), по формулам, приведенным в [23].

Рассматриваются две однородных ( $\theta_k = \text{const}, \varphi_k = \text{const}$  и  $\omega_k = \text{const}, 1 \leq k \leq N$ ) структуры армирования: 1) плоско-ортогональное 2D-армирование (рис. 2,a), когда волокна двух ( $N = 2$ ) семейств уложены в направлениях  $Ox_1$  и  $Ox_2$  с плотностями армирования  $\omega_1 = 0.1$  и  $\omega_2 = 0.3$  соответственно; 2) пространственное 4D-армирование (рис. 2,b), когда два первых семейства волокон по-прежнему уложены по направлениям  $Ox_1$  и  $Ox_2$ , а третье и четвертое семейства – по направлениям, которые задаются углами (см. рис. 1):  $\theta_3 = \pi/4, \theta_4 = 3\pi/4, \varphi_3 = \varphi_4 = \pi/2$  (т.е. на рис. 2,b угол  $\theta = \pi/4$ ). Плотности армирования во второй структуре имеют значения:  $\omega_1 = 0.05, \omega_2 = 0.3$  и  $\omega_3 = \omega_4 = 0.025$ . В обеих структурах общий расход волокон одинаков.

Так как пластина в плане имеет каноническую прямоугольную форму, то по направлениям  $x_1, x_2$  вводится равномерная сетка  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 2b/100 = 1$  см, шаг по вре-



**Рис. 3.** Осцилляции прогиба центральных точек КМ-пластин, рассчитанные по разным теориям неупругого деформирования в окрестности начального момента времени (а) и в окрестности  $t = 500$  мс (б)

мени  $\Delta = 1$  мкс, а правые части в уравнениях (4.2) аппроксимируются их конечно-разностными аналогами. При указанной дискретизации области интегрирования отношения  $\Delta x_i/\Delta = 10$  км/с и  $2h/\Delta = 20$  км/с существенно превышают значения  $a$ , указанные в таблице. Следовательно, необходимые условия устойчивости схемы «крест» выполняются для каждого материала композиции [10], а значит, и для рассматриваемой композиции в целом, причем со значительным запасом.

На рис. 3 изображены зависимости прогиба (в мм) центральных точек ( $w_0(t) \equiv w(t, 0, 0)$ ) рассматриваемых КМ-пластин от времени (в мс) в окрестности начального момента (рис. 3,а) и в окрестности  $t = 500$  мс (рис. 3,б). Номера кривых соответствуют номерам структур армирования. Кривые, номера которых помечены штрихом, получены без учета чувствительности материалов композиции к изменению скорости деформирования. (Для этих кривых расчеты проводились по табличным данным, соответствующим скорости деформации  $\dot{\epsilon} = 5 \times 10^{-4}$  с $^{-1}$ .) Кривые 1' и 2' на рис. 3,а не изображены, так как они визуально почти не отличаются от кривых 1 и 2 соответственно.

Из сравнения ординат точек кривых 1 и 2 на рис. 3,а и 3,б видно, что к моменту времени  $t = 500$  мс стеклопластиковые пластины с обеими структурами армирования почти полностью перестают колебаться. Сопоставление кривых на рис. 3,а свидетельствует о том, что для относительно тонкой КМ-пластины замена традиционной 2D-структуры армирования (см. рис. 2,а) на пространственную 4D-структуру (см. рис. 2,б) не приводит к уменьшению максимального значения прогиба. Аналогично, согласно поведению этих же кривых на рис. 3,б, такая замена структуры армирования в тонкой пластине не приводит к значительному уменьшению величины остаточного прогиба в центральной точке конструкции. Сравнение же кривых 1' и 2' на рис. 3,б показывает, что при расчете тонких КМ-пластин по вязкоупругопластической модели деформирования замена 2D-структуры армирования на 4D-структуру приводит к существенному уменьшению величины остаточного прогиба в центральной точке.

На рис. 4 изображены зависимости прогибов (в мм) исследуемых пластин от координаты  $x_2$  (в м), определенные в центральных поперечных сечениях ( $x_1 = 0$ ) при  $t = 500$  мс, когда конструкции практически уже перестали осциллировать. Обозначение кривых на рис. 4 такое же, как и на рис. 3. Поведение кривых 2 и 2' на рис. 4 свидетельствует о том, что остаточный прогиб КМ-пластины с пространственным армированием имеет традиционный  $\cap$ -образный вид, а поведение кривых 1 и 1' показывает, что остаточный прогиб пластин с 2D-армированием имеет необычный М-образный вид.

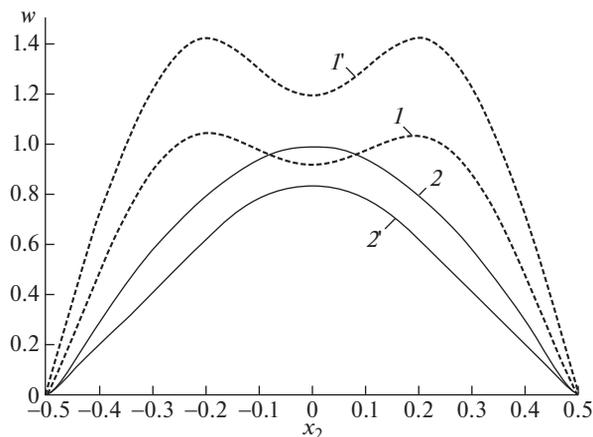


Рис. 4. Эпюры прогибов КМ-пластин, рассчитанные по разным теориям в момент времени  $t = 500$  мс

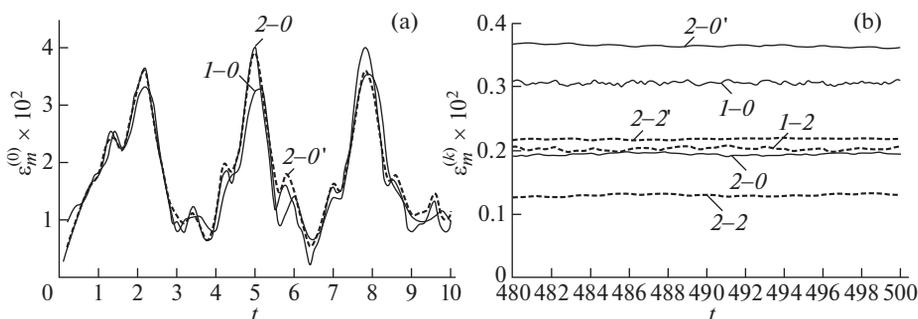


Рис. 5. Осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций компонентов композиций пластин, рассчитанные по разным теориям в окрестности начального момента времени (а) и в окрестности  $t = 500$  мс (б)

А значит, конструкции с 2D-структурой армирования после динамического неупругого деформирования приобретают остаточную форму гофрированного вида со складками, ориентированными в продольном направлении  $Ox_1$ .

На рис. 5 изображены зависимости наибольших значений интенсивности деформаций  $\epsilon_*^{(k)}$  ( $\epsilon_m^{(k)}(t) = \max_{\mathbf{r}} \epsilon_*^{(k)}(t, \mathbf{r})$ ,  $|x_1| \leq a$ ,  $|x_2| \leq b$  и  $|x_3| \leq h$ ) компонентов композиции рассматриваемых пластин от времени (в мс) в окрестности начального момента (рис. 5,а) и в окрестности  $t = 500$  мс (рис. 5,б). Кривые на рис. 5 имеют двойное обозначение: первая цифра обозначает номер структуры армирования, вторая цифра (после дефиса) – номер  $k$ -го компонента композиции ( $k = 0$  – связующее,  $k = 2$  – арматура второго семейства, уложенная в направлении  $Ox_2$  и испытывающая наиболее интенсивное деформирование). Штрих у номера кривой имеет прежний смысл. На рис. 5,а (чтобы его не загромождать) приведены зависимости  $\epsilon_m^{(0)}(t)$  только для связующего материала.

Сравнение кривых  $1-0$  и  $2-0$  на рис. 5,а демонстрирует, что замена в относительно тонкой пластине 2D-структуры армирования на 4D-структуру приводит к увеличению наибольшего значения  $\epsilon_{\max}^{(0)} = \max_{t \geq 0} \epsilon_m^{(0)}(t)$  в связующей матрице примерно на 14%. Поведение же кривых  $2-0$  и  $2-0'$  на рис. 5,а свидетельствует о том, что учет и неучет чувствительности материалов композиции к скорости их деформирования для тонкой стеклопластиковой пластины с 4D-структурой армирования практически не влияет на величину  $\epsilon_{\max}^{(0)}$  в связующем. Напротив, сопоставление кривых  $1-0$ ,  $1-2$  и  $2-0$ ,  $2-2$  на рис. 5,б показывает, что такая замена структуры армирования позволяет существенно уменьшить интенсивность остаточных деформаций рассматриваемых компонентов композиции. Сравнение же кривых  $2-0$ ,  $2-2$  и  $2-0'$ ,  $2-2'$  указывает на то, что расчет, выполненный для тонкой пластины с 4D-структурой армирования без учета чувствительности материалов композиции к изменению скорости их деформирования (кривые  $2-0'$  и  $2-2'$ ), существенно (почти вдвое для связующего) завышает величину интенсивности остаточных деформаций компонентов композиции по сравнению с расчетом, учитывающим эту чувствительность (кривые  $2-0$  и  $2-2$ ).

Результаты, которые обсуждались выше, касаются относительно тонких КМ-пластин (относительная толщина равна  $1/50$ ). Проведенные дополнительные расчеты показывают, что при увеличении относительной толщины пластин положительный эффект от замены плоско-перекрестных структур армирования (см. рис. 2,а) на пространственные структуры (см. рис. 2,б) существенно возрастает как при учете, так и неучете чувствительности компонентов композиции к скорости их деформирования. Так, в работе [14] показано, что для стеклопластиковой пластины с относительной толщиной  $1/10$  замена 2D-структурой армирования на 4D-структуру приводит к уменьшению максимального значения прогиба почти на 20%, а величины  $\epsilon_{\max}^{(0)}$  — на 30% (при учете указанной чувствительности).

**6. Заключение.** Разработанная модель вязкоупруго-вязкопластического деформирования армированных пластин позволяет определять остаточные перемещения и остаточное деформированное состояние компонентов композиции при учете их чувствительности к изменению скорости деформирования.

Анализ динамического вязкоупругопластического и вязкоупруго-вязкопластического поведения стеклопластиковых пластин, материалы композиции которых слабо чувствительны к скорости деформирования, показал, что даже для относительно тонких КМ-конструкций неучет этой чувствительности может существенно (даже в разы) завышать величину интенсивности остаточных деформаций компонентов композиции. Это различие возрастает с увеличением относительной толщины пластин и с увеличением чувствительности материалов композиции к изменению скорости их деформирования.

Даже в случае относительно тонких стеклопластиковых пластин (с относительной толщиной  $1/50$ ) замена традиционной ортогональной 2D-структуры армирования (рис. 2,а) на пространственную 4D-структуру (рис. 2,б) позволяет существенно уменьшить интенсивность остаточных деформаций компонентов композиции (особенно связующей матрицы). Положительный эффект от такой замены структур армирования резко возрастает с увеличением относительной толщины конструкции. Так, для стеклопластиковых пластин с относительной толщиной порядка  $1/10$  указанная замена структур армирования позволяет значительно уменьшить не только остаточные прогибы конструкции и остаточные деформации компонентов композиции, но и максимальный (достигаемый в процессе осцилляций) прогиб и максимальные значения интенсивности деформаций компонентов композиции.

Обнаружено, что после неупругого динамического деформирования стеклопластиковой удлиненной пластины она может приобретать гофрированную остаточную форму с ориентацией складок в продольном направлении.

Высокопрочные стеклянные волокна при их интенсивном деформировании западают упругую энергию в большом количестве, поэтому после прекращения действия внешней динамической нагрузки арматура стремится вернуть КМ-пластину в исходное положение даже несмотря на то, что низкопрочное эпоксисвязующее подвергается при этом значительному циклическому пластическому деформированию. Вследствие чего амплитуда поперечных колебаний тонкостенной КМ-конструкции при нагрузке взрывного типа в окрестности начального момента времени на порядок и более превышает величину остаточного прогиба. Подобное поведение не характерно для неупруго деформируемых однородных пластин при интенсивном динамическом нагружении.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации 121030900260-6).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Soutis C.* Fibre reinforced composites in aircraft construction // *Prog. Aerosp. Sci.* 2005. V. 41. № 2. P. 143–151.
2. *Gill S.K., Gupta M., Satsangi P.* Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites // *Front. Mech. Eng.* 2013. V. 8. № 2. P. 187–200.
3. *Reddy J.N.* Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, 2nd Ed. N.Y.: CRC Press, 2004. 831 p.
4. *Vasiliev V.V., Morozov E.* Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements. Amsterdam: Elsevier, 2013. 412 p.
5. *Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андриюшин В.А.* Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. М.: Физматлит, 2014. 408 с.
6. *Gibson R.F.* Principles of Composite Material Mechanics. 4th ed. Taylor & Francis Group, LLC, 2015. 815 p.
7. *Kazanci Z.* Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // *Int. J. Non-Lin. Mech.* 2011. V. 46. P. 807–817.
8. *Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W.* Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // *Compos. Struct.* 2010. V. 93. P. 14–31.
9. *Alderliesten R.C., Benedictus R.* Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates – A review // *Int. J. Impact Eng.* 2014. V. 67. P. 27–38.
10. *Абросимов Н.А., Баженов В.Г.* Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
11. *Янковский А.П.* Моделирование вязкоупругопластического деформирования гибких армированных пластин с учетом слабого сопротивления поперечному сдвигу // *Вычислительная механика сплошных сред.* 2019. Т. 12. № 1. С. 80–97.
12. *Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М.* Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Под ред. *И.И. Гольденблата.* М.: Машиностроение, 1965. 567 с.
13. *Encyclopedia of Physics / Chief ed. S. Flügge.* Vol. VIa/1, Mechanics of Solids I / Ed. *C. Truesdell.* Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 1973. = *Белл Дж.* Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Часть II. Конечные деформации. М.: Мир, 1984. 431 с.
14. *Янковский А.П.* Моделирование упругопластического изгиба пространственно-армированных пластин при учете чувствительности компонентов композиции к изменению скорости деформирования // *Прикладная математика и механика.* 2019. Т. 83. № 4. С. 660–686.
15. *Коларов Д., Балтов А., Бончева Н.* Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 302 с.
16. *Жигун И.Г., Душин М.И., Поляков В.А., Якушин В.А.* Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 2. Экспериментальное изучение // *Механика полимеров.* 1973. № 6. С. 1011–1018.

17. Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник / Ю.М. Тарнопольский, И.Г. Жигун, В.А., Поляков. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
18. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites // Mech. Compos. Mat. 2009. V. 45. № 2. P. 241–254.
19. Reissner E. The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates // J. Appl. Mech. 1945. V. 12. № 2. P. 69–77.
20. Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
21. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. М.: Наука, 1987. 360 с.
22. Андреев А. Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа. Saarbrucken (Deutschland): Palmarium Academic Publishing, 2013. 93 с.
23. Иванов Г.В., Волчков Ю.М., Богульский И.О., Анисимов С.А., Кургузов В.Д. Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел. Новосибирск: Сиб. ун-в. изд-во, 2002. 352 с.
24. Naghdi P.M., Murch S.A. On the Mechanical Behavior of Viscoelastic/Plastic Solids // J. Appl. Mech. Ser. E. 1963. Vol. 30. № 3. P. 321–328. = Нагди П.М., Мерч С.А. О механическом поведении вязкоупруго-пластических тел // Прикладная механика. Труды Америк. об-ва инж.-механиков. Сер. E. 1963. Т. 30. № 3. С. 3–12.
25. Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Гонал И., Егоров А.Г., Каюмов Р.А. Теоретико-экспериментальный метод определения параметров демпфирования на основе исследования затухающих изгибных колебаний тест-образцов. 3. Идентификация характеристик внутреннего демпфирования // Механика композитных материалов. 2014. Т. 50. № 5. С. 883–902.
26. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. Изд. 3-е. М.: ЛЕНАНД, 2019. 752 с.
27. Freudental A.M., Geiringer H. The mathematical theories of the inelastic continuum. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1958. = Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
28. Dekker K., Verwer J.G. Stability of Runge – Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equation. Amsterdam: North-Holland, 1984. 308 p. = Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 334 с.
29. Хажинский Г.М. Модели деформирования и разрушения металлов. М.: Научный мир, 2011. 231 с.
30. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // Comp. Struct. 1987. V. 26. № 1/2. P. 1–15.
31. Handbook of composites / Ed. by G. Lubin. N.Y.: Springer, 1982. 786 p. = Справочник по композитным материалам: В 2-х кн. Кн. 1 / Под ред. Дж. Любин. М.: Машиностроение, 1988. 448 с.
32. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса. Киев: Наук. думка, 1985. 592 с.

УДК 539.3

## УПРАВЛЕНИЕ ФОРМОЙ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ НАКЛАДКАМИ ПРИ ТЕПЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ОТСЧЕТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

© 2021 г. Г. М. Куликов<sup>а,\*</sup>, С. В. Плотникова<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Тамбовский государственный технический университет, Тамбов, Россия

\*e-mail: gmkulikov@mail.ru

Поступила в редакцию 17.01.2021 г.

После доработки 20.01.2021 г.

Принята к публикации 25.01.2021 г.

В данной работе предложен гибридный конечный элемент для моделирования в пространственной постановке связанных термоэлектромеханических полей в композитных пластинах с пьезоэлектрическими накладками, основанный на методе отсчетных поверхностей. Согласно методу отсчетных поверхностей в слоях пластины и пьезоэлектрических накладках выбираются отсчетные поверхности параллельные срединной поверхности для введения в качестве искомым функций температуры, перемещений и электрических потенциалов этих поверхностей. Вначале вычисляется распределение температуры в слоистой пластине путем решения методом конечных элементов задачи теплопроводности. Полученные результаты используется в качестве входных данных для решения задачи термоэлектроупругости. На основе разработанной конечно-элементной модели предложен метод определения оптимальных электрических потенциалов, подаваемых на электроды актуаторов, с целью приведения пластины к заданной форме за счет использования обратного пьезоэлектрического эффекта.

Ключевые слова: термоэлектроупругость, композитная пластина, управление формой, метод конечных элементов, метод отсчетных поверхностей

DOI: 10.31857/S0572329921040085

**Введение.** В настоящее время устройства и технические системы на основе пьезоактивных материалов проникли в авиационную и космическую технику и широко используются в адаптивных композитных конструкциях. Подобные конструкции встроены в них пьезокерамическими материалами способны в значительных пределах менять свои технические характеристики в соответствии с условиями эксплуатации и позволяют эффективно управлять их деформациями. Преимуществом пьезокерамики является то, что в силу прямого и обратного пьезоэлектрических эффектов она может одновременно выполнять функции как сенсора, так и актуатора. Проектирование адаптивных конструкций представляет собой многогранную деятельность, включающую исследования по теплопередаче, механике композитных материалов и конструкций, сенсорам и актуаторам, методам оптимизации. Таким образом, расчет и моделирование тонкостенных композитных конструкций с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами при тепловых и механических воздействиях на основе пространственной теории термопьезоэлектричества является актуальной задачей.

Расчет термоэластопругих слоистых конструкций на основе теории оболочек первого порядка (теория Тимошенко–Миндлина) с использованием четырехузловых конечных элементов выполнен в работах [1, 2]. При этом для описания температуры и электрического потенциала применена дискретная модель слоистых оболочек первого порядка. Конечные элементы для расчета слоистых композитных пластин при тепловых воздействиях на основе теории пластин третьего порядка предложены в работах [3, 4]. В девяностых годах для анализа связанных температурных, механических и электрических полей в слоистых пьезоэлектрических конструкциях стали использоваться трехмерные изопараметрические элементы [5–8]. Однако для расчета адаптивных тонкостенных конструкций такие конечные элементы являются вычислительно неэффективными. В связи с этим получили развитие конечные элементы для расчета в пространственной постановке слоистых пьезоэлектрических конструкций на основе дискретных теорий первого и третьего порядков [9–11] путем использования степенных полиномов для аппроксимации температуры, перемещений и электрического потенциала в пределах слоя. Более общие геометрически точные конечные элементы оболочки для расчета слоистых пьезоэлектрических конструкций на основе метода отсчетных поверхностей [12] с использованием полиномов Лагранжа произвольной степени построены в работе [13]. Согласно методу отсчетных поверхностей в слоях оболочки выбираются отсчетные поверхности параллельные срединной поверхности с целью введения в качестве искомым функций температуры, перемещений и электрических потенциалов этих поверхностей. Отметим, что геометрически точные конечные элементы оболочки [13] не предназначены для расчета композитных конструкций с распределенными на лицевых поверхностях пьезоэлектрическими актуаторами, что представляет интерес для решения задачи управления формой адаптивных композитных конструкций.

В данной работе на основе метода отсчетных поверхностей, расположенных в слоях пластины и пьезоэлектрических накладках в узловых точках полинома Чебышева, построен пространственный четырехузловой конечный элемент слоистой композитной пластины с учетом условия эквипотенциальности на электродах, обобщающий конечный элемент [14] на случай теплового нагружения и позволяющий эффективно решать задачи о приведении пластины к заданной форме и о возврате деформированной пластины к ее первоначальной форме. На возможность компенсации температурных деформаций за счет обратного пьезоэлектрического эффекта указано в работе [15]. Анализ численных алгоритмов и методов управления формой адаптивной конструкции представлен в обзоре [16].

**1. Конечный элемент для решения задачи теплопроводности для слоистой пластины на основе метода отсчетных поверхностей.** Рассмотрим пластину толщиной  $h$ , состоящую из  $N$  слоев. Срединная поверхность пластины  $\Omega$  описывается декартовыми координатами  $x_1, x_2$ , а координата  $x_3$  отсчитывается вдоль нормали к этой поверхности. В  $n$ -м слое пластины выбираем  $I_n$  отсчетных поверхностей параллельных срединной поверхности, где  $I_n \geq 3$ . При этом  $I_n - 2$  поверхности расположены внутри слоя в узловых точках полинома Чебышева, что обеспечивает равномерную сходимость метода, другие две совпадают с поверхностями раздела слоев. Таким образом, общее число отсчетных поверхностей в пакете равно  $N_S = \sum_n I_n - N + 1$ . Координаты отсчетных поверхностей определяем по формулам [17]:

$$x_3^{(n)1} = x_3^{[n-1]}, \quad x_3^{(n)I_n} = x_3^{[n]} \quad (1.1)$$

$$x_3^{(n)m_n} = \frac{1}{2}(x_3^{[n-1]} + x_3^{[n]}) - \frac{1}{2}h_n \cos\left(\pi \frac{2m_n - 3}{2(I_n - 2)}\right)$$

где  $h_n = x_3^{[n]} - x_3^{[n-1]}$  – толщина  $n$ -го слоя;  $x_3^{[0]}$ ,  $x_3^{[N]}$  – координаты лицевых поверхностей;  $x_3^{[m]}$  – координаты поверхностей раздела слоев;  $n = 1, 2, \dots, N$ ;  $m = 1, 2, \dots, N - 1$ ;  $m_n = 2, \dots, I_n - 1$ .

Согласно методу отсчетных поверхностей [17] полагаем, что температура  $T^{(n)}$ , компоненты градиента температуры  $\Gamma_i^{(n)} = T_{,i}^{(n)}$  и теплового потока  $q_i^{(n)} = -k_{ij}^{(n)}\Gamma_j^{(n)}$ , где  $k_{ij}^{(n)}$  – коэффициенты теплопроводности, распределены по толщине  $n$ -го слоя по следующему закону:

$$\left[ T^{(n)} \Gamma_i^{(n)} q_i^{(n)} \right] = \sum_{i_n} L^{(n)i_n} \left[ T^{(n)i_n} \Gamma_i^{(n)i_n} q_i^{(n)i_n} \right], \quad x_3^{[n-1]} \leq x_3 \leq x_3^{[n]} \quad (1.2)$$

Здесь  $T^{(n)i_n}$ ,  $\Gamma_i^{(n)i_n}$ ,  $q_i^{(n)i_n}$  – температура, компоненты градиента температуры и теплового потока на отсчетных поверхностях;  $L^{(n)i_n}(x_3)$  – базисные полиномы Лагранжа степени  $I_n - 1$ :

$$L^{(n)i_n} = \prod_{j_n \neq i_n} \frac{x_3 - x_3^{(n)j_n}}{x_3^{(n)i_n} - x_3^{(n)j_n}} \quad (1.3)$$

где  $i, j = 1, 2, 3$ ;  $i_n, j_n = 1, 2, \dots, I_n$ .

В силу формул (1.2), (1.3) соотношения между градиентом температуры и температурой отсчетных поверхностях  $n$ -го слоя имеют вид

$$\Gamma_\alpha^{(n)i_n} = T_{,\alpha}^{(n)i_n} \quad (\alpha = 1, 2), \quad \Gamma_3^{(n)i_n} = \sum_{j_n} M^{(n)j_n}(x_3^{(n)i_n}) T^{(n)j_n} \quad (1.4)$$

где  $M^{(n)j_n} = L_{,3}^{(n)j_n}$  – полиномы степени  $I_n - 2$ ; их значения на отсчетных поверхностях  $n$ -го слоя можно представить в форме

$$M^{(n)j_n}(x_3^{(n)i_n}) = \frac{1}{x_3^{(n)j_n} - x_3^{(n)i_n}} \prod_{k_n \neq i_n, j_n} \frac{x_3^{(n)i_n} - x_3^{(n)k_n}}{x_3^{(n)j_n} - x_3^{(n)k_n}} \quad \text{при } j_n \neq i_n \quad (1.5)$$

$$M^{(n)i_n}(x_3^{(n)i_n}) = - \sum_{j_n \neq i_n} M^{(n)j_n}(x_3^{(n)i_n})$$

Вариационное уравнение теплопроводности для слоистой пластины относительно градиента температуры и температуры отсчетных поверхностей [13] запишем в виде

$$\delta \iint_{\Omega} \sum_n \sum_{i_n} \sum_{j_n} \frac{1}{2} \Lambda^{(n)i_n j_n} (\mathbf{\Gamma}^{(n)i_n})^T \mathbf{k}^{(n)} \mathbf{\Gamma}^{(n)j_n} dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} (\hat{q}_3^- \delta T^{[0]} - \hat{q}_3^+ \delta T^{[N]}) dx_1 dx_2 \quad (1.6)$$

где

$$\Lambda^{(n)i_n j_n} = \int_{x_3^{[n-1]}}^{x_3^{[n]}} L^{(n)i_n} L^{(n)j_n} dx_3 \quad (1.7)$$

$$\mathbf{\Gamma}^{(n)i_n} = \left[ \Gamma_1^{(n)i_n} \Gamma_2^{(n)i_n} \Gamma_3^{(n)i_n} \right]^T, \quad \mathbf{k}^{(n)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(n)} & k_{12}^{(n)} & 0 \\ k_{21}^{(n)} & k_{22}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33}^{(n)} \end{bmatrix}$$

Здесь  $T^{[0]}$ ,  $T^{[N]}$  – температура нижней и верхней лицевых поверхностей  $\Omega^-$  и  $\Omega^+$ ;  $\hat{q}_3^-$ ,  $\hat{q}_3^+$  – заданные тепловые потоки на лицевых поверхностях.

Для построения конечно-элементной модели разобьем пластину на прямоугольные элементы, причем число слоев в конечных элементах с пьезоэлектрическими накладками и без них будет отличаться. Предположим для определенности, что накладки расположены на верхней поверхности, тогда число слоев определяется как  $N = N_0$  для конечных элементов, не содержащих накладок, и  $N = N_0 + 1$  для элементов с накладками, где  $N_0$  – число слоев в слоистой пластине.

Температура и градиент температуры отсчетных поверхностей  $n$ -го слоя в пределах четырехузлового конечного элемента аппроксимируются согласно билинейному закону:

$$T^{(n)i_n} = \sum_r N_r T_r^{(n)i_n} \quad (1.8)$$

$$\Gamma_r^{(n)i_n} = \sum_r N_r \Gamma_r^{(n)i_n}, \quad \Gamma_r^{(n)i_n} = [\Gamma_{1r}^{(n)i_n} \Gamma_{2r}^{(n)i_n} \Gamma_{3r}^{(n)i_n}]^T \quad (1.9)$$

где  $N_r(\xi_1, \xi_2)$  – билинейные функции формы [13];  $\xi_1, \xi_2$  – локальные координаты конечного элемента;  $T_r^{(n)i_n}$ ,  $\Gamma_{ir}^{(n)i_n}$  – температура и градиент температуры отсчетных поверхностей в узлах элемента;  $r = 1, 2, 3, 4$ .

Введем дополнительные матричные обозначения:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{T}_1^T \mathbf{T}_2^T \mathbf{T}_3^T \mathbf{T}_4^T]^T \quad (1.10)$$

$$\mathbf{T}_r = [T_r^{[0]} T_r^{(1)2} \dots T_r^{(1)I_1-1} T_r^{[1]} T_r^{(2)2} \dots T_r^{(N-1)I_{N-1}-1} T_r^{[N-1]} T_r^{(N)2} \dots T_r^{(N)I_N-1} T_r^{[N]}]^T$$

Учитывая соотношения (1.4), (1.9), (1.10), градиент температурного поля в узлах конечного элемента представим в форме

$$\Gamma_r^{(n)i_n} = \mathbf{B}_{\theta r}^{(n)i_n} \mathbf{T} \quad (1.11)$$

Здесь  $\mathbf{B}_{\theta r}^{(n)i_n}$  – постоянные матрицы порядка  $3 \times 4N_S$  [13]. Чтобы применить аналитическое интегрирование в пределах конечного элемента, билинейную аппроксимацию для градиента температуры (1.9) запишем в виде

$$\Gamma_r^{(n)i_n} = \sum_{\eta_1, \eta_2} (\xi_1)^{\eta_1} (\xi_2)^{\eta_2} \Gamma_{\eta_1 \eta_2}^{(n)i_n}, \quad \Gamma_{\eta_1 \eta_2}^{(n)i_n} = [\Gamma_{1\eta_1 \eta_2}^{(n)i_n} \Gamma_{2\eta_1 \eta_2}^{(n)i_n} \Gamma_{3\eta_1 \eta_2}^{(n)i_n}] \quad (1.12)$$

где

$$\Gamma_{\eta_1 \eta_2}^{(n)i_n} = \mathbf{B}_{\theta \eta_1 \eta_2}^{(n)i_n} \mathbf{T} \quad (1.13)$$

$$\mathbf{B}_{\theta \eta_1 \eta_2}^{(n)i_n} = \frac{1}{4} [\mathbf{B}_{\theta 1}^{(n)i_n} + (1 - 2\eta_1) \mathbf{B}_{\theta 2}^{(n)i_n} + (1 - 2\eta_1)(1 - 2\eta_2) \mathbf{B}_{\theta 3}^{(n)i_n} + (1 - 2\eta_2) \mathbf{B}_{\theta 4}^{(n)i_n}]$$

Здесь и далее, индексы  $\eta_1, \eta_2$  принимают значения 0 или 1.

Подставляя (1.8), (1.12) в вариационное уравнение (1.6) и выполняя аналитическое интегрирование в пределах конечного элемента, приходим к системе линейных уравнений

$$\mathbf{K}_{\theta\theta} \mathbf{T} = \mathbf{F}_\theta \quad (1.14)$$

$$\mathbf{K}_{\theta\theta} = \sum_{\eta_1 + \eta_2 \leq 2} \frac{1}{3^{\eta_1 + \eta_2}} \sum_n \sum_{i_n} \sum_{j_n} \Lambda^{(n)i_n j_n} (\mathbf{B}_{\theta \eta_1 \eta_2}^{(n)i_n})^T \mathbf{k}^{(n)} \mathbf{B}_{\theta \eta_1 \eta_2}^{(n)j_n}$$

Здесь  $\mathbf{F}_\theta$  – вектор теплового нагружения. При сборке элементов в ансамбль следует учитывать, что число слоев в конечных элементах с накладками превышает число сло-

ев в элементах без накладок и, следовательно, размерность матрицы  $\mathbf{K}_{\theta\theta}$  зависит от типа конечного элемента.

**2. Конечный элемент для решения задачи термоэлектроруупругости для слоистой пьезоэлектрической пластины на основе метода отсчетных поверхностей.** Согласно методу отсчетных поверхностей, примененному для решения связанной задачи термоэлектроруупругости [12], полагаем, что перемещения  $u_i^{(n)}$ , деформации  $\varepsilon_{ij}^{(n)}$ , напряжения  $\sigma_{ij}^{(n)}$ , электрический потенциал  $\varphi^{(n)}$ , компоненты векторов напряженности электрического поля  $E_i^{(n)}$  и электрического смещения  $D_i^{(n)}$  распределены по толщине  $n$ -го слоя пластины по закону аналогичному (1.2), (1.3):

$$[u_i^{(n)} \varepsilon_{ij}^{(n)} \sigma_{ij}^{(n)} \varphi^{(n)} E_i^{(n)} D_i^{(n)}] = \sum_{i_n} L^{(n)i_n} [u_i^{(n)i_n} \varepsilon_{ij}^{(n)i_n} \sigma_{ij}^{(n)i_n} \varphi^{(n)i_n} E_i^{(n)i_n} D_i^{(n)i_n}] \quad (2.1)$$

где  $u_i^{(n)i_n}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{(n)i_n}$ ,  $\sigma_{ij}^{(n)i_n}$ ,  $\varphi^{(n)i_n}$ ,  $E_i^{(n)i_n}$ ,  $D_i^{(n)i_n}$  – перемещения, деформации, напряжения, электрический потенциал, векторы напряженности электрического поля и электрического смещения отсчетных поверхностей  $n$ -го слоя.

Соотношения между деформациями и перемещениями отсчетных поверхностей, а также между напряженностью и потенциалом электрического поля отсчетных поверхностей имеют вид

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^{(n)i_n} = u_{\alpha,\beta}^{(n)i_n} + u_{\beta,\alpha}^{(n)i_n}, \quad 2\varepsilon_{\alpha 3}^{(n)i_n} = u_{3,\alpha}^{(n)i_n} + \beta_{\alpha}^{(n)i_n} \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_{33}^{(n)i_n} = \beta_3^{(n)i_n}, \quad \beta_i^{(n)i_n} = \sum_{j_n} M^{(n)j_n} (x_3^{(n)i_n}) u_i^{(n)j_n}$$

$$E_{\alpha}^{(n)i_n} = -\varphi_{,\alpha}^{(n)i_n}, \quad E_3^{(n)i_n} = -\sum_{j_n} M^{(n)j_n} (x_3^{(n)i_n}) \varphi^{(n)j_n} \quad (2.3)$$

Уравнения состояния линейной теории термопьезоэлектричества представим в форме

$$\sigma_{ij}^{(n)i_n} = C_{ijkl}^{(n)} \varepsilon_{kl}^{(n)i_n} - e_{kij}^{(n)} E_k^{(n)i_n} - \gamma_{ij}^{(n)} \Theta^{(n)i_n} \quad (2.4)$$

$$D_i^{(n)i_n} = e_{ikl}^{(n)} \varepsilon_{kl}^{(n)i_n} + \varepsilon_{ik}^{(n)} E_k^{(n)i_n} + r_i^{(n)} \Theta^{(n)i_n}$$

где  $\Theta^{(n)i_n} = T^{(n)i_n} - T_0$  – приращение температуры отсчетных поверхностей от естественного состояния  $T_0$ ;  $C_{ijkl}^{(n)}$ ,  $e_{kij}^{(n)}$ ,  $\varepsilon_{ik}^{(n)}$  – упругие, пьезоэлектрические и диэлектрические постоянные;  $\gamma_{ij}^{(n)}$ ,  $r_i^{(n)}$  – температурные напряжения и пирозэлектрические константы  $n$ -го слоя.

Подставляя аппроксимации (1.2), (2.1) в смешанный вариационный принцип термоэлектроруупругости для слоистого тела [18], в котором независимыми варьируемыми переменными являются перемещения  $u_i^{(n)}$ , электрический потенциал  $\varphi^{(n)}$ , независимые от поля перемещений деформации  $\eta_{ij}^{(n)}$  и напряжения  $\sigma_{ij}^{(n)}$ , и интегрируя по поперечной координате с учетом (1.7), получим вариационное уравнение для построения

гибридного конечного элемента слоистой пьезоэлектрической пластины при тепло-вом нагружении

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} \sum_n \sum_{i_n} \sum_{j_n} \Lambda^{(n)i_n j_n} [-\delta(\boldsymbol{\eta}^{(n)i_n})^T (\boldsymbol{\sigma}^{(n)j_n} - \mathbf{C}^{(n)} \boldsymbol{\eta}^{(n)j_n} + (\mathbf{e}^{(n)})^T \mathbf{E}^{(n)j_n} + \boldsymbol{\gamma}^{(n)} \Theta^{(n)j_n}) - \\
& \quad - \delta(\mathbf{E}^{(n)i_n})^T (\mathbf{e}^{(n)} \boldsymbol{\eta}^{(n)j_n} + \boldsymbol{\epsilon}^{(n)} \mathbf{E}^{(n)j_n} + \mathbf{r}^{(n)} \Theta^{(n)j_n}) - \\
& \quad - \delta(\boldsymbol{\sigma}^{(n)i_n})^T (\boldsymbol{\eta}^{(n)j_n} - \boldsymbol{\epsilon}^{(n)j_n}) + \delta(\boldsymbol{\epsilon}^{(n)i_n})^T \boldsymbol{\sigma}^{(n)j_n}] dx_1 dx_2 = \\
& = \iint_{\Omega} (\delta(\mathbf{u}^{[N]})^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}^+ - \delta(\mathbf{u}^{[0]})^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}^- + \delta\varphi^{[N]} \hat{D}_3^+ - \delta\varphi^{[0]} \hat{D}_3^-) dx_1 dx_2
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где  $\mathbf{u}^{[0]} = [u_1^{[0]} u_2^{[0]} u_3^{[0]}]^T$ ,  $\mathbf{u}^{[N]} = [u_1^{[N]} u_2^{[N]} u_3^{[N]}]^T$ ,  $\varphi^{[0]}$ ,  $\varphi^{[N]}$  – перемещения и электрические потенциалы лицевых поверхностей  $\Omega^-$ ,  $\Omega^+$ ;  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^- = [\hat{\sigma}_{13}^- \hat{\sigma}_{23}^- \hat{\sigma}_{33}^-]^T$ ,  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^+ = [\hat{\sigma}_{13}^+ \hat{\sigma}_{23}^+ \hat{\sigma}_{33}^+]^T$ ,  $\hat{D}_3^-$ ,  $\hat{D}_3^+$  – заданные механические и электрические нагрузки, действующие на лицевых поверхностях. В вариационном уравнении (2.5) использованы следующие матричные обозначения:

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(n)i_n} = [\epsilon_{11}^{(n)i_n} \ \epsilon_{22}^{(n)i_n} \ \epsilon_{33}^{(n)i_n} \ 2\epsilon_{12}^{(n)i_n} \ 2\epsilon_{13}^{(n)i_n} \ 2\epsilon_{23}^{(n)i_n}]^T \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{\eta}^{(n)i_n} = [\eta_{11}^{(n)i_n} \ \eta_{22}^{(n)i_n} \ \eta_{33}^{(n)i_n} \ 2\eta_{12}^{(n)i_n} \ 2\eta_{13}^{(n)i_n} \ 2\eta_{23}^{(n)i_n}]^T$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)i_n} = [\sigma_{11}^{(n)i_n} \ \sigma_{22}^{(n)i_n} \ \sigma_{33}^{(n)i_n} \ \sigma_{12}^{(n)i_n} \ \sigma_{13}^{(n)i_n} \ \sigma_{23}^{(n)i_n}]^T$$

$$\mathbf{E}^{(n)i_n} = [E_1^{(n)i_n} \ E_2^{(n)i_n} \ E_3^{(n)i_n}]^T$$

$$\mathbf{C}^{(n)} = \begin{bmatrix} C_{1111}^{(n)} & C_{1122}^{(n)} & C_{1133}^{(n)} & C_{1112}^{(n)} & 0 & 0 \\ C_{2211}^{(n)} & C_{2222}^{(n)} & C_{2233}^{(n)} & C_{2212}^{(n)} & 0 & 0 \\ C_{3311}^{(n)} & C_{3322}^{(n)} & C_{3333}^{(n)} & C_{3312}^{(n)} & 0 & 0 \\ C_{1211}^{(n)} & C_{1222}^{(n)} & C_{1233}^{(n)} & C_{1212}^{(n)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313}^{(n)} & C_{1323}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2313}^{(n)} & C_{2323}^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{113}^{(n)} & e_{123}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{213}^{(n)} & e_{223}^{(n)} \\ e_{311}^{(n)} & e_{322}^{(n)} & e_{333}^{(n)} & e_{312}^{(n)} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon}^{(n)} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^{(n)} & \epsilon_{12}^{(n)} & 0 \\ \epsilon_{21}^{(n)} & \epsilon_{22}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{(n)} = [\gamma_{11}^{(n)} \ \gamma_{22}^{(n)} \ \gamma_{33}^{(n)} \ \gamma_{12}^{(n)} \ 0 \ 0]^T, \quad \mathbf{r}^{(n)} = [0 \ 0 \ r_3^{(n)}]^T$$

Для интерполяции перемещений, деформаций, потенциала и напряженности электрического поля отсчетных поверхностей  $n$ -го слоя в пределах четырехузлового конечного элемента пластины воспользуемся стандартными билинейными аппроксимациями

$$u_i^{(n)i_n} = \sum_r N_r u_{ir}^{(n)i_n}, \quad \epsilon_{ij}^{(n)i_n} = \sum_r N_r \epsilon_{ijr}^{(n)i_n} \tag{2.7}$$

$$\varphi^{(n)i_n} = \sum_r N_r \varphi_r^{(n)i_n}, \quad E_i^{(n)i_n} = \sum_r N_r E_{ir}^{(n)i_n} \tag{2.8}$$

где  $u_{ir}^{(n)i_n}$ ,  $\varepsilon_{ijr}^{(n)i_n}$ ,  $\varphi_r^{(n)i_n}$ ,  $E_{ir}^{(n)i_n}$  – перемещения, деформации, потенциал и напряженность электрического поля в узлах элемента. Для выполнения аналитического интегрирования в пределах элемента аппроксимации (2.7), (2.8) представим в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)i_n} = \sum_{r_1, r_2} (\xi_1)^{r_1} (\xi_2)^{r_2} \boldsymbol{\varepsilon}_{r_1 r_2}^{(n)i_n}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{r_1 r_2}^{(n)i_n} = [\varepsilon_{11r_1 r_2}^{(n)i_n} \ \varepsilon_{22r_1 r_2}^{(n)i_n} \ \varepsilon_{33r_1 r_2}^{(n)i_n} \ 2\varepsilon_{12r_1 r_2}^{(n)i_n} \ 2\varepsilon_{13r_1 r_2}^{(n)i_n} \ 2\varepsilon_{23r_1 r_2}^{(n)i_n}]^T \quad (2.9)$$

$$\mathbf{E}^{(n)i_n} = \sum_{r_1, r_2} (\xi_1)^{r_1} (\xi_2)^{r_2} \mathbf{E}_{r_1 r_2}^{(n)i_n}, \quad \mathbf{E}_{r_1 r_2}^{(n)i_n} = [E_{1r_1 r_2}^{(n)i_n} \ E_{2r_1 r_2}^{(n)i_n} \ E_{3r_1 r_2}^{(n)i_n}]^T \quad (2.10)$$

Соотношения (2.2), (2.3) с учетом аппроксимаций (2.9), (2.10) запишем в матричной форме

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{r_1 r_2}^{(n)i_n} = \mathbf{B}_{ur_1 r_2}^{(n)i_n} \mathbf{q}, \quad \mathbf{E}_{r_1 r_2}^{(n)i_n} = -\mathbf{B}_{\varphi r_1 r_2}^{(n)i_n} \boldsymbol{\Phi} \quad (2.11)$$

где  $\mathbf{B}_{ur_1 r_2}^{(n)i_n}$ ,  $\mathbf{B}_{\varphi r_1 r_2}^{(n)i_n}$  – *постоянные* в пределах конечного элемента матрицы порядка  $6 \times 12N_S$  и  $3 \times 4N_S$  [13]. Искомые векторы узловых перемещений и электрических потенциалов конечного элемента имеют вид

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1^T \ \mathbf{q}_2^T \ \mathbf{q}_3^T \ \mathbf{q}_4^T]^T, \quad \boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\Phi}_1^T \ \boldsymbol{\Phi}_2^T \ \boldsymbol{\Phi}_3^T \ \boldsymbol{\Phi}_4^T]^T \quad (2.12)$$

$$\mathbf{q}_r = [(\mathbf{u}_r^{[0]})^T (\mathbf{u}_r^{(1)2})^T \dots (\mathbf{u}_r^{(1)I_1-1})^T (\mathbf{u}_r^{[1]})^T (\mathbf{u}_r^{(2)2})^T \dots \dots (\mathbf{u}_r^{(N-1)I_{N-1}-1})^T (\mathbf{u}_r^{[N-1]})^T (\mathbf{u}_r^{(N)2})^T \dots (\mathbf{u}_r^{(N)I_N-1})^T (\mathbf{u}_r^{[N]})^T]^T$$

$$\mathbf{u}_r^{[m]} = [u_{1r}^{[m]} \ u_{2r}^{[m]} \ u_{3r}^{[m]}]^T, \quad \mathbf{u}_r^{(n)m_n} = [u_{1r}^{(n)m_n} \ u_{2r}^{(n)m_n} \ u_{3r}^{(n)m_n}]^T$$

$$\boldsymbol{\Phi}_r = [\varphi_r^{[0]} \ \varphi_r^{(1)2} \ \dots \ \varphi_r^{(1)I_1-1} \ \varphi_r^{[1]} \ \varphi_r^{(2)2} \ \dots \ \varphi_r^{(N-1)I_{N-1}-1} \ \varphi_r^{[N-1]} \ \varphi_r^{(N)2} \ \dots \ \varphi_r^{(N)I_N-1} \ \varphi_r^{[N]}]^T$$

Также при построении гибридного конечного элемента вводятся независимые аппроксимации напряжений  $\boldsymbol{\sigma}^{(n)i_n}$  и деформаций  $\boldsymbol{\eta}^{(n)i_n}$ , позволяющие обеспечить корректный ранг матрицы жесткости [19]:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)i_n} = \sum_{r_1+r_2 < 2} (\xi_1)^{r_1} (\xi_2)^{r_2} \mathbf{Q}_{r_1 r_2} \boldsymbol{\sigma}_{r_1 r_2}^{(n)i_n} \quad (2.13)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{00}^{(n)i_n} = [\mu_1^{(n)i_n} \ \mu_2^{(n)i_n} \ \mu_3^{(n)i_n} \ \mu_4^{(n)i_n} \ \mu_5^{(n)i_n} \ \mu_6^{(n)i_n}]^T$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{01}^{(n)i_n} = [\mu_7^{(n)i_n} \ \mu_9^{(n)i_n} \ \mu_{11}^{(n)i_n}]^T, \quad \boldsymbol{\sigma}_{10}^{(n)i_n} = [\mu_8^{(n)i_n} \ \mu_{10}^{(n)i_n} \ \mu_{12}^{(n)i_n}]^T$$

$$\boldsymbol{\eta}^{(n)i_n} = \sum_{r_1+r_2 < 2} (\xi_1)^{r_1} (\xi_2)^{r_2} \mathbf{Q}_{r_1 r_2} \boldsymbol{\eta}_{r_1 r_2}^{(n)i_n} \quad (2.14)$$

$$\boldsymbol{\eta}_{00}^{(n)i_n} = [\psi_1^{(n)i_n} \ \psi_2^{(n)i_n} \ \psi_3^{(n)i_n} \ \psi_4^{(n)i_n} \ \psi_5^{(n)i_n} \ \psi_6^{(n)i_n}]^T$$

$$\boldsymbol{\eta}_{01}^{(n)i_n} = [\psi_7^{(n)i_n} \ \psi_9^{(n)i_n} \ \psi_{11}^{(n)i_n}]^T, \quad \boldsymbol{\eta}_{10}^{(n)i_n} = [\psi_8^{(n)i_n} \ \psi_{10}^{(n)i_n} \ \psi_{12}^{(n)i_n}]^T$$

где

$$\mathbf{Q}_{00} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Подставляя конечно-элементные аппроксимации (2.7)–(2.10), (2.13), (2.14) в смешанное вариационное уравнение (2.5), интегрируя аналитически в пределах конечного элемента и исключая напряжения  $\sigma_{r_2}^{(n)i_n}$  и независимые от поля перемещений деформации  $\eta_{r_2}^{(n)i_n}$ , приходим к разрешающей системе линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{\varphi u} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{u\theta} \\ \mathbf{F}_{\varphi\theta} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Здесь  $\mathbf{K}_{uu}$ ,  $\mathbf{K}_{u\varphi}$ ,  $\mathbf{K}_{\varphi u} = \mathbf{K}_{u\varphi}^T$ ,  $\mathbf{K}_{\varphi\varphi}$  – механическая, пьезоэлектрическая и диэлектрическая матрицы жесткости конечного элемента,  $\mathbf{F}_u$ ,  $\mathbf{F}_\varphi$  – векторы механических и электрических нагрузок,  $\mathbf{F}_{u\theta}$  и  $\mathbf{F}_{\varphi\theta}$  – векторы температурных нагрузок:

$$\mathbf{K}_{uu} = \sum_n \sum_{i_n} \sum_{j_n} \Lambda^{(n)i_n j_n} \sum_{r_1+r_2 < 2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} (\mathbf{B}_{ur_2}^{(n)i_n})^T \mathbf{Q}_{r_2} \mathbf{Q}_{r_2}^T \mathbf{C}^{(n)} \mathbf{Q}_{r_2} \mathbf{Q}_{r_2}^T \mathbf{B}_{ur_2}^{(n)j_n} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{K}_{u\varphi} = \sum_n \sum_{i_n} \sum_{j_n} \Lambda^{(n)i_n j_n} \sum_{r_1+r_2 < 2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} (\mathbf{B}_{ur_2}^{(n)i_n})^T \mathbf{Q}_{r_2} \mathbf{Q}_{r_2}^T (\mathbf{e}^{(n)})^T \mathbf{B}_{\varphi r_2}^{(n)j_n}$$

$$\mathbf{K}_{\varphi\varphi} = -\sum_n \sum_{i_n} \sum_{j_n} \Lambda^{(n)i_n j_n} \sum_{r_1+r_2 \leq 2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} (\mathbf{B}_{\varphi r_2}^{(n)i_n})^T \boldsymbol{\epsilon}^{(n)} \mathbf{B}_{\varphi r_2}^{(n)j_n}$$

$$\mathbf{F}_{u\theta} = \sum_n \sum_{i_n} \sum_{j_n} \Lambda^{(n)i_n j_n} \sum_{r_1+r_2 < 2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} (\mathbf{B}_{ur_2}^{(n)i_n})^T \mathbf{Q}_{r_2} \gamma^{(n)} \Theta_{r_2}^{(n)j_n} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{F}_{\varphi\theta} = -\sum_n \sum_{i_n} \sum_{j_n} \Lambda^{(n)i_n j_n} \sum_{r_1+r_2 \leq 2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} (\mathbf{B}_{\varphi r_2}^{(n)i_n})^T \mathbf{r}^{(n)} \Theta_{r_2}^{(n)j_n}$$

Величины  $\Theta_{r_2}^{(n)i_n}$  находятся в результате решения задачи теплопроводности как линейная комбинация приращения температуры  $\Theta_r^{(n)i_n} = T_r^{(n)i_n} - T_0$  в узлах конечного элемента [13]:

$$\Theta_{r_2}^{(n)i_n} = \frac{1}{4} [\Theta_1^{(n)i_n} + (1 - 2r_1)\Theta_2^{(n)i_n} + (1 - 2r_1)(1 - 2r_2)\Theta_3^{(n)i_n} + (1 - 2r_2)\Theta_4^{(n)i_n}] \quad (2.19)$$

При решении сенсорной задачи выполнялось условие эквипотенциальности на электродах верхних поверхностей пьезоэлектрических накладок, то есть предполагалось, что

$$\varphi_1^{[N]} = \varphi_2^{[N]} = \varphi_3^{[N]} = \varphi_4^{[N]} \quad (2.20)$$

Для учета условия (2.20) применяется метод штрафных функций, в соответствии с которым к диэлектрической матрице жесткости добавляется штрафная матрица с достаточно большим положительным множителем  $\lambda$ :

$$\mathbf{K}_{\varphi\varphi}^* = \mathbf{K}_{\varphi\varphi} + \lambda \hat{\mathbf{K}} \quad (2.21)$$

Чтобы сохранить симметрию диэлектрической матрицы жесткости (2.21), ненулевые компоненты штрафной матрицы выбираются следующим образом:

$$\hat{\mathbf{K}}_{N_s, N_s} = 2, \quad \hat{\mathbf{K}}_{N_s, 2N_s} = -1, \quad \hat{\mathbf{K}}_{N_s, 4N_s} = -1 \quad (2.22)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{2N_s, N_s} = -1, \quad \hat{\mathbf{K}}_{2N_s, 2N_s} = 2, \quad \hat{\mathbf{K}}_{2N_s, 3N_s} = -1$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{3N_s, 2N_s} = -1, \quad \hat{\mathbf{K}}_{3N_s, 3N_s} = 1, \quad \hat{\mathbf{K}}_{4N_s, N_s} = -1, \quad \hat{\mathbf{K}}_{4N_s, 4N_s} = 1$$

При получении глобальной матрицы жесткости учитываем, что, как уже отмечалось, число слоев в конечных элементах с накладками превышает число слоев в элементах без накладок и, следовательно, размерность матриц  $\mathbf{K}_{uu}$ ,  $\mathbf{K}_{u\phi}$ ,  $\mathbf{K}_{\phi\phi}$  зависит от типа конечного элемента. После сборки элементов в ансамбль приходим к глобальной системе линейных алгебраических уравнений, которую для решения задачи управления формой удобно записать в виде

$$\mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (2.23)$$

где  $\mathbf{K}$  – глобальная матрица жесткости;  $\mathbf{X}$  – глобальный вектор узловых перемещений и электрических потенциалов;  $\mathbf{F}$  – глобальный вектор, механических, электрических и температурных нагрузок:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^G & \mathbf{K}_{u\phi}^G \\ \mathbf{K}_{\phi u}^G & \mathbf{K}_{\phi\phi}^G \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^G \\ \Phi^G \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u^G + \mathbf{F}_{u\theta}^G \\ \mathbf{F}_\phi^G + \mathbf{F}_{\phi\theta}^G \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

**3. Решение задачи управления формой слоистой пластины.** Обозначим через  $L$  число пьезоэлектрических накладок на верхней лицевой поверхности пластины. Пусть  $\mathbf{V} = [V_1 V_2 \dots V_L]^T$  – вектор электрических потенциалов, подаваемых на электроды накладок, тогда вектор внешних нагрузок можно записать в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{P}\mathbf{V} \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{P}$  – матрица порядка  $4N_S M \times L$ , где  $M$  – число узлов конечно-элементной сетки. Элементы матрицы  $p_{kl}$  равны 1, если  $k$ -я компонента вектора правых частей отвечает наличию потенциала на электроде  $l$ -й накладки, и нулю в противном случае;  $\mathbf{F}_0$  – вектор правых частей, зависящий от поверхностных нагрузок.

Поставим задачу о приведении деформированной в результате теплового нагружения срединной поверхности пластины к ее недеформированному состоянию. В этом случае целевая функция задачи оптимизации имеет вид

$$J(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}(\mathbf{R}\mathbf{X})^T(\mathbf{R}\mathbf{X}) \rightarrow \min \quad (3.2)$$

где  $\mathbf{R}$  – матрица порядка  $M \times 4N_S M$ , элементы которой  $r_{mk}$  равны 1, если  $k$ -я компонента вектора неизвестных соответствует поперечному перемещению срединной поверхности в  $m$ -м узле сетки, и равны нулю в противном случае.

Для решения задачи оптимизации (3.2) применим прямой метод. Из соотношений (2.23), (3.1) следует, что  $\mathbf{X} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{F}_0 + \mathbf{P}\mathbf{V})$ , поэтому

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{V}} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{P} \quad (3.3)$$

Необходимое условие минимума функции (3.2) с учетом (3.3) и симметрии матрицы  $\mathbf{K}$  можно записать в виде

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{B} \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{A}$  – симметричная матрица порядка  $L \times L$ ;  $\mathbf{B}$  – вектор правых частей, определяемые по формулам

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = -(\mathbf{R} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P})^T \mathbf{R} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_0 \quad (3.5)$$

Система линейных уравнений (3.4), (3.5) решается методом исключения Гаусса. В результате находим электрические потенциалы, которые необходимо подать на электроды накладок, чтобы привести пластину к недеформируемому состоянию.

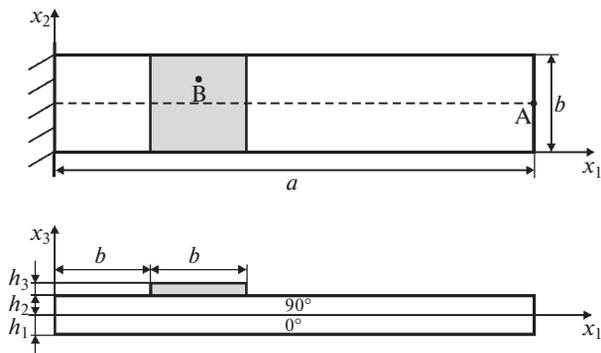


Рис. 1. Консольная пластина с пьезоэлектрической накладкой

**4. Численные результаты.** *4.1. Консольная пластина с пьезоэлектрической накладкой.* Для оценки эффективности разработанного конечного элемента GeXSaS4 рассмотрим задачу о нагреве двухслойной пластины длиной  $a = 100$  мм и шириной  $b = 20$  мм, изображенной на рис. 1. Пластина состоит из двух слоев углепластика толщиной  $h_1 = h_2 = 1$  мм с направлением волокон  $[0/90]$ . На расстоянии 20 мм от заделки на верхней поверхности пластины расположена квадратная накладка из пьезокерамики PZT-5A толщиной  $h_3 = 0.5$  мм. Материальные константы пьезокерамики PZT-5A соответствуют работе [20]:

$$C_{1111} = C_{2222} = 99.201 \text{ ГПа}, \quad C_{3333} = 86.856 \text{ ГПа}, \quad C_{1122} = 54.016 \text{ ГПа}$$

$$C_{1133} = C_{2233} = 50.778 \text{ ГПа}, \quad C_{1313} = C_{2323} = 21.1 \text{ ГПа}, \quad C_{1212} = 22.593 \text{ ГПа}$$

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = 3.314 \times 10^5 \text{ Па/К}, \quad \gamma_{33} = 3.26 \times 10^5 \text{ Па/К}$$

$$k_{11} = k_{22} = k_{33} = 1.8 \text{ Вт/мК}$$

$$e_{311} = e_{322} = -7.209 \text{ Кл/м}^2, \quad e_{333} = 15.118 \text{ Кл/м}^2, \quad e_{113} = e_{223} = 12.322 \text{ Кл/м}^2$$

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 1.53 \times 10^{-8} \text{ Ф/м}, \quad \epsilon_{33} = 1.5 \times 10^{-8} \text{ Ф/м}, \quad r_3 = 7.0 \times 10^{-4} \text{ Кл/м}^2\text{К}$$

Материальные константы углепластика [21] следующие:

$$E_L = 172.5 \text{ ГПа}, \quad E_T = 6.9 \text{ ГПа}, \quad G_{LT} = 3.45 \text{ ГПа},$$

$$G_{TT} = 1.38 \text{ ГПа}, \quad \nu_{LT} = \nu_{TT} = 0.25$$

$$\alpha_L = 0.57 \times 10^{-6} \text{ 1/К}, \quad \alpha_T = 35.6 \times 10^{-6} \text{ 1/К}$$

$$k_L = 36.42 \text{ Вт/мК}, \quad k_T = 0.96 \text{ Вт/мК}$$

$$\epsilon_L = 3.095 \times 10^{-11} \text{ Ф/м}, \quad \epsilon_T = 2.653 \times 10^{-11} \text{ Ф/м}$$

где  $E_L, E_T, G_{LT}, G_{TT}$  – модули упругости;  $\nu_{LT}, \nu_{TT}$  – коэффициенты Пуассона;  $\alpha_L, \alpha_T$  – коэффициенты теплового расширения;  $k_L, k_T$  – коэффициенты теплопроводности; индексы L и T обозначают направления вдоль и поперек волокон.

