Russian Academy of Sciences

Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 86. Iss. 3

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

May–June

Учредитель: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Редакция:
В.Г. Байдулов – отв. секретарь
Е.В. Есина – зав. редакцией

Адрес редакции: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245
Телефон редакции: 8 (495) 434-21-49
E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: http://pmm.ipmnet.ru

На сайте Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала "Прикладная математика и механика" в каталоге Роспечати 70706
ISSN 0032-8235

Founder: Russian Academy of Sciences

The Editorial Staff:
V.G. Baydulov – executive secretary
E.V. Esina – head of Editorial office (manager editor)

The Editorial Board Address: 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia
Phone: 8 (495) 434-21-49
E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: http://pmm.ipmnet.ru

The subscription index in Rospechat catalogue 70706
ISSN 0021-8928

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

EDN: TSYXRI
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА **2022, том 86, № 3, с. 297–298**

ЛЕОНИД НИКОЛАЕВИЧ СРЕТЕНСКИЙ
(к 120-летию со дня рождения)

DOI: 10.31857/S0032823522030055

27 февраля 2022 года исполнилось 120 лет со дня рождения профессора Московского государственного университета, члена-корреспондента АН СССР Леонида Николаевича Сретенского. Окончив реальное училище, в 1919 г. он поступил на физико-математический факультет Московского университета. По окончании в 1929 г. аспирантуры Института математики и механики МГУ им. М.В. Ломоносова защитил кандидатскую диссертацию на тему “Уравнения Вольтерра в плоскости комплексного переменного”. В 1934 г. Л.Н. Сретенский стал профессором кафедры гидродинамики Московского университета, где работал до последних дней жизни.

В 1936 г. за работы по теории волн Леониду Николаевичу без защиты диссертации была присуждена ученая степень доктора физико-математических наук. В 1939 г. по представлению академиков С.А. Чаплыгина, Н.Н. Лузина, П.П. Лазарева и А.Н. Крылова он был избран членом-корреспондентом АН СССР.

Его научная деятельность связана с ведущими научными учреждениями страны: ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского, Институтом теоретической геофизики АН СССР, Морским гидрофизическим институтом АН СССР.

Научное творчество Л.Н. Сретенского обширно и многообразно. Первые работы, которые он выполнил, будучи аспирантом, посвящены вопросам дифференциальной геометрии. В кандидатской диссертации, явившейся одной из первых работ по аналитической теории интегральных уравнений, Леонид Николаевич изучил влияние особых точек ядра и свободного члена на характер решения вблизи этих точек.

Широко известны фундаментальные исследования Л.Н. Сретенского по теоретической механике, геофизике, гидродинамике и газовой динамике. Диапазон научных интересов Леонида Николаевича очень велик: ему принадлежат глубокие и оригинальные труды по теории потенциала, теории газовых струй, теории приливов, общей линейной теории волн.

Значительное внимание он уделял вопросам теории ньютоновского потенциала, разработанные им в строго классическом направлении. Наиболее значителен цикл трудов Л.Н. Сретенского по гидроаэромеханике и геофизике. Большой вклад внес Л.Н. Сретенский в теорию волнового сопротивления, исследования движения подводных тел и колебания погруженного поплавка.

Л.Н. Сретенский изучил до того времени мало исследованную задачу распространения установившихся волн наиболее общего вида на поверхности трехмерного потока жидкости бесконечной глубины. Им получены значительные результаты по теории волн конечной амплитуды с использованием оригинального метода совместного применения переменных Эйлера и Лагранжа. Л.Н. Сретенский внес немалый вклад и в теорию возникновения волн на поверхности вязкой жидкости, в частности, дал формулу для вычисления волнового сопротивления постоянной системы нормальных давлений, перемещающихся равномерно по поверхности жидкости.

Много внимания Л.Н. Сретенский уделял теории распространения упругих волн в твердой оболочке Земли, возбуждаемых волнами, движущимися в покрывающей эту оболочку тяжелой жидкости. Его исследования послужили началом разработки теории возникновения волн цунами и предсказания наступления их по записям сейсмических станций.

Многие труды Леонида Николаевича в области газовой динамики посвящены точному и приближенному решениям некоторых задач теории распространения струй газа, движущихся с дозвуковыми скоростями.

Для всех работ Л.Н. Сретенского характерны разнообразие и оригинальность математических методов исследования, глубина и точность поставленных задач. Его исследования легли в основу новых путей решения важных проблем, в частности, в области геофизики, гидродинамики, дали начало ряду новых направлений в науке.

Л.Н. Сретенский – автор монографий “Теория волновых движений жидкости” (1936 г.), “Теория фигур равновесия жидкой вращающейся массы” (1938 г.), “Теория ньютоновского потенциала” (1946 г.). Ему принадлежат полные глубокого содержания работы о трудах Эйлера (1958 г.), А.М. Ляпунова (1948 г.), Пуанкаре (1963 г.), Фредгольма (1966 г.), С.А. Чаплыгина (1949, 1950, 1953, 1969 гг.) и Н.Н. Лузина (1953 г.), а также обзоры научных исследований в области теории волн и приливов (1968, 1969 гг.).

Л.Н. Сретенский проводил большую научно-общественную работу: ряд лет он был вице-президентом Московского математического общества, до последнего дня жизни был ответственным редактором журнала “Вестник Московского университета” (серия математики и механики). Начиная с 1945 года, когда Леонид Николаевич вошел в состав редакционной коллегии журнала ПММ, и в течение многих лет активно участвовал в издании журнала.

Под руководством Л.Н. Сретенского выполнено и защищено более 50 кандидатских диссертаций. Многие его ученики стали докторами наук. За большие заслуги в научной, педагогической и общественной деятельности Л.Н. Сретенский был награжден двумя орденами Ленина, орденом Трудового Красного Знамени и медалями.

Научное наследие Л.Н. Сретенского продолжают развивать в настоящее время его многочисленные ученики в Московском университете, институтах РАН и других научных организациях страны.

EDN: BSKURT
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2022, том 86, № 3, с. 299–312

УДК 531.36

ОБ АНАЛОГАХ СЛУЧАЯ БОБЫЛЕВА–СТЕКЛОВА ДЛЯ ГИРОСТАТА ПРИ ДЕЙСТВИИ МОМЕНТА ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

А. А. Косов[1,*]

[1] Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия
**e-mail: kosov_idstu@mail.ru*

Поступила в редакцию 10.02.2022 г.
После доработки 15.04.2022 г.
Принята к публикации 15.04.2022 г.

В статье изучаются уравнения движения гиростата вокруг неподвижной точки при действии момента гироскопических сил. Получены аналоги случая Бобылева–Стеклова, показано, что в отличие от классического случая твердого тела подходы Бобылева и Стеклова не являются эквивалентными и могут давать взаимодополняющие результаты. Найдены условия, при которых построены параметрические семейства частных решений, выражаемых эллиптическими функциями. Выделены шесть типов стационарных решений и методом интегральных связок Четаева получены условия их устойчивости.

Ключевые слова: гиростат, случай Бобылева–Стеклова, параметрические семейства частных решений, стационарные решения, устойчивость

DOI: 10.31857/S0032823522030134

1. Введение. В динамике твердого тела с неподвижной точкой важное значение имеют как классические случаи полной интегрируемости (Эйлера, Лагранжа и Ковалевской), так и случаи частичной интегрируемости, когда удается получить параметрические семейства точных решений. Такой частично интегрируемый случай с трехпараметрическим семейством решений был установлен в 1893г. независимо Д.К. Бобылевым [1] и В.А. Стекловым [2]. Хотя предложенные [1, 2] подходы формально различны, но, по существу, они эквивалентны, поэтому в монографиях по динамике твердого тела обычно используется единый термин “случай Бобылева–Стеклова” и излагается только один из этих подходов, например: [3] – подход Стеклова, [4] – подход Бобылева, [5] – случай Бобылева–Стеклова изложен на основе подхода Бобылева с использованием гамильтониана.

Начатые [1, 2] исследования, успешно продолжаются и в настоящее время по нескольким направлениям. Изучались [6] асимптотические движения тяжелого твердого тела, предельное движение которых описывается решением Бобылева–Стеклова. Исследовалась [7] задача об орбитальной устойчивости периодических решений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Бобылева–Стеклова, к которой был применен алгоритм Ковачича [8], что позволило установить при определенных условиях свойства решений периодической системы линейного приближения и получить на этой основе выводы об устойчивости.

Подход Бобылева был обобщен П.В. Харламовым [9] на гиростат, представленный твердым телом с полостями, заполненными идеальной жидкостью. При определенных условиях [9] можно получить семейство решений уравнений движения гиростата, выражаемое через эллиптические функции. Был получен [10] аналог случая Бобылева–Харламова для уравнений движения гиростата в псевдоевклидовом пространстве.

Объектом исследования в данной статье являются уравнения движения гиростата с неподвижной точкой при действии момента сил (потенциальных, гироскопических, циркулярно-гироскопических). Основные цели состоят в получении аналогов случая Бобылева–Стеклова для гиростата при действии момента гироскопических сил. В этом случае подходы Бобылева и Стеклова неэквивалентны, и дают взаимодополняющие результаты по построению параметрических семейств частных решений. Рассматриваются также вопросы построения стационарных решений и получения условий их устойчивости с помощью метода интегральных связок Четаева [11].

2. Уравнения движения, первые интегралы, постановка задачи

Рассмотрим векторную форму уравнений движения гиростата с неподвижной точкой под действием момента сил

$$I\dot{\omega} = (I\omega + \lambda)\times\omega + M \tag{2.1}$$

$$\dot{\gamma} = \gamma\times\omega \tag{2.2}$$

Здесь $\omega = \mathrm{col}(p,q,r)$ – вектор угловой скорости, $\gamma = \mathrm{col}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ – единичный вектор оси симметрии силового поля, заданные проекциями на оси связанной системы координат, $I = I^T > 0$ – симметричная положительно определенная матрица тензора инерции относительно неподвижной точки, $\boldsymbol{\lambda} = \mathrm{col}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ – вектор гиростатического момента, $M = M(t,\gamma,\omega)$ – вектор момента сил, действующих на гиростат. Будем, следуя [12–14], рассматривать в качестве первых интегралов следующие функции

$$J_1 = J_1(\gamma,\omega) = \omega^T I\omega + 2U(\gamma) = c_1 = \mathrm{const} \tag{2.3}$$

$$J_2 = J_2(\gamma.\omega) = \gamma^T(I\omega + \lambda) + \frac{1}{2}\gamma^T S\gamma = c_2 = \mathrm{const} \tag{2.4}$$

$$J_3 = J_3(\gamma) = \gamma^T\gamma = 1, \tag{2.5}$$

где $S = S^T$ – некоторая симметричная матрица.

Отметим, что геометрический интеграл (2.5) имеет место при любом выборе момента $M = M(t,\gamma,\omega)$. Но для того, чтобы у системы (2.1), (2.2) существовали интеграл энергии (2.3) и интеграл площадей (2.4), момент $M = M(t,\gamma,\omega)$ не может быть произвольным, а должен удовлетворять определенным условиям. Эти необходимые и достаточные условия даются следующим утверждением, доказанным в [15].

Утверждение 1. Для того, чтобы функции (2.3) и (2.4) были первыми интегралами для системы (2.1), (2.2) необходимо и достаточно, чтобы момент M был представим в виде

$$M = \gamma\times\frac{\partial U}{\partial\gamma} - \omega\times S\gamma + L(t,\gamma,\omega)\,\omega\times\gamma, \tag{2.6}$$

где $L(t,\gamma,\omega)$ – произвольная функция.

Данное утверждение показывает, что первые интегралы (2.3) и (2.4) определяют момент M в правой части (2.1) единственным образом с точностью до циркулярно-гироскопической составляющей $L(t,\gamma,\omega)\,\omega\times\gamma$. Первые два слагаемых в формуле момента (2.6) представляют собой соответственно момент потенциальных сил $\gamma\times\dfrac{\partial U}{\partial\gamma}$ с потенциалом $U(\gamma)$ и момент гироскопических сил $-\omega\times S\gamma$, определяемый матрицей S.

Далее всюду будем считать матрицу инерции диагональной $I = \mathrm{diag}(A,B,C)$, потенциал линейным $U = a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3$ (это соответствует тяжелому твердому телу), и задающую момент гироскопических сил матрицу также диагональной $S = \mathrm{diag}(k_1, k_2, k_3)$. Запишем систему (2.1), (2.2) в координатной форме

$$\begin{aligned} A\dot{p} &= (B - C)qr + \lambda_2 r - \lambda_3 q + c\gamma_2 - b\gamma_3 + k_2\gamma_2 r - k_3\gamma_3 q + L(q\gamma_3 - r\gamma_2) \\ B\dot{q} &= (C - A)pr + \lambda_3 p - \lambda_1 r + a\gamma_3 - c\gamma_1 + k_3\gamma_3 p - k_1\gamma_1 r + L(r\gamma_1 - p\gamma_3) \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered} C\dot{r} = (A - B)pq + \lambda_1 q - \lambda_2 p + b\gamma_1 - a\gamma_2 + k_1\gamma_1 q - k_2\gamma_2 p + L(p\gamma_2 - q\gamma_1) \\ \dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2 \end{gathered} \tag{2.8}$$

Здесь $L = L(t, \gamma, \omega)$ – некоторая непрерывная функция t, γ, ω.

Задачи исследования в данной статье состоят в том, чтобы:

1) установить аналоги случая Бобылева–Стеклова [1, 2] для системы (2.7), (2.8) и выполнить для них интегрирование уравнений движения;

2) выявить стационарные решения, которые задаются постоянными, обращающими правые части уравнений движения (2.7), (2.8) в нуль;

3) используя первые интегралы получить методом интегральных связок Четаева [11] достаточные условия устойчивости выявленных стационарных решений.

В ходе анализа установлено, что аналоги случая Бобылева–Стеклова для системы (2.7), (2.8) могут быть получены только при следующих дополнительных условиях: $\lambda_3 = 0$, $a = c = 0$, $k_2 = k_3 = 0$, $L = 0$. При этом уравнения движения (2.7) перепишутся в виде

$$\begin{gathered} A\dot{p} = (B - C)qr + \lambda_2 r - b\gamma_3 \\ B\dot{q} = (C - A)pr - \lambda_1 r - k_1\gamma_1 r \\ C\dot{r} = (A - B)pq + \lambda_1 q - \lambda_2 p + b\gamma_1 + k_1\gamma_1 q \end{gathered} \tag{2.9}$$

Если гиростатический момент отсутствует $(\lambda_1 = \lambda_2 = 0)$, момент гироскопических сил не действует $(k_1 = 0)$, и моменты инерции удовлетворяют условию $B = 2A$, то система (2.8), (2.9) соответствует классическому случаю Бобылева–Стеклова [1, 2].

Интегралы (2.3) и (2.4) для системы (2.8), (2.9) перепишутся так

$$J_1 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2b\gamma_2 = c_1 = \mathrm{const} \tag{2.10}$$

$$J_2 = \gamma_1(Ap + \lambda_1) + \gamma_2(Bq + \lambda_2) + Cr\gamma_3 + \frac{1}{2}k_1\gamma_1^2 = c_2 = \mathrm{const} \tag{2.11}$$

3. Построение решений методом Стеклова. В этом разделе для построения решений уравнений гиростата с моментом гироскопических сил (2.8), (2.9) применим подход, предложенный В.А. Стекловым [2] для уравнений тяжелого твердого тела (см. также [3]). Будем, следуя [2], искать решение (2.8), (2.9) в виде

$$p(t) = a_0 + a_1\gamma_1(t), \quad q(t) = q_0 = \mathrm{const}, \quad r(t) = 0, \tag{3.1}$$

где a_0, a_1 – некоторые вещественные постоянные, подлежащие определению (считается [2, 3], что $a_0 = 0$). Подставляя (3.1) в систему (2.9), придем к тождествам

$$\begin{gathered} Aa_1\dot{\gamma}_1 \equiv -b\gamma_3 \\ [(A - B)a_0 q_0 + \lambda_1 q_0 - \lambda_2 a_0] + [(A - B)a_1 q_0 - \lambda_2 a_1 + b + k_1 q_0]\gamma_1 \equiv 0 \end{gathered}$$

Подставляя (3.1) в систему (2.8), получим систему трех дифференциальных уравнений для нахождения $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

$$\dot{\gamma}_1 = -q_0\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = (a_0 + a_1\gamma_1)\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_3 = q_0\gamma_1 - (a_0 + a_1\gamma_1)\gamma_2 \tag{3.2}$$

Отсюда следует, что $q_0 \neq 0, a_0, a_1$ должны удовлетворять системе трех алгебраических уравнений

$$[(A-B)q_0 - \lambda_2]a_0 + \lambda_1 q_0 = 0 \tag{3.3}$$
$$[(A-B)q_0 - \lambda_2]a_1 + b + k_1 q_0 = 0; \quad q_0 = b/(Aa_1)$$

В зависимости от условий на параметры $A, B, b, \lambda_1, \lambda_2, k_1$ система (3.3) имеет следующие решения q_0, a_0, a_1:

если $\lambda_2 = k_1 = 0$, $B = 2A$, то $a_0 = \lambda_1/A$, $a_1 = b/(Aq_0)$, а $q_0 \neq 0$ произвольное вещественное число;

если $\lambda_1 = 0$, $(A-B)b + k_1\lambda_2 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $B \neq A$, то $q_0 = \lambda_2/(A-B)$, $a_1 = b(A-B)/(A\lambda_2)$, a_0 – произвольное вещественное число;

если $k_1 \neq 0$, $B \neq A$, $D_1 = b^2(2A-B)^2 + 4Abk_1\lambda_2 \geq 0$, то в качестве q_0 можно взять те из двух чисел $q_0 = \left(b(B-2A) \pm \sqrt{D_1}\right)/(2Ak_1)$, которые отличны от нуля и от $\lambda_2/(A-B)$, а a_0 и a_1 вычисляются по формулам $a_0 = (\lambda_1 q_0)/((B-A)q_0 + \lambda_2)$, $a_1 = b/(Aq_0)$.

Проведем интегрирование системы (3.2). Эта система имеет интегралы $J_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ и $J_4 = a_0\gamma_1 + 0.5a_1\gamma_1^2 + q_0\gamma_2 = c_4 = \text{const}$. Используя эти интегралы, выразим γ_2 и γ_3 через γ_1:

$$\gamma_2 = \frac{1}{q_0}\left(c_4 - a_0\gamma_1 - 0.5a_1\gamma_1^2\right)$$
$$\gamma_3 = F(\gamma_1) = \pm\sqrt{1 - \gamma_1^2 - \frac{1}{q_0^2}\left(c_4 - a_0\gamma_1 - 0.5\gamma_1^2\right)^2} \tag{3.4}$$

Теперь $\gamma_1(t)$ находится из первого уравнения системы (3.2) обращением эллиптического интеграла

$$\int \frac{d\gamma_1}{F(\gamma_1)} = -q_0(t + c_5) \tag{3.5}$$

Тем самым установлена справедливость следующих утверждений.

Утверждение 2. В случае $\lambda_2 = k_1 = 0$, $B = 2A$ система (2.8), (2.9) имеет семейство решений (3.1), (3.4), (3.5), где $q_0 \neq 0$ произвольное вещественное число, $a_0 = \lambda_1/A$, $a_1 = b/(Aq_0)$.

Утверждение 3. В случае $\lambda_1 = 0$, $(A-B)b + k_1\lambda_2 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $B \neq A$ система (2.8), (2.9) имеет семейство решений (3.1), (3.4), (3.5), где $q_0 = \lambda_2/(A-B)$, $a_1 = b(A-B)/(A\lambda_2)$, a_0 – произвольное вещественное число.

Утверждение 4. В случае $k_1 \neq 0$, $B \neq A$, $D_1 = b^2(2A-B)^2 + 4Abk_1\lambda_2 \geq 0$, система (2.8), (2.9) имеет семейство решений (3.1), (3.4), (3.5), где в качестве q_0 допускаются те из двух чисел $q_0^{\pm} = \left[b(B-2A) \pm \sqrt{D_1}\right]/(2Ak_1)$, которые отличны от нуля и от $\lambda_2/(A-B)$, а числа a_0 и a_1 даются формулами $a_0 = \lambda_1 q_0/((B-A)q_0 + \lambda_2)$, $a_1 = b/(Aq_0)$.

Тем самым установлено, что при условиях утверждений 2–4 упоминаемые в них решения системы (2.8), (2.9) выражаются эллиптическими функциями времени. Утверждение 2 дает трехпараметрическое семейство решений (параметры q_0, c_4, c_5). Утверждение 3 дает трехпараметрическое семейство решений (параметры a_0, c_4, c_5). Утверждение 4 дает два двухпараметрических семейства решений (параметры c_4, c_5).

Как известно [3], эллиптический интеграл вида (3.5) берется в элементарных функциях только в случаях, когда у полинома четвертой степени в подкоренном выражении имеются кратные корни. Иногда это дает возможность получить точное решение системы уравнений гиростата (2.8), (2.9), представленное элементарными функциями в явном виде.

Пример 1. Будем рассматривать трехпараметрическое семейство систем вида (2.8), (2.9), где свободными параметрами являются A, C, λ_2, удовлетворяющие неравенствам $0 < A < C < 3A$, $\lambda_2^2 \neq A^2$, а остальные коэффициенты B, λ_1, k_1, b выражаются через параметры по формулам

$$B = 2A, \quad \lambda_1 = -\frac{\sqrt{3}(A + \lambda_2)}{9}, \quad k_1 = \frac{8\sqrt{3}\lambda_2}{9}, \quad b = \frac{8\sqrt{3}A}{9}$$

Тогда из утверждения 4 следует, что каждая система из названного семейства имеет точное решение

$$p(t) = \frac{4\sqrt{3}}{9}\frac{t^2 - 6}{t^2 + 3} - \frac{\sqrt{3}}{9}, \quad q(t) = 1, \quad r(t) = 0$$

$$\gamma_1(t) = \frac{1}{2}\frac{t^2 - 6}{t^2 + 3}, \quad \gamma_3(t) = -\frac{t}{t^2 + 3} + \frac{\left(t^2 - 6\right)t}{\left(t^2 + 3\right)^2} \tag{3.6}$$

$$\gamma_2(t) = \frac{5\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{18}\frac{t^2 - 6}{t^2 + 3} - \frac{\sqrt{3}}{9}\frac{\left(t^2 - 6\right)^2}{\left(t^2 + 3\right)^2}$$

Очевидно, что для всех компонент решения (3.6) существуют пределы

$$\lim_{t\to\pm\infty} p(t) = p^* = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \lim_{t\to\pm\infty} q(t) = q^* = 1, \quad \lim_{t\to\pm\infty} r(t) = r^* = 0$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} \gamma_1(t) = \gamma_1^* = \frac{1}{2}, \quad \lim_{t\to\pm\infty} \gamma_2(t) = \gamma_2^* = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lim_{t\to\pm\infty} \gamma_3(t) = \gamma_3^* = 0$$

Таким образом, данное решение описывает случай такого движения гиростата, когда далекое прошлое и далекое будущее абсолютно симметричны. Система медленно “выходит” из неустойчивого по Ляпунову стационарного состояния $(p^*, q^*, r^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^*)$, в котором находилась в бесконечно далеком прошлом (при $t \to -\infty$), совершает интенсивное движение в настоящем (на сравнительно коротком интервале времени вблизи $t = 0$), и медленно возвращается в то же самое неустойчивое стационарное состояние в бесконечно далеком будущем (при $t \to +\infty$). При этом постоянно действуют как момент потенциальных сил ($b \neq 0$), так и момент гироскопических сил ($k_1 \neq 0$), присутствует также постоянный гиростатический момент ($\lambda \neq 0$).

Отметим, что в отличие от классического случая Бобылева–Стеклова [1, 2] для тяжелого твердого тела, для гиростата при действии момента гироскопических сил (т.е. при $k_1 \neq 0$), уже не удается получить в утверждениях 2 и 3 семейство решений с произвольным $q_0 \neq 0$. Зато в них не требуется выполнения условия на моменты инерции $B = 2A$.

4. Построение решений методом Бобылева. В этом разделе для построения решений уравнений гиростата с моментом гироскопических сил (2.8), (2.9) применим подход, предложенный Д.К. Бобылевым [1] для уравнений тяжелого твердого тела и распространенный на гиростат (без момента гироскопических сил) П.В. Харламовым [9]). Будем, следуя [1], искать решение системы (2.8), (2.9) в виде

$$q(t) = q_0 = \mathrm{const}, \quad r(t) = 0 \tag{4.1}$$

Подставляя (4.1) в систему (2.9), придем к тождеству

$$(A - B)\,pq_0 + \lambda_1 q_0 - \lambda_2 p + b\gamma_1 + k_1 q_0 \gamma_1 \equiv 0$$

Отсюда находим

$$\gamma_1 = \frac{1}{b + k_1 q_0}\left[(\lambda_2 + (B - A)\,q_0)\,p - \lambda_1 q_0\right] \tag{4.2}$$

Из интеграла (2.10), используя равенства (4.1), получим

$$\gamma_2 = \frac{1}{2b}\left[c_1 - Ap^2 - Bq_0^2\right] \tag{4.3}$$

Первое уравнение системы (2.9) теперь записывается в виде

$$A\dot{p} = -b\gamma_3 = \mp b\sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2} = \mp b\sqrt{P_4(p)}, \tag{4.4}$$

где полином четвертой степени $P_4(p)$ записывается с учетом (4.2) и (4.3) так

$$P_4(p) = 1 - \frac{1}{4b^2}\left(c_1 - Ap^2 - Bq_0^2\right)^2 - \frac{1}{(b + k_1 q_0)^2}(((B - A)\,q_0 + \lambda_2)\,p - \lambda_1 q_0)^2$$

Однако пользоваться уравнением (4.4), которое сводится к обращению эллиптического интеграла, можно только при некоторых дополнительных условиях на параметры системы (2.9). Эти условия порождаются необходимостью соблюдения интеграла площадей (2.11). Подставляя γ_1, γ_2 из (4.2), (4.3) в интеграл (2.11) и учитывая (4.1), перепишем этот интеграл в виде полинома по степеням p следующим образом

$$J_2 = K_2 p^2 + K_1 p + K_0 \tag{4.5}$$

Здесь коэффициенты K_j полинома (4.5) задаются выражениями

$$K_2 = -\frac{A}{2b(b + k_1 q_0)}\left[b((2A - B)\,q_0 - \lambda_2) + k_1 q_0 (Bq_0 + \lambda_2)\right]$$

$$K_1 = -\frac{\lambda_1}{b + k_1 q_0}\left[((2A - B)\,q_0 - \lambda_2)\right]$$

$$K_0 = -\frac{G}{2b(b + k_1 q_0)}$$

$$G = B^2 k_1 q_0^4 + \left(B^2 b + Bk_1\lambda_2\right)q_0^3 + (Bb\lambda_2 - Bc_1 k_1)\,q_0^2 + \left(2b\lambda_1^2 - Bbc_1 - c_1 k_1 \lambda_2\right)q_0 - bc_1\lambda_2$$

Чтобы полином (4.5) был интегралом, т.е. сохранял постоянное значение на любом решении $p(t)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты удовлетворяли равенствам $K_1 = 0$, $K_2 = 0$. Отсюда следует, что
либо

$$\begin{cases}(2A - B)\,q_0 - \lambda_2 = 0\\ k_1 q_0 (Bq_0 + \lambda_2) = 0,\end{cases} \tag{4.6}$$

либо

$$\begin{cases}\lambda_1 = 0\\ b((2A - B)\,q_0 - \lambda_2) + k_1 q_0 (Bq_0 + \lambda_2) = 0\end{cases} \tag{4.7}$$

Используя три различных решения системы уравнений (4.6) на параметры, а также уравнение (4.4), приходим к справедливости следующих трех утверждений.

Утверждение 5. В случае $\lambda_2 = k_1 = 0$, $B = 2A$ система (2.8), (2.9) имеет семейство решений, для которых $q(t) = q_0 = \mathrm{const}$, $r(t) = 0$, $p(t)$ находится обращением эллиптического интеграла

$$\int \frac{dp}{\sqrt{P_4(p)}} = \mp \frac{b}{A}(t + c_5); \qquad P_4(p) = 1 - \frac{q_0^2}{b^2}(Ap - \lambda_1)^2 - \frac{1}{4b^2}\left(c_1 - Ap^2 - Bq_0^2\right)^2,$$

после чего $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ определяются по формулам (4.2), (4.3), а $\gamma_3(t)$ находится дифференцированием $\gamma_3(t) = -\frac{A}{b}\dot{p}(t)$. Здесь q_0 произвольное вещественное число.

Утверждение 6. В случае $k_1 = 0$, $B \neq 2A$ система (2.8), (2.9) имеет семейство решений, для которых $q(t) = q_0 = \lambda_2/(2A - B) = \mathrm{const}$, $r(t) = 0$, $p(t)$ находится обращением эллиптического интеграла

$$\int \frac{dp}{\sqrt{P_4(p)}} = \mp \frac{b}{A}(t + c_5),$$

где $P_4(p) = 1 - \frac{\lambda_2^2}{b^2(2A - B)^2}(Ap - \lambda_1)^2 - \frac{1}{4b^2}\left(c_1 - Ap^2 - \frac{B\lambda_2^2}{(2A - B)^2}\right)^2$. После чего функции $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ определяются по формулам (4.2), (4.3), а $\gamma_3(t)$ находится дифференцированием $\gamma_3(t) = -\frac{A}{b}\dot{p}(t)$. Здесь q_0 не произвольное, а фиксированное вещественное число.

Утверждение 7. В случае $\lambda_2 = 0$, $k_1 \neq 0$ система (2.8), (2.9) имеет семейство решений, для которых $q(t) = q_0 = 0 = \mathrm{const}$, $r(t) = 0$, $\gamma_1(t) = 0$, $p(t)$ находится обращением эллиптического интеграла

$$\int \frac{dp}{\sqrt{P_4(p)}} = \mp \frac{b}{A}(t + c_5),$$

где $P_4(p) = 1 - \frac{1}{4b^2}\left(c_1 - Ap^2\right)^2$. После чего функция $\gamma_2(t)$ определяется по формуле, (4.2), а $\gamma_3(t)$ находится дифференцированием $\gamma_3(t) = -\frac{A}{b}\dot{p}(t)$.

