

СОДЕРЖАНИЕ

Том 58, номер 6, 2022

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Упаковочные размерности бассейнов, порождённых инвариантными мерами на пространстве последовательностей
В. И. Бахтин, Б. М. Садож 723
- Сингулярно возмущённая задача Коши при наличии “слабой” точки поворота первого порядка у предельного оператора с кратным спектром
А. Г. Елисейев, П. В. Кириченко 733
- Об одной краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа
А. Л. Скубачевский, А. Ш. Адхамова 747
-

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

- Итерационный метод решения задачи определения коэффициента и источника в уравнении теплопроводности
А. М. Денисов 756
- Движение фронта в задаче со слабой адвекцией в случае непрерывного источника и источника модульного типа
Н. Н. Нефедов, Е. И. Никулин, А. О. Орлов 763
- Оценки локально-периодического усреднения задачи Римана–Гильберта для обобщённого уравнения Бельтрами
М. М. Сиражудинов, С. П. Джамалудинова 777
-

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

- Об итеративной регуляризации принципа Лагранжа в выпуклых задачах оптимального управления распределёнными системами вольтеррова типа с операторными ограничениями
В. И. Сумин, М. И. Сумин 795
-

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

- Численное интегрирование задач Коши, решение которых имеет полюсы целого порядка на вещественной оси
А. А. Белов, Н. Н. Калиткин 813
- Барицентрический метод в решении краевых задач математической физики
А. С. Ильинский, И. С. Полянский 834
-

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Доказательство гипотезы якобиана в двумерном случае и глобальные изохронные центры
полиномиальных гамильтоновых дифференциальных систем

В. В. Амелькин

846

ХРОНИКА

О семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений
в Московском университете

850

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.938

УПАКОВОЧНЫЕ РАЗМЕРНОСТИ БАССЕЙНОВ, ПОРОЖДЁННЫХ ИНВАРИАНТНЫМИ МЕРАМИ НА ПРОСТРАНСТВЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

© 2022 г. В. И. Бахтин, Б. М. Садок

Рассматривается отображение левого сдвига на пространстве бесконечных сигналов $X^{\mathbb{N}}$, составленных из букв конечного алфавита X . Для каждого сигнала итерации сдвигов порождают последовательность эмпирических мер на $X^{\mathbb{N}}$ и отвечающее этой последовательности предельное множество. Это множество компактно, связно и состоит из инвариантных вероятностных мер. Всё фазовое пространство $X^{\mathbb{N}}$ разбивается на *узкие бассейны*, состоящие из сигналов с одинаковыми предельными множествами для последовательности эмпирических мер, и для каждого узкого бассейна вычисляется упаковочная размерность.

DOI: 10.31857/S0374064122060012, EDN: CBXHEW

Введение. Рассмотрим множество $X = \{1, \dots, r\}$. Ниже оно будет называться *алфавитом*, а его элементы – *буквами*. Всякие последовательности букв (конечные и бесконечные) будем называть *сигналами*. Совокупность конечных сигналов длины n естественно обозначить как X^n , а множество всех бесконечных сигналов как

$$X^{\mathbb{N}} = \{x = (x_1, x_2, \dots) : x_i \in X\}.$$

Любую начальную часть сигнала будем называть его *префиксом*.

Фиксируем на $X^{\mathbb{N}}$ топологию декартова произведения, порождённую дискретной топологией на множестве X . По теореме Тихонова [1, приложение, § 7, с. 417] пространство $X^{\mathbb{N}}$ с этой топологией компактно.

Определим на $X^{\mathbb{N}}$ отображение левого сдвига T :

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Пусть $M(X^{\mathbb{N}})$ обозначает совокупность всех (борелевских) вероятностных мер на топологическом пространстве $X^{\mathbb{N}}$, а $M_T(X^{\mathbb{N}})$ – совокупность всех T -инвариантных вероятностных мер на $X^{\mathbb{N}}$ (мера μ называется *инвариантной*, если для любого измеримого множества A выполняется равенство $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$). Очевидно, что оба множества $M(X^{\mathbb{N}})$ и $M_T(X^{\mathbb{N}})$ выпуклы. В силу теоремы Алаоглу [1, гл. IX, § 59, с. 389] они компактны (в слабой топологии, порождённой непрерывными функциями на $X^{\mathbb{N}}$).

Для каждого бесконечного сигнала $x \in X^{\mathbb{N}}$ обозначим через δ_x единичную меру, сосредоточенную в точке x . Определим также последовательность *эмпирических мер* $\delta_{x,n} \in M(X^{\mathbb{N}})$ по правилу

$$\delta_{x,n} = \frac{\delta_x + \delta_{Tx} + \dots + \delta_{T^{n-1}x}}{n}.$$

Пусть $V(x)$ – множество всех предельных точек последовательности $\delta_{x,n}$. В силу компактности $M(X^{\mathbb{N}})$ это множество непусто и компактно. Ниже (см. леммы 1, 2) будет доказано, что оно связно и содержится в $M_T(X^{\mathbb{N}})$.

Каждое множество инвариантных мер $W \subset M_T(X^{\mathbb{N}})$ порождает следующие подмножества в пространстве $X^{\mathbb{N}}$: *бассейн* $B(W)$, *узкий бассейн* $NB(W)$ и *широкий бассейн* $WB(W)$, определяемые соответственно формулами

$$B(W) = \{x \in X^{\mathbb{N}} : V(x) \subset W\},$$

$$NB(W) = \{x \in X^{\mathbb{N}} : V(x) = W\},$$

$$WB(W) = \{x \in X^{\mathbb{N}} : V(x) \cap W \neq \emptyset\}.$$

Иначе говоря, $B(W)$ – это совокупность таких бесконечных сигналов x , для которых множество предельных точек последовательности эмпирических мер $\delta_{x,n}$ содержится в W , $NB(W)$ – это совокупность таких бесконечных сигналов x , для которых множество предельных точек последовательности $\delta_{x,n}$ совпадает с W , а $WB(W)$ – это совокупность таких бесконечных сигналов x , для которых последовательность $\delta_{x,n}$ имеет хотя бы одну предельную точку в W . При этом очевидно, что

$$NB(W) \subset B(W) \subset WB(W) \subset X^{\mathbb{N}}.$$

Из упомянутой выше компактности и связности $V(x)$ следует, что узкий бассейн может быть непуст только тогда, когда множество W непусто, компактно и связно. С другой стороны, для любого непустого связного компакта $W \subset M_T(X)$ порождённый им узкий бассейн $NB(W)$ действительно непуст (это будет доказано в п. 3, где будет построено некоторое непустое подмножество $D_{\infty} \subset NB(W)$). Что касается бассейнов $B(W)$ и $WB(W)$, то они непусты для любого $W \neq \emptyset$ (поскольку содержат узкие бассейны $NB(\mu)$ для всех $\mu \in W$).

Всякий бесконечный сигнал x однозначно определяет множество $V(x)$. Поэтому узкие бассейны, отвечающие разным множествам W , не пересекаются между собой. Таким образом, все пространство бесконечных сигналов $X^{\mathbb{N}}$ оказывается разбито на узкие бассейны, порождённые всевозможными связными компактами $W \subset M_T(X)$. Однако бассейны двух других типов могут иметь непустые пересечения.

Зафиксируем набор чисел $\theta = (\theta(1), \theta(2), \dots, \theta(r)) \in (0, 1)^r$ (по одному числу $\theta(i)$ для каждой буквы $i \in X$). Определим с его помощью метрику ρ на пространстве бесконечных сигналов $X^{\mathbb{N}}$ следующим образом:

$$\rho(x, y) = \prod_{t=1}^n \theta(x_t), \quad \text{где } n = \inf\{t : x_t \neq y_t\} - 1 \quad (1)$$

(здесь n – длина наибольшего общего префикса x и y).

Введём в рассмотрение функцию

$$S(\mu, \theta) = h(\mu) / \left(- \sum_{i \in X} \mu(i) \ln \theta(i) \right), \quad \mu \in M_T(X^{\mathbb{N}}),$$

где $h(\mu)$ обозначает энтропию меры μ (определение см., например, в [2, гл. 2, с. 75]), а $\mu(i)$ обозначает меру множества всех бесконечных сигналов, начинающихся с буквы i . Известно [3, гл. 6, с. 133], что энтропия аффинна и полунепрерывна сверху (в слабой топологии) по отношению к аргументу $\mu \in M_T(X^{\mathbb{N}})$, поэтому функция $S(\mu, \theta)$ полунепрерывна сверху по отношению к μ .

Целью данной статьи является доказательство следующих двух теорем об упаковочных размерностях бассейнов.

Теорема 1. Пусть на пространстве $X^{\mathbb{N}}$ задана метрика (1). Тогда для любого непустого связного компакта $W \subset M_T(X^{\mathbb{N}})$ имеет место равенство

$$\dim_P NB(W) = \sup_{\mu \in W} S(\mu, \theta), \quad (2)$$

где \dim_P обозначает упаковочную размерность.

Теорема 2. Для любого непустого подмножества $W \subset M_T(X^{\mathbb{N}})$ справедливы равенства

$$\dim_P B(W) = \sup_{\mu \in W} S(\mu, \theta), \quad (3)$$

$$\dim_P WB(W) = \dim_P X^{\mathbb{N}} = \sup_{\mu \in M_T(X^{\mathbb{N}})} S(\mu, \theta). \quad (4)$$

Замечание 1. В статье [4] аналогичные теоремы были доказаны в более простой ситуации, когда эмпирические меры $\delta_{x,n}$ определяются не на фазовом пространстве $X^{\mathbb{N}}$, а на алфавите X , и, соответственно, множества $V(x)$ и W содержатся в $M(X)$. Разумеется, в этом случае разбиение $X^{\mathbb{N}}$ на узкие бассейны оказывается грубее.

Работа имеет следующую структуру. В п. 1 определяются упаковочные размерности множеств, локальные размерности мер и формулируется теорема о связях между ними. В п. 2 доказываются топологические леммы и формулируется так называемая “информационная” теорема, необходимые для доказательства теорем 1 и 2. В п. 3 конструируется модельное множество сигналов, содержащееся в узком бассейне. В п. 4 доказывается нижняя оценка для упаковочных размерностей модельного множества и узкого бассейна с помощью локальных размерностей мер. В последнем п. 5 доказывается верхняя оценка для упаковочной размерности узкого бассейна, из которой затем выводятся теоремы 1, 2.

1. Упаковочные размерности множеств и локальные размерности мер. Важнейшей характеристикой фрактального множества является его дробная размерность. В настоящий момент известно несколько различных типов дробных размерностей (см., например, [5]), среди которых второй по популярности (после хаусдорфовой) является упаковочная размерность. Напомним её определение из [5].

Упаковкой множества A в метрическом пространстве M называется любой конечный или счётный набор шаров $B(x_i, r_i)$ с центрами $x_i \in A$ и радиусами r_i , для которых выполняется условие $\rho(x_i, x_j) > r_i + r_j$ при $i \neq j$. Упаковку, состоящую из шаров радиуса не больше ε , будем называть ε -упаковкой.

Для всякого $s > 0$ положим

$$C_\varepsilon^s(A) = \sup \left\{ \sum_i r_i^s : \text{шары } B(x_i, r_i) \text{ образуют } \varepsilon\text{-упаковку } A \right\}.$$

Очевидно, что величина $C_\varepsilon^s(A)$ не возрастает при уменьшении ε . Поэтому существует предел

$$C^s(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_\varepsilon^s(A), \quad (5)$$

который мы будем называть ёмкостью (размерности s) множества A .

Упаковочной мерой (размерности s) множества A называется число

$$P^s(A) = \inf \left\{ \sum_i C^s(A_i) : \text{множества } A_i \text{ образуют счётное покрытие } A \right\}, \quad (6)$$

а его упаковочная размерность определяется как

$$\dim_P A = \inf \{s > 0 : P^s(A) = 0\}.$$

Пусть на метрическом пространстве M задана борелевская мера μ . Функция

$$D_\mu(x) = \limsup_{r \rightarrow 0+0} \frac{\ln \mu(B(x, r))}{\ln r}, \quad x \in M, \quad (7)$$

называется верхней локальной размерностью меры μ .

Следующая теорема является техническим инструментом, позволяющим вычислять упаковочные размерности множеств с помощью локальных размерностей мер.

Теорема 3 [5, утверждение 2.3]. *Если для подмножества $A \subset M$ существует такая конечная борелевская мера μ на M , что $D_\mu(x) \leq s$ для всех точек $x \in A$, то тогда $\dim_P A \leq s$. С другой стороны, если $D_\mu(x) \geq s$ для всех $x \in A$ и при этом внешняя мера $\mu^*(A)$ положительна, то в таком случае $\dim_P A \geq s$.*

Замечание 2. Формально в монографии [5] теорема 3 доказана лишь для подмножеств A евклидова пространства, однако на самом деле приведённое там доказательство годится для любого метрического пространства.

2. Топологические леммы и информационная теорема. Для функций $f \in C(X^{\mathbb{N}})$ и мер $\mu \in M(X^{\mathbb{N}})$ введём обозначение

$$\mu[f] = \int_{X^{\mathbb{N}}} f d\mu.$$

В частности, для эмпирической меры $\mu = \delta_{x,n}$ будет выполняться

$$\delta_{x,n}[f] = \frac{\delta_x[f] + \delta_{Tx}[f] + \dots + \delta_{T^{n-1}x}[f]}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x). \quad (8)$$

Лемма 1. Пусть $x \in X^{\mathbb{N}}$ и последовательность эмпирических мер $\delta_{x,n}$ имеет предельную точку μ (в слабой топологии). Тогда $\mu \in M_T(X^{\mathbb{N}})$.

Доказательство. Для $f \in C(X^{\mathbb{N}})$ в силу (8) справедливы равенства

$$\delta_{x,n}[f] - \delta_{x,n}[f \circ T] = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^{i+1} x) = \frac{f(x) - f(T^n x)}{n}.$$

Из них в пределе получается

$$\mu[f] - \mu[f \circ T] = 0, \quad f \in C(X^{\mathbb{N}}).$$

Последнее тождество равносильно инвариантности меры μ . Лемма доказана.

Из этой леммы следует, что множество $V(x)$, состоящее из всех предельных точек последовательности $\delta_{x,n}$, содержится в $M_T(X^{\mathbb{N}})$.

Лемма 2. Для всякого $x \in X^{\mathbb{N}}$ множество $V(x)$ связно.

Доказательство. Заметим, что для любой функции $f \in C(X^{\mathbb{N}})$

$$\delta_{x,n}[f] - \delta_{x,n+1}[f] = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n f(T^i x) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) - \frac{1}{n+1} f(T^n x),$$

откуда следует, что

$$|\delta_{x,n}[f] - \delta_{x,n+1}[f]| \leq \frac{2\|f\|}{n+1}. \quad (9)$$

Очевидно, что множество $V(x)$ замкнуто. Предположим, что оно не связно. Тогда его можно представить как объединение двух непустых непересекающихся замкнутых подмножеств: $V(x) = V_0 \sqcup V_1$. По лемме Урысона существует непрерывная функция F на $M(X^{\mathbb{N}})$ со значениями в отрезке $[0, 1]$, равная тождественно нулю на V_0 и тождественной единице на V_1 .

Из (9) и компактности множества $M(X^{\mathbb{N}})$ вытекает, что

$$F(\delta_{x,n}) - F(\delta_{x,n+1}) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Выберем произвольные меры $\mu_0 \in V_0$ и $\mu_1 \in V_1$. По определению множества $V(x)$ они являются предельными точками последовательности $\delta_{x,n}$. Следовательно, значения $F(\mu_0) = 0$ и $F(\mu_1) = 1$ будут предельными для последовательности $F(\delta_{x,n})$. Из этого факта и (10) вытекает, что любое значение между нулём и единицей, в том числе $1/2$, тоже будет предельным для $F(\delta_{x,n})$. Поэтому у последовательности $\delta_{x,n}$ существует такая предельная точка μ , для которой $F(\mu) = 1/2$. Поскольку $\mu \in V(x)$, это противоречит определению функции F . Значит, множество $V(x)$ связно. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть W – непустое компактное и связное подмножество метрического пространства (M, ρ) и функция $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ полунепрерывна сверху. Тогда существует последовательность точек $x_i \in W$, обладающая следующими свойствами:

- а) множество её предельных точек совпадает с W ;
 б) $\rho(x_i, x_{i+1}) \rightarrow 0$;
 в) для любой точки $x^* \in W$ существует такая подпоследовательность x_{i_k} , которая сходится к x^* и при этом $h(x_{i_k}) \geq h(x^*)$.

Доказательство. Фиксируем сходящуюся к нулю последовательность положительных чисел ε_n . Для каждого n построим конечную $\varepsilon_n/2$ -сеть в W , которую обозначим S_n . Для каждой точки $z \in S_n$ найдём точку максимума функции h на множестве $B(z, \varepsilon_n/2) \cap W$. Обозначим её $x(z)$. Очевидно, множество $S'_n = \{x(z) : z \in S_n\}$ образует ε_n -сеть в W . В силу леммы 4 из статьи [6] существует такая замкнутая $2\varepsilon_n$ -цепь (т.е. конечная последовательность точек, в которой первая точка совпадает с последней и любые две соседние точки лежат на расстоянии меньше $2\varepsilon_n$), которая содержит все точки S'_n и не содержит никаких других. Для каждой точки из S'_n найдётся точка из S'_{n+1} на расстоянии меньшем, чем ε_{n+1} . Поэтому все построенные замкнутые цепи можно разомкнуть и объединить в одну бесконечную цепь $\{x_i\}$ (в порядке возрастания n) таким образом, чтобы эта бесконечная цепь содержала каждое из множеств S'_n и удовлетворяла условию $\rho(x_i, x_{i+1}) \rightarrow 0$. По построению множество всех предельных точек последовательности $\{x_i\}$ будет совпадать с W .

Пусть $x^* \in W$. По построению для каждого n существует точка $z_n \in S_n$ такая, что $x^* \in B(z_n, \varepsilon_n/2)$. Поскольку $x(z_n)$ является точкой максимума функции h на множестве $B(z_n, \varepsilon_n/2) \cap W$, получаем, что $h(x(z_n)) \geq h(x^*)$ и одновременно $\rho(x(z_n), x^*) < \varepsilon_n$. Последовательность $\{x(z_n)\}$ удовлетворяет п. в). Лемма доказана.

Для всякого (конечного или бесконечного) сигнала $x = (x_1, x_2, \dots)$ и натурального числа n , не превосходящего длины x , определим цилиндр $Z_n(x)$ как множество всех бесконечных сигналов y , имеющих тот же префикс длины n , что и x :

$$Z_n(x) = \{y = (y_1, y_2, \dots) \in X^{\mathbb{N}} : y_1 = x_1, \dots, y_n = x_n\}. \quad (11)$$

Ниже нам потребуется следующая “информационная” теорема.

Теорема 4 [7]. Для любой меры $\mu \in M_T(X^{\mathbb{N}})$ и любого $\varepsilon > 0$ существует слабая окрестность $O(\mu) \subset M(X^{\mathbb{N}})$, удовлетворяющая оценке

$$\text{card} \{x \in X^n : \exists y \in Z_n(x) \text{ такое, что } \delta_{y,n} \in O(\mu)\} < e^{n(h(\mu)+\varepsilon)}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

С другой стороны, для любой меры $\mu \in M_T(X^{\mathbb{N}})$, любого $\varepsilon > 0$ и любой слабой окрестности $O(\mu) \subset M(X^{\mathbb{N}})$ справедлива оценка

$$\text{card} \{x \in X^n : \forall y \in Z_n(x) \delta_{y,n} \in O(\mu)\} > e^{n(h(\mu)-\varepsilon)}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (13)$$

3. Модельное множество сигналов. Пусть W – непустой связный компакт в $M_T(X^{\mathbb{N}})$ и $NB(W) \subset X^{\mathbb{N}}$ – соответствующий узкий бассейн. Далее описывается конструкция модельного множества $D_\infty \subset NB(W)$, чья упаковочная размерность может быть легко оценена снизу при помощи теоремы 3.

Известно (см., например, [8, гл. IV, § 4, теорема 4]), что слабая топология на $M(X^{\mathbb{N}})$ метризуема посредством метрики

$$\rho(\mu, \nu) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |\mu[f_i] - \nu[f_i]|,$$

где $\{f_i\}$ образует счётное всюду плотное множество на единичной сфере в $C(X^{\mathbb{N}})$. Фиксируем такую метрику. Очевидно, она ограничена на $M(X^{\mathbb{N}})$.

Выберем для множества W последовательность точек $\mu_i \in W$ в соответствии с леммой 3 (в которой в качестве функции $h(\mu)$ используется энтропия). Зададим последовательность положительных чисел ε_i , сходящуюся к нулю. Вторая часть теоремы 4 (оценка (13)) гарантирует, что для каждой меры μ_i , числа $\varepsilon_i > 0$ и всякого достаточно большого $n_i \in \mathbb{N}$ существует такое подмножество $A_i \subset X^{n_i}$, что

$$\text{card } A_i > e^{n_i(h(\mu_i)-\varepsilon_i)}, \quad (14)$$

и одновременно для любого $x \in X^{\mathbb{N}}$ с префиксом из A_i выполняются неравенства

$$\rho(\delta_{x,n_i}, \mu_i) < \varepsilon_i, \tag{15}$$

$$\sum_{j \in X} |\delta_{x,n_i}(j) - \mu_i(j)| < \varepsilon_i. \tag{16}$$

Выберем последовательность n_i настолько быстро растущей, чтобы выполнялось условие

$$n_{i+1} \geq i n_i. \tag{17}$$

После этого определим множества

$$D_i = A_1^{n_2} \times A_2^{n_3} \times \dots \times A_i^{n_{i+1}} \subset X^{n_1 n_2 + n_2 n_3 + \dots + n_i n_{i+1}}, \tag{18}$$

$$D_\infty = A_1^{n_2} \times A_2^{n_3} \times \dots \subset X^{\mathbb{N}}. \tag{19}$$

Очевидно, что любой сигнал из D_∞ имеет префиксы в каждом из D_i .

Лемма 4. Если $w \in D_\infty$, то $V(w) = W$.

Доказательство. Пусть $w \in D_\infty$ и w' – префикс w произвольной длины n . В силу определений множеств D_i и D_∞ этот префикс представляется в виде конкатенации

$$w' = xyzu,$$

в которой

$$x \in D_{i-1}, \quad y \in A_i^{n_{i+1}}, \quad z \in A_{i+1}^k \quad (k < n_{i+2}), \quad u \in X^l \quad (l < n_{i+1}),$$

а длины сигналов x, y, z, u соответственно равны

$$|x| = n_1 n_2 + \dots + n_{i-1} n_i, \quad |y| = n_i n_{i+1}, \quad |z| = n_{i+1} k, \quad |u| = l < n_{i+1}. \tag{20}$$

Поэтому эмпирическую меру $\delta_{w,n}$ можно записать следующим образом:

$$\delta_{w,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{T^i w} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{|x|-1} \delta_{T^i w} + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{|y|-1} \delta_{T^{|x|+i} w} + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{|z|-1} \delta_{T^{|xy|+i} w} + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{|u|-1} \delta_{T^{|xyz|+i} w},$$

откуда вытекает, что

$$\begin{aligned} \delta_{w,n} - \mu_i &= \frac{|x|}{n} (\delta_{w,|x|} - \mu_i) + \frac{|y|}{n} (\delta_{T^{|x|} w, |y|} - \mu_i) + \frac{|z|}{n} (\delta_{T^{|xy|} w, |z|} - \mu_{i+1}) + \\ &+ \frac{|z|}{n} (\mu_{i+1} - \mu_i) + \frac{|u|}{n} (\delta_{T^{|xyz|} w, |u|} - \mu_i) \end{aligned}$$

и, следовательно, выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \rho(\delta_{w,n}, \mu_i) &\leq \frac{|x|}{|y|} \rho(\delta_{w,|x|}, \mu_i) + \rho(\delta_{T^{|x|} w, |y|}, \mu_i) + \rho(\delta_{T^{|xy|} w, |z|}, \mu_{i+1}) + \\ &+ \rho(\mu_{i+1}, \mu_i) + \frac{|u|}{|y|} \rho(\delta_{T^{|xyz|} w, |u|}, \mu_i). \end{aligned} \tag{21}$$

Заметим, что в силу (15), (20) и (17) имеют место оценки

$$\rho(\delta_{T^{|x|} w, |y|}, \mu_i) < \varepsilon_i, \quad \rho(\delta_{T^{|xy|} w, |z|}, \mu_{i+1}) < \varepsilon_{i+1},$$

$$\frac{|u|}{|y|} \leq \frac{1}{n_i},$$

$$\frac{|x|}{|y|} = \frac{n_1 n_2 + \dots + n_{i-1} n_i}{n_i n_{i+1}} \leq \frac{(i-1) n_{i-1} n_i}{n_i n_{i+1}} \leq \frac{n_i}{n_{i+1}} \leq \frac{1}{i}, \tag{22}$$

и, кроме того, $\rho(\mu_{i+1}, \mu_i) \rightarrow 0$ (в соответствии с леммой 3). Поэтому все слагаемые в правой части (21), а вместе с ними и величина $\rho(\delta_{w,n}, \mu_i)$ (в которой i по построению монотонно зависит от n) стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Значит, последовательность $\delta_{w,n}$ имеет те же предельные точки, что и последовательность μ_i , а множество предельных точек последовательности μ_i по лемме 3 совпадает с множеством W . Лемма доказана.

Из леммы 4 вытекает включение $D_\infty \subset NB(W)$. Значит, бассейн $NB(W)$ непуст.

4. Нижняя оценка размерности узкого бассейна. Мы будем использовать модельное множество D_∞ , определённое выше с помощью последовательности мер $\mu_i \in W$, удовлетворяющих лемме 3, и формул (14)–(19).

Положим

$$C = \max_{j \in X} |\ln \theta(j)|. \tag{23}$$

Обозначим через $|Z_n(x)|$ диаметр цилиндра $Z_n(x)$ из (11) в метрике (1). Тогда

$$|Z_n(x)| = \prod_{i=1}^n \theta(x_i),$$

$$\ln |Z_n(x)| = \sum_{i=1}^n \ln \theta(x_i) = n \sum_{j \in X} \delta_{x,n}(j) \ln \theta(j), \tag{24}$$

$$\left| \ln |Z_n(x)| - n \sum_{j \in X} \mu(j) \ln \theta(j) \right| \leq n \sum_{j \in X} |\delta_{x,n}(j) - \mu(j)| \cdot \max_{j \in X} |\ln \theta(j)|. \tag{25}$$

Из (25), (23) и (16) следует, что для любого $x \in X^{\mathbb{N}}$ с префиксом из A_i

$$\left| \ln |Z_{n_i}(x)| - n_i \sum_{j \in X} \mu_i(j) \ln \theta(j) \right| \leq n_i \sum_{j \in X} |\delta_{x,n_i}(j) - \mu_i(j)| \cdot \max_{j \in X} |\ln \theta(j)| \leq n_i \varepsilon_i C. \tag{26}$$

Пусть ν_i – вероятностная мера на множестве A_i , для которой все элементы $x \in A_i$ имеют равные вероятности $\nu_i(x) = (\text{card } A_i)^{-1}$. Продолжим её нулём на $X^{n_i} \setminus A_i$. Тогда из (14) следует, что для всякого $x \in A_i$ справедливо неравенство

$$\ln \nu_i(x) < -n_i h(\mu_i) + n_i \varepsilon_i. \tag{27}$$

Затем определим на пространстве $X^{\mathbb{N}} = X^{n_1 n_2} \times X^{n_2 n_3} \times X^{n_3 n_4} \times \dots$ вероятностную меру $\nu = \nu_1^{n_2} \times \nu_2^{n_3} \times \nu_3^{n_4} \times \dots$. По построению $\nu(D_\infty) = 1$ и $\nu(X^{\mathbb{N}} \setminus D_\infty) = 0$.

Нетрудно видеть, что в пространстве сигналов $X^{\mathbb{N}}$ всякий шар $B(x, r)$, где $r < 1$, совпадает с цилиндром $Z_n(x)$, где n определяется из условий $|Z_n(x)| \leq r < |Z_{n-1}(x)|$. Поэтому величину $D_\nu(x)$ из (7) можно определять равносильной формулой

$$D_\nu(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \nu(Z_n(x))}{\ln |Z_n(x)|}.$$

Лемма 5. Для всех $w \in D_\infty$ справедлива оценка

$$D_\nu(w) \geq \sup_{\mu \in W} S(\mu, \theta). \tag{28}$$

Доказательство. Поскольку функция $S(\mu, \theta)$ полунепрерывна сверху по переменной μ , она достигает максимума на компакте W в некоторой точке $\mu^* \in W$.

В силу леммы 3 существует такое бесконечное подмножество $I \subset \mathbb{N}$, что для всех $i \in I$ выполняется неравенство $h(\mu_i) \geq h(\mu^*)$ и при этом $\mu_i \rightarrow \mu^*$ при $i \in I$.

Фиксируем $w \in D_\infty$ и индекс $i \in I$. У w есть префикс $w' \in D_i$. Он представляется в виде $w' = xy$, где $x \in D_{i-1}$ и $y \in A_i^{n_{i+1}}$. При этом справедлива оценка $|x|/|y| \leq 1/i$ как последняя из оценок (22).

Использував определение меры ν и неравенство (27), получим оценку

$$\ln \nu(Z_{|w'|}(w')) \leq \ln \nu_i^{n_{i+1}}(Z_{|y|}(y)) \leq n_{i+1}(-n_i h(\mu_i) + n_i \varepsilon_i) = -|y|h(\mu_i) + |y|\varepsilon_i. \tag{29}$$

Аналогично, из определения диаметра цилиндра и неравенства (26) получим

$$\ln |Z_{|w'|}(w')| = \ln |Z_{|x|}(x)| + \ln |Z_{|y|}(y)| \geq -|x|C + |y| \sum_{j \in X} \mu_i(j) \ln \theta(j) - |y|\varepsilon_i C. \tag{30}$$

Наконец, деление (29) на (30) с учётом последней из оценок в (22) даёт неравенство

$$\frac{\ln \nu(Z_{|w'|}(w'))}{\ln |Z_{|w'|}(w')|} \geq (-h(\mu^*) + \varepsilon_i) / \left(-\frac{C}{i} + \sum_{j \in X} \mu_i(j) \ln \theta(j) - \varepsilon_i C \right).$$

Его правая часть при возрастании $i \in I$ сходится к

$$-h(\mu^*) / \left(\sum_{j \in X} \mu^*(j) \ln \theta(j) \right) = S(\mu^*, \theta).$$

Тем самым лемма доказана.

Очевидно, что из леммы 5 и теоремы 3 вытекает оценка

$$\dim_P D_\infty \geq \sup_{\mu \in W} S(\mu, \theta),$$

а поскольку модельное множество D_∞ содержится в узком бассейне $NB(W)$,

$$\dim_P NB(W) \geq \sup_{\mu \in W} S(\mu, \theta). \tag{31}$$

5. Верхняя оценка размерности узкого бассейна. Сейчас для любого непустого подмножества $W \subset M_T(X^{\mathbb{N}})$ докажем, что

$$\dim_P NB(W) \leq \dim_P B(W) \leq \sup_{\mu \in W} S(\mu, \theta). \tag{32}$$

Тем самым будет доказана теорема 1, поскольку равенство (2) следует из (31), (32).

Пусть заданы мера $\mu \in M_T(X^{\mathbb{N}})$ и её окрестность $O(\mu) \subset M(X^{\mathbb{N}})$. Определим последовательность множеств

$$X^n(O(\mu)) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in X^n : \exists y \in Z_n(x) \ \delta_{y,n} \in O(\mu)\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{33}$$

В силу теоремы 4 для любой меры $\mu \in M_T(X^{\mathbb{N}})$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют такие слабая окрестность $O(\mu) \subset M(X^{\mathbb{N}})$ и число $N(\mu, \varepsilon)$, для которых выполняется оценка

$$\text{card } X^n(O(\mu)) < e^{n(h(\mu)+\varepsilon)} \quad \text{при всех } n \geq N(\mu, \varepsilon). \tag{34}$$

Положим

$$c = \min_{i \in X} |\ln \theta(i)|. \tag{35}$$

Фиксируем произвольное число s , удовлетворяющее условию

$$s > \sup_{\mu \in W} S(\mu, \theta),$$

и выберем такое малое $\varepsilon > 0$, при котором справедливо неравенство

$$\sup_{\mu \in W} S(\mu, \theta) < s - \frac{3\varepsilon}{c}. \quad (36)$$

Далее будем рассматривать меры μ , лежащие в замыкании \overline{W} множества W . Для каждой из них выберем такую малую окрестность $O(\mu)$, чтобы для неё выполнялось условие (34) и для всех мер $\nu \in O(\mu)$ было бы

$$h(\mu) / \left(- \sum_{i \in X} \nu(i) \ln \theta(i) \right) < h(\mu) / \left(- \sum_{i \in X} \mu(i) \ln \theta(i) \right) + \frac{\varepsilon}{c} = S(\mu, \theta) + \frac{\varepsilon}{c}. \quad (37)$$

Тогда из (35)–(37) вытекает, что

$$h(\mu) / \left(- \sum_{i \in X} \nu(i) \ln \theta(i) \right) < s - \frac{2\varepsilon}{c} \leq s + 2\varepsilon / \left(\sum_{i \in X} \nu(i) \ln \theta(i) \right),$$

и после умножения на отрицательный знаменатель получим

$$s \sum_{i \in X} \nu(i) \ln \theta(i) < -h(\mu) - 2\varepsilon \quad \text{для всех } \nu \in O(\mu). \quad (38)$$

Рассмотрим любой префикс $x \in X^n(O(\mu))$. По определению множества $X^n(O(\mu))$ существует такое $y \in Z_n(x)$, для которого $\delta_{y,n} \in O(\mu)$. Из (24) и (38) следует, что

$$s \ln |Z_n(x)| = s \ln |Z_n(y)| = sn \sum_{i \in X} \delta_{y,n}(i) \ln \theta(i) < -n(h(\mu) + 2\varepsilon),$$

откуда получается оценка

$$|Z_n(x)|^s < e^{-n(h(\mu)+2\varepsilon)}. \quad (39)$$

Таким образом, для каждой меры $\mu \in \overline{W}$ определена окрестность $O(\mu)$, для которой одновременно выполняются условия (34) и (39). Выберем конечное покрытие компакта \overline{W} окрестностями указанного вида. Обозначим их через $O(\mu_1), \dots, O(\mu_l)$.

Рассмотрим последовательность множеств

$$G_N = \{y \in B(W) : \delta_{y,n} \in O(\mu_1) \cup \dots \cup O(\mu_l) \text{ при всех } n \geq N\}.$$

Очевидно, что чем больше N , тем больше G_N . Из определения бассейна следует, что для всякого сигнала $y \in B(W)$ расстояние от $\delta_{y,n}$ до W стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, поэтому множества G_N покрывают бассейн $B(W)$.

Возьмём любые натуральные числа m, N , удовлетворяющие условиям

$$m \geq N \geq \max_{1 \leq j \leq l} N(\mu_j, \varepsilon),$$

где $N(\mu_j, \varepsilon)$ – константы из (34), отвечающие мерам μ_j . Рассмотрим произвольную упаковку множества G_N непересекающимися цилиндрами вида $Z_{n_i}(y_i)$, где $y_i \in G_N$ и $n_i \geq m$. Из определения G_N видно, что $\delta_{y_i, n_i} \in O(\mu_1) \cup \dots \cup O(\mu_l)$. При каждом $n \geq N(\mu_j, \varepsilon)$ число различных цилиндров $Z_n(x)$, для которых существует такое $y \in Z_n(x)$, что $\delta_{y,n} \in O(\mu_j)$, в силу (33) совпадает с числом элементов в множестве $X^n(O(\mu_j))$, а последнее в силу (34) не превосходит $e^{n(h(\mu_j)+\varepsilon)}$. Кроме того, для каждого такого цилиндра $Z_n(x)$ выполняется неравенство (39). Объединив эти оценки, получим

$$\begin{aligned} \sum_i |Z_{n_i}(y_i)|^s &\leq \sum_{n \geq m} \sum_{j=1}^l e^{n(h(\mu_j)+\varepsilon)} e^{-n(h(\mu_j)+2\varepsilon)} = \\ &= \sum_{n \geq m} \sum_{j=1}^l e^{-n\varepsilon} = \frac{le^{-m\varepsilon}}{1 - e^{-\varepsilon}} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (40)$$

Как уже отмечалось выше, всякий шар $B(y, r)$ в пространстве $X^{\mathbb{N}}$ совпадает с некоторым цилиндром $Z_n(y)$, где $|Z_n(y)| \leq r < |Z_{n-1}(y)|$. Поэтому всякая упаковка множества G_N шарами $B(y_i, r_i)$, где $y_i \in G_N$, на самом деле состоит из непересекающихся цилиндров вида $Z_{n_i}(y_i)$, причём

$$|Z_{n_i}(y_i)| \leq r_i < \frac{|Z_{n_i}(y_i)|}{\min_j \theta(j)}. \quad (41)$$

Далее вычислим величины $C^s(G_N)$ и $P^s(B(W))$ по формулам (5), (6). Из (40) и (41) вытекает, что $C^s(G_N) = 0$. Поскольку множества G_N покрывают $B(W)$, отсюда следует равенство $P^s(B(W)) = 0$. Значит, $\dim_P B(W) \leq s$, откуда в силу произвольности числа $s > \sup_{\mu \in W} S(\mu, \theta)$ и включения $NB(W) \subset B(W)$ получаем заявленные в начале пункта неравенства

$$\dim_P NB(W) \leq \dim_P B(W) \leq \sup_{\mu \in W} S(\mu, \theta). \quad (42)$$

Оценки (31) и (42) доказывают теорему 1.

Осталось доказать теорему 2. Очевидно, что для каждого одноточечного множества $W = \{\mu\}$ бассейн $B(\mu)$ совпадает с узким бассейном $NB(\mu)$. В силу теоремы 1 для них выполняются равенства

$$\dim_P B(\mu) = \dim_P NB(\mu) = S(\mu, \theta).$$

Поэтому для любого непустого множества $W \subset M_T(X^{\mathbb{N}})$ имеем

$$\dim_P B(W) \geq \sup_{\mu \in W} \dim_P B(\mu) = \sup_{\mu \in W} S(\mu, \theta). \quad (43)$$

Объединив (42) и (43), получим равенство (3).

Наконец, формула (4) является следствием из очевидных включений

$$NB(M_T(X^{\mathbb{N}})) \subset WB(W) \subset X^{\mathbb{N}} = B(M_T(X^{\mathbb{N}}))$$

и вытекающих из (2), (3) равенств

$$\dim_P NB(M_T(X^{\mathbb{N}})) = \dim_P B(M_T(X^{\mathbb{N}})) = \sup_{\mu \in M_T(X^{\mathbb{N}})} S(\mu, \theta).$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антоневич А.Б., Радыно Я.В.* Функциональный анализ и интегральные уравнения. 2-е изд. Минск, 2006.
2. *Биллингсли П.* Эргодическая теория и информация. М., 1969.
3. *Рюэль Д.* Термодинамический формализм. Математические структуры классической равновесной статистической механики. М.; Ижевск, 2002.
4. *Bakhtin V.I., Sadok B.* Packing dimensions of basins generated by distributions on a finite alphabet // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2021. № 2. С. 6–16.
5. *Falconer K.* Techniques in Fractal Geometry. Chichester; New York, 1997.
6. *Бахтин В.И., Садок Б.М.* Хаусдорфовы размерности узких бассейнов в пространстве последовательностей // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2019. Т. 27. № 1–2. С. 3–12.
7. *Бахтин В.И.* Информационный смысл энтропии неэргодических мер // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 304–312.
8. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1981.

Белорусский государственный университет,
г. Минск,
Люблинский католический университет
Иоанна Павла II, Польша

Поступила в редакцию 20.03.2022 г.
После доработки 20.03.2022 г.
Принята к публикации 25.05.2022 г.

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.928.2

**СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННАЯ ЗАДАЧА КОШИ
ПРИ НАЛИЧИИ “СЛАБОЙ” ТОЧКИ ПОВОРОТА
ПЕРВОГО ПОРЯДКА У ПРЕДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА
С КРАТНЫМ СПЕКТРОМ**

© 2022 г. А. Г. Елисеев, П. В. Кириченко

Методом регуляризации С.А. Ломова построено асимптотическое решение линейной задачи Коши при наличии “слабой” точки поворота у предельного оператора. Записаны в явном виде основные сингулярности данной задачи. Приведены оценки по ε , характеризующие поведение сингулярностей при $\varepsilon \rightarrow 0$. Доказана асимптотическая сходимость регуляризованных рядов. Результаты работы проиллюстрированы на примере.

DOI: 10.31857/S0374064122060024, EDN: CCGRFM

*Светлой памяти моего дорогого учителя
Сергея Александровича Ломова (12.10.1922–12.06.1993)
в связи со 100-летием со дня его рождения
посвящаю эту работу
А. Г. Елисеев*

Введение. Сингулярно возмущённые дифференциальные уравнения с нестабильным спектром предельного оператора всегда вызывали интерес как у физиков, так и у математиков. Особенно трудными являются задачи с точечной нестабильностью, а именно наличием точек поворота. Первые задачи с точками поворота возникли, по-видимому, в квантовой механике. Первым методом их решения был метод ВКБ (Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна) – самый известный пример квазиклассического вычисления в квантовой механике, в котором волновая функция представлена как показательная функция, квазиклассически расширенная, а затем амплитуда или фаза медленно изменяются. Он назван в честь физиков Г. Вентцеля, Х.А. Крамерса и Л. Бриллюэна, которые развили его в 1926 г. независимо друг от друга. В 1923 г. математик Гарольд Джеффри разработал общий метод приближённого решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка, который включает и решение уравнения Шрёдингера. Методы решения задач со спектральными особенностями развиваются и в настоящее время. Отметим школу В.П. Маслова, школу А.Б. Васильевой–В.Ф. Бутузова–Н.Н. Нефедова и школу С.А. Ломова. Обзор всех методов не является целью данной статьи. С точки зрения метода регуляризации точки поворота делятся на три группы.

1. Простая точка поворота – собственные значения изолированы друг от друга, и одно собственное значение в отдельных точках t обращается в нуль.

2. Слабая точка поворота – хотя бы пара собственных значений пересекаются в отдельных точках t , но при этом предельный оператор сохраняет диагональную структуру вплоть до точек пересечения. Базис из собственных векторов остаётся гладким по t .

3. Сильная точка поворота – хотя бы пара собственных значений пересекаются в отдельных точках t , но при этом предельный оператор меняет диагональную структуру на жорданову в точках пересечения. Базис из собственных векторов в точках пересечения теряет гладкость по t .

Классические точки поворота относятся к третьему типу.

В данной работе методом регуляризации С.А. Ломова (см. монографию [1, гл. 1, с. 38–89]) строится регуляризованное асимптотическое решение сингулярно возмущённой неоднородной задачи Коши на всём отрезке $[0, T]$ при наличии спектральной особенности в виде

“слабой” точки поворота у предельного оператора. Отметим статью [2], посвящённую построению асимптотики решений сингулярно возмущённых задач Коши для интегродифференциальных уравнений при наличии спектральных особенностей у предельного оператора. Следует отметить также работу [3], в которой рассмотрены задачи в случае пересечения корней вырожденного уравнения (этот случай в указанной статье называется случаем обмена устойчивостями). Исследование данной проблемы основано на асимптотическом методе дифференциальных неравенств. Точка $\varepsilon = 0$ для сингулярно возмущённой задачи Коши является особой в том смысле, что классические теоремы существования решения задачи Коши не имеют места в этой точке. Поэтому в решении сингулярно возмущённых задач возникают существенно особые сингулярности, описывающие нерегулярную зависимость решения от ε . Описание этих сингулярностей и представляет основную проблему метода регуляризации. При выполнении условий стабильности спектра существенно особые сингулярности описываются с помощью экспонент вида $\exp(\varphi(t)/\varepsilon)$, где $\varphi(t)$ – гладкая, в общем случае, комплексная функция действительного переменного t . Для решений линейных однородных уравнений такие сингулярности были выделены ещё Лиувиллем (см. [4]).

Если же условия стабильности нарушены, например, точки спектра пересекаются в одной или нескольких точках t , то описание сложнее. В работе [5] приведены сингулярности в случае “простой” точки поворота, когда отдельная точка спектра оператора $A(t)$ имеет вид

$$\lambda(t) = t^{k_0}(t - t_1)^{k_1} \dots (t - t_m)^{k_m} a(t), \quad a(t) \neq 0, \quad k_0 + k_1 + \dots + k_m = n.$$

В статье [6] рассмотрена рациональная “простая” точка поворота, а иррациональная “простая” точка поворота изучена в работе [7]. Настоящая работа развивает идеи публикации [8], в которой рассматривается самый элементарный случай спектральной особенности в виде “слабой” точки поворота.

Существенно особые сингулярности с математической точки зрения – это специальные функции, описывающие нерегулярную зависимость решения от ε при $\varepsilon \rightarrow 0$, а с точки зрения гидродинамики – функции пограничного слоя, порождаемого спектральной особенностью точки $\lambda(t)$.

1. Постановка задачи. Описание сингулярностей. Рассмотрим задачу Коши

$$\varepsilon \dot{u} = A(t)u + h(t), \quad u(0, \varepsilon) = u^0, \quad (1)$$

где выполнены следующие условия:

- 1) $h(t) \in C^\infty([0, T], R^n)$;
- 2) $A(t) \in C^\infty([0, T], \mathcal{L}(R^n, R^n))$;
- 3) для собственных значений предельного оператора $A(t)$:
 - а) для всех $t \in (0, T]$ $\lambda_1(t) \neq \lambda_2(t)$, $\lambda_i(t) \neq 0$, $i = \overline{1, 2}$;
 - б) условие “слабой” точки поворота первого порядка при $t = 0$:

$$\lambda_2(t) - \lambda_1(t) = ta(t), \quad a(t) \neq 0;$$

в) геометрическая кратность собственных значений равна алгебраической для всех $t \in [0, T]$;

4) $\operatorname{Re} \lambda_i(t) \leq 0$, $i = \overline{1, 2}$, для $t \in [0, T]$;

5) $A(t) = \lambda_1(t)P_1(t) + \lambda_2(t)P_2(t)$, $\dim \operatorname{Im} P_1(t) = m$, $\dim \operatorname{Im} P_2(t) = k$, $m + k = n$, здесь $\dim \operatorname{Im} P_i(t)$, $i = \overline{1, 2}$, – размерность образов проектирующих операторов на собственные подпространства.

В рассматриваемой задаче (1) характер особенности сводится к наличию “слабой” точки поворота (условие 3), существенно особые сингулярности в этом случае можно найти из решения следующей задачи Коши:

$$\varepsilon \dot{J}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) \end{pmatrix} J + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} J, \quad J(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Решив (2) методом последовательных приближений, мы приходим к рядам для функций $J(t)$, членами которых являются “ k -моментные” интегралы

$$\sigma_{1,k} = e^{\varphi_1(t)/\varepsilon} \underbrace{\int_0^t e^{\Delta\varphi(s_1)/\varepsilon} \int_0^{s_1} e^{-\Delta\varphi(s_2)/\varepsilon} \dots \int_0^{s_{k-1}} e^{(-1)^{k+1} \Delta\varphi(s_k)/\varepsilon} ds_k \dots ds_1}_{k \text{ интегралов}},$$

$$\sigma_{2,k} = e^{\varphi_2(t)/\varepsilon} \underbrace{\int_0^t e^{-\Delta\varphi(s_1)/\varepsilon} \int_0^{s_1} e^{\Delta\varphi(s_2)/\varepsilon} \dots \int_0^{s_{k-1}} e^{(-1)^k \Delta\varphi(s_k)/\varepsilon} ds_k \dots ds_1}_{k \text{ интегралов}},$$

где $\varphi_i(t) = \int_0^t \lambda_i(s) ds$, $i = \overline{1,2}$, а $\Delta\varphi(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$.

Несложно установить, что $\sigma_{i,k}$ удовлетворяют условиям

$$\varepsilon \dot{\sigma}_{1,k} = \lambda_1(t) \sigma_{1,k} + \varepsilon \sigma_{2,k-1}, \quad \varepsilon \dot{\sigma}_{2,k} = \lambda_2(t) \sigma_{2,k} + \varepsilon \sigma_{1,k-1},$$

$$\sigma_{1,k}(0) = 0, \quad \sigma_{2,k}(0) = 0, \quad k \geq 1. \tag{3}$$

Именно эти интегралы представляют собой многообразие функций, необходимое для регуляризации задачи (1). Вместо искомого решения $u(t, \varepsilon)$ задачи (1) будем изучать вектор-функцию $z(t, \sigma, \varepsilon)$ такую, что её сужение совпадает с искомым решением:

$$z(t, \sigma, \varepsilon)|_{\sigma=\sigma_{s,k}(t,\varepsilon)} = u(t, \varepsilon), \quad s = 1, 2, \quad k = \overline{0, \infty}.$$

С учётом (1), (3) и формулы сложного дифференцирования

$$\frac{dz}{dt} = \dot{z} + \sum_{s=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_s}{\varepsilon} \sigma_{s,k}(t, \varepsilon) + \sigma_{3-s,k-1}(t, \varepsilon) \right) \frac{\partial z}{\partial \sigma_{s,k}}$$

можно записать задачу для расширенной функции $z(t, \sigma, \varepsilon)$ следующим образом:

$$A(t)z - \sum_{s=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_s \sigma_{s,k} - \varepsilon \sigma_{3-s,k-1}) \frac{\partial z}{\partial \sigma_{s,k}} = \varepsilon \dot{z} - h(t), \quad z(0, 0, \varepsilon) = u^0. \tag{4}$$

Будем полагать, что если слагаемое содержит в индексе значение $k - 1 < 0$, то это слагаемое равно нулю.

Для решения задачи (4) введём пространство безрезонансных решений

$$\hat{E} = \bigoplus_{s=1}^2 \bigoplus_{k=0}^{\infty} E \otimes \{\sigma_{s,k}\} \oplus E.$$

Элемент $\hat{z} \in \hat{E}$ имеет вид

$$\hat{z} = \sum_{s=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} z_{s,k} \otimes \{\sigma_{s,k}\} + w,$$

где $z_{s,k}, w \in E$. Здесь \bigoplus – символ прямой суммы линейных пространств, \otimes – символ тензорного произведения.

Введём операторы, порождённые задачей (4):

$$\mathcal{L}_0 = \bigoplus_{s=1}^2 \bigoplus_{k=0}^{\infty} (A(t) - \lambda_s(t)) \otimes \left\{ \sigma_{s,k} \frac{\partial}{\partial \sigma_{s,k}} \right\} \oplus A(t),$$

$$\mathcal{L}_1 = \bigoplus_{s=1}^2 \bigoplus_{k=0}^{\infty} I \otimes \left\{ \sigma_{3-s,k} \frac{\partial}{\partial \sigma_{s,k}} \right\}, \quad I - \text{тождественный оператор,}$$

$$Gz = z(0, 0, \varepsilon).$$

Действия операторов запишутся в виде

$$\mathcal{L}_0 \hat{z}(t) = \sum_{s=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} (A(t) - \lambda_s(t)) z_{s,k}(t) \otimes \{\sigma_{s,k}\} + A(t)w(t),$$

$$\mathcal{L}_1 \hat{z}(t) = \sum_{s=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} z_{3-s,k+1}(t) \otimes \{\sigma_{s,k}\},$$

$$G\hat{z} = z(0, 0, \varepsilon). \quad (5)$$

Кроме того, введём спектральные проекторы

$$\hat{P}_{k,s,p}(t) = P_k(t) \otimes \left\{ \sigma_{s,p} \frac{\partial}{\partial \sigma_{s,p}} \right\}, \quad \hat{\pi}_{k,s,p}(t) = P_k(t) \langle \delta(t), P_k(t) \cdot \rangle \otimes \left\{ \sigma_{s,p} \frac{\partial}{\partial \sigma_{s,p}} \right\},$$

$$\hat{P}_0(t) = \sum_{s=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} \hat{P}_{s,s,p}(t), \quad \hat{\pi}_0(t) = \sum_{s=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} \hat{\pi}_{3-s,s,p}(t). \quad (6)$$

Здесь в формуле определения проектора $\hat{\pi}_{k,s,p}(t)$ вместо точки ставится элемент, на который действует проектор, а $\hat{P}_0(t)$ – оператор, проектирующий на ядро \mathcal{L}_0 .

Действие проекторов на элемент $\hat{z} \in \hat{E}$ запишется в виде

- а) $\hat{P}_{k,s,p}(t)\hat{z}(t) = P_k(t)z_{s,p}(t) \otimes \sigma_{s,p}$,
- б) $\hat{P}_{k,s,p}(t)\mathcal{L}_0\hat{z}(t) = (\lambda_k(t) - \lambda_s(t))P_k(t)z_{s,p}(t) \otimes \sigma_{s,p}$,
- в) $\hat{\pi}_{k,s,p}(t)\hat{z}(t) = P_k(0)z_{s,p}(0) \otimes \sigma_{s,p}$.

Используя операторы (5), (6), можно записать задачу (4) в пространстве \hat{E} следующим образом:

$$\mathcal{L}_0 \hat{z} = \varepsilon \mathcal{L}_1 \hat{z} + \varepsilon \dot{\hat{z}} - h(t), \quad G\hat{z} = u^0. \quad (7)$$

Задача (7) является регулярной по ε , поэтому её решение будем определять в виде регулярного ряда по степеням ε , т.е. в виде

$$\hat{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \hat{z}_k. \quad (8)$$

Подставив ряд (8) в задачу (7), получим следующую серию итерационных задач:

$$\mathcal{L}_0 \hat{z}_0 = -h(t), \quad G\hat{z}_0 = u^0,$$

$$\mathcal{L}_0 \hat{z}_k = \mathcal{L}_1 \hat{z}_{k-1} + \dot{\hat{z}}_{k-1}, \quad k = \overline{1, \infty},$$

$$G\hat{z}_k = 0. \quad (9)$$

2. Разрешимость итерационных задач. Для того чтобы решить итерационные задачи (9), сформулируем теорему разрешимости уравнений вида $\mathcal{L}_0(t)\hat{z} = \hat{h}(t)$ в пространстве \hat{E} . Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть в пространстве \hat{E} имеется уравнение

$$\mathcal{L}_0 \hat{z} = \hat{h}(t) \quad (10)$$

и выполнены условия 1)–5) задачи (1). Уравнение (10) разрешимо в \hat{E} тогда и только тогда, когда справедливы условия

- 1) $\hat{P}_0(t)\hat{h}(t) = 0$ для всех $t \in [0, T]$;
- 2) $\hat{\pi}_0(t)\hat{h}(t) = 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение (10) разрешимо. Подействуем на него оператором $\hat{P}_0(t)$. Так как $\hat{P}_0(t)\mathcal{L}_0(t) = 0$, то и $\hat{P}_0(t)\hat{h}(t) = 0$. Отсюда следует, что

$$\hat{h}(t) = \sum_{s=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} P_{3-s}(t)h_{s,p}(t) \otimes \{\sigma_{s,p}\} + h_0(t).$$

Подействуем оператором $\hat{\pi}_0$. Тогда будем иметь

$$\hat{\pi}_0(t)\mathcal{L}_0\hat{z} = \hat{\pi}_0(t)\hat{h}(t).$$

Так как

$$\hat{\pi}_0(t)\mathcal{L}_0\hat{z} = \sum_{s=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} (\lambda_{3-s}(0) - \lambda_s(0))(P_{3-s}(0)z_{s,p}(0)) \otimes \{\sigma_{s,p}\} = 0,$$

то

$$\hat{\pi}_0(t)\hat{h}(t) = \sum_{s=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} (P_{3-s}(0)h_{s,p}(0)) \otimes \{\sigma_{s,p}\} = 0.$$

Достаточность очевидна.

В результате получим решение

$$\hat{z}(t) = \hat{P}_0(t)\hat{z}(t) + \sum_{s=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} (A(t) - \lambda_s(t))^{-1} P_{3-s}(t)h_{s,p}(t) \otimes \{\sigma_{s,p}\} + A^{-1}(t)h_0(t).$$

Здесь $\hat{P}_0(t)\hat{z}(t)$ – произвольный вектор из ядра оператора $\mathcal{L}_0(t)$. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть дана задача в пространстве \hat{E}

$$\mathcal{L}_0\hat{z} = 0, \quad G\hat{z} = 0 \tag{11}$$

и выполнены условия теоремы 1. Тогда при выполнении равенств

$$\hat{P}_0(t)(\mathcal{L}_1\hat{z} + \dot{\hat{z}}) = 0, \quad \hat{\pi}_0(t)(\mathcal{L}_1\hat{z} + \dot{\hat{z}}) = 0$$

решение задачи (11) единственно и равно тождественно нулю.

Доказательство. Решение уравнения системы (11) запишется в виде

$$\hat{z}_0 = \sum_{s=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} P_s(t)z_{s,p}(t) \otimes \{\sigma_{s,p}\}. \tag{12}$$

Вычислим

$$\mathcal{L}_1\hat{z}_0 + \dot{\hat{z}}_0 = \sum_{s=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} \left[\frac{d}{dt}(P_s(t)z_{s,p}(t)) + P_{3-s}(t)z_{3-s,p+1} \right] \otimes \sigma_{s,p},$$

здесь $P_s(t)z_{s,p}(t)$ – произвольный собственный вектор оператора $A(t)$. Подставив функцию (12) в начальное условие, с учётом $\sigma_{s,p}(0, \varepsilon) = 0$, $p \geq 1$, будем иметь

$$P_s(0)z_{s,0}(0) = 0, \quad s = 1, 2.$$

Так как $\hat{P}_0(t)(\mathcal{L}_1\hat{z}(t) + \dot{\hat{z}}(t)) = 0$, то отсюда получим серию задач Коши

$$\begin{aligned}
 p = 0 : & \begin{cases} \frac{d}{dt}(P_s(t)z_{s,0}(t)) = \dot{P}_s(t)(P_s(t)z_{s,0}(t)), \\ P_s(0)z_{s,0}(0) = 0, \quad s = 1, 2, \end{cases} \\
 p \geq 1 : & \begin{cases} \frac{d}{dt}(P_s(t)z_{s,p}(t)) = \dot{P}_s(t)(P_s(t)z_{s,p}(t)), \\ P_s(0)z_{s,p}(0) = ? \quad (\text{на данный момент не определено}). \end{cases} \end{aligned} \tag{13}$$

Для решения возникающих задач Коши введём разрешающие операторы

$$\frac{d}{dt}U_s(t, \tau) = \dot{P}_s(t)U_s(t, \tau), \quad U_s(t, t) = I, \quad s = 1, 2.$$

При $p = 0$ решение будет равно $P_s(t)z_{s,0}(t) = U_s(t, 0)P_s(0)z_{s,0}(0) \equiv 0$. Чтобы определить начальные условия для задач Коши (13) при $p \geq 1$, вычислим $\hat{\pi}_0(t)(\mathcal{L}_1\hat{z} + \dot{\hat{z}}) = 0$. В результате будем иметь

$$P_s(0)\left(\frac{d}{dt}\right)(P_s(t)z_{s,p+1}(t))|_{t=0} = P_s(0)\left(\frac{d}{dt}\right)(\dot{P}_s(t)P_{3-s}(t)z_{3-s,p}(t))|_{t=0}, \quad p \geq 0. \tag{14}$$

Из системы (14) получим начальные условия для остальных задач Коши:

$$\begin{aligned}
 p = 0, \quad s = 1, 2, \quad P_s(0)z_{s,1}(0) &= \dot{P}_s(0)P_{3-s}(0)z_{3-s,0}(0) = 0, \\
 p = 1, \quad s = 1, 2, \quad P_s(t)z_{s,1}(t) &= U_s(t, 0)P_s(0)z_{s,1}(0) \equiv 0. \end{aligned}$$

Рассмотрев случай $p = 1$ (напомним, что $p = 1$ означает порядок кратных сингулярных интегралов), переходим к случаю $p = 2$. Так как начальные условия при p выражаются через начальные условия при $p - 1$, то тем самым по индукции доказываем, что начальные условия равны нулю для любых p , а отсюда вытекает $P_s(t)z_{s,p}(t) = U_s(t, 0)P_s(0)z_{s,p}(0) \equiv 0$.

Следовательно, решение задачи (11) равно тождественно нулю. Теорема доказана.

3. Построение формального асимптотического решения. Применим теоремы 1, 2 для решения итерационных задач (9). Запишем задачу на итерационном шаге ε^0 :

$$\mathcal{L}_0\hat{z}_0 = -h(t), \quad G\hat{z}_0 = u^0, \tag{15}$$

или покомпонентно

$$(A(t) - \lambda_s(t))z_{s,p}^0(t) = 0, \quad A(t)w_0(t) = -h(t), \quad z_{1,0}^0(0) + z_{2,0}^0(0) + w_0(0) = u^0,$$

$$z_{s,p}^0(0), \quad p \geq 1, \quad s = 1, 2 \quad (\text{определяются в процессе решения итерационных задач}).$$

Решение (15) будет иметь вид

$$\hat{z}_0 = \sum_{s=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} P_s(t)z_{s,p}^0(t) \otimes \{\sigma_{s,p}\} - A^{-1}(t)h(t), \tag{16}$$

где $P_s(t)z_{s,p}^0(t)$ – произвольный собственный вектор оператора $A(t)$. Подставив решение (16) в начальное условие и с учётом равенства $\sigma_{s,p}(0, \varepsilon) = 0$ при $p \geq 1$, получим $P_1(0)z_{1,0}^0(0) + P_2(0)z_{2,0}^0(0) - A^{-1}(0)h(0) = u^0$, откуда следует

$$P_s(0)z_{s,0}^0(0) = P_s(0)u^0 + \frac{P_s(0)h(0)}{\lambda_s(0)}, \quad s = 1, 2.$$

Начальные условия для случая $P_s(0)z_{s,p}^0(0)$, $p \geq 1$, определяются из условий разрешимости итерационной системы на первом итерационном шаге. Таким образом, на нулевом итерационном шаге получили

$$\hat{z}_0 = \sum_{s=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} P_s(t)z_{s,p}^0(t) \otimes \{\sigma_{s,p}\} - A^{-1}(t)h(t),$$

$$P_s(0)z_{s,0}^0(0) = P_s(0)u^0 + \frac{P_s(0)h(0)}{\lambda_s(0)}, \quad s = 1, 2. \tag{17}$$

Задача на первом итерационном шаге ε

$$\mathcal{L}_0 \hat{z}_1 = \dot{\hat{z}}_0 + \mathcal{L}_1 \hat{z}_0, \quad G \hat{z}_1 = 0 \tag{18}$$

разрешима в пространстве \hat{E} , если правая часть уравнения в (18) удовлетворяет условиям теоремы 1. Предварительно вычислим

$$\mathcal{L}_1 \hat{z}_0 + \dot{\hat{z}}_0 = \sum_{s=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dt}(P_s(t)z_{s,p}^0(t)) + z_{3-s,p+1}^0(t) \right) \otimes \sigma_{s,p} - \frac{d}{dt}A^{-1}(t)h(t). \tag{19}$$

Расписав задачу (18) на первом итерационном шаге по компонентам и с учётом (19), получим серию задач:

$$(A(t) - \lambda_s(t))z_{s,p}^1(t) = \frac{d}{dt}(P_s(t)z_{s,p}^0(t)) + P_{3-s}(t)z_{3-s,p+1}^0(t),$$

$$z_{1,0}^1(0) + z_{2,0}^1(0) = \left(\left(A^{-1}(t) \frac{d}{dt} \right)^2 \int_0^t h(s) ds \right) \Big|_{t=0},$$

$$z_{s,p}^1(0), \quad p \geq 1, \quad s = 1, 2 \quad (\text{определяются в процессе решения итерационных задач}). \tag{20}$$

Из условий разрешимости (20) с учётом (17) получим серию задач Коши:

$$p = 0 : \begin{cases} \frac{d}{dt}(P_s(t)z_{s,0}^0(t)) = \dot{P}_s(t)(P_s(t)z_{s,0}^0(t)), \\ P_s(0)z_{s,0}^0(0) = P_s(0)u^0 + \frac{P_s(0)h(0)}{\lambda_s(0)}, \quad s = 1, 2, \end{cases}$$

$$p \geq 1 : \begin{cases} \frac{d}{dt}(P_s(t)z_{s,p}^0(t)) = \dot{P}_s(t)(P_s(t)z_{s,p}^0(t)), \\ P_s(0)z_{s,p}^0(0) = ? \quad (\text{на данный момент не определено}). \end{cases} \tag{21}$$

Для того чтобы определить начальные условия для задач Коши (21) при $p \geq 1$, вычислим $\hat{\pi}_0(t)(\mathcal{L}_1 \hat{z}_0 + \dot{\hat{z}}_0) = 0$, в результате чего получим

$$P_s(0)z_{s,p+1}^0(0) = P_s(0) \left(\frac{d}{dt} \right) (\dot{P}_s(t)P_{3-s}(t)z_{3-s,p}^0|_{t=0}). \tag{22}$$

Так как начальные условия при $p + 1$ выражаются через начальные условия при p , то тем самым по индукции доказываем, что начальные условия определены для любых p .

После определения начальных условий из системы (22) получаем решения системы (21):

$$P_s(t)z_{s,0}^0(t) = U_s(t, 0) \left(P_s(0)u^0 + \frac{P_s(0)h(0)}{\lambda_s(0)} \right),$$

$$P_s(t)z_{s,p}^0(t) = U_s(t, 0)P_s(0)z_{s,p}^0(0), \quad s = 1, 2, \quad p = \overline{1, \infty}.$$

Таким образом, главный член асимптотики решения после сужения запишется в виде

$$u_{\text{гл}}(t, \varepsilon) = \sum_{s=1}^2 U_s(t, 0) \left(P_s(0)u^0 + \frac{P_s(0)h(0)}{\lambda_s(0)} \right) e^{\varphi_s(t)/\varepsilon} + \sum_{s=1}^2 \sum_{p=1}^{\infty} U_s(t, 0) P_s(0) z_{s,p}^0(0) \sigma_{s,p}(t, \varepsilon) - A^{-1}(t)h(t).$$

Записанное покомпонентно решение системы (21) на первом итерационном шаге имеет вид

$$z_{s,p}^1(t) = P_s(t)z_{s,p}^1(t) + (A(t) - \lambda_s(t))^{-1} \left(P_{3-s}(t) \frac{d}{dt} (P_s(t)z_{s,p}^0(t)) + P_{3-s}(t)z_{3-s,p+1}^0(t) \right) - \left(A^{-1}(t) \frac{d}{dt} \right)^2 \int_0^t h(s) ds, \\ P_s(0)z_{s,0}^1(0) = P_s(0) \left(\left(A^{-1}(t) \frac{d}{dt} \right)^2 \int_0^t h(s) ds \right) \Big|_{t=0}, \quad s = 1, 2.$$

Собственные векторы $P_s(t)z_{s,p}^1(t)$ и оставшиеся начальные условия находятся на втором итерационном шаге. По данной схеме находятся все слагаемые решения задачи (9).

4. Оценка остаточного члена. Пусть члены ряда (8) в результате решения итерационных задач определены для $0 \leq q \leq n + 1, 0 \leq p \leq r$, здесь q – итерационный шаг по ε , а p – порядки сингулярных интегралов. Запишем соотношение для остатка $R_{n,r}(t, \varepsilon)$. Для этого запишем ряд (8) в виде

$$\hat{z}(t, \varepsilon) = \sum_{q=0}^n \varepsilon^q \sum_{s=1}^2 \sum_{p=0}^r z_{s,p}^q(t) \sigma_{s,p}(t, \varepsilon) + \sum_{q=0}^n \varepsilon^q w_q(t) + \varepsilon^{n+1} R_{n,r}(t, \varepsilon). \tag{23}$$

Подставив ряд (23) в (1) и с учётом итерационных задач, получим задачу для остаточного члена $R_{n,r}(t, \varepsilon)$:

$$\varepsilon \dot{R}_{n,r}(t, \varepsilon) - A(t)R_{n,r}(t, \varepsilon) = -H(t, \varepsilon), \quad R_{n,r}(0, \varepsilon) = 0, \tag{24}$$

где

$$H(t, \varepsilon) = \sum_{s=1}^2 \left[\sum_{p=0}^{r-1} (\dot{z}_{s,p}^n(t) + z_{3-s,p+1}^n(t)) \sigma_{s,p}(t, \varepsilon) + \dot{z}_{s,r}^n \sigma_{s,r}(t, \varepsilon) \right] + \dot{w}_n(t). \tag{25}$$

Как следует из условий 5) на спектр в задаче (1) и оценок интегралов $\sigma_{s,p}(t, \varepsilon)$ (см. приложение), правая часть (25) имеет оценку

$$\|H(t, \varepsilon)\|_{C[0,T]} \leq C \quad \text{для всех } (t, \varepsilon) \in [0, T] \times (0, \varepsilon_0].$$

Решение (24) запишем в виде

$$R_{k,m} = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t U_\varepsilon(t, s) H(s, \varepsilon) ds,$$

где $U_\varepsilon(t, s)$ – разрешающий оператор, являющийся решением следующей задачи Коши:

$$\varepsilon \dot{U}_\varepsilon(t, s) = A(t)U_\varepsilon(t, s), \quad U_\varepsilon(t, s)|_{s=t} = I.$$

Из условий 5) на спектр в задаче (1) следует, что $U_\varepsilon(t, s)$ ограничен на $[0, T] \times [0, t]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, т.е. выполняется оценка

$$\|U_\varepsilon(t, s)\|_{C[0, T]} \leq C.$$

Следовательно, из соотношения

$$\begin{aligned} R_{k,m} &= -U_\varepsilon(t, s)A^{-1}(s)H(s, \varepsilon)|_0^t + \int_0^t U_\varepsilon(t, s) \frac{d}{ds} A^{-1}(s)H(s, \varepsilon) ds = \\ &= -A^{-1}(t)H(t, \varepsilon) + U_\varepsilon(t, 0)A^{-1}(0)H(0, \varepsilon) + \int_0^t U_\varepsilon(t, s) \frac{d}{ds} A^{-1}(s)H(s, \varepsilon) ds \end{aligned}$$

получим

$$\|R_{n,r}\|_{C[0, T]} \leq C.$$

Из этих двух оценок следует

Теорема 3 (об оценке остатка, асимптотическая сходимость). Пусть дана задача Коши (1) и выполнены условия 1)–5). Тогда справедлива оценка

$$\left\| u(t, \varepsilon) - \sum_{q=0}^n \varepsilon^q \sum_{s=1}^2 \sum_{p=0}^r z_{s,p}^q(t) \sigma_{s,p}(t, \varepsilon) + \sum_{q=0}^n \varepsilon^q w_q(t) \right\|_{C[0, T]} \leq C\varepsilon^{n+1},$$

где $C \geq 0$ – константа, не зависящая от ε , а функции $z_{s,p}^q(t)$ и $w_q(t)$ получены из решения итерационных задач при значениях $0 \leq q \leq n$, $0 \leq p \leq r$.