**Таблица 1.** Исследование сходимости в пластине с пьезоэлектрической накладкой

Сетка	20 × 2	60 × 6	120 × 12	240 × 24	240 × 24	240 × 24
$I_n$	7	7	7	3	5	7
$u_3(A, 0)$ , мкм	-17.40	-17.47	-17.52	-17.45	-17.55	-17.56
$\Theta(B, -h_1)$ , К	2.771	2.884	2.893	2.855	2.893	2.895
$\varphi(B, h_2 + h_3)$ , В	2.257	2.265	2.267	2.267	2.267	2.267

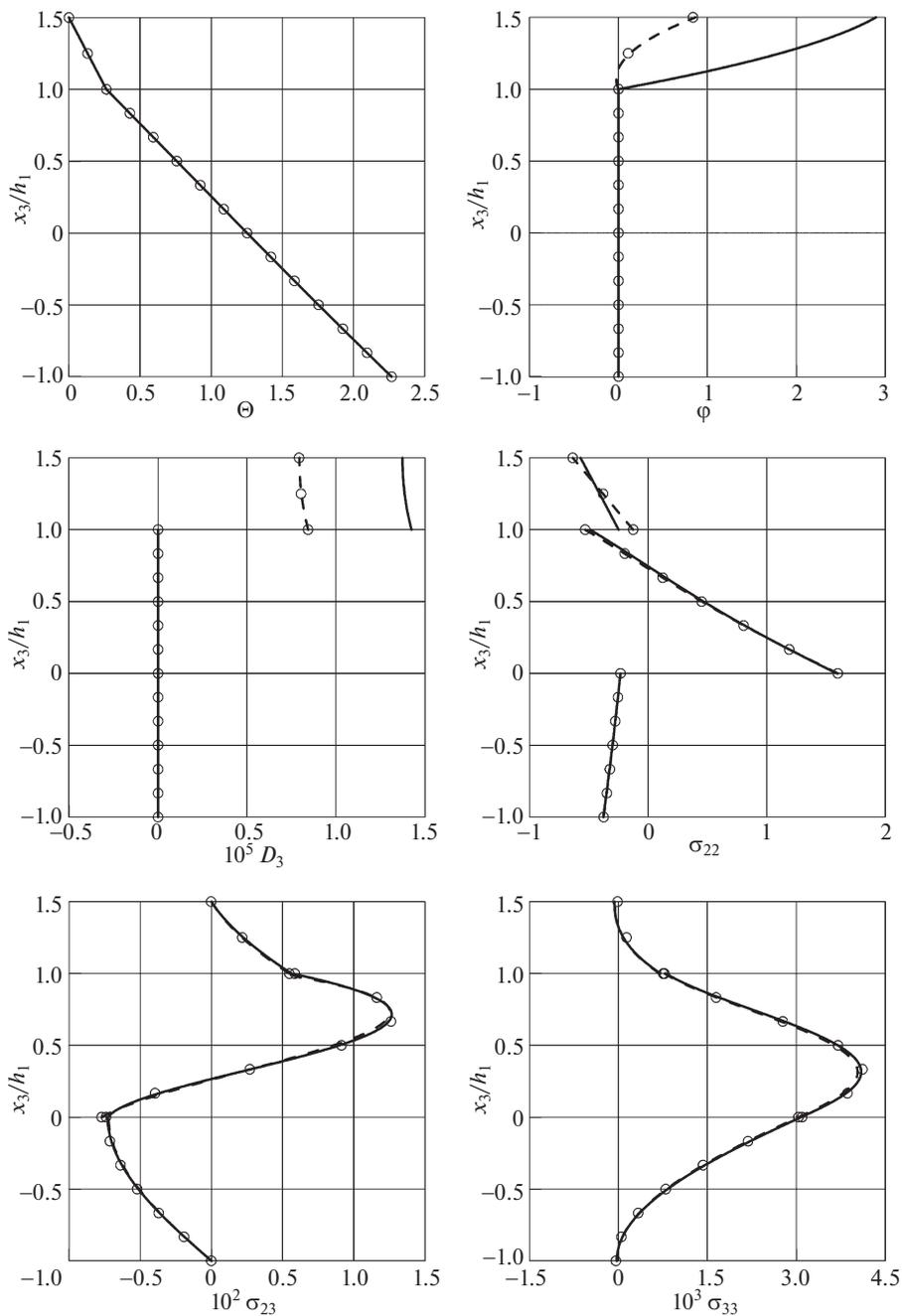
Нижняя лицевая поверхность пластины  $\Omega^-$  подвергается действию теплового потока  $\hat{q}_3^- = 10^3$  Вт/м<sup>2</sup>. Верхняя поверхность пластины  $\Omega^+$ , а также наружная поверхность и торцы накладки поддерживаются при заданной температуре  $\Theta^{[N]} = T^{[N]} - T_0 = 0$  К, где  $N = 2$  или 3. Предполагается, что электрод на поверхности раздела накладки и пластины заземлен, а на электроде наружной поверхности накладки выполняется условие эквипотенциальности.

Учитывая условия симметрии, моделировалась половина пластины ( $b/2 \leq x_2 \leq b$ ) с использованием регулярных конечно-элементных сеток. В табл. 1 приведено исследование сходимости разработанного конечного элемента GeXSaS4 в зависимости от выбранных сеток и от числа отсчетных поверхностей  $I_n$  в слоях пластины и накладке. Как видим, редкая сетка  $20 \times 2$  обеспечивает достаточно надежные результаты по сравнению с эталонными, полученными с использованием сетки  $240 \times 24$ .

Проведено также сравнение с результатами расчета на основе 20-узлового конечно-элементного элемента SOLID226 [22]. Как известно, трехмерные пьезоэлектрические элементы программного комплекса ANSYS [22], в частности SOLID226, не предоставляют пользователям возможности учета пьезоэлектрического эффекта, поэтому сравнение возможно, только при условии  $r_3 = 0$ . На рис. 2 показано распределение температуры, электрического потенциала, электрического смещения и напряжений по толщине пакета в точке  $B(3b/2, 3b/4)$  для двух значений пьезоэлектрической константы, вычисленные с помощью элемента GeXSaS4 на сетке  $240 \times 24$  при выборе семи отсчетных поверхностей в слоях пластины и накладке ( $I_1 = I_2 = I_3 = 7$ ) и конечного элемента SOLID226 путем использования трехмерных сеток  $240 \times 24 \times 6$  в слоях пластины и накладке. Как видим, учет пьезоэлектрической константы практически не влияет на результаты расчета напряжений, однако ее влияние на потенциал и смещение электрического поля в пьезоэлектрической накладке существенно.

**4.2. Консольная пластина с четырьмя пьезоэлектрическими накладками.** Далее рассмотрим двухслойную пластину, изображенную на рис. 3. Длина и ширина прямоугольной пластины, толщины слоев  $h_1$ ,  $h_2$  и накладок  $h_3$ , направления армирования в композитных слоях и использованные в пластине и накладках материалы описаны в разделе 4.1. Расстояния между квадратными накладками и расстояния от накладок до краев пластины приняты равными  $c = 4$  мм. Параметры теплового нагружения пластины соответствуют разделу 4.1. Электроды на поверхностях раздела пьезоэлектрических накладок и пластины заземлены. С учетом симметрии моделировалась половина пластины ( $b/2 \leq x_2 \leq b$ ) с использованием регулярных конечно-элементных сеток.

Рассматриваются две задачи: тепловое нагружение пластины, при котором на электродах верхних накладок выполняется условие эквипотенциальности (задача Т) и



**Рис. 2.** Зависимости температуры  $\Theta$  (К), электрического потенциала  $\varphi$  (В), электрического смещения  $D_3$  (Кл/м<sup>2</sup>) и напряжений  $\sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$  (МПа) в точке В от поперечной координаты в пластине с пьезоэлектрической накладкой: конечный элемент GeXSaS4 при  $r_3 = 7.0 \times 10^{-4}$  Кл/м<sup>2</sup>К (—) и  $r_3 = 0$  (---); элемент SOLID226 [22] (○)

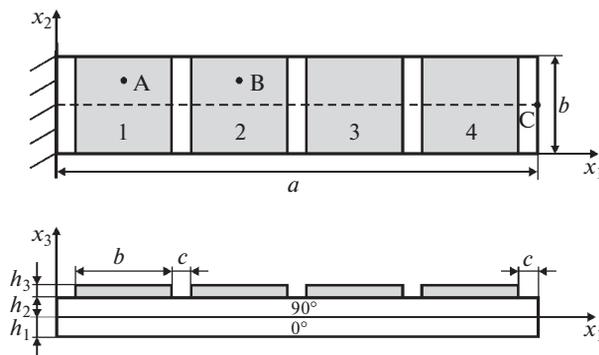


Рис. 3. Консольная пластина с четырьмя накладками

управление деформированной формой пластины путем решения задачи оптимизации (3.2) при наличии температурных воздействий (задача O). В табл. 2, 3 представлено исследование сходимости конечного элемента GeXSaS4 в температурной задаче (T) и задаче оптимизации (O) в зависимости от конечно-элементных сеток и от числа отсеченных поверхностей  $I_n$ . Здесь  $\phi_l$  – электрический потенциал на верхнем электроде  $l$ -й накладки, полученный в результате решения системы уравнений (2.23), (2.24);  $V_l$  – электрический потенциал на электроде  $l$ -й накладки, найденный в результате решения системы уравнений (3.4), (3.5), где  $l = 1, 2, 3, 4$ . Полученные результаты свидетельствуют об эффективности разработанного конечного элемента GeXSaS4 с точки зрения использования редких сеток.

На рис. 4 приведены зависимости поперечного перемещения и нормального напряжения от продольной координаты. Отметим, что в результате решения задачи оптимизации срединную поверхность удастся привести к форме близкой к исходной недеформированной, но при этом величина напряжений в пластине возрастает. На рис. 5 показаны распределения напряжений в точках  $A(c + b/2, 3b/4)$ ,  $B(2c + 3b/2, 3b/4)$  по толщине пакета путем решения обеих поставленных задач. Как видим, конечный элемент GeXSaS4 с высокой точностью воспроизводит поперечные компоненты тензора напряжений вблизи раздела слоев и на лицевых поверхностях пластины с учетом нулевых граничных условий. Результаты, показанные на рис. 4, 5, получены с помощью

Таблица 2. Исследование сходимости в пластине с четырьмя накладками (задача T)

Сетка	$25 \times 2$	$75 \times 6$	$150 \times 12$	$300 \times 24$	$300 \times 24$	$300 \times 24$
$I_n$	7	7	7	3	5	7
$u_3(C, 0)$ , мкм	-12.58	-12.82	-12.93	-12.67	-12.97	-13.00
$\Theta(B, -h_1)$ , К	2.293	2.308	2.311	2.312	2.312	2.312
$\phi_1$ , В	2.522	2.662	2.674	2.632	2.673	2.675
$\phi_2$ , В	2.821	2.917	2.921	2.881	2.920	2.921
$\phi_3$ , В	2.824	2.918	2.922	2.882	2.921	2.922
$\phi_4$ , В	2.827	2.919	2.922	2.882	2.920	2.921

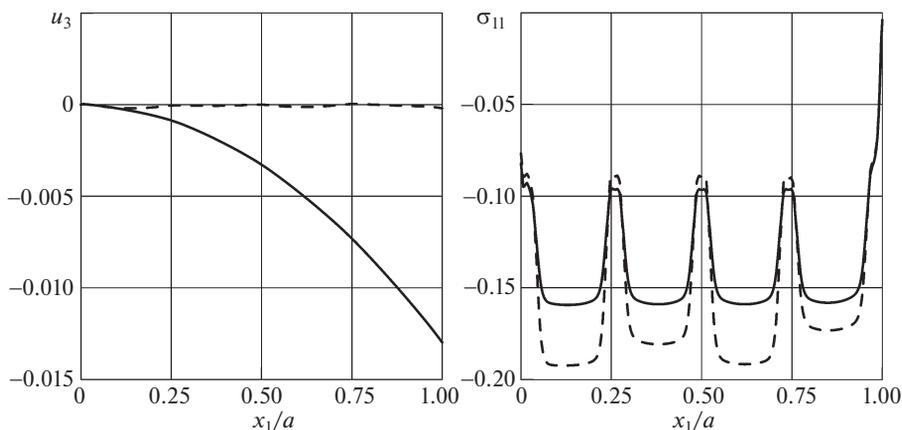
**Таблица 3.** Исследование сходимости в пластине с четырьмя накладками (задача O)

Сетка	25 × 2	75 × 6	150 × 12	300 × 24	300 × 24	300 × 24
$I_n$	7	7	7	3	5	7
$u_3(C, 0)$ , мкм	-0.3185	-0.2456	-0.2266	-0.2095	-0.2167	-0.2171
$V_1$ , В	-19.55	-20.59	-21.17	-20.35	-21.29	-21.41
$V_2$ , В	-13.94	-13.38	-13.11	-12.44	-13.06	-13.15
$V_3$ , В	-21.87	-21.10	-21.02	-20.05	-20.95	-21.07
$V_4$ , В	-5.468	-7.201	-7.820	-7.784	-8.186	-8.242

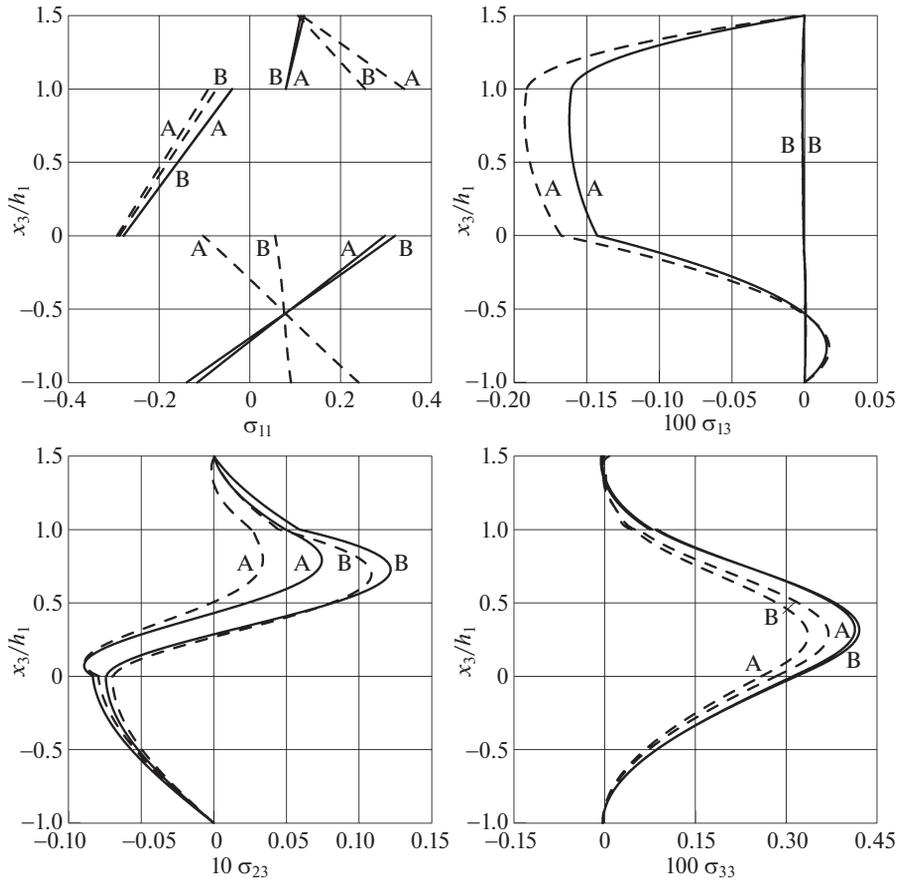
сетки  $300 \times 24$  при выборе семи отсчетных поверхностей в слоях пластины и накладках, то есть  $I_1 = I_2 = I_3 = 7$ .

**4.3. Заземленная прямоугольная пластина с пьезоэлектрическими накладками на верхней лицевой поверхности.** В заключение рассмотрим заземленную по контуру прямоугольную пластину длиной  $2a = 240$  мм и шириной  $2b = 160$  мм (см. рис. 6). На верхней поверхности пластины расположены 24 пьезоэлектрические накладки, имеющие форму квадрата со стороной  $c = 20$  мм. Расстояния от краев пластины до накладок  $d = 10$  мм. Толщины слоев, направления армирования и свойства материалов совпадают с приведенными в разделе 4.1.

Пусть нижняя поверхность пластины подвергается действию температуры  $\Theta^- = 5$  К. Верхняя лицевая поверхность пластины, а также наружные поверхности и торцы накладок поддерживаются при заданной температуре  $\Theta^+ = 0$  К. Электроды на границах раздела углепластика и накладок заземлены, а на верхних электродах накладок выпол-



**Рис. 4.** Зависимости поперечного перемещения  $u_3(x_1, 3b/4, 0)$  (мм) и нормального напряжения  $\sigma_{11}(x_1, 3b/4, h_2/2)$  (МПа) от продольной координаты в консольной пластине с четырьмя накладками: задача T (—) и задача O (---)



**Рис. 5.** Зависимости напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$ ,  $\sigma_{33}$  (МПа) в точках А, В от поперечной координаты в консольной пластине с четырьмя накладками: задача Т (—) и задача О (---)

няется условие эквипотенциальности. Аналогично разделу 4.2 рассматриваем две задачи: температурное нагружение пластины (задача Т) и управление формой пластины в случае температурных воздействий (задача О). В силу симметрии рассматривается 1/4 часть пластины, в которой накладки пронумерованы. Приведенные ниже резуль-

**Таблица 4.** Результаты расчета поперечного перемещения в точке С и электрических потенциалов на электродах шести накладок в заземленной прямоугольной пластине

Задача Т	$u_3(C, 0)$ , мкм	$\phi_1$ , В	$\phi_2$ , В	$\phi_3$ , В	$\phi_4$ , В	$\phi_5$ , В	$\phi_6$ , В
	-63.56	5.271	7.240	7.699	7.520	6.452	7.849
Задача О	$u_3(C, 0)$ , мкм	$V_1$ , В	$V_2$ , В	$V_3$ , В	$V_4$ , В	$V_5$ , В	$V_6$ , В
	-2.741	231.1	477.0	535.8	118.7	398.3	528.7

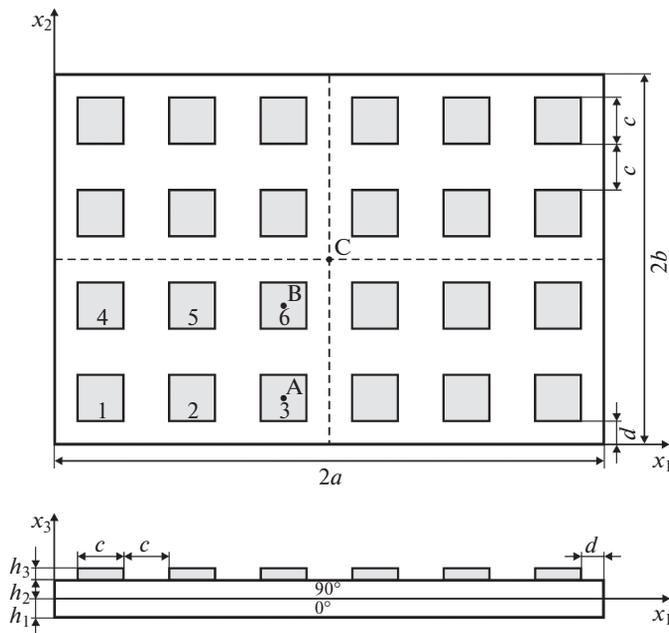


Рис. 6. Зашемленная прямоугольная пластина с пьезоэлектрическими накладками

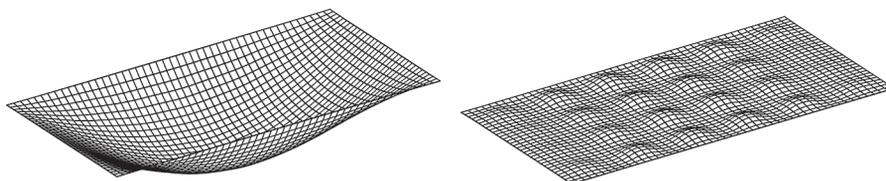
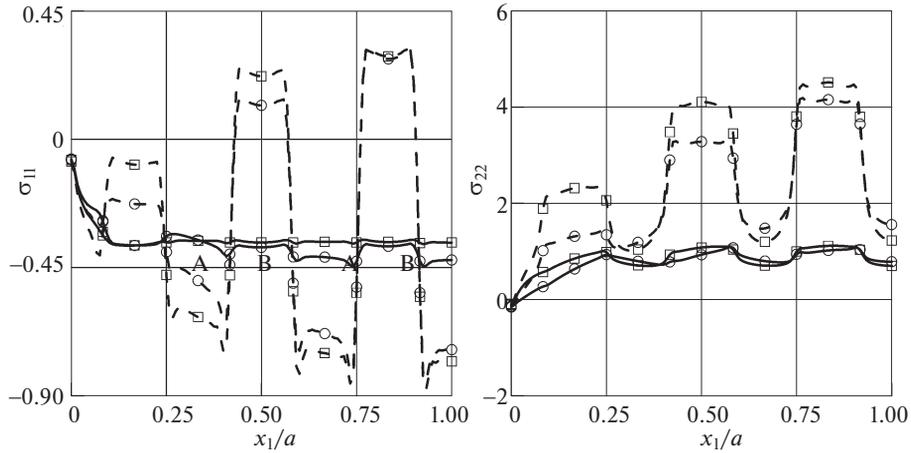


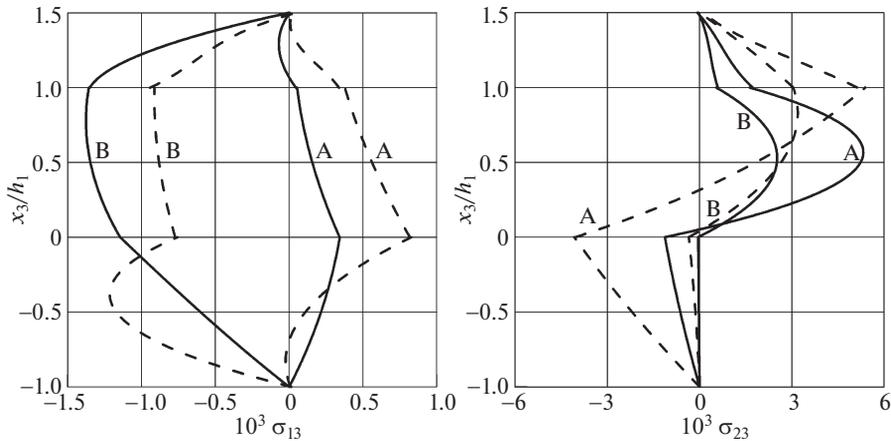
Рис. 7. Деформированная срединная поверхность зашемленной прямоугольной пластины: задача Т (слева) и задача О (справа)

таты получены с использованием сетки  $120 \times 80$  при выборе пяти отсчетных поверхностей в слоях и накладках ( $I_1 = I_2 = I_3 = 5$ ).

В табл. 4 приведены электрические потенциалы на верхних электродах  $m$ -й накладки  $\phi_m$  и  $V_m$ , где  $m = 1, 2, \dots, 6$ , полученные в результате решения задач Т и О, соответственно, а также поперечное перемещение в центре пластины. На рис. 7 изображены деформированные срединные поверхности пластины, полученные после решения задач Т и О. Как видим, в результате решения задачи оптимизации срединную поверхность удается привести к форме достаточно близкой к исходной. Однако величины напряжений существенно возрастают, на что указывают приведенные на рис. 8 зависимости нормальных напряжений от продольной координаты, выведенные для верхнего слоя пластины. На рис. 9 показаны распределения поперечных касательных напряжений в точках А( $5a/6, b/4$ ), В( $5a/6, 3b/4$ ) по толщине пакета. Отметим, что граничные условия на лицевых поверхностях пластины и накладок и условия



**Рис. 8.** Зависимости напряжений  $\sigma_{11}(x_1, b/4, h_2/2)$ ,  $\sigma_{22}(x_1, b/4, h_2/2)$  ( $\square$ ) и  $\sigma_{11}(x_1, 3b/4, h_2/2)$ ,  $\sigma_{22}(x_1, 3b/4, h_2/2)$  ( $\circ$ ) от продольной координаты в защемленной прямоугольной пластине: задача Т (—) и задача О (---)



**Рис. 9.** Зависимости напряжений  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$  (МПа) в точках А, В от поперечной координаты в защемленной прямоугольной пластине: задача Т (—) и задача О (---)

непрерывности на поверхностях раздела слоев и накладок выполняются с высокой точностью, что свидетельствует об эффективности конечного элемента GeXSaS4.

**Заключение.** В работе построен четырехузловой гибридный конечный элемент на основе метода отсчетных поверхностей, расположенных в узловых точках полиномов Чебышева, который позволяет с высокой точностью рассчитывать в трехмерной постановке связанные температурные, электрические и механические поля в слоистых

композитных пластинах с распределенными на лицевых поверхностях пьезоэлектрическими накладками как в сенсорных, так и актуаторных задачах. На основе разработанного конечного элемента предложен простой и эффективный алгоритм нахождения оптимальных электрических потенциалов на электродах пьезокерамических накладок, который позволяет привести деформированную пластину к исходной недеформированной форме за счет использования обратного пьезоэлектрического эффекта.

**Благодарность.** Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 18-19-00092). Авторы благодарят А.О. Глебова за помощь с расчетами в ANSYS.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lee H.J., Saravanos D.A. A mixed multi-field finite element formulation for thermopiezoelectric composite shells // *Int. J. Solids Struct.* 2000. V. 37. P. 4949–4967.
2. Varelis D., Saravanos D.A. Non-linear coupled multi-field mechanics and finite element for active multi-stable thermal piezoelectric shells // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2008. V. 76. P. 84–107.
3. Gu H., Chattopadhyay A., Li J., Zhou X. A higher order temperature theory for coupled thermopiezoelectric-mechanical modeling of smart composites // *Int. J. Solids Struct.* 2000. V. 37. P. 6479–6497.
4. Jian J.P., Li D.X. Finite element formulations for thermopiezoelastic laminated composite plates // *Smart Mater. Struct.* 2008. V. 17. 13 p.
5. Rao S.S., Sunar M. Analysis of distributed thermopiezoelectric sensors and actuators in advanced intelligent structures // *AIAA J.* 1993. V. 31. P. 1280–1286.
6. Tzou H.S., Ye R. Piezothermoelasticity and precision control of piezoelectric systems: Theory and finite element analysis // *J. Vib. Acoust.* 1994. V. 116. P. 489–495.
7. Görmandt A., Gabbert U. Finite element analysis of thermopiezoelectric smart structures // *Acta Mechanica.* 2002. V. 154. P. 129–140.
8. Shang F., Kuna M., Schrzzer M. A finite element procedure for three-dimensional analyses of thermopiezoelectric structures in static applications // *Tech. Mech.* 2002. V. 22. P. 235–243.
9. Lee H.J., Saravanos D.A. Coupled layerwise analysis of thermopiezoelectric composite beams // *AIAA J.* 1996. V. 34. P. 1231–1237.
10. Oh I.K., Han J.H., Lee I. Thermopiezoelastic snapping of piezolaminated plates using layerwise nonlinear finite elements // *AIAA J.* 2001. V. 39. P. 1188–1197.
11. Brischetto S., Carrera E. Coupled thermo-electro-mechanical analysis of smart plates embedding composite and piezoelectric layers // *J. Therm. Stresses.* 2012. V. 35. P. 766–804.
12. Kulikov G.M., Mamontov A.A., Plotnikova S.V. Coupled thermoelectroelastic stress analysis of piezoelectric shells // *Compos. Struct.* 2015. V. 124. P. 65–76.
13. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. Coupled thermoelectroelastic analysis of thick and thin laminated piezoelectric structures by exact geometry solid-shell elements based on the sampling surfaces method // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2021. V. 122. P. 2446–2477.
14. Плотникова С.В., Куликов Г.М. Управление формой композитных пластин с распределенными пьезоэлектрическими актуаторами в трехмерной постановке // *Механика композ. матер.* 2020. Т. 56. № 5. С. 821–840.
15. Ha S.K., Keilers C., Chang F.K. Finite element analysis of composite structures containing distributed piezoceramic sensors and actuators // *AIAA J.* 1992. V. 30. № 3. P. 772–780.
16. Irschik H. A review on static and dynamic shape control of structures by piezoelectric actuation // *Eng. Struct.* 2002. V. 24. P. 5–11.
17. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. Heat conduction analysis of laminated shells by a sampling surfaces method // *Mech. Res. Commun.* 2014. V. 55. P. 59–65.

- 
18. Куликов Г.М., Плотникова С.В. Решение связанной задачи термопьезоэлектричества на основе геометрически точного элемента оболочки // Механика композ. матер. 2010. Т. 46. № 4. С. 513–534.
  19. Kulikov G.M., Plotnikova S.V., Carrera E. Hybrid-mixed solid-shell element for stress analysis of laminated piezoelectric shells through higher-order theories // Adv. Struct. Mater. 2018. V. 81. P. 45–68.
  20. Vel S.S., Batra R.C. Generalized plane strain thermopiezoelectric analysis of multilayered plates // J. Therm. Stresses. 2003. V. 26. P. 353–377.
  21. Kapuria S., Sengupta S., Dumir P.C. Three-dimensional solution for a hybrid cylindrical shell under axisymmetric thermoelectric load // Arc. Appl. Mech. 1997. V. 67. P. 320–330.
  22. ANSYS 2019 R2 Release / Canonsburg, USA: ANSYS Inc, 2019.

УДК 629.7

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМБИНИРОВАННОГО КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА  
В ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗВОРОТА ТВЕРДОГО ТЕЛА  
(КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА) С ОГРАНИЧЕНИЕМ  
НА ФАЗОВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ**

© 2021 г. М. В. Левский

*НИИ космических систем им. А.А. Максимова – филиал Государственного космического  
научно-производственного центра им. М.В. Хруничева, Королев, Россия  
e-mail: levskii1966@mail.ru*

Поступила в редакцию 25.07.2020 г.

После доработки 30.09.2020 г.

Принята к публикации 24.12.2020 г.

Аналитическими методами решена динамическая задача оптимального разворота твердого тела (например, космического аппарата) из произвольного начального положения покоя в требуемое конечное положение покоя при ограниченном управлении (ограничены как управляющие функции, так и фазовые переменные). Время окончания маневра не фиксировано. Рассматривается случай, когда существенным ограничением является максимально допустимая кинетическая энергия вращения. Для оптимизации используется комбинированный критерий качества, объединяющий в заданной пропорции время разворота и интеграл от кинетической энергии вращения. Построение оптимального управления разворотом основано на кватернионных переменных и принципе максимума. Показано, что во время оптимального разворота момент сил параллелен прямой, неподвижной в инерциальном пространстве, и направление кинетического момента твердого тела (космического аппарата) постоянно относительно инерциальной системы координат. Ключевые свойства оптимального решения сформулированы в аналитическом виде. Подробно исследован особый режим управления и сформулированы условия существования или невозможности возникновения такого режима. Приведены расчетные выражения для нахождения основных характеристик программы управления. Даны пример и результаты математического моделирования движения космического аппарата как твердого тела при оптимальном управлении, демонстрирующие практическую реализуемость разработанного метода управления. Для динамически симметричного космического аппарата поставленная задача оптимального управления решается до конца – получены зависимости как явные функции времени для управляющих переменных и соотношения для расчета параметров закона управления. Созданные алгоритмы управления позволяют совершать развороты с ограниченной энергией вращения за минимальное время.

*Ключевые слова:* ориентация, кватернион, оптимальное управление, критерий качества, релейное управление, принцип максимума, краевая задача

**DOI:** 10.31857/S0572329921040103

**Введение.** В статье решается задача перевода твердого тела (в частности, космического аппарата (КА)) в положение заданной ориентации оптимальным образом с использованием комбинированного показателя качества. Способ решения и формализация описания кинематики вращательного движения основаны на методе кватерни-

онов [1]. Для определения оптимальной траектории вращения использовались кватернионные модели, принцип максимума и универсальные переменные [2]. Оптимальная программа управления ориентацией при развороте КА, как твердого тела, из одного пространственного положения в другое построена с учетом ограничений на управление и фазовые переменные (ограничены силовой момент и угловая скорость). Приведенное ниже решение отличается от всех известных.

Исследованием задачи управления разворотом твердого тела в различных постановках занимались неоднократно [1–21]. Большинство существующих решений задачи пространственного разворота соответствуют вращению вокруг неподвижной оси [1, 3–6]. И хотя принципы оптимизации и алгоритмы управления различны (на основе нечеткой логики [3], обратных задач динамики [4, 5] и др.), результирующее управление приводит к развороту вокруг оси Эйлера. В то же время разворот в плоскости наименьшего угла разворота во многих практических случаях не является наилучшим, как бы точно он не исполнялся. Особое место занимают вопросы оптимального управления движением твердого тела [1, 2, 7–20], в том числе с неограниченным управлением [8, 9] (с фиксированным [8] и нефиксированным временем окончания маневра [9]). Наиболее детально задача оптимального управления угловым движением КА решена лишь для двух частных случаев – плоских вращений КА вокруг одной из главных центральных осей инерции [6] и пространственного вращения сферически-симметричного тела [1]. В большом количестве работ изучаются задачи оптимального по времени разворота [10–17]. Практический интерес представляют аналитические решения задачи оптимального разворота в замкнутой форме, так как они позволяют применять на борту КА готовые законы программного управления и изменения оптимальной траектории движения КА. Для сферически-симметричного [1] и осесимметричного тела некоторые решения известны [15–18] (иногда авторы решали краевую задачу принципа максимума путем замены переменных и последующего сведения исходной задачи к краевой задаче разворота сферически-симметричного тела [18]). Для КА с произвольным распределением масс при произвольных граничных условиях по угловому положению КА аналитическое решение задачи пространственного разворота не найдено, кроме некоторых особых случаев (например, [1, 19]). Управление ориентацией КА с помощью инерционных исполнительных органов (гиродинов) имеет свои особенности [6, 22–25] (ранее был разработан и запатентован известный метод [26]).

Создание высокоэффективных алгоритмов управления ориентацией КА и сегодня является актуальной проблемой. В отличие от задач максимального быстродействия, нередко приходится учитывать стоимость затраченных ресурсов, кроме времени (например, топлива, расходуемого исполнительными органами системы ориентации КА при выполнении динамической операции). Ниже исследуется динамическая задача оптимального управления разворотом КА, когда ограничения накладываются как на управляющие функции, так и на фазовые переменные (ограничен не только силовой момент, но и угловая скорость). Принятый в статье минимизируемый функционал также включает фазовые переменные (угловые скорости КА). Найденное решение позволяет разворачивать КА с ограниченной кинетической энергией вращения за минимальное время, что крайне важно для практики космических полетов. Вопросы экономичности управления движением КА (в частности, ограниченности энергии вращения) и быстродействия маневров остаются до сих пор актуальными, поэтому решаемая в статье задача является практически важной.

**1. Уравнения углового движения и постановка задачи управления.** Динамика углового движения КА как твердого тела описывается динамическими уравнениями Эйлера [1, 6]:

$$J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 = M_1, \quad J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_1\omega_3 = M_2, \quad J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 = M_3 \quad (1.1)$$

где  $J_i, i = \overline{1,3}$  – главные центральные моменты инерции аппарата,  $M_i$  – проекции главного момента  $\mathbf{M}$  сил на главные центральные оси эллипсоида инерции аппарата,  $\omega_i$  – проекции вектора  $\boldsymbol{\omega}$  абсолютной угловой скорости КА на оси связанного базиса  $\mathbf{E}$ , образованного главными центральными осями эллипсоида инерции аппарата.

Для описания пространственного движения КА используем математический аппарат кватернионов (параметров Родрига–Гамильтона). Движение связанного базиса  $\mathbf{E}$  относительно опорного базиса  $\mathbf{I}$  будем задавать кватернионом  $\Lambda$ , который для удобства полагаем нормированным [1] ( $\|\Lambda\| = 1$ ). Для определенности базис  $\mathbf{I}$  считается инерциальным. Поэтому справедливо следующее кинематическое уравнение [1]:

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \boldsymbol{\omega} \quad (1.2)$$

где символ “ $\circ$ ” – знак умножения кватернионов [1, с. 11–20]. Здесь и далее операция кватернионного умножения на вектор понимается как умножение на кватернион с нулевой скалярной частью; в частности  $\Lambda \circ \boldsymbol{\omega} = \Lambda \circ \Omega$ , где  $\Omega$  – кватернион, у которого  $\text{sqal } \Omega = 0, \text{ vect } \Omega = \boldsymbol{\omega}$ .

Управление движением КА относительно центра масс осуществляется за счет изменения момента сил  $\mathbf{M}$ . Считается, что область возможных значений вектора  $\mathbf{M}$  подобна эллипсоиду инерции КА и описывается неравенством [15]

$$\frac{M_1^2}{J_1} + \frac{M_2^2}{J_2} + \frac{M_3^2}{J_3} \leq u_0^2 \quad (1.3)$$

где  $u_0 > 0$  – некоторая положительная величина, характеризующая мощность исполнительных органов системы ориентации КА. Интерес представляет задача разворота с закрепленными левым и правым концами траектории движения, когда начальная и конечная угловые скорости полагаются равными нулю (относительно опорного базиса  $\mathbf{I}$ ); такие задачи встречаются достаточно часто и имеют большое практическое значение. Граничные условия для динамической системы (1.1), (1.2) для исследуемого управления разворотом из положения покоя в положение покоя представляются в виде равенств:

$$\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}, \quad \boldsymbol{\omega}(0) = 0 \quad (1.4)$$

$$\Lambda(T) = \Lambda_f, \quad \boldsymbol{\omega}(T) = 0 \quad (1.5)$$

где  $T$  – время окончания поворотного маневра. Кватернионы  $\Lambda_{\text{in}}$  и  $\Lambda_f$ , задающие ориентацию связанных осей КА в начальный и конечный моменты времени, имеют произвольные наперед заданные значения, удовлетворяющие условию  $\|\Lambda_{\text{in}}\| = \|\Lambda_f\| = 1$  (полагаем, что  $\Lambda_f \neq \pm \Lambda_{\text{in}}$ ). Допустимыми считаются движения, у которых кинетическая энергия вращения КА не превышает некоторой положительной величины  $E_{\text{adm}}$ . Следовательно, управление имеет ограничение

$$J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2 \leq 2E_{\text{adm}} \quad (1.6)$$

где  $E_{\text{adm}}$  – максимально допустимая кинетическая энергия вращения. Эффективность управления будем оценивать следующим показателем качества

$$G = T + k_0 \int_0^T (J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2) dt \quad (1.7)$$

где  $k_0 \geq 0$  – неотрицательный постоянный коэффициент. Задачу оптимального управления пространственным разворотом КА сформулируем следующим образом: КА необходимо перевести из состояния (1.4) в состояние (1.5) в соответствии с уравнениями (1.1), (1.2) и ограничениями (1.3), (1.6) с минимальным значением функционала (1.7). Время  $T$  окончания маневра переориентации КА не фиксировано (оно оптимизирует-

ся вместе с  $G$ ). Цена разворота складывается из стоимости потерь полезного полетного времени, вызванных длительностью совершаемого маневра, и интегральных энергозатрат. Интеграл в (1.7) характеризует нежелательность или опасность движения с большими энергиями. Коэффициент  $k_0$  определяет во сколько раз безопасность при движении (в интегральном смысле) дороже времени движения. Очевидно, он может быть разным для пилотируемых и грузовых аппаратов. Решение  $\mathbf{M}(t)$  ищется в классе кусочно-непрерывных функций времени.

Принятый критерий оптимальности позволяет определить режим вращения КА, при котором разворот КА из исходного своего положения  $\Lambda_{\text{ин}}$  в заданное конечное угловое положение  $\Lambda_f$  происходит с минимальными интегральными затратами энергии и времени, и найти соответствующую программу управления. Сформулированная задача управления КА отличается от ранее рассматриваемых задач видом функционала (1.7) при наличии ограничений на фазовые переменные, а не только на управляющий момент. Поскольку время управления  $T$  не задано, разворот КА из состояния (1.4) в состояние (1.5) всегда осуществим (решение  $\mathbf{M}(t)$  задачи (1.1)–(1.7) существует для любых сочетаний значений  $\Lambda_{\text{ин}}, \Lambda_f, J_1, J_2, J_3, u_0$ ). Оптимальное управление пространственной переориентацией КА в соответствии с критерием (1.7) обладает важными полезными свойствами. В частности, для оптимального по критерию (1.7) управления, ограниченного условием (1.3), остановка вращения КА (при необходимости прекращения маневра в критической или нештатной ситуации) занимает время, не превышающее заранее известной величины.

**2. Решение задачи оптимального управления разворотом.** Сформулированная задача управления (1.1)–(1.7) – динамическая задача оптимального разворота твердого тела [1], в которой управляющими функциями являются моменты  $M_i, i = \overline{1, 3}$ . Будем решать поставленную задачу с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина [27]. Введем сопряженные переменные  $\varphi_i$ , соответствующие угловым скоростям  $\omega_i, i = \overline{1, 3}$ . Поскольку критерий оптимальности не содержит позиционных координат (элементов кватерниона ориентации  $\Lambda$ ), целесообразно использовать универсальные переменные  $r_i, i = \overline{1, 3}$  [2], заменяющие сопряженные переменные  $\psi_j$ , которые соответствуют компонентам  $\lambda_j$  кватерниона  $\Lambda, j = \overline{0, 3}$ . Ограничение на фазовую переменную  $\Lambda$  (и соответственно  $\lambda_j$ ) несущественно, так как оно выполняется при любых движениях КА вокруг центра масс;  $\|\Lambda(t)\| = \text{const}$  в силу уравнения (1.2) [1]; мы полагали  $\|\Lambda(0)\| = \|\Lambda_{\text{ин}}\| = 1$ , а значит  $|\Lambda(t)| = 1$  в любой момент времени  $t \in [0, T]$ .

Для динамической задачи оптимального управления (1.1)–(1.7) гамильтониан  $H$  равен [2]

$$H = -1 - k_0(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2) + \varphi_1(M_1 + (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3)/J_1 + \\ + \varphi_2(M_2 + (J_3 - J_1)\omega_1\omega_3)/J_2 + \varphi_3(M_3 + (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2)/J_3 + \omega_1r_1 + \omega_2r_2 + \omega_3r_3$$

где

$$r_1 = (\lambda_0\psi_1 + \lambda_3\psi_2 - \lambda_1\psi_0 - \lambda_2\psi_3)/2, \quad r_2 = (\lambda_0\psi_2 + \lambda_1\psi_3 - \lambda_2\psi_0 - \lambda_3\psi_1)/2, \\ r_3 = (\lambda_0\psi_3 + \lambda_2\psi_1 - \lambda_3\psi_0 - \lambda_1\psi_2)/2$$

Оптимальные функции  $r_i$ , как компоненты вектора  $\mathbf{r}$ , и вектор  $\mathbf{r}$  удовлетворяют уравнениям [2]

$$\dot{\mathbf{r}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\ \dot{r}_1 = \omega_3r_2 - \omega_2r_3, \quad \dot{r}_2 = \omega_1r_3 - \omega_3r_1, \quad \dot{r}_3 = \omega_2r_1 - \omega_1r_2 \quad (2.1)$$

(символ  $\times$  означает векторное произведение векторов). Уравнения для  $\phi_i$  имеют вид [27]

$$\dot{\phi}_i = -\frac{\partial H}{\partial \omega_i} \quad (i = \overline{1, 3})$$

или в развернутой форме:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= 2k_0 J_1 \omega_1 + \omega_3 \phi_2 (J_1 - J_3) / J_2 + \omega_2 \phi_3 (J_2 - J_1) / J_3 - r_1 \\ \dot{\phi}_2 &= 2k_0 J_2 \omega_2 + \omega_1 \phi_3 (J_2 - J_1) / J_3 + \omega_3 \phi_1 (J_3 - J_2) / J_1 - r_2 \\ \dot{\phi}_3 &= 2k_0 J_3 \omega_3 + \omega_2 \phi_1 (J_3 - J_2) / J_1 + \omega_1 \phi_2 (J_1 - J_3) / J_2 - r_3 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Гамильтониан  $H$  составлен без учета ограничения  $\|\Lambda\| = 1$  для фазовых переменных  $\lambda_j$  в силу равенства  $\|\Lambda(0)\| = 1$ , о чем договорились выше. Вектор  $\mathbf{r}$  является постоянным относительно инерциального базиса  $\mathbf{I}$  и  $|\mathbf{r}| = \text{const} \neq 0$  (постоянство модуля  $|\mathbf{r}|$  следует из свойств уравнений (2.1)). Решение  $\mathbf{r}(t)$  системы (2.1) определяется начальным  $\Lambda_{\text{in}}$  и конечным  $\Lambda_f$  положениями КА. Оптимальная функция  $\mathbf{r}(t)$  вычисляется через кватернион  $\Lambda(t)$  [1, 2]:

$$\mathbf{r} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda, \quad \text{где} \quad \mathbf{c}_E = \text{const} = \Lambda_{\text{in}} \circ \mathbf{r}(0) \circ \tilde{\Lambda}_{\text{in}}$$

(составляющие вектора  $\mathbf{c}_E$  — проекции вектора  $\mathbf{r}$  на оси инерциального базиса  $\mathbf{I}$ );  $\tilde{\Lambda}$  — кватернион, сопряженный кватерниону  $\Lambda$  [1, с. 11–20]. Считается, что  $\mathbf{r}(0) \neq 0$  (в противном случае  $r_1 = r_2 = r_3 \equiv 0$  и дальнейшее решение задачи теряет смысл). Направление вектора  $\mathbf{c}_E$  зависит от начального и конечного положений КА. Для того, чтобы КА имел требуемую ориентацию на правом конце  $\Lambda(T) = \Lambda_f$ , необходимо определить вектор  $\mathbf{c}_E$  (или значение вектора  $\mathbf{r}$  в начальный момент времени) исходя из получающихся при этом решений уравнения (1.2).

Для формулирования условий максимума функции  $H$  запишем ее в следующем виде

$$H = M_1 \phi_1 / J_1 + M_2 \phi_2 / J_2 + M_3 \phi_3 / J_3 + H_{\text{inv}}$$

где  $H_{\text{inv}}$  не зависит явно от управляющих функций  $M_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ). Область возможных управлений описывается неравенством (1.3). Обозначим

$$g_i = \phi_i / \sqrt{J_i}, \quad u_i = M_i / \sqrt{J_i}$$

После замены переменных гамильтониан  $H$  принимает вид  $H = g_1 u_1 + g_2 u_2 + g_3 u_3 + H_{\text{inv}}$ . Для вспомогательных переменных  $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leq u_0^2$ , и гамильтониан  $H$  максимален, если

$$u_i = u_0 g_i / \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2}$$

Пусть  $\boldsymbol{\phi}$  — вектор, компонентами которого являются  $\phi_i$ . Нетрудно видеть, что в случае  $\boldsymbol{\phi} \neq 0$  максимум функции  $H$  для управлений  $M_i(t)$  при ограничении (1.3) достигается, когда

$$M_i = \frac{u_0 \phi_i}{\sqrt{\phi_1^2 / J_1 + \phi_2^2 / J_2 + \phi_3^2 / J_3}} \quad (2.3)$$

Случай  $\boldsymbol{\phi} = 0$ , при котором гамильтониан не зависит явным образом от управления  $\mathbf{M}$ , требует отдельного рассмотрения. Ниже покажем, что  $\mathbf{M} = 0$ , если  $\boldsymbol{\phi} = 0$ . Введем обозначение

$$E(t) = (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2) / 2$$

В начале и в конце разворота ограничение (1.6) несущественно, оно переходит в строгое неравенство, так как угловые скорости в начальный и конечный моменты времени равны нулю  $\omega(0) = \omega(T) = 0$ . Поэтому, в интервалах движения, когда  $E(t) < E_{\text{adm}}$ , оптимальное решение определяется замкнутой системой уравнений (1.1), (1.2), (2.1)–(2.3) с учетом требований (1.4), (1.5). Найдем характерные свойства оптимального движения для задачи (1.1)–(1.7).

Системе (1.1), (2.1)–(2.3) удовлетворяют функции  $\varphi_i$  и  $\omega_i$ , пропорциональные  $r_i$ . С учетом условий разворота  $\omega(0) = \omega(T) = 0$  система уравнений (1.1), (2.1)–(2.3) имеет единственное решение, в котором  $\varphi_i$  и угловые скорости  $\omega_i$  связаны с переменными  $r_i$  зависимостями

$$\varphi_i = a(t)r_i \quad (2.4)$$

$$\omega_i = b(t)r_i/J_i \quad (2.5)$$

где  $a(t)$ ,  $b(t)$  – скалярные функции времени. Подстановка равенств (2.4), (2.5) в систему (2.2) с учетом уравнений (1.1), (2.1), (2.3) превращает все три уравнения (2.2) в тождества, что доказывает истинность решения (2.4), (2.5). При этом оптимальные функции  $a(t)$  и  $b(t)$  должны удовлетворять равенству  $\dot{a} = 2k_0b(t) - 1$ .

Построение оптимальной программы разворота во многом зависит от значения коэффициента  $k_0$  в минимизируемом функционале (1.7). Необходимо выделить два принципиальных случая:  $k_0 = 0$  и  $k_0 > 0$ . Рассмотрим начнем с более простого варианта, когда  $k_0 = 0$ .

**3. Частный случай задачи оптимального разворота, когда  $k_0 = 0$ .** Если  $k_0 = 0$ , то решается задача максимального быстродействия (разворот КА за минимальное время). Гамильтониан несколько упрощается и имеет следующий вид

$$H_0 = -1 + \varphi_1(M_1 + (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3)/J_1 + \varphi_2(M_2 + (J_3 - J_1)\omega_1\omega_3)/J_2 + \\ + \varphi_3(M_3 + (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2)/J_3 + \omega_1r_1 + \omega_2r_2 + \omega_3r_3$$

Сопряженная система уравнений (2.2) также принимает более простую форму

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_3n_2\varphi_2 + \omega_2n_3\varphi_3 - r_1, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_3n_1\varphi_1 + \omega_1n_3\varphi_3 - r_2, \\ \dot{\varphi}_3 = \omega_2n_1\varphi_1 + \omega_1n_2\varphi_2 - r_3 \quad (3.1)$$

где  $n_1 = (J_3 - J_2)/J_1$ ,  $n_2 = (J_1 - J_3)/J_2$ ,  $n_3 = (J_2 - J_1)/J_3$  есть постоянные коэффициенты.

Очевидно, что разворот КА совершается максимально быстро, если в каждый текущий момент времени  $t$  угловая скорость максимальна, насколько это позволяют ограничения (1.3) и (1.6). Выше было показано, что если  $E(t) < E_{\text{adm}}$ , то оптимальным является управление (2.3) и  $\mathbf{M} \neq 0$ , если  $\mathbf{\Phi} \neq 0$ . При условии  $E(t) = \text{const} = E_{\text{adm}}$  область возможных управлений сокращается из шара  $|\mathbf{u}| \leq u_0$  до плоского круга, ограниченного окружностью, образованной пересечением сферы с плоскостью, перпендикулярной вектору, компонентами которого являются  $\omega_i\sqrt{J_i}$  (так как при  $E(t) = \text{const} = E_{\text{adm}}$  должно быть  $\dot{E} = 0$  и следовательно  $M_1\omega_1 + M_2\omega_2 + M_3\omega_3 = 0$ ); компонентами вектора  $\mathbf{u}$  являются  $u_i$ . Оптимальный момент  $\mathbf{M}$  обязан находиться внутри сечения эллипсоида (1.3) плоскостью, перпендикулярной угловой скорости  $\omega$  с тем, чтобы  $\dot{E} = 0$  пока не наступит момент начала остановки вращения (а он существует, поскольку  $\omega(T) = 0$ ).

На участке разгона (начиная с момента времени  $t = 0$ ), когда  $E(t) < E_{\text{adm}}$  и  $\dot{E} > 0$ , оптимальным является  $\mathbf{M} \neq 0$  и  $a(t) > 0$  (так как кинетическая энергия вращения  $E(t)$  возрастает), и как следствие

$$M_i = \frac{u_0J_i\omega_i}{\sqrt{J_3\omega_3^2 + J_2\omega_2^2 + J_1\omega_1^2}} \quad (3.2)$$

(управляющий момент  $\mathbf{M}$  и кинетический момент  $\mathbf{L}$  имеют одинаковое направление, и значение  $E(t) = E_{\text{adm}}$  достигается за минимальное время при ограничении (1.3)). На участке торможения (в интервале времени слева от момента  $t = T$ , когда  $E(t) < E_{\text{adm}}$  и  $\dot{E} < 0$ , оптимальным является  $\mathbf{M} \neq 0$  и  $a(t) < 0$ , чтобы кинетическая энергия вращения  $E(t)$  уменьшалась, и поэтому

$$M_i = \frac{-u_0 J_i \omega_i}{\sqrt{J_3 \omega_3^2 + J_3 \omega_3^2 + J_3 \omega_3^2}} \quad (3.3)$$

(слева от момента времени  $t = T$  управляющий момент  $\mathbf{M}$  и кинетический момент  $\mathbf{L}$  имеют противоположные направления, и время остановки вращения минимально).

На участках разгона и торможения, когда  $E(t) < E_{\text{adm}}$ , кинетическая энергия  $E$  изменяется в соответствии с уравнением  $\dot{E} = \pm u_0 \sqrt{2E}$  (“+” соответствует разгону, “–” – торможению); приведенная зависимость получается из (3.2) и (3.3). Поэтому для участка разгона  $E(t) = u_0^2 t^2 / 2$ , а для участка торможения  $E(t) = u_0^2 (T - t)^2 / 2$ . В момент окончания разгона и в момент начала торможения кинетическая энергия одна и та же, поэтому длительности разгона и торможения одинаковы и равны  $\tau = t_{\text{ac}} = \sqrt{2E_{\text{max}}} / u_0$ , где  $E_{\text{max}} = E(T/2)$  – максимальная энергия вращения.

В случае  $k_0 = 0$  оптимальным решением (т.е. единственным решением, удовлетворяющим уравнениям движения (1.1) и необходимым условиям оптимальности (2.1), (3.1) с учетом максимальности гамильтониана  $H_0$  в каждый текущий момент времени  $t$ ) является (2.5) и

$$\varphi_i = (\rho_0 - t)r_i \quad (3.4)$$

где  $\rho_0 = \text{const} > 0$  (константа  $\rho_0$  определяется временными характеристиками оптимального разворота). Оптимальные функции  $b(t)$  и  $\rho(t) = \rho_0 - t$  удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} \dot{b}(0) > 0, \quad \dot{b}(T) < 0, \quad \rho(0) > 0, \quad \rho(T) < 0, \quad \rho(0) - \rho(T) = T \\ |\rho(T)| \leq \rho(0), \quad \rho(0) \geq T/2, \quad |\rho(T)| \leq T/2 \end{aligned}$$

(указанные неравенства будут обоснованы ниже).

Подставив равенства (2.5), (3.4) в систему (3.1) с учетом уравнений (1.1), (2.1), (2.3), получим тождества для всех трех уравнений (3.1) (так как  $\dot{\rho} = -1$ ), что доказывает истинность решения (2.5), (3.4) для задачи максимального быстродействия.

В зависимости от условий разворота (сочетания значений  $\Lambda_{\text{in}}$ ,  $\Lambda_f$  и  $J_1, J_2, J_3, u_0$ ) в оптимальном движении из начального положения  $\Lambda_{\text{in}}$  в конечное положение  $\Lambda_f$  максимальная кинетическая энергия вращения может быть меньше  $E_{\text{adm}}$ , а может возникнуть необходимость вращения какое-то время с выполнением равенства  $E(t) = \text{const} = E_{\text{adm}}$ . Найдем условия, когда оптимальное управление исключает наличие моментов времени, в которые КА вращается с постоянной кинетической энергией. Обозначим  $T_{\text{fast}}$  – длительность максимально быстрого разворота без ограничений на энергию вращения (при этом силовой момент  $\mathbf{M}$  ограничен условием (1.3)). Для такого разворота максимальная кинетическая энергия составляет  $E_{\text{max}} = u_0^2 T_{\text{fast}}^2 / 8$  (поскольку  $E(t) = u_0^2 t^2 / 2$ , если  $t \leq T_{\text{fast}}/2$ , и  $E(t) = u_0^2 (T - t)^2 / 2$ , если  $t > T_{\text{fast}}/2$ ). Вполне понятно, что если  $E_{\text{adm}} \geq u_0^2 T_{\text{fast}}^2 / 8$ , то ограничение (1.6) несущественно, и искомое оптимальное управление находится известными методами [19]. Чтобы закономерность  $\dot{E} \neq 0$  имела место на всем отрезке времени  $t \in [0, T]$ , длительность разворота  $T$  должна быть меньше, чем  $2\sqrt{2E_{\text{adm}}} / u_0$ .

Для определения времени оптимального разворота  $T$  используем понятие “функционал пути” [20]

$$S = \int_0^T \sqrt{J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2} dt \quad (3.5)$$

который не зависит от характера изменения скалярной функции  $b(t)$ , если движение КА удовлетворяет уравнениям (2.1), (2.5) (характеристика  $S$  зависит только от значений  $\Lambda_{in}$ ,  $\Lambda_f$  и  $J_1, J_2, J_3$  [20]). Из соотношений  $T = 2\tau$ ,  $E_{max} = u_0^2 \tau^2 / 2$ ,  $T \sqrt{2E_{max}} = 2S$  получим  $T = 2\sqrt{S/u_0} = T_{fast}$  – минимально возможное время разворота при одном ограничении (1.3) (без учета требования (1.6) к энергии вращения). Величина  $T_{fast}$  соответствует развороту, во время которого отсутствует участок движения с  $E(t) = \text{const}$ . Для оптимального управления с одной точкой переключения  $E_{max} = u_0 S / 2$  и в момент времени  $t = T/2$  необходимо выполнение условия  $T_{fast} \leq 2\sqrt{2E_{adm}}/u_0$ . Если  $u_0 S \leq 2E_{adm}$ , то во время максимально быстрого разворота вращение КА в режиме  $E(t) = \text{const}$  невозможно.