Утверждение 5 дает трехпараметрическое семейство решений (параметры q_0, c_1, c_5). Утверждения 6 и 7 дают двухпараметрические семейства решений (параметры c_1, c_5).

Используя решение системы уравнений (4.7) на параметры, а также уравнение (4.4), приходим к справедливости следующего утверждения.

Утверждение 8. В случае $\lambda_1 = 0$, $k_1 \neq 0$, $D_2 = \left(b(2A - B) + k_1\lambda_2\right)^2 + 4Bbk_1\lambda_2 \geq 0$, система (2.8), (2.9) имеет семейство решений, для которых $q(t) = q_0 = \mathrm{const}$, $r(t) = 0$, $p(t)$ находится обращением эллиптического интеграла

$$\int \frac{dp}{\sqrt{P_4(p)}} = \mp \frac{b}{A}(t + c_5),$$

где $P_4(p) = 1 - \frac{1}{(b + k_1 q_0)^2}\left((B - A)q_0 + \lambda_2)p\right)^2 - \frac{1}{4b^2}\left(c_1 - Ap^2 - Bq_0^2\right)^2$. После чего функции $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ определяются по формулам (4.2), (4.3), а $\gamma_3(t)$ находится дифференцированием $\gamma_3(t) = -\dfrac{A}{b}\dot{p}(t)$. Здесь в качестве q_0 допускаются те из двух чисел $q_0^{\pm} = [-(b(2A-B)+k_1\lambda_2) \mp \sqrt{D_2}]/(2Bk_1)$, которые отличны от $\widehat{q_0} = -b/k_1$.

Утверждение 8 дает два двухпараметрических семейства решений (параметры c_1, c_5).

Тем самым установлено, что при условиях утверждений 5–8 упоминаемые в них решения системы (2.8), (2.9) выражаются эллиптическими функциями времени. Отметим, что условия утверждений 2 и 5 совпадают, поэтому они дают практически одно и то же семейство решений (кроме ситуации $q(t) = q_0 = 0$, не охватываемой утверждением 2). Для случая тяжелого твердого тела, когда дополнительно к условиям утверждений 2 и 5 будет и $\lambda_1 = 0$, методы Бобылева [1] и Стеклова [2] эквивалентны, поэтому в монографиях обычно излагают под общим названием “случай Бобылева–Стеклова” только какой-либо один из этих методов. В более общем случае гиростата с моментом гироскопических сил, когда $k_1 \neq 0$, как следует из утверждений 3, 4, 6, 7, 8 методы Стеклова и Бобылева не следуют один из другого и могут давать взаимодополняющие результаты. В частности, решения, полученные выше в примере 1 на основе утверждения 4, не могут быть получены из утверждений 5–8, так как в этом примере все параметры не нулевые.

Пример 2. Рассмотрим систему (2.8), (2.9) при следующих значениях параметров $B = A$, $\lambda_2 = 0$, $k_1 \neq 0$, $b > 0$ и будем искать решение на нулевом уровне интеграла энергии $c_1 = 0$, используя утверждение 7. Тогда получим выраженное через функции Якоби решение $q(t) = r(t) = \gamma_1(t) \equiv 0$, $p(t) = -\sqrt{\dfrac{2b}{A}}\,\mathrm{JacobiSN}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{Ab}}(t + c_5), \sqrt{-1}\right)$, $\gamma_2(t) = -\dfrac{A}{2b}p^2$, $\gamma_3(t) = -\dfrac{A}{2b}\dot{p}$. Отметим, что методом Стеклова это решение не находится, так как параметры не удовлетворяют системе (3.3).

5. Стационарные решения. Под стационарными решениями будем понимать такие постоянные $(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}, \overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \overline{\gamma}_3)$, которые обращают в нуль правые части системы (2.8), (2.9). Не останавливаясь на элементарном анализе получения таких решений, приведем шесть типов стационарных решений (в порядке возрастания количества ненулевых компонент), а также условия на параметры системы (2.8), (2.9), при которых эти решения имеют место.

а) При любых значениях параметров $A, B, C, \lambda_1, \lambda_2 k_1$ система (2.8), (2.9) имеет стационарное решение

$$\overline{p} = \overline{q} = \overline{r} = \overline{\gamma_1} = \overline{\gamma_3} = 0, \quad \overline{\gamma_2} = \sigma = \pm 1$$

б) При условии $\lambda_1 = 0$ система (2.8), (2.9) имеет стационарное решение

$$\overline{p} = \overline{r} = \overline{\gamma_1} = \overline{\gamma_3} = 0, \quad \overline{\gamma_2} = \sigma = \pm 1; \quad \overline{q} \in R - \text{произвольно}$$

в) При условии $\lambda_2 \neq 0$ система (2.8), (2.9) имеет стационарное решение

$$\overline{q} = \overline{r} = \overline{\gamma_3} = \overline{\gamma_2} = 0, \quad \overline{\gamma_1} = \sigma = \pm 1, \quad \overline{p} = \frac{\sigma b}{\lambda_2}$$

г) При условиях $A \neq B$, $b(A - B) + k_1\lambda_2 \neq 0$, $\left|\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{b(A-B)+k_1\lambda_2}\right| < 1$ система (2.8), (2.9) имеет стационарное решение

$$\overline{r} = \overline{\gamma_3} = 0, \quad \overline{q} = \frac{\lambda_2}{A - B}, \quad \overline{\gamma_1} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{b(A - B) + k_1\lambda_2},$$
$$\overline{\gamma_2} = \sigma\sqrt{1 - \overline{\gamma}_1^2}, \quad \sigma = \pm 1, \quad \overline{p} = \frac{\lambda_2}{(A - B)}\frac{\overline{\gamma_1}}{\overline{\gamma_2}}$$

д) При условиях $k_1 \neq 0$, $b(A - B) + k_1\lambda_2 \neq 0$ полагаем

$$\overline{r} = \overline{\gamma_3} = 0, \quad \overline{q} = -\frac{b}{k_1}, \quad \overline{p} = \frac{\lambda_1 b}{b(A - B) + k_1\lambda_2},$$

$$T = \frac{\lambda_1 k_1}{b(A - B) + k_1\lambda_2}, \quad \overline{\gamma_2} = \frac{\sigma}{\sqrt{1 + T^2}}, \quad \sigma = \pm 1, \quad \overline{\gamma_1} = -T\overline{\gamma_2}$$

В случаях а)–д) стационарные решения вычисляются через параметры по явным формулам.

е) При условии $\lambda_1 \neq 0$ стационарное решение строится следующим образом. Положим $\overline{r} = \overline{\gamma_3} = 0$, $\overline{q} \in R$ – произвольно, но $\overline{q} \neq \lambda_2/(A - B)$ и $\overline{q} \neq 0$. Далее вычислим $a_0 = \lambda_1\overline{q}/[(B - A)\overline{q} + \lambda_2]$, $a_1 = (b + k_1\overline{q})/[(B - A)\overline{q} + \lambda_2]$, и рассмотрим уравнение

$$z^2 + \frac{\overline{q}^2 z^2}{(a_0 + a_1 z)^2} = 1$$

Это уравнение всегда имеет либо 2, либо 4 вещественных корня, которые не превосходят 1 по модулю. Положим $\overline{\gamma_1} = z$ – любому из таких корней. После чего вычислим $\overline{p} = a_0 + a_1\overline{\gamma_1}$, $\overline{\gamma_2} = \frac{\overline{q}}{\overline{p}}\overline{\gamma_1}$. Компоненты стационара $\overline{\gamma_1}$, $\overline{p}$, $\overline{\gamma_2}$ получаются зависящими от выбора $\overline{q} \in R$. Таким образом, в случае е) у системы (2.8), (2.9) имеется континуум стационарных решений.

6. Анализ устойчивости стационарных решений. Для получения достаточных условий устойчивости стационарных решений воспользуемся методом интегральных связок, предложенным Н.Г. Четаевым [11]. Введем обозначения для отклонений от стационарного решения $(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}, \overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \overline{\gamma}_3)$

$$x_1 = p - \overline{p}, \quad x_2 = q - \overline{q}, \quad x_3 = r - \overline{r}$$

$$x_4 = \gamma_1 - \overline{\gamma}_1, \quad x_5 = \gamma_2 - \overline{\gamma}_2, \quad x_6 = \gamma_3 - \overline{\gamma}_3$$

В этих переменных интегралы уравнений возмущенного движения запишутся следующим образом:

$$J_1 - \overline{J}_1 = 2A\overline{p}x_1 + 2B\overline{q}x_2 + 2C\overline{r}x_3 + 2bx_5 + Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} J_2 - \overline{J}_2 = {} & A\overline{\gamma}_1x_1 + B\overline{\gamma}_2x_2 + C\overline{\gamma}_3x_3 + \\ & + (A\overline{p} + \lambda_1 + k_1\overline{\gamma}_1)x_4 + (B\overline{q} + \lambda_2)x_5 + (C\overline{r})x_6 + \\ & + Ax_1x_4 + Bx_2x_5 + Cx_3x_6 + \frac{1}{2}\left(k_1x_4^2\right) \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$J_3 - \overline{J}_3 = 2\overline{\gamma}_1x_4 + 2\overline{\gamma}_2x_5 + 2\overline{\gamma}_3x_6 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \tag{6.3}$$

Здесь и далее через $\overline{J}_i$ обозначено значение интеграла J_i на стационарном решении.

Рассмотрим вначале условия устойчивости стационарных решений для случая а). Функцию Ляпунова строим в виде линейной связки (линейной комбинации) интегралов (6.1) и (6.3), которая для решений типа а) примет вид

$$V = \alpha_1\left(J_1 - \bar{J}_1\right) + \alpha_3\left(J_3 - \bar{J}_3\right) =$$
$$= \alpha_1\left(2bx_5 + Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2\right) + \alpha_3\left(2\bar{\gamma}_2 x_5 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2\right)$$

Коэффициенты α_i, $i = 1,3$ с целью уничтожения линейных слагаемых в связке выберем следующим образом $\alpha_1 = 1$, $\alpha_3 = -b\sigma$. Тогда получаем $V = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 - b\sigma\left(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2\right)$. Для стационарного решения типа а), отвечающего условию $\sigma = -\operatorname{sign}(b)$, эта функция положительно определена. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 9. Соответствующее $\sigma = -\operatorname{sign}(b)$ стационарное решение типа а) устойчиво по Ляпунову.

Рассмотрим теперь вопрос о необходимых условиях устойчивости стационарных решений. Пусть Q есть 6×6 матрица линейной системы $\dot{x} = Qx$, получаемой линеаризацией системы (2.8), (2.9) в окрестности стационарного решения $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$. Эта матрица Q есть матрица Якоби, составленная из частных производных от правых частей (2.8), (2.9), вычисленных на стационарном решении $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$. Явный вид этой матрицы Q приводить не будем ввиду ее громоздкости. Характеристическое уравнение матрицы Q имеет вид $s^2\left(s^4 + q_1 s^2 + q_2\right) = 0$, где коэффициенты q_1 и q_2 зависят от параметров системы (2.8), (2.9) и выбранного стационарного решения.

Необходимые условия устойчивости стационарного решения $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$ даются неравенствами $q_1 \ge 0$, $q_2 \ge 0$, $q_1^2 - 4q_2 \ge 0$. Если хотя бы одно из этих трех неравенств нарушено, то у характеристического уравнения имеется по крайней мере один корень с положительной вещественной частью, что по теореме Ляпунова влечет неустойчивость соответствующего решения.

Для стационарного решения типа а), отвечающего $\sigma = -\operatorname{sign}(b)$, необходимые условия устойчивости заведомо выполнены. Для стационарного решения типа а), отвечающего $\sigma = \operatorname{sign}(b)$, получаем следующие коэффициенты характеристического уравнения

$$q_1 = \frac{A\lambda_1^2 + B\lambda_2^2 - B|b|(A+C)}{ABC}, \quad q_2 = \frac{|b|\left(B|b| - \lambda_1^2\right)}{ABC}$$

Поэтому это стационарное решение будет неустойчивым при выполнении хотя бы одного из трех следующих неравенств

$$B|b| - \lambda_1^2 < 0, \quad A\lambda_1^2 + B\lambda_2^2 - B|b|(A+C) < 0$$
$$\left(A\lambda_1^2 + B\lambda_2^2\right)^2 - 2B|b|\left(A(A-C)\lambda_1^2 + B(A+C)\lambda_2^2\right) + B^2 b^2 (A-C)^2 < 0$$

При $\lambda_1^2 > 0$ и малых $|b|$ будет выполняться первое неравенство, а при больших $|b|$ второе. В случае отсутствия гиростатического момента $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ выполняется второе неравенство. Однако нет никаких оснований утверждать, что соответствующее $\sigma = \operatorname{sign}(b)$ стационарное решение типа а) всегда (т.е. при любых значениях параметров) неустойчиво по линейному приближению. Например, для следующих значений параметров $A = 2$, $B = 3$, $C = 4$, $b = 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ при $\sigma = 1 = \operatorname{sign}(b)$ коэффициенты характеристического уравнения равны $q_1 = 4/3$ и $q_2 = 1/12$ и оно не имеет корней с положительной вещественной частью.

Перейдем теперь к получению условий устойчивости стационарных решений $(\overline{p},\overline{q},\overline{r},\overline{\gamma}_1,\overline{\gamma}_2,\overline{\gamma}_3) = (0,\overline{q},0,0,\overline{\gamma}_2,0)$ типа б), предполагая, что $\lambda_1 = 0$.

Будем строить функцию Ляпунова по методу Четаева [11] в виде связки интегралов уравнений возмущенного движения (6.1)–(6.3)

$$V = (J_1 - \overline{J}_1) + \alpha_2 (J_2 - \overline{J}_2) + \alpha_3 (J_3 - \overline{J}_3) + \beta_2 (J_2 - \overline{J}_2)^2 + \beta_3 (J_3 - \overline{J}_3)^2$$

Коэффициенты α_i, $i = 2,3$ с целью уничтожения линейных слагаемых в связке выберем следующим образом

$$\alpha_2 = -\frac{2\overline{q}}{\overline{\gamma}_2} = -2\sigma\overline{q}, \quad \alpha_3 = \overline{q}\,(B\overline{q} + \lambda_2) - b\sigma$$

Тогда получаем

$$V = \left(Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2\right) - 2\sigma\overline{q}\left(Ax_1x_4 + Bx_2x_5 + Cx_3x_6 + \frac{1}{2}k_1x_4^2\right) +$$
$$+ \left(\overline{q}\,(B\overline{q} + \lambda_2) - b\sigma\right)\left(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2\right) +$$
$$+ \beta_2\left(B\overline{\gamma}_2x_2 + (B\overline{q} + \lambda_2)\,x_5\right)^2 + \beta_3\left(2\overline{\gamma}_2x_5\right)^2 + o\left(\|x\|^2\right)$$

Для положительной определенности квадратичной части $V_2 = V - o\left(\|x\|^2\right)$ интеграла V при достаточно больших $\beta_i > 0$ необходимо и достаточно [16], чтобы V_2 была положительно определенной на множестве $\Theta = \{B\overline{\gamma}_2x_2 + (B\overline{q} + \lambda_2)\,x_5 = 0,\ 2\overline{\gamma}_2x_5 = 0\}$. На этом множестве Θ получаем

$$V_2 = Ax_1^2 - 2\sigma\overline{q}Ax_1x_4 + \left(-\sigma\overline{q}k_1 + \overline{q}\,(B\overline{q} + \lambda_2) - b\sigma\right)x_4^2 +$$
$$+ Cx_3^2 - 2\sigma\overline{q}Cx_3x_6 + \left(\overline{q}\,(B\overline{q} + \lambda_2) - b\sigma\right)x_6^2$$

Применяя критерий Сильвестра к двум квадратичным формам, из суммы которых состоит V_2, получаем условия положительной определенности интеграла V:

$$\Delta_1 = (B - A)\,\overline{q}^2 + \overline{q}\,(\lambda_2 - k_1\sigma) - b\sigma > 0, \quad \Delta_2 = (B - C)\,\overline{q}^2 + \overline{q}\lambda_2 - b\sigma > 0 \tag{6.4}$$

Из теоремы Ляпунова теперь следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 10. Каждое стационарное решение $(0,\overline{q},0,0,\overline{\gamma}_2,0)$ типа б), для которого выполнены неравенства (6.4), является устойчивым в смысле Ляпунова.

Отметим, что нарушение условий (6.4) еще не означает, что соответствующее стационарное решение будет неустойчиво, поскольку условия (6.4) являются только достаточными. Чтобы сравнить достаточные условия устойчивости (6.4) с необходимыми отметим, что для стационара типа б) неравенство $q_2 \geq 0$ для коэффициента характеристического уравнения $s^2\left(s^4 + q_1s^2 + q_2\right) = 0$ выражается следующим образом $q_2 = \Delta_1\Delta_2/AC \geq 0$.

Аналогично доказательству утверждения 10 методом Н.Г. Четаева доказываются следующие утверждения.

Утверждение 11. Каждое стационарное решение $(\overline{p}, 0, 0, \overline{\gamma}_1, 0, 0)$ типа в), для которого выполнены неравенства

$$(A - C)\frac{b^2}{\lambda_2^2} + \frac{b(\sigma\lambda_1 + k_1)}{\lambda_2} > 0, \quad (A - B)\frac{b^2}{\lambda_2^2} + \frac{b(\sigma\lambda_1 + k_1)}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2^2}{A} > 0$$

является устойчивым в смысле Ляпунова.

Утверждение 12. Каждое стационарное решение $(\overline{p}, \overline{q}, 0, \overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, 0)$ типов г)–е), для которого выполнены неравенства

$$(A - C)\,\overline{p}^2 + \overline{p}\,(\lambda_1 + k_1\overline{\gamma}_1) > 0,$$

$$\begin{gathered} 3A^2\overline{p}^2\overline{\gamma}_1^2\overline{\gamma}_2^2 - AB\overline{p}\overline{\gamma}_1^4 - 4AB\overline{p}^2\overline{\gamma}_1^2\overline{\gamma}_2^2 - AB\overline{p}^2\overline{\gamma}_2^4 - 4AB\overline{pq}\,\overline{\gamma}_1^3\overline{\gamma}_2 + \\ + 3Ak_1\overline{\gamma}_1^3\overline{\gamma}_2^2 + 2B^2\overline{pq}\,\overline{\gamma}_1^3\overline{\gamma}_2 + B^2\overline{q}^2\overline{\gamma}_1^4 - 2Bk_1\overline{p}\overline{\gamma}_1^3\overline{\gamma}_2^2 - Bk_1\overline{p}\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2^4 - \\ - 2Bk_1\overline{q}\,\overline{\gamma}_1^4\overline{\gamma}_2 + k_1^2\overline{\gamma}_1^4\overline{\gamma}_2^2 - 4A\lambda_2\overline{p}\overline{\gamma}_1^3\overline{\gamma}_2 + 4A\lambda_1\overline{p}\overline{\gamma}_1^2\overline{\gamma}_2^2 + 2B\lambda_2\overline{p}\overline{\gamma}_1^3\overline{\gamma}_2 - \\ - 2B\lambda_1\overline{p}\overline{\gamma}_1^2\overline{\gamma}_2^2 + 2B\lambda_2\overline{q}\,\overline{\gamma}_1^4 - 2B\lambda_1\overline{q}\,\overline{\gamma}_1^3\overline{\gamma}_2 - 2k_1\lambda_2\overline{\gamma}_1^4\overline{\gamma}_2 + 2k_1\lambda_1\overline{\gamma}_1^3\overline{\gamma}_2^2 + \\ + A\overline{p}\overline{\gamma}_1^4 + A\overline{p}\overline{\gamma}_1^2\overline{\gamma}_2^2 + B\overline{p}\overline{\gamma}_1^2\overline{\gamma}_2^2 + B\overline{p}\overline{\gamma}_2^4 + \lambda_2^2\overline{\gamma}_1^4 - 2\lambda_1\lambda_2\overline{\gamma}_1^3\overline{\gamma}_2 + \lambda_1^2\overline{\gamma}_1^2\overline{\gamma}_2^2 > 0 \end{gathered}$$

является устойчивым в смысле Ляпунова.

Замечание. Второе неравенство в условиях утверждения 12 заведомо будет выполнено для тех стационарных решений типов г)–е), для которых выполняются неравенства $A\overline{p}\lambda_1 > 0$, $(A - B)\,\overline{p}^2 + \overline{p}\,(\lambda_1 + k_1\overline{\gamma}_1) > 0$.

Рассмотрим теперь более общую по сравнению с (2.8), (2.9) систему уравнений (2.7), (2.8), где дополнительно присутствует момент циркулярно-гироскопических сил, а параметры удовлетворяют условиям

$$a = c = k_2 = k_3 = \lambda_3 = 0$$

Будем обозначать составленную таким образом систему как систему (2.7а), (2.8). Из утверждения 1 следует, что система (2.7а), (2.8) имеет те же самые первые интегралы (6.1)–(6.3), что и система (2.8), (2.9). Очевидно также, что (2.7а), (2.8) имеет те же стационарные решения типов а)–е) при условиях, указанных в разд. 5. Поэтому утверждения 9–12 справедливы и для более общей системы (2.7а), (2.8).

Заключение. В заключение обсудим кратко возможные направления дальнейшего развития результатов статьи. Полезно выяснить существование аналогов случая Бобылева–Стеклова для нелинейного потенциала $U(\gamma_2)$, заданного аналитической функцией. Также целесообразно, рассматривая момент $L(t, \gamma, \omega)\,\omega \times \gamma$ как управляющее воздействие, сохраняющее первые интегралы, выяснить, какие дополнительные динамические свойства можно обеспечить за счет выбора такого управления. Выявлен ряд стационарных решений и проведен анализ их устойчивости методом Четаева. Было бы интересно расширить перечень стационарных движений и провести более полный их анализ, аналогично тому, как это сделано в работах [17–19] для гиростата с одними потенциальными силами или методом Рауса [20] для твердого тела в случае Гесса.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-29-00819).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бобылев Д.К.* Об одном частном решении дифференциальных уравнений вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки (Сообщено в заседании С.-Петерб. мат. об-ва 1893 г. 15 февр.) // в кн.: *Бобылев Д.* М.: тип. М.Г. Волчанинова, 1896. 13 с.

2. *Стеклов В.А.* Один случай движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. (Сообщ. в заседании Харьк. мат. об-ва 5 марта 1893 г.) // в кн.: *Стеклов В.* Сочинения. М.: тип. М.Г. Волчанинова, 1896. 9 с.
3. *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953. 287 с.
4. *Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М.* Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наукова думка, 2012. 401 с.
5. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. 384 с.
6. *Горр Г.В.* Об асимптотических движениях тяжелого твердого тела в случае Бобылева–Стеклова // Нелин. дин. 2016. Т. 12. № 4. С. 651–661.
7. *Бардин Б.С.* Об орбитальной устойчивости маятникообразных движений твердого тела в случае Бобылева–Стеклова // Нелин. дин. 2009. Т. 5. № 4. С. 535–550.
8. *Бардин Б.С., Кулешов А.С.* Алгоритм Ковачича и его применение в задачах классической механики. М.: Изд-во МАИ, 2020. 257 с.
9. *Харламов П.В.* Один случай интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего полости, заполненные жидкостью // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150. № 4. С. 759–760.
10. *Макеев Н.Н.* Интегралы геометрической теории динамики гиростата // Вестн. Перм. унив. Математика. Механика. Информатика. 2012. Вып. 2(10). С. 26–35.
11. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
12. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* О решениях уравнений движения твердого тела в потенциальном силовом поле в случае постоянного модуля кинетического момента // Изв. РАН. МТТ. 2017. Вып. 47. С. 12–24.
13. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // J. Egyp. Math. Soc. 2017. V. 25. P. 216–219.
14. *Зыза А.В.* Компьютерное исследование полиномиальных решений уравнений динамики гиростата // Компьют. исслед. моделир. 2018. Т. 10. № 1. С. 7–25.
15. *Kosov A.A., Semenov E.I.* On first integrals and stability of stationary motions of gyrostat // Physica D. Nonlin. Phenom. 2022. V. 430. P. 133103.
16. *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988. 304 с.
17. *Vera J.A.* The gyrostat with a fixed point in a Newtonian force field: Relative equilibria and stability // J. Math. Anal.&Appl. 2013. V. 401. P. 836–849.
18. *de Bustos Muñoz M.T., Guirao J.L.G., Vera López J.A., Campuzano A.V.* On sufficient conditions of stability of the permanent rotations of a heavy triaxial gyrostat // Qualit. Theory Dyn. Syst. 2015. V. 14. № 2. P. 265–280.
19. *Iñarrea M., Lanchares V., Pascual A.I., Elipe A.* Stability of the permanent rotations of an asymmetric gyrostat in a uniform Newtonian field // Appl. Math.&Comput. 2017. V. 293. P. 404–415.
20. *Новиков М.А.* О стационарных движениях твердого тела при существовании частного интеграла Гесса // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 3. С. 28–37.

On Analogues of the Bobylev–Steklov Case for a Gyrostat under the Action of a Moment of Gyroscopic Forces

A. A. Kosov[a,#]

[a] *Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russia*
[#]*e-mail: kosov_idstu@mail.ru*

The article studies the equations of motion of a gyrostat around a fixed point under the action of a moment of gyroscopic forces. Analogues of the Bobylev–Steklov case are obtained, it is shown that, unlike the classical case of a rigid body, the approaches of Bobylev and Steklov are not equivalent and can give complementary results. Conditions are found under which parametric families of particular solutions expressed by elliptic functions are constructed. Six types of stationary solutions are singled out, and the conditions for their stability are obtained by the method of Chetaev's integral connections.

Keywords: gyrostat, Bobylev–Steklov case, parametric families of partial solutions, stationary solutions, stability

REFERENCES

1. *Bobylev D.K.* On a particular solution of the differential equations of rotation of a heavy solid body around a fixed point (Rep. in the session of St. Petersburg. Mat. Soc. 1893, February 15) // in: *Bobylev D.* Moscow: typ. M.G. Volchaninov, 1896. 13 p.
2. *Steklov V.A.* One case of motion of a heavy solid body having a fixed point Rep. in the meeting of Kharkiv. Mat. Soc. on March 5, 1893] // in: *Steklov V.* Moscow: typ. M.G. Volchaninov, 1896. 9 p.
3. *Golubev V.V.* Lectures on Integration of the Equations of Motion of a Rigid Body about a Fixed Point. Israel: Israeli Program for Scientific Translations, 1960. 287 p.
4. *Gashenenko I.N., Gorr G.V., Kovalev A.M.* Classical Problems in the Dynamics of Rigid Body. Kiev: Naukova Dumka, 2012. 401 p. (in Russian).
5. *Borisov A., Mamaev I.* Rigid Body Dynamics. Moscow;Izhevsk: R&C Dyn., 2001 (in Russian).
6. *Gorr G.V.* On asymptotic motions of a heavy rigid body in the Bobylev–Steklov case // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2016, vol. 12, no. 4, pp. 651–661.
7. *Bardin B.S.* On orbital stability of pendulum like of a rigid body in the Bobylev–Steklov case // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2009, vol. 5, no. 4, pp. 535–550.
8. *Bardin B.S., Kuleshov A.S.* Kovacic Algorithm and Its Application in Problems of Classical Mechanics. Moscow: MAI, 2020. 257 p. (in Russian).
9. *Kharlamov P.V.* A case of integration of the equations of motion of a heavy rigid body having its cavities filled with a liquid // Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1963, vol. 150, no. 4, pp. 759–760.
10. *Makeyev N.N.* Integrals of the geometrical theory of a dynamics gyrostat // Perm Univ. Bull. Mathematics. Mechanics. Computer Science, 2012, iss. 2(10). pp. 26–35.
11. *Chetayev N.* The Stability of Motion. N.Y.: Pergamon Press, 1961.
12. *Gorr G.V., Maznev A.V.* On solutions of the equations of motion of a rigid body in the potential force field in the case of constant modulus of the kinetic moment // Mech. Solids, 2017, vol. 47, pp. 12–24.
13. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // J. Egyp. Math. Soc., 2017, vol. 25, pp. 216–219.
14. *Zyza A.V.* Computer studies of polynomial solutions for gyrostat dynamics // Comput. Res.&Model., 2018, vol. 10, no. 1, pp. 7–25.
15. *Kosov A.A., Semenov E.I.* On first integrals and stability of stationary motions of gyrostat // Physica D. Nonlin. Phenom., 2022, vol. 430, pp. 133103.
16. *Rubanovskii V.N., Samsonov V.A.* Stability of Steady Motions in Examples and Problems. Moscow: Nauka, 1988. 304 p. (in Russian).
17. *Vera J.A.* The gyrostat with a fixed point in a Newtonian force field: Relative equilibria and stability // J. Math. Anal.&Appl., 2013, vol. 401, pp. 836–849.
18. *de Bustos Muñoz M.T., Guirao J. L.G., Vera López J.A., Campuzano A.V.* On sufficient conditions of stability of the permanent rotations of a heavy triaxial gyrostat // Qualit. Theory of Dyn. Syst., 2015, vol. 14, no. 2, pp. 265–280.
19. *Iñarrea M., Lanchares V., Pascual A.I., Elipe A.* Stability of the permanent rotations of an asymmetric gyrostat in a uniform Newtonian field // Appl. Math.&Comput., 2017, vol. 293, pp. 404–415.
20. *Novikov M.A.* On Stationary motions of a rigid body under the partial Hess integral existence // Mech. Solids, 2018, vol. 53, no. 3, pp. 262–270.

EDN: PLNGJN
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА **2022, том 86, № 3, с. 313–328**

УДК 531.36

О ПЛОСКИХ РЕЗОНАНСНЫХ ВРАЩЕНИЯХ СПУТНИКА С ШАРОВЫМ ДЕМПФЕРОМ НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

© 2022 г. Н. И. Амелькин[1,*]

[1] *Московский физико-технический институт, Москва, Россия*
**e-mail: namelkin@mail.ru*

Поступила в редакцию 02.12.2021 г.
После доработки 11.02.2022 г.
Принята к публикации 15.02.2022 г.