Теорема 4 (о предельном переходе). Пусть дана задача (1) и выполнены условия 1)–5). Тогда:

а) если $\operatorname{Re} \lambda_i \leq -\delta < 0$, то $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \varepsilon) = -A^{-1}(t)h(t)$, $t \in [\delta_0, T]$, где $\delta_0 > 0$ – сколь угодно малое значение;

б) если $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$, то для всех $\varphi(t) \in C^\infty[0, T]$ справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \left(u(t, \varepsilon) + A^{-1}(t)h(t) \right) \varphi(t) dt = 0.$$

Доказательство. а) Утверждение этого пункта непосредственно следует из оценок интегралов $\sigma_{s,p}(t, \varepsilon)$ в лемме из Приложения.

б) В этом случае $\sigma_{s,p}(t, \varepsilon)$ являются быстро осциллирующими функциями и доказательство предельного перехода в слабом смысле следует из леммы Римана–Лебега.

5. Приложение. Рассмотрим систему

$$\varepsilon \dot{J}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) \end{pmatrix} J(t) + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} J(t), \quad J(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

где $J(t) = \begin{pmatrix} J_1(t) \\ J_2(t) \end{pmatrix}$ – вектор-функция. Система (26) в общем случае в явном виде не решается.

Найдём решение (26) методом последовательных приближений.

Лемма. Решение (26) представляется в виде равномерно сходящегося ряда на $[0, T] \times (0, \varepsilon_0]$, которое допускает следующую оценку:

а) если $\operatorname{Re} \lambda_i \leq -\delta < 0$, то $\|J\|_{C[0, T]} \leq e^{-\delta t/\varepsilon} C$;

б) если $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$, то $\|J\|_{C[0, T]} \leq C$,

где $C > 0$ – константа, не зависящая от ε .

Доказательство. Решив (26) методом последовательных приближений, получим

$$J(t) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right) + \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right) \int_0^t \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^s\right) T \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^s\right) ds + \\ + \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right) \int_0^t \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^s\right) T \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^s\right) \int_0^s \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^{s_1}\right) T \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^{s_1}\right) ds_1 ds + \dots,$$

здесь

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_0^t = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & 0 \\ 0 & \varphi_2(t) \end{pmatrix}.$$

Используя свойство

$$T \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & 0 \\ 0 & \varphi_2(t) \end{pmatrix}\right) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \varphi_2(t) & 0 \\ 0 & \varphi_1(t) \end{pmatrix}\right) T,$$

получим

$$J(t) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right) + \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right) \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Delta_0^s\right) T ds + \\ + \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right) \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Delta_0^s\right) \int_0^s \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\Delta_0^{s_1}\right) T ds_1 ds + \\ + \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right) \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Delta_0^s\right) \int_0^s \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\Delta_0^{s_1}\right) \int_0^{s_1} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Delta_0^{s_2}\right) T ds_2 ds_1 ds + \dots, \quad (27)$$

где

$$\Delta_0^t = \begin{pmatrix} \varphi_2(t) - \varphi_1(t) & 0 \\ 0 & \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \end{pmatrix}.$$

Покомпонентно выражение (27) выглядит следующим образом:

$$J_1(t) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right) + \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right) \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s)\right) ds + \\ + \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right) \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s)\right) \int_0^s \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s_1)\right) ds_1 ds + \dots, \\ J_2(t) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_2(t)\right) + \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_2(t)\right) \int_0^t \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s)\right) ds + \\ + \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_2(t)\right) \int_0^t \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s)\right) \int_0^s \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s_1)\right) ds_1 ds + \dots \quad (28)$$

Равномерная сходимость рядов (28) следует из оценок:

а) при $\operatorname{Re} \lambda_i(t) \leq -\delta < 0, t \in [0, T]$,

$$|e^{\varphi_1(t)/\varepsilon}| \leq e^{-\delta t/\varepsilon},$$

$$\begin{aligned} \left| e^{\varphi_1(t)/\varepsilon} \int_0^t e^{(\varphi_2(s)-\varphi_1(s))/\varepsilon} ds \right| &\leq \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \operatorname{Re} \lambda_1(s_1) ds_1 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \operatorname{Re} \lambda_2(s_2) ds_2\right) ds \leq \\ &\leq \int_0^t e^{-\delta(t-s)/\varepsilon} ds = e^{-\delta t/\varepsilon} t, \end{aligned}$$

...

$$\left| e^{\varphi_1(t)/\varepsilon} \int_0^t e^{\Delta\varphi(s_1)/\varepsilon} \int_0^{s_1} e^{\Delta\varphi(s_2)/\varepsilon} \dots \int_0^{s_{p-1}} e^{(-1)^p \Delta\varphi(s_p)/\varepsilon} ds_p \dots ds_1 \right| \leq$$

$$\leq \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{p-1}} e^{(\varphi_1(t)-\varphi_1(s_1)+\dots+(-1)^{p+1}\varphi_1(s_p))/\varepsilon} e^{(\varphi_2(s_1)-\varphi_2(s_2)+\dots+(-1)^p\varphi_2(s_p))/\varepsilon} ds_1 \dots ds_p \leq e^{-\delta t/\varepsilon} \frac{(t)^p}{p!},$$

откуда имеем

$$|J_1(t, \varepsilon)| \leq e^{-\delta t/\varepsilon} e^t \leq e^T e^{-\delta t/\varepsilon};$$

$$|J_2(t, \varepsilon)| \leq e^T e^{-\delta t/\varepsilon}.$$

б) при $\operatorname{Re} \lambda_i(t) \leq 0, t \in [0, T]$,

$$|J_i(t)| \leq e^T, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно, ряды (28) сходятся равномерно по ε и t на $[0, T] \times (0, \varepsilon_0]$. Кроме того, легко проверяется, что ряды допускают действие оператора $\varepsilon \frac{d}{dt}$ в любой степени.

6. Пример. Здесь приведём решение задачи Коши

$$\varepsilon \dot{u}(t, \varepsilon) = A(t)u(t, \varepsilon) + h(t), \quad u(t, \varepsilon) = u^0. \tag{29}$$

Пусть выполнены условия 1)–5) задачи (1) при $n = 3, m = 2, k = 1$. Для удобства обозначим эти требования здесь повторно:

- 1) $h(t) \in C^\infty([0, T], R^3)$;
- 2) $A(t) \in C^\infty([0, T], \mathcal{L}(R^3, R^3))$;
- 3) для собственных значений предельного оператора $A(t)$:
 - а) для всех $t \in (0, T]$ $\lambda_1(t) \neq \lambda_2(t), \lambda_i(t) \neq 0, i = \overline{1, 2}$;
 - б) условие “слабой” точки поворота первого порядка при $t = 0$:

$$\lambda_2(t) - \lambda_1(t) = ta(t), \quad a(t) \neq 0;$$

в) геометрическая кратность собственных значений равна алгебраической для всех $t \in [0, T]$;

4) $\operatorname{Re} \lambda_i(t) \leq 0, i = \overline{1, 2}$, для $t \in [0, T]$;

5) $A(t) = \lambda_1(t)P_1(t) + \lambda_2(t)P_2(t), \dim \operatorname{Im} P_1(t) = 2, \dim \operatorname{Im} P_2(t) = 1$.

В базисе из собственных векторов $e_i(t), i = \overline{1, 3}$, оператора $A(t)$ производные проекторов имеют вид

$$\dot{P}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -C_3^1 \\ 0 & 0 & -C_2^2 \\ C_1^3 & C_2^3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{P}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_3^1 \\ 0 & 0 & C_2^2 \\ -C_1^3 & -C_2^3 & 0 \end{pmatrix},$$

где $C_i^j(t)$ – коэффициенты разложения $\dot{e}_i(t)$ по базису $\dot{e}_i(t) = \sum_{j=0}^3 C_i^j(t)e_j(t)$.

Сингулярности в данном случае имеют вид

$$\sigma_{1,k} = e^{\varphi_1(t)/\varepsilon} \underbrace{\int_0^t e^{\Delta\varphi(s_1)/\varepsilon} \int_0^{s_1} e^{-\Delta\varphi(s_2)/\varepsilon} \dots \int_0^{s_{k-1}} e^{(-1)^{k+1}\Delta\varphi(s_k)/\varepsilon} ds_k \dots ds_1}_{k \text{ интегралов}},$$

$$\sigma_{2,k} = e^{\varphi_2(t)/\varepsilon} \underbrace{\int_0^t e^{-\Delta\varphi(s_1)/\varepsilon} \int_0^{s_1} e^{\Delta\varphi(s_2)/\varepsilon} \dots \int_0^{s_{k-1}} e^{(-1)^k\Delta\varphi(s_k)/\varepsilon} ds_k \dots ds_1}_{k \text{ интегралов}}.$$

Решение будем искать в виде

$$u(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left[\sum_{p=0}^{\infty} \sigma_{1,p} x_k^p(t) + \sigma_{2,p} y_k^p(t) + z_k(t) \right].$$

Подставив функцию $u(t, \varepsilon)$ в уравнение, получим серию итерационных задач. Вычислим главный член асимптотики.

При ε^0 имеем

$$z_0(t) = -A^{-1}(t)h(t);$$

$$(A(t) - \lambda_1(t))x_0^0(t) = 0, \quad P_1(0)x_0^0(0) = P_1(0)u^0 + \frac{P_1(0)h(0)}{\lambda_1(0)};$$

$$(A(t) - \lambda_2(t))y_0^0(t) = 0, \quad P_2(0)y_0^0(0) = P_2(0)u^0 + \frac{P_2(0)h(0)}{\lambda_2(0)};$$

$$(A(t) - \lambda_1(t))x_0^p(t) = 0, \quad P_1(0)x_0^p(0) = ?;$$

$$(A(t) - \lambda_2(t))y_0^p(t) = 0, \quad P_2(0)y_0^p(0) = ?.$$

Начальные условия для $x_0^p(t)$, $y_0^p(t)$ при $p \geq 1$ находятся на основании теоремы разрешимости при рассмотрении итерационных задач на шаге ε .

При ε получим

$$z_0(t) = -\left(\frac{d}{dt}A^{-1}(t)\right)A^{-1}(t)h(t);$$

$$(A(t) - \lambda_1(t))x_1^p(t) = \frac{d}{dt}(P_1(t)x_0^p(t)) + P_2(t)y_0^{p+1}(t), \quad P_1(0)x_1^p(0) = ?;$$

$$(A(t) - \lambda_2(t))y_0^p(t) = \frac{d}{dt}(P_2(t)y_0^p(t)) + P_1(t)x_0^{p+1}(t), \quad P_2(0)y_0^p(0) = ?. \quad (30)$$

Из условий разрешимости системы (30) получим уравнения

$$\frac{d}{dt}P_1(t)x_0^p(t) = \dot{P}_1(t)P_1(t)x_0^p(t),$$

$$P_1(0)x_0^0(0) = P_1(0)u^0 + \frac{P_1(0)h(0)}{\lambda_1(0)},$$

$$P_1(0)x_0^p(0) = ?, \quad p \geq 1,$$

и уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P_2(t)y_0^p(t) &= \dot{P}_2(t)P_2(t)y_0^p(t), \\ P_2(0)y_0^0(0) &= P_2(0)u^0 + \frac{P_2(0)h(0)}{\lambda_2(0)}, \\ P_2(0)y_0^p(0) &= ?, \quad p \geq 1. \end{aligned}$$

Решение задачи Коши при $p = 0$ имеет вид

$$P_1(t)x_0^0(t) = U_1(t, 0)P_1(0)x_0^0(0), \quad P_2(t)y_0^0(t) = U_2(t, 0)P_2(0)y_0^0(0).$$

Для определения начальных условий при $p \geq 1$ подчиним системы при ε условиям точечной разрешимости

$$P_2(0) \frac{d}{dt}(P_1x_0^p)(0) + P_2(0)y_0^{p+1}(0) = 0, \quad P_1(0) \frac{d}{dt}(P_2y_0^p)(0) + P_1(0)x_0^{p+1}(0) = 0,$$

что даёт рекуррентно начальные условия при $p \geq 1$:

$$P_1(0)x_0^p(0) = P_1(0)\dot{P}_2(0)P_2(0)y_0^{p-1}(0), \quad P_2(0)y_0^p(0) = P_2(0)\dot{P}_1(0)P_1(0)x_0^{p-1}(0).$$

Тогда решения задач Коши при $p \geq 1$ запишутся в виде

$$P_1(t)x_0^p(t) = U_1(t, 0)P_1(0)x_0^p(0), \quad P_2(t)y_0^p(t) = U_2(t, 0)P_2(0)y_0^p(0),$$

или покомпонентно

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_0^p(0) \\ \beta_0^p(0) \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_3^1 \\ 0 & 0 & C_3^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_0^p(0) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_0^p(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_3^1 \\ 0 & 0 & C_3^2 \\ C_1^3(0) & C_2^3(0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0^p(0) \\ \beta_0^p(0) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, для определения главного члена асимптотики имеем следующие задачи Коши:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_0^p(t) + C_1^1(t)\alpha_0^p + C_2^1(t)\beta_0^p(t) &= 0, \quad \dot{\beta}_0^p(t) + C_2^2(t)\beta_0^p + C_1^2(t)\alpha_0^p(t) = 0, \\ \alpha_0^p(0) = \left(u_1^0 + \frac{h_1(0)}{\lambda_1(0)}\right)\delta_0^p + C_3^1(0)\gamma_0^{p-1}, \quad \beta_0^p(0) &= \left(u_2^0 + \frac{h_2(0)}{\lambda_2(0)}\right)\delta_0^p + C_3^2(0)\gamma_0^{p-1} \end{aligned}$$

и

$$\dot{\gamma}_0^p(t) + C_3^3(t)\gamma_0^p(t), \quad \gamma_0^p(0) = \left(u_3^0 + \frac{h_3(0)}{\lambda_2(0)}\right)\delta_0^p + C_1^3(0)\alpha_0^{p-1} + C_2^3(0)\beta_0^{p-1}.$$

Главный член асимптотики решения задачи (29) имеет вид

$$u_{\text{гл}}(t) = \sum_{p=0}^{\infty} [\sigma_{1,p}(t, \varepsilon)U_1(t, 0)P_1(0)x_0^p(0) + \sigma_{2,p}(t, \varepsilon)U_2(t, 0)P_2(0)y_0^p(0)] - A^{-1}(t)h(t).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
2. Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. Регуляризованная асимптотика решений интегродифференциальных уравнений с частными производными с быстро изменяющимися ядрами // Уфимск. мат. журн. 2018. Т. 10. № 2. С. 3–12.

3. *Butuzov V.F., Nefedov N.N., Schneider K.R.* Singularly perturbed problems in case of exchange of stabilities // *J. of Math. Sci.* 2004. V. 121. № 1. P. 1973–2079.
4. *Lioville J.* Second memoire sur le developpement des fonction ou parties de fonctions en series dont les divers termes sont assujetis a satisfaire a une meme equation differentielle du second ordre, contenant un parametre variable // *J. Math. Pure Appl.* 1837. V. 2. P. 16–35.
5. *Елисеев А.Г., Ломов С.А.* Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора // *Мат. сб.* 1986. Т. 131 (173). № 4 (12). С. 544–557.
6. *Елисеев А.Г., Ратникова Т.А.* Сингулярно возмущённая задача Коши при наличии рациональной “простой” точки поворота у предельного оператора // *Дифференц. уравнения и процессы управления.* 2019. № 3. С. 63–73.
7. *Елисеев А.Г.* Регуляризованное решение сингулярно возмущённой задачи Коши при наличии иррациональной “простой” точки поворота // *Дифференц. уравнения и процессы управления.* 2020. № 2. С. 15–32.
8. *Елисеев А.Г., Кириченко П.В.* Решение сингулярно возмущённой задачи Коши при наличии “слабой” точки поворота у предельного оператора // *Итоги науки и техн. Сер. Совр. математика и её прил.* 2021. Т. 192. С. 55–64.

Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”

Поступила в редакцию 28.12.2021 г.

После доработки 28.12.2021 г.

Принята к публикации 25.05.2022 г.

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.929

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

© 2022 г. А. Л. Скубачевский, А. Ш. Адхамова

Рассмотрена система управления, описываемая системой дифференциальных уравнений запаздывающего типа с переменными матричными коэффициентами и несколькими запаздываниями. Показана связь между вариационной задачей для нелокального функционала, описывающей многомерную систему управления с запаздываниями, и соответствующей краевой задачей для систем дифференциально-разностных уравнений. Доказаны существование, единственность и гладкость обобщённого решения краевой задачи на всём интервале.

DOI: 10.31857/S0374064122060036, EDN: CCJRYL

Введение. Теория управляемых систем с последствием изучалась многими авторами (см., например, [1–5]). Широко известно, что обратная связь в системе управления может привести к задержке сигнала. Обычно предполагалось, что функционально-дифференциальные уравнения, описывающие систему, имеют запаздывающий или нейтральный тип. Задача об успокоении системы управления с последствием, описываемая системой дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием, рассматривалась Н.Н. Красовским [2]. Предполагалось, что имеется одно постоянное запаздывание и коэффициенты системы также постоянные. В работах [6–11] эта задача обобщалась на случай, когда уравнение, описывающее управляемую систему, содержит также старшие члены с запаздыванием, т.е. имеет нейтральный тип.

В данной работе рассматривается задача об успокоении многомерной системы управления, описываемой системой дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа с переменными матричными коэффициентами и несколькими запаздываниями. Устанавливается связь между вариационной задачей для нелокального функционала, описывающей многомерную систему управления с запаздываниями, и соответствующей краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений. Доказывается существование, единственность и гладкость обобщённого решения этой задачи (в отличие от нейтрального типа можно доказать гладкость решений на всём интервале).

1. Постановка задачи. В данной работе рассмотрим линейную нестационарную систему управления, описываемую системой дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа

$$A_0(t)y'(t) + \sum_{m=0}^M B_m(t)y(t - m\tau) = u(t), \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

где $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$ – вектор-функция состояния системы, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T$ – вектор-функция управления, $A_0(t)$ – невырожденная матрица порядка $n \times n$, $B_m(t)$ – матрица порядка $n \times n$ с элементами $a_{ij}^0(t)$, $b_{ij}^m(t)$ соответственно, которые являются непрерывно дифференцируемыми функциями на \mathbb{R} , $\tau = \text{const} > 0$ – запаздывание.

Предыстория системы определяется начальным условием

$$y(t) = \varphi(t) \quad \text{для почти всех } t \in [-M\tau, 0], \quad (2)$$

где $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))^T \in L_2^n(-M\tau, 0)$ – заданная вектор-функция, $L_2^n(a, b) = \prod_{i=1}^n L_2(a, b)$ – пространство вектор-функций со скалярным произведением $(v, w)_{L_2^n(a, b)} = \sum_{i=1}^n (v_i, w_i)_{L_2(a, b)}$, $v = (v_1, \dots, v_n)^T$, $w = (w_1, \dots, w_n)^T$.

Поскольку функция $\varphi \in L_2^n(-M\tau, 0)$ определена п.в. на отрезке $[-M\tau, 0]$, зададим дополнительно начальное условие

$$y(0+0) = \varphi_0, \quad (3)$$

где $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$ – некоторый вектор.

Рассмотрим задачу о приведении системы (1), (2) в положение равновесия при $t \geq T$. Для этого найдём такое управление $u(t)$, $0 < t < T$, что

$$y(t) = 0, \quad t \in [T - M\tau, T], \quad (4)$$

где $T > 2M\tau$.

Из всевозможных управлений будем искать управление, доставляющее минимум функционалу энергии

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \rightarrow \min.$$

Здесь $|\cdot|$ – евклидова норма в \mathbb{R}^n . Таким образом, получим вариационную задачу о минимуме функционала

$$J(y) := \int_0^T \left| A_0(t)y'(t) + \sum_{m=0}^M B_m(t)y(t - m\tau) \right|^2 dt \rightarrow \min \quad (5)$$

с краевыми условиями (2)–(4).

2. Связь между вариационной и краевой задачами. Введём некоторые вещественные функциональные пространства.

Обозначим через $C(\mathbb{R})$ пространство непрерывных и ограниченных на \mathbb{R} функций с нормой

$$\|x(t)\|_{C(\mathbb{R})} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|. \quad (6)$$

Пусть $C^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, – пространство непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых функций на \mathbb{R} , ограниченных на \mathbb{R} вместе со всеми производными вплоть до k -го порядка, с нормой

$$\|x(t)\|_{C^k(\mathbb{R})} = \max_{0 \leq i \leq k} \sup_{t \in \mathbb{R}} |x^{(i)}(t)|.$$

Обозначим через $W_2^k(a, b)$ пространство абсолютно непрерывных на $[a, b]$ функций, имеющих производную k -го порядка из $L_2(a, b)$ со скалярным произведением

$$(v, w)_{W_2^k(a, b)} = \sum_{i=0}^k \int_a^b v^{(i)}(t)w^{(i)}(t) dt.$$

Пусть $\mathring{W}_2^k(a, b) = \{w \in W_2^k(a, b) : w^{(i)}(a) = w^{(i)}(b) = 0, \quad i = \overline{0, k-1}\}$.

Введём пространства вектор-функций

$$W_2^{k, n}(a, b) = \prod_{i=1}^n W_2^k(a, b), \quad \mathring{W}_2^{k, n}(a, b) = \prod_{i=1}^n \mathring{W}_2^k(a, b)$$

со скалярным произведением

$$(v, w)_{W_2^{k, n}(a, b)} = \sum_{i=1}^n (v_i, w_i)_{W_2^k(a, b)},$$

где $v = (v_1, \dots, v_n)^T$, $w = (w_1, \dots, w_n)^T$.

Покажем, что вариационная задача (2)–(5) эквивалентна краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка.

Пусть $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ – решение вариационной задачи (2)–(5), где $\varphi \in L_2^n(-M\tau, 0)$. Введём пространства

$$\tilde{L} = \{v \in L_2^n(-M\tau, T) : v(t) = 0, \quad t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T)\},$$

$$\tilde{W} = \{v \in W_2^{1,n}(-M\tau, T) : v(t) = 0, \quad t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T)\}.$$

Часто мы будем отождествлять пространство \tilde{L} с $L_2(0, T - M\tau)$, а пространство \tilde{W} с $\dot{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$, не оговаривая этого специально.

Пусть $v \in \tilde{W}$ – произвольная фиксированная функция. Тогда функция $y + sv \in W_2^{1,n}(0, T)$ удовлетворяет краевым условиям (2)–(4) для каждого $s \in \mathbb{R}$.

Обозначим $J(y + sv) = F(s)$. Поскольку $J(y + sv) \geq J(y)$ ($s \in \mathbb{R}$), имеем

$$\left. \frac{dF}{ds} \right|_{s=0} = 0. \tag{7}$$

Положим

$$B(y, v) := \int_0^T \left(A_0(t)y'(t) + \sum_{m=0}^M B_m(t)y(t - m\tau) \right)^T \left(A_0(t)v'(t) + \sum_{l=0}^M B_l(t)v(t - l\tau) \right) dt. \tag{8}$$

Из (7) следует, что

$$B(y, v) = 0, \quad v \in \tilde{W}. \tag{9}$$

В слагаемых, содержащих $v(t - l\tau)$, сделаем замену переменной $\xi = t - l\tau$. Получим

$$\begin{aligned} B(y, v) &= \int_0^T \left(A_0(t)y'(t) + \sum_{m=0}^M B_m(t)y(t - m\tau) \right)^T A_0(t)v'(t) dt + \\ &+ \sum_{l=0}^M \int_{-l\tau}^{T-l\tau} \left(A_0(\xi + l\tau)y'(\xi + l\tau) + \sum_{m=0}^M B_m(\xi + l\tau)y(\xi + (l - m)\tau) \right)^T B_l(\xi + l\tau)v(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Вернёмся к старой переменной t , полагая $t = \xi$. С учётом $v(t) = 0$ при $t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T)$ будем иметь

$$\begin{aligned} B(y, v) &= \int_0^{T-M\tau} \left(A_0(t)y'(t) + \sum_{m=0}^M B_m(t)y(t - m\tau) \right)^T A_0(t)v'(t) dt + \\ &+ \sum_{l=0}^M \int_0^{T-l\tau} \left(A_0(t + l\tau)y'(t + l\tau) + \sum_{m=0}^M B_m(t + l\tau)y(t + (l - m)\tau) \right)^T B_l(t + l\tau)v(t) dt. \end{aligned} \tag{10}$$

Из (9), (10) и определения производной в смысле теории обобщённых функций следует, что

$$\left[A_0^T(t)A_0(t)y'(t) + A_0^T(t) \sum_{m=0}^M B_m(t)y(t - m\tau) \right]' \in L_2^n(0, T - M\tau), \tag{11}$$

т.е.

$$A_0^T(t)A_0(t)y'(t) + \sum_{m=0}^M A_0^T(t)B_m(t)y(t - m\tau) \in W_2^{1,n}(0, T - M\tau). \quad (12)$$

Поскольку предполагаем, что $\varphi \in L_2^n(-M\tau, 0)$, производная каждого из слагаемых в (11), стоящих в квадратных скобках, вообще говоря, может быть сингулярной обобщённой функцией и в этом случае не будет принадлежать $L_2^n(-M\tau, 0)$.

В силу (12), подставив (10) в (9), можем провести интегрирование по частям. Тогда получим

$$\begin{aligned} & - \left[A_0^T(t)A_0(t)y'(t) + A_0^T(t) \sum_{m=0}^M B_m(t)y(t - m\tau) \right]' + \sum_{l=0}^M B_l^T(t + l\tau)A_0(t + l\tau)y'(t + l\tau) + \\ & + \sum_{l,m=0}^M B_l^T(t + l\tau)B_m(t + l\tau)y(t - (m - l)\tau) = 0, \quad t \in (0, T - M\tau). \end{aligned} \quad (13)$$

Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(0, T)$ удовлетворяет системе (13) дифференциально-разностных уравнений почти всюду на интервале $(0, T - M\tau)$.

Определение 1. Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(0, T)$ называется *обобщённым решением задачи* (2)–(4), (13), если выполняется условие (12), $y(t)$ почти всюду на $(0, T - M\tau)$ удовлетворяет системе уравнений (13), а также краевым условиям (2)–(4).

Очевидно, что следующее определение обобщённого решения эквивалентно определению 1.

Определение 2. Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(0, T)$ называется *обобщённым решением задачи* (2)–(4), (13), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} B(y, v) = & \int_0^{T-M\tau} \left(\left\{ (A_0^T(t)A_0(t)y'(t))^T + \left(A_0^T(t) \sum_{m=0}^M B_m^T(t + m\tau)y(t - m\tau) \right)^T \right\} v'(t) + \right. \\ & \left. + \left\{ \left(\sum_{l=0}^M B_l^T(t + l\tau)A_0(t + l\tau)y'(t + l\tau) \right)^T + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\sum_{l,m=0}^M B_l^T(t + l\tau)B_m(t + l\tau)y(t - (m - l)\tau) \right)^T \right\} v(t) \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

для всех $v \in \overset{\circ}{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$ и краевым условиям (2)–(4).

Таким образом, мы доказали, что если вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(0, T)$ является решением вариационной задачи (2)–(5), то она будет обобщённым решением краевой задачи (2)–(4), (13).

Докажем обратное утверждение.

Пусть $y \in W_2^{1,n}(0, T)$ – обобщённое решение краевой задачи (2)–(4), (13). Тогда для всех $v \in \widetilde{W}$ мы получаем

$$J(y + v) = J(y) + J(v) + 2B(y, v),$$

где $J(v)$ – неотрицательный квадратичный функционал. Поскольку y – обобщённое решение задачи (2)–(4), (13), то $B(y, v) = 0$. Следовательно,

$$J(y + v) \geq J(y)$$

для всех $v \in \widetilde{W}$. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $\varphi \in L_2^n(-M\tau, 0)$. Функция $y \in W_2^{1,n}(0, T)$ доставляет минимум функционалу (5) с краевыми условиями (2)–(4) тогда и только тогда, когда она является обобщённым решением краевой задачи (2)–(4), (13).

3. Разрешимость краевой задачи. Далее докажем однозначную разрешимость краевой задачи (2)–(4), (13).

Введём оператор $R_0 : \widetilde{L} \rightarrow L_2^n(0, T)$ по формуле

$$(R_0 v)(t) = A_0(t)v(t).$$

Рассмотрим функционал

$$J_0(v) = \int_0^T |(R_0 v')(t)|^2 dt, \quad v \in \widetilde{W}.$$

Лемма 1. Пусть $\det A_0(t) \neq 0, t \in \mathbb{R}$. Тогда для всех $w \in \widetilde{W}$ выполняется оценка

$$J_0(w) \geq c_0 \|w\|_{W_2^{1,n}(0, T-M\tau)}^2,$$

где c_0 – положительная постоянная, не зависящая от w .

Доказательство следует из невырожденности матрицы $A_0(t), t \in \mathbb{R}$.

Лемма 2. Пусть $\det A_0(t) \neq 0, t \in \mathbb{R}$. Тогда для всех $w \in \widetilde{W}$

$$J(w) \geq c_1 \|w\|_{W_2^{1,n}(0, T-M\tau)}^2, \tag{15}$$

где c_1 – положительная постоянная, не зависящая от w .

Доказательство. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству леммы 3.2 из [10], однако для полноты картины приведём его полностью.

1. Предположим противное: неравенство (15) не выполняется. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $w_k \in \widetilde{W}$ такое, что

$$J(w_k) \leq \frac{1}{k} \|w_k\|_{W_2^{1,n}(0, T-M\tau)}^2.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $\|w_k\|_{W_2^{1,n}(0, T-M\tau)} = 1$. Тогда имеем неравенство

$$J(w_k) \leq \frac{1}{k}. \tag{16}$$

Введём оператор $R_1 : \widetilde{L} \rightarrow L_2^n(0, T - M\tau)$ по формуле

$$(R_1 v)(t) = \sum_{k=0}^M B_k(t)v(t - k\tau). \tag{17}$$

Из неравенства

$$\alpha^2 \leq 2(\alpha + \beta)^2 + 2\beta^2 \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}),$$

леммы 1 и ограниченности оператора $R_1 : \widetilde{L} \rightarrow L_2^n(0, T - M\tau)$ для любого $v \in \widetilde{W}$ получим

$$c_0 \|v\|_{W_2^{1,n}(0, T-M\tau)}^2 \leq J_0(v) \leq 2J(v) + 2 \int_0^{T-M\tau} ((R_1 v)(t))^2 dt \leq 2J(v) + k_1 \|v\|_{L_2^n(0, T-M\tau)}^2, \tag{18}$$

где c_0, k_1 – положительные постоянные, не зависящие от v .

В силу компактности оператора вложения \widetilde{W} в $L_2^n(0, T - M\tau)$ существует подпоследовательность $\{w_{k_m}\}$, которая сходится к некоторой вектор-функции w_0 в пространстве $L_2^n(0, T - M\tau)$. Таким образом, из (16), (18) следует, что

$$\begin{aligned} c_0 \|w_{k_m} - w_{k_l}\|_{W_2^{1,n}(0, T-M\tau)}^2 &\leq 2J(w_{k_m} - w_{k_l}) + k_1 \|w_{k_m} - w_{k_l}\|_{L_2^n(0, T-M\tau)}^2 \leq \\ &\leq \frac{4}{k_m} + \frac{4}{k_l} + k_1 \|w_{k_m} - w_{k_l}\|_{L_2^n(0, T-M\tau)}^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } l, m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, $w_{k_m} \rightarrow w_0$ в \widetilde{W} и $\|w_0\|_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 1$. Поэтому в силу (16) мы имеем

$$J(w_0) = \int_0^{T-M\tau} \left| A_0(t)w'_0(t) + \sum_{m=0}^M B_m(t)w_0(t-m\tau) \right|^2 dt = 0,$$

т.е.

$$A_0(t)w'_0(t) + \sum_{m=0}^M B_m(t)w_0(t-m\tau) = 0, \quad t \in (0, T-M\tau). \tag{19}$$

Поскольку $w_0 \in \widetilde{W}$, вектор-функция w_0 удовлетворяет начальному условию

$$w_0(t) = 0, \quad t \in [-M\tau, 0]. \tag{20}$$

Тогда, если $0 < t \leq \tau$, система уравнений (19) примет вид

$$A_0(t)w'_0(t) + B_0(t)w_0(t) = 0, \tag{21}$$

при этом в силу (20) $w_0(0) = 0$. Следовательно,

$$w_0(t) = 0, \quad t \in [0, \tau]. \tag{22}$$

В силу (20), (22) для $\tau < t \leq 2\tau$ система уравнений (19) примет вид (21), при этом в силу (22) $w_0(\tau) = 0$. Решив полученную задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (21) на полуинтервале $(\tau, 2\tau]$, имеем $w_0(t) = 0, t \in (\tau, 2\tau]$, и т.д.

Таким образом, $w_0(t) \equiv 0$ при $t \in [0, T-M\tau]$. Это противоречит равенству

$$\|w_0\|_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 1.$$

Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть $\det A_0(t) \neq 0, t \in \mathbb{R}$. Тогда для любой вектор-функции $\varphi \in L_2^n(-M\tau, 0)$ и любого $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$ существует единственное обобщённое решение краевой задачи (2)–(4), (13) $y \in W_2^{1,n}(0, T)$, при этом

$$\|y\|_{W_2^{1,n}(0,T)} \leq c(\|\varphi\|_{L_2^n(-M\tau,0)} + |\varphi_0|), \tag{23}$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от φ и φ_0 .

Доказательство. Введём вектор-функции $\Phi_0 \in L_2^n(-M\tau, T) \cap W_2^{1,n}(0, T)$ и $\Phi_1, \Phi_2 \in L_2^n(0, T)$ по формулам

$$\Phi_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } -M\tau < t < 0; \\ \varphi_0 - \varphi_0 t / (T - M\tau), & \text{если } 0 < t < T - M\tau; \\ 0, & \text{если } T - M\tau < t < T; \end{cases} \tag{24}$$

$$\Phi_1(t) = \begin{cases} A_0^T(t) \sum_{m=k}^M B_m^T(t) \varphi(t - m\tau), & \text{если } (k-1)\tau < t < k\tau, \quad k = \overline{1, M}; \\ 0, & \text{если } M\tau < t < T; \end{cases} \tag{25}$$

$$\Phi_2(t) = \begin{cases} \sum_{l,m} B_l^T(t+l\tau) B_m(t+l\tau) \varphi(t - (m-l)\tau), & \text{если } (k-1)\tau < t < k\tau, \quad k = \overline{1, M}; \\ 0, & \text{если } M\tau < t < T. \end{cases} \tag{26}$$

В формуле для $\Phi_2(t)$ суммирование производится по l, m таким образом, что $k \leq m-l \leq M$.

Доказательство теоремы 2 основано на технике билинейных форм применительно к интегральному тождеству (14). Однако $B(y, v)$ не является билинейной формой, поскольку функция y удовлетворяет неоднородным краевым условиям (2), (3), поэтому введём вспомогательные билинейные формы $B_0(\varphi_0, v)$ ($\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$, $v \in \widetilde{W}$), $B_1(\varphi, v)$, $B_2(\varphi, v)$ ($\varphi \in L_2^n(-M\tau, 0)$, $v \in \widetilde{W}$) по формулам

$$B_0(\varphi_0, v) = B(\Phi_0, v), \quad B_1(\varphi, v) = \int_0^{T-M\tau} \Phi_1(t)v'(t) dt, \quad B_2(\varphi, v) = \int_0^{T-M\tau} \Phi_2(t)v(t) dt.$$

Здесь функции Φ_0 , Φ_1 , Φ_2 задаются формулами (24), (25) и (26) соответственно.

Положим

$$x(t) = \begin{cases} y(t) - \Phi_0(t), & t \in (0, T); \\ 0, & t \in (-M\tau; 0). \end{cases}$$

По построению $x \in \widetilde{W}$. Тогда интегральное тождество (14) примет вид

$$B_0(\varphi_0, v) + B_1(\varphi, v) + B_2(\varphi, v) + B(x, v) = 0. \tag{27}$$

Поскольку $B(v, v) = J(v)$, $v \in \widetilde{W}$, по лемме 2 мы можем ввести в пространстве $\dot{W}_2^1(0, T-M\tau)$ эквивалентное скалярное произведение по формуле

$$(x, v)'_{\dot{W}_2^{1,n}(0, T-M\tau)} = B(x, v).$$

Следовательно, тождество (27) может быть записано в виде

$$B_0(\varphi_0, v) + B_1(\varphi, v) + B_2(\varphi, v) + (x, v)'_{\dot{W}_2^{1,n}(0, T-M\tau)} = 0. \tag{28}$$

Из неравенства Коши–Буняковского, равенства (24) и леммы 2 получим

$$|B_0(\varphi_0, v)| \leq k_1|\varphi_0| \|v\|_{W_2^{1,n}(0, T-M\tau)} \leq k_2|\varphi_0| \|v\|'_{\dot{W}_2^{1,n}(0, T-M\tau)}, \tag{29}$$

где k_1, k_2 – положительные постоянные, не зависящие от φ_0 и v .

Вновь используя неравенства Коши–Буняковского, а также равенства (25), (26) и лемму 2, имеем

$$\begin{aligned} |B_i(\varphi, v)| &\leq k_3\|\varphi\|_{L_2(-M\tau, 0)} \|v\|_{W_2^{1,n}(0, T-M\tau)} \leq \\ &\leq k_4\|\varphi\|_{L_2(-M\tau, 0)} \|v\|'_{\dot{W}_2^{1,n}(0, T-M\tau)}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{30}$$

где k_3, k_4 – положительные постоянные, не зависящие от φ и v .

Таким образом, при фиксированных φ_0 и φ функционалы $B_0(\varphi_0, v)$ и $B(\varphi, v)$ линейные и ограниченные по v на \widetilde{W} . В силу неравенств (29) и (30) нормы функционалов $B_0(\varphi_0, \cdot)$ и $B_i(\varphi, \cdot)$ на \widetilde{W} не превышают $k_2|\varphi_0|$ и $k_4\|\varphi\|_{L_2(-M\tau, 0)}$ соответственно. По теореме Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве существуют вектор-функции $F_i \in \widetilde{W}$ ($i = 0, 1, 2$) такие, что

$$\begin{aligned} B_0(\varphi_0, v) &= (F_0, v)'_{\dot{W}_2^{1,n}(0, T-M\tau)}, \\ B_i(\varphi, v) &= (F_i, v)'_{\dot{W}_2^{1,n}(0, T-M\tau)}, \end{aligned}$$

при этом

$$\|F_0\|'_{\dot{W}_2^{1,n}(0, T-M\tau)} \leq k_2|\varphi_0|, \tag{31}$$

$$\|F_i\|'_{\dot{W}_2^{1,n}(0, T-M\tau)} \leq k_4\|\varphi\|_{L_2^n(-M\tau, 0)}. \tag{32}$$

Функции F_i ($i = 0, 1, 2$) определяются единственным образом. Тогда тождество (28) можно записать в виде

$$\sum_{i=0,1,2} (F_i, v)'_{\dot{W}_2^{1,n}(0, T-M\tau)} + (x, v)'_{\dot{W}_2^{1,n}(0, T-M\tau)} = 0, \quad v \in \dot{W}_2^{1,n}(0, T-M\tau). \quad (33)$$

Интегральное тождество (33) имеет единственное решение $x = -\sum_{i=0,1,2} F_i$. Следовательно, задача (2)–(4), (13) имеет единственное обобщённое решение $y = \Phi_0 - \sum_{i=0,1,2} F_i \in W_2^{1,n}(0, T)$. Кроме того, в силу (24), (31), (32) выполняется оценка (23). Теорема доказана.

4. Гладкость обобщённых решений на всём интервале. Рассматриваемая нами система дифференциально-разностных уравнений имеет запаздывающий тип. Поэтому в случае достаточно гладкой начальной функции ($\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$) гладкость обобщённых решений сохраняется на всём интервале.

В отличие от дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа гладкость обобщённых решений уравнений нейтрального типа может нарушаться внутри интервала, на котором определено решение, и сохраняться лишь на некоторых подынтервалах (см. работы [6, 7, 12–15]).

Теорема 3. Пусть $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$ и пусть $\varphi(0) = \varphi_0$. Тогда обобщённое решение задачи (2)–(4), (13) $y \in W_2^{2,n}(0, T-M\tau)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(t) = -\left(A_0^T(t) \sum_{m=0}^M B_m(t)y(t-m\tau)\right)' - \sum_{l=0}^M B_l^T(t+l\tau)A_0(t+l\tau)y'(t+l\tau) - \\ - \sum_{l,m=0}^M B_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t-(m-l)\tau), \quad t \in (0, T-M\tau).$$

Из условий теоремы следует, что $F \in L_2^n(0, T-M\tau)$. Очевидно, что систему уравнений (13) можно записать в виде

$$-(A_0^T(t)A_0(t)y'(t))' = F(t), \quad t \in (0, T-M\tau),$$

откуда

$$-A_0^T(t)A_0(t)y''(t) = \Phi(t), \quad t \in (0, T-M\tau),$$

где $\Phi(t) = F(t) - (A_0^T(t)A_0(t))'y'(t)$.

Поскольку элементы матрицы $A_0(t)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями и $\det A_0(t) \neq 0$, имеем

$$y''(t) = -(A_0^T(t)A_0(t))^{-1}\Phi(t) \in L_2^n(0, T-M\tau),$$

т.е. $y(t) \in W_2^{2,n}(0, T-m\tau)$. Теорема доказана.

Авторы благодарят Ю.С. Осипова за обсуждение работы и ряд ценных советов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках государственного задания (соглашение 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Осипов Ю.С., Куржанский А.Б. К задаче об управлении с ограниченными фазовыми координатами // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32. № 2. С. 194–202.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М., 1968.

3. Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. Линейные дифференциально-разностные игры // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197. № 4. С. 777–780.
4. Banks H.T., Kent G.A. Control of functional differential equations of retarded and neutral type to target sets in function space // SIAM J. Control. 1972. V. 10. № 4. P. 567–593.
5. Кряжжимский А.В., Максимов В.И., Осипов Ю.С. О позиционном моделировании в динамических системах // Прикл. математика и механика. 1983. Т. 47. № 6. С. 883–890.
6. Скубачевский А.Л. К задаче об успокоении системы управления с последействием // Докл. РАН. 1994. Т. 335. № 2. С. 157–160.
7. Skubachevskii A.L. Elliptic functional differential equations and applications // Operator Theory. Adv. and Appl. V. 91. Basel; Boston; Berlin, 1997.
8. Леонов Д.Д. К задаче об успокоении системы управления с последействием // Совр. математика. Фунд. направления. 2010. Т. 37. С. 28–37.
9. Adkhatova A.S., Skubachevskii A.L. Damping problem for multidimensional control system with delays // Distributed Computer and Communication Networks. 2016. № 678. P. 612–623.
10. Адхамова А.Ш., Скубачевский А.Л. Об одной задаче успокоения нестационарной системы управления с последействием // Совр. математика. Фунд. направления. 2019. Т. 65. № 4. С. 547–556.
11. Адхамова А.Ш., Скубачевский А.Л. Об успокоении системы управления с последействием нейтрального типа // Докл. РАН. 2020. Т. 490. № 1. С. 81–84.
12. Каменский Г.А., Мышкис А.Д. Постановка краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами в старших членах // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 3. С. 409–418.
13. Каменский А.Г. Краевые задачи для уравнений с формально симметричными дифференциально-разностными операторами // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 5. С. 815–824.
14. Скубачевский А.Л., Иванов Н.О. Вторая краевая задача для дифференциально-разностных уравнений // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 500. № 1. С. 74–77.
15. Скубачевский А.Л., Иванов Н.О. Об обобщенных решениях второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами // Совр. математика. Фунд. направления. 2021. Т. 67. № 3. С. 576–595.

Математический институт имени С.М. Никольского,
г. Москва,
Российский университет дружбы народов,
г. Москва,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 18.04.2022 г.
После доработки 18.04.2022 г.
Принята к публикации 25.05.2022 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 519.6+517.956.4

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА И ИСТОЧНИКА В УРАВНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2022 г. А. М. Денисов

Рассматривается начально-краевая задача для уравнения теплопроводности, в котором коэффициент теплопроводности и одна из функций, входящих в источник, зависят от времени и неизвестны. Ставится задача определения этих функций по дополнительной информации о решении начально-краевой задачи. Эта задача сводится к системе нелинейных операторных уравнений для неизвестных функций. Система нелинейных операторных уравнений используется при построении итерационного метода для определения искомых функций. Доказывается сходимость итерационного метода.

DOI: 10.31857/S0374064122060048, EDN: CCLWAN

1. Введение. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t = k(t)u_{xx} + g(t)f(x), \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t \leq T, \quad (1.1)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (1.3)$$

Будем предполагать, что функции $k(t)$ и $g(t)$ непрерывны на отрезке $[0, T]$, $k(t)$ положительна на этом отрезке, а функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям

$$f \in C^6[0, \pi], \quad f^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(\pi) = 0, \quad k = 0, 1, 2; \quad (1.4)$$

$$\varphi \in C^6[0, \pi], \quad \varphi^{(2k)}(0) = \varphi^{(2k)}(\pi) = 0, \quad k = 0, 1, 2. \quad (1.5)$$

При сделанных предположениях решение задачи (1.1)–(1.3) существует, единственно и определяется формулой

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \exp\left(-n^2 \int_0^t k(\theta) d\theta\right) \sin(nx) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \int_0^t \exp\left(-n^2 \int_{\tau}^t k(\theta) d\theta\right) g(\tau) d\tau \sin(nx), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$\varphi_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(s) \sin(ns) ds, \quad f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(s) \sin(ns) ds.$$

Сформулируем обратную задачу. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ заданы, а функции $k(t)$ и $g(t)$ неизвестны. Требуется определить $k(t)$ и $g(t)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (1.1)–(1.3):

$$u_x(0, t) = p(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.7)$$

$$u_x(\pi, t) = h(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.8)$$

где $p(t)$ и $h(t)$ – известные функции, удовлетворяющие условиям

$$p, h \in C^1[0, T], \quad p(0) = \varphi'(0), \quad h(0) = \varphi'(\pi). \quad (1.9)$$

Исследованию обратных задач для уравнения теплопроводности посвящено большое число публикаций (см., например, [1–10] и имеющуюся в них библиографию). Обратные задачи для параболических уравнений, в которых неизвестными являются две или более функций, рассматривались в [11–17]. Итерационным методам решения обратных задач для дифференциальных уравнений посвящены работы [18–24].

Целью статьи является разработка и обоснование итерационного численного метода решения сформулированной обратной задачи.

Дадим определение решения обратной задачи. Далее, чтобы подчеркнуть зависимость решения задачи (1.1)–(1.3) от функций $k(t)$ и $g(t)$, будем обозначать его через $u(x, t; k, g)$. Пусть $t_0 \in (0, T]$.

Определение. Функции $k(t)$ и $g(t)$ называются *решением обратной задачи* для $t \in [0, t_0]$, если: $k, g \in C[0, t_0]$, $k(t) > 0$ для $t \in [0, t_0]$, $u(x, t; k, g)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и условиям (1.2), (1.3), (1.7), (1.8) для $t \in [0, t_0]$.

Пусть функции $k(t)$ и $g(t)$ являются решением обратной задачи для $t \in [0, t_0]$. Выведем систему нелинейных операторных уравнений для этих функций.

Продифференцировав формулу (1.6) по x , положив $x = 0$, $x = \pi$ и используя условия (1.7), (1.8), получим для $t \in [0, t_0]$ равенства

$$p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n \varphi_n \exp\left(-n^2 \int_0^t k(\theta) d\theta\right) + \sum_{n=1}^{\infty} n f_n \int_0^t \exp\left(-n^2 \int_{\tau}^t k(\theta) d\theta\right) g(\tau) d\tau, \quad (1.10)$$

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n \varphi_n \cos(n\pi) \exp\left(-n^2 \int_0^t k(\theta) d\theta\right) + \sum_{n=1}^{\infty} n f_n \cos(n\pi) \int_0^t \exp\left(-n^2 \int_{\tau}^t k(\theta) d\theta\right) g(\tau) d\tau. \quad (1.11)$$

Введём операторы, действующие на функции $k(t)$ и $g(t)$:

$$A_1[k](t) = - \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \varphi_n \exp\left(-n^2 \int_0^t k(\theta) d\theta\right), \quad (1.12)$$

$$A_2[k](t) = - \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \varphi_n \cos(n\pi) \exp\left(-n^2 \int_0^t k(\theta) d\theta\right), \quad (1.13)$$

$$B_1[k; g](t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 f_n \int_0^t \exp\left(-n^2 \int_{\tau}^t k(\theta) d\theta\right) g(\tau) d\tau, \quad (1.14)$$

$$B_2[k; g](t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 f_n \cos(n\pi) \int_0^t \exp\left(-n^2 \int_{\tau}^t k(\theta) d\theta\right) g(\tau) d\tau. \quad (1.15)$$

Продифференцировав равенства (1.10) и (1.11) по t , с помощью определений (1.12)–(1.15) получим уравнения

$$p'(t) = k(t)A_1[k](t) + g(t)f'(0) - k(t)B_1[k; g](t), \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (1.16)$$

$$h'(t) = k(t)A_2[k](t) + g(t)f'(\pi) - k(t)B_2[k; g](t), \quad 0 \leq t \leq t_0. \quad (1.17)$$

Введём операторы

$$Q[k; g](t) = B_1[k; g](t)A_2[k](t) - B_2[k; g](t)A_1[k](t), \quad (1.18)$$

$$C[k; g](t) = \frac{p'(t)f'(\pi) - h'(t)f'(0)}{(A_1[k](t) - B_1[k; g](t))f'(\pi) - (A_2[k](t) - B_2[k; g](t))f'(0)}, \quad (1.19)$$

$$D[k; g](t) = \frac{p'(t)A_2[k](t) - h'(t)A_1[k](t) + k(t)Q[k; g](t)}{A_2[k](t)f'(0) - A_1[k](t)f'(\pi)}. \quad (1.20)$$

Решив систему уравнений (1.16), (1.17), с учётом определений (1.18)–(1.20) получим систему нелинейных операторных уравнений для функций $k(t)$ и $g(t)$:

$$k(t) = C[k; g](t), \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (1.21)$$

$$g(t) = D[k; g](t), \quad 0 \leq t \leq t_0. \quad (1.22)$$

Таким образом, мы показали, что если функции $k(t)$ и $g(t)$ являются решением обратной задачи для $t \in [0, t_0]$, то они удовлетворяют системе нелинейных операторных уравнений (1.21), (1.22).

2. Итерационный метод и его сходимость. Система операторных уравнений (1.21), (1.22) позволяет определить итерационный процесс для решения обратной задачи.

Найдём начальное приближение. Будем предполагать, что выполнено условие

$$(p'(0)f'(\pi) - h'(0)f'(0))(\varphi'''(0)f'(\pi) - \varphi'''(\pi)f'(0)) > 0. \quad (2.1)$$

Положив в уравнениях (1.21), (1.22) значение $t = 0$, получим

$$k(0) = k_0 = \frac{p'(0)f'(\pi) - h'(0)f'(0)}{\varphi'''(0)f'(\pi) - \varphi'''(\pi)f'(0)} > 0, \quad (2.2)$$

$$g(0) = g_0 = \frac{p'(0)\varphi'''(\pi) - h'(0)\varphi'''(0)}{f'(0)\varphi'''(\pi) - f'(\pi)\varphi'''(0)}.$$

Рассмотрим итерационный процесс

$$k_{m+1}(t) = C[k_m; g_m](t), \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.3)$$

$$g_{m+1}(t) = D[k_m; g_m](t), \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

где $k_0(t) = k_0$, $g_0(t) = g_0$, и докажем его сходимость к решению обратной задачи.

Теорема. Пусть функции $f(x)$, $\varphi(x)$, $p(t)$ и $h(t)$ удовлетворяют условиям (1.4), (1.5), (1.9) и (2.1). Тогда существует $t_0 \in (0, T]$ такое, что последовательности функций $k_m(t)$, $g_m(t)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, определённых итерационным процессом (2.3), (2.4), равномерно сходятся на отрезке $[0, t_0]$ к функциям $\bar{k}(t)$, $\bar{g}(t)$, являющимся решением обратной задачи для $t \in [0, t_0]$.

Доказательство. Обозначим через $\bar{C}[0, t_0]$ пространство вектор-функций

$$r(t) = \{k(t); g(t)\},$$

непрерывных на отрезке $[0, t_0]$ с нормой

$$\|r\|_{\bar{C}[0, t_0]} = \|k\|_{C[0, t_0]} + \|g\|_{C[0, t_0]}.$$

Введём функцию $r_0(t) = \{k_0; g_0\}$ и множество

$$R_0 = \{r(t) \in \bar{C}[0, t_0]; \|r - r_0\|_{\bar{C}[0, t_0]} \leq k_0/2\}.$$

Оператор

$$M[r](t) = \{C[k; g](t); D[k; g](t)\},$$

где операторы $C[k; g](t)$, $D[k; g](t)$ определены формулами (1.19), (1.20), отображает множество R_0 в $C[0, t_0]$. Сходимость итерационного процесса (2.3), (2.4) эквивалентна сходимости метода последовательных приближений

$$r_{m+1}(t) = M[r_m](t), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Докажем, что найдётся $t_0 \in (0, T]$ такое, что метод последовательных приближений (2.5) сходится в норме пространства $C[0, t_0]$.

Найдём условия, при которых оператор $M[r](t)$ отображает множество R_0 в себя.

Из определения операторов $A_1[k](t)$, $A_2[k](t)$ следует, что для $i = 1, 2$ и $t \in [0, t_0]$ выполняется условие

$$|A_i[k](t) - A_i[k](0)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^3 |\varphi_n| \left| \exp\left(-n^2 \int_0^t k(\theta) d\theta\right) - 1 \right| \leq c_1 t_0 \quad \text{для любого } r \in R_0, \quad (2.6)$$

где $c_1 = (3k_0/2) \sum_{n=1}^{\infty} n^5 |\varphi_n|$.

Здесь и далее через c_i обозначаются положительные постоянные, не зависящие от $r \in R_0$ и $t \in [0, T]$.

С учётом определений (1.14), (1.15) получим для $i = 1, 2$ и $t \in [0, t_0]$

$$|B_i[k; g](t)| \leq t_0 (|g_0| + k_0/2) \sum_{n=1}^{\infty} n^3 |f_n| = c_2 t_0 \quad \text{при всех } r \in R_0. \quad (2.7)$$

Обозначим через $\omega_p(\delta)$ и $\omega_h(\delta)$ модули непрерывности функций $p'(t)$ и $h'(t)$ на отрезке $[0, T]$.

Выберем $t_0 \in (0, T]$ такое, что

$$|\varphi'''(0)f'(\pi) - \varphi'''(\pi)f'(0)| - (|f'(\pi)| + |f'(0)|)(c_1 + c_2)t_0 \geq c_3 > 0. \quad (2.8)$$

Тогда, используя определения (1.19), (2.2) и неравенства (2.6)–(2.8), имеем

$$|C[k; g](t) - k_0| \leq c_3^{-1} (\omega_p(t_0)|f'(\pi)| + \omega_h(t_0)|f'(0)|) + c_4 t_0, \quad t \in [0, t_0], \quad \text{для всех } r \in R_0, \quad (2.9)$$

где

$$c_4 = c_3^{-2} |p'(0)f'(\pi) - h'(0)f'(0)| (|f'(\pi)| + |f'(0)|) (c_1 + c_2).$$

С учётом определений операторов $A_1[k](t)$, $A_2[k](t)$ и $Q[k; g](t)$ получим неравенства

$$|A_1[k](t)| \leq |\varphi'''(0)| + c_1 t_0, \quad |A_2[k](t)| \leq |\varphi'''(\pi)| + c_1 t_0, \quad t \in [0, t_0], \quad \text{для любого } r \in R_0, \quad (2.10)$$

$$|Q[k; g](t)| \leq c_2 t_0 (|\varphi'''(0)| + |\varphi'''(\pi)| + 2c_1 t_0), \quad t \in [0, t_0], \quad \text{для любого } r \in R_0. \quad (2.11)$$

Из определения оператора $D[k; g](t)$ и постоянной g_0 следует, что

$$|D[k; g](t) - g_0| = |D[k; g](t) - D[k; g](0)|.$$

Учтём определения (1.18), (1.20), неравенство (2.8) и оценки (2.6), (2.7), (2.10), (2.11), в результате имеем

$$\begin{aligned} |D[k; g](t) - g_0| &= |D[k; g](t) - D[k; g](0)| \leq \\ &\leq c_3^{-1} (\omega_p(t_0)(|\varphi'''(\pi)| + c_1 t_0) + \omega_h(t_0)(|\varphi'''(0)| + c_1 t_0)) + c_5 t_0, \quad t \in [0, t_0], \quad \text{для всех } r \in R_0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} c_5 &= c_3^{-1} ((|p'(0)| + |h'(0)|)c_1 + 3k_0 c_2 (|\varphi'''(0)| + |\varphi'''(\pi)| + 2c_1 T)/2) + \\ &+ c_3^{-2} c_1 (|f'(0)| + |f'(\pi)|) |p'(0)\varphi'''(\pi) - h'(0)\varphi'''(0)|. \end{aligned}$$

Выберем $t_0 \in (0, T]$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$c_3^{-1}(\omega_p(t_0)(|\varphi'''(\pi)| + |f'(\pi)| + c_1 t_0) + \omega_h(t_0)(|\varphi'''(0)| + |f'(0)| + c_1 t_0)) + (c_4 + c_5)t_0 \leq k_0/2. \quad (2.13)$$

Тогда из неравенств (2.9), (2.12), (2.13) следует, что оператор $M[r](t)$ отображает множество R_0 в себя.

Получим условия, при выполнении которых оператор $M[r](t)$ является сжимающим на множестве R_0 .

Введём функцию $q(t) = p'(t)f'(\pi) - h'(t)f'(0)$.

Пусть $r_1(t) = \{k_1(t); g_1(t)\}$ и $r_2(t) = \{k_2(t); g_2(t)\}$ – две произвольные функции из множества R_0 . Из определения (1.19) и неравенства (2.8) следует

$$\begin{aligned} \|C[k_1; g_1] - C[k_2; g_2]\|_{C[0, t_0]} &\leq c_3^{-2} \|q\|_{C[0, T]} [|f'(\pi)| \times \|A_1[k_1] - A_1[k_2]\|_{C[0, t_0]} + \\ &+ |f'(0)| \times \|A_2[k_1] - A_2[k_2]\|_{C[0, t_0]} + |f'(\pi)| \times \|B_1[k_1; g_1] - B_1[k_2; g_2]\|_{C[0, t_0]} + \\ &+ |f'(0)| \times \|B_2[k_1; g_1] - B_2[k_2; g_2]\|_{C[0, t_0]}]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

С учётом определений (1.12) и (1.13) имеем

$$\|A_i[k_1] - A_i[k_2]\|_{C[0, t_0]} \leq c_6 t_0 \|k_1 - k_2\|_{C[0, t_0]}, \quad i = 1, 2, \quad (2.15)$$

где $c_6 = \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n| n^5$.

Из определения операторов $B_i[k; g](t)$, $i = 1, 2$, следует неравенство

$$\|B_i[k_1; g_1] - B_i[k_2; g_2]\|_{C[0, t_0]} \leq c_7 t_0^2 \|k_1 - k_2\|_{C[0, t_0]} + c_8 t_0 \|g_1 - g_2\|_{C[0, t_0]}, \quad (2.16)$$

где

$$c_7 = (|g_0| + k_0/2) \sum_{n=1}^{\infty} n^5 |f_n|, \quad c_8 = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 |f_n|.$$

Используя неравенства (2.14)–(2.16), получим

$$\|C[k_1; g_1] - C[k_2; g_2]\|_{C[0, t_0]} \leq c_9 t_0 \|k_1 - k_2\|_{C[0, t_0]} + c_{10} t_0 \|g_1 - g_2\|_{C[0, t_0]}, \quad (2.17)$$

где $c_9 = c_3^{-2} \|q\|_{C[0, T]} (|f'(\pi)| + |f'(0)|) (c_6 + c_7 T)$, $c_{10} = c_3^{-2} \|q\|_{C[0, T]} (|f'(\pi)| + |f'(0)|) c_8$.

Рассмотрим $\|Q[k_1; g_1] - Q[k_2; g_2]\|_{C[0, t_0]}$. Из формул (1.12)–(1.15) следует, что для любого $r \in R_0$ и $t \in [0, t_0]$ справедливы неравенства

$$|A_i[k](t)| \leq c_{11}; \quad |B_i[k; g](t)| \leq c_8 t_0 (|g_0| + k_0/2), \quad i = 1, 2, \quad (2.18)$$

где $c_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 |\varphi_n|$.

Тогда

$$\begin{aligned} &\|Q[k_1; g_1] - Q[k_2; g_2]\|_{C[0, t_0]} \leq \\ &\leq c_8 t_0^2 (2|g_0| + k_0) c_6 \|k_1 - k_2\|_{C[0, t_0]} + 2c_{11} (c_7 t_0^2 \|k_1 - k_2\|_{C[0, t_0]} + c_8 t_0 \|g_1 - g_2\|_{C[0, t_0]}) = \\ &= c_{12} t_0^2 \|k_1 - k_2\|_{C[0, t_0]} + c_{13} t_0 \|g_1 - g_2\|_{C[0, t_0]}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где $c_{12} = c_8 (2|g_0| + k_0) c_6 + 2c_{11} c_7$, а $c_{13} = 2c_{11} c_8$.

С учётом оценок (2.15), (2.16), (2.18) и (2.19) имеем

$$\begin{aligned} \|D[k_1; g_1] - D[k_2; g_2]\|_{C[0, t_0]} &\leq c_3^{-1} t_0 \left[(\|p'\|_{C[0, T]} + \|h'\|_{C[0, T]}) c_6 \|k_1 - k_2\|_{C[0, t_0]} + \right. \\ &+ \left. c_{11} c_8 (2|g_0| + k_0) \|k_1 - k_2\|_{C[0, t_0]} + \frac{3k_0}{2} (c_{12} t_0 \|k_1 - k_2\|_{C[0, t_0]} + c_{13} \|g_1 - g_2\|_{C[0, t_0]}) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_3^{-2} t_0 [(\|p'\|_{C[0,T]} + \|h'\|_{C[0,T]}) c_{11} + 3k_0 c_{11} c_8 t_0 (|g_0| + k_0/2)] (|f'(0)| + |f'(\pi)|) c_6 \|k_1 - k_2\|_{C[0,t_0]} = \\
& = t_0 (c_{14} + c_{15} t_0) \|k_1 - k_2\|_{C[0,t_0]} + t_0 c_{16} \|g_1 - g_2\|_{C[0,t_0]}, \tag{2.20}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
c_{14} & = c_3^{-1} [(\|p'\|_{C[0,T]} + \|h'\|_{C[0,T]}) c_6 + c_{11} c_8 (2|g_0| + k_0)] + \\
& + c_3^{-2} (\|p'\|_{C[0,T]} + \|h'\|_{C[0,T]}) c_{11} (|f'(0)| + |f'(\pi)|) c_6, \\
c_{15} & = 3k_0 c_3^{-1} c_{12}/2 + c_3^{-2} 3k_0 c_{11} c_8 (|g_0| + k_0/2) (|f'(0)| + |f'(\pi)|) c_6,
\end{aligned}$$

а $c_{16} = c_3^{-1} 3k_0 c_{13}/2$.

Пусть $t_0 \in (0, T]$ такое, что выполняются неравенства

$$c_9 t_0 + (c_{14} + c_{15} t_0) t_0 \leq \alpha, \tag{2.21}$$

$$c_{10} t_0 + c_{16} t_0 \leq \alpha, \tag{2.22}$$

где α – положительная постоянная, $\alpha < 1$. Тогда из неравенств (2.17), (2.20)–(2.22) и определения оператора $M[k; g](t)$ следует, что он является сжимающим на множестве R_0 .

С учётом неравенств (2.8), (2.13), (2.21) и (2.22) получаем, что существует $t_0 \in (0, T]$ такое, что оператор $M[k; g](t)$ отображает множество R_0 в себя и является сжимающим на этом множестве. Следовательно, функции $k_m(t)$, $g_m(t)$ при $m \rightarrow \infty$ равномерно сходятся на отрезке $[0, t_0]$ к непрерывным функциям $\bar{k}(t)$ и $\bar{g}(t)$, являющимся решением системы операторных уравнений (1.21), (1.22). Тогда эти функции удовлетворяют системе уравнений (1.16), (1.17). Проинтегрировав эти уравнения с учётом условий (1.9), получим, что $\bar{k}(t)$ и $\bar{g}(t)$ являются решением системы уравнений (1.10), (1.11). Таким образом, функция $u(x, t; \bar{k}, \bar{g})$ удовлетворяет уравнению (1.1) и условиям (1.2), (1.3), (1.7), (1.8) для $t \in [0, t_0]$. Следовательно, функции $\bar{k}(t)$ и $\bar{g}(t)$ являются решением обратной задачи для $t \in [0, t_0]$. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности // Докл. АН СССР. 1935. Т. 1. № 5. С. 294–300.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск, 1980.
3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1969.
4. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М., 1984.
5. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. М., 1988.
6. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М., 1994.
7. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.V. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York, 2000.
8. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. New York, 2006.
9. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, 2008.
10. Самарский А.А., Вабшцевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М., 2009.
11. Музылев Н.В. О единственности одновременного определения коэффициентов теплопроводности и объемной теплоемкости // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1983. Т. 23. № 1. С. 102–108.
12. Клибанов М.В. Об одном классе обратных задач для нелинейных параболических уравнений // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280. № 3. С. 533–536.
13. Иванчов Н.И., Пабыривска Н.В. Об определении двух зависящих от времени коэффициентов в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43. № 2. С. 406–413.
14. Fatullayev A.C., Gasilov N., Yusubov I. Simultaneous determination of unknown coefficients in a parabolic equation // Appl. Anal. 2008. V. 87. № 10. P. 1167–1177.

15. *Hussein M.S., Lesnic D., Ivanchov M.I.* Simultaneous determination of time-dependent coefficients in the heat equation // *Comp. and Math. with Appl.* 2014. V. 67. № 5. P. 1065–1091.
16. *Su L.D., Vabishechevish P.N., Vasil'ev V.I.* The inverse problem of simultaneous determination of right-hand side and the lowest coefficients in parabolic equations // 6th Intern. Conf. "Numerical Analysis and its Applications" / Eds. I. Dimov, I. Farago, I. Vulkov. Lozenetz, Bulgaria, June 15–22, 2016. P. 633–639.
17. *Камынин В.Л.* Об обратной задаче одновременного определения двух зависящих от времени младших коэффициентов в недивергентном параболическом уравнении на плоскости // *Мат. заметки.* 2020. Т. 107. № 1. С. 74–86.
18. *Бимуратов С.Ш., Кабанikhин С.И.* Решение одномерной обратной задачи электродинамики методом Ньютона–Канторовича // *Журн. вычислит. математики и мат. физики.* 1992. Т. 32. № 12. С. 1900–1915.
19. *Monch L.* A Newton method for solving inverse scattering problem for a sound-hard obstacle // *Inverse Problems.* 1996. V. 12. № 3. P. 309–324.
20. *Kabanikhin S.I., Scherzer O., Shichlenin M.A.* Iteration method for solving a two-dimensional inverse problem for hyperbolic equation // *J. of Inverse and Ill-Posed Problems.* 2003. V. 11. № 1. P. 1–23.
21. *Yan-Bo Ma.* Newton method for estimation of the Robin coefficient // *J. Nonlin. Sci. Appl.* 2015. V. 8. № 5. P. 660–669.
22. *Денисов А.М.* Итерационный метод решения обратной коэффициентной задачи для гиперболического уравнения // *Дифференц. уравнения.* 2017. Т. 53. № 7. С. 943–949.
23. *Баев А.В., Гаврилов С.В.* Итерационный метод решения обратной задачи рассеяния для системы уравнений акустики в слоисто-неоднородной среде с поглощением // *Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика.* 2018. № 2. С. 7–14.
24. *Гаврилов С.В., Денисов А.М.* Численные методы решения нелинейного операторного уравнения, возникающего в обратной коэффициентной задаче // *Дифференц. уравнения.* 2021. Т. 57. № 7. С. 900–906.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 11.02.2022 г.
После доработки 11.02.2022 г.
Принята к публикации 25.05.2022 г.

УДК 519.624.2

ДВИЖЕНИЕ ФРОНТА В ЗАДАЧЕ СО СЛАБОЙ АДВЕКЦИЕЙ В СЛУЧАЕ НЕПРЕРЫВНОГО ИСТОЧНИКА И ИСТОЧНИКА МОДУЛЬНОГО ТИПА

© 2022 г. Н. Н. Нефедов, Е. И. Никулин, А. О. Орлов

Получено асимптотическое приближение решения, имеющего вид движущегося внутреннего слоя (фронта), начально-краевой задачи для сингулярно возмущённого параболического уравнения реакция–адвекция–диффузия с малой адвекцией. Отдельно рассмотрены случаи непрерывного источника (нелинейности, описывающей взаимодействие, реакцию) и случай разрыва источника при некотором значении искомой функции, возникающий в ряде актуальных приложений. Для каждой задачи построено асимптотическое приближение решения и доказаны теоремы существования и единственности такого решения.

DOI: 10.31857/S037406412206005X, EDN: CDARNG

1. Введение. Постановка задачи. Рассмотрим сингулярно возмущённую начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon A(x, \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial x} - f(u, x, \varepsilon) &= 0, \quad x \in (-1, 1), \quad t \in (0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(-1, t, \varepsilon) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t, \varepsilon) = 0, \quad t \in [0, T], \\ u(x, 0, \varepsilon) &= u_{\text{init}}(x, \varepsilon), \quad x \in [-1, 1], \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ – малый параметр. В работе получено асимптотическое приближение решения этой задачи, имеющего вид движущегося внутреннего слоя (фронта). Исследование формирования и движения фронтов в задачах для уравнений реакция–адвекция–диффузия обусловлено важными приложениями, использующими для математических моделей такие задачи, в частности в теории нелинейных волн (см. статьи [1, 2]), при изучении автоволновых процессов в урбоэкологии (см. работы [3, 4]) и многих других приложениях.