Более подробно остановимся на ситуации, когда  $u_0^2 T_{fast}^2 / 8 > E_{adm}$ . В этом случае неизбежен интервал времени, когда  $E(t) = \text{const} = E_{adm}$ . Оптимальное движение включает три фазы – раскрутка КА до максимально допустимой кинетической энергии вращения, вращение с постоянной максимально допустимой кинетической энергией и торможение до полной остановки КА. Если  $u_0 S > 2E_{adm}$ , то неизбежно вращение КА с постоянной кинетической энергией вращения, при котором  $\rho(t) \geq 0$ . Разница  $S - 2E_{adm}/u_0$  определяет продолжительность участка движения, когда  $E(t) = \text{const} = E_{adm}$ . Найдем, каким должно быть оптимальное управление  $\mathbf{M}$ , чтобы удовлетворялось условие  $\dot{E} = 0$  с одновременной максимизацией гамильтониана  $H_0$ . При выполнении соотношений (2.4), (2.5) гамильтониан  $H_0$  равен

$$H_0 = -1 + a(M_1 r_1 / J_1 + M_2 r_2 / J_2 + M_3 r_3 / J_3) + b(r_1^2 / J_1 + r_2^2 / J_2 + r_3^2 / J_3)$$

В интервале вращения с постоянной кинетической энергией  $E(t) = E_{adm}$  выполняется условие

$$M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2 + M_3 \omega_3 = 0 \quad (3.6)$$

Для решения (2.4), (2.5) при условии  $E(t) = \text{const} = E_{adm}$  имеем

$$\varphi_1 M_1 / J_1 + \varphi_2 M_2 / J_2 + \varphi_3 M_3 / J_3 = a(t)(M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2 + M_3 \omega_3) / b(t) = 0 \quad \text{и поэтому}$$

$$H_0 = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3 - 1 \quad (3.7)$$

(очевидно,  $b(t) \neq 0$  в интервале времени, когда  $E(t) = E_{adm}$ ). Угловые скорости  $\omega_i$ , при которых достигается максимум функции  $H_0$  (с учетом  $E(t) = E_{adm}$ ), будут следующими

$$\omega_i = \frac{r_i \sqrt{2E_{adm}}}{J_i \sqrt{r_1^2 / J_1 + r_2^2 / J_2 + r_3^2 / J_3}} \quad (3.8)$$

Подставив указанные зависимости для оптимальных угловых скоростей  $\omega_i$  в динамические уравнения (1.1) с учетом уравнений (2.1) для оптимальных функций  $r_i$ , получим оптимальный силовой момент  $\mathbf{M} = 0$  для моментов времени, когда  $E(t) = \text{const} = E_{adm}$  (на участке между разгоном и торможением). Найдем производную  $\dot{H}_0$  с учетом условия  $E(t) = \text{const}$ .

$$\begin{aligned} \dot{H}_0 &= \dot{\omega}_1 r_1 + \dot{\omega}_2 r_2 + \dot{\omega}_3 r_3 + \omega_1 \dot{r}_1 + \omega_2 \dot{r}_2 + \omega_3 \dot{r}_3 = \\ &= \omega_1(\omega_3 r_2 - \omega_2 r_3) + \omega_2(\omega_1 r_3 - \omega_3 r_1) + \omega_3(\omega_2 r_1 - \omega_1 r_2) + \\ &+ r_1(M_1 + (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3/J_1 + r_2(M_2 + (J_3 - J_1)\omega_1\omega_3)/J_2 + r_3(M_3 + (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2)/J_3 = 0 \end{aligned}$$

так как на этапе разгона оптимальный момент  $\mathbf{M}$  и вектор  $\boldsymbol{\phi}$  имеют одинаковое направление и на конец разгона  $r_i = J_i \omega_i / b$ . Покажем, что  $r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3 = \text{const}$ . Возьмем производную от левой части указанного равенства с учетом (2.1), (2.5).

$$\begin{aligned} r_1 \dot{r}_1/J_1 + r_2 \dot{r}_2/J_2 + r_3 \dot{r}_3/J_3 &= r_1(\omega_3 r_2 - \omega_2 r_3)/J_1 + r_2(\omega_1 r_3 - \omega_3 r_1)/J_2 + r_3(\omega_2 r_1 - \omega_1 r_2)/J_3 = \\ &= b r_1 r_2 r_3 (J_2 - J_3 + J_3 - J_1 + J_1 - J_2)/(J_1 J_2 J_3) \equiv 0 \end{aligned}$$

Поскольку  $|\mathbf{r}| \neq 0$  и  $H_0 = \text{const}$  внутри отрезка времени, на котором  $E(t) = \text{const} = E_{\text{adm}}$  (так как  $\dot{H}_0 = 0$ ), то  $b = \text{const} = (1 + H_0)/(r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3)$ . Это означает, что в оптимальном развороте в интервале времени, когда  $E(t) = \text{const} = E_{\text{adm}}$ , будет  $|\mathbf{L}| = \text{const}$ . Этот факт только подтверждает вывод об оптимальности значения  $\mathbf{M} = 0$  в моменты времени, когда  $E(t) = \text{const}$ . Вращение по инерции есть частный случай закономерности (2.5) с учетом уравнений (2.1). В момент достижения равенства  $E(t) = E_{\text{adm}}$  направления оптимального вектора  $\boldsymbol{\phi}$  и кинетического момента  $\mathbf{L}$  совпадают, поэтому единственным решением системы (1.1), (2.1), (3.1) в интервале времени, когда  $E(t) = \text{const}$ , являются зависимости (2.4), (2.5), (3.4) в которых  $\dot{a} = -1$ . Из свойства непрерывности функции  $a(t)$  следует, что  $a(t) = a(0) - t$  для любого момента времени  $t$ , пока  $a(t) \geq 0$ . Как только  $a(t) < 0$ , так управление (2.3) становится оптимальным, потому что  $\boldsymbol{\phi} \neq 0$  и силовой момент (2.3) (а значит, и (3.3)) не нарушает требования (1.6), поскольку при таком управлении будет  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{L} < 0$  и  $\dot{E} < 0$  (символ  $\cdot$  означает скалярное произведение векторов). Значит, решение (2.4), (2.5), (3.4), в котором  $a(t) = a(0) - t$ , справедливо для всего интервала времени  $t \in [0, T]$  (в оптимальном решении  $a(0) > 0$ ,  $a(T) < 0$ ).

Таким образом, в зависимости от значения “функционала пути” (3.5), вычисленно-го для движения, в соответствии с уравнениями (2.1), (2.5), реализуется один из двух вариантов оптимального управления: если  $u_0 S \leq 2E_{\text{adm}}$ , то оптимальным является релейное управление с одной точкой переключения, при котором  $\rho(T) = -\rho(0)$ , а если  $u_0 S > 2E_{\text{adm}}$ , то оптимальным является релейное управление с двумя точками переключения, при котором  $\rho(0) > -\rho(T)$ . Рисунок 1 отражает второй вариант оптимального управления, при котором существует отрезок времени с  $E(t) = \text{const}$  (для выполнения условия  $S > 2E_{\text{adm}}/u_0$  для значения (3.5));  $t_1$  – ближайший к началу разворота момент достижения равенства  $E(t) = E_{\text{adm}}$ ;  $t_2$  – момент смены знака скалярной функции  $a(t)$  (начиная с момента времени  $t = t_2$  для функции  $a(t)$  выполняется условие  $a(t) < 0$ ). Для значений  $t > t_2$  имеем  $\rho(t) < 0$  и оптимальным является управление (2.3), потому что при таком силовом моменте будет  $\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = \dot{E} < 0$  и ограничение (1.6) становится существенным (его можно не учитывать при дальнейшем приближении к  $t = T$ ). В интервалах времени  $t < t_1$  и  $t > t_2$  оптимальным управлением является (2.3), при котором, соответственно, будет  $|\mathbf{M}| = \text{const} = u_0/C$ . Здесь обозначено  $C = \sqrt{p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3} = \text{const}$ ,  $p_i = r_i/r_0$ ,  $r_0 = \text{const} = |\mathbf{r}| \neq 0$ .

На участке вращения с максимально допустимой кинетической энергией оптимальный силовой момент  $\mathbf{M}$  определяется из трех условий: ограничения (1.3), требования (3.6) и условия, что в каждый текущий момент времени  $t$ , пока  $E(t) = \text{const} = E_{\text{adm}}$ , гамильтониан  $H_0$  принимает максимальное значение. Учитывая структуру гамильтониана (3.7), приходим к выводу, что во время вращения КА с постоянной максимально допустимой кинетической энергией оптимальным является такое управление  $\mathbf{M}$ , при котором в каждый текущий момент времени  $t$ , пока  $E(t) = \text{const} = E_{\text{adm}}$ , уг-

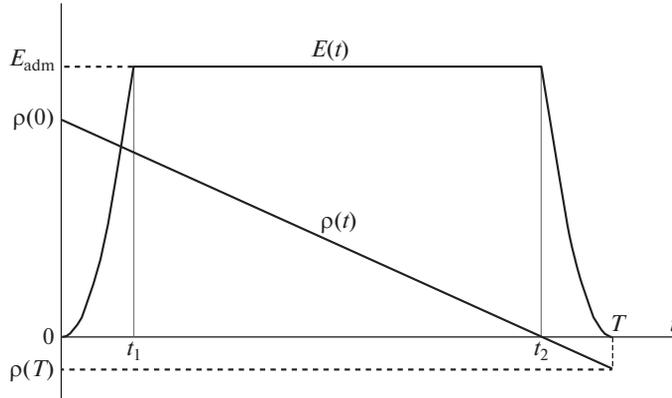


Рис. 1. Вид функций  $\rho(t)$  и  $E(t)$  при релейном управлении с двумя точками переключения

ловая скорость  $\omega$  удовлетворяет соотношениям (3.8). Требование (3.6) привело к структуре (3.7), при которой гамильтониан  $H_0$  не зависит явным образом от силового момента  $\mathbf{M}$ . Справедливость утверждения, что движение с угловой скоростью (3.8) соответствует максимуму гамильтониана  $H_0$ , легко доказать заменой переменных и записав

$$y_i = \omega_i \sqrt{J_i}, \quad z_i = r_i / \sqrt{J_i}, \quad H_0 = y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 - 1$$

с учетом равенств  $J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 = 2E_{adm}$ ,  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 2E_{adm}$  для угловой скорости  $\omega$ . Оптимальное значение момента  $\mathbf{M}$  вычисляем путем подстановки оптимальных угловых скоростей (3.8) в динамические уравнения (1.1) с учетом зависимостей (2.1) для универсальных переменных  $r_i$  и проверки выполнения условий (1.3), (3.6) (чтобы управляющий момент  $\mathbf{M}$  находился внутри области допустимых значений). В результате получили  $\mathbf{M} = 0$ . Очевидно, что найденное управление  $\mathbf{M}$  удовлетворяет требованиям (1.3), (3.6).

Таким образом, структура оптимального управления полностью определена:

$$\mathbf{M}(t) = \begin{cases} \frac{u_0 \text{sign} \rho(t)}{\sqrt{r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3}} \mathbf{r}, & \text{если } E(t) < E_{adm} \text{ или } \rho(t) < 0 \\ 0, & \text{если } \rho(t) > 0 \text{ и } E(t) = E_{adm} \end{cases}$$

Заметим, что вращение по инерции полностью соответствует решению (2.5), (3.4) (угловые скорости (3.8) есть частный случай (2.5) и не противоречат соотношениям (3.4)). Поэтому найденное оптимальное решение (2.5), (3.4) справедливо на всем интервале управления  $t \in [0, T]$ . Краевая задача принципа максимума заключается в определении такого значения вектора  $\mathbf{r}(0)$ , при котором решение системы дифференциальных уравнений (1.1), (1.2), (2.1), (3.1) с одновременным выполнением условия (2.3), если  $\Phi \cdot \mathbf{r} < 0$  или  $E(t) < E_{adm}$ , или  $\mathbf{M} = 0$ , если  $\Phi \cdot \mathbf{r} > 0$  и  $E(t) = E_{adm}$ , удовлетворяло условиям разворота (1.4), (1.5).

Если  $k_0 = 0$ , то константа  $r_0$  определяется из уравнения  $H_0(T) = 0$  (так как время окончания оптимального процесса не фиксировано). Вычислим  $H_0(T)$  с учетом зависимостей (3.4).

$$H_0(T) = -1 + \rho(T) (-u_0 \sqrt{r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3}) = -1 - u_0 \rho(T) r_0 C$$

(угловые скорости в конечный момент  $t = T$  равны нулю);  $C = \sqrt{p_{10}^2/J_1 + p_{20}^2/J_2 + p_{30}^2/J_3}$ , где  $p_{10}, p_{20}, p_{30}$  – компоненты вектора  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$  ( $\mathbf{p} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$  – орт вектора  $\mathbf{r}$ ). Значение  $\rho(T)$  оптимальной функции  $\rho(t)$  в конечный момент времени равно  $\rho(T) = -1/(u_0 r_0 C)$ . При любом типе оптимального управления (с одной или с двумя точками переключения)  $\rho(T) = -\tau$  (напомним,  $\tau$  – длительность разгона и торможения). Поэтому  $r_0 = 1/(u_0 \tau C)$ . Отсюда оптимальное значение  $r_0$  равно  $r_0 = 1/(C\sqrt{2E_{\text{adm}}})$ , если присутствует участок вращения с постоянной максимально допустимой кинетической энергией  $E_{\text{adm}}$  (так как  $\rho(T) = -\sqrt{2E_{\text{adm}}}/u_0$ ). Для оптимального управления с одной точкой переключения  $\rho(T) = -T/2 = -\sqrt{S}/u_0$  и поэтому  $r_0 = 1/(C\sqrt{u_0 S})$ . В результате

$$r_0 = \max(1/\sqrt{u_0 S}, 1/\sqrt{2E_{\text{adm}}})/C$$

Время оптимального разворота  $T$  рассчитывается на основании “функционала пути” (3.5). Поскольку оптимальное движение КА удовлетворяет уравнениям (2.1), (2.5), то значение  $S$  не зависит от характера изменения скалярной функции  $b(t)$  и является минимально возможным [20]. Если  $u_0 S > 2E_{\text{adm}}$ , то имеет место участок вращения КА с  $E(t) = \text{const}$ , и длительность оптимального разворота  $T$  вычисляется по формуле

$$T = S/\sqrt{2E_{\text{adm}}} + \sqrt{2E_{\text{adm}}}/u_0$$

При этом время разгона  $\tau$  и длительность неуправляемого вращения  $t_{\text{free}}$  составляют

$$\tau = \sqrt{2E_{\text{adm}}}/u_0, \quad t_{\text{free}} = S/\sqrt{2E_{\text{adm}}} - \sqrt{2E_{\text{adm}}}/u_0$$

Интервал времени, внутри которого  $E(t) = \text{const}$ , назовем участком номинального вращения. Для него характерно два свойства: во-первых,  $E_{\text{ном}} = E_{\text{max}}$  и, во-вторых, КА вращается по инерции (силовой момент  $\mathbf{M} = 0$ ).

Если  $u_0 S \leq 2E_{\text{adm}}$ , то в оптимальном движении не существует моментов времени, когда  $E(t) = \text{const}$  ( $t_{\text{free}} = 0$ ), и длительность оптимального разворота равна  $T = 2\sqrt{S}/u_0 = T_{\text{fast}}$ .

С учетом того, что уравнения (2.1), (2.5) удовлетворяются на всем интервале управления  $t \in [0, T]$ , оптимальное движение определяют зависимости:

$$M_i = 0.5m_0 [\text{sign}(t_{\text{ac}} - t) + \text{sign}(t_{\text{br}} - t)] p_i \quad (3.9)$$

$$J_i \omega_i = 0.5m_0 (t_{\text{ac}} + t_{\text{br}} - |t - t_{\text{ac}}| - |t - t_{\text{br}}|) p_i \quad (3.10)$$

где  $p_i$  – компоненты вектора  $\mathbf{p}$ ,  $t_{\text{ac}}$  – время окончания разгона,  $t_{\text{br}}$  – момент начала торможения,  $m_0 = u_0/C$  и

$$t_{\text{ac}} = \min(\sqrt{S}/u_0, \sqrt{2E_{\text{adm}}}/u_0), \quad t_{\text{br}} = \max(\sqrt{S}/u_0, S/\sqrt{2E_{\text{adm}}}), \quad \mathbf{p} = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{\text{in}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda$$

Закон вращения (3.10) удовлетворяет граничным условиям  $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$  и  $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$ , так как  $t_{\text{ac}} + t_{\text{br}} = T$ , и выражение в скобках обнуляется при  $t = 0$  и  $t = T$ . Зависимости (2.1), (3.9), (3.10) с учетом равенств  $r_i = r_0 p_i$  – единственное решение задачи оптимального управления (1.1)–(1.7). Из (2.1), (3.9) и соотношений  $r_i = r_0 p_i$  явно видно, что при оптимальном управлении момент сил  $\mathbf{M}$  действует вдоль прямой, неподвижной в инерциальной системе координат. Уравнения (3.10) отчетливо показывают, что в геометрическом представлении вектор  $\mathbf{p}$  интерпретируется как орт оптимального кинетического момента КА  $\mathbf{L}$  в связанной с КА системе координат. Оптимальным (в смысле минимума времени  $T$ ) будет разворот КА, при котором направление кинетического момента остается неизменным относительно инерциальной системы координат (векторы  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{L}$  коллинеарны). Еще одним основным свойством оптимального разворота КА является тот факт, что во все время движения (на всем отрезке времени  $[0, T]$ ) отношение

кинетической энергии вращения  $E$  к квадрату модуля кинетического момента КА постоянно.

$$E/|\mathbf{L}|^2 = 0.5(r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3)/|\mathbf{r}|^2 = \text{const} = (p_{10}^2/J_1 + p_{20}^2/J_2 + p_{30}^2/J_3)/2$$

Для вращений в соответствии с (2.1), (2.5) значение «функционала пути» (3.5) минимально.

**4. Решение задачи оптимального разворота, если  $k_0 \neq 0$ .** В общем случае  $k_0 \neq 0$ , и уравнения для сопряженных функций  $\varphi_i$  имеют вид (2.2). Свойства оптимального решения и оптимальных функций  $\varphi_i(t)$ ,  $\omega_i(t)$ , удовлетворяющих системе уравнений (1.1), (2.1)–(2.3), будут отличаться от случая максимально быстрого разворота в условиях ограниченности управляющего момента  $\mathbf{M}$  и угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ , соответствующих неравенствам (1.3) и (1.6).

В случае  $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$  решение (2.4), (2.5) удовлетворяет необходимым условиям оптимальности (системе (1.1), (2.1), (2.2) с учетом максимизации гамильтониана  $H$ ). Возможны четыре варианта изменения оптимальной функции  $a(t)$ , которые приведены на рис. 2, где обозначено:  $t_1$  – момент достижения максимально допустимой энергии вращения,  $t_2$  – момент времени, начиная с которого  $a(t) < 0$ ,  $t_0$  – момент начала особого режима управления, при котором  $\varphi(t) = \text{const} = 0$ . Левые два графика соответствуют релейному управлению с двумя точками переключения, при котором существует интервал вращения КА с постоянной кинетической энергией; верхний левый график соответствует случаю, когда  $\dot{a}(t_2) \neq 0$ ,  $E_{\text{adm}} < 1/(2k_0)$  и  $\dot{\varphi} \neq 0$  на всем интервале движения  $t \in [0, T]$ , при этом  $\dot{a}(t_1) = \dot{a}(t_2) \neq 0$ ; нижний левый график соответствует случаю, когда в оптимальном движении присутствует особый режим управления и на отрезке времени  $[t_0, t_2]$  наблюдается  $\dot{\varphi} = 0$ ,  $E(t) = \text{const} = 1/(2k_0)$ ,  $\dot{a}(t_0) = \dot{a}(t_2) = 0$ . Правые два графика соответствуют релейному управлению с одной точкой переключения в момент времени  $t = T/2$ , причем верхний правый график соответствует случаю, когда  $E_{\text{max}} < 1/(2k_0)$  и не существует момента времени, в который  $\dot{a}(t) = 0$ , а нижний правый график соответствует случаю, когда  $E_{\text{max}} = 1/(2k_0)$  и  $\dot{a}(T/2) = 0$ . Заметим, что для вариантов управления, соответствующих верхним двум графикам,  $\dot{a}(T/2) < 0$  и  $E_{\text{max}} = E(T/2) < 1/(2k_0)$ ; для вариантов управления, соответствующих нижним двум графикам,  $\dot{a}(T/2) = 0$  и  $E_{\text{max}} = E(T/2) = 1/(2k_0)$ . В случае релейного управления с одной точкой переключения возможна ситуация, когда максимальная энергия вращения  $E(T/2) = E_{\text{max}} \leq \min(E_{\text{adm}}; 1/(2k_0))$ . Для управления с двумя точками переключения, в котором присутствует участок вращения КА с постоянной кинетической энергией, всегда будет  $E_{\text{max}} = E(T/2) = \min(E_{\text{adm}}; 1/(2k_0))$ .

Начиная с момента  $t = 0$  будет  $r_0 b(t) = m_0 t$ , а значит,  $\dot{a} = 2k_0 m_0 t / r_0 - 1$  и  $a(t) = k_0 m_0 t^2 / r_0 - t + C_1$  ( $C_1 = \text{const}$ )

Приближаясь к моменту времени  $t = T$  будет  $r_0 b(t) = m_0(T - t)$  и  $\dot{a} = 2k_0 m_0(T - t) / r_0 - 1$

$$a(t) = (2k_0 m_0 T / r_0 - 1)t - k_0 m_0 t^2 / r_0 + C_2$$

где  $C_2 = \text{const}$ .

Если  $b(t) \neq \text{const}$ , то  $\text{sign} \ddot{a} = \text{sign} a(t)$  (так как  $\text{sign} \dot{b} = \text{sign} a(t)$ ). Если  $b(t) = \text{const}$ , то  $\ddot{a} = 0$ . Нетрудно показать, что  $a(t) = 0$ , если  $\dot{a} = 0$  (в противном случае направление силового момента  $\mathbf{M}$  не меняется, и КА будет вращаться с неубывающей кинетической энергией, из-за чего краевое условие  $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$  не сможет быть удовлетворено). Значения констант  $C_1$ ,  $C_2$  и  $r_0$  существенно зависят от типа управления. Чтобы были точки переключения необходимо выполнение условия  $b(t) \leq 1/(2k_0)$  (так как при любом типе управления должно быть  $\dot{a} \leq 0$ ).

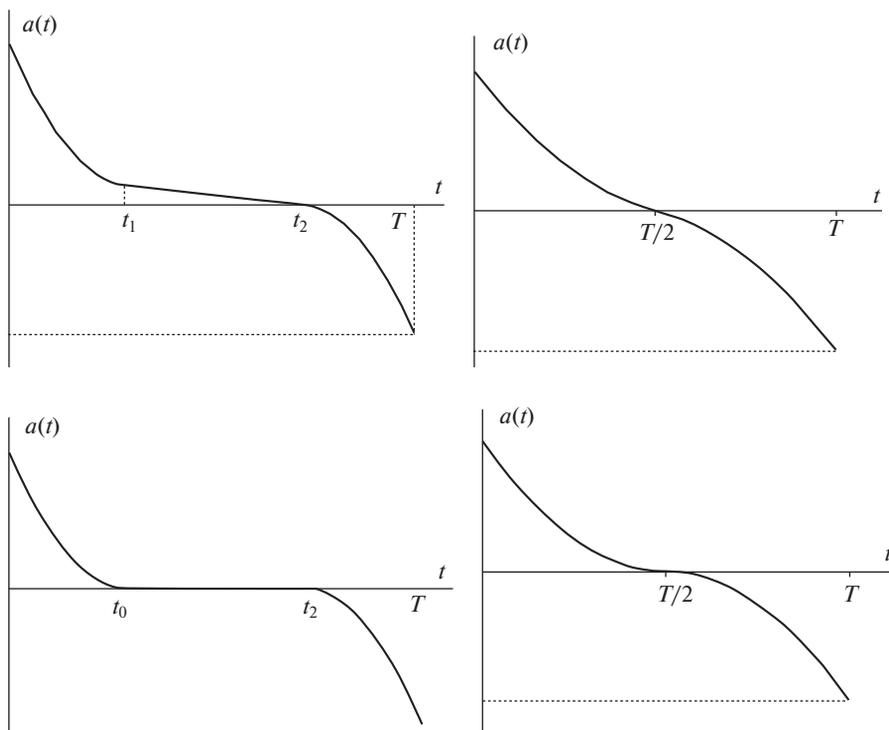


Рис. 2. Возможное изменение оптимальной функции  $a(t)$  в случае  $k_0 \neq 0$

Ситуация, когда  $\dot{a} \geq 0$  и  $a > 0$ , невозможна (в противном случае КА станет вращаться бесконечно и краевое условие  $\omega(T) = 0$  будет нарушено). Если  $\dot{b} \neq 0$  и  $a \neq 0$ , то  $\text{sign} \ddot{a} = \text{sign} a(t)$ . Из соотношения  $\dot{a} = 2k_0 b - 1$  следует  $\ddot{a} = 2k_0 \dot{b}$  и  $\text{sign} \ddot{a} = \text{sign} \dot{b}$ ,  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}$  имеет тот же знак, что и  $a(t)$ ;  $\text{sign} \dot{b} = \text{sign}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})$ . Гипотетически предположим, что в какой-то момент времени  $t_+$  будет  $a(t_+) > 0$  и  $\dot{a}(t_+) \geq 0$ . Тогда в любой момент времени  $t \geq t_+$  будет  $a(t) > 0$  (так как при сделанном предположении  $\ddot{a} \geq 0$ , поскольку  $\text{sign} \ddot{a} = \text{sign} a(t)$ ), а при такой функции  $a(t)$  КА раскрутится до  $E = E_{\text{adm}}$ , вращаясь бесконечно, и краевое условие  $\omega(T) = 0$  не сможет быть удовлетворено. Допустим, что в оптимальном управлении существует момент времени, когда  $\dot{a} = 0$ . В этом случае в тот же самый момент времени должно быть  $a = 0$  (иначе функция  $a(t)$  не сменит знак и КА будет вращаться до бесконечности, нарушив требование  $\omega(T) = 0$ ). У оптимальной функции  $a(t)$  должно быть  $\dot{a} < 0$ , если  $a \neq 0$ . В итоге выяснили, что в оптимальном движении, удовлетворяющем условиям разворота (1.4), (1.5), во-первых, невозможна ситуация, когда  $a \neq 0$  и  $\dot{a} = 0$ , во-вторых, не существует ни одного момента времени, в который  $\dot{a} > 0$ . Всегда  $\dot{a}(t) \leq 0$ ; причем если  $\dot{a} = 0$ , то  $a = 0$ . В-третьих,  $a(0) > 0$ . Вариант  $a(0) \leq 0$  не рассматривается, так как  $\dot{a}(0) = -1$ ,  $b(0) = 0$ , и поэтому в этом случае  $\ddot{a} \leq 0$  и  $a < 0$  при любом  $t > 0$ , а значит КА будет вращаться бесконечно, если  $a(0) \leq 0$ , и условие  $\omega(T) = 0$  окажется нарушенным (а такое движение не может быть оптимальным, поскольку не удовлетворяет условиям задачи разворота).

Рассмотрим интервалы времени, на которых  $E(t) < E_{\text{adm}}$  (несомненно участки разгона и торможения удовлетворяют этому условию). Внутри этих интервалов времени

ограничение (1.6) не учитывается и оптимальное управление находится без учета ограничений на фазовые переменные (максимум гамильтониана ищется внутри области, описываемой неравенством (1.3)). Если  $a(t) \neq \text{const} = 0$ , то оптимальным по критерию (1.7) управлением является (2.3). Если  $\varphi(t) = \text{const} = 0$ , то гамильтониан  $H$  не зависит явным образом от управления и имеет место особый режим управления, а сопряженная система уравнений (2.2) преобразуется к виду:

$$J_i \omega_i = r_i / (2k_0) \quad (4.1)$$

Уравнения (4.1) с учетом уравнений (2.1) для универсальных переменных  $r_i$  демонстрируют постоянство вектора кинетического момента КА относительно инерциальной системы координат во время особого режима управления, а подстановка (4.1) в динамические уравнения (1.1) определит оптимальный управляющий момент  $\mathbf{M} = 0$  в особом режиме управления.

На временах  $t > t_2$  имеем  $a(t) < 0$  и оптимальным является управление (2.3). Как только  $a(t) < 0$ , так управление (2.3) становится оптимальным, потому что при таком силовом моменте  $\mathbf{M}$  будет  $\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = \dot{E} < 0$  и ограничение (1.6) оказывается несущественным (его не надо учитывать). Задача (1.1)–(1.7) – задача оптимального управления с закрепленным левым и правым концами траектории и нефиксированным временем окончания маневра. Поэтому необходимым условием оптимальности является равенство  $H(T) = 0$ . Найдем значение гамильтониана  $H$  в конечный момент времени  $t = T$  с учетом оптимального решения (2.4), (2.5).

$$H(T) = -1 - u_0 a(T) \sqrt{r_1^2 / J_1 + r_2^2 / J_2 + r_3^2 / J_3} = -1 - u_0 r_0 a(T) C$$

(так как по условиям задачи оптимального разворота  $\omega_i(T) = 0$ ). Отсюда  $a(T) = -1 / (u_0 r_0 C) < 0$ ; значение  $a(T)$  не зависит от  $k_0$ .

Если есть участок с особым режимом управления, то в момент времени  $t = t_2$  должно быть  $\dot{a} = 0$ . Оптимальная функция  $b(t)$  удовлетворяет неравенству  $2k_0 b(t) - 1 \leq 0$  (так как оптимальная функция  $a(t)$  должна удовлетворять условию  $\dot{a} \leq 0$ , причем  $\dot{a} = 0$  только в случае  $a = 0$ ). Поэтому  $b_{\max} = 1 / (2k_0)$  ( $b_{\max}$  – максимальное значение функции  $b(t)$ ). На участке торможения (когда  $t \geq t_2$ ) будет  $b = m_0(T - t) / r_0$ ,  $\dot{a} = 2k_0 m_0(T - t) / r_0 - 1$ ,  $\ddot{a} = -2k_0 m_0 / r_0$  и  $a(t) = -k_0 m_0(t - t_2)^2 / r_0 < 0$ , если  $t \geq t_2$ . В конечный момент времени  $t = T$  должно быть  $a(T) = -1 / (u_0 r_0 C) < 0$  и  $\dot{a}(T) = -1$  (так как  $b(T) = 0$ ); значит  $k_0 m_0(T - t_2)^2 / r_0 = 1 / (u_0 r_0 C)$  и  $\dot{a}(t_2) = 2k_0 m_0(T - t_2) / r_0 - 1 = 0$ , откуда  $u_0^2(T - t_2)^2 = 1 / k_0 = 2E_{\text{ном}} / r_0 = 2k_0 u_0(T - t_2) / C$  (напомним,  $E_{\text{ном}}$  – кинетическая энергия вращения по инерции, когда  $\mathbf{M} = 0$ ). Время остановки вращения  $\tau = T - t_2 = \sqrt{1/k_0} / u_0$ ;  $a(T) = -1 / (2u_0 \sqrt{k_0})$  и  $r_0 = 2\sqrt{k_0} / C$ . В начальный момент времени  $t = 0$  будет  $\ddot{a}(0) = 2k_0 m_0 / r_0$  и поэтому  $a(t) = k_0 m_0(t - t_0)^2 / r_0 > 0$ , если  $t \leq t_0$ ;  $t_0 = \sqrt{2E_{\text{ном}}} / u_0 = \sqrt{1/k_0} / u_0$ . Соответственно,  $a(0) = 1 / (2u_0 \sqrt{k_0}) = -a(T)$ . В случае наличия участка с особым режимом управления  $b_{\max} = 1 / (2k_0)$ , так как максимальное значение производной  $\dot{a}$  равно нулю, а максимальная энергия вращения равна  $E_{\max} = E_{\text{ном}} = 1 / (2k_0)$ .

Если  $E_{\text{adm}} < 1 / (2k_0)$ , то  $b_{\max} = E_{\text{adm}}$ . Рассмотрим вариант, когда  $2k_0 E_{\text{adm}} < 1$ . В этом случае ограничителем кинетической энергии вращения будет (1.6). В оптимальном движении будет три фазы – разгон КА до достижения условия  $E(t) = E_{\text{adm}}$ , вращение с постоянной кинетической энергией  $E(t) = \text{const} = E_{\text{adm}}$ , и, наконец, гашение кинетической энергии до полной остановки КА, когда  $\boldsymbol{\omega} = 0$ . На участках разгона и торможения  $\varphi \neq 0$  и  $E(t) < E_{\text{adm}}$ , поэтому оптимальным моментом  $\mathbf{M}$  является (2.3), а оптимальное движение удовлетворяет системе уравнений (1.1), (2.1)–(2.5), причем  $\dot{a} = 2k_0 b(t) - 1$

(указанное уравнение получаем, подставив выражения  $\dot{\varphi}_i = \dot{a}r_i + a\dot{r}_i$  в систему (2.2) с учетом зависимостей (2.1), (2.4), (2.5)). Получили

$$M_i = \frac{u_0 p_i \text{sign} a(t)}{\sqrt{p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3}}, \quad M_i = \pm \frac{u_0 J_i \omega_i}{\sqrt{J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2}} \quad (4.2)$$

(знак + соответствует раскрутке КА, знак – соответствует остановке вращения). После дифференцирования вторых равенств (4.2) с учетом (1.1) получим

$$\dot{M}_1 = \omega_3 M_2 - \omega_2 M_3, \quad \dot{M}_2 = \omega_1 M_3 - \omega_3 M_1, \quad \dot{M}_3 = \omega_2 M_1 - \omega_1 M_2, \quad \dot{\mathbf{M}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} \quad (4.3)$$

Из (4.3) следует, что  $|\mathbf{M}| = \text{const}$ , если  $E(t) < E_{\text{adm}}$  и  $a(t) \neq 0$  (т.е. на участках разгона и торможения), а значит  $p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3 = \text{const} = C^2$ .

Из уравнений (1.1), (2.5) имеем  $\dot{b} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{r}/r_0^2$ . Поскольку на этапах разгона и торможения  $|\mathbf{M}| = \text{const}$ , то и  $\dot{b} = \text{const}$  в моменты времени, когда  $a(t) \neq 0$  и  $E(t) < E_{\text{adm}}$ . На этапе разгона  $\dot{b} > 0$  и  $b = m_0 t/r_0$ ; на этапе торможения  $\dot{b} < 0$  и  $b = m_0(T - t)/r_0$ ; между разгоном и торможением  $E(t) = \text{const} = E_{\text{adm}}$  и  $\dot{b} = 0$  ( $b = \text{const}$ ) и поэтому  $\dot{a} = \text{const}$  (причем  $\dot{a} \leq 0$ ). При любом оптимальном движении  $\dot{a}(t) \leq 0$  (в противном случае  $a(t) > 0$  в любой момент времени  $t$ , направление силового момента  $\mathbf{M}$  не меняется, и КА будет вращаться с ненулевой кинетической энергией, из-за чего краевое условие  $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$  не будет выполнено). Возможны следующие варианты изменения оптимальной функции  $a(t)$ . В первом варианте  $\dot{a}(T/2) \neq 0$ ,  $\dot{a}(t) \neq \text{const}$  для любого  $t$  и  $E_{\text{max}} < 1/(2k_0)$ ,  $E_{\text{max}} \leq E_{\text{adm}}$ . Во втором варианте  $\dot{a}(T/2) = 0$ ,  $\dot{a}(t) \neq \text{const}$  для любого  $t$  и  $E_{\text{max}} = 1/(2k_0)$ ,  $E_{\text{max}} \leq E_{\text{adm}}$ . В третьем варианте  $\dot{a}(T/2) \neq 0$ ,  $\dot{a} < 0$  для любого  $t$ , но существует участок линейного изменения функции  $a(t)$ , когда  $\dot{a}(t) = \text{const} \neq 0$ , и  $E_{\text{max}} = E_{\text{adm}} < 1/(2k_0)$ . Наконец, возможен вариант оптимального разворота с участком особого режима управления, во время которого  $\dot{a} = \text{const} = 0$ ,  $a(t) = \text{const} = 0$  (и поэтому на участке с особым режимом управления  $\mathbf{M} = 0$ ),  $E_{\text{max}} = 1/(2k_0)$  и  $E_{\text{max}} \leq E_{\text{adm}}$ . Указанные варианты поведения оптимальной функции  $a(t)$  приведены на рис. 2, где  $t_1$  – момент начала выполнения условия  $E(t) = \text{const} = E_{\text{adm}}$ ;  $t_2$  – момент, начиная с которого функция  $a(t) < 0$  ( $t \in [t_1, t_2]$  – участок с постоянной максимально допустимой энергией вращения  $E_{\text{adm}}$ );  $t_0$  – начало участка с особым режимом управления, когда  $\boldsymbol{\varphi} = \text{const} = 0$  ( $t \in [t_0, t_2]$  – участок с особым режимом управления). Для оптимального движения с особым режимом управления  $r_0 = 2\sqrt{k_0}/C$  и функция  $a(t)$  имеет аналитический вид

$$a(t) = \begin{cases} 2k_0 u_0 (t - t_0)^2 / (r_0 C) & \text{для } t < t_0 \\ 0, & \text{если } t_0 \leq t \leq t_2 \\ -2k_0 u_0 (t - t_2)^2 / (r_0 C) & \text{для } t > t_2 \end{cases}$$

С учетом равенств  $a(0) = k_0 m_0 t_0^2 / r_0$  и  $a(T) = -k_0 m_0 (T - t_2)^2 / r_0$  получаем

$$H(0) = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2 + \varphi_3 M_3 - 1 = k_0 u_0^2 t_0^2 - 1 = 0$$

$$H(T) = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2 + \varphi_3 M_3 - 1 = k_0 u_0^2 (T - t_2)^2 - 1 = 0$$

откуда  $t_0 = \sqrt{1/k_0}/u_0$  и  $t_2 = S\sqrt{k_0}$  (так как  $u_0 t_0 t_2 = S$ ); время оптимального разворота  $T = S\sqrt{k_0} + \sqrt{1/k_0}/u_0$ . Энергия вращения на участке с особым режимом управления  $E = 1/(2k_0)$ . Заметим, что вращение по инерции полностью соответствует решению (2.4), (2.5) (это частный случай (2.5), когда  $b(t) = \text{const}$ , и не противоречит соотноше-

ниям (2.4)). Поэтому найденное оптимальное решение (2.4), (2.5) справедливо на всем интервале управления  $t \in [0, T]$ .

Если  $2E_{\text{adm}} \geq 1/k_0$ , то ограничение (1.6) несущественно. Если  $k_0 u_0 S \leq 1$ , то оптимальным является релейное управление с одной точкой переключения,  $|\mathbf{M}| = \text{const} \neq 0$  (особый режим управления невозможен). При любых значениях  $k_0$ ,  $E_{\text{adm}}$ ,  $u_0$ ,  $S$  оптимальное управление описывается зависимостями (3.9), (3.10), в которых окончание разгона  $t_{\text{ac}}$  и начало торможения  $t_{\text{br}}$  равны

$$t_{\text{ac}} = \min(\sqrt{S/u_0}, \sqrt{2E_{\text{nom}}}/u_0), \quad t_{\text{br}} = \max(\sqrt{S/u_0}, S/\sqrt{2E_{\text{nom}}}), \\ E_{\text{nom}} = \min(1/(2k_0); E_{\text{adm}})$$

максимальная кинетическая энергия  $E_{\text{max}} = \max_{0 < t < T} E(t) = \min(u_0 S/2; 1/(2k_0); E_{\text{adm}})$ . ( $E_{\text{nom}}$  – кинетическая энергия между разгоном и торможением, когда  $\dot{a}(t) = \text{const}$  и КА вращается по инерции). Для оптимальной функции  $a(t)$  выполняются следующие соотношения:

$$\dot{a}(0) = \dot{a}(T) = -1, \quad a(t_2) = 0, \quad a(T) = -1/(u_0 r_0 C) \\ \ddot{a} = 2k_0 u_0 / (r_0 C); \quad \ddot{a} = -2k_0 u_0 / (r_0 C)$$

(значение  $a(T)$  найдено из необходимого условия оптимальности  $H(T) = 0$  с учетом  $\omega_f(T) = 0$ ).

Если  $E_{\text{adm}} \geq 1/(2k_0)$ , то может существовать особый режим управления, при котором  $\dot{a} = \text{const} = 0$ . Если оптимальным является управление с двумя точками переключения, когда между разгоном и торможением  $E(t) = \text{const} = E_{\text{adm}}$  и  $\dot{a} = \text{const} < 0$ , то временные характеристики  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $T$  таковы:  $t_1 = \sqrt{2E_{\text{adm}}}/u_0$ ,  $t_2 = S/\sqrt{2E_{\text{adm}}}$ ; время разворота  $T = t_1 + t_2$ .

Если  $E_{\text{adm}} < 1/(2k_0)$ , то  $r_0 = (1 + 2k_0 E_{\text{adm}})/(C\sqrt{2E_{\text{adm}}})$ ;  $a(T) = -\sqrt{2E_{\text{adm}}}/(u_0(1 + 2k_0 E_{\text{adm}})) < 0$

$$a(0) = \dot{a}(t_2)(t_1 - t_2) + 1/(u_0 r_0 C), \quad \dot{a}(t_2) = \dot{a}(t_1) = 4k_0 E_{\text{adm}}/(1 + 2k_0 E_{\text{adm}}) - 1 \leq 0 \\ \ddot{a}(0) = 2k_0 u_0 \sqrt{2E_{\text{adm}}}/(1 + 2k_0 E_{\text{adm}}), \quad \ddot{a}(T) = -2k_0 u_0 \sqrt{2E_{\text{adm}}}/(1 + 2k_0 E_{\text{adm}}) \\ a(0) = (4k_0 E_{\text{adm}}/(1 + 2k_0 E_{\text{adm}}) - 1)(\sqrt{2E_{\text{adm}}}/u_0 - S/\sqrt{2E_{\text{adm}}}) + \\ + \sqrt{2E_{\text{adm}}}/(u_0(1 + 2k_0 E_{\text{adm}})) > 0$$

(так как  $a(0) - a(t_1) = -a(T)$ ; время свободного вращения  $t_{\text{free}} = t_{\text{br}} - t_{\text{ac}} = S/\sqrt{2E_{\text{adm}}} - \sqrt{2E_{\text{adm}}}/u_0$ ).

В момент  $t = t_2$ , когда скалярная функция  $a(t)$  меняет знак, имеем:  $|\mathbf{L}| = \sqrt{2E_{\text{adm}}}/C$ ,  $b = \sqrt{2E_{\text{adm}}}/(r_0 C)$ ,  $a(t_2) = 0$ ;  $\dot{a}(t_2) = 2k_0 \sqrt{2E_{\text{adm}}}/(r_0 C) - 1 < 0$ ;  $\ddot{a}(t_2) = \ddot{a}(T) = -2k_0 u_0 / (r_0 C) < 0$  (для  $t < t_2$  будет  $\ddot{a}(t) \geq 0$ ). Производная  $\dot{a}(t)$  для моментов времени  $t \geq t_2$  будет следующей:  $\dot{a}(t) = 2k_0(u_0 t_2 + \sqrt{2E_{\text{adm}}})/(r_0 C) - 2k_0 u_0 t / (r_0 C) - 1$ ;  $\dot{a}(t_2) = \dot{a}(t_1) = 4k_0 E_{\text{adm}}/(1 + 2k_0 E_{\text{adm}}) - 1 \leq 0$ . Значит,  $a(t) = (2k_0(u_0 t_2 + \sqrt{2E_{\text{adm}}})/(r_0 C) - 1)t - k_0 u_0 t^2 / (r_0 C) + t_2(1 - k_0(2\sqrt{2E_{\text{adm}}} + u_0 t_2)/(r_0 C))$ , если  $t > t_2$ . Таким образом, получили  $a(t) = (2k_0 \sqrt{2E_{\text{adm}}}/(r_0 C) - 1)(t - t_2) - k_0 u_0 (t - t_2)^2 / (r_0 C)$ . Следовательно,  $a(T) = 2k_0 E_{\text{adm}} / (u_0 r_0 C) - \sqrt{2E_{\text{adm}}}/u_0$  (так как  $T - t_2 = t_1 = \sqrt{2E_{\text{adm}}}/u_0$ ). Из необходимого условия оптимальности  $H(T) = 0$  нашли  $a(T) = -1/(u_0 r_0 C)$ . Получили уравнение  $\sqrt{2E_{\text{adm}}}/u_0 - 2k_0 E_{\text{adm}} / (u_0 r_0 C) = 1/(u_0 r_0 C)$ , из которого  $r_0 = (1 + 2k_0 E_{\text{adm}})/(C\sqrt{2E_{\text{adm}}})$ .

Если  $E_{\text{adm}} = 1/(2k_0)$ , то  $\dot{a}(t_2) = 0$ . С другой стороны

$$\dot{a}(t_2) = 2k_0 \sqrt{2E_{\text{adm}}}/(r_0 C) - 1 = 2k_0 \sqrt{1/k_0}/(r_0 C) - 1 = 0. \quad \text{Откуда} \quad r_0 = 2\sqrt{k_0}/C$$

Напомним, что в случае оптимального управления с одной точкой переключения  $r_0 = 1/(C\sqrt{u_0 S})$  и  $E_{\text{max}} = u_0 S/2$  (такой режим является оптимальным, если  $u_0 S \leq 2E_{\text{ном}}$ ).

Вычислим значение показателя (1.7) при оптимальном управлении. Если  $u_0 S > \min(2E_{\text{adm}}; 1/k_0)$ , то  $G = (1 + 2k_0 E_{\text{max}}) S / \sqrt{2E_{\text{max}}} + (1 - 2k_0 E_{\text{max}}/3) \sqrt{2E_{\text{max}}}/u_0$ , где  $E_{\text{max}} = \min(1/(2k_0); E_{\text{adm}})$ . Если  $u_0 S \leq \min(2E_{\text{adm}}; 1/k_0)$ , то  $G = k_0 u_0^2 T^3/6 + T$ , где  $T = 2\sqrt{S/u_0}$ .

Оптимальным значением максимальной энергии вращения  $E_{\text{max}}$  является такое значение  $E_{\text{max}}$ , при котором величина (1.7) минимальна. Минимум функции  $G(E_{\text{max}})$  ищется на отрезке  $[0, E_{\text{adm}}]$ . Если  $E_{\text{adm}} \geq 1/(2k_0)$ , то  $E_{\text{max}} = 1/(2k_0)$  и особый режим управления может существовать. Если  $E_{\text{adm}} < 1/(2k_0)$ , то минимум функции  $G(E_{\text{max}})$  находится на правом конце отрезка  $[0, E_{\text{adm}}]$ , т.е.  $E_{\text{max}} = E_{\text{adm}}$  и особый режим управления невозможен (но возможен участок движения с постоянной кинетической энергией вращения  $E(t) = \text{const} = E_{\text{adm}}$ ). Если  $u_0 S \leq \min(2E_{\text{adm}}; 1/k_0)$ , то отсутствует отрезок времени, внутри которого  $E(t) = \text{const}$ , и  $\mathbf{M} \neq 0$  на всем интервале управления  $[0, T]$  (вращение КА происходит с максимально возможным по модулю силовым моментом в течение всего разворота из положения  $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}$  в положение  $\Lambda(T) = \Lambda_r$ ). Наличие интегрального члена в минимизируемом функционале (1.7) равносильно введению дополнительного ограничения  $J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 \leq 1/k_0$  в условия задачи оптимального разворота. Таким образом, найденное решение (3.9), (3.10) соответствует задаче максимального быстродействия при наличии ограничений (1.3) и  $J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 \leq 2E_{\text{lim}}$ , где  $E_{\text{lim}} = \min(1/(2k_0), E_{\text{adm}})$  – уровень, ограничивающий максимально возможную кинетическую энергию вращения КА во время разворота из положения (1.4) в положение (1.5). Если  $2E_{\text{adm}} \geq 1/k_0$ , то ограничение (1.6) становится несущественным, поскольку минимизация показателя качества (1.7) ограничивает сверху кинетическую энергию вращения КА величиной  $1/(2k_0)$  (при оптимальном по критерию минимума (1.7) движении энергия вращения  $E(t)$  не может быть больше  $1/(2k_0)$ ).

**5. Обоснование единственности оптимального решения.** Покажем, что найденное решение (2.4), (2.5) – единственное решение системы уравнений (1.1), (2.1)–(2.3). Введем единичный вектор  $\mathbf{q}$  для вектора  $\boldsymbol{\varphi}$ , такой, что  $\mathbf{q}(0) \cdot \boldsymbol{\varphi}(0) > 0$  и  $\boldsymbol{\varphi} = \chi \mathbf{q}$ , где  $\chi$  – скалярная функция с начальным значением  $\chi(0) > 0$  ( $|\mathbf{q}| = 1$ ). Тогда оптимальный момент  $\mathbf{M}$  равен

$$\mathbf{M} = \frac{u_0 \text{sign} \chi}{\sqrt{q_1^2/J_1 + q_2^2/J_2 + q_3^2/J_3}} \mathbf{q}$$

Так как  $\chi(0) > 0$ , то в окрестности точки  $t = 0$  имеем  $\mathbf{M} = h\mathbf{q}$  и  $\mathbf{M} \parallel \mathbf{L}$ ,  $\mathbf{L} = K\mathbf{q}$ , где  $h$  – скалярная величина (на участке разгона  $h > 0$ ; на участке торможения  $h < 0$ );  $\mathbf{L} = J_{\text{SC}}\boldsymbol{\omega}$  – кинетический момент КА;  $J_{\text{SC}} = \text{diag}\{J_1, J_2, J_3\}$  – тензор инерции КА. Подставим формулы (2.3) с учетом зависимости  $\boldsymbol{\varphi} = \chi(t)\mathbf{q}$  в уравнения (1.1) при наличии равенств  $J_i \omega_i = Kq_i$ :

$$\dot{K}\mathbf{q} + K\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}K = h\mathbf{q} \quad (5.1)$$

Сумма  $K\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}K$  ортогональна орту  $\mathbf{q}$  или равна нулю (всегда  $\mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$ , так как  $|\mathbf{q}| = 1$ ). Поэтому уравнение (5.1) выполняется в единственном случае, если  $\dot{K} = h$  и  $\dot{\mathbf{q}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$  (т.е. когда вектор  $\mathbf{q}$  остается неизменным относительно инерциального базиса  $\mathbf{I}$ ). Те-

перь подставим равенства  $\phi_i = \chi q_i$  и  $\omega_i = Kq_i/J_i$  в уравнения (2.2), которые запишем в виде

$$\dot{\phi} = 2k_0(J_{SC}\omega) + (J_{SC}\omega) \times (J_{SC}^{-1}\phi) - J_{SC}(\omega \times (J_{SC}^{-1}\phi)) - \mathbf{r} \quad (5.2)$$

Левая часть уравнения (5.2) для вектора сопряженных переменных равна

$$\dot{\chi}\mathbf{q} + \chi\dot{\mathbf{q}} = \dot{\chi}\mathbf{q} - \chi\omega \times \mathbf{q}$$

(уравнения (1.1), (2.2) должны выполняться одновременно, поэтому свойство  $\dot{\mathbf{q}} = -\omega \times \mathbf{q}$  взято из (5.1)). Правая часть уравнения (5.2) будет такой:

$$\begin{aligned} 2k_0K\mathbf{q} + K\mathbf{q} \times (J_{SC}^{-1}\chi\mathbf{q}) - \chi J_{SC}((J_{SC}^{-1}K\mathbf{q}) \times (J_{SC}^{-1}\mathbf{q})) - \mathbf{r} = \\ = 2k_0K\mathbf{q} - \chi(KJ_{SC}^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q} - \mathbf{r} = 2k_0K\mathbf{q} - \chi\omega \times \mathbf{q} - \mathbf{r} \end{aligned}$$

Приравняв левую и правую части уравнения (5.2), получаем уравнение для вектора  $\mathbf{q}$ :

$$\dot{\chi}\mathbf{q} = 2k_0K\mathbf{q} - \mathbf{r}$$

Отсюда следует необходимое условие оптимальности  $r_0\mathbf{p} = (2k_0K - \dot{\chi})\mathbf{q}$ , из которого неизбежны равенства (2.4), в которых  $a(0) > 0$ , так как  $\dot{a}(0) = -1$ , причем  $2k_0K - \dot{\chi} = \text{const}$  и  $\mathbf{q} = \mathbf{p}$ , откуда имеем следующие соотношения:  $\dot{\chi} = 2k_0K - r_0$ ,  $\chi(t) = r_0a(t)$ ,  $K = |\mathbf{L}| = r_0b(t)$ , где  $r_0 = \text{const} = |\mathbf{r}(0)|$  (так как  $\chi(0) > 0$  и  $\chi(T) < 0$ , а потому  $\dot{\chi} < 0$ ). В итоге, если в какой-нибудь момент времени  $t$  кинетический момент  $\mathbf{L}$  и вектор  $\phi$  коллинеарны, то они коллинеарны на всем интервале времени  $0 < t < T$ . В силу наличия краевых условий  $\omega(0) = 0$  и  $\omega(T) = 0$  векторы  $\mathbf{L}$  и  $\phi$  коллинеарны как минимум два раза – в самом начале разворота ( $\mathbf{L} = h\mathbf{q}$  при  $t \rightarrow 0$ ) и в самом конце маневра ( $\mathbf{L} = h(t - T)\mathbf{q}$  при  $t \rightarrow T$ ); во время остановки вращения  $h < 0$ . Между разгоном и торможением (если существует интервал движения, когда  $E(t) = \text{const}$ ) оптимальным является вращение по инерции и уравнения (2.1), (2.5) выполняются, из-за чего единственным решением уравнений (2.2) будет (2.4). Следовательно, на всем интервале управления  $t \in [0, T]$  зависимости (2.4), (2.5) – единственное решение, удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности. Значит, никакое отличное от (3.9), (3.10) движение не может быть оптимальным, так как оно не будет удовлетворять необходимым условиям оптимальности.

Чем больше  $k_0$ , тем больше цена израсходованной энергии. Если  $k_0 = 0$ , то исследуемая задача оптимального управления (1.1)–(1.7) соответствует задаче максимального быстрогодействия, которая подробно изучена и решена в разделе 3. Если  $k_0 > 1/(u_0S)$ , то в оптимальном движении обязательно присутствует участок вращения с постоянной кинетической энергией, во время которого управление  $\mathbf{M}$  отсутствует (независимо от значения  $E_{\text{adm}}$ ). Если  $k_0 \geq 1/(2E_{\text{adm}})$ , то в любой момент времени  $E(t) \leq E_{\text{adm}}$ .

Для идеального разворота (это когда  $u_0 \rightarrow \infty$  и переходные участки разгона и торможения практически отсутствуют, занимая бесконечно малое время) кинетическая энергия вращения изменяется скачком в моменты времени  $t = 0$  и  $t = T$ . Значение показателя (1.7) равно

$$\begin{aligned} G = (1 + 2k_0E_{\text{ном}})T = (1 + 2k_0E_{\text{ном}})S/\sqrt{2E_{\text{ном}}} = (1/\sqrt{2E_{\text{ном}}} + k_0\sqrt{2E_{\text{ном}}})S \\ (\text{так как } T = S/\sqrt{2E_{\text{ном}}}) \end{aligned}$$

где  $S$  – значение функционала пути (3.5) для траектории вращения в соответствии с уравнениями (2.1), (2.5) из положения  $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}$  в положение  $\Lambda(T) = \Lambda_{\text{f}}$ ;  $E_{\text{ном}}$  – значение кинетической энергии во время вращения по инерции. Значение  $G$  минимально, если  $E_{\text{ном}} = 1/(2k_0)$ . Поэтому минимизация показателя (1.7) делает невыгодным движение с энергией вращения больше уровня  $1/(2k_0)$ . Условие (1.6) отражает требования

к кинетической энергии вращения КА, и значение  $E_{\text{ном}}$  не может быть больше  $E_{\text{adm}}$ . Если  $E_{\text{adm}} < 1/(2k_0)$ , то  $E_{\text{ном}} = E_{\text{adm}}$  и величина  $G$  оказывается больше, чем  $2S\sqrt{k_0}$ .

**6. Построение типовой программы оптимального разворота.** Задача нахождения оптимального управления сводится к решению системы дифференциальных уравнений (1.1), (1.2), (2.1), (2.2) с одновременным выполнением условия (2.3), если  $\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{r} < 0$  или  $E(t) < E_{\text{adm}}$  и  $\dot{\boldsymbol{\varphi}} \neq 0$ , или  $\mathbf{M} = 0$ , если  $\dot{\boldsymbol{\varphi}} = 0$  или  $\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{r} > 0$  и  $E(t) = E_{\text{adm}}$ , чтобы удовлетворялись условия разворота (1.4), (1.5). Для компонент  $p_i$  единичного вектора  $\mathbf{p}$  имеют место следующие уравнения:

$$\dot{p}_1 = \omega_3 p_2 - \omega_2 p_3, \quad \dot{p}_2 = \omega_1 p_3 - \omega_3 p_1, \quad \dot{p}_3 = \omega_2 p_1 - \omega_1 p_2 \quad (6.1)$$

Краевая задача принципа максимума заключается в определении такого значения вектора  $\mathbf{p}_0$  и величины  $r_0$ , при которых решение системы уравнений (1.2), (3.10), (6.1) с учетом того, что

$$t_{\text{ac}} = \min(\sqrt{S/u_0}, \sqrt{2E_{\text{ном}}/u_0}), \quad t_{\text{br}} = \max(\sqrt{S/u_0}, S/\sqrt{2E_{\text{ном}}}),$$

$$m_0 = u_0 / \sqrt{p_{10}^2/J_1 + p_{20}^2/J_2 + p_{30}^2/J_3}$$

удовлетворяло условиям разворота (1.4), (1.5); напомним, что  $E_{\text{ном}} = \min(1/(2k_0); E_{\text{adm}})$ . Значение  $S$  определяется интегрированием уравнений (1.2), (2.1), (2.5) с начальными условиями  $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}$ ,  $\mathbf{r}(0) = r_0 \mathbf{p}_0$  и удовлетворением требования  $\Lambda(T) = \Lambda_f$  и вычислением интеграла (3.5). Значения  $\mathbf{p}_0$  и  $S$  не зависят от характера изменения функции  $b(t)$  [20] и поэтому могут быть вычислены в предположении  $b(t) = \text{const}$ .

Указанная система имеет аналитическое решение только для динамически симметричного и сферического тел (отметим, что к динамически симметричному телу относится, например, КА “Спейс Шаттл” [9, 10]). Для сферически-симметричного КА ( $J_1 = J_2 = J_3$ ) система (3.10), (6.1) принимает вид  $\dot{p}_i = 0$ , и решение системы уравнений (1.2), (1.4), (1.5), (3.9), (3.10), (6.1) такое:

$$p_i(t) = \text{const} = p_{i0} = v_i / \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}; \quad M_i(t) = 0.5m_0 [\text{sign}(t_{\text{ac}} - t) + \text{sign}(t_{\text{br}} - t)] p_{i0}$$

$$\omega_i(t) = 0.5m_0 (T - |t - t_{\text{ac}}| - |t - t_{\text{br}}|) p_{i0}/J_i, \quad \Lambda(t) = \Lambda_{\text{in}} \circ e^{\mathbf{p}_0 \theta / 2}$$

$$\theta = \frac{m_0}{2J_1} \int_0^t (t_{\text{ac}} + t_{\text{br}} - |t - t_{\text{ac}}| - |t - t_{\text{br}}|) dt$$

где  $v_1, v_2, v_3$  – компоненты векторной части кватерниона разворота  $\Lambda_f = \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda_f$ ;  $m_0 = u_0 \sqrt{J_1}$ ;  $T = t_{\text{ac}} + t_{\text{br}}$ ;  $t_{\text{ac}} = \min(\sqrt{S/u_0}, \sqrt{2E_{\text{ном}}/u_0})$ ,  $t_{\text{br}} = \max(\sqrt{S/u_0}, S/\sqrt{2E_{\text{ном}}})$ , в которых  $S = 2J_1 \text{Cargccos}(\text{sqal} \Lambda_f)$ . Оптимальные развороты вокруг оси, неподвижной относительно инерциальной системы координат, подробно рассмотрены в [1].