В рамках модели М.А. Лаврентьева изучается влияние внутренних диссипативных сил на вращательное движение спутника на эллиптической орбите. Получены эволюционные уравнения, описывающие плоские нерезонансные вращения спутника. Определены условия существования и устойчивости плоских резонансных вращений спутника. Получено аналитическое решение, описывающее плоские -периодические резонансные вращения спутника на эллиптической орбите.

Ключевые слова: спутник с шаровым демпфером, эллиптическая орбита, эволюционные уравнения, плоские резонансные вращения, устойчивость

DOI: 10.31857/S003282352203002X

1. Постановка задачи. Уравнения движения. Вращательное движение спутника, моделируемого одним твердым телом, в центральном гравитационном поле к настоящему времени хорошо изучено. В работах В.В. Белецкого, Ф.Л. Черноусько, А.П. Маркеева [1–6] и других авторов проведен подробный анализ вращений спутника на круговой и эллиптической орбите, изучены плоские и пространственные резонансные вращения спутника.

Влияние внутренних диссипативных сил на вращательное движение спутника в центральном гравитационном поле исследовалось в работах [7–11]. Здесь для описания диссипативных сил использовалась модель М.А. Лаврентьева [12]. В этой модели спутник (планета) моделируется системой из двух твердых тел – оболочки и шарового демпфера (ядра), при относительных перемещениях которого возникает диссипативный момент. В указанных работах проведено подробное исследование эволюции вращательного движения спутника на круговой орбите.

В настоящей работе изучается вращательное движение спутника с шаровым демпфером на эллиптической орбите.

В рамках используемой модели М.А. Лаврентьева спутник является гиростатом, т.е. его тензор инерции в базисе, связанном с оболочкой, остается неизменным. Пусть O – центр масс всего спутника, а $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ – ортонормированный базис с началом в точке O и осями $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, связанными с оболочкой. Обозначим через $\mathbf{J}$ тензор инерции всего спутника в этом базисе, а через $\mathbf{J}^* = \mathbf{J} - I\mathbf{E}$ – тензор инерции вспомогательного тела, образованного оболочкой и точечной массой, равной массе демпфера и расположенной в центре масс демпфера. Здесь I – момент инерции демпфера относительно его центральной оси, $\mathbf{E}$ – единичная матрица.

Ниже будем полагать, что диссипативный момент пропорционален относительной угловой скорости демпфера и определяется формулой

$$\mathbf{M}_d = -\tilde{\mu} I(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}), \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор абсолютной угловой скорости оболочки, $\boldsymbol{\Omega}$ — вектор абсолютной угловой скорости демпфера, $\tilde{\mu}$ — коэффициент демпфирования.

Действующий на спутник гравитационный момент определяется формулой [1]

$$\mathbf{M}_g = 3k\mathbf{R} \times \mathbf{J}\mathbf{R}/R^5, \tag{1.2}$$

где $k = \gamma M$ — постоянная тяготения, γ — гравитационная постоянная, M — масса притягивающего тела (Солнца), $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, соединяющий центр притяжения с центром масс спутника.

Динамические уравнения вращательного движения спутника записываются в виде

$$\begin{gathered} \mathbf{J}^*\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_g + \tilde{\mu} I(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \\ I(\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}) = -\tilde{\mu} I(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \end{gathered} \tag{1.3}$$

Первое из этих уравнений представляет собой теорему об изменении кинетического момента вспомогательного тела, а второе — теорему об изменении кинетического момента демпфера. Все векторы в этих уравнениях заданы проекциями на оси базиса $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.

Уравнения (1.3) дополняются до замкнутой системы кинематическими уравнениями вращательного движения оболочки спутника, записанными в тех или иных переменных. Для целей численного интегрирования целесообразно использовать уравнения Пуассона в кватернионах

$$2\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\omega} \tag{1.4}$$

Здесь $\boldsymbol{\Lambda}$ — кватернион единичной нормы, задающий положение базиса $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ относительно базиса Кенига $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$. Для аналитического исследования могут быть использованы кинематические уравнения в углах Эйлера.

Оси базиса Кенига выберем так, чтобы ось $\mathbf{i}_3$ совпадала с нормалью $\mathbf{n}$ к плоскости орбиты, а ось $\mathbf{i}_1$ — с направлением на перигелий орбиты. Обозначим через $\mathbf{r} = \mathbf{R}/R$ единичный вектор, сонаправленный с радиус-вектором центра масс спутника, а через ν — истинную аномалию — угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{i}_1$. Угловая скорость орбитального базиса, образованного векторами $\mathbf{r}$, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}$ и $\mathbf{n}$, направлена по $\mathbf{n}$ и определяется выражением $\dot{\nu} = c/R^2$, где c — константа интеграла площадей $R^2\dot{\nu} = c$.

В качестве безразмерного времени будем использовать среднюю аномалию $\tau = \omega_0 t$, где ω_0 — средняя угловая скорость орбитального базиса, определяемая формулой

$$\omega_0 = (k/a^3)^{1/2} = \frac{c}{(pa^3)^{1/2}} = \frac{c}{p^2}(1 - e^2)^{3/2}, \quad p = \frac{c^2}{k} \tag{1.5}$$

Здесь a — большая полуось орбиты спутника, p — параметр, e — эксцентриситет.

Введем безразмерные переменные $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ согласно формулам

$$\mathbf{U} = \boldsymbol{\omega}/\omega_0, \quad \mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega}/\omega_0 \tag{1.6}$$

В этих переменных уравнения (1.3) запишутся в виде

$$\begin{gathered} \mathbf{J}^*\mathbf{U}' + \mathbf{U} \times \mathbf{J}\mathbf{U} = \mu I(\mathbf{V} - \mathbf{U}) + \mathbf{m}_g \\ \mathbf{V}' + \mathbf{U} \times \mathbf{V} = -\mu(\mathbf{V} - \mathbf{U}) \end{gathered} \tag{1.7}$$

Здесь штрихом обозначена производная по безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$, $\mu = \tilde{\mu}/\omega_0$ — безразмерный коэффициент демпфирования, а безразмерный гравитационный момент $\mathbf{m}_g$ выражается формулой

$$\mathbf{m}_g = \frac{\mathbf{M}_g}{\omega_0^2} = \frac{3\mathbf{r} \times \mathbf{J}\mathbf{r}}{(1-e^2)^3}(1 + e\cos\nu)^3 \tag{1.8}$$

Закон изменения истинной аномалии описывается уравнением

$$\nu' = \frac{(1 + e\cos\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \tag{1.9}$$

Компоненты вектора $3\mathbf{r} \times \mathbf{J}\mathbf{r}$ в базисе главных центральных осей инерции спутника $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ выражаются в виде

$$3\mathbf{r} \times \mathbf{J}\mathbf{r} = 3[(C-B)r_2r_3, (A-C)r_3r_1, (B-A)r_1r_2], \tag{1.10}$$

где A, B, C — главные центральные моменты инерции спутника, а r_k — компоненты единичного вектора $\mathbf{r}$ в осях $\mathbf{e}_k$.

Если вместо переменной $\mathbf{V}$ ввести переменную $\mathbf{W} = \mathbf{V} - \mathbf{U}$ (относительную угловую скорость демпфера), то уравнения (1.7) перепишутся в виде

$$\begin{gathered}(\mathbf{J} - I\mathbf{E})\mathbf{U}' + \mathbf{U} \times \mathbf{J}\mathbf{U} = \mu I\mathbf{W} + \mathbf{m}_g \\ (\mathbf{J} - I\mathbf{E})\left(\mathbf{W}' + \mathbf{U} \times \mathbf{W}\right) = -\mu\mathbf{J}\mathbf{W} + \mathbf{U} \times \mathbf{J}\mathbf{U} - \mathbf{m}_g\end{gathered} \tag{1.11}$$

2. Плоские вращения спутника. В данной работе ограничимся анализом плоских вращений спутника с демпфером на эллиптической орбите. Такие вращения допускаются уравнениями (1.11) и представляют собой вращения вокруг одной из главных осей инерции спутника, сонаправленной с нормалью к плоскости орбиты. Не ограничивая общности, будем считать, что осью вращения является главная ось $O\mathbf{e}_3$. Такие вращения описываются следующей системой уравнений:

$$\begin{gathered}U_3' = \mu\gamma W_3 + \varepsilon f_3 \\ \mathrm{W}_3' = -\mu(1+\gamma)\mathrm{W}_3 - \varepsilon f_3 \\ \varphi' = U_3 \\ \nu' = \frac{(1 + e\cos\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}}\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь использованы обозначения

$$\gamma = \frac{I}{C - I}, \quad \varepsilon = \frac{3(B-A)}{2(C-I)}, \quad f_3 = \frac{(1 + e\cos\nu)^3}{(1-e^2)^3}\sin 2(\nu - \varphi), \tag{2.2}$$

а φ — угол поворота оболочки спутника вокруг нормали к плоскости орбиты.

Отметим, что функцию f_3 можно записать в виде

$$f_3 = \frac{\partial F}{\partial \varphi}; \quad F = \frac{(1 + e\cos\nu)^3 \cos 2(\nu - \varphi)}{2(1-e^2)^3}, \tag{2.3}$$

где F с точностью до постоянного множителя есть силовая функция гравитационного поля в рассматриваемой плоской задаче.

Поскольку истинная аномалия ν является периодической по τ функцией с периодом 2π, то этим же свойством обладает и функция F (2.3). Поэтому ее можно представить рядом Фурье

$$F(\tau,\varphi) = F_0(\varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\tau - 2\varphi) + B_k \cos(k\tau - 2\varphi) \tag{2.4}$$

Коэффициенты этого разложения определяются формулами

$$F_0(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F d\tau = \frac{1}{4\pi(1-e^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}(1+e\cos\nu)\cos 2(\nu-\varphi)d\nu = 0 \tag{2.5}$$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F\sin(k\tau - 2\varphi)d\tau = -\frac{1}{2}\Phi_{-k}\sin 4\varphi \tag{2.6}$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F\cos(k\tau - 2\varphi)d\tau = \frac{\Phi_k(e)}{2} + \frac{\Phi_{-k}(e)\cos 4\varphi}{2} \tag{2.7}$$

Здесь $\Phi_k(e)$ и $\Phi_{-k}(e)$ – интегралы Ф.Л. Черноусько [4], определяемые формулами

$$\Phi_k(e) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1+e\cos\nu)^3\cos(k\tau - 2\nu)}{(1-e^2)^3}d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1+e\cos\nu)\cos(k\tau - 2\nu)}{(1-e^2)^{3/2}}d\nu \tag{2.8}$$

$$\Phi_{-k}(e) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1+e\cos\nu)^3\cos(k\tau + 2\nu)}{(1-e^2)^3}d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1+e\cos\nu)\cos(k\tau + 2\nu)}{(1-e^2)^{3/2}}d\nu \tag{2.9}$$

Явные выражения для этих функций в виде рядов по эксцентриситету можно найти в книге А.П. Маркеева [5]. Ниже выписаны первые члены этих разложений

$$\begin{gathered}\Phi_1 = -\frac{1}{2}e,\quad \Phi_2 = 1 - \frac{5}{2}e^2,\quad \Phi_3 = \frac{7}{2}e,\quad \Phi_4 = \frac{17}{2}e^2,\quad \Phi_5 = \frac{845}{48}e^3,\quad \Phi_6 = \frac{533}{16}e^4,\ \ldots \\ \Phi_0 = 0,\quad \Phi_{-1} = \frac{1}{48}e^3,\quad \Phi_{-2} = \frac{1}{24}e^4,\quad \Phi_{-3} = \frac{81}{1280}e^5,\quad \Phi_{-4} = \frac{4}{45}e^6,\ \ldots\end{gathered} \tag{2.10}$$

Из таблицы (2.10) следует, что при $e \ll 1$ функции $\Phi_k(e)$ $(k \neq 0)$ являются величинами порядка $e^{|k-2|}$, а отношение между разными функциями можно описать неравенствами

$$\Phi_k^2 < (ae)^{2(k-s)}\Phi_s^2;\quad k > s \geq 2,\quad \Phi_{2+k}^2 < (ae)^{2(k-1)}\Phi_1^2;\quad k \geq 2 \tag{2.11}$$

$$\Phi_s^2 < (ae)^{2(k-s)}\Phi_k^2;\quad s < k,\quad 1 \geq k \neq 0 \tag{2.12}$$

$$\Phi_{n+s+1}^2 < (ae)^2\Phi_{n-s}^2;\quad n \geq 2,\quad 0 \leq s \neq n \tag{2.13}$$

$$\Phi_{n-s}^2 < (ae)^2\Phi_{n+s+1}^2;\quad n \leq 1,\quad 0 \leq s \neq -(n+1) \tag{2.14}$$

Здесь $a > 0$ – ограниченная величина, зависящая от k, s и n.

После подстановки выражений (2.5)–(2.7) в формулу (2.4) получим

$$F(\tau,\varphi) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}[\Phi_k(e)\cos(k\tau - 2\varphi) + \Phi_{-k}(e)\cos(k\tau + 2\varphi)] \tag{2.15}$$

Очевидно, что эту формулу можно переписать в виде

$$F(\tau,\varphi) = \frac{1}{2}\sum_k \Phi_k(e)\cos(k\tau - 2\varphi), \tag{2.16}$$

где суммирование ведется по всем целым положительным и отрицательным k.

Для функции f_3 на основании (2.3) будем иметь

$$f_3(\tau,\varphi) = \sum_k \Phi_k(e)\sin(k\tau - 2\varphi) \tag{2.17}$$

Резонансные вращения спутника определяются условиями

$$\langle\dot\varphi\rangle = U = \frac{n}{2}; \quad n = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots \tag{2.18}$$

Здесь через U обозначено среднее значение U_3. Положительным значениям n отвечают “прямые” вращения, а отрицательным – “обратные” вращения.

Условие отсутствия резонансов записывается в виде

$$\langle\dot\varphi\rangle = U \neq \frac{n}{2}; \quad n = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots \tag{2.19}$$

3. Нерезонансные плоские вращения спутника. Так как четвертое из уравнений (2.1) уже учтено при выводе формулы (2.12) для $f_3(\tau,\varphi)$, то плоские вращения спутника с демпфером можно описать следующей замкнутой системой из трех уравнений:

$$\begin{gathered} U_3' = \mu\gamma W_3 + \varepsilon f_3(\tau,\varphi) \\ \mathrm{W}_3' = -m\mathrm{W}_3 - \varepsilon f_3(\tau,\varphi) \\ \varphi' = U_3 \end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь и далее используются обозначения

$$m = \mu(1+\gamma), \quad \sigma_k = k\tau - 2\varphi \tag{3.2}$$

Ниже будем полагать, что $0 < \varepsilon \ll 1$ (малый параметр), т.е. спутник близок к сферически симметричному.

Для анализа нерезонансных вращений используем метод осреднения [13, 14]. Сделаем замену переменных

$$U_3 = U + S, \quad W_3 = W + R, \tag{3.3}$$

в которой функции S и R найдем из системы уравнений

$$\begin{gathered} \sum_k \frac{\partial S}{\partial\sigma_k}(k - 2U) = \mu\gamma R + \varepsilon f_3 \\ \sum_k \frac{\partial R}{\partial\sigma_k}(k - 2U) = -mR + \varepsilon f_3 \end{gathered} \tag{3.4}$$

Решения этой системы записывается гармоническими по переменным σ_k функциями вида

$$S = \sum_k a_k\sin\sigma_k + b_k\cos\sigma_k, \quad R = \sum_k p_k\sin\sigma_k + q_k\cos\sigma_k \tag{3.5}$$

Коэффициенты при гармониках выражаются формулами

$$\begin{gathered} q_k = \frac{(k-2U)\varepsilon\Phi_k}{(k-2U)^2 + m^2}, \quad p_k = -\frac{m\varepsilon\Phi_k}{(k-2U)^2 + m^2} \\ a_k = \frac{\mu\gamma\varepsilon\Phi_k}{(k-2U)^2 + m^2}, \quad b_k = -\frac{\mu m + (k-2U)^2}{(k-2U)[(k-2U)^2 + m^2]}\varepsilon\Phi_k \end{gathered} \tag{3.6}$$

После подстановки решений (3.5) в уравнения (3.1) получим

$$U'\left(1+\frac{\partial S}{\partial U}\right)-2S\sum_k\frac{\partial S}{\partial\sigma_k}=\mu\gamma W$$
$$W'\left(1+\frac{\partial R}{\partial U}\right)-2S\sum_k\frac{\partial R}{\partial\sigma_k}=-mW \tag{3.7}$$

Из формул (3.5) и (3.6) следует, что в рассматриваемом нерезонансном случае функции S и R являются ограниченными функциями малого параметра ε. Этим же свойством обладают и фигурирующие в уравнениях (3.7) производные от этих функций. Обозначив среднее по времени угловыми скобками, получим

$$\left\langle\frac{\partial S}{\partial U}\right\rangle=O(\varepsilon^2),\quad\left\langle\frac{\partial R}{\partial U}\right\rangle=O(\varepsilon^2),\quad\left\langle 2S\sum_k\frac{\partial S}{\partial\sigma_k}\right\rangle=O(\varepsilon^3) \tag{3.8}$$

$$\left\langle 2S\sum_k\frac{\partial R}{\partial\sigma_k}\right\rangle=\sum_k(p_kb_k-q_ka_k)=\sum_k\frac{\mu\varepsilon^2\Phi_k^2}{(k-2U)[(k-2U)^2+m^2]}+O(\varepsilon^3) \tag{3.9}$$

При учете этих формул осредненные с точностью до $O(\varepsilon^3)$ уравнения (3.7) примут вид

$$U'=\mu\gamma W,\quad W'-\sum_k\frac{\mu\varepsilon^2\Phi_k^2}{(k-2U)[(k-2U)^2+m^2]}=-mW \tag{3.10}$$

Из этих уравнений следует, что в установившемся режиме медленной эволюции средняя относительная угловая скорость демпфера выражается формулой

$$W=\sum_k\frac{\mu\,\varepsilon^2\Phi_k^2}{m(k-2U)[(k-2U)^2+m^2]}, \tag{3.11}$$

а средняя угловая скорость оболочки спутника меняется согласно уравнению

$$U'=\frac{\mu\gamma\varepsilon^2}{(1+\gamma)}\sum_k\frac{\Phi_k^2}{(k-2U)[(k-2U)^2+m^2]} \tag{3.12}$$

Уравнение (3.12) описывает эволюцию плоского нерезонансного вращения спутника с демпфером на эллиптической орбите. Для круговой орбиты уравнение (3.12) принимает вид

$$U'=\frac{\mu\gamma\varepsilon^2}{2(1+\gamma)(1-U)[4(1-U)^2+m^2]} \tag{3.13}$$

Это уравнение было получено ранее [10]. Из него следует, что в случае круговой орбиты средняя угловая скорость оболочки спутника монотонно стремится к значению $U=1$, т.е. спутник эволюционирует к положению относительного равновесия.

Исследуем поведение средней угловой скорости оболочки спутника в нерезонансном вращении для случая эллиптической орбиты. Рассмотрим вращение, для которого величина $2U$ лежит между резонансными значениями n и $n+1$, где $n\neq 0$ — целое число, которое может принимать как положительные, так и отрицательные значениями. Положим

$$2U=n+V,\quad \Delta<V<1-\Delta \tag{3.14}$$

Здесь $0<\Delta\ll 1$ — величина, характеризующая удаленность рассматриваемых движений от резонансных вращений. Оценки для значений этой величины будут приведены ниже.

Обозначим через Σ сумму в правой части уравнения (3.12). Ее можно записать в виде

$$\Sigma = \sum_{s=0}^{\infty}\Sigma_s = \sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{\Phi_{n+s+1}^2}{(s+1-V)[(s+1-V)^2+m^2]} - \frac{\Phi_{n-s}^2}{(s+V)[(s+V)^2+m^2]}\right) \tag{3.15}$$

Определим знак каждого слагаемого Σ_s в сумме (3.15). Рассмотрим сначала случай $n \geq 2$ (вращения с угловой скоростью $U > 1$). Учитывая правое из неравенств (3.14), получим

$$\Sigma_s < \frac{\Phi_{n+s+1}^2}{(s+\Delta)[(s+\Delta)^2+m^2]} - \frac{\Phi_{n-s}^2}{(s+1)[(s+1)^2+m^2]} <$$
$$< \frac{1}{(s+1)[(s+1)^2+m^2]}\left(\frac{(s+1)^3}{(s+\Delta)^3}\Phi_{n+1+s}^2 - \Phi_{n-s}^2\right) \tag{3.16}$$

При учете неравенств (2.13) будем иметь

$$\Sigma_s < \frac{1}{(s+1)[(s+1)^2+m^2]}\left(\frac{(s+1)^3}{(s+\Delta)^3}(ae)^2 - 1\right)\Phi_{n-s}^2; \quad 0 \leq s \neq n \tag{3.17}$$

Отсюда следует, что при $e \ll 1$ для значений V из интервала (3.14), где

$$\Delta = (2a^2e^2)^{1/3} \ll 1 \tag{3.18}$$

будут выполняться неравенства

$$\Sigma_s < -\frac{1}{2(s+1)[(s+1)^2+m^2]}\Phi_{n-s}^2 < 0; \quad 0 \leq s \neq n \tag{3.19}$$

Для $s = n$ имеем

$$\Sigma_s = \Sigma_n < \frac{\Phi_{2n+1}^2}{(\Delta+n)[(\Delta+n)^2+m^2]} > 0 \tag{3.20}$$

При этом для члена $\Sigma_{s-1} = \Sigma_{n-1}$ в силу (3.19) выполняется неравенство

$$\Sigma_{n-1} < -\frac{1}{2n(n^2+m^2)}\Phi_1^2 \tag{3.21}$$

В рассматриваемом случае $n \geq 2$. Поэтому на основании неравенства (2.11) имеем

$$\Phi_{2n+1}^2 < (ae^2)^2\Phi_1^2,$$

а при учете формулы (3.18) получим

$$\Sigma_n + \Sigma_{n-1} < \left(\frac{\Delta^6}{4(\Delta+n)[(\Delta+n)^2+m^2]} - \frac{1}{2n(n^2+m^2)}\right)\Phi_1^2 < 0 \tag{3.22}$$

Из неравенств (3.19) и (3.22) следует $\Sigma < 0$. Это означает, что на нерезонансных вращениях с угловой скоростью $U > 1$ производная $U' < 0$, т.е. средняя угловая скорость спутника убывает.

Рассмотрим теперь случай $n \le 1$ (вращения с угловой скоростью $U < 1$). Здесь n может принимать значения +1, −1, −2, −3, ... Учитывая левое из неравенств (3.14), получим из (3.15)

$$\Sigma_s > \frac{\Phi_{n+1+s}^2}{(s+1)[(s+1)^2+m^2]} - \frac{\Phi_{n-s}^2}{(s+\Delta)[(s+\Delta)^2+m^2]} >$$

$$> \frac{1}{(s+1)[(s+1)^2+m^2]}\left(\Phi_{n+1+s}^2 - \frac{(s+1)^3}{(s+\Delta)^3}\Phi_{n-s}^2\right) \qquad (3.23)$$

При учете неравенства (2.14) будем иметь

$$\Sigma_s > \frac{1}{(s+1)[(s+1)^2+m^2]}\left(1 - \frac{(s+1)^3}{(s+\Delta)^3}ae^2\right)\Phi_{n+1+s}^2; \quad 0 \le s \ne -(n+1) \qquad (3.24)$$

Отсюда следует, что при $e \ll 1$ для значений V из интервала (3.14), где Δ определяется формулой (3.18), будут выполняться неравенства

$$\Sigma_s > \frac{1}{(s+1)[(s+1)^2+m^2]}\left(1 - \frac{(s+1)^3}{2(s+\Delta)^3}\Delta^3\right)\Phi_{n+1+s}^2 > 0; \quad 0 \le s \ne -(n+1) \qquad (3.25)$$

Для $s = -(n+1)$ из (3.23) имеем

$$\Sigma_s > -\frac{\Phi_{2n+1}^2}{(s+\Delta)[(s+\Delta)^2+m^2]}, \qquad (3.26)$$

а следующий член в сумме (3.15) в силу (3.25) удовлетворяет неравенству

$$\Sigma_{s+1} > \frac{1}{(s+2)[(s+2)^2+m^2]}\left(1 - \frac{(s+2)^3}{2(s+1+\Delta)^3}\Delta^3\right)\Phi_1^2 \qquad (3.27)$$

Так как в формуле (3.15) $s \ge 0$, то случай $s = -(n+1)$ возможен только при $n \le -1$. Для таких значений n согласно (2.12) и (3.18) имеем

$$\Phi_{2n+1}^2 < (ae)^4\Phi_1^2 = \Delta^6\Phi_1^2/4; \quad n \le -1, \qquad (3.28)$$

а для суммы членов Σ_s и Σ_{s+1} при $s = -(n+1)$ получим

$$\Sigma_s + \Sigma_{s+1} > \left(\frac{1}{2(s+2)[(s+2)^2+m^2]} - \frac{\Delta^6}{4(s+\Delta)[(s+\Delta)^2+m^2]}\right)\Phi_1^2 > 0 \qquad (3.29)$$

Из неравенств (3.25) и (3.29) следует $\Sigma > 0$. Это означает, что на нерезонансных вращениях с угловой скоростью $U < 1$ производная $U' > 0$, т.е. средняя угловая скорость спутника возрастает.

Таким образом, и в случае эллиптической орбиты на нерезонансных вращениях при $U < 1$ средняя угловая скорость спутника возрастает, а при $U > 1$ – убывает. Но в отличие от случая круговой орбиты здесь в финале эволюции необязательно будет значение $U = 1$, поскольку возможны захваты в устойчивые резонансные вращения $2U = n$, где $n \ne 2$.

4. Плоские резонансные вращения спутника. Для изучения резонансных вращений спутника (2.18) положим

$$\varphi = \frac{n}{2}\tau + X; \quad n = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots \qquad (4.1)$$

Вращение будет резонансным, если X будет периодической функцией τ. Функцию X представим в виде двух составляющих

$$X = Y + \tilde{X}, \tag{4.2}$$

где Y и $\tilde{X}$ эволюционная и осцилляционная составляющие, соответственно.

При анализе резонансных вращений также, как и в разд. 3, будем пользоваться методом осреднения. Введем обозначение

$$\sigma_k = (k-n)\tau - 2Y \tag{4.3}$$

Тогда система уравнений (3.1) запишется в виде

$$\begin{gathered}
U_3' = \mu\gamma W + \varepsilon\sum_{k\neq n}\Phi_k\sin(\sigma_k - 2\tilde{X}) - \varepsilon\Phi_n\sin 2(Y+\tilde{X}) \\
W_3' = -mW - \varepsilon\sum_{k\neq n}\Phi_k\sin(\sigma_k - 2\tilde{X}) + \varepsilon\Phi_n\sin 2(Y+\tilde{X}) \\
\tilde{X}' = U_3 - n/2
\end{gathered} \tag{4.4}$$

По аналогии с разд. 3 сделаем замену переменных

$$U_3 = U + S, \quad W_3 = W + R, \tag{4.5}$$

в которой функции S и R определим из системы уравнений

$$\begin{gathered}
\sum_{k\neq n}\frac{\partial S}{\partial\sigma_k}(k-n) = \mu\gamma R + \varepsilon\sum_{k\neq n}\Phi_k\sin\sigma_k \\
\sum_{k\neq n}\frac{\partial R}{\partial\sigma_k}(k-n) = -mR - \varepsilon\sum_{k\neq n}\Phi_k\sin\sigma_k
\end{gathered} \tag{4.6}$$

Решения этой системы записываются гармоническими функциями вида

$$S = \sum_{k\neq n}(a_k\sin\sigma_k + b_k\cos\sigma_k), \quad R = \sum_{k\neq n}(p_k\sin\sigma_k + q_k\cos\sigma_k) \tag{4.7}$$

Коэффициенты при гармониках выражаются формулами (3.6), в которых вместо $2U$ следует положить n, т.е.

$$\begin{gathered}
q_k = \frac{(k-n)\varepsilon\Phi_k}{(k-n)^2 + m^2}, \quad p_k = -\frac{m\varepsilon\Phi_k}{(k-n)^2 + m^2} \\
a_k = \frac{\mu\gamma\varepsilon\Phi_k}{(k-n)^2 + m^2}, \quad b_k = -\frac{\mu m + (k-n)^2}{(k-n)[(k-n)^2 + m^2]}\varepsilon\Phi_k; \quad k\neq n
\end{gathered} \tag{4.8}$$

После подстановки этих решений в уравнения (4.4) получим систему

$$\begin{gathered}
U' + \frac{\partial S}{\partial Y}Y' = \mu\gamma W + \varepsilon\sum_{k\neq n}\Phi_k[\sin(\sigma_k - 2\tilde{X}) - \sin\sigma_k] - \varepsilon\Phi_n\sin 2(Y+\tilde{X}) \\
W' + \frac{\partial R}{\partial Y}Y' = -mW - \varepsilon\sum_{k\neq n}\Phi_k[\sin(\sigma_k - 2\tilde{X}) - \sin\sigma_k] + \varepsilon\Phi_n\sin 2(Y+\tilde{X}) \\
Y' = U - n/2, \quad \tilde{X}' = S
\end{gathered} \tag{4.9}$$

Здесь, записав третье уравнение системы (4.4) в виде двух уравнений, мы конкретизировали разделение переменной X на эволюционную Y и осцилляционную $\tilde{X}$ составляющие. При таком разделении выражение для осцилляционной составляющей запишется в виде

$$\tilde{X}_n = \int S d\tau = \sum_{k \neq n} \frac{(b_k \sin \sigma_k - a_k \cos \sigma_k)}{k - n} \tag{4.10}$$

Используя известные тригонометрические формулы и учитывая, что S и R являются ограниченными функциями малого параметра ε, получим после осреднения с точностью до $O(\varepsilon^3)$ следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} U' + \frac{\partial S}{\partial Y} Y' = \mu\gamma W + \mu\gamma\varepsilon^2 \sum_{k \neq n} \frac{\Phi_k^2}{(k-n)[(k-n)^2 + m^2]} - \varepsilon\Phi_n \sin 2Y \\ W' + \frac{\partial R}{\partial Y} Y' = -mW - \mu\gamma\varepsilon^2 \sum_{k \neq n} \frac{\Phi_k^2}{(k-n)[(k-n)^2 + m^2]} + \varepsilon\Phi_n \sin 2Y \\ Y' = U - n/2 \end{gathered} \tag{4.11}$$

Здесь вторые члены в правых частях первых двух уравнений есть среднее от функций

$$\left\langle \varepsilon \sum_{k \neq n} \Phi_k [\sin(\sigma_k - 2\tilde{X}) - \sin \sigma_k] \right\rangle = \varepsilon \sum_{k \neq n} \frac{\Phi_k a_k}{k - n} = \mu\gamma\varepsilon^2 \sum_{k \neq n} \frac{\Phi_k^2}{(k-n)[(k-n)^2 + m^2]},$$

вычисленное на основании формул (4.8) и (4.10).