Стационарные решения задачи (1) с пограничными и внутренними слоями изучены в [5]. Периодические решения задачи (1) рассматривались в [6, 7].

Результаты, полученные в данной работе, развивают результаты статьи [8], где рассмотрено движение фронта при отсутствии адвекции ($A(x, \varepsilon) = 0$ в уравнении в (1)), на новые классы задач, включающие так называемые модульные источники и адвекцию.

В обсуждаемых ниже задачах предполагается, что в начальный момент времени фронт уже сформирован. Это означает, что функция $u_{\text{init}}(x, \varepsilon)$ имеет внутренний переходный слой в окрестности некоторой точки $x_{00} \in (-1, 1)$, т.е. близка к некоторому корню $\varphi^{(-)}(x)$ вырожденного уравнения $f(u, x, 0) = 0$ левее точки x_{00} и к корню $\varphi^{(+)}(x)$ правее этой точки. В окрестности x_{00} происходит резкий переход от $\varphi^{(-)}(x)$ к $\varphi^{(+)}(x)$. Доказано существование решения вида движущегося фронта, т.е. такого решения, которое имеет внутренний переходный слой, в каждый момент времени локализованный в окрестности движущейся точки $\hat{x}(t, \varepsilon) \in (-1, 1)$, асимптотическое приближение которой получено ниже.

В п. 2 будет разобран случай непрерывного источника кубического типа. Поскольку поведение решения и его асимптотика в случае разрывной при некотором значении u функции $f(u, x, \varepsilon)$ в значительной мере аналогичны случаю, рассмотренному в п. 2, в п. 3 остановимся лишь на отличительных особенностях. Полученные результаты проиллюстрированы примерами, которые могут быть использованы для разработки эффективных численных методов для исследуемых классов задач.

2. Случай непрерывного источника. Предполагаем, что выполнены следующие условия:

Условие 1. Функции $A(x, \varepsilon)$, $f(u, x, \varepsilon)$ являются достаточно гладкими в своих областях определения.

Условие 2. Пусть вырожденное уравнение $f(u, x, 0) = 0$ имеет ровно три решения $u = \varphi^{(\pm, 0)}(x)$, причём

$$\varphi^{(-)}(x) < \varphi^{(0)}(x) < \varphi^{(+)}(x), \quad x \in [-1, 1],$$

а также выполнены неравенства

$$f_u(\varphi^{(\pm)}(x), x, 0) > 0, \quad f_u(\varphi^{(0)}(x), x, 0) < 0, \quad x \in [-1, 1].$$

2.1. Построение формальной асимптотики решения. Асимптотика решения задачи (1) строится методом пограничных функций (см. [9]) отдельно в каждой из областей $[-1, \hat{x}] \times [0, T]$ и $[\hat{x}, 1] \times [0, T]$ с подвижной границей (см. [10]) с использованием развиваемого в наших работах эффективного метода построения асимптотики локализации внутреннего слоя:

$$U(x, \varepsilon) = \begin{cases} U^{(-)}(x, t, \varepsilon), & (x, t, \varepsilon) \in [-1, \hat{x}] \times [0, T] \times (0, \varepsilon_0], \\ U^{(+)}(x, t, \varepsilon), & (x, t, \varepsilon) \in [\hat{x}, 1] \times [0, T] \times (0, \varepsilon_0]. \end{cases}$$

Каждую из функций $U^{(\pm)}(x, \varepsilon)$ будем представлять в виде суммы трёх слагаемых:

$$U^{(\pm)}(x, t, \varepsilon) = \bar{u}^{(\pm)}(x, \varepsilon) + Q^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon) + R^{(\pm)}(\eta^{(\pm)}, \varepsilon). \quad (2)$$

Здесь $\bar{u}^{(\pm)}(x, \varepsilon) = \bar{u}_0^{(\pm)}(x) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\pm)}(x) + \dots$ – регулярная часть разложения, функции

$$Q^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon) = Q_0^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon) + \dots$$

описывают поведение решения в окрестности точки перехода $\hat{x}(t, \varepsilon)$, $\xi = (x - \hat{x}(t, \varepsilon))/\varepsilon$ – переменная переходного слоя: $\xi \leq 0$ для функций с индексом $(-)$ и $\xi \geq 0$ для функций с индексом $(+)$; функции $R(\eta^{(\pm)}, \varepsilon) = R_0(\eta^{(\pm)}) + \varepsilon R_1(\eta^{(\pm)}) + \dots$ описывают поведение решения в окрестностях граничных точек отрезка $[-1, 1]$, $\eta^{(\pm)} = (x \mp 1)/\varepsilon$ – растянутые переменные, соответственно, вблизи точек $x = \pm 1$. В настоящей работе не будем описывать процедуру построения функций $R_i(\eta^{(\pm)})$, поскольку они определяются стандартным образом (см., например, [5]). Отметим, что данные функции не зависят от переменной t и тем самым не участвуют в описании движущегося переходного слоя, а функции $R_0(\eta^{(\pm)}) = 0$ в силу краевых условий Неймана.

Положение внутреннего переходного слоя определяется из условия C^1 -сшивания асимптотических представлений $U^{(-)}(x, t, \varepsilon)$ и $U^{(+)}(x, t, \varepsilon)$ в точке перехода $\hat{x}(t, \varepsilon)$:

$$U^{(-)}(\hat{x}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = U^{(+)}(\hat{x}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \varphi^{(0)}(\hat{x}(t, \varepsilon)), \quad (3)$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} U^{(-)}(\hat{x}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} U^{(+)}(\hat{x}(t, \varepsilon), t, \varepsilon). \quad (4)$$

Точку перехода $x = \hat{x}(t, \varepsilon)$ будем искать в виде разложения по степеням малого параметра ε :

$$\hat{x}(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots \quad (5)$$

Коэффициенты данного разложения будут определены в процессе построения асимптотики.

Регулярная часть асимптотики определяется после подстановки представления слагаемого $\bar{u}^{(\pm)}(x, \varepsilon)$ в уравнение

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{u}^{(\pm)}}{\partial x^2} - \varepsilon A(x, \varepsilon) \frac{\partial \bar{u}^{(\pm)}}{\partial x} - f(\bar{u}^{(\pm)}, x, \varepsilon) = 0.$$

Стандартным образом (см. статью [5]) получим алгебраические уравнения для определения функций регулярной части $\bar{u}_k^{(\pm)}(x)$, $k \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \sqcup \{0\}$.

С учётом условия 2 регулярные функции нулевого порядка определяются как

$$\bar{u}_0^{(\pm)}(x) = \varphi^{(\pm)}(x).$$

Для сокращения записей введём обозначения

$$\bar{f}_u^{(\pm)}(x) := f_u(\varphi^{(\pm)}(x), x, 0).$$

Функции $\bar{u}_k^{(\pm)}(x)$ при $k \in \mathbb{N}$ определяются из уравнений

$$\bar{f}_u^{(\pm)}(x) \bar{u}_k^{(\pm)}(x) = \bar{h}_k^{(\pm)}(x),$$

где функции $\bar{h}_k^{(\pm)}(x)$ известны на каждом k -м шаге и выражаются рекуррентно через функции $\bar{u}_k^{(\pm)}(x)$ с индексами $0, 1, \dots, k - 1$. Разрешимость уравнений следует из условия 2.

Для того чтобы получить уравнения, которым удовлетворяют функции переходного слоя $Q^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon)$, запишем дифференциальный оператор задачи в переменных (ξ, t) . Оператор

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon A(x, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial x}$$

принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial \hat{x}(t, \varepsilon)}{\partial t} - A(\varepsilon \xi + \hat{x}(t, \varepsilon), \varepsilon) \right) \frac{\partial}{\partial \xi} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}.$$

Уравнения для функций $Q_k^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon)$, $k \in \mathbb{N}_0$, определяются стандартным способом путём приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε в обеих частях равенств:

$$\frac{\partial^2 Q^{(\pm)}}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial \hat{x}(t, \varepsilon)}{\partial t} - A(\varepsilon \xi + \hat{x}(t, \varepsilon), \varepsilon) \right) \frac{\partial Q^{(\pm)}}{\partial \xi} - \varepsilon \frac{\partial Q^{(\pm)}}{\partial t} = Q f^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon), \tag{6}$$

где

$$Q f^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon) = f(\bar{u}^{(\pm)}(\varepsilon \xi + \hat{x}(t, \varepsilon), \varepsilon) + Q^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon), \varepsilon \xi + \hat{x}(t, \varepsilon), \varepsilon) - f(\bar{u}^{(\pm)}(\varepsilon \xi + \hat{x}(t, \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon \xi + \hat{x}(t, \varepsilon), \varepsilon).$$

Не будем раскладывать по степеням ε точку перехода $\hat{x}(t, \varepsilon)$, в отличие от подхода, изложенного в работе [8]. Это упростит алгоритм построения асимптотики.

Потребуем, чтобы функции переходного слоя $Q_k^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon)$, $k \in \mathbb{N}_0$, удовлетворяли условиям равенства нулю на бесконечности:

$$Q_k^{(-)}(\xi, t, \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow -\infty,$$

$$Q_k^{(+)}(\xi, t, \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow +\infty, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad t \in [0, T].$$

Приравняв коэффициенты при ε^0 в правой и левой частях равенств (6), получим уравнения для функции $Q_0^{(-)}(\xi, t, \varepsilon)$ при $\xi \leq 0$ и функции $Q_0^{(+)}(\xi, t, \varepsilon)$ при $\xi \geq 0$:

$$\frac{\partial^2 Q_0^{(\pm)}}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial \hat{x}(t, \varepsilon)}{\partial t} - A(\hat{x}(t, \varepsilon), 0) \right) \frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial \xi} = f(\varphi^{(\pm)}(\hat{x}(t, \varepsilon)) + Q_0^{(\pm)}, \hat{x}(t, \varepsilon), 0). \tag{7}$$

Дополнительные условия при $\xi = 0$ получим из условия непрерывного сшивания (3), записанного в нулевом порядке по ε :

$$Q_0^{(-)}(0, t, \varepsilon) + \varphi^{(-)}(\hat{x}(t, \varepsilon)) = Q_0^{(+)}(0, t, \varepsilon) + \varphi^{(+)}(\hat{x}(t, \varepsilon)) = \varphi^{(0)}(\hat{x}(t, \varepsilon)).$$

Добавим также условия на бесконечности $Q_0^{(-)}(\xi, t, \varepsilon) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow -\infty$, $Q_0^{(+)}(\xi, t, \varepsilon) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow +\infty$, $t \in [0, T]$.

Введём оператор D :

$$D\hat{x} := \frac{\partial \hat{x}(t, \varepsilon)}{\partial t} - A(\hat{x}(t, \varepsilon), 0). \tag{8}$$

Введём функции

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(\pm)}(\xi, \hat{x}) &= \varphi^{(\pm)}(\hat{x}(t, \varepsilon)) + Q_0^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon), \\ \tilde{u}(\xi, \hat{x}) &= \begin{cases} \varphi^{(-)}(\hat{x}(t, \varepsilon)) + Q_0^{(-)}(\xi, t, \varepsilon), & \text{если } \xi \leq 0; \\ \varphi^{(+)}(\hat{x}(t, \varepsilon)) + Q_0^{(+)}(\xi, t, \varepsilon), & \text{если } \xi \geq 0; \end{cases} \\ \tilde{v}^{(-)}(\xi, \hat{x}) &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}(\xi, \hat{x}), \quad \xi \leq 0, \quad \tilde{v}^{(+)}(\xi, \hat{x}) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}(\xi, \hat{x}), \quad \xi \geq 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Запишем уравнения (7), а также дополнительные условия с использованием (9):

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}^{(\pm)}}{\partial \xi^2} + D\hat{x} \frac{\partial \tilde{u}^{(\pm)}}{\partial \xi} = f(\tilde{u}^{(\pm)}, \hat{x}, 0), \quad \tilde{u}^{(\pm)}(0, \hat{x}) = \varphi^{(0)}(\hat{x}), \quad \tilde{u}^{(\pm)}(\pm\infty, \hat{x}) = \varphi^{(\pm)}(\hat{x}). \tag{10}$$

Вместе с задачами (10) рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi^2} + W \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} = f(\hat{u}, \hat{x}, 0), \quad \hat{u}(0, \hat{x}) = \varphi^{(0)}(\hat{x}), \quad \hat{u}(\pm\infty, \hat{x}) = \varphi^{(\pm)}(\hat{x}). \tag{11}$$

Задача (11) подробно изучена в статье [11]. Приведём необходимый нам результат в виде леммы.

Лемма 1. Для каждого $\hat{x} \in (-1, 1)$ существует единственная величина W такая, что задача (11) имеет единственное гладкое монотонное решение $\hat{u}(\xi, \hat{x})$, удовлетворяющее оценке

$$|\hat{u}(\xi, \hat{x}) - \varphi^{(\pm)}(\hat{x})| < C \exp(-\kappa|\xi|),$$

где C и κ – некоторые положительные постоянные. При этом зависимость $W(\hat{x})$ определяется следующим выражением:

$$W(\hat{x}) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi}(\xi, \hat{x}) \right)^2 d\xi \right)^{-1} \int_{\varphi^{(-)}(\hat{x})}^{\varphi^{(+)}(\hat{x})} f(u, \hat{x}, 0) du.$$

Гладкость функции $W(\hat{x})$ совпадает с гладкостью функции $f(\hat{u}, \hat{x}, 0)$.

Потребуем выполнения следующего условия.

Условие 3. Пусть задача

$$\frac{dx}{dt} = W(x) + A(x, 0), \quad x(0) = x_{00} \tag{12}$$

имеет решение $x = x_0(t)$:

$$-1 < x_0(t) < 1 \quad \text{при } t \in [0, T].$$

Потребуем также, чтобы

$$W(x_0) + A(x_0, 0) > 0 \quad \text{для всех } x_0 \in [-1, 1].$$

Неравенство в условии 3 гарантирует отсутствие стационарных решений у задачи (12). Обозначим через (10a) задачи (10), в которых везде \hat{x} заменено на $x_0(t)$, или, другими словами, в которых положили $\varepsilon = 0$. Из леммы 1 и условия 3 следует единственная разрешимость задач (10a), так как выполнено условие $Dx_0 = W(x_0)$. При этом

$$\frac{\partial \tilde{u}^{(+)}(0, x_0(t))}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{u}^{(-)}(0, x_0(t))}{\partial \xi} = 0.$$

В силу предполагаемой гладкости функций f, A (см. условие 1) задачи (10) являются регулярным возмущением задач (10a), а потому также единственно разрешимы. Отметим, что в силу представления (5) имеем теперь

$$\frac{\partial \tilde{u}^{(+)}(0, \hat{x}(t, \varepsilon))}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{u}^{(-)}(0, \hat{x}(t, \varepsilon))}{\partial \xi} = O(\varepsilon).$$

Таким образом, построение функции переходного слоя в нулевом порядке завершено.

Функции переходного слоя первого порядка находятся из следующих задач:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_1^{(\pm)}}{\partial \xi^2} + D\hat{x} \frac{\partial Q_1^{(\pm)}}{\partial \xi} - \tilde{f}_u(\xi, t) Q_1^{(\pm)} &= r_1^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon), \\ Q_1^{(\pm)}(0, t, \varepsilon) + \bar{u}_1^{(\pm)}(\hat{x}) &= 0, \\ Q_1^{(\pm)}(\pm\infty, t, \varepsilon) &= 0, \end{aligned} \tag{13}$$

где введены обозначения

$$\tilde{f}_u(\xi, t) = f_u(\tilde{u}(\xi, \hat{x}), \hat{x}, 0) \tag{14}$$

и

$$\begin{aligned} r_1^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon) &= \frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial A}{\partial x}(\hat{x}, 0)\xi + \frac{\partial A}{\partial \varepsilon}(\hat{x}, 0) \right) + \left(\bar{u}_1^{(\pm)}(\hat{x}) + \xi \frac{d\varphi^{(\pm)}}{dx}(\hat{x}) \right) \tilde{f}_u(\xi, t) + \\ &+ \xi \tilde{f}_x(\xi, t) + \tilde{f}_\varepsilon(\xi, t) + A(\hat{x}, 0) \frac{d\varphi^{(\pm)}}{dx}(\hat{x}). \end{aligned}$$

Здесь производные $\tilde{f}_x(\xi, t), \tilde{f}_\varepsilon(\xi, t)$ вычисляются в той же точке, что и производная $\tilde{f}_u(\xi, t)$ в (14). Задачу для функции $Q_1^{(-)}(\xi, t, \varepsilon)$ будем решать на полупрямой $\xi \leq 0$, а для функции $Q_1^{(+)}(\xi, t, \varepsilon)$ – на полупрямой $\xi \geq 0$. Решения задач (13) записываются в явном виде:

$$\begin{aligned} Q_1^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon) &= -\bar{u}_1^{(\pm)}(\hat{x}) \frac{\tilde{v}^{(\pm)}(\xi, \hat{x})}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, \hat{x})} + \\ &+ \tilde{v}^{(\pm)}(\xi, \hat{x}) \int_0^\xi (\tilde{v}^{(\pm)}(\eta, \hat{x}))^{-2} e^{-(D\hat{x})\eta} \int_{\pm\infty}^\eta \tilde{v}^{(\pm)}(\sigma, \hat{x}) e^{(D\hat{x})\sigma} r_1^{(\pm)}(\sigma, t, \varepsilon) d\sigma d\eta. \end{aligned} \tag{15}$$

Из выражений для функций $r_1^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon)$ следует, что они имеют экспоненциальные оценки, а из (15) стандартным образом следует, что аналогичные оценки справедливы и для функций $Q_1^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon)$. Аналогично первому приближению можно определить функции переходного слоя $Q_k^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon)$ для любого $k = 2, 3, \dots$

2.2. Асимптотическое приближение положения фронта. В силу важности этого раздела построения асимптотики выделим его в отдельный пункт.

Неизвестные коэффициенты $x_i(t)$, $i \in \mathbb{N}$, разложения (5) определяются из условий сшивания (4) производных асимптотических разложений. Введём функцию

$$H(\varepsilon, t) := \varepsilon \left(\frac{dU^{(+)}}{dx}(\hat{x}, t, \varepsilon) - \frac{dU^{(-)}}{dx}(\hat{x}, t, \varepsilon) \right) = H_0(\varepsilon, t) + \varepsilon H_1(\varepsilon, t) + \varepsilon^2 H_2(\varepsilon, t) + \dots, \quad (16)$$

где

$$H_0(\varepsilon, t) = \frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial \xi}(0, t, \varepsilon) - \frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial \xi}(0, t, \varepsilon),$$

$$H_1(\varepsilon, t) = \frac{d\varphi^{(+)}}{dx}(\hat{x}) - \frac{d\varphi^{(-)}}{dx}(\hat{x}) + \left(\frac{\partial Q_1^{(+)}}{\partial \xi}(0, t, \varepsilon) - \frac{\partial Q_1^{(-)}}{\partial \xi}(0, t, \varepsilon) \right),$$

и т.д.

Условие C^1 -сшивания (4) выражается равенством $H(\hat{x}, t, \varepsilon) = 0$. В силу леммы 1 и условия 3 с учётом разложения точки перехода (5) это равенство выполнено в порядке ε^0 .

Анализ задач (10), (11) показывает, что функция H_0 может быть представлена в виде

$$H_0(\varepsilon, t) = (D\hat{x} - W(\hat{x})) \frac{1}{\bar{v}(0, \hat{x})} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}^2(\xi, \hat{x}) e^{(D\hat{x})\xi} d\xi + O(\varepsilon^2). \quad (17)$$

Как следует из разложения (16) и представления (17), члены $x_i(t)$, $i \geq 1$, высших порядков в (5) могут быть найдены из следующих задач Коши:

$$\frac{dx_i}{dt} + \left(W'(x_0(t)) + \frac{\partial A(x, 0)}{\partial x} \Big|_{x=x_0(t)} \right) x_i(t) = G_i(t), \quad x_i(0) = 0, \quad (18)$$

где $G_i(t)$ – известные функции.

2.3. Обоснование формальной асимптотики. Положим

$$X_n(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i x_i(t), \quad \xi = \frac{x - X_n(t, \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Кривая $X_n(t, \varepsilon)$ разделяет область $\bar{D} : (x, t) \in [-1, 1] \times [0, T]$ на две подобласти:

$$\bar{D}_n^{(-)} : (x, t) \in [-1, X_n(t, \varepsilon)] \times [0, T] \quad \text{и} \quad \bar{D}_n^{(+)} : (x, t) \in [X_n(t, \varepsilon), 1] \times [0, T].$$

Определим функции

$$U_n^{(-)}(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i (\bar{u}_i^{(-)}(x) + Q_i^{(-)}(\xi, t, \varepsilon) + R_i^{(-)}(\eta^{(-)})), \quad (x, t) \in \bar{D}_n^{(-)},$$

$$U_n^{(+)}(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i (\bar{u}_i^{(+)}(x) + Q_i^{(+)}(\xi, t, \varepsilon) + R_i^{(+)}(\eta^{(+)})), \quad (x, t) \in \bar{D}_n^{(+)},$$

где $\hat{x}(t, \varepsilon)$, входящие в выражения для функций переходного слоя, заменены на $X_n(t, \varepsilon)$, и обозначим

$$U_n(x, t, \varepsilon) = \begin{cases} U_n^{(-)}(x, t, \varepsilon), & (x, t) \in \bar{D}_n^{(-)}, \\ U_n^{(+)}(x, t, \varepsilon), & (x, t) \in \bar{D}_n^{(+)}. \end{cases} \quad (19)$$

Для доказательства существования решения вида движущегося фронта используем асимптотический метод дифференциальных неравенств [12]. Построим непрерывные функции $\alpha(x, t, \varepsilon)$, $\beta(x, t, \varepsilon)$ таким образом, чтобы они удовлетворяли условиям:

1) условие упорядоченности:

$$\alpha(x, t, \varepsilon) \leq \beta(x, t, \varepsilon), \quad x \in [-1, 1], \quad t \in [0, T], \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0];$$

2) действие дифференциального оператора на верхнее и нижнее решения:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial \beta}{\partial t} - \varepsilon A(x, \varepsilon) \frac{\partial \beta}{\partial x} - f(\beta, x, \varepsilon) \leq 0 \leq \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \varepsilon A(x, \varepsilon) \frac{\partial \alpha}{\partial x} - f(\alpha, x, \varepsilon)$$

для всех $x \in (-1, 1)$, $t \in [0, T]$ за исключением тех $x(t)$, в которых функции $\alpha(x, t, \varepsilon)$, $\beta(x, t, \varepsilon)$ являются негладкими;

3) условия на границе:

$$\frac{d\alpha}{dx}(-1, t, \varepsilon) \geq 0 \geq \frac{\partial \beta}{\partial x}(-1, t, \varepsilon), \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x}(+1, t, \varepsilon) \leq 0 \leq \frac{\partial \beta}{\partial x}(+1, t, \varepsilon), \quad t \in [0, T], \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0];$$

4) условия на начальную функцию:

$$\alpha(x, 0, \varepsilon) \leq u_{\text{init}}(x, \varepsilon) \leq \beta(x, 0, \varepsilon), \quad x \in [-1, 1], \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0];$$

5) условия на скачок производных:

$$\frac{\partial \beta}{\partial x}(\bar{x}(t) - 0, t, \varepsilon) \geq \frac{\partial \beta}{\partial x}(\bar{x}(t) + 0, t, \varepsilon),$$

где $\bar{x}(t)$ – точка, в которой верхнее решение является негладким;

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}(\underline{x}(t) - 0, t, \varepsilon) \leq \frac{\partial \alpha}{\partial x}(\underline{x}(t) + 0, t, \varepsilon),$$

где $\underline{x}(t)$ – точка, в которой нижнее решение является негладким.

Известно (см. [13, 14]), что при выполнении условий 1)–5) существует решение задачи (1), для которого выполняются неравенства

$$\alpha(x, t, \varepsilon) \leq u(x, t, \varepsilon) \leq \beta(x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in [-1, 1] \times [0, T].$$

Верхнее и нижнее решения задачи будем строить как модификацию асимптотических рядов (19). Зададим функцию

$$x_\beta(t, \varepsilon) = X_{n+1}(t, \varepsilon) - \varepsilon^{n+1} \delta(t),$$

где положительная функция $\delta(t) > 0$ будет определена ниже. Будем строить верхнее решение задачи в каждой из областей

$$\bar{D}_\beta^{(-)} : (x, t) \in [-1, x_\beta(t, \varepsilon)] \times [0, T] \quad \text{и} \quad \bar{D}_\beta^{(+)} : (x, t) \in [x_\beta(t, \varepsilon), 1] \times [0, T],$$

$$\beta(x, t, \varepsilon) = \begin{cases} \beta^{(-)}(x, t, \varepsilon), & (x, t) \in \bar{D}_\beta^{(-)}, \\ \beta^{(+)}(x, t, \varepsilon), & (x, t) \in \bar{D}_\beta^{(+)}. \end{cases}$$

Будем сшивать функции $\beta^{(-)}(x, t, \varepsilon)$ и $\beta^{(+)}(x, t, \varepsilon)$ на $x_\beta(t, \varepsilon)$ таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\beta^{(-)}(x_\beta(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \beta^{(+)}(x_\beta(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \varphi^{(0)}(x_\beta(t, \varepsilon)).$$

Отметим, что функция $\beta(x, t, \varepsilon)$ не является гладкой. Введём растянутую переменную

$$\xi_\beta = \frac{x - x_\beta(t, \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Построим функции $\beta^{(\pm)}(x, t, \varepsilon)$ как модификации формальной асимптотики (19):

$$\begin{aligned} \beta^{(-)}(x, t, \varepsilon) &= U_{n+1}^{(-)}|_{\xi_\beta} + \varepsilon^{n+1}(\mu + q^{(-)}(\xi_\beta, t, \varepsilon)) + \\ &+ \varepsilon^{n+1}R_\beta^{(-)}(\eta^{(-)}), \quad (x, t) \in D_\beta^{(-)}, \quad \xi_\beta \leq 0, \quad \eta^{(-)} \geq 0; \\ \beta^{(+)}(x, t, \varepsilon) &= U_{n+1}^{(+)}|_{\xi_\beta} + \varepsilon^{n+1}(\mu + q^{(+)}(\xi_\beta, t, \varepsilon)) + \\ &+ \varepsilon^{n+1}R_\beta^{(+)}(\eta^{(+)}), \quad (x, t) \in D_\beta^{(+)}, \quad \xi_\beta \geq 0, \quad \eta^{(+)} \leq 0. \end{aligned}$$

Здесь под обозначениями $U_{n+1}^{(\pm)}|_{\xi_\beta}$ мы понимаем функции из (19), в которых заменён аргумент ξ у функций переходного слоя на ξ_β , а X_{n+1} – на x_β .

Положительная величина μ выбирается так, чтобы были выполнены условия 1) и 2). Функции $R_\beta^{(\pm)}(\eta^{(\pm)})$ подбираются так, чтобы было выполнено условие 3). Их построение в данной работе не рассматривается. Функции $q^{(\pm)}(\xi_\beta, t, \varepsilon)$ нужны для устранения невязок, которые возникают при действии оператора на верхнее решение. Определим их из следующих задач:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q^{(\pm)}}{\partial \xi_\beta^2} + Dx_\beta \frac{\partial q^{(\pm)}}{\partial \xi_\beta} - \tilde{f}_u(\xi_\beta, t)q^{(\pm)}(\xi_\beta, t, \varepsilon) - qf^{(\pm)}(\xi_\beta, t, \varepsilon) &= 0, \\ q^{(\pm)}(0, t, \varepsilon) + \mu &= 0; \quad q^{(\pm)}(\pm\infty, t, \varepsilon) = 0, \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$qf^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon) = \mu(\tilde{f}_u(\xi, t) - \bar{f}_u^{(\pm)}(x_\beta)).$$

Для данных функций можно получить явные выражения

$$\begin{aligned} q^{(\pm)}(\xi_\beta, t, \varepsilon) &= -\mu \frac{\tilde{v}^{(\pm)}(\xi, x_\beta)}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, x_\beta)} + \\ &+ \tilde{v}^{(\pm)}(\xi, x_\beta) \int_0^{\xi_\beta} (\tilde{v}^{(\pm)}(\eta, x_\beta))^{-2} e^{-(Dx_\beta)\eta} \int_{\pm\infty}^{\eta} \tilde{v}^{(\pm)}(\sigma, x_\beta) e^{(Dx_\beta)\sigma} qf^{(\pm)}(\sigma, t, \varepsilon) d\sigma d\eta. \end{aligned} \tag{21}$$

Функции $q^{(\pm)}(\xi_\beta, t, \varepsilon)$ имеют экспоненциальные оценки.

Можно упростить выражения (21):

$$q^{(\pm)}(\xi_\beta, t, \varepsilon) = -\mu - \mu \bar{f}_u^{(\pm)}(x_\beta) \int_0^{\xi_\beta} (\tilde{v}^{(\pm)}(\eta, x_\beta))^{-2} e^{-(Dx_\beta)\eta} \int_{\pm\infty}^{\eta} \tilde{v}^{(\pm)}(\sigma, x_\beta) e^{(Dx_\beta)\sigma} d\sigma d\eta.$$

По аналогичному алгоритму построим нижнее решение. Зададим функцию

$$x_\alpha(t, \varepsilon) = X_{n+1}(t, \varepsilon) + \varepsilon^{n+1}\delta(t),$$

где $\delta(t)$ – та же самая функция, что и при построении верхнего решения.

Построим нижнее решение

$$\alpha(x, t, \varepsilon) = \begin{cases} \alpha^{(-)}(x, t, \varepsilon), & (x, t) \in \bar{D}_\alpha^{(-)}, \\ \alpha^{(+)}(x, t, \varepsilon), & (x, t) \in \bar{D}_\alpha^{(+)} \end{cases}$$

задачи в каждой из областей

$$\bar{D}_\alpha^{(-)} : (x, t) \in [-1, x_\alpha(t, \varepsilon)] \times [0, T] \quad \text{и} \quad \bar{D}_\alpha^{(+)} : (x, t) \in [x_\alpha(t, \varepsilon), 1] \times [0, T].$$

Будем сшивать функции $\alpha^{(-)}(x, t, \varepsilon)$ и $\alpha^{(+)}(x, t, \varepsilon)$ в точке $x_\alpha(t, \varepsilon)$ таким образом, чтобы было выполнено равенство

$$\alpha^{(-)}(x_\alpha(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \alpha^{(+)}(x_\alpha(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \varphi^{(0)}(x_\alpha(t, \varepsilon)).$$

Отметим, что функция $\alpha(x, t, \varepsilon)$ не является гладкой. Введём растянутую переменную

$$\xi_\alpha = \frac{x - x_\alpha(t, \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Построим функции $\alpha^{(\pm)}(x, t, \varepsilon)$ как модификации формальной асимптотики (19):

$$\begin{aligned} \alpha^{(-)}(x, t, \varepsilon) &= U_{n+1}^{(-)}|_{\xi_\alpha} + \varepsilon^{n+1}(\mu + q^{(-)}(\xi_\alpha, t, \varepsilon)) + \\ &+ \varepsilon^{n+1}R_\alpha^{(-)}(\eta^{(-)}), \quad (x, t) \in D_\beta^{(-)}, \quad \xi_\alpha \leq 0, \quad \eta^{(-)} \geq 0; \\ \alpha^{(+)}(x, t, \varepsilon) &= U_{n+1}^{(+)}|_{\xi_\alpha} + \varepsilon^{n+1}(\mu + q^{(+)}(\xi_\alpha, t, \varepsilon)) + \\ &+ \varepsilon^{n+1}R_\alpha^{(+)}(\eta^{(+)}), \quad (x, t) \in D_\alpha^{(+)}, \quad \xi_\alpha \geq 0, \quad \eta^{(+)} \leq 0. \end{aligned}$$

Здесь $\mu > 0$ – та же величина, что и в выражении для верхнего решения, а $q^{(\pm)}(\xi_\alpha, t, \varepsilon)$ определяются из задач (20), в которых растянутая переменная ξ_β заменена на ξ_α .

Проверим, что построенные функции $\alpha(x, t, \varepsilon)$ и $\beta(x, t, \varepsilon)$ удовлетворяют дифференциальным неравенствам 1)–5). Условие упорядоченности можно проверить аналогично тому, как это было сделано в работе [8].

Покажем выполнение неравенства 2). Из способа построения верхнего и нижнего решений следуют равенства

$$L[\alpha^{(\pm)}] = \varepsilon^{n+1} \bar{f}_u^{(\pm)}(x_\alpha) \mu + O(\varepsilon^{n+2}), \quad L[\beta^{(\pm)}] = -\varepsilon^{n+1} \bar{f}_u^{(\pm)}(x_\beta) \mu + O(\varepsilon^{n+2}).$$

Неравенства вблизи границы 3) выполняются за счёт модификации погранслойных функций и в данной работе не проверяются.

Проверим условие скачка производной

$$\begin{aligned} &\varepsilon \left(\left. \frac{\partial \beta^{(+)}}{\partial x} \right|_{x=x_\beta} - \left. \frac{\partial \beta^{(-)}}{\partial x} \right|_{x=x_\beta} \right) = \\ &= -\varepsilon^{n+1} \frac{1}{\tilde{v}(0, x_0)} \left(L(x_0) \frac{d\delta}{dt} + L(x_0) \left(W'(x_0(t)) + \left. \frac{\partial A(x, 0)}{\partial x} \right|_{x=x_0(t)} \right) \delta(t) + F(x_0) \right) + O(\varepsilon^{n+2}), \end{aligned}$$

где

$$F(x_0) = \mu \left[\bar{f}_u^{(\pm)}(x_0) \int_{\pm\infty}^0 \tilde{v}^{(\pm)}(\sigma, x_0) e^{(Dx_0)\sigma} d\sigma \right]_{-}^{+}, \quad L(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}^2(\xi, x_0) e^{(Dx_0)\xi} d\xi > 0.$$

Определим функцию $\delta(t)$ как решение задачи

$$L(x_0) \frac{d\delta}{dt} + L(x_0) \left(W'(x_0(t)) + \left. \frac{\partial A(x, 0)}{\partial x} \right|_{x=x_0(t)} \right) \delta(t) + F(x_0) = \sigma, \quad \delta(0) = \delta_0,$$

где σ – достаточно большая положительная величина, а $\delta_0 > 0$. В этом случае решение задачи $\delta(t)$ – положительная функция. Таким образом, имеем

$$\varepsilon \left(\left. \frac{\partial \beta^{(+)}}{\partial x} \right|_{x=x_\beta} - \left. \frac{\partial \beta^{(-)}}{\partial x} \right|_{x=x_\beta} \right) = -\varepsilon^{n+1} \frac{\sigma}{\tilde{v}(0, x_0)} + O(\varepsilon^{n+2}).$$

Выражение в правой части отрицательно за счёт $\sigma > 0$. При том же выборе функции $\delta(t)$ будет выполнено неравенство скачка производной для нижнего решения $\alpha(x, t, \varepsilon)$. Таким образом, верна

Теорема 1. *При выполнении условий 1–3 для любой достаточно гладкой начальной функции $u_{\text{init}}(x, \varepsilon)$, лежащей между верхним и нижним решениями*

$$\alpha(x, 0, \varepsilon) \leq u_{\text{init}}(x, \varepsilon) \leq \beta(x, 0, \varepsilon),$$

существует решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1), которое при любом $t \in [0, T]$ заключено между этими верхним и нижним решениями, и для которого функция $U_n(x, t, \varepsilon)$ является равномерным в области $[-1, 1] \times [0, T]$ асимптотическим приближением с точностью $O(\varepsilon^{n+1})$.

3. Случай модульно-кубичной правой части. Сформулируем основные отличия случая модульно-кубичной нелинейности от кубической нелинейности, рассмотренной в п. 2. Модульно-кубичной нелинейностью называем функцию, имеющую разрыв по искомой функции следующего вида:

$$f(u, x, \varepsilon) = \begin{cases} f^{(+)}(u, x, \varepsilon), & \text{если } u \geq 0, \quad x \in [-1, 1]; \\ f^{(-)}(u, x, \varepsilon), & \text{если } u < 0, \quad x \in [-1, 1], \end{cases}$$

имеющую в областях $u > 0$ и $u < 0$ корни, отвечающие за точки покоя типа седла у соответствующих присоединённых систем (см. условие 2* ниже).

Отметим, что нелинейности модульно-кубичного типа находят своё применение в популяционной динамике при построении модели перколяционной решётки фиксации мутаций [15], а также в климатологии при изучении изменений температуры на поверхности Земли под влиянием солнечной радиации [16, 17].

Сформулируем необходимые нам условия.

Условие 1*. Функции $A(x, \varepsilon)$, $f^{(\pm)}(u, x, \varepsilon)$ являются достаточно гладкими в своих областях определения.

Условие 2*. Пусть вырожденное уравнение $f^{(+)}(u, x, 0) = 0$ – единственное решение $u = \varphi^{(+)}(x)$, а уравнение $f^{(-)}(u, x, 0) = 0$ имеет единственное решение $u = \varphi^{(-)}(x)$, причём

$$\varphi^{(-)}(x) < 0 < \varphi^{(+)}(x), \quad x \in [-1, 1],$$

а также выполнены неравенства

$$f_u^{(\pm)}(\varphi^{(\pm)}(x), x, 0) > 0, \quad x \in [-1, 1].$$

Определим решение (1) в этом случае следующим образом.

Определение. Функция

$$u(x, t, \varepsilon) \in C^{1,0}([-1, 1] \times [0, T]) \cap C^{1,1}([-1, 1] \times (0, T]) \cap C^{2,1}((-1, \hat{x}) \times (0, T] \cup (\hat{x}, 1) \times (0, T])$$

называется *решением задачи (1)*, если она удовлетворяет уравнению (1) в каждой из областей $(-1, \hat{x}) \times (0, T]$ и $(\hat{x}, 1) \times (0, T]$, а также начальному и граничному условиям.

Асимптотику решения задачи (1) будем строить аналогично тому, как это делалось в п. 2. Положение внутреннего переходного слоя определяется из условия C^1 -сшивания асимптотических представлений $U^{(-)}(x, t, \varepsilon)$ и $U^{(+)}(x, t, \varepsilon)$, выражения которых имеют вид (2), в точке перехода $\hat{x}(t, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} U^{(-)}(\hat{x}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) &= U^{(+)}(\hat{x}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = 0, \\ \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} U^{(-)}(\hat{x}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} U^{(+)}(\hat{x}(t, \varepsilon), t, \varepsilon). \end{aligned}$$

Регулярные члены асимптотических разложений (2) можно получить из уравнений

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{u}^{(\pm)}}{\partial x^2} - \varepsilon A(x, \varepsilon) \frac{\partial \bar{u}^{(\pm)}}{\partial x} - f^{(\pm)}(\bar{u}^{(\pm)}, x, \varepsilon) = 0.$$

В частности, согласно условию 2*, получим

$$\bar{u}_0^{(\pm)} = \varphi^{(\pm)}(x), \quad x \in [-1, 1].$$

Функции переходного слоя нулевого приближения $Q_0^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon)$ строятся из задач, аналогичных случаю гладкой правой части. Запишем их с использованием функции $\tilde{u}(\xi, \hat{x})$:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}^{(\pm)}}{\partial \xi^2} + D\hat{x} \frac{\partial \tilde{u}^{(\pm)}}{\partial \xi} = f^{(\pm)}(\tilde{u}^{(\pm)}, \hat{x}, 0), \quad \tilde{u}^{(\pm)}(0, \hat{x}) = 0, \quad \tilde{u}^{(\pm)}(\pm\infty, \hat{x}) = \varphi^{(\pm)}(\hat{x}). \quad (22)$$

Наряду с задачей (22), рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi^2} + W \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} = f(\hat{u}, \hat{x}, 0), \quad \hat{u}(0, \hat{x}) = \varphi^{(0)}(\hat{x}), \quad \hat{u}(\pm\infty, \hat{x}) = \varphi^{(\pm)}(\hat{x}). \quad (23)$$

Задача (23) в теории бегущих волн для разрывных нелинейностей изучена в работе [18]. Точка разрыва нелинейности в рассматриваемом нами случае является неустойчивой сингулярной точкой. Мы приведём здесь результат из [18], сформулировав его в виде леммы.

Лемма 2. *Для каждого $\hat{x} \in (-1, 1)$ существует величина W такая, что задача (23) имеет гладкое монотонное решение $\hat{u}(\xi, \hat{x})$ из класса решений определения (см. выше), удовлетворяющее оценке*

$$|\hat{u}(\xi, \hat{x}) - \varphi^{(\pm)}(\hat{x})| < C \exp(-\kappa|\xi|),$$

где C и κ – некоторые положительные постоянные. При этом зависимость $W(\hat{x})$ определяется следующим выражением:

$$W(\hat{x}) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}(\xi, \hat{x}) \right)^2 d\xi \right)^{-1} \int_{\varphi^{(-)}(\hat{x})}^{\varphi^{(+)}(\hat{x})} f(u, \hat{x}, 0) du.$$

Условие отсутствия стационарных решений у задачи (12) аналогично используемому в п. 2.

Условие 3*. Пусть задача (12) имеет решение $x = x_0(t)$: $-1 < x_0(t) < 1$ при $t \in [0, T]$. Потребуем также, чтобы $W(x_0) + A(x_0, 0) > 0$ для всех $x_0 \in [-1, 1]$.

Разрешимость задач (22) следует из леммы 2 и условия 3* (аналогично случаю с непрерывной правой частью).

Действуя по алгоритму А.Б. Васильевой, можно определить функции $Q_k^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon)$, $k \in \mathbb{N}$, аналогично тому, как это делалось в п. 2.1.

Коэффициенты в разложении точки перехода $\hat{x}(t, \varepsilon)$ в случае разрывной правой части определяются по алгоритму, описанному в п. 2.2. Главный член ряда $x_0(t)$ точки перехода, а также старшие порядки $x_i(t)$, $i \in \mathbb{N}$, определяются из задач (12) и (18), в которых используется функция $W(\hat{x})$ из леммы 2.

Алгоритм построения верхнего $\beta^*(x, t, \varepsilon)$ и нижнего $\alpha^*(x, t, \varepsilon)$ решений для случая модульно-кубичной нелинейности аналогичен изложенному в п. 2.3. Таким образом, верна

Теорема 2. *При выполнении условий 1*–3* для любой достаточно гладкой начальной функции $u_{\text{init}}(x, \varepsilon)$, лежащей между верхним и нижним решениями*

$$\alpha^*(x, 0, \varepsilon) \leq u_{\text{init}}(x, \varepsilon) \leq \beta^*(x, 0, \varepsilon),$$

существует решение $u(x, t, \varepsilon)$ из класса решений определения (см. выше) задачи (1) с модульно-кубичной нелинейностью, которое при любом $t \in [0, T]$ заключено между этими верхним

и нижним решениями, и для которого функция $U_n(x, t, \varepsilon)$ является равномерным в области $[-1, 1] \times [0, T]$ асимптотическим приближением с точностью $O(\varepsilon^{n+1})$.

Для доказательства теоремы используется асимптотический метод дифференциальных неравенств [19], основанный на теоремах сравнения для параболических уравнений в случае разрывных источников [20].

4. Примеры.

4.1. Случай непрерывной правой части. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon A(x, \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial x} = (u^2 - 1)(u - \varphi^{(0)}(x)), \quad x \in (-1, 1), \quad t \in (0, T],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-1, t, \varepsilon) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t, \varepsilon) = 0, \quad t \in [0, T],$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = u_{\text{init}}(x, \varepsilon), \quad x \in [-1, 1].$$

Будем считать, что при всех $x \in [-1, 1]$ выполнено неравенство

$$-1 < \varphi^{(0)}(x) < 1.$$

Члены регулярной части нулевого порядка легко определяются: $\bar{u}_0^{(\pm)}(x) = \pm 1$.

Начальная задача для определения положения фронта в нулевом приближении имеет вид

$$\frac{dx_0}{dt} = \sqrt{2}\varphi^{(0)}(x_0) + A(x_0, 0), \quad x_0(0) = x_{00}.$$

Определим теперь функцию $\tilde{u}(\xi, x_0)$ из начальной задачи

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{u}^2 - 1), \quad \tilde{u}(0, x_0) = \varphi^{(0)}(x_0).$$

Нетрудно получить выражения

$$\tilde{u}(\xi, x_0) = \frac{C \exp(-\sqrt{2}\xi) - 1}{C \exp(-\sqrt{2}\xi) + 1}, \quad C = \frac{1 + \varphi^{(0)}(x_0)}{1 - \varphi^{(0)}(x_0)}.$$

4.2. Случай модульно-кубичной правой части. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon A(x, \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial x} = f(u, x, \varepsilon), \quad x \in (-1, 1), \quad t \in (0, T],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-1, t, \varepsilon) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t, \varepsilon) = 0, \quad t \in [0, T],$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = u_{\text{init}}(x, \varepsilon), \quad x \in [-1, 1],$$

где

$$f(u, x, \varepsilon) = \begin{cases} u - \varphi^{(-)}(x), & u < 0, \\ u - \varphi^{(+)}(x), & u \geq 0. \end{cases}$$

Будем считать, что при всех $x \in [-1, 1]$ выполнены неравенства

$$\varphi^{(-)}(x) < 0 < \varphi^{(+)}(x) \quad \text{и} \quad \varphi^{(+)}(x) > |\varphi^{(-)}(x)|.$$

Члены регулярной части нулевого порядка легко определяются:

$$\bar{u}_0^{(\pm)}(x) = \varphi^{(\pm)}(x).$$

Запишем задачи для функций переходного слоя нулевого порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_0^{(\pm)}}{\partial \xi^2} + W \frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial \xi} &= Q_0^{(\pm)}, \\ Q_0^{(\pm)}(0, t, \varepsilon) + \varphi^{(\pm)}(\hat{x}(t, \varepsilon)) &= 0, \\ Q_0^{(\pm)}(\pm\infty, t, \varepsilon) &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Нетрудно получить решения задач (24) в явном виде:

$$Q_0^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon) = -\varphi^{(\pm)}(\hat{x}(t, \varepsilon)) \exp\left(\frac{1}{2}(-W \pm \sqrt{W^2 + 4})\xi\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} v^{(+)}(0, x_0) - v^{(-)}(0, x_0) &= \\ -\frac{\varphi^{(+)}(x_0)}{2}(-W - \sqrt{W^2 + 4}) + \frac{\varphi^{(-)}(x_0)}{2}(-W + \sqrt{W^2 + 4}) &= 0, \end{aligned}$$

и выражение для $W(x_0)$ имеет вид

$$W(x_0) = -\frac{|\varphi^{(+)}(x_0) + \varphi^{(-)}(x_0)|}{\sqrt{\varphi^{(+)}(x_0)|\varphi^{(-)}(x_0)|}}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-11-00042).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руденко О.В. Неоднородное уравнение Бюргера с модульной нелинейностью: возбуждение и эволюция интенсивных волн // Докл. РАН. 2017. Т. 474. № 6. С. 671–674.
2. Нефедов Н.Н., Руденко О.В. О движении фронта в уравнении типа Бюргера с квадратичной и модульной нелинейностью при нелинейном усилении // Докл. РАН. 2018. Т. 478. № 3. С. 274–279.
3. Olchev A., Radler K., Sogachev A., Panferov O., Gravenhorst G. Application of a three-dimensional model for assessing effects of small clear-cuttings on radiation and soil temperature // Ecological Modelling. 2009. V. 220. № 21. P. 3046–3056.
4. Levashova N., Sidorova A., Semina A., Ni M. A spatio-temporal autowave model of shanghai territory development // Sustainability. 2019. V. 11. P. 3658–1–3658–13.
5. Васильева А.Б., Давыдова М.А. О контрастной структуре типа ступеньки для одного класса нелинейных сингулярно возмущённых уравнений второго порядка // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1998. Т. 38. № 6. С. 938–947.
6. Нефедов Н.Н., Давыдова М.А. Периодические контрастные структуры в системах типа реакция–диффузия–адвекция // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 9. С. 1300–1312.
7. Нефедов Н.Н., Никулин Е.И. Существование и асимптотическая устойчивость периодического решения с внутренним переходным слоем в задаче со слабой линейной адвекцией // Модел. и анализ информ. систем. 2018. Т. 25. № 1. С. 125–132.
8. Нефедов Н.Н., Божесольнов Ю.В. Движение фронта в параболической задаче реакция–диффузия // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2010. Т. 50. № 2. С. 276–285.
9. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М., 1990.
10. Нефедов Н.Н. Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакция–диффузия–адвекция: теория и применение // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2021. Т. 61. № 22. С. 2074–2094.
11. Fife C.P., Hsiao L. The generation and propagation of internal layers // Nonlin. Anal., Theory, Methods and Appl. 1998. V. 12. № 1. P. 19–41.

12. *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущённых задач в частных производных // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 4. С. 719–722.
13. *Sattinger D.H.* Monotone methods in elliptic and parabolic boundary value problems // Indiana Univ. Math. J. 1972. V. 21. № 11. P. 979–1001.
14. *Pao C.V.* Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York, 1992.
15. *Гараева А.Я., Сидорова А.Э., Твердислов В.А., Левашова Н.Т.* Модель предпосылок видообразования в представлениях теорий перколяций и самоорганизованной критичности // Биофизика. 2020. Т. 65. № 5. С. 932–948.
16. *Budyko M.I.* The effect of solar radiation variations on the climate of the Earth // Tellus. 1968. V. 21. № 5. P. 611–619.
17. *Diaz J. I.* Mathematical analysis of some diffusive energy balance models in climatology mathematics // Climate and Environment. 1993. P. 28–56.
18. *Volpert A.I., Volpert V.A.* Traveling-wave solutions of parabolic systems with discontinuous nonlinear terms // Nonlin. Anal., Theory, Methods and Appl. 2002. V. 49. № 1. P. 113–139.
19. *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И., Орлов А.О.* О периодическом внутреннем слое в задаче реакция–диффузия с источником модульно-кубического типа // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2020. Т. 60. № 9. С. 1513–1532.
20. *Павленко В. Н.* Сильные решения периодических параболических задач с разрывными нелинейностями // Дифференц. уравнения 2016. Т. 52. № 4. С. 528–539.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 31.01.2022 г.
После доработки 31.01.2022 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.226

ОЦЕНКИ ЛОКАЛЬНО-ПЕРИОДИЧЕСКОГО УСРЕДНЕНИЯ
ЗАДАЧИ РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА
ДЛЯ ОБОБЩЁННОГО УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ

© 2022 г. М. М. Сиражудинов, С. П. Джамалудинова

Метод усреднения дифференциальных операторов, основанный на асимптотическом разложении по малому параметру, широко используется в математике и физике. Он позволяет помимо теоремы усреднения получать оценки разности точного решения и его приближений. Настоящая работа посвящена оценкам погрешности усреднения обобщённого уравнения Бельтрами с локально-периодическими коэффициентами.

DOI: 10.31857/S0374064122060061, EDN: CDDWLR

Теория G -сходимости и усреднения дифференциальных операторов бурно развивается с семидесятых годов прошлого столетия. Этот раздел дифференциальных уравнений имеет многочисленные приложения в различных областях физики и механики сплошных сред (см. [1] и библиографию в ней). Операторные оценки погрешности классических задач усреднения хорошо изучены В.В. Жиковым, М.Ш. Бирманом, Т.А. Суслиной и их учениками (см., например, [2, 3]).

Операторным оценкам погрешности усреднения эллиптических операторов второго порядка дивергентного вида с локально-периодическими коэффициентами посвящены работы [4–6]. Термин “операторные оценки усреднения” был предложен В.В. Жиковым в статье [7].

Данная работа посвящена оценкам погрешности усреднения задачи Римана–Гильберта для обобщённого уравнения Бельтрами с локально-периодическими коэффициентами:

$$A_\varepsilon w_\varepsilon \equiv \partial_{\bar{z}} w_\varepsilon + \mu(x, \varepsilon^{-1}x) \partial_z w_\varepsilon + \nu(x, \varepsilon^{-1}x) \partial_{\bar{z}} \bar{w}_\varepsilon = f \in L_2(Q; \mathbb{C}),$$

$$w_\varepsilon \in W_0(Q) = \left\{ w \in W_2^1(Q; \mathbb{C}) : \operatorname{Re} w|_{\partial Q} = 0, \int_Q \operatorname{Im} w \, dx = 0 \right\},$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Это уравнение является недивергентным, поэтому полученные оценки погрешности усреднения, естественно, отличаются от оценок для дивергентных операторов.

Отметим, что оценки погрешности классического усреднения (порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$) задачи Римана–Гильберта для обобщённых уравнений Бельтрами с периодическими коэффициентами получены в работах [8, 9]. Оценки погрешности усреднения (порядка $O(\varepsilon)$) периодической задачи для таких уравнений приводятся в работе [10].

Оценки усреднения порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$ задачи Римана–Гильберта для уравнения Бельтрами с локально-периодическим коэффициентом получены в статье [11]. Переход от уравнения Бельтрами к обобщённому уравнению Бельтрами вызывает определённые трудности. Дело в том, что уравнение Бельтрами является \mathbb{C} -линейным уравнением, а обобщённое уравнение Бельтрами – \mathbb{R} -линейным уравнением. Поэтому методы изучения вопросов усреднения для обобщённого уравнения значительно сложнее, чем для уравнения Бельтрами.

В работе получены операторные оценки погрешности усреднения порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$ задачи Римана–Гильберта для обобщённого уравнения Бельтрами с локально-периодическими коэффициентами $\mu(x, \varepsilon^{-1}x)$, $\nu(x, \varepsilon^{-1}x)$. Функции $\mu(x, y)$, $\nu(x, y)$ – измеримые ограниченные функции, удовлетворяющие условию эллиптичности

$$\operatorname{vrai\,sup}_{(x,y) \in Q \times \square} (|\mu(x, y)| + |\nu(x, y)|) \leq k_0 < 1.$$

Кроме того, $\mu(x, y)$ и $\nu(x, y)$, как функции x , равномерно непрерывны по Липшицу, а как функции y – периодические. Эти оценки получены как в пространствах Соболева, так и в пространствах Лебега.

Обозначения. $Q \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная односвязная область плоскости, \bar{Q} – замыкание области Q , запись $Q_1 \Subset Q$ означает, что замыкание \bar{Q}_1 – компакт из Q .

$\partial_{\bar{z}} = 2^{-1}(\mathcal{D}_1 + i\mathcal{D}_2)$, $\partial_z = 2^{-1}(\mathcal{D}_1 - i\mathcal{D}_2)$, $\mathcal{D}_j = \mathcal{D}_{x_j} = \partial/\partial x_j$, $j = 1, 2$, i – мнимая единица. $L_2(Q; \mathbb{C})$ – пространство Лебега комплекснозначных квадратично суммируемых функций над полем действительных чисел. Скалярное произведение в $L_2(Q; \mathbb{C})$ даётся равенством $(u, v)_{L_2(Q; \mathbb{C})} = \operatorname{Re} \int_Q u \bar{v} dx$, $u, v \in L_2(Q; \mathbb{C})$, где \bar{v} – комплексно-сопряжённая к v функция. Соответствие $L_2(Q; \mathbb{C}) \ni u = u_1 + iu_2 \mapsto (u_1, u_2) = U \in (L_2(Q))^2$ есть изоморфизм, причём $(U, V)_{(L_2(Q))^2} = (u, v)_{L_2(Q; \mathbb{C})}$. Все пространства, используемые в работе, если не оговорено противное, являются пространствами над полем действительных чисел.

$W_p^k(Q; \mathbb{C})$ – пространство Соболева комплекснозначных функций. $\dot{W}_2^1(Q; \mathbb{C})$ – подпространство $W_2^1(Q; \mathbb{C})$, состоящее из элементов с нулевыми следами на границе.

\square – (ячейка периодов) квадрат со сторонами, параллельными осям координат, с длиной стороны равной T .

Периодической будем называть функцию периода T по каждой переменной. Среднее значение периодической функции w обозначим символом $\langle w \rangle$, т.е.

$$\langle w \rangle = T^{-2} \int_{\square} w(x) dx = |\square|^{-1} \int_{\square} w(x) dx.$$

Пусть $w(x, y)$ – периодическая по y функция, тогда $\langle w(x, \cdot) \rangle_y$ – среднее значение по y . $L_p(\square; \mathbb{C})$, $W_p^1(\square; \mathbb{C})$, $p \geq 1$, – пространства Лебега и Соболева периодических функций. Скалярное произведение в $L_2(\square; \mathbb{C})$ задаёт равенство $(u, v)_{L_2(\square; \mathbb{C})} = \operatorname{Re} \langle u \bar{v} \rangle$, $u, v \in L_2(\square; \mathbb{C})$.

\rightharpoonup – знак слабой сходимости в соответствующем пространстве.

Пусть Ω – произвольная подобласть плоскости \mathbb{R}^2 , $g(x, y)$ ($x \in \bar{\Omega}$, $y \in \mathbb{R}^2$) – непрерывная по $x \in \bar{\Omega}$ периодическая по y функция такая, что $g(x, y)$ для любого $x \in \bar{\Omega}$ как функция переменной y принадлежит $L_p(\square; \mathbb{C})$, $p \geq 1$, и пусть семейство $\{g^\varepsilon\}$, $\{g^\varepsilon\} = \{g(x, \varepsilon^{-1}x)\}$, ограничено в $L_p(\Omega_1; \mathbb{C})$. Тогда $g(x, \varepsilon^{-1}x) \rightharpoonup \langle g(x, \cdot) \rangle_y$ в пространстве $L_p(\Omega_1; \mathbb{C})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где Ω_1 – произвольная ограниченная подобласть области Ω .

$W_0(Q)$ – подпространство $W_2^1(Q; \mathbb{C})$, элементы которого удовлетворяют соотношениям

$$\operatorname{Re} w \in \dot{W}_2^1(Q; \mathbb{C}), \quad \int_Q \operatorname{Im} w dx = 0.$$

В случае, когда это не вызывает вопросов, как уравнение, так и оператор соответствующей краевой задачи обозначаем одним и тем же символом.

1. Формулировка результатов.

1.1. Задача Римана–Гильберта. В ограниченной односвязной области Q с кусочно-гладкой границей рассмотрим задачу Римана–Гильберта (P–Г) для обобщённого уравнения Бельтрами

$$Aw \equiv \partial_{\bar{z}} w + \mu \partial_z w + \nu \partial_{\bar{z}} \bar{w} = f \in L_2(Q; \mathbb{C}), \quad w \in W_0(Q), \tag{1}$$

где коэффициенты $\mu = \mu(x)$, $\nu = \nu(x)$ – измеримые ограниченные комплекснозначные функции, удовлетворяющие условию эллиптичности

$$\operatorname{vrai\,sup}_{x \in Q} (|\mu(x)| + |\nu(x)|) \leq k_0 < 1, \tag{2}$$

$k_0 > 0$ – постоянная (константа эллиптичности).

Как известно, имеет место

Теорема 1 (см. [12, 13]). *Задача Римана–Гильберта (1), (2) (P–Г) однозначно разрешима для любой правой части f из $L_2(Q; \mathbb{C})$, причём имеют место априорные оценки*

$$(1 - k_0) \|\partial_{\bar{z}} w\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}^2 \leq \operatorname{Re} \int_Q Aw \cdot \overline{\partial_{\bar{z}} w} dx, \quad w \in W_0(Q),$$

$$(1 - k_0) \|\partial_{\bar{z}} w\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq \|Aw\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq (1 + k_0) \|\partial_{\bar{z}} w\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}, \quad w \in W_0(Q). \quad (3)$$

Выражение $\|w\|_{W_0(Q)} = \|\partial_{\bar{z}} w\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}$, $w \in W_0(Q)$, задаёт в подпространстве $W_0(Q)$ норму, эквивалентную норме исходного пространства $W_2^1(Q; \mathbb{C})$ (см. [12, 13]), поэтому имеют место оценки

$$c_1 \|w\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})} \leq \|Aw\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c_2 \|w\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})}, \quad (4)$$

где $c_1, c_2 > 0$ – постоянные, зависящие только от постоянной эллиптичности k_0 и области Q .

Теорема 2. Пусть $w \in W_2^1(Q; \mathbb{C})$ – решение уравнения (1), коэффициенты $\mu = \mu(x)$, $\nu = \nu(x)$ которого равномерно непрерывны по Лишвицу в \bar{Q} , т.е. выполняется неравенство

$$|\varphi(x') - \varphi(x)| \leq L|x' - x|, \quad x, x' \in \bar{Q}, \quad \varphi \in \{\mu, \nu\},$$

где $L > 0$ – постоянная. И пусть $f \in W_2^1(Q; \mathbb{C})$, тогда $w \in W_{2, \text{loc}}^2(Q)$ и в любой компактной подобласти $Q_1 \Subset Q$ имеет место оценка

$$\|w\|_{W_2^2(Q_1; \mathbb{C})} \leq c(\|f\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})} + \|w\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})}), \quad (5)$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0 , L и $\operatorname{dist}(Q_1, \partial Q)$.

Пусть дополнительно граница ∂Q принадлежит классу C^2 и w принадлежит $W_0(Q)$, тогда w принадлежит $W_0(Q) \cap W_2^2(Q; \mathbb{C})$ и имеет место оценка

$$\|w\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})} \leq c\|f\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})}, \quad (6)$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0 , L и Q .

Доказательство теоремы 2 см. ниже в п. 2.

1.2. G-сходимость. Обозначим через $A(k_0)$ множество обобщённых операторов Бельтрами (1), $\tilde{A}(k_0)$ – подмножество $A(k_0)$ операторов Бельтрами ((1) с $\nu = 0$).

Определение 1. Считаем, что последовательность операторов $\{A_k\}$ из класса $A(k_0)$ G -сходится в области Q к оператору $A \in A(k_0)$ (и будем писать $A_k \xrightarrow{G} A$), если для любого $f \in L_2(Q; \mathbb{C})$ последовательность $\{w_k\}$ решений задачи P–Г: $A_k w_k = f$, $w_k \in W_0(Q)$, сходится в $L_2(Q; \mathbb{C})$. Сходимость в $L_2(Q; \mathbb{C})$ можно заменить на слабую сходимость в $W_2^1(Q; \mathbb{C})$ к решению задачи P–Г: $Aw = f$, $w \in W_0(Q)$. Эквивалентность полученных при этом определений следует из оценок (4) и компактности вложения $W_2^1(Q; \mathbb{C}) \subset L_2(Q; \mathbb{C})$.

G -предел определён единственным образом и классы $A(k_0)$, $\tilde{A}(k_0)$ G -компактны (см. [12]).

G -сходимость обладает следующим свойством сходимости “произвольных” решений: пусть $A_k \xrightarrow{G} A$, $w_k \rightharpoonup w$ в $W_2^1(Q; \mathbb{C})$, $f_k \rightarrow f$ в $L_2(Q; \mathbb{C})$, $A_k w_k = f_k$, тогда $Aw = f$ (см. [12]).

1.3. Понятие усреднения. Рассмотрим задачу P–Г с малым параметром $\varepsilon > 0$:

$$A_\varepsilon w_\varepsilon \equiv \partial_{\bar{z}} w_\varepsilon + \mu^\varepsilon \partial_z w_\varepsilon + \nu^\varepsilon \partial_{\bar{z}} \bar{w}_\varepsilon = f \in L_2(Q; \mathbb{C}), \quad w_\varepsilon \in W_0(Q). \quad (7)$$

Всюду в работе коэффициенты $\mu^\varepsilon = \mu^\varepsilon(x)$, $\nu^\varepsilon = \nu^\varepsilon(x)$ – измеримые ограниченные функции, имеющие локально-периодическую структуру:

$$\mu^\varepsilon(x) = \mu(x, \varepsilon^{-1}x), \quad \nu^\varepsilon(x) = \nu(x, \varepsilon^{-1}x),$$

т.е. функции $\mu(x, y)$, $\nu(x, y)$ периодические по второй переменной y (периодичность по первой переменной x не требуется). Кроме того, функции $\mu(x, y)$, $\nu(x, y)$ равномерно непрерывны по Липшицу по первой переменной x , т.е. справедлива оценка

$$|\varphi(x', y) - \varphi(x, y)| \leq L|x' - x|, \quad x, x' \in \overline{Q}, \quad \text{п.в. } y \in \square, \quad \varphi \in \{\mu, \nu\}, \tag{8}$$

где $L > 0$ – постоянная, и $\mu(x, y)$, $\nu(x, y)$ удовлетворяют условию эллиптичности

$$\text{vrai sup}_{(x,y) \in \overline{Q} \times \square} (|\mu(x, y)| + |\nu(x, y)|) \leq k_0 < 1. \tag{9}$$

Очевидно, что оператор A_ε принадлежит классу $A(k_0)$.

Определение 2. Будем считать, что семейство $\{A_\varepsilon\}$ операторов краевой задачи (7) допускает усреднение, если $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A \in A(k_0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В вопросах усреднения важную роль играет ядро оператора \mathcal{A}^* , сопряжённого оператору периодической по $y = (y_1, y_2)$ задачи

$$\mathcal{A}w \equiv \partial_{\bar{\xi}}w + \mu(x, y)\partial_{\xi}w + \nu(x, y)\partial_{\bar{\xi}}\bar{w} = f \in L_2(\square; \mathbb{C}), \quad w(x, \cdot) \in W_2^1(\square; \mathbb{C}), \tag{10}$$

где $x \in \overline{Q}$ играет роль параметра,

$$\partial_{\bar{\xi}} = 2^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + i \frac{\partial}{\partial y_2} \right), \quad \partial_{\xi} = 2^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - i \frac{\partial}{\partial y_2} \right).$$

Сформулируем в виде теоремы результаты по периодической задаче из работы [14], необходимые в дальнейшем.

Теорема 3. Пусть $x \in \overline{Q}$, тогда справедливы следующие утверждения.

1. Для периодической задачи имеют место оценки

$$c_1 \langle |\partial_{\bar{\xi}}w(x, \cdot)|^2 \rangle_y \leq \text{Re} \langle \mathcal{A}w(x, \cdot) \cdot \overline{\partial_{\bar{\xi}}w(x, \cdot)} \rangle_y, \quad w(x, \cdot) \in W_2^1(\square; \mathbb{C}), \tag{11}$$

$$c_1 \langle |\partial_{\bar{\xi}}w(x, \cdot)|^2 \rangle_y^{1/2} \leq \langle |\mathcal{A}w(x, \cdot)|^2 \rangle_y^{1/2} \leq c_2 \langle |\partial_{\bar{\xi}}w(x, \cdot)|^2 \rangle_y^{1/2}, \quad w(x, \cdot) \in W_2^1(\square; \mathbb{C}), \tag{12}$$

где $c_1 = 1 - k_0$, $c_2 = 1 + k_0$. Первое из этих неравенств будем называть “неравенством острого угла”.

2. Периодическая задача (10) фредгольмова.

3. Ядра $\text{Ker } \mathcal{A}^*$ и $\text{Ker } \mathcal{A} (= \mathbb{C})$ – двумерные подпространства пространств $L_2(\square; \mathbb{C})$ и $W_2^1(\square; \mathbb{C})$ соответственно (напомним, что наши пространства – пространства над полем \mathbb{R}), причём один из базисов $\{p_1, p_2\}$ ядра $\text{Ker } \mathcal{A}^*$ обладает свойствами

$$\langle p_1(x, \cdot) \rangle_y = 1, \quad \langle p_2(x, \cdot) \rangle_y = i. \tag{13}$$

В случае оператора Бельтрами ($\nu = 0$) имеем $p_2 = ip_1$.

Пусть $w = w(y)$, $w = w_1 + iw_2 \in W_2^1(\square; \mathbb{C})$, тогда имеют место равенства

$$\langle |\partial_{\bar{\xi}}w|^2 \rangle_y = \langle |\partial_{\xi}w|^2 \rangle_y = 4^{-1} \sum_{j=1}^2 \langle |\nabla w_j|^2 \rangle_y. \tag{14}$$

Справедливость равенств (14) достаточно проверить для гладких периодических $w = w_1 + iw_2 \in C^2(\square; \mathbb{C})$. Легко видеть, что имеет место равенство

$$\begin{aligned} \langle |\partial_{\bar{\xi}}w|^2 \rangle_y &= 4^{-1} \sum_{j=1}^2 \langle |\nabla w_j|^2 \rangle_y + \\ &+ 2^{-1} |\square|^{-1} \int_{\square} (\mathcal{D}_{y_2} w_1 \mathcal{D}_{y_1} w_2 - \mathcal{D}_{y_1} w_1 \mathcal{D}_{y_2} w_2) dy, \quad w \in C^2(\square; \mathbb{C}). \end{aligned} \tag{15}$$

(Аналогичное равенство, со знаком минус перед вторым слагаемым справа, имеет место и для $\langle |\partial_\xi w|^2 \rangle_y$.) Второе слагаемое справа в (15) равно нулю, в чем можно убедиться, перебросив производные с w_1 на w_2 с учётом периодичности. (При этом граничный интеграл равен нулю, так как нормали к противоположным сторонам ячейки периодов противоположно направлены.) Отсюда вытекают равенства (14).

1.4. Задача на ячейке периодов. Для применения асимптотических методов при получении оценок погрешности усреднения уравнения (7) нам потребуются периодические решения следующей задачи на ячейке периодов:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}N_j &\equiv \partial_{\bar{\xi}} N_j(x, y) + \mu(x, y) \partial_\xi N_j(x, y) + \nu(x, y) \overline{\partial_{\bar{\xi}} N_j(x, y)} = \chi_j(x, y), \\ N_j(x, \cdot) &\in W_2^1(\square; \mathbb{C}), \quad \langle N_j(x, \cdot) \rangle_y = 0, \quad j = 1; 2, \end{aligned} \tag{16}$$

где $x \in \overline{Q}$ выступает в роли параметра, \square – квадрат периодов со стороной T ,

$$\begin{aligned} \chi_1(x, y) &= 2^{-1}(\mu^0(x) + \nu^0(x) - \mu(x, y) - \nu(x, y)), \\ \chi_2(x, y) &= 2^{-1}i(\mu^0(x) - \nu^0(x) - \mu(x, y) + \nu(x, y)). \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь и всюду далее $\mu^0(x)$, $\nu^0(x)$ – функции, определённые формулами

$$\mu^0(x) = \langle \mu(x, \cdot) \mathcal{Q}(x, \cdot) + \overline{\nu(x, \cdot)} \mathcal{P}(x, \cdot) \rangle_y, \quad \nu^0(x) = \langle \overline{\mu(x, \cdot)} \mathcal{P}(x, \cdot) + \nu(x, \cdot) \mathcal{Q}(x, \cdot) \rangle_y, \tag{18}$$

где

$$\mathcal{P}(x, y) = 2^{-1}(p_1(x, y) + ip_2(x, y)), \quad \mathcal{Q}(x, y) = 2^{-1}(\overline{p_1(x, y)} + i\overline{p_2(x, y)})$$

(p_1, p_2 – базисные векторы из теоремы 3, $\overline{p_1}, \overline{p_2}$ – комплексно-сопряжённые функции p_1, p_2).