Для динамически симметричного КА (например, когда  $J_2 = J_3$ ) задача оптимального управления разворотом решается до конца (не умаляя общности рассуждений, за ось симметрии принята ось  $OX$  КА). Оптимальное движение в этом частном, но достаточно распространенном случае представляет собой одновременное вращение КА как твердого тела вокруг своей продольной оси  $OX$  и вокруг некоторого направления  $\boldsymbol{\eta}$ , неподвижного в инерциальном пространстве и составляющего с продольной осью КА определенный постоянный угол  $\vartheta$ . Угловые скорости относительно осей  $OX$  и  $\boldsymbol{\eta}$  изменяются пропорционально с постоянным коэффициентом пропорциональности, и поэтому справедливо соотношение [15]

$$\Lambda_f = \Lambda_{\text{in}} \circ e^{\mathbf{p}_0 \beta / 2} \circ e^{\mathbf{e}_1 \alpha / 2}$$

где вектор в показателе степени кватернионной экспоненты понимается как кватернион с нулевой скалярной частью;  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$ ;  $\mathbf{e}_1$  — орт продольной оси КА;  $\alpha, \beta$  — углы поворота КА вокруг продольной оси  $OX$  и вокруг вектора  $\mathbf{p}$  соответственно (считается  $|\alpha| \leq |\pi, 0 \leq \beta \leq \pi$ ). Решение  $\mathbf{p}(t)$  системы уравнений (1.1), (3.10), (6.1) представим в следующей форме:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{10} = \cos J, & p_2 &= p_{20} \cos \kappa + p_{30} \sin \kappa \\ p_3 &= -p_{20} \sin \kappa + p_{30} \cos \kappa, & \kappa &= \frac{J - J_1}{J} \int_0^t \omega_1(t) dt \end{aligned} \quad (6.2)$$

где  $p_{i0} = p_i(0)$ ;  $J = J_2 = J_3$ ; продольная угловая скорость  $\omega_1(t)$  вычисляется из равенств (3.10) с учетом  $p_1 = \text{const} = p_{10}$ . Зависимость  $p_{i0}, \alpha, \beta$  от  $\Lambda_{\text{in}}$  и  $\Lambda_{\text{f}}$  определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{J - J_1}{J_1} p_{10} \beta; & \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - p_{10} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} &= v_0 \\ \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + p_{10} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} &= v_1; & p_{20} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + p_{30} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} &= v_2 \\ -p_{20} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + p_{30} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} &= v_3 \end{aligned} \quad (6.3)$$

где  $v_0, v_1, v_2, v_3$  — компоненты кватерниона разворота  $\Lambda_{\text{f}}$ ;  $-\pi \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi$ . Существование решения системы (6.3) для любых значений кватерниона разворота  $\Lambda_{\text{f}}$  доказано в [15]. Оптимальное значение управляющего момента  $\mathbf{M}$  удовлетворяет соотношениям (3.9). Программные значения функций  $\omega_i$  (проекции требуемой угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}^*$  на связанные оси) рассчитываются по формулам (3.10) и (6.2). В явном виде оптимальное решение  $M_i(t), \omega_i(t)$  запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} M_1 &= 0.5m_0 [\text{sign}(t_{\text{ac}} - t) + \text{sign}(t_{\text{br}} - t)] p_{10} \\ M_2 &= 0.5m_0 [\text{sign}(t_{\text{ac}} - t) + \text{sign}(t_{\text{br}} - t)] \sqrt{1 - p_{10}^2} \sin(\kappa + \gamma) \\ M_3 &= 0.5m_0 [\text{sign}(t_{\text{ac}} - t) + \text{sign}(t_{\text{br}} - t)] \sqrt{1 - p_{10}^2} \cos(\kappa + \gamma) \\ \omega_1 &= 0.5m_0 (T - |t - t_{\text{ac}}| - |t - t_{\text{br}}|) p_{10} / J_1 \\ \omega_2 &= 0.5m_0 (T - |t - t_{\text{ac}}| - |t - t_{\text{br}}|) \sqrt{1 - p_{10}^2} \sin(\kappa + \gamma) / J_2 \\ \omega_3 &= 0.5m_0 (T - |t - t_{\text{ac}}| - |t - t_{\text{br}}|) \sqrt{1 - p_{10}^2} \cos(\kappa + \gamma) / J_3 \end{aligned}$$

где  $t_{\text{ac}} = \min(\sqrt{J_2 \beta / m_0}, \sqrt{2E_{\text{ном}} / u_0})$ ;  $t_{\text{br}} = \max(\sqrt{J_2 \beta / m_0}, J_2 \beta C / \sqrt{2E_{\text{ном}}})$ ;  $\gamma = \arcsin(p_{20} / \sqrt{1 - p_{10}^2})$ , если  $p_{30} \geq 0$ , или  $\gamma = \pi - \arcsin(p_{20} / \sqrt{1 - p_{10}^2})$ , если  $p_{30} < 0$  ( $|p_{10}| \neq 1$ ; а случай  $|p_{10}| = 1$  не рассматривается, так как он соответствует плоскому вращению вокруг продольной оси  $OX$ );  $T = t_{\text{ac}} + t_{\text{br}}$ . В любой текущий момент времени  $t$  кватернион ориентации  $\Lambda$  описывается функцией

$$\Lambda(t) = \Lambda_{\text{in}} \circ e^{\mathbf{p}_0 \theta / 2} \circ e^{\mathbf{e}_1 \sigma / 2}$$

где  $\sigma = (J - J_1) p_{10} \theta / J_1$ ; значение вектора  $\mathbf{p}_0$  определяется из системы (6.3); угол  $\theta$  равен

$$\theta = \frac{1}{J} \int_0^t |\mathbf{L}(t)| dt, \quad \text{или} \quad \theta = \frac{m_0}{2J} \int_0^t (t_{\text{ac}} + t_{\text{br}} - |t - t_{\text{ac}}| - |t - t_{\text{br}}|) dt$$

Для несимметричного КА ( $J_1 \neq J_2 \neq J_3$ ) решение системы уравнений (1.2), (3.10), (6.1) в квадратурах не представляется возможным и находится исключительно числен-

ными методами (например, методом последовательных приближений). Расчет вектора  $\mathbf{p}_0$  производится путем решения краевой задачи  $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}$ ,  $\Lambda(T) = \Lambda_f$  с учетом накладываемых на движение связей (1.2), (2.1), (2.5) (искомое значение  $\mathbf{p}_0$  может определяться при допущении  $b(t) = \text{const}$  и нахождении начальной угловой скорости  $\omega(0)$  для вращения по инерции).

Для построения оптимального управления при развороте КА необходимо знать не только программу изменения координат  $p_i(t)$ , но и величину максимального момента  $m_0$ , определяющего темп приближения к требуемому конечному состоянию (1.5), а также моменты выключения и включения управления  $t_{\text{ac}}$  и  $t_{\text{br}}$ . Конкретные значения параметров  $m_0$ ,  $t_{\text{ac}}$ ,  $t_{\text{br}}$ ,  $r_0 = |\mathbf{r}|$  и длительность разворота  $T$  зависят от вектора  $\mathbf{p}_0$  и характеристики  $S = QC$ , где

$$Q = \int_0^T |\mathbf{L}(t)| dt$$

Для динамически симметричного КА интеграл  $Q$  вычисляется значительно проще (расчет величин  $r_0$ ,  $t_{\text{ac}}$ ,  $t_{\text{br}}$  и  $E_{\text{max}}$  также упрощается). В этом частном случае  $|\mathbf{L}| = J_2 \dot{\beta}$  и  $Q = J_2 \beta$ , где  $J_2$  – момент инерции относительно поперечной оси ( $J_2 = J_3$ );  $\dot{\beta}$  – скорость вращения вокруг кинетического момента  $\mathbf{L}$ ;  $\beta$  – угол поворота КА вокруг кинетического момента  $\mathbf{L}$  (из физического смысла  $\beta \geq 0$ ). Значения  $r_0$ ,  $t_{\text{ac}}$ ,  $t_{\text{br}}$ ,  $T$ ,  $E_{\text{max}}$ ,  $L_{\text{max}}$  зависят от угла  $\beta$  поворота КА вокруг кинетического момента  $\mathbf{L}$ . Чтобы  $S$  и  $G$  были минимальными, необходимо выполнить условие  $\beta \leq \pi$ , при котором  $Q$  минимально (именно поэтому система (6.3) включает неравенство  $0 \leq \beta \leq \pi$ ).

Решение задачи оптимального по времени разворота с ограничением на фазовые переменные (1.6) подчиняется уравнениям (2.1), (2.4), (2.5), а управляющие переменные  $M_i$  и угловые скорости  $\omega_i$  изменяются в соответствии с законами (3.9), (3.10), (6.1). Решение (3.9), (3.10) оптимально, потому что оно – единственное; только оно одно (и никакое другое) удовлетворяет необходимым условиям оптимальности. Любое отличное от (3.9), (3.10) движение заведомо хуже (в смысле минимума (1.7) при ограничениях (1.3), (1.6)), так как не удовлетворяет необходимым условиям оптимальности. Значение  $m_0$  в законах движения (3.9), (3.10) определяет максимальную величину управляющего момента, максимальный модуль кинетического момента и длительность участка свободного вращения. Оптимальный вектор  $\mathbf{p}_0$  рассчитывается в результате решения краевой задачи принципа максимума. Константы  $S$ ,  $C$ ,  $m_0$  полностью определяют вращение КА при оптимальном законе управления пространственным разворотом. Программное изменение силового момента  $\mathbf{M}$  описывается зависимостью

$$\mathbf{M} = 0.5m_0 [\text{sign}(t_{\text{ac}} - t) + \text{sign}(t_{\text{br}} - t)] \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_p \circ \Lambda$$

где  $\mathbf{c}_p = \text{const} = \Lambda_{\text{in}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{\text{in}}$ . Оптимальная программа управления  $\mathbf{M}(t)$  имеет следующие оригинальные свойства, а движение КА подчиняется соотношениям:

$$\begin{aligned} \Lambda \circ \mathbf{M}(T - t) \circ \tilde{\Lambda} &= -\Lambda \circ \mathbf{M}(t) \circ \tilde{\Lambda}; & \Lambda \circ \mathbf{L}(T - t) \circ \tilde{\Lambda} &= \Lambda \circ \mathbf{L}(t) \circ \tilde{\Lambda} \\ \int_0^{T/2} |\mathbf{L}(t)| dt &= \int_{T/2}^T |\mathbf{L}(t)| dt \end{aligned}$$

$$E_{\text{max}} = |E(T/2)|, \quad L_{\text{max}} = \max_{0 < t < T} \sqrt{J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2} = |\mathbf{L}(T/2)|$$

Раскрутка КА в начале разворота продолжается до тех пор, пока его кинетический момент  $\mathbf{L}$  не станет равен заданному значению  $\mathbf{L}_{\text{пр}}$ , который вычисляется по формуле

$$\mathbf{L}_{\text{пр}} = m_0 t_{\text{ас}} \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_p \circ \Lambda$$

Гашение угловой скорости в конце оптимального разворота осуществляется по закону (3.3). В момент времени  $t = T$ , когда  $\boldsymbol{\omega} = 0$ , управление выключается и  $\mathbf{M} = 0$ , разворот завершен. Если  $2E_{\text{ном}} \ll u_0 S$ , то торможение КА можно начать с момента выполнения равенства

$$4 \arcsin \frac{K \sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2}}{\sqrt{(J_2 \omega_2)^2 + (J_3 \omega_3)^2}} = \frac{K^2 \sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2}}{m_0 \sqrt{(J_2 \omega_2)^2 + (J_3 \omega_3)^2}}, \quad \text{если } \omega_2^2 + \omega_3^2 \neq 0$$

или  $4 \arccos \delta_0 = \omega_1 K / m_0$ , если  $\omega_2^2 + \omega_3^2 = 0$ , где  $\delta_j$  – компоненты кватерниона расщепления  $\tilde{\Lambda}(t) \circ \Lambda_f$ ,  $j = \overline{0, 3}$ ;  $K = |J_{\text{SC}} \boldsymbol{\omega}|$  – величина кинетического момента КА. Указанное условие повышает точность приведения КА в требуемое конечное состояние (1.5) за счет возможности в бортовой системе управления формировать сигнал на остановку вращения по информации о текущей ориентации КА и измерениям угловой скорости.

**7. Результаты математического моделирования.** Приведем численный пример решения задачи управления КА во время программного разворота и построения оптимальной программы вращения. Рассмотрим разворот КА на  $180^\circ$  из исходного положения, соответствующего кватерниону  $\Lambda_{\text{ин}}$  с элементами  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_1 = 0.7071$ ,  $\lambda_2 = 0.5$ ,  $\lambda_3 = 0.5$ , в требуемое угловое положение  $\Lambda_f$ , при котором оси КА совмещены (совпадают по направлению) с осями опорного базиса  $\mathbf{I}$ . При этом начальная и конечная угловые скорости отсутствуют,  $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$ . Будем полагать, что инерционные характеристики КА равны:  $J_1 = 4710 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $J_2 = 17160 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $J_3 = 18125 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , а мощность исполнительных органов характеризуется величиной  $u_0 = 0.05 \cdot \text{Н} \cdot \text{кг}^{-1/2}$ . Во время разворота кинетическая энергия вращения не должна быть больше  $E_{\text{adm}} = 2 \text{ Дж}$ . Считаем, что  $k_0 = 1 \text{ Дж}^{-1}$  (энергосотраты имеют такой же вес, как и время).

При решении краевой задачи принципа максимума в уравнениях (2.5) полагаем  $b = \text{const}$  (и, соответственно,  $|\mathbf{L}| = \text{const}$ ), так как искомое значение  $\mathbf{p}_0$  не зависит от характера изменения функции  $b(t)$  [20]. Нахождение расчетного вектора  $\mathbf{p}_0$  начинаем с решения той же краевой задачи для динамически-симметричного КА с моментами инерции  $J_1$  и  $J$ , где  $J$  – момент инерции относительно поперечной оси, равный среднему значению между  $J_2$  и  $J_3$  (принцип осреднения нередко используется исследователями [28]). Например, примем такое значение

$$J = \frac{J_2 J_3}{J_2 + J_3 - J_1} (\sqrt{(1 - J_1/J_2)(1 - J_1/J_3)} + 1)$$

В предположении динамической симметричности КА решение  $\mathbf{p}_0$  определяется системой (6.3). Полученный из уравнений (6.3) вектор  $\mathbf{p}_0$  и угол  $\beta$  являются начальным приближением к истинному решению. Они уточняются до тех пор, пока не будут удовлетворять системе уравнений (1.2), (1.1), в которых момент сил отсутствует ( $\mathbf{M} = 0$ ), с учетом накладываемых на движение КА ограничений  $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{ин}}$ ,  $\Lambda(t_{\text{пр}}) = \Lambda_f$ , а начальные угловые скорости  $\boldsymbol{\omega}_{\text{ist}}$  определяются вектором  $\mathbf{p}_0$  и углом  $\beta$  по формулам:

$$\boldsymbol{\omega}_{1\text{st}} = \frac{J\beta}{J_1 T} \mathbf{p}_{10}, \quad \boldsymbol{\omega}_{2\text{st}} = \frac{J\beta}{J_2 T} \mathbf{p}_{20}, \quad \boldsymbol{\omega}_{3\text{st}} = \frac{J\beta}{J_3 T} \mathbf{p}_{30} \quad (7.1)$$

где  $T$  – время разворота (при уточнении вектора  $\mathbf{p}_0$  было принято значение  $T = 300$  с). “Свободное” движение прогнозируется интегрированием системы уравнений (1.1), (1.2), описывающих вращение КА, при начальных условиях  $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}$ ,  $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_{\text{st}}$  и с учетом того, что  $\mathbf{M} = 0$ . Степень приближения найденного значения  $\mathbf{p}_0$  к искомому решению характеризуется мерой  $\varepsilon = \text{sqa}(\tilde{\Lambda}_{\text{pr}} \circ \Lambda_f)$ , где  $\Lambda_{\text{pr}}$  – наиболее близкое к  $\Lambda_f$  положение, полученное в ходе моделирования движения КА около центра масс (согласно уравнений (1.2), (1.1), в которых  $M_i = 0$ ). Вектор  $\mathbf{p}_0$  уточняется до тех пор, пока  $\varepsilon < \varepsilon_{\text{th}}$  ( $\varepsilon_{\text{th}}$  – некоторое близкое к единице пороговое значение, отражающее точность найденного решения). Как только условие  $\varepsilon \geq \varepsilon_{\text{th}}$  достигнуто (прогнозируемая ошибка соответствует требуемой точности), истинное значение  $\mathbf{p}_0$ , удовлетворяющее граничным условиям  $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}$ ,  $\Lambda(t_{\text{pr}}) = \Lambda_f$ , будет найдено и краевая задача решена. Вектор  $\mathbf{p}_0$  уточняется с помощью следующего рекуррентного соотношения

$$\Lambda_t^{(k+1)} = \Lambda_t^{(k)} \circ \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{\text{pr}}$$

где  $\Lambda_t^{(k)}$  – значение кватерниона разворота на  $k$ -й итерации, используемое в системе (6.3). На каждом  $k$ -м шаге итераций обновляются элементы кватерниона разворота  $\Lambda_t^{(k)}$  (правые части системы (6.3)), и из уравнений (6.3) мы получаем  $\mathbf{p}_0$  и  $\beta$ , а также соответствующую начальную угловую скорость  $\boldsymbol{\omega}_{\text{st}}$  (в соответствии с (7.1)) и прогноз  $\Lambda_{\text{pr}}$ . Если  $\varepsilon < \varepsilon_{\text{th}}$ , то вычисляется кватернион разворота  $\Lambda_t^{(k+1)}$  для следующего  $(k + 1)$ -го шага итераций и процесс уточнения вектора  $\mathbf{p}_0$  повторяется. За начальное приближение в правых частях системы (6.3) берутся элементы кватерниона  $\Lambda_t^{(0)} = \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda_f$ . Итерационный процесс прекращается, когда  $\varepsilon \geq \varepsilon_{\text{th}}$ .

Принятая схема итераций аналогична итерационному методу решения уравнения вида  $x = f(x)$  для скалярной функции  $f(x)$  скалярного (одномерного) аргумента  $x$ . В нашем случае аргумент – гиперкомплексное число (кватернион)  $\Lambda_t$ . Функцией является кватернионная величина  $\Lambda_t \circ \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{\text{pr}}$ , где  $\Lambda_f$  – постоянный кватернион (он не зависит от аргумента  $\Lambda_t$ );  $\Lambda_{\text{pr}}$  зависит от аргумента  $\Lambda_t$  через систему уравнений (6.3), (7.1) посредством модели движения (1.1), (1.2) (в уравнениях (1.1) принимается  $M_i = 0$ ). Изменяя  $\Lambda_t$ , изменяются вектор  $\mathbf{p}_0$  (в соответствии с (6.3)) и угловые скорости  $\boldsymbol{\omega}_{\text{ist}}$ , а значит изменится и значение  $\Lambda_{\text{pr}}$ , что вызовет изменение функции  $\Lambda_t \circ \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{\text{pr}}$ . Как только  $\text{sqa}(\tilde{\Lambda}_{\text{pr}} \circ \Lambda_f) \geq \varepsilon_{\text{th}}$ , итерационный процесс прекращается, а решение  $\mathbf{p}_0$  считается найденным. Так как  $|\text{vect}(\tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{\text{pr}}^{(k)})| < |\text{vect}\Lambda_t^{(k)}|$  для всех  $k$ , то итерационный процесс приближения  $\mathbf{p}_0$  к искомому решению сходится. Аналогичный метод определения значения  $\mathbf{p}_0$  в решении краевой задачи принципа максимума использовался в предыдущих работах [8, 19]. Заметим, что это лишь один из возможных (но далеко не единственный) итерационных алгоритмов поиска оптимального вектора  $\mathbf{p}_0$ .

В результате решения краевой задачи разворота из положения  $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}$  в положение  $\Lambda(T) = \Lambda_f$  получили расчетное значение вектора  $\mathbf{p}_0 = \{-0.4249361; -0.8707327; 0.2474951\}$  и интеграл  $Q = 31867 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$ , “функционал пути” составил  $S = 292 \text{ м} \cdot \text{кг}^{1/2}$ . Исходя из найденного значения  $\mathbf{p}_0$  получили максимальную величину управляющего момента  $m_0 = 5.4 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}$ . Так как  $2k_0 E_{\text{adm}} > 1$  и  $k_0 u_0 S > 1$ , то максимальная энергия вращения  $E_{\text{max}} = 1/(2k_0) = 0.5 \text{ Дж}$ , а значит время достижения максимальной кинетической энергии  $E_{\text{max}}$  равно  $\tau = \sqrt{2E_{\text{max}}}/u_0 = 20 \text{ с}$ . Оптимальным управлением является релейное управление с двумя точками переключения, при котором между набором и

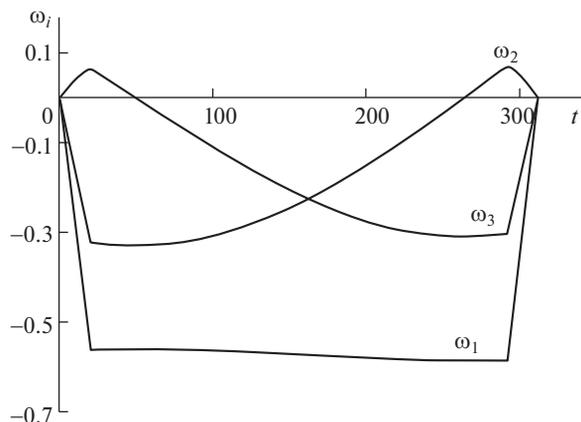


Рис. 3. Оптимальное изменение угловых скоростей во время разворота

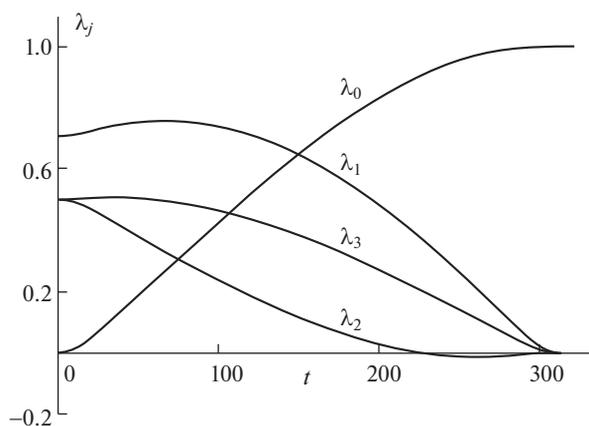


Рис. 4. Изменение компонент кватерниона ориентации  $\Lambda(t)$  во время разворота

гашением кинетической энергии КА вращается по инерции с постоянной кинетической энергией вращения до момента времени  $t_{br} = S/\sqrt{2E_{max}} = 292$  с. Время разворота оказалось равным  $T = 312$  с. Основные константы оптимального движения такие:

$$a(0) = 1/(2u_0\sqrt{k_0}) = 10 \text{ с}, \quad a(T) = -a(0) = -10 \text{ с}, \quad r_0 = 2\sqrt{k_0}/C = 216 \text{ с}$$

Результаты математического моделирования динамики оптимального разворота представлены рис. 3–5. На рис. 3 изображены графики изменения угловых скоростей в связанной с КА системе координат  $\omega_1(t)$ ,  $\omega_2(t)$ ,  $\omega_3(t)$  по времени (переменные  $\omega_i$  приведены в град./с, время  $t$  дано в секундах). Максимальная величина кинетического момента составляет  $L_{max} = 108 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ . Из соотношения моментов инерции  $J_1, J_2, J_3$  следует, что  $Ox$  – продольная ось КА. Отмечаем, что угловая скорость  $\omega_1$ , соответствующая продольной оси КА, – знакопостоянна. На рис. 4 отображены графики изменения компонент кватерниона  $\Lambda(t)$ , определяющего текущую ориентацию КА в процес-

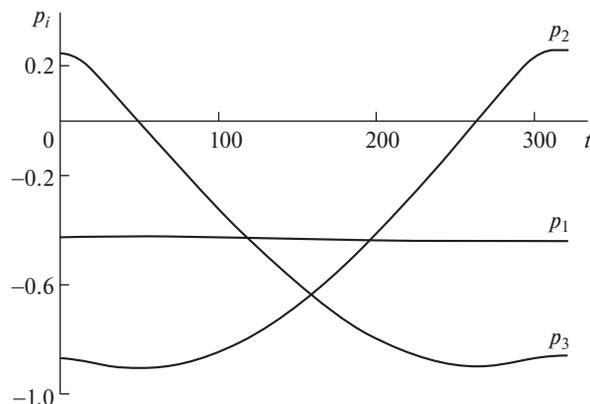


Рис. 5. Вид функций  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ ,  $p_3(t)$  во время оптимального разворота

се совершаемого поворотного маневра:  $\lambda_0(t)$ ,  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2(t)$ ,  $\lambda_3(t)$ . Оптимальная траектория движения  $\Lambda(t)$  получается из решения уравнения (1.2) с учетом начальных условий  $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{ин}}$  и известного закона изменения угловой скорости  $\omega(t)$ . Динамика изменения составляющих  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ ,  $p_3(t)$  орта кинетического момента по времени приведена на рис. 5. Характерным является незначительное изменение проекции  $p_1$  (угловая скорость  $\omega_1$  относительно продольной оси КА на участке между разгоном и торможением также меняется гораздо меньше, чем угловые скорости  $\omega_2$  и  $\omega_3$  относительно поперечных осей КА). При оптимальном управлении в отличие от переменных  $\omega_j$  переменные  $p_i$  и  $\lambda_j$  — гладкие функции времени.

**Заключение.** Предложено кватернионное решение динамической задачи оптимального управления пространственным разворотом твердого тела (в частности, КА) из произвольного начального в требуемое конечное угловое положение с учетом ограничений на управляющий момент и кинетическую энергию вращения. Ограниченность максимальной кинетической энергии вращения позволяет в экстренных случаях погасить угловую скорость за время, не превышающее заданного значения (в том числе в нештатной ситуации, когда требуется срочно прекратить маневр и максимально быстро стабилизировать КА). Постановка задачи имеет традиционную форму, в которой управление считается кусочно-непрерывной функцией времени. Оптимизация выполнена для случая, когда минимизируемый функционал качества объединяет в заданной пропорции длительность разворота и интеграл кинетической энергии вращения. Нахождение оптимального режима переориентации КА с минимальным значением такого функционала весьма актуально.

Представлено аналитическое решение предложенной задачи оптимального разворота, и получены формализованные уравнения и расчетные выражения для построения оптимальной программы переориентации КА. Определен тип траектории и изучены ключевые свойства оптимального движения. Найдены условия оптимальности и обоснована структура оптимального управления. Доказано, что в процессе всего разворота отношение кинетической энергии вращения к квадрату модуля кинетического момента КА есть величина постоянная. Для решения сформулированной задачи управления применялся принцип максимума, основываясь на универсальных переменных  $r_i$  [2], а использование кватернионов значительно упрощает расчетные процедуры и снижает вычислительные затраты алгоритма управления, делая его наиболее

удобным для бортовой реализации. Задача оптимального управления разворотом решается до конца; даны выражения для расчета ключевых характеристик маневра переориентации.

В отличие от известных работ [8, 9], где рассматривается неограниченное управление (в тех задачах отсутствуют какие-либо ограничения, кроме краевых условий), мы оптимизируем ограниченное управление, когда ограничены не только управляющие функции (силовой момент  $\mathbf{M}$ ), но и фазовые переменные (ограничена угловая скорость КА); это существенное отличие. Кроме того, в [8] оптимальным является непрерывное управление, когда все управляющие функции – непрерывные гладкие функции времени и на всем интервале управления  $[0, T]$  (кроме единственного момента времени  $t = T/2$ ) управляющий момент  $\mathbf{M}$  отличен от нуля, а в приведенном решении оптимально релейное управление (с одной или с двумя точками переключения) и может существовать отрезок времени ненулевой продолжительности, на котором  $\mathbf{M} = 0$  и КА вращается по инерции. В оптимальном решении, представленном в работе [8], отсутствуют участки с постоянным модулем управляющего момента. В работе [9] коэффициент пропорциональности в критерии оптимальности не равен нулю (это категорическое требование к минимизируемому функционалу, который используется авторами для решения задачи управления).

Свойства оптимального решения существенно зависят от коэффициента  $k_0$ . Сначала была рассмотрена и решена задача максимально быстрого разворота при наличии ограничения на фазовые переменные (ограничена кинетическая энергия вращения). Затем подробно изучен общий случай оптимального управления, когда  $k_0$  отличен от нуля. Учет одновременно нескольких факторов, влияющих на затратность (трудоемкость, "стоимость") разворота, позволяет найти удачный компромисс, отвечающий сразу нескольким критериям (в нашем случае экономии времени и расходования энергии). Важность и значение выполненных исследований состоят в том, что в отличие от предыдущих публикаций выбранный критерий оптимальности ограничивает кинетическую энергию вращения (когда  $k_0 \neq 0$ ) и минимизирует время переориентации. Так как время окончания переориентации  $T$  не ограничено, требуемый поворотный маневр осуществим при любых условиях разворота.

Показано, что на всем интервале переориентации момент сил действует вдоль прямой, неподвижной в инерциальной системе координат. В общем случае оптимальным является релейное управление с двумя точками переключения, при котором весь разворот делится на раскрутку КА с максимально возможным управляющим моментом, вращение по инерции и торможение с максимально возможным управляющим моментом, противоположно направленным кинетическому моменту КА. Модуль управляющего момента при разгоне и торможении не меняется. Длительности участков разгона и торможения одинаковы (так как начальная и конечная угловые скорости равны нулю) и зависят от мощности исполнительных органов  $u_0$ , максимально допустимой кинетической энергии вращения, коэффициента функционала качества, взаимной ориентации начального и конечного положений КА и его моментов инерции. Если критерий оптимальности учитывает кинетическую энергию вращения (а не только время разворота), то возможно существование особого режима управления, при котором КА вращается с постоянной кинетической энергией, которая меньше заданного максимально допустимого значения. Проведен подробный анализ особого режима управления и сформулированы условия существования такого режима. На основе условий трансверсальности как необходимых условий оптимальности, определены оптимальное время действия ненулевого управляющего момента и кинетическая энергия вращения на участке с особым режимом управления, а также модуль кинетического момента при движении по инерции. В случае наличия участка вращения по инерции максимальная кинетическая энергия не зависит от мощности исполнитель-

ных органов и соответственно от длительности этапов набора и гашения угловой скорости. В случае неограниченного управления (когда  $u_0 \rightarrow \infty$ ) времена разгона и торможения бесконечно малы, и практически на всем интервале движения КА вращается с постоянным относительно инерциальной системы координат кинетическим моментом. Другим предельным случаем является управление с одной точкой переключения, при котором участок неуправляемого движения отсутствует (длительность разгона и торможения максимальна и составляет половину времени разворота).

В статье описана процедура реализации оптимального управления переориентацией КА. Момент начала торможения определяется по фактическим параметрам движения (кватерниону рассогласования и кинетическому моменту), исходя из принципов терминального управления (используются информация об угловом положении КА и измерения угловой скорости). Структура построенного управления сравнительно проста, и оно легко может быть реализовано существующими бортовыми системами управления движением КА. Дается описание конструктивной схемы решения краевой задачи принципа максимума для произвольных условий разворота и моментов инерции КА. Для динамически симметричного КА представлено законченное решение задачи переориентации в замкнутой форме, что придает практическую значимость проведенным исследованиям, поскольку реальные КА во многих случаях близки по инерционным характеристикам к телам с осевой симметрией (среди них, например, КА системы “Спейс Шаттл” [10]). Записанная в аналитическом виде система уравнений (6.3) позволяет непосредственно найти решение краевой задачи принципа максимума и вычислить необходимые константы оптимального закона управления; при этом искомые значения параметров закона управления могут быть определены известным устройством [29]. Приводятся данные математического моделирования, иллюстрирующие характер движения КА во время оптимального разворота.

Принципиальным отличием предложенной динамической задачи оптимального управления относительно известных работ является наличие ограничений не только на управляющие функции, но и на фазовые переменные, что придает полученному решению существенную новизну. Наличие готовых формул для синтеза программы оптимального движения во время маневра переориентации делает описанный метод управления практически значимым и пригодным для непосредственного применения в практике космических полетов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. Левский М.В. Использование универсальных переменных в задачах оптимального управления ориентацией космических аппаратов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 1. С. 53–59.
3. Алексеев К.Б., Малявин А.А., Шадян А.В. Экстенсивное управление ориентацией космического аппарата на основе нечеткой логики // Полет. 2009. № 1. С. 47–53.
4. Ермошина О.В., Крищенко А.П. Синтез программных управлений ориентацией КА методом обратной задачи динамики // Изв. РАН. ТиСУ. 2000. № 2. С. 155–162.
5. Велищанский М.А., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Синтез алгоритмов переориентации космического аппарата на основе концепции обратной задачи динамики // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 5. С. 156–163.
6. Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 600 с.
7. Junkins J.L., Turner J.D. Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers. Elsevier, 1986. 515 p.
8. Левский М.В. Квадратично оптимальное управление переориентацией космического аппарата за фиксированное время в динамической постановке // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 1. С. 133–149.

9. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Аналитическое приближенное решение задачи оптимального разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 3. С. 131–141.
10. Li F., Bainum P.M. Numerical approach for solving rigid spacecraft minimum time attitude maneuvers // J. Guid. Contr. Dyn. 1990. V. 13. № 1. P. 38–45.
11. Scrivener S., Thompson R. Survey of time-optimal attitude maneuvers // J. Guid. Contr. Dyn. 1994. V. 17. № 2. P. 225–233.
12. Zhou H., Wang D., Wu B., Poh E.K. Time-optimal reorientation for rigid satellite with reaction wheels // Int. J. Contr. 2012. V. 85. № 10. P. 1–12
13. Решмин С.А. Пороговая абсолютная величина релейного управления при наискорейшем приведении спутника в желаемое угловое положение // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 5. С. 30–41.
14. Решмин С.А. Пороговая абсолютная величина релейного управления при наискорейшем приведении спутника в гравитационно-устойчивое положение // Доклады Академии наук. 2018. Т. 480. № 6. С. 671–675.
15. Бранец В.Н., Черток М.Б., Казначеев Ю.В. Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космич. исслед. 1984. Т. 22. Вып. 3. С. 352–360.
16. Shen H., Tsiotras P. Time-optimal control of axi-symmetric rigid spacecraft with two controls // AIAA J. Guid. Contr. Dyn. 1999. V. 22. № 5. P. 682–694.
17. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Аналитическое решение задачи оптимального по быстродействию разворота осесимметричного космического аппарата в классе конических движений // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 2. С. 131–147.
18. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата с ограниченным и импульсным управлением при произвольных граничных условиях // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 2. С. 152–165.
19. Левский М.В. Применение принципа максимума Л.С. Понтрягина к задачам оптимального управления ориентацией космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 6. С. 144–157.
20. Левский М.В. Синтез оптимального управления терминальной ориентацией космического аппарата с использованием метода кватернионов // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 2. С. 7–24.
21. Зубов Н.Е., Ли М.В., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. Терминальное построение орбитальной ориентации космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2017. № 4. С. 154–173.
22. Сарычев В.А., Беляев М.Ю., Зыков С.Г., Сазонов В.В., Тесленко В.П. Математические модели процессов поддержания ориентации орбитальной станции “Мир” с помощью гироскопов. М.: Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1989. № 10.
23. Левский М.В. Особенности управления ориентацией космического аппарата, оборудованного инерционными исполнительными органами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16. № 3. С. 188–195.
24. Levskii M.V. Special aspects in attitude control of a spacecraft, equipped with inertial actuators // J. Comp. Sci. Appl. Inf. Techn. 2017. V. 2. № 4. P. 1–9.
25. Lam Q.M. Robust and adaptive reconfigurable control for satellite attitude control subject to under-actuated control condition of reaction wheel assembly // Math. Eng. Sci. Aerosp. 2018. V. 9. № 1. P. 47–63.
26. Левский М.В. Способ управления разворотом космического аппарата. Патент на изобретение РФ № 2093433 // Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”. 1997. № 29. Опубликовано 20.10.1997. С. 271.
27. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
28. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
29. Левский М.В. Устройство формирования параметров регулярной прецессии твердого тела. Патент на изобретение РФ № 2146638 // Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”. 2000. № 8. Опубликовано 20.03.2000. С. 148.

УДК 517.583,517.927,624.072.21

## К РАСЧЕТУ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОДОЛЬНОГО ИЗГИБА СТЕРЖНЯ

© 2021 г. К. Н. Анахаев

*Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра  
Российской академии наук, Нальчик, Россия*

*e-mail: anaha13@mail.ru*

Поступила в редакцию 09.05.2020 г.

После доработки 11.08.2020 г.

Принята к публикации 07.09.2020 г.

Рассматривается классическая задача нелинейного продольного изгиба стержня от действия сжимающей продольной силы. Получены расчетные зависимости в элементарных функциях для прямого аналитического определения основных параметров изогнутого стержня, таких как координаты очертания стержня, изгибаемые углы по длине стержня, эпюры моментов силы и внутренней энергии изгиба. Сравнение полученных расчетных значений с результатами известных (базовых) решений (Сикорского Ю.С., Попова Е.П., Захарова Ю.В. – Охоткина К.Г.) дало, в целом, достаточно близкую сходимость результатов ( $\sim 1-2\%$ ), приведены примеры расчета, в том числе со сравнением с данными линейного расчета. Полученные результаты могут быть использованы как для теоретических исследований, так и для инженерных расчетов на практике, в частности при определении (обратным методом) жесткости стержней произвольного поперечного сечения, либо модуля упругости различных материалов (композитных) при известных сечениях стержня, в том числе при конструировании защитных сооружений от опасных склоновых геофизических процессов и др.

*Ключевые слова:* продольный изгиб, нелинейная задача, эллиптические функции, эллиптические интегралы 1 и 2 рода, изгибающий момент сил, внутренняя энергия изгиба

DOI: 10.31857/S0572329921040024

**Введение.** В статье рассматривается классическая задача нелинейного продольного изгиба тонкого упругого стержня от действия сжимающей продольной силы. Результаты имеющихся аналитических решений указанной задачи представлены в сложных эллиптических функциях Якоби (не выражающихся через элементарные функции) и определение по ним основных параметров изогнутого стержня, таких как координаты очертания стержня, изгибаемые углы по длине стержня, эпюры моментов силы и внутренней энергии изгиба, предполагает использование при проведении прикладных исследований численных методов.

**Материалы и методы исследований.** Строгое решение классической задачи нелинейного продольного изгиба тонкого упругого стержня длиной  $L$  с жестко защемленным одним концом в центре координат  $xOy$ , на другой свободный конец которого действует продольная сжимающая сила  $P$  (рис. 1), рассматривалась в работах [1–4]. В частно-

сти, для данного случая на основе уравнения равновесия стержня, приведенного к виду уравнения нелинейного маятника [3–6]

$$\frac{d^2\theta}{dl^2} + \frac{P}{EJ} \sin \theta = \frac{d^2\theta}{dt^2} + \beta^2 \sin \theta = 0 \quad (1)$$

получено решение для определения значения угла  $\theta$  между касательной к текущей точке изогнутого стержня и осью  $Ox$  в виде

$$\theta = 2 \arcsin [\lambda \cdot \operatorname{sn}(u, \lambda)] \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) даны следующие обозначения:  $E$  – модуль упругости материала стержня;  $J$  – момент инерции сечения стержня;  $EJ$  – изгибная жесткость стержня;  $l$  – текущее значение длины дуги стержня;  $t = l/L$  – приведенная длина стержня;  $\beta = \sqrt{\frac{PL^2}{EJ}}$  – силовой коэффициент подобия [3];  $\operatorname{sn}(u, \lambda)$  – эллиптический синус Якоби при модуле  $\lambda = \sin \alpha$  ( $\alpha$  – модулярный угол) и аргументе  $u = K(\lambda) \cdot t$ , где  $K(\lambda)$  – полный эллиптический интеграл 1 рода при модуле  $\lambda$ .

При этом собственное (относительное) значение силы  $\bar{P}$  [2, 4, 5] для рассматриваемой схемы будет равно

$$\bar{P} = \frac{P}{P_E} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 K^2 \quad (3)$$

где  $P_E = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{EJ}{L^2}$  – эйлерова критическая сила.

В формуле (3) и далее обозначение модуля  $\lambda$  в эллиптических интегралах и функциях опущено для упрощения записей, то есть  $K(\lambda) \equiv K$ ,  $K'(\lambda) \equiv K'$ ,  $E(\lambda) \equiv E$ ,  $E(\varphi, \lambda) \equiv E(\varphi)$ ,  $\operatorname{sn}(u, \lambda) \equiv \operatorname{sn}(u)$ ,  $\operatorname{cn}(u, \lambda) \equiv \operatorname{cn}(u)$ ,  $\operatorname{dn}(u, \lambda) \equiv \operatorname{dn}(u)$ .

В результате интегрирования соотношений  $dx/dl = \cos \theta = 1 - 2\lambda^2 \operatorname{sn}^2(u)$  и  $dy/dl = \sin \theta = 2\lambda \cdot \operatorname{sn}(u) \operatorname{dn}(u)$ , где  $\operatorname{dn}(u)$  – эллиптическая дельта-функция Якоби, вдоль длины стержня и преобразований в [4] получены расчетные зависимости для определения координат  $x$  и  $y$  изогнутой оси стержня в зависимости от значений эллиптических интегралов и функций Якоби в виде (при  $L = 1$ ):

$$x = -t + \frac{2}{K} E[\operatorname{am}(u)], \quad y = \frac{2\lambda}{K} [1 - \operatorname{cn}(u)] \quad (4)$$

в которых  $\operatorname{cn}(u)$  – эллиптический косинус Якоби;  $E[\operatorname{am}(u)]$  – неполный эллиптический интеграл 2 рода при эллиптической амплитуде Якоби [7–9]  $\operatorname{am}(u) = \arcsin[\operatorname{sn}(u)]$ , аргументе  $u$  и модуле  $\lambda$ .

Следует отметить, что выполнение прикладных аналитических расчетов для инженерных задач по полученным зависимостям (4) с эллиптическими функциями и интегралами (не выражающимися через элементарные функции) представляет собой значительные математические трудности, связанные с использованием специальных графиков и таблиц, необходимостью нелинейно-перекрестного (и обратного) интерполирования их данных и т.д. Результаты же численных решений, определяя дискретные значения специальных функций (интегралов) в отдельных точках, ограничены в возможностях выявления обобщенных причинно-следственных связей исходных факторов и оценке их влияния на итоговые результаты [11–14].

В связи с этим, ниже приводятся расчетные зависимости, позволяющие выразить вышеизложенные результаты в элементарных функциях, полученных на основе гид-

ромеханических решений (с погрешностью  $\ll 1-2\%$ ), с расширением области определяемых характеристик стержня.

При этом для прямого расчета эллиптического синуса Якоби  $\text{sn}(u)$  получена новая формула, основанная на работах [11, 12, 15], в виде:

$$\text{sn}(u) = \frac{(1 + R^{-2}) \sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{1 + R^{-2} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)} \quad \left( \text{при } \frac{K'}{2K} \geq 1 \text{ или } \lambda \leq 0.171259 \right) \quad (5)$$

$$\text{sn}(u) = \frac{(\xi^* - n)(1 - m)}{\xi^*(1 + m - 2n) + n(1 + m) - 2m} \quad \left( \text{при } \frac{K'}{2K} < 1 \text{ или } \lambda > 0.171259 \right) \quad (6)$$

в которых

$$R = \text{ch}\left(\frac{\pi K'}{2K}\right), \quad \xi^* = \frac{2}{r} \frac{\text{ch}\left[\frac{\pi}{K'}(u + K)\right]}{1 + r^{-2} \text{ch}^2\left[\frac{\pi}{K'}(u + K)\right]} \quad (7)$$

$$m = \frac{2r}{1 + r^2}, \quad n = \frac{2}{r} \cdot \frac{\text{ch}\left(\frac{\pi K}{K'}\right)}{1 + r^{-2} \cdot \text{ch}^2\left(\frac{\pi K}{K'}\right)}, \quad r = \text{ch}\left(\frac{2\pi K}{K'}\right), \quad u = K \cdot t$$

При этом эллиптический косинус Якоби  $\text{cn}(u)$  равен [1, 7, 8]  $\text{cn}(u) = \sqrt{1 - \text{sn}^2(u)}$ .

Значения  $K$  и  $K'$  (полного эллиптического интеграла 1 рода при дополнительном модуле  $\lambda' = \sqrt{1 - \lambda^2}$ ) могут быть определены по зависимостям [10–14]:

$$K = \frac{\pi}{2} + \frac{\ln \sqrt{1 - \lambda^2}}{\ln[0.35(1 - 0.2\sqrt{1 - \lambda^2})]} \quad (8)$$

$$K' = \frac{2K}{\pi} \text{Arch} \frac{1 + \sqrt{1 - \lambda^2}}{\lambda} \quad (\text{при } \lambda \leq 0.45) \quad (9)$$

$$K' = \frac{\pi}{2} + \frac{\ln \lambda}{\ln[0.35(1 - 0.2\lambda)]} \quad (\text{при } \lambda > 0.45)$$

В зависимости (4) величина неполного эллиптического интеграла 2 рода  $E[\text{am}(u)]$  находится по нижеследующим усовершенствованным формулам (10) [14], подставляя в них вместо  $\varphi$  величину эллиптической амплитуды Якоби  $\text{am}(u) = \arcsin[\text{sn}(u)]$ , в котором значение эллиптического синуса Якоби  $\text{sn}(u)$  рассчитывается по (5)–(9):

$$E(\varphi) = \begin{cases} \varphi - (\varphi - \sin \varphi) \frac{\alpha_0}{90^\circ}, & 0 \leq \varphi \leq 1 \\ \left[ 2E + \left( 1 - 0.1\pi \frac{\alpha_0}{180^\circ} \right) \frac{\pi - 2\varphi}{\varphi - 1} \right] \frac{\varphi - 1}{\pi - 2}, & 1 < \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (10)$$

где  $\alpha_0 = \frac{\alpha}{\pi} \cdot 180^\circ$  – модулярный угол (в градусах);  $E$  – полный эллиптический интеграл 2 рода, определяемый по [10, 12, 13]:

$$E = \ln \sqrt{e^\pi - (e^\pi - e^2) \cdot \lambda^2} \quad (11)$$

**Результаты исследования и их обсуждение.** Значения  $E(\varphi)$ , полученные по зависимостям (10), достаточно близко (~1%) согласуются с графиками точного решения [7, 9], а для граничных участков полностью совпадают с точными формулами. В частности, при  $\alpha_0 = 0$ ;  $\pi/2$  и  $\varphi = 0$ ;  $\pi/2$ , соответственно,  $E(\varphi, 0) = \varphi$ ;  $E(\varphi, 1) = \sin \varphi$  и  $E(0, \lambda) = 0$ ;  $E(\pi/2, \lambda) = E$ .

Таким образом, подставляя значения рекомендуемых расчетных зависимостей в элементарных функциях (5)–(11) в формулы (4), полностью рассчитываются координаты изогнутой оси стержня для заданных значений модуля  $\lambda$ . При этом, для свободного конца стержня (точки  $A$ :  $t = 1, u = K$ ) формулы (4) получают вид:

$$x_A = 2 \frac{E}{K} - 1, \quad y_A = 2 \frac{\lambda}{K} \quad (12)$$

Значения изгибающих моментов в любой точке стержня определяются по формуле [1]  $M = \bar{P}(y_A - y)$ , подставляя в которую величины  $y_A, y$  из (12), (4) и преобразовывая, окончательно получим

$$M = 2\bar{P} \frac{\lambda}{K} \operatorname{cn}(K \cdot t) \quad (13)$$

Изгибающий момент  $M$  для концевой свободной точки стержня ( $t = 1$ ) и точки заделки ( $t = 0$ ) имеет, соответственно, минимальное (нулевое) и максимальное значения,  $M_{\min} = 0$  и  $M_{\max} = 2\bar{P}\lambda/K$ .

Аналогично, угол  $\theta$  между касательной к текущей точке изогнутого стержня и осью  $Ox$  (см. рис. 1), определяемый по формуле (2), для точек  $t = 1$  и  $t = 0$  принимает значения, соответственно,  $\theta_{\max} = 2 \arcsin(\lambda)$  и  $\theta_{\min} = 0$ .

Приращение угла изгиба  $\theta$  вдоль длины стержня определится производной

$$\theta' = \frac{d\theta}{dt} = -2\lambda K \cdot \operatorname{cn}(K \cdot t) \quad (14)$$

с максимальным значением  $\theta'_{\max}$  в точке заделки ( $t = 0$ ), равным  $\theta'_{\max} = -2\lambda K$ .

Внутренняя энергия изгиба стержня  $V$  определится (при  $\varphi = 0$ ) по зависимости [3]

$$V = \bar{P}L \left\{ \frac{2}{\beta} [E - E(\varphi)] - 2(1 - \lambda^2) \right\} = 2\bar{P}L \left( \frac{E}{\beta} + \lambda^2 - 1 \right) \quad (15)$$

Вышеприведенные расчетные зависимости в элементарных функциях при заданных значениях модуля  $\lambda$  позволяют напрямую рассчитать все необходимые характеристики продольно изогнутого стержня. Для исходной же заданной величины силовой нагрузки  $\bar{P}$  значение модуля  $\lambda$  находится методом подбора из зависимости (3), подставляя в нее вместо  $K$  его значение из формулы (8).

В нижеследующих таблицах 1 и 2 дается сравнение значений координат изогнутого стержня, подсчитанных по рекомендуемым зависимостям (4)–(12) с результатами базового решения Сикорского Ю.С. [1, с. 74, таблицы  $a, b$ ], основанного на нелинейно-перекрестном (и обратном) интерполировании табличных данных, соответственно, при силовой нагрузке  $\bar{P} = 1.293$  для заданных значений амплитуды  $\varphi = \operatorname{am}(u) = \arcsin[\operatorname{sn}(K \cdot t)]$ , равных  $0; 30^\circ; 60^\circ; 90^\circ$ , и для концевой точки ( $t = 1$ ) стержня при раз-

**Таблица 1.** Координаты изогнутого стержня при  $\bar{P} = 1.293$  и заданных амплитудах  $\varphi$ 

Амплитуда $\varphi$ (в град.)	Приведенная длина стержня $t$	Координата $x$			Координата $y$		
		базовое решение [1]	по автору (4)–(12)	%	базовое решение [1]	по автору (4)–(12)	%
0	0	0	0	0	0	0	0
30	0.299	0.277	0.275	–0.6	0.096	0.096	0
60	0.629	0.469	0.457	–2.5	0.360	0.358	–0.7
90	1	0.560	0.577	+3.0	0.720	0.715	–0.7

**Таблица 2.** Координаты концевой точки изогнутого стержня при силовых нагрузках  $\bar{P}$ 

Номера	Силовая нагрузка $\bar{P}$	Координата $x$			Координата $y$		
		базовое решение [1]	по автору (4)–(12)	%	базовое решение [1]	по автору (4)–(12)	%
I	1.015	0.970	0.972	+0.2	0.220	0.219	–0.3
II	1.064	0.881	0.887	+0.8	0.422	0.422	0
III	1.152	0.741	0.752	+1.5	0.593	0.593	0
IV	11.293	0.560	0.577	+3.0	0.720	0.718	–0.2
V	1.518	0.349	0.363	+4.2	0.792	0.787	–0.6
VI	1.884	0.123	0.131	+6.5	0.803	0.799	–0.5
VII	2.541	–0.107	–0.108	+1.2	0.750	0.748	–0.3
VIII	4.029	–0.340	–0.345	+1.4	0.625	0.624	–0.1
IX	9.116	–0.577	–0.578	+0.1	0.421	0.421	0

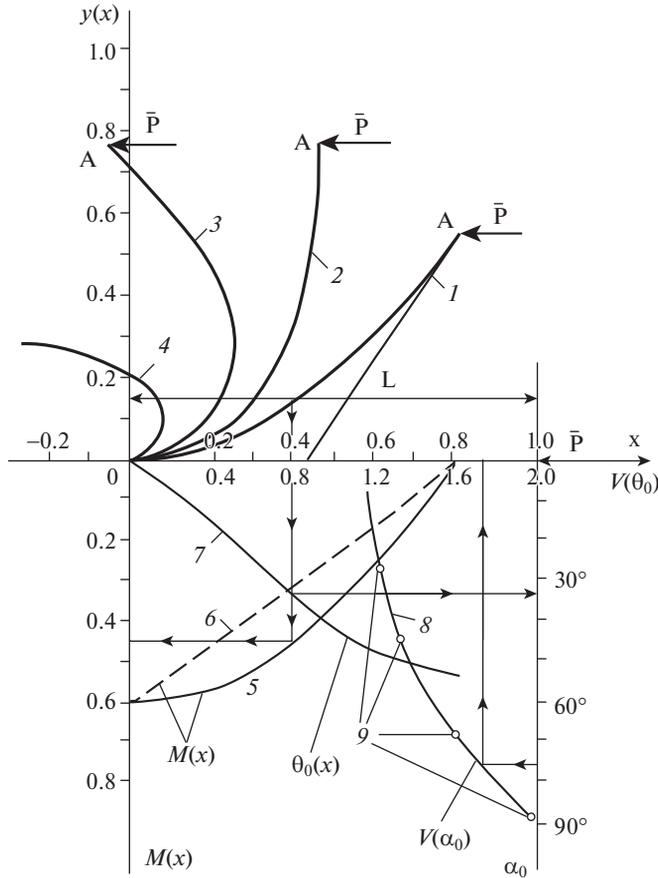
личных (девяти) значениях силовой нагрузки  $\bar{P}$ . При этом значения  $t$  получены обратным расчетом из заданных величин амплитуды  $\varphi$ .

Как следует из таблиц 1 и 2, результаты подсчетов координат изогнутого стержня, в том числе и концевой точки стержня, при различных значениях силовой нагрузки  $\bar{P}$  и амплитуд  $\varphi$ , подсчитанные по предлагаемым зависимостям на основе элементарных функций (4)–(12), достаточно близко (в целом  $\sim$  до 2–3%) согласуются с результатами базового решения Сикорского Ю.С. [1], основанным на нелинейно-перекрестном (и обратном) интерполировании табличных данных (Примечание: Отдельные отклонения в таблицах по координате  $x$  могут быть обусловлены, в частности, погрешностями интерполяции в базовом решении [1]).

Кроме этого, расчет по формулам (4)–(12) абсциссы концевой точки изогнутого стержня для заданной силовой нагрузки  $\bar{P} = 2.160$  показал близкое совпадение ( $x = 0.011$ ) с нулевым значением точного решения Попова Ю.С. [3, рис. 5.4, с. 114].

На рисунке приведена схема изогнутого стержня от действия продольной силовой нагрузки  $\bar{P}$  с рассчитанными по рекомендуемым формулам (4)–(12) значениями:

– для заданных величин  $\lambda^2$ , равных  $\sqrt{0.2}$  ( $\alpha = 0.1476\pi$ ),  $\sqrt{0.5}$  ( $\alpha = 0.25\pi$ ),  $\sqrt{0.85}$  ( $\alpha = 0.3734\pi$ ),  $\sqrt{0.99999}$  ( $\alpha = 0.4990\pi$ ) (кривые 1–4), близко совпадающих с очертаниями указанных кривых по численному расчету [4, рис. 3, с. 129];



**Рис. 1.** Расчетная схема продольного изгиба стержня: 1–4 – очертания изогнутых стержней для заданных значений  $\lambda^2$ , равных  $\sqrt{0.2}$ ,  $\sqrt{0.5}$ ,  $\sqrt{0.85}$ ,  $\sqrt{0.99999}$ ; 5, 6 – эпюры моментов силы  $M(x)$  по длине стержня при  $\lambda^2 = \sqrt{0.2}$  для нелинейной и линейной задач; 7, 8 – графики углов изгиба  $\theta_0(x)$  по длине стержня при  $\lambda^2 = \sqrt{0.2}$  и внутренней энергии изгиба стержня  $V(\alpha_0)$  в зависимости от модулярного угла  $\alpha_0$ ; 9 – точки энергии изгиба  $V(\alpha_0)$ , соответствующие стержням с значениями  $\lambda^2$ , равными  $\sqrt{0.2}$ ,  $\sqrt{0.5}$ ,  $\sqrt{0.85}$ ,  $\sqrt{0.99999}$ .

– для эпюр изгибающих моментов силы  $M(x)$  по длине стержня при значении  $\lambda^2 = \sqrt{0.2}$  с учетом нелинейности (кривая 5) и линейной задачи (прямая 6);

– для графиков углов изгиба  $\theta_0(x) = \frac{\theta}{\pi} \cdot 180^\circ$  (между касательной к текущей точке и осью  $Ox$  – в градусах) при  $\lambda^2 = \sqrt{0.2}$  (кривая 7) и внутренней энергии изгиба стержня  $V(\alpha_0)$  в зависимости от значений модулярного угла  $\alpha_0$  (кривая 8);

– для точек на кривой внутренней энергии изгиба  $V(\alpha_0)$ , соответствующих стержням с значениями  $\lambda^2$ , равными  $\sqrt{0.2}$ ;  $\sqrt{0.5}$ ;  $\sqrt{0.85}$ ;  $\sqrt{0.99999}$  (точки 9).

Как следует из рисунка, максимальные значения изгибающих моментов  $M(x)$  и внутренней энергии изгиба  $V(\alpha_0)$  сосредоточены в начальной точке задела стержня  $O$ ,

в которой угол  $\theta_0(x)$  сопряжения с осью  $Ox$  имеет нулевое значение. При этом сравнительная оценка эпюр изгибающих моментов по длине стержня для нелинейной (кривая 5) и линейной (прямая 6) задач показывает значительное занижение значений последней. В частности, занижение значений для рассмотренного случая изгибаемого стержня при  $\lambda^2 = \sqrt{0.2}$  достигает до 30% и более, что указывает на неприемлемость применения “чисто линейного” метода при решении прикладных задач на практике.

**Заключение.** В работе рассматривается классическая задача нелинейного продольного изгиба стержня от действия сжимающей продольной силы. При этом получены расчетные зависимости в элементарных функциях для прямого аналитического определения основных параметров изогнутого стержня, таких как координаты очертания стержня, изгибаемые углы по длине стержня, эпюры моментов силы и внутренней энергии изгиба. Сравнение полученных расчетных значений с результатами известных (базовых) решений (Сикорского Ю.С., Попова Е.П., Захарова Ю.В. – Охоткина К.Г.) дало в целом достаточно близкую сходимость результатов (~1–2%), приведены примеры расчета, в том числе с сравнением с данными линейного расчета. Полученные результаты могут быть использованы как для теоретических исследований, так и для инженерных расчетов на практике, в том числе и при определении (обратным методом) жесткости стержней произвольного поперечного сечения, либо модуля упругости различных материалов (композитных) при известных сечениях стержня, в том числе при конструировании защитных сооружений от опасных склоновых геофизических процессов и др.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сикорский Ю.С. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. М.–Л.: НКТП СССР, 1936. 365 с.
2. Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями. М.: Наука, 1968. 503 с.
3. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986. 294 с.
4. Захаров Ю.В., Охоткин К.Г. Нелинейный изгиб тонких упругих стержней // Прикладная механика и техническая физика. 2002. Т. 43. № 5. С. 124–131.
5. Захаров Ю.В., Захаренко А.А. Динамическая потеря устойчивости в нелинейной задаче о консоли // Вычислительные технологии. 1999. Т. 4. № 1. С. 48–54.
6. Анахаев К.Н. К расчету математического маятника // Доклады Академии наук. 2014. Т. 459. № 3. С. 288–293.
7. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.
8. Милн-Томсон Л. Эллиптические функции Якоби и зэта-функции / Справочник по специальным функциям. Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979. С. 380–400.
9. Милн-Томсон Л. Эллиптические интегралы / Справочник по специальным функциям. Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979. С. 401–441.
10. Анахаев К.Н. О методах расчёта потенциальных (фильтрационных) потоков на основе эллиптических интегралов Якоби // Гидротехническое строительство. 2008. № 8. С. 7–9.
11. Анахаев К.Н. О совершенствовании гидромеханических методов расчета потенциальных (фильтрационных) потоков // “Инженерные системы – 2009”. Труды междунар. науч.-практ. конф. Т. 2. М.: РУДН, 2009. С. 588–595.
12. Анахаев К.Н. Об определении эллиптических функций Якоби // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. 2009. № 2. С. 90–95.
13. Анахаев К.Н. О полных эллиптических интегралах 3-го рода в задачах механики // Доклады Академии наук. 2017. Т. 473. № 2. С. 151–153.
14. Анахаев К.Н. Эллиптические интегралы в нелинейных задачах механики // Доклады Российской Академии наук. Физика. Технические науки. 2020. Т. 491. № 2. С. 24–29.
15. Анахаев К.Н. О расчете потенциальных потоков // Доклады Академии наук. 2005. Т. 401. № 3. С. 337–341.