Положения равновесия осредненной системы (4.11) соответствуют резонансным вращениям исходной системы (4.4) и определяются уравнениями

$$U = \frac{n}{2}, \quad W = 0, \quad \sin 2Y = Z_n = \frac{\mu\gamma\varepsilon}{\Phi_n} \sum_{k \neq n} \frac{\Phi_k^2}{(k-n)[(k-n)^2 + m^2]} \tag{4.12}$$

Очевидно, что для существования резонансного вращения $2U = n$ должно выполняться условие $|Z_n| \leq 1$. Величина $|Z_n|$ зависит от ε (линейно), e, n, а также от значений параметров μ и γ. Зависимость от последних входит в выражение (4.12) через функции

$$g_{nk} = \frac{\mu\gamma}{(k-n)^2 + m^2} \tag{4.13}$$

Для этих функций при учете формулы (3.2) имеем

$$g_{nk} \to 0 \quad \text{при} \quad \mu\gamma \to 0 \quad \text{и} \quad \mu\gamma \to \infty, \quad g_{nk} < \frac{m}{(k-n)^2 + m^2} \leq \frac{1}{2|k-n|} \tag{4.14}$$

Из формулы (4.12) и таблицы (2.10) следует, что при $e \ll 1$ величина $|Z_n|$ обратно пропорциональна $e^{|n-2|}$. Поэтому для каждого фиксированного набора значений параметров ε, μ и γ при достаточно больших значениях $|n-2|$ резонансных вращений $2U = n$ не существует. Сравнительный анализ функций $\Phi_n(e)$ для прямых и обратных вращений показывает, что с ростом $|n-2|$ существенно быстрее "заканчиваются" обратные резонансные вращения. Число резонансных вращений уменьшается также по мере уменьшения эксцентриситета e, а при $e = 0$ (для круговой орбиты) имеется только резонансное вращение 1:1 ($n = 2$), соответствующее положениям равновесия спутника относительно орбитального базиса.

Из уравнений (4.11) следует, что условие асимптотической устойчивости положений равновесия (4.12), а, следовательно, и резонансных вращений спутника, выглядит следующим образом:

$$\mu\gamma\Phi_n \cos 2Y > 0 \tag{4.15}$$

Если $0 < |Z_n| < 1$, то на полуинтервале $[0, \pi)$ существует два положения равновесия (4.12), одно из которых асимптотически устойчиво, а другое неустойчиво. Отметим, что здесь речь идет об устойчивости по отношению к плоским возмущениям.

Колебательная составляющая $\tilde{X}_n$ переменной $X_n = \varphi - n\tau/2$, определяемая рядом (4.10), для каждого n содержит гармоники с частотами 1, 2, 3, ... и поэтому является 2π-периодической функцией τ.

Для слабо эллиптических орбит ($e \ll 1$) при вычислении Z_n и $\tilde{X}_n$ приемлемая точность достигается, если ограничиться членами наименьшего порядка по эксцентриситету e в рядах (4.12), (4.10) и функциях (2.10). Для $n = 2$ такими "старшими" будут члены с номерами $k = 3$ и $k = 1$, а для $n \neq 2$ — член с номером $k = 2$.

Для "главного" резонанса $U = 1$ (резонанс 1:1 типа "Луна", $n = 2$) старшие члены в рядах (4.12) и (4.10) записываются в виде

$$Z_2 = \frac{\mu\gamma\varepsilon}{\Phi_2}\left(\frac{\Phi_3^2}{(1+m^2)} - \frac{\Phi_1^2}{(1+m^2)}\right) \approx \frac{12\mu\gamma\varepsilon e^2}{(1+m^2)} < 6\varepsilon e^2 \tag{4.16}$$

$$\tilde{X}_2 = \frac{7\varepsilon e}{2(1+m^2)}\left((\mu m + 1)\sin(\tau + 2Y) + \mu\gamma\cos(\tau + 2Y)\right) +$$

$$+ \frac{\varepsilon e}{2(1+m^2)}\left((\mu m + 1)\sin(\tau - 2Y) + \mu\gamma\cos(\tau - 2Y)\right) \tag{4.17}$$

В этом резонансном режиме спутник совершает 2π-периодические колебания в окрестности относительного положения равновесия. Амплитуда этих колебаний пропорциональна произведению εe.

Для резонансов $2U = n$, где $n \neq 2$, старшие члены в выражениях (4.12) и (4.10) имеют вид

$$Z_n = \frac{\mu\gamma\varepsilon\Phi_2^2}{\Phi_n(2-n)[(2-n)^2 + m^2]}, \quad |Z_n| < \frac{\varepsilon}{2|\Phi_n|(2-n)^2} \tag{4.18}$$

$$\tilde{X}_n = -\frac{\varepsilon\Phi_2}{(2-n)^2 + m^2}\left(\frac{\mu m + (2-n)^2}{(2-n)^2}\sin[(2-n)\tau - 2Y] + \frac{\mu\gamma}{2-n}\cos[(2-n)\tau - 2Y]\right) \tag{4.19}$$

Здесь амплитуда колебаний периодической составляющей пропорциональна ε.

В случаях, когда эксцентриситет e не слишком мал, например, $e \geq 0.1$, для вычисления функций Z_n и $\tilde{X}_n$ с хорошей точностью в рядах (4.10), (4.12) и функциях (2.10) необходимо помимо старших членов учитывать и несколько членов более высокого порядка малости по эксцентриситету e.

Полученные выше аналитические выводы о резонансных вращениях спутника подтверждаются результатами численного интегрирования точных уравнений движения (2.1). Для разных значений параметров соответствующим подбором начальных условий установлено существование устойчивых резонансных вращений $2U = n$ для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, -1, -2$. При этом установлено, что если $e \leq 0.2$, то для вычисления значений Z_n и функций $\tilde{X}_n$ с хорошей точностью достаточно в (4.12) и (4.10) учитывать не более четырех членов ряда. Соответствующий пример приведен на рис. 1 для резонансного вращения 3:1 ($n = 6$) для следующих значений параметров:

$$\varepsilon = 0.1, \quad e = 0.1, \quad \gamma = 1, \quad \mu = 1 \tag{4.20}$$

В левой части рисунка изображена фазовая траектория в плоскости X, φ', где $X = \varphi - 3\tau$, установившегося резонансного вращения, полученная по результатам

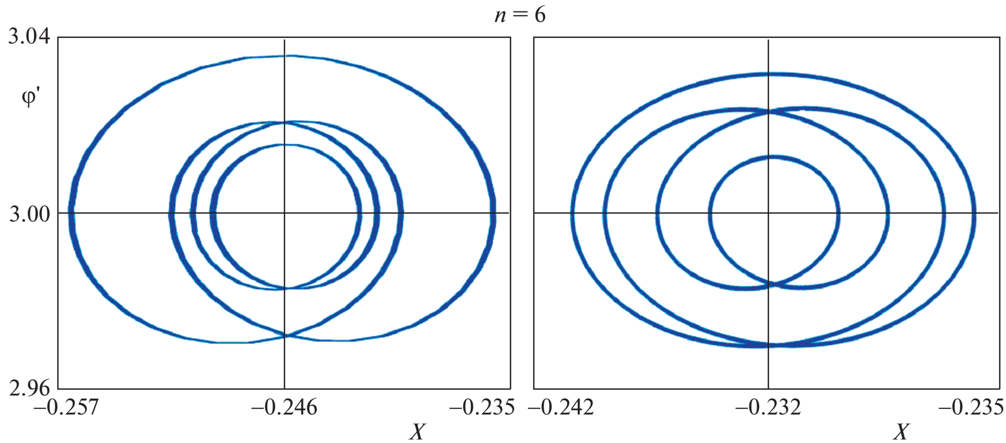

Рис. 1.

численного интегрирования уравнений (2.1), а в правой части – фазовая траектория, вычисленная по формулам (4.12), (4.10) при сохранении в этих рядах членов с номерами $k = 1, 2, 3$.

По результатам численного интегрирования уравнений (2.1) установлено также, что захват в существующие резонансные вращения $2U = n$, где $n \neq 2$, носит вероятностный характер. Т.е. для одних начальных значений $2U$ из интервала $(n, n+1)$ захват в резонансное вращение $2U = n$ наблюдается, а для других происходит “проскакивание” мимо этого резонансного вращения и захват потом наблюдается в резонанс более низкого порядка. Соответствующий пример приведен на рис. 2, где приведены графики эволюции угловой скорости спутника для одной и той же комбинации значений параметров, но при разных начальных условиях. Здесь N – число оборотов спутника вокруг притягивающего центра.

Вероятностный характер захвата в существующие резонансные вращения может объясняться неавтономностью рассматриваемой системы. На основании результатов численного интегрирования уравнений (2.1), проведенного для большого числа разных значений параметров и начальных условий, можно высказать предположение, что вероятность захвата в резонансы $2U = n$, где $n \neq 2$, пропорциональна некоторой положительной степени $|\Phi_n|$. Для обратных вращений эта вероятность существенно меньше, чем для прямых вращений. Например, указанные выше устойчивые обратные резонансные вращения $U = -1/2$ и $U = -1$ удалась обнаружить только специальным подбором начальных условий.

Численное интегрирование уравнений (2.1) показало также, что помимо резонансных вращений, описываемых 2π-периодическими решениями (4.12), (4.10), возможны и другие, в которых решение $X = \varphi - n\tau/2$ содержит гармоники с дробными частотами. Этот факт обнаружен для резонанса 3:2 (резонанс типа “Меркурий”, $n = 3$) при интегрировании уравнений (2.1) для следующих значений параметров:

$$\varepsilon = 0.18, \quad e = 0.1, \quad \gamma = 1, \quad \mu = 0.75$$

Установлено, что при задании начальных условий

$$\varphi(0) = 0.2, \quad \varphi'(0) = 1.5, \quad W_3(0) = 0, \quad \nu(0) = 0$$

наблюдается захват в резонансном вращении 3:2, для которого график переменной X приведен на рис. 3 слева. А на рис. 3 справа приведен график X для установившегося

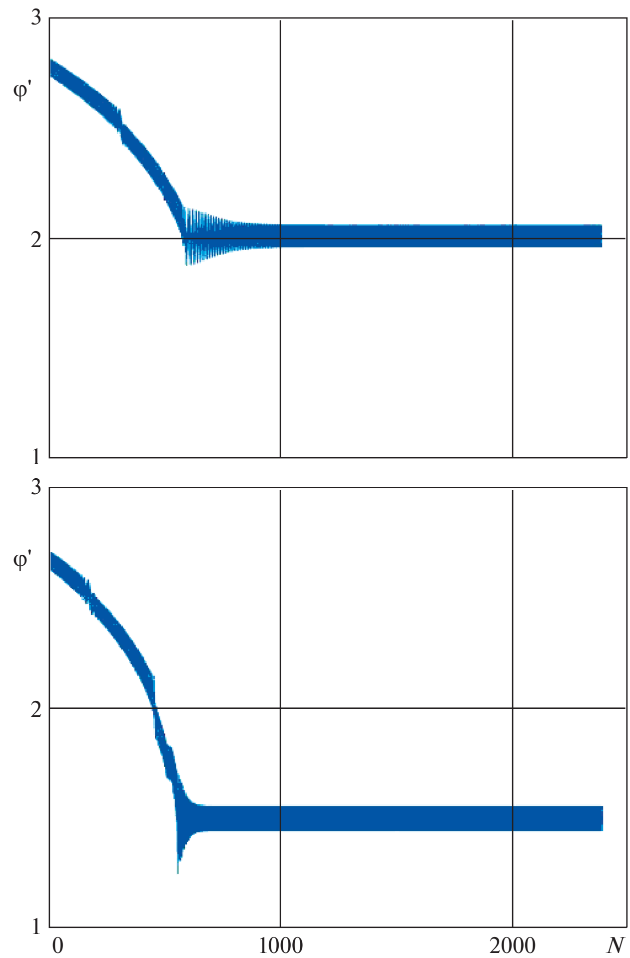

Рис. 2.

резонансного вращения 3:2, которое наблюдается, если начальные условия задать такими значениями фазовых переменных:

$$\varphi(0) = 0.3, \quad \varphi'(0) = 1.5, \quad W_3(0) = 0, \quad \nu(0) = 0$$

В обоих случаях наблюдается захват в резонансное вращение 3:2. Но в первом случае переменная X является 2π-периодической по τ, а во втором – 8π-периодической по τ. При этом амплитуда колебаний во втором случае отличается от амплитуды колебаний в первом случае более чем в четыре раза.

Следует отметить, что для подавляющего большинства начальных условий из окрестности резонанса 3:2 в процессе эволюции устанавливается резонансное вращение, для которого переменная $X = \varphi - 3\tau/2$ является 2π-периодической по τ, а обнаруженное 8π-периодическое решение отвечает достаточно узкому множеству начальных условий. Не исключено, что в рассматриваемой задаче существуют и резонансные вращения 3:2, для которых переменная X содержит гармоники с другими дробными частотами, например, является 4π-периодической по τ. Но для выявления таких резо-

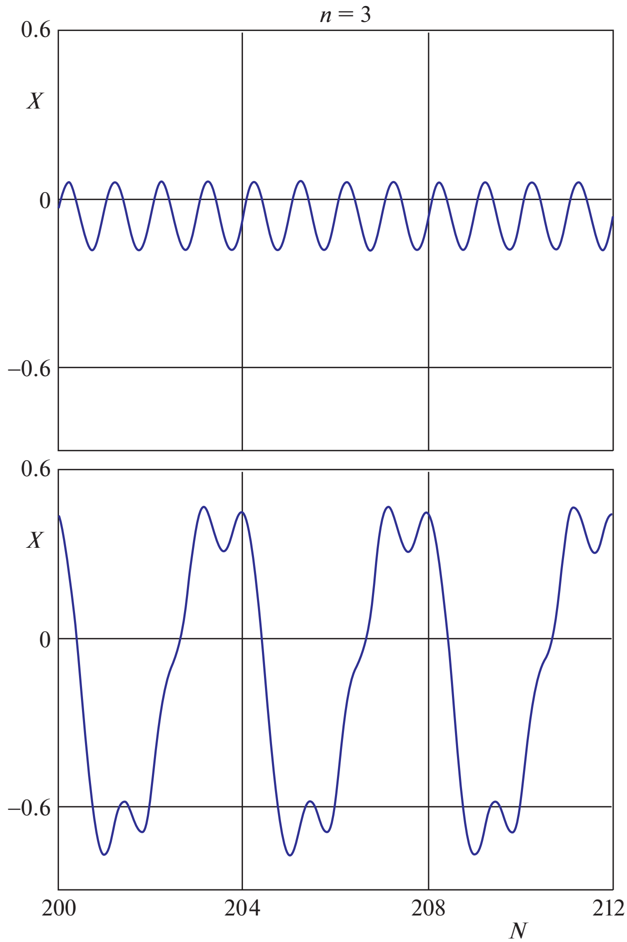

Рис. 3.

нансных вращений спутника требуется дополнительное исследование, которое выходит за рамки настоящей статьи.

Заключение. В работе проведено исследование плоских вращений спутника с шаровым демпфером на эллиптической орбите. Получены эволюционные уравнения, описывающие нерезонансные вращения спутника. Определены условия существования и устойчивости резонансных вращений спутника. Получено аналитическое решение, описывающее плоские 2π-периодические резонансные вращения спутника с демпфером на эллиптической орбите. Аналитические выводы работы подтверждаются результатами численного интегрирования уравнений вращательного движения спутника с демпфером на эллиптической орбите.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.

2. *Белецкий В.В., Лавровский Э.К.* К теории резонансного вращения Меркурия // Астрон. ж. 1975. Т. 52. Вып. 6. С. 1299–1308.
3. *Черноусько Ф.Л.* О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 473–483.
4. *Черноусько Ф.Л.* Резонансные явления при движении спутника относительно центра масс // ЖВММФ. 1963. Т. 3. № 3. С. 528–538.
5. *Маркеев А.П.* Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2009. 396 с.
6. *Маркеев А.П.* К задаче о плоских периодических вращениях спутника на эллиптической орбите // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 102–115.
7. *Амелькин Н.И., Холощак В.В.* Об устойчивости стационарных вращений спутника с внутренним демпфированием в центральном гравитационном поле // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 2. С. 123–136.
8. *Амелькин Н.И., Холощак В.В.* О стационарных вращениях спутника при наличии внутренних упругих и диссипативных сил // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 6. С. 627–641.
9. *Амелькин Н.И., Холощак В.В.* Эволюция вращательного движения динамически симметричного спутника с внутренним демпфированием на круговой орбите // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 1. С. 3–15.
10. *Амелькин Н.И., Холощак В.В.* Вращательное движение несимметричного спутника с демпфером на круговой орбите // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 1. С. 16–31.
11. *Амелькин Н.И.* Эволюция вращательного движения планеты на круговой орбите под влиянием внутренних упругих и диссипативных сил // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 2. С. 96–111.
12. *Черноусько Ф.Л.* О движении твердого тела, содержащего сферический демпфер // ПМТФ. 1968. № 1. С. 73–79.
13. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
14. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.

On the Flat Resonant Rotations of a Satellite with a Ball Damper in an Elliptical Orbit

N. I. Amel'kin[a,#]

[a] *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia*
[#] *e-mail: namelkin@mail.ru*

In the framework of M.A. Lavrent'evs model examines the influence of internal dissipative forces on rotational movement of a satellite in an elliptical orbit. Evolutionary equations describing flat non-resonant rotations of the satellite are obtained. The conditions of existence and stability of flat resonant rotations of the satellite are determined. An analytical solution describing the flat resonant rotations of the satellite in an elliptical orbit is obtained.

Keywords: satellite with damper, elliptical orbit, evolutionary equations, flat resonant rotations, stability

REFERENCES

1. *Beletskii V.V.* Motion of a Satellite with Respect to Center of Mass in Gravitational Field. Moscow: MSU, 1975. (in Russian)
2. *Beletskii V.V., Lavrovsky E.K.* To the theory of resonance rotation of Mercury // Astron. J., 1975, vol. 52, no. 6, pp. 1299–1308.
3. *Chernous'ko F.L.* On the motion of a satellite about its center of mass under the action of gravitational moments // JAMM, 1963, vol. 27, no. 3, pp. 708–722.
4. *Chernous'ko F.L.* Resonance phenomena in the motion of the satellite relative to the center of mass // J. Comput. Math. Math. Phys., 1963, vol. 3, no. 3, pp. 528–538.

5. *Markeev A.P.* Linear Hamiltonian Systems and Some Problems about the Stability of the Satellite Motion Relative to the Center of Mass. Moscow; Izhevsk: R&C Dyn., 2009.
6. *Markeev A.P.* To the problem of flat periodic rotations of the satellite in an elliptical orbit // Mech. Solids, 2008, no. 3, pp. 102–115.
7. *Amel'kin N.I., Kholoshchak V.V.* Stability of the steady rotations of a satellite with internal damping in a central gravitational field // JAMM, 2017, vol. 81, no. 2, pp. 85–94.
8. *Amel'kin N.I., Kholoshchak V.V.* Steady rotations of a satellite with internal elastic and dissipative forces // JAMM, 2017, vol. 81, no. 6, pp. 431–441.
9. *Amel'kin N.I., Kholoshchak V.V.* Evolution of the rotational movement of a dynamically symmetric satellite with inner damping in a circular orbit // Mech. Solids, 2019, vol. 54, pp. 179–189.
10. *Amel'kin N.I., Kholoshchak V.V.* Rotational motion of a non-symmetrical satellite with a damper in a circular orbit // Mech. Solids, 2019, vol. 54, pp. 190–203.
11. *Amel'kin N.I.* The evolution of the rotary motion of a planet in a circular orbit under the influence of elastic and dissipative forces // Mech. Solids, 2020, vol. 55, pp. 234–247.
12. *Chernous'ko F.L.* Motion of a solid containing spherical damper // J. Appl. Mech. Techn. Phys., 1968, vol. 9, no. 1, pp. 45–48.
13. *Bogolyubov N.N., Mitropol'skii Yu.A.* Asymptotic Methods for Theory of Nonlinear Oscillations. Moscow: Nauka, 1974. (in Russian)
14. *Zhuravlev V.F., Klimov D.M.* Applied Methods for Oscillations Theory. Moscow: Nauka, 1988. (in Russian)

EDN: JCPCDI
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА **2022, том 86, № 3, с. 329–336**

УДК 531.36

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (ОТО)

В. Ф. Журавлёв[1,*]

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
**e-mail: zhurav43@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 13.12.2021 г.
После доработки 22.02.2022 г.
Принята к публикации 18.03.2022 г.

14 апреля 2007 года на заседании американского физического общества в Джексонвилле (Флорида) известный американский гироскопист Френсис Эверит сообщил о предварительных результатах эксперимента на специальном искусственном спутнике Земли с криогенными гироскопами. В эксперименте, который был начат в августе 2005 года и закончен в августе 2006 года при помощи гироскопа измерялась кривизна пространства-времени в окрестности Земли, которая определяется в силу основного постулата ОТО распределением материи. В настоящей заметке обсуждаются трудности, которые пришлось преодолеть при подготовке этого эксперимента.

Ключевые слова: гироскоп, прецессия, общая теория относительности

DOI: 10.31857/S0032823522030110

Суть эксперимента состоит в реализации эффекта параллельного перенесения вектора вдоль замкнутой траектории на тестируемом многообразии. Роль переносимого вектора играет кинетический момент гироскопа, замкнутая траектория – траектория спутника, проходимая в течение года (6227 оборотов). Если бы тестируемое многообразие было бы евклидовым, то в результате такого перенесения вектор совместился бы сам с собой. Если же пространство евклидовым не является, то вектор повернется на угол, являющийся мерой кривизны этого пространства. В ОТО тензор кривизны связан с тензором энергии импульса известной формулой Гильберта, что и позволяет вычислить ожидаемый эффект для рассматриваемого эксперимента. Он оказывается равным 7″ за год полета.

Этот эксперимент был предложен в 1960 году американским физиком Л. Шиффом. Его еще продолжали обсуждать, когда в 1967 году французским физиком теоретиком Р. Матеем в статье, опубликованной в докладах Парижской академии наук, было показано, что подобный эксперимент неосуществим в принципе. Дело в том, что даже идеально изготовленный гироскоп имеет отличную от абсолютного нуля температуру, и хаотические колебания атомов кристаллической решетки приводят к случайной прецессии гироскопа. Матей вычислил, что для условий эксперимента Шиффа этот уход составляет 3.5″ в год. Поскольку такой уход соизмерим с тем, что нам нужно определить, то ни о какой достоверности эксперимента говорить нельзя.

Такой поворот параллельно переносимого вектора называется геодезической прецессией. На поверхности Земли он хорошо известен специалистам по навигации. Например, если у торпедного катера торпедный аппарат для удержания цели стабилизирован относительно вертикали, то в случае, если он опишет на поверхности аквато-

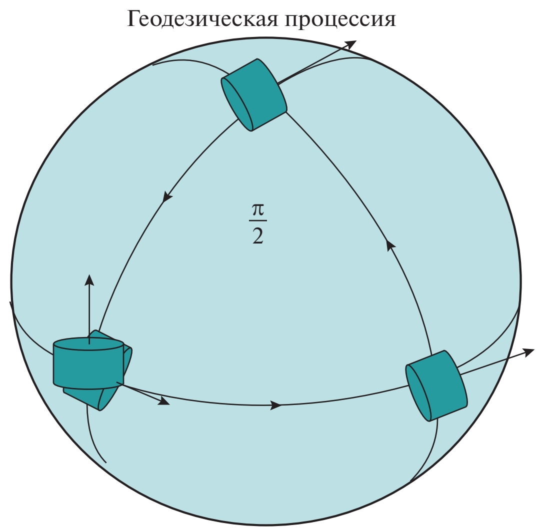

Рис. 1.

рии замкнутую кривую, аппарат повернется вокруг вертикали на угол, равный сферическому избытку по Гауссу (рис. 1). Это та же самая геодезическая прецессия. На рис. 1 гироскоп в качестве примера описал восьмую часть сферы. Необходимо подчеркнуть, что геодезическая прецессия является чисто геометрическим эффектом. Она не зависит ни от величины кинетического момента гироскопа, ни от каких кинематических обстоятельств движения по траектории, ни от каких-либо чисто физических обстоятельств.

Статья Матея вызвала большой резонанс. Если профессионально интересующихся ОТО в мире несколько человек, то вопрос о возможностях криогенного гироскопа сильно интересовал очень многих. Здесь нужно вспомнить, что военно-морская доктрина России основана на ракетонесущих атомных подводных лодках. В отличие от американцев, для которых основной ударной силой являются авианосцы. Для того, чтобы подводная лодка могла находиться в подводном состоянии 2–3 месяца необходимы гироскопы сверхвысокой точности. Поэтому, то, что предполагалось использовать для проверки ОТО могло найти очень конкретное практическое применение.

Из статьи Матея следовало, что погрешность криогенного гироскопа падает, как корень квадратный из абсолютной температуры. Это значит, что при переходе от комнатных температур к температурам криогенного гироскопа точность возрастает лишь на один порядок. Для этого создавать целое направление промышленности не стоило. В России в этом направлении уже были развернуты работы. Статья Матея ставила на них крест.

В 1975 году заинтересованные проблемой специалисты обратились к директору Института проблем механики АН СССР А.Ю. Ишлинскому с просьбой прояснить ситуацию. Дело в том, что в статье Матея не было вывода его знаменитой формулы, как это и принято в докладах АН. Поэтому проверка того, насколько он прав требовала дополнительных расчетов.

Ниже приведен выполненный в то время в Институте проблем механики АН СССР анализ результата Матея.

Динамически симметричное твердое тело, главные, центральные моменты инерции которого суть $A = B, C$, вращается с угловой скоростью ω, совпадающей в началь-

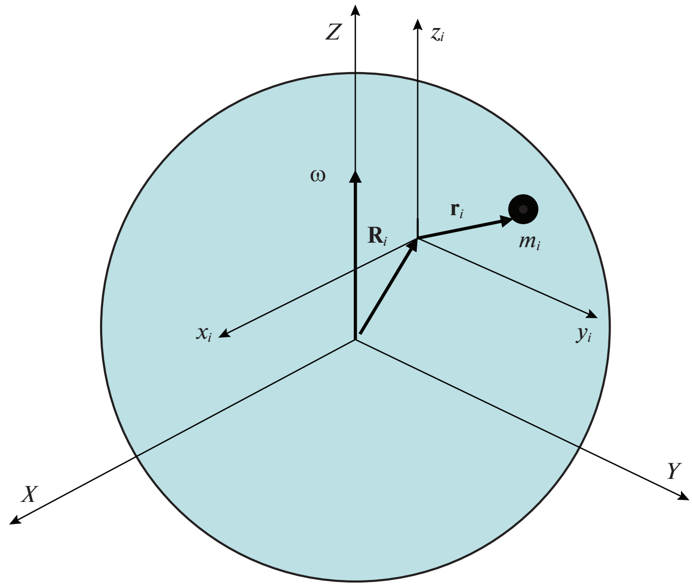

Рис. 2.

ный момент времени с осью симметрии тела. Направляющий вектор этой оси **e**. Тело вращается в пустом пространстве, никаких сил и моментов нет. В этих условиях центр масс тела неподвижен, его угловое движение рассматриваем в инерциальной системе отсчета X, Y, Z с центром в центре масс и с осью Z, направленной в начальный момент времени по вектору **e**. Тело имеет температуру TK и его угловое движение, обусловленное тепловыми колебаниями его атомов, и является предметом дальнейшего анализа.

Вычислим момент количеств движения тела (рис. 2)

$$\mathbf{G} = m(\mathbf{R}_i + \mathbf{r}_i)\times(\dot{\mathbf{R}}_i + \dot{\mathbf{r}}_i) = m\left(\mathbf{R}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i + \mathbf{R}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i + \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i\right),$$

где $\mathbf{R}_i$ — нейтральное положение отмеченного атома, $\mathbf{r}_i$ — вектор смещения этого атома при его колебаниях, m — масса атома (суммирование по повторяющимся индексам).

В силу отсутствия внешних моментов $\dot{\mathbf{G}} \equiv 0$. Первый член в написанной сумме представляет собой момент количеств движения “холодного” гироскопа, производная от него имеет вид

$$\frac{d}{dt} m(\mathbf{R}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i) = -m(\mathbf{R}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{r}_i \times [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_i]]) = \mathbf{M} \qquad (1)$$

В формуле (1) опущен член $\mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i$, порядок которого в сравнении с членом $\mathbf{R}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i$ равен $r_i / R_i = 10^{-9}$.

Левая часть этого уравнения может быть записана так [2]

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{R}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i) = A\mathbf{e} \times \ddot{\mathbf{e}} + H\dot{\mathbf{e}} + \dot{H}\mathbf{e}, \qquad (2)$$

где $H = C\omega$ — собственный кинетический момент гироскопа, $\omega = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}$ — проекция на ось симметрии, совпадающая в начальный момент времени с модулем угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$.