В случае уравнения Бельтрами ($\nu = 0$) имеем $\mu^0(x) = \langle \mu(x, \cdot) \overline{p_1(x, \cdot)} \rangle_y$, $\nu^0 = 0$.

Теорема 4. Для каждого $x \in \overline{Q}$ задача (16) однозначно разрешима.

Действительно, согласно теореме 3 для разрешимости задачи необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \in \overline{Q}$ функции $\chi_1(x, y)$, $\chi_2(x, y)$ как функции y были ортогональны базисным векторам p_1 и p_2 из ядра оператора $\text{Ker } \mathcal{A}^*$. Это легко проверить, используя равенства (13). Единственность решения следует из неравенства острого угла (11) ввиду неравенства Пуанкаре.

В случае уравнения Бельтрами имеем $\nu = 0$, $\nu^0 = 0$, следовательно, $\chi_2 = i\chi_1$. Значит, $N_2 = iN_1$.

1.5. Свойства решений задачи на ячейке.

Свойство 1. Пусть N_j , $j = 1, 2$, – решение задачи (16), тогда отображение $\overline{Q} \ni x \mapsto N_j(x, \cdot) \in W_2^1(\square; \mathbb{C})$ ограничено, причём имеет место оценка

$$\|N_j(x, \cdot)\|_{W_2^1(\square; \mathbb{C})} \leq c, \quad x \in \overline{Q}, \quad j = 1, 2, \tag{19}$$

где $c > 0$ – постоянная, определяемая только по постоянной эллиптичности k_0 .

Следствие 1. Функции $\mu^0(x)$, $\nu^0(x)$, $x \in \overline{Q}$, определённые формулами (18), ограничены постоянной, зависящей только от постоянной эллиптичности k_0 .

Свойство 2. Найдётся число $q > 2$ (показатель повышенной суммируемости), зависящее только от постоянной эллиптичности k_0 , такое, что решения N_j , $j = 1, 2$, принадлежат $W_q^1(\square; \mathbb{C})$ и имеют место неравенства

$$\|N_j(x, \cdot)\|_{C^\alpha(\overline{\square}; \mathbb{C})} \leq c, \quad \|N_j(x, \cdot)\|_{W_r^1(\square; \mathbb{C})} \leq c, \quad j = 1, 2, \quad \text{для всех } x \in \overline{Q}, \tag{20}$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0 , $2 < r \leq q$, $\alpha = (r - 2)/r$.

Свойство 3. Пусть $N_j, j = 1, 2$, – решение задачи (16), тогда отображение $\overline{Q} \ni x \mapsto N_j(x, \cdot) \in W_2^1(\square; \mathbb{C})$ липшицево, т.е. справедлива оценка

$$\|N_j(x, \cdot) - N_j(x', \cdot)\|_{W_2^1(\square; \mathbb{C})} \leq c|x - x'|, \quad x, x' \in \overline{Q}, \tag{21}$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0 и постоянной Липшица L .

Следствие 2. Функции $\mu^0(x)$ и $\nu^0(x)$, определённые формулами (18), равномерно непрерывны по Липшицу в замыкании \overline{Q} , т.е.

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq L_1|x - x'|, \quad x, x' \in \overline{Q}, \quad \varphi \in \{\mu^0, \nu^0\},$$

где $L_1 > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0 и L .

Свойство 4. Пусть $q > 2$ – показатель повышенной суммируемости из свойства 2 и пусть $2 < r \leq q$. Тогда отображение $\overline{Q} \ni x \mapsto N_j(x, \cdot) \in W_r^1(\square; \mathbb{C}), j = 1, 2$, липшицево:

$$\|N_j(x, \cdot) - N_j(x', \cdot)\|_{W_r^1(\square; \mathbb{C})} \leq c|x - x'|, \quad x, x' \in \overline{Q}, \quad j = 1, 2, \tag{22}$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0 и постоянной Липшица L .

Следствие 3. Решение $N_j = N_j(x, y), j = 1, 2$, задачи (16) непрерывно в $\overline{Q} \times \overline{\square}$, липшицево по x в \overline{Q} и гёльдерово по y в $\overline{\square}$ с показателем $\alpha = (r - 2)/r$ ($2 < r \leq q, q > 2$ – показатель повышенной суммируемости), т.е. для любых $x, x' \in \overline{Q}, y, y' \in \overline{\square}$ имеем

$$|N_j(x, y) - N_j(x', y')| \leq c_0|x - x'| + c_1|y - y'|^\alpha, \quad j = 1, 2, \tag{23}$$

где $c_0, c_1 > 0$ – постоянные, зависящие только от k_0 и L .

Кроме того, производные

$$\mathcal{D}_{x_l} N_j(x, y) = \partial N_j(x, y) / \partial x_l, \quad j, l = 1, 2,$$

принадлежат пространству $L_\infty(Q \times \square; \mathbb{C})$ и имеют место оценки

$$\|N_j\|_{L_\infty(Q \times \square; \mathbb{C})} \leq c_0, \quad \|\mathcal{D}_{x_l} N_j(x, y)\|_{L_\infty(Q \times \square; \mathbb{C})} \leq c_1, \tag{24}$$

где $c_0, c_1 > 0$ – постоянные: c_0 – зависит только от k_0 , c_1 – от k_0 и L .

1.6. Вспомогательные утверждения. Пусть Q – ограниченная гладкая (класса C^2) область плоскости. Тогда справедлива следующая

Лемма 1. Пусть $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y) \in \text{Lip}(\overline{Q}, L_r(\square; \mathbb{C})), 1 < r < 2$ (т.е. \mathbf{a} периодична по y и равномерно непрерывна по Липшицу как функция $x \in \overline{Q}$ со значениями в $L_r(\square; \mathbb{C})$), $\mathbf{a}(x, y) \geq 0$ ($x \in \overline{Q}, y \in \square$) и пусть $\mathbf{a}^\varepsilon(x) = \mathbf{a}(x, \varepsilon^{-1}x), x \in \overline{Q}$. Тогда для любого $w \in W_2^1(Q; \mathbb{C})$ имеют место неравенства

$$\int_Q \mathbf{a}^\varepsilon(x) |w|^2 dx \leq c(\|w\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}^2 + \varepsilon^2 \|w\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})}^2), \tag{25}$$

$$\int_{Q \cap Q_\varepsilon} \mathbf{a}^\varepsilon(x) |w|^2 dx \leq c\varepsilon \|w\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})}^2 \tag{26}$$

для всех достаточно малых $\varepsilon, \varepsilon \leq \varepsilon_0(Q)$, где Q_ε – ε -окрестность границы ∂Q , постоянная $c > 0$ зависит только от области Q и $\max_{x \in \overline{Q}} \|\mathbf{a}(x, \cdot)\|_{L_r(\square; \mathbb{C})}$.

Доказательство леммы 1 см. в п. 4.

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная односвязная область с гладкой (класса C^2) границей, коэффициенты уравнения (7) – локально-периодические функции, удовлетворяющие соотношениям (8), (9) и пусть $w^0 \in W_2^2(Q; \mathbb{C}) \cap W_0(Q)$, $f = A_0 w^0$, где $A_0 w^0 \equiv \partial_{\bar{z}} w^0 + \mu^0(x) \partial_z w^0 + \nu^0(x) \partial_{\bar{z}} \overline{w^0}$ (коэффициенты $\mu^0(x)$, $\nu^0(x)$ определены формулами (18)),

$$w_1^\varepsilon(x) = w^0(x) + \varepsilon(N(x, y) \partial_z w^0(x) + M(x, y) \partial_{\bar{z}} \overline{w^0(x)}), \quad y = \varepsilon^{-1}x, \quad (27)$$

где $N(x, y) = N_1(x, y) - iN_2(x, y)$, $M(x, y) = N_1(x, y) + iN_2(x, y)$, N_1 и N_2 – периодические решения задачи на ячейке (см. теорему 4). Легко видеть, что имеет место равенство

$$A_\varepsilon w_1^\varepsilon = f + \varepsilon r_\varepsilon, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} r_\varepsilon = & N(x, y) (\partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 w^0(x) + \mu(x, y) \partial_{z\bar{z}}^2 w^0(x)) + \nu(x, y) \overline{N(x, y)} \partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 \overline{w^0(x)} + \\ & + M(x, y) (\partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 \overline{w^0(x)} + \mu(x, y) \partial_{z\bar{z}}^2 \overline{w^0(x)}) + \nu(x, y) \overline{M(x, y)} \partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 w^0(x) + \\ & + \partial_z \overline{w^0(x)} (\partial_{\bar{z}} \overline{N(x, y)} + \mu(x, y) \partial_z N(x, y)) + \nu(x, y) \overline{\partial_{\bar{z}} N(x, y)} \partial_{\bar{z}} \overline{w^0(x)} + \\ & + \partial_{\bar{z}} \overline{w^0(x)} (\partial_{\bar{z}} M(x, y) + \mu(x, y) \partial_z M(x, y)) + \nu(x, y) \overline{\partial_{\bar{z}} M(x, y)} \partial_z w^0(x), \quad y = \varepsilon^{-1}x. \end{aligned} \quad (29)$$

Справедлива

Лемма 2. *Невязка (29) r_ε ограничена в $L_2(Q; \mathbb{C})$, причём*

$$\|r_\varepsilon\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c \|w^0\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})}, \quad (30)$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0 и постоянной Липшица L . А также имеют место следующие оценки:

$$\|A_\varepsilon w_1^\varepsilon - A_0 w^0\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c\varepsilon \|w^0\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})}, \quad \|A_\varepsilon w_1^\varepsilon - A_\varepsilon w_\varepsilon\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c\varepsilon \|w^0\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})}, \quad (31)$$

$$\|w_1^\varepsilon - w^0\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c\varepsilon \|w^0\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})}, \quad w_1^\varepsilon \rightarrow w^0 \quad \text{в} \quad W_2^1(Q; \mathbb{C}) \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (32)$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0 и L , w_ε – решение задачи Римана–Гильберта (7), функция w_1^ε определена в формуле (27).

1.7. Усреднение и оценки погрешности усреднения. Справедлива следующая

Теорема 5 (об усреднении). *Для семейства $\{A_\varepsilon\}$ операторов краевой задачи Римана–Гильберта (7) имеет место усреднение, причём коэффициенты усреднённого оператора A_0 , $A_0 w \equiv \partial_{\bar{z}} w + \mu^0(x) \partial_z w + \nu^0(x) \partial_{\bar{z}} \overline{w}$, $w \in W_0(Q)$, – равномерно непрерывные по Липшицу в \overline{Q} функции и определяются равенствами (18).*

Сформулируем основные утверждения работы. В качестве первого приближения к решению w_ε задачи Римана–Гильберта для обобщённого уравнения Бельтрами (7) с локально-периодическими коэффициентами по аналогии с первым приближением к решению задачи Римана–Гильберта для обобщённого уравнения Бельтрами (см. [15]) с периодическими коэффициентами возьмём функцию (27):

$$w_1^\varepsilon(x) = w^0(x) + \varepsilon(N(x, y) \partial_z w^0(x) + M(x, y) \partial_{\bar{z}} \overline{w^0(x)}),$$

где теперь w^0 – решение усреднённой задачи

$$A_0 w \equiv \partial_{\bar{z}} w + \mu^0(x) \partial_z w + \nu^0(x) \partial_{\bar{z}} \overline{w} = f \in W_2^1(Q; \mathbb{C}), \quad w \in W_0(Q).$$

Заметим, что $w^0 \in W_2^2(Q; \mathbb{C}) \cap W_0(Q)$ ввиду теоремы 2, так как $f \in W_2^1(Q; \mathbb{C})$.

Теорема 6 (оценки погрешности усреднения). *Пусть Q – ограниченная односвязная область с гладкой (класса C^2) границей и пусть правая часть f задачи P–Г (7) принадлежит пространству $W_2^1(Q; \mathbb{C})$, тогда для малых ε , $\varepsilon \leq \varepsilon(Q)$, имеют место оценки*

$$\|w_\varepsilon - w_1^\varepsilon\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon} \|f\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})}, \quad \|w_\varepsilon - w^0\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon} \|f\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})}, \quad (33)$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0 , постоянной Липшица L и области Q .

Доказательство теоремы 6 см. в п. 5.2.

Теорема 7 (операторные оценки усреднения). *Справедливы следующие операторные оценки усреднения задачи Римана–Гильберта (7):*

$$\|(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})\partial_{\bar{z}}^{-1}\|_{L_2(Q;\mathbb{C}) \rightarrow L_2(Q;\mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}, \quad \|A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1}\|_{W_0(Q) \rightarrow L_2(Q;\mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}, \quad (34)$$

$$\|(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})\partial_{\bar{z}}^{-1} - \varepsilon(N^\varepsilon \partial_z A_0^{-1} \partial_{\bar{z}}^{-1} + M^\varepsilon \overline{\partial_z A_0^{-1} \partial_{\bar{z}}^{-1}})\|_{L_2(Q;\mathbb{C}) \rightarrow W_2^1(Q;\mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}, \quad (35)$$

$$\|A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1} - \varepsilon(N^\varepsilon \partial_z A_0^{-1} + M^\varepsilon \overline{\partial_z A_0^{-1}})\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C}) \rightarrow W_2^1(Q;\mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}, \quad (36)$$

где $c > 0$ – постоянная из (33); $\partial_{\bar{z}}^{-1}$ – оператор, обратный к оператору краевой задачи (7) для уравнения Коши–Римана; $A_0^{-1} \partial_{\bar{z}}^{-1}$ – оператор, определённый равенством

$$\overline{A_0^{-1} \partial_{\bar{z}}^{-1} v} = \overline{A_0^{-1} \partial_{\bar{z}}^{-1} v},$$

аналогичный смысл имеет и оператор $\overline{A_0^{-1}}$. Здесь

$$N^\varepsilon = N_1(x, \varepsilon^{-1}x) - iN_2(x, \varepsilon^{-1}x), \quad M^\varepsilon = N_1(x, \varepsilon^{-1}x) + iN_2(x, \varepsilon^{-1}x),$$

$N_1(x, y)$, $N_2(x, y)$ – решения задачи на ячейке (см. теорему 4); A_ε^{-1} , A_0^{-1} – операторы, обратные к операторам соответствующих задач Римана–Гильберта.

В случае оператора Бельтрами ($\nu = 0$) ввиду теоремы 4 имеем $N^\varepsilon = 2N_1^\varepsilon$, $M^\varepsilon = 0$. Следовательно, корректоры в (35), (36) упрощаются и мы имеем более простые оценки.

2. Доказательство теоремы 2. Пусть в уравнении (1)

$$w = u + iv, \quad \mu = a + ib, \quad \nu = c + id, \quad f = f_1 + if_2.$$

Тогда уравнение (1), выделив действительную и мнимую части, легко представить в виде системы двух действительных уравнений:

$$\begin{aligned} -\mathcal{D}_{x_2} v + J^{-1}(|1 + \mu|^2 - |\nu|^2) \mathcal{D}_{x_1} u + 2J^{-1}(b - d) \mathcal{D}_{x_2} u &= F_1, \\ \mathcal{D}_{x_1} v + 2J^{-1}(b + d) \mathcal{D}_{x_1} u + J^{-1}(|1 - \mu|^2 - |\nu|^2) \mathcal{D}_{x_2} u &= F_2, \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$J = |1 - \nu|^2 - |\mu|^2, \quad F_1 = 2J^{-1}((1 + a - c)f_1 + (b - d)f_2), \quad F_2 = 2J^{-1}((b + d)f_1 + (1 - a - c)f_2).$$

Система (37) – равномерно эллиптическая система. (Действительно, записав её в матричной форме с искомым вектором $(u, v)^T$, получим, что условием эллиптичности будет положительная определённость следующей квадратичной (относительно $\xi = (\xi_1, \xi_2)$) формы:

$$K(x, \xi) = J^{-1}(|1 + \mu|^2 - |\nu|^2)\xi_1^2 + 4J^{-1}b\xi_1\xi_2 + J^{-1}(|1 - \mu|^2 - |\nu|^2)\xi_2^2. \quad (38)$$

Заметим, что имеют место неравенства

$$\left(\frac{1 - k_0}{1 + k_0}\right)^2 |\xi|^2 \leq K(x, \xi) \leq \left(\frac{1 + k_0}{1 - k_0}\right)^2 |\xi|^2, \quad \text{п.в. } x \in Q,$$

где $k_0 > 0$ – постоянная эллиптичности. Это и означает, что система (37) равномерно эллиптическая.) По условию $u = \text{Re } w$ принадлежит пространству $W_2^1(Q; \mathbb{C})$, и из системы (37) вытекает, что u удовлетворяет эллиптическому уравнению второго порядка

$$\text{div}(\mathbf{a}(x)\nabla u) - 2\mathcal{D}_{x_1} d \mathcal{D}_{x_2} u + 2\mathcal{D}_{x_2} d \mathcal{D}_{x_1} u = g, \quad (39)$$

где $\mathbf{a}(x)$ – матрица квадратичной формы (38),

$$g = \mathcal{D}_{x_1}F_1 + \mathcal{D}_{x_2}F_2 = 2\mathcal{D}_{x_1}(J^{-1}((1+a-c)f_1 + (b-d)f_2)) + 2\mathcal{D}_{x_2}(J^{-1}((b+d)f_1 + (1-a-c)f_2)).$$

Коэффициенты μ и ν уравнения (1) – ограниченные липшицевы функции, поэтому из свойств таких функций следует липшицевость коэффициентов матрицы $\mathbf{a}(x) = \{a_{jl}(x)\}$ и коэффициентов при f_1 и f_2 в (37), причём коэффициенты Липшица зависят только от k_0 и L . Кроме того, коэффициенты $\mathcal{D}_{x_1}d$, $\mathcal{D}_{x_2}d$ по теореме Радемахера–Степанова ограничены постоянной L . Функции f_1 , f_2 принадлежат пространству $W_2^1(Q)$, поэтому с учётом теоремы Радемахера–Степанова получим

$$\|g\|_{L_2(Q)} \leq c(\|f_1\|_{W_2^1(Q)} + \|f_2\|_{W_2^1(Q)}),$$

где постоянная $c > 0$ зависит только от k_0 и L . Отсюда, согласно [16, гл. 8, теорема 8.8], имеем: для любой компактной подобласти $Q_1 \Subset Q$ функция u принадлежит пространству $W_2^2(Q_1)$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^2(Q_1)} \leq c(\|g\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{W_2^1(Q)}), \tag{40}$$

где $c > 0$ – постоянная, определяемая только по L , k_0 и $\text{dist}(Q_1, \partial Q)$. Отсюда, ввиду $g = \mathcal{D}_{x_1}F_1 + \mathcal{D}_{x_2}F_2$ (см. (39)), получим

$$\|u\|_{W_2^2(Q_1)} \leq c(\|f\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})} + \|u\|_{W_2^1(Q)}) \leq c_1(\|f\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})} + \|w\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})}), \tag{41}$$

где $c, c_1 > 0$ – постоянные, аналогичные постоянной в (40).

Перейдём теперь к оценке $v = \text{Im } w$. По доказанному $u \in W_2^2(Q_1)$, следовательно, из равенств (37) ввиду (41) получим оценки вторых производных v :

$$\|\mathcal{D}_{x_j}\mathcal{D}_{x_l}v\|_{W_2^2(Q_1)} \leq c(\|f\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})} + \|u\|_{W_2^1(Q)}), \quad j, l = 1, 2, \tag{42}$$

где $c > 0$ – постоянная, такая же, как и выше. Отсюда вытекает оценка

$$\|v\|_{W_2^2(Q_1)} \leq c(\|f\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})} + \|u\|_{W_2^1(Q)} + \|v\|_{W_2^1(Q)}) \leq c_1(\|f\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})} + \|w\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})}).$$

Из этой оценки и оценки (41) получим (5). Первая часть теоремы 2 доказана.

Перейдём к доказательству второй части. Теперь $w \in W_0(Q)$, следовательно, $u \in \mathring{W}_2^1(Q; \mathbb{C})$ и u является решением задачи Дирихле для уравнения (39). Тогда, как известно (см. [16, гл. 8, теорема 8.12]), имеет место оценка (40) с $Q_1 = Q$. Отсюда, рассуждая как и выше, получаем

$$\|u\|_{W_2^2(Q)} \leq c(\|f\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})} + \|w\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})}).$$

Здесь второе слагаемое справа можно опустить ввиду (4). Следовательно, имеет место (6). Теорема 2 доказана.

3. Доказательства свойств решения задачи на ячейке.

3.1. Доказательство свойства 1. Очевидно, что

$$\langle \mu^0 \overline{\partial_{\bar{\xi}} N_j} \rangle_y = \langle \nu^0 \overline{\partial_{\bar{\xi}} N_j} \rangle_y = 0, \quad j = 1, 2,$$

так как μ^0 и ν^0 зависят только от x и среднее от производных по y равно нулю. Поэтому, согласно неравенству острого угла (11), равенствам (16), (17) и условию эллиптичности (9), получим

$$(1 - k_0) \langle |\partial_{\bar{\xi}_j} N_j|^2 \rangle_y \leq \text{Re} \langle \chi_j \overline{\partial_{\bar{\xi}_j} N_j} \rangle_y = \text{Re} \langle -(\mu + \delta\nu) \overline{\partial_{\bar{\xi}_j} N_j} \rangle_y \leq k_0 \langle |\partial_{\bar{\xi}_j} N_j|^2 \rangle_y^{1/2},$$

где $\delta = 1$ при $j = 1$, $\delta = -1$ при $j = 2$. Следовательно, $\langle |\partial_{\bar{\xi}_j} N_j|^2 \rangle_y^{1/2} \leq k_0 / (1 - k_0)$. Значит, ввиду неравенства Пуанкаре и (14) получим (19). Свойство 1 доказано.

3.1. Доказательство следствия 1. Согласно (17) имеем

$$\chi_1 - i\chi_2 = \mu^0(x) - \mu(x, y).$$

Следовательно, ввиду уравнения (16) имеем

$$\mathcal{A}N_1(x, y) - i\mathcal{A}N_2(x, y) + \mu(x, y) = \mu^0(x), \quad (x, y) \in Q \times \square.$$

Отсюда и из очевидного равенства $|\mu^0(x)| = \langle |\mu^0(x)|^2 \rangle_y^{1/2}$ ввиду условия эллиптичности (9), неравенства (19) и равенств (14) имеем

$$|\mu^0(x)| \leq 2(1 + k_0) \langle |\partial_{\bar{\xi}} N(x, \cdot)|^2 \rangle_y^{1/2} + k_0 \leq 2(1 + k_0)c + k_0, \quad x \in \bar{Q}.$$

Значит, $|\mu^0(x)| \leq c_1$, $x \in \bar{Q}$, где $c_1 > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0 .

Аналогично, используя $\chi_1 + i\chi_2 = \nu^0(x) - \nu(x, y)$, получим такую же оценку для $\nu^0(x)$. Следствие 1 доказано.

3.3. Доказательство свойства 2. Ввиду следствия 1 и условия эллиптичности (9) имеем $\mu^0(x) - \mu(x, y) \in L_\infty(Q \times \square; \mathbb{C})$. Отсюда, согласно [14, теорема 5], следует справедливость утверждений свойства 2.

3.4. Доказательство свойства 3. Покажем справедливость (21) для N_1 (для N_2 доказательство аналогичное). Подставив N_1 в уравнение (16) с $j = 1$, получим равенство. Запишем его для x и $x' = x + h$, принадлежащих \bar{Q} , и отнимем из второго первое, тогда имеем

$$\partial_{\bar{\xi}} \Delta_h N_1(x, y) + \mu(x + h, y) \partial_{\bar{\xi}} \Delta_h N_1(x, y) + \nu(x + h, y) \overline{\partial_{\bar{\xi}} \Delta_h N_1(x, y)} = F_h(x, y), \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_h N_1(x, y) &= N_1(x + h, y) - N_1(x, y), \quad F_h(x, y) = -\Delta_h \mu(x, y) \partial_{\bar{\xi}} N_1(x, y) - \Delta_h \nu(x, y) \overline{\partial_{\bar{\xi}} N_1(x, y)} + \\ &+ 2^{-1}(\Delta_h \mu^0(x) + \Delta_h \nu^0(x)) - 2^{-1}(\Delta_h \mu(x, y) - \Delta_h \nu(x, y)), \\ \Delta_h \mu^0(x) &= \mu^0(x + h) - \mu^0(x), \quad \Delta_h \nu^0(x) = \nu^0(x + h) - \nu^0(x). \end{aligned}$$

Применив неравенство острого угла к равенству (43), получим

$$(1 - k_0) \langle |\partial_{\bar{\xi}} \Delta_h N_1(x, \cdot)|^2 \rangle_y \leq \operatorname{Re} \langle \tilde{F}_h(x, \cdot) \overline{\partial_{\bar{\xi}} \Delta_h N_1(x, \cdot)} \rangle_y \leq \langle |\tilde{F}_h(x, \cdot) \overline{\partial_{\bar{\xi}} \Delta_h N_1(x, \cdot)}| \rangle_y, \quad (44)$$

где \tilde{F}_h есть F_h без третьего слагаемого (третье слагаемое в F_h , обозначим его через J , не зависит от y , поэтому $\langle J \overline{\partial_{\bar{\xi}} \Delta_h N_1(x, \cdot)} \rangle_y = 0$). Воспользовавшись неравенством Гёльдера из (44), получим

$$\|\partial_{\bar{\xi}} \Delta_h N_1(x, \cdot)\|_{L_2(\square; \mathbb{C})} \leq (1 - k_0)^{-1} \|\tilde{F}_h(x, \cdot)\|_{L_2(\square; \mathbb{C})}.$$

Отсюда, ввиду (8) и (19), вытекает $\|\partial_{\bar{\xi}} \Delta_h N(x, \cdot)\|_{L_2(\square; \mathbb{C})} \leq c|h|$, где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0 и L . Отсюда и неравенства Пуанкаре следует (21). Свойство 3 доказано.

3.5. Доказательство следствия 2. Докажем липшицевость $\mu^0(x)$ (доказательство для ν^0 аналогичное). Ввиду независимости $\mu^0(x)$, $\nu^0(x)$ от y и оценки (8) имеем

$$|\Delta_h \mu^0(x)| = \langle |\Delta_h \mu^0(x)|^2 \rangle_y^{1/2} \leq \langle |\Delta_h \mu^0(x) - \Delta_h \mu(x, \cdot)|^2 \rangle_y^{1/2} + \langle |\Delta_h \mu(x, \cdot)|^2 \rangle_y^{1/2} \leq J(x) + L|h|,$$

где $J(x) = \langle |\Delta_h \mu^0(x) - \Delta_h \mu(x, \cdot)|^2 \rangle_y^{1/2}$, $x, x' = x + h \in \bar{Q}$. Поэтому достаточно доказать липшицевость функции $J(x)$. Согласно (17)

$$\chi_1 - i\chi_2 = \mu^0(x) - \mu(x, y),$$

значит с учётом уравнения (16) получим

$$\begin{aligned} \Delta_h(\mu^0(x) - \mu(x, y)) &= \Delta_h \mathcal{A}N_1 - i\Delta_h \mathcal{A}N_2 = \\ &= \partial_{\bar{\xi}} \Delta_h N_1(x, y) + \mu(x + h, y) \partial_{\xi} \Delta_h N_1(x, y) + \nu(x + h, y) \overline{\partial_{\bar{\xi}} \Delta_h N_1(x, y)} + \\ &\quad + \Delta_h \mu(x, y) \partial_{\xi} N_1(x, y) + \Delta_h \nu(x, y) \overline{\partial_{\bar{\xi}} N_1(x, y)} - \\ &\quad - i\partial_{\bar{\xi}} \Delta_h N_2(x, y) - i\mu(x + h, y) \partial_{\xi} \Delta_h N_2(x, y) - i\nu(x + h, y) \overline{\partial_{\bar{\xi}} \Delta_h N_2(x, y)} - \\ &\quad - i\Delta_h \mu(x, y) \partial_{\xi} N_2(x, y) - i\Delta_h \nu(x, y) \overline{\partial_{\bar{\xi}} N_2(x, y)} \equiv J_2(x, y) + J_3(x, y) + J_4(x, y) + J_5(x, y), \end{aligned} \quad (45)$$

где $J_k(x, y)$, $k = 2, \dots, 5$, – k -я строка формулы (45), $\Delta_h g(x, y) = g(x + h, y) - g(x, y)$.

Оценим $L_2(\square; \mathbb{C})$ -норму $J_k(x, y)$ как функции от y . Ввиду априорной оценки (12) и неравенства (21) для J_2 и J_4 имеем $\|J_k\|_{L_2(\square; \mathbb{C})} \leq c|h|$, где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0 и L . Аналогичные оценки получим и для J_3, J_5 , при этом надо учесть липшицевость коэффициентов μ, ν и оценку (19) из свойства 1. Из этих оценок и (45) следует $J \leq ch$, где постоянная $c > 0$ зависит только k_0, L . Следствие 2 доказано.

3.6. Доказательство свойства 4. Для периодической задачи

$$\begin{aligned} \mathcal{A}w \equiv \partial_{\bar{\xi}} w + \mu(x, y) \partial_{\xi} w + \nu(x, y) \partial_{\bar{\xi}} \bar{w} &= f \in L_r(\square; \mathbb{C}), \\ w(x, \cdot) \in W_r^1(\square; \mathbb{C}), \quad \langle w(x, \cdot) \rangle_y &= 0 \end{aligned}$$

справедлива априорная оценка (см. [14], п. 3)

$$c \sum_{j=1}^2 \|\mathcal{D}_{y_j} w(x, \cdot)\|_{L_r(\square; \mathbb{C})} \leq \|\mathcal{A}w\|_{L_r(\square; \mathbb{C})}, \quad w(x, \cdot) \in W_r^1(\square; \mathbb{C}), \quad (46)$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0 . Теперь, рассуждая аналогично свойству 3, применив неравенство (46) вместо неравенства острого угла, с учётом липшицевости коэффициентов $\mu^0(x), \nu^0(x)$ получим (22). Свойство 4 доказано.

3.7. Доказательство следствия 3. Из ограниченности вложения $W_r^1(\square; \mathbb{C}) \subset C^\alpha(\bar{\square}; \mathbb{C})$, ввиду свойства 2 (см. (20)), получим

$$|N_j(x, y') - N_j(x, y)| \leq c_0 |y' - y|^\alpha, \quad x \in \bar{Q}, \quad y', y \in \bar{\square}, \quad j = 1, 2,$$

где $c_0 > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0 . Аналогично из свойства 4 (см. (22)) имеем

$$|N_j(x', y) - N_j(x, y)| \leq c_1 |x' - x|, \quad x', x \in \bar{Q}, \quad y \in \bar{\square}, \quad (47)$$

где $c_1 > 0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0 и постоянной Липшица L . Из этих неравенств вытекает (23) и непрерывность функции $N_j(x, y)$ в $\bar{Q} \times \bar{\square}$.

Докажем вторую часть следствия. Первая из оценок (24) следует из (20) согласно свойству 4 ввиду вложения

$$W_r^1(\square; \mathbb{C}) \subset C^\alpha(\bar{\square}; \mathbb{C}), \quad \alpha = (r - 2)/r.$$

Из оценки (47) с учётом теоремы Радемахера–Степанова следует оценка производных

$$|\mathcal{D}_{x_l} N_j(x, y)| \leq c_1,$$

п.в. $x \in Q, y \in \square, j, l = 1, 2$, где $c_1 > 0$ – постоянная из (47). Ввиду равномерности этой оценки относительно x и y получим

$$\|\mathcal{D}_{x_l} N_j\|_{L_\infty(Q \times \square; \mathbb{C})} \leq c_1, \quad j, l = 1, 2.$$

Следствие 3 доказано.

4. Доказательства лемм.

4.1. Доказательство леммы 1. Введём в рассмотрение вспомогательную область $Q_0 \supset \bar{Q}$, Q_0 – гладкая (класса C^2) ограниченная область, построенная следующим образом. Из-за гладкости границы ∂Q найдётся достаточно малое положительное число δ такое, что конец внешней нормали $n(x)$ к границе ∂Q в точке x с длиной $|n(x)| = \delta$ при полном обходе границы опишет гладкую кривую Γ без самопересечений. Объединение \bar{Q} и области между ∂Q и Γ даёт нам Q_0 .

Функцию $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y)$ продолжим в замыкание Q_0 по формуле

$$\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{a}}(x, y) = \begin{cases} \mathbf{a}(x, y) & \text{при } x \in \bar{Q}, \quad y \in \square, \\ \mathbf{a}(t, y) & \text{при } x \in \bar{Q}_0 \setminus Q, \quad y \in \square, \end{cases} \tag{48}$$

где $t \in \partial Q$ – начало внешней нормали, проходящей через точку $x \in \bar{Q}_0 \setminus Q$. Легко видеть, что $\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{a}}(x, y) \in \text{Lip}(\bar{Q}_0, L_r(\square; \mathbb{C}))$, $1 < r < 2$, с той же постоянной Липшица, что и у функции $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y)$.

Рассмотрим периодическую задачу

$$\begin{aligned} \Delta_y \mathbf{b}(x, y) &\equiv \text{div}_y \nabla_y \mathbf{b}(x, y) = \tilde{\mathbf{a}}(x, y) - \langle \tilde{\mathbf{a}}(x, \cdot) \rangle_y \in L_r(\square; \mathbb{C}), \\ \mathbf{b} &\in W_r^2(\square; \mathbb{C}), \quad \langle \mathbf{b}(x, \cdot) \rangle_y = 0, \end{aligned} \tag{49}$$

где $x \in \bar{Q}_0$ играет роль параметра, $\Delta_y = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$ – оператор Лапласа. Эта задача одно-значно разрешима согласно теории эллиптических операторов, так как среднее значение (по y) правой части равно нулю. Следовательно, для любого $x \in \bar{Q}_0$ вектор-функция $\mathfrak{B}(x, y) = \nabla_y \mathbf{b}(x, y)$ принадлежит $W_r^1(\square; \mathbb{C})$, к тому же выполняется оценка

$$\|\mathfrak{B}(x, \cdot)\|_{W_r^1(\square; \mathbb{C})} \leq 2 \max_{x \in \bar{Q}_0} \|\tilde{\mathbf{a}}(x, \cdot)\|_{L_r(\square; \mathbb{C})}, \tag{50}$$

значит, по теореме вложения, $\mathfrak{B}(x, y)$ принадлежит $L_m(\square; \mathbb{C})$, $m = 2r/(2 - r)$. Ввиду того, что $1 < r < 2$, имеем $m > 2$. Отсюда и (49) получим разложение

$$\tilde{\mathbf{a}}(x, y) = \langle \tilde{\mathbf{a}}(x, \cdot) \rangle_y + \text{div}_y \mathfrak{B}(x, y), \quad x \in \bar{Q}_0, \tag{51}$$

где $\mathfrak{B}(x, y)$, как функция от y , принадлежит пространству $L_m(\square; \mathbb{C})$ для каждого $x \in \bar{Q}_0$. Отметим, что как $\mathbf{b}(x, y)$, так и $\mathfrak{B}(x, y)$ периодические по y , равномерно непрерывные по Липшицу по переменной $x \in \bar{Q}_0$ функции со значениями в $W_r^2(\square; \mathbb{C})$ и $L_m(\square; \mathbb{C})$, соответственно, т.е.

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(x, y) \in \text{Lip}(\bar{Q}_0, W_r^2(\square; \mathbb{C})), \quad \mathfrak{B}(x, y) \in \text{Lip}(\bar{Q}_0, L_m(\square; \mathbb{C})).$$

Доказывается это аналогично свойству 3 решения задачи на ячейке.

Сначала докажем неравенство (25) для функций из $\dot{W}_2^1(Q_0; \mathbb{C})$. Справедливость (25) достаточно проверить для функций из единичного шара

$$B = \{w \in \dot{W}_2^1(Q_0; \mathbb{C}) : \|w\|_{W_2^1(Q_0; \mathbb{C})} \leq 1\}. \tag{52}$$

Из (51) следует

$$\mathbf{a}^\varepsilon(x) = \mathbf{a}(x, \varepsilon^{-1}x) = \langle \mathbf{a}(x, \cdot) \rangle_y + \varepsilon \text{div}_2 \mathfrak{B}(x, \varepsilon^{-1}x) = \langle \mathbf{a}(x, \cdot) \rangle_y + \varepsilon \text{div}_2 \mathfrak{B}^\varepsilon(x), \quad x \in \bar{Q}_0.$$

Здесь $\mathfrak{B}(x, y)$ – функция двух групп переменных x_1, x_2 и y_1, y_2 , поэтому $\text{div}_2 \mathfrak{B}(x, \varepsilon^{-1}x)$ у нас означает дивергенцию по иксам из второй группы переменных. Согласно этим равенствам (интегрируя по частям) имеем

$$\int_{Q_0} \mathbf{a}^\varepsilon(x) |w(x)|^2 dx = \int_{Q_0} \langle \mathbf{a}(x, \cdot) \rangle_y |w(x)|^2 dx + \varepsilon \int_{Q_0} \sum_{j=1}^2 (w_j(x))^2 \text{div}_2 \mathfrak{B}^\varepsilon(x) dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{Q_0} \langle \mathbf{a}(x, \cdot) \rangle_y |w(x)|^2 dx - 2\varepsilon \sum_{j=1}^2 \int_{Q_0} w_j(x) \mathfrak{B}^\varepsilon(x) \cdot \nabla w_j(x) dx \leq \int_{Q_0} \langle \mathbf{a}(x, \cdot) \rangle_y |w(x)|^2 dx + \\
 &\quad + \int_{Q_0} |\mathfrak{B}^\varepsilon(x)|^2 |w(x)|^2 dx + \varepsilon^2 \int_{Q_0} (|\nabla w_1(x)|^2 + |\nabla w_2(x)|^2) dx, \tag{53}
 \end{aligned}$$

где $w_1 = \operatorname{Re} w$, $w_2 = \operatorname{Im} w$.

Очевидно, что $|\mathfrak{B}(x, y)|^2 \in \operatorname{Lip}(\overline{Q_0}, L_{m/2}(\square; \mathbb{C}))$, поэтому по свойству среднего значения имеем слабую сходимость $|\mathfrak{B}(x, \varepsilon^{-1}x)|^2 \rightharpoonup \langle |\mathfrak{B}(x, \cdot)|^2 \rangle_y$ в $L_{m/2}(Q_0; \mathbb{C})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{Q_0} |\mathfrak{B}^\varepsilon(x)|^2 |w(x)|^2 dx = \int_{Q_0} \langle |\mathfrak{B}(x, \cdot)|^2 \rangle_y |w(x)|^2 dx, \quad w \in B. \tag{54}$$

Как известно, вложение $W_2^1(Q_0; \mathbb{C}) \subset L_q(Q_0; \mathbb{C})$ компактно для любого $q \geq 1$. Отсюда, ввиду (52) и произвольности q , вытекает, что множество $\tilde{B} = \{\varphi = w^2 : w \in B\}$ компактно в $L_{m'}(Q_0; \mathbb{C})$, где $m' = m/(m - 2)$ – сопряжённый показатель для $m/2$. Сходимость (54) на компакте \tilde{B} равномерная. Равномерность легко получить привлечением конечных ε -сетей для компакта \tilde{B} . Тогда из (50) и (54) получим оценку

$$\int_{Q_0} |\mathfrak{B}^\varepsilon(x)|^2 |w(x)|^2 dx \leq \left(\max_{x \in \overline{Q_0}} \langle |\mathfrak{B}(x, \cdot)|^2 \rangle_y + 1 \right) \int_{Q_0} |w(x)|^2 dx, \quad w \in B, \tag{55}$$

для достаточно малых ε , $\varepsilon \leq \varepsilon_0(Q_0)$. Ввиду ограниченности вложений $L_m(\square; \mathbb{C}) \subset L_2(\square; \mathbb{C})$ и $W_r^1(\square; \mathbb{C}) \subset L_m(\square; \mathbb{C})$, с учётом (50) имеем

$$\langle |\mathfrak{B}(x, \cdot)|^2 \rangle_y^{1/2} \leq \langle |\mathfrak{B}(x, \cdot)|^m \rangle_y^{1/m} \leq c \|\mathfrak{B}(x, \cdot)\|_{W_r^1(\square; \mathbb{C})} \leq c \max_{x \in \overline{Q_0}} \|\tilde{\mathbf{a}}(x, \cdot)\|_{L_r(\square; \mathbb{C})}, \quad x \in \overline{Q_0},$$

где $c > 0$ – постоянная. Отсюда и формул (53), (55) получим

$$\int_{Q_0} \mathbf{a}^\varepsilon |w(x)|^2 dx \leq C \left(\int_{Q_0} |w(x)|^2 dx + \varepsilon^2 \int_{Q_0} \sum_{j=1}^2 (|w_j(x)|^2 + |\nabla w_j(x)|^2) dx \right), \tag{56}$$

где $C > 0$ – постоянная, $C = (c + 1) \max_{x \in \overline{Q_0}} \|\mathbf{a}(x, \cdot)\|_{L_r(\square; \mathbb{C})}$. Следовательно, неравенство (25) для функций из $\mathring{W}_2^1(Q_0; \mathbb{C})$ доказано.

Как известно (см. [16, гл. 7, теорема 7.25]), существует оператор продолжения

$$J : W_2^1(Q; \mathbb{C}) \rightarrow \mathring{W}_2^1(Q_0; \mathbb{C})$$

такой, что

$$\|Jw\|_{\mathring{W}_2^1(Q_0; \mathbb{C})} \leq c \|w\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})}, \quad \|Jw\|_{L_2(Q_0; \mathbb{C})} \leq c \|w\|_{L_2(Q; \mathbb{C})},$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от Q и Q_0 . Этим неравенств продолжения достаточно для получения (25) из (56) для любого $w \in W_2^1(Q; \mathbb{C})$, при этом надо учесть, что из построения (48) продолжения $\tilde{\mathbf{a}}$ следует

$$\max_{x \in \overline{Q_0}} \|\tilde{\mathbf{a}}\|_{L_r(\square; \mathbb{C})} = \max_{x \in \overline{Q}} \|\mathbf{a}\|_{L_r(\square; \mathbb{C})}.$$

Теперь перейдём к доказательству неравенства (26). Введём в рассмотрение семейство $\{\vartheta^\varepsilon(x)\}$ вещественных гладких срезающих функций, удовлетворяющих условиям

$$1^\circ) 0 \leq \vartheta^\varepsilon \leq 1; \quad 2^\circ) \vartheta^\varepsilon|_{Q_{\varepsilon/2}} = 1; \quad 3^\circ) \vartheta^\varepsilon = 0 \text{ вне } Q_\varepsilon; \quad 4^\circ) \varepsilon |\nabla \vartheta^\varepsilon| \leq M, \tag{57}$$

где $M > 0$ – постоянная, Q_h , $h = \varepsilon/2$, – h -окрестность границы ∂Q . Используя свойства срезающих функций $\{\vartheta^{2\varepsilon}(x)\}$ и оценку (25), получим

$$\int_{Q_\varepsilon \cap Q} \mathbf{a}^\varepsilon |w|^2 dx \leq \int_{Q_{2\varepsilon} \cap Q} \mathbf{a}^\varepsilon (\vartheta^{2\varepsilon} |w|)^2 dx \leq c \left(\int_{Q_{2\varepsilon} \cap Q} (\vartheta^{2\varepsilon} |w|)^2 dx + \varepsilon^2 \int_{Q_{2\varepsilon} \cap Q} (\vartheta^{2\varepsilon} |w|)^2 dx + \right. \\ \left. + \int_{Q_{2\varepsilon} \cap Q} (\varepsilon |\nabla(\vartheta^{2\varepsilon} w_1)|)^2 dx + \int_{Q_{2\varepsilon} \cap Q} (\varepsilon |\nabla(\vartheta^{2\varepsilon} w_2)|)^2 dx \right),$$

где $w_1 + iw_2 = w$. Отсюда, так как

$$(\varepsilon |\nabla(\vartheta^{2\varepsilon} v)|)^2 = ((\varepsilon |\nabla \vartheta^{2\varepsilon}|)|v| + \varepsilon \vartheta^{2\varepsilon} |\nabla v|)^2 \leq 2((\varepsilon |\nabla \vartheta^{2\varepsilon}|)v)^2 + (\varepsilon \vartheta^{2\varepsilon} |\nabla v|)^2,$$

имеем

$$\int_{Q_\varepsilon \cap Q} \mathbf{a}^\varepsilon |w|^2 dx \leq c(1 + \varepsilon^2 + 2M^2) \int_{Q_{2\varepsilon} \cap Q} |w|^2 dx + \varepsilon^2 \int_Q (|\nabla w_1|^2 + |\nabla w_2|^2) dx \leq \\ \leq 2c(1 + M^2) \int_{Q_{2\varepsilon} \cap Q} |w|^2 dx + c\varepsilon \int_Q (|\nabla w_1|^2 + |\nabla w_2|^2) dx.$$

Применим к первому интегралу справа известное неравенство для следа (см. [17; гл. 1, § 1, п. 2])

$$\int_{Q_{2\varepsilon} \cap Q} |w|^2 dx \leq c\varepsilon \|w\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})}^2, \tag{58}$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от w и ε , в результате получим неравенство (26). Лемма 1 доказана.

4.2. Доказательство леммы 2. Ввиду $f = A_0 w^0$, равенств (27) и (28) имеем

$$A_\varepsilon(w_1^\varepsilon - w_\varepsilon) = \varepsilon r_\varepsilon, \tag{59}$$

где невязка r_ε определена в (29). Согласно следствию 3 $N(x, y)$ и $\partial_{\bar{z}} N(x, y)$ ограничены постоянной, зависящей только от постоянной эллиптичности k_0 и постоянной Лишшица L , поэтому для невязки имеет место оценка (30). Отсюда и из (28), (59) с учётом $A_\varepsilon w_\varepsilon = f = A_0 w^0$ получим оба неравенства (31). Докажем соотношения (32). Первое из них следует из (27), ввиду ограниченности N_j , $j = 1, 2$:

$$\|w_1^\varepsilon - w^0\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq \varepsilon c \|\partial_z w^0\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq \varepsilon c \|w^0\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})}, \tag{60}$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0 и L . Теперь рассмотрим разность

$$\mathcal{D}_{x_l} w_1^\varepsilon(x) - \mathcal{D}_{x_l} w^0(x) = \mathcal{D}_{y_l} N(x, y) \partial_z w^0(x) + \mathcal{D}_{y_l} M(x, y) \overline{\partial_{\bar{z}} w^0(x)} + \\ + \varepsilon \mathcal{D}_{x_l} N(x, y) \partial_z w^0(x) + \varepsilon \mathcal{D}_{x_l} M(x, y) \overline{\partial_{\bar{z}} w^0(x)} + \varepsilon N(x, y) \partial_z \mathcal{D}_{x_l} w^0(x) + \varepsilon M(x, y) \mathcal{D}_{x_l} \overline{\partial_{\bar{z}} w^0(x)},$$

где $l = 1, 2$, $N = N_1 - iN_2$, $M = N_1 + iN_2$, N_1, N_2 – решения задачи на ячейке (см. теорему 4). Здесь последние четыре слагаемых справа оцениваются, как и выше, с учётом ограниченности $N_j(x, y)$, $j = 1, 2$, и их производных (следствие 3). Оценки первых двух слагаемых получим применив формулу (25) из леммы 1, где $\mathbf{a}(x, y) = |\mathcal{D}_{y_l} N_j(x, y)|^2 \in \text{Lip}(\overline{Q}, L_{q/2}(\square; \mathbb{C}))$, $q > 2$, – показатель повышенной суммируемости, $w = \partial_z w^0$. В результате

$$\|\mathcal{D}_{x_j} w_1^\varepsilon - \mathcal{D}_{x_j} w^0(x)\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c \|w^0\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})},$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0 и L . Отсюда и из формулы (60) следует слабая сходимость $w_1^\varepsilon \rightharpoonup w^0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Лемма доказана.

5. Доказательства теорем 5, 6 и 7.

5.1. Доказательство теоремы 5 об усреднении. Напомним, что класс $A(k_0; Q)$ G -компактен и семейство $\{A_\varepsilon\}$ – подмножество $A(k_0; Q)$. Пусть \widehat{A} – произвольная G -предельная точка семейства $\{A_\varepsilon\}$ т.е. $A_{\varepsilon_k} \xrightarrow{G} \widehat{A}$ в области Q при $\varepsilon_k \rightarrow 0$, где $\{\varepsilon_k\}$ – подпоследовательность $\{\varepsilon\}$. И пусть w^0 – произвольный элемент из $W_2^2(Q; \mathbb{C}) \cap W_0(Q)$. Тогда, ввиду ограниченности и липшицевости коэффициентов μ^0 и ν^0 , получим $f = A_0 w^0 \in W_2^1(Q; \mathbb{C})$. Рассмотрим функцию (27):

$$w_1^\varepsilon(x) = w^0(x) + \varepsilon(N(x, y)\partial_z w^0(x) + M(x, y)\overline{\partial_z w^0(x)}), \quad y = \varepsilon^{-1}x,$$

где $N(x, y)$, $M(x, y)$ те же, что и в лемме 2. По лемме 2 $w_1^{\varepsilon_k} \rightharpoonup w^0$ в $W_2^1(Q; \mathbb{C})$ и $f_{\varepsilon_k} = A_0 w^0 + \varepsilon_k r_{\varepsilon_k} \rightarrow A_0 w^0$ в $L_2(Q; \mathbb{C})$ при $\varepsilon_k \rightarrow 0$. Отсюда в силу свойства сходимости произвольных решений (см. п. 1.2) при $\varepsilon_k \rightarrow 0$ получим $\widehat{A}w^0 = A_0 w^0$ для любого $w^0 \in W_2^2(Q; \mathbb{C}) \cap W_0(Q)$. Значит, $A_0 = \widehat{A} \in A(k_0; Q)$, так как множество $W_2^2(Q; \mathbb{C}) \cap W_0(Q)$ всюду плотно в $W_0(Q)$. Следовательно, ввиду произвольности G -предельной точки \widehat{A} , отсюда вытекает G -сходимость $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Теорема 5 доказана.

5.2. Доказательство теоремы 6. Теперь приступим к доказательству оценки разности между точным решением w_ε задачи Римана–Гильберта (7) и первым приближением (27) – w_1^ε .

Пусть w^0 – решение усреднённой задачи Римана–Гильберта для усреднённого уравнения из теоремы 5, и пусть $w^0 \in W_2^2(Q; \mathbb{C}) \cap W_0(Q)$. Для того чтобы обеспечить такую гладкость w^0 (см. теорему 2), нам достаточно взять в задаче Римана–Гильберта правую часть f из пространства $W_2^1(Q; \mathbb{C})$.

Первое приближение (27): w_1^ε не принадлежит пространству $W_0(Q)$ из-за того, что корректор $\varepsilon(N(x, y)\partial_z w^0(x) + M(x, y)\overline{\partial_z w^0(x)})$ ($N(x, y) = N_1(x, y) - iN_2(x, y)$, $M(x, y) = N_1(x, y) + iN_2(x, y)$, N_1 и N_2 – периодические решения задачи на ячейке) не удовлетворяет граничному условию. Это вызывает некоторые затруднения при оценке разности $w_\varepsilon - w_1^\varepsilon$, поэтому введём в рассмотрение подправленное первое приближение $\omega_1^\varepsilon(x)$:

$$\omega_1^\varepsilon(x) = w^0(x) + \varepsilon(1 - \vartheta^\varepsilon(x))(N(x, y)\partial_z w^0(x) + M(x, y)\overline{\partial_z w^0(x)}) - i\varepsilon|Q|^{-1}c_\varepsilon, \quad y = \varepsilon^{-1}x, \quad (61)$$

где $\{\vartheta^\varepsilon(x)\}$ – семейство, определённое формулой (57), $|Q|$ – площадь области Q , $c_\varepsilon \in \mathbb{R}$ – действительное число, определённое формулой

$$c_\varepsilon = \int_Q (1 - \vartheta^\varepsilon(x)) \operatorname{Im} (N(x, y)\partial_z w^0(x) + M(x, y)\overline{\partial_z w^0(x)}) dx, \quad y = \varepsilon^{-1}x.$$

Очевидно, что семейство $\{c_\varepsilon\}$ равномерно ограничено и ввиду (24) имеем $|c_\varepsilon| \leq c\|w^0\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})}$, где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0 и L . Так как $w^0 \in W_2^2(Q; \mathbb{C}) \cap W_0(Q)$, согласно (61) и свойству 2°) семейства (57) получим $\omega_1^\varepsilon(x) \in W_0(Q)$.

Подправленное первое приближение (61), ввиду (27), можно представить в следующем виде:

$$\omega_1^\varepsilon = w_1^\varepsilon(x) - \varepsilon\vartheta^\varepsilon(x)(N(x, y)\partial_z w^0(x) + M(x, y)\overline{\partial_z w^0(x)}) - i\varepsilon|Q|^{-1}c_\varepsilon.$$

Оценим разность двух приближений

$$w_1^\varepsilon(x) - \omega_1^\varepsilon(x) = \varepsilon\vartheta^\varepsilon(x)(N(x, y)\partial_z w^0(x) + M(x, y)\overline{\partial_z w^0(x)}) + i\varepsilon|Q|^{-1}c_\varepsilon. \quad (62)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{x_j}(w_1^\varepsilon(x) - \omega_1^\varepsilon(x)) &= \varepsilon\mathcal{D}_{x_j}\vartheta^\varepsilon(x)(N(x, y)\partial_z w^0(x) + M(x, y)\overline{\partial_z w^0(x)}) + \\ &+ \vartheta^\varepsilon(x)(\mathcal{D}_{y_j}N(x, y)\partial_z w^0(x) + \mathcal{D}_{y_j}M(x, y)\overline{\partial_z w^0(x)}) + \\ &+ \varepsilon\vartheta^\varepsilon(x)(N(x, y)\mathcal{D}_{x_j}\partial_z w^0(x) + M(x, y)\mathcal{D}_{x_j}\overline{\partial_z w^0(x)}) + \\ &+ \varepsilon\vartheta^\varepsilon(x)(\mathcal{D}_{x_j}N(x, y)\partial_z w^0(x) + \mathcal{D}_{x_j}M(x, y)\overline{\partial_z w^0(x)}) \equiv \mathfrak{U}_1^\varepsilon + \mathfrak{U}_2^\varepsilon + \mathfrak{U}_3^\varepsilon + \mathfrak{U}_4^\varepsilon, \end{aligned} \quad (63)$$

где $\mathcal{D}_{x_j} = \partial/\partial x_j$, $\mathcal{D}_{y_j} = \partial/\partial y_j$, $j = 1, 2$. Здесь каждое слагаемое справа согласно свойству 3° семейства (57) ϑ^ε равно нулю вне ε -окрестности границы. С учётом свойств 1°, 4° функций ϑ^ε , ограниченности их решений и производных задачи на ячейке (24), свойств (58) следов, легко получим

$$\|\mathfrak{U}_1^\varepsilon\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leq c \left(\int_{Q_\varepsilon} |\partial_z w^0(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq c\sqrt{\varepsilon} \|w^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})},$$

$$\|\mathfrak{U}_3^\varepsilon\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leq c\varepsilon \|w^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \quad \|\mathfrak{U}_4^\varepsilon\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leq c\varepsilon \|w^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \quad (64)$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0 , L и Q .

Аналогично, применив вместо (58) неравенство (26), где $\mathfrak{a}(x, y) = |\mathcal{D}_{y_j} N_l(x, y)|^2$, $j, l = 1, 2$, ввиду свойства 4 принадлежит пространству $\text{Lip}(\overline{Q}, L_r(\square, \mathbb{C}))$, $r = q/2$, $q > 2$, – показатель повышенной суммируемости из свойства 2, а $w(x) = \partial_z w^0(x)$, получим

$$\|\mathfrak{U}_2^\varepsilon\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon} \|w^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \quad (65)$$

где $c > 0$ – постоянная, $c = \text{const}(k_0, L, Q)$.

Из оценок (64), (65) в силу (63) следует

$$\|\mathcal{D}_{x_j}(w_1^\varepsilon(x) - \omega_1^\varepsilon(x))\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon} \|w^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \quad j = 1, 2, \quad (66)$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0 , L и Q . Кроме того, из (62), свойства 1° семейства $\{\vartheta^\varepsilon\}$ и (24) следует оценка

$$\|w_1^\varepsilon(x) - \omega_1^\varepsilon(x)\|_{L_2(Q)} \leq c\varepsilon \|w^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}. \quad (67)$$

Из соотношений (66), (67) имеем

$$\|w_1^\varepsilon(x) - \omega_1^\varepsilon(x)\|_{W_2^1(Q)} \leq c\sqrt{\varepsilon} \|w^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \quad (68)$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0 , L и Q .

Теперь найдём L_2 -оценку функции $f_\varepsilon := A_\varepsilon(w_\varepsilon - \omega_1^\varepsilon)$. Согласно (28) запишем

$$f_\varepsilon = A_\varepsilon(w_\varepsilon - \omega_1^\varepsilon) + A_\varepsilon(w_1^\varepsilon - \omega_1^\varepsilon) = -\varepsilon r_\varepsilon + \partial_{\bar{z}}(w_1^\varepsilon - \omega_1^\varepsilon) + \mu(y)\partial_z(w_1^\varepsilon - \omega_1^\varepsilon) + \nu(y)\partial_{\bar{z}}(\overline{w}_1^\varepsilon - \overline{\omega}_1^\varepsilon).$$

Отсюда и из L_2 -оценок производных (66) с учётом (3), (27), (30) получим следующие оценки:

$$\|f_\varepsilon\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leq \|A_\varepsilon(w_\varepsilon - \omega_1^\varepsilon)\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} + \|A_\varepsilon(w_1^\varepsilon - \omega_1^\varepsilon)\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon} \|w^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \quad (69)$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0 , L и Q .

Заметим, что разность $w = w_\varepsilon - \omega_1^\varepsilon$ является решением задачи Римана–Гильберта

$$\partial_{\bar{z}} w + \mu^\varepsilon \partial_z w + \nu^\varepsilon \partial_z \overline{w} = f_\varepsilon, \quad w \in W_0(Q),$$

которое принадлежит пространству $W_0(Q)$. Поэтому из (3) и (69) вытекает неравенство

$$\|w_\varepsilon - \omega_1^\varepsilon\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon} \|w^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}. \quad (70)$$

Из оценок (68), (70) следует оценка разности $w_\varepsilon - \omega_1^\varepsilon$ между точным решением и первым приближением

$$\|w_\varepsilon - \omega_1^\varepsilon\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon} \|w^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})} \quad (71)$$

с постоянной $c > 0$, зависящей только от k_0 , L и Q . Отсюда, из оценки (60) и из леммы 2 получим следующую оценку:

$$\|w_\varepsilon - w^0\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|w^0\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})} \quad (72)$$

с постоянной $c > 0$, зависящей только от k_0 , L и Q .

Заметим, что w^0 – решение усреднённой эллиптической задачи, поэтому, согласно теореме 2, получим

$$\|w^0\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})} \leq c\|f\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})}$$

с постоянной $c > 0$, зависящей только от k_0 , L и Q . Следовательно, из оценок (71), (72) вытекают оценки (33). Теорема 6 доказана.

5.3. Доказательство теоремы 7. Пусть правая часть уравнения (7) f принадлежит пространству $W_0(Q) \subset W_2^1(Q; \mathbb{C})$, тогда, ввиду того что $\|f\|_{W_0(Q)} = \|\partial_{\bar{z}}f\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}$ задаёт в $W_0(Q)$ норму, эквивалентную норме пространства $W_2^1(Q; \mathbb{C})$, из оценок (33) получим

$$\|w_\varepsilon - w^0\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|\partial_{\bar{z}}f\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}, \quad (73)$$

$$\|w_\varepsilon - w_\varepsilon^{\varepsilon}\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|\partial_{\bar{z}}f\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}. \quad (74)$$

(Здесь и ниже $c > 0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0 , постоянной Липшица L и области Q .)

Так как w_ε , w^0 – решения краевых задач Римана–Гильберта, имеем

$$w_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1}f, \quad w^0 = A_0^{-1}f.$$

Следовательно, ввиду (73), получим

$$\|(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})f\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|\partial_{\bar{z}}f\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}, \quad f \in W_0(Q).$$

Отсюда, так как отображение $\partial_{\bar{z}}: W_0(Q) \rightarrow L_2(Q; \mathbb{C})$ есть изоморфизм, имеем

$$\|(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})\partial_{\bar{z}}^{-1}g\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|g\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}, \quad g \in L_2(Q; \mathbb{C}).$$

Следовательно,

$$\|(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})\partial_{\bar{z}}^{-1}\|_{L_2(Q; \mathbb{C}) \rightarrow L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}.$$

Значит первая из оценок (34) доказана.

В силу того, что имеет место вложение $W_0(Q) \subset L_2(Q; \mathbb{C})$, операторы A_ε^{-1} , A_0^{-1} можно рассматривать как операторы, действующие из $W_0(Q)$ в $L_2(Q; \mathbb{C})$, тогда из оценки (73) получим вторую из оценок (34).

Аналогично, используя (74), получим оценки (35) и (36). Теорема 7 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. М., 1993.
2. Жиков В.В., Пастухова С.Е. Об операторных оценках в теории усреднения // Успехи мат. наук. 2016. Т. 71. № 3. С. 27–122.
3. Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения // Алгебра и анализ. 2003. Т. 15. № 5. С. 1–108.
4. Борисов Д.И. Асимптотики решений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20. № 2. С. 19–42.
5. Сенник Н.Н. Об усреднении несамосопряжённых локально-периодических эллиптических операторов // Функциональный анализ и его прил. 2017. Т. 51. № 2. С. 92–96.
6. Пастухова С.Е., Тихомиров Р.Н. Операторные оценки повторного и локально-периодического усреднения // Докл. РАН. 2007. Т. 415. № 3. С. 304–309.

7. Жиков В.В. Об операторных оценках в теории усреднения // Докл. РАН. 2005. Т. 403. № 3. С. 305–308.
8. Сиражудинов М.М. Асимптотический метод усреднения обобщенных операторов Бельтрами // Мат. сб. 2017. Т. 208. № 4. С. 87–110.
9. Сиражудинов М.М. Операторные оценки усреднения обобщенных уравнений Бельтрами // Дагестанск. электрон. мат. изв. 2017. Вып. 7. С. 40–46.
10. Сиражудинов М.М., Тихомирова С.В. Оценки погрешности усреднения периодической задачи для обобщённого уравнения Бельтрами // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1651–1659.
11. Сиражудинов М.М., Джамалудинова С.П. Оценки погрешности усреднения задачи Римана–Гильберта для уравнения Бельтрами с локально-периодическим коэффициентом // Вестн. Дагестанск. гос. ун-та. Сер. 1. Естеств. науки. 2021. Т. 36. № 4. С. 23–38.
12. Сиражудинов М.М. О G -сходимости и усреднении обобщённых операторов Бельтрами // Мат. сб. 2008. Т. 199. № 5. С. 124–155.
13. Сиражудинов М.М. О краевой задаче Римана–Гильберта (L_2 -теория) // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 1. С. 64–73.
14. Сиражудинов М.М. О периодических решениях одной эллиптической системы первого порядка // Мат. заметки. 1990. Т. 48. № 5. С. 153–155.
15. Сиражудинов М.М. Асимптотический метод усреднения обобщенных операторов Бельтрами // Мат. сб. 2017. Т. 208. № 4. С. 87–110.
16. Гильбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М., 1989.
17. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М., 1987.

Дагестанский федеральный исследовательский
центр РАН, г. Махачкала,
Дагестанский государственный университет,
г. Махачкала

Поступила в редакцию 12.01.2022 г.
После доработки 12.01.2022 г.
Принята к публикации 25.05.2022 г.

УДК 517.9

ОБ ИТЕРАТИВНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПРИНЦИПА ЛАГРАНЖА В ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ СИСТЕМАМИ ВОЛЬТЕРРОВА ТИПА С ОПЕРАТОРНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© 2022 г. В. И. Сумин, М. И. Сумин

Рассматривается итеративная регуляризация классических условий оптимальности – принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина в выпуклой задаче оптимального управления с операторным (т.е. задаваемым оператором с бесконечномерным образом) ограничением-равенством и функциональными ограничениями-неравенствами. Управляемая система задаётся линейным функционально-операторным уравнением второго рода общего вида в пространстве L_2^m , основной оператор правой части уравнения предполагается квазинильпотентным. Целевой минимизируемый функционал задачи сильно выпуклый. Получение регуляризованных условий оптимальности основано на использовании метода итеративной двойственной регуляризации. Основное их предназначение – устойчивое генерирование в рассматриваемой оптимизационной задаче обобщённых минимизирующих последовательностей из минималей регулярного функционала Лагранжа, двойственные переменные для которого генерируются в соответствии с процедурой итеративной регуляризации градиентного подъема в двойственной задаче. Как иллюстрирующий пример рассматривается задача оптимизации для системы уравнений гиперболического типа, частным случаем этой задачи является конкретная обратная задача финального наблюдения.

DOI: 10.31857/S0374064122060073, EDN: CDFMUX

Введение. Статья посвящена итеративной регуляризации принципа Лагранжа в выпуклых задачах оптимального управления распределёнными системами вольтеррова типа с операторными ограничениями. Главное назначение предлагаемой регуляризации – “преодоление” связанных с некорректностью классических условий оптимальности (КУО) проблем и устойчивое генерирование обобщённых минимизирующих последовательностей (ОМП), состоящих из минималей регулярного функционала Лагранжа в рассматриваемой оптимизационной задаче, двойственные переменные для которого генерируются в соответствии с процедурой итеративной регуляризации градиентного подъема в двойственной задаче. В работе показано, что “внутренний потенциал” КУО такой, что при соответствующей конструктивной трансформации–регуляризации они эффективно преобразуются в удобные средства решения некорректных оптимизационных задач.

Потребность в регуляризации КУО объясняется свойствами их некорректности, под которыми понимаются их возможные невыполнимость и неустойчивость по возмущению исходных данных. Эти свойства некорректности обусловлены самой природой задач условной оптимизации [1, 2]. Заметим, что о невыполнимости КУО естественно говорить как в случае, когда этот факт строго доказывается (см. пример в [3, с. 260], а также соответствующие примеры в [1, 2]), так и в случае, когда мы не знаем так это или нет (см. ниже обсуждение задачи (P)). Можно утверждать, что проверка на корректность конкретных задач условной оптимизации и оптимального управления, их систем оптимальности представляет собою, как правило, сложную самостоятельную математическую задачу. Поэтому, если мы хотим привлечь КУО непосредственно к решению сложных задач оптимизации, то и “относиться” к ним необходимо как к математическим объектам с заведомо возможными свойствами некорректности (см. работы [4, 5]). Необходимость такого подхода к задачам условной оптимизации и оптимального управления связана ещё и с тем, что сама физическая суть подобных задач, часто возникающих в современном естествознании, обуславливает приближённое задание исходных данных.

Идея регуляризации КУО в задачах условной оптимизации на основе теории двойственности как в неитеративном, так и в итеративном вариантах была относительно недавно предложена в статье [6] (см. также работы [1, 2]), аналогичные вопросы для задач оптимального управления распределёнными системами рассматривались, в частности, в работах [2, 7] (см. также библиографию в них). Отметим, что впервые принцип итеративной регуляризации был предложен для решения монотонных вариационных неравенств в работе [8] (см. также книгу [9] и библиографию в ней), его применение для обоснования процедуры регуляризации метода проекции градиента для задачи математического программирования подробно изложено в [5, гл. 9, § 8]. Об итеративной двойственной регуляризации [6] (см. также [2]) мы говорим тогда, когда принцип итеративной регуляризации применяется для решения задачи, двойственной по отношению к исходной задаче выпуклого программирования.

Данная статья продолжает линию исследований по регуляризации КУО в задачах оптимального управления линейными распределёнными системами работ [10, 11], в которых изучались оптимизационные задачи с функциональными ограничениями. В статье [10] рассматривалась итеративная регуляризация КУО, в [11] – неитеративная. С общей точки зрения рассматриваемая в статье задача оптимального управления представляет собою каноническую задачу выпуклого программирования [3, п. 3.3.1] в гильбертовом пространстве с операторным ограничением-равенством, также в гильбертовом пространстве, и функциональными ограничениями-неравенствами (см. задачу (3) ниже). Главную трудность при работе с такими ограничениями представляет, как известно, операторное равенство. Для пояснения содержательного смысла результатов данной статьи вкратце рассмотрим классическую некорректную задачу поиска нормального решения операторного уравнения первого рода [4, 5, 9], частным случаем которой становится наша базовая задача (3), если в ней отбросить функциональные ограничения и упростить целевой функционал. Речь идет о задаче на условный экстремум

$$(P) \quad \|u\|^2 \rightarrow \inf, \quad \mathcal{G}[u] = h, \quad u \in \mathcal{D} \subseteq Z,$$

где $\mathcal{G} : Z \rightarrow H$ – линейный ограниченный оператор, Z, H – гильбертовы пространства, $h \in H$ – заданный элемент, \mathcal{D} – выпуклое замкнутое множество в Z .