УДК 531.31, 629.78

## РАСЧЕТ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ КОСМИЧЕСКОЙ ЗОНТИЧНОЙ АНТЕННЫ ПРИ СИЛЬНОМ ИЗГИБЕ РАДИАЛЬНЫХ СТЕРЖНЕЙ, СВЯЗАННЫХ ПО ПАРАЛЛЕЛЯМ РАСТЯЖИМЫМИ ТРОСАМИ

© 2021 г. С. В. Русских<sup>a,b,\*</sup>, Ф. Н. Шклярчук<sup>b,a,\*\*</sup>

<sup>a</sup> *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Институт прикладной механики Российской академии наук, Москва, Россия*

\*e-mail: sergey.russkih@rambler.ru

\*\*e-mail: shklyarchuk@list.ru

Поступила в редакцию 20.06.2020 г.

После доработки 28.07.2020 г.

Принята к публикации 31.08.2020 г.

Рассматривается циклически симметричная зонтичная антенна, каркас которой состоит из гибких нерастяжимых радиальных стержней, связанных в узлах по параллелям растяжимыми тросами. В начальном транспортировочном положении многозвенные стержни уложены в упаковки, ориентированные в направлении оси системы. После устранения связей упаковок стержни разворачиваются в радиальных плоскостях под действием упругих пружин, соединяющих звенья, и фиксируются в прямолинейных положениях под заданным углом по отношению к оси, при котором все тросы, связывающие однотипные узлы стержней, принимают форму правильных многоугольников, оставаясь при этом ненапрянутыми. Далее под действием силы демпфирующего гидроцилиндра с предварительно сжатыми пружинами корневые части всех стержней медленно поворачиваются до упоров. В конечном положении радиальные стержни, соединенные в узлах натянутыми тросами, принимают изогнутую форму. Жесткости тросов на растяжение определяются так, чтобы радиальные и осевые координаты узлов изогнутых стержней совпадали с координатами точек заданной поверхности вращения.

Построена модель сильного изгиба гибкого нерастяжимого стержня с учетом действующих на него в узлах неизвестных радиальных реакций натянутых тросов. Звенья стержня рассматриваются как последовательно соединенные между собой в узлах “консольные” элементы в местных системах координат, которые могут совершать большие перемещения и повороты. Изгиб каждого элемента описывается двумя заданными функциями, усадка элемента за счет изгиба учитывается в квадратичном приближении. Полученные нелинейные уравнения деформирования системы с учетом геометрических связей в узлах решаются по методу последовательных приближений относительно неизвестных реакций тросов. По полученным значениям реакций затем при заданных координатах узлов определяются требуемые жесткости тросов на растяжение.

В качестве примера расчета рассмотрена параболическая антенна при различных числах радиальных стержней и составляющих из звеньев. Выполнены оценки точности предложенной расчетной модели формообразования антенны.

*Ключевые слова:* космические зонтичные антенны, упругие стержни, растяжимые тросы, формообразование, сильный изгиб, нелинейные задачи, метод конечных элементов

DOI: 10.31857/S0572329921050093

**1. Введение.** Составные космические антенны больших размеров выводятся в космос в сложенном состоянии и развертываются в условиях вакуума и невесомости.

Вопросы проектирования и расчета складных антенн зонтичного типа рассмотрены в книге [1]. Обзор современных трансформируемых конструкций антенн представлен в [2, 3]. Применение метода конечных элементов и коммерческих программных комплексов для численного моделирования статике и динамики крупногабаритных космических антенн рассмотрено в [4–8]. Нелинейные уравнения динамики развертывания плоской системы последовательно соединенных упругими шарнирами с упорами гибких нерастяжимых стержней, сложенных в начальном состоянии в упаковку, получены в [9, 10], где приведены аналитические выражения в виде формул для всех коэффициентов уравнений в обобщенных координатах.

Заданная деформированная форма антенны после развертывания и успокоения колебаний получается при проектировании конструкции как статически неопределимой системы путем определения требуемых для устойчивого равновесия этой формы внутренних усилий силовых элементов. Для этого требуется решить обратную геометрически нелинейную задачу деформирования системы с ограничениями и определить необходимые геометрические и жесткостные параметры ее некоторых регулируемых элементов. В [11] разработан алгоритм численного решения геометрически нелинейной задачи формообразования космической зонтичной антенны в виде пологой параболической поверхности вращения с циклически симметрично расположенными гибкими радиальными стержнями, соединенными по параллелям растяжимыми тросовыми элементами. В настоящей работе этот подход обобщается для антенны с неполюгой поверхностью вращения. В этом случае при решении задачи формообразования за счет деформирования гибких радиальных стержней рассматривается их сильный изгиб с большими перемещениями и углами поворота элементов.

**2. Постановка задачи.** Схема предлагаемой циклически симметричной космической антенны зонтичного типа с  $n$  радиальными стержнями 1, каждый из которых состоит из  $m$  звеньев, показана на рис. 1 в сложенном состоянии (а) и в конечном деформированном состоянии (б). Раскрытие и формообразование антенны происходит следующим образом. По сигналу устраняется удерживающая связь между корпусом демпфирующего гидроцилиндра 2 и штоком 3 и начинается медленное движение штока под действием предварительно сжатых пружин 4, за счет чего с помощью тросов 5 и рычагов 6 упаковки стержней 1 поворачиваются в радиальных плоскостях. При некотором отклонении упаковок разрываются связи 7 и многозвенные стержни с упругими шарнирными соединениями развертываются с фиксацией на упорах в прямолинейном положении. Считается, что в некотором заданном отклоненном положении (1', рис. 1, б) выпрямившихся стержней (при угле  $\beta_0$  между осью  $X$  и осью стержня) в силу выбора начальных длин участков тросов 8, соединяющих в плоскостях параллелей соответствующие узлы  $k = 1, 2, \dots, m$  стержней, эти участки становятся прямолинейными (без провисаний), но еще ненатянутыми. При этом все тросы  $k = 1, 2, \dots, m$  будут иметь форму правильных  $n$ -угольников. Следует заметить, что после быстрого (динамического) раскрытия упаковок упруго соединенных звеньев, каждый из  $n$  стержней станет прямолинейным в отклоненном на угол  $\tilde{\beta}_n > \beta_0$  положении с некоторым разбросом по времени и по углам  $\tilde{\beta}_n$ . Отклонения стержней при медленном (квазистатическом) ходе штока 3 демпфирующего гидроцилиндра будут выравниваться под действием соединяющих их тросов  $k = 1, 2, \dots, m$  поскольку во всех  $n$  элементах каждого из этих тросов усилия при циклической симметрии системы должны быть одинаковы.

При повороте рычагов 6 до упора тросы будут растягиваться, а стержни изгибаться в радиальных плоскостях под действием реакций тросов в узлах  $k = 1, 2, \dots, m$ . Конечная изогнутая форма 1 стержня с растянутыми тросами 8 показана на рис. 1, б. Полотно

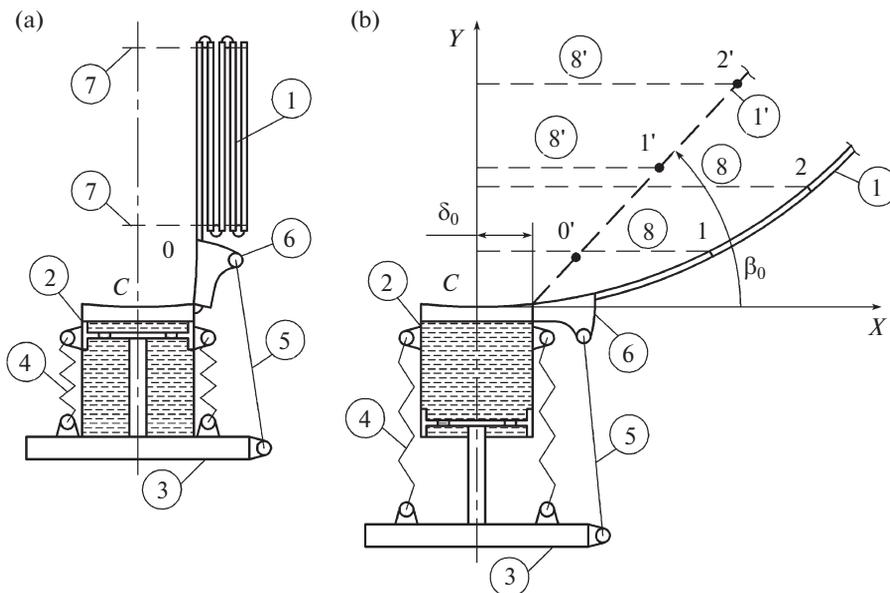


Рис. 1. Схема антенны в сложенном состоянии (а) и в конечном состоянии (б)

антенны соединяется со стержнями в отдельных точках, включая узлы; в сложенном состоянии оно находится в пространстве между упаковками стержней. При раскрытии и формообразовании составной конструкции антенны реакции полотна не учитываются.

Осесимметричная поверхность антенны имеет заданную форму  $Y = F(X)$ , рис. 1, б. При проектировании и расчете составной циклической симметричной конструкции антенны требуется, чтобы координаты узловых точек  $k = 1, 2, \dots, m$  изогнутых радиальных стержней совпадали с соответствующими координатами поверхности антенны  $X_k, Y_k = F(X_k), k = 0, 1, \dots, m$ . Центральный участок С–0 после поворота рычага б до упора считается абсолютно жестким и профилированным по форме  $Y = F(X); X = Y = 0$  в точке С и  $X_0 = a_0, Y_0 = F(a_0), \theta_0 = \text{arctg}(F'(a_0))$  в точке 0. Упругая часть стержня состоит из  $m$  звеньев примерно одинаковой длины  $a_k, k = 1, 2, \dots, m$  (для удобства складывания их в упаковки). При заданных значениях  $a_k$  координаты узлов изогнутого нерастяжимого стержня  $X_k, k = 1, 2, \dots, m$  вычисляются последовательно из соотношений

$$a_k = \int_{X_{k-1}}^{X_k} \sqrt{1 + F'^2} dX, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

с использованием метода итераций. Изгибная жесткость каждого звена  $EI_k$  в пределах его длины  $a_k$  считается постоянной.

Для описания сильного изгиба стержня каждое его звено  $k = 1, 2, \dots, m$  будем рассматривать как конечный элемент (КЭ) в местной системе координат  $xu$ , который в узле  $k - 1$  жестко связан с  $(k - 1)$ -м КЭ, рис. 2. Координаты и угол наклона оси стерж-

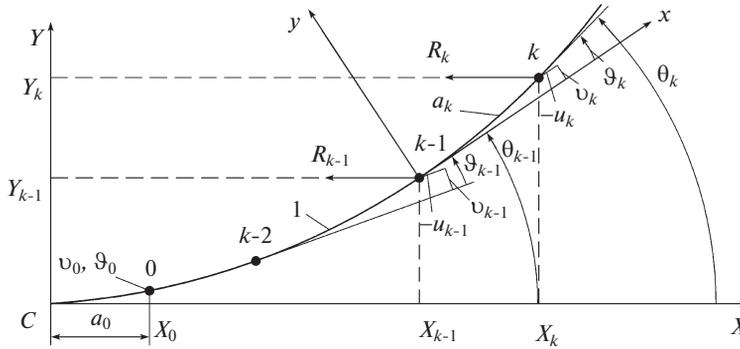


Рис. 2. Конечно-элементная модель сильного изгиба радиального стержня

ня в узле  $k-1$  равны  $X_{k-1}$ ,  $Y_{k-1}$ ,  $\theta_{k-1}$ . Относительное поперечное перемещение  $v(x)$  и угол поворота  $\vartheta(x)$   $k$ -го КЭ как консольного стержня длины  $a_k$  записываются в виде [11]

$$\begin{aligned} v(x) &= v_k \varphi_k(x) + \vartheta_k \psi_k(x), & \vartheta(x) &= v'(x) \\ \varphi_k(x) &= 3 \frac{x^2}{a_k^2} - 2 \frac{x^3}{a_k^3}, & \psi_k(x) &= \frac{x^3}{a_k^2} - \frac{x^2}{a_k} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где штрихом обозначена производная по координате  $x$ . Продольное перемещение  $u_k$  конца КЭ за счет сильного изгиба при условии, что стержень является нерастяжимым ( $\varepsilon = u' + 0.5v'^2 = 0$ ), с учетом (2.1) записывается в виде

$$u_k = -\frac{1}{2} \int_0^{a_k} (v')^2 dx = -\frac{1}{2} \left( \frac{6}{5a_k} v_k^2 - \frac{1}{10} v_k \vartheta_k + \frac{a_k}{15} \vartheta_k^2 \right) \quad (2.2)$$

Потенциальная энергия изгиба стержня

$$\Pi = \sum_{k=1}^m \Pi_k, \quad \Pi_k = \frac{1}{2} \frac{112EI_k}{a_k^3} \left( v_k^2 - a_k v_k \vartheta_k + \frac{a_k^2}{3} \vartheta_k^2 \right) \quad (2.3)$$

Перемещения и углы поворота в узлах стержня  $k = 1, 2, \dots, m$  определяются следующим образом

$$\begin{aligned} X_k &= a_0 + \sum_{i=1}^k [(a_i + u_i) \cos \theta_{i-1} - v_i \sin \theta_{i-1}] \\ Y_k &= v_0 + \sum_{i=1}^k [(a_i + u_i) \sin \theta_{i-1} + v_i \cos \theta_{i-1}] \\ \theta_k &= \vartheta_0 + \sum_{i=1}^k \vartheta_i \end{aligned} \quad (2.4)$$

Вариация работы сил  $R_k$  на перемещениях  $\delta X_k$  (рис. 2) записывается в виде

$$-\delta A = \sum_{k=1}^m R_k \delta X_k = \sum_{k=1}^m R_k \sum_{i=1}^k \left( \xi_i + y_i \sum_{j=1}^{i-1} \delta \vartheta_j \right) \quad (2.5)$$

где с учетом (2.2) и (2.4) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \xi_i &= (p_i c_{i-1} - q_i) \delta v_i + q_i c_{i-1} \delta \vartheta_i, \quad y_i = -(a_i + u_i) s_{i-1} + v_i c_{i-1}] \\ p_i &= -\frac{1}{5} \left( \frac{6}{a_i} v_i - \frac{1}{4} \vartheta_i \right), \quad q_i = -\frac{1}{5} \left( \frac{a_i}{3} \vartheta_i - \frac{1}{4} v_i \right), \quad u_i = \frac{1}{2} (p_i v_i + q_i \vartheta_i) \\ c_i &= \cos \theta_i, \quad s_i = \sin \theta_i \end{aligned}$$

Двойная и тройная суммы в (2.5) преобразуются как

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m R_k \sum_{i=1}^k \xi_i &= \sum_{k=1}^m \xi_k \sum_{i=k}^m R_i \\ \sum_{k=1}^m R_k \sum_{i=1}^k y_i \sum_{j=1}^{i-1} \delta \vartheta_j &= \sum_{k=1}^{m-1} \delta \vartheta_k \sum_{i=k+1}^m y_i \sum_{j=1}^m R_j \end{aligned}$$

Тогда получим

$$-\delta A = \sum_{k=1}^m \left[ \delta v_k (c_{k-1} p_k - s_{k-1}) \sum_{i=k}^m R_i + \delta \vartheta_k \left( q_k c_{k-1} \sum_{i=k}^m R_i + (1 - \delta_{km}) \sum_{i=k+1}^m y_i \sum_{j=i}^m R_j \right) \right] \quad (2.6)$$

где  $\delta_{km}$  – символ Кронекера ( $\delta_{km} = 0$  при  $k \neq m$ ,  $\delta_{km} = 1$  при  $k = m$ )

Уравнения равновесия изогнутого стержня в обобщенных координатах  $v_k$  и  $\vartheta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , получаются на основании принципа возможных перемещений  $\delta \Pi - \delta A = 0$  и с учетом (2.3), (2.6) записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{12EI_k}{a_k^3} \left( v_k - \frac{a_k}{2} \vartheta_k \right) + (c_{k-1} p_k - s_{k-1}) \sum_{i=k}^m R_i &= 0 \\ \frac{12EI_k}{a_k^3} \left( -\frac{a_k}{2} v_k + \frac{a_k^2}{3} \vartheta_k \right) + q_k c_{k-1} \sum_{i=k}^m R_i + (1 - \delta_{km}) \sum_{i=k+1}^m y_i \sum_{j=i}^m R_j &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$k = 1, 2, \dots, m$

Приведем уравнения (2.7) к безразмерному виду. Для этого введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{v}_k &= \frac{v_k}{a_k}, \quad \bar{u}_k = \frac{u_k}{a_k} = \frac{1}{2} (p_k \bar{v}_k + \bar{q}_k \vartheta_k) \\ p_k &= -\frac{1}{5} \left( 6\bar{v}_k - \frac{1}{4} \vartheta_k \right), \quad \bar{q}_k = -\frac{1}{5} \left( \frac{1}{3} \vartheta_k - \frac{1}{4} \bar{v}_k \right) \\ \xi_k^v &= c_{k-1} p_k - s_{k-1}, \quad \xi_k^\vartheta = c_{k-1} \bar{q}_k, \quad \eta_i = \frac{y_i}{a_i} = -(1 + \bar{u}_i) s_{i-1} + \bar{v}_i c_{i-1} \end{aligned} \quad (2.8)$$

С учетом (2.8) уравнения (2.7) записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{12EI_k}{a_k^2} \left( \bar{v}_k - \frac{1}{2} \vartheta_k \right) + \xi_k^v \sum_{i=k}^m R_i &= 0 \\ \frac{12EI_k}{a_k^2} \left( -\frac{1}{2} \bar{v}_k + \frac{1}{3} \vartheta_k \right) + \xi_k^\vartheta \sum_{i=k}^m R_i + (1 - \delta_{km}) \sum_{i=k+1}^m \eta_i \sum_{j=i}^m R_j &= 0 \end{aligned}$$

$k = 1, 2, \dots, m$

Преобразуем двойную сумму во втором уравнении:

$$\sum_{i=k+1}^m \eta_i \sum_{j=i}^m R_j = \sum_{i=k+1}^m R_i \sum_{j=k+1}^i \eta_j = \sum_{i=k+1}^m R_i \zeta_{ki},$$

$$\zeta_{ki} = \sum_{j=k+1}^i \eta_j = \begin{cases} 0, & i < k+1 \\ \eta_{k+1} + \eta_{k+2} + \dots + \eta_i, & i \geq k+1 \end{cases}$$

В результате уравнения (2.7) для обобщенных координат  $\bar{v}_k$  и  $\vartheta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  будут иметь вид

$$\frac{12EI_k}{a_k^2} \left( \bar{v}_k - \frac{1}{2} \vartheta_k \right) + \xi_k^v \sum_{i=k}^m R_i = 0$$

$$\frac{12EI_k}{a_k^2} \left( -\frac{1}{2} \bar{v}_k + \frac{1}{3} \vartheta_k \right) + \xi_k^\vartheta \sum_{i=k}^m R_i + (1 - \delta_{km}) \sum_{i=k+1}^m R_i \zeta_{ki} = 0 \quad (2.9)$$

$$k = 1, 2, \dots, m$$

Уравнения (2.9) для их численного решения запишем в матричном виде в зависимости от векторов перемещений  $\mathbf{V} = \{\bar{v}_k\}$ , углов поворота  $\mathbf{\Omega} = \{\vartheta_k\}$  и реакций тросов  $\mathbf{R} = \{R_k\}$ :

$$12\mathbf{G} \left( \mathbf{V} - \frac{1}{2} \mathbf{\Omega} \right) + \mathbf{A} \mathbf{R} = 0$$

$$12\mathbf{G} \left( -\frac{1}{2} \mathbf{V} + \frac{1}{3} \mathbf{\Omega} \right) + \mathbf{B} \mathbf{R} = 0 \quad (2.10)$$

где матрица жесткости  $\mathbf{G}$  и нелинейные матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  порядка  $m$  имеют вид:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{EI_k}{a_k^2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \xi_1^v & \xi_1^v & \dots & \xi_1^v & \xi_1^v \\ 0 & \xi_2^v & \dots & \xi_2^v & \xi_2^v \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \xi_{m-1}^v & \xi_{m-1}^v \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \xi_m^v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \xi_1^\vartheta & \xi_1^\vartheta & \dots & \xi_1^\vartheta & \xi_1^\vartheta \\ 0 & \xi_2^\vartheta & \dots & \xi_2^\vartheta & \xi_2^\vartheta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \xi_{m-1}^\vartheta & \xi_{m-1}^\vartheta \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \xi_m^\vartheta \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \xi_{12} & \dots & \xi_{1,m-1} & \xi_{1,m} \\ 0 & 0 & \dots & \xi_{2,m-1} & \xi_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \xi_{m-1,m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

**3. Алгоритм решения задачи.** Формообразование поверхности вращения (или в данном случае – изогнутого радиального стержня каркаса, на который накладывается с некоторым натяжением мягкая оболочка) согласно уравнению  $Y = F(X)$  может осуществляться в пределах рассматриваемых элементов за счет выбора реакций  $R_k$  натяну-

тых тросов, расположенных в плоскостях параллелей, или за счет изгибных жесткостей  $EI_k$  элементов радиальных стержней, или за счет изменения тех и других одновременно. Решение такой нелинейной задачи является неединственным и в некоторых областях изменения указанных параметров оно может не существовать.

Здесь рассматривается случай, когда уравнение заданной формы  $Y = F(X)$  удовлетворяется в точках  $k = 1, 2, \dots, m$  за счет регулируемых реакций тросов  $R_k$  только по координатам  $X_k$  и  $Y_k = F(X_k)$ , а углы наклона  $\theta_k$  в этих точках остаются свободными, т.е. не требуется выполнение условия  $\theta_k = \arctg(F'(X_k))$ . Жесткости  $EI_k$  элементов изгибаемого стержня считаются заданными.

Эквивалентное перемещение  $v_k$  изогнутого стержня, точно соответствующее заданной форме по координатам  $X_k, Y_k = F(X_k)$  определяется из кинематических соотношений:

$$v_k = -(X_k - X_{k-1}) \cos \theta_{k-1} + (Y_k - Y_{k-1}) \sin \theta_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (3.1)$$

где  $\theta_k = \vartheta_0 + \sum_{i=1}^k \vartheta_i$ ,  $\vartheta_0 = \arctg(F'(X_0))$ ; углы  $\vartheta_i$  при  $i = 1, 2, \dots, m$  считаются неизвестными наряду с реакциями  $R_k$  при  $k = 1, 2, \dots, m$ .

В результате безразмерные перемещения  $\bar{u}_k, \bar{v}_k$  и параметры (2.8), входящие в уравнения (2.9) и, соответственно, в нелинейные матрицы  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  (2.11), зависят от неизвестных углов  $\vartheta_i, i = 1, 2, \dots, m$ . Таким образом, при выполнении кинематических соотношений (3.1) основными неизвестными будут  $\vartheta_k$  и  $R_k, k = 1, 2, \dots, m$ , т.е. – векторы  $\mathbf{\Omega} = \{\vartheta_k\}$  и  $\mathbf{R} = \{R_k\}$ , для определения которых имеем уравнения (2.10). Для удобства решения систему двух матричных уравнений (2.10) путем исключения вектора  $\mathbf{R}$  приведем к одному уравнению, содержащему только неизвестные параметры  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m$ :

$$\mathbf{G}\mathbf{\Omega} = \left(\frac{1}{2}\mathbf{A} + \mathbf{B}\right) \left(\frac{1}{3}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{B}\right)^{-1} \mathbf{G}\mathbf{V} = \mathbf{P} \quad (3.2)$$

Это уравнение с учетом системы соотношений (3.1) решается методом последовательных приближений по схеме  $\mathbf{G}\mathbf{\Omega}^{(r+1)} = \mathbf{P}^{(r)}$ , где  $r = 0, 1, \dots$  – номер приближения по набору неизвестных параметров  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m$ ;  $\mathbf{P}^{(r)}$  – вектор (правая часть уравнения (3.2)), зависящий от  $\vartheta_1^{(r)}, \vartheta_2^{(r)}, \dots, \vartheta_m^{(r)}$ . В начальном (нулевом) приближении при  $r = 0$  для углов  $\vartheta_k$  будем использовать точные значения  $\vartheta_k^{(0)} = \vartheta_k^0$ , соответствующие заданной форме изогнутого стержня  $Y = F(X)$  в точках  $k$ , которые определяются как  $\vartheta_k^0 = \theta_k^0 - \vartheta_0 - \sum_{i=1}^{k-1} \vartheta_i^0$  при  $\theta_k^0 = \arctg(F'(X_k)), k = 1, 2, \dots, m$ .

После получения сходящегося с заданной точностью решения для вектора  $\mathbf{\Omega} = \{\vartheta_k\}$  вычисляется вектор реакций тросов  $\mathbf{R}$  из уравнения, которое получается из системы (2.10) путем исключения вектора  $\mathbf{G}\mathbf{\Omega}$ :

$$\mathbf{R} = -\left(\frac{1}{3}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{B}\right)^{-1} \mathbf{G}\mathbf{V} \quad (3.3)$$

В исходном состоянии после раскрытия системы радиальный стержень 1' является прямолинейным и отклоненным по отношению к оси  $X$  на некоторый угол  $\beta_0$ , рис. 1, б. Координаты точки  $k' = 1', 2', \dots, m'$  стержня в исходном состоянии равны  $X_{k'} = L_k \cdot \cos \beta_0$ ,

где  $L_k = (a_0 - \delta_0) + \sum_{i=1}^k a_i$  – расстояние между шарниром, соединяющим гидроцилиндр 2 с поворотным кронштейном 6 (рис. 1, а), и точкой  $k'$ . Длина  $k$ -го троса в виде правильного  $n$ -угольника, соединяющего по параллели  $k$ -е точки всех  $n$  радиальных стержней, выбирается так, что в исходном состоянии он является нерастянутым и не имеет провисаний. После поворота кронштейна 6 до упора (угол наклона стержня в корневой точке 0 станет равным  $\vartheta_0$ )  $k$ -й трос натянется с усилием  $T_k = F_k \sigma(\epsilon_k)$ , где  $F_k$  – площадь поперечного сечения,  $\sigma(\epsilon_k)$  – растягивающее напряжение в  $k$ -м тросе. Относительное удлинение  $k$ -го троса в конечном натянутом состоянии будет

$$\epsilon_k = \frac{X_k}{X_{k'}} - 1 \quad (3.4)$$

где  $X_k$  – известная координата узла  $k$  в конечном деформированном состоянии (т.е. координата заданной формы), а  $X_{k'} = L_k \cdot \cos \beta_0$  – координата узла  $k'$  в исходном недеформированном положении стержня.

Реакция  $k$ -го троса в  $k$ -м узле стержня определяется из уравнения равновесия узла

$$R_k = 2T_k \sin \frac{\pi}{n} = 2F_k \sigma(\epsilon_k) \sin \frac{\pi}{n} \quad (3.5)$$

При линейно-упругом деформировании тросов  $\sigma(\epsilon_k) = E_T \epsilon_k$  при  $\epsilon_k > 0$  и  $\sigma(\epsilon_k) = 0$  при  $\epsilon_k \leq 0$ , где  $E_T$  – модуль упругости материала троса. По найденным значениям  $R_k$  можно определить необходимые площади  $F_k$  или жесткости на растяжение  $E_T F_k$  тросов для получения формы  $Y_k = F(X_k)$  изогнутых радиальных стержней.

**4. Сильный изгиб консольного стержня.** Для верификации разработанной КЭ-модели сильного изгиба стержня, описываемой уравнениями (2.9), рассмотрим стержень длиной  $l$  с постоянной изгибной жесткостью  $EI$ , который неподвижно закреплен на конце  $s = 0$  и нагружен на конце  $s = l$  продольной сжимающей силой  $R_l$ , превышающей критическую силу потери устойчивости (эластика Эйлера). Дифференциальные уравнения изгиба нерастяжимого стержня (рис. 3) записываются в виде

$$\frac{dX}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{dY}{ds} = \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{R_l}{EI} (Y_l - Y) \quad (4.1)$$

где

$$Y_l = Y(l), \quad R_l > \frac{\pi^2 EI}{4 l^2}$$

Начальные условия при  $s = 0$ :  $X = 0$ ,  $Y = 0$ ,  $\theta = 0$ .

Выполнены сравнения решений дифференциальных уравнений (4.1) с решениями системы алгебраических уравнений (2.9) для КЭ-модели при трех различных значениях параметра  $\nu = R_l l^2 / EI$ : 2.5, 3.0, 3.5. Использовались следующие значения начальных (нулевых) приближений  $\bar{Y}_l = Y_l / l < 1$  для “пристрелки” при численных решениях уравнений (4.1) методом последовательных приближений в комбинации с методом Адамса:  $\bar{Y}_l = 0.25$  и  $\bar{Y}_l = 0.40$  при  $\nu = 2.5$ ;  $\bar{Y}_l = 0.50$  и  $\bar{Y}_l = 0.75$  при  $\nu = 3.0$ ;  $\bar{Y}_l = 0.65$  и  $\bar{Y}_l = 0.90$  при  $\nu = 3.5$  (два начальных значения  $\bar{Y}_l$  для одного  $\nu$  приводят к одному и тому же результату). Результаты сходящихся с точностью до  $10^{-9}$  решений для углов поворота  $\theta(s/l)$  в точках  $s/l = 1/4, 1/2, 3/4, 1.0$  приведены в табл. 1 в строках I.

При использовании КЭ-модели стержень делился на  $m = 4$  и  $m = 8$  одинаковых “консольных” КЭ ( $a_k = l/m$ ,  $EI_k = EI$ ,  $R_k = 0$  при  $k = 1, 2, \dots, m - 1$ ). В качестве нуле-

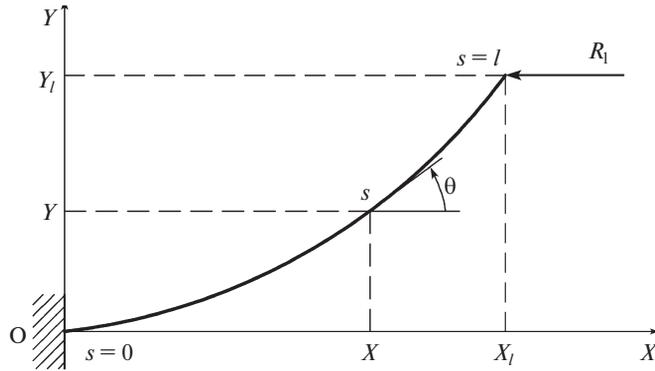


Рис. 3. Продольное сжатие нерастяжимого стержня (эластика Эйлера)

вого приближения при решении уравнений (2.9) методом последовательных приближений в этом случае использовались результаты решения уравнений (4.1) для  $\theta(s/l)$ . Полученные решения для рассмотренных случаев ( $\nu, m$ ) приведены в табл. 1 (строки II и III для  $m = 4$  и  $m = 8$ , соответственно).

На рис. 4, а, б, с показаны формы изгиба стержня в безразмерных координатах  $\bar{X} = X/l, \bar{Y} = Y/l$  для значений  $\nu = R_l l^2/EI$ , равных 2.5, 3.0, 3.5, соответственно.

Сравнения результатов решения уравнений (4.1) и (2.9) показывают, что КЭ-модель сильного изгиба стержня имеет достаточно высокую точность.

**5. Примеры расчета.** Рассмотрим параболическую антенну с формой  $Y = \lambda X^2$  при трех значениях параметра  $\lambda$ : 1/15, 1/10, 1/5; число радиальных стержней  $n = 24$ . Углы наклона стержней в начальном прямолинейном положении (рис. 1, б), в котором участки тросов, соединяющих  $k$ -е узлы стержней, также являются прямолинейными и ненапрянутыми, приняты равными  $\beta_0 = 60^\circ$  при  $\lambda = 1/15$  и  $\lambda = 1/10$ ,  $\beta_0 = 70^\circ$  при  $\lambda = 1/5$ . Длина центрального недеформируемого участка равна  $a_0 = 0.25$  м ( $\delta_0 = 0$ ). Максимальный диаметр антенны составляет около 20 м.

Выполнены расчеты сильного изгиба радиальных стержней антенны под действием реакций растянутых тросов в конечном деформированном состоянии циклически симметричной системы. Результаты получены путем решения нелинейных алгебраи-

Таблица 1. Верификация полученной КЭ-модели сильного изгиба стержня

$\nu$	Вар.	$\bar{Y}_l$	$\theta(1/4)$	$\theta(1/2)$	$\theta(3/4)$	$\theta(1)$
2.5	I	0.2037	0.1241	0.2290	0.2990	0.3236
	II	0.1879	0.1141	0.2107	0.2752	0.2978
	III	0.1995	0.1214	0.2241	0.2926	0.3166
3.0	I	0.6636	0.4825	0.8806	1.1368	1.2245
	II	0.6678	0.4839	0.8844	1.1423	1.2304
	III	0.6640	0.4824	0.8806	1.1369	1.2246
3.5	I	0.7704	0.6503	1.1739	1.5002	1.6095
	II	0.7772	0.6532	1.1823	1.5116	1.6213
	III	0.7713	0.6506	1.1747	1.5014	1.6107

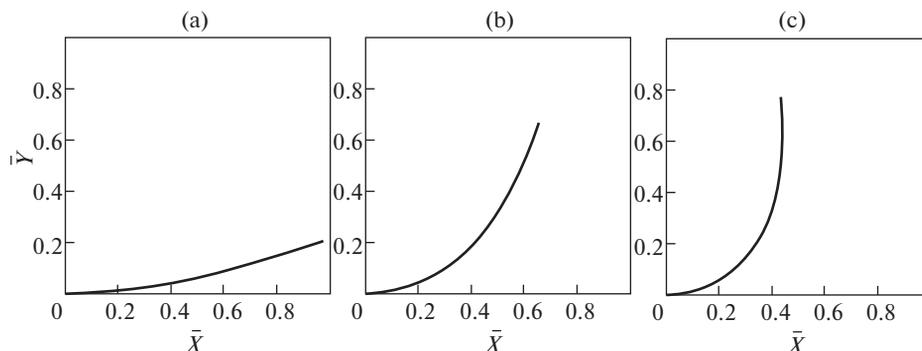


Рис. 4. Формы изгиба стержня для значений  $\nu$ , равных 2.5 (а), 3.0 (б), 3.5 (с)

ческих уравнений (3.2), (3.3) по методу последовательных приближений с точностью до  $10^{-9}$  относительно неизвестных  $\theta_k$ ,  $R_k$  с учетом условий связи (3.1), обеспечивающих точное выполнение заданной формы антенны в узлах по координатам  $X_k$ ,  $Y_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . При этом в качестве начальных приближений для  $\theta_k$  использовались значения  $\theta_k^0$  заданной формы, т.е.  $\theta_k^{(0)} = \theta_k^0$ .

Рассмотрены два расчетных случая для каждой из 3-х антенн, отличающихся значением  $\lambda$ :

1) Радиальный стержень антенны делится на 4 упругих звена ( $m = 4$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ ) длиной  $a_k = 3$  м; заданные изгибные жесткости этих звеньев  $EI_k$ , Па  $\cdot$  м<sup>4</sup> и проектные углы наклона в узлах заданной формы  $\theta_k^0 = \arctg(2\lambda X_k)$  представлены в табл. 2. Формы радиального стержня в начальном недеформированном состоянии (пунктирная линия) и в требуемом конечном деформируемом состоянии (сплошная линия) для  $m = 4$  при  $\lambda = 1/15, 1/10, 1/5$  представлены на рис. 5, а, б, с, соответственно, в координатах  $X, Y$ , м.

Таблица 2. Исходные данные и результаты расчета параметров антенны при  $m = 4$

$\lambda$	$k$	$EI_k$	$\theta_k^0$	$\theta_k$	$R_k$	$\varepsilon_k$	$E_T F_k$
$\frac{1}{15}$	1	1978.3237	0.3986	0.3885	47.8979	0.9467	193.8079
	2	1643.2336	0.6526	0.6483	41.6127	0.8361	190.6416
	3	1213.0318	0.8143	0.8099	6.1016	0.7195	32.4871
	4	671.2248	0.9214	0.9019	17.6858	0.6136	110.4073
$\frac{1}{10}$	1	1978.3237	0.5503	0.5342	96.4922	0.8935	413.6997
	2	1643.2336	0.8197	0.8182	54.8316	0.7167	293.0548
	3	1213.0318	0.9651	0.9608	5.4540	0.5634	37.0847
	4	671.2248	1.0545	1.0391	13.6527	0.4397	118.9434
$\frac{1}{5}$	1	1978.3237	0.8352	0.8165	217.5199	1.5098	551.8955
	2	1643.2336	1.0604	1.0634	54.1653	1.1016	188.3499
	3	1213.0318	1.1626	1.1585	1.7656	0.8357	8.0929
	4	671.2248	1.2224	1.2129	8.6875	0.6491	51.2688

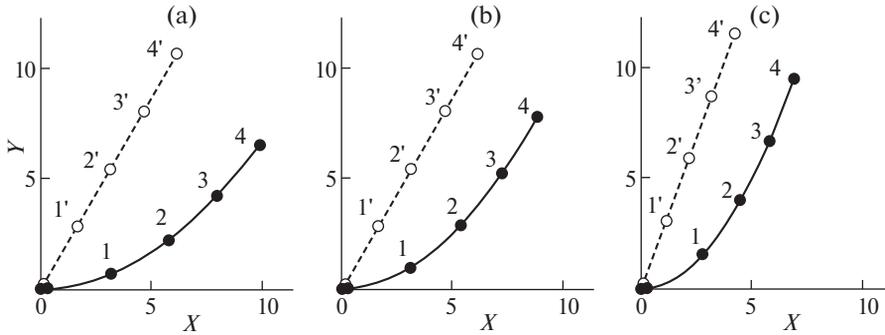


Рис. 5. Формы радиального стержня в начальном и конечном положениях для  $n = 24$ ,  $m = 4$  и  $\lambda = 1/15$  (а),  $\lambda = 1/10$  (б),  $\lambda = 1/5$  (с)

2) Радиальный стержень делится на 6 упругих звеньев ( $m = 6$ ,  $k = 1, 2, \dots, 6$ ) длиной  $a_k = 2$  м; для этого случая значения  $EI_k$ , Па · м<sup>4</sup> и углы  $\theta_k^0$  представлены в табл. 3. Формы радиального стержня в начальном и требуемом конечном состояниях при  $\lambda = 1/15$ ,  $1/10$ ,  $1/5$  представлены в координатах  $X$ ,  $Y$ , м на рис. 6, а, б, с, соответственно.

Полученные значения  $\theta_k$ ,  $R_k$ ,  $N$ , а также относительные деформации растяжения тросов  $\epsilon_k$  и требуемые для получения заданной формы антенны жесткости тросов на растяжение  $E_T F_k$  (Па · м<sup>2</sup>), которые определяются по формуле  $R_k = 2E_T F_k \epsilon_k \sin(\pi/n)$ , приведены в табл. 2 и табл. 3 соответственно для случаев  $m = 4$  и  $m = 6$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Таблица 3. Исходные данные и результаты расчета параметров антенны при  $m = 6$

$\lambda$	$k$	$EI_k$	$\theta_k^0$	$\theta_k$	$R_k$	$\epsilon_k$	$E_T F_k$
$\frac{1}{15}$	1	7656.4383	0.2876	0.2822	260.5498	0.9728	1025.9801
	2	6684.4295	0.4961	0.4961	105.2135	0.9113	442.2760
	3	6013.2047	0.6526	0.6458	151.509	0.8352	694.9330
	4	4204.6526	0.7681	0.7717	10.4413	0.7567	52.8544
	5	4204.6526	0.8547	0.8465	5.4236	0.6820	30.4614
	6	1631.6882	0.9214	0.9109	66.9765	0.6131	418.4988
$\frac{1}{10}$	1	7656.4383	0.4116	0.3987	592.7990	0.9427	2408.7411
	2	6013.2047	0.6609	0.6611	326.3337	0.8311	1504.1060
	3	5193.4296	0.8197	0.8157	105.8771	0.7147	567.4419
	4	4204.6526	0.9250	0.9277	2.8618	0.6095	17.9877
	5	4204.6526	0.9993	0.9927	10.1289	0.5179	74.9241
	6	1631.6882	1.0545	1.0459	50.4612	0.4386	440.6749
$\frac{1}{5}$	1	7656.4383	0.6849	0.6686	1225.6470	1.6655	2819.0376
	2	6684.4295	0.9357	0.9416	428.9441	1.3402	1226.0534
	3	6684.4295	1.0604	1.0561	43.6339	1.0934	152.8741
	4	5193.4296	1.1352	1.1358	36.4977	0.9070	154.1510
	5	4204.6526	1.1856	1.1817	12.6620	0.7617	63.6785
	6	1631.6882	1.2224	1.2165	30.3713	0.6449	180.4132

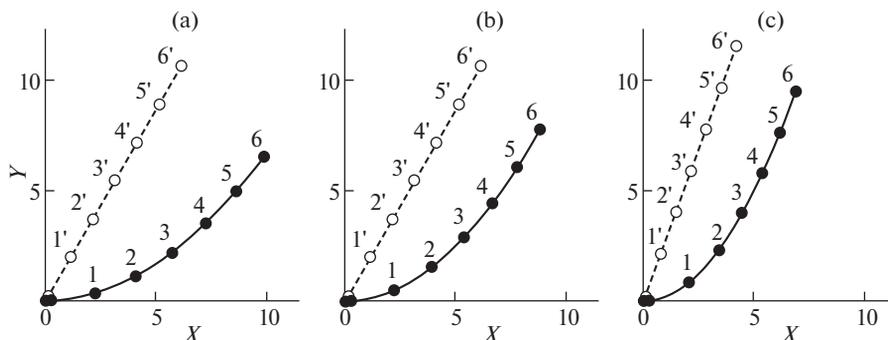


Рис. 6. Формы радиального стержня в начальном и конечном положениях для  $n = 24$ ,  $m = 6$  и  $\lambda = 1/15$  (а),  $\lambda = 1/10$  (б),  $\lambda = 1/5$  (с)

В табл. 4 и табл. 5 для случаев  $m = 4$  и  $m = 6$ , соответственно, приведено сравнение точности решения путем сравнения изгибающих моментов  $M_k$ , Н·м,  $k = 1, 2, \dots, m - 1$ , в узлах стержня в конечном деформированном состоянии: I – вычисленные из уравнения

равновесия отсеченной части при найденных реакциях  $R_k$ :  $M_k = \sum_{i=k+1}^m R_k(Y_i - Y_k)$ ;

II – найденные при решении нелинейной задачи в перемещениях по методу конечных элементов средние значения в узле:  $M_k = 1/2(M_k(a_k) + M_{k+1}(0))$ , где  $M_k(a_k) = 2EI_k/a_k(-3\bar{\nu}_k + 2\vartheta_k)$ ,  $M_{k+1}(0) = 2EI_{k+1}/a_{k+1}(3\bar{\nu}_{k+1} - 2\vartheta_{k+1})$ . Результаты сравнения показывают высокую точность, полученную при решении нелинейных алгебраических уравнений КЭ-модели методом последовательных приближений.

**6. Заключение.** Предложена конструктивная схема и разработана математическая модель для расчета формообразования циклически симметричной космической зонтичной антенны, образованной системой гибких многозвенных радиальных стержней, связанных по параллелям в определенных узловых точках растяжимыми тросами. Изгиб стержней в радиальной плоскости с учетом реакций тросов создается путем поворота корневых частей стержней силой медленно перемещающегося штока демфирующего гидроцилиндра под действием предварительно сжатых пружин. Модель сильного изгиба нерастяжимого стержня антенны построена с использованием “консольных” конечных элементов (звеньев), допускающих большие перемещения и повороты как твердых тел и относительные упругие перемещения с двухчленной аппроксимацией по длине элемента с учетом его усадки за счет изгиба в квадратичном

Таблица 4. Результаты расчета изгибающих моментов в узлах стержня при  $m = 4$

$\lambda$	Вар.	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$\frac{1}{15}$	I	188.3897	88.6112	40.5765
$\frac{1}{15}$	II	193.7100	90.1060	40.9970
$\frac{1}{10}$	I	222.0288	79.5639	34.7384
$\frac{1}{10}$	II	230.6572	80.9606	34.9822
$\frac{1}{5}$	I	211.5091	52.4085	24.2377
$\frac{1}{5}$	II	225.4776	53.1092	24.3086

**Таблица 5.** Результаты расчета изгибающих моментов в узлах стержня при  $m = 6$ 

$\lambda$	Вар.	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
$\frac{1}{15}$	I	835.2111	573.4939	317.5385	209.1970	104.0202
$\frac{1}{15}$	II	848.8874	579.8688	319.7085	209.9830	104.5593
$\frac{1}{10}$	I	1026.0813	512.9911	283.3631	185.9495	86.4142
$\frac{1}{10}$	II	1055.8608	520.2044	284.7586	186.4288	86.7087
$\frac{1}{5}$	I	1295.6631	485.1380	277.4441	135.6802	56.7180
$\frac{1}{5}$	II	1351.8396	490.7088	278.1707	135.9047	56.8058

приближении. Полученные нелинейные уравнения решаются методом последовательных приближений относительно неизвестных реакций тросов при заданных значениях изгибных жесткостей элементов стержня и заданных радиальных и осевых координат узлов, точно соответствующих форме моделируемой антенны. По найденным значениям реакций тросов с учетом известных их перемещений в узлах определяются необходимые для обеспечения заданной формы антенны жесткости тросов на растяжение.

Выполнена оценка точности разработанной модели путем сравнения с численным решением задачи сильного изгиба консольного стержня под действием продольной сжимающей силы, превышающей критическую силу потери устойчивости стержня.

В качестве примера выполнены расчеты для параболической антенны с  $n = 24$  радиальными стержнями и с  $m = 4$  и  $m = 8$  составляющих их звеньями (соответственно – тросов).

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПРИМ РАН (номер госрегистрации темы АААА-А19-119012290118-3).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гряник М.В., Ломан В.И. Развертываемые зеркальные антенны зонтичного типа. М.: Радио и связь, 1987. 72 с.
2. Лопатин А.В., Рутковская М.А. Обзор конструкций современных трансформируемых космических антенн // Вестник Сибирского государственного университета науки и технологии имени Академика М.Ф. Решетнева. 2007. № 2. С. 51–57.
3. Лопатин А.В., Рутковская М.А. Обзор Конструкций современных трансформируемых космических антенн // Вестник Сибирского государственного университета науки и технологии имени Академика М.Ф. Решетнева. 2007. № 3. С. 78–81.
4. Пономарев С.В. Трансформируемые рефлекторы антенн космических аппаратов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 4. С. 110–119.
5. Бельков А.В., Евдокимов А.С. и др. Компьютерное моделирование перспективных космических рефлекторов // Вестник Самарского государственного технического университета. Физико-математические науки. 2008. № 2. С. 161–170.
6. Крылов А.В. Исследование процесса раскрытия антенного контура // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2013. № 12. С. 45–50.
7. Усюкин В.И., Архипов М.Ю. Моделирование статики и динамики крупногабаритных рефлекторов космических антенн. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. 60 с.

8. Бужинский В.А., Клишев О.П., Мытарев А.И. Исследование влияния упругих колебаний крупногабаритных элементов конструкции космического аппарата на искажение геометрических характеристик рефлектора // Космонавтика и ракетостроение. 2007. № 2. С. 102–108.
9. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Динамика плоского движения тела с системой последовательно соединенных упруговязкими шарнирами гибких нерастяжимых стержней при больших углах поворота // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 2. С. 109–117.
10. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Динамика раскрытия космической зонтичной антенны, состоящей из многозвенных гибких радиальных стержней // Космонавтика и ракетостроение. 2020. № 2. С. 86–98.
11. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Расчет формообразования космической зонтичной антенны, состоящей из гибких радиальных стержней, соединенных по параллелям растяжимыми тросовыми элементами // Космонавтика и ракетостроение. 2019. № 2. С. 95–103.

УДК 539.3:534.1

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ ВОЛН ПОХГАММЕРА–КРИ  
К ЗАДАЧАМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО  
КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА

© 2021 г. Т. А. Гаджибеков<sup>а</sup>, А. В. Ильяшенко<sup>б,\*</sup>

<sup>а</sup> Московский государственный технический университет им. Баумана, Москва, Россия

<sup>б</sup> Московский государственный строительный университет, Москва, Россия

\*e-mail: avi\_56@mail.ru

Поступила в редакцию 20.06.2020 г.

После доработки 28.07.2020 г.

Принята к публикации 31.08.2020 г.

Анализируются теоретические аспекты применения акустических волн Похгаммера–Кри в неразрушающей диагностике. Основное внимание уделяется продольным аксиально симметричным гармоническим модам. Впервые дается анализ дисперсионных кривых для стержней, выполненных из ауксетиков (материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона). Получены дисперсионные кривые в окрестности второй предельной скорости, обнаруживающие чувствительность значений второй предельной скорости к вариации коэффициента Пуассона.

*Ключевые слова:* волны Похгаммера–Кри, поляризация, дисперсия, коэффициент Пуассона, предельная скорость

DOI: 10.31857/S0572329921050044

**1. Введение.** Впервые дисперсионные уравнения, описывающие распространение гармонических волн в цилиндрическом стержне, называемых волнами Похгаммера–Кри, получены в [1–3].

Однако, решения этих уравнений, связывающие фазовую (или групповую) скорость с частотой оставались практически неизученными вплоть до середины прошлого века, когда в [4–23] с помощью численного анализа дисперсионных уравнений [1–3, 8] были найдены нижние ветви дисперсионных кривых.

Надо отметить, что в [4–21] исследовались в основном продольные аксиально симметричные моды, тогда как в [22, 23] рассматривались изгибные и крутильные моды.

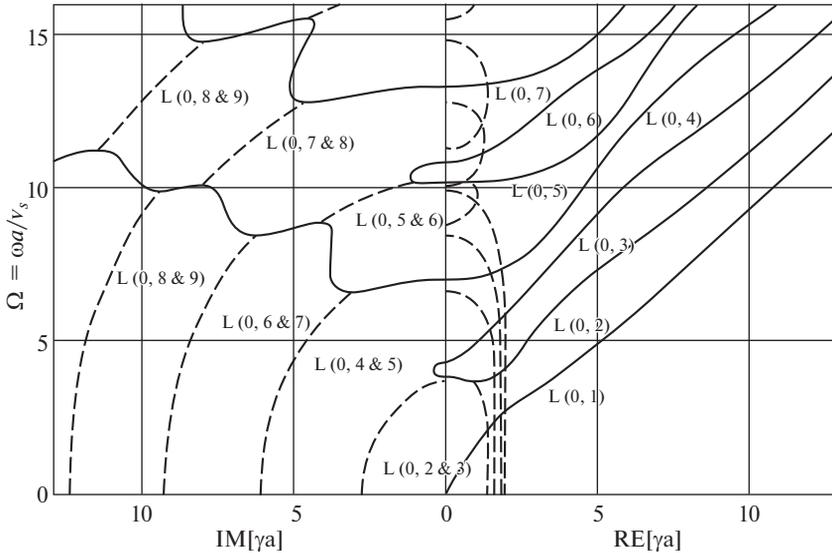
*1.1. Дисперсионные соотношения, сплошной цилиндрический стержень.* С помощью асимптотических методов в [4–12] были найдены длинноволновой и коротковолновой пределы для фазовой скорости фундаментальной продольной аксиально симметричной моды. При этом, коротковолновой предел при  $\omega \rightarrow \infty$

$$c_{1,lim} = c_R \quad (1.1)$$

совпал со скоростью волны Рэлея ( $c_R$ ), а длинноволновой предел дал следующее значение фазовой скорости  $c_{2,lim}$

$$c_{2,lim} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (1.2)$$

где  $E$  и  $\rho$  – модуль упругости и плотность материала стержня, соответственно.



**Рис. 1.** Дисперсионные кривые аксиально симметричных гармонических волн Похгаммера–Кри в цилиндрическом стержне [16]: сплошной линией обозначены действительные или чисто мнимые кривые, а пунктирной линией – комплексные.

Дисперсионные кривые высших мод в терминах безразмерных фазовой частоты и волнового числа с помощью численных методов исследовались в [4–20], причем в [8], по-видимому, впервые были вычислены корни дисперсионного уравнения и построены первые три дисперсионные кривые, отвечающие низшим продольным аксиально симметричным модам. Соответствующие дисперсионные кривые, определенные в [19], показаны на рис. 1.  $L(0, m)$  обозначает аксиально симметричную продольную моду  $m$ -го порядка, см. [16]. На вертикальной и горизонтальной осях на этом рисунке отложены, соответственно, безразмерная частота ( $\Omega = \omega a / v_s$ ) и волновое число ( $\gamma$ );  $a$  – радиус стержня;  $v_s$  – скорость объемной поперечной волны в среде.

Одна из интересных особенностей незатухающих высших мод ( $L(0, m)$ ,  $m > 1$ ) соответствующих дисперсионных кривых, появляется при  $\gamma \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\partial \Omega}{\partial \gamma} = 0 \quad (1.3)$$

Фактически, условие (1.3) означает наличие в высших модах горизонтальной асимптоты в дисперсионной зависимости  $\omega(c)$  при фазовой скорости  $c \rightarrow \infty$ . Здесь обнаруживается связь с незатухающими высшими модами соответствующих дисперсионных кривых волн Лэмба [24, 25], для которых также выполняется соотношение (1.3).

**1.2. Родственные задачи.** Исследование по распространению ангармонических продольных волн в полуограниченном цилиндрическом стержне и, в частности, импульсов в виде временной  $\delta$ -функции, по-видимому, впервые осуществлено в [26]. В этой работе, также как и в последующих исследованиях [17, 27–29], основное внимание уделялось распространению длинноволновой асимптотики, дисперсионные составляющие не исследовались. Необходимость учета (геометрической) дисперсии при распространении ангармонических импульсов в цилиндрических стержнях отмечена в [30], где с помощью экспериментальных сейсмограмм, отвечающих распространению

продольных волн от  $\delta$ -образного импульса, приложенного к одному из торцов стержня, прослежена деформация импульса, вызванная дисперсией соответствующих волн.

Вопросам распространения волн Похгаммера–Кри в цилиндрическом стержне из вязкоупругого материала посвящены исследования [31–37]. В [31] впервые обнаружена и описана, так называемая, физическая дисперсия волн Похгаммера–Кри, вызванная вязкостью материала и проявляющаяся даже на тех участках дисперсионных кривых, где в случае упругого материала геометрическая дисперсия практически отсутствует.

Исследование дисперсии волн Похгаммера–Кри в коаксиальных стержнях (трубах) проводилось в [38–43] с применением той же техники, что и для сплошных стержней, но с удержанием в построенном решении бесселевых функций как первого, так и второго рода, так как для коаксиальных стержней отпадает необходимость ставить ограничение конечности перемещений на оси стержня.

С помощью техники замены переменных в конических стержнях исследовались продольные аксиально симметричные волны и соответствующие колебания [44–49], причем в этих работах для исключения сингулярных решений вершина конуса исключалась из рассмотрения.

В [50, 51] с помощью приближенной одномерной теории Рэлея–Лява и точной теории, основанной на уравнениях Похгаммера–Кри, исследовались негармонические волны Похгаммера–Кри, вызванные продольным ударом по сплошному цилиндрическому стержню. В этих работах возможная перекачка энергии на высшие аксиально симметричные моды не исследовалась, а предполагалось, что при продольном ударе вся энергия локализована в продольной фундаментальной моде. При этом для рассмотренного случая отмечена значительная дисперсия.

Волны в трансверсально изотропных стержнях кругового поперечного сечения исследовались в [52–57] с применением той же техники, что использовалась для изотропных стержней. В этой связи более общие случаи цилиндрической анизотропии, по-видимому, не исследовались, за исключением различных мод волн Похгаммера–Кри в цилиндрически ортотропной упругой слоистой трубе [58] исследованной с помощью метода конечных элементов. Надо отметить, что применение метода конечных элементов для получения дисперсионных соотношений в стержнях наталкивается на определенные трудности, связанные с необходимостью исключения начальной негармонической фазы [58, 59]. Аналогичные трудности отмечены и в случае применения метода конечных элементов для определения дисперсионных соотношений волн Лэмба [60].

Волны Похгаммера–Кри в стержнях некруговой формы исследовались в работах [61–63] с помощью метода конечных элементов, причем в [62, 63] наряду с действительными решениями дисперсионного уравнения анализировались и комплексные ветви высших мод. Для этого в работах [62, 63] были соответствующим образом модифицированы Лагранжиан и принцип Гамильтона, что позволило учесть комплексные поля перемещений.

Известны и другие приближенные методы, применяемые для анализа волновых процессов в стержнях, основанные на различного рода приближенных теориях, по аналогии с технической теорией изгиба балок. В этой связи надо отметить обзоры [64–66].

*1.3. Применения волн Похгаммера–Кри к задачам неразрушающей диагностики.* Продольные аксиально симметричные волны Похгаммера–Кри часто применяются в качестве метода как для (i) неразрушающего определения механических свойств материалов, так и для (ii) диагностики наличия дефектов.

В первом случае, как правило, используют два цилиндрических длинных стержня Гопкинсона (называемых иногда стержнями Кольского), между которыми размещают исследуемый образец, как правило, также цилиндрической формы; рис. 2.



**Рис. 2.** Принципиальная схема двух стержней Гопкинсона: (1) ударник; (2) первый стержень Гопкинсона, передающий ударное воздействие на образец; (3) образец; (4) второй стержень Гопкинсона, в котором распространяются рефрагированные волны.

При ударном воздействии, приложенном к левому торцу первого стержня Гопкинсона, распространяется импульс со скоростью близкой ко второй предельной скорости  $c_{2,lim}$ , далее на интерфейсной границе между первым стержнем и образцом часть энергии, отвечающей рефрагированной волне, переходит в образец, а часть отражается, при этом энергия отраженной и рефрагированной волн зависит от соотношения импедансов материала стержня и образца. На следующей границе между образцом и вторым стержнем Гопкинсона происходит аналогичное явление; см. обзорную монографию [68]. Использование длинных стержней Гопкинсона с отношением длины стержня  $L$  к его диаметру  $d$ ,  $L/d > 100$  необходимо для исключения, во-первых нераспространяющихся мод волн Похгаммера–Кри, и, во-вторых, для обеспечения возможно большей локализации энергии аксиально симметричной волны Похгаммера–Кри в области малых частот [67–70]. Роль длительности ударной нагрузки, приложенной к одному из торцов стержня Гопкинсона, исследовалась в [71–73]; было установлено, что в случае более продолжительных импульсов, низкочастотные составляющие фундаментальной моды, распространяющиеся с большей скоростью, имеют и большие амплитуды. Известны обобщения на случай применения стержней Гопкинсона для экспериментальных исследований, связанных с возбуждением и распространением крутильных мод волн Похгаммера–Кри [74].