Из (1) и (2) следует $\dot{H} = \mathbf{M}\cdot\mathbf{e}$. Изменение H интереса не представляет, поэтому это уравнение в дальнейшем не рассматривается. Считая H большим, а также имея ввиду исключительно малый уровень стоящего в правой части (1) возмущения, ограничимся в дальнейшем прецессионной частью этого уравнения

$$H\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{M} - (\mathbf{M}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e} \tag{3}$$

Поскольку $\dot{\mathbf{e}} = (\dot{\beta}, -\dot{\alpha}, 0)$, где α и β – малые углы поворота вектора $\mathbf{e}$ вокруг осей x и y соответственно, то (3) приобретает вид

$$H\dot{\beta} = -m(Y_i\ddot{z}_i - Z_i\ddot{y}_i) - m\omega^2 Y_i z_i$$
$$H\dot{\alpha} = m(Z_i\ddot{x}_i - X_i\ddot{z}_i) - m\omega^2 X_i z_i$$

Будем считать компоненты вектора $\mathbf{r}_i$, определяющего колебания атома, случайными функциями времени [4, 5] с корреляционной функцией

$$K[x_i] = K[y_i] = K[z_i] = \tau^2 V^2 \exp(-|t - t'|/\tau),$$

где V^2 – среднее значение квадрата скорости случайных колебаний атома, τ – постоянная времени корреляции и вычислим дисперсию угла α: $D[\alpha]$ (аналогичные вычисления могут быть проделаны и для угла β). Для этого найдем предварительно корреляционную функцию соответствующего уравнения

$$K[H\dot{\alpha}] = m^2(Z_i^2 + X_i^2)K[\ddot{x}_i] + m^2\omega^4 X_i^2 K[x_i] \tag{4}$$

Учитывая, что $\sum m(Z_i^2 + X_i^2) = A$, $\sum mX_i^2 = C/2$, а $mV^2 = \langle E\rangle/3$, где $\langle E\rangle$ есть среднее значение полной энергии колебаний атома, получим

$$K[H\dot{\alpha}] = \frac{\langle E\rangle}{3\tau^2}(A + C\tau^4\omega^4/2)e^{-|t-t'|/\tau}$$

Поскольку $\tau = 10^{-6}$, $\omega = 2\pi\times 10^3$, то, пренебрегая $\tau^4\omega^4$ в сравнении с единицей, напишем

$$K[H\alpha] = \frac{A\langle E\rangle}{3\tau^2}\int\limits_0^t dt\int\limits_0^{t'} e^{-|t-t'|/\tau}dt' =$$
$$= \frac{A\langle E\rangle}{3\tau}(\tau(e^{-|t|/\tau} + e^{-|t'|/\tau} - e^{-|t-t'|/\tau} - 1) + |t| + |t'| - |t - t'|),$$

что позволяет вычислить дисперсию

$$D[H\alpha] = K[H\alpha]_{t=t'} = 2A\langle E\rangle t/3\tau$$

(оставлены линейные по t члены, являющиеся преобладающими в сравнении с отброшенными).

Откуда среднеквадратическое уклонение угла α равно

$$\sqrt{\alpha^2} = \frac{1}{H}\sqrt{\frac{2A\langle E\rangle t}{3\tau}} \tag{5}$$

Связь средней энергии колебаний атома с абсолютной температурой тела следует из теории теплоемкости Дебая [5]

$$\langle E\rangle = \frac{9kT^4}{\theta^3}\int\limits_0^{\theta/T}\frac{\varphi^3 d\varphi}{e^{\varphi} - 1} \tag{6}$$

Формула (5), в которой $\langle E \rangle$ определяется формулой (6) и представляет собой искомый результат, связывающий дрейф теплого гироскопа с его температурой без каких-либо ограничений на последнюю.

Употребительными являются два следствия из формулы Дебая (6) при высоких и при низких температурах. При комнатных температурах $T \to \infty$ и формула (6) дает закон Дюлонга и Пти $\langle E \rangle = 3kT$. Подставляя его в (5) получаем

$$\sqrt{\alpha^2} = \sqrt{\frac{2AkTt}{C^2\omega^2\tau}}, \tag{7}$$

что совпадает с результатом, приведенным в [1] без вывода для случая шара $A = B = C$. В [1] для расчета по этой формуле использовались следующие данные

$$A = C = 3 \text{ г} \cdot \text{см}^2, \quad \omega = 2\pi \times 10^3 \text{ с}^{-1}, \quad k = 1.38 \times 10^{-16} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{с}^2\text{град}$$
$$\theta = 252 \text{ K}, \quad t = 1 \text{ год} = 3.15 \times 10^7 \text{ с}, \quad \tau = 10^{-6} \text{ с}$$

для двух значений температуры. Для $T = 293$ K по формуле (7) найдем $\sqrt{\alpha^2} = 30''$ за год полета. В случае криогенного гироскопа $T = 4$ K и по этой же формуле, следуя [1], получаем $\sqrt{\alpha^2} = 3.5''$. За год полета геодезическая прецессия гироскопа согласно [2, 3] составляет $7''$. Эти расчеты и заставили автора усомниться в возможностях описанного в [6] эксперимента.

Между тем, при температурах, близких к абсолютному нулю из (6) при $T \to 0$ имеем

$$\int_0^\infty \varphi^3/(e^\varphi - 1)d\varphi = \pi^4/15,$$

и формула (6) приобретает вид

$$\langle E \rangle = 3\pi^4 kT^4/5\theta^3$$

Подстановка этого выражения в (5) позволяет получить среднеквадратическое уклонение угла α для малых температур в виде

$$\sqrt{\alpha^2} = \frac{\pi^2 T^2}{H\theta}\sqrt{\frac{2Akt}{5\tau\theta}} \tag{8}$$

Для температуры $T = 4$ K по этой формуле получаем $\sqrt{\alpha^2} = 0.03''$, что на два порядка меньше того, что получено в [1].

Заметим, что в этом расчете для характеристической температуры Дебая было принято значение для ниобия 252 K. Между тем, для кварца характеристическая температура выше и вычисленный уход для реального криогенного гироскопа будет еще меньше.

Таким образом, для проверки общей теории относительности при помощи гироскопа термодинамического препятствия не существует. Если такой эксперимент и неосуществим, то по каким-то другим причинам.

В этом же году (1975) этот результат был передан заказчикам, а в 1995 году, после того, как он перестал носить закрытый характер, опровержение результата Р. Матея было доложено во Франции в ИНРИА. В отечественной печати он был опубликован [9].

В последние годы второго тысячелетия работы по эксперименту в США вступили в завершающую фазу и 20 апреля 2004 года с четырьмя криогенными (температура 1.8 Кельвина) гироскопами спутник был запущен на круговую, околополярную орбиту с высотой 642 км (рис. 3). Начальное направление кинетических моментов гироскопов было ориентировано на опорную звезду IM Пегаса (двойная звезда HR 8703). Научная фаза продолжалась 353 дня. Объем собранной информации составлял 1 терабайт. В августе 2006 года эксперимент был завершен. Еще год ушел на обработку полу-

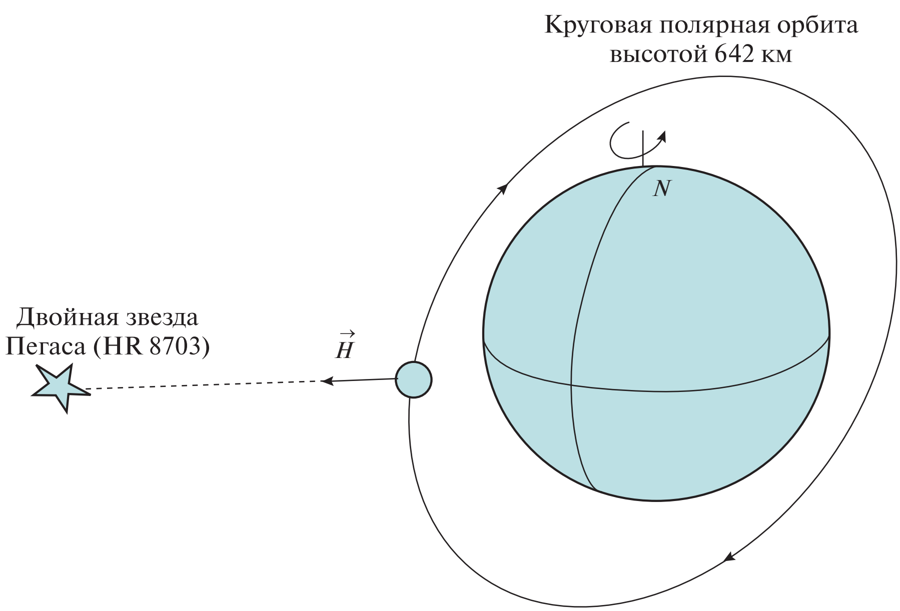

Рис. 3.

ченных данных, и окончательные результаты были подведены в декабре 2007 года. С точностью лучше 1% подтвердилась теоретическая цифра 6.606″ в год. Стоимость эксперимента составляла 760 миллиардов долларов.

Таким образом, впервые в истории науки факт искривленности нашего пространства-времени вблизи Земли подтвержден прямым лабораторным экспериментом.

Бытует мнение, что до настоящего времени существовало два подтверждающих теорию факта: красное смещение и прецессия перигелия Меркурия.

На самом деле это не так. Красное смещение может быть объяснено и в рамках специальной теории относительности, а для объяснения смещения перигелия Меркурия достаточно учесть дипольный момент гравитационного поля Солнца, отказавшись от предположения о том, что Солнце однородный шар. Таким образом, завершенный в 2006 году эксперимент является пока единственным достоверным подтверждением ОТО.

Фактом подтверждения ОТО роль этого эксперимента не ограничивается. Известны и другие причины, которые могли привести к прецессии гироскопа. Прецессия Лензе–Тирринга определяется учетом вращения Земли. Кроме того, к искривлению пространства вблизи Земли приводят также Солнце и Луна. Эти эффекты известны, они проявляются лишь в третьем после запятой знаке.

Есть и еще два спорных источника прецессии гироскопа. Прецессия Томаса [7] и прецессия по Логунову [8].

Прецессия Томаса представляет собой бесспорный факт релятивистской кинематики, когда композиция трех движений с постоянными скоростями, векторы которых образуют плоский треугольник, есть не тождественное преобразование, как это было бы в случае классической кинематики, а равномерное вращение в плоскости этого треугольника. В случае релятивистски поступательного движения некоторого неинерциального трехгранника по окружности также возникает непрерывное накопление угла поворота этого трехгранника.

Эти факты чисто математические они следуют из некоммутативности группы Лоренца и они бесспорны. Спорным является отождествление этого кинематического поворота с поворотом какого-либо физического объекта, находящегося в этом трехграннике (спин электрона движущегося вокруг ядра в атоме, или кинетический момент гироскопа на спутнике).

Прецессия Томаса для подобных физических объектов пока экспериментального подтверждения не имела, а обсуждаемый нами эксперимент просто опровергает факт ее существования.

Аналогичная ситуация и с прецессией по Логунову. Альтернативная теория гравитации по Логунову исходит из плоского пространства-времени с индефинитной метрикой с последующим вычислением сил гравитации при помощи формулы Гильберта.

В плоском пространстве-времени нет геодезической прецессии, а эффект прецессии гироскопа является по мнению Логунова не кинематическим, а динамическим и выражается формулой

$$\mathbf{\Omega} = \frac{3}{2}\left[\mathbf{v}, \nabla\left(\frac{GM}{c^2 r}\right)\right] = 0.8'' \text{ в год.}$$

На самом деле никакой динамики здесь нет, поскольку полученное выражение не зависит от величины кинетического момента гироскопа. Она представляет собой лишь еще один вывод формулы для кинематической прецессии Томаса.

И этот результат также экспериментом опровергнут.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mathey R.* Dérive du gyroscope électrostatique. Compte rendus // Acad. Sc. Paris. 1967. V. 264. ser. A. 21. P. 912.
2. *Мартыненко Ю.Г.* Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988. 368 с.
3. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы, инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
4. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977.
5. *Киттель Ч.* Элементарная физика твердого тела. М.: Наука, 1965. 366 с.
6. *Кеннон Р.* Специальный гироскоп для измерения эффектов общей теории относительности на борту астрономического спутника. Требования и конструкция // в сб.: Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. С. 129–151.
7. *Малыкин Г.Б.* Прецессия Томаса: корректные и некорректные решения // УФН. 2006. Т. 176. № 8. С. 865–882.
8. *Логунов А.А.* Теория гравитационного поля. М.: Наука, 2001. 238 с.
9. *Журавлёв В.Ф.* Предельная точность идеального гироскопа // Докл. РАН. 2006. Т. 410. № 2. С. 200–202.

On Some Problems of Experimental Verification of General Relativity Theory

V. F. Zhuravlev[a,#]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: zhurav43@ipmnet.ru*

On April 14, 2007, at a meeting of the American Physical Society in Jacksonville (Florida), the famous American gyroscopist Francis Everitt reported on the preliminary results of an experiment on a special artificial Earth satellite with cryogenic gyroscopes. In the experiment, which was started in August 2005 and completed in August 2006, a gyroscope was used to measure the curvature of space-time in the vicinity of the Earth, which is determined by the distribution of matter due to the basic postulate of general relativity. In this note, we discuss the difficulties that had to be overcome in preparing this experiment.

Keywords: gyroscope, precession, general theory of relativity

REFERENCES

1. *Mathey R.* Dérive du gyroscope électrostatique. Compte rendus // Acad. Sc. Paris, 1967, vol. 264, ser. A. 21, pp. 912.
2. *Martynenko Yu.G.* Motion of a Rigid Body in Electric and Magnetic Fields. Moscow: Nauka, 1988. 368 p. (in Russian)
3. *Ishlinsky A.Yu.* Orientation, Gyroscopes, Inertial Navigation. Moscow: Nauka, 1976. 670 p. (in Russian)
4. *Gikhman I.I., Skorokhod A.V.* Introduction to the Theory of Random Processes. Moscow: Nauka, 1977. (in Russian)
5. *Kittel Ch.* Elementary Solid State Physics: A Short Course. N.Y.: Wiley, 1962.
6. *Cannon R.H.Jr.* Requirements and design for a special gyro for measuring general relativity effects from an astronomical satellite // in: Kreiselprobleme/Gyrodynamics. Symposium Celerina, August 20–23, 1962. Berlin: Springer, 1962. pp. 146–157.
7. *Malykin G.B.* Thomas precession: correct and incorrect solutions // Phys. Usp., 2006, vol. 49, pp. 837–853.
8. *Logunov A.A.* Theory of the Gravitational Field. Moscow: Nauka, 2001. 238 p. (in Russian)
9. *Zhuravlev V.Ph.* Limiting accuracy of an ideal gyroscope // Dokl. Phys., 2006, vol. 51, no. 9, pp. 517–519.

EDN: ZYBNKO
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА **2022, том 86, № 3, с. 337–340**

УДК 51-71+530.1

ШЕСТИМЕРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАСШИРЕННОЙ ГРУППЫ ГАЛИЛЕЯ–НЬЮТОНА

© 2022 г. В. Ф. Чуб[1,*]

[1] Ракетно-космическая корпорация "Энергия" имени С.П. Королёва, Королёв, Россия
**e-mail: post2@rsce.ru*

Поступила в редакцию 16.03.2022 г.
После доработки 24.03.2022 г.
Принята к публикации 25.03.2022 г.

В работе приведено специальное (шестимерное) представление алгебры Ли нерелятивистского аналога конформной группы – 15-параметрической расширенной группы Галилея–Ньютона. В отличие от обычного (четырехмерного) представления найденный набор генераторов может быть расширен до представления алгебры Ли нерелятивистского аналога 16-параметрической расширенной конформной группы. В заключение сопоставляются основное положение эрлангенской концепции Клейна ("Дано многообразие и в нем группа преобразований") и тезис автора: "пространство–время – это метафизический призрак, который должен быть исключен из научного описания природы".

Ключевые слова: группа Галилея, расширение группы, группа Галилея–Ньютона, специальная теория относительности, группа Пуанкаре, конформная группа, генератор преобразования, алгебра Ли, эрлангенская программа Клейна

DOI: 10.31857/S0032823522030043

1. Введение. Согласно школьному учебнику "классическая механика представляет собой теорию движений тел, основанную на группе Галилея" ([1], с. 149). При теоретико-групповой формулировке задач, учитывающих гравитацию, 10-параметрическую группу Галилея приходится расширять до 13-параметрической группы Галилея–Ньютона [2]. Переход от классической механики к релятивистской связан с заменой группы Галилея на ее релятивистский аналог – группу Пуанкаре [3, 4] ("*специальная теория относительности – это такая физическая теория, группой симметрии которой является группа Пуанкаре*" ([1], с. 149)). При учете гравитации 10-параметрическую группу Пуанкаре приходится расширять до 15-параметрической конформной группы [5, 6]. Конформной группе и теоретико-групповому подходу в физике посвящена обширная литература [7–10]. Далее рассматривается нерелятивистский аналог конформной группы – 15-параметрическая расширенная группа Галилея–Ньютона (упомянутая в [6], см. дополнение к 3-му изданию).

2. Расширенная группа Галилея–Ньютона

2.1. Стандартное (четырехмерное) представление. Для записи генераторов в стандартном четырехмерном представлении ниже используются традиционные переменные t, x, y, z. Применяются сокращенные (по сравнению с обычно используемыми в механике [11]) обозначения: $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x = \partial/\partial x$ и так далее.

Нерелятивистский аналог конформной группы определяется следующими генераторами:

1) повороты: $\Theta_x = z\partial_y - y\partial_z$, $\Theta_y = x\partial_z - z\partial_x$, $\Theta_z = y\partial_x - x\partial_y$

2) нерелятивистские бусты: $V_x = t\partial_x$, $V_y = t\partial_y$, $V_z = t\partial_z$

3) пространственные переносы: $R_x = \partial_x$, $R_y = \partial_y$, $R_z = \partial_z$

4) временной перенос: $T = \partial_t$

5) масштабное преобразование: $\Gamma = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$

6) нерелятивистское w-преобразование: $W = \frac{1}{2}t^2\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y + tz\partial_z$

7) нерелятивистские **g**-преобразования: $G_x = \frac{1}{2}t^2\partial_x$, $G_y = \frac{1}{2}t^2\partial_y$, $G_z = \frac{1}{2}t^2\partial_z$

Таблица коммутаторов выписанных генераторов приведена, например, [12].

2.2. Нестандартное (шестимерное) представление. Для записи генераторов в шестимерном представлении помимо использованных в предыдущем пункте четырех переменных t, x, y, z применяются еще ρ и τ.

Рассмотрим следующие генераторы:

1) повороты: $\Theta_x = z\partial_y - y\partial_z$, $\Theta_y = x\partial_z - z\partial_x$, $\Theta_z = y\partial_x - x\partial_y$

2) нерелятивистские бусты: $V_x = t\partial_x$, $V_y = t\partial_y$, $V_z = t\partial_z$

3) пространственные переносы: $R_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho + \tau)\partial_x$, $R_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho + \tau)\partial_y$, $R_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho + \tau)\partial_z$

4) временной перенос: $T = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho\partial_t + t\partial_\rho + \tau\partial_t - t\partial_\tau)$

5) масштабное преобразование: $\Gamma = -\tau\partial_\rho - \rho\partial_\tau$

6) нерелятивистское w-преобразование: $W = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\rho\partial_t + t\partial_\rho - \tau\partial_t + t\partial_\tau)$

7) нерелятивистские **g**-преобразования:

$$G_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho\partial_x - \tau\partial_x), \quad G_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho\partial_y - \tau\partial_y), \quad G_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho\partial_z - \tau\partial_z)$$

Таблица коммутаторов перечисленных пятнадцати генераторов семи разных типов идентична таблице коммутаторов генераторов из предыдущего пункта.

Замечание. Рассмотренную систему генераторов можно дополнить линейно независимым и коммутирующим со всеми другими генератором $\Phi = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + \rho\partial_\rho + \tau\partial_\tau$ (в традиционной геометрической интерпретации — масштабное преобразование 6-мерного пространства).

3. Обсуждение. Исходным пунктом для построения шестимерного представления расширенной группы Галилея—Ньютона (нерелятивистского аналога конформной группы) послужил известный факт (локального) изоморфизма конформной группы и шестимерной группы вращений ([4], с. 86; [8], с. 190).

Стандартная интерпретация этого факта состоит в следующем. Есть две различные группы: конформная группа 4-мерного пространства (точнее, пространства—времени с тремя пространственными и одним временным измерениями) и группа вращений 6-мерного пространства (пространства—времени с четырьмя пространственными и двумя временными измерениями), причем у них, что нетривиально, совпадают алгебры Ли. В этой интерпретации первично пространство (4-мерное или 6-мерное), а действующая в нем группа вторична.

Автор придерживается другой интерпретации: есть конформная группа (или, как в данной статье, расширенная группа Галилея—Ньютона) и ее можно представить различными математическими способами, с использованием того или иного "пространства представления". В этой интерпретации первична группа, а пространство, в котором она "действует", вторично.

Первая интерпретация следует "эрлангенскому" подходу к построению геометрии и физики, который в общем виде начинается с констатации: "*Дано многообразие и в нем группа преобразований*" ([4], с. 8). Суть второй интерпретации можно выразить радикально: "пространство–время – это метафизический призрак, который должен быть исключен из научного описания природы" ([6], с. 47) или в более мягкой форме: приведенным на той же странице напутствием О. Блюменталя (редактора вышедшего в 1910 году сборника работ Г. Минковского) "И пусть каждый по мере своих сил способствует осуществлению смелой мечты Минковского о том, чтобы в сознании человечества для будущих поколений пространство и время низвелись до роли теней, и живым осталось бы только *пространственно-временное преобразование*".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Громов С.В., Шаронова Н.В.* Физика. Механика. Теория относительности. Электродинамика. М.: Просвещение, 2007. 415 с.
2. *Чуб В.Ф.* Формулировка задачи двух тел в параметрах расширенной группы Галилея // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 4. С. 16–20.
3. *Зайцев Г.А.* О связи теории относительности с теорией групп // в кн.: *Тоннел М.-А.* Основы электромагнетизма и теории относительности. М.: Иностр. лит., 1962. С. 447–475.
4. *Визгин В.П.* "Эрлангенская программа" и физика. М.: URSS, 2019. 120 с.
5. *Чуб В.Ф.* Применение конформной группы в теории инерциальной навигации // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 5. С. 3–17.
6. *Чуб В.Ф.* Основы инерциальной навигации. М.: URSS, 2021. 192 с.
7. *Мархашов Л.М.* О конформно-инвариантных движениях материальной точки // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 4–13.
8. *Визгин В.П.* Из истории конформной симметрии в физике (о некоторых особенностях взаимосвязи физики и математики в XX веке) // Историко-математ. исслед. 1974. Вып. XIX. С. 188–219.
9. *Мархашов Л.М.* О релятивистских аналогах динамики материальной точки // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 3. С. 382–395.
10. *Мархашов Л.М.* О групповой концепции Клейна в механике материальной точки // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 4. С. 563–569.
11. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2008. 304 с.
12. *Чуб В.Ф.* Формулировка задачи *n* тел в параметрах расширенной группы Ньютона // Изв. РАН. МТТ. 2022. (В печати)

Six-Dimensional Representation of the Extended Galilean–Newton Group

V. F. Chub[a,#]

[a] *Korolev Rocket and Space Corporation Energia, Korolev, Russia*
[#] *e-mail: post2@rsce.ru*

The paper presents a special (six-dimensional) representation of the Lie algebra of the nonrelativistic analogue of the conformal group – 15-parametric extended Galilean–Newton group. In contrast to the usual (four-dimensional) representation, the found set of infinitesimal operators can be obviously extended to represent the Lie algebra of the nonrelativistic analogue of the 16-parameters extended conformal group. In conclusion, the main position of Klein's Erlangen concept ("Given a variety and in it a group of transformations") and the author's thesis "space-time is a metaphysical ghost that should be excluded from the scientific description of nature" are compared.

Keywords: Galilean group, group extension, Galilean–Newton group, special theory of relativity, Poincare group, conformal group, infinitesimal operator of transformation, Lie algebra, Klein Erlangen program

REFERENCES

1. *Gromov S.V., Sharonova N.V.* Physics. Mechanics. Relativity. Electrodynamics. Moscow: Prosveshchenie, 2007. 415 p. (in Russian)
2. *Chub V.F.* Statement of the two-body problem in the parameters of the extended Galilei group // Mech. Solids, 2012, vol. 47, no. 4, pp. 385–389.
3. *Zaitsev G.A.* On the Relation between the Theory of Relativity and the Theory of Groups // in: *Tonnelat M.-A.* Foundations of Electromagnetism and Relativity. Moscow: Izd. Inostr. Lit., 1962, pp. 447–475. (in Russian)
4. *Vizgin V.P.* Erlangen Program and Physics. Moscow: URSS, 2019. 120 p. (in Russian)
5. *Chub V.F.* Use of the conformal group in the theory of inertial navigation // Mech. Solids, 2006, vol. 41, no. 5, pp. 1–12.
6. *Chub V.F.* Foundations of Inertial Navigation. Moscow: URSS, 2021. 192 p. (in Russian)
7. *Markhashov L.M.* On conformally-invariant motions of a material point // JAMM, 1966, vol. 30, iss. 1, pp. 1–12.
8. *Vizgin V.P.* From the history of conformal symmetry in physics (about some features of the relationship between physics and mathematics in the 20th centure // in: Historical and Mathematical Research, 1974, iss. 19. pp. 188–219. (in Russian)
9. *Markhashov L.M.* On relativistic analogues of particle dynamics // JAMM, 1989, vol. 53, iss. 3, pp. 289–300.
10. *Markhashov L.M.* Klein's group-theoretic conception in the mechanics of a material point // JAMM, 1992, vol. 56, iss. 4, pp. 469–475.
11. *Zhuravlev V.Ph.* Foundations of Theoretical Mechanics. Moscow: Fizmatlit, 2008. 304 p. (in Russian)
12. *Chub V.F.* Statement of the N body problem in the parameters of the extended Newton group // Mech. Solids, 2022. (In press).

EDN: MYHWWU
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА **2022, том 86, № 3, с. 341–348**

УДК 004.891: 623.46: 629.78

ПЕРЕХВАТ БАЛЛИСТИЧЕСКИХ РАКЕТ НА АКТИВНОМ УЧАСТКЕ ТРАЕКТОРИИ

© 2022 г. А. В. Кубышкин[1,2,*], И. Н. Белоконь[2], В. В. Карагодин[2]

[1] *Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия*
[2] *ВНИИ автоматики им. Н.Л. Духова, Москва, Россия*
**e-mail: akubyshkin@yandex.ru*

Поступила в редакцию 22.12.2021 г.
После доработки 09.02.2022 г.
Принята к публикации 09.02.2022 г.

Статья посвящена анализу возможности перехвата стартующих баллистических ракет американскими противоракетами морского базирования. По результатам математического моделирования показано, что в случае использования на ступени перехвата жидкостных двигательных установок обеспечивается существенное расширение зон перехвата. При этом стартовое окно возможных пусков разделяется на две пространственно разнесенных области, что обеспечивает принципиальную возможность оптимизации как средств защиты, так и нападения.

Ключевые слова: стратегическая стабильность, противоракетная оборона США, активный участок траектории, самонаводящаяся ступень перехвата, противоракета “Стандарт-3”

DOI: 10.31857/S0032823522030079

Несмотря на неизбежную политизированность вопросов, связанных со стратегическим сдерживанием и стратегической стабильностью, в зарубежных и отечественных научно-технических изданиях периодически публикуются прогнозные оценки технического облика перспективных вооружений, основанные на общефизических закономерностях с реалистичными исходными данными [1–6].

В этой связи важной проблемой считается исследование возможности поражения баллистических ракет (БР) на активном участке траектории (АУТ) оружием направленной энергии и противоракетами противника. На современном этапе американские специалисты [4, 5] занимаются этой проблемой в рамках повышения эффективности собственной системы противоракетной обороны (ПРО), а отечественные [1–3] – для разработки широкого спектра симметричных и ассиметричных вариантов парирования соответствующих угроз с целью поддержания стратегической стабильности.

Несмотря на жесткие пространственно-временные ограничения, принципиальным преимуществом перехвата БР на АУТ американские специалисты считают устранение необходимости селекции и перехвата боеголовок среди многочисленных элементов боевого оснащения ракет после их отделения [6]. Это поддерживает их интерес к проблеме в течение нескольких десятилетий, генерируя всё новые средства и способы такого перехвата [4–6].

Потенциальная возможность перехвата БР на АУТ подтверждается отечественными специалистами, проанализировавшими, в частности, некоторые сценарии применения американских противоракет (ПР) морского базирования [7, 8]. В настоящее

Таблица 1. Характеристики моделей противоракет SM-3 Block IA/B

Характеристики вариантов ПР	[9]	[10]	[11]	[12]	Наша оценка
Стартовый вес, кг	1420	1400	1315	1500	1500
Полезная нагрузка, кг	100	33	5	130	21.3
Макс. скорость, м/с	3017	3538	5514	3576	3400
Макс. высота, км	623	815	2256	826	744
РБ Мк72, кг	700	712	700	700	724
– топливо, кг	457	468	457	460	460
– конструкция, кг	243	244	243	240	264
– тяга ДУ, кг	14657	19375	16315	19122	19462
– удельная тяга, с	256.6	248	285.6	270.2	275
– время работы, с	8	6	8	6.5	6.5
РБ Мк104, кг	500	488	500	500	556
– топливо, кг	372	360	372	380	380
– конструкция, кг	128	128	128	120	190
– тяга ДУ, кГ	5115	4895	5311	5425	5320
– удельная тяга, с	275	275	285.6	285.5	280
– время работы, с	20	20	20	20	20
РБ Мк136, кг	110	167	110	170	189
– топливо, кг	75	83	75	136	93
– конструкция, кг	35	82	35	34	86
– тяга, кг	687	1173	714	2080	1325
– удельная тяга, с	275	275.9	285.6	305.9	285
– время работы, с	30	10+10	30	20	10+10

время на вооружении ВМС США находится значительное количество противоракет “Стандарт-3” (SM-3 – Standard Missile) версий Block IA/B и начато развертывание единичных образцов усовершенствованной версии Block IIA. Так как в доступных источниках сведения о последней версии ПР носят предположительный характер, остановимся на оценке возможностей ПР “Стандарт-3” Block IA/B, по которой имеется более детальная техническая информация.