Прежде чем говорить о регуляризации принципа Лагранжа (ПЛ) для более специальных задач типа базовой задачи (3) данной статьи, естественно сначала выяснить как этот принцип может быть записан в задаче (P). Случай конечномерного ограничения-равенства, как известно, не вызывает затруднений. В общем случае на пути вывода для задачи (P) принципа Лагранжа возникают существенные трудности, связанные как раз с операторным ограничением-равенством. Так, например, известные подходы к выводу принципа Лагранжа (см. [3, 12]) требуют замкнутости образа оператора \mathcal{G} *). Это требование не выполняется, например, в случае вполне непрерывного оператора \mathcal{G} (см. [14, с. 225, теорема 1]), часто встречающемся в распределённых задачах оптимизации. Подход к выводу для задачи (P) принципа Лагранжа с помощью метода возмущений (см., например, [3, п. 3.3.2]), использующий включение этой задачи в семейство аналогичных задач, зависящих от параметра $p \in H$, вида

$$(P_p) \quad \|u\|^2 \rightarrow \inf, \quad \mathcal{G}[u] = h + p, \quad u \in \mathcal{D} \subseteq Z,$$

предполагает жёсткую связь соотношений принципа Лагранжа с субдифференциальными свойствами функции значений задачи (P_p) . Именно, как показано в [1, теорема 2.1; 14, теорема 1.1], этот подход позволяет формально получить невырожденный (регулярный или нерегулярный) принцип Лагранжа в задаче $(P) = (P_0)$ тогда и только тогда, когда имеет место хотя бы одно из двух соотношений: $\partial\beta(0) \neq \emptyset$ или $\partial^\infty\beta(0) \neq \{0\}$, где $\partial\beta(0)$ и $\partial^\infty\beta(0)$ – субдифференциал и асимптотический субдифференциал (в смысле выпуклого анализа) выпуклой полунепрерывной снизу функции значений $\beta(p) \equiv \min_{u \in \mathcal{D}} \|u\|^2, p \in H$, в нуле. Однако, к со-

жалению, проверка выполнимости нужных субдифференциальных свойств функции значений представляет собою трудную самостоятельную математическую задачу.

*) Как отмечено в книге [3, п. 3.2.4, с. 260], невыполнение этого условия замкнутости может приводить к тому, что ПЛ вовсе не выполняется, см. также соответствующие примеры в [1, 2].

Наконец, если задача (P) такова, что в ней все же “можно записать” принцип Лагранжа, то “практическое” использование этого принципа (например, при нахождении приближений к решению задачи) неизбежно наталкивается на проблему его неустойчивости [1, 2].

Сказанное выше означает, что регуляризация КУО в задачах условной оптимизации с операторными ограничениями, в известном смысле, гораздо более актуальна по сравнению с регуляризацией в случае функциональных ограничений. Заметим, что задачи с операторными ограничениями-равенствами, например в форме задачи (P), естественным образом возникают при рассмотрении широкого класса представляющих большой интерес обратных задач для распределённых систем (например, обратных задач наблюдения [2]). В то же время, как показано в данной статье, схема регуляризации КУО при операторных ограничениях может быть аналогична схеме регуляризации при функциональных ограничениях.

Как и в [10, 11], в работе используется хорошо известное понятие ОМП – минимизирующего приближённого решения (МПП) [15, гл. III], т.е. последовательности допустимых управлений, значения функционала качества на которых стремятся к нижней грани задачи, а ограничения при этом выполняются лишь “в пределе” (определение МПП см. ниже в пункте 1.3 и в пункте 2.2, определение 2). Центральным в работе и неразрывно связанным с понятием МПП является введённое в [16] понятие МПП-образующего (регуляризирующего) алгоритма для задачи условной оптимизации. Его можно квалифицировать как занимающее промежуточное положение между применяемыми в [5, гл. 9] понятиями регуляризирующих алгоритмов первого типа (сходимость нижних граней [5, гл. 9, § 2, определение 1]) и второго типа (сходимость по аргументу [5, гл. 9, § 6, определение 1]). Это понятие направлено прежде всего на устойчивое построение МПП в задаче условной оптимизации и “жёстко привязано” именно к понятию МПП, органично учитывающему как запросы строгой математической оптимизационной теории [15, гл. IV–VIII], так и потребности инженерной практики [15, гл. III]. Понятие МПП-образующего алгоритма в совокупности с двойственным подходом позволяет получать регуляризованные КУО при весьма общих предположениях об исходных данных задачи. Одновременно с этим оно естественным образом “встраивается” в формулировки регуляризованных КУО.

Выделим основные свойства получаемых в статье результатов. Регуляризованные КУО:

1) формулируются как теоремы существования в исходной задаче МПП, состоящего из минималей функционала Лагранжа, двойственные переменные для которого генерируются в соответствии с процедурой итеративной регуляризации градиентного подъема в двойственной задаче;

2) формулируются для любой задачи рассматриваемого в статье класса задач вне зависимости от свойств задающих ограничения операторов с бесконечномерными образами и субдифференциальных свойств функций значений;

3) могут трактоваться как условия оптимальности, выраженные в секвенциальной форме;

4) выражаются в терминах регулярных классических функций Лагранжа и Гамильтона–Понтрягина;

5) являются секвенциальными обобщениями классических аналогов – своих предельных вариантов, сохраняя общую структуру последних;

6) “преодолевают” свойства некорректности КУО и представляют собою удобные регуляризирующие алгоритмы решения задач оптимизации.

Отличительная черта рассматриваемых в статье линейных функциональных уравнений второго рода – квазинильпотентность основного линейного оператора правой части. Подобным свойством обладают, прежде всего, различного рода вольтерровы операторы^{*)}. Поэтому рассматриваемые уравнения можно назвать функциональными уравнениями вольтеррова

^{*)} Начиная с известных работ L. Tonelli (1929) и А.Н. Тихонова (1938), название “вольтерровы операторы” (операторы типа Вольтерры) присваивалось разными авторами различным классам операторов со сходными свойствами (используются также названия: причинные операторы, наследственные операторы и др.); см., например, краткий обзор определений вольтерровых операторов [17, дополнение], а также [11, 18]. В случае линейных операторов эти определения так или иначе связаны со свойством квазинильпотентности: либо это свойство включено в само определение вольтеррова оператора (см., например, [19, с. 10]), либо при естественных условиях следует из этого определения (см., например, определение функционального оператора, “вольтеррова на системе множеств” [20], являющееся многомерным обобщением определения А.Н.Тихонова, и опирающийся на это определение цепочечный признак квазинильпотентности [18, теорема 2]).

типа. К ним естественным образом (обращением главной части) сводятся самые разнообразные начально-краевые задачи для различных уравнений с частными производными (гиперболических, параболических, интегро-дифференциальных систем таких уравнений с запаздываниями разного рода и др., см., например, разнообразные конкретные примеры в [17, гл. 2], обзоры в [17, 18]). Это позволило в данной статье получить регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина (ПМП) в итерационной форме единообразно для широкого класса распределённых задач оптимизации. Как иллюстрирующий пример рассматривается задача оптимизации для гиперболической системы; частным случаем этой задачи является конкретная обратная задача финального наблюдения. В работе существенным образом используется предложенное нами ранее понятие равностепенной квазинильпотентности семейства операторов (историю вопроса см. в [21]).

Примем следующие обозначения и соглашения: \mathbb{R}^n – пространство n -векторов-столбцов; $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ и $|\cdot|_n$ – евклидовы скалярное произведение и норма в \mathbb{R}^n ; 0_n – нуль в \mathbb{R}^n ; векторы, если не оговорено противное, считаются столбцами; $\text{col}\{a, \dots, b\}$ – вектор-столбец с последовательными частями a, \dots, b ; $*$ – знак сопряжения и транспонирования; $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченное и измеримое по Лебегу множество изменения независимых переменных, элементы которого обозначаем через $t \equiv \{t^1, \dots, t^n\}$; $L_p(\Pi)$ – лебегово пространство со стандартной нормой ($1 \leq p \leq \infty$); $L_p^m \equiv L_p^m(\Pi) \equiv (L_p(\Pi))^m$ ($1 \leq p \leq \infty$); $\|\cdot\|_{p,m}$ – стандартная норма прямого произведения в L_p^m ; $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,m}$ – стандартное скалярное произведение в L_2^m ; $L_p^{m \times l} \equiv L_p^{m \times l}(\Pi)$ – пространство $(m \times l)$ -матриц-функций с элементами из $L_p(\Pi)$; $\|\cdot\|_{p,m \times l}$ – стандартная норма прямого произведения в $L_p^{m \times l}$; H – некоторое гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ и нормой $\|\cdot\|_H$; $\chi_{[\alpha, \beta]}(\xi) \equiv \{1, \xi \in [\alpha, \beta]; 0, \xi \notin [\alpha, \beta]\}$, $\xi \in \mathbb{R}$, – характеристическая функция отрезка $[\alpha, \beta]$ действительной прямой.

1. Постановка задачи оптимального управления.

1.1. Базовая оптимизационная задача. Пусть заданы: натуральные числа m, s ; $c(t)$, $t \in \Pi$, – функция класса L_2^m ; $A : L_2^m \rightarrow L_2^m$ – линейный ограниченный оператор (ЛОО) с нулевым спектральным радиусом; ЛОО $B : L_2^s \rightarrow L_2^m$. Рассмотрим функциональное уравнение

$$z(t) = A[z](t) + B[u](t) + c(t), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_2^m, \quad u \in L_2^s, \tag{1}$$

где u – управление. Ввиду квазинильпотентности оператора A уравнение (1) имеет для каждого $u(\cdot) \in L_2^s$ единственное в классе L_2^m решение $z(t)$, $t \in \Pi$, и

$$z(t) = S[B[u] + c](t), \quad t \in \Pi, \quad u \in L_2^s, \tag{2}$$

где $S : L_2^m \rightarrow L_2^m$ – ЛОО – сумма ряда Неймана:

$$S[y] \equiv \sum_{i=0}^{\infty} A^i[y], \quad y \in L_2^m.$$

Отвечающее управлению $u(\cdot) \in L_2^s$ решение $z(\cdot)$ уравнения (1) обозначим через $z_u(\cdot)$.

Будем считать, что заданы ЛОО $A : L_2^m \rightarrow H$, ЛОО $B : L_2^s \rightarrow H$ и элемент $C \in H$, а на прямом произведении $L_2^m \times L_2^s$ определены некоторые функционалы $\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_k$ со свойствами: $\mathcal{J}_0[z, u] \equiv K[z] + M[u]$, $z \in L_2^m$, $u \in L_2^s$, где $K : L_2^m \rightarrow \mathbb{R}$ – выпуклый функционал, а $M : L_2^s \rightarrow \mathbb{R}$ – сильно выпуклый функционал с постоянной сильной выпуклостью κ ; $\mathcal{J}_i[\cdot, \cdot] : L_2^m \times L_2^s \rightarrow \mathbb{R}$ – выпуклый функционал ($i = \overline{1, k}$). Используя (2) как формулу подстановки, зададим на L_2^s функционалы $J_0[u] \equiv \mathcal{J}_0[z_u, u] \equiv K[z_u] + M[u]$, $J_i[u] \equiv \mathcal{J}_i[z_u, u]$ ($i = \overline{1, k}$) и оператор $\mathcal{G}[u] \equiv A[z_u] + B[u]$, $u \in L_2^s$. Функционалы $J_i[\cdot]$ ($i = \overline{1, k}$) – выпуклые, $J_0[\cdot]$ – сильно выпуклый. Пусть $\mathcal{D} \subset L_2^s$ – непустое, выпуклое, ограниченное и замкнутое множество. Будем рассматривать задачи оптимизации системы (1) вида

$$J_0[u] \rightarrow \min, \quad \mathcal{G}[u] = C, \quad J_1[u] \leq 0, \dots, J_k[u] \leq 0, \quad u \in \mathcal{D}, \tag{3}$$

с операторным ограничением $\mathcal{G}[u] = C$, функциональными ограничениями $J_i[u] \leq 0$ ($i = \overline{1, k}$), минимизируемым функционалом $J_0[u]$, множеством допустимых управлений \mathcal{D} .

1.2. Точная и приближённые оптимизационные задачи. Задача (3) полностью определяется набором исходных данных $f \equiv \{A, B, c, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, K, M, \mathcal{J}_i(i = \overline{1, k})\}$. Предположим, что точные данные $f^0 \equiv \{A^0, B^0, c^0, \mathcal{A}^0, \mathcal{B}^0, \mathcal{C}^0, K^0, M^0, \mathcal{J}_i^0(i = \overline{1, k})\}$ не известны, но можно оперировать с приближёнными данными $f^\delta \equiv \{A^\delta, B^\delta, c^\delta, \mathcal{A}^\delta, \mathcal{B}^\delta, \mathcal{C}^\delta, K^\delta, M^\delta, \mathcal{J}_i^\delta(i = \overline{1, k})\}$, где $\delta \in (0, \delta_0]$ – числовой параметр (δ_0 – фиксированное число), характеризующий близость приближённых данных f^δ к точным f^0 в указанном ниже условиями $A_1)$ и $A_2)$ смысле. Итак, при каждом $\delta \in [0, \delta_0]$ существуют квазинильпотентный ЛОО $A^\delta : L_2^m \rightarrow L_2^m$; ЛОО $B^\delta : L_2^s \rightarrow L_2^m$; $c^\delta(\cdot) \in L_2^m$; ЛОО $\mathcal{A}^\delta : L_2^m \rightarrow H$, ЛОО $\mathcal{B}^\delta : L_2^s \rightarrow H$, $\mathcal{C}^\delta \in H$; выпуклый функционал $K^\delta[z] : L_2^m \rightarrow \mathbb{R}$; сильно выпуклый функционал $M^\delta[u] : L_2^s \rightarrow \mathbb{R}$ с постоянной сильной выпуклостью κ ; выпуклые функционалы $\mathcal{J}_i^\delta[z, u] : L_2^m \times L_2^s \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = \overline{0, k}$), причём $\mathcal{J}_0^\delta[z, u] \equiv K^\delta[z] + M^\delta[u]$. Предполагаем, что выполняется условие

Л) функционалы K^δ , M^δ и каждый из функционалов \mathcal{J}_i^δ ($i = \overline{1, k}$), $\delta \in [0, \delta_0]$, – липшицевы на каждом ограниченном множестве пространств L_2^m , L_2^s и $L_2^m \times L_2^s$ соответственно, причём липшицевость равномерна по параметру $\delta \in [0, \delta_0]$, т.е. соответствующие постоянные Липшица не зависят от $\delta \in [0, \delta_0]$.

Считаем, что данные f^δ , $\delta \in (0, \delta_0]$, и f^0 связаны условиями:

$A_1)$ Существует постоянная $C > 0$ такая, что при любом $\delta \in (0, \delta_0]$ выполняются оценки

$$\|A^\delta - A^0\| \leq C\delta, \quad \|B^\delta - B^0\| \leq C\delta, \quad \|c^\delta - c^0\|_{2,m} \leq C\delta, \quad \|\mathcal{A}^\delta - \mathcal{A}^0\| \leq C\delta, \\ \|\mathcal{B}^\delta - \mathcal{B}^0\| \leq C\delta, \quad \|\mathcal{C}^\delta - \mathcal{C}^0\|_H \leq C\delta, \quad |M^\delta[u] - M^0[u]| \leq C\delta \quad (u \in \mathcal{D}).$$

$A_2)$ Существует неубывающая функция $N_1(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что для каждого $l > 0$ и любого $\delta \in (0, \delta_0]$ при $\|z(\cdot)\|_{2,m} \leq l$, $u \in \mathcal{D}$ выполняются неравенства

$$|K^\delta[z] - K^0[z]| \leq N_1(l)\delta, \quad |\mathcal{J}_i^\delta[z, u] - \mathcal{J}_i^0[z, u]| \leq N_1(l)\delta \quad (i = \overline{1, k}).$$

Чтобы сформулировать условие $A_3)$, воспользуемся следующим предложенным нами ранее (историю вопроса см. в [21]) понятием равностепенной квазинильпотентности. Пусть \mathbf{B} – банахово пространство, Ξ – некоторое множество, $\{G(\xi)[\cdot] : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}\}_{\xi \in \Xi}$ – семейство зависящих от параметра $\xi \in \Xi$ квазинильпотентных ЛОО (напомним, квазинильпотентность ЛОО $G(\xi)[\cdot] : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ означает, что $\sqrt[k]{\|G(\xi)\|^k} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$). Семейство операторов $\{G(\xi)\}_{\xi \in \Xi}$ называем *равностепенно квазинильпотентным*, если $\sup_{\xi \in \Xi} \sqrt[k]{\|G(\xi)\|^k} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

$A_3)$ Семейство операторов $\{A^\delta : L_2^m \rightarrow L_2^m\}_{\delta \in [0, \delta_0]}$ равностепенно квазинильпотентно.

При любом $\delta \in [0, \delta_0]$ управляемое функциональное уравнение

$$z(t) = A^\delta[z](t) + B^\delta[u](t) + c^\delta(t), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_2^m, \quad u \in L_2^s, \tag{4}$$

имеет для каждого $u \in L_2^s$ единственное в L_2^m решение $z(t)$, $t \in \Pi$, причём

$$z(t) = S^\delta[B^\delta[u] + c^\delta](t), \quad t \in \Pi, \quad u \in L_2^s, \tag{5}$$

где $S^\delta[y] \equiv \sum_{i=0}^{\infty} (A^\delta)^i[y]$, $y \in L_2^m$. Отвечающее управлению $u \in L_2^s$ и задаваемое формулой (5) решение $z(\cdot)$ уравнения (4) обозначаем $z_u^\delta(\cdot)$, $\delta \in [0, \delta_0]$. При любом $\delta \in [0, \delta_0]$ имеется задача оптимизации системы (4):

$$(OC^\delta) \quad \mathcal{J}_0^\delta[u] \rightarrow \min, \quad \mathcal{G}^\delta[u] = \mathcal{C}^\delta, \quad \mathcal{J}_1^\delta[u] \leq 0, \quad \dots, \quad \mathcal{J}_k^\delta[u] \leq 0, \quad u \in \mathcal{D},$$

где

$$\mathcal{G}^\delta[u] \equiv \mathcal{A}^\delta[z_u^\delta] + \mathcal{B}^\delta[u], \quad \mathcal{J}_i^\delta[u] \equiv \mathcal{J}_i^\delta[z_u^\delta, u] \quad (i = \overline{0, k}), \quad u \in L_2^s. \tag{6}$$

Задачу (OC^0) (т.е. задачу (OC^δ) при $\delta = 0$) называем *точной задачей*, а задачи (OC^δ) , $\delta \in (0, \delta_0]$, – *приближёнными задачами* оптимального управления.

1.3. МПР и МПР-образующий оператор. Для компактности записи введём обозначение $J^\delta[u] \equiv \{J_1^\delta[u], \dots, J_k^\delta[u]\}$. Положим

$$\mathcal{D}^{\delta,\epsilon} \equiv \{u \in \mathcal{D} : \|\mathcal{G}^\delta[u] - C^\delta\|_H \leq \epsilon, \quad J_i^\delta[u] \leq \epsilon \quad (i = \overline{1, k})\}, \quad \text{где } \delta \in [0, \delta_0], \quad \epsilon \geq 0,$$

и пусть $\mathcal{D}^0 \equiv \mathcal{D}^{0,0}$. Определим обобщённую нижнюю грань β задачи (OC^0) как предел $\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \beta_\epsilon$, где $\beta_\epsilon \equiv \inf_{u \in \mathcal{D}^{0,\epsilon}} J_0^0[u]$, если $\mathcal{D}^{0,\epsilon} \neq \emptyset$, и $\beta_\epsilon \equiv +\infty$, если $\mathcal{D}^{0,\epsilon} = \emptyset$. Очевидно, что $\beta \leq \beta_0$, где $\beta_0 \equiv \inf_{u \in \mathcal{D}^0} J_0^0[u]$ – классическая нижняя грань задачи (OC^0) . Так как (OC^0) – выпуклая задача с сильно выпуклым функционалом цели, то она может иметь не более одного оптимального элемента, а $\beta = \beta_0$. Если задача (OC^0) имеет оптимальный элемент (будем обозначать его u^0), то на нём и достигаются грани β и β_0 .

Напомним, что последовательность $u^k(\cdot) \in \mathcal{D}$, $k \in \mathbb{N}$, называется МПР задачи (OC^0) , если $J_0^0[u^k(\cdot)] \rightarrow \beta$ при $k \rightarrow \infty$, причём $u^k \in \mathcal{D}^{0,\epsilon^k}$ для некоторой сходящейся к нулю последовательности положительных чисел ϵ^k , $k \in \mathbb{N}$.

Определение 1. Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $k \in \mathbb{N}$, – сходящаяся к нулю последовательность. Зависящий от δ^k , $k \in \mathbb{N}$, оператор $R(\cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных f^{δ^k} элемент $R(f^{\delta^k}, \delta^k) \equiv u^{\delta^k} \in \mathcal{D}$, называем *МПР-образующим* в задаче (OC^0) , если последовательность u^{δ^k} , $k \in \mathbb{N}$, есть МПР в этой задаче.

2. Эквивалентная задача выпуклого программирования и регуляризация принципа Лагранжа.

2.1. Задача выпуклого программирования. Задача (OC^δ) при любом $\delta \in [0, \delta_0]$ – это задача выпуклого программирования в L_2^s . Запишем её в виде, позволяющем напрямую воспользоваться результатами работ [1, 16] о регуляризации КУО в задачах выпуклого программирования в гильбертовом пространстве. Определим ЛОО $\mathbf{G}^\delta[\cdot] : L_2^s \rightarrow H$ следующей формулой: $\mathbf{G}^\delta[u] \equiv A^\delta[S^\delta B^\delta[u]] + \mathcal{B}^\delta[u]$, $u \in L_2^s$, $\delta \in [0, \delta_0]$. Для единообразия записи положим $\mathbf{J}_0^\delta[u] \equiv J_0^\delta[u]$, $\mathbf{J}_i^\delta[u] \equiv J_i^\delta[u]$ ($i = \overline{1, k}$), $u \in L_2^s$. Пусть $e^\delta \equiv C^\delta - A^\delta S^\delta[C^\delta]$, $\delta \in [0, \delta_0]$. При каждом $\delta \in [0, \delta_0]$ задача выпуклого программирования в L_2^s

$$(P^\delta) \quad \mathbf{J}_0^\delta[u] \rightarrow \min, \quad \mathbf{G}^\delta[u] = e^\delta, \quad \mathbf{J}_i^\delta[u] \leq 0 \quad (i = \overline{1, k}), \quad u \in \mathcal{D},$$

эквивалентна задаче (OC^δ) , т.е. совпадают множества решений и значения задач. Задачи (P^δ) , $\delta \in [0, \delta_0]$, принадлежат классу задач выпуклого программирования в гильбертовом пространстве с сильно выпуклыми функционалами цели, изучавшемуся в [1, 16].

Условие Л) влечёт за собой равномерную по $\delta \in [0, \delta_0]$ липшицевость функционалов \mathbf{J}_i^δ ($i = \overline{0, k}$) на любом ограниченном множестве в L_2^s : существует неубывающая функция $\mathbf{N}_2(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что при каждом $\delta \in [0, \delta_0]$ и для любого $l > 0$ выполняются оценки

$$|\mathbf{J}_i^\delta[u_1] - \mathbf{J}_i^\delta[u_2]| \leq \mathbf{N}_2(l) \|u_1 - u_2\|_{2,s}, \quad u_1, u_2 \in L_2^s, \quad \|u_1\|_{2,s}, \|u_2\|_{2,s} \leq l \quad (i = \overline{0, k}).$$

Из условий $A_1)$ и $A_3)$ следует свойство семейства операторов $\{A^\delta\}_{0 \leq \delta \leq \delta_0}$.

Лемма 1. Существует число \mathcal{K} такое, что $\|S^\delta - S^0\| \leq \mathcal{K} \|A^\delta - A^0\|$ при $0 < \delta \leq \delta_0$.

Доказательство. Из условия $A_1)$ следует существование постоянной C_1 такой, что $\|A^\delta\| \leq C_1$, $0 \leq \delta \leq \delta_0$. Фиксируем любое $\epsilon \in (0, 1)$. В силу условия $A_3)$ найдётся натуральное $N(\epsilon)$ такое, что $\|(A^\delta)^i\| \leq \epsilon^i$ при $i \geq N(\epsilon)$, $0 \leq \delta \leq \delta_0$, т.е. при любом $\delta \in (0, \delta_0]$ выполняется $\|S^\delta\| \leq \sum_{i=0}^{N(\epsilon)-1} (C_1)^i + \sum_{i=N(\epsilon)}^\infty \epsilon^i$. Зависящее от ϵ число, стоящее в правой части последнего неравенства, обозначим через C_2 . Произвольно выберем $z \in L_2^m$. Так как $S^\delta[z] = A^\delta[S^\delta[z]] + z$, $\delta \in (0, \delta_0]$, то $S^0[z] - S^\delta[z] = A^0[S^0[z] - S^\delta[z]] + (A^0 - A^\delta)[S^\delta[z]]$, и поэтому $S^0[z] - S^\delta[z] = S^0[(A^0 - A^\delta)[S^\delta[z]]]$. Следовательно, при любом $\delta \in (0, \delta_0]$ имеем $\|S^\delta - S^0\| \leq C_2 \|S^0\| \|A^\delta - A^0\|$ и можно выбрать $\mathcal{K} = C_2 \|S^0\|$. Лемма доказана.

Из условий $A_1)$ – $A_3)$ простыми выкладками, использовав лемму 1, получаем следующую связь входных данных задачи (P^0) с входными данными задач (P^δ) , $\delta \in (0, \delta_0]$:

Лемма 2. *Существует постоянная Γ , зависящая лишь от операторов A^0, B^0, A^0, B^0 , функционалов K^0, \mathcal{J}_i^0 ($i = \overline{1, k}$), функций e^0, N_1 , чисел C, K, δ_0 и множества \mathcal{D} , такая, что для каждого $\delta \in (0, \delta_0]$ выполняются неравенства*

$$\|\mathbf{G}^\delta - \mathbf{G}^0\| \leq \Gamma\delta, \quad \|e^\delta - e^0\|_H \leq \Gamma\delta; \quad |\mathbf{J}_i^\delta[u] - \mathbf{J}_i^0[u]| \leq \Gamma\delta, \quad u \in \mathcal{D} \quad (i = \overline{0, k}). \quad (7)$$

2.2. МПР и МПР-образующий оператор в задаче выпуклого программирования.

Имеем $\mathcal{D}^{\delta, \epsilon} = \{u \in \mathcal{D} : \|\mathbf{G}^\delta[u] - e^\delta\|_H \leq \epsilon, \mathbf{J}_i^\delta[u] \leq \epsilon \ (i = \overline{1, k})\}$, $0 \leq \delta \leq \delta_0, \epsilon \geq 0$. Так как обобщённая нижняя грань задачи (P^0) определяется фактически той же формулой, что и обобщённая нижняя грань задачи (OC^0) , и эти грани совпадают, то мы сохраним за ней обозначение β . Имеем $\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \beta_\epsilon, \beta_\epsilon \equiv \inf_{u \in \mathcal{D}^{0, \epsilon}} \mathbf{J}_0^0[u]$, если $\mathcal{D}^{0, \epsilon} \neq \emptyset$; $\beta_\epsilon \equiv +\infty$, если $\mathcal{D}^{0, \epsilon} = \emptyset$. Как уже отмечалось, $\beta \leq \beta_0$, где $\beta_0 \equiv \inf_{u \in \mathcal{D}^0} \mathbf{J}_0^0[u]$ – классическая нижняя грань задачи (P^0) . Так как (P^0) – выпуклая задача с сильно выпуклым целевым функционалом, то она может иметь не более одного оптимального элемента, а $\beta = \beta_0$. Если (P^0) имеет оптимальный элемент (будем обозначать его u^0), то на нём и достигаются грани β и β_0 .

Определение 2. Последовательность $\{u^j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{D}$, для которой существует стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\epsilon^j\}_{j=1}^\infty$, такая, что $u^j \in \mathcal{D}^{0, \epsilon^j}$ ($j = 1, 2, \dots$) и $\mathbf{J}_0^0[u^j] \rightarrow \beta = \inf_{u \in \mathcal{D}^0} \mathbf{J}_0^0[u]$ при $j \rightarrow \infty$, называется *МПР задачи (P^0)* .

Лемма 3. *В силу ограниченности \mathcal{D} существование МПР в задаче (P^0) равносильно неравенству $\beta < +\infty$. Если $\beta < +\infty$ и сильно выпуклый функционал \mathbf{J}_0^0 является субдифференцируемым (в смысле выпуклого анализа) в точках \mathcal{D} , то для любого МПР $u^k, k \in \mathbb{N}$, в разрешимой единственным образом в этом случае задаче (P^0) справедливо предельное соотношение $u^k \rightarrow u^0, k \rightarrow \infty$.*

Доказательство. Пусть $\beta < +\infty$. Так как \mathbf{J}_0^0 – непрерывный и сильно выпуклый, то упомянутая последовательность $u^k, k \in \mathbb{N}$, ограничена. Благодаря единственности решения задачи (P^0) , слабой полунепрерывности снизу функционалов $\mathbf{J}_0^0[u], \mathbf{J}_i^0[u]$ ($i = \overline{1, k}$), $u \in \mathcal{D}$, а также свойствам ЛОО \mathbf{G}^0 , элементы u^k при $k \rightarrow \infty$ сходятся слабо к решению u^0 . Так как $\mathbf{J}_0^0[u^k] \rightarrow \mathbf{J}_0^0[u^0], k \rightarrow \infty$, то при субдифференцируемости \mathbf{J}_0^0 в точках \mathcal{D} имеем сильную сходимость u^k к u^0 при $k \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

Положим $\mathbf{J}^\delta[u] \equiv \{\mathbf{J}_1^\delta[u], \dots, \mathbf{J}_k^\delta[u]\}$. Введём для задачи (P^0) понятие МПР-образующего (регуляризирующего) оператора [16], согласованное с понятием МПР. Набором исходных данных задачи (P^δ) является набор $\hat{f}^\delta \equiv \{\mathbf{J}_0^\delta, \mathbf{J}^\delta, \mathbf{G}^\delta, e^\delta\}$.

Определение 3. Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0), k \in \mathbb{N}$, – сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от $\delta^k, k \in \mathbb{N}$, оператор $R(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных $\{\mathbf{J}_0^{\delta^k}, \mathbf{J}^{\delta^k}, \mathbf{G}^{\delta^k}, e^{\delta^k}\}$ элемент $R(\mathbf{J}_0^{\delta^k}, \mathbf{J}^{\delta^k}, \mathbf{G}^{\delta^k}, e^{\delta^k}, \delta^k) = u^{\delta^k} \in \mathcal{D}$, называется *МПР-образующим* в задаче (P^0) , если последовательность $u^{\delta^k}, k \in \mathbb{N}$, есть МПР в этой задаче.

2.3. Двойственная задача. Регулярная функция Лагранжа задачи (P^δ)

$$L^\delta(u, \lambda, \mu) \equiv \mathbf{J}_0^\delta[u] + \langle \lambda, \mathbf{G}^\delta[u] - e^\delta \rangle_H + \langle \mu, \mathbf{J}^\delta[u] \rangle_k, \quad u \in L_2^s, \quad \lambda \in H, \quad \mu \in \mathbb{R}_+^k, \quad (8)$$

при любых $\lambda \in H, \mu \in \mathbb{R}_+^k, \delta \in (0, \delta_0]$ сильно выпукла и непрерывна как функция переменной u в L_2^s , а следовательно, достигает минимума на ограниченном выпуклом и замкнутом в L_2^s множестве \mathcal{D} , причём в единственной точке

$$u^\delta[\lambda, \mu] \equiv \operatorname{argmin}_{u \in \mathcal{D}} L^\delta(u, \lambda, \mu), \quad \lambda \in H, \quad \mu \in \mathbb{R}_+^k$$

(см., например, [5, гл. 8, § 2, теорема 10]). Двойственной к задаче выпуклого программирования (P^δ) является задача

$$V^\delta(\lambda, \mu) \equiv \min_{u \in \mathcal{D}} L^\delta(u, \lambda, \mu) \rightarrow \sup, \quad \lambda \in H, \quad \mu \in \mathbb{R}_+^k.$$

Следующая лемма доказывается так же, как и оценка (2.32) в работе [16].

Лемма 4. *Существует число $\mathbf{K} > 0$, зависящее лишь от $\sup_{u \in \mathcal{D}} \|u\|_{2,s}$, такое, что выполняется неравенство*

$$|V^\delta(\lambda, \mu) - V^0(\lambda, \mu)| \leq \mathbf{K}\delta(1 + \|\lambda\|_H + \|\mu\|_k), \quad \lambda \in H, \quad \mu \in \mathbb{R}_+^k, \quad \delta \in (0, \delta_0]. \quad (9)$$

2.4. Итеративная двойственная регуляризация. Пусть задача (P^0) имеет решение. Через $\partial V^\delta(\lambda, \mu)$ обозначим супердифференциал (в смысле выпуклого анализа) вогнутого функционала $V^\delta : H \times \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}$. Вектор $\widetilde{\partial V^\delta}(\lambda, \mu) \equiv \{\mathbf{G}^\delta[u^\delta[\lambda, \mu]] - e^\delta, \mathbf{J}^\delta[u^\delta[\lambda, \mu]]\}$ лежит в $\partial V^\delta(\lambda, \mu)$. Пусть последовательность $\{\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, конструируется по итерационному правилу

$$\begin{aligned} \{\bar{\lambda}^{j+1}, \bar{\mu}^{j+1}\} &= Pr_\Lambda(\{\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\} + \beta^j \widetilde{\partial V^{\delta^j}}(\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j) - 2\beta^j \alpha^j \{\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\}), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \\ \{\bar{\lambda}^0, \bar{\mu}^0\} &\in \Lambda \equiv H \times \mathbb{R}_+^k, \end{aligned} \quad (10)$$

где последовательности δ^j , α^j , β^j , $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяют условиям согласования

$$\begin{aligned} \delta^j \geq 0, \quad \alpha^j > 0, \quad \beta^j > 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} (\delta^j + \alpha^j + \beta^j) = 0, \\ \frac{\alpha^j}{\alpha^{j+1}} \leq C_0, \quad \frac{|\alpha^{j+1} - \alpha^j|}{(\alpha^j)^3 \beta^j} \leq \tilde{C}, \quad \frac{\beta^j}{(\alpha^j)^3} \leq \tilde{C}, \quad \frac{\delta^j}{(\alpha^j)^6} \leq \tilde{C}, \quad \sum_{j=1}^\infty \alpha^j \beta^j = +\infty \end{aligned} \quad (11)$$

при некоторых положительных \tilde{C} , C_0 . Такие последовательности существуют. Можно взять, например, значения $\alpha^j = j^{-1/6}$, $\beta^j = j^{-1/(5/3)}$, $\delta^j = j^{-1}$. Справедлива следующая теорема сходимости метода итеративной двойственной регуляризации [6, теорема 2].

Теорема 1 (итеративная двойственная регуляризация). *Пусть u^0 – решение задачи (P^0) и выполняются условия согласования (11). Тогда*

$$\alpha^j \|\{\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\}\| \rightarrow 0, \quad \mathbf{J}_0^0[u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]] \rightarrow \mathbf{J}_0^0[u^0], \quad \mathbf{G}^0[u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]] \rightarrow e^0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty$$

и существует стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\varkappa^j\}_{j=1}^\infty$ такая, что $\mathbf{J}_i^0[u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]] \leq \varkappa^j$ ($i = \overline{1, k}$), $j \in \mathbb{N}$. При дополнительном условии субдифференцируемости \mathbf{J}_0^0 (в смысле выпуклого анализа) в точках \mathcal{D} справедливо

$$\|u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j] - u^0\|_{2,s} \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача, алгоритм $R(\cdot, \delta^j)$, задаваемый равенством $R(\mathbf{J}_0^{\delta^j}, \mathbf{J}^{\delta^j}, \mathbf{G}^{\delta^j}, e^{\delta^j}, \delta^j) = u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]$ для каждого набора исходных данных $\{\mathbf{J}_0^{\delta^j}, \mathbf{J}^{\delta^j}, \mathbf{G}^{\delta^j}, e^{\delta^j}\}$, удовлетворяющих оценкам (7) при $\delta = \delta^j$, является МПР-образующим в смысле определения 3, причём в случае субдифференцируемости \mathbf{J}_0^0 в точках \mathcal{D} имеет место и сильная сходимость (12); если такой субдифференцируемости нет, то, строго говоря, можно гарантировать лишь слабую сходимость $u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]$ к u^0 при $\delta^j \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$. Кроме того, справедливы соотношения

$$\langle \bar{\mu}^j, \mathbf{J}^{\delta^j}[u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]] \rangle_k + \langle \bar{\lambda}^j, \mathbf{G}^{\delta^j}[u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]] - e^{\delta^j} \rangle_H \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty,$$

$$V^0(\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j) \rightarrow \sup_{\{\lambda, \mu\} \in H \times \mathbb{R}_+^k} V^0(\lambda, \mu) = \mathbf{J}_0^0[u^0] \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

Сформулированная теорема может быть дополнена и регуляризирующим правилом остановки итерационного процесса (10) в случае, когда ошибка задания исходных данных δ является конечной и не стремится к нулю (см., например, теорему 3 из [6]).

2.5. Регуляризованный итерационный принцип Лагранжа. Теперь сформулируем и докажем регуляризованный принцип Лагранжа в итерационной форме в задаче (P^0) .

Теорема 2 (регуляризованный итерационный принцип Лагранжа). *Для существования в задаче (P^0) МПР необходимо и достаточно, чтобы для последовательности $\{\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\} \in H \times \mathbb{R}_+^k$, $j = 0, 1, \dots$, порождаемой итерационным процессом (10) с условиями согласования (11), выполнялось предельное соотношение*

$$\langle \bar{\lambda}^j, \mathbf{G}^{\delta^j} [u^{\delta^j} [\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]] - e^{\delta^j} \rangle_H + \langle \bar{\mu}^j, \mathbf{J}^{\delta^j} [u^{\delta^j} [\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]] \rangle_k \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty \quad (13)$$

и нашлась такая стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\epsilon^j\}_{j=1}^\infty$, чтобы имело место включение

$$u^{\delta^j} [\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j] \in \mathcal{D}^{\delta^j, \epsilon^j}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (14)$$

В этом случае последовательность $u^{\delta^j} [\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]$, $j = 0, 1, \dots$, есть МПР задачи (P^0) и вне зависимости от того, разрешима двойственная к (P^0) задача или нет, при субдифференцируемости \mathbf{J}_0^0 на \mathcal{D} имеет место сильная сходимость в L_2^s :

$$u^{\delta^j} [\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j] \rightarrow u^0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Одновременно выполняется и предельное соотношение

$$V^0(\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j) \rightarrow \sup_{(\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}_+^k} V^0(\lambda, \mu) = \mathbf{J}_0^0[u^0] \quad \text{при } j \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача, алгоритм $R(\cdot, \delta^j)$, задаваемый равенством $R(\mathbf{J}_0^{\delta^j}, \mathbf{J}^{\delta^j}, \mathbf{G}^{\delta^j}, e^{\delta^j}, \delta^j) = u^{\delta^j} [\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]$ для каждого набора исходных данных $\{\mathbf{J}_0^{\delta^j}, \mathbf{J}^{\delta^j}, \mathbf{G}^{\delta^j}, e^{\delta^j}\}$, удовлетворяющих оценкам (7) леммы 2 при $\delta = \delta^j$, является МПР-образующим в смысле определения 3, а в случае субдифференцируемости \mathbf{J}_0^0 в точках \mathcal{D} имеет место и сильная сходимость (15). Если же этой субдифференцируемости нет, то, строго говоря, гарантирована лишь слабая сходимость $u^{\delta^j} [\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]$ к u^0 при $\delta^j \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$.

Доказательство. Для доказательства необходимости заметим, что выпуклая задача (P^0) , все функционалы которой непрерывны, разрешима в силу существования МПР и ограниченности \mathcal{D} . Поэтому соотношения (13), (14), (16) следуют из теоремы 1.

Для доказательства достаточности заметим, что выпуклая задача (P^0) , все функционалы которой непрерывны, разрешима благодаря включениям (14) и ограниченности последовательности $u^{\delta^j} [\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]$, $j = 0, 1, \dots$. Следовательно, в силу теоремы 1 последовательность $\{\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\}$, $j = 0, 1, \dots$, итерационного процесса (10) с условиями согласования (11) удовлетворяет помимо предельных соотношений (13) и включений (14) ещё и предельному соотношению $\mathbf{J}_0^0(u^{\delta^j} [\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]) \rightarrow \mathbf{J}_0^0(u^0)$, $j \rightarrow \infty$. Поэтому последовательность $u^{\delta^j} [\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]$, $j = 0, 1, \dots$, является МПР в задаче (P^0) , а значит в случае субдифференцируемости \mathbf{J}_0^0 на \mathcal{D} она сходится к u^0 в норме L_2^s . Одновременно, ввиду ограниченности \mathcal{D} , предельного соотношения $\alpha^j \|\{\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\}\| \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$, теоремы 1, условий согласования (11) и оценки (9), получаем предельное соотношение $V^{\delta^j}(\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j) - V^0(\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j) \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$. Так как при этом, в силу доказанной сходимости $\mathbf{J}_0^0(u^{\delta^j} [\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]) \rightarrow \mathbf{J}_0^0(u^0)$, $j \rightarrow \infty$ и условия (13), имеет место сходимость $V^{\delta^j}(\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j) \rightarrow \mathbf{J}_0^0(u^0)$, $j \rightarrow \infty$, то справедливо предельное соотношение (16). Теорема доказана.

3. Регуляризация классических условий оптимальности в задачах оптимального управления распределёнными системами.

3.1. Переформулировка теорем о регуляризации в терминах исходной задачи оптимального управления. Функция Лагранжа задачи (OC^δ) равна функции Лагранжа задачи (P^δ) и имеет вид

$$L^\delta(u, \lambda, \mu) \equiv J_0^\delta[u] + \langle \lambda, \mathcal{G}^\delta[u] - C^\delta \rangle_H + \langle \mu, J^\delta[u] \rangle_k, \quad u \in L_2^s, \quad \lambda \in H, \quad \mu \in \mathbb{R}_+^k,$$

где $J^\delta[u] \equiv \{J_1^\delta[u], \dots, J_k^\delta[u]\}$. Соответственно двойственная к (OC^δ) задача имеет вид

$$V^\delta(\lambda, \mu) \equiv \min_{u \in \mathcal{D}} L^\delta(u, \lambda, \mu) \rightarrow \sup, \quad \lambda \in H, \quad \mu \in \mathbb{R}_+^k$$

(при любых $\delta \in (0, \delta_0]$, $\lambda \in H$, $\mu \in \mathbb{R}_+^k$ функция $L^\delta(\cdot, \lambda, \mu)$ достигает минимума на \mathcal{D} в единственной точке $u^\delta[\lambda, \mu]$). “Расшифровка” теорем 1 и 2 в терминах задачи оптимального управления (OC^0) приводит соответственно к алгоритму итеративной двойственной регуляризации и регуляризованному принципу Лагранжа в итерационной форме для этой задачи. Пусть последовательность $\{\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, конструируется по итерационному правилу (10) с $\partial V^\delta(\lambda, \mu) \equiv \{\mathcal{G}^\delta[u^\delta[\lambda, \mu]] - C^\delta, J^\delta[u^\delta[\lambda, \mu]]\}$ и с условиями согласования (11).

Теорема 3 (итеративная двойственная регуляризация в задаче оптимального управления (OC^0)). Пусть u^0 – решение задачи (OC^0) и выполняются условия (11). Тогда

$$\alpha^j \|\{\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\}\| \rightarrow 0, \quad J_0^0[u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]] \rightarrow J_0^0[u^0], \quad \mathcal{G}^0[u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]] \rightarrow C^0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty,$$

и существует стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\alpha^j\}_{j=1}^\infty$ такая, что $J_i^0[u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]] \leq \alpha^j$ ($i = \overline{1, k}$), $j = 1, 2, \dots$. При дополнительном условии субдифференцируемости J_0^0 (в смысле выпуклого анализа) в точках \mathcal{D} выполняется предельное соотношение

$$\|u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j] - u^0\|_{2,s} \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty. \tag{17}$$

Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (OC^0) задача, алгоритм $R(\cdot, \delta^j)$, задаваемый равенством $R(f^{\delta^j}, \delta^j) = u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]$ для каждого набора исходных данных f^{δ^j} , является МПП-образующим в смысле определения 1, причём в случае субдифференцируемости J_0^0 в точках \mathcal{D} имеет место и сильная сходимость (17); если такой субдифференцируемости нет, то, вообще говоря, гарантирована лишь слабая сходимость $u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]$ к u^0 при $\delta^j \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$. Кроме того, справедливы предельные соотношения

$$\langle \bar{\mu}^j, J^{\delta^j}[u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]] \rangle_k + \langle \bar{\lambda}^j, \mathcal{G}^{\delta^j}[u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]] - C^{\delta^j} \rangle_H \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty,$$

$$V^0(\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j) \rightarrow \sup_{\{\lambda, \mu\} \in H \times \mathbb{R}_+^k} V^0(\lambda, \mu) = J_0^0[u^0] \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

Теорема 4 (регуляризованный принцип Лагранжа в итерационной форме для задачи (OC^0)). Для существования МПП в задаче (OC^0) необходимо и достаточно, чтобы для последовательности $\{\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\} \in H \times \mathbb{R}_+^k$, $j = 0, 1, \dots$, порождаемой итерационным процессом (10) с $\partial V^\delta(\lambda, \mu) \equiv \{\mathcal{G}^\delta[u^\delta[\lambda, \mu]] - C^\delta, J^\delta[u^\delta[\lambda, \mu]]\}$ и с условиями согласования (11), выполнялось предельное соотношение

$$\langle \bar{\lambda}^j, \mathcal{G}^{\delta^j}[u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]] - C^{\delta^j} \rangle_H + \langle \bar{\mu}^j, J^{\delta^j}[u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]] \rangle_k \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty,$$

и нашлась стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\epsilon^j\}_{j=1}^\infty$ такая, что $u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j] \in \mathcal{D}^{\delta^j, \epsilon^j}$, $j = 0, 1, \dots$. В этом случае последовательность $u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]$, $j = 0, 1, \dots$, есть МПП задачи (OC^0) и независимо от того, разрешима двойственная к (OC^0) задача или нет, при субдифференцируемости J_0^0 на \mathcal{D} имеет место сходимость в L_2^s :

$$u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j] \rightarrow u^0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty. \tag{18}$$

Одновременно и $V^0(\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j) \rightarrow \sup_{\{\lambda, \mu\} \in H \times \mathbb{R}_+^k} V^0(\lambda, \mu) = J_0^0[u^0]$ при $j \rightarrow \infty$. Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (OC^0) задача, алгоритм $R(\cdot, \delta^j)$, задаваемый равенством $R(f^{\delta^j}, \delta^j) = u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]$ для каждого набора исходных

данных f^{δ^j} , является МПР-образующим в смысле определения 1, причём в случае субдифференцируемости J_0^0 в точках \mathcal{D} имеет место и сильная сходимость (18). Если же такой субдифференцируемости нет, то можно говорить лишь о слабой сходимости $u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]$ к u^0 при $\delta^j \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$.

3.2. О минимизации функции Лагранжа. Ключевой задачей процедуры двойственной регуляризации процесса приближённого решения задачи (OC^0), а также возможного применения регуляризованных КУО для практического решения задач оптимизации является задача минимизации функции (функционала) Лагранжа $L^\delta(u, \lambda, \mu), \{\lambda, \mu\} \in H \times \mathbb{R}_+^k$, задачи (OC^δ)

$$L^\delta(u, \lambda, \mu) \rightarrow \min, \quad u \in \mathcal{D}, \tag{19}$$

решение которой мы обозначили через $u^\delta[\lambda, \mu]$. От “качества” решения этой “простейшей” задачи напрямую зависит и “качество” решения исходной задачи (OC^0) на основе регуляризованных КУО. Предположим для упрощения изложения, что при каждом $\delta \in (0, \delta_0]$ функционалы $K^\delta[z] : L_2^m \rightarrow \mathbb{R}, M^\delta[u] : L_2^s \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{J}_i^\delta[z, u] : L_2^m \times L_2^s \rightarrow \mathbb{R} (i = \overline{1, k})$ дифференцируемы по Фреше. Тогда при каждом $\delta \in (0, \delta_0]$ дифференцируемы по Фреше функционалы $\mathbf{J}_i^\delta[u] : L_2^s \rightarrow \mathbb{R} (i = \overline{0, k})$ и функционал Лагранжа $L^\delta(u, \lambda, \mu)$. В этом случае решение $u^\delta[\lambda, \mu]$ выпуклой задачи на минимум (19) удовлетворяет критерию минимума

$$L_u^{\delta'}(u^\delta[\lambda, \mu], \lambda, \mu)[u - u^\delta[\lambda, \mu]] \geq 0, \quad u \in \mathcal{D}, \tag{20}$$

где $L_u^{\delta'}(\bar{u}, \lambda, \mu)[\cdot]$ – производная Фреше функционала $L^\delta(u, \lambda, \mu)$ по переменной u в точке $\bar{u} \in L_2^s$ при фиксированных λ, μ . Пусть $\Psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu](\cdot) \in L_2^s$ – функция Рисса линейного непрерывного функционала $L_u^{\delta'}(\bar{u}, \lambda, \mu)[\cdot] \in (L_2^s)^*$. Критерий (20) можно записать как

$$\langle \Psi^\delta[u^\delta[\lambda, \mu], \lambda, \mu], u - u^\delta[\lambda, \mu] \rangle_{2,s} \geq 0, \quad u \in \mathcal{D}. \tag{21}$$

Найдём представление функции $\Psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu](t), t \in \Pi$, в терминах задачи (OC^δ), $\delta > 0$, а точнее – в терминах уравнения (4), операторов $\mathcal{A}^\delta, \mathcal{B}^\delta$ и функционалов $K^\delta, M^\delta, \mathcal{J}_i^\delta (i = \overline{1, k}), \delta > 0$. Непосредственно из (5), (6) и (8) следует, что

$$\begin{aligned} L_u^{\delta'}(\bar{u}, \lambda, \mu)[v] &= K_z^{\delta'}(S^\delta B^\delta \bar{u} + S^\delta c^\delta) S^\delta B^\delta [v] + M_u^{\delta'}(\bar{u})[v] + \\ &+ \sum_{i=1}^k \mu_i \mathcal{J}_i^{\delta'}(S^\delta B^\delta \bar{u} + S^\delta c^\delta, \bar{u}) S^\delta B^\delta [v] + \sum_{i=1}^k \mu_i \mathcal{J}_i^{\delta'}(S^\delta B^\delta \bar{u} + S^\delta c^\delta, \bar{u})[v] + \\ &+ \langle \lambda, \mathcal{A}^\delta S^\delta B^\delta [v] + \mathcal{B}^\delta [v] \rangle_H, \quad v \in L_2^s, \quad \bar{u} \in L_2^s. \end{aligned} \tag{22}$$

Последнее слагаемое в правой части равенства (22) равно $\langle (\mathcal{A}^\delta)^*[\lambda], S^\delta B^\delta [v] \rangle_{2,m} + \langle (\mathcal{B}^\delta)^*[\lambda], v \rangle_{2,s}$.

Пусть $\Gamma^\delta[\bar{u}](\cdot) \in L_2^m, \Upsilon^\delta[\bar{u}](\cdot) \in L_2^s, \Theta_i^\delta[\bar{u}](\cdot) \in L_2^m, \Xi_i^\delta[\bar{u}](\cdot) \in L_2^s, \Lambda^\delta[\lambda](\cdot) \in L_2^m$ – функции Рисса, соответственно, функционалов $K_z^{\delta'}(S^\delta B^\delta \bar{u} + S^\delta c^\delta) S^\delta \in (L_2^m)^*, M_u^{\delta'}(\bar{u}) \in (L_2^s)^*, \mathcal{J}_i^{\delta'}(S^\delta B^\delta \bar{u} + S^\delta c^\delta, \bar{u}) S^\delta \in (L_2^m)^*, \mathcal{J}_i^{\delta'}(S^\delta B^\delta \bar{u} + S^\delta c^\delta, \bar{u}) \in (L_2^s)^*, \langle (\mathcal{A}^\delta)^*[\lambda], S^\delta[\cdot] \rangle_{2,m} \in (L_2^m)^* (i = \overline{1, k})$. Формулу (22) запишем следующим образом:

$$L_u^{\delta'}(\bar{u}, \lambda, \mu)[v] = -\langle \psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu], B^\delta [v] \rangle_{2,m} + \langle \phi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu], v \rangle_{2,s}, \quad v \in L_2^s, \tag{23}$$

$$\psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu] \equiv -\Gamma^\delta[\bar{u}] - \sum_{i=1}^k \mu_i \Theta_i^\delta[\bar{u}] - \Lambda^\delta[\lambda], \tag{24}$$

$$\phi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu] \equiv \Upsilon^\delta[\bar{u}] + \sum_{i=1}^k \mu_i \Xi_i^\delta[\bar{u}] + (\mathcal{B}^\delta)^*[\lambda]. \tag{25}$$

Пусть $\Phi^\delta[\bar{u}](\cdot) \in L_2^m$ и $\Omega_i^\delta[\bar{u}](\cdot) \in L_2^m$ – функции Рисса, соответственно, функционалов

$$K_z^{\delta'}(S^\delta B^\delta \bar{u} + S^\delta c^\delta) \in (L_2^m)^* \quad \text{и} \quad \mathcal{J}_i^{\delta'}(S^\delta B^\delta \bar{u} + S^\delta c^\delta, \bar{u}) \in (L_2^m)^* \quad (i = \overline{1, k}).$$

По определению сопряжённого оператора имеем

$$\Gamma^\delta[\bar{u}] = (S^\delta)^* \Phi^\delta[\bar{u}], \quad \Theta_i^\delta[\bar{u}] = (S^\delta)^* \Omega_i^\delta[\bar{u}] \quad (i = \overline{1, k}), \quad \Lambda^\delta[\lambda] = (S^\delta)^*[(\mathcal{A}^\delta)^*[\lambda]].$$

Так как $(S^\delta)^* \equiv ((E - A^\delta)^{-1})^* = ((E - A^\delta)^*)^{-1} = (E - (A^\delta)^*)^{-1}$, где E – единичный оператор в L_2^m , то определяемая формулой (24) функция $\psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu]$ есть (единственное в L_2^m) решение уравнения

$$\psi(t) - (A^\delta)^*[\psi](t) = -\Phi^\delta[\bar{u}](t) - \sum_{i=1}^k \mu_i \Omega_i^\delta[\bar{u}](t) - (A^\delta)^*[\lambda](t), \quad t \in \Pi, \quad \psi \in L_2^m, \quad (26)$$

правая часть которого записана в терминах задачи (OC^δ) . Таким образом, из (23) получаем следующее представление производной $L_u^{\delta'}(\bar{u}, \lambda, \mu)$ в терминах этой задачи:

$$L_u^{\delta'}(\bar{u}, \lambda, \mu)[v] = \langle -(B^\delta)^*[\psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu]] + \phi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu], v \rangle_{2,s}, \quad v \in L_2^s. \quad (27)$$

Первый сомножитель правой части (27) и даёт искомое представление

$$\Psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu](t) = -(B^\delta)^*[\psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu]](t) + \phi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu](t), \quad t \in \Pi, \quad (28)$$

где $\psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu]$ – L_2^m -решение (26), $\phi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu]$ задаётся формулой (25), $\bar{u} \in L_2^s$.

3.3. Случай ограниченных управлений. Пусть $\mathcal{D} \equiv \{u(\cdot) \in L_\infty^s : u(t) \in U, t \in \Pi\}$, где $U \subset \mathbb{R}^s$ – ограниченное замкнутое и выпуклое множество. В этом случае критерий (21) эквивалентен следующему линеаризованному поточечному принципу максимума.

Лемма 5. *Функция $\bar{u} \in \mathcal{D}$ будет решением задачи (19) тогда и только тогда, когда*

$$\langle \Psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu](t), \bar{u}(t) \rangle_s = \max_{w \in U} \langle \Psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu](t), w \rangle_s \quad \text{при почти всех } t \in \Pi, \quad (29)$$

где $\Psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu]$ задаётся формулой (28), в которой $\psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu]$ – решение сопряжённого уравнения (26).

Доказательство. Необходимость доказывается простейшим игольчатым варьированием, а достаточность – стандартным применением теоремы А.А. Ляпунова (см. [22, § 2.4, § 8.2]).

Благодаря сильной выпуклости целевого функционала, множество управлений $\bar{u}(\cdot)$ из \mathcal{D} , удовлетворяющих (при сформулированных выше дополнительных предположениях дифференцируемости) условию (29), состоит ровно из одного элемента, обозначим его $u_m^\delta[\lambda, \mu]$, и $u_m^\delta[\lambda, \mu] = u^\delta[\lambda, \mu]$, т.е. непосредственно из теоремы 4 и леммы 5 получаем следующий регуляризованный ПМП в итерационной форме для задачи (OC^0) .

Теорема 5 (регуляризованный ПМП в итерационной форме для задачи оптимального управления (OC^0)). *При сформулированных выше дополнительных условиях дифференцируемости все утверждения теоремы 4 останутся справедливыми, если в них заменить везде $u^{\delta j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]$ на $u_m^{\delta j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]$.*

4. Иллюстративный пример: регуляризация условий оптимальности в задаче оптимизации для гиперболической системы. Естественный переход от начально-краевой задачи к эквивалентному ей функциональному уравнению второго рода вольтеррова типа осуществляется с помощью обращения главной части задачи. Разнообразные конкретные примеры начально-краевых задач (для параболических, гиперболических, интегро-дифференциальных уравнений с частными производными и систем таких уравнений, различных уравнений с запаздывающим аргументом и др.), которые допускают эквивалентное описание с помощью

функциональных уравнений вольтеррова типа можно найти, например, в [17] (см. также обзоры и библиографию в [17, 21]). Из огромного множества самых различных соответствующих оптимизационных задач для иллюстрации изложенной выше теории выбрана задача оптимального управления, связанная с гиперболической системой дифференциальных уравнений первого порядка (частным случаем этой задачи является некоторая обратная задача финального наблюдения). Запишем для этой задачи те основные конструкции, которые и участвуют в формулировке регуляризованных КУО (формирующая критерий минимума функционала Лагранжа функция, сопряжённое уравнение, ...). Сформулировать с их помощью соответствующие регуляризованные КУО – конкретные реализации теорем 3, 4, 5 – будет совсем не трудно.

Пусть $n = 2$, $\Pi = [0, 1] \times [0, 1]$; $\xi^i > 0$ ($i = \overline{1, m}$) – заданные числа; $\alpha(\cdot) \in L_\infty^{m \times m}$, $\gamma(\cdot) \in L_\infty^{m \times s}$, $\theta_j(\cdot) \in L_2^m[0, 1]$ ($j = 1, 2$) – фиксированные функции. Рассмотрим краевую задачу для управляемой линейной гиперболической системы первого порядка

$$\frac{\partial x^i}{\partial t^1} + \xi^i \frac{\partial x^i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}(t)x^j(t) + \sum_{j=1}^s \gamma_{ij}(t)u^j(t), \quad t \in \Pi, \quad i = \overline{1, m}, \quad (30)$$

$$x(t^1, 0) = \theta_1(t^1), \quad 0 \leq t^1 \leq 1; \quad x(0, t^2) = \theta_2(t^2), \quad 0 \leq t^2 \leq 1, \quad (31)$$

где $u(\cdot) \in L_2^s$ – управление. Левую часть i -го уравнения (30) понимаем как полную производную функции $x^i(\cdot)$ по t^1 вдоль характеристики l_i дифференциального выражения этой левой части (уравнение характеристики $l_i = l_i(\bar{t})$, проходящей через точку $\bar{t} = \{\bar{t}^1, \bar{t}^2\}$ плоскости $t = \{t^1, t^2\}$, имеет вид $t^2 = \eta^i(\bar{t}; t^1) \equiv \xi^i(t^1 - \bar{t}^1) + \bar{t}^2$); такую производную обозначаем $\partial x^i(\cdot)/\partial l_i$ ($i = \overline{1, m}$). Пусть W – класс функций $x(\cdot)$ из L_2^m , у которых при любом $i = \overline{1, m}$ компонента $x^i(\cdot)$ абсолютно непрерывна вдоль почти каждой в Π характеристики l_i , причём функция $\partial x^i(t)/\partial l_i$, $t \in \Pi$, принадлежит L_2 .

Назовём решением задачи (30), (31) при данном $u(\cdot)$ функцию $x(\cdot)$ из W , удовлетворяющую почти всюду граничным условиям (31), i -я компонента которой удовлетворяет i -му уравнению (30) почти всюду (по линейной мере) вдоль почти каждой в Π характеристики l_i , $i = \overline{1, m}$. Приведём задачу (30), (31) к эквивалентному уравнению вида (1), показав тем самым, что каждому $u(\cdot) \in L_2^s$ отвечает единственное решение этой задачи. Введём обозначения: $a_i(\bar{t})$ (соответственно $b_i(\bar{t})$) – точка из $l_i(\bar{t}) \cap \Pi$, имеющая минимальную (соответственно максимальную) координату t^1 ; $\Theta^i(t) \equiv \{\theta_2^i(a_i^2(t))\}$, если $t^2 \geq \xi^i t^1$; $\theta_1^i(a_i^1(t))$, если $t^2 < \xi^i t^1$, $i = \overline{1, m}$; $\Theta(t) \equiv \text{col}\{\Theta^1(t), \dots, \Theta^m(t)\}$; $l_i[c, t]$ – направленный отрезок прямой $l_i(t)$ от $c \in l_i(t)$ до t ; $\int_{l_i[c, t]} y(\cdot, \cdot) dl$ – криволинейный интеграл от функции двух переменных $y(\cdot, \cdot)$, равный определённому интегралу $\int_{c^1}^{t^1} y(\xi, \eta^i(t; \xi)) d\xi$. Формула

$$x^i(t) = \Theta^i(t) + \int_{l_i[a_i(t), t]} z^i(\cdot, \cdot) dl, \quad t \in \Pi, \quad i = \overline{1, m}, \quad (32)$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классом L_2^m функций $z(\cdot)$ и классом удовлетворяющих граничным условиям (31) функций $x(\cdot)$ из W . Сделав в задаче (30), (31) замену (32) (это и есть процедура обращения главной части задачи (30), (31)), получим

$$z^i(t) = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}(t)\Sigma_j[z^j](t) + \sum_{j=1}^s \gamma_{ij}(t)u^j(t) + \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}(t)\Theta^j(t), \quad t \in \Pi, \quad i = \overline{1, m},$$

где $\Sigma_j[y](t) \equiv \int_{l_j[a_j(t), t]} y(\cdot) dl$, $t \in \Pi$, $j = \overline{1, m}$. Или, в более компактной форме,

$$z(t) = \alpha(t)\Sigma[z](t) + \gamma(t)u(t) + \alpha(t)\Theta(t), \quad t \in \Pi, \quad (33)$$

где $\Sigma[z](t) \equiv \text{col} \{ \Sigma_1[z^1](t), \dots, \Sigma_m[z^m](t) \}$. Запишем и формулу (32) более компактно:

$$x(t) = \Theta(t) + \Sigma[z](t), \quad t \in \Pi. \quad (34)$$

Уравнение (33) есть уравнение вида (1), эквивалентное краевой задаче (30), (31). Здесь $A[z](t) \equiv \alpha(t)\Sigma[z](t)$, $z \in L_2^m$, $t \in \Pi$ (квазинильпотентность ЛОО $A : L_2^m \rightarrow L_2^m$ легко следует из признака [18, теорема 2]); $B[u](t) \equiv \gamma(t)u(t)$, $u \in L_2^s$, $t \in \Pi$; $c(t) \equiv \alpha(t)\Theta(t)$, $t \in \Pi$. Если $x(\cdot) \in W$ – решение задачи (30), (31) при некотором $u(\cdot) \in L_2^s$, то связанная с $x(\cdot)$ формулой (34) функция $z(\cdot) \in L_2^m$ есть решение уравнения (33) при том же $u(\cdot)$. И наоборот, если $z(\cdot) \in L_2^m$ есть решение уравнения (33) при данном $u(\cdot) \in L_2^s$, то функция $x(\cdot)$, связанная с $z(\cdot)$ формулой (34), есть решение задачи (30), (31) при этом $u(\cdot)$. Отвечающие управлению $u(\cdot) \in L_2^s$ решения задачи (30), (31) и уравнения (33) обозначим x_u и z_u соответственно.

Пусть заданы выпуклые функции $G_0(y) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $G_i(y, w) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, k}$; функции $P(\cdot) \in L_\infty^{l \times m}[0, 1]$, $\pi(\cdot) \in L_2^l[0, 1]$, $Q(\cdot, \cdot) \in L_2^{q \times s}(\Pi \times \Pi)$, $\nu(\cdot) \in L_2^q(\Pi)$. Формулами

$$F_0[x, u] \equiv G_0\left(\int_{\Pi} x(t) dt\right) + \|u\|_{2,s}^2, \quad F_i[x, u] \equiv G_i\left(\int_{\Pi} x(t) dt, \int_{\Pi} u(t) dt\right)$$

при $i = \overline{1, k}$ для $x \in W$, $u \in L_2^s$ определены функционалы. Пусть \mathcal{D} – выпуклое ограниченное и замкнутое множество пространства L_2^s . Рассмотрим задачу оптимального управления системой (30), (31) с минимизируемым функционалом цели $F_0[x, u]$ при ограничениях

$$P(t^2)x(1, t^2) = \pi(t^2) \quad (t^2 \in [0, 1]), \quad \int_{\Pi} Q(t, \zeta)u(\zeta) d\zeta = \nu(t) \quad (t \in \Pi),$$

$$F_i[x, u] \leq 0 \quad (i = \overline{1, k}) \quad (35)$$

и множестве допустимых управлений \mathcal{D} (при $G_0 \equiv 0$ задача является обратной задачей финального наблюдения, см., например, [2]). Эту задачу символически запишем в виде

$$F_0[x_u, u] \rightarrow \min, \quad P(t^2)x_u(1, t^2) = \pi(t^2) \quad (t^2 \in [0, 1]),$$

$$\int_{\Pi} Q(t, \zeta)u(\zeta) d\zeta = \nu(t) \quad (t \in \Pi), \quad F_i[x_u, u] \leq 0 \quad (i = \overline{1, k}), \quad u \in \mathcal{D}. \quad (36)$$

Сделав в задаче (36) замену (34), получим эквивалентную задачу оптимизации управляемой системы (33). При этом минимизируемый функционал принимает вид

$$W_0[z_u, u] \equiv F_0[\Theta + \Sigma[z_u], u], \quad u \in L_2^s,$$

а ограничения (35) преобразуются в ограничения

$$\mathcal{P}[z](t^2) = \pi(t^2) - P(t^2)\Theta(1, t^2) \quad (t^2 \in [0, 1]), \quad \mathcal{Q}[u](t) = \nu(t) \quad (t \in \Pi), \quad W_i[z, u] \leq 0 \quad (i = \overline{1, k}),$$

где

$$\mathcal{P}[z](t^2) \equiv P(t^2)\Sigma[z](1, t^2) \quad (z \in L_2^m, \quad t^2 \in [0, 1]), \quad \mathcal{Q}[u](t) \equiv \int_{\Pi} Q(t, \zeta)u(\zeta) d\zeta \quad (u \in L_2^s, \quad t \in \Pi),$$

$$W_i[z, u] \equiv F_i[\Theta + \Sigma[z], u] \quad (z \in L_2^m, \quad u \in L_2^s, \quad i = \overline{1, k}).$$

Полученная задача оптимизации управляемой системы (33), эквивалентная задаче (36), это задача вида (3), здесь

$$J_i[u] \equiv \mathcal{J}_i[z_u, u] \equiv W_i[z_u, u] \quad (i = \overline{0, k}), \quad K[z] \equiv G_0\left(\int_{\Pi} (\Theta(t) + \Sigma[z](t)) dt\right),$$

$$M[u] \equiv \|u\|_{2,s}^2, \quad H \equiv L_2^l[0, 1] \times L_2^q(\Pi), \quad \mathcal{A}[z](t) \equiv \text{col} \{P[z](t^2), 0_q\} \quad (z \in L_2^m, \quad t \in \Pi),$$

$$\mathcal{B}[u](t) \equiv \text{col} \{0_l, \mathcal{Q}[u](t)\} \quad (u \in L_2^s, \quad t \in \Pi), \quad \mathcal{C} \equiv \text{col} \{\pi(t^2) - P(t^2)\Theta(1, t^2), \nu(t)\} \quad (t \in \Pi).$$

Пусть $f \equiv \{\alpha, \gamma, \theta_1, \theta_2, P, \pi, Q, \nu, G_i (i = \overline{0, k})\}$ – входные данные задачи (36), которые подвергаются возмущению, и точный набор $f^0 \equiv \{\alpha^0, \gamma^0, \theta_1^0, \theta_2^0, P^0, \pi^0, Q^0, \nu^0, G_i^0 (i = \overline{0, k})\}$ нам не известен, но можно оперировать с приближёнными наборами

$$f^\delta \equiv \{\alpha^\delta, \gamma^\delta, \theta_1^\delta, \theta_2^\delta, P^\delta, \pi^\delta, Q^\delta, \nu^\delta, G_i^\delta (i = \overline{0, k})\} \quad (\delta \in (0, \delta_0])$$

($\delta_0 > 0$ фиксировано), которые связаны с набором f^0 следующими условиями:

Г₁) Функции $G_0^\delta(y) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $G_i^\delta(y, w) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = \overline{1, k}$) выпуклы при любом $\delta \in [0, \delta_0]$ и равномерно по $\delta \in [0, \delta_0]$ липшицевы на любом ограниченном множестве*.

Г₂) Существует постоянная $C > 0$ такая, что величины $\|\alpha^\delta - \alpha^0\|_{\infty, m \times m}$, $\|\gamma^\delta - \gamma^0\|_{\infty, m \times s}$, $\|\theta_i^\delta - \theta_i^0\|_{L_2^m[0, 1]}$ ($i = \overline{1, m}$), $\|P^\delta - P^0\|_{L_\infty^m[0, 1]}$, $\|\pi^\delta - \pi^0\|_{L_2^l[0, 1]}$, $\|Q^\delta - Q^0\|_{2, q \times s}$, $\|\nu^\delta - \nu^0\|_{2, q}$ при любом $\delta \in (0, \delta_0]$ не превосходят величины $C\delta$.

Г₃) Существует неубывающая функция $N_1(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что каковы бы ни были $l > 0$ и $\delta \in (0, \delta_0]$ величины $|G_0^\delta(y) - G_0^0(y)|$, $|G_i^\delta(y, w) - G_i^0(y, w)|$ ($i = \overline{1, k}$) при $\|y\|_m, \|w\|_s \leq l$ не превосходят величины $N_1(l)\delta$.