Задачи обнаружения дефектов в трубах и слоистых коаксиальных цилиндрах также основаны на генерировании в основном продольных аксиально симметричных (как правило, гармонических) волн Похгаммера–Кри и исследовании либо их отражения от локализованных дефектов [75–77], либо изменения их дисперсионных кривых при распространении по участкам с измененными свойствами [78–80]. С помощью этих волн могут исследоваться как упругие, так и вязкоупругие свойства сплошных стержней и цилиндрических оболочек, в том числе слоистых, состоящих из вложенных друг в друга и находящихся в контакте коаксиальных цилиндров [81, 82]. Как отмечено выше, при неразрушающем контроле дефектных зон в стержнях и трубах, как правило, используют источники, возбуждающие гармонические волны Похгаммера–Кри. Это необходимо для возможности сопоставления теоретических дисперсионных кривых (определяемых для гармонических волн) с полученными в ходе экспериментальных исследований. Диапазон частот, применяемых для экспериментального обнаружения и исследования участков сплошного цилиндра или трубы с измененными свойствами, обычно варьируется в диапазоне от 30 КГц до 100 МГц [82, 83]. Общие свойства решений дисперсионных уравнений для волн Похгаммера–Кри, а так же других типов дисперсионных поверхностных волн обсуждаются в работах [84–87].

В последние годы для возбуждения различных мод волн Похгаммера–Кри получили методы, основанные на применении электромагнитно-акустических преобразователей (ЭМАП) поверхностных волн, причем наряду с продольными модами могут возбуждаться изгибные и крутильные моды [88–90].

В исследованиях [91–94] отражены некоторые теоретические аспекты, связанные с анализом дисперсионных соотношений волн Похгаммера–Кри. Следует отметить также некоторые родственные задачи: в работах [95, 96] исследовались вторые пре-

дельные скорости в пластинах, в [97] анизотропные ауксетки, в [98, 99] рассматривались спиральные волны в стержнях.

*1.4. Краткое содержание последующих разделов.* В разделе 2 вводятся основные уравнения, определяются потенциалы смещений, выписываются решения для потенциалов в терминах бесселевых функций, определяются дисперсионные уравнения.

В третьем разделе по дисперсионному уравнению осуществляется построение дисперсионных кривых, основное внимание уделено аксиально симметричной фундаментальной моде. Впервые дается анализ дисперсионных кривых для стержней, выполненных из ауксетиков (материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона). Анализируется чувствительность аксиально симметричной фундаментальной моды к вариации упругих свойств во всем допустимом диапазоне фазовых скоростей и, в частности, в окрестности первой ( $c_{1,lim}$ ) и второй предельной скорости ( $c_{2,lim}$ ). Приводятся расчетные формулы для определения упругих характеристик материала по значениям соответствующих предельных скоростей.

**2. Основные соотношения.** Ниже, в основном, используется нотация [84, 85]. Уравнения движения для изотропного упругого тела в отсутствии массовых сил представимы в виде

$$c_1^2 \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - c_2^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \partial_{tt}^2 \mathbf{u} \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{u}$  – поле перемещений,  $c_1, c_2$  – скорости продольной и поперечной объемных волн в среде, определяемые выражениями

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.2)$$

В (2.2)  $\lambda, \mu$  – константы Ламе,  $\rho$  – плотность среды.

Как правило, в рассматриваемом классе задач для векторного поля  $\mathbf{u}$  применяется представление Гельмгольца

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi + \operatorname{rot} \Psi \quad (2.3)$$

где  $\Phi$  и  $\Psi$  соответственно скалярный и векторный потенциалы. В цилиндрических координатах представление Гельмгольца (2.3) для физических компонент вектора перемещений имеет вид

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial z} \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{\partial \Psi_r}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial r} \\ u_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Psi_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_r}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2.4)$$

причем из условия аксиальной симметрии следует

$$u_\theta = 0 \quad (2.5)$$

Подстановка представления (2.3) в уравнения движения (2.1) дает

$$c_1^2 \Delta \Phi = \partial_{tt}^2 \Phi, \quad c_2^2 \Delta \Psi = \partial_{tt}^2 \Psi \quad (2.6)$$

Для гармонической волны, распространяющейся в направлении оси  $z$ , потенциалы (2.6) представимы в виде

$$\Phi = \Phi_0(\mathbf{x}') e^{i\gamma(z-ct)}, \quad \Psi = \Psi_0(\mathbf{x}') e^{i\gamma(z-ct)} \quad (2.7)$$

где  $\gamma$  – волновое число, связанное с фазовой скоростью  $c$  и круговой частотой  $\omega$  соотношением

$$\gamma = \frac{\omega}{c} \quad (2.8)$$

В (2.7)  $\mathbf{x}'$  – координата в поперечном сечении ( $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})\mathbf{n}$ ),  $\mathbf{n}$  – волновой вектор,  $z = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$ ,  $t$  – время.

Подстановка представлений (2.7) в уравнения (2.6) дает уравнения Гельмгольца для соответствующих потенциалов

$$\Delta\Phi_0 + \left(\frac{c^2}{c_1^2} - 1\right)\gamma^2\Phi_0 = 0, \quad \Delta\Psi_0 + \left(\frac{c^2}{c_2^2} - 1\right)\gamma^2\Psi_0 = 0 \quad (2.9)$$

Переход в (2.9) к цилиндрическим координатам для скалярного потенциала  $\Phi_0$  с учетом аксиальной симметрии потенциала  $\Phi_0$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial\theta} = 0 \quad (2.10)$$

приводит к уравнению Бесселя

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \Phi_0(r) + \left(\frac{c^2}{c_1^2} - 1\right)\gamma^2\Phi_0(r) = 0 \quad (2.11)$$

где  $c$  – фазовая скорость. Решения уравнения (2.11) выражается через функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка

$$\Phi_0(r) = C_1 J_0(q_1 r) + C_2 Y_0(q_1 r) \quad (2.12)$$

где  $C_k$ ,  $k = 1, 2$  – неизвестные, вообще говоря, комплексные коэффициенты и

$$q_1^2 = \left(\frac{c^2}{c_1^2} - 1\right)\gamma^2 \quad (2.13)$$

Уравнения (1.10) для векторного потенциала  $\Psi_0$  при учете аксиальной симметрии компонент потенциала  $\Psi_0$ , что обеспечивается условиями

$$\frac{\partial\Psi_r}{\partial\theta} = \frac{\partial\Psi_\theta}{\partial\theta} = \frac{\partial\Psi_z}{\partial\theta} = 0 \quad (2.14)$$

дают следующие уравнения Бесселя (для соответствующих физических компонент)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \Psi_r(r) + \left(\left(\frac{c^2}{c_2^2} - 1\right)\gamma^2 - \frac{1}{r^2}\right)\Psi_r(r) &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \Psi_\theta(r) + \left(\left(\frac{c^2}{c_2^2} - 1\right)\gamma^2 - \frac{1}{r^2}\right)\Psi_\theta(r) &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \Psi_z(r) + \left(\frac{c^2}{c_2^2} - 1\right)\gamma^2\Psi_z(r) &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Решение уравнений (2.15) имеет вид

$$\begin{aligned}\Psi_{\theta}(r) &= C_3 J_1(q_2 r) + C_4 Y_1(q_2 r) \\ \Psi_r(r) &= C_5 J_1(q_2 r) + C_6 Y_1(q_2 r) \\ \Psi_z(r) &= C_7 J_0(q_2 r) + C_8 Y_0(q_2 r)\end{aligned}\quad (2.16)$$

В (2.16)  $C_k, k = 3, \dots, 8$  неизвестные, вообще говоря, комплексные коэффициенты, и

$$q_2^2 = \left( \frac{c^2}{c_2^2} - 1 \right) \gamma^2 \quad (2.17)$$

Условие аксиальной симметрии векторного потенциала  $\Psi$  накладывает еще одно ограничение [14, 16]:

$$\Psi_r = \Psi_z = 0 \quad (2.18)$$

С учетом (2.4), (2.5) (2.12), (2.16), (2.18), векторное поле, отвечающее распространению продольной аксиально симметричной гармонической незатухающей волны в цилиндрическом стержне, представимо в виде [19]

$$\begin{aligned}u_r &= -[q_1(C_1 J_1(q_1 r) + C_2 Y_1(q_1 r)) + i\gamma(C_3 J_1(q_2 r) + C_4 Y_1(q_2 r))] e^{i\gamma(z-ct)} \\ u_{\theta} &= 0 \\ u_z &= [i\gamma(C_1 J_0(q_1 r) + C_2 Y_0(q_1 r)) + q_2(C_3 J_0(q_2 r) + C_4 Y_0(q_2 r))] e^{i\gamma(z-ct)}\end{aligned}\quad (2.19)$$

С учетом необходимой ограниченности поля перемещений на оси  $r = 0$  и неограниченности при  $r \rightarrow 0$  бесселевых функций второго рода, из (2.19) получаем

$$\begin{aligned}u_r &= -[q_1 C_1 J_1(q_1 r) + i\gamma C_2 J_1(q_2 r)] e^{i\gamma(z-ct)} \\ u_{\theta} &= 0 \\ u_z &= [i\gamma C_1 J_0(q_1 r) + q_2 C_2 J_0(q_2 r)] e^{i\gamma(z-ct)}\end{aligned}\quad (2.20)$$

При получении (2.20) из (2.19) константа  $C_3$  обозначена  $C_2$ .

Условие равенства нулю поверхностных усилий на боковой поверхности цилиндра при  $r = R$  представимо в виде

$$\mathbf{t}_v \equiv (\lambda(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{v} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v})|_{r=R} = 0 \quad (2.21)$$

где  $\mathbf{v}$  – вектор единичной внешней нормали к боковой поверхности,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – инфинитезимальный тензор деформаций.

Условие (2.21) позволяет записать граничные условия (с точностью до экспоненциального множителя  $e^{i\gamma(z-ct)}$ ) в терминах соответствующих бесселевых функций

$$\begin{aligned}t_{rr} \equiv \lambda I_{\varepsilon} + 2\mu\varepsilon_{rr} &= - \left[ \frac{\lambda(q_1^2 + \gamma^2)J_0(q_1 r)C_1 +}{+ \frac{2\mu}{r} \left[ q_1 C_1 (q_1 r J_0(q_1 r) - J_1(q_1 r)) + \right.} \right] \Bigg|_{r=R} = 0 \\ t_{rz} \equiv 2\mu\varepsilon_{rz} &= -\mu \left[ \frac{i\gamma [q_1 C_1 J_1(q_1 r) + i\gamma C_2 J_1(q_2 r)]}{+ [i\gamma q_1 C_1 J_1(q_1 r) + q_2^2 C_2 J_1(q_2 r)]} \right] \Bigg|_{r=R} = 0\end{aligned}\quad (2.22)$$

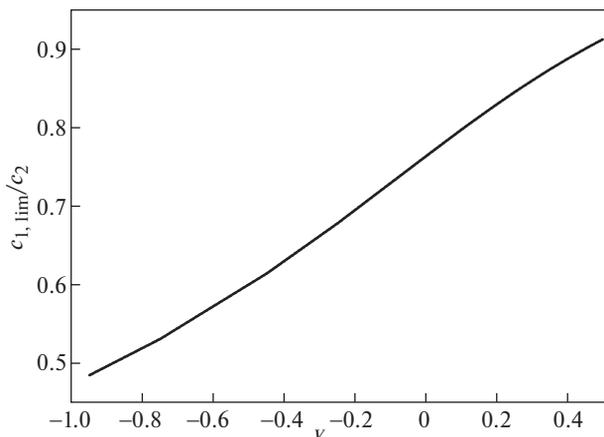


Рис. 3. График изменения первой предельной скорости в зависимости от изменения коэффициента Пуассона.

Условия (2.22) дают искомое дисперсионное уравнение, записываемое в виде

$$\det \mathbf{A} = 0 \quad (2.23)$$

где  $\mathbf{A}$  — квадратная матрица второго порядка с комплексными коэффициентами

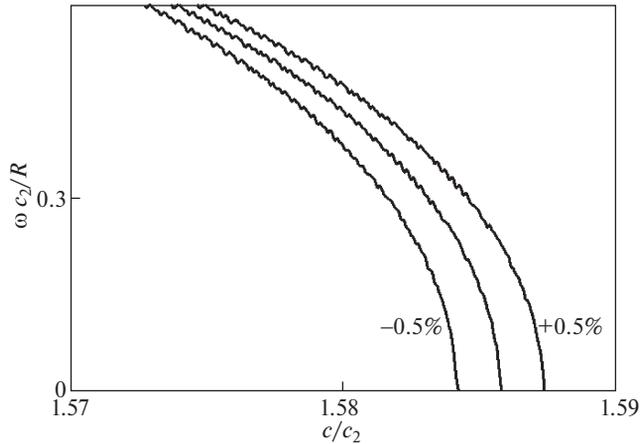
$$\begin{aligned} A_{11} &= -\lambda(q_1^2 + \gamma^2)J_0(q_1R) - \frac{2\mu}{R}q_1(q_1RJ_0(q_1R) - J_1(q_1R)) \\ A_{12} &= -\frac{2\mu i\gamma}{R}(q_2RJ_0(q_2R) - J_1(q_2R)) \\ A_{21} &= -2\mu i\gamma q_1J_1(q_1R) \\ A_{22} &= -\mu(q_2^2 - \gamma^2)J_1(q_2R) \end{aligned} \quad (2.24)$$

При заданной частоте  $\omega$  дисперсионным уравнением (2.23) определяется фазовая скорость продольных аксиально симметричных мод волн Похгаммера—Кри, а двумерные, вообще говоря, комплексные собственные векторы, отвечающие нулевым собственным числам матрицы (2.23), определяют поляризацию соответствующих волн.

**3. Некоторые аспекты применения аксиально симметричной фундаментальной моды.** По дисперсионному уравнению (2.23) осуществляется построение дисперсионных кривых для нижней (фундаментальной) аксиально симметричной моды волн Похгаммера—Кри, распространяющихся в цилиндрическом стержне.

Рассматривается два основных случая: (1) вариация коэффициента Пуассона и (2) вариация модуля упругости материала стержня.

*3.1. Вариация коэффициента Пуассона.* Приведенный на рис. 4 график изменения относительного значения первой предельной скорости  $c_{1,lim}/c_2$ , определенной по дисперсионному уравнению (2.23), при вариации коэффициента Пуассона (при фиксированном модуле упругости и плотности), показывает, что в области высоких частот фазовая скорость является информативной для определения коэффициента Пуассона материала. В частности, при вариации коэффициента Пуассона во всем допустимом диапазоне значений  $(-1; 0.5)$  относительная фазовая скорость  $c_{1,lim}/c_2$  изменяется почти в два раза.



**Рис. 4.** Изменение фундаментальной моды аксиально симметричных волн Похгаммера–Кри в окрестности второй предельной скорости при вариации модуля упругости.

В то же время, проведенные расчеты показывают, что в области низких частот и, в особенности, в окрестности второй предельной скорости  $c_{2,lim}$ , все дисперсионные кривые сливаются в одну кривую.

*Замечание 3.1.* Надо отметить, что в случае ауксетиков известные аппроксимационные дробно-рациональные формулы для скорости волны Рэлея [86, 87] (совпадающей со скоростью  $c_{1,lim}$ ) дают неверные результаты. Поэтому в случае ауксетиков скорость  $c_{1,lim}$  должна определяться либо непосредственно по дисперсионному уравнению (2.23), либо с помощью регрессионных формул. Например, полиномиальная регрессия вида

$$c_{1,lim}(v) \approx (a_1 + a_2 v + a_3 v^2) c_2 \quad (3.1)$$

$$a_1 = 0.7622, \quad a_2 = 0.3119, \quad a_3 = 0.0129$$

обеспечивает приближение к точному значению  $c_{1,lim}$ , найденному по уравнению (2.23), с относительной ошибкой в равномерной норме, не превышающей 0.6% в интервале значений коэффициента Пуассона  $v \in (-0.75; 0.45)$ .

*Пример 3.1.* Определение коэффициента Пуассона по скорости  $c_{1,lim}$ .

А) Предположим, что наряду со скоростью  $c_{1,lim}$  известна также скорость  $c_2$ . С использованием регрессионного уравнения (3.1) в предположении, что поперечная скорость волны  $c_2$  известна, получаем следующее выражение для определения коэффициента Пуассона

$$v = \frac{-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3 + 4a_3 c_{1,lim}/c_2}}{2a_3} \quad (3.2)$$

где коэффициенты  $a_1, a_2, a_3$  определены по регрессионному уравнению (3.1).

Б) Предположим, что наряду со скоростью  $c_{1,lim}$  известна скорость  $c_{2,lim}$ . В этом случае, ограничиваясь первыми тремя членами тейлоровского разложения по  $v$  правой части регрессионного уравнения (3.1)

$$c_{1,lim} \approx (b_1 + b_2 v + b_3 v^2) c_{2,lim} \quad (3.3)$$

$$b_1 = \frac{a_1}{\sqrt{2}}, \quad b_2 = \frac{-a_1 + 2a_2}{2\sqrt{2}}, \quad b_3 = \frac{3a_1 - 4a_2 + 8a_3}{8\sqrt{2}}$$

получаем следующее выражение для коэффициента Пуассона

$$v = \frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4b_1 b_3 + 4b_3 c_{1,lim}/c_{2,lim}}}{2b_3} \quad (3.4)$$

Надо отметить, что коэффициенты тейлоровского разложения  $b_1, b_2, b_3$  в (3.3) определены через коэффициенты  $a_1, a_2, a_3$  по аналитическим формулам. В свою очередь, коэффициенты  $a_1, a_2, a_3$  определены по регрессионному уравнению (3.1). В (3.4) учтено выражение (1.2) для длинноволновой асимптотики  $c_{2,lim}$ .

**3.2. Вариация модуля упругости.** На рис. 4 в окрестности второй предельной скорости  $c_{2,lim}$  построены дисперсионные кривые, отвечающие аксиально симметричным фундаментальным модам при вариации модуля упругости материала стержня, коэффициент Пуассона в этом случае считался фиксированным ( $\nu = 0.25$ ).

На рис. 4 по вертикальной оси отложены значения безразмерной частоты  $\omega c_2/R$ , а по горизонтальной оси – значения относительной фазовой скорости волн Похгаммера–Кри ( $c/c_2$ ). Графики соответствуют дисперсионным кривым при уменьшении ( $-0.5\%$ ) и увеличении ( $+0.5\%$ ) модуля упругости, по сравнению с референсным значением (средняя кривая). Приведенные графики показывают, что в окрестности второй предельной скорости исследуемые дисперсионные кривые являются информативными для определения модуля упругости материала (в предположении, что плотность фиксирована). Здесь надо отметить, что, как показывает асимптотическая формула (1.2), значение второй предельной скорости  $c_{2,lim}$  не зависит от коэффициента Пуассона.

**Пример 3.2.** Определение модуля упругости и коэффициента Пуассона по скоростям  $c_{1,lim}$  и  $c_{2,lim}$ .

Предполагается, что плотность материала известна. Асимптотическое выражение (1.2) для скорости  $c_{2,lim}$  дает

$$E = (c_{2,lim})^2 \rho \quad (3.5)$$

Далее, по известным значениям предельных скоростей  $c_{1,lim}$  и  $c_{2,lim}$  и формуле (3.4) определяется коэффициент Пуассона.

Отметим, что также как и для рассмотренных волн Похгаммера–Кри, в случае волн Лэмба, распространяющихся в упругом слое, по скорости  $c_{2,lim}$  оказывается возможным анализировать вариацию модуля Юнга, см. [92].

**4. Выводы.** Проведен анализ продольных аксиально симметричных гармонических волн Похгаммера–Кри в стержнях. Рассмотрены точные решения волнового уравнения Похгаммера–Кри.

Исследована зависимость дисперсионных кривых, отвечающих аксиально симметричным модам и, в частности, симметричной фундаментальной моде, от вариации коэффициента Пуассона и модуля упругости. На численных примерах показана информативность аксиально симметричной фундаментальной моды для неразрушающей

диагностики физико-механических свойств материалов и, в частности, для обнаружения участков с измененными свойствами.

Впервые проведен анализ вариации первой предельной скорости для стержней, выполненных из ауксетиков (материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона).

**Благодарность.** Авторы благодарят Российский научный фонд, грант 20-49-08002 за финансовую поддержку.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pochhammer L.* Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder // *J. Reine Angew. Math.* 1876. V. 81. S. 324–336.
2. *Chree C.* Longitudinal vibrations of a circular bar // *Quart. J. Pure Appl. Math.* 1886. V. 21. P. 287–298.
3. *Chree C.* The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solutions and applications // *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 1889. V. 14. P. 250–309.
4. *Field G.S.* Velocity of sound in cylindrical rods // *Canadian J. Research.* 1931. V. 5. P. 619–624.
5. *Field G.S.* Longitudinal waves in cylinders of liquid, in hollow tubes and in solid rods // *Canadian J. Research.* 1934. V. 11. P. 254–263.
6. *Field G.S.* Dispersion of supersonic waves in cylindrical rods // *Phys. Rev.* 1940. V. 57. P. 1188.
7. *Shear S.K., Focke A.B.* The dispersion of supersonic waves in cylindrical rods of polycrystalline silver, nickel, and magnesium // *Phys. Rev.* 1940. V. 57. P. 532–537.
8. *Bancroft D.* The velocity of longitudinal waves in cylindrical bars // *Phys. Rev.* 1941. V. 59. P. 588–593.
9. *Hudson G.E.* Dispersion of elastic waves in solid circular cylinders // *Phys. Rev.* 1943. V. 63. P. 46–51.
10. *Holden A.H.* Longitudinal modes of elastic waves in isotropic cylinders and slabs // *Bell System Tech. J.* 1951. V. 30. P. 956–969.
11. *Adem J.* On the axially-symmetric steady wave propagation in elastic circular rods // *Quart. Appl. Math.* 1954. V. 12. P. 261–275.
12. *Redwood M., Lamb J.* On propagation of high frequency compressional waves in isotropic cylinders // *Proc. Phys. Soc. London.* 1957. B. 70. P. 136–143.
13. *Mindlin R.D., McNiven H.D.* Axially symmetric waves in elastic rods // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1960. V. 27. P. 145–151.
14. *McNiven H.D., Perry D.C.* Axially symmetric waves infinite, elastic rods // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1962. V. 34. P. 433–437.
15. *Onoe M., McNiven H.D., Mindlin R.D.* Dispersion of axially symmetric waves in elastic rods // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1962. V. 29. P. 729–734.
16. *Meeker T.R., Meitzler A.H.* Guided wave propagation in elongated cylinders and plates // *Physical acoustics. Principles and methods.* New York: Acad. Press. 1964. V. 1A. P. 111–167.
17. *Kolsky H.* Stress waves in solids // *J. Sound Vibr.* 1964. V. 1. P. 88–110.
18. *Hutchinson J.R., Percival C.M.* Higher modes of longitudinal wave propagation in thin rod // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1968. V. 44. P. 1204–1210.
19. *Zemanek J.* An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1972. V. 51. P. 265–283.
20. *Thurston R.N.* Elastic waves in rods and clad rods // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1978. V. 64. P. 1–37.
21. *Graff K.F.* Wave motion in elastic solids. New York: Dover, 1991. 692 p.
22. *Abramson H.N.* Flexural waves in elastic beams of circular cross section // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1957. V. 29. P. 1284–1286.
23. *Pao Y.-H., Mindlin R.D.* Dispersion of flexural waves in an elastic, circular cylinder // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1960. V. 27. P. 513–520.
24. *Kuznetsov S.V.* Subsonic Lamb waves in anisotropic plates // *Quart. Appl. Math.* 2002. V. 60. P. 577–587.
25. *Kuznetsov S.V.* Lamb waves in anisotropic plates (Review) // *Acoust. Physics.* 2014. V. 60. P. 95–103.

26. *Davis R.M.* A critical study of the Hopkinson pressure bar // *Philos. Trans. R. Soc. London Ser.* 1948. V. A240. P. 375–457.
27. *Kolsky H.* *Stress Waves in Solids.* Dover Publications, New York, 1963. P. 59–60.
28. *Kolsky H.* Experimental results of stress wave investigations. In: *Mandel J., Brun L.* (Eds.), *Mechanical Waves in Solids.* Springer, New York. 1976.
29. *Gregory R.D., Gladwell I.* Axisymmetric waves in a semi-infinite elastic rod // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 1989. V. 42. P. 327–337.
30. *Puckett A.D., Peterson M.L.* Individual longitudinal Pochhammer-Chree modes in observed experimental signals // *Acoustics Research Letters Online.* 2005. V. 6 (4). P. 268–273.
31. *Kolsky H.* The propagation of stress pulses in viscoelastic solids // *Philos. Mag.* 1956. V. 1. P. 693–710.
32. *Coquin G.A.* Attenuation of guided waves in isotropic viscoelastic materials // *J. Acoust. Soc. Am.* 1964. V. 36. P. 1074–1080.
33. *Sogabe Y., Kishida K.* Wave propagation analysis for determining the dynamic properties of high damping alloys // *Bull. JSME.* 1982. V. 25. P. 321–327.
34. *Sogabe Y., Tsuzuki M.* Identification of the dynamic properties of linear viscoelastic materials by the wave propagation testing // *Bull. JSME.* 1986. V. 29. P. 2410–2417.
35. *Zhao H. Gary G.* A three dimensional analytical solution of the longitudinal wave propagation in an infinite linear viscoelastic cylindrical bar. Applications to experimental techniques // *J. Mech. Phys. Solids.* 1995. V. 43. P. 1335–1348.
36. *Bacon C.* An experimental method for considering dispersion and attenuation in a viscoelastic Hopkinson bar // *Exp. Mech.* 1998. V. 38. P. 242–249.
37. *Benatar A., Rittel D., Yarin A.L.* Theoretical and experimental analysis of longitudinal wave propagation in cylindrical viscoelastic rods // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 2003. V. 51. P. 1413–1431.
38. *Gazis D.C.* Three-dimensional investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinders. I. Analytical foundation // *Journal of the Acoustical Society of America.* 1959. V. 31 (5). P. 568–578.
39. *Viktorov I.A., Zubova O.M.* Normal waves in a solid cylindrical layer (in Russian) // *Akust. Zhurnal.* 1963. V. 9. P. 19–22.
40. *Dirri J.J., Rose J.L.* Excitation of guided elastic wave modes in hollow cylinders by applied surface tractions // *Journal of Applied Physics.* 1992. V. 72 (7). P. 2589–2597.
41. *Dirri J.J.* Utilization of guided elastic waves for the characterization of circumferential cracks in hollow cylinders // *Journal of the Acoustical Society of America.* 1994. V. 96 (6). P. 3769–3775.
42. *Aristegui C., Lowe M.J.S., Cawley P.* Guided waves in fluid-filled pipes surrounded by different fluids // *Ultrasonics.* 2001. V. 39 (5). P. 367–375.
43. *Seco F., Jiménez A.R.* Modelling the Generation and Propagation of Ultrasonic Signals in Cylindrical Waveguides // In: *Ultrasonic Waves InTechOpen.* 2012. P. 1–28.
44. *Suh N.P.* Stress-wave propagation in truncated cones against a “rigid” wall // *Experimental Mechanics.* 1967. V. 7. P. 541–544.
45. *Hettche L.R.* Theoretical and experimental study on longitudinal impact of tapered rods // *Journal of Research of the National Bureau of Standards. C. Engineering and Instrumentation.* 1968. V. 72C. P. 231–241.
46. *Höschl C., Okrouhlik M., Červ J., Beneš J.* Analytical, computational and experimental investigations on stress wave propagation // *Appl. Mech. Rev.* 1994. V. 47. P. 77–99.
47. *Abrate S.* Vibration of non-uniform rods and beams // *Journal of Sound and Vibration.* 1995. V. 185. P. 703–716.
48. *Barat C.N.* Vibration of rods with uniformly tapered sections // *Journal of Sound and Vibration* 1995. V. 185. P. 185–189.
49. *Eberhard P., Hu B., Schiehlen W.* Longitudinal wave propagation in conical rods subject to impacts // In: *Multifield Problems. State of the Art.* Springer. 2000. P. 246–253.
50. *Vales F., Moravka S., Brepta R., Cerv J.* Wave propagation in a thick cylinder bar due to longitudinal impact // *JSME International Journal, Series A* 1996. V. 39 (1). P. 60–70.

51. *Gabriel D., Plešek J., Kolman R., Vales F.*, Dispersion of elastic waves in the contact-impact problem of a long cylinder // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2010. V. 234. P. 930–1936.
52. *Mirsky I.* Vibrations of orthotropic, thick, cylindrical shells // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1964. V. 36 (1). P. 41–51.
53. *Mirsky I.* Wave propagation in transversely isotropic circular cylinders Part I: Theory // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1965. V. 37. P. 1016–1021.
54. *Mirsky I.* Wave propagation in transversely isotropic circular cylinders Part II: Numerical Results // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1965. V. 37. P. 1022–1026.
55. *Spies M.* Elastic waves in homogeneous and layered transversely isotropic media: Plane waves and Gaussian wave packets. A general approach // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1994. V. 95. P. 1748–1760.
56. *Nagy P.B.* Longitudinal guided wave propagation in a transversely isotropic rod immersed in fluid // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1995. V. 98 (1). P. 454–457.
57. *Nayfeh A.H. and Nagy P.B.* General study of axisymmetric waves in layered anisotropic fibers and their composites // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1996. V. 99. P. 931–941.
58. *Predoi M.V.* Guided waves dispersion equations for orthotropic multilayered pipes solved using standard finite elements code // *Ultrasonics*. 2014. V. 54. P. 1825–1831.
59. *Biot M.A.* Propagation of elastic waves in a cylindrical bore containing a fluid // *Journal of Applied Physics*. 1952. V. 23. P. 997–1005.
60. *Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V.* Theoretical aspects of applying Lamb waves in nondestructive testing of anisotropic media // *Russian Journal of Nondestructive Testing*. 2017. V. 53. № 4. P. 243–259.
61. *Gavric L.* Computation of propagative waves in free rail using a finite element technique // *J. Sound Vib.* 1995. V. 185. P. 531–543.
62. *Damljanovic V., Weaver R.L.* Propagating and evanescent elastic waves in cylindrical waveguides of arbitrary cross section // *J. Acoust. Soc. Am.* 2004. V. 115. № 4. P. 1572–1581.
63. *Hayashi T., Tamayama C., Murase M.* Wave structure analysis of guided waves in a bar with an arbitrary cross-section // *Ultrasonics*. 2006. V. 44. P. 17–24.
64. *Hayashi T., Song W.-J., Rose J.L.* Guided wave dispersion curves for a bar with an arbitrary cross-section, a rod and rail example // *Ultrasonics*. 2003. V. 41. P. 175–183.
65. *Shatalov M., Marais J., Fedotov I., Tenkam M.D., Schmidt M.* Longitudinal vibration of isotropic solid rods: from classical to modern theories // In: *Advances in Computer Science and Engineering, InTechOpen*. 2011. P. 187–214.
66. *Valsamos G., Casadei F., Solomos G.* A numerical study of wave dispersion curves in cylindrical rods with circular cross-section // *Applied and Computational Mechanics*. 2013. V. 7. P. 99–114.
67. *Parry D.J., Walker A.G., Dixon P.R.* Hopkinson bar pulse smoothing // *Measur. Sci. Technol.* 1995. V. 6. P. 443–446.
68. *Weinong Chen, Bo Song* Split Hopkinson (Kolsky) Bar. Springer. 2011. ISBN: 978-1-4419-7981-0.
69. *Ramesh K.T., Narasimhan S.* Finite deformations and the dynamic measurement of radial strains in Kolsky bar experiments // *Int. J. Solids Struct.* 1996. V. 33. P. 3723–3738.
70. *Bragov A.M., Lomunov A.K.* Methodological aspects of studying dynamic material properties using the Kolsky method // *Int. J. Impact Eng.* 1995. V. 16. P. 321–330.
71. *Mohr D., Gary G.* M-shaped specimen for the high strain rate tensile testing using a split Hopkinson pressure bar apparatus // *Exp. Mech.* 2007. V. 47. P. 681–692.
72. *Martin B.E., Chen W., Song B., Akers S.A.* Moisture effects on the high strain-rate behavior of sand // *Mech. Mater.* 2009. V. 41. P. 786–798.
73. *Gilat A., Schmidt T.E., Walker A.L.* Full field strain measurement in compression and tensile split Hopkinson bar experiments // *Exp. Mech.* 2009. V. 49. P. 291–302.
74. *Rajagopalan S., Prakash V.* A modified torsional Kolsky bar for investigating dynamic friction. *Exp. Mech.* 1999. V. 39. P. 295–303.
75. *Ma S., Wu Z., Wang Y., Liu K.* The reflection of guided waves from simple dents in pipes // *Ultrasonics*. 2014. V. 57. P. 190–197.

76. *Huthwaite P., Ribichini R., Cawley P., Lowe M.J.S.* Mode selection for corrosion detection in pipes and vessels via guided wave tomography // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* 2013. V. 60. P. 1165–1177.
77. *Leinov E., Lowe M.J.S., Cawley P.* Investigation of guided wave propagation and attenuation in pipe buried in sand // *J. Sound Vib.* 2015. V. 347. P. 96–114.
78. *Farhidzadeh A., Salamone S.* Reference-free corrosion damage diagnosis in steel strands using guided ultrasonic waves // *Ultrasonics* 2015. V. 57. P. 198–208.
79. *Barshinger J.N., Rose J.L.* Guided wave propagation in an elastic hollow cylinder coated with a viscoelastic material // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* 2004. V. 51. P. 1547–1556.
80. *Lu Y., Li J., Ye L., Wang D.* Guided waves for damage detection in rebar-reinforced concrete beams // *Constr. Build. Mater.* 2013. V. 47. P. 370–378.
81. *Raišutis R., Kažys R., Žukauskas E., Mažeika L., Vladiškauskas A.* Application of ultrasonic guided waves for non-destructive testing of defective CFRP rods with multiple delaminations // *NDT E Int.* 2010. V. 43. P. 416–424.
82. *Castaigns M., Hosten B.* Guided waves propagating in sandwich structures made of anisotropic, viscoelastic, composite materials // *J. Acoust. Soc. Am.* 2003. V. 113 (5). P. 2622–2634.
83. *Rostami J., Chen J., Tse P.W.* A Signal Processing Approach with a Smooth Empirical Mode Decomposition to Reveal Hidden Trace of Corrosion in Highly Contaminated Guided Wave Signals for Concrete-Covered Pipes // *Sensors.* 2017. V. 17. P. 1–21.
84. *Gurtin M.E.* The Linear Theory of Elasticity. In: *Handbuch der Physik*, Bd. VIa/2. Springer, New York, 1972.
85. *Graff K.F.* Wave Motion in Elastic Solids. Dover, 1991.
86. *Freund L.B.* Dynamic Fracture Mechanics. Cambridge University Press. 1998.
87. *Viktorov I.A.* Rayleigh and Lamb Waves: Physical Theory and Applications, Springer. 2013.
88. *Hirao M., Ogi H.* EMATs for Science and Industry – Noncontacting Ultrasonic Measurements, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.
89. *Kundu T.* Ultrasonic and electromagnetic waves for nondestructive evaluation and structural health monitoring // *Procedia Engineering.* 2014. V. 86. P. 395–405.
90. *Placko D., Kundu T.* Ultrasonic Nondestructive Evaluation: Engineering and Biological Material Characterization, Boca Raton: CRC Press, 2004.
91. *Mokryakov V.V.* Maxima of the stresses in the longitudinal Pochhammer–Chree waves // *Mech. Solids.* 2019. V. 54. P. 1063–1075.
92. *Kuznetsov S.V.* Pochhammer–Chree waves: Spectral analysis of axially symmetric modes // *J. Appl. Mech. Eng.* 2018. V. 7. № 301. P. 1–9.  
<https://doi.org/10.4172/2168-9873.1000301>
93. *Kuznetsov S.V.* Pochhammer–Chree waves in rods: degeneracy at the bulk wave velocities // *ZAMP.* 2018. V. 69 (6). P. 142–148.
94. *Ilyashenko A.V.* Pochhammer–Cree longitudinal waves: Anomalous polarization // *Mech. Solids.* 2019. V. 54. P. 598–606.
95. *Kuznetsov S.V.* Love waves in stratified monoclinic media // *Quart. Appl. Math.* 2004. V. 62 (4). P. 749–766.
96. *Djeran-Maigre I. et al.* Solitary SH waves in two-layered traction-free plates // *Comptes Rendus. Mécanique.* 2008. V. 336 (1–2). P. 102–107.
97. *Городицов В.А., Лисовенко Д.С.* Ауксетики среди материалов с кубической анизотропией // *Известия РАН. МТТ.* 2020. № 4. С. 7–24.
98. *Tyutekin V.V., Boiko A.I.* Helical normal waves near a cylindrical cavity in an elastic medium // *Acoustical Physics.* 2010. V. 56 (2). P. 141–144.
99. *Tyutekin V.V.* Properties of circumferential and helical waves of a cylindrical waveguide // *Acoustical Physics.* 2008. V. 54 (1). P. 13–14.

УДК 531.552

## ТРАЕКТОРИИ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ В СРЕДЕ

© 2021 г. К. Ю. Осипенко

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*  
*e-mail: kirill-o@mail.ru*

Поступила в редакцию 29.12.2020 г.

После доработки 06.01.2021 г.

Принята к публикации 14.01.2021 г.

Получено аналитическое решение нелинейной системы уравнений, описывающей плоское движение тела вращения в безграничной среде. Считалось, что на боковой поверхности тела трение отсутствует, а нормальные напряжения определяются по методу локального взаимодействия и задаются по закону сопротивления Ньютона в виде инерционного давления, пропорционального квадрату нормальной составляющей скорости. Исследованы возможные траектории движения тела и получены условия устойчивости прямолинейного движения.

*Ключевые слова:* проникание, метод локального взаимодействия, траектория, устойчивость

DOI: 10.31857/S057232992105007X

**1. Введение.** Решение задач о проникании тела и устойчивости его движения в точной постановке из-за сложной природы сил взаимодействия, как правило, возможно только разностными методами. Однако из-за большого числа параметров и определяющих функций такие расчеты часто оказываются мало пригодными для выявления общих закономерностей процесса проникания. Поэтому для изучения влияния параметров среды и тела на траекторию движения нередко используются приближенные подходы. Один из таких подходов – метод локального взаимодействия, впервые предложенный еще Ньютоном для определения сопротивления движению тел в газах и жидкостях. В настоящее время этот метод используется для решения задач гиперзвукового обтекания, движения в разреженном газе, проникания тела в грунты и металлы [1–4].

Ранее по методу локального взаимодействия изучались устойчивость при малых возмущениях прямолинейного движения тел вращения и неосесимметричных тел, на боковой поверхности которых действуют нормальные напряжения и трение [5–8]. Получены критерии устойчивости для тела вращения с учетом отрыва потока с его боковой поверхности при плоском и пространственном движениях [5–7] и для плоского движения неосесимметричного тела при безотрывном обтекании [8]. Исследовались траектории плоского движения осесимметричных тел [9]. Однако эти результаты были получены для линеаризованной системы уравнений при малых возмущениях относительно прямолинейного движения.

Ниже для случая контактного давления, задаваемого по формуле Ньютона, получено аналитическое решение, описывающее плоское движение осесимметричного тела при произвольных возмущениях и проанализированы возможные траектории движения тела. Напряжения, определяемые по формуле Ньютона, не зависят от знака нор-

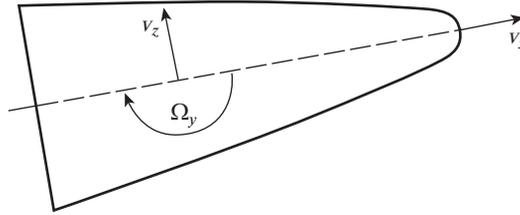


Рис. 1.

мальной составляющей скорости, поэтому решение имеет физический смысл только при безотрывном обтекании боковой поверхности тела.

Закон сопротивления Ньютона не учитывает прочность среды, поэтому для определения нормальных контактных напряжений при проникании тел в малопрочные среды чаще используется формула, в которой к инерционному слагаемому, совпадающему с законом Ньютона, добавляется постоянное прочностное слагаемое. Однако прочностное слагаемое при безотрывном обтекании влияет только на торможение тела, а результирующий момент и поперечная составляющая результирующей силы от него не зависят. Поэтому формула Ньютона может использоваться в случае движения тела в малопрочной среде с большой скоростью, когда инерционное слагаемое существенно превышает прочностное, а трением можно пренебречь.

**2. Постановка задачи.** Твердое тело вращения массой  $m$ , длиной  $L_m$  и моментом инерции при поперечном вращении  $I$  движется по инерции в безграничной среде. Цилиндрическая система координат  $R, \varphi, L$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) и связанная с центром масс местная прямоугольная система координат  $x = (L_c - L)/L_m$ ,  $y = R \cos \varphi / L_m$ ,  $z = R \sin \varphi / L_m$  жестко связаны с телом. Предполагается, что движение тела плоское и определяется вектором скорости  $\mathbf{v} = \{v_x, 0, v_z\}$  центра масс, расположенного при  $L = L_c$ , и угловой скоростью вращения относительно центра масс  $\boldsymbol{\Omega} = \{0, \Omega_y, 0\}$ , зависящих от времени  $t$  (рис. 1). Тело имеет гладкий меридиан  $R_b = R_b(L)$ ,  $0 < L < L_m$  и, быть может, кромку  $L = L_m$ , где  $R_b$  – радиус,  $L$  – расстояние от носика вдоль оси тела. Считается, что боковая поверхность тела обтекается безотрывно, но возможен отрыв потока с задней кромки тела (при  $L = L_m$ ).

Контактное давление  $\sigma_n$  на поверхности тела зададим по формуле сопротивления Ньютона в виде квадратичной зависимости давления на поверхности тела от нормальной составляющей скорости  $V_n$ :

$$\sigma_n = \frac{C_f \rho_0 V_n^2}{2} \quad (2.1)$$

Здесь  $C_f$  – коэффициент сопротивления,  $\rho_0$  – средняя плотность среды.

Введем новые безразмерные величины

$$r = \frac{R_b}{L_m}, \quad l = \frac{L}{L_m}, \quad l_c = \frac{L_c}{L_m}, \quad \gamma = \frac{dr}{dl}, \quad \gamma_0 = \sqrt{1 + \gamma^2}, \quad \eta = \frac{v_z}{v_x},$$

$$\omega = \frac{L_m \Omega_y}{v_x}, \quad ds = \frac{v_x dt}{L_m}, \quad s(t=0) = 0$$

Выражения для внешней нормали и проекции вектора скорости  $\mathbf{V}$  произвольной точки на поверхности тела на нормаль в системе координат  $x\gamma z$  определяются формулами

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= L_m \{x, y, z\}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{v} + [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}] = v_x \{1 + \omega z, 0, -a\} \\ V &= |\mathbf{V}| = \Theta v_x, \quad V_n = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}) = \Theta v_x \sin \delta, \quad a_3 = \omega x - \eta \\ \Theta &= \sqrt{(1 + \omega z)^2 + a^2}, \quad \mathbf{n} = \frac{\{\gamma, \cos \varphi, \sin \varphi\}}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \\ \sin \delta &= \frac{\gamma - A \sin \varphi}{\Theta \sqrt{1 + \gamma^2}}, \quad A_3 = a - \gamma \omega r\end{aligned}\quad (2.2)$$

Здесь  $\delta$  – локальный угол атаки (угол между касательной плоскостью в некоторой точке на поверхности тела и вектором скорости этой точки). В области “аэродинамической тени” ( $V_n < 0$ ) угол  $\delta$  отрицательный.

Запишем общие выражения для результирующей силы и момента

$$\mathbf{F} = -L_m^2 \int_S \sigma_n \mathbf{n} dS, \quad \mathbf{M} = -L_m^2 \int_S \sigma_n [\mathbf{R} \times \mathbf{n}] dS, \quad dS = r \gamma_0 d\varphi dl \quad (2.3)$$

В кинематические соотношения (2.1) и (2.2) и выражения для результирующих (2.3) входят неизвестные функции  $\kappa, \eta, \omega$ , для которых ниже будет сформулирована задача.

**3. Математическая постановка задачи.** Система дифференциальных уравнений плоского движения жесткого тела в системе координат, связанной с центром масс тела, записывается в следующем виде (точкой обозначена производная по  $t$ ):

$$\begin{aligned}m(\dot{v}_x + \Omega_y v_z) &= F_x, \quad m(\dot{v}_z - \Omega_y v_x) = F_z, \quad I \dot{\Omega}_y = M_y \\ (v_x, v_z, \Omega_y) &= (v_{x0}, v_{z0}, \Omega_{y0}) \quad \text{при } t = 0\end{aligned}$$

После соответствующих подстановок и очевидных преобразований запишем задачу Коши [7, 8]:

$$\begin{aligned}\kappa' &= 2\kappa(-f_\kappa + \omega\eta), \quad \eta' = f_\eta - \eta f_\kappa + (1 + \eta^2)\omega, \quad \omega' = jf_\omega - f_\kappa\omega + \eta\omega^2 \\ j &= mL_m^2/I, \quad \kappa = v_{x0}^2/v_x^2; \quad s = 0: \quad \kappa = 1, \quad \eta = \eta_0, \quad \omega = \omega_0\end{aligned}\quad (3.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned}f_\kappa &= \frac{L_m F_x}{mv_x^2} = \int_0^1 r \gamma \int_0^{2\pi} \sigma d\varphi dl, \quad f_\eta = \frac{L_m F_z}{mv_x^2} = -\int_0^1 r \int_0^{2\pi} \sigma \sin \varphi d\varphi dl \\ f_\omega &= \frac{M_y}{mv_x^2} = \int_0^1 r (x - \gamma r) \int_0^{2\pi} \sigma \sin \varphi d\varphi dl \\ \sigma &= \frac{L_m^3}{mv_x^2} \sigma_n = K \Theta^2 \sin^2 \delta, \quad K = \frac{L_m^3 \rho_0 C_f}{2m}\end{aligned}\quad (3.2)$$

Проинтегрировав в выражениях для равнодействующих сил и моментов (3.2) по углу  $\varphi$ , получим

$$\begin{aligned}f_\kappa &= f_{\kappa 0} + f_{\kappa\eta} \eta^2 + f_{\kappa\eta\omega} \eta \omega + f_{\kappa\omega\omega} \omega^2, \quad f_\eta = f_{\eta\eta} \eta + f_{\eta\omega} \omega, \quad f_\omega = f_{\omega\eta} \eta + f_{\omega\omega} \omega \\ f_{\kappa 0} &= 2\pi K J_2, \quad f_{\kappa\eta} = \pi K J_1, \quad f_{\kappa\eta\omega} = -2\pi K J_3, \quad f_{\kappa\omega\omega} = \pi K J_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{\eta\eta} &= -2\pi KJ_1, & f_{\eta\omega} &= 2\pi KJ_3, & f_{\omega\eta} &= 2\pi KJ_3, & f_{\omega\omega} &= -2\pi KJ_4 \\
J_1 &= \int_0^1 \frac{r\gamma}{1+\gamma^2} dl, & J_2 &= \int_0^1 \frac{r\gamma^3}{1+\gamma^2} dl, & J_3 &= \int_0^1 \frac{r\gamma}{1+\gamma^2} (x-\gamma r) dl \\
J_4 &= \int_0^1 \frac{r\gamma}{1+\gamma^2} (x-\gamma r)^2 dl
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Автономная система (3.1), (3.3) имеет непрерывно дифференцируемые правые части, поэтому в любой конечной области фазового пространства  $\kappa, \eta, \omega$  правые части системы (3.1) удовлетворяют условию Липшица и задача Коши корректна.

**4. Аналитическое решение.** Второе и третье уравнения системы (3.1) не зависят от  $\kappa$ , поэтому они могут решаться независимо от первого уравнения

$$\eta' = f_\eta - \eta f_\kappa + (1 + \eta^2)\omega, \quad \omega' = jf_\omega - f_\kappa\omega + \eta\omega^2 \tag{4.1}$$

Вычтем из первого уравнения системы (4.1), умноженного на  $\omega$ , второе уравнение, умноженное на  $\eta$ :

$$\omega\eta' - \eta\omega' = \omega f_\eta + \omega^2 - j\eta f_\omega \tag{4.2}$$

Сделав замену переменных  $\eta = \Psi \sin \theta$ ,  $\omega = \Psi \cos \theta$  в уравнении (4.2), получим

$$\begin{aligned}
\theta' &= \Gamma(\theta), & \Gamma(\theta) &= D \cos^2 \theta + E \sin \theta \cos \theta + F \sin^2 \theta, \\
D &= 1 + f_{\eta\omega}, & E &= f_{\eta\eta} - jf_{\omega\omega}, & F &= -jf_{\omega\eta}, \\
\Psi_0 &= \sqrt{\eta_0^2 + \omega_0^2}, & \theta_0 &= \arctan(\eta_0/\omega_0), & \theta_0 &\in (-\pi/2, \pi/2)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Уравнение (4.3) не зависит от  $\Psi$ , поэтому оно является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными. Запишем решение этого уравнения [10]:

$$s = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{E^2 - 4DF}} \left( \ln \left| \frac{2F \operatorname{tg} \theta + E - \sqrt{E^2 - 4DF}}{2F \operatorname{tg} \theta + E + \sqrt{E^2 - 4DF}} \right| - \ln \left| \frac{2F \operatorname{tg} \theta_0 + E - \sqrt{E^2 - 4DF}}{2F \operatorname{tg} \theta_0 + E + \sqrt{E^2 - 4DF}} \right| \right) & [E^2 > 4DF] \\ \frac{2}{\sqrt{4DF - E^2}} \left( \operatorname{arctg} \frac{2F \operatorname{tg} \theta + E}{\sqrt{4DF - E^2}} - \operatorname{arctg} \frac{2F \operatorname{tg} \theta_0 + E}{\sqrt{4DF - E^2}} \right), & [E^2 < 4DF] \\ \frac{-2}{2F \operatorname{tg} \theta + E} + \frac{2}{2F \operatorname{tg} \theta_0 + E}, & [E^2 = 4DF] \end{cases} \tag{4.4}$$

Теперь сложим первое уравнение системы (4.1), умноженное на  $\eta$ , со вторым уравнением, умноженным на  $\omega$ :

$$\begin{aligned}
\Psi' &= \Gamma_1(\theta)\Psi + \Gamma_2(\theta)\Psi^3, & \Gamma_1(\theta) &= D_1 \cos^2 \theta + E_1 \sin \theta \cos \theta + F_1 \sin^2 \theta \\
\Gamma_2(\theta) &= D_2 \cos^2 \theta + E_2 \sin \theta \cos \theta + F_2 \sin^2 \theta, & D_1 &= jf_{\omega\omega} - f_{\kappa 0} \\
E_1 &= 1 + f_{\eta\omega} + jf_{\omega\eta}, & F_1 &= f_{\eta\eta} - f_{\kappa 0}, & D_2 &= -f_{\kappa\omega\omega} \\
E_2 &= 1 - f_{\kappa\eta\omega}, & F_2 &= -f_{\kappa\eta\eta}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Уравнение (4.5) является дифференциальным уравнением Бернулли. Оно сводится к линейному дифференциальному уравнению подстановкой  $\psi = \Psi^{-2}$ . Запишем его общее решение [11]:

$$\Psi^{-2} = e^{\Phi(s)}(\Psi_0^{-2} - 2\Upsilon), \quad \Upsilon = \int_0^s e^{-\Phi(s)} \Gamma_2(\theta) ds, \quad \Phi(s) = -2 \int_0^s \Gamma_1(\theta) ds \quad (4.6)$$

Формулы (4.4), (4.6) являются общим аналитическим решением системы уравнений (4.1). Выразив из этих формул  $\eta$  и  $\omega$  в зависимости от  $s$  и подставив их в первое уравнение системы (3.1), получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Его интегрирование дает функцию  $\kappa(s)$ . Функции  $\kappa(s)$ ,  $\eta(s)$ ,  $\omega(s)$  являются решением системы (3.1) и полностью определяют траекторию движения тела.

**5. Изучение возможных траекторий и устойчивости при  $E^2 > 4DF$ .** В этом случае возможны два основных варианта

1. При некотором  $s > 0$  функция  $\Psi_0^{-2} - 2\Upsilon$  обращается в ноль. В этом случае движение тела будет неустойчивым, а возмущения  $\eta_z$ ,  $\omega_y$  будут становиться бесконечными на конечном отрезке траектории.

2. Функция  $\Psi_0^{-2} - 2\Upsilon$  является положительной при любом  $s > 0$ .

Приравнивая правую часть дифференциального уравнения (4.3) к нулю можно найти точки покоя (положения равновесия). Линеаризуем дифференциальное уравнение (4.3) в малых окрестностях точек покоя

$$\begin{aligned} \theta' &= \theta_* - (\theta - \theta_*)\sqrt{E^2 - 4DF} \\ \theta_* &= \arctan\left(\frac{-E - \sqrt{E^2 - 4DF}}{2F}\right) \quad \text{при} \quad |\theta - \theta_*| \ll 1 \\ \theta' &= \theta_{**} + (\theta - \theta_{**})\sqrt{E^2 - 4DF} \\ \theta_{**} &= \arctan\left(\frac{-E + \sqrt{E^2 - 4DF}}{2F}\right) \quad \text{при} \quad |\theta - \theta_{**}| \ll 1 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Из (5.1) следует, что  $\theta = \theta_*$  является устойчивой точкой покоя, а  $\theta = \theta_{**}$  неустойчивой.

При  $F > 0$ ,  $2F \tan \theta_0 + E - \sqrt{E^2 - 4DF} > 0$  функция  $\theta(s, \theta_0)$ , являющаяся решением уравнения (4.3), будет монотонно возрастать с ростом  $s$ , а если кроме того  $\Psi_0^{-2} - 2\Upsilon$  является положительной при любом  $s > 0$ , то  $\theta \rightarrow \theta_* + \pi$  при  $s \rightarrow \infty$ . При  $F < 0$  и  $2F \tan \theta_0 + E - \sqrt{E^2 - 4DF} > 0$  функция  $\theta(s, \theta_0)$  будет монотонно убывать, а если кроме того  $\Psi_0^{-2} - 2\Upsilon > 0$  при любом  $s > 0$ , то  $\theta \rightarrow \theta_* - \pi$  при  $s \rightarrow \infty$ . В остальных случаях решение монотонно изменяется в сторону  $\theta_*$ , а если  $\Psi_0^{-2} - 2\Upsilon > 0$  при любом  $s > 0$ , то  $\theta \rightarrow \theta_*$  при  $s \rightarrow \infty$ .

Если  $Det 2 > 0$ , где  $Det 2 = E_2^2 - 4D_2F_2$  то функция  $\Gamma_2(\theta)$  обращается в ноль в точках  $\theta_1 \pm \pi n$ ,  $\theta_2 \pm \pi n$ , где  $n = 1, 2, \dots$ , а  $\theta_1, \theta_2$  задаются выражениями

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{-E_2 + \sqrt{E_2^2 - 4D_2F_2}}{2F_2}\right), \quad \theta_2 = \arctan\left(\frac{-E_2 - \sqrt{E_2^2 - 4D_2F_2}}{2F_2}\right)$$

Из (4.5), (3.3) следует, что  $F_2 < 0$ , поэтому  $\theta_1 < \theta_2$ . Если  $-\pi/2 < \theta_1 < \theta < \theta_2 < \pi/2$ , то  $\Gamma_2(\theta) > 0$ , а неравенство  $\Gamma_2(\theta) < 0$  выполняется при  $-\pi/2 < \theta < \theta_1$  или  $\theta_2 < \theta < \pi/2$ . Корни  $\theta_1 \pm \pi n$  и  $\theta_2 \pm \pi n$ , соответствуют экстремумам функции  $\Psi_0^{-2} - 2\Upsilon$ , т.к. ее производная по  $s$  равна  $-2e^{-\Phi(s)}\Gamma_2(\theta)$ . Линеаризовав функцию  $\Gamma_2(\theta)$  в окрестности ее корней можно показать, что корень  $\theta_1$  соответствует локальному максимуму функции  $\Psi_0^{-2} - 2\Upsilon$ , а  $\theta_2$  минимуму.

Функция  $\theta(s, \theta_0)$  является монотонной по  $s$ , поэтому в выражении (4.6) для  $\Phi(s)$  можно перейти от интегрирования по  $ds$  к интегрированию по  $d\theta$  и вычислить интеграл аналитически [10]:

$$\begin{aligned} \Phi(\theta) = & -2 \int_{\theta_0}^{\theta} \Gamma_1(\theta) \frac{ds}{d\theta} d\theta = \frac{-2}{E^2 + (D-F)^2} \left\{ [E_1E + (D_1 - F_1)(D - F)]\theta + \right. \\ & + \frac{1}{2} [(D_1 - F_1)E - E_1(D - F)] \ln |D \cos^2\theta + E \sin\theta \cos\theta + F \sin^2\theta| + \\ & \left. + \left[ \frac{1}{2} (D_1 + F_1)E^2 - \frac{1}{2} EE_1(D + F) + (F_1D - D_1F)(D - F) \right] s(\theta, \theta_0) \right\} \Big|_{\theta_0}^{\theta} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Выражение для  $s(\theta, \theta_0)$  приведено в (3.4). Преобразуем  $\exp[-\Phi(\theta)]$  и  $\exp[-\Phi(\theta)]/\Gamma(\theta)$ , подставив в них  $\Gamma(\theta)$  из (4.3) и  $\exp[-\Phi(s)]$  из (5.2):

$$\begin{aligned} e^{-\Phi(\theta)} = & \exp\left(\frac{2[E_1E + (D_1 - F_1)(D - F)]}{E^2 + (D - F)^2}\theta\right) \exp\left(\frac{-2[E_1E + (D_1 - F_1)(D - F)]}{E^2 + (D - F)^2}\theta_0\right) \\ & |\sin(\theta - \theta_*)|^{\Lambda - \Pi} |\sin(\theta - \theta_{**})|^{\Lambda + \Pi} |\sin(\theta_0 - \theta_*)|^{-\Lambda + \Pi} |\sin(\theta_0 - \theta_{**})|^{-\Lambda - \Pi} \\ & \frac{\exp[-\Phi(\theta)]}{\Gamma(\theta)} = \frac{\cos\theta_* \cos\theta_{**} \exp[-\Phi(\theta)]}{F \sin(\theta - \theta_*) \sin(\theta - \theta_{**})} \\ & \Lambda = \frac{(D_1 - F_1)E - E_1(D - F)}{E^2 + (D - F)^2} \\ & \Pi = \frac{(D_1 + F_1)E^2 - EE_1(D + F) + 2(F_1D - D_1F)(D - F)}{[E^2 + (D - F)^2]\sqrt{E^2 - 4DF}} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Из (5.3) следует, что условие  $\lim[\exp[-\Phi(\theta)]/\Gamma(\theta)] \rightarrow \infty$  при  $\theta \rightarrow \theta_k$ , где  $\theta_k$  может принимать значения  $\theta_*$  или  $\theta_* \pm \pi$ , эквивалентно условию  $\Lambda - \Pi < 1$ , а условие  $\lim\{\exp[-\Phi(\theta)]\} \rightarrow \infty$  при  $\theta \rightarrow \theta_k$  эквивалентно условию  $\Lambda - \Pi < 0$ . Если функция  $\Psi_0^{-2} - 2\Upsilon$  является положительной при любом  $s > 0$ , то  $\theta \rightarrow \theta_k$  при  $s \rightarrow \infty$ . Из (5.3) видно, что при  $\Lambda - \Pi < 0$  и  $\Psi_0^{-2} - 2\Upsilon > 0$  интеграл от  $\theta_0$  до  $\theta_*$  функции  $\exp[-\Phi(s)]/\Gamma(\theta)$  стремится к бесконечности при  $\theta \rightarrow \theta_*$ .