Основные летно-технические характеристики (ЛТХ) этого типа противоракет наиболее подробно рассмотрены в работах [9–12]. Опубликованные в них весовые сводки ракетных блоков (РБ) маршевых ступеней и некоторые другие параметры двигательных установок (ДУ) соответствующих моделей ПР сведены в табл. 1. В последнем столбце этой таблицы представлена модель противоракеты, разработанная авторами на основе сравнительного анализа и корректировки результатов публикаций [9–12]. Таблица 1 включает также оцененные значения максимальной скорости ПР и высоты подъема ступени перехвата (СП) на пассивном участке траектории, а также некоторые другие параметры.

Приведенные ниже характеристики кинетической СП приняты на основании представленных в [13] данных о конструкции СП и ее импульсной твердотопливной ДУ:

– начальный вес СП 21.3 кг;
– запас скорости 530 м/с;
– удельная тяга ДУ 218.2 с;

Таблица 2. Характеристики жидкостной ракеты (модель “L” из [4])

Характеристика	Ступень 2	Ступень 1	Итого
Дальность стрельбы, тыс. км.	–	–	12
Масса полезной нагрузки, т	–	–	2.5
Масса обтекателя, кг	–	–	66
Стартовая масса, т	41.5	201	201
Конечная масса, т	6.39	57.4	–
Масса конструкции (сухая), т	3.86	15.9	–
Масса топлива, т	35	143	–
Удельный импульс тяги, с	282	275	–
Средняя тяга, кН	810	3226	–
Время работы, с	120	120	240

Примечание. В таблице 2 принята оригинальная (американская) классификация ступеней.

– количество израсходованного топлива за первые 15 с на участке работы ДУ в режиме стабилизации 1.752 кг и на втором участке в последующие 10 с – 2.921 кг.

При компьютерном моделировании процесса перехвата расчет траекторий БР и ПР производился численным интегрированием системы дифференциальных уравнений движения методом Рунге–Кутты. Данная модель основана на следующих допущениях:

– БР, ПР и СП рассматриваются как материальные точки переменной массы;

– модель Земли – сферическая невращающаяся с центральным гравитационным полем и стандартной атмосферой ГОСТ 4401-81;

– точка старта ПР находится в плоскости полета цели на заданном варьируемом расстоянии от точки старта БР, то есть рассматриваются плоские траектории движения БР и ПР;

– фазовые параметры перехватываемой цели и перехватчика не содержат ошибок;

– отработка управляющих ускорений производится без ошибок и не учитывает конструктивные особенности ДУ СП и головки самонаведения (ГСН).

Таким образом, в данном случае учитываются только методические ошибки метода наведения, в качестве которого рассмотрено наведение по мгновенному промаху, и достаточность энергетических и маневренных характеристик ПР и СП для непосредственного сближения с целью на расстояние не более 0.5 м.

На участке автономного полета закрытой носовым обтекателем ступени перехвата в плотных слоях атмосферы направление и величина силы тяги выбираются из условия, при котором обеспечивается требуемое для наведения на цель командное ускорение СП. Для этого варьированием ориентации продольной оси СП в пределах ограничения на углы атаки определяется невязка между направлениями требуемого ускорения и ускорения от действия полной аэродинамической силы, и решается нелинейная задача поиска угла тангажа, при котором невязка сводится к нулю. Затем находится величина силы тяги, компенсирующая разность между требуемым ускорением и ускорением, вызванным набегающим воздушным потоком. После сброса обтекателя силовое воздействие на СП со стороны атмосферы не учитывается. Момент сброса обтекателя определяется по снижению скоростного напора до величины, соответствующей окончанию АУТ при вертикальном полете.

На участке работы ракетных двигателей на твердом топливе (РДТТ) маршевых ступеней ПР с нерегулируемой тягой управление движением осуществляется изменением ориентации продольной оси ПР по направлению вектора командного ускорения.

Далее в качестве примера представлены результаты математического моделирования сценариев перехвата гипотетической двухступенчатой жидкостной баллистической ракеты “L” с моноблочной головной частью, характеристики которой приведены

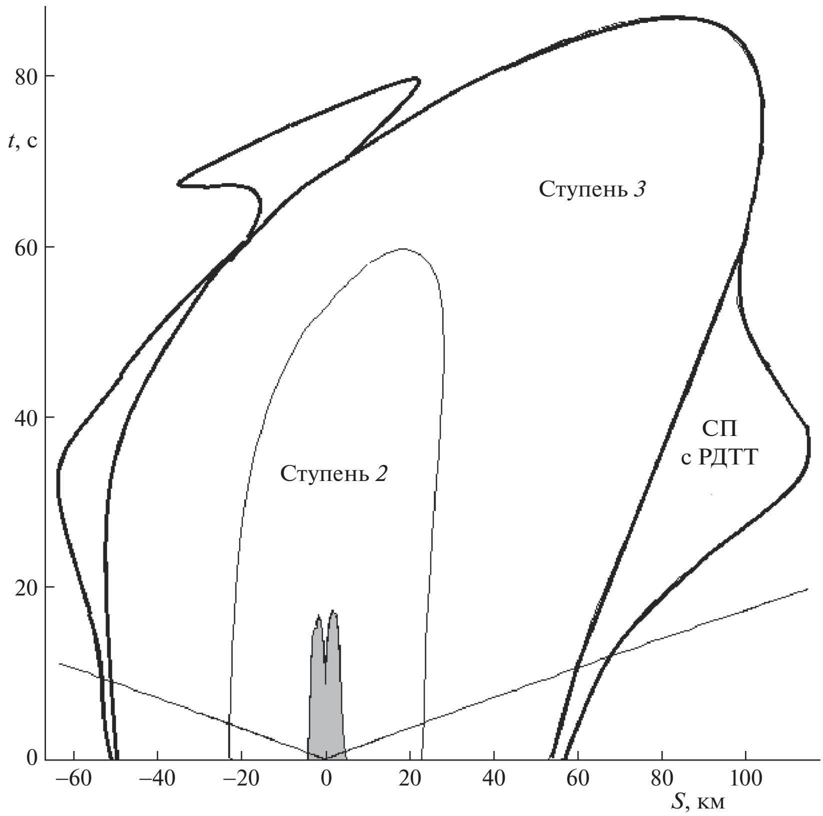

Рис. 1. Стартовое окно пусков ПР (результаты математического моделирования).

в таблице 2 [4]. Активный участок настильной траектории пуска этой БР на дальность 7000 км продолжительностью 233.6 с заканчивается на удалении 432 км от точки старта на высоте 236 км.

На рис. 1 показано рассчитанное стартовое окно пусков ПР. По горизонтальной оси отложено расстояние вдоль трассы полета БР от точки ее старта до точки старта противоракеты. По вертикальной – отсчитываемые от момента старта БР времена пусков ПР, при которых возможен перехват стартующей БР. Выходящие из начала координат прямые соответствуют времени появления цели над стартовым горизонтом ПР.

В зависимости от номера ступени ПР, осуществившей перехват, стартовое окно разбивается на несколько областей.

При пусках ПР непосредственно вблизи стартующей БР перехват оказывается невозможен, т.к. вследствие более высокой начальной тяговооруженности противоракета обгоняет цель (эта область на рис. 1 выделена серым цветом). При удалении от точки старта БР не далее 20–25 км сближение с целью происходит на этапе работы второй ступени ПР, если ее старт осуществляется не позднее нескольких десятков секунд после БР. В противном случае перехват осуществляется третьей ступенью, область досягаемости которой ограничена запасом топлива.

Внешний контур на рис. 1 соответствует предельным возможностям ступени перехвата. Дополнительные зоны возникают на догоняющих траекториях при пусках ПР с небольших расстояний в противоположном направлении от полета БР, и при перехва-

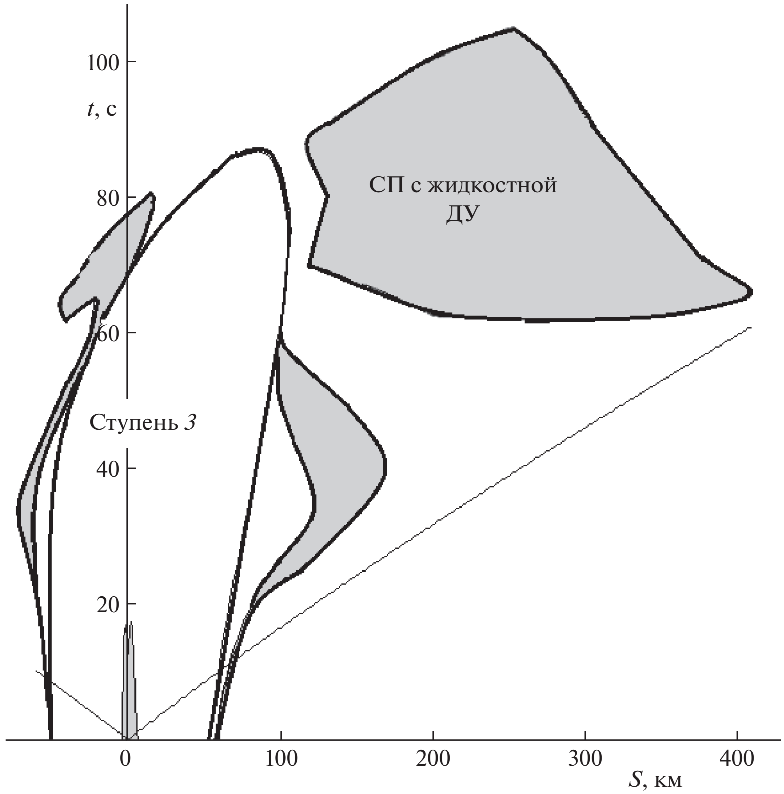

Рис. 2. Стартовое окно пусков ПР с жидкостной ДУ СП (результаты математического моделирования).

те цели в плотных слоях атмосферы на высотах не более 40 км за счет использования аэродинамического качества закрытой носовым обтекателем ступени перехвата. Возможности СП здесь несколько расширены, т.к. перехват целей в атмосфере и за ее пределами подразумевает различные типы СП. Следует отметить, тем не менее, что роль самой ступени перехвата в расширении стартового окна незначительна по причине малой начальной перегрузки (~1 g) и ограниченного времени работы ее твердотопливной ДУ, за которое СП не успевает приблизиться к цели.

Использование на СП жидкостной ДУ с возможностью регулирования секундного расхода топлива позволяет увеличить время работы ДУ и, следовательно, расширить область досягаемости целей. Примерами применения жидкостной ДУ являются ступень перехвата израильской ПР Arrow 3 [14], у которой ДУ с поворотным соплом позволяет регулировать силу тяги, секундный расход топлива и время работы, а также варианты СП в американском патенте на многоэлементную ступень перехвата [15], характеристики которых по начальному весу и запасу скорости соизмеримы с параметрами СП ПР “Стандарт-3” Block IA/B.

Благодаря применению жидкостной ДУ на ступени перехвата появляется возможность осуществлять пуски на бóльшем удалении от точки старта БР (рис. 2). Так, при запасе топлива, удельной тяге и максимальной тяговооруженности (~3 g) как у СП ПР “Стандарт-3” Block IA/B, в случае оснащения ее двигательной установкой на жидком топливе пуски ПР могут проводиться с расстояния до 420 км от точки старта БР. При этом в моменты пусков цель находится над горизонтом, а перехват происходит на высотах более 70 км на участке полета второй ступени БР до 183 секунды полета, когда скорость полета и ускорение БР начинают превосходить скорость и ускорение ступени перехвата. Кроме того, вследствие низкой тяговооруженности рассмотренного примера СП и резкого изменения ускорения цели в момент отделения второй ступени БР ее перехват в течение нескольких секунд непосредственно после этого оказывается невозможным. По этой причине стартовое окно возможных пусков ПР разделяется на две области. На рис. 2 появившаяся благодаря использованию жидкостной ДУ дополнительная область и незначительное расширение по этой же причине сравнительно с первой областью, представленной на рис. 1 вариантом СП с РДТТ, выделены серым цветом.

Выводы.

1. Американские противоракеты морского базирования типа “Стандарт-3” Block IA/B представляют потенциальную опасность для стартующих по настильным траекториям баллистических ракет с протяженным активным участком, и, в первую очередь, для стратегических ракет морского базирования вследствие ограниченного несколькими сотнями километров расстояния от точек пусков ПР до точек старта БР.
2. При пусках противоракет с удаления не более 100 км от точки старта БР перехват целей происходит, в основном, на высотах не более 70 км на участке работы маршевых ступеней ПР без задействования микродвигателей ступени перехвата.
3. Вследствие ограниченного времени работы твердотопливная ДУ ступени перехвата с заявленными фирмой-разработчиком характеристиками не способна обеспечить эффективный перехват БР на активном участке траектории в реалистичных сценариях.
4. Применение на СП жидкостной ДУ с регулируемым секундным расходом позволяет значительно увеличить (до нескольких сотен километров) расстояние, с которого возможен результативный пуск противоракет.
5. Вследствие резкого изменения ускорения баллистической цели на АУТ в момент разделения ее ступеней стартовое окно возможных пусков разделяется на две пространственно разнесенных области. Это увеличивает количество различных сценариев, выгодных как для защиты, так и для нападения, что позволяет в дальнейшем строить минимаксные модели конфликта интересов и прогноза исхода дуэльных ситуаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кубышкин А.В., Белоконь И.Н.* Расчетные методы восполнения недостающих данных о стратегических вооружениях США. Тезисы доклада // Сб. тр. 64-й Всероссийской научной конференции МФТИ. Москва–Долгопрудный–Жуковский. 2–4 декабря 2021. С. 229–230.
2. *Кубышкин А.В., Белоконь И.Н., Степанов В.М.* Разработка технологий оружия направленной энергии за рубежом // Технол. электромаг. совмест. 2021. № 2(77). С. 44–55.
3. *Кубышкин А.В.* Физико-технические основы стратегической стабильности. Спецкурс кафедры общей физики МФТИ. 2021. https://mipt.ru/education/chair/physics/dop_sem/
4. *Barton D.K.* Report of the American Physical Society study group on boost-phase intercept systems for national missile defense: Scientific and technical issues // Rev. Modern Phys. 2004. V. 76. № 3. P. 1–424.
5. *Уилкенинг Д.А.* Противоракетная оборона воздушного базирования на активном участке. М.: Наука и всеобщая безопасность, 2004. 67 с.
6. *Postol T.A.* A Russian-US Boost-Phase Defense To Defend Russia and the US from Postulated Rogue-State ICBMs. Carnegie Endowment for International Peace, 1999. 44 p.
7. Оружие ракетно-ядерного удара / Под ред. *Яшина Ю.А.* М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 492 с.
8. *Обидин Е.В.* Расчет зоны перехвата баллистической ракеты M51 противоракетой Standard-3 mod.1B // Эл. сб. статей по материалам LXXIII студенческой международной научно-практической конференции. Новосибирск: АНС СибАК, 2019. № 1(72). С. 276–282. http://www.sibac.info/ archive/Technic/1(72).pdf

9. *Hans Christian Gils.* Untersuchung von Raketenabwehrszenarien auf Grundlage von Flugbahnsimulationen, SemZ Breitensee, Wien.
https://www.bundesheer.at/organisation/beitraege/arwt/pdf
10. *Sequard-Base P.* Missile Defence for Europe, Comparison of Defence Concepts computed with the RAAB Model. Beitrage zum „Workshop zur Raketenabwehr“ vom 17.02.2010 in Wien. P. 36–64.
https://www.bundesheer.at/ pdf_pool/publikationen/arwt_rakabwehr_2010.pdf
11. *GenLt Mag. Apfalter Freyo.* Geleitwort des Leiters der SIII Bereitstellung
https://www.miliz.bundesheer.at/pdf_pool
12. *Барабаш С.Д., Гладков М.С., Фуреев А.Н., Власюк В.В.* Комплекс методик формирования и анализа исходных данных по фоно-целевой обстановке для средств систем ракетно-космической обороны // Эл. ж. Молодежный научно-технический вестник. 2014. № 1.
http://sntbul.bmstu.ru/doc/687436.html
13. *Закладний А.В.* Определение максимальной зоны маневра кинетического перехватчика ракеты SM-3 в безвоздушном пространстве // Тр. Крыловского государственного научного центра. 2018; спец. вып. 1.
14. Israel and US test Arrow 3 ballistic missile interceptors. January 23, 2019.
https://thedefensepost.com
15. Multiple kill vehicle (MKV) interceptor witch autonomous kill vehicles // United States Patent US 7,494,090 B2 Date of Patent: Feb. 24, 2009.

Boost Phase Intercept of Ballistic Missiles

A. V. Kubyshkin[a,b,#], I. N. Belokon[b], and V. V. Karagodin[b]

[a] *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia*
[b] *Dukhov Research Institute of Automatics, Moscow, Russia*
[#] *e-mail: akubyshkin@yandex.ru*

It is considered the possibility of interception of launching ballistic missiles by American sea-based anti-missiles. The results of mathematical modeling demonstrate significant expansion of the interception zones in the case of using liquid propulsion systems onboard the interceptor. At the same time, the launch window of possible launches is divided into two spatially separated areas, which provides a principal possibility of maximizing defense or offense capabilities.

Keywords: strategic stability, missile defense, boost phase intercept, liquid diverting capability, Standard Missile-3 Block IA/B ballistics

REFERENCES

1. *Kubyshkin A.V., Belokon I.N.* Physical Methods of Filling of the Absent Data on US Strategic Weapons. Abstract // Proc. 64th All-Russian Sci. Conf. of MIPT. Moscow–Dolgoprudny–Zhukovsky. December 2–4, 2021. P. 229–230. (in Russian)
2. *Kubyshkin A.V., Belokon I.N., Stepanov V.M.* Development of directed energy weapon abroad // Technol. Electrom. Compat., 2021, no. 2(77), pp. 44–55. (in Russian)
3. *Kubyshkin A.V.* Physical and Technical Foundations of Strategic Stability. Special Course of General Physics Department of MIPT, 2021. https://mipt.ru/education/chair/physics/dop_sem (in Russian)
4. *Barton D.K.* Report of the American Physical Society study group on boost-phase intercept systems for national missile defense: scientific and technical issues // Rev. Modern Phys., 2004, vol. 76, no. 3. P. 1–424.
5. *Wilkening D.A. Airborne Boost-Phase Ballistic Missile Defense* // Sci.&Global Security, 2004, vol. 12, pp. 1–67.
6. *Postol T.A.* A Russian–US Boost-Phase Defense to Defend Russia and the US from Postulated Rogue-State ICBMs. Carnegie Endowment for International Peace, 1999. 44 p.

7. The Weapon of a Nuclear Missile Strike / Ed. by *Yashin Yu.A.* Moscow: BMSTU, 2009. 492 p. (in Russian)
8. *Obidin E.V.* Calculation of the interception zone of the M51 ballistic missile by the Standard-3 mod.1B anti-missile // El. Proc. of the LXXIII student Int. Sci.&Pract. Conf. no. 1 (72), pp. 276–282. http://www.sibac.info/archive/Technic/1(72).pdf (in Russian)
9. *Gils H.C.* Untersuchung von Raketenabwehrszenarien auf Grundlage von Flugbahnsimulationen, SemZ Breitensee, Wien. https://www.bundesheer.at/organisation/beitraege/arwt/pdf/
10. *Sequard-Base P.* Missile Defence for Europe, Comparison of Defence Concepts computed with the RAAB Model // Beitrage zum "Workshop zur Raketenabwehr" vom 17.02.2010 in Wien. pp. 36–64. https://www.bundesheer.at/pdf_pool/publikationen/arwt_rakabwehr_2010.pdf
11. *GenLt Mag. Apfalter Freyo.* Geleitwort des Leiters der SIII Bereitstellung, https://www.miliz.bundesheer.at/pdf_pool
12. *Barabash S.D., Gladkov M.S., Gureev A.N., Vlasyuk V.V.* A set of methods for the formation and analysis of initial data on the background-target environment for the means of rocket and space defense systems // El. J. Youth Sci.&Techn. Bull., 2014, no. 1. http://sntbul.bmstu.ru/doc/687436.html (in Russian)
13. *Zladniy A.V.* Determination of the maximum maneuver zone of the kinetic interceptor of the SM-3 rocket in an airless space // Proc. of the Krylov State Sci. Center, 2018, Special Issue 1. (in Russian)
14. Israel and US test Arrow 3 ballistic missile interceptors. January 23, 2019. https://thedefensepost.com
15. Multiple kill vehicle (MKV) interceptor witch autonomous kill vehicles // United States Patent US 7,494,090 B2 Date of Patent: Feb. 24, 2009.

EDN: CVHHOK
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА **2022, том 86, № 3, с. 349–364**

УДК 532.528

О КРИВИЗНЕ ГРАНИЧНЫХ ЛИНИЙ ТОКА ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В ТОЧКАХ СХОДА И ПРИСОЕДИНЕНИЯ

А. Н. Крайко[1,*], Н. И. Тилляева[1,]**

[1] ФАУ ЦИАМ им. П.И. Баранова, Москва, Россия
**e-mail: akraiko@ciam.ru*
***e-mail: ntill@ciam.ru*

Поступила в редакцию 10.02.2022 г.
После доработки 15.04.2022 г.
Принята к публикации 15.04.2022 г.

Рассмотрены стационарные течения идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа с линиями тока – границами текущей и неподвижной сред. В XIX в. такие границы появились в задачах истечения струй в затопленное пространство. При основном вкладе в их решение Н.Е. Жуковского до 1903 г. рассматривались только струи несжимаемой жидкости. В 1903 г. С.А. Чаплыгин начал изучение плоских дозвуковых струй идеального газа. В 1949 г. Л.В. Овсянников, решив задачу об истечении "критической" струи, обнаружил удивительные свойства течения со звуковой граничной линией тока. Вскоре отрезки таких линий тока, возникших в основном в задачах теории струйных течений, появились при построении тел, обтекаемых дозвуковыми потоками с наибольшими "критическими" числами Маха M*. При набегающем потоке с $M_0 < M^*$ всюду $M < 1$, нет ударных волн и волнового сопротивления. При $M_0 > M^*$ появляются сверхзвуковые зоны, возникают ударные волны и растущее с ростом M_0 волновое сопротивление. Оказалось, что M* реализуют тела, при обтекании которых с $M_0 = M^*$ часть контуров – отрезки звуковых линий тока. Полезно знать их кривизну в точках схода и присоединения. У Н.Е. Жуковского для жидкости в точках схода она бесконечна. Бесконечность кривизны таких линий тока в идеальном газе установлена только через 100 лет. Ниже показано, как ведут себя параметры потока и их производные, включая кривизну линий тока, при приближении по разным направлениям к точкам схода и присоединения. Кривизна граничных линий тока в этих точках бесконечна, притом что кривизна звуковых линий тока при их пересечении с прямой звуковой линией перехода равна нулю.

Ключевые слова: стационарные течения идеального газа, переменные годографа, кривизна дозвуковых и звуковых граничных линий тока в точках схода и присоединения

DOI: 10.31857/S0032823522030146

1. Введение. Названные в аннотации гидро-аэро-газодинамики далеко не все выдающиеся ученые, которых заинтересовали стационарные течения идеальных жидкости или газа с изобарическими линиями тока – границами текущей и неподвижной сред. Еще нескольких назвал сам Н.Е. Жуковский [1]: "Начало решения таких задач было положено в 1868 г. Гельмгольцем. ... В том же году Кирхгоф предложил общий прием решения подобных задач. ... Более детальная разработка была сделана Релеем в 1876 г., напечатавшим две заметки." Отметив затем вклад Герлаха (Gerlach, 1885 г.), Д.К. Бобылева (1881 г.), И.В. Мещерского (1886 г.), А.П. Котельникова (1889 г.) и Фохта (Voigt, 1886 г.), Н.Е. Жуковский пишет: "Критическую оценку метода Кирхгофа мы имеем в сочинении Бриллуэна”. И далее: “Во всех упомянутых работах авторы придерживались метода Кирхгофа и попытка видоизменить этот метод была сделана только Планком (в 1884 г.), который задался мыслью об освобождении метода от теории мнимого переменного с целью его распространения на пространство трех измерений. ... Но, не говоря уже о задачах трех измерений, Планк не разрешил с помощью своего метода ни одной новой задачи. ... главным недостатком метода Планка является то обстоятельство, что в нем, как и в первоначальном методе Кирхгофа, мы не можем направиться на решение определенной задачи. Конформное преобразование, введенное Кирхгофом, устраняет это затруднение, но зато вводит в задачу лишнюю, иногда очень трудную операцию. Ввиду того, что число известных конформных преобразований замкнутой области в область, ограниченную двумя параллельными прямыми, невелико, невелико и число задач, решаемых методом Кирхгофа ... В предлагаемом (*Н.Е. Жуковским – авт.*) изменении метода Кирхгофа дана возможность обратиться к решению определенной задачи, не прибегая наперед к конформному преобразованию ...” В результате “видоизмененным методом Кирхгофа”, а на самом деле, оригинальным “методом Жуковского” его автор решил много новых задач, которые не поддавались методу Кирхгофа. Предложенный метод и эти задачи – предмет двух статей Н.Е. Жуковского ([1] – 1890 г. и [2] – 1891 г.). Их общий объем − полторы сотни страниц.

Перечисленные выше авторы ограничивались несжимаемой жидкостью, точнее, − истечением жидкости из плоских каналов со стенками, составленными отрезками прямых. Если начало декартовых координат xy совместить с одной из выходных кромок, то при подходе к ней по такому отрезку угол наклона θ вектора скорости потока $\mathbf{V}$ к оси x не изменяется, скорость V растет, а давление p падает так, что производные от V и p вдоль контура на кромке обращаются в $\pm\infty$. После выхода из канала при движении по граничной линии тока, наоборот, V и p постоянны, а угол θ меняется так, что кривизна границы при $x \to +0$ обращается в бесконечность (для симметричных струй, текущих слева направо, в $+\infty$ на верхней границе и в $-\infty$ на нижней).

С середины XX в. течения с изобарической граничной линией тока стали интересны в связи с изучением отрыва вязкого пограничного слоя с искривленных стенок. Если начало декартовых координат xy совместить с точкой отрыва, а ось x направить по касательной к стенке при $x \to -0$, то в приближении несжимаемой жидкости с исчезающей вязкостью [3–5] кривизна границы получается такой же, как выше.

Особый интерес к звуковой граничной линии тока, обязан неожиданному решению, найденному Л.В. Овсянниковым [6, 7]. Согласно этому решению выравнивание “критической” струи идеального газа происходит не асимптотически, как для несжимаемой жидкости, а в “прямой линии перехода” на конечном расстоянии от сечения выхода из канала. При натекании звуковой струи идеального газа на клиновидные препятствия [8, 9] прямых линий перехода три. Одна ограничивает натекающую звуковую струю, две (по одной с разных сторон от препятствия) – утекающие наклоненные звуковые потоки.

Известно, что в плоскопараллельных и осесимметричных течениях кривизна криволинейной звуковой линии тока в точке пересечения с прямой линией перехода равна нулю [10–12]. В общем случае анализ течений с дозвуковыми и звуковыми граничными линиями тока существенно упростил подход, развитый в [13] (см. также [14]). Этот же подход будет применен ниже.

Еще более интересны звуковые граничные линии тока стали после того, как было установлено [15], что отрезки таких линий образуют симметричные профили, тела вращения, головные и кормовые части полубесконечных пластины и кругового цилиндра, которые при ряде дополнительных ограничений обтекаются безграничным дозвуковым набегающим потоком под нулевым углом атаки с наибольшими критическими числами Маха M*. Типичными ограничениями здесь служат задание хорды профиля, длины тела или его головной (кормовой) частей, принимаемых за линейный масштаб, полутолщины пластины, радиуса кругового цилиндра, минимально допустимых “продольной” площади профиля или объема тела вращения и т.п. Простейшие примеры таких конфигураций – не возмущающие поток пластина под нулевым углом атаки и отрезок прямой (“осесимметричная игла”) в равномерном звуковом потоке с $\mathrm{M} \equiv \mathrm{M}_0 \equiv \mathrm{M}^* = 1$. Отнесенная к квадрату заданной длины площадь их “продольных” сечений $S = 0$. Если в дополнение к фиксированной хорде или длине задать минимально допустимую величину $S > 0$, то согласно [15] контуры критических тел составят передний и задний торцы и соединяющие их без изломов верхняя и симметричная нижняя звуковые линии тока. При $S \to 0$ высота торцов стремится к нулю, M_0 и M^* стремятся к единице и получаются пластина и игла. Чтобы при $S > 0$ избавиться от неизбежных отрывов за телами, построенными в предположении безотрывного обтекания, вводится ограничение на углы наклона контуров их кормовых частей. В результате задний торец заменит пара прямолинейных отрезков, и плоская критическая конфигурация станет симметричным крыловым профилем.

В приведенных выше примерах критических конфигураций и в их обобщениях [16], у каждой звуковой линии тока наряду с точкой гладкого схода есть точка гладкого присоединения. Возможны критические конфигурации с точками схода или присоединения на прямых линиях перехода. При принципиальной простоте структуры плоских и осесимметричных критических конфигураций методы их построения [17–24] оказались достаточно сложными. Поэтому любая дополнительная информация, например, о кривизне граничных линий тока, будет полезна при построении критических конфигураций. Авторы [21–24], не останавливаясь на деталях далеко непростого анализа, констатируют, что найденная ими для идеального газа кривизна граничной линии тока в точке схода с прямолинейной стенки бесконечна. Ниже развитый в [13] подход привел к формулам, которые, подтверждая этот вывод, показывают, как в разных случаях кривизна линии тока растет при приближении к точкам схода и присоединения.