При любом $\delta \in [0, \delta_0]$ имеем управляемую краевую задачу

$$\frac{\partial x^i}{\partial t^1} + \xi^i \frac{\partial x^i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}^\delta(t) x^j(t) + \sum_{j=1}^s \gamma_{ij}^\delta(t) u^j(t), \quad t \in \Pi, \quad i = \overline{1, m}, \quad (37)$$

$$x(t^1, 0) = \theta_1^\delta(t^1), \quad 0 \leq t^1 \leq 1, \quad x(0, t^2) = \theta_2^\delta(t^2), \quad 0 \leq t^2 \leq 1, \quad (38)$$

минимизируемый функционал $F_0^\delta[x, u] \equiv G_0^\delta(\int_\Pi x(t) dt) + \|u\|_{2,s}^2$, набор ограничений

$$P^\delta(t^2)x(1, t^2) = \pi^\delta(t^2) \quad (t^2 \in [0, 1]), \quad \int_\Pi Q^\delta(t, \zeta)u(\zeta) d\zeta = \nu^\delta(t) \quad (t \in \Pi),$$

$$F_i^\delta[x, u] \leq 0 \quad (i = \overline{1, k}), \quad (39)$$

где $F_i^\delta[x, u] \equiv G_i^\delta(\int_\Pi x(t) dt, \int_\Pi u(t) dt)$ ($i = \overline{1, k}$), и задачу оптимального управления

$$F_0^\delta[x_u^\delta, u] \rightarrow \min, \quad P^\delta(t^2)x_u^\delta(1, t^2) = \pi^\delta(t^2) \quad (t^2 \in [0, 1]),$$

$$\int_\Pi Q^\delta(t, \zeta)u(\zeta) d\zeta = \nu^\delta(t) \quad (t \in \Pi), \quad F_i^\delta[x_u^\delta, u] \leq 0 \quad (i = \overline{1, k}), \quad u \in \mathcal{D}, \quad (40)$$

где $x_u^\delta(\cdot)$ – отвечающее управлению $u(\cdot)$ решение граничной задачи (37), (38).

Положим $\Theta^{\delta i}(t) \equiv \{\theta_2^{\delta i}(a_i^2(t)), t^2 \geq \xi^i t^1; \theta_1^{\delta i}(a_i^1(t)), t^2 < \xi^i t^1\}$, $t \in \Pi$, $i = \overline{1, m}$. Сделав в задаче (40) замену $x(t) = \Theta^\delta(t) + \Sigma[z](t)$, $\Theta^\delta(t) \equiv \text{col} \{\Theta^{\delta 1}(t), \dots, \Theta^{\delta m}(t)\}$, $t \in \Pi$, получим эквивалентную задачу оптимизации управляемой системы

$$z(t) = \alpha^\delta(t)\Sigma[z](t) + \gamma^\delta(t)u(t) + \alpha^\delta(t)\Theta^\delta(t), \quad t \in \Pi. \quad (41)$$

При этом ограничения (39) преобразуются в ограничения

$$P^\delta[z](t^2) = \pi^\delta(t^2) - P^\delta(t^2)\Theta^\delta(1, t^2) \quad (t^2 \in [0, 1]), \quad \mathcal{Q}^\delta[u](t) = \nu^\delta(t) \quad (t \in \Pi),$$

*Условие Г₁ выполняется, в частности, если при каждом $i = \overline{0, k}$ функции G_i^δ ($\delta \in [0, \delta_0]$) выпуклы и равномерно по $\delta \in [0, \delta_0]$ ограничены на любом ограниченном множестве (см., например, [23, теорема 8.2]).

$$W_i^\delta[z, u] \leq 0 \quad (i = \overline{1, k}),$$

где $\mathcal{P}^\delta[z](t^2) \equiv P^\delta(t^2)\Sigma[z](1, t^2)$ ($z \in L_2^m$, $t^2 \in [0, 1]$), $\mathcal{Q}^\delta[u](t) \equiv \int_{\Pi} Q^\delta(t, \zeta)u(\zeta) d\zeta$ ($u \in L_2^s$, $t \in \Pi$), $W_i^\delta[z, u] \equiv F_i^\delta[\Theta^\delta + \Sigma[z], u]$ ($z \in L_2^m$, $u \in L_2^s$, $i = \overline{1, k}$). Эту задачу оптимизации системы (41) запишем в виде (z_u^δ – решение уравнения (41), отвечающее управлению u)

$$W_0^\delta[z_u^\delta, u] \rightarrow \min, \quad \mathcal{P}^\delta[z_u^\delta](t^2) = \pi^\delta(t^2) - P^\delta(t^2)\Theta^\delta(1, t^2) \quad (t^2 \in [0, 1]),$$

$$\mathcal{Q}^\delta[u](t) = \nu^\delta(t) \quad (t \in \Pi), \quad W_i^\delta[z_u^\delta, u] \leq 0 \quad (i = \overline{1, k}), \quad u \in \mathcal{D}, \quad (42)$$

где $W_0^\delta[z, u] \equiv F_0^\delta[\Theta^\delta + \Sigma[z], u]$. Приняв $A^\delta[z](t) \equiv \alpha^\delta(t)\Sigma[z](t)$, $t \in \Pi$, $z \in L_2^m$; $B^\delta[u](t) \equiv \gamma^\delta(t)u(t)$, $t \in \Pi$, $u \in L_2^s$; $c^\delta(t) \equiv \alpha^\delta(t)\Theta^\delta(t)$, $t \in \Pi$, записываем (41) в форме (4).

Таким образом, задача (42) имеет вид (OC^δ), здесь

$$J_i^\delta[u] \equiv \mathcal{J}_i^\delta[z_u^\delta, u] \equiv W_i^\delta[z_u^\delta, u] \quad (i = \overline{0, k}), \quad K^\delta[z] \equiv G_0^\delta \left(\int_{\Pi} (\Theta^\delta(t) + \Sigma[z](t)) dt \right),$$

$$M^\delta \equiv M, \quad H \equiv L_2^l[0, 1] \times L_2^q, \quad \mathcal{A}^\delta[z](t) \equiv \text{col} \{ \mathcal{P}^\delta[z](t^2), 0_q \} \quad (z \in L_2^m, \quad t \in \Pi),$$

$$\mathcal{B}^\delta[u](t) \equiv \text{col} \{ 0_l, \mathcal{Q}^\delta[u](t) \} \quad (u \in L_2^s, \quad t \in \Pi), \quad \mathcal{C}^\delta \equiv \text{col} \{ \pi^\delta(t^2) - P^\delta(t^2)\Theta^\delta(1, t^2), \nu^\delta(t) \} \quad (t \in \Pi).$$

При сделанных относительно семейства задач (40), $\delta \in [0, \delta_0]$, предположениях семейство задач (42), $\delta \in [0, \delta_0]$, обладает свойствами Л), $A_1)$, $A_2)$, $A_3)$. Действительно, свойство Л) – прямое следствие предположений $\Gamma_1)$ – $\Gamma_3)$, а неравенства $A_1)$ получаются элементарными выкладками из $\Gamma_2)$. Чтобы доказать $A_2)$, оценим величину

$$|J_i^\delta[z, u] - J_i^0[z, u]| \equiv |W_i^\delta[z, u] - W_i^0[z, u]|$$

при произвольных $u \in \mathcal{D}$, $l > 0$ и $z \in L_2^m$ таких, что $\|z\|_{2,m} \leq l$, для $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $\delta \in (0, \delta_0]$. Она не превосходит суммы

$$|F_i^\delta[\Theta^\delta + \Sigma[z], u] - F_i^0[\Theta^\delta + \Sigma[z], u]| + |F_i^0[\Theta^\delta + \Sigma[z], u] - F_i^0[\Theta + \Sigma[z], u]|. \quad (43)$$

Вследствие $\Gamma_2)$ справедлива оценка

$$\left\| \int_{\Pi} (\Theta^\delta + \Sigma[z]) dt \right\|_m \leq \varrho \cdot (2\mathbf{C}\delta_0 + \|\theta_1^0\|_{L_2^m[0,1]} + \|\theta_2^0\|_{L_2^m[0,1]}) + l \cdot \|\Sigma\|, \quad (44)$$

где $\|\Sigma\|$ – норма ЛОО $\Sigma : L_2^m \rightarrow L_2^m$, $\varrho \equiv \varrho(\xi^1, \dots, \xi^m)$ – постоянная, зависящая от чисел ξ^i ($i = \overline{1, m}$). Из (44) и $\Gamma_3)$ следует, что первое слагаемое в (43) не превосходит величины $\delta \cdot \mathbf{N}_1(\max\{\sigma, \max_{u \in \mathcal{D}} \|u\|_{2,s}\})$, где $\sigma \equiv \sigma(\xi_1, \dots, \xi_m, \mathbf{C}, \delta_0, \theta_1^0, \theta_2^0, l)$ – правая часть (44). Так как

функция G_i^0 липшицева на любом ограниченном множестве, то существует неубывающая функция $\mu(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что выполняется неравенство

$$|G_i^0(y_1, w_1) - G_i^0(y_2, w_2)| \leq \mu(\mathbf{1})(\|y_1 - y_2\|_m + \|w_1 - w_2\|_s),$$

если $\|y_1\|_m \leq \mathbf{1}$, $\|y_2\|_m \leq \mathbf{1}$, $\|w_1\|_s \leq \mathbf{1}$, $\|w_2\|_s \leq \mathbf{1}$ ($i = \overline{1, k}$). Ввиду (44) второе слагаемое правой части (43) не больше произведения $\mu(\max\{\sigma, \max_{u \in \mathcal{D}} \|u\|_{2,s}\}) \cdot \left\| \int_{\Pi} (\Theta^\delta - \Theta^0) dt \right\|_m$, второй сомножитель которого не превосходит числа $2\mathbf{C}\delta \cdot \varrho(\xi^1, \dots, \xi^m)$. Таким образом, неравенства условия $A_2)$ для функционалов $\mathcal{J}_1^\delta, \dots, \mathcal{J}_k^\delta$, $0 < \delta \leq \delta_0$, выполняются с функцией

$$N_1(l) \equiv 2\mathbf{C} \cdot \varrho(\xi^1, \dots, \xi^m) \cdot \mu(\max\{\sigma(\xi_1, \dots, \xi_m, \mathbf{C}, \delta_0, \theta_1^0, \theta_2^0, l), l\}), \quad l > 0.$$

Аналогичные выкладки можно провести и для K^δ , $0 < \delta \leq \delta_0$. Выполнение условия A_3 легко проверить, пользуясь цепочечным признаком равностепенной квазинильпотентности [21, теорема 2].

Предположив дополнительно, что функции G_i^δ , $i = \overline{0, k}$, $0 < \delta \leq \delta_0$, непрерывно дифференцируемы, можем выписать для данного примера критерий решения задачи (19). Сопряжённый к оператору $\Sigma : L_2^m \rightarrow L_2^m$ оператор $\Sigma^* : L_2^m \rightarrow L_2^m$ имеет вид

$$\Sigma^*[z] \equiv \text{col} \{ \Sigma_1^*[z^1], \dots, \Sigma_m^*[z^m] \},$$

где

$$\Sigma_j^*[y](t) \equiv \int_{l_j[t, b_j(t)]} y(\cdot) dl, \quad t \in \Pi, \quad j = \overline{1, m}.$$

Положим $\varkappa_\delta(\bar{u}) \equiv \int_\Pi x_u^\delta(\zeta) d\zeta$, $\varkappa(\bar{u}) \equiv \int_\Pi \bar{u}(\zeta) d\zeta$. Непосредственным вычислением получим

$$\begin{aligned} \Phi^\delta[\bar{u}](t) &\equiv \Sigma^*[\{G_0^{\delta'}(\varkappa_\delta(\bar{u}))\}^*](t), \quad \Upsilon^\delta[\bar{u}](t) \equiv 2\bar{u}(t), \\ \Omega_i^\delta[\bar{u}](t) &\equiv \Sigma^*[\{G_{iy}^{\delta'}(\varkappa_\delta(\bar{u}), \varkappa(\bar{u}))\}^*](t) \quad (i = \overline{1, k}), \\ \Xi_i^\delta[\bar{u}](t) &\equiv \{G_{iw}^{\delta'}(\varkappa_\delta(\bar{u}), \varkappa(\bar{u}))\}^* \quad (i = \overline{1, k}), \quad t \in \Pi. \end{aligned}$$

Приняв для $\lambda \in H \equiv L_2^l[0, 1] \times L_2^q$ двухкомпонентное обозначение $\lambda \equiv \text{col} \{ \omega, \varpi \}$, $\omega \in L_2^l[0, 1]$, $\varpi \in L_2^q$, находим

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}^\delta)^*[\lambda](t) &= \{ \chi_{[(1/\xi^i)(t^2 + \xi^{i-1}), 1]}(t^1) \mathcal{M}_i[(P^\delta(\cdot))^* \omega(\cdot)](t) \}_{i=1}^m \quad (\lambda \in H, \quad t \in \Pi), \\ (\mathcal{B}^\delta)^*[\lambda](t) &= \int_\Pi (Q^\delta(\zeta, t))^* \varpi(\zeta) d\zeta \quad (\lambda \in H, \quad t \in \Pi), \end{aligned}$$

где $\mathcal{M}_i[y]$ – оператор преобразования функции (одной переменной) $y(\cdot)$ в функцию (двух переменных)

$$\mathcal{M}_i[y](t) \equiv y(t^2 - \xi^i(t^1 - 1)), \quad t \in \Pi, \quad i = \overline{1, m}.$$

Уравнение (26) имеет вид

$$\psi(t) - \Sigma^*[\alpha^{\delta*} \psi](t) = -\Sigma^* \left[\left\{ G_0^{\delta'}(\varkappa_\delta(\bar{u})) + \sum_{j=1}^k \mu_j G_{jy}^{\delta'}(\varkappa_\delta(\bar{u}), \varkappa(\bar{u})) \right\}^* \right](t) - (\mathcal{A}^\delta)^*[\lambda](t), \quad t \in \Pi,$$

его решение принадлежит классу W . Это уравнение эквивалентно краевой задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi^i}{\partial t^1} + \xi^i \frac{\partial \psi^i}{\partial t^2} &= \sum_{j=1}^m \alpha_{ji}^\delta(t) \psi^j(t) + G_{0y^i}^{\delta'}(\varkappa_\delta(\bar{u})) + \sum_{j=1}^k \mu_j G_{jy^i}^{\delta'}(\varkappa_\delta(\bar{u}), \varkappa(\bar{u})), \quad t \in \Pi, \quad i = \overline{1, m}; \\ \psi(t^1, 1) &= 0_m, \quad 0 \leq t^1 \leq 1; \quad \psi(1, t^2) = -(P^\delta(t^2))^* \omega(t^2), \quad 0 \leq t^2 \leq 1, \end{aligned}$$

основные уравнения которой получаются из него дифференцированием вдоль характеристик, краевые условия – соответствующими подстановками независимых переменных.

Заключение. Предложен регуляризованный принцип Лагранжа в итерационной форме в выпуклой задаче оптимального управления с операторными ограничениями для управляемой системы, задаваемой линейным функционально-операторным уравнением второго рода общего вида в пространстве L_2^m , основной оператор правой части уравнения предполагается квазинильпотентным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-01-00199_a).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сумин М.И.* Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2011. Т. 51. № 9. С. 1594–1615.
2. *Сумин М.И.* Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 279–296.
3. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М., 1979.
4. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М., 1986.
5. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации: в 2-х кн. М., 2011.
6. *Сумин М.И.* Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2007. Т. 47. № 4. С. 602–625.
7. *Сумин М.И.* Регуляризация принципа максимума Понтрягина в выпуклой задаче оптимального граничного управления для параболического уравнения с операторным ограничением-равенством // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27. № 2. С. 221–237.
8. *Бакушинский А.Б.* Методы решения монотонных вариационных неравенств, основанные на принципе итеративной регуляризации // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1977. Т. 17. № 6. С. 1350–1362.
9. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М., 1989.
10. *Сумин В.И., Сумин М.И.* Регуляризованные классические условия оптимальности в итерационной форме для выпуклых задач оптимизации распределённых систем вольтеррова типа // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютер. науки. 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 265–284.
11. *Сумин В.И., Сумин М.И.* Регуляризация классических условий оптимальности в задачах оптимального управления линейными распределёнными системами вольтеррова типа // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2022. Т. 62. № 1. С. 45–70.
12. *Аваков Е.Р., Магарыл-Ильязев Г.Г., Тихомиров В.М.* О принципе Лагранжа в задачах на экстремум при наличии ограничений // Успехи мат. наук. 2013. Т. 68. Вып. 3(411). С. 5–38.
13. *Сумин М.И.* Недифференциальные теоремы Куна–Таккера в задачах на условный экстремум и субдифференциалы негладкого анализа // Вестн. рос. ун-тов. Математика. 2020. Т. 25. Вып. 131. С. 307–330.
14. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1980.
15. *Сумин М.И.* О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимального управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26. № 2. С. 252–269.
16. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., 1977.
17. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и её приложения. М., 1967.
18. *Сумин В.И.* Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределёнными системами // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. № 5. С. 1056–1059.
19. *Сумин В.И., Чернов А.В.* Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1402–1411.
20. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределёнными системами. Нижний Новгород, 1992.
21. *Сумин В.И.* Управляемые вольтерровы функциональные уравнения и принцип сжимающих отображений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 262–278.
22. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М., 1974.
23. *Дмитрук А.В.* Выпуклый анализ. Элементарный вводный курс: учеб. пособие. М., 2012.

Тамбовский государственный университет
имени Г.Р. Державина
Нижегородский государственный университет
имени Н.И. Лобачевского

Поступила в редакцию 27.12.2021 г.
После доработки 27.12.2021 г.
Принята к публикации 25.05.2022 г.

УДК 519.622

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЗАДАЧ КОШИ, РЕШЕНИЕ КОТОРЫХ ИМЕЕТ ПОЛЮСЫ ЦЕЛОГО ПОРЯДКА НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

© 2022 г. А. А. Белов, Н. Н. Калиткин

Предложен эффективный метод решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с кратными полюсами целого порядка, который позволяет проводить сквозной расчёт через полюс как для единичного полюса, так и в случае цепочки полюсов. В методе используется специальный алгоритм нахождения кратности каждого полюса. По этой кратности определяется обобщённая инверсная функция, для которой K -кратный полюс исходной функции является простым нулём. Расчёт такого нуля не представляет трудности, поэтому предложенный метод позволяет получать высокую точность даже вблизи полюсов. После прохождения этого нуля возобновляется расчёт исходной функции. Применение данного метода на последовательности полюсов даёт возможность найти численное решение одновременно с апостериорной оценкой его погрешности. Метод проиллюстрирован на тестовых примерах.

DOI: 10.31857/S0374064122060085, EDN: CDFTQQ

Введение. Существует немало задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых имеют особые точки. Эти особые точки могут быть полюсами, в том числе кратными. Кроме того, при численном расчёте серьёзную проблему представляют точки, в которых обращается в нуль первая производная или одновременно несколько последовательных производных, начиная с первой. Столь же проблематичны точки, в которых сама функция конечна, но обращается в бесконечность её первая производная и, возможно, несколько последующих. Подавляющее большинство таких задач являются нелинейными. Много подобных задач возникает в квантовой механике. Другими примерами являются гамма-функция, эллиптические интегралы и др. В таких решениях особые точки оказываются, как правило, не единственными, а образуют последовательности.

Такие задачи, за редкими исключениями, не решаются в элементарных функциях. Решения многих задач являются специальными функциями математической физики. Для практического применения они требуют тщательного исследования их свойств, но даже в этом случае решение редко удаётся довести до числа. Положение усугубляется тем, что каждый узкий класс задач требует введения своей специальной функции. Это большое поле деятельности для математиков, однако практический выход для решения прикладных задач оказывается зачастую недостаточным. Поэтому необходима разработка универсальных численных методов, позволяющих единообразно решать задачи Коши с самыми разными типами особенностей. Численные методы должны находить не только приближённое решение, но и одновременно конструктивную оценку его погрешности. При этом желательно иметь не мажорантные интервальные оценки (которые могут быть сильно завышенными), а асимптотически точные.

Данная работа посвящена построению таких методов. Для простейших случаев (например, для полюсов кратности $K = 1$) предложен метод инверсной функции. Для полюсов целого порядка $K \geq 1$ разработан алгоритм, который для каждого полюса определяет его кратность, и строится обобщённая инверсная функция, ориентированная на прохождение данного полюса. В обоих случаях решение продолжается за полюс. Это позволяет вычислить решение, содержащее цепочку полюсов с произвольными целыми кратностями.

Эти методы позволяют не только находить решение, но и оценивать погрешность решения. Для этого расчёты проводятся на последовательности равномерных сеток, сгущающихся вдвое. К решениям на каждой паре соседних сеток применяется метод Ричардсона, дающий асимптотически точное значение погрешности.

1. Задачи с разрушением решения. Задачи с полюсами можно разделить на две категории.

1.1. Решение с единственной сингулярностью. Первая категория включает задачи для уравнений в частных производных и обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающие реальные физические процессы. Примерами являются различные режимы горения термоядерных мишеней, процессы пробоя в полупроводниках, задачи нелинейной лазерной оптики и акустики, гравитационный коллапс и др. В некоторый момент времени в решении возникает сингулярность. В ряде случаев (например, если сингулярность является полюсом целого порядка) возможно формально-математическое продолжение решения за полюс. Однако это не имеет практического смысла, поскольку с физической точки зрения в момент сингулярности исходное уравнение перестаёт описывать физическое явление. Поэтому в задачах данного типа ставится вопрос о расчёте решения вплоть до ближайшей сингулярности и численном исследовании последней. В литературе рассмотрены многие подобные задачи. Наиболее хорошо изучены задачи, сводящиеся к параболическому уравнению с нелинейной правой частью и в некоторых случаях – с нелинейным пространственным оператором (см., например, [1]).

Для расчёта таких задач обычно используют разностные схемы. Однако вблизи сингулярности решение разностных уравнений быстро теряет точность. Чтобы преодолеть эту трудность, предлагались разные подходы, основанные на адаптивном сетке к решению по мере приближения к сингулярности. Примерами таких подходов являются метод масштабирования [2], метод движущихся сеток [3], выбор очередного шага по времени по норме численного решения на текущем временном слое [4] и ряд других. Отметим также работы [5, 6], в которых для некоторых конкретных задач было найдено преобразование, которое переводит решение в несингулярное.

Наиболее универсальным является подход, основанный на методе сгущения сеток. Он применим как к системам обыкновенных дифференциальных уравнений, так и к уравнениям в частных производных. Подробная методология такого подхода изложена в монографии [7]. Вкратце приведём её.

Пусть исходная задача описывается нестационарным уравнением в частных производных. Вводится пространственная сетка, а пространственные операторы заменяются разностными соотношениями. Тогда задача сводится к задаче Коши для системы большого числа обыкновенных дифференциальных уравнений. Интегрирование такой системы по времени проводится с помощью некоторой независимой схемы, не связанной с пространственной схемой.

Неограниченное нарастание численного решения такой системы при приближении к некоторому моменту времени трактуется как сингулярность численного решения. Для расчёта положения сингулярности используются специальные процедуры (см. работы [8–10]). Затем одновременно проводится сгущение шагов по пространству и времени. Число обыкновенных дифференциальных уравнений при этом соответственно увеличивается. Снова проводится численный расчёт и определяется его момент сингулярности. Такое сгущение сеток проводится столько раз, сколько позволяют вычислительные мощности.

Последовательность полученных решений и моментов их сингулярностей, согласно теоремам Рябенского–Филиппова, стремится к точному решению и его моменту разрушения. Этот метод позволил единообразно решить ряд различных задач. Дальнейшее усовершенствование метода предполагает переход от временной переменной t к длине дуги интегральной кривой l в многомерном пространстве [11, 12]. Это позволяет ещё повысить надёжность метода, рассчитывать момент разрушения с хорошей точностью и во многих случаях определять его тип.

Метод сгущения сеток имеет строгое теоретическое обоснование в работах Л.Ф. Ричардсона [13], В.С. Рябенского и А.Ф. Филиппова [14], П. Лакса [15]. Поскольку данный метод важен для дальнейшего изложения, кратко напомним смысл этих работ.

Л.Ф. Ричардсон (см. [13]) обратил внимание, что погрешность вычисления квадратур обычно имеет вид Ch^p , где h – шаг сетки, p – порядок точности разностной формулы. Поэтому если сгущать сетку в q раз и сравнивать численные расчёты на двух сетках, то по разности этих расчётов нетрудно вычислить асимптотически точную оценку погрешности расчёта на каждой сетке. Позднее этот метод применялся рядом исследователей к решению дифферен-

циальных уравнений (там обычно удобно брать $q = 2$ для поточечного сравнения решений на соседних сетках).

В книге [14] для разностных схем сформулированы четыре фундаментальные теоремы. Для упрощения приведём их наглядные, но нестрогие формулировки.

Теорема. *Из аппроксимации и устойчивости следует сходимость.*

Эта теорема доказана для произвольных нелинейных схем.

Теорема. *Для линейных разностных схем порядок сходимости равен порядку аппроксимации.*

Теорема. *Для линейных задач с достаточно гладкими решениями применим метод Рунге-Кутты.*

Теорема. *Пусть разностная схема устойчива и аппроксимирует исходную задачу, а при сгущении сеток численное решение сходится к предельной функции. Тогда точная задача имеет решение, которым является данная предельная функция.*

К аналогичным выводам пришел П. Лакс [15]. По-видимому, только совокупность описанных теорем позволяет строить методы, в которых одновременно вычисляются решение и его асимптотически точная величина погрешности.

1.2. Решение с цепочкой сингулярностей. Существует вторая категория задач, которые не описывают реальный физический процесс, а являются вспомогательными математическими проблемами. Примерами являются уравнения специальных функций (гипергеометрическая функция, эллиптические функции, цилиндрические функции, гамма-функция и т.д.). Решение таких задач может иметь множественные сингулярности. Эти функции широко используются в математической физике, причём в конкретных приложениях требуются значения специальной функции не только до ближайшего полюса, но и между парой соседних полюсов. Поэтому в таких задачах требуется не только рассчитать решение вплоть до ближайшей сингулярности, но и продолжить решение за неё и рассчитать последующие сингулярности.

Для составления таблиц специальных функций [16] и для стандартных программ прямого расчёта [17] широко применяют численные методы. Стандартные схемы (например, схемы Рунге–Кутты) позволяют рассчитать гладкие участки решения с хорошей точностью. Однако вблизи сингулярности ошибка таких схем катастрофически нарастает. Прямое продолжение решения за полюс, как правило, невозможно. Поэтому решение продолжается за полюс какими-то искусственными приёмами. Прохождение ряда полюсов представляет ещё большую проблему и требует разработки специальных процедур. Насколько известно, универсальные численные методы, единообразно решающие широкие классы таких задач, отсутствуют. Настоящая работа посвящена построению общих методов решения подобных задач.

2. Расчёт задач с сингулярностями.

2.1. Продолжение за полюс. Решения задач Коши с сингулярностями выходят за рамки известных теорем о разрешимости. Сначала определим, что понимается под продолжением решения за полюс. Для наглядности рассмотрим задачу Коши для одного автономного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ)

$$du/dt = f(u), \quad t > 0; \quad u(0) = u_0. \quad (2.1)$$

Случай систем рассматривается аналогично. Неавтономные задачи сводятся к системе ОДУ с помощью процедур автономизации.

Пусть решение (2.1) имеет произвольное число изолированных особых точек на вещественной оси. Будем считать, что функция $u(t)$ аналитична в некоторых проколотых окрестностях этих точек. Тогда можно использовать классическую классификацию особых точек по Пенлеве [18]. Напомним, что особая точка t_* называется полюсом, если при обходе вокруг этой точки значение $u(t)$ не меняется и решение представимо рядом Пуизе (см. работы [19, 20]):

$$u(t) = a_{-m}(t - t_*)^{-m} + \dots + a_{-1}(t - t_*)^{-1} + a_0 + \dots$$

В остальной части комплексной плоскости t будем предполагать, что решение имеет столько непрерывных производных, сколько требуется для конкретной схемы интегрирования ОДУ.

В реальных задачах положение полюсов неизвестно априори. Точку ближайшего полюса обозначим через $t = t_*$.

Перейдём к комплексным значениям аргумента t . Тогда полюс на вещественной оси можно обойти по контуру на комплексной плоскости и, вернувшись на вещественную ось, продолжить решение. При этом не возникает никаких особенностей. Такой подход позволяет продолжить решение через любое число полюсов. Однако на практике такой подход неконструктивен, так как требует существенно более трудоемкого численного интегрирования в комплексной плоскости.

Правее точки $t = t_*$ формально существует бесконечно много точных решений дифференциального уравнения (2.1). Какое из них соответствует начальному условию u_0 ? При сделанных предположениях относительно точного решения применима классическая процедура аналитического продолжения. Наличие полюса первого порядка в точке t_* означает, что точное решение разлагается в этой точке в следующий ряд Пуизе с остаточным членом в форме Пеано:

$$u = \frac{a_{-1}}{t - t_*} + \sum_{p=0}^{P+1} a_p (t - t_*)^p + o((t - t_*)^{P+1}). \quad (2.2)$$

Коэффициенты a_p этого ряда зависят от начального условия u_0 . Ряд (2.2) справедлив в проколоте круге, радиус которого определяется положением ближайшей сингулярности либо точки, в которой нарушается гладкость решения. Поэтому при $t > t_*$ он выбирает то же самое решение дифференциального уравнения (2.1), что и при $t < t_*$. Именно оно соответствует начальному условию u_0 . Аналогично осуществляется продолжение решения за последующие полюсы.

Заметим, что описанная процедура продолжения применима к задачам, в которых решение имеет полюсы либо существенно особые точки (при этом предполагается, что все особые точки являются изолированными). В этом случае ряд (2.2) содержит только целые степени $(t - t_*)$. Если особая точка является точкой ветвления, то для продолжения нужно выбрать одну из ветвей. При этом ряд (2.2) будет содержать дробные степени.

2.2. Трудности. Напомним типичные трудности, встречающиеся при численном решении подобных задач. Рассмотрим любую явную схему. Пусть для упрощения шаг τ является постоянным. Формально численное решение существует на каждом шаге $t_n = N\tau$. Однако вблизи первого полюса значения $u(t_n)$ быстро нарастают и происходит переполнение. При использовании переменного шага τ_n , уменьшающегося в соответствии с ростом решения, описанная картина сохраняется.

Если взять неявную схему, то описанная картина сохраняется. Кроме того, возникает ещё одна трудность. Решение на новом шаге находится из нелинейного алгебраического уравнения. Для конечного временного шага τ_n это уравнение может не иметь вещественного решения. В обоих случаях расчёт положения полюса затруднён и продолжение решения по той же схеме невозможно.

3. Метод инверсной функции. Рассмотрим сначала задачу для одного ОДУ. Случай систем будет рассмотрен далее.

3.1. Инверсная функция. Введём инверсную функцию $v(t) = [u(t)]^{-1}$. Из (2.1) следует, что эта функция удовлетворяет уравнению

$$dv/dt = \varphi(v), \quad \varphi(v) = -v^2 f(v^{-1}). \quad (3.1)$$

Это уравнение будем называть инверсным. Все полюсы функции $u(t)$ становятся нулями функции $v(t)$ и, наоборот, нули функции $u(t)$ становятся полюсами функции $v(t)$.

Выберем точку $\tilde{t} \in (0, t_*)$ такую, что на отрезке $t \in (\tilde{t}, t_*)$ точное решение $u(t)$ сохраняет знак. Для уравнения (3.1) выберем начальное условие $v(\tilde{t}) = 1/u(\tilde{t})$. Инверсное уравнение с таким начальным условием будем называть инверсной задачей. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть решение $u(t)$ задачи (2.1) обращается в бесконечность в точке t_* , аналитично в проколоте окрестности этой точки и имеет $P+1$ непрерывную производную

вне указанной окрестности. Особая точка t_* является полюсом первого порядка тогда и только тогда, когда $f(u)/u^2$ имеет конечный ненулевой предел при $u \rightarrow \infty$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $u(t)$ – некоторое решение дифференциального уравнения в задаче (2.1), имеющее полюс первого порядка в точке t_* . Тогда функция $u(t)$ представима рядом Пуизе (2.2). Продифференцировав его, получим ряд Пуизе для сложной функции $f(u(t))$:

$$f(u(t)) = \frac{du}{dt} = -\frac{a_{-1}}{(t-t_*)^2} + \sum_{p=1}^{P+1} pa_p(t-t_*)^{p-1} + o((t-t_*)^P). \tag{3.2}$$

Найдём разложение в ряд Пуизе для отношения f/u^2 :

$$\frac{f(u(t))}{u(t)^2} = \sum_{p=0}^P b_p(t-t_*)^p + o((t-t_*)^P),$$

$$b_0 = -1/a_{-1}, \quad b_1 = 2a_0/a_{-1}^2, \quad b_2 = 3(a_1a_{-1} - a_0^2)/a_{-1}^3, \dots \tag{3.3}$$

Разложения (2.2), (3.2), (3.3) справедливы в некоторой малой окрестности точки t_* . Однако $t \rightarrow t_*$ как раз соответствует $u \rightarrow \infty$. Из (3.3) непосредственно видно, что в этом случае отношение $f/u^2 \rightarrow -1/a_{-1}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Сделаем формальную замену неизвестной функции $u = 1/v$. Новая функция удовлетворяет инверсному уравнению (3.1), причём $\varphi(v) = -v^2f(v^{-1}) \rightarrow C \neq 0$. Это означает, что при любом $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что при достаточно малом $|v| < \delta$ выполнено неравенство

$$C - \varepsilon < |\varphi(v)| < C + \varepsilon. \tag{3.4}$$

Выберем ε так, что $|\varepsilon| < C$. Тогда величины $C + \varepsilon$ и $C - \varepsilon$ имеют одинаковый знак, следовательно, в указанной окрестности dv/dt остаётся знакоопределённой. Если функция $u(t)$ обращается в бесконечность в точке t_* , то в этой точке $v(t)$ обращается в нуль. Из неравенств (3.4) следует, что этот нуль может быть только простым. Тогда в точке t_* функция $u(t)$ имеет полюс первого порядка. Теорема доказана.

Замечание 1. В доказательстве необходимости коэффициенты ряда (2.2) могут быть произвольными. Иными словами, рассматривается не одна интегральная кривая, а семейство интегральных кривых, имеющих полюс в точке t_* . Это семейство интегральных кривых можно трактовать как окрестность точного решения задачи (2.1).

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $f(u)/u^2 \rightarrow C \neq 0$ при $u \rightarrow \infty$. Тогда найдётся такая окрестность особой точки t_* и окрестность начального условия u_0 , в которых решение $v(t)$ инверсной задачи существует, единственно и равномерно непрерывно зависит от начального условия u_0 .

Доказательство. 1. Из условий теоремы следует, что в указанной окрестности $\varphi(v)$ непрерывна и ограничена, причём $\varphi(v) \rightarrow -C$ при $v \rightarrow 0$. Тогда, согласно классическим теоремам [21], решение инверсной задачи $v(t)$ существует и единственно.

2. Покажем, что оно равномерно непрерывно зависит от начального условия u_0 . Расчёт исходной задачи ведётся до момента \tilde{t} , который является начальным для инверсной задачи. Согласно условиям на гладкость правой части f решение $u(t)$ на отрезке $(0, \tilde{t})$, и в частности его значение $u(\tilde{t})$, равномерно непрерывно зависит от u_0 .

Покажем, что φ_v непрерывна. Из условий теоремы следует, что решение $u(t)$ задачи (2.1) имеет полюс первого порядка на отрезке интегрирования. Рассмотрим семейство интегральных кривых, задаваемых рядом (2.2) с произвольными коэффициентами a_p , $-1 \leq p \leq P + 1$. Найдём соответствующее семейство интегральных кривых инверсного уравнения (3.1):

$$v(t) = \frac{1}{u(t)} = \sum_{p=1}^{P+1} c_p(t-t_*)^p + o((t-t_*)^{P+1}), \tag{3.5}$$

$$c_1 = 1/a_{-1}, \quad c_2 = -a_0/a_{-1}^2, \quad c_3 = (a_0^2 - a_1 a_{-1})/a_{-1}^3, \quad \dots \quad (3.6)$$

В силу произвольности коэффициентов a_i равенства (3.5), (3.6) задают не конкретное решение инверсной задачи, а некоторую его окрестность. Дифференцированием нетрудно найти

$$\varphi(v(t)) = \frac{dv}{dt} = \sum_{p=1}^P p c_p (t - t_*)^{p-1} + o((t - t_*)^P). \quad (3.7)$$

Вычислим φ_v из (3.5) и (3.7) как производную параметрической функции

$$\begin{aligned} \varphi_v(v(t)) &= \frac{\varphi_t(v(t))}{v_t(t)} = \left[\sum_{p=2}^{P-1} c_p p(p-1)(t - t_*)^{p-2} \right] \left[\sum_{p=2}^P c_p p(t - t_*)^{p-1} \right]^{-1} = \\ &= \sum_{p=0}^{P-1} d_p (t - t_*)^p + o((t - t_*)^{P-1}), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$d_0 = -2a_0/a_1, \quad d_1 = 2(a_0^2 - 3a_1 a_{-1})/a_{-1}^2, \quad d_2 = 2(3a_0 a_1 a_{-1} - a_0^3 - 6a_2 a_{-1}^2)/a_{-1}^3, \quad \dots \quad (3.9)$$

В силу оценки (3.4) $\varphi(v)$ не обращается в нуль в некоторой окрестности $v = 0$. Поэтому φ_v непрерывна и ряд (3.8) сходится.

Таким образом, согласно классическим теоремам [21], решение инверсной задачи (3.1) равномерно непрерывно зависит от начального условия $v(t)$. Последнее равномерно непрерывно зависит от u_0 . Это завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. Построенная функция $v(t)$ является решением инверсного уравнения (3.1) как при $t < t_*$, так и при $t > t_*$. Тем самым она однозначно определяет продолжение решения $u(t)$ за полюс по правилу $u(t) = [v(t)]^{-1}$.

Следствие 2. После прохождения полюса необходимо вернуться от инверсной задачи к исходной. Обозначим точку перехода через \tilde{T} . Примем эту точку за начальную для функции $u(t)$, зададим в ней начальное значение $u(\tilde{T}) = [v(\tilde{T})]^{-1}$ и продолжим расчёт исходного уравнения при $t > \tilde{T}$. Согласно доказанным теоремам значение $u(\tilde{T})$ зависит от u_0 равномерно непрерывно. Поэтому то же справедливо для всего решения $u(t)$ при $t > \tilde{T}$.

Тем самым, если исходная задача (2.1) имеет не один полюс, а последовательность полюсов, то к каждому из них применимы теоремы 1 и 2.

Следствие 3. Из следствия 2 непосредственно вытекает, что метод инверсной функции применим к задачам с последовательностями полюсов первого порядка.

Следствие 4. Условия гладкости в теоремах 1 и 2 обеспечивают применимость разностных схем порядка точности до P -го и нахождение асимптотически точного значения погрешности по методу Рундсона.

Замечание 2. Проведённые доказательства являются локальными, т.е. относятся к некоторой окрестности точки t_* . Если точка \tilde{t} оказалась слишком далеко от точки t_* , то её необходимо передвинуть в сторону t_* .

Алгоритм. В численном расчёте нахождение окрестностей точки t_* , указанных в теоремах 1 и 2, достаточно проблематично. Будем использовать следующий более простой алгоритм.

Выберем некоторую равномерную сетку $t_n = n\tau$, $n = \overline{0, N}$. Здесь $\tau = T/N$ – шаг сетки. Введём некоторое пороговое значение $U > 0$. Будем вести на этой сетке расчёт задачи (2.1) по некоторой явной схеме до тех пор, пока для очередного сеточного значения u_n не выполнится условие $|u_n| > U$. Обозначим этот номер узла через n^* . Далее с этого момента численно решаем задачу (3.1) на той же сетке, выбирая в качестве начального условия $v_{n^*} = 1/u_{n^*}$. При этом во всех последующих узлах сетки восстанавливаем численное значение $u(t)$ по соотношению $u_n = 1/v_n$.

Если в ходе этого расчёта функция v_n изменила знак, то это означает переход $v(t)$ через нуль, что соответствует полюсу функции $u(t)$. Таким образом мы находим решение по обе

стороны полюса и можем продолжать расчёт за полюс. Если при дальнейшем решении уравнения (3.1) выполнится условие $|v_n| > 1/U$, то снова возвращаемся к решению уравнения (2.1). Такой переход можно выполнять неограниченное количество раз. Этот способ позволяет проводить сквозной расчёт через полюс или через последовательность полюсов кратности 1. При этом не происходит никакой потери точности, поскольку уравнение (3.1) в окрестности t_* не имеет никаких особенностей.

3.2. Схемы. В любом узле сетки может произойти переход от функции $u(t)$ к обратной функции $v(t)$. Поэтому многошаговые схемы для такого расчёта непригодны. Следует использовать только одношаговые схемы. В наших расчётах хорошие результаты дали:

- явные схемы Рунге–Кутты;
- явно-неявные одностадийные схемы Розенброка [22], из которых особенно надёжной была вещественная схема точности $O(\tau)$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \tau \mathbf{w}, \quad (E - \tau \mathbf{f}_{\mathbf{u}}) \mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{u}_n),$$

здесь E – единичная матрица; несколько уступала ей в надёжности, но имела точность $O(\tau^2)$ одностадийная схема с комплексным коэффициентом (CROS)

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \tau \operatorname{Re} \mathbf{w}, \quad (E - 0.5(1 + i)\tau \mathbf{f}_{\mathbf{u}}) \mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{u}_n); \tag{3.10}$$

- диагонально-неявные схемы Рунге–Кутты BORK [23], из которых упомянем общеизвестную обратную схему Эйлера точности $O(\tau)$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \tau \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n+1}) \tag{3.11}$$

и рекурсивную схему точности $O(\tau^2)$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \tau \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n+1} - 0.5\tau \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n+1})). \tag{3.12}$$

3.3. Положения полюсов. Пусть использована численная схема точности $O(h^p)$. Найдём интервал $[t_n, t_{n+1}]$, на концах которого значения v_n и v_{n+1} имеют разные знаки. На этом интервале лежит расчётное приближение к полюсу T . В окрестности точки смены знака выберем p точек сетки t_j . Очевидно, для $p = 2$ это будут точки t_n и t_{n+1} , для $p = 4$ – точки $t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, t_{n+2}$.

Рассмотрим значения v_j в выбранных узлах как аргумент, а соответствующие значения t_j – как функцию этого аргумента. Проведём ньютоновскую (или иную) интерполяцию по этим значениям v_j функции $t(v)$ и вычислим значение t_* при $v^* = 0$. Это и будет расчётное положение полюса.

3.4. Погрешность. Вычисление погрешности как традиционной нормы (C , L_2 или подобных им) от разности численного и точного решений неконструктивно на задачах с сингулярностями. Причина в том, что расчётное положение полюса заведомо отличается от точного, и поэтому погрешности вблизи полюса оказываются огромными.

В статье [24] было предложено использовать метрику Хаусдорфа для оценки близости решений, имеющих участки быстрого изменения. Опишем процедуру вычисления расстояния в такой метрике. Возьмём точное решение $u(t)$ на участке до первого полюса или на участке между двумя соседними полюсами. Возьмём сеточное решение u_n , относящееся к этому участку; оно состоит из точек с координатами (t_n, u_n) . При этом часть значений u_n вычисляется непосредственно решением уравнения (2.1), а лежащие вблизи полюсов значения восстанавливаются по расчётным величинам v_n .

Опустим из каждой точки (t_n, u_n) перпендикуляр на кривую $u(t)$. Длина этого перпендикуляра d_n есть расстояние от точки до кривой. Выбрав $d = \max d_n$, получим метрику Хаусдорфа. Очевидно, она аналогична норме C .

На практике более выгодно построить аналог нормы L_2 . Для этого возьмём среднеквадратичную величину d_n в расчёте на одну точку:

$$d = \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N d_n^2 \right)^{1/2}, \tag{3.13}$$

где N – полное число точек на выбранном участке. Далее будем пользоваться определением (3.13).

4. Пример расчёта для одного ОДУ.

4.1. Автономный тест. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{du}{dt} = 1 + \left(u - \frac{\pi}{4}\right)^2, \quad t > 0; \quad u(0) = \frac{\pi}{4}. \quad (4.1)$$

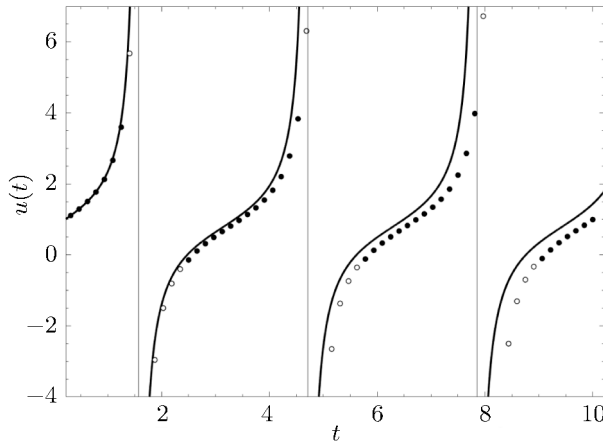


Рис. 1. Расчёт теста (4.1) с шагом $\tau = 0.157$ по схеме ERK2: сплошная кривая – точное решение; тёмные точки – расчёт по $u(t)$, светлые – по $v(t)$.

Приведём точное решение (показано на рис. 1) и его полюсы:

$$u(t) = \pi/4 + \operatorname{tg} t, \quad (t_*)_m = \pi(m - 1/2), \quad (4.2)$$

а также уравнение для функции $v(t)$:

$$\frac{dv}{dt} = -v^2 - \left(1 - v\frac{\pi}{4}\right)^2.$$

Расчёты проводились с разными константами перехода U . Оказалось, что большое значение U приводит к худшей точности. Значение $U \geq 100$ давало неудовлетворительные результаты. Для иллюстративных расчётов было выбрано $U = 5$. В общем случае U должно служить настроечным параметром программы.

4.2. Результаты. Для численной реализации были выбраны явные схемы Рунге–Кутты второго и четвёртого порядков (ERK2 и ERK4) и схема CROS (3.10). Мы пользовались их реализацией в пакете GEABORK (см. [25]). Схемы ERK2 и CROS имеют аппроксимацию $O(\tau^2)$, а схема ERK4 – $O(\tau^4)$. Все расчёты проводились до момента $T = 10$, что требовало прохождения трёх полюсов. Опишем качественные и количественные результаты.

На рис. 1 показано численное решение по схеме ERK2 с шагом $\tau = 0.157$. Шаг демонстрационного расчёта выбран так, чтобы он был: а) несоизмерим с расстоянием между полюсами (тогда узел сетки заведомо не попадает в полюс), б) достаточно велик, чтобы можно было видеть отличие численного решения от точного. Видно, что расчёт хорошо проходит через полюсы. Ошибка накапливается с увеличением t_n , однако даже при таком крупном шаге можно успешно пройти довольно много полюсов.

На рис. 2 для всех схем показана зависимость погрешности в метрике Хаусдорфа от величины шага. Для схем ERK2 и CROS кривые практически совпадают. График дан в двойном логарифмическом масштабе. Линии графика прямые, начиная уже со второй сетки. Следовательно, зависимость погрешности от шага является степенной. Тангенсы угла наклона этих прямых равны -2 для схем ERK2 и CROS и -4 для ERK4. Таким образом, даже на задаче с полюсами эти схемы реализуют свой теоретический порядок точности. Это свидетельствует о высокой надёжности метода инверсной функции и о применимости метода Ричардсона даже на задачах с сингулярностями.

Заметим, что для такого количественного определения точности необходим использованный здесь среднеквадратичный аналог метрики Хаусдорфа. Обычные нормы L_2 или C и даже традиционная метрика Хаусдорфа (являющаяся аналогом нормы C) не дают конструктивного ответа. Для иллюстрации на рис. 2 показаны также погрешности в норме L_2 . Сами эти погрешности намного больше погрешностей в метрике Хаусдорфа. Кривые в традиционных нормах имеют очень длинные нерегулярные участки: теоретическая сходимость начинается только при чрезмерно малом шаге, который нечасто используется в практических расчётах.

На рис. 3 показана зависимость погрешности определения положения третьего полюса от шага для всех схем. График дан в двойном логарифмическом масштабе. Картина полностью аналогична рис. 2 – положение полюса вычисляется с точностью $O(\tau^p)$.

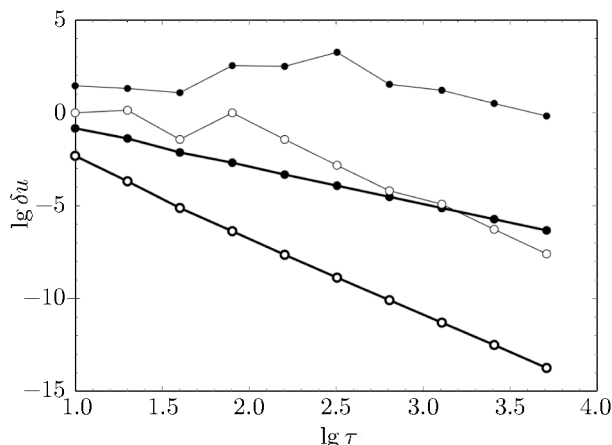


Рис. 2. Зависимость погрешности решения от шага: жирные линии – в метрике Хаусдорфа, тонкие – в норме L_2 , тёмные точки – схемы ERK2 и CROS, светлые – схема ERK4.

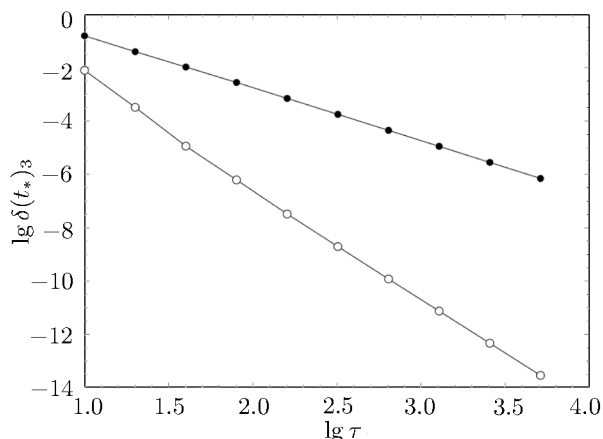


Рис. 3. Зависимость погрешности положения третьего полюса от шага: тёмные точки – схемы ERK2 и CROS, светлые – схема ERK4.

Обсудим некоторые следствия из этого. На грубой сетке расчётный и точный полюсы могут отстоять на несколько интервалов сетки. Если $p = 1$ (схемы первого порядка точности), то при сгущении сеток такое взаимное расположение расчётного и точного полюсов сохраняется. Но если $p \geq 2$, то после нескольких сгущений расчётный и точный полюсы попадут в один и тот же интервал сетки. С этого момента на кривой погрешности в традиционной норме начинается регулярный участок.

4.3. Неавтономный тест. Тест (4.1) был описан автономным уравнением. Однако к такому же точному решению (4.2) приводит задача для неавтономного уравнения

$$\frac{du}{dt} = \left(u - \frac{\pi}{4}\right)(\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t). \tag{4.3}$$

В этом случае уравнение для обратной функции имеет следующий вид:

$$\frac{dv}{dt} = -\left(v - v^2 \frac{\pi}{4}\right)(\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t). \tag{4.4}$$

Расчёт неавтономной задачи (4.3) является существенно более серьёзной проблемой, чем решение автономной задачи. Поясним причину этого на данном конкретном примере. Правая часть уравнения (4.4) оказывается произведением двух сомножителей: первый зависит только от v , второй – только от t . Второй сомножитель показывает, что v должно менять знак (т.е. проходить через нуль) точно при t_* . Первый же сомножитель приводит к изменению знака в точке, смещённой на один или несколько шагов τ . Поэтому вблизи t_* эти сомножители попеременно меняют знак v_n и численное решение принимает пилообразный вид, показанный на рис. 4.

Этот эффект наблюдается на грубых сетках. Он снижает точность расчёта и даже может привести к срыву расчёта. Однако на достаточно подробных сетках этот эффект обычно пропадает, т.е. качественный вид и точность решения оказываются хорошими. Поэтому при возникновении подобных явлений в расчётах

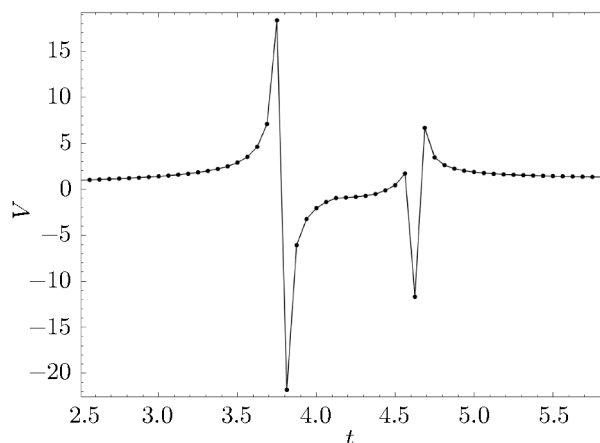


Рис. 4. Расчётная обратная функция в неавтономной задаче (4.4).

можно порекомендовать пользователю существенно уменьшать шаг сетки. Целесообразно также увеличить разрядность вычислений.

4.4. Решение с ограниченной гладкостью. Выше было отмечено, что для работоспособности метода инверсной функции достаточно аналитичности решения в некоторой проколотовой окрестности полюса. Вне этой окрестности решение может иметь ограниченную гладкость (но достаточную для применения той или иной разностной схемы). Этот случай не вызывает ни теоретических, ни практических затруднений. Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{du}{dt} = \begin{cases} (1-t_0)^{-2}, & 0 \leq t \leq t_0 < 1, \\ u^2, & t_0 < t < 1, \end{cases} \quad u(0) = \frac{1-2t_0}{(1-t_0)^2}. \quad (4.5)$$

Здесь $t_0 \in [0, 1]$ – некоторое фиксированное число. Нетрудно убедиться, что точное решение этой задачи имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} (1-t_0)^{-2}(t-t_0) + (1-t_0)^{-1}, & 0 \leq t \leq t_0 < 1, \\ (1-t)^{-1}, & t_0 < t < 1. \end{cases} \quad (4.6)$$

Решение (4.6) представляет собой линейную функцию, “склеенную” с гиперболой, и имеет вертикальную асимптоту в точке $t_* = 1$. Это решение показано на рис. 5. Полное время расчёта T выбирается так, чтобы выполнялось неравенство $T > t_*$. Очевидно, что решение аналитично в круге $0 < |t - t_*| < t_* - t_0$ на комплексной плоскости. При $t = t_0$ аналитичность нарушается: в этой точке $u(t)$ непрерывно вместе с первой производной, но уже вторая производная претерпевает разрыв.

Положим $t_0 = 0.5$, $T = \pi$. Расчёт этой задачи проводился по методу инверсной функции с использованием схем ERK1, ERK2 и ERK4. При указанной гладкости решения теоретическую сходимость может обеспечить только первая из них. Остальные две использовались лишь с иллюстративной целью. На рис. 6 показаны погрешности в зависимости от шага сетки. Масштаб графика двойной логарифмический. Погрешности решения вычислялись в среднеквадратичном аналоге метрики Хаусдорфа. Видно, что для схемы ERK1 кривая погрешности стремится к прямой с наклоном -1 , что соответствует теоретическому порядку точности схемы. Аналогичное поведение имеет кривая погрешности расчёта положения полюса.

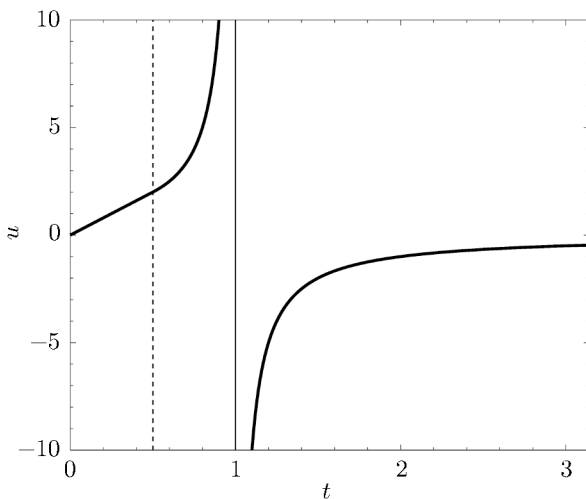


Рис. 5. Решение (4.6) задачи (4.5): жирная линия – u , тонкая линия – вертикальная асимптота $t = t_*$. Штриховой линией показана граница области аналитичности решения $t = t_0$.

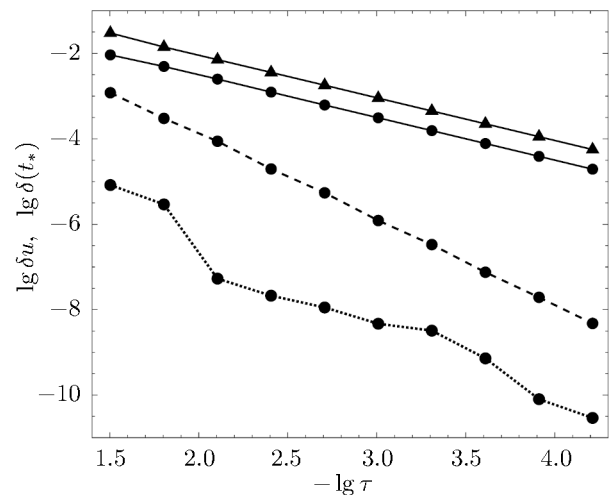


Рис. 6. Зависимость погрешности от шага сетки в тесте (4.5): сплошная линия – ERK1, штриховая – ERK2, пунктирная – ERK4; кружки – погрешности решения, треугольники – погрешность расчёта положения полюса.

Кривая погрешности решения для схемы ERK2 имеет вид “дрожащей” прямой, средний наклон которой близок к -2 . Это не вполне соответствует теоретическому характеру убывания погрешности, однако даже за рамками формальной применимости эта схема обеспечивает хорошую количественную точность.

Кривая погрешности для схемы ERK4 резко отличается от прямой с наклоном -4 . Это неудивительно, поскольку для применимости данной схемы решение должно иметь пять непрерывных производных. Тем не менее, фактическая точность оказывается очень высокой (вплоть до ошибок компьютерного округления $\sim 10^{-12}$).

Таким образом, проведённые расчёты показывают, что высокие требования к гладкости решения (а именно, аналитичность) целесообразны лишь в непосредственной близости к полюсу. Вдали от полюса требования к гладкости могут быть существенно ниже, и достаточно наличия нескольких непрерывных производных. Требование аналитичности в области, содержащей положительную полуось $t > 0$, является избыточным.

5. Системы ОДУ. Рассмотрим автономную задачу Коши для системы ОДУ с полюсами первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad t > 0, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0; \\ \mathbf{u} &= \{u^1, u^2, \dots, u^J\}, \quad \mathbf{f} = \{f^1, f^2, \dots, f^J\}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Неавтономный случай как для одного уравнения, так и для систем сводится к автономной задаче с помощью процедуры автономизации. Эта процедура будет описана далее.

Будем считать, что полюсы различных компонент не совпадают. Совпадение полюсов является вырожденным случаем, он будет рассмотрен отдельно. С формальной точки зрения расстояние между соседними несовпадающими полюсами может быть любым. Однако для надёжности численного расчёта нужно, чтобы это расстояние было существенно больше шага сетки. Будем считать это условие выполненным (в противном случае шаг нужно уменьшить). Таким образом, полюсы различных компонент можно рассматривать последовательно один за другим.

5.1. Инверсный вектор. Пусть первым возникает полюс в компоненте u^k , соответствующий момент времени обозначим через t_*^k . В некоторой окрестности этой точки справедливы следующие разложения:

$$\begin{aligned} u^k &= \frac{a_{-1}^k}{t - t_*^k} + \sum_{p=0}^{P+1} a_p^k (t - t_*^k)^p + o((t - t_*^k)^{P+1}), \\ u^j &= \sum_{p=0}^{P+1} a_p^j (t - t_*^k)^p + o((t - t_*^k)^{P+1}), \quad 1 \leq j \leq J, \quad j \neq k. \end{aligned}$$

Компонента, имеющая полюс, разлагается в ряд Пуанкаре, а все прочие компоненты разлагаются в ряды Тейлора. Верхние пределы сумм выбраны из предположения, что правые части являются P раз непрерывно дифференцируемыми, соответственно, компоненты решения имеют $P + 1$ непрерывную производную. Левую границу рассматриваемой окрестности по-прежнему будем обозначать через \tilde{t} .

Введём k -ю инверсную функцию $v^k(t) = [u^k(t)]^{-1}$ (её можно рассматривать как компоненту инверсного вектора). Для неё в окрестности точки t_*^k справедливо разложение, аналогичное (3.5). Инверсная система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dv^k}{dt} &= (v^k)^2 f^k(u^1, u^2, \dots, u^{k-1}, [v^k]^{-1}, u^{k+1}, \dots, u^J) \equiv \\ &\equiv \varphi^k(u^1, u^2, \dots, u^{k-1}, [v^k]^{-1}, u^{k+1}, \dots, u^J), \\ \frac{dw^j}{dt} &= f^j(u^1, u^2, \dots, u^{k-1}, [v^k]^{-1}, u^{k+1}, \dots, u^J), \quad 1 \leq j \leq J, \quad j \neq k. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Дифференцированием рядов для $u^j(t)$, $j \neq k$, и $v^k(t)$ нетрудно получить разложения правых частей (5.2), аналогичные (3.7).

Рассмотрим инверсную систему в указанной окрестности точки t_*^k , принимая точку \tilde{t} за начальную. Для компоненты v^k начальное условие имеет вид $v^k(\tilde{t}) = [u^k(\tilde{t})]^{-1}$, для прочих компонент оно записывается тривиально. Систему (5.2) вместе с указанным начальным условием будем называть инверсной задачей.

Теорема 3. Пусть компонента $u^k(t)$ обращается в бесконечность в точке t_*^k , аналитична в проколотой окрестности этой точки и имеет $P + 1$ непрерывную производную вне указанной окрестности. Особая точка t_*^k является полюсом первого порядка тогда и только тогда, когда $f^k(u^1(t), u^2(t), \dots, u^J(t))/(u^k)^2$ имеет конечный ненулевой предел при $t \rightarrow t_*^k$.

Здесь подразумевается, что аргументами f^k являются ряды Пуизе для компонент u^1, u^2, \dots, u^J .

Доказательство практически дословно повторяет доказательство теоремы 1.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3 и $f^k(u^1(t), u^1(2), u^J(t))/(u^k)^2$ имеет конечный ненулевой предел при $t \rightarrow t_*^k$. Тогда найдётся такая окрестность особой точки t_*^k и окрестность начального условия \mathbf{u}_0 , в которых решение инверсной задачи существует, единственно и равномерно непрерывно зависит от начального условия \mathbf{u}_0 .

Доказательство во многом аналогично доказательству теоремы 2.

1. По условию правые части инверсной системы (5.2) непрерывны и ограничены. В силу классических теорем разрешимости задач Коши для систем ОДУ решение инверсной системы существует и единственно.

2. Покажем, что зависимость решения инверсной задачи от \mathbf{u}_0 является равномерно непрерывной. Легко видеть, что начальное условие в точке \tilde{t} зависит от \mathbf{u}_0 равномерно непрерывно. Поэтому достаточно обосновать равномерно непрерывную зависимость решения инверсной задачи от условия в точке \tilde{t} . Для этого достаточно показать, что компоненты якобиана системы (5.2) непрерывны.

В самом деле, в якобиан системы (5.2) входят производные вида

$$\frac{\partial \varphi^k}{\partial v^k}, \quad \frac{\partial \varphi^k}{\partial u^j}, \quad \frac{\partial f^i}{\partial v^k}, \quad \frac{\partial f^i}{\partial u^j},$$

здесь всюду $i, j \neq k$. Производные вида $\partial \varphi^k / \partial u^j$ и $\partial f^i / \partial u^j$ непрерывны в силу условий гладкости на \mathbf{f} (поскольку φ^k зависит от u^j точно так же, как f^k).

Выражения для $\partial \varphi^k / \partial v^k$ полностью аналогичны (3.8), (3.9). Тем же способом можно найти $\partial f^i / \partial v^k$. Приведём для них несколько первых коэффициентов ряда (3.8):

$$d_0 = 2a_2^i a_{-1}^k, \quad d_1 = 4a_2^i a_0^k + 6a_3^i a_{-1}^k,$$

$$d_2 = 2[a_2^i (a_0^k)^2 + 3a_2^i a_1^k a_{-1}^k + 6a_3^i a_0^k a_{-1}^k + 6a_4^i (a_{-1}^k)^2] / a_{-1}^k, \quad \dots$$

Видно, что производные $\partial \varphi^k / \partial v^k$ и $\partial f^i / \partial v^k$ непрерывны, поскольку φ^k не обращается в нуль в окрестности особой точки.

Таким образом, все компоненты якобиана непрерывны и решение инверсной задачи зависит от \mathbf{u}_0 равномерно непрерывно. Теорема доказана.

Следствие 5. Инверсная компонента $v^k(t)$ однозначно определяет продолжение за полюс для компоненты $u^k(t)$ и тем самым для всей системы (5.1).

Следствие 6. После прохождения полюса следует вернуться от инверсной системы к исходной. Это делается так же, как в случае одного уравнения. При этом зависимость решения за полюсом от начального условия \mathbf{u}_0 является равномерно непрерывной.

Последующий полюс может быть как в той же компоненте u^k , так и в какой-то другой. В обоих случаях для него справедливы теоремы 3 и 4.

Следствие 7. Метод инверсной функции применим к системам со множественными полюсами первого порядка.

Следствие 8. Условие на гладкость $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ позволяет применять разностные схемы порядка точности до P -го и вычислять асимптотически точное значение погрешности по Ричардсону.

5.2. Совпадение полюсов. Рассмотрим случай, когда полюсы нескольких компонент совпадают. Пусть, для упрощения, таких компонент две. Если совпадают полюсы большего числа компонент, то рассмотрение проводится полностью аналогично.

Пусть компоненты u^k и u^l имеют полюсы первого порядка, находящиеся в одной и той же точке $t_*^k = t_*^l \equiv t_*$. Пусть прочие компоненты не имеют особенностей в некоторой окрестности этой точки. Тогда в этой окрестности точки t_* уже две компоненты разлагаются в ряд Пуизе:

$$u^j = \frac{a_{-1}^j}{t - t_*} + \sum_{p=0}^{P+1} a_p^j (t - t_*)^p + o((t - t_*)^{P+1}), \quad j = k, l,$$

$$u^j = \sum_{p=0}^{P+1} a_p^j (t - t_*)^p + o((t - t_*)^{P+1}), \quad j \neq k, l.$$

В этом случае вводится не одна инверсная компонента, а две:

$$v^j(t) = [u^j(t)]^{-1}, \quad j = k, l.$$

Инверсная система имеет следующий вид:

$$\frac{dv^j}{dt} = (v^j)^2 f^j(u^1, u^2, \dots, u^{k-1}, [v^k]^{-1}, u^{k+1}, \dots, u^{l-1}, [v^l]^{-1}, u^{l+1}, \dots, u^J) \equiv$$

$$\equiv \varphi^j(u^1, u^2, \dots, u^{k-1}, [v^k]^{-1}, u^{k+1}, \dots, u^{l-1}, [v^l]^{-1}, u^{l+1}, \dots, u^J), \quad j = k, l,$$

$$\frac{du^j}{dt} = f^j(u^1, u^2, \dots, u^{k-1}, [v^k]^{-1}, u^{k+1}, \dots, u^{l-1}, [v^l]^{-1}, u^{l+1}, \dots, u^J), \quad j \neq k, l.$$

Начальное условие в точке \tilde{t} выбирается очевидным образом.

Нетрудно показать, что для такой инверсной задачи справедлив аналог теоремы 4, в котором необходимо оговорить наличие конечного ненулевого предела для $f^k(\mathbf{u}(t))/(u^k(t))^2$ и $f^l(\mathbf{u}(t))/(u^l(t))^2$ при $t \rightarrow t_*$. Напомним, что эти условия эквивалентны наличию полюсов первого порядка в этих компонентах.

5.3. Автономизация. Неавтономная задача сводится к автономной с помощью процедуры автономизации. Напомним эту процедуру. Пусть исходная задача имеет вид

$$d\mathbf{u}/dt = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \tag{5.3}$$

Введём новую компоненту решения $u^0 \equiv t$. Для неё $f^0 = 1$. Тогда неавтономная система (5.3) переходит в автономную систему

$$d\mathbf{u}/dt = \mathbf{F}(u^0, u^1, \dots, u^J), \quad u^0(0) = 0, \quad u^j(0) = u_0^j, \quad 1 \leq j \leq J,$$

$$F^0 = 1, \quad F^j = f^j, \quad 1 \leq j \leq J. \tag{5.4}$$

Если $\mathbf{f} \in C^P(\mathbb{R}_J)$, то такую же гладкость имеют правые части \mathbf{F} . Поэтому для системы (5.4) также справедливы теоремы 3 и 4.

Алгоритм. Описанный выше алгоритм расчёта легко обобщается на случай систем ОДУ. Подчёркнём, что для каждой компоненты $u^k(t)$ вектор-функции $\mathbf{u}(t)$ необходимо вводить отдельную инверсную функцию $v^k(t) = [u^k(t)]^{-1}$ (т.е. компоненту инверсного вектора). Параметр A^k также следует выбирать отдельно для каждой компоненты.

6. Пример для системы ОДУ.

6.1. Тест. Для иллюстрации рассмотрим следующую систему ОДУ:

$$\frac{du_1}{dt} = u_1(u_1 + u_2), \quad \frac{du_2}{dt} = -u_2(u_1 + u_2), \quad u_1(0) = u_2(0) = 2^{-1/2}. \quad (6.1)$$

Точное решение (6.1) имеет вид

$$u_1 = \operatorname{tg}(t - \pi/4), \quad u_2 = \operatorname{ctg}(t - \pi/4). \quad (6.2)$$

В моменты $T_k^1 = \pi/4 + \pi(k-1/2)$ компоненты u_1 и u_2 имеют простые полюсы и простые нули соответственно. В моменты $T_k^2 = \pi/4 + \pi k$ u_1 имеет простые нули, а u_2 – простые полюсы. Это решение показано на рис. 7.