Рассмотрим в подпунктах 5.1–5.4 поведение функции  $\Psi$  при движении тела по траектории в зависимости от начальных условий и параметров среды и тела.

5.1. Если  $\Lambda - \Pi < 0$  и  $\Gamma_2(\theta_*) > 0$ , то движение тела будет неустойчивым, т.к. в этом случае  $\Upsilon(s=0) = 0$  и  $\Upsilon \rightarrow +\infty$  при  $\theta \rightarrow \theta_*$ , а следовательно уравнение  $\Psi_0^{-2} - 2\Upsilon = 0$  будет иметь корень на интервале  $(\theta_0, \theta_* + \pi)$  при  $F > 0$  и  $2F \tan \theta_0 + E - \sqrt{E^2 - 4DF} > 0$ , на интервале  $(\theta_0, \theta_* - \pi)$  при  $F < 0$  и  $2F \tan \theta_0 + E - \sqrt{E^2 - 4DF} > 0$  и на интервале  $(\theta_0, \theta_*)$  в остальных случаях. Из (4.6) следует, что  $\Psi^{-2} = 0$  при  $\Psi_0^{-2} - 2\Upsilon = 0$ , а следовательно  $\eta^2 + \omega^2 \rightarrow \infty$  при  $\Psi_0^{-2} - 2\Upsilon \rightarrow 0$ .

5.2. Если  $\Lambda - \Pi < 0$  и  $\Gamma_2(\theta_*) < 0$ , то движение будет неустойчивым, если  $\Psi_0 > \Psi_c$ . Здесь  $\Psi_c$  – это максимум функции  $2\Upsilon$  на интервале  $(\theta_0, \theta_* + \pi)$  при  $F > 0$  и  $2F \tan \theta_0 + E - \sqrt{E^2 - 4DF} > 0$ , максимум на интервале  $(\theta_0, \theta_* - \pi)$  при  $F < 0$  и  $2F \tan \theta_0 + E - \sqrt{E^2 - 4DF} > 0$  и максимум на интервале  $(\theta_0, \theta_*)$  в остальных случаях. Введем новые функции

$$\begin{aligned} \Xi_1(\theta) &= \left[ 2 \int_{\theta_0}^{\theta} \exp[-\Phi(\theta)] \frac{\Gamma_2(\theta)}{\Gamma(\theta)} d\theta \right]^{-1/2} \\ \Xi_2(\theta) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \left[ -2 \exp[\Phi(\theta - \varepsilon)] \int_{\theta_0}^{\theta - \varepsilon} \exp[-\Phi(\theta)] \frac{\Gamma_2(\theta)}{\Gamma(\theta)} d\theta \right]^{-1/2} \\ \Xi_3(\theta) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \left[ -2 \exp[\Phi(\theta + \varepsilon)] \int_{\theta_0}^{\theta + \varepsilon} \exp[-\Phi(\theta)] \frac{\Gamma_2(\theta)}{\Gamma(\theta)} d\theta \right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Если  $\Psi_0 < \Psi_c$ , то  $\lim_{s \rightarrow \infty} \Psi^{-2} = -2 \lim_{s \rightarrow \infty} (\exp[\Upsilon \Phi(s)])$ . В зависимости от  $\theta_0$  и знака  $\Gamma(\theta_0)$  этот предел может быть равен  $\Xi_2(\theta_*)$ ,  $\Xi_2(\theta_* + \pi)$ ,  $\Xi_3(\theta_*)$  или  $\Xi_3(\theta_* - \pi)$ . В табл. 1 приведены выражения для  $\Psi_c$  и  $\Psi_k = -2 \lim_{s \rightarrow \infty} \{\Upsilon(s) \exp[\Phi(s)]\}$  при различных начальных условиях и параметрах среды и тела.

Докажем, что предел  $\Xi_2(\theta_*)$  при  $\Lambda - \Pi < 0$  и  $\Gamma_2(\theta_*) < 0$  является конечным, т.е. в этом случае тело при  $s \rightarrow \infty$  будет двигаться по круговой траектории. Подставим (5.3) в (5.4):

$$\begin{aligned} \Xi_2(\theta_*) &= \frac{-2 \cos \theta_* \cos \theta_{**}}{F} \exp \left( \frac{-2[E_1 E + (D_1 - F_1)(D - F)]}{E^2 + (D - F)^2} \theta_* \right) \times \\ &\times |\sin(\theta_* - \theta_{**})|^{-\Lambda - \Pi} \operatorname{sgn}[\sin(\theta_0 - \theta_*) \sin(\theta_0 - \theta_{**})] \times \\ &\times \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \left[ |\sin(-\varepsilon)|^{-\Lambda + \Pi} \int_{\theta_0}^{\theta_* - \varepsilon} \exp \left( \frac{2[E_1 E + (D_1 - F_1)(D - F)]}{E^2 + (D - F)^2} \theta \right) \times \right. \\ &\left. \times |\sin(\theta - \theta_*)|^{\Lambda - \Pi - 1} |\sin(\theta - \theta_*)|^{\Lambda + \Pi - 1} \Gamma_2(\theta) d\theta \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

Таблица 1

№	$\Gamma_1(\theta_0)$	$Det2$	$\theta_0$	$\Psi_c$	$\Psi_k$
1	$\Gamma(\theta_0) > 0$	$Det2 > 0$	$\theta_0 < \theta_2 < \theta_*$	$\Psi_c = \Xi_1(\theta_2)$	$\Psi_k = \Xi_2(\theta_*)$
2	$\Gamma(\theta_0) > 0$	$Det2 > 0$	$\theta_* < \theta_0 < \theta_2 < \theta_* + \pi$	$\Psi_c = \Xi_1(\theta_2)$	$\Psi_k = \Xi_2(\theta_* + \pi)$
3	$\Gamma(\theta_0) > 0$	$Det2 > 0$	$\theta_* < \theta_0 < \theta_2 + \pi < \theta_* + \pi$	$\Psi_c = \Xi_1(\theta_2 + \pi)$	$\Psi_k = \Xi_2(\theta_* + \pi)$
4	$\Gamma(\theta_0) > 0$	$Det2 > 0$	$\theta_2 < \theta_0 < \theta_*$	$\Psi_c = +\infty$	$\Psi_k = \Xi_2(\theta_*)$
5	$\Gamma(\theta_0) > 0$	$Det2 > 0$	$\theta_0 < \theta_* < \theta_1 < \theta_2$	$\Psi_c = +\infty$	$\Psi_k = \Xi_2(\theta_*)$
6	$\Gamma(\theta_0) > 0$	$Det2 > 0$	$\theta_* < \theta_1 < \theta_2 < \theta_0 < \theta_* + \pi$	$\Psi_c = +\infty$	$\Psi_k = \Xi_2(\theta_* + \pi)$
7	$\Gamma(\theta_0) > 0$	$Det2 < 0$	$\theta_0 < \theta_*$	$\Psi_c = +\infty$	$\Psi_k = \Xi_2(\theta_*)$
8	$\Gamma(\theta_0) > 0$	$Det2 < 0$	$\theta_* < \theta_0 < \theta_* + \pi$	$\Psi_c = +\infty$	$\Psi_k = \Xi_2(\theta_* + \pi)$
9	$\Gamma(\theta_0) < 0$	$Det2 > 0$	$\theta_* < \theta_1 < \theta_0$	$\Psi_c = \Xi_1(\theta_1)$	$\Psi_k = \Xi_3(\theta_*)$
10	$\Gamma(\theta_0) < 0$	$Det2 > 0$	$\theta_* - \pi < \theta_1 < \theta_0 < \theta_*$	$\Psi_c = \Xi_1(\theta_1)$	$\Psi_k = \Xi_3(\theta_* - \pi)$
11	$\Gamma(\theta_0) < 0$	$Det2 > 0$	$\theta_* - \pi < \theta_1 - \pi < \theta_0 < \theta_*$	$\Psi_c = \Xi_1(\theta_1 - \pi)$	$\Psi_k = \Xi_3(\theta_* - \pi)$
12	$\Gamma(\theta_0) < 0$	$Det2 > 0$	$\theta_1 < \theta_2 < \theta_* < \theta_0$	$\Psi_c = +\infty$	$\Psi_k = \Xi_3(\theta_*)$
13	$\Gamma(\theta_0) < 0$	$Det2 > 0$	$\theta_* < \theta_0 < \theta_1$	$\Psi_c = +\infty$	$\Psi_k = \Xi_3(\theta_*)$
14	$\Gamma(\theta_0) < 0$	$Det2 > 0$	$\theta_* - \pi < \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_*$	$\Psi_c = +\infty$	$\Psi_k = \Xi_3(\theta_* - \pi)$
15	$\Gamma(\theta_0) < 0$	$Det2 < 0$	$\theta_* < \theta_0$	$\Psi_c = +\infty$	$\Psi_k = \Xi_3(\theta_*)$
16	$\Gamma(\theta_0) < 0$	$Det2 < 0$	$\theta_* - \pi < \theta_0 < \theta_*$	$\Psi_c = +\infty$	$\Psi_k = \Xi_3(\theta_* - \pi)$

Функция  $|\sin(\theta - \theta_*)|^{\Lambda - \Pi - 1}$  стремится к бесконечности при  $\theta \rightarrow \theta_*$ . Остальные функции являются конечными, поэтому для доказательства конечности  $\Xi_2(\theta_*)$  достаточно доказать конечность  $T$ :

$$T = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \left\{ [\sin(-\varepsilon)]^{\Pi - \Lambda} \int_{\theta_0 - \theta_*}^{-\varepsilon} (\sin \varphi)^{\Lambda - \Pi - 1} d\varphi \right\} \quad (5.6)$$

Под интегралом в (5.6) находится  $\sin \varphi$  в отрицательной степени. Используем формулу, позволяющую увеличить степень  $\sin \varphi$  [10]:

$$\int \frac{dx}{\sin^p x} = \frac{\cos x}{(1 - p) \sin^{p-1} x} + \frac{p-2}{p-1} \int \frac{dx}{\sin^{p-2} x} \quad (5.7)$$

После подстановки (5.7) в (5.6), получим

$$T = \frac{1}{\Lambda - \Pi} + \frac{\Pi - \Lambda - 1}{\Pi - \Lambda} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ [\sin(-\varepsilon)]^{\Pi - \Lambda} \int_{\theta_0 - \theta_*}^{-\varepsilon} (\sin \varphi)^{\Lambda - \Pi + 1} d\varphi \right] \quad (5.8)$$

Второе слагаемое в (5.8) равно нулю. Это можно доказать последовательным применением (5.7) к интегралу, входящему в (5.8), до тех пор, пока степень подинтегральной функции  $\sin \varphi$  не станет больше нуля, и вычислением получающихся пределов. Таким образом, предел  $\Xi_2(\theta_*)$  является конечным. Аналогичным образом доказывается конечность  $\Xi_2(\theta_* + \pi)$ ,  $\Xi_3(\theta_*)$  и  $\Xi_3(\theta_* - \pi)$ .

5.3. При  $\Lambda - \Pi > 0$  и  $\Gamma_2(\theta_*) < 0$  движение будет неустойчивым, если  $\Psi_0 > \Psi_c$ , где  $\Psi_c$  приведены в табл. 1.

Таблица 2

№	$\Gamma_1(\theta_0)$	$Det2$	$\theta_0$	$\Psi_{c1}$	$\Psi_{c2}$
1	$\Gamma(\theta_0) > 0$	$Det2 > 0$	$\theta_0 < \theta_1 < \theta_*$	$\Psi_{c1} = \Xi_1(\theta_1)$	$\Psi_{c2} = \Xi_1(\theta_*)$
2	$\Gamma(\theta_0) > 0$	$Det2 > 0$	$\theta_* < \theta_0 < \theta_1 < \theta_* + \pi$	$\Psi_{c1} = \Xi_1(\theta_1)$	$\Psi_{c2} = \Xi_1(\theta_* + \pi)$
3	$\Gamma(\theta_0) > 0$	$Det2 > 0$	$\theta_* < \theta_0 < \theta_1 + \pi < \theta_* + \pi$	$\Psi_{c1} = \Xi_1(\theta_1 + \pi)$	$\Psi_{c2} = \Xi_1(\theta_* + \pi)$
4	$\Gamma(\theta_0) > 0$	$Det2 > 0$	$\theta_1 < \theta_0 < \theta_*$	$\Psi_{c1} = +\infty$	$\Psi_{c2} = \Xi_1(\theta_*)$
5	$\Gamma(\theta_0) > 0$	$Det2 > 0$	$\theta_0 < \theta_* < \theta_1 < \theta_2$	$\Psi_{c1} = +\infty$	$\Psi_{c2} = \Xi_1(\theta_*)$
6	$\Gamma(\theta_0) > 0$	$Det2 > 0$	$\theta_* < \theta_1 < \theta_2 < \theta_0 < \theta_* + \pi$	$\Psi_{c1} = +\infty$	$\Psi_{c2} = \Xi_1(\theta_* + \pi)$
7	$\Gamma(\theta_0) > 0$	$Det2 < 0$	$\theta_0 < \theta_*$	$\Psi_{c1} = +\infty$	$\Psi_{c2} = \Xi_1(\theta_*)$
8	$\Gamma(\theta_0) > 0$	$Det2 < 0$	$\theta_* < \theta_0 < \theta_* + \pi$	$\Psi_{c1} = +\infty$	$\Psi_{c2} = \Xi_1(\theta_* + \pi)$
9	$\Gamma(\theta_0) < 0$	$Det2 > 0$	$\theta_* < \theta_2 < \theta_0$	$\Psi_{c1} = \Xi_1(\theta_2)$	$\Psi_{c2} = \Xi_1(\theta_*)$
10	$\Gamma(\theta_0) < 0$	$Det2 > 0$	$\theta_* - \pi < \theta_2 < \theta_0 < \theta_*$	$\Psi_{c1} = \Xi_1(\theta_2)$	$\Psi_{c2} = \Xi_1(\theta_* - \pi)$
11	$\Gamma(\theta_0) < 0$	$Det2 > 0$	$\theta_* - \pi < \theta_2 - \pi < \theta_0 < \theta_*$	$\Psi_{c1} = \Xi_1(\theta_2 - \pi)$	$\Psi_{c2} = \Xi_1(\theta_* - \pi)$
12	$\Gamma(\theta_0) < 0$	$Det2 > 0$	$\theta_1 < \theta_2 < \theta_* < \theta_0$	$\Psi_{c1} = +\infty$	$\Psi_{c2} = \Xi_1(\theta_*)$
13	$\Gamma(\theta_0) < 0$	$Det2 > 0$	$\theta_* < \theta_0 < \theta_2$	$\Psi_{c1} = +\infty$	$\Psi_{c2} = \Xi_1(\theta_*)$
14	$\Gamma(\theta_0) < 0$	$Det2 > 0$	$\theta_* - \pi < \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_*$	$\Psi_{c1} = +\infty$	$\Psi_{c2} = \Xi_1(\theta_* - \pi)$
15	$\Gamma(\theta_0) < 0$	$Det2 < 0$	$\theta_* < \theta_0$	$\Psi_{c1} = +\infty$	$\Psi_{c2} = \Xi_1(\theta_*)$
16	$\Gamma(\theta_0) < 0$	$Det2 < 0$	$\theta_* - \pi < \theta_0 < \theta_*$	$\Psi_{c1} = +\infty$	$\Psi_{c2} = \Xi_1(\theta_* - \pi)$

5.4. При  $\Lambda - \Pi > 0$  и  $\Gamma_2(\theta_*) > 0$  движение будет асимптотически устойчивым, если  $\Psi_0 < \min(\Psi_{c1}, \Psi_{c2})$ . Формулы для вычисления  $\Psi_{c1}$  и  $\Psi_{c2}$  приведены в табл. 2.

6. Изучение возможных траекторий и устойчивости при  $E^2 < 4DF$ . Из (4.4) и (4.6) следует, что функции  $\Phi(\theta)$  и  $\Upsilon(\theta)$  при  $E^2 < 4DF$  являются периодическими с периодом  $\pi$ . В случае  $\Gamma(\theta_0) > 0$ ,  $\theta_0 < \theta_2$  и  $Det2 > 0$  функция  $\theta(s)$  монотонно возрастает с ростом  $s$ , а локальными максимумами функции  $\Upsilon$  являются точки  $\theta_2 + (n - 1)\pi$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Для удобства анализа траектории и устойчивости движения перепишем  $\Upsilon(s)$  в следующем виде

$$\Upsilon = \begin{cases} X_4(\theta_0, \theta), & \theta < \theta_2 + \pi \\ X_4(\theta_0, \theta_2) + \exp(-X_{11}) \left[ \sum_{n=1}^N \exp[-(n-1)X_{12}] \right] X_{15}(\theta_2, \theta_2 + \pi) + \\ + X_4(\theta_2 + N\pi, \theta), & \theta > \theta_2 + \pi, \quad \theta \in [\theta_2 + N\pi, \theta_2 + (N+1)\pi] \end{cases}$$

$$X_{11} = -2 \int_{\theta_0}^{\theta_2} \frac{\Gamma_1(\theta)}{\Gamma(\theta)} d\theta, \quad X_{12} = -2 \int_{\theta_2}^{\theta_2 + \pi} \frac{\Gamma_1(\theta)}{\Gamma(\theta)} d\theta$$

$$X_{13}(\theta) = -2 \int_{\theta_2 + N\pi}^{\theta} \frac{\Gamma_1(\theta)}{\Gamma(\theta)} d\theta = \Phi(\theta - N\pi)$$
(6.1)

$$X_4(\xi, \nu) = \int_{\xi}^{\nu} \exp[-\Phi(\theta)] \frac{\Gamma_2(\theta)}{\Gamma(\theta)} d\theta, \quad X_{15}(\xi, \nu) = \int_{\xi}^{\nu} \exp[-X_{13}(\theta)] \frac{\Gamma_2(\theta)}{\Gamma(\theta)} d\theta$$

$$\Phi(\theta) = X_{11} + NX_{12} + X_{13}(\theta) \quad \text{при} \quad \theta > \theta_2 + \pi$$

Сумма в квадратных скобках (6.1) является геометрической прогрессией, поэтому выражение для  $\Upsilon$  при  $\theta > \theta_2 + \pi$  можно упростить

$$\Upsilon = X_4(\theta_0, \theta_2) + \frac{\exp(-X_{11})[\exp(-NX_{12}) - 1]}{\exp(-X_{12}) - 1} X_{15}(\theta_2, \theta_2 + \pi) + X_4(\theta_2 + N\pi, \theta) \quad (6.2)$$

Представим  $\Upsilon$  в виде суммы слагаемого, не зависящего от  $N$ , и слагаемого пропорционального  $\exp(-X_{11} - NX_{12})$ :

$$\Upsilon = X_4(\theta_0, \theta_2) + \frac{\exp(-X_{11})}{1 - \exp(-X_{12})} X_{15}(\theta_2, \theta_2 + \pi) + \exp(-X_{11} - NX_{12}) \times$$

$$\times \left[ \frac{X_{15}(\theta_2, \theta_2 + \pi)}{\exp(-X_{12}) - 1} + \int_{\theta_2 + N\pi}^{\theta} \exp[-\Phi(\theta) + X_{11} + NX_{12}] \frac{\Gamma_2(\theta)}{\Gamma(\theta)} d\theta \right] \quad (6.3)$$

Функция  $\Gamma_2(\theta)/\Gamma(\theta)$  является периодической с периодом  $\pi$ , поэтому заменив в (6.3) переменную интегрирования  $\theta$  на  $\theta - N\pi$  и подставив  $X_{13}(\theta)$  из (6.1), выражение для  $\Upsilon$  можно упростить

$$\Upsilon = X_4(\theta_0, \theta_2) + \frac{\exp(-X_{11})}{1 - \exp(-X_{12})} X_{15}(\theta_2, \theta_2 + \pi) +$$

$$+ \exp(-X_{11} - NX_{12}) \left[ \frac{X_{15}(\theta_2, \theta_2 + \pi)}{\exp(-X_{12}) - 1} + X_{15}(\theta_2, \theta - N\pi) \right] \quad (6.4)$$

Из (6.4) следует, что если  $\Phi(\theta) \rightarrow +\infty$  при  $s \rightarrow +\infty$ , то предел функции  $\Upsilon \exp[\Phi(\theta)]$  при  $s \rightarrow +\infty$  является бесконечным. Если  $\Phi(\theta) \rightarrow -\infty$  при  $s \rightarrow +\infty$ , то предел  $\Upsilon \exp[\Phi(\theta)]$  выражается формулой

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \{ \Upsilon \exp[\Phi(\theta)] \} = \left[ \frac{X_{15}(\theta_2, \theta_2 + \pi)}{\exp(-X_{12}) - 1} + X_{15}(\theta_2, \theta - N\pi) \right] \exp[\Phi(\theta - N\pi)] \quad (6.5)$$

Случай  $\Gamma(\theta_0) < 0$ ,  $Def2 > 0$ ,  $\theta_1 < \theta_0$  отличается от (6.1) тем, что угол  $\theta$  будет убывать при движении тела по траектории, локальными максимумами функции  $\Upsilon$  будут точки  $\theta_1 - (n-1)\pi$ , а функция  $\Upsilon$  в этом случае записывается в следующем виде

$$\Upsilon = \begin{cases} X_4(\theta_0, \theta), & \theta > \theta_1 - \pi \\ X_4(\theta_0, \theta_1) + \exp(-X_{31}) \left[ \sum_{n=1}^N \exp[-(n-1)X_{32}] \right] X_{35}(\theta_2, \theta_2 + \pi) + \\ + X_4(\theta_2 + N\pi, \theta), & \theta < \theta_1 - \pi, \quad \theta \in [\theta_1 - N\pi, \theta_1 - (N+1)\pi] \end{cases}$$

$$X_{31} = -2 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\Gamma_1(\theta)}{\Gamma(\theta)} d\theta, \quad X_{32} = -2 \int_{\theta_1}^{\theta_1 - \pi} \frac{\Gamma_1(\theta)}{\Gamma(\theta)} d\theta \quad (6.6)$$

$$X_{33}(\theta) = -2 \int_{\theta_1 + N\pi}^{\theta} \frac{\Gamma_1(\theta)}{\Gamma(\theta)} d\theta = \Phi(\theta + N\pi)$$

$$X_{35}(\xi, \nu) = \int_{\xi}^{\nu} \exp[-X_{23}(\theta)] \frac{\Gamma_2(\theta)}{\Gamma(\theta)} d\theta$$

$$\Phi(\theta) = X_{21} + NX_{22} + X_{23}(\theta) \quad \text{при} \quad \theta < \theta_1 - \pi$$

Рассмотрим ниже в подпунктах 6.1–6.5 траектории и устойчивость движения тела при различных начальных условиях и параметрах среды и тела.

6.1. Если  $\Gamma(\theta_0) > 0$ ,  $Det 2 > 0$ ,  $\theta_0 < \theta_2$  и  $X_{12} > 0$ , то угол  $\theta$  будет возрастать при движении тела по траектории, а из формул (4.6), (6.1), (6.2) следует, что при  $\theta_0 < \theta_2 + \pi$  функция  $\Upsilon(s)$  принимает максимальные значения  $X_4(\theta_0, \theta_2)$  и  $X_4(\theta_0, \theta_2 + \pi)$ . Если  $\theta_0 > \theta_2 + \pi$ , то максимум функции может быть равен  $\Upsilon_{m1}$  или  $\Upsilon_{m2}$  при  $N = 1$ ,  $\theta = \theta_2 + \pi$  и при  $N = +\infty$ ,  $\theta = \theta_2 + N\pi$  соответственно

$$\Upsilon_{m1} = X_4(\theta_0, \theta_2) + X_{15}(\theta_2, \theta_2 + \pi) \exp(-X_1) = X_4(\theta_0, \theta_2 + \pi)$$

$$\Upsilon_{m2} = X_4(\theta_0, \theta_2) + \frac{\exp(-X_{11})}{1 - \exp(-X_{12})} X_{15}(\theta_2, \theta_2 + \pi) \quad (6.7)$$

При  $X_{15}(\theta_2, \theta_2 + \pi) > 0$  выполняется неравенство  $\Upsilon_{m2} > \Upsilon_{m1} > X_4(\theta_0, \theta_2)$ , а при  $X_{15}(\theta_2, \theta_2 + \pi) < 0$  выполняется неравенство  $X_4(\theta_0, \theta_2) > \Upsilon_{m1} > \Upsilon_{m2}$ . Если при движении тела по траектории выполняется неравенство  $\Psi_0^{-2} - 2\Upsilon > 0$ , то  $\Phi \rightarrow +\infty$  и  $\Psi \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow +\infty$ , то есть возмущения будут загухать. Следовательно, необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости прямолинейного движения тела записываются в виде неравенства

$$\Psi_0^{-2} > \begin{cases} 2X_4(\theta_0, \theta_2) & \text{при} \quad X_{15}(\theta_2, \theta_2 + \pi) < 0 \\ 2\Upsilon_{m2} & \text{при} \quad X_{15}(\theta_2, \theta_2 + \pi) > 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

При невыполнении условий (6.8) функция  $\Psi_0^{-2} - 2\Upsilon$  обратится в нуль на конечном отрезке траектории, а  $\Psi$  станет бесконечной. Движение тела в этом случае будет неустойчивым.

6.2. Если  $\Gamma(\theta_0) > 0$ ,  $Det 2 > 0$ ,  $\theta_2 < \theta_0$  и  $X_{12} > 0$ , то в формулах (6.1)–(6.5) следует заменить  $\theta_2$  на  $\theta_2 + \pi$ , а условия асимптотической устойчивости примут вид

$$\Psi_0^{-2} > \begin{cases} 2X_4(\theta_0, \theta_2 + \pi) & \text{при} \quad X_{15}(\theta_2, \theta_2 + \pi) < 0 \\ 2X_4(\theta_0, \theta_2 + \pi) + \frac{2 \exp(-X_{11}) X_{15}(\theta_2, \theta_2 + \pi)}{1 - \exp(-X_{12})} & \text{при} \quad X_{15}(\theta_2, \theta_2 + \pi) > 0 \end{cases} \quad (6.9)$$

В функции  $X_{15}$  замена  $\theta_2$  на  $\theta_2 + \pi$  не проводилась, так как  $X_{15}(\theta_2 + \pi, \theta_2 + 2\pi) = X_{15}(\theta_2, \theta_2 + \pi)$ .

6.3. Если  $\Gamma(\theta_0) > 0$ ,  $Det 2 < 0$  и  $X_{22} > 0$ , где выражение для  $X_{22}$  дано ниже в (6.10), то функция  $\Gamma_2(\theta)$  не имеет корней и ее знак совпадает со знаком  $\Gamma_2(\theta_0)$ , поэтому  $\Upsilon(s)$  будет больше нуля при  $\Gamma_2(\theta_0) > 0$  и меньше нуля при  $\Gamma_2(\theta_0) < 0$ . При  $\Gamma_2(\theta_0) < 0$  функция  $\Psi_0^{-2} - 2\Upsilon$  является положительной, а движение тела будет асимптотически

устойчивым. В случае  $\Gamma_2(\theta_0) > 0$  условие асимптотической устойчивости записывается в виде

$$\begin{aligned} \Psi_0^{-2} &> 2X_4(\theta_0, \pi/2) + \frac{2 \exp(-X_{21})}{1 - \exp(-X_{22})} X_{25}(-\pi/2, \pi/2) \\ X_{21} &= -2 \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{\Gamma_1(\theta)}{\Gamma(\theta)} d\theta, \quad X_{22} = -2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\Gamma_1(\theta)}{\Gamma(\theta)} d\theta, \\ X_{23}(\theta) &= -2 \int_{-\pi/2}^{\theta - (N+1/2)\pi} \frac{\Gamma_1(\theta)}{\Gamma(\theta)} d\theta, \quad X_{25}(\xi, \nu) = \int_{\xi}^{\nu} \exp[-X_{23}(\theta)] \frac{\Gamma_2(\theta)}{\Gamma(\theta)} d\theta \end{aligned} \quad (6.10)$$

6.4. Если  $\Gamma(\theta_0) > 0$ ,  $Det 2 > 0$ ,  $\theta_0 < \theta_2$  и  $X_{12} < 0$  и выполняются условия

$$\Psi_0^{-2} > 2X_4(\theta_0, \theta_2), \quad X_{15}(\theta_2, \theta_2 + \pi) < 0, \quad (6.11)$$

то  $\Psi_0^{-2} - 2\Upsilon > 0$ , а из (6.5) следует, что в этом случае предел  $\Upsilon(s) \exp[\Phi(s)]$  при  $s \rightarrow +\infty$  является периодической функцией с периодом  $s(\pi/2) - s(-\pi/2)$ . Из этого и периодичности  $\theta(s)$  следует, что возмущения  $\eta$  и  $\omega$  будут периодическими. При невыполнении хотя бы одного из условий (6.11) движение тела будет неустойчивым.

6.5. При  $\Gamma(\theta_0) < 0$ ,  $Det 2 > 0$ ,  $\theta_2 < \theta_0$  и  $X_{12} < 0$  рассуждения строятся аналогично подпункту 6.4, а критерии асимптотической устойчивости будут иметь следующий вид

$$\Psi_0^{-2} > 2X_4(\theta_0, \theta_2 + \pi), \quad X_{15}(\theta_2, \theta_2 + \pi) < 0$$

6.6. В случае  $\Gamma(\theta_0) < 0$ ,  $Det 2 > 0$ ,  $\theta_1 < \theta_0$  и  $X_{32} > 0$  угол  $\theta$  будет убывать при движении тела по траектории, локальные максимумы функция  $\Upsilon$  будут в точках  $\theta_1 - (n-1)\pi$ , а сама функция  $\Upsilon$  имеет вид (6.6). Приводя рассуждения аналогичные подпункту 6.1, можно показать, что в этом случае условия асимптотической устойчивости записываются в следующем виде

$$\Psi_0^{-2} > \begin{cases} 2X_4(\theta_0, \theta_1) & \text{при } X_{35}(\theta_1, \theta_1 - \pi) < 0 \\ 2X_4(\theta_0, \theta_1) + \frac{2 \exp(-X_{31})}{1 - \exp(-X_{32})} X_{35}(\theta_1, \theta_1 - \pi) & \text{при } X_{35}(\theta_1, \theta_1 - \pi) > 0 \end{cases} \quad (6.12)$$

6.7. Если  $\Gamma(\theta_0) < 0$ ,  $Det 2 < 0$ ,  $\theta_0 < \theta_1$  и  $X_{32} > 0$ , то в условиях асимптотической устойчивости (6.12) следует заменить  $\theta_1$  на  $\theta_1 - \pi$ :

$$\Psi_0^{-2} > \begin{cases} 2X_4(\theta_0, \theta_1 - \pi) & \text{при } X_{35}(\theta_1, \theta_1 - \pi) < 0 \\ 2X_4(\theta_0, \theta_1 - \pi) + \frac{2 \exp(-X_{31})}{1 - \exp(-X_{32})} X_{35}(\theta_1, \theta_1 - \pi) & \text{при } X_{35}(\theta_1, \theta_1 - \pi) > 0 \end{cases} \quad (6.13)$$

6.8. Если  $\Gamma(\theta_0) < 0$ ,  $Det 2 < 0$  и  $X_{42} > 0$ , где  $X_{42}$  определено ниже в (6.14), то функция  $\Gamma_2(\theta)$  не имеет корней и ее знак совпадает со знаком  $\Gamma_2(\theta_0)$ , поэтому  $\Upsilon(s)$  будет больше нуля при  $\Gamma_2(\theta_0) > 0$  и меньше нуля при  $\Gamma_2(\theta_0) < 0$ . При  $\Gamma_2(\theta_0) < 0$  функция  $\Psi_0^{-2} - 2\Upsilon$  является положительной, а движение тела будет асимптотически устойчи-

вым. В случае  $\Gamma_2(\theta_0) > 0$  условие асимптотической устойчивости записывается в следующем виде

$$\begin{aligned} \Psi_0^{-2} &> 2X_4(\theta_0, -\pi/2) + \frac{2 \exp(-X_{41}) X_{45}(\pi/2, -\pi/2)}{1 - \exp(-X_{42})} \\ X_{41} &= -2 \int_{\theta_0}^{-\pi/2} \frac{\Gamma_1(\theta)}{\Gamma(\theta)} d\theta, \quad X_{42} = -2 \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{\Gamma_1(\theta)}{\Gamma(\theta)} d\theta \\ X_{43}(\theta) &= -2 \int_{\pi/2}^{\theta+(N+1/2)\pi} \frac{\Gamma_1(\theta)}{\Gamma(\theta)} d\theta, \quad X_{45}(\xi, \nu) = \int_{\xi}^{\nu} \exp[-X_{43}(\theta)] \frac{\Gamma_2(\theta)}{\Gamma(\theta)} d\theta \end{aligned} \quad (6.14)$$

6.9. Случай  $\Gamma(\theta_0) < 0$ ,  $\text{Det}2 > 0$ ,  $\theta_1 < \theta_0$  и  $X_{32} < 0$  похож на 6.4 но угол  $\theta$  будет убывать при движении тела по траектории. Запишем необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости

$$\Psi_0^{-2} > 2X_4(\theta_0, \theta_1) > 0, \quad X_{35}(\theta_1, \theta_1 - \pi) < 0 \quad (6.15)$$

6.10. При  $\Gamma(\theta_0) < 0$ ,  $\text{Det}2 > 0$ ,  $\theta_0 < \theta_1$  и  $X_{32} < 0$  рассуждения строятся аналогично подпункту 6.9, а критерии асимптотической устойчивости будут иметь вид

$$\Psi_0^{-2} > 2X_4(\theta_0, \theta_1 - \pi) > 0, \quad X_{35}(\theta_1, \theta_1 - \pi) < 0$$

6.11. Если  $\Gamma(\theta_0) > 0$ ,  $\text{Det}2 < 0$ ,  $\Gamma_2(\theta_0) > 0$  и  $X_{12} < 0$  или  $\Gamma(\theta_0) < 0$ ,  $\text{Det}2 < 0$ ,  $\Gamma_2(\theta_0) > 0$  и  $X_{32} < 0$ , то возмущения станут бесконечными на конечном отрезке траектории, а движение тела будет неустойчивым.

6.12. Если  $\Gamma(\theta_0) > 0$ ,  $\text{Det}2 < 0$ ,  $X_{12} < 0$  и  $\Gamma_2(\theta_0) < 0$ , то из (6.5) следует, что предел  $\Upsilon \exp[\Phi(\theta)]$  при  $s \rightarrow +\infty$  является ограниченной отрицательной периодической функцией с периодом  $s(3\pi/2) - s(\pi/2)$ . Отсюда следует, что  $\Psi$  при  $s \rightarrow +\infty$  будет положительной ограниченной периодической функцией

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \Psi^{-2} = -2 \left[ \frac{X_{15}(\theta_2, \theta_2 + \pi)}{\exp(-X_{12}) - 1} + X_{15}(\theta_2, \theta - N\pi) \right] \exp[\Phi(\theta - N\pi)], \quad \theta = \theta(s)$$

Из периодичности  $\Psi$  и  $\theta$  и ограниченности  $\Psi$  следует периодичность и ограниченность возмущений  $\eta$  и  $\omega$ .

6.13. Если  $\Gamma(\theta_0) < 0$ ,  $\text{Det}2 < 0$ ,  $X_{12} < 0$  и  $\Gamma_2(\theta_0) < 0$ , то аналогично подпункту 6.12 возмущения  $\eta$  и  $\omega$  будут периодическими и ограниченными, а предел функции  $\Psi$  при  $s \rightarrow +\infty$  будет иметь следующий вид

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \Psi^{-2} = -2 \left[ \frac{X_{35}(\theta_1, \theta_1 - \pi)}{\exp(-X_{32}) - 1} + X_{35}(\theta_1, \theta + N\pi) \right] \exp[\Phi(\theta + N\pi)], \quad \theta = \theta(s)$$

**7. Заключение.** Возможны четыре варианта движения тела:

1. Тело движется асимптотически устойчиво, а возмущения  $\eta$  и  $\omega$  стремятся к нулю при длине траектории  $s$  стремящейся к бесконечности.

2. Тело движется неустойчиво. В этом случае сумма  $\eta^2 + \omega^2$  становится равной бесконечности на конечном отрезке траектории.

3. При  $s \rightarrow +\infty$  возмущения  $\eta, \omega$  стремятся к некоторым константам, а траектория тела становится круговой.

4. Возмущения  $\eta$  и  $\omega$  при  $s \rightarrow +\infty$  являются периодическими функциями от длины траектории  $s$ .

Работа выполнена по теме госзадания (номер госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при частичной финансовой поддержке Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 20-08-00082а).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бунимович А.И., Дубинский А.В.* Развитие, современное состояние и приложения теории локального взаимодействия (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 3. С. 3–18.
2. *Мирошин Р.Н., Халидов И.А.* Локальные методы в механике сплошных сред. СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 2002. 303 с.
3. *Котов В.Л., Константинов А.Ю.* Численное моделирование плоскопараллельного движения конических ударников в грунтовой среде на основе модели локального взаимодействия // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. № 3. С. 225–233.
4. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю.* Игровой подход к решению задачи оптимизации формы ударника и структуры слоистой среды при высокоскоростном пробивании // Проблемы прочности и пластичности. 2016. Вып. 78. № 4. С. 426–435.
5. *Симонов И.В.* Об устойчивости движения удлиненного тела вращения в упругопластической среде при отрыве потока // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 313–322.
6. *Якунина Г.Е.* Особенности высокоскоростного движения тел в плотных средах // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 3. С. 429–449.
7. *Осипенко К.Ю.* Устойчивость пространственного движения тела при учете отрыва потока и вращения вокруг оси симметрии // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 4. С. 153–165.
8. *Осипенко К.Ю.* Устойчивость движения неосесимметричного тела в сопротивляющейся // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 6. С. 661–671.
9. *Симонов И.В.* О классификации траекторий плоскопараллельного движения тела вращения в прочной среде при отрыве потока // Докл. РАН. 2002. Т. 386. № 2. С. 198–202.
10. *Брычков Ю.А., Маричев О.И., Прудников А.П.* Таблицы неопределенных интегралов. М.: Физматлит, 2003. 200 с.
11. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

УДК 531.391:521.93

## ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УСТАНОВИВШЕГОСЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ЗЕМНОГО ПОЛЮСА

© 2021 г. В. В. Перепёлкин<sup>а,\*</sup>, И. В. Скоробогатых<sup>а</sup>, Мью Зо Аунг<sup>а</sup>

<sup>а</sup> *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
Москва, Россия*

*\*e-mail: vadimkin1@yandex.ru*

Поступила в редакцию 29.12.2020 г.

После доработки 06.01.2021 г.

Принята к публикации 14.01.2021 г.

Определены приливные деформации в рамках модели вязкоупругой Земли, обусловленные ее движением по инерции вокруг центра масс. Полученные выражения полюсного прилива отличаются от общепринятой модели диссипативными слагаемыми. Эти слагаемые определяются скоростью движения полюса, а не его положением. Проведен анализ динамики движения земного полюса на чандлеровской частоте с учетом полюсного прилива. Показано, что оптимальная аппроксимация параметров полюсного прилива согласно общепринятой модели, не приводит к оптимальной аппроксимации параметров установившегося колебания полюса.

*Ключевые слова:* земной полюс, чандлеровское колебание, полюсный прилив, диссипация, геопотенциал, движение относительно центра масс

DOI: 10.31857/S0572329921050081

**1. Введение.** Ранее, до 1970 года, точность измерений не позволяла наблюдать приливные деформации, возникающие из-за переменности центробежного потенциала. Это стало возможным с 1970 г. после создания сверхпроводящего гравиметра, позволяющего регистрировать малые вариации ускорения силы тяжести.

Следствием переменности центробежного потенциала, который определяется не только скоростью осевого вращения, но и положением мгновенной оси вращения в теле Земли, является зависимость геопотенциала от движения земного полюса [1, 2]. Из-за смещения главных осей инерции деформируемой Земли происходит изменение ее центробежных моментов инерции [3]. При этом деформации вязкоупругой мантии сопровождаются диссипацией энергии, что должно приводить к изменению структурных свойств модели полюсного прилива, введением слагаемых, определяемых вариациями центробежных моментов инерции или вариациями коэффициентов тессеральной гармоника геопотенциала [4, 5].

Следствием вязкости мантии Земли является малое смещение полюсного прилива и сдвиг фазы колебаний центробежных моментов инерции относительно колебаний земного полюса. Это смещение достаточно мало. Однако, для исследования движения земного полюса оно представляет значительный интерес и определяет амплитуду необходимого возмущения для поддержания установившегося чандлеровского колебания.

В данной статье для модели вязкоупругой Земли найдены вариации центробежных моментов инерции, вызванные квазипериодическим смещением оси вращения в теле Земли. Рассмотрено их сравнение с моделью, рекомендованной к учету Международ-

ной службой вращения Земли (МСВЗ) [1]. Сопоставляются основные свойства теоретического полюсного прилива согласно представленной модели и модели, рекомендованной МСВЗ. Движение земного полюса изучается на основе динамических уравнений Эйлера—Лиувилля с учетом вариаций коэффициентов геопотенциала, обусловленных приливными деформациями мантии Земли. Дан сравнительный анализ динамики движения земного полюса на чандлеровской частоте с учетом предложенной модели полюсного прилива и модели, рекомендованной МСВЗ.

**2. Вариации центробежных моментов инерции деформируемой Земли.** В работах [7, 8] был рассмотрен один из способов определения вариаций центробежных моментов инерции, вызванных полюсным приливом. Наряду с рассмотренным ранее подходом воспользуемся и другим способом. При тех же предположениях определим деформации вязкоупругого слоя осесимметричной Земли, возникающие при ее движении по инерции вокруг центра масс с помощью модального подхода [9, 10]. Модель Земли в грубом приближении представляет собой вязкоупругое твердое тело, состоящее из центральной части (ядра) и вязкоупругой мантии. При этом считается, что относительные перемещения точек подвижной среды на границе между ядром и мантией отсутствуют, а внешняя граница свободна. Вследствие предположения о малости деформаций мантии Земли будем рассматривать процесс деформирования в квазистатическом приближении.

Вектор упругого смещения задается в цилиндрических координатах, к которым делается переход от декартовых координат, связанных с твердой частью модели Земли (начало координат — центр масс Земли, ось  $x_3$  направлена по ее оси симметрии, оси  $x_2$  и  $x_1$  в экваториальной плоскости, перпендикулярной оси  $x_3$ ).

Вектор перемещения  $\mathbf{u}$  представим в виде ряда по собственным формам упругих колебаний Земли:

$$\mathbf{u} = \sum_{k,l=0}^{\infty} (q_{ki} \mathbf{V}_{ki} + p_{ki} \mathbf{W}_{ki}) \quad (2.1)$$

где векторы  $\mathbf{V}_{ki}, \mathbf{W}_{ki}$  — собственные формы, а величины  $q_{ki}, p_{ki}$  — нормальные координаты. Собственные формы представляют собой ортономированный базис, то есть подчиняются условиям

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_{ki}, \mathbf{V}_{lm}) &= \int_{\Omega} \mathbf{V}_{ki} \mathbf{V}_{lm} dx = \delta_{(ki)(lm)} \\ (\mathbf{W}_{ki}, \mathbf{W}_{lm}) &= \int_{\Omega} \mathbf{W}_{ki} \mathbf{W}_{lm} dx = \delta_{(ki)(lm)} \\ (\mathbf{V}_{ki}, \mathbf{W}_{lm}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь символ Кронекера имеет индексы  $(ki)(lm)$ . В цилиндрических координатах формы запишутся в виде [11]:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{km}(\rho, \varphi, z) &= (U_{km}(\rho, z) \sin k\varphi, V_{km}(\rho, z) \cos k\varphi, W_{km}(\rho, z) \sin k\varphi) \\ \mathbf{W}_{km}(\rho, \varphi, z) &= (U_{km}(\rho, z) \cos k\varphi, -V_{km}(\rho, z) \sin k\varphi, W_{km}(\rho, z) \cos k\varphi) \end{aligned}$$

Здесь через  $U_{km}(\rho, z), V_{km}(\rho, z), W_{km}(\rho, z)$  обозначены коэффициенты в выражениях координат собственных форм, при этом очевидно, что вообще говоря  $V_{km}(\rho, z) \neq |\mathbf{V}_{km}|$ ,  $W_{km}(\rho, z) \neq |\mathbf{W}_{km}|$ .

Вариации тензора инерции определим из уравнений деформаций, которые согласно [9, 10], можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{Q} + \chi b \dot{\mathbf{Q}}) &= \mathbf{P}, \quad \mathbf{Q} = (p_{0m}, q_{1m}, p_{1m}, q_{2m}, p_{2m})^T \\ \mathbf{D} &= \text{diag}(v_{0m}^2, v_{1m}^2, v_{1m}^2, v_{2m}^2, v_{2m}^2) \\ \mathbf{P} &= ((\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_3^2)c_{0m11} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)c_{0m33}, -2\omega_2\omega_3b_{1m32}, \\ &\quad -2\omega_1\omega_3c_{1m13}, -2\omega_1\omega_2b_{1m12}, (\omega_1^2 + \omega_2^2)c_{2m11})^T \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  – компоненты вектора мгновенной угловой скорости вращения Земли;  $v_{im}^2$  – квадрат частоты собственных колебаний, которая соответствует формам  $\mathbf{V}_{im}, \mathbf{W}_{im}$ ; постоянные коэффициенты  $c_{0m11}, c_{0m33}, c_{1m13}, c_{2m11}, b_{1m12}, b_{1m32}$  определяются геометрией области  $\Omega$ , то есть фигурой Земли;  $\chi$  – безразмерный диссипативный коэффициент  $\chi \ll 1$ ;  $b$  – положительная константа, такая что  $\chi b$  – время релаксации.

Уравнения (2.3) описывают квазистатические деформации Земли. Предполагается, что свободные колебания уже затухли вследствие вязкого трения. Поэтому в уравнениях опущены инерционные члены со вторыми производными по времени.

Модальные переменные  $p_{km}, q_{km}$  при  $k > 2$  определяются однородными уравнениями вида (2.3), поэтому в квазистатическом приближении имеем

$$q_{km} = p_{km} = 0, \quad k > 2$$

Решение системы уравнений (2.3) можно представить в виде ряда по степеням  $\chi$  [11]:

$$\mathbf{Q} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\chi b)^n \frac{\partial^n \mathbf{Q}_0}{\partial t^n}$$

В данной работе ограничимся первым приближением и решение системы (2.3) будем искать в виде:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 - \chi b \frac{\partial \mathbf{Q}_0}{\partial t}$$

ограничившись двумя первыми членами.

Используя приближенные выражения для нормальных координат

$$\begin{aligned} p_{0m} &= v_{0m}^{-2} [(\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_3^2)c_{0m11} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)c_{0m33}] - \\ &\quad - \chi b v_{0m}^{-2} 2(\omega_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\dot{\omega}_2 + 2\omega_3\dot{\omega}_3)c_{0m11} + 2(\omega_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\dot{\omega}_2)c_{0m33} \\ q_{1m} &= -v_{1m}^{-2} 2\omega_2\omega_3b_{1m32} + \chi b v_{1m}^{-2} 2b_{1m32}(\dot{\omega}_2\omega_3 + \omega_2\dot{\omega}_3) \\ p_{1m} &= -v_{1m}^{-2} 2\omega_1\omega_3c_{1m13} + \chi b v_{1m}^{-2} 2c_{1m13}(\dot{\omega}_1\omega_3 - \omega_1\dot{\omega}_3) \\ q_{2m} &= -v_{2m}^{-2} 2\omega_1\omega_3b_{1m12} + \chi b v_{1m}^{-2} 2b_{1m12}(\dot{\omega}_1\omega_2 + \omega_1\dot{\omega}_2) \\ p_{2m} &= -v_{2m}^{-2} (\omega_1^2 - \omega_2^2)c_{2m11} + \chi b v_{2m}^{-2} 2c_{2m11}(\dot{\omega}_1\omega_1 - \omega_1\dot{\omega}_1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

из (2.1) получим вектор перемещений  $\mathbf{u}$  в виде разложения по собственным формам.

Тензор инерции Земли  $J = J[\mathbf{u}]$  будет зависеть от вектора перемещений  $\mathbf{u}$ . Без учета квадратичных членов по  $\mathbf{u}$ , представим  $J$  в виде суммы постоянной и варьируемой частей:

$$J[\mathbf{u}] = J_0^{-1} - J_0^{-1} J_1[\mathbf{u}] J_0^{-1}, \quad J_0 = \text{diag}\{A, A, C\}$$

где  $J_1[\mathbf{u}]$  – линейная по  $\mathbf{u}$  компонента тензора инерции деформированной Земли:

$$J_1[\mathbf{u}] = \begin{pmatrix} J_{11} & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{21} & J_{22} & -J_{23} \\ -J_{31} & -J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}$$

$$J_{11} = 2 \int_{\Omega} (x_2 u_2 + x_3 u_3) \rho_0 dx, \quad J_{22} = 2 \int_{\Omega} (x_1 u_1 + x_3 u_3) \rho_0 dx \quad (2.5)$$

$$J_{33} = 2 \int_{\Omega} (x_1 u_1 + x_2 u_2) \rho_0 dx, \quad J_{12} = J_{21} = 2 \int_{\Omega} x_1 u_2 \rho_0 dx$$

$$J_{13} = J_{31} = 2 \int_{\Omega} x_1 u_3 \rho_0 dx, \quad J_{23} = J_{32} = 2 \int_{\Omega} x_2 u_3 \rho_0 dx$$

С учетом (2.4) запишем выражения для центробежных моментов инерции Земли:

$$J_{12} = J_{21} = \pi \int_{\Omega^*} \rho_0 r^2 (U_{2m} + V_{2m}) dx^* q_{2m}$$

$$J_{13} = J_{31} = 2\pi \int_{\Omega^*} \rho_0 r^2 W_{1m} dx^* p_{1m} \quad (2.6)$$

$$J_{23} = J_{32} = 2\pi \int_{\Omega^*} \rho_0 r^2 W_{1m} dx^* q_{1m}$$

Здесь через  $dx^*$  обозначено интегрирование по области  $\Omega^*$ , представляющей собой область  $\Omega$ , взятую после интегрирования по цилиндрической координате  $\varphi$ . Интегралы в выражениях (2.6) являются константами поскольку берутся по неизменной области. Обозначив (аналогично [5]):

$$\pi \int_{\Omega^*} \rho_0 r^2 W_{1m} dx^* = b_{1m32} = c_{1m31}$$

$$\frac{\pi}{2} \int_{\Omega^*} \rho_0 r^2 (U_{2m} + V_{2m}) dx^* = b_{2m12} = b_{2m21} = c_{2m11} = c_{2m22}$$

центробежные моменты инерции (2.6) запишем в виде:

$$J_{12} = J_{21} = \rho_0 2b_{2m12} q_{2m}$$

$$J_{13} = J_{31} = \rho_0 2b_{1m32} p_{1m} \quad (2.7)$$

$$J_{23} = J_{32} = \rho_0 2b_{1m32} q_{1m}$$

Наибольшими по величине будут  $J_{13}$ ,  $J_{23}$ , которые, подставив формулы (2.4) в (2.7), можно представить в виде:

$$J_{13} = a\omega_1 + b\dot{\omega}_1, \quad J_{23} = a\omega_2 + b\dot{\omega}_2, \quad a < 0, \quad b > 0 \quad (2.8)$$

Коэффициенты в (2.8) определяются реологией мантии Земли. Вариации центробежных моментов инерции (2.8) идентичны выражениям, полученным в работе [8]. Учет центробежных моментов инерции (2.8) приводит к наличию малых диссипативных слагаемых в уравнениях движения земного полюса.

**3. Оценка параметров модели полюсного прилива.** Наибольшим по величине слагаемым из разложения геопотенциала  $W$  в ряд по сферическим гармоникам является слагаемое  $W_2$  [2]:

$$W_2 = \frac{Gm_E R_E^2}{R^3} \sum_{m=0}^2 [c_{2m} \cos m\lambda + s_{2m} \sin m\lambda] P_2^m(\cos \theta) \quad (3.1)$$

где  $P_n^m(\cos \theta)$  – присоединённые функции Лежандра;  $G$  – гравитационная постоянная;  $m_E, R_E$  – масса и радиус Земли соответственно;  $R, \theta, \lambda$  – сферические координаты некоторой точки пространства.

Коэффициенты зональной (при  $m = 0$ ), тессеральной (при  $m = 1$ ) и секториальной (при  $m = 2$ ) гармоник в  $W_2$  известным образом выражаются через осевые и центробежные моменты инерции Земли следующим образом [2]:

$$\begin{aligned} c_{20} &= \frac{J_{11} + J_{22} - 2J_{33}}{2m_E R_E^2}, & c_{21} &= \frac{J_{13}}{m_E R_E^2}, & s_{21} &= \frac{J_{23}}{m_E R_E^2} \\ c_{22} &= \frac{J_{22} - J_{11}}{4m_E R_E^2}, & s_{22} &= \frac{J_{12}}{2m_E R_E^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Зависимость коэффициентов тессеральной гармоники геопотенциала от координат земного полюса  $x_p, y_p$  определяется общепринятой моделью полюсного прилива [1]:

$$\begin{bmatrix} \delta c_{21} \\ \delta s_{21} \end{bmatrix} = 1.333 \times 10^{-9} \left( \begin{bmatrix} -x_p \\ y_p \end{bmatrix} + 0.0115 \begin{bmatrix} y_p \\ x_p \end{bmatrix} \right) \quad (3.3)$$

Изменение центробежных моментов инерции  $\tilde{J}_{13}, \tilde{J}_{23}$ , соответствующие этой модели, согласно (3.3) и (3.2), можно представить в виде:

$$\tilde{J}_{13} = a\omega_1 - c\omega_2, \quad \tilde{J}_{23} = a\omega_2 + c\omega_1, \quad a < 0, \quad c > 0 \quad (3.4)$$

где  $a, c$  – коэффициенты, характеризующие величину полюсного прилива и сдвиг его фазы, возникающий вследствие вязкости подвижной среды. Коэффициент  $c$  в (3.4) определяется диссипацией и значительно меньше коэффициента  $a$ . Из (3.3) следует, что  $c/a = 0.0115$ .

Выражения (3.4) отличаются от (2.8) диссипативными слагаемыми с коэффициентами  $b$  и  $c$ . Диссипативные слагаемые в (2.8) приводят к переменному сдвигу фазы полюсного прилива относительно положения полюса, в то время как соответствующие слагаемые из (3.4) приводят к постоянному сдвигу фазы, то есть к “запаздыванию” полюсного прилива на постоянный угол.

Рассмотрим различия выражений (2.8) и (3.4) более подробно. Компоненты  $\omega_1, \omega_2$  вектора мгновенной угловой скорости согласно [12, 13] содержат две основные компоненты – чандлеровское колебание и годичное колебание:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a_{ch} \cos \alpha_{ch} + a_h \cos \alpha_h \\ \omega_2 &= a_{ch} \sin \alpha_{ch} + a_h \sin \alpha_h \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь  $a_{ch}, a_h$  – амплитуды чандлеровского и годичного колебаний соответственно, а  $\alpha_{ch} = 2\pi Nt + \alpha_{ch}^0, \alpha_h = 2\pi t + \alpha_h^0$  – их фазы, которым соответствуют чандлеровская ( $N = 0.843$  цикл/год) и годичная (1 цикл/год) частоты.

В уравнениях (3.5) движения полюса перейдем к полярным координатам (амплитуде движения полюса  $A$  и полярному углу  $\psi$ ), используя замену  $\omega_1 = A \cos \psi, \omega_2 = A \sin \psi$ . Амплитуда результирующего движения полюса дается выражением [14]:

$$A = \sqrt{a_{ch}^2 + a_h^2 + 2a_{ch}a_h \cos(\alpha_{ch} - \alpha_h)} \quad (3.6)$$

Как следует из (3.6) амплитуда полюсного прилива пропорциональна амплитуде колебаний полюса  $\sqrt{(\tilde{J}_{13})^2 + (\tilde{J}_{23})^2} = \sqrt{a^2 + c^2} A$ . Таким образом, фазы амплитуды полюсного прилива согласно (3.4) и амплитуды колебаний полюса  $A$  не зависят от времени, совпадают и равны  $\alpha_{ch}^0 - \alpha_h^0$ . Из (3.3) следует, что сдвиг фазы полюсного прилива по отношению к положению полюса – около  $0.65^\circ$ . От сдвига фазы полюсного прилива зави-

сят параметры возмущения с чандлеровской частотой, необходимого для поддержания наблюдаемого колебания. Кроме того, постоянный сдвиг фазы приводит к линейной системе дифференциальных уравнений движения земного полюса. Для вариаций центробежных моментов инерции, определяемых выражениями (2.8) сдвиг фазы окажется переменной величиной.

Теперь вычислим амплитуду полюсного прилива, описываемого выражениями (2.8):

$$\sqrt{(J_{13})^2 + (J_{23})^2} \approx [(a^2 + (b\pi(N+1))^2)A^2 - 4ab\pi(N-1)a_{ch}a_h \sin(\alpha_{ch} - \alpha_h)]^{1/2} \quad (3.7)$$

Как следует из (3.7), фаза амплитуды полюсного прилива будет сдвинута по отношению к фазе амплитуды колебаний полюса.

Предположим, что наблюдаемый полюсный прилив описывается выражениями (2.8), а (3.4) является оптимальной в среднеквадратическом смысле аппроксимацией наблюдаемого полюсного прилива с известными параметрами  $a$  и  $c$ . Для сравнения установившихся режимов колебания полюса при различных моделях полюсного прилива (2.8) и (3.2) необходимо оценить коэффициент  $b$ . Для этого найдем наименьшее отклонение модели (2.8) от модели (3.4):

$$\sigma = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (J_{13} - \tilde{J}_{13})^2 dt \rightarrow \min_b \quad (3.8)$$

Используя (3.5) выражения (2.8) перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} J_{13} &= a\omega_1 - b\pi((1+\xi)N+1-\xi)\omega_2 - \\ &- b\pi(N-1)[(\xi+1)a_{ch}\sin\alpha_{ch} - (\xi-1)a_h\sin\alpha_h] \\ J_{23} &= a\omega_2 + b\pi((1+\xi)N+1-\xi)\omega_1 + \\ &+ b\pi(N-1)[(\xi+1)a_{ch}\cos\alpha_{ch} - (\xi-1)a_h\cos\alpha_h] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Введенный в (3.9) параметр  $\xi$  позволяет в условии (3.9) минимизацию по параметру  $b$  заменить минимизацией по параметру  $\xi$ .

Теперь неизвестный коэффициент  $b$  можно найти из соответствия коэффициентов при  $\omega_2$  в выражениях (3.8) и (3.4), которое приводит к равенству  $c = b\pi((1+\xi)N+1-\xi)$ . Величина  $\sigma$  после предельного перехода в (3.8) оказывается независимой от параметров  $t$ ,  $T$ , а оптимальное значение  $\xi^*$  будет найдено из (3.8). Тогда неизвестный коэффициент  $b$  найдем из уравнения  $c = b\pi((1+\xi^*)N+1-\xi^*)$ .