2. Плоскопараллельные потенциальные течения идеального газа в переменных годографа. Граничная линия тока вблизи прямой линии перехода. Плоскопараллельные изэнтропические и изоэнергетические стационарные течения идеального газа, будучи потенциальными, допускают переход к независимым переменным $V - \theta$. С точностью до произвольных аддитивной постоянной и положительного множителя k равенством

$$d\psi = k\rho V(\cos\theta dy - \sin\theta dx)$$

с плотностью газа $\rho = \rho(V)$ введем функцию тока ψ. Функция тока удовлетворяет уравнению Чаплыгина [14]

$$V^2\psi_{VV} + (1 + \mathrm{M}^2)V\psi_V + (1 - \mathrm{M}^2)\psi_{\theta\theta} = 0, \tag{2.1}$$

в котором число Маха $\mathrm{M} = \mathrm{M}(V)$. Так для совершенного газа с постоянными теплоемкостями и их отношением (показателем адиабаты) γ

$$\mathrm{M} = \frac{V\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon V^2}} \Leftrightarrow 1 - \mathrm{M}^2 = \frac{1 - V^2}{1 - \varepsilon V^2}, \quad \varepsilon = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \tag{2.2}$$

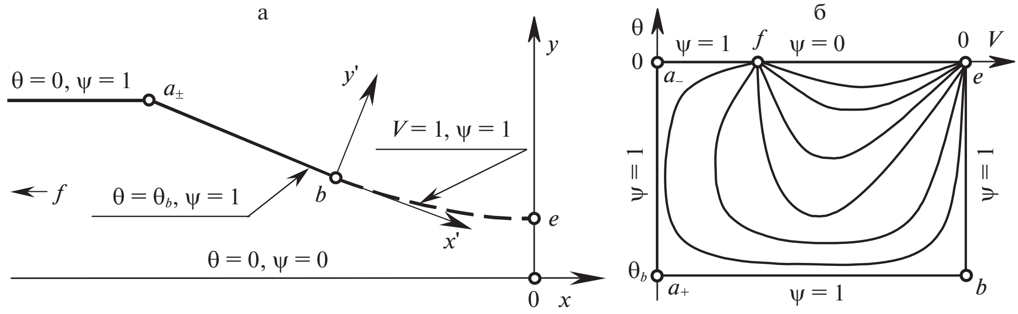

Рис. 1. Струйное течение со звуковой граничной линией тока b–e и прямой линией перехода 0–e (а – в декартовых координатах, б – в переменных годографа).

В приведенных уравнениях и далее за масштабы скорости и плотности взяты их критические величины. После того как функция тока $\psi = \psi(V, \theta)$ найдена, координаты x и y определят дифференциальные равенства

$$dx = -\frac{V\psi_V \sin\theta + (1 - \mathrm{M}^2)\psi_\theta \cos\theta}{k\rho V^2} dV + \frac{V\psi_V \cos\theta - \psi_\theta \sin\theta}{k\rho V} d\theta$$
$$dy = \frac{V\psi_V \cos\theta - (1 - \mathrm{M}^2)\psi_\theta \sin\theta}{k\rho V^2} dV + \frac{V\psi_V \sin\theta + \psi_\theta \cos\theta}{k\rho V} d\theta \qquad (2.3)$$

Эти равенства можно интегрировать по любой кривой плоскости $V - \theta$, в частности, по отвечающим изобарическим линиям тока вертикалям $V = \mathrm{const}$ или по горизонталям $\theta = \mathrm{const}$, отвечающим прямым отрезкам контуров обтекаемых стенок. Интегрирование по вертикалям определит зависимость координат x и y от угла наклона граничной линии тока, а затем ее кривизну. Покажем, как это делается, сначала для звуковой граничной линии тока вблизи точки ее пересечения с прямой линией перехода. Начать анализ со столь особой ситуации целесообразно по той причине, что в этом случае развитый в [13] и описанный в [14] подход применяется без изменений.

Верхняя половина струйного течения с точкой e пересечения граничной звуковой линии тока $b - e$ с прямой линией перехода $0 - e$ изображена в декартовых координатах на рис. 1а, а в переменных годографа на рис. 1б. На криволинейной линии тока $b - e$ и на прямом отрезке $0 - e$ линии перехода скорость потока $V = V_e = 1$. Вблизи точки e, где скорость V и число Маха близки к единице, уравнение Чаплыгина (2.1) и равенства (2.3) примут вид

$$\psi_{VV} + 2\psi_V + \sigma^2\eta\psi_{\theta\theta} = 0, \quad \eta = 1 - V, \quad \sigma^2 = d(1 - \mathrm{M}^2)/d\eta\Big|_{V=1} \qquad (2.4)$$

$$dx = -\frac{\psi_V \sin\theta + \sigma^2\eta\psi_\theta \cos\theta}{k} dV + \frac{\psi_V \cos\theta - \psi_\theta \sin\theta}{k} d\theta$$
$$dy = \frac{\psi_V \cos\theta - \sigma^2\eta\psi_\theta \sin\theta}{k} dV + \frac{\psi_V \sin\theta + \psi_\theta \cos\theta}{k} d\theta \qquad (2.5)$$

Учтено, что $\rho(1) = 1$ в силу выбора масштаба плотности. Согласно формулам (2.2) для совершенного газа $\sigma^2 = \gamma + 1$.

В точку e плоскости $V-\theta$ приходят все линии тока, из-за чего ψ изменяется на конечную величину. Положив $\psi = 0$ на плоскости симметрии канала и струи (на оси x) и распорядившись произволом в выборе множителя k, сделаем $\psi = 1$ на стенке канала и на границе струи. Следовательно, вблизи точки e плоскости $V-\theta$ функцию тока следует искать в виде

$$\psi = \chi(\omega) + \ldots; \quad \omega = \frac{-\theta}{\eta^n}, \quad 0 \le \chi(\omega) \le 1, \quad 0 \le \omega \le \infty, \quad \chi(0) = 0, \quad \chi(\infty) = 1 \tag{2.6}$$

с неизвестным показателем степени $n > 0$. Обозначив штрихом производные по ω, получим

$$\psi_V = \frac{n\omega}{\eta}\chi', \quad \psi_{VV} = n\omega\frac{n\omega\chi'' + (n+1)\chi'}{\eta^2}, \quad \psi_\theta = -\frac{\chi'}{\eta^n}, \quad \psi_{\theta\theta} = \frac{\chi''}{\eta^{2n}} \tag{2.7}$$

Подстановка найденных производных в уравнение (2.4) при $\eta \ll 1$ дает уравнение

$$n\omega\frac{n\omega\chi'' + (n+1)\chi'}{\eta^2} + \sigma^2\frac{\chi''}{\eta^{2n-1}} = 0,$$

решения которого при $n \ne 3/2$ не позволяют удовлетворить условиям (2.6). При $n = 3/2$ придем к уравнению

$$(9\omega^2 + 4\sigma^2)\chi'' + 15\omega\chi' = 0$$

и к его решению

$$\chi'(\omega) = \frac{C}{(9\omega^2 + 4\sigma^2)^{5/6}}, \quad \chi(\omega) = C\int_0^\omega \frac{d\omega}{(9\omega^2 + 4\sigma^2)^{5/6}}; \quad \frac{1}{C} = \int_0^\infty \frac{d\omega}{(9\omega^2 + 4\sigma^2)^{5/6}}, \tag{2.8}$$

которое всем необходимым условиям (2.6) удовлетворяет.

Чтобы найти кривизну граничной линии тока вблизи точки e, положим в коэффициентах перед $d\theta$ равенств (2.5) $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$, а ψ_V и ψ_θ заменим выражениями из (2.7) с χ' из (2.8). Это даст уравнения

$$dx \approx \frac{-Cd(-\theta)}{3^{5/3}2k(-\theta)^{2/3}}, \quad dy \approx \frac{C(-\theta)^{1/3}}{3^{2/3}2k}d(-\theta),$$

выполняющиеся на вертикали $b-e$ вблизи точки e. Проинтегрировав их от точки e, в которой $\theta_e = \chi_e = 0$, придем к формулам

$$-\theta = 72\frac{k^3}{C^3}x^3, \quad y - y_e \approx \frac{3^{1/3}C(-\theta)^{4/3}}{8k} \approx 54\frac{k^3}{C^3}x^4, \tag{2.9}$$

справедливым на линии тока $b-e$ вблизи точки e. Из них, помимо прочего, следует упомянутый выше известный полученный другими методами [10–12] результат о нулевой кривизне линии тока в точке пересечения с прямой линией перехода. В задаче о натекании звуковой струи на симметричное клиновидное препятствие с полууглом при вершине $0 < \theta_w < \pi$ [8, 9] таких точек четыре: e и f в изображенной на рис. 2 верхней половине течения и две в ее симметричной нижней половине.

3. Течение в окрестности точки схода с обтекаемого контура дозвуковой граничной линии тока. Простой вариант плоской струи идеального газа, рассматриваемый в данном разделе, отличается от изображенного на рис. 1 тем, что на граничной линии тока $b-e$ скорость газа $V \equiv V_b$ и число Маха M_b меньше единицы. Следствия этого — выравнивание потока при $x \to \infty$, а в решении в форме (2.6) $n = 1$, т.е. $\omega = -\theta/\eta$,

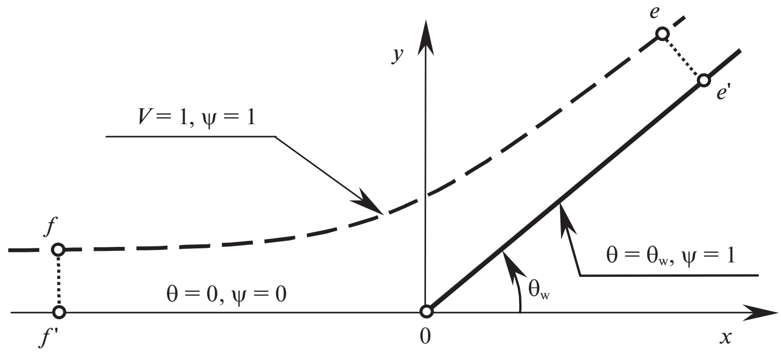

Рис. 2. Натекание звуковой струи идеального газа на клин: e–e' и f–f' — прямые линии перехода, e–f — криволинейный участок звуковой граничной линии тока.

$\eta = V_b - V$ и $V_b < 1$. В рассматриваемой далее малой окрестности точки b уравнение Чаплыгина (2.1) перепишем в форме

$$\psi_{VV} + \alpha^2\psi_V + \beta^2\psi_{\theta\theta} = 0; \quad \alpha^2 = (1 + \mathrm{M}_b^2)/V_b, \quad \beta^2 = (1 - \mathrm{M}_b^2)/V_b^2 \tag{3.1}$$

Из двух появившихся в этом уравнении положительных констант в дальнейшем анализе участвует только вторая. В пределе малых дозвуковых скоростей она неограниченно растет, а при $\mathrm{M}_b = 1$ становится нулем.

В точке b в отличие от точки e, исследованной выше, функция тока не рвется. Поэтому решение в ее окрестности будем искать в форме

$$\begin{gathered}\psi = 1 + \varepsilon\chi(\omega) + \ldots; \quad \omega = \frac{\theta - \theta_b}{\eta^n}, \quad \eta = V_b - V; \quad 0 \le \omega \le \infty, \quad \chi_0 \equiv \chi(0) = 0\\ \chi_\infty \equiv \chi(\infty) = 0, \quad \varepsilon = [(\theta - \theta_b)^2 + \eta^{2n}]^m = (\omega^2 + 1)^m\eta^{2nm}; \quad n > 0, \quad m > 0\end{gathered} \tag{3.2}$$

Данные соотношения отличаются от (2.6), во-первых, одинаковыми (нулевыми) условиями для χ при $\omega = 0$ и $\omega = \infty$, а, во-вторых, двумя подлежащими определению показателями степени n и m. Теперь вместо (2.7) получим

$$\begin{gathered}\psi_V = n[(\omega^2 + 1)\omega\chi' - 2m\chi](\omega^2 + 1)^{m-1}\eta^{2mn-1}\\ \psi_\theta = [(\omega^2 + 1)\chi' + 2m\omega\chi](\omega^2 + 1)^{m-1}\eta^{2mn-n}\\ \psi_{VV} = n\{\omega(\omega^2 + 1)^2[n\omega\chi'' + (n + 1)\chi'] - 4mn(\omega^2 + 1)\omega\chi' +\\ + 2m[2n(\omega^2 + m) - 1 - \omega^2]\chi\}(\omega^2 + 1)^{m-2}\eta^{2mn-2}\\ \psi_{\theta\theta} = \{(\omega^2 + 1)^2\chi'' + 4m(\omega^2 + 1)\omega\chi' + 2m[(2m - 1)\omega^2 + 1]\chi\}(\omega^2 + 1)^{m-2}\eta^{2mn-2n}\end{gathered} \tag{3.3}$$

Поскольку $\psi_V \ll \psi_{VV}$ при $\eta \ll 1$, то при подстановке этих производных в (3.1), опустив второе слагаемое, придем к уравнению

$$\begin{gathered}\omega(\omega^2 + 1)^2[n\omega\chi'' + (n + 1)\chi'] - 4mn(\omega^2 + 1)\omega\chi' + 2m[2n(\omega^2 + m) - 1 - \omega^2]\chi +\\ + \beta^2\{(\omega^2 + 1)^2\chi'' + 4m(\omega^2 + 1)\omega\chi' + 2m[(2m - 1)\omega^2 + 1]\chi\}\eta^{2(1-n)}/n = 0\end{gathered}$$

Вблизи точки b последнее слагаемое этого уравнения много меньше, равно или много больше прочих соответственно при $n < 1$, $n = 1$ или $n > 1$, а $\chi(\omega)$ и "собственные значения" m определяет решение одной из трех краевых задач:

$$n < 1: \quad \chi'' + \frac{(n+1)(\omega^2+1) - 4mn}{n(\omega^2+1)\omega}\chi' + 2m\frac{(2n-1)\omega^2 - 1 + 2nm}{n(\omega^2+1)^2\omega^2}\chi = 0$$

$$n = 1: \quad \chi'' + 2\frac{\omega^2 + 1 + 2m(\beta^2-1)}{(\omega^2+1)(\omega^2+\beta^2)}\omega\chi' + 2m\frac{\omega^2 + \beta^2 + (2m-1)(1+\beta^2\omega^2)}{(\omega^2+1)^2(\omega^2+\beta^2)}\chi = 0$$

$$n > 1: \quad \chi'' + \frac{4m\omega}{\omega^2+1}\chi' + 2m\frac{(2m-1)\omega^2+1}{(\omega^2+1)^2}\chi = 0$$

с одинаковыми граничными условиями $\chi_0 = 0$ и $\chi_\infty = 0$ в каждой из них.

При $\chi_0 = 0$ и произвольных n и m решения приведенных линейных однородных уравнений, пропорциональные χ'_0, условию $\chi_\infty = 0$, естественно, не удовлетворяют. Как его выполнение определяет m, сначала покажем для $n = 1$, для которого с учетом условия $\chi_0 = 0$ найдем

$$\omega \ll 1: \quad \chi'' + \lambda^2\chi = 0, \quad \chi = A\sin(\lambda\omega) \approx \chi'_0\omega, \quad \lambda^2 = 2m\frac{\beta^2 + 2m - 1}{\beta^2}, \quad \chi'_0 = A\lambda$$

$$\omega \gg 1: \quad \chi'' + 2\frac{\chi'}{\omega} = 0, \quad \chi' = \frac{B}{\omega^2} \to \chi = \chi_\infty - \frac{B}{\omega}$$

Здесь константа χ'_0 задается произвольно, а B, пропорциональное χ'_0, и χ_∞ находятся при численном решении полного уравнения (или системы двух уравнений для χ и χ') до столь больших ω, при которых значения $B = \omega^2\chi'$ и $\chi_\infty = \chi + \omega\chi'$ уже не изменяются.

Зафиксировав $n = 1$, χ'_0 и β^2 и проводя описанные выше расчеты при разных $m > 0$, построим кривую $\chi_\infty = \chi_\infty(m)$ с точкой, в которой $\chi_\infty(m)$ пересекает ось m. Она и дает решение. Если таких положительных значений m не одно, то берется минимальное, дающее согласно представлению (3.2) наибольшую величину в разложениях по степеням малого "расстояния" до точки b в переменных годографа. Расчеты, проведенные для $n = 1$, дали минимальное $m = 1$, не зависящее не только от величины χ'_0, как и должно быть, но и от значений β^2, что оказалось неожиданным. Выполненный в связи с этим анализ, не только подтвердил такую обнаруженную численно особенность, но и привел к полному аналитическому решению задачи. Чтобы понять, как получается решение, не зависящее от β^2, уравнение, отвечающее $m = n = 1$, перепишем, оставив β^2 только в знаменателе одного слагаемого

$$\chi'' + 2\frac{2\omega\chi' + \chi}{\omega^2+1} - \frac{2F}{\omega^2+\beta^2} = 0, \quad F = \omega\chi' + \frac{\omega^2-1}{\omega^2+1}\chi \tag{3.4}$$

Функция $F = F(\omega, \chi, \chi')$ такова, что $F(0, 0, \chi'_0) = 0$. Найдя производную

$$F' = \omega\left[\chi'' + \frac{2\omega\chi'}{\omega^2+1} + \frac{4\chi}{(\omega^2+1)^2}\right],$$

выразим отсюда χ'' и, подставив в уравнение (3.4), придем к уравнению для F и к решению

$$\frac{F'}{\omega} - \frac{2F}{\omega^2 + \beta^2} = 0 \to F = C(\omega^2 + \beta^2)$$

Поскольку $F(0, 0, \chi_0') = 0$, то константа $C = 0$, $F = 0$, и справедливы уравнение

$$F(\omega, \chi, \chi') \equiv (\omega^2 + 1)\omega\chi' + (\omega^2 - 1)\chi = 0$$

и его также не содержащее β^2 решение

$$n = 1, \quad m = 1, \quad \chi = \frac{\chi_0'\omega}{\omega^2 + 1}, \quad \chi' = \frac{\chi_0'(1 - \omega^2)}{(\omega^2 + 1)^2} \tag{3.5}$$

Согласно выполненным расчетам $\chi_\infty = 0$ для $n = 1$ при любых положительных целых m, однако при $m \geq 2$ решение, например, убывающая с ростом m константа B от величины β^2 зависит.

Подстановка χ и χ' из (3.5) в формулы (3.2) и (3.3) дает выражения

$$\psi = 1 + \chi_0'(\theta - \theta_b)(V_b - V) + \ldots, \quad \psi_V = -\chi_0'(\theta - \theta_b), \quad \psi_\theta = \chi_0'(V_b - V) \tag{3.6}$$

В этом и в последующих решениях ψ – линейная функция V и θ, и уравнение Чаплыгина без ψ_V выполняется в силу того, что ψ_{VV} и $\psi_{\theta\theta}$ равны нулю по отдельности. При подстановке решения (3.5) в формулы (3.3) ψ_{VV} и $\psi_{\theta\theta}$ также становятся нулями.

Чтобы найти кривизну граничной линии тока вблизи точки b, положим в равенствах (2.3) $dV = 0$ и, подставив ψ_V и ψ_θ из (3.6), получим уравнения

$$dx = -\chi_0' \frac{(\theta - \theta_b)\cos\theta_b}{k\rho_b} d\theta, \quad dy = -\chi_0' \frac{(\theta - \theta_b)\sin\theta_b}{k\rho_b} d\theta$$

Проинтегрировав их, придем к параметрическому представлению координат граничной линии тока с углом θ в качестве параметра

$$x - x_b = -\chi_0' \frac{(\theta - \theta_b)^2}{2k\rho_b}\cos\theta_b, \quad y - y_b = -\chi_0' \frac{(\theta - \theta_b)^2}{2k\rho_b}\sin\theta_b \tag{3.7}$$

Следствие этих формул – верные вблизи точки b зависимости θ и кривизны дозвуковой граничной линии тока K от расстояния $\tau \geq 0$ до этой точки

$$\theta = \theta_b + \frac{(2k\rho_b\tau)^{1/2}}{(-\chi_0')^{1/2}}, \quad K = \frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{(k\rho_b)^{1/2}}{(-2\chi_0'\tau)^{1/2}}, \quad \tau = \sqrt{(x - x_b)^2 + (y - y_b)^2} \tag{3.8}$$

Показано [21], что в идеальном газе кривизна дозвуковой граничной линии тока при приближении к точке схода стремится к бесконечности. Те же авторы при построении звуковых граничных линий тока [22], сходящих с круговых дисков ($\theta_b = \pi/2$), пишут: "Более детальный анализ позволяет установить, что ... в окрестности точки b: $y - y_b = O\left((\pi - \pi/2)^2\right)$". Это – все.

Аналогично, положив в равенствах (2.3) $d\theta = 0$, для V и $\partial p/\partial\tau$ при подходе к точке b по обтекаемой стенке получим формулы

$$V = V_b - \frac{V_b(2k\rho_b\tau)^{1/2}}{[\chi_0'(\mathrm{M}_b^2 - 1)]^{1/2}}, \quad \frac{\partial p}{\partial\tau} = -\rho V\frac{\partial V}{\partial\tau} = \frac{\rho_b V_b^2(k\rho_b)^{1/2}}{[2\chi_0'(\mathrm{M}_b^2 - 1)\tau]^{1/2}} \tag{3.9}$$

Найдем V и θ как функции $\nu = -y'$ в координатах $x'y'$ (рис. 1а), т.е. их изменение по нормали к $b - e$ в точке b. Для направленных по x' и $-y'$ касательного $\mathbf{t}$ $(\cos\theta, \sin\theta)$ и нормального $\mathbf{n}$ $(\sin\theta, -\cos\theta)$ ортов в этой точке: $\nu = (x - x_b)\sin\theta_b - (y - y_b)\cos\theta_b$ и $dy = -\operatorname{ctg}\theta_b dx$ на $\mathbf{n}$. Подстановка в последнее равенство dx и dy из (2.3) с ψ_V и ψ_θ из (3.6) дает дифференциальное уравнение, проинтегрировав которое придем к решению и его следствиям для малых $\theta - \theta_b$ и $V_b - V$:

$$\theta - \theta_b = \frac{(1 - \mathrm{M}_b^2)^{1/2}}{V_b}(V_b - V), \quad V_b - V = \frac{V_b(k\rho_b\nu)^{1/2}}{(-\chi_0')^{1/2}(1 - \mathrm{M}_b^2)^{1/4}}$$
$$\theta - \theta_b = \frac{(1 - \mathrm{M}_b^2)^{1/4}(k\rho_b\nu)^{1/2}}{(-\chi_0')^{1/2}}, \quad \nu = (x - x_b)\sin\theta_b - (y - y_b)\cos\theta_b \ll 1 \tag{3.10}$$

Вторая и третья формулы — результат интегрирования уравнений (2.3) с ψ_V и ψ_θ из (3.6) и с $\theta - \theta_b$ из первой формулы.

Численному решению краевых задач, отвечающих значениям показателя степени $n < 1$, предпошлем рассмотрение малых и больших ω, для которых

$$n < 1: \quad \chi'' + \frac{(n+1)(\omega^2+1) - 4mn}{n(\omega^2+1)\omega}\chi' + 2m\frac{(2n-1)\omega^2 - 1 + 2nm}{n(\omega^2+1)^2\omega^2}\chi = 0$$

$$\omega \ll 1 \to \chi = \frac{A}{l}\omega^l, \quad \chi' = A\omega^{l-1}, \quad l = \frac{2m(1-2nm)}{n+1-4mn} > 0$$

$$\omega \gg 1 \to \chi' = \frac{-B}{\omega^{1+1/n}} \to B = -\omega^{1+1/n}\chi', \quad \chi = \chi_\infty + \frac{nB}{\omega^{1/n}} \to \chi_\infty = \chi + n\omega\chi'$$

Численное решение этого уравнения при разных $0 < n < 1$ неизменно приводило к $\chi_\infty \approx 0$ при $m \approx (n+1)/2n$. Подстановка $m = (n+1)/2n$ в формулу для l дает $l = 1$, $A = \chi_0'$ и уравнение

$$\chi'' + \frac{(1+n)(\omega^2-1)}{n(\omega^2+1)\omega}\chi' + (1+n)\frac{(2n-1)\omega^2 + n}{n^2(\omega^2+1)^2\omega^2}\chi = 0$$

Записав его в форме $f\chi'' + g\chi' + h\chi = 0$ с рациональными коэффициентами:

$$f = n^2(\omega^2+1)^2\omega^2, \quad g = n(1+n)(\omega^4-1)\omega, \quad h = (1+n)[(2n-1)\omega^2 + n],$$

приведя к "нормальной форме" и решив согласно [25], получим

$$\chi = u(\omega)\exp\left(\frac{1}{2}\int\frac{g}{f}d\omega\right) = u(\omega)\left(\frac{\omega}{\omega^2+1}\right)^{(1+n)/(2n)}, \quad u'' = -Iu,$$

$$I = \frac{h}{f} - \frac{1}{4}\left(\frac{g}{f}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{c}{\omega^2}, \quad c = \frac{1-n^2}{4n^2}, \quad s = \frac{\sqrt{4c+1}}{2} = \frac{1}{2n}$$

$$u = C_1\omega^{1/2+s} + C_2\omega^{1/2-s} = C_1\omega^{(1+n)/(2n)} + C_2\omega^{(n-1)/(2n)}$$

Затем, учтя условия $\chi_0 = \chi_\infty = 0$, найдем

$$n < 1, \quad m = \frac{1+n}{2n}, \quad \chi = \frac{\chi_0'\omega}{(\omega^2+1)^m}, \quad \chi' = \frac{\chi_0'(n-\omega^2)}{n(\omega^2+1)^{m+1}} \tag{3.11}$$

Подстановка этих m, χ и χ' в (3.2) и (3.3) для ψ, ψ_V и ψ_θ, а ψ_V и ψ_θ — в уравнения (2.3) дает те же выражения (3.6)–(3.9), что получены для $n = 1$.

Равенство $l = 1$ приводит к квадратному уравнению для m. Его второму корню $m = 1/2$ отвечает краевая задача

$$n < 1, \quad m = \frac{1}{2}: \quad \chi'' + \frac{(n+1)\omega^2 + 1 - n}{n(\omega^2+1)\omega}\chi' + \frac{(2n-1)\omega^2 + n - 1}{n(\omega^2+1)^2\omega^2}\chi = 0,$$
$$\chi_0 = 0, \quad \chi_\infty = 0$$

Поступив с ней так же, как с задачей для первого корня, сначала найдем

$$\chi = \frac{u(\omega)}{\omega^{(1-n)/(2n)}(\omega^2+1)^{1/2}}, \quad u'' = \frac{c}{\omega^2}u, \quad c = \frac{1-n^2}{4n^2}, \quad s = \frac{\sqrt{4c+1}}{2} = \frac{1}{2n}$$
$$u = C_1\omega^{1/2+s} + C_2\omega^{1/2-s} = C_1\omega^{(1+n)/(2n)} + C_2\omega^{(n-1)/(2n)},$$

но затем при тех же граничных условиях $\chi_0 = \chi_\infty = 0$ – лишь тривиальное решение: $\chi \equiv 0$.

Краевая задача

$$n > 1: \quad \chi'' + \frac{4m\omega}{\omega^2+1}\chi' + 2m\frac{(2m-1)\omega^2+1}{(\omega^2+1)^2}\chi = 0; \quad \chi_0 = 0, \quad \chi_\infty = 0$$

решается приведением уравнения к “нормальной” форме [25] еще проще, чем в рассмотренных случаях. Найдя

$$\chi = \frac{u(\omega)}{(\omega^2+1)^m}, \quad I = 0, \quad u'' = -Iu = 0, \quad u(\omega) = C_1 + C_2\omega,$$

в силу граничных условий $\chi_0 = \chi_\infty = 0$ получим

$$n > 1, \quad m > \frac{1}{2}, \quad \chi = \frac{\chi_0'\omega}{(\omega^2+1)^m}, \quad \chi' = \chi_0'\frac{1+(1-2m)\omega^2}{(\omega^2+1)^{m+1}}$$

Формулы (3.6)–(3.10) оказываются следствием этого решения не при любых $m > 1/2$, а только при $m = (n+1)/2n$. Поэтому решением при $n > 1$ будет

$$n > 1, \quad m = \frac{1+n}{2n} > \frac{1}{2}, \quad \chi = \frac{\chi_0'\omega}{(\omega^2+1)^m}, \quad \chi' = \frac{\chi_0'(n-\omega^2)}{n(\omega^2+1)^{m+1}} \tag{3.12}$$

4. Течения в окрестностях точек схода и присоединения звуковых граничных линий тока. Данную тему начнем с течения вблизи точки схода звуковой линии тока на рис. 1. Иные примеры таких течений и течений с присоединением звуковой линии тока к обтекаемому контуру приведены на рис. 3, из которого можно получить представление о плоских и осесимметричных конфигурациях, обтекаемых дозвуковым потоком под нулевым углом атаки с наибольшими M*. Здесь это – симметричные профили и тела вращения (рис. 3а) и головные части полубесконечных пластины или кругового цилиндра (рис. 3б). Как уже отмечалось, при их построении кроме обычно задаваемой длины (для профиля – хорды) для тел рис. 3а фиксируется “продольная” площадь (в плоскости xy декартовых или цилиндрических координат), а для головных частей – полувысота пластины или радиус цилиндра. У всех контуров рис. 3 есть отрезок b–c звуковой линии тока с гладкими сходом и присоединением в точках b и c обтекаемой стенки. Вне отрезка b–c почти всегда M < 1. Исключения – внутренние течения с точкой b или c на нормальной оси x прямой линии перехода [16]. При приближении к такой точке кривизна звуковой линии тока $K \to 0$ в силу решения (2.9).

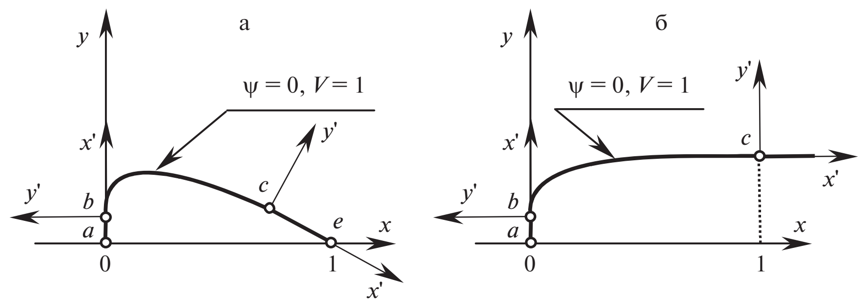

Рис. 3. Симметричный профиль или тело вращения (а) и головная часть пластины или кругового цилиндра (б), обтекаемые с наибольшими критическими числами Маха (*b*–*c* – отрезок звуковой линии тока).