Для разных компонент переход к соответствующей инверсной функции может происходить в различные моменты времени. Поэтому необходимо рассмотреть следующие случаи. Во-первых, пусть условие перехода выполнено только для функции u_1 , т.е. $|u_1| > A_1$ и $|u_2| < A_2$. Тогда от (6.1) перейдём к системе

$$\frac{dv_1}{dt} = -1 - v_1 u_2, \quad \frac{du_2}{dt} = -\frac{u_2}{v_1} - u_2^2. \quad (6.3)$$

Во-вторых, если $|u_1| < A_1$ и $|u_2| > A_2$, рассмотрим систему

$$\frac{du_1}{dt} = u_1^2 + \frac{u_1}{v_2}, \quad \frac{dv_2}{dt} = v_2 u_1 + 1. \quad (6.4)$$

Наконец, если условия $|u_1| > A_1$, $|u_2| > A_2$ выполнены для обеих компонент, то следует решать систему

$$\frac{dv_1}{dt} = -1 - \frac{v_1}{v_2}, \quad \frac{dv_2}{dt} = \frac{v_2}{v_1} + 1. \quad (6.5)$$

Очевидно, системы (6.3)–(6.5) являются нелинейными. Они не содержат малых параметров, допускающих линеаризацию. Поэтому тест (6.1) достаточно представительен. Его важным преимуществом является то, что точное решение (6.2) выражается в элементарных функциях.

6.2. Результаты. Мы проводили расчёты по схеме ERK4. Промежуток $t \leq T = 15$ включал пять полюсов для каждой компоненты решения. На рис. 8 показана точность нахождения всего решения и положения пятого полюса для каждой из компонент. Обе компоненты вычислены с примерно одинаковой точностью. То же справедливо для положения всех полюсов каждой из компонент.

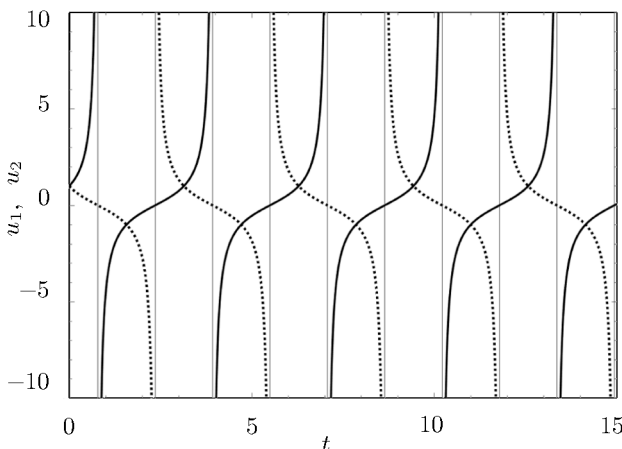


Рис. 7. Решение задачи (6.1): сплошная линия – u_1 , пунктирная – u_2 , вертикальные линии – положения полюсов.

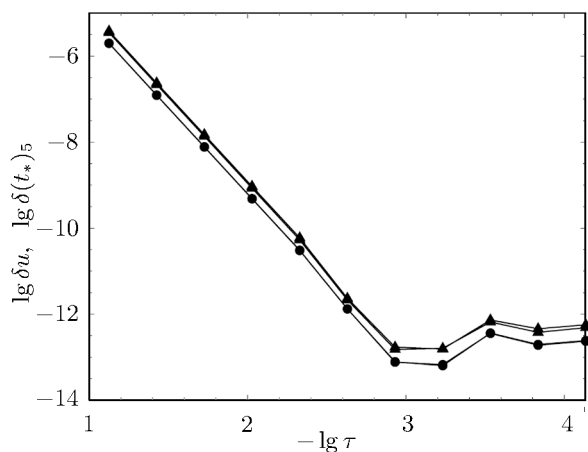


Рис. 8. Зависимость погрешности от шага сетки в тесте (6.1): кружки – решения для обеих компонент, треугольники – положение пятого полюса в обеих компонентах.

Видно, что даже на достаточно грубой сетке с шагом $\tau = 0.075$ получена отличная точность $\sim 3 \cdot 10^{-6}$. Точность $\sim 10^{-13}$, соответствующая ошибкам округления, достигнута при $\tau \sim 10^{-3}$. Скорость убывания ошибки при уменьшении шага сетки соответствует теоретическому четвёртому порядку точности. Это подтверждает высокую надёжность предложенного метода.

7. Кратные полюсы.

7.1. Трудности. Если полюс $u(t)$ имеет кратность $k > 1$, то в точке t_* инверсная функция $v(t)$ имеет нуль кратности k . Следовательно, в этой точке обращается в нуль не только $v(t)$, но и её производные до $(k - 1)$ -й включительно.

Это представляет серьёзную проблему для численного решения. В самом деле, явные схемы порядка точности $p \leq k$ передают p первых производных решения. В точке t_* все эти производные обращаются в нуль, поэтому при $t > t_*$ численное решение оказывается тривиальным $v \equiv 0$. Такие явные схемы позволяют дойти до полюса t_* , но не позволяют вести из него дальнейший расчёт.

На практике ни один из узлов сетки не будет точно совпадать с точкой t_* . Поэтому формальное продолжение решения за полюс возможно. Но при этом значения $v(t)$ в районе полюса очень малы и существенно возрастает роль ошибок округления. Поэтому после сквозного прохождения каждого полюса точность решения существенно ухудшается тем сильнее, чем больше кратность полюса k . Найти много полюсов высокой кратности с 64-битовыми числами не удаётся, и требуется существенно увеличивать разрядность вычислений. Изложим способ преодоления этой трудности.

7.2. Обобщённая инверсная функция. По скорости убывания функции $v(t)$ при приближении к полюсу можно определить кратность нуля k , который равен кратности полюса функции $u(t)$. Эффективные алгоритмы, позволяющие определить эту кратность, будут описаны позже. Пока будем предполагать, что кратность k ближайшего полюса найдена (мы допускаем, что разные полюсы могут иметь различную кратность). Тогда вместо инверсной функции $v(t)$ перейдём к обобщённой инверсной функции $w(t)$. Для нечётного k она имеет следующий вид:

$$w(t) = v^{1/k}. \tag{7.1}$$

Дробная степень $1/k$ имеет k комплексных значений. При нечётном k одно из них вещественно. В формуле (7.1) подразумевается выбор вещественной ветви корня.

При чётном k надо различать два случая. Если $v > 0$, то имеются два вещественных значения корня, различающихся знаками. Для наших целей выбор знака безразличен. Поэтому также можно пользоваться записью (7.1). Если $v < 0$, то среди значений корней нет вещественных. Для наших целей можно воспользоваться следующим обобщением:

$$w(t) = \operatorname{sgn}(v)|v|^{1/k}. \tag{7.2}$$

Формулой (7.2) можно пользоваться при любом знаке v . Заметим, что для нечётных k эта формула также даёт правильный результат.

У обобщённой инверсной функции t_* есть простой корень. Сама функция $w(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dw}{dt} = -k^{-1}w^{1+k}f(w^{-k}). \tag{7.3}$$

Сквозное прохождение нуля $w(t)$ является достаточно простой задачей по сравнению с задачей о сквозном прохождении кратного нуля.

Для задачи (7.3) нетрудно доказать аналоги теорем 1 и 2 для случая одного уравнения и теорем 3 и 4 для случая системы ОДУ. При этом в теоремах 1 и 3 следует заменить f/u^2 на $f/u^{1+1/k}$.

7.3. Определение кратности полюса. Диагностика кратности полюса проводится в тех случаях, когда v_n становится достаточно малым. В этом случае можно принять гипотезу о

том, что t_n достаточно близко к полюсу t_* , а само поведение функции приближённо описывается формулой $v_n \approx \text{const} \cdot (t_* - t_n)^k$. Одновременно с v_n продолжается расчёт величины $u_n = 1/v_n$, и поведение функции u имеет вид $u_n \approx A(t_* - t_n)^{-k}$, где A – некоторая константа.

Рассмотрим два соседних шага сетки t_n, t_{n+1} . В них вычислено значение u_n, u_{n+1} и правые части $f_n = f(u_n, t_n), f_{n+1} = f(u_{n+1}, t_{n+1})$. Очевидно, вблизи полюса можно считать, что выполняются следующие приближённые соотношения:

$$\begin{aligned} u_n &\approx A(t_* - t_n)^{-k}, & u_{n+1} &\approx A(t_* - t_{n+1})^{-k}, \\ f_n &\approx Ak(t_* - t_n)^{-k-1}, & f_{n+1} &\approx Ak(t_* - t_{n+1})^{-k-1}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Это система четырёх уравнений с тремя неизвестными A, t_*, k . Очевидно, система несовместна, но можно отыскать её приближённое решение. Важное требование к этому решению – простота и надёжность расчётных формул.

Опустив промежуточные выкладки, приведём два приближённых решения для k :

$$k \approx (t_{n+1} - t_n)(u_n/f_n - u_{n+1}/f_{n+1})^{-1}, \quad k \approx (1 - \ln(f_n/f_{n+1})/\ln(v_n/v_{n+1}))^{-1}. \quad (7.5)$$

Отметим, что для применимости этих формул необходимо (но не достаточно) выполнение следующих условий:

$$v_n v_{n+1} > 0, \quad f_n f_{n+1} > 0, \quad v_n f_n < 0, \quad |v_n| > |v_{n+1}|.$$

Поэтому вычислять значения k (7.5) следует только при выполнении этих неравенств.

В наших расчётах формулы (7.5) давали совпадающие результаты. Разумеется, расчётное значение q оказывалось нецелым. Но если несколько шагов подряд оно было достаточно близко к одному и тому же целому числу, то это целое число принималось за кратность полюса теста. Расчёты показали, что найденное таким образом значение практически всегда совпадало с реальной кратностью полюса. Поэтому данный алгоритм определения кратности был принят в наших расчётах.

8. Теоретические аспекты построения тестов. Построение представительных тестов для задач с кратными полюсами оказалось нетривиальной проблемой. Хороший тест должен иметь точное решение, содержать цепочку кратных полюсов, не содержать особенности других типов. Обсудим этот вопрос.

8.1. Несингулярные особенности. Тривиальным обобщением теста (4.1) является следующая задача:

$$\frac{du}{dt} = k(u - u_0)[(u - u_0)^{1/k} + (u - u_0)^{-1/k}] \quad \text{при нечётных } k.$$

Точное решение этой задачи имеет вид

$$u(t) = u_0 + \text{tg}^k t.$$

Однако у такого теста имеется специфическая трудность, которая не свойственна общим задачам с сингулярностями. В точном решении имеются точки $t = \pi m, m = 0, 1, \dots$. В них производные точного решения $u^{(q)}(t) = 0$ для $q = \overline{1, k-1}$. Такие точки назовём несингулярными особенностями. Прохождение такой особенности эквивалентно расчёту задачи с началом в особой точке высокого порядка. Начало расчёта в особой точке является самостоятельной трудной проблемой численных методов. В данной задаче эта трудность возникает многократно, т.е. при прохождении каждой несингулярной особенности. Этот вопрос выходит за рамки данной работы.

Сформулируем следующие очевидные условия.

1. Для отсутствия несингулярных особых точек необходимо, чтобы на интегральной кривой между любой парой соседних полюсов выполнялось условие $f(u, t) \neq 0$.

2. Для отсутствия несингулярных особых точек достаточно, чтобы $f(u, t) \neq 0$ ни в одной полосе плоскости u, t , расположенной между соседними полюсами.

8.2. Единственный полюс. Можно сконструировать тест, не содержащий несингулярной особенности. Например, это задача

$$\frac{du}{dt} = u^\nu, \quad \nu > 1, \quad u(0) = u_0.$$

Точное решение

$$u(t) = u_0(1 - t/t_*)^{-1/(\nu-1)}$$

имеет полюс порядка $k = (\nu - 1)^{-1}$ в точке $t_* = u_0^{1-\nu}/(\nu - 1)$. Однако такой тест достаточно прост, так как в нем имеется только один полюс, а не цепочка полюсов.

8.3. Полюсы чётного порядка. Задачи с полюсами чётного порядка имеют один существенный недостаток. Они в принципе не могут быть автономными. Справедлива

Теорема 5. *Если решение имеет полюс чётной кратности и описывается дифференциальным уравнением первого порядка, то это уравнение не может быть автономным.*

В самом деле, вблизи полюса чётной кратности левая и правая ветви решения имеют разные знаки производных при одном и том же значении решения u . Если задача автономна, то правая часть $f(u)$ есть однозначная функция u , и она не может иметь разные знаки при одном и том же значении u . Это противоречие доказывает теорему.

8.4. Неавтономность. В п. 2 было замечено, что для простого полюса при неавтономной записи задачи могут возникать нежелательные осцилляции численного решения вблизи полюса. Подобная трудность возникает и с кратными полюсами. Способа преодоления этой трудности найти пока не удаётся. Поэтому целесообразно строить тесты с автономной записью правой части.

9. Представительные тесты.

9.1. Цепочка полюсов третьего порядка. Нам удалось построить тест, отвечающий сформулированным выше требованиям. В нем точное решение имеет следующий вид:

$$u = u_0 + \operatorname{tg}^3(t - t_0) + \operatorname{tg}(t - t_0). \tag{9.1}$$

Наличие члена $\operatorname{tg}^3(t - t_0)$ обеспечивает наличие полюса третьего порядка. В то же время член $\operatorname{tg}(t - t_0)$ гарантирует отсутствие несингулярных особенностей. Уравнение (9.1) является приведённым кубическим уравнением относительно $\operatorname{tg}(t - t_0)$. Из трёх корней этого уравнения только один вещественный. Он имеет следующий вид:

$$\operatorname{tg}(t - t_0) = -(2/\sqrt{27})S \operatorname{sh} \varphi, \quad S = \operatorname{sgn}(u - u_0), \quad \varphi = (1/3) \operatorname{arcsch} |(\sqrt{27}/2)(u - u_0)|. \tag{9.2}$$

Это решение можно записать и в другой форме:

$$\operatorname{tg}(t - t_0) = \sqrt[3]{u/2 + r} + \sqrt[3]{u/2 - r}, \quad r = \sqrt{u^2/4 + 1/27}. \tag{9.3}$$

Продифференцировав точное решение по t , получим неавтономную запись дифференциального уравнения:

$$\frac{du}{dt} = (1 + 3 \operatorname{tg}^2(t - t_0)) \cos^{-2}(t - t_0) = (1 + 3 \operatorname{tg}^2(t - t_0))(1 + \operatorname{tg}^2(t - t_0)).$$

Подставив сюда $\operatorname{tg}(t - t_0)$ из (9.2) или (9.3), получим автономное уравнение вида

$$\frac{du}{dt} = [1 + 3(2/\sqrt{27} \operatorname{sgn}(u - u_0) \operatorname{sh} \varphi)^2][1 + (2/\sqrt{27} \operatorname{sgn}(u - u_0) \operatorname{sh} \varphi)^2] \tag{9.4}$$

или

$$\frac{du}{dt} = 3[(u/2 + r)^{4/3} + (u/2 - r)^{4/3} + 1/9]. \tag{9.5}$$

К сожалению, построить аналогичный автономный тест для полюсов произвольного нечёт-ного порядка k не удалось. Если взять точное решение

$$u = u_0 + \operatorname{tg}(t - t_0) + \operatorname{tg}^k(t - t_0),$$

то дифференциальное уравнение в неавтономной форме записывается без труда:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1 + k \operatorname{tg}^{k-1}(t - t_0)}{\cos^2(t - t_0)}.$$

Однако алгебраическое уравнение относительно $\operatorname{tg}(t - t_0)$ имеет k -ю степень, а при $k \geq 5$ оно неразрешимо в радикалах.

9.2. Цепочка полюсов второго порядка. В этом случае задача может быть только неавтономной. Мы построили следующий тест. Пусть точное решение имеет вид

$$u(t) = u_0 + \sin(t - t_0) \cos^{-2}(t - t_0) = [1 + \operatorname{tg}^2(t - t_0)] \sin(t - t_0). \quad (9.6)$$

Оно имеет полюсы порядка $k = 2$ при $(t_*)_m = \pi/2 + \pi m$.

Продифференцировав (9.6), получим

$$\frac{du}{dt} = (1 + 2 \operatorname{tg}^2(t - t_0)) \cos^{-1}(t - t_0) = [1 + 2 \operatorname{tg}^2(t - t_0)][1 + \operatorname{tg}^2(t - t_0)] \cos(t - t_0). \quad (9.7)$$

Выразим $\operatorname{tg}(t - t_0)$ из (9.6) и подставим в (9.7):

$$\frac{du}{dt} = (1/2 + \sqrt{1/4 + (u - u_0)^2} + 2(u - u_0)^2) \cos(t - t_0). \quad (9.8)$$

Заметим, что одному и тому же точному решению могут соответствовать разные неавтономные формы записи задачи. Например, функция (9.6) является точным решением дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt} = \cos^{-1}(t - t_0) + 2 \sin^2(t - t_0) \cos^{-3}(t - t_0).$$

Однако все попытки расчёта указанного уравнения различными квадратурными формулами оказались безуспешными – счёт разваливался.

Поэтому сконструированные здесь тесты (9.4), (9.5) и (9.8) представляют самостоятельную ценность: решения имеют цепочки полюсов указанных порядков, отсутствуют особые точки других типов, минимизировано влияние неавтономности. Эти задачи рекомендуются при тестировании других методов сквозного расчёта полюсов.

10. Апробация.

10.1. Цепочка полюсов третьего порядка. Из предыдущего обсуждения видно, что тест (9.4) является представительным тестом, описывающим цепочку кратных полюсов, причём полюсы являются единственными особенностями решения. В нем отсутствуют несингулярные особые точки. Поэтому апробация метода обобщённой инверсной функции была проведена на этом тесте. В расчётах использована схема ERK4.

Были выполнены две серии расчётов теста (9.4) на последовательности равномерных сгущающихся вдвое сеток. Расчёт проводился на отрезке $0 \leq t \leq T = 15$, содержащем пять полюсов. В первой серии во входных данных программы принудительно задавалась кратность полюса $k = 3$. В этой серии при выполнении условия $|u_n| > U$ выполнялся переход не к простой, а сразу к обобщённой инверсной функции w , соответствующей данному k . Для первой сетки задавался шаг $\tau = 0.15$. Далее сетки последовательно сгущались вдвое, пока погрешности не достигали ошибок округления. На рис. 9 показан график решения на самой грубой сетке. Видно, что при сквозном прохождении всех пяти полюсов третьего порядка численное решение визуально совпадает с точным. Это свидетельствует о высокой надёжности метода обобщённой инверсной функции.

На рис. 10 показана зависимость погрешностей от шага сетки в двойном логарифмическом масштабе. Каждая сетка отмечена значком. Для удобства эти значки соединены между собой тонкими линиями. Линия с темными кружками показывает погрешность решения в среднеквадратичном аналоге метрики Хаусдорфа.

Видно, что начальный участок линии слегка искривлен, но быстро происходит выход на регулярный прямолинейный участок. Его наклон точно соответствует теоретическому порядку сходимости $p = 4$ схемы ERK4. Погрешность убывает до $\sim 10^{-14}$, затем перестаёт убывать при дальнейшем сгущении сетки. Этот предел показывает, что ошибки округления всего лишь в ~ 100 раз превышают ошибку единичного округления компьютера 10^{-16} . Это также подтверждает высокую надёжность метода. Линия с темными треугольниками показывает погрешность определения положения самого далекого пятого полюса. Для неё также справедливо перечисленное выше.

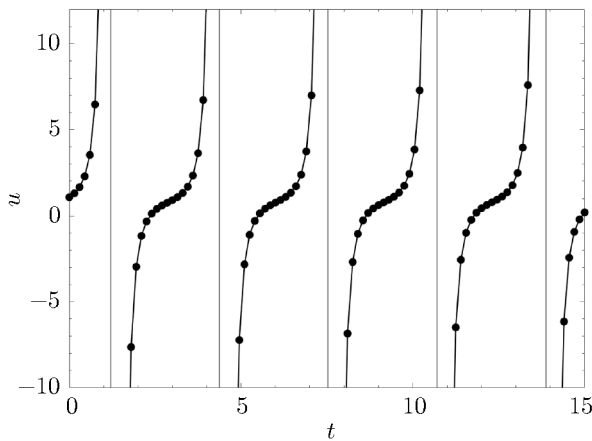


Рис. 9. Расчёт теста (9.4) с шагом $\tau = 0.15$ по схеме ERK4: сплошная линия – точное решение (9.1), точки – численное решение.

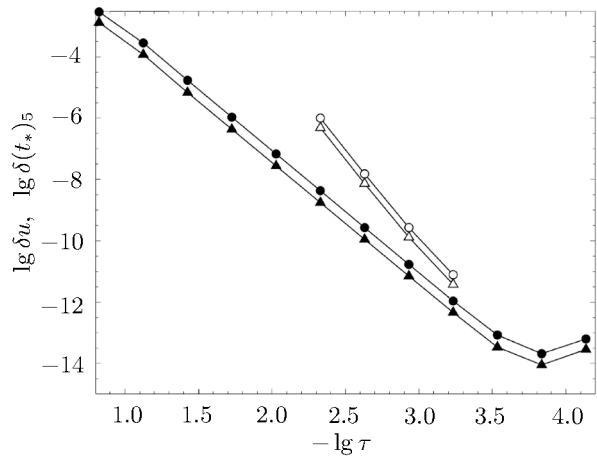


Рис. 10. Зависимость погрешности решения и положения пятого полюса от шага в тесте (9.4).

Во второй серии расчётов кратность полюса не задавалась. Программа автоматически определяла кратность по критерию (7.5). При этом сначала происходил переход от основной функции u к простой инверсной функции v . Когда для простой инверсной функции устанавливался критерий (7.5), то производился переход к обобщённой инверсной функции. На практике этот критерий не срабатывал как на грубых сетках, так и на слишком подробных. В этом случае счёт разваливался. Расчёты удалось провести на сетках с числами узлов $N = 400, 800, 1600, 3200$. Погрешность решения на всём отрезке $[0, T]$ и ошибка положения пятого полюса показаны на рис. 10 светлыми точками.

Видно, что на первой из этих четырёх сеток погрешности решения и пятого полюса в ~ 100 раз превышают соответствующие значения, полученные при априорном задании правильного k . При дальнейшем сгущении сеток расхождение быстро уменьшается. Кривые стремятся к линиям, полученным при априорно заданном k . Таким образом, программа с автоматическим выбором k по точности и надёжности уступает программе с априорно заданной кратностью полюса. Однако видно, что она позволяет рассчитывать цепочки полюсов, о природе которых заранее ничего неизвестно.

Сравнение двух серий расчётов показывает, что критерий определения кратности полюса существенно менее надёжен, чем сам метод обобщённой инверсной функции.

10.2. Цепочка полюсов второго порядка. Расчёты теста (9.8) проводились по схеме ERK4. На рис. 11 приведены численное решение при $\tau = 0.15$ и точное решение (обозначения соответствуют рис. 9). Численный расчёт успешно проходит через 5 полюсов.

На рис. 12 показана зависимость погрешности самого решения и положения пятого полюса от шага сетки (обозначения соответствуют рис. 10). Видно, что расчётные точки несколько разбросаны вокруг усреднённой прямой. Это и есть проявление трудностей, связанных с ре-

шением неавтономных задач. Однако средний наклон прямой соответствует теоретическому порядку точности $p = 4$, и на умеренных сетках достигается очень высокая точность, близкая к ошибкам единичного округления.

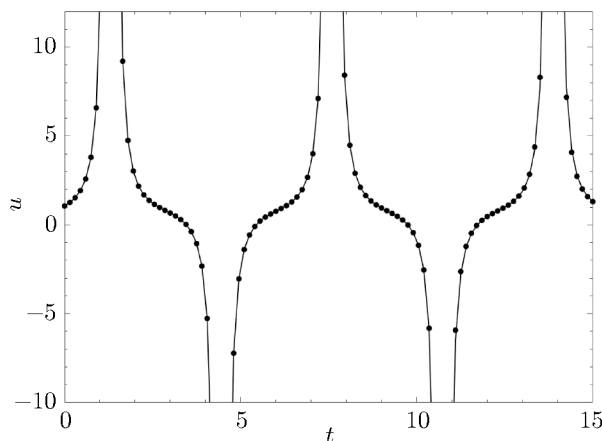


Рис. 11. Расчёт теста (9.8) с шагом $\tau = 0.15$ по схеме ERK4.

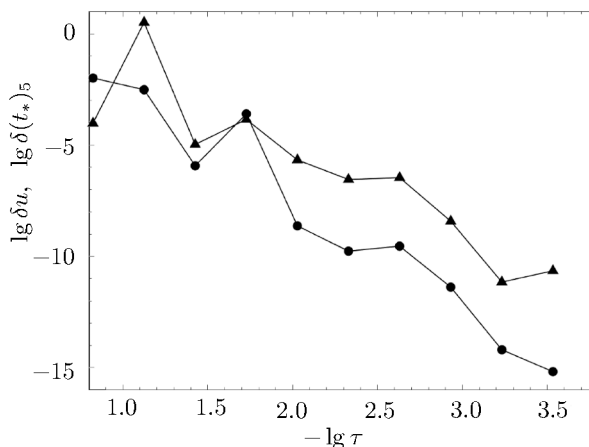


Рис. 12. Зависимость погрешности решения и положения пятого полюса от шага в тесте (9.8).

Заключение. Предложенный в данной работе алгоритм сквозного прохождения полюсов высокой заранее неизвестной кратности оказался достаточно надёжным. Он обеспечивает высокую точность сквозного расчёта не только единичного полюса, но и цепочки полюсов, причём на автономных и неавтономных задачах.

Публикация выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М., 1987.
2. Berger M., Kohn R.V. A rescaling algorithm for the numerical calculation of blowing-up solutions // Comm. Pure Appl. Math. 1988. V. 41. № 6. P. 841–863.
3. Huang W., Ren Y., Russell R.D. Moving mesh methods based on moving mesh partial differential equations // J. Comp. Phys. 1994. V. 113. P. 279–290.
4. Nakagawa T. Blowing up of a finite difference solution to $u_t = u_{xx} + u^2$ // Appl. Math. Optimization. 1976. V. 2. P. 337–350.
5. McLaughlin D.W., Papanicolaou G.C., Sulem C., Sulem P.L. Focusing singularity of the cubic Schrodinger equation // Phys. Rev. A. 1986. V. 34. P. 1200–1210.
6. Haynes R., Turner C. A numerical and theoretical study of blow-up for a system of ordinary differential equations using the Sundman transformation // Atlantic Electr. J. Math. 2007. V. 2. № 1. P. 1–13.
7. Калиткин Н.Н. Численные методы. М., 1978.
8. Альшина Е.А., Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Диагностика особенностей точного решения методом сгущения сеток // Докл. РАН. 2005. Т. 404. № 3. С. 295–299.
9. Альшина Е.А., Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Диагностика особенностей точного решения при расчётах с контролем точности // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2005. Т. 45. № 10. С. 1837–1847.
10. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М., 2007.
11. Белов А.А. Численное обнаружение и исследование сингулярностей решения дифференциальных уравнений // Докл. РАН. 2016. Т. 468. № 1. С. 21–25.
12. Белов А.А. Численная диагностика разрушения решений дифференциальных уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2017. Т. 57. № 1. С. 91–102.

13. *Richardson L.F., Gaunt J.A.* The deferred approach to the limit // *Phil. Trans. A.* 1927. V. 226. P. 299–349.
14. *Рябенский В.С., Филипов А.Ф.* Об устойчивости разностных уравнений. М., 1956.
15. *Lax P.* On the stability of difference approximations to solutions of hyperbolic equations with variable coefficients // *Comm. Pure Appl. Math.* 1961. V. 14. P. 497–520.
16. *Janke E., Emde F., Lösch F.* *Taffeln höhere Functionen.* Stuttgart, 1960.
17. NIST Digital Library of Mathematical Functions. <https://dlmf.nist.gov>.
18. *Painlevé P.* *Leçons sur la theorie analytique des equations differentielles.* Paris, 1973.
19. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.-Л., 1941.
20. *Кудряшов Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. М., 2004.
21. *Хайрер Э., Нерсет С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М., 1990.
22. *Rosenbrock H.H.* Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations // *Comp. J.* 1963. V. 5. № 4. P. 329–330.
23. *Калиткин Н.Н., Пошивайло И.П.* Обратные Ls-устойчивые схемы Рунге–Кутты // *Докл. РАН.* 2012. Т. 442. № 2. С. 175–180.
24. *Белов А.А., Калиткин Н.Н.* Экономичные методы численного интегрирования задачи Коши для жестких систем ОДУ // *Дифференц. уравнения.* 2019. Т. 55. № 7. С. 907–918.
25. *Пошивайло И.П.* Жесткие и плохо обусловленные нелинейные модели и методы их расчёта: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. М., 2015.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Российский университет дружбы народов,
г. Москва,
Институт прикладной математики
имени М.В. Келдыша РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 17.01.2021 г.
После доработки 27.06.2021 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.

УДК 519.63

БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЙ МЕТОД В РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

© 2022 г. А. С. Ильинский, И. С. Полянский

Рассмотрено применение барицентрического метода для численного решения краевых задач математической физики. Основные предположения состоят в том, что система дифференциальных уравнений в частных производных краевой задачи разрешима в приближении метода Галёркина и граница области анализа является кусочно-линейной. Отличительная особенность барицентрического метода состоит в порядке формирования глобальной системы базисных функций для области анализа через барицентрические координаты. Задаются решения по определению барицентрических координат. Выполнено сравнение скорости сходимости барицентрического метода и сеточных методов при решении некоторых характерных краевых задач математической физики.

DOI: 10.31857/S0374064122060097, EDN: CDJGXU

Введение. Значительная часть исследований различных физических процессов тесно связана с краевыми задачами математической физики, большинство из которых сводится к решению дифференциальных уравнений в частных производных. С учётом универсальности относительно возможного применения к несамосопряжённым системам для решения подобных задач широкое распространение получили проекционные методы – метод Б.Г. Галёркина и его модификации. Первый шаг эффективной вычислительной реализации проекционных методов состоит в формировании набора базисных функций, которые должны удовлетворять граничным условиям и образовывать полную систему. Большинство современных исследований предполагает выбор базисных функций с использованием сеточных схем аппроксимации искомой в области анализа функции или дифференциального оператора. Несомненным достоинством подобного выбора является универсальность численных схем, а недостатком – низкая вычислительная эффективность. Для повышения вычислительной эффективности в работах [1–10] для численного решения различных типов задач электродинамики [1, 11] и частной задачи теории упругости [2] предложен барицентрический метод (БМ), который по своей сути является полуаналитическим методом. Преимущество БМ заключается в формировании глобальной системы базисных функций (без разбиения области анализа на элементарные подобласти). Основное допущение БМ состоит в том, что граница области анализа является кусочно-линейной.

Цель настоящей статьи заключается в расширении применимости барицентрического метода на решение произвольных краевых задач математической физики при исходном предположении разрешимости системы дифференциальных уравнений в частных производных в приближении метода Галёркина.

1. Постановка задачи. Введём обозначения: \mathbb{F} – поле действительных чисел, Ω – ограниченная односвязная область в \mathbb{E}^d , $d \geq 2$. Граница $\partial\Omega$ области Ω представляет собой полиэдральную поверхность, т.е. $\partial\Omega = \bigcup_{p=1}^P B_p$, где B_p – $(d-1)$ -мерный симплекс и любые два симплекса $B_{p'}$ и $B_{p''}$, $p', p'' \in \overline{1, P}$, $p' \neq p''$, правильно расположены [12]. Через $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ обозначим множество вершин этой полиэдральной поверхности, через $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_M\}$ – рёбра ($e_m = \{v_n, v_{n'}\}$, $m = \overline{1, M}$, $v_n \neq v_{n'}$, $n \neq n' \in \overline{1, N}$). Если e_m , B_p содержат вершину v_n , то в ряде случаев будем обозначать их e_m^n , B_p^n . Также обозначим через M_n и P_n число рёбер и симплексов соответственно, которые содержат вершину v_n .

Рассмотрим дифференциальное уравнение (ДУ) в частных производных

$$\mathcal{L}u = F\left(x_1, x_2, \dots, x_d, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^l u}{\partial x_d^l}\right) = f \quad (1)$$

с краевым условием

$$\left[\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \right]_{\partial \Omega} = g, \tag{2}$$

где \mathcal{L} – линейный ограниченный в пространстве функций $C(\Omega)$ дифференциальный оператор, который имеет ограниченный обратный \mathcal{L}^{-1} ; $l \in \mathbb{N}$ определяет порядок (1); $u \in C_{\mathcal{L}}(\Omega)$ – искомая функция в Ω ; $f \in C(\Omega)$ – известная в Ω функция, удовлетворяющая условию Липшица $|f(x) - f(y)| < L^0|x - y|$, $x, y \in \Omega$, L^0 – константа Липшица; $g \in C(\partial \Omega)$ – заданная функция; ν – внешняя нормаль к $\partial \Omega$; $\alpha, \beta \in C(\partial \Omega)$, $\alpha(x) \geq 0$, $\beta(x) \geq 0$, $\alpha(x) + \beta(x) > 0$; $x = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$.

Решение краевой задачи (1), (2) предлагается определять численно в приближении метода Галёркина при разложении по базису [13, с. 279]

$$u^{\mathcal{M}}(x) = \sum_{i=0}^{\mathcal{M}} c_i \psi_i(x) \tag{3}$$

с последующим сведением (1) к системе уравнений относительно неопределённых коэффициентов разложения c_i ($i = \overline{0, \mathcal{M}}$) при выдвигании требования ортогональности невязки $\mathcal{N}(x) = \mathcal{L}[\sum_{i=0}^{\mathcal{M}} c_i \psi_i(x)] - f(x)$ к базисным функциям $\psi_i(x)$ [13, с. 279]:

$$\int_{\Omega} \mathcal{N}(x) \psi_i(x) dx = 0. \tag{4}$$

С учётом введённых представлений и заданной постановке задачи (1), (2) эффективность решения (3) будет существенным образом зависеть от рациональности выбора набора базисных функций $\psi_i(x)$ ($i = \overline{0, \mathcal{M}}$) для Ω , которые удовлетворяют краевому условию (2).

2. Порядок выбора набора базисных функций. Решение проблемы рационального выбора набора базисных функций в методе Галёркина сводится к заданию глобальной [14, с. 98] для Ω полной системы $\psi_i(x) \in C(\Omega)$. Её формирование может быть выполнено [13, с. 294] путём построения для Ω набора $\vec{\zeta} = (\zeta_n)_N$ некоторых функции формы $\zeta_n(x) \in C^1(\Omega)$: $\zeta_n(x) > 0$, $x \in \Omega$. Определение $\zeta_n(x)$ при использовании классических интерполяционных методов (см. работу [15]) в соответствии с теоремой Вейерштрасса [16, с. 100] и её обобщением (теорема Вейерштрасса–Стоуна) позволяет установить полный набор базисных функций.

С учётом построения Ω в \mathbb{E}^d и указанной возможности определения $\psi_i(x)$ через $\zeta_n(x)$, следуя статье [7], введём следующие представления.

Обозначим через $\mathcal{A} = (\mathbb{E}^d, \mathbb{E}^d, +)$ аффинное пространство над полем \mathbb{F} . Заданную область Ω в \mathcal{A} определим в виде $\Omega = \{\sum_{n=1}^N \zeta_n v_n\}$, где ζ_n – барицентрические координаты.

Определение. *Барицентрическими координатами* ζ_n назовём набор $\vec{\zeta} = (\zeta_n)_N$ функции $\zeta_n(x) \in [0, 1]$ ($x \in \Omega$), они удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \Delta \zeta_n(x) &= 0, \quad x \in \text{int } \Omega, \\ \zeta_n(x) &= \frac{|v_{n'} - x|}{|v_{n'} - v_n|}, \quad x, v_{n'} \in e_m^n, \\ \zeta_n(x) &= 0, \quad x \in \partial \Omega \setminus \{B_1^n, \dots, B_{P_n}^n\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Замечание. Данное определение является обобщением стандартного определения барицентрических координат $0 \leq \zeta_n \leq 1$, $\sum_{n=1}^N \zeta_n = 1$ (см. работы [17–19]), в случаях, когда V – точечный базис; Ω – невырожденный симплекс в \mathcal{A} .

Введём множество мультииндексов

$$\mathbb{M}_s = \left\{ i = (i_1, i_2, \dots, i_n, \dots, i_N) : i_n \in \mathbb{Z}_+, \sum_{n \in [1, N]} i_n = s \right\},$$

где $s \in \mathbb{N}$, $\|\mathbb{M}_s\| = \binom{N + s - 1}{N - 1} = \binom{N + s - 1}{s} = \mathcal{M}$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Теорема. Пусть коэффициенты c_i ($i \in \mathbb{M}_s$) разложения (3) удовлетворяют однородной системе уравнений (4), а базисные функции $\psi_i(x)$ определяются по правилу

$$\psi_i(x) = \prod_{n=1}^N \sum_{\tilde{i}=0}^{i_n} [a_{i\tilde{i}}(\zeta_n(x))^{\tilde{i}}], \tag{6}$$

тогда $\psi_i(x)$ формируют полную систему в функциональном пространстве решений задачи (1), (2).

Предполагается, что в выражении (6) $a_{i\tilde{i}}$ – коэффициенты, удовлетворяющие уравнению

$$\int_{\partial\Omega} \left(\alpha \prod_{n=1}^N \sum_{\tilde{i}=0}^{i_n} [a_{i\tilde{i}} \zeta_n^{\tilde{i}}] + \beta \sum_{n'=1}^N \frac{\partial \zeta_{n'}}{\partial \nu} \sum_{\tilde{i}=0}^{i_{n'}} \tilde{i} [a_{i\tilde{i}} \zeta_{n'}^{\tilde{i}-1}] \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq n'}}^N \sum_{\tilde{i}=0}^{i_n} [a_{i\tilde{i}} \zeta_n^{\tilde{i}}] - g \right) dx = 0 \tag{7}$$

и такие, что $\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathbb{M}_s} \sum_{\tilde{i}=0}^{i_n} |a_{i\tilde{i}}| < \infty$.

Доказательство. Полноту системы (6) в функциональном пространстве решений задачи (1), (2) определяет для любого $\varepsilon > 0$ существование такого $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для всех $M \geq M_\varepsilon$ и любого $x \in \Omega$ выполняется условие

$$|u(x) - u^M(x)| < \varepsilon. \tag{8}$$

Из определения оператора \mathcal{L} в (1) и удовлетворения базисными функциями (6) граничных условий (2) при (7), согласно [20], зададим оценку $\|u - u^M\|_C = \sup_{x \in \Omega} |u(x) - u^M(x)|$ правой части неравенства (8) в виде

$$\begin{aligned} \|u - u^M\|_C &= \|\mathcal{L}^{-1}(f - \mathcal{L}u^M)\|_C \leq \|\mathcal{L}^{-1}\|_C \|f - \mathcal{L}u^M\|_C \leq \delta \|f - \mathcal{P}_M f\|_C \leq \\ &\leq \delta(1 + \|\mathcal{P}_M\|_C) \inf_{f^M \in \mathcal{H}^{(M)}} |f - f^M|, \end{aligned} \tag{9}$$

где \mathcal{P}_M – проекционный оператор; $\mathcal{H}^{(M)} \subset \mathcal{H}$; \mathcal{H} – гильбертово пространство; δ – независимая от M константа; $f^M(x) = \sum_{i \in \mathbb{M}_s} f_i \psi_i(x)$ – наилучшее приближение функции $f(x)$ коэффициентами f_i .

Для подтверждения сходимости (9) необходимо доказать полноту системы $\psi_1(x), \dots, \psi_M(x)$. Приняв во внимание приведённое выше определение барицентрических координат $\zeta_n(x)$, которое с учётом соотношения (5) и теоремы о максимуме и минимуме гармонической функции [21, с. 211] обеспечивает для любого $x \in \Omega$ выполнение условий $\zeta_n(x) \in [0, 1]$, $\sum_{n=1}^N \zeta_n(x) = 1$, $x = \sum_{n=1}^N \zeta_n(x) P_n$, неравенство Коши–Буняковского и справедливое для липшицевой функции неравенство $|f(x) - f(y)| < L^0 |x - y|$ ($x, y \in \Omega$) при задании $f_i = f(x^i)$ ($x^i \in \Omega$ – узлы аппроксимации $f^M(x)$), определим оценку

$$\begin{aligned} |f(x) - f^M(x)| &\leq \sum_{i \in \mathbb{M}_s} |f(x) - f_i| \prod_{n=1}^N \sum_{\tilde{i}=0}^{i_n} [a_{i\tilde{i}} |(\zeta_n(x))^{\tilde{i}}|] \leq L^0 \sum_{i \in \mathbb{M}_s} |x - x^i| \prod_{n=1}^N \sum_{\tilde{i}=0}^{i_n} [a_{i\tilde{i}} |(\zeta_n(x))^{\tilde{i}}|] = \\ &= L^0 \sum_{i \in \mathbb{M}_s} \left| \sum_{n=1}^N (\zeta_n(x) - \zeta_n(x^i)) P_n \right| \prod_{n=1}^N \sum_{\tilde{i}=0}^{i_n} [a_{i\tilde{i}} |(\zeta_n(x))^{\tilde{i}}|] \leq \\ &\leq L^0 \frac{1}{2} \max_{n_1, n_2 \in [1, N]} |P_{n_1} - P_{n_2}| \max_{n \in [1, N]} \sum_{i \in \mathbb{M}_s} \sum_{\tilde{i}=0}^{i_n} [a_{i\tilde{i}} |(\zeta_n(x))^{\tilde{i}}|]. \end{aligned}$$

С учётом предположения $\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i \in M_s} \sum_{i=0}^{i_n} |a_{ii}| < \infty$, свойств барицентрических координат и определения Ω окончательно установим справедливость неравенства

$$\lim_{s \rightarrow \infty} |f(x) - f^M(x)| < \infty,$$

из которого следует, что система базисных функций $\psi_i(x)$ полна. Тогда оценка (9) ограничена при $s \rightarrow \infty$ и неравенство (8) выполняется, что и требовалось доказать.

3. Определение барицентрических координат. В общем виде для Ω БК могут быть определены непосредственным решением задачи Дирихле (5) методом Фредгольма при представлений функций ζ_n логарифмическим потенциалом двойного слоя

$$\zeta_n(x) = \int_{\partial\Omega} \Phi_n(y) \frac{\partial \Upsilon(x, y)}{\partial \nu_y} dS_y, \tag{10}$$

где

$$\Upsilon(x, y) = \frac{-\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}} \begin{cases} \ln(|x - y|), & d = 2, \\ |x - y|^{2-d}, & d \geq 3, \end{cases}$$

– функция Грина для оператора Лапласа в \mathbb{E}^d ; ν_y – внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке y ; dS_y – элемент $(d - 1)$ -мерной полиэдральной поверхности $\partial\Omega$; $\Phi_n(y)$ – неизвестная плотность на границе $y \in \partial\Omega$, однозначно определяемая из решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$\Phi_n(x) + \int_{\partial\Omega} \Phi_n(y) \frac{\partial \Upsilon(x, y)}{\partial \nu_y} dS_y = 2\zeta_n(x), \quad x \in \partial\Omega. \tag{11}$$

Другой способ определения БК состоит в нормировке $\zeta_n(x) = \omega_n(x) / \sum_{n=1}^N \omega_n(x)$ весовых функций $\omega_n(x)$, которые задаются как показано в работе [5]:

- 1) проецированием $\hat{x}_n^p \in B_p^n$ точки $x \in \Omega$ на составляющие $\partial\Omega$ элементы $\{B_1^n, \dots, B_{P_n}^n\} \subset \mathcal{B}$;
- 2) проецированием $\{B_1^n, \dots, B_{P_n}^n\}$ на сегменты $\{B_1^n, \dots, B_{P_n}^n\}$ единичной $(d - 1)$ -сферы $\partial\theta_x^0$, ограничивающей единичный шар θ_x^0 при $x \in \theta_x^0$;
- 3) взвешенным определением

$$\omega_n(x) = \sum_{p=1}^{P_n} \hat{\zeta}_n^p(\tilde{x}_p^n) \frac{\langle r_n^p, \nu_n^p \rangle}{|x - \hat{x}_p^n| |r_n^p|}$$

через $\hat{\zeta}_n^p(\tilde{x}_p^n)$ – БК B_p^n точки \tilde{x}_p^n проекции $x \in \Omega$ на B_p^n в направлении внешней нормали r_n^p сегмента B_p^n , ν_n^p – орт внутренней нормали к B_p^n .

Выбор положения $\theta_x^0 \subset \Omega$ выполняется при решении задачи конформного отображения [22, 23] точек v_n на $\partial\theta_x^0$ и x на θ_x^0 при расположении θ_x^0 в Ω для $x \in \theta_x^0$ [3–5]. Отображение может быть квазиконформным, при этом получаемые БК являются псевдогармоническими (см. [3, 4]).

Нахождение БК $\hat{\zeta}_n^p(x)$ для $x \in B_p^n$ выполняется по изложенному выше способу при $(\Omega = B_p^n) \subset \mathbb{E}^{d-1}$ с последующим рекуррентным определением $\hat{\zeta}_n^k(x)$ для $x \in B_k^n$ в \mathbb{E}^{d-2} .

Для приведённого рекуррентного способа определения БК начальные условия задают барицентрические координаты для \mathbb{E}^1 и \mathbb{E}^2 . В случае \mathbb{E}^1 решение является тривиальным. Для \mathbb{E}^2 предполагается задавать БК, рассматривая задачи (10), (11) [7].

Решение интегрального уравнения (11) в \mathbb{E}^2 выполняется для построения Ω на \mathbb{C} при параметризации $\partial\Omega = \bigcup_{n=1}^N \partial\Omega_n$ ($P = M = N$) и вырождении $B_n \rightarrow \partial\Omega_n$ в прямолинейные отрезки:

$$\partial\Omega_n = \{x_n = x_n(t) = e_n t + v_n, \quad t \in [0, 1]\},$$

где $e_n = v_{n+1} - v_n$.

С учётом введённой параметризации $\partial\Omega$ интеграл (10) зададим в виде [7]

$$\zeta_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n'=1}^N \int_0^1 \varphi_{n'}^n(t) \operatorname{Im} \left[\frac{e_{n'}}{e_{n'}t + P_{n'} - x} \right] dt, \tag{12}$$

где функция плотности $\varphi_{n'}^n(t)$ для n -й БК ζ_n на $\partial\Omega_{n'}$ определяется решением интегрального уравнения (11), представленного соотношением [7]

$$\varphi_{n'}^n(t) + \sum_{n''=0}^{N-1} \int_0^1 \varphi_{n''}^n(s) \mathcal{K}_{n'n''}(t, \tau) d\tau = \zeta_{n'}^n(t). \tag{13}$$

В выражении (13)

$$\zeta_{n'}^n(t) = 2 \begin{cases} t, & n' = n - 1, \\ 1 - t, & n' = n, \\ 0, & n' \neq n - 1, \quad n' \neq n, \end{cases}$$

$\mathcal{K}_{n'n''}(t, \tau)$ – ядро интегрального уравнения, определяемое по формуле

$$\mathcal{K}_{n'n''}(t, \tau) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[\frac{e_{n''}}{e_{n'}t + v_{n'} - e_{n''}\tau - v_{n''}} \right], & n' \neq n'', \\ 0, & n' = n''. \end{cases}$$

Решение интегрального уравнения (13) выполняется приближённо-аналитическим методом (см. статью [7]) при разложении ядра:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{n'n''}(t, \tau) &= \sum_{j=0}^{\infty} (2j + 1) \lambda_j^{n'n''}(t) L_j(2\tau - 1), \\ \lambda_j^{n'n''}(t) &= \begin{cases} -\frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \left[Q_j \left(2 \frac{e_{n'}t + v_{n'} - v_{n''}}{e_{n''}} - 1 \right) \right], & n' \neq n'', \\ 0, & n' = n'', \end{cases} \end{aligned} \tag{14}$$

где $L_j(\tau)$ и $Q_j(z)$ – многочлены Лежандра первого и второго рода соответственно [24]:

$$\begin{aligned} L_0(\tau) &= 1, \quad L_1(\tau) = \tau, \quad L_j(\tau) = \frac{2j-1}{j} \tau L_{j-1}(\tau) - \frac{j-1}{j} L_{j-2}(\tau), \\ Q_0(z) &= \operatorname{arcth}(z), \quad Q_1(z) = z \operatorname{arcth}(z) - 1, \\ Q_j(z) &= \frac{2j-1}{j} z Q_{j-1}(z) - \frac{j-1}{j} Q_{j-2}(z), \quad \tau \in [-1, 1], \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Определение ядра $\mathcal{K}_{n'n''}(t, \tau)$ соотношением (14) с учётом (12), (13) позволяет приближённо задать БК в \mathbb{E}^2 выражением (см. [7, 10])

$$\tilde{\zeta}_n^J(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n'=1}^N \sum_{j=0}^J \sqrt{2j+1} \operatorname{Im} \left[Q_j \left(2 \frac{x - v_{n'}}{e_{n'}} - 1 \right) \right] X_{n'j}^n, \tag{15}$$

обладающим экспоненциальной скоростью сходимости [7]:

$$\|\zeta_n(x) - \tilde{\zeta}_n^J(x)\|_{L_2} \leq \frac{\operatorname{const} \times J 2^{-J}}{(2J+1)\sqrt{2J+3}}.$$

Здесь const – не зависящая от J положительная постоянная; $\vec{X}^n = (\mathbf{E} + \mathbf{T})^{-1}\vec{U}^n$ – блочный вектор размера $\tilde{N} = N(J + 1)$, составленный из элементов $X_{n'j}^n$; \mathbf{E} – единичная матрица размера $\tilde{N} \times \tilde{N}$; \vec{U}^n – блочный вектор размера \tilde{N} , составленный из элементов

$$U_{n'j}^n = \begin{cases} 1, & (n = n' \vee n = n' - 1) \wedge j = 0, \\ -1/3, & n = n' \wedge j = 1, \\ 1/3, & n = n' - 1 \wedge j = 1, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

\mathbf{T} – блочная матрица размера $\tilde{N} \times \tilde{N}$, состоящая из элементов

$$T_{jj'}^{nn'} = \frac{-1}{\pi} \int_{-1}^1 \text{Im} \left[Q_{j'} \left(\frac{e_n}{e_{n'}} \tau + \frac{e_n + 2(v_n - v_{n'})}{e_{n'}} - 1 \right) \right] L_j(\tau) d\tau. \tag{16}$$

Интеграл (16) может быть вычислен аналитически по правилам, представленным в [7, 10], или численно по квадратурному методу Гаусса–Лежандра с адаптивным выбором числа \mathcal{J} узлов интегрирования в зависимости от порядков многочленов j и j' при определении погрешности $\rho_{\mathcal{J}}$ аппроксимации [25, с. 15]:

$$\rho_{\mathcal{J}} \leq \frac{2^{2\mathcal{J}+1}(\mathcal{J}!)^4}{(2\mathcal{J} + 1)[(2\mathcal{J})!]^3} \left\| \text{Im} \left[Q_{j'}^{(2\mathcal{J})} \left(\frac{e_n}{e_{n'}} \tau + \frac{e_n + 2(v_n - v_{n'})}{e_{n'}} - 1 \right) \right] L_j(\tau) + \right. \\ \left. + \text{Im} \left[Q_{j'} \left(\frac{e_n}{e_{n'}} \tau + \frac{e_n + 2(v_n - v_{n'})}{e_{n'}} - 1 \right) \right] L_j^{(2\mathcal{J})}(\tau) \right\|_{C[0,1]},$$

где $Q_{j'}^{(l)}(z) = \frac{\partial^l Q_{j'}(z)}{\partial z^l}$, $L_j^{(l)}(z) = \frac{\partial^l L_j(z)}{\partial z^l}$.

4. Тестовые примеры и оценка точности метода. С целью определения предпочтительности барицентрического метода рассмотрим сравнительное с сеточными методами применение БМ к решению некоторых характерных краевых задач математической физики типа (1), (2) для $\Omega \subset \mathbb{E}^2$ с возрастающей степенью сложности. При этом для расширения области применимости метода в направлении решения уравнений с гладкими операторами также рассмотрим его реализацию в методе Ньютона–Канторовича [26, с. 136] при условии, что \mathcal{L} – дифференцируемый по Фреше нелинейный оператор, относительно которого линейный оператор \mathcal{L}' имеет ограниченный обратный. Зададим Ω вогнутым шестиугольником с координатами вершин на \mathbb{C} : $v_1 = -1.3 - 0.65i$, $v_2 = 0.2 - i$, $v_3 = 1.4 - 0.6i$, $v_4 = 0.35 - 0.1i$, $v_5 = 1.4 + 1.3i$, $v_6 = -0.5 + 0.75i$, здесь $i = \sqrt{-1}$. Группу примеров дифференциальных уравнений в частных производных составим из:

1) линейного ДУ второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + a^0 u = f_1;$$

2) линейного ДУ второго порядка

$$x_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - x_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + a^0 u = f_2;$$

3) нелинейного ДУ второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} - a^0 u \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f_1;$$

4) бигармонического ДУ

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} + a^0 u = f_1.$$

В рассматриваемых уравнениях $a^0 = 0.1$ – постоянный коэффициент,

$$f_1(x_1, x_2) = 0.25(x^2 + y^2), \quad f_2(x_1, x_2) = \sin(\pi(x^2 + y^2)).$$

Граничные условия (2) для примеров 1–4 определим вариантами:

а) $[\partial u / \partial \nu]_{\partial \Omega} = 0$;

б) $[u]_{\partial \Omega} = 0$.

С учётом свойств БК в качестве $\psi_i(x)$ для удовлетворения вариантам граничных условий а) выберем многочлены Лагранжевого типа:

$$\psi_i(x) = \prod_{n=1}^N \frac{1}{i_n!} \prod_{\tilde{i}=0}^{i_n-1} (s\zeta_n(x) - \tilde{i}) = \frac{\Gamma(sx + 1)}{i_n! \Gamma(sx + 1 - i_n)}, \tag{17}$$

для варианта б) выберем многочлены типа полиномов Лежандра:

$$\psi_i(x) = \prod_{n=1}^N \left[\frac{L_{i_n+1}(2\zeta_n(x) - 1) - L_{i_n-1}(2\zeta_n(x) - 1)}{2i_n + 1} \right]. \tag{18}$$

Пример 1. Симметричный оператор $\mathcal{L}u$ задачи (1) при подстановке аппроксимации (3) в ДУ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + a^0 u = f$$

с учётом формулы Остроградского–Гаусса позволяет определить невязку (4) в слабой форме гладкости:

$$\sum_{i' \in \mathbb{M}_s} c_{i'} \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_{i'}}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_{i'}}{\partial x_2} dx + a^0 \sum_{i' \in \mathbb{M}_s} c_{i'} \int_{\Omega} \psi_i \psi_{i'} dx = \int_{\Omega} f_1 \psi_i dx. \tag{19}$$

Обозначив

$$\vec{C} = (c_i)_{\mathcal{M}}, \quad \tilde{\mathbf{W}} = (\tilde{W}_{ii'})_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}}, \quad \tilde{W}_{ii'} = \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_{i'}}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_{i'}}{\partial x_2} dx,$$

$$\mathbf{W} = (W_{ii'})_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}}, \quad W_{ii'} = \int_{\Omega} \psi_i \psi_{i'} dx, \quad \vec{F} = (F_i)_{\mathcal{M}}, \quad F_i = \int_{\Omega} f_1 \psi_i dx$$

при представлении (19) в матричной форме, определим коэффициенты (3) соотношением

$$\vec{C} = (\tilde{\mathbf{W}} + a^0 \mathbf{W})^{-1} \vec{F}. \tag{20}$$

При формировании элементов матриц \mathbf{W} , $\tilde{\mathbf{W}}$ интегралы по Ω вычисляются численно, а частные производные базисной функции ψ_i по переменным x_1, x_2 с учётом (15), (17), (18) задаются выражениями

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x_{1,2}} = \sum_{n=1}^N \frac{\partial \psi_i}{\partial \zeta_n} \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_{1,2}},$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_{1,2}} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n'=1}^N \sum_{j=0}^J \sqrt{2j+1} \operatorname{Im} \left[\frac{\partial}{\partial x_{1,2}} \left(Q_j \left(2 \frac{x-v_{n'}}{e_{n'}} - 1 \right) \right) \right] X_{n'j}^n, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(Q_j \left(2 \frac{x-v_{n'}}{e_{n'}} - 1 \right) \right) &= -4 \frac{1}{e_{n'}} Q_j' \left(2 \frac{x-v_{n'}}{e_{n'}} - 1 \right), \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(Q_j \left(2 \frac{x-v_{n'}}{e_{n'}} - 1 \right) \right) &= -4 \frac{\sqrt{-1}}{e_{n'}} Q_j' \left(2 \frac{x-v_{n'}}{e_{n'}} - 1 \right), \end{aligned}$$

а $\partial\psi_i/\partial\zeta_n$ для (17), (18) задаётся соответствующими соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_i}{\partial \zeta_n} &= \frac{s\Gamma(sx+1)[\Psi(sx+1) - \Psi(sx+1-i_n)]}{i_n! \Gamma(sx+1-i_n)}, \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial \zeta_n} &= 2L_{i_n}(\zeta_n) \prod_{\substack{n'=1 \\ n \neq n'}}^N \left[\frac{L_{i_{n'}+1}(2\zeta_{n'}-1) - L_{i_{n'}-1}(2\zeta_{n'}-1)}{2i_{n'}+1} \right], \end{aligned}$$

$\Psi(x)$ – дигамма-функция.

Пример 2. Подставив аппроксимацию (3) в ДУ

$$x_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - x_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + a^0 u = f_2,$$

определим невязку (4) в виде

$$\sum_{i' \in \mathbb{M}_s} c_{i'} \int_{\Omega} \psi_i \left(x_2^2 \frac{\partial^2 \psi_{i'}}{\partial x_1^2} - x_1 \frac{\partial^2 \psi_{i'}}{\partial x_2^2} \right) dx + a^0 \sum_{i' \in \mathbb{M}_s} c_{i'} \int_{\Omega} \psi_i \psi_{i'} dx = \int_{\Omega} f_2 \psi_i dx. \quad (21)$$

Обозначив

$$\begin{aligned} \vec{C} &= (c_i)_{\mathcal{M}}, \quad \tilde{\mathbf{W}} = (\tilde{W}_{ii'})_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}}, \quad \tilde{W}_{ii'} = \int_{\Omega} \psi_i \left(x_2^2 \frac{\partial^2 \psi_{i'}}{\partial x_1^2} - x_1 \frac{\partial^2 \psi_{i'}}{\partial x_2^2} \right) dx, \\ \mathbf{W} &= (W_{ii'})_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}}, \quad W_{ii'} = \int_{\Omega} \psi_i \psi_{i'} dx, \quad \vec{F} = (F_i)_{\mathcal{M}}, \quad F_i = \int_{\Omega} f_2 \psi_i dx \end{aligned}$$

при представлении (21) в матричной форме, определим коэффициенты (3) аналогичным (20) соотношением.

При вычислении элементов матрицы $\tilde{\mathbf{W}}$ частные производные второго порядка базисной функции ψ_i по x_1, x_2 с учётом (15), (17), (18) определяются выражениями

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_{1,2}^2} = \sum_{n=1}^N \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial \zeta_n} \frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial x_{1,2}^2} + \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_{1,2}} \sum_{n'=1}^N \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \zeta_n \partial \zeta_{n'}} \frac{\partial \zeta_{n'}}{\partial x_{1,2}} \right],$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial x_1^2} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n'=1}^N \sum_{j=0}^J \sqrt{2j+1} \operatorname{Im} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(Q_j \left(2 \frac{x-v_{n'}}{e_{n'}} - 1 \right) \right) \right] X_{n'j}^n, \\ \frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial x_2^2} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n'=1}^N \sum_{j=0}^J \sqrt{2j+1} \operatorname{Re} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(Q_j \left(2 \frac{x-v_{n'}}{e_{n'}} - 1 \right) \right) \right] X_{n'j}^n, \end{aligned}$$

а $\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \zeta_n \partial \zeta_{n'}}$ для (15), (16) задаётся соответствующими соотношениями

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \zeta_n \partial \zeta_{n'}} = \frac{s^2 \Gamma(sx + 1)}{i_n! \Gamma(sx + 1 - i_n)} [(\Psi(sx + 1) - \Psi(sx + 1 - i_n))^2 + \Psi^{(1)}(sx + 1) - \Psi^{(1)}(sx + 1 - i_n)],$$

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \zeta_n \partial \zeta_{n'}} = \prod_{\substack{n''=1 \\ n \neq n'' \\ n' \neq n''}}^N \left[\frac{L_{i_{n''}+1}(2\zeta_{n''} - 1) - L_{i_{n''}-1}(2\zeta_{n''} - 1)}{2i_{n''} + 1} \right] \times$$

$$\times \begin{cases} 4L_{i_n}(2\zeta_n - 1)L_{i_{n'}}(2\zeta_{n'} - 1), & \text{если } n \neq n', \\ \frac{i_n}{\zeta_n - \zeta_n^2}(L_{i_{n-1}}(2\zeta_n - 1) - (2\zeta_n - 1)L_{i_n}(2\zeta_n - 1)), & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$\Psi^{(1)}$ – полигамма-функция первого порядка (тригамма-функция).

Пример 3. Подставив аппроксимацию (3) в ДУ

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} - a^0 u \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f_1,$$

определим невязку (4) в виде

$$\sum_{i' \in \mathbb{M}_s} c_{i'} \int_{\Omega} \psi_i \left(\frac{\partial \psi_{i'}}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 \psi_{i'}}{\partial x_2^2} \right) dx - a^0 \sum_{i'' \in \mathbb{M}_s} \sum_{i' \in \mathbb{M}_s} c_{i''} c_{i'} \int_{\Omega} \psi_i \psi_{i''} \frac{\partial \psi_{i'}}{\partial x_2} dx = \int_{\Omega} f_1 \psi_i dx. \tag{22}$$

Обозначив

$$\vec{C} = (c_i)_{\mathcal{M}}, \quad \tilde{\mathbf{W}} = (\tilde{W}_{ii'})_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}}, \quad \tilde{W}_{ii'} = \int_{\Omega} \psi_i \left(\frac{\partial \psi_{i'}}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 \psi_{i'}}{\partial x_2^2} \right) dx,$$

$$\mathbf{W}^{i''} = (W_{ii''}^{i''})_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}}, \quad W_{ii''}^{i''} = \int_{\Omega} \psi_i \psi_{i''} \frac{\partial \psi_{i'}}{\partial x_2} dx, \quad \vec{F} = (F_i)_{\mathcal{M}}, \quad F_i = \int_{\Omega} f_1 \psi_i dx$$

при представлении (22) в матричной форме, определим коэффициенты (3) методом Ньютона–Канторовича [26, с. 136] при итерационном решении

$$\vec{C}^{[k+1]} = \vec{C}^{[k]} - (\mathbf{H}^{[k]})^{-1} \left[\tilde{\mathbf{W}} \vec{C}^{[k]} - a^0 \sum_{i'' \in \mathbb{M}_s} c_{i''}^{[k]} \mathbf{W}^{i''} \vec{C}^{[k]} - \vec{F} \right],$$

где $\vec{C}^{[k]} = (c_i^k)_{\mathcal{M}}$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{H}^{[k]} = (H_{ii'}^k)_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}}$,

$$H_{ii'}^k = \tilde{W}_{ii'} - \sum_{i'' \in \mathbb{M}_s} c_{i''}^k W_{ii''}^{i''} + \begin{cases} \sum_{i \in \mathbb{M}_s} c_i^k W_{ii}^{i''}, & \text{если } i'' = i, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

начальное приближение при $k = 1$ определяется соотношением $\vec{C}^1 = (\tilde{\mathbf{W}} - a^0 \hat{\mathbf{W}})^{-1} \vec{F}$ для

$$\hat{\mathbf{W}} = (\hat{W}_{ii'})_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}}, \quad \hat{W}_{ii'} = \int_{\Omega} \psi_i \frac{\partial \psi_{i'}}{\partial x_2} dx.$$

Пример 4. Симметричный оператор $\mathcal{L}u$ задачи 4 при подстановке аппроксимации (3) в ДУ

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} + a^0 u = f_1$$

позволяет определить невязку (4) в слабой форме гладкости:

$$\begin{aligned} \sum_{i' \in \mathbb{M}_s} c_{i'} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \psi_{i'}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \psi_{i'}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \psi_{i'}}{\partial x_2^2} dx + \\ + a^0 \sum_{i' \in \mathbb{M}_s} c_{i'} \int_{\Omega} \psi_i \psi_{i'} dx = \int_{\Omega} f_1 \psi_i dx. \end{aligned} \tag{23}$$

Обозначив

$$\vec{C} = (c_i)_{\mathcal{M}}, \quad \tilde{\mathbf{W}} = (\tilde{W}_{ii'})_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}}, \quad \tilde{W}_{ii'} = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \psi_{i'}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \psi_{i'}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \psi_{i'}}{\partial x_2^2} dx,$$

$$\mathbf{W} = (W_{ii'})_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}}, \quad W_{ii'} = \int_{\Omega} \psi_i \psi_{i'} dx, \quad \vec{F} = (F_i)_{\mathcal{M}}, \quad F_i = \int_{\Omega} f_1 \psi_i dx$$

при представлении (22) в матричной форме, определим коэффициенты (3) аналогичным (20) соотношением.

В указанных примерах частные производные первого и второго порядков для БК ζ_n определяются через производные по многочленам Лежандра второго рода, которые при рекуррентном обозначении

$$Q_j^{(0)}(z) = Q_j(z), \quad Q_j^{(l)}(z) = \frac{dQ_j^{(l-1)}(z)}{dz}$$

могут быть определены непосредственным дифференцированием и индукцией по l для $j \in \{0, 1\}$:

$$Q_0^{(l)}(z) = \frac{(-1)^l l!}{2l} \left[\frac{1}{(z-1)^l} - \frac{1}{(z+1)^l} \right],$$

$$Q_1^{(l)}(z) = \begin{cases} \frac{z}{1-z^2} + \operatorname{arcth}(z), & l = 1, \\ \frac{(-1)^l l!}{2l(l-1)} \left[\frac{l+z}{(z+1)^l} + \frac{l-z}{(z-1)^l} \right], & l > 1, \end{cases}$$

и обобщением для $j \in \mathbb{N}$:

$$Q_j^{(l)}(z) = \frac{(2j-1)zQ_{j-1}^{(l)}(z) - (j-1+l)Q_{j-2}^{(l)}(z)}{j-l}.$$

Сравнительные результаты оценки скорости сходимости барицентрического метода и метода конечных элементов (МКЭ) для вариантов а) и б) приведены в таблице.

На этапах формирования расчётных сеток для численного интегрирования в БМ применялись решения (см. [27]) с программной реализацией алгоритма генерации адаптивной неструктурированной сетки из библиотеки Ani2D. Для решения ДУ в частных производных МКЭ использовалось программное обеспечение FreeFem++v3.61-1-win64. Апостериорная оценка скорости сходимости вычислялась с использованием неравенств типа (9) при определении нормы в $L_2(\Omega)$.

Таблица. Результаты оценки сходимости

| M | МКЭ | | БМ | |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | а) | б) | а) | б) |
| <i>Пример 1</i> | | | | |
| 4 | 0.030005 | 0.225204 | 0.097861 | 0.240479 |
| 10 | 0.012048 | 0.219874 | 0.020587 | 0.13862 |
| 20 | 0.007277 | 0.205374 | 0.002131 | 0.079493 |
| 35 | 0.003588 | 0.186133 | 0.0007 | 0.041673 |
| 56 | 0.002271 | 0.174849 | 0.000085 | 0.023849 |
| <i>Пример 2</i> | | | | |
| 4 | 0.535657 | 0.901163 | 0.831472 | 1.062828 |
| 10 | 0.440127 | 0.76477 | 0.450632 | 0.544063 |
| 20 | 0.243675 | 0.642444 | 0.148648 | 0.197396 |
| 35 | 0.095659 | 0.624934 | 0.036305 | 0.069926 |
| 56 | 0.082526 | 0.544636 | 0.005211 | 0.028436 |
| <i>Пример 3</i> | | | | |
| 4 | 0.454646 | 0.823735 | 0.281374 | 0.961592 |
| 10 | 0.386519 | 0.746559 | 0.028806 | 0.49224 |
| 20 | 0.247586 | 0.62136 | 0.003795 | 0.178594 |
| 35 | 0.16764 | 0.534667 | 0.000861 | 0.061265 |
| 56 | 0.114395 | 0.372022 | 0.000208 | 0.026728 |
| <i>Пример 4</i> | | | | |
| 4 | 0.345262 | 0.91015 | 0.294567 | 1.075723 |
| 10 | 0.120197 | 0.901707 | 0.0352986 | 0.619888 |
| 20 | 0.0644248 | 0.896582 | 0.004955 | 0.2747493 |
| 35 | 0.0303 | 0.8383921 | 0.001206 | 0.10643 |
| 56 | 0.014358 | 0.746785 | 0.000322 | 0.045374 |

Заключение. Полученные результаты свидетельствуют о предпочтительном применении по отношению к сеточным методам барицентрического метода в решении краевых задач математической физики. При одинаковом порядке аппроксимации M БМ позволяет существенно (в среднем от 2,5 до 5 раз) повысить точность численного решения. Относительный выигрыш возрастает с увеличением l – порядка ДУ в частных производных (1). Последующее развитие барицентрического метода в направлении повышения вычислительной эффективности состоит в решении задачи рационального выбора коэффициентов интерполяции базисных функций вида (6) при учёте граничных условий и особенностей представления известной функции f . Основная сложность БМ заключается в определении гармонических барицентрических координат для $\Omega \subset \mathbb{E}^d$ при $d > 2$. Авторы статьи надеются, что представление БМ и сформулированные направления модификации вызовут интерес читателей и приведут к развитию барицентрического метода как эффективного дополнения сеточных методов в решении краевых задач математической физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полянский И.С. Барицентрический метод в вычислительной электродинамике. Орёл, 2017.
2. Полянский И.С. Барицентрический метод в задаче оптимального управления формой отражающей поверхности зеркальной антенны // Мат. моделирование. 2017. Т. 29. № 11. С. 140–150.
3. Полянский И.С. Барицентрические координаты Пуассона для многомерной аппроксимации скалярного потенциала внутри произвольной области (Часть 1) // Вестн. Саратовского гос. тех. ун-та. 2015. Т. 78. № 1. С. 30–36.