Подставляя в условие (3.8) выражения  $J_{13}$ ,  $J_{23}$  из (3.9) и  $\tilde{J}_{13}$ ,  $\tilde{J}_{23}$  из (3.4) с учетом  $c = b\pi((1+\xi)N+1-\xi)$  функция  $\sigma$  окажется квадратичной по параметру  $\xi$ , минимум которой достигается при  $\xi^*$ . Как следует из расчетов  $\xi^* = 0.18$ . Теперь, приближенно можно определить отношение  $b/a \cong 0.002$ , которое в пределах принятой точности определения коэффициентов из (3.3), выполняется и для  $\xi = 0$ . Используя это значение найдем из (3.7) сдвиг фазы амплитудной модуляции, который составляет примерно 18 часов.

Для иллюстрации сдвига фазы амплитудной модуляции полюсного прилива приведем на рис. 1 сравнение графиков амплитуды  $A$  полюса, амплитуд  $A_{pt}$ ,  $\tilde{A}_{pt}$  полюсного прилива согласно моделям (2.8) и (3.4) соответственно (сплошные линии) и приближенной амплитуды (3.7) (пунктирная линия). По оси ординат на графике отложена обезразмеренная амплитуда, достигающая максимума при значении 2.2 и минимума при значении 0.2. По оси абсцисс отложено время в годах. На графике показано расхождение в фазе амплитудных модуляций в окрестности минимума амплитуды. Для улучшения наглядности на графиках рис. 1 отношение  $b/a$  было увеличено в 10 раз. Так как фазовый сдвиг приближенно пропорционален отношению  $b/a$ , что следует из

выражения (3.7), то запаздывание амплитудной модуляции окажется увеличенным в 10 раз.

Сравнение амплитуд  $A_{pr}$  полюсного прилива модели (2.8) при различных параметрах  $\xi$  ( $\xi = 1$ ,  $\xi = 0$ ,  $\xi = -1$ ) показано на рис. 2. Из рисунка видно, что среднее значение сдвига фазы амплитуды  $A_{pr}$  относительно амплитуды  $A$  колебаний полюса существенно больше отклонения фазы при изменении параметра  $-1 \leq \xi \leq 1$ . Если  $|\xi| > 1$ , то среднеквадратическое отклонение в (3.9) становится больше минимального более, чем в два раза и увеличивается по квадратичному закону при увеличении  $\xi$ .

Таким образом, отличие реального полюсного прилива от рекомендуемой модели (3.3) приведет к сдвигу амплитуды полюсного прилива.

**4. Установившиеся чандлеровские колебания земного полюса.** Рассмотрим как влияет выбор модели полюсного прилива на стационарный режим чандлеровских колебаний. Согласно [12, 13] модель движения полюса может быть получена из динамических уравнений Эйлера—Лиувилля с переменным тензором инерции

$$J\dot{\omega} + \omega \times J\omega = M - J\omega \quad (4.1)$$

Здесь  $J$  — матрица переменного тензора инерции.

В первом приближении уравнения движения полюса представляются в виде [12]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p - N_x y_p &= -j_{qr}^0 + \mu_x, & x_p(t_0) &= x_0 \\ \dot{y}_p + N_y x_p &= -j_{pr}^0 + \mu_y, & y_p(t_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $j_{pr}^0$ ,  $j_{qr}^0$  определяются центробежными моментами инерции  $J_{13}$ ,  $J_{23}$  и им пропорциональны ( $j_{pr}^0$ ,  $j_{qr}^0$  являются диссипативными слагаемыми модели движения земного полюса),  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  — внешнее возмущение, приводящее к наблюдаемому движению полюса с годичной и чандлеровской частотами, а  $N_x \approx N_y$  — чандлеровская частота колебаний.

Рассмотрим вначале установившийся режим чандлеровских колебаний с учетом диссипативных слагаемых в  $j_{pr}^0$ ,  $j_{qr}^0$  вида (3.4) и при возмущении только с чандлеровской или близкой к ней частотами:

$$\begin{aligned} \mu_x &= \mu_{ch} \sin(N_1 t + \delta_{ch}), & \mu_y &= \mu_{ch} \cos(N_1 t + \delta_{ch}) \\ j_{pr}^0 &= s_1 x_p - s_2 y_p, & j_{qr}^0 &= -s_1 y_p - s_2 x_p \end{aligned} \quad (4.3)$$

Положительные коэффициенты  $s_1$ ,  $s_2$  пропорциональны коэффициентам из (3.3), т.е.  $s_2/s_1 = c/a$ . В такой постановке задачи  $N_1 = 2\pi N$  — наблюдаемая чандлеровская частота.

Перейдя к новым переменным

$$x_p = A \cos \psi, \quad y_p = A \sin \psi, \quad \psi = N_1 t + \Delta\psi$$

запишем амплитуду  $A$  и поправку в частоту  $\Delta\psi$  в стационарном режиме при  $N_1 = N$ :

$$A = \mu_{ch}(s_1^2 + s_2^2)^{-1/2}, \quad \text{tg} \Delta\psi = s_2 s_1^{-1} \quad (4.4)$$

Так как определяемой из наблюдений является частота  $N_1$ , введем  $\tilde{N} \equiv N_x \approx N_y$ . В предельном случае при устремлении  $N_1$  к  $\tilde{N} - s_1$  чувствительность амплитуды стационарного режима к коэффициенту  $s_2$  будет возрастать и достигнет максимума.

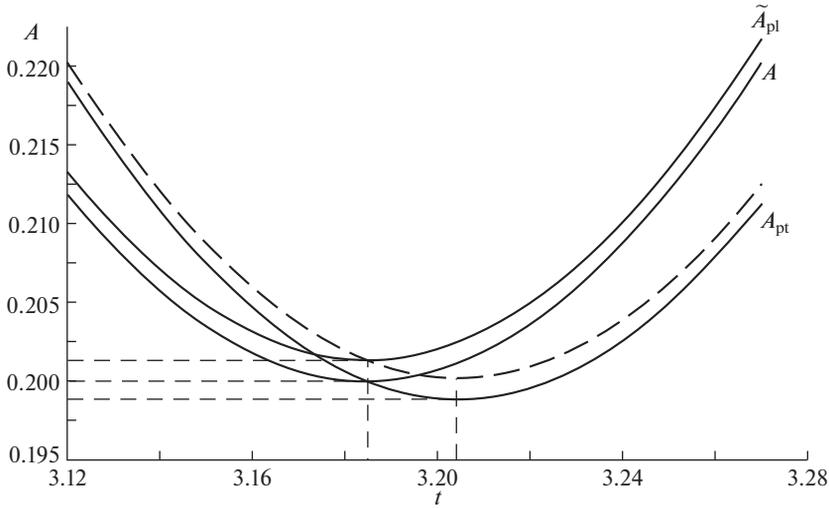


Рис. 1.

Для приливных выступов вида (2.8)

$$j_{pr}^0 = s_1 x_p - s_3 \dot{x}_p, \quad j_{pr}^0 = -s_1 y_p + s_3 \dot{y}_p \quad (4.5)$$

стационарный режим чандлеровских колебаний не изменится при  $s_2 = \tilde{N}s_3$ .

Теперь рассмотрим установившиеся чандлеровские колебания в более общем случае – при учете возмущений с близкой к чандлеровской  $N_1$  и годичной  $v_h$  частотами:

$$\begin{aligned} \mu_x &= \mu_{ch} \sin(N_1 t + \delta_{ch}) + \mu_h \sin(v_h t + \delta_h) \\ \mu_y &= \mu_{ch} \cos(N_1 t + \delta_{ch}) + \mu_h \cos(v_h t + \delta_h) \end{aligned}$$

Приливные выступы вида  $j_{pr}^0 = s_1 x_p - s_3 \dot{x}_p$ ,  $j_{pr}^0 = -s_1 y_p + s_3 \dot{y}_p$  в уравнениях движения полюса (4.2) можно приближенно заменить выражениями

$$\tilde{j}_{pr}^0 = s_1 x_p - \tilde{s}_3 \dot{y}_p, \quad \tilde{j}_{pr}^0 = -s_1 y_p - \tilde{s}_3 \dot{x}_p \quad (4.6)$$

на интервале модуляции чандлеровской и годичной гармоник при соотношении на коэффициенты  $\tilde{s}_3$  и  $s_3$ :

$$\tilde{s}_3 = \frac{s_3(\tilde{N} - s_1)}{1 + s_3^2} \quad (4.7)$$

Из соотношений  $c = b\pi((1 + \xi)N + 1 - \xi)$  и  $s_3/s_1 = b/a$  при  $\xi = 0$  коэффициент  $s_2$  выражается через  $s_3$ :

$$s_2 = \frac{s_3(\tilde{N} + v_h)}{2} \quad (4.8)$$

Из (4.7) можно оценить коэффициент  $\tilde{s}_3$ :

$$\tilde{s}_3 \approx 0.914s_2 \quad (4.9)$$

Соотношение (4.9) показывает что, применение модели движения полюса в рамках общепринятой модели полюсного прилива может приводить к искажению парамет-

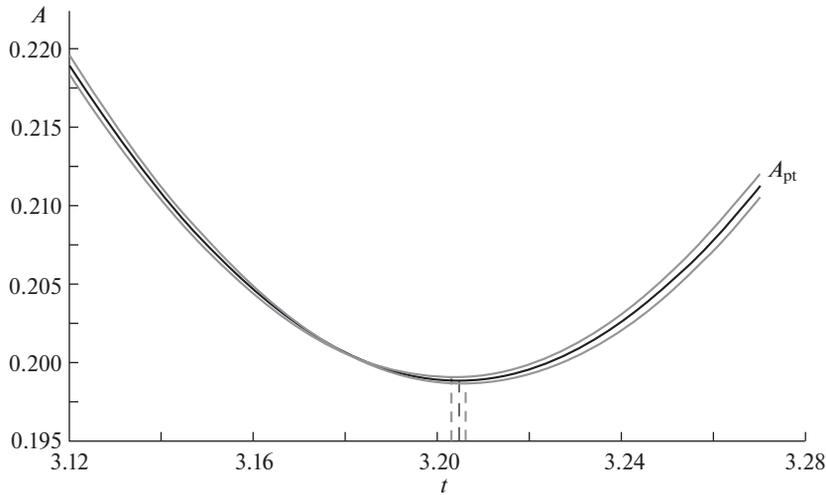


Рис. 2.

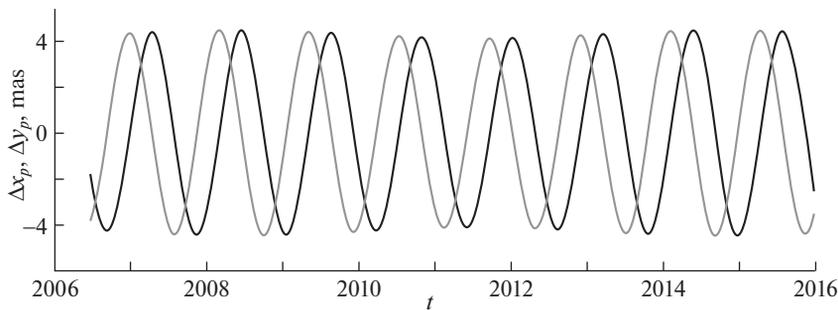


Рис. 3.

ров установившегося чандлеровского колебания. Например, если движение полюса находится интегрированием дифференциальных уравнений (4.2) по известной правой части. Причем амплитуда колебаний зависит не только от выбора модели полюсного прилива, но и от длительности интервала оценки коэффициента диссипативного слагаемого.

На рис. 3 приводится разность  $\Delta x_p$ ,  $\Delta y_p$  установившихся движений полюса, полученных в результате интегрирования уравнений (4.2) при учете выражений полюсного прилива (2.8) и (3.4). Величины  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  были найдены из уравнений (4.2), используя аппроксимацию данных наблюдений МСВЗ движения полюса с помощью выражений вида (3.5) на временном интервале с 2010 по 2017 гг. Из графика следует, что разности  $\Delta x_p$ ,  $\Delta y_p$  обусловлены в основном различием в амплитудах чандлеровской компоненты решений. Если сделать замену  $j_{pr}^0 = s_1 x_p - \tilde{s}_3 y_p$ ,  $j_{qr}^0 = -s_1 y_p - \tilde{s}_3 x_p$  с учетом (4.9) вместо  $j_{pr}^0 = s_1 x_p - s_3 \dot{x}_p$ ,  $j_{qr}^0 = -s_1 y_p + s_3 \dot{y}_p$ , то в разностях  $\Delta x_p$ ,  $\Delta y_p$  останется только годовое колебание (рис. 4). Из-за того, что разность между чандлеровской и годичной частота-

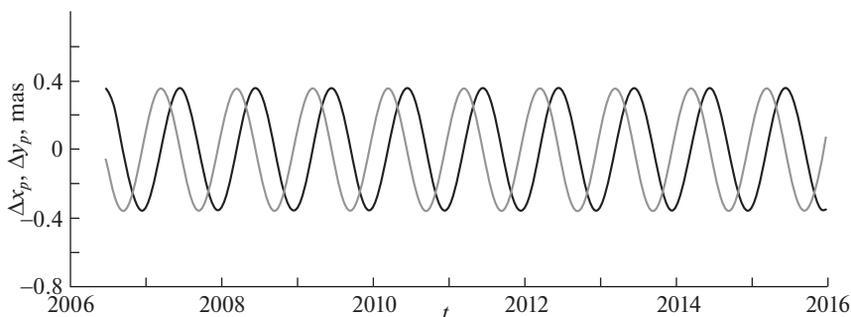


Рис. 4.

ми не мала, амплитуда годовичного колебания в  $\Delta x_p$ ,  $\Delta y_p$  оказывается малой. При этом, как показано на рис. 3, амплитуда разности чандлеровского колебания двух моделей с учетом выражений полюсного прилива (2.8) и (3.4) достигает 10% по отношению к амплитуде наблюдаемого чандлеровского колебания, что является весьма существенным. В то время как невязка колебаний, вычисленных по моделям с учетом (4.5) и (4.6) содержит только годовичную компоненту амплитуда которой не превышает 0.5% по отношению к амплитуде годовичного колебания полюса. Таким образом, поправка в коэффициенте модели полюсного прилива (4.9) приводит к оптимальной аппроксимации чандлеровского колебания. Однако, как следует из рис. 1 и рис. 2 сдвиг амплитудной модуляции в этом случае учтен не будет и разность  $\Delta x_p$ ,  $\Delta y_p$ , показанная на рис. 4 является следствием неучета сдвига амплитудной модуляции полюсного прилива.

Таким образом, если диссипативные слагаемые полюсного прилива определяются не положением полюса, а его скоростью, то оптимальная аппроксимация параметров полюсного прилива, описываемого общепринятой моделью, не приводит к оптимальной аппроксимации параметров установившегося колебания полюса.

**5. Выводы.** Показано, что для модели вязкоупругой Земли полюсный прилив зависит от координат полюса и от его скорости. Это приводит к сдвигу фазы (запаздыванию) амплитуды полюсного прилива относительно амплитуды колебаний полюса. Изменение структуры модели полюсного прилива в свою очередь влияет на оценку параметров установившегося чандлеровского колебания, а ошибка определения амплитуды установившегося чандлеровского колебания может достигать 10%. То есть, аппроксимация параметров полюсного прилива, описываемого общепринятой моделью, не приводит к оптимальной аппроксимации параметров установившегося колебания полюса.

Корректировка установившегося чандлеровского колебания может быть выполнена изменением диссипативных слагаемых общепринятой модели полюсного прилива в уравнениях движения полюса. Однако, сдвиг амплитудной модуляции полюсного прилива в этом случае учтен не будет, что приведет к некоторому изменению амплитуды годовичного колебания (на 0.5%).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. International Earth Rotation and Reference Systems Service – IERS Annual Reports (<http://www.iers.org>).
2. *Munk W.H., MacDonald G.J.F.* The Rotation of the Earth. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1960. = Манк У., Макдональд Г. Вращение Земли. М.: Мир, 1964. 384 с.

3. Филиппова А.С. Динамический анализ колебательного процесса полюса Земли // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 6. С. 26–38.
4. Акуленко Л.Д., Климов Д.М., Кумакишев С.А. Основные свойства и особенности движения Земли относительно центра масс // Доклады РАН. 2014. Т. 458. № 5. С. 547–550.
5. Марков Ю.Г., Перепелкин В.В., Крылов С.С. Колебания полюса Земли с учетом флуктуационно-диссипативных возмущений // Доклады РАН. 2016. Т. 471. № 6. С. 665–670.
6. Марков Ю.Г., Михайлов М.В., Перепелкин В.В., Почукаев В.Н., Рожков С.Н., Семенов А.С. Анализ влияния различных возмущающих факторов на высокоточный прогноз орбит космических аппаратов // Космические исследования. 2016. Т. 54. № 2. С. 164–172.
7. Егармин Н.Е. Влияние упругих деформаций на тензор инерции твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 1980. № 6. С. 43–48.
8. Акуленко Л.Д., Перепелкин В.В. Движение земного полюса при нестационарных возмущениях // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 5. С. 142–149.
9. Марков Ю.Г., Миняев И.С. О влиянии внутренних степеней свободы на движение осесимметричного упругого тела вокруг центра масс // Изв. РАН. МТТ. 1991. № 1. С. 12–18.
10. Марков Ю.Г., Скоробогатых И.В., До Чунг Бо О влиянии упругих деформаций на поступательно-вращательное движение тела в центральном гравитационном поле сил // Космонавтика и ракетостроение. 2015. № 1 (80). С. 106–113.
11. Вильке В.Г. Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы. М.: Изд-во МГУ, 1986. 192 с.
12. Климов Д.М., Акуленко Л.Д., Шматков А.М. Разделение и спектральный анализ колебаний земного полюса // Доклады РАН. 2015. Т. 464. № 3. С. 288–292.
13. Кумакишев С.А. Гравитационно-приливная модель колебаний земного полюса // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 2. С. 48–53.
14. Акуленко Л.Д., Климов Д.М., Марков Ю.Г., Перепелкин В.В. Колебательно-вращательные процессы в движении Земли относительно центра масс: интерполяция и прогноз // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 6. С. 6–29.
15. Global Geodynamic Project (<http://isdc.gfz-potsdam.de>)
16. Hu X.-G., Liu L.-T., Ducarme B., Xu H.J. and Sun H.P. Estimation of the pole tide gravimetric factor at the Chandler period through wavelet filtering // Geophys. J. Intern. 2007. V. 169. P. 821–829. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2007.03330.x>

УДК 531.36

## УСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ СИММЕТРИЧНОГО РАВНОГРАННОГО ТЕТРАЭДРА В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛ

© 2021 г. А. А. Буров<sup>a,b,\*</sup>, Е. А. Никонова<sup>b,\*\*</sup>

<sup>a</sup> ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

<sup>b</sup> НИУ “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

\*e-mail: jtm@narod.ru

\*\*e-mail: nikonova.ekaterina.a@gmail.com

Поступила в редакцию 20.06.2020 г.

После доработки 28.07.2020 г.

Принята к публикации 31.08.2020 г.

Изучаются существование и устойчивость равновесий в задаче о движении вокруг неподвижной точки твердого тела в форме равногранного тетраэдра в центральном ньютоновском поле сил. Выясняется связь этих равновесий с изученными ранее равновесиями правильного тетраэдра, представляющими собой частный случай перманентных вращений. Работа инспирирована публикациями А. В. Карапетяна с соавторами, в которых предложен оригинальный подход, позволяющий эффективно учитывать симметрии при изучении установившихся движений в задачах динамики твердого тела с неподвижной точкой.

*Ключевые слова:* твердое тело с неподвижной точкой, тело в центральном гравитационном поле, теория Рауса, устойчивость и ветвление установившихся движений, равногранный тетраэдр

DOI: 10.31857/S0572329921050032

**1. Постановка задачи и основные обозначения.** Рассмотрим движение твердого тела  $\mathcal{B}$  вокруг неподвижной точки  $O$  в осесимметричном силовом поле с направленным вдоль него единичным вектором  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$ . Пусть  $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$  – тензор инерции тела относительно точки  $O$ ,  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$  – вектор угловой скорости тела,  $U_N = U_N(\gamma)$  – потенциал силового поля. Здесь и далее все векторы и тензорные величины задаются в подвижной системе отсчета  $Ox_1x_2x_3$ , оси которой направлены вдоль главных осей инерции тела, задаваемых собственными векторами тензора инерции  $\mathbf{I}$ .

Тогда уравнения движения твердого тела могут быть записаны как уравнения Эйлера–Пуассона

$$\mathbf{I}\dot{\omega} = \mathbf{I}\omega \times \omega + \gamma \times \frac{\partial U_N}{\partial \gamma}, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega \quad (1.1)$$

Помимо интеграла энергии

$$\mathcal{F}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{I}\omega, \omega) + U_N(\gamma) = h$$

эти уравнения обладают интегралом площадей

$$\mathcal{F}_1 = (\mathbf{I}\omega, \gamma) = p_\psi$$

и геометрическим интегралом

$$\mathcal{F}_2 = (\gamma, \gamma) - 1 = 0 \quad (1.2)$$

На перманентных вращениях угловая скорость твердого тела неизменна как в абсолютных осях, так и в осях  $Ox_1x_2x_3$ , связанных с телом. Тогда  $\omega = \omega\gamma = \text{const}$ , и согласно первой подсистеме из (1.1) положение осей перманентных вращений определяется алгебраическими уравнениями

$$0 = \gamma \times \left( \frac{\partial U_N}{\partial \gamma} - \omega^2 \mathbf{I} \gamma \right), \quad \omega = \text{const} \quad (1.3)$$

Ставится задача исследования существования и устойчивости перманентных вращений и, прежде всего, равновесий для твердого тела в виде симметричного равногранного тетраэдра с равными массами в вершинах. Оригинальный подход к изучению установившихся движений в задачах динамики твердого тела, опирающийся на эффективное использование симметрий в распределении масс, предложен в [1] (см. также [2]). Согласно исследованиям Р.С. Суликашвили [3–5] в случае правильного тетраэдра, являющегося частным случаем равногранного, наблюдаются достаточно непривычные свойства равновесий. Чувствительность этих свойств к деформациям правильного тетраэдра является основным предметом настоящего исследования.

**2. Определение равногранного тетраэдра и его свойства.** Согласно определению (см., например, [6]), тетраэдр называется равногранным, если все грани – равные между собой треугольники. Известно, что у равногранного тетраэдра бимедианы попарно перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам. Пусть  $\mathcal{B}$  – равногранный тетраэдр с равными массами  $m$  в вершинах, совершающий вращение вокруг неподвижной точки  $O$ , совпадающей с точкой пересечения бимедиан. Зададим жестко связанную с тетраэдром правую систему отсчета  $Ox_1x_2x_3$  с началом в точке  $O$  и осями, направленными вдоль бимедиан. Если длины бимедиан равны  $2a_1, 2a_2, 2a_3$  соответственно, то в этой системе отсчета вершины тетраэдра  $A, B, C$  и  $D$  задаются радиус-векторами (рис. 1)

$$\begin{aligned} r_a = OA &= (a_1, -a_2, -a_3)^T, & r_b = OB &= (-a_1, -a_2, a_3)^T \\ r_c = OC &= (-a_1, a_2, -a_3)^T, & r_d = OD &= (a_1, a_2, a_3)^T \end{aligned}$$

причем

$$r_a = r_b = r_c = r_d = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = r$$

Середины ребер тетраэдра задаются как

$$\begin{aligned} \mathbf{OK} &= (a_1, 0, 0)^T, & \mathbf{OL} &= (-a_1, 0, 0)^T \\ \mathbf{OJ} &= (0, a_2, 0)^T, & \mathbf{OG} &= (0, -a_2, 0)^T \\ \mathbf{OI} &= (0, 0, a_3)^T, & \mathbf{OH} &= (0, 0, -a_3)^T \end{aligned}$$

Оси  $Ox_1x_2x_3$  являются главными центральными осями инерции тела  $\mathcal{B}$ , в них главные центральные моменты инерции записываются как

$$I_k = 4mI'_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad I'_1 = a_2^2 + a_3^2, \quad I'_2 = a_1^2 + a_3^2, \quad I'_3 = a_1^2 + a_2^2$$

**3. Потенциал поля притяжения и его разложение в ряд.** Пусть единицы размерности выбраны так, что гравитационная постоянная, масса в точке  $N$  и расстояние от  $N$  до  $O$  равны единице. Тогда потенциал притяжения имеет вид

$$U_N = - \sum_{(a,b,c,d)} \rho_a^{-1}, \quad \rho_a = (1 + 2r(\gamma, \mathbf{r}_a) + r^2)^{1/2} \quad (3.1)$$

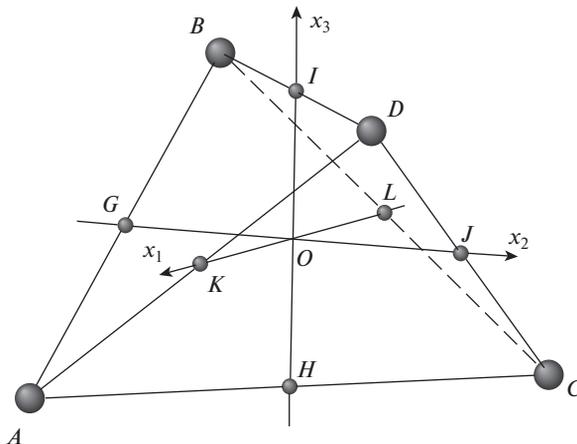


Рис. 1. Равногранный тетраэдр с жестко связанной системой отсчета

где  $(a, b, c, d)$  – циклическая перестановка индексов.

Следуя подходу, предложенному в [7], разложим потенциал (3.1) в ряд по степеням параметров

$$\varepsilon_a = \frac{2(\gamma, \mathbf{r}_a)}{R^2}, \quad R = (1 + r^2)^{1/2}$$

Такое разложение имеет вид

$$U_N = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \dots \quad (3.2)$$

$$U_0 = -\frac{4}{R}, \quad U_1 = 0$$

$$U_2 = -\frac{6}{R^5} (a_1^2 \gamma_1^2 + a_2^2 \gamma_2^2 + a_3^2 \gamma_3^2), \quad U_3 = \frac{60}{R^7} \cdot a_1 a_2 a_3 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$$

$$U_4 = -\frac{35}{2R^9} \cdot (a_1^4 \gamma_1^4 + a_2^4 \gamma_2^4 + a_3^4 \gamma_3^4 + 6a_1^2 a_2^2 \gamma_1^2 \gamma_2^2 + 6a_1^2 a_3^2 \gamma_1^2 \gamma_3^2 + 6a_2^2 a_3^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2)$$

В разложении (3.2), слагаемое  $U_0$  постоянно, а слагаемое  $U_1$  равно нулю, так как тетраэдр подвешен в центре масс.

**4. Равновесия равногранного тетраэдра в центральном поле сил: существование.** Прежде всего зададимся решением вопроса о существовании равновесий тетраэдра.

*4.1. Уравнения равновесий.* В разложении потенциала примем во внимание лишь два первых нетривиальных слагаемых, т.е. в качестве приближенного потенциала примем функцию

$$U' = R^7 (U_2 + U_3) / (60 a_1 a_2 a_3) \equiv -\frac{1}{2} (\alpha_1^2 \gamma_1^2 + \alpha_2^2 \gamma_2^2 + \alpha_3^2 \gamma_3^2) + \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$$

$$\alpha_k = \frac{a_k R}{\sqrt{5 a_1 a_2 a_3}}, \quad R^2 = 1 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

В силу соотношений (1.3) приближенные уравнения равновесий имеют вид

$$\gamma \times \frac{\partial U'}{\partial \gamma} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_2 \gamma_3 (\alpha_3^2 - \alpha_2^2) + \gamma_1 (\gamma_3^2 - \gamma_2^2) = 0 \\ \gamma_3 \gamma_1 (\alpha_1^2 - \alpha_3^2) + \gamma_2 (\gamma_1^2 - \gamma_3^2) = 0 \\ \gamma_1 \gamma_2 (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) + \gamma_3 (\gamma_2^2 - \gamma_1^2) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Эти уравнения, естественно, следует рассматривать вместе с уравнением (1.2), выражающим единичность вектора  $\gamma$ .

Уравнения (1.2), (4.1) всегда обладают решениями

$$\mathcal{F}_k : \gamma_k = \pm 1, \quad \gamma_\ell = 0, \quad \ell \neq k \quad (4.2)$$

Этим шести решениям отвечают равновесия, на которых тетраэдр “смотрит” на притягивающий центр одной из полуосей подвижной системы отсчета.

4.2. *Случай правильного тетраэдра.* В случае правильного тетраэдра  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$  и первые слагаемые в уравнениях (4.1) обращаются в нуль. Сами уравнения принимают вид

$$\gamma_1 (\gamma_3^2 - \gamma_2^2) = 0 \quad (1, 2, 3)$$

Эти уравнения совместно с (1.2) помимо равновесий (4.2) определяют равновесия  $\mathcal{F}\mathcal{F}$ , на которых тетраэдр “смотрит” на притягивающий центр одной из своих вершин, и равновесия  $\mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{F}$ , на которых тетраэдр “смотрит” на притягивающий центр центром одной из граней. Так, например, на равновесии

$$\gamma = (-\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3)$$

из класса  $\mathcal{F}\mathcal{F}$  тетраэдр “смотрит” на точку  $N$  вершиной  $D$ , а на равновесии

$$\gamma = (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$$

из класса  $\mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{F}$  тетраэдр “смотрит” на точку  $N$  центром грани  $ABC$ . Остальные равновесия из классов  $\mathcal{F}\mathcal{F}$  и  $\mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{F}$  выписываются аналогично.

Равновесия правильного тетраэдра в центральном ньютоновском поле сил изучались в работах Р.С. Суликашвили. В частности, было доказано, что других решений изучаемых уравнений, а вместе с ними – и равновесий, у правильного тетраэдра нет.

Как сказано выше, равновесия вида (4.2) имеются у равногранного тетраэдра и в общем случае. Спрашивается, существуют ли в общем случае классы равновесий равногранного тетраэдра, которым принадлежат равновесия из классов  $\mathcal{F}\mathcal{F}$  и  $\mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{F}$  правильного тетраэдра.

4.3. *Случай равенства двух бимедиан.* В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая, когда две бимедианы равны, например,  $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_*$ . В этом случае плоскости  $x_2 = \pm x_3$  являются плоскостями симметрии. Кроме того, в силу первого уравнения (4.1) либо  $\gamma_1 = 0$ , либо  $\gamma_2^2 = \gamma_3^2$ .

Пусть  $\gamma_1 = 0$ . Тогда второе и третье уравнения (4.1) принимают вид

$$-\gamma_2 \gamma_3^2 = 0, \quad \gamma_3 \gamma_2^2 = 0$$

откуда либо  $\gamma_2 = 0$ , либо  $\gamma_3 = 0$ , и имеют место либо решение  $\mathcal{F}_3$ , либо решение  $\mathcal{F}_2$  из (4.2).

Пусть теперь  $\gamma_2^2 = \gamma_3^2$ . Тогда  $\gamma_2 = \varepsilon \gamma_3$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ , а второе и третье уравнения (4.1) совпадают и приводятся к виду

$$\gamma_3 (\gamma_1 (\alpha_1^2 - \alpha_*^2) + \varepsilon (\gamma_1^2 - \gamma_3^2)) = 0 \quad (4.3)$$

Это уравнение относительно  $\gamma_3$  надо рассматривать вместе с уравнением (1.2), принимающим вид

$$\gamma_1^2 + 2\gamma_3^2 = 1 \quad (4.4)$$

Случай  $\gamma_3 = 0$  дает решение  $\mathcal{F}_1$ . В другом случае, когда обращается в нуль второй сомножитель из (4.3), выразим  $\gamma_3^2$  из (4.4) и подставим в (4.3). Имеем

$$\gamma_1(\alpha_1^2 - \alpha_*^2) + \varepsilon \left( \gamma_1^2 - \frac{1 - \gamma_1^2}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow p = \varepsilon \frac{3\gamma_1^2 - 1}{\gamma_1} \quad (4.5)$$

где  $p = 2(\alpha_*^2 - \alpha_1^2)$ .

*Замечание.* Из соотношения  $p = 2(\alpha_*^2 - \alpha_1^2)$  можно однозначно выразить параметр  $a_*$  как функцию от величин  $a_1$  и  $p$ :

$$a_* = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{2a_1^2 + 5a_1p - 2 + \sqrt{(2a_1^2 + 5a_1p - 2)^2 + 32a_1^2(a_1^2 + 1)}}$$

Таким образом, для любых наперед заданных значений  $a_1$  и  $p$  однозначно определяется значение параметра  $a_* > 0$ , и, следовательно, параметр  $p$  может принимать любые действительные значения.

Равновесия, удовлетворяющие соотношениям (4.4), (4.5) в дальнейшем будем называть “косыми”, противопоставляя их тем самым “прямым” равновесиям  $\mathcal{F}_k$ .

В пространстве  $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, p)$  найденные зависимости задают кривые, заполненные равновесиями. Ограничимся рассмотрением случая, когда  $\varepsilon = 1$ , т.е.  $\gamma_2 = \gamma_3$ . В этом случае притягивающий центр  $N$  располагается в плоскости, содержащей ребро  $AD$  и проходящей через точку  $L$  – середину ребра  $BC$ , а потому и перпендикулярной этому ребру<sup>1</sup>. В силу (4.5) и указанной симметрии изучаемые равновесия описываются соотношениями

$$\mathcal{F}\mathcal{F}(p) : \gamma_1 = \frac{1}{6}(p - \sqrt{p^2 + 12}), \quad \gamma_2 = \gamma_3 = \pm \frac{1}{6}\sqrt{12 - p^2 + p\sqrt{p^2 + 12}}, \quad p \geq -2$$

$$\mathcal{F}\mathcal{F}(p) : \gamma_1 = \frac{1}{6}(p + \sqrt{p^2 + 12}), \quad \gamma_2 = \gamma_3 = \pm \frac{1}{6}\sqrt{12 - p^2 - p\sqrt{p^2 + 12}}, \quad p \leq 2$$

причем,  $\mathcal{F}\mathcal{F}(0) = \mathcal{F}\mathcal{F}$  и  $\mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{F}(0) = \mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{F}$ .

Проекции задаваемых этими соотношениями кривых на плоскости  $(\gamma_1, p)$  и  $(\gamma_3, p)$  изображены на рис. 2, 3.

Рассмотрим сначала проекции изучаемых кривых на плоскость  $(\gamma_1, p)$  (рис. 2). При  $p \ll 0$  имеется единственная ветвь  $\Gamma'$ . Вдоль ветви  $\Gamma'$  в пределе  $\lim_{p \rightarrow -\infty} \gamma_1 = 0^+$ ,  $\lim_{p \rightarrow -\infty} \gamma_2 =$

$\lim_{p \rightarrow -\infty} \gamma_3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ . При этом положительным предельным значениям  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$  отвечает случай, когда тетраэдр “смотрит” на точку  $N$  вершиной  $A$ , а отрицательным предельным значениям – случай, когда тетраэдр смотрит на точку  $N$  вершиной  $D$ .

Пусть теперь параметр  $p$  возрастает. Вдоль ветви  $\Gamma'$  значение  $\gamma_1$  также возрастает и достигает величины  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  при  $p = 0$ . Между тем при  $p = -2$  в точке  $\gamma_1 = -1$  возникает ветвь  $\Gamma''$ , заполненная равновесиями. Вдоль ветви  $\Gamma''$  значение  $\gamma_1$  также возрастает и

<sup>1</sup> Случай, когда  $\varepsilon = -1$ , т.е.  $\gamma_2 = -\gamma_3$ , может быть рассмотрен аналогично.

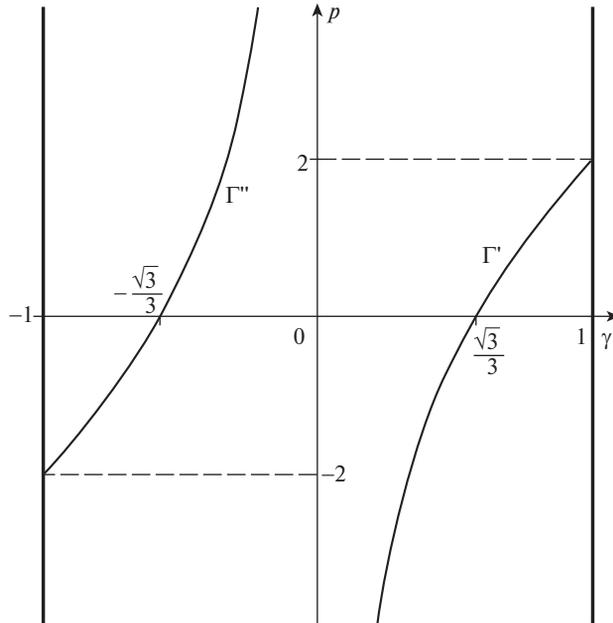


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма в проекции на плоскость  $(\gamma_1, p)$

достигает значения  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  при  $p = 0$ . Пересечениям ветвей  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$  с осью  $p = 0$  отвечают случаи, когда правильный тетраэдр обращен к притягивающему центру серединами граней и вершинами соответственно.

Для ветви  $\Gamma'$  с возрастанием параметра  $p$  значение  $\gamma_1$  также возрастает и достигает физически осмысленного предела  $\gamma_1 = 1$  при  $p = 2$ . Тем самым при  $p = 2$  получаем равновесие вида  $\mathcal{F}_1$ . Для ветви  $\Gamma''$  с возрастанием параметра  $p$  величина  $\gamma_1$  тоже возрастает, причем  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \gamma_1 = 0^-$ . Равновесия из этого класса в пределе стремятся к положениям, когда тетраэдр “смотрит” на притягивающий центр одной из вершин  $A$  или  $D$ , не достигая этих положений.

Поведение при изменении параметра  $p$  проекций тех же кривых на плоскость  $(\gamma_3, p)$  проиллюстрировано на рис. 3.

Схематически изменения положений равновесия с возрастанием параметра  $p$  изображено на рис. 4.

*Замечание.* Зависимости, изображенные на рис. 2 и 3, обладают очевидными свойствами нечетности и четности, и, казалось бы это обстоятельство так или иначе должно проявляться в геометрии тетраэдра. Однако это не так. Напомним, что в рассматриваемом случае грани тетраэдра – равнобедренные треугольники. Обозначим  $\varphi$  угол при их вершинах. При  $p = 0$  грани тетраэдра – правильные треугольники, и  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ . Однако при  $p < 0$  угол  $\varphi$  принимает значения на интервале от 0 до  $\frac{\pi}{3}$ , в то время как  $p > 0$

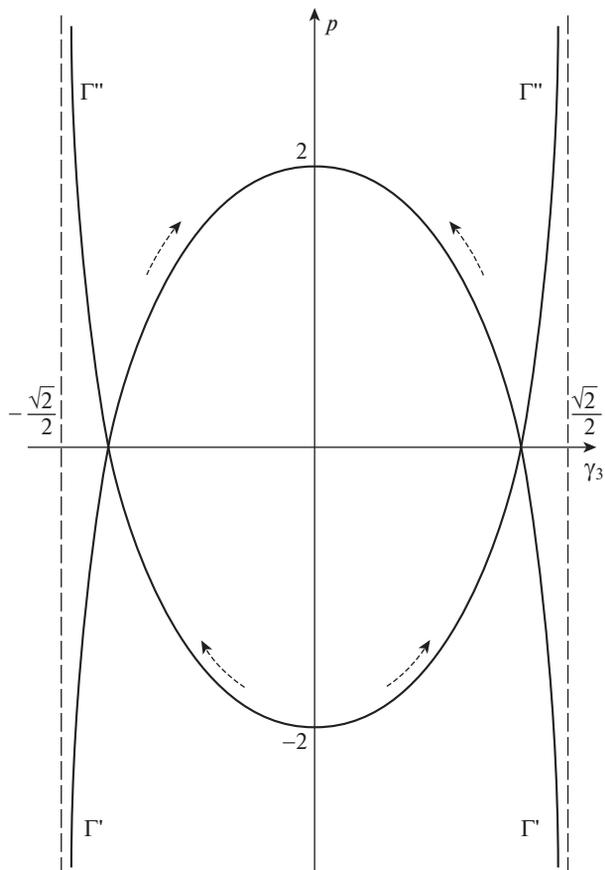


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма в проекции на плоскость  $(\gamma_3, p)$

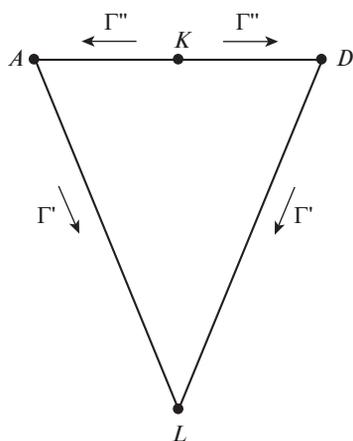


Рис. 4. Схема ветвления равновесий

угол  $\varphi$  принимает значения на интервале от  $\frac{\pi}{3}$  до  $\frac{\pi}{2}$ . Иными словами, геометрия треугольников, расположенных в гранях, сильно различается в случаях  $p < 0$  и  $p > 0$ .

**5. Равновесия: устойчивость.** Зададимся решением вопроса об устойчивости равновесий тетраэдра.

Для исследования устойчивости, следуя методу Рауса ([8, 9], см. также [10]) выпишем функцию

$$W = U' + \frac{\lambda}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 1)$$

и исследуем знакоопределенность ограничения ее второй вариации

$$2\delta^2 W = \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma^2} \delta \gamma, \delta \gamma \right), \quad \delta \gamma = (\delta \gamma_1, \delta \gamma_2, \delta \gamma_3)^T \quad (5.1)$$

на линейное многообразии

$$\gamma_1 \delta \gamma_1 + \gamma_2 \delta \gamma_2 + \gamma_3 \delta \gamma_3 = 0 \quad (5.2)$$

Если обозначить

$$W_{ij} = W_{ji} = \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j}$$

то вторые производные имеют вид

$$W_{11} = -\alpha_1^2 + \lambda, \quad W_{12} = \gamma_3 \quad (1, 2, 3)$$

где (1, 2, 3) – циклическая перестановка индексов.

Неопределенный множитель Лагранжа  $\lambda$  в общем случае имеет вид

$$\lambda = \alpha_1^2 \gamma_1^2 + \alpha_2^2 \gamma_2^2 + \alpha_3^2 \gamma_3^2 - 3\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$$

*5.1. Случай, когда равны все бимедианы.* Согласно результатам Р.С. Суликашвили для равновесий, на которых тетраэдр “смотрит” на притягивающий центр вершиной, например, вершиной  $D$ , имеем

$$2\delta^2 W \Big|_{(5.2)} = \frac{4\sqrt{3}}{3} (\delta \gamma_1^2 + \delta \gamma_2^2 + \delta \gamma_1 \delta \gamma_2) \quad (5.3)$$

Квадратичная форма (5.3) положительно определена, степень неустойчивости равна нулю ( $\chi = 0$ ). Рассматриваемое равновесие доставляет минимум измененному потенциалу, оно устойчиво по Ляпунову по теореме Лагранжа об устойчивости [11, 12].

Для равновесий, на которых тетраэдр “смотрит” на притягивающий центр серединой ребра, например, для решения  $\mathcal{F}_3$ , имеем

$$2\delta^2 W \Big|_{(5.2)} = 2\delta \gamma_1 \delta \gamma_2 \quad (5.4)$$

Рассматриваемое равновесие отвечает седловой точке измененного потенциала (степень неустойчивости равна единице,  $\chi = 1$ ), и потому неустойчиво [11, 12].

Для равновесий, на которых тетраэдр “смотрит” на притягивающий центр центром грани, например, центром грани  $ABC$ , имеем

$$2\delta^2 W \Big|_{(5.2)} = -\frac{4\sqrt{3}}{3} (\delta \gamma_1^2 + \delta \gamma_2^2 + \delta \gamma_1 \delta \gamma_2) \quad (5.5)$$

Квадратичная форма (5.5) отрицательно определена, степень неустойчивости равна двум ( $\chi = 2$ ). Рассматриваемое равновесие неустойчиво по теореме, обратной теореме Лагранжа об устойчивости [12].

5.2. *Случай, когда равны две бимедианы.* Прежде всего изучим условия устойчивости равновесий  $\mathcal{F}_k$  в условиях раздела 4.3, т.е.  $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_*$  ( $a_2 = a_3 = a_*$ ).

Для равновесия  $\mathcal{F}_1$  ограничение квадратичной формы на линейное многообразие принимает вид

$$2\delta^2 W \Big|_{(5.2)} = -\frac{p}{2}(\delta\gamma_2^2 + \delta\gamma_3^2) + 2\delta\gamma_2\delta\gamma_3$$

Это равновесие устойчиво ( $\chi = 0$ ), если выполнено условие  $p < -2$ . Если  $p > -2$ , то равновесие неустойчиво, причем  $\chi = 1$ , если  $p < 2$ , и  $\chi = 2$ , если  $p > 2$ .

Для изучения устойчивости равновесия  $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ ,  $\gamma_1 = -1$  при  $p = -2$  в потенциале выполним замену  $\gamma_1 = -\sqrt{1 - \gamma_2^2 - \gamma_3^2}$  и разложим получившееся выражение в ряд Маклорена по  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$  вплоть до слагаемых четвертого порядка малости. Имеем

$$U = \frac{1}{2}[-\alpha_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 + \gamma_2\gamma_3(\gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 2)] + \dots \quad (5.6)$$

Для исследования типа особой точки  $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$  функции (5.6) введем полярные координаты

$$\gamma_2 = \rho \cos \varphi, \quad \gamma_3 = \rho \sin \varphi$$

В них после преобразований функция (5.6) примет вид

$$U = -\frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{4}\rho^2[2 - 2\sin(2\varphi) + \rho^2\sin(2\varphi)] + \dots$$

Выражение в квадратных скобках при  $\rho \neq 0$  принимает только положительные значения. Поэтому в точке  $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$  функция (5.6) достигает своего строгого минимума, и равновесие устойчиво по Ляпунову.

Аналогично при  $p = 2$  в потенциале с помощью замены  $\gamma_1 = \sqrt{1 - \gamma_2^2 - \gamma_3^2}$  и разложения получившейся функции в ряд Маклорена по  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$  вплоть до слагаемых четвертого порядка малости, имеющего вид

$$U = -\frac{1}{2}[\alpha_1^2 + (\gamma_3 - \gamma_2)^2 + (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)\gamma_2\gamma_3] + \dots \quad (5.7)$$

доказывается, что при  $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ ,  $\gamma_3 = 1$  функция (5.7) достигает своего строгого максимума, и равновесие неустойчиво.

*Замечание.* Общие методы, касающиеся распределения свойств устойчивости вдоль ветвей установившихся движений, а также устойчивости установившихся движений, отвечающих точкам бифуркации, изучались в [13, 14].

Для равновесия  $\mathcal{F}_2$  ограничение квадратичной формы на линейное многообразие принимает вид

$$2\delta^2 W \Big|_{(5.2)} = \frac{p}{2}\delta\gamma_1^2 + 2\delta\gamma_1\delta\gamma_3$$

Коэффициенты Пуанкаре записываются как

$$c_- = 14(p - (p^2 + 16)^{1/2}), \quad c_+ = \frac{1}{4}(p + (p^2 + 16)^{1/2})$$

Коэффициент  $c_-$  всегда отрицателен, в то время как коэффициент  $c_+$  всегда положителен. Это означает, что равновесие неустойчиво ( $\chi = 1$ ). Так как  $\alpha_2 = \alpha_3$ , то тоже самое справедливо и для равновесия  $\mathcal{F}_3$ . Впрочем, в этом случае свободный член харак-

теристического уравнения отрицателен, и, следовательно, корни имеют разные знаки, и их можно было не вычислять.

Обратимся теперь к изучению условий устойчивости равновесий, задаваемых соотношением (4.5) при  $\varepsilon = 1$ . Ограничимся рассмотрением решений, для которых  $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_* > 0$ . Случай  $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_* < 0$  рассматривается аналогично.

Для исследуемых равновесий линейное многообразие задается, например, как

$$\delta\gamma_1 = -\gamma_1^{-1}\gamma_* (\delta\gamma_2 + \delta\gamma_3)$$

Подстановка этого соотношения и соотношения для  $\gamma_*$  в выражение (5.1), а также последующее приведение подобных позволяет представить изучаемое ограничение квадратичной формы на линейное многообразие в виде

$$2\delta^2W = c_{22}\delta\gamma_2^2 + 2c_{23}\delta\gamma_2\delta\gamma_3 + c_{33}\delta\gamma_3^2 \quad (5.8)$$

$$c_{22} = c_{33} = \frac{1}{4\gamma_1^2} [(-\gamma_1^4 - 2\gamma_1^2 + 1)p + \gamma_1(\gamma_1 - 1)(\gamma_1 + 1)(3\gamma_1^2 + 7)]$$

$$c_{23} = \frac{1}{4\gamma_1^2} p[(\gamma_1^2 - 1)^2 p + \gamma_1(14\gamma_1^2 - 3\gamma_1^4 - 7)]$$

При этом коэффициенты Пуанкаре имеют вид

$$c_1 = \frac{1}{2\gamma_1^2} (9\gamma_1^3 + (1 - 2\gamma_1^2)p - 7\gamma_1), \quad c_2 = \frac{1}{2} \gamma_1 (3\gamma_1^2 - \gamma_1 p - 5)$$

На рис. 5 приведена бифуркационная картина на плоскости  $(\gamma_1, p)$ . Штриховые линии разделяют области, в которых оба коэффициента Пуанкаре  $c_1$  и  $c_2$  имеют один и тот же знак, сами знаки этих коэффициентов прорисованы по периметру фигуры. Сплошными линиями отмечены равновесия  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$ . Нетрудно видеть, что для равновесий, заполняющих кривую  $\Gamma'$ , степень неустойчивости равна двум, и эти равновесия неустойчивы. Также нетрудно видеть, что для равновесий, заполняющих кривую  $\Gamma''$ , степень неустойчивости равна нулю, и эти равновесия устойчивы по Ляпунову.

*Замечание.* В то время, как проекции кривых  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$  на плоскость  $(\gamma_1, p)$  центрально симметричны относительно начала координат, относительно свойств устойчивости, допуская вольность речи, можно сказать, что они “антисимметричны” относительно начала координат на этой плоскости: для двух центрально симметричных точек значения коэффициентов Пуанкаре имеют противоположные знаки.

*Замечание.* Исследование коэффициентов Пуанкаре можно выполнить явно: подставляя в выражения (5.8) в качестве параметра  $p$  выражение из (4.5), имеем

$$c_{22} = c_{33} = -\frac{1}{4\gamma_1^3} (\gamma_1^2 + 1)^2, \quad c_{23} = -\frac{1}{4\gamma_1^3} (\gamma_1^2 + 1)^2 + 2\gamma_1$$

Тогда на изучаемых равновесиях коэффициенты Пуанкаре принимают вид

$$c_1 = -\frac{(1 - \gamma_1^2)(3\gamma_1^2 + 1)}{2\gamma_1^3}, \quad c_2 = -2\gamma_1 \quad (5.9)$$

На равновесиях  $\Gamma'$  выполнены неравенства  $0 < \gamma_1 < 1$ . Поэтому в силу (5.9) на этих равновесиях  $c_1 < 0$ ,  $c_2 < 0$ , причем  $c_1 = 0$  лишь при  $\gamma_1 = 1$ .

Аналогично, на равновесиях  $\Gamma''$  выполнены неравенства  $-1 < \gamma_1 < 0$ . Поэтому на этих равновесиях  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$ , причем  $c_1 = 0$  лишь при  $\gamma_1 = -1$ .

**6. Перманентные вращения равногранного тетраэдра.** Как было показано выше, уравнения перманентных вращений твердого тела в рассматриваемой задаче имеют вид (1.3).

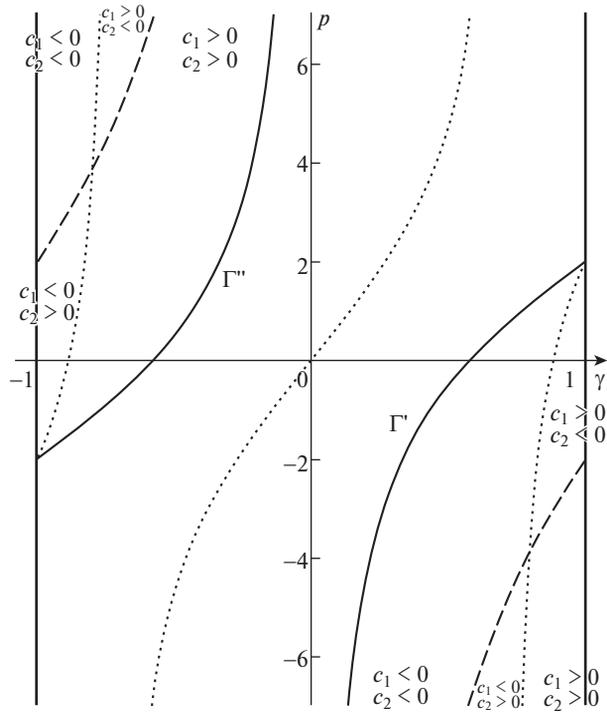


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма в проекции на плоскость  $(\gamma_1, p)$  и степени неустойчивости решений

В случае, когда в разложении потенциала удерживаются лишь слагаемые второго и третьего порядка малости, эти уравнения представимы в виде

$$\begin{aligned} \gamma_2 \gamma_3 (\alpha_3^2 - \alpha_2^2) + \gamma_1 (\gamma_3^2 - \gamma_2^2) &= 0 \\ \gamma_3 \gamma_1 (\alpha_1^2 - \alpha_3^2) + \gamma_2 (\gamma_1^2 - \gamma_3^2) &= 0 \\ \gamma_1 \gamma_2 (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) + \gamma_3 (\gamma_2^2 - \gamma_1^2) &= 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

где

$$\alpha_i = \sqrt{\frac{R^2}{15a_1 a_2 a_3} (3a_i^2 + \omega^2 R^5 (a_2^2 + a_3^2))}, \quad (i, 2, 3)$$

Отметим, что эти уравнения совпадают с уравнениями (4.1).

Таким образом, все рассуждения, выполненные выше при отыскании равновесий, дословно переносятся и на случай перманентных вращений. Следует заметить, что при заданном значении угловой скорости  $\omega$  перманентные вращения могут быть найдены как критические точки измененного (augmented) потенциала, имеющего вид

$$W_\omega = -\frac{1}{2} \omega^2 I(\gamma) + U'(\gamma) \quad (6.2)$$

и рассмотренного как функция на сфере (1.2). Здесь и далее  $I(\gamma) = (I\gamma, \gamma)$  – момент инерции тела относительно оси вращения. Однако определение типа критических точек при фиксированном значении  $\omega$  не дает возможности в общем случае сделать выводы об устойчивости движения. Исключения составляют движения, существующие

при любом значении угловой скорости, такие как вращения типа  $I_k$  вокруг бимедиан (см. [15]).

Для “косых” перманентных вращений, на которых положение оси вращения в теле зависит от величины угловой скорости, перманентные вращения определяются как критические точки приведенного (amended) потенциала, имеющего вид

$$W_\psi = \frac{1}{2} \frac{p_\psi^2}{I(\gamma)} + U'(\gamma)$$

и также рассмотренного как функция на сфере (1.2). При этом величина угловой скорости  $\omega$  и постоянная интеграла площадей связаны соотношением  $p_\psi = I(\gamma)\omega$ .

**7. Выводы.** Выполненное исследование показало, что при описанных выше деформациях правильного тетраэдра в классе равногранных тетраэдров равновесия вида  $\mathcal{F}_k$  существуют всегда, но их свойства устойчивости зависят от размеров тетраэдра. Так, при  $p \leq -2$  равновесия  $\mathcal{F}_1$  устойчивы, при  $-2 < p < 2$  эти равновесия неустойчивы со степенью неустойчивости  $\chi = 1$ , при  $p \geq 2$  равновесия неустойчивы со степенью неустойчивости  $\chi = 2$ . Равновесия  $\mathcal{F}_2$  и  $\mathcal{F}_3$  неустойчивы со степенью неустойчивости  $\chi = 2$  при любом значении параметра  $p$ .

Равновесия вида  $\mathcal{F}\mathcal{F}$  принадлежат однопараметрическому семейству  $\mathcal{F}\mathcal{F}(p)$ , причем эти равновесия устойчивы по Ляпунову при любом значении параметра  $p$ . Наконец, равновесия типа  $\mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{F}$  также принадлежат однопараметрическому семейству  $\mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{F}(p)$ , и при любом значении параметра  $p$  эти решения неустойчивы со степенью неустойчивости равной два.

Являющееся на первый взгляд чисто академическим, такое исследование приобретает определенный смысл, поскольку для некоторых малых небесных тел таких как, например, комета (67P) Чурюмова–Герасименко, поле притяжения хорошо приближается с помощью образующих тетраэдр четырех массивных точек [16] (см. также работу [17], касающуюся качества приближения).

Представляют интерес изучение относительного движения тел, имеющих схожее распределение масс, на кеплеровской орбите, а также исследование точек либрации в случае равномерного вращения таких тел.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карпетян А.В., Нараленкова И.И. О бифуркации равновесий механических систем с симметричным потенциалом // ПММ. 1998. Т. 62. № 1. С. 12–21.
2. Нараленкова И.И. О ветвлении и устойчивости положений равновесия твердого тела в ньютоновском поле // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 1995. С. 53–60.
3. Суликашвили Р.С. О стационарных движениях тетраэдра и октаэдра в центральном поле тяготения // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1987. С. 57–66.
4. Суликашвили Р.С. Стационарные движения тел, допускающих группу симметрии правильных многогранников в ньютоновском поле сил // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 582–586.
5. Burov A.A., Sulikashvili R.S. On the motion of a rigid body possessing afinite group of symmetry // Prépublication du C.E.R.M.A. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. 1993. № 17.
6. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии. Стереометрия. Серия “Библиотечка Квант”. Выпуск 31. М.: Наука, 1984. 160 с.
7. Vashkoviak M.A. On the stability of circular ‘asteroid’ orbits in an N-planetary system // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1976. V. 13. № 3. P. 313–324.
8. Routh E.J. Treatise on the Stability of a Given State of Motion. Cambridge: Cambridge University press, 1877. 108 p.

9. *Routh E.J.* The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. L.: McMillan, 1884. 343 p.
10. *Каранетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС Москва, 1998. 168 с.
11. *Березкин Е.Н.* Курс теоретической механики. М.: Изд-во МГУ, 1974. 646 с.
12. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. 3-е изд. М.: Наука, 1965. 176 с.
13. *Возлинский В.И.* О связи бифуркаций равновесий консервативных систем с распределением устойчивости на кривой равновесий // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 2. С. 384–392.
14. *Возлинский В.И.* Об устойчивости точек ветвления равновесий // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 2. С. 259–267.
15. *Каранетян А.В., Степанов С.Я.* О стационарных движениях и относительных равновесиях механических систем с симметрией // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 736–743.
16. *Burov A.A., Guertan A.D., Nikonova E.A., Nikonov V.I.* Approximation for attraction field of irregular celestial bodies using four massive points // Acta Astronaut. 2019. V. 157. P. 225–232. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2018.11.030>
17. *Hong Wei Yang, Shuang Li, Jun Sun* A fast Chebyshev polynomial method for calculating asteroid gravitational fields using space partitioning and cosine sampling // Adv. Space Res. 2020. V. 65. № 4. P. 1105–1124. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2019.11.001>