4. Полянский И.С. Бариеентрические координаты Пуассона для многомерной аппроксимации скалярного потенциала внутри произвольной области (Часть 2) // Вестн. Саратовского гос. тех. ун-та. 2015. Т. 78. № 1. С. 36–42.
5. Полянский И.С. Бариеентрические координаты Пуассона–Римана // Информатика и автоматизация. 2016. Т. 49. № 6. С. 32–48.
6. Полянский И.С., Пехов Ю.С. Бариеентрический метод в решении сингулярных интегральных уравнений электродинамической теории зеркальных антенн // Информатика и автоматизация. 2017. Т. 54. № 5. С. 244–262.
7. Ильинский А.С., Полянский И.С. Приближённый метод определения гармонических бариеентрических координат для произвольных многоугольников // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2019. Т. 59. № 3. С. 38–55.
8. Архипов Н.С., Полянский И.С., Степанов Д.Е. Бариеентрический метод в задачах анализа поля в регулярном волноводе с произвольным поперечным сечением // Антенны. 2015. Т. 212. № 1. С. 32–40.
9. Полянский И.С. Векторный бариеентрический метод в вычислительной электродинамике // Информатика и автоматизация. 2017. Т. 51. № 2. С. 206–222.
10. Полянский И.С. О применении бариеентрического метода в численном решении внутренней задачи электродинамики // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2018. Т. 21. № 3. С. 36–42.
11. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М., 1996.
12. Понтрягин Л.С. Основы комбинаторной топологии. М., 1986.
13. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближённые методы высшего анализа. М., 1950.
14. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина. М., 1988.
15. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. М., 1954.
16. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.
17. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. М., 1986.
18. Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс. М., 1987.
19. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности. М., 1973.
20. Даугавет И.К. Теория приближённых методов. Линейные уравнения. СПб., 2006.
21. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. М., 1980.
22. Радыгин В.М., Полянский И.С. Модифицированный метод последовательных конформных отображений наперед заданных многоугольных областей // Вестн. Томского гос. ун-та. Математика и механика. 2016. Т. 39. № 1. С. 25–35.
23. Радыгин В.М., Полянский И.С. Методы конформных отображений многогранников в \mathbb{R}^3 // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. № 1. С. 60–68.
24. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция, функция Лежандра. М., 1965.
25. Михлин С.Г. Погрешности вычислительных процессов. Тбилиси, 1983.
26. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрёйко П.П., Рутвицкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. М., 1969.
27. Василевский Ю.В., Данилов А.А., Липников К.Н., Чугунов В.Н. Автоматизированные технологии построения неструктурированных расчётных сеток. М., 2016.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Академия Федеральной службы охраны
Российской Федерации, г. Орёл

Поступила в редакцию 26.09.2019 г.
После доработки 26.03.2020 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.

УДК 517.925.42

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ ЯКОБИАНА В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ И ГЛОБАЛЬНЫЕ ИЗОХРОННЫЕ ЦЕНТРЫ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

© 2022 г. В. В. Амелькин

Доказано, что с точностью до невырожденного линейного преобразования вещественная гамильтонова система $\dot{x} = -y - P(x)$, $\dot{y} = x + (y + P(x))P'(x)$, где $P(x)$ – произвольный полином степени $k \geq 2$, является единственной среди вещественных полиномиальных гамильтоновых систем общего вида $\dot{x} = -y - P(x, y)$, $\dot{y} = x + Q(x, y)$, $P'_x(x, y) \equiv Q'_y(x, y)$, где полиномы $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ не содержат свободных и линейных членов, которая имеет в особой точке $O(0, 0)$ изохронный глобальный центр. Полученный результат даёт отрицательный ответ на вопрос, поставленный М. Сабатини: существуют ли полиномиальные гамильтоновы дифференциальные системы с парой Якоби, имеющие изохронные неглобальные центры? На основе этих двух утверждений доказано, что гипотеза якобиана верна в двумерном случае. Именно, все невырожденные полиномиальные отображения $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ с постоянным якобианом исчерпываются отображениями, представимыми конечным числом композиций линейных преобразований и пар Якоби вида $(x, y + P(x))$, где $P(x)$ – произвольный многочлен степени не меньшей двух.

DOI: 10.31857/S0374064122060103, EDN: CDPPMQ

Введение. Основные понятия, определения. Следующая гипотеза, называемая гипотезой якобиана, сформулирована в 1939 г. О.Н. Келлером [1]: *каждое полиномиальное отображение $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ с не обращающимся в нуль постоянным определителем Якоби является глобально обратимым и имеет полиномиальное обратное отображение.*

Эта гипотеза первоначально была сформулирована для комплексных отображений. Но как отмечено, например, в работах [2, 3], решение указанной гипотезы равносильно её решению или в \mathbb{R}^n , или в \mathbb{C}^n .

Не останавливаясь на обзоре частных результатов, связанных с этой гипотезой, отметим работу [4] (и приведённую в ней библиографию), касающуюся вещественного двумерного случая.

Напомним, в частности, что пара $(f(x, y), g(x, y))$ вещественных полиномов таких, что $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$, а определитель их матрицы Якоби является ненулевой константой, называется *парой Якоби*.

Рассмотрим вещественную двумерную автономную дифференциальную систему

$$\dot{x} = -y - P(x, y), \quad \dot{y} = x + Q(x, y), \quad (1)$$

где P и Q – голоморфные в некоторой окрестности точки $O(0, 0)$ функции, не содержащие в своих разложениях в степенные ряды по переменным x и y свободных и линейных членов.

Как известно, особая точка $O(0, 0)$ системы (1) является либо центром, либо негрубым фокусом. Будем считать, что точка $O(0, 0)$ системы (1) является центром. *Областью центра* (обозначают N_0) называют максимальное инвариантное открытое связное множество, состоящее из циклов, окружающих особую точку $O(0, 0)$ системы (1). Говорят, что центр $O(0, 0)$ системы (1) является *глобальным*, если $N_0 = \mathbb{R}^2$, т.е. если каждое решение системы (1) является периодическим.

Напомним также, что центр $O(0, 0)$ системы (1) называется *изохронным*, если период обхода изображающей точкой каждого цикла из области этого центра равен 2π .

Пусть далее y^+ и y^- – соответственно положительная и отрицательная полуоси оси Oy прямоугольной декартовой системы координат Oxy . Изохронный центр $O(0, 0)$ системы (1)

называется *сильно изохронным*, если, дополнительно, изображающая точка, выходящая из точки полуоси y^+ , пересечёт полуось y^- в первый раз через время π .

В работе [4] (см. также [5]) указано на связь изохронных центров полиномиальных систем вида (1) с гипотезой якобиана в двумерном случае и приведён класс полиномиальных систем с глобальными изохронными центрами. Таким классом являются гамильтоновы системы вида

$$\dot{x} = -y - P(x), \quad \dot{y} = x + (y + P(x))P'(x), \tag{2}$$

где $P(x)$ – произвольный полином степени $k \geq 2$.

Замечание. Заметим, что класс систем вида (2) ранее получен в работах [6, 7].

Отметим и один из основных результатов, касающихся проблемы изохронности центра, который состоит в следующем (см., например, [8, теорема 2]): *для того чтобы система (1) имела в особой точке $O(0, 0)$ изохронный центр, необходимо и достаточно существование голоморфного в окрестности точки $x = y = 0$ преобразования*

$$u = x + \sum_{i+j=2}^{\infty} \alpha_{ij}x^i y^j = x + \alpha(x, y), \quad v = y + \sum_{i+j=2}^{\infty} \beta_{ij}x^i y^j = y + \beta(x, y), \tag{3}$$

приводящего систему (1) к виду

$$\dot{u} = -v, \quad \dot{v} = u. \tag{4}$$

Приведём и используемое ниже такое утверждение [9, теорема 2]: *для того чтобы система (1) имела в особой точке $O(0, 0)$ изохронный центр и была гамильтоновой системой, необходимо и достаточно, чтобы существовали функции вида (3) такие, что справедливы тождества*

$$y + P(x, y) \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (u^2 + v^2), \quad x + Q(x, y) \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2)$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \equiv 1. \tag{5}$$

Наконец, сформулируем ещё одно утверждение [4, теорема 2.3], на которое будем ссылаться в дальнейшем: *пусть Φ – полиномиальное отображение с не обращающимся в нуль определителем Якоби такое, что $\Phi(0, 0) = (0, 0)$. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

(i) *особая точка $O(0, 0)$ является глобальным центром для гамильтоновой дифференциальной системы (1'), т.е. системы (1) с условием $P'_x(x, y) \equiv Q'_y(x, y)$;*

(ii) *отображение Φ является глобальным диффеоморфизмом плоскости \mathbb{R}^2 на себя.*

Основные результаты. Адаптируя отмеченные выше утверждения из работ [8, 9] к полиномиальному случаю, докажем, что верна следующая

Теорема 1. *Для того чтобы полиномиальная система (1') имела в особой точке $O(0, 0)$ глобальный изохронный центр, необходимо и достаточно, чтобы она с точностью до невырожденного линейного преобразования имела вид (2).*

Доказательство. Необходимость. Пусть с точностью до невырожденного линейного преобразования полиномиальная система (1') имеет в особой точке $O(0, 0)$ глобальный изохронный центр. Тогда, считая, что в формулах (3) голоморфные функции α и β определяются степенными рядами с сопряжёнными радиусами сходимости $r_1 = r_2 = +\infty$ (т.е. рассматривая случай общего положения) и имея в виду систему (4), получаем такие соотношения:

$$\begin{aligned} (y + P(x, y)) \frac{\partial u}{\partial x} - (x + Q(x, y)) \frac{\partial u}{\partial y} &= v, \\ - (y + P(x, y)) \frac{\partial v}{\partial x} + (x + Q(x, y)) \frac{\partial v}{\partial y} &= u, \end{aligned} \tag{6}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – произвольные полиномы степени $k \geq 2$.

Из тождеств (6) следует, что

$$\begin{aligned} y + P(x, y) &= \frac{(x + Q(x, y))u'_y + v}{u'_x} \equiv \frac{(x + Q(x, y))\alpha'_y(x, y) + (y + \beta(x, y))}{1 + \alpha'_x(x, y)}, \\ x + Q(x, y) &= \frac{(y + P(x, y))v'_x + u}{v'_y} \equiv \frac{(y + P(x, y))\beta'_x(x, y) + (x + \alpha(x, y))}{1 + \beta'_y(x, y)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – полиномы, то

$$u = x + \alpha(y), \quad v = y + \beta(x). \quad (8)$$

Но из представлений (7) и (8) вытекают равенства

$$u = x, \quad v = y + \beta(x), \quad (9)$$

где $\beta(x)$ – полином. Соотношения (9) означают, что выполняется тождество (5), а

$$(y + P(x, y)) \equiv (y + \beta(x)), \quad x + Q(x, y) \equiv x + (y + P(x))P'(x),$$

т.е. получаем правые части системы (2).

Отметим, в частности, что система (2) всегда имеет нечётную степень $2k - 1$.

Достаточность. Пусть с точностью до невырожденного линейного преобразования полиномиальная система (1') имеет вид (2). Отображение $u = x$, $v = y + P(x)$, где $P(x)$ – произвольный полином степени $k \geq 2$, имеет определитель Якоби, тождественно равный единице, и определяет биголоморфизм плоскости на себя. При этом, как показано, например, в [4], любое решение соответствующей системы (2), отличное от тривиального, является 2π -периодическим решением, а значит, рассматриваемая система имеет глобальный изохронный центр. Теорема доказана.

Далее, приведём уже ставшие очевидными такие утверждения:

- 1) пара Якоби $(x, y + P(x))$ является полиномиальным автоморфизмом плоскости \mathbb{R}^2 , где соответствующая система Гамильтона – это система (2);
- 2) гамильтониан системы (2) имеет вид

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + (y + P(x))^2)$$

(в этом случае говорят, что центр $O(0, 0)$ системы (2) является тривиальным);

- 3) дифференцирование по t первого уравнения системы (2) в силу самой системы приводит к линейному дифференциальному уравнению второго порядка $\ddot{x} + x = 0$, а значит, как это следует, например, из работы [10], система (2) имеет в особой точке $O(0, 0)$ сильно изохронный центр.

Теорема 1 и приведённые утверждения позволяют сделать следующие выводы.

Теорема 2. С точностью до невырожденного линейного преобразования система (2) является единственной среди полиномиальных систем вида (1'), имеющей в особой точке $O(0, 0)$ глобальный изохронный центр, который оказывается глобальным сильно изохронным центром.

Из теорем 1 и 2, утверждения 1) настоящей работы и теоремы 2.3 работы [4], сформулированной выше, следует, что гипотеза якобиана в двумерном случае равносильна уже доказанному факту, что система (2) с точностью до невырожденного линейного преобразования является единственной среди полиномиальных систем вида (1'), которая имеет в особой точке $O(0, 0)$ глобальный изохронный (глобальный сильно изохронный) центр.

Таким образом, имеет место следующий принципиальный результат.

Теорема 3. Гипотеза якобиана верна в двумерном случае. Все невырожденные полиномиальные отображения $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ с постоянным якобианом исчерпываются отображениями, представимыми конечным числом композиций линейных преобразований и пар Якоби вида $(x, y + P(x))$, где $P(x)$ – произвольный многочлен степени не меньшей двух.

Отметим, что указанная в теореме 3 пара Якоби использовалась и при решении другой гипотезы (см. работу [11]) из теории полиномиальных изохронных (сильно изохронных) центров систем Лъенара

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x + A(x) - yB(x), \quad (10)$$

исследуемых во всей фазовой плоскости (т.е. глобально). Следует, однако, отметить, что область единственного изохронного (сильно изохронного) центра $O(0, 0)$ систем Лъенара (10), будучи областью неограниченной, глобальной не является.

Указанная пара Якоби использовалась автором и в работе [12] при исследовании изохронных (сильно изохронных) фокусов систем Лъенара (10).

В заключение рассмотрим гамильтонову систему [5]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - x^2 - 3x^2y - x^4 - 3x^4y - x^6y, \\ \dot{y} &= x + 2xy + 3xy^2 + 4x^3y + 6x^3y^2 + 3x^5y^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Эта система линеаризуется локальной голоморфной в окрестности особой точки $O(0, 0)$ заменой

$$u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad v = \frac{x^2 + (1+x^2)^2}{\sqrt{1+x^2}}y. \quad (12)$$

Особо подчеркнём, что якобиан J матрицы Якоби преобразования (12) единичный, т.е. $J = u'_x v'_y - u'_y v'_x \equiv 1$. Приведённая система (11) имеет неглобальный нетривиальный изохронный центр $O(0, 0)$. Гамильтонианом системы (11) является

$$H(x, y) = \frac{x^2}{2} + x^2(1+x^2)y + \frac{1}{2}(1+x^2)^3y^2,$$

а линия уровня $H(x, y) = 1/2$ представляет собой неограниченную кривую.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Keller O.H. Ganze Cremona-Transformationen // Monats. Math. Physik. 1939. V. 47. P. 299–306.
2. Chavarriga J.A., Sabatini M. A survey of isochronous centers // Qual. Th. Dynam. Systems. 1999. V. 1. № 1. P. 1–70.
3. Bass H., Connell E.H., Wright D. The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 7. P. 287–330.
4. Sabatini M. A connection between isochronous Hamiltonian centres and the Jacobian Conjecture // Nonl. Anal. 1998. V. 34. P. 829–838.
5. Cima A., Manosaš F., Villadelprat J. Isochronicity for several classes of Hamiltonian systems // J. Differ. Equat. 1999. V. 157. P. 373–413.
6. Амелькин В.В., Лукашевич Н.А. О периодах решений некоторых автономных систем // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. № 12. С. 2115–2120.
7. Амелькин В.В., Лукашевич Н.А. Признаки существования центра и его изохронность // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 4. С. 585–590.
8. Воробьев А.П. Об изохронных системах двух дифференциальных уравнений // Докл. АН БССР. 1963. Т. 7. № 3. С. 155–156.
9. Воробьев А.П. Построение изохронных систем двух дифференциальных уравнений // Докл. АН БССР. 1963. Т. 7. № 8. С. 513–515.
10. Руденко А.Е. Сильная изохронность центра. О периодах предельных циклов системы Лъенара // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 5. С. 811–819.
11. Амелькин В.В. Положительное решение одной гипотезы в теории полиномиальных изохронных центров систем Лъенара // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 147–152.
12. Амелькин В.В. Изохронные и сильно изохронные фокусы полиномиальных систем Лъенара // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 1. С. 3–10.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 10.01.2022 г.
После доработки 10.01.2022 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.

О СЕМИНАРЕ ПО КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ*)

Ниже публикуются**) аннотации докладов, заслушанных в весеннем семестре 2022 г. (предыдущее сообщение о работе семинара см. в журнале “Дифференц. уравнения”. 2021. Т. 57. № 11).

DOI: 10.31857/S0374064122060115, EDN: CDVNQG

А. Н. Ветохин (Москва) “Бэровская классификация асимптотической топологической энтропии семейств неавтономных динамических систем, непрерывно зависящих от параметра” (25 февраля 2022 г.).

Пусть (X, d) – компактное метрическое пространство, а $\mathcal{F} \equiv (f_1, f_2, \dots)$ – последовательность непрерывных отображений из X в X . Для каждого натурального n через F_n обозначим подпоследовательность (f_n, f_{n+1}, \dots) последовательности \mathcal{F} . Наряду с исходной метрикой d определим на X дополнительную систему метрик

$$d_k^{F_n}(x, y) = \max_{0 \leq i < n} d(f_n^{\circ i}(x), f_n^{\circ i}(y)), \quad f_n^{\circ 0} \equiv \text{id}_X, \quad f_n^{\circ(i+1)} \equiv f_{n+i} \circ f_n^{\circ i}, \quad x, y \in X, \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

Для каждых $k, n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ обозначим через $N_d(F_n, \varepsilon, k)$ максимальное число точек в X , попарные $d_k^{F_n}$ -расстояния между которыми больше, чем ε . Тогда топологическая энтропия и асимптотическая топологическая энтропия неавтономной динамической системы \mathcal{F} определяются формулами [1]

$$h_{\text{top}}(\mathcal{F}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \ln N_d(F_1, \varepsilon, k), \quad (1)$$

$$h_{\text{top}}^*(\mathcal{F}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \ln N_d(F_n, \varepsilon, k). \quad (2)$$

Отметим, что величины (1) и (2) не зависят от выбора метрики, порождающей на X ту же, что и d , топологию; это и объясняет, почему энтропии (1) и (2) называются топологическими.

Непосредственно из формул (1) и (2) вытекает неравенство $h_{\text{top}}(\mathcal{F}) \leq h_{\text{top}}^*(\mathcal{F})$. Величины (1) и (2) могут не совпадать. Кроме того, точную верхнюю грань в формуле (2) (по $n \in \mathbb{N}$) нельзя заменить максимумом, как показывает следующая

Лемма. Если X – канторово совершенное множество, то для некоторой динамической системы \mathcal{F} выполнены неравенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \ln N(F_n, \varepsilon, k) < h_{\text{top}}^*(\mathcal{F}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

По метрическому пространству \mathcal{M} и семейству последовательностей непрерывных отображений

$$\mathcal{F}(\mu, \cdot) \equiv (f_1(\mu, \cdot), f_2(\mu, \cdot), \dots), \quad \mu \in \mathcal{M}, \quad f_i: \mathcal{M} \times X \rightarrow X, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

*) Семинар основан В.В. Степановым в 1930 г., впоследствии им руководили В.В. Немыцкий, Б.П. Демидович, В.А. Кондратьев, В.М. Миллиончиков, Н.Х. Розов. В настоящее время руководители семинара – И.Н. Сергеев, И.В. Астахова, А.В. Боровских, учёный секретарь семинара – В.В. Быков, e-mail: vvbykov@gmail.com.

**) Составитель хроники И.Н. Сергеев.

образуем функции

$$\mu \mapsto h_{\text{top}}(\mathcal{F}(\mu, \cdot)), \quad (4)$$

$$\mu \mapsto h_{\text{top}}^*(\mathcal{F}(\mu, \cdot)). \quad (5)$$

Для произвольных метрических пространств M и X и семейства стационарных последовательностей (3) функция (4) принадлежит второму классу Бэра [2], а если M и X – множества Кантора на отрезке $[0, 1]$, то для некоторого семейства стационарных последовательностей (3) функция (4) всюду разрывна и не принадлежит первому классу Бэра [3].

Для произвольных M и X и любого семейства (3) функция (4) принадлежит третьему классу Бэра [4], а если X – отрезок прямой и M – множество иррациональных чисел на отрезке $[0, 1]$, то для некоторого семейства (3) функция (4) всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра [5]. Аналогичные результаты верны и для функции (5).

Теорема 1. *Для любых метрических пространств M и X и семейства (3) функция (5) принадлежит третьему классу Бэра на M .*

Теорема 2. *Если X – канторово совершенное множество, а M – множество иррациональных чисел на отрезке $[0, 1]$ со стандартной метрикой, то для некоторого семейства (3) функция (5) всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра на M .*

Литература. 1. Kolyada S., Snoha L. Topological entropy of nonautonomous dynamical systems // *Random & Comput. Dynamics*. 1996. V. 4. № 2–3. P. 205–233. 2. Ветохин А.Н. Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов // *Дифференц. уравнения*. 2017. Т. 53. № 4. С. 448–453. 3. Ветохин А.Н. Непринадлежность первому классу Бэра топологической энтропии на пространстве гомеоморфизмов // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика*. 2016. Т. 2. № 4. С. 44–48. 4. Ветохин А.Н. Точный бэровский класс топологической энтропии неавтономных динамических систем // *Мат. заметки*. 2019. Т. 106. № 3. С. 341–348. 5. Ветохин А.Н. О непринадлежности второму бэровскому классу одного семейства гладких неавтономных динамических систем на отрезке, непрерывно зависящих от параметра // *Дифференц. уравнения*. 2020. Т. 56. № 1. С. 133–136.

М. В. Шамолин (Москва) “Тензорные инварианты систем с переменной диссипацией на касательном расслоении гладкого многообразия” (4 марта 2022 г.).

Известно [1–3], что знание достаточного количества не только первых интегралов, но и других тензорных инвариантов системы дифференциальных уравнений позволяет полностью её проинтегрировать. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объёма позволяет понизить порядок рассматриваемой системы. Для консервативных систем этот факт достаточно естественен. Для систем же, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, состоять из трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций [4–6].

Задача о движении n -мерного маятника на обобщённом сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, т.е. в потоке набегающей среды, заполняющей объёмлющее n -мерное пространство, приводит к системе на касательном расслоении к $(n - 1)$ -мерной сфере, причём метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [7]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, а полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, представимых с помощью алгебраических операций над конечными композициями элементарных функций.

Разобраны задачи о движении точки по n -мерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского и т.д. Полученные результаты особенно важны по причине присутствия в системе именно неконсервативного поля сил [5].

Предъявлены тензорные инварианты (в частности, дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким многообразиям. Показана связь данных инвариантов с полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают системы, рассмотренные ранее.

Литература. 1. Poincaré Н. Calcul des probabilités. Paris, 1912. 2. Колмогоров А.Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Докл. АН СССР. 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766. 3. Козлов В.В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 2019. Т. 74. Вып. 1. С. 117–148. 4. Шамолин М.В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи мат. наук. 1998. Т. 53. Вып. 3. С. 209–210. 5. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 500. № 1. С. 78–86. 6. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем нечётного порядка с диссипацией // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 491. № 1. С. 95–101. 7. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твёрдого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования // Докл. РАН. 2012. Т. 444. № 5. С. 506–509.

И. Н. Сергеев (Москва) “Особенности почти массивных свойств устойчивости и неустойчивости одномерных и автономных дифференциальных систем” (11 марта 2022 г.).

Для заданной окрестности нуля $G \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in G, \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G). \quad (1)$$

Через S_* и S_δ будем обозначать множества всех непродолжаемых ненулевых решений x системы (1) и, соответственно, тех из них, для начального условия $x(0)$ которых выполняется неравенство $|x(0)| < \delta$.

Определение 1 [1, 2]. Будем говорить, что система (1) обладает *верхнепредельной*:

1) *устойчивостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta$ удовлетворяет требованию

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| \leq \varepsilon, \quad (2)$$

молчаливо предполагающему, что решение x определено на всей полуоси \mathbb{R}^+ ;

2) *полной* или *глобальной неустойчивостью*, если для некоторых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ любое решение $x \in S_\delta$ или, соответственно, $x \in S_*$ не удовлетворяет требованию (2);

3) *асимптотической* или *глобальной устойчивостью*, если при $\varepsilon = 0$ для некоторого $\delta > 0$ любое решение $x \in S_\delta$ или, соответственно, $x \in S_*$ удовлетворяет требованию (2).

Для определения аналогичных *перроновских* свойств системы (1) нужно:

4) в пп. 1)–3) заменить требование (2) требованием

$$\underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| \leq \varepsilon, \quad (3)$$

а для определения аналогичных *ляпуновских* свойств [3, гл. II, § 1] нужно:

5) в пп. 1) и 2) заменить требование (2) требованием

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |x(t)| \leq \varepsilon, \quad (4)$$

а в п. 3) в дополнение к соответствующему верхнепредельному свойству потребовать наличие у системы (1) ляпуновской устойчивости.

Определение 2 [4]. Все перечисленные в определении 1 ляпуновские, перроновские и верхне-предельные свойства системы (1) назовём *массивными* – при их описании сразу на все решения $x \in S$, где $S = S_\delta, S_*$ (допускается даже $S = S_* \setminus S_\delta$ [5]), накладывается определённое условие – требование (2)–(4) или его отрицание. Массивным свойствам из определения 1 поставим в соответствие их *почти массивные* аналоги, а именно: *почти устойчивость*, *почти полную* или *почти глобальную неустойчивость* и *почти асимптотическую* или *почти глобальную устойчивость*, в описании которых соответствующее условие накладывается уже не на все решения $x \in S$, а только на те, начальные значения которых не принадлежат некоторому множеству (назовём его *множеством вырождения*) нулевой меры Лебега и первой категории Бэра (представимому в виде счётного объединения нигде не плотных множеств).

Добавка “почти” из определения 2 применительно к ляпуновской устойчивости роли не играет [4]: если система (1) ляпуновски почти устойчива, то и устойчива. В одномерном же случае эта добавка не работает вообще, как показывает

Теорема 1. Если при $n = 1$ система (1) обладает каким-либо почти массивным свойством из определения 2, то она обладает и соответствующим массивным свойством.

Любая глобальная устойчивость чувствительна к сужению фазовой области, причём даже к самому незначительному, о чём свидетельствует

Теорема 2. Любая система (1), обладающая какой-либо глобальной устойчивостью, перестает быть таковой при удалении из её фазовой области любой ненулевой точки.

В автономном же случае теорема 2 распространяется и на почти глобальную устойчивость – в том смысле, который подразумевает

Теорема 3. Любая автономная система (1), обладающая какой-либо почти глобальной устойчивостью, перестает быть таковой при удалении из её фазовой области любой гиперповерхности, трансверсальной к векторному полю этой системы хотя бы в одной точке.

Из полной ляпуновской неустойчивости автономной системы вытекает её полная, и даже глобальная, перроновская неустойчивость [6]. Однако для тех же свойств с добавкой “почти” аналогичная импликация уже места не имеет, о чём и говорит

Теорема 4 [6]. При $n = 2$ существует автономная система (1), обладающая перроновской устойчивостью, даже почти глобальной, но ляпуновской и верхнепредельной неустойчивостью, даже почти глобальной, причём множество вырождения всех её почти массивных свойств представляет собой луч, выходящий из нуля и заполненный неподвижными точками, а для любого решения $x \in S_*$, начинающегося не на этом луче, выполнены соотношения

$$0 = \liminf_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| < \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = +\infty. \quad (5)$$

Если в формулировке теоремы 4 отменить последнее из требований (5), то в этом примере можно ещё и снять добавку “почти” с перроновской глобальной устойчивости, т.е. верна

Теорема 5. При $n = 2$ существует автономная система (1), обладающая перроновской глобальной устойчивостью, но ляпуновской и верхнепредельной неустойчивостью, даже почти глобальной, причём множество её вырождения представляет собой окружность, проходящую через нуль.

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856. 2. Сергеев И.Н. Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557. 3. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967. 4. Сергеев И.Н. Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1576–1578. 5. Бондарев А.А. Существование вполне неустойчивой по Ляпунову дифференциальной системы, обладающей перроновской и верхнепредельной массивной частной устойчивостью // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 6. С. 858–859. 6. Сергеев И.Н. Некоторые особенности перроновских и ляпуновских свойств устойчивости автономных систем // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 830–831.

Е. А. Барабанов (Минск), **В. В. Быков** (Москва) “Описание показателя Перрона линейной дифференциальной системы с неограниченными коэффициентами как функции начального вектора решения” (18 марта 2022 г.).

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ через $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ обозначим класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad (1)$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами, через \mathcal{M}_n – его подкласс, состоящий из систем с ограниченными на полуоси коэффициентами, а через $x(\cdot, \xi)$ – решение системы (1) с начальным вектором $x(0, \xi) = \xi \in \mathbb{R}_*^n \equiv \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Обозначим через $\overline{\mathbb{R}}$ расширенную числовую прямую $\mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$ с естественным порядком и порядковой топологией.

Показателем Перрона, или нижним показателем, ненулевого решения $x(\cdot, \xi)$ системы (1) называется [1] величина

$$\pi[x(\cdot, \xi)] = \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t, \xi)\|, \quad (2)$$

а функция начального вектора $\pi_A: \mathbb{R}_*^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, определяемая равенством $\pi_A(\xi) = \pi[x(\cdot, \xi)]$, – показателем Перрона системы (1). Показатели Перрона представляют собой один из многочисленных примеров асимптотических характеристик решений дифференциальных систем, отражающих те или иные их качественные или асимптотические свойства. Важнейшая из них – характеристический показатель Ляпунова (получаемый заменой в определении (2) нижнего предела верхним), от которого показатель Перрона по ряду свойств принципиально отличается.

А.М. Ляпунов установил, что число различных показателей Ляпунова системы из \mathcal{M}_n не превосходит её размерности n , а О. Перрон обнаружил [1], что на нижние показатели это утверждение не распространяется. Для диагональных систем из \mathcal{M}_n количество различных значений показателя Перрона не превосходит $2^n - 1$ [2], причём может быть любым таким натуральным числом [3]. В общем случае множество P является множеством значений показателей Перрона некоторой системы из \mathcal{M}_n тогда и только тогда, когда P – ограниченное суслинское множество, содержащее свою точную верхнюю грань [4].

Ставится задача теоретико-множественного описания для каждого натурального n класса функций $\tilde{\mathcal{P}}_n = \{\pi_A : A \in \tilde{\mathcal{M}}_n\}$. При $n = 1$ класс $\tilde{\mathcal{P}}_n$ состоит из всех постоянных функций $\mathbb{R}_*^1 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, а при $n \geq 2$ – это подкласс второго, но не первого класса Бэра [5], заведомо содержащий [6] все непрерывные функции $f: \mathbb{R}_*^n \rightarrow \mathbb{R}$, которые удовлетворяют условию

$$f(c\xi) = f(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}_*^n, \quad c \in \mathbb{R}_*^1. \quad (3)$$

Описание класса $\tilde{\mathcal{P}}_n$ завершает

Теорема. Для каждого $n \geq 2$ функция $f: \mathbb{R}_*^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $\tilde{\mathcal{P}}_n$, если и только если она удовлетворяет условию (3) и при любом $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}([-\infty, r])$ является G_δ -множеством.

Литература. 1. Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // Math. Zeitschr. 1930. Bd. 31. Hf. 5. S. 748–766. 2. Изобов Н.А. О множестве нижних показателей линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 4. С. 469–477. 3. Барабанов Е.А. Достижимость оценки числа нижних показателей линейной дифференциальной диагональной системы // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26. № 12. С. 1069–1072. 4. Барабанов Е.А. Структура множества нижних показателей Перрона линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 11. С. 1843–1853. 5. Барабанов Е.А. Точность некоторых утверждений о нижних показателях Перрона // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34. № 3. С. 200–203. 6. Гаргянц А.Г. К вопросу о распределении значений показателей Перрона по решениям систем с неограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 11. С. 1567.

И. В. Асташова, Д. А. Лашин, А. В. Филиновский (Москва) “Об управляющей функции в параболической задаче управления с точечным наблюдением” (25 марта 2022 г.).

Рассмотрим краевую задачу для параболического уравнения

$$u_t = (a(x, t)u_x)_x + b(x, t)u_x + h(x, t)u, \quad (x, t) \in Q_T = (0, 1) \times (0, T), \quad T > 0, \quad (1)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u_x(1, t) = \psi(t), \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \xi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3)$$

с гладкими в \overline{Q}_T коэффициентами a , b , h , где $0 < a_1 \leq a(x, t) \leq a_2 < +\infty$, а также граничными $\varphi \in W_2^1(0, T)$, $\psi \in W_2^1(0, T)$ и начальной $\xi \in L_2(0, 1)$ функциями.

Ставим задачу управления с точечным наблюдением: управляя температурой φ на левом конце отрезка (при фиксированных функциях ξ и ψ), стараемся сделать температуру $u(x_0, t)$ в некоторой точке $x_0 \in (0, 1)$ близкой к заданной функции $z(t)$ на всём интервале времени $(0, T)$. Экстремальные задачи для параболических уравнений рассматривались в работах [1, 2], при этом наиболее изученными являются задачи с финальным или распределённым наблюдением. Продолжая исследования [3, 4], мы изучаем качественные свойства управляющей функции и получаем оценки её нормы через значение функционала качества. В отличие от [5], здесь мы рассматриваем начальные и граничные функции произвольного знака.

Пусть $V_2^{1,0}(Q_T)$ – банахово пространство таких функций $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_{L_2(0,1)} + \|u_x\|_{L_2(Q_T)},$$

для которых $t \mapsto u(\cdot, t)$ – непрерывное отображение $[0, T] \rightarrow L_2(0, 1)$ [6, с. 15], а $\widetilde{W}_2^1(Q_T)$ – множество функций $\eta \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям $\eta(x, T) = 0 = \eta(0, t)$. Слабым решением задачи (1)–(3) будем называть функцию $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(0, \cdot) = \varphi$ и для всех $\eta \in \widetilde{W}_2^1(Q_T)$ интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} (a(x, t)u_x(x, t)\eta_x(x, t) - b(x, t)u_x(x, t)\eta(x, t) - h(x, t)u(x, t)\eta(x, t) - u(x, t)\eta_t(x, t)) dx dt = \\ = \int_0^1 \xi(x)\eta(x, 0) dx + \int_0^T a(1, t)\psi(t)\eta(1, t) dt. \end{aligned}$$

Теорема 1 [7]. *Задача (1)–(3) имеет единственное слабое решение $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, причём для некоторой постоянной C_1 (не зависящей от φ, ψ, ξ) оно удовлетворяет неравенству*

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leq C_1(\|\varphi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\psi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\xi\|_{L_2(0,1)}).$$

Теорема 2 (принцип неотрицательности). *Если u – решение задачи (1)–(3) при условиях $\text{ess inf}_{t \in (0,T)} \varphi(t) \geq 0, \text{ess inf}_{t \in (0,T)} \psi(t) \geq 0$ и $\text{ess inf}_{x \in (0,1)} \xi(x) \geq 0$, то $\text{ess inf}_{(x,t) \in Q_T} u(x, t) \geq 0$.*

С использованием теоремы 2 получена следующая

Теорема 3. *Если $a_t(x, t) \geq 0$ и $b_x(x, t) - h(x, t) \geq 0$ при $(x, t) \in Q_T$, а также $b(x, t) \geq 0$ при $(x, t) \in [0, x_0] \times [0, T]$, где $x_0 \in (0, 1)$ – некоторое число, и при этом $b(1, t) \leq 0$ при $t \in [0, T]$, то решение u задачи (1)–(3) удовлетворяет неравенству*

$$\|u(x_0, \cdot)\|_{L_1(0,T)} \leq \|\varphi\|_{L_1(0,T)} + \frac{x_0}{a_1}(a_2\|\psi\|_{L_1(0,T)} + \|\xi\|_{L_1(0,1)}).$$

Следствие 1. *Если выполнены условия теоремы 3 и $\psi = 0 = \xi$, то решение u задачи (1)–(3) удовлетворяет неравенству*

$$\|u(x_0, \cdot)\|_{L_1(0,T)} \leq \|\varphi\|_{L_1(0,T)}.$$

Пусть $\Phi \subset W_2^1(0, T)$ – множество управляющих функций φ , а $Z \subset L_2(0, T)$ – множество целевых функций z . Считая далее множество Φ непустым, замкнутым, выпуклым и ограниченным, рассмотрим квадратичный функционал

$$J[z, \rho, \varphi] = \int_0^T (u_\varphi(x_0, t) - z(t))^2 \rho(t) dt, \quad \varphi \in \Phi, \quad z \in Z,$$

где u_φ – решение задачи (1)–(3) с заданной управляющей функцией φ , а $\rho \in L_\infty(0, T)$ – весовая функция и $\text{ess inf}_{t \in (0,T)} \rho(t) = \rho_1 > 0$. Фиксируя функции z и ρ , рассмотрим задачу минимизации

$$m[z, \rho, \Phi] = \inf_{\varphi \in \Phi} J[z, \rho, \varphi].$$

Теорема 4 [5, 7]. *Для любой функции $z \in L_2(0, T)$ существует единственная функция $\varphi_0 \in \Phi$, для которой*

$$m[z, \rho, \Phi] = J[z, \rho, \varphi_0].$$

Оценку снизу нормы управляющей функции через значение функционала качества даёт
Теорема 5. В условиях теоремы 3 имеет место неравенство

$$\|\varphi\|_{L_1(0,T)} \geq \|z\|_{L_1(0,T)} - \left(\frac{TJ[\varphi, \rho, z]}{\rho_1} \right)^{1/2} - \frac{x_0}{a_1} (a_2 \|\psi\|_{L_1(0,T)} + \|\xi\|_{L_1(0,1)}).$$

Следствие 2. Если выполнены условия теоремы 3 и $\psi = 0 = \xi$, то имеет место неравенство

$$\|\varphi\|_{L_1(0,T)} \geq \|z\|_{L_1(0,T)} - \left(\frac{TJ[\varphi, \rho, z]}{\rho_1} \right)^{1/2}.$$

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

Литература. 1. Troltsch F. Optimal Control of Partial Differential Equations: Theory, Methods and Applications. Graduate Studies in Mathematics. V. 112. Providence, 2010. 2. Lurie K.A. Applied Optimal Control Theory of Distributed Systems. Berlin, 2013. 3. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. On the dense controllability for the parabolic problem with time-distributed functional // Tatra Mt. Math. Publ. 2018. V. 71. P. 9–25. 4. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. On properties of minimizers of a control problem with time-distributed functional related to parabolic equations // Opuscula Math. 2019. V. 39. № 5. P. 595–609. 5. Astashova I., Filinovskiy A., Lashin D. On the estimates in various spaces to the control function of the extremum problem for parabolic equation // WSEAS. J. Appl. Theor. Mech. 2021. V. 16. P. 187–192. 6. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. 7. Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. Об управлении с точечным наблюдением для параболической задачи с конвекцией // Тр. Моск. мат. о-ва. 2019. Т. 80. № 2. С. 258–274.

И. Н. Сергеев (Москва) “О некоторых затруднениях при исследовании по первому приближению сферических и шаровых показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости” (1 апреля 2022 г.).

Для области G евклидова пространства \mathbb{R}^n ($n > 1$) рассмотрим дифференциальную (вообще говоря, нелинейную) систему вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in G, \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G). \quad (1)$$

С системой (1) свяжем линейную однородную систему её *первого приближения*

$$\dot{x} = A(t)x \equiv f'_x(t, x), \quad A(t) \equiv f'_x(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

причём на нелинейную добавку $h(t, x) \equiv f(t, x) - A(t)x = o(x)$ ($x \rightarrow 0$) обычное требование её равномерной малости по $t \in \mathbb{R}_+$ мы здесь не накладываем. Через $x_f(\cdot, x_0)$ обозначаем непродолжаемое решение системы (1) с начальным условием $x_f(0, x_0) = x_0$, а через $S(f)$ и $S_*(f)$ – множество всех и, соответственно, всех ненулевых решений системы (1).

Ниже в определении 1 вводятся [1] три основных разновидности функционала K , по которым затем в определении 2 строятся соответствующие им показатели \varkappa .

Определение 1. Функционалы $K(t, u)$, определённые на парах $t \in \mathbb{R}_+$ и $u : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$, принимающие значение $+\infty$ всякий раз, когда функция определена не на всём отрезке $[0, t]$, отвечают *показателям*

$$\varkappa = \nu, \theta, \rho, \text{ при } K = N, \Theta, P \text{ соответственно} \quad (3)$$

и описывают следующие свойства решений:

1) *колеблемость* ($\varkappa = \nu$), если $K(t, u) = N(t, u)$ – умноженное на π число нулей на промежутке $[0, t]$ функции $P_1 u$, где P_1 – ортогональный проектор на фиксированную прямую, причём если хотя бы один из этих нулей *кратен* (т.е. является нулём ещё и производной $(P_1 u)'$), то считаем $N(t, u) = +\infty$;

2) *вращаемость (ориентированная, $\varkappa = \theta$)*, если $K(t, u) = \Theta(t, u) \equiv |\varphi(t, P_2 u)|$ – модуль ориентированного угла $\varphi(t, P_2 u)$ (непрерывного по t , с начальным условием $\varphi(0, P_2 u) = 0$) между вектором $P_2 u(t)$ и начальным вектором $P_2 u(0)$, где P_2 – ортогональный проектор на фиксированную плоскость, причём если $P_2 u(\tau) = 0$ хотя бы при одном $\tau \in [0, t]$, то считаем $\Theta(t, u) = +\infty$;

3) *блуждаемость ($\varkappa = \rho$)*, если

$$K(t, u) = P(t, u) \equiv \int_0^t |(u(\tau)/|u(\tau)|)'| d\tau, \quad u(\tau) \neq 0, \quad \tau \in [0, t].$$

Известны и другие функционалы, отвечающие за *неориентированную* и *частотную вращаемость* [1], *поворачиваемость k -го ранга* [2], а также *плоскую вращаемость* [3].

Определение 2. Для каждого функционала из числа описанных в определении 1 и соответствующего ему свойства *колеблемости*, *вращаемости* или *блуждаемости* зададим:

а) [1] *слабый* и *сильный нижние линейные* показатели (3) решения $x \in S_*(f)$, определённого на всей полуоси \mathbb{R}_+ , – по формулам

$$\hat{\varkappa}^\circ(x) \equiv \liminf_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} t^{-1} K(t, Lx), \quad \hat{\varkappa}^\bullet(x) \equiv \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} K(t, Lx); \quad (4)$$

б) [4] *слабый* и *сильный нижние сферические* показатели (3) задачи Коши системы (1) с начальным значением $x_0 \in G$ – по формулам

$$\hat{\varkappa}_s^\circ(f, x_0) \equiv \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} K_s(f, x_0, t, L), \quad \hat{\varkappa}_s^\bullet(f, x_0) \equiv \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} K_s(f, x_0, t, L), \quad (5)$$

где для $t \in \mathbb{R}_+$, $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n$ и ортогонального проектора P_x^\perp на гиперплоскость, ортогональную вектору $x \in \mathbb{R}^n$, обозначено

$$K_s(f, x_0, t, L) = K(t, Lx_{f_s}(\cdot, x_0)), \quad f_s(t, x) \equiv P_x^\perp \cdot f(t, x),$$

причём *сферической* называем и систему с правой частью f_s (без радиальной составляющей);

в) [5] *слабый* и *сильный нижние шаровые* показатели (3) системы (1) – по формулам

$$\hat{\varkappa}_b^\circ(f) \equiv \liminf_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} t^{-1} \check{K}_b(f, t, L), \quad \hat{\varkappa}_b^\bullet(f) \equiv \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \check{K}_b(f, t, L), \quad (6)$$

где для $t \in \mathbb{R}_+$ и $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n$ обозначено

$$\check{K}_b(f, t, L) \equiv \liminf_{x_0 \rightarrow 0} K(t, Lx_f(\cdot, x_0)) \quad \left(\hat{K}_b(f, t, L) \equiv \overline{\lim}_{x_0 \rightarrow 0} K(t, Lx_f(\cdot, x_0)) \right);$$

г) *слабый* и *сильный верхние линейные* $\hat{\varkappa}^\circ(x)$, $\hat{\varkappa}^\bullet(x)$, *сферические* $\hat{\varkappa}_s^\circ(f, x_0)$, $\hat{\varkappa}_s^\bullet(f, x_0)$ и *шаровые* $\hat{\varkappa}_b^\circ(f)$, $\hat{\varkappa}_b^\bullet(f)$ показатели – по тем же формулам (4)–(6) соответственно, но с заменой в них нижних пределов при $t \rightarrow +\infty$ верхними, а функционалов \check{K}_b – функционалами \hat{K}_b ;

д) *точные* или *абсолютные* разновидности тех же показателей, которые возникают при совпадении значений нижнего и верхнего показателей или соответственно слабого и сильного показателей: в первом случае будем опускать в их обозначении галочку и крышечку, а во втором – пустой и заполненный кружок.

Необходимость введения сферических и шаровых, а также радиальных [6] показателей обусловлена тем, что решения нелинейной системы (1) не всегда определены на всей временной полуоси. Некоторые свойства всех этих показателей описаны в работе [7]. Ниже приводятся случаи отсутствия связи между сферическими или шаровыми показателями нелинейной системы (1) и системы её первого приближения (2). В докладе [8] исследована аналогичная связь для радиальных показателей.

Никакие сферические показатели из перечня (3), вообще говоря, не оцениваются ни с какой определённой стороны соответствующими показателями системы первого приближения, причём уже в двумерном автономном случае, что и подтверждают следующие теоремы.

Теорема 1. При $n = 2$ и $G = \mathbb{R}^2$ существует такая автономная система (1), что значения всех её сферических показателей (3) и всех линейных показателей системы её первого приближения (2) точны, абсолютны и для любого решения $x \in S_*(f_I)$ удовлетворяют соотношениям

$$+\infty > \varkappa_s(f, x(0)) > \varkappa(x) = \varkappa_s(f_I, x(0)) = 0.$$

Теорема 2. При $n = 2$ и $G = \mathbb{R}^2$ существует такая автономная система (1), что значения всех её сферических показателей (3) и всех линейных показателей системы её первого приближения (2) точны, абсолютны и для любого решения $x \in S_*(f_I)$ удовлетворяют соотношениям

$$0 < \varkappa_s(f, x(0)) < \varkappa(x) = \varkappa_s(f_I, x(0)) = 1.$$

Шаровые показатели колеблемости могут отличаться от соответствующих показателей системы первого приближения уже в двумерном случае, а в трёхмерном и даже автономном случае наблюдается также несовпадение шаровых показателей вращаемости с соответствующими показателями системы первого приближения, как показывают следующие теоремы.

Теорема 3. При $n = 2$ и $G = \mathbb{R}^2$ существует такая система (1), что значения всех её шаровых показателей колеблемости и всех линейных показателей колеблемости системы её первого приближения (2) точны, абсолютны и для любого решения $x \in S_*(f_I)$ удовлетворяют соотношениям

$$0 = \nu_b(f) < \nu(x) = \nu_b(f_I) = 1.$$

Теорема 4. При $n = 3$ и $G = \mathbb{R}^3$ существует такая автономная система (1), что значения всех её шаровых показателей вращаемости и всех линейных показателей вращаемости системы её первого приближения (2) точны, абсолютны и для любого решения $x \in S_*(f_I)$ и некоторого двумерного подпространства $S \subset S(f_I)$ удовлетворяют соотношениям

$$0 = \theta_b(f) \leq \theta(x) = \begin{cases} \hat{\theta}_b(f_I) = 1, & x \in S \setminus \{0\}; \\ \check{\theta}_b(f_I) = 0, & x \in S_*(f_I) \setminus S. \end{cases}$$

Литература. 1. Сергеев И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219. 2. Сергеев И.Н. Характеристики поворачиваемости решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1353–1361. 3. Сергеев И.Н. Показатели плоской вращаемости линейной дифференциальной системы // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2019. Вып. 32. С. 325–348. 4. Сергеев И.Н. Определение сферических показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 839–840. 5. Сергеев И.Н. Определение шаровых показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 6. С. 859–861. 6. Сергеев И.Н. Определение радиальных показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1560–1562. 7. Сергеев И.Н. Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 3. С. 41–46. 8. Сергеев И.Н. Исследование по первому приближению радиальных показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1574–1576.

А. Х. Сташ (Майкоп) “О множествах значений показателей вращаемости решений автономных дифференциальных систем” (8 апреля 2022 г.).

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через \mathcal{M}^n множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

с ограниченными непрерывными оператор-функциями $A: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$ (каждую из которых будем отождествлять с соответствующей системой). Подмножество множества \mathcal{M}^n , состоящее

из автономных систем, обозначим через \mathcal{C}^n . Линейное пространство решений системы $A \in \mathcal{M}^n$ обозначим через $\mathcal{S}(A)$, а подмножество всех ненулевых решений – через $\mathcal{S}_*(A)$. Далее, звёздочкой снизу помечаем любое линейное пространство, в котором выколот нуль. Положим

$$\mathcal{S}_*^n = \bigcup_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}_*(A).$$

Определение 1 [1]. Для функции $x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ определим функционал $\Theta(x, t)$ как взятую по абсолютной величине непрерывную по $t \in \mathbb{R}_+$ ветвь ориентированного угла между векторами $x(t)$ и $x(0)$, для которой $\Theta(x, 0) = 0$, причём если для некоторого $\tau \in [0, t]$ имеет место равенство $x(\tau) = 0$, то по определению считаем, что $\Theta(x, t) = +\infty$. *Нижние (верхние) сильный и слабый показатели ориентированной вращаемости* вектор-функции $x \in \mathcal{S}_*^n$ зададим соответственно формулами

$$\begin{aligned} \check{\theta}^\bullet(x) &= \inf_{L \in \text{End}_2 \mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \Theta(Lx, t) & \left(\hat{\theta}^\bullet(x) &= \inf_{L \in \text{End}_2 \mathbb{R}^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \Theta(Lx, t) \right), \\ \check{\theta}^\circ(x) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{End}_2 \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} \Theta(Lx, t) & \left(\hat{\theta}^\circ(x) &= \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{End}_2 \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} \Theta(Lx, t) \right), \end{aligned}$$

где $\text{End}_2 \mathbb{R}^n$ – подмножество векторного пространства $\text{End } \mathbb{R}^n$, состоящее из линейных операторов ранга 2. В случае совпадения верхнего и нижнего значений $\hat{\omega}(x) = \check{\omega}(x)$ какого-либо из перечисленных показателей ω будем называть показатель $\omega(x)$ *точным*, а в случае совпадения слабого и сильного значений $\omega^\circ(x) = \omega^\bullet(x)$ – *абсолютным*.

У автономной системы *спектр* (множество всех значений на ненулевых решениях) любого из показателей ориентированной вращаемости содержит множество модулей мнимых частей собственных значений матрицы системы, но, вообще говоря, не совпадает с ним [2]. В докладе [2] поставлен вопрос о типичных значениях показателя ориентированной вращаемости и о структуре его возможного спектра. В [3] показано, что для широкого класса автономных систем (имеющих действительные собственные значения или два комплексных с несоизмеримыми мнимыми частями) нуль является типичным значением этого показателя, и найден спектр для систем с простыми чисто мнимыми собственными значениями. Тем самым, задача нахождения спектров для автономных систем была решена лишь частично. Приводим здесь полное решение этой задачи.

Определение 2 [3]. Введём *наибольший нечётно-общий делитель* $\text{gcd}^*(S)$ множества S чисел $s_1, \dots, s_r \geq 0$: если существует такое α , что множество $S/\alpha = \{s_1/\alpha, \dots, s_r/\alpha\}$ состоит из нечётных целых чисел, то в качестве $\text{gcd}^*(S)$ возьмём наибольшее из таких α , а в противном случае положим $\text{gcd}^*(S) = 0$.

Теорема 1. Для любой системы $A \in \mathcal{C}^n$ показатель $\theta(x)$ любого решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ является *точным и абсолютным*, а его спектр имеет вид

$$\text{Spec}_\theta(A) = \{ \text{gcd}^*(S) : \emptyset \neq S \subset \{ |\text{Im } \lambda_1(A)|, \dots, |\text{Im } \lambda_n(A)| \} \},$$

где $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$ – корни характеристического многочлена системы A , упорядоченные по нестрогому возрастанию модулей их мнимых частей.

Следствие 1. Для произвольной системы $A \in \mathcal{C}^n$ спектр показателя θ является *дискретным*, причём его мощность не превосходит $2^{n/2} - 1$.

Следствие 2. Спектры всех показателей ориентированной вращаемости любой автономной системы с симметричной матрицей состоят из одного нулевого значения.

Определение 3 [4]. Для каждого $\omega = \check{\theta}^\bullet, \hat{\theta}^\bullet, \check{\theta}^\circ, \hat{\theta}^\circ$ назовём i -м *верхним* $\omega_{\bar{i}}(A)$ и *нижним* $\omega_{\underline{i}}(A)$ *главными (регуляризованными по Миллионщикovu) значениями* соответствующего показателя системы $A \in \mathcal{M}^n$ величины, задаваемые равенствами

$$\omega_{\bar{i}}(A) \equiv \inf_{V \in G^i(A)} \sup_{x \in V_*} \omega(x), \quad \omega_{\underline{i}}(A) \equiv \sup_{V \in G^{n-i+1}(A)} \inf_{x \in V} \omega(x), \quad i = \overline{1, n},$$

где $G^i(A)$ – множество i -мерных подпространств пространства $\mathcal{S}(A)$.

Теорема 2. Для каждой системы $A \in \mathbb{C}^n$ и любого $\omega = \check{\theta}^\bullet, \hat{\theta}^\bullet, \check{\theta}^\circ, \hat{\theta}^\circ$ выполнены соотношения

$$\omega_{\underline{1}}(A) = \omega_{\overline{1}}(A) = \omega_{\underline{2}}(A) = \omega_{\overline{2}}(A) = \dots = \omega_{\underline{n-1}}(A) = \omega_{\overline{n-1}}(A) \leq \omega_{\underline{n}}(A) = \omega_{\overline{n}}(A) = |\operatorname{Im} \lambda_n(A)|.$$

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение характеристик вращаемости решений дифференциальных систем и уравнений // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1501–1503. 2. Сергеев И.Н. Вопросы о спектрах показателей вращаемости и блуждаемости автономных систем // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 6. С. 844–845. 3. Бурлаков Д.С. Спектры показателей вращения и вращаемости автономных систем с простыми чисто мнимыми собственными числами // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 6. С. 845. 4. Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.

А. А. Бондарев (Москва) “Пример глобально неустойчивой по Ляпунову системы с перроновской и верхнепредельной глобальной устойчивостью” (15 апреля 2022 г.).

В пространстве \mathbb{R}^2 (с евклидовой нормой $|\cdot|$) рассматривается система вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

с правой частью, удовлетворяющей условиям

$$f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2), \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Настоящий доклад посвящён недавно введённому [1, 2] понятию устойчивости по Перрону и развивает результаты работ [2–5], окончательным итогом которых явилось построение системы, имеющей нулевое линейное приближение вдоль нулевого решения (в теореме 1 [2] приближение было неограниченным) и обладающей одновременно как перроновской, так и верхнепредельной (см. выше определение из доклада И.Н. Сергеева от 11 марта):

- полной неустойчивостью, а значит, и ляпуновской глобальной неустойчивостью;
- массивной частной устойчивостью (в примерах [2–4] она была лишь точечной).

Ниже утверждается существование системы, имеющей нулевое линейное приближение и обладающей одновременно следующими двумя свойствами (которые, на первый взгляд, могут показаться противоречащими друг другу):

- ляпуновской глобальной неустойчивостью (присущей примерам из работ [2–5]);
- перроновской и верхнепредельной глобальной устойчивостью (в отличие от всех предыдущих примеров).

Теорема. Существует такая система (1), что её правая часть удовлетворяет условию

$$f'_x(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

и верны следующие два утверждения:

- 1) для каждого решения x системы (1) справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0;$$

- 2) для каждого ненулевого решения x системы (1) выполняется неравенство

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t)| > 1.$$

Таким образом, абсолютно все решения системы, существование которой утверждается в теореме, сходятся к нулю при неограниченном росте времени, но при этом фазовая кривая каждого ненулевого решения хотя бы однажды покидает 1-окрестность начала координат.

Заметим, что описанная система неавтономна, неоднородна и нелинейна, и не случайно:

- автономной такой системы не существует [6], поскольку в автономном случае уже ляпуновская полная (а тем более глобальная) неустойчивость влечёт за собой сразу и перроновскую, и верхнепредельную глобальную неустойчивость;

– ни одномерной, ни линейной такой системы не существует [7], поскольку для них верхне-пределная глобальная устойчивость влечёт за собой и ляпуновскую глобальную устойчивость.

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (проект 21-8-2-4-1).

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856. 2. Сергеев И.Н. Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 636–646. 3. Бондарев А.А. Один пример неустойчивой системы // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 899. 4. Бондарев А.А. Пример полной, но не глобальной неустойчивости по Перрону // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 2. С. 43–47. 5. Бондарев А.А. Пример дифференциальной системы с перроновской и верхнепределной полной неустойчивостью, но массивной частной устойчивостью // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 2. С. 147–152. 6. Сергеев И.Н. Ляпуновские, перроновские и верхнепределные свойства устойчивости автономных дифференциальных систем // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртского гос. ун-та. 2020. Вып. 2 (56). С. 63–78. 7. Сергеев И.Н. Определение верхнепределной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557.

Н. А. Лобода, А. Х. Сташ (Майкоп) “Об отсутствии свойства остаточности у сильных показателей колеблемости на множестве решений дифференциальных уравнений третьего порядка” (22 апреля 2022 г.).

Для заданного натурального n рассмотрим множество \mathcal{E}^n линейных однородных уравнений n -го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

задаваемых ограниченными непрерывными вектор-функциями $a \equiv (a_1, \dots, a_n): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, с которыми в дальнейшем и будем отождествлять сами уравнения. Множество всех ненулевых решений уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(a)$ и положим

$$\mathcal{S}_*^n = \bigcup_{a \in \mathcal{E}^n} \mathcal{S}_*(a).$$

Определение 1 [1–4]. Точку $t > 0$ назовём точкой *строгой (нестрогой) смены знака* функции $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, если в любой проколотой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения. Для момента $t > 0$, вектора $m \in \mathbb{R}_*^n$ и функции $y \in \mathcal{S}_*^n$ введём следующие обозначения:

$\nu^-(y, m, t)$ – число точек *строгой смены знака* функции $\langle \psi y(\cdot), m \rangle$ на промежутке $(0, t]$;

$\nu^\sim(y, m, t)$ – число точек *нестрогой смены знака* функции $\langle \psi y(\cdot), m \rangle$ на промежутке $(0, t]$;

$\nu^0(y, m, t)$ – число *нулей* функции $\langle \psi y(\cdot), m \rangle$ на промежутке $(0, t]$;

$\nu^+(y, m, t)$ – число *корней* (т.е. нулей с учётом их кратности) функции $\langle \psi y(\cdot), m \rangle$ на промежутке $(0, t]$;

$\nu^*(y, m, t)$ – число *гиперкратных корней* функции $\langle \psi y(\cdot), m \rangle$ на промежутке $(0, t]$: при его подсчёте каждый некрратный корень берётся ровно один раз, а кратный – бесконечно много раз, где $\psi y = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение.

Верхние (нижние) сильный и слабый показатели колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней функции $y \in \mathcal{S}_*^n$ при $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}_\bullet^\alpha(y) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(y, m, t) \quad \left(\check{\nu}_\bullet^\alpha(y) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(y, m, t) \right),$$

$$\hat{\nu}_\circ^\alpha(y) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(y, m, t) \quad \left(\check{\nu}_\circ^\alpha(y) \equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(y, m, t) \right).$$

Определение 2 [5]. Для множества $F \subset \{f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ назовём функционал $\lambda: F \rightarrow \mathbb{R}$ *остаточным*, если для любых функций $f, g \in F$, удовлетворяющих хотя бы при одном $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и всех $t \geq t_0$ условию $f(t) = g(t)$, имеет место равенство $\lambda(f) = \lambda(g)$. Далее считаем $F = \mathcal{S}_*^n$.

Слабые показатели колеблемости любых решений, как оказалось [2], всегда совпадают с их показателями блуждаемости, которые являются остаточными. Для решений линейных однородных уравнений первого порядка все показатели колеблемости равны нулю, так как эти решения не имеют нулей, а для всех решений любого уравнения второго порядка все верхние (равно как и все нижние) показатели равны между собой [4]. Следовательно, на множестве решений уравнений первого и второго порядков все показатели колеблемости остаточны.

На множестве решений дифференциальных уравнений третьего порядка сильные показатели колеблемости гиперкорней не являются остаточными [6]. Об остаточности остальных сильных показателей колеблемости информации пока не было.

Теорема 1. Ни один из функционалов $\hat{\nu}_{\bullet}^{-}, \check{\nu}_{\bullet}^{-}, \hat{\nu}_{\bullet}^{\sim}, \check{\nu}_{\bullet}^{\sim}, \hat{\nu}_{\bullet}^0, \check{\nu}_{\bullet}^0, \hat{\nu}_{\bullet}^{+}, \check{\nu}_{\bullet}^{+} : \mathcal{S}_*^3 \rightarrow \mathbb{R}$ не остаточен.

Теорема 2. Существует уравнение $a \in \mathcal{E}^3$, хотя бы одно решение $x \in \mathcal{S}_*(a)$ которого удовлетворяет соотношениям

$$\nu_{\bullet}^{-}(x) = \nu_{\bullet}^{\sim}(x) = \nu_{\bullet}^0(x) = \nu_{\bullet}^{+}(x) > \nu_{\circ}^{-}(x) = \nu_{\circ}^{\sim}(x) = \nu_{\circ}^0(x) = \nu_{\circ}^{+}(x).$$

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294. 2. Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Мат. сб. 2013. Т. 204. № 1. С. 119–138. 3. Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 11. С. 1577. 4. Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76. № 1. С. 149–172. 5. Сергеев И.Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 111–166. 6. Сташ А.Х. Об отсутствии свойства остаточности у полных гиперчастот решений дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2017. № 2. С. 65–68.

А. Е. Артисевич, А. Х. Сташ (Майкоп) “О множествах значений показателей колеблемости знаков решений дифференциальных уравнений третьего порядка” (22 апреля 2022 г.).

Для заданного натурального n рассмотрим множество \mathcal{E}^n линейных однородных уравнений n -го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

задаваемых ограниченными непрерывными вектор-функциями $a \equiv (a_1, \dots, a_n) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, с которыми в дальнейшем и будем отождествлять сами уравнения. Множество всех ненулевых решений уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(a)$, а кроме того, используем все обозначения из определения 1 представленного выше доклада (авторы Н.А. Лобода, А.Х. Сташ).

Для решений линейных однородных уравнений первого порядка все показатели колеблемости [1]

$$\hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(y), \check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(y), \hat{\nu}_{\circ}^{\alpha}(y), \check{\nu}_{\circ}^{\alpha}(y), \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\},$$

равны нулю (так как эти решения не имеют нулей), а для всех решений любого уравнения второго порядка все верхние (равно как и все нижние) показатели равны между собой [2].

В работе [3] для сколь угодно большого наперед заданного числа N доказано существование уравнения третьего порядка с периодическими коэффициентами, спектры показателей колеблемости которого содержат конечные наборы, состоящие из N чисел. Кроме того, построено линейное однородное дифференциальное уравнение третьего порядка с переменными ограниченными коэффициентами, спектры показателей колеблемости которого содержат одно и то же счётное множество значений. В [4] приводится линейное однородное дифференциальное уравнение третьего порядка с неограниченными коэффициентами, спектры показателей колеблемости которого содержат один и тот же отрезок числовой прямой.

В работе [5] построены примеры двух линейных дифференциальных уравнений третьего порядка с непрерывными на временной полуоси коэффициентами, спектры характеристических частот нулей и знаков одного из которых состоят из множества рациональных чисел отрезка $[0, 1]$, а спектры другого – из множества иррациональных чисел отрезка $[0, 1]$ и числа

нуль. В докладе показано, что такими же свойствами обладают и показатели колеблемости знаков.

Теорема 1. Для любого не более чем счётного множества неотрицательных чисел X существует дифференциальное уравнение $a \in \mathcal{E}^3$, обладающее свойством

$$\hat{\nu}_{\bullet}^{-}(\mathcal{S}_*(a)) = \check{\nu}_{\bullet}^{-}(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\nu}_{\circ}^{-}(\mathcal{S}_*(a)) = \check{\nu}_{\circ}^{-}(\mathcal{S}_*(a)) = X \cup \{0\}.$$

Следствие. Существует дифференциальное уравнение $a \in \mathcal{E}^3$, обладающее свойством

$$\hat{\nu}_{\bullet}^{-}(\mathcal{S}_*(a)) = \check{\nu}_{\bullet}^{-}(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\nu}_{\circ}^{-}(\mathcal{S}_*(a)) = \check{\nu}_{\circ}^{-}(\mathcal{S}_*(a)) = [0, 1] \cap \mathbb{Q}.$$

Теорема 2. Существует дифференциальное уравнение $a \in \mathcal{E}^3$, обладающее свойством

$$\hat{\nu}_{\bullet}^{-}(\mathcal{S}_*(a)) = \check{\nu}_{\bullet}^{-}(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\nu}_{\circ}^{-}(\mathcal{S}_*(a)) = \check{\nu}_{\circ}^{-}(\mathcal{S}_*(a)) = [0, 1].$$

Теорема 3. Существует дифференциальное уравнение $a \in \mathcal{E}^3$, обладающее свойством

$$\hat{\nu}_{\bullet}^{-}(\mathcal{S}_*(a)) = \check{\nu}_{\bullet}^{-}(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\nu}_{\circ}^{-}(\mathcal{S}_*(a)) = \check{\nu}_{\circ}^{-}(\mathcal{S}_*(a)) = ([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}.$$

Литература. 1. Сергеев И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219. 2. Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76. № 1. С. 149–172. 3. Сташ А.Х. О существенных значениях характеристик колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестн. Адыгейского гос. ун-та. Сер. Естеств.-мат. и техн. науки. 2013. Вып. 2 (119). С. 9–22. 4. Сташ А.Х. О существовании линейного дифференциального уравнения третьего порядка с непрерывными спектрами полной и векторной частот // Вестн. Адыгейского гос. ун-та. Сер. Естеств.-мат. и техн. науки. 2013. Вып. 3 (122). С. 9–17. 5. Войделевич А.С. Существование бесконечных всюду разрывных спектров верхних характеристических частот нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 3. С. 17–23.

Н. А. Изобов (Минск), **А. В. Ильин** (Москва) “Существование антиперроновского эффекта смены положительных характеристических показателей на отрицательные при исчезающих на бесконечности линейных возмущениях” (29 апреля 2022 г.).

Рассматриваем линейные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0, \quad (1_n)$$

первого приближения с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$, а также возмущённые системы

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0, \quad (2_n)$$

с аналогичными матрицами $Q(t)$.

В двумерном случае О. Перроном [1; см. также 2, с. 50–51] построены система (1_2) с отрицательными показателями и двумерное бесконечно дифференцируемое возмущение $f(t, y)$ второго порядка малости такие, что все нетривиальные решения возмущённой системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq t_0,$$

оказываются бесконечно продолжимыми вправо и принимающими лишь два значения показателей: одно по-прежнему отрицательное, совпадающее со старшим показателем $\lambda_2(A)$ исходной системы (1_2) , и второе – некоторое положительное число.

Исследованию этого эффекта Перрона смены отрицательных показателей системы линейного приближения на положительные для решений возмущённой системы с возмущениями высшего порядка малости посвящены наши предыдущие совместные работы, в том числе и

с С.К. Коровиным, завершившиеся [3, 4] полным описанием множеств как $\Lambda_+(A, f)$ положительных, так и $\Lambda_-(A, f)$ отрицательных показателей всех этих нетривиальных решений. В частности, реализован и вариант $\text{mes } \Lambda_+(A, f) > 0$, $\Lambda_-(A, f) = \emptyset$.

Для возможных приложений бóльший интерес представляют противоположный (который мы называем *антиперроновским*) эффект смены малыми возмущениями (линейными как исчезающими на бесконечности, так и экспоненциально убывающими; нелинейными высшего порядка малости) всех положительных характеристических показателей линейного приближения на отрицательные для решений возмущённой системы.

В работе [5] исследован этот эффект для экспоненциально убывающих линейных возмущений: доказано существование линейных систем (1_n) со всеми положительными показателями и возмущённой (2_n) с матрицей $Q(t)$, удовлетворяющей условию

$$\|Q(t)\| \leq c_Q e^{-\sigma t}, \quad \sigma > 0, \quad c_Q = \text{const}, \quad t \geq t_0, \quad (3)$$

и характеристическими показателями

$$\lambda_1(A + Q) \leq \dots \leq \lambda_{n-1}(A + Q) < 0 < \lambda_n(A + Q).$$

При этом остаётся открытым вопрос о существовании системы (2_n) с возмущением (3) и отрицательным старшим показателем $\lambda_n(A + Q)$.

Нельзя ли при более общем возмущении $Q(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow +\infty$, одновременно реализовать все необходимые неравенства

$$\lambda_i(A) > 0, \quad \lambda_i(A + Q) < 0, \quad i = \overline{1, n}?$$

Положительный ответ на этот вопрос содержит следующая

Теорема. *Для любых параметров*

$$\lambda_n \geq \dots \geq \lambda_1 > 0, \quad \mu_1 \leq \dots \leq \mu_n < 0, \quad 2 \leq n \in \mathbb{N},$$

существуют:

1) *линейная система (1_n) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$;*

2) *бесконечно дифференцируемая $n \times n$ -матрица $Q(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, такие, что возмущённая система (2_n) имеет характеристические показатели $\lambda_i(A + Q) = \mu_i$, $i = \overline{1, n}$.*

Литература. 1. Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Zeitschr. 1930. Bd. 32. Hf. 5. S. 703–728. 2. Леонов Г.А. Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. М.: Ижевск, 2006. 3. Изобов Н.А., Ильин А.В. О бэровской классификации положительных характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1435–1439. 4. Изобов Н.А., Ильин А.В. Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 464–472. 5. Изобов Н.А., Ильин А.В. О существовании линейных дифференциальных систем со всеми положительными характеристическими показателями первого приближения и экспоненциально убывающими возмущениями и решениями // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1450–1457.