Решение околозвукового уравнения Чаплыгина (2.4) вблизи точки b рис. 1 ищется в форме (3.2) с $V_b = 1$, а для течений рис. 3 формулы для ψ и ω заменены на $\psi = \varepsilon\chi(\omega) + \ldots,\ \omega = (\theta_b - \theta)/\eta^n$. На уравнение

$$\omega(\omega^2+1)^2[n\omega\chi'' + (n+1)\chi'] - 4mn(\omega^2+1)\omega\chi' + 2m[2n(\omega^2+m) - 1 - \omega^2]\chi +$$
$$+ \sigma^2\{(\omega^2+1)^2\chi'' + 4m(\omega^2+1)\omega\chi' + 2m[(2m-1)\omega^2+1]\chi\}\eta^{3-2n}/n = 0,$$

определяющее χ при $\varepsilon \ll 1$, это, однако, не повлияло. При $\eta \ll 1$ его последнее слагаемое много меньше, равно или много больше остальных при $n < 3/2$, $n = 3/2$ или $n > 3/2$, а $\chi(\omega)$ и "собственные значения" m определяет решение одной из трех краевых задач:

$$n < \frac{3}{2}: \quad \chi'' + \frac{(n+1)(\omega^2+1) - 4mn}{n(\omega^2+1)\omega}\chi' + 2m\frac{(2n-1)\omega^2 - 1 + 2nm}{n(\omega^2+1)^2\omega^2}\chi = 0$$

$$n = \frac{3}{2}: \quad \chi'' + \frac{15(\omega^2+1) + 4m(4\sigma^2 - 9)}{(\omega^2+1)(9\omega^2+4\sigma^2)}\omega\chi' +$$
$$+ 4m\frac{[6 + (4m-2)\sigma^2]\omega^2 + 9m - 3 + 2\sigma^2}{(\omega^2+1)^2(9\omega^2+4\sigma^2)}\chi = 0$$

$$n > \frac{3}{2}: \quad \chi'' + \frac{4m\omega}{\omega^2+1}\chi' + 2m\frac{(2m-1)\omega^2+1}{(\omega^2+1)^2}\chi = 0$$

с одинаковыми граничными условиями $\chi_0 = 0$ и $\chi_\infty = 0$.

Численное решение задачи, отвечающей $n = 3/2$, привело к результату, аналогичному, полученному для $n = 1$ в разд. 3. Минимальный показатель $m \approx 5/6$ теперь получался при любой величине σ^2. Понять, как такое возможно, помог опыт с уравнением (3.4). Перепишем уравнение, отвечающее $n = 3/2$ и $m = 5/6$, оставив σ^2 только в знаменателе одного из слагаемых

$$\chi'' + \frac{10\omega\chi'}{3(\omega^2+1)} + \frac{5(2\omega^2+3)\chi}{9(\omega^2+1)^2} - \frac{F}{9\omega^2+4\sigma^2} = 0, \quad F = 15\omega\chi' + \frac{5(2\omega^2-3)}{\omega^2+1}\chi$$

Как и в (3.4), функция $F(\omega,\chi,\chi')$ такова, что $F(0,0,\chi'_0) = 0$. Найдя производную

$$F' = 15\omega\left[\chi'' + \frac{5\omega\chi'}{3(\omega^2+1)} + \frac{10\chi}{3(\omega^2+1)^2}\right],$$

выразим из этого равенства χ'' и, подставив в исходное уравнение, придем к уравнению для F и к решению

$$\frac{F'}{15\omega} + \frac{F}{9(\omega^2+1)} - \frac{F}{9\omega^2+4\sigma^2} = 0 \to F = C\left(\frac{9\omega^2+4\sigma^2}{\omega^2+1}\right)^{5/6}$$

Так как $F(0,0,\chi'_0) = 0$, то константа $C = 0$, $F = 0$, и справедливо уравнение

$$\chi' = \frac{(3-2\omega^2)\chi}{3(\omega^2+1)\omega}$$

Решив его, получим

$$n = \frac{3}{2}, \quad m = \frac{5}{6}: \quad \chi = \frac{\chi'_0\omega}{(\omega^2+1)^{5/6}}, \quad \chi' = \frac{\chi'_0(3-2\omega^2)}{3(\omega^2+1)^{11/6}} \tag{4.1}$$

Согласно выполненным расчетам собственными значениями краевой задачи, отвечающей $n = 3/2$, наряду с $m = 5/6$ являются $m = 2l + 5/6$, $l = 1, 2, \ldots$ Для окрестности точки b течения, изображенного на рис. 1, подстановка χ и χ' из (4.1) в формулы для ψ, ψ_V и ψ_θ приводит к выражениям

$$\psi = 1 + \chi'_0(\theta-\theta_b)(1-V) + \ldots, \quad \psi_V = -\chi'_0(\theta-\theta_b), \quad \psi_\theta = \chi'_0(1-V), \quad \chi'_0 < 0 \tag{4.2}$$

Подставим эти ψ_V и ψ_θ в уравнения (2.5), записанные на $b-e$ с $V = 1$ и $dV = 0$. Действуя далее, как в разд. 3, придем к формулам (3.7) и (3.8) с $\rho_b = \rho_* = 1$. Для V, $\partial V/\partial\tau$ и $\partial p/\partial\tau$ при подходе к точке b по стенке получаются формулы

$$V = 1 + \frac{(3k\tau)^{1/3}}{(\sigma^2\chi'_0)^{1/3}}, \quad \frac{\partial p}{\partial\tau} = -\frac{\partial V}{\partial\tau} = -\frac{(k/\chi'_0)^{1/3}}{(3\sigma\tau)^{2/3}}, \tag{4.3}$$

существенное отличие которых от (3.9) – иные степени τ.

Для течений, изображенных на рис. 3,

$$\psi = \chi'_0(\theta_b-\theta)(1-V) + \ldots, \quad \psi_V = -\chi'_0(\theta_b-\theta), \quad \psi_\theta = -\chi'_0(1-V); \quad \chi'_0 > 0, \tag{4.4}$$

$\nu = y'$, и вместо (3.7), (3.8) и (4.3) получаются близкие варианты:

$$\begin{gathered}
x' > 0: \quad x - x_b = \chi'_0\frac{(\theta_b-\theta)^2}{2k}\cos\theta_b, \quad y - y_b = \chi'_0\frac{(\theta_b-\theta)^2}{2k}\sin\theta_b \\
\theta = \theta_b - \frac{(2k\tau)^{1/2}}{\chi_0'^{1/2}}, \quad K = \frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{-k^{1/2}}{(2\chi'_0\tau)^{1/2}} \\
x' < 0: \quad V = 1 - \frac{(3k\tau)^{1/3}}{(\chi'_0\sigma^2)^{1/3}}, \quad \frac{\partial p}{\partial\tau} = -\frac{\partial V}{\partial\tau} = \frac{(k/\chi'_0)^{1/3}}{(3\sigma\tau)^{2/3}}
\end{gathered} \tag{4.5}$$

Отличие от (3.10) формул, дающих изменение V и θ по нормали к линии тока:

$$(\theta - \theta_{b,c})^2 = \frac{2}{3}\sigma^2(1 - V)^3, \quad 1 - V = \frac{(3/2)^{1/5}\nu^{2/5}}{(\sigma\chi'_0/k)^{2/5}} \to \theta = \theta_{b,c} - \frac{(2\sigma^2/3)^{1/5}\nu^{3/5}}{(\chi'_0/k)^{3/5}} \tag{4.6}$$
$$\nu = (y - y_{b,c})\cos\theta_{b,c} - (x - x_{b,c})\sin\theta_{b,c} \ll 1,$$

ожидаемо. Непринципиально отличие из-за иного направления нормали отвечающей рис. 3 формулы для ν при формуле из (3.10) в случае рис. 1.

Уравнения, отвечающие $n < 3/2$ и $n > 3/2$, совпадают с уравнениями разд. 3, которые там отвечали $n < 1$ и $n > 1$. В результате решения

$$n < \frac{3}{2}, \quad m = \frac{n+1}{2n}: \quad \chi = \frac{\chi'_0\omega}{(\omega^2+1)^m}, \quad \chi' = \frac{\chi'_0(n-\omega^2)}{n(\omega^2+1)^{m+1}}$$

$$n > \frac{3}{2}, \quad m = \frac{n+1}{2n} > \frac{1}{2}: \quad \chi = \frac{\chi'_0\omega}{(\omega^2+1)^m}, \quad \chi' = \frac{\chi'_0(n-\omega^2)}{n(\omega^2+1)^{m+1}}$$

отличаются от (3.11) и (3.12) только значениями $n = 3/2$. Их следствия для точек схода звуковых линий тока и точек их присоединения совпадают или практически совпадают с приведенными в (4.2)–(4.6).

Для осесимметричных течений в уравнении Чаплыгина появляется правая часть. Ее слагаемые, пропорциональные первым–третьим степеням ψ_V и ψ_θ, во всех изученных решениях имеют более высокий порядок малости по η, чем ψ_{VV} и $\psi_{\theta\theta}$. Малы и дополнительные слагаемые в уравнениях, определяющих координаты x и y. Как следствие, все полученные результаты переносятся на осесимметричные течения с единственной заменой: k на ky_b.

Заключение. Выполненное исследование, первоначально имевшее некоторое отношение к построению тел, обтекаемых с наибольшими критическими числами Маха, неожиданно вывело авторов на практически забытые работы Н.Е. Жуковского по струям идеальной жидкости. Оказалось, что в XIX в. задачи, привлекшие его внимание, интересовали многих известных ученых-физиков, включая Гельмгольца, Кирхгофа, Релея, Бриллуэна, И.В. Мещерского и Планка. Однако ни одному из них не удалось продвинуться столь далеко, как Н.Е. Жуковскому всего в двух работах 1890–1891 гг. Желание напомнить об этом нашим современникам и понимание того, чье дело здесь продолжено, помогли завершить данный труд.

Авторы признательны А.М. Гайфуллину за полезную информацию.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (20-01-00100).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жуковский Н.Е.* Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, заданной на неизвестной линии тока // в кн.: *Жуковский Н.Е.* Собр. соч. Т. II. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 764 с. С. 489–626.
2. *Жуковский Н.Е.* Определение движения жидкости при каком-нибудь условии, данном на линии тока // в кн.: *Жуковский Н.Е.* Собр. соч. Т. II. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 764 с. С. 640–653.
3. *Imai I.* Discontinuous potential flow as the limiting form of the viscous flow for vanishing viscosity // J. Phys. Soc. Japan. 1953. V. 8. № 3. P. 399–402.
4. *Бетяев С.К.* Эволюция вихревых пелен // в сб.: Динамика сплошной среды со свободными поверхностями. Чебоксары: Чуваш. гос. ун-т, 1980. С. 27–38.
5. *Сычев В.В., Рубан А.И., Сычев Вик.В. и др.* Асимптотическая теория отрывных течений. М.: Наука, 1987. 256 с.

6. *Овсянников Л.В.* Об одном газовом течении с прямой линией перехода // ПММ. 1949. Т. 13. Вып. 5. С. 537–542.
7. *Овсянников Л.В.* Исследование газовых течений с прямой звуковой линией // Тр. ЛКВВИА. 1950. Вып. 33. С. 3–24.
8. *Шифрин Э.Г.* К задаче обтекания бесконечного клина звуковой струей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 2. С. 103–106.
9. *Крайко А.Н., Мунин С.А.* О натекании звуковой струи на клиновидные препятствия // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 3. С. 413–417.
10. *Кацкова О.Н., Шмыглевский Ю.Д.* Осесимметричное сверхзвуковое течение свободно расширяющегося газа с плоской переходной поверхностью // Вычисл. матем. М.: АН СССР. 1957. Вып. 2. С. 45–89.
11. *Крайко А.Н., Тилляева Н.И.* Метод характеристик и полухарактеристические переменные в задачах профилирования сверхзвуковых частей плоских и осесимметричных сопел // ЖВММФ. 1996. Т. 36. № 9. С. 159–176.
12. *Крайко А.Н., Тилляева Н.И., Шамардина Т.В.* Плоскопараллельные и осесимметричные течения с прямой звуковой линией // ЖВММФ. 2019. Т. 59. № 4. С. 649–669.
13. *Крайко А.Н.* Предельные свойства кусочно-потенциальных докритических и критических струйных течений идеального газа // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 1. С. 30–41.
14. *Крайко А.Н.* Теоретическая газовая динамика: классика и современность. М.: Торус пресс, 2010. 440 с.
15. *Gilbarg D., Shiffman M.* On bodies achieving extreme values of the critical Mach number. I // J. Ration. Mech.&Anal. 1954. V. 3. № 2. P. 209–230.
16. *Крайко А.Н.* Плоские и осесимметричные конфигурации, обтекаемые с максимальным критическим числом Маха // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 941–950.
17. *Fisher D.D.* Calculation of subsonic cavities with sonic free streamlines // J. Math. Phys. 1963. V. 42. № 1. P. 14–26.
18. *Брутян М.А., Ляпунов С.В.* Оптимизация формы симметричных плоских тел с целью увеличения критического числа Маха // Уч. зап. ЦАГИ. 1981. Т. 12. № 5. С. 10–22.
19. *Щербаков С.А.* Расчет головной или кормовой части плоского тела, обтекаемого дозвуковым потоком с максимально возможным критическим числом Маха // Уч. зап. ЦАГИ. 1988. Т. 19. № 4. С. 10–18.
20. *Schwendeman D.W., Kropinski M.C.A., Cole J.D.* On the construction and calculation of optimal nonlifting critical airfoils // ZAMP. 1993. Bd 44. P. 556–571.
21. *Зигангареева Л.М., Киселев О.М.* О расчете кавитационного обтекания кругового конуса дозвуковым потоком сжимаемой жидкости // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 93–107.
22. *Зигангареева Л.М., Киселев О.М.* Отрывное обтекание диска идеальным газом и тела с наибольшими критическими числами Маха // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 3. С. 166–172.
23. *Зигангареева Л.М., Киселев О.М.* О полубесконечных телах вращения, обтекаемых с максимальным критическим числом Маха // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 1. С. 97–107.
24. *Зигангареева Л.М., Киселев О.М.* О плоских конфигурациях, обтекаемых потоком идеального газа с максимальным критическим числом Маха // ПМТФ. 1998. № 5. С. 106–115.
25. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.

On Curvature of the Boundary Stream Lines of Ideal Gas Flows at the Points of Disconnection and Joining

A.N. Kraiko[a,#] and N.I. Tillyayeva[a,##]

[a] *Baranov Central Institute of Aviation Motors, Moscow, Russia*
[#]*e-mail: akraiko@ciam.ru*
[##]*e-mail: ntill@ciam.ru*

Stationary flows of an ideal (inviscid and non-heat-conducting) gas with stream lines being the boundaries of flowing and motionless media are considered. In the XIX century, such boundaries appeared in the problems of the outflow of jets into flooded space. With the main contribution of N.E. Zhukovsky to their solution, only incompressible fluid jets were considered until 1903. In 1903, S.A. Chaplygin began studying two-dimensional subsonic jets of an ideal gas. In 1949, L.V. Ovsyannikov, having solved the problem of the outflow of a "critical" jet, discovered the surprising properties of a flow with a sound boundary stream line. Soon, segments of such stream lines, which arose in jet problems interesting mainly for the theory, appeared in the construction of bodies streamlined by subsonic flows with the largest "critical" Mach numbers M*. When an incident flow with $M_0 < M^*$ everywhere $M < 1$, there are no shock waves and wave drag. When $M_0 > M^*$, supersonic zones appear, shock waves and increasing with the growth of M_0 wave drag arise. It appeared that M* realize bodies, when flowing around which with $M_0 = M^*$ part of the contours are segments of sonic stream lines. It is useful to know their curvature at the points of disconnection and joining. According to N.E. Zhukovsky, for a liquid at disconnecting points, it is infinite. The infinity of the curvature of such stream lines in an ideal gas is established only after 100 years. It is shown below how the flow parameters and their derivatives, including the curvature of the stream lines, behave when approaching the points of disconnection and joining in different directions. The curvature of the boundary stream lines at these points is infinite, despite the fact that the curvature of the sonic stream lines at their intersection with the straight sonic transition line is zero.

Keywords: stationary ideal gas flows, hodograph variables, curvature of subsonic and sonic boundary stream lines at the points of disconnection and joining

REFERENCES

1. *Zhukovsky N.E.* Modification of the Kirchhoff method for determining the motion of a fluid in two dimensions at a constant velocity set on an unknown stream line // in: *Zhukovsky N.E.* Collection of Works. Vol. II. Hydrodynamics, Moscow; Leningrad: Gostekhizdat, 1949. 764 p., pp. 489–626 (in Russian).
2. *Zhukovsky N.E.* Determination of fluid motion under some condition given on the stream line // in: *Zhukovsky N.E.* Collection of Works. Vol. II. Hydrodynamics, Moscow;Leningrad: Gostekhizdat, 1949. 764 p., pp. 640–653 (in Russian).
3. *Imai I.* Discontinuous potential flow as the limiting form of the viscous flow for vanishing viscosity // J. Phys. Soc. Japan, 1953, vol. 8, no. 3, pp. 399–402.
4. *Betyaev S.K.* The evolution of vortex sheets // in: Dynamics of a Continuous Medium with Free Surfaces. Cheboksary: Chuvash State Univ., 1980, pp. 27–38 (in Russian).
5. *Sychev V.V., Ruban A.I., Sychev V.V. et al.* Asymptotic Theory of Detached Flows. Moscow: Nauka, 1987. 256 p. (in Russian).
6. *Ovsyannikov L.V.* On a gas flow with a straight transition line // Prikl. Mat. Mekh., 1949, vol. 13, no. 5, pp. 537–542 (in Russian).
7. *Ovsyannikov L.V.* Study of gas flows with a straight sonic line // Tr. Leningr. Krasnoznam. Voenno-Vozdush. Inzh. Akad., 1950, vol. 33, pp. 3–24 (in Russian).
8. *Shifrin E.G.* On the sonic flow over an infinite wedge // Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Zhidk. i Gaza, 1969, no. 2, pp. 103–106 (in Russian).
9. *Kraiko A.N., Munin S.A.* On sonic flows impinging on wedge-shaped obstructions // JAMM, 1989, vol. 53, no. 3, pp. 315–319.
10. *Katskova O.N., Shmyglevskii Yu.D.* Axisymmetric supersonic flow of a freely expanding gas with a flat transition surface // Num. Math. (Akad. Nauk SSSR, Moscow), 1957, vol. 2, pp. 45–89 (in Russian).
11. *Kraiko A.N., Tillyayeva N.I.* The method of characteristics and semi-characteristic variables in problems of profiling supersonic parts of axisymmetric and plane nozzles // Comp. Maths Math. Phys., 1996, vol. 36, no. 9, pp. 1299–1312.
12. *Kraiko A.N., Tillyayeva N.I., Shamardina T.V.* Plane-parallel and axisymmetric flows with a straight sonic line // Comp. Math. Math. Phys., 2019, vol. 59, no. 4, pp. 610–629.
13. *Kraiko A.N.* The limiting properties of piecewise-potential subcritical and critical jet of an ideal gas // JAMM, 2003, vol. 67, no. 1, pp. 25–35.

14. *Kraiko A.N.* Theoretical Gas Dynamics: Classics and Topics. Moscow: Torus Press, 2010. 440 p. (in Russian).
15. *Gilbarg D., Shiffman M.* On bodies achieving extreme values of the critical Mach number. I // J. Ration. Mech. & Anal., 1954, vol. 3, no. 2, pp. 209–230.
16. *Kraiko A.N.* Planar and axially symmetric configurations which are circumvented with the maximum critical Mach number // JAMM, 1987, vol. 51, no. 6, pp. 723–730.
17. *Fisher D.D.* Calculation of subsonic cavities with sonic free streamlines // J. Math. Phys., 1963, vol. 42. no. 1, pp. 14–26.
18. *Brutyan M.A., Lyapunov S.V.* Optimization of the symmetrical two-dimensional bodies shape in order to increase the critical Mach number // Uch. Zap. TsAGI, 1981, vol. 12, no. 5, pp. 10–22 (in Russian).
19. *Shcherbakov S.A.* Calculation of the head or aft part of two-dimension body streamlined by subsonic flow with the maximum possible critical Mach number // Uch. Zap. TsAGI, 1988, vol. 19, no. 4, pp. 10–18 (in Russian).
20. *Schwendeman D.W., Kropinski M.C.A., Cole J.D.* On the construction and calculation of optimal nonlifting critical airfoils // ZAMP, 1993, vol. 44, pp. 556–571.
21. *Zigangareeva L.M., Kiselev O.M.* Calculation of the cavitating flow around a circular cone by a subsonic stream of a compressible fluid // JAMM, 1994, vol. 58, no. 4, pp. 669–684.
22. *Zigangareeva L.M., Kiselev O.M.* Separated inyiscid gas flow past a disk and a body with maximum critical Mach numbers // Fluid Dyn., 1996, vol. 31, no. 3, pp. 477–482.
23. *Zigangareeva L.M., Kiselev O.M.* Maximum critical Mach number flows around semi-infinite solids of revolution // JAMM, 1997, vol. 61, no. 1, pp. 93–102.
24. *Zigangareeva L.M., Kiselev O.M.* Plane configurations in a flow of a perfect gas with a maximum critical Mach number // J. Appl Mech Tech Phys, 1998, vol. 39, no. 5, pp. 744–752.
25. *Von Kamke E.* Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. Gewöhnliche Differentialgleichungen. Leipzig: 1959.

EDN: QHZBGP
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2022, том 86, № 3, с. 365–369

УДК 532.23

К 120-летию Л.Н. Сретенского

СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ И ФОРМЫ СЕЙШ В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

© 2022 г. С. В. Нестеров[1,*]

[1] Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
**e-mail:bayd@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 18.02.2022 г.
После доработки 15.03.2022 г.
Принята к публикации 05.04.2022 г.

Рассмотрены стоячие волны (сейши) в прямоугольном канале переменной глубины в случае, когда глубина канала монотонно меняется от нулевого значения. Для решения задачи использован модифицированный метод укоренной сходимости. Найдены формы сейш в зависимости от ширины канала для различных профилей дна. Проанализировано поведение собственных частот для различных отношений между глубиной и шириной канала.

Ключевые слова: канал, стоячая волна, сейши, собственные частоты, метод ускоренной сходимости

DOI: 10.31857/S0032823522030080

1. Введение. Волновые движения в прямоугольном канале заданной длины, постоянной ширины и глубины изменяющейся вдоль канала рассмотрены в классических монографиях [1, 2]. В рамках рассмотренных постановок были изучены волновые движения жидкости в частных случаях, когда профиль дна стремится к нулю таким образом, что решение задачи нахождения собственных частот и форм (сейш) колебаний можно найти аналитически. Сейшевые колебания в замкнутом водоеме, состоящем из длинного узкого канала постоянного сечения и широкого бассейна, соединенного с каналом без перемычки, изучались [3] численно и аналитически в рамках одно- и двумерной постановок. Результаты, полученные для одномерной модели хорошо согласуются с экспериментальными измерениями частот сейш низших мод.

Сравнение экспериментальных измерений сейш в сосуде наличием резких градиентов в профиле дна (модель озера Байкал) [4] с данными численных расчетов показало возможность использования линейной модели (теории длинных волн) для расчета собственных частот и форм колебаний. Было показано, что наличие резких неоднородностей в профиле дна слабо влияющее на собственные формы, становится заметным в профилях их пространственных производных даже в том случае, когда эта неоднородность существует на большой глубине от поверхности.

Волновые движения в канале переменной глубины – традиционный предмет изучения в океанологии и геофизики. Так, например, задачи о собственных колебаниях в озерах и других замкнутых водоемах оказываются важными с точки зрения возникновения катастрофических явлений (сели, волны большой амплитуды). Численному

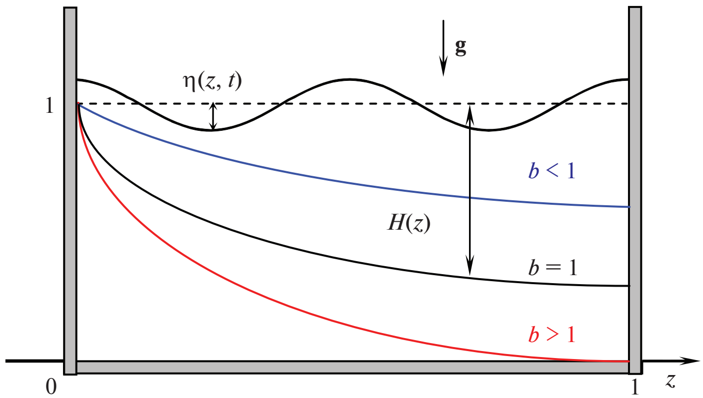

Рис. 1. Изменение глубины канала по его длине $0 \le z \le 1$.

расчету собственных частот колебаний озер Швейцарии выполненному в рамках гидродинамического моделирования посвящена работа [5].

Аналитические также широко используются для решения качественных задач. В частности распространение волн в полузакрытом канале с линейным выходом профиля глубины на постоянную величину проанализирована аналитически [6]. В то же время вопрос о собственных формах сейш и их спектральных свойствах в канале конечной ширины и гладким профилем дна остался не исследованным. Ниже предложена модификация метода ускоренной сходимости [7] для анализа задач на собственные значения сейш, в каналах с такими профилями дна, когда аналитическое решение оказывается невозможным.

2. Постановка задачи. Обозначим через $\eta(x,t)$ возвышение свободной поверхности жидкости, заполняющей канал; $h(x)$ – глубина жидкости, l – длина канала, $\mathbf{g}$ – ускорение силы тяжести (рис. 1). Показано, что возвышение свободной поверхности $\eta(x,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению [1, 2]

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = g\frac{\partial}{\partial x}\left(h(x)\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) = 0 \tag{2.1}$$

и граничным условиям

$$\left.\frac{\partial\eta}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial\eta}{\partial x}\right|_{x=l} = 0 \tag{2.2}$$

Полагая $h(x) = h_0 H(z)$, где $z = x/l$, будем искать периодические по времени решения уравнения (1.1) в виде

$$\eta = u(z)\exp(i\omega t) \tag{2.3}$$

Подставляя представление (2.3) в уравнение (2.1) и граничные условия (2.2), приходим к следующей задаче Штурма–Лиувилля

$$\begin{gathered}\frac{d}{dz}\left(H(z)\frac{du}{dz}\right) + \lambda u = 0\\ \frac{du}{dz}(0) = \frac{du}{dz}(1) = 0,\end{gathered} \tag{2.4}$$

где $\lambda = \omega^2 l^2/(gh_0)$ – собственное число задачи Штурма–Лиувилля, формулируемая следующим образом: требуется найти такие значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения краевой задачи (2.4). Искомые значения параметра λ называются собственными числами задачи, а соответствующие им нетривиальные решения – собственными функциями или формами колебаний (сейши).

3. Выбор функции $H(z)$. При изучении сейш в каналах наиболее часто используется модель с вертикальными стенками (дно с обрывом), которые часто встречаются в искусственных сооружениях. В природных условиях, а также иногда и гидротехнических конструкциях и водохранилищах, в профиль дна обычно таков, что глубина канала плавно уменьшается до нуля при приближении к берегу. Учитывая приведенные соображения, а также предполагая монотонный характер профиля дна, выберем зависимость безразмерной глубины канала в виде

$$H(z) = 1 - \exp(-bz) \tag{3.1}$$

В точке $z = 0$, $H(0) = 0$, параметр b описывает быстроту увеличения глубины при удалении от береговой линии. Значениям $b < 1$ соответствует пологий профиль дна, а $b > 1$ – крутой (см. рис. 1).

4. Метод решения. Задача (2.4) относится к классу задач, детально описанных в [7], однако применить метод ускоренной сходимости напрямую нельзя, поскольку $H(z)|_{z=0} = 0$. Поступим следующим образом. Рассмотрим наряду с задачей (2.4) задачу вида

$$\begin{gathered}\frac{d}{dz}\left[(1 - \exp(-b(x + a)))\frac{du}{dz}\right] + \lambda u = 0\\ \frac{du}{dz}(0) = \frac{du}{dz}(1) = 0\end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь “регуляризирующий” параметр $a > 0$.

Учитывая, что $\forall z \in (0,1)$ имеет место неравенство

$$1 - \exp(-bz) < 1 - \exp(-b(z + a)), \tag{4.2}$$

все собственные числа краевой задачи (4.1) будут больше, чем числа исходной задачи (2.4).

Будем решать методом ускоренной сходимости задачу Штурма–Лиувилля (4.1) для набора последовательно уменьшающихся параметров $a_k = 10^{-(k+2)}$, $k = 1,2,\ldots$ Тогда набор найденных собственных значений задачи (4.1) $\tilde{\lambda}_n(a_k)$ при $a_k \to 0$ будет образовывать монотонно убывающую последовательность собственных чисел, сходящуюся сверху к искомым собственным числам задачи (2.4). Ограничивая проведение такой процедуры значением параметра $a = 10^{-7}$, получаем значения пяти первых собственных чисел с относительной точностью 10^{-6}. Построенные зависимости собственных частот $\omega_n = \sqrt{\lambda_n}$ (рис. 2) показывают их монотонно возрастающую зависимость от параметра пологости дна с выходом на предельное значение. Проведенные вычисления для больших $b = 10$–30 показали, что предельная собственная частота, отвечающая случаю вертикальной стенке на левой границе канала, оказывается равной $\omega_\perp = \pi n$.

На рис. 3 изображены первая, вторая и третья собственные формы сейш для случая $b = 3$. Графики представляют собой знакопеременные функции с числом нулей, определяемых номером моды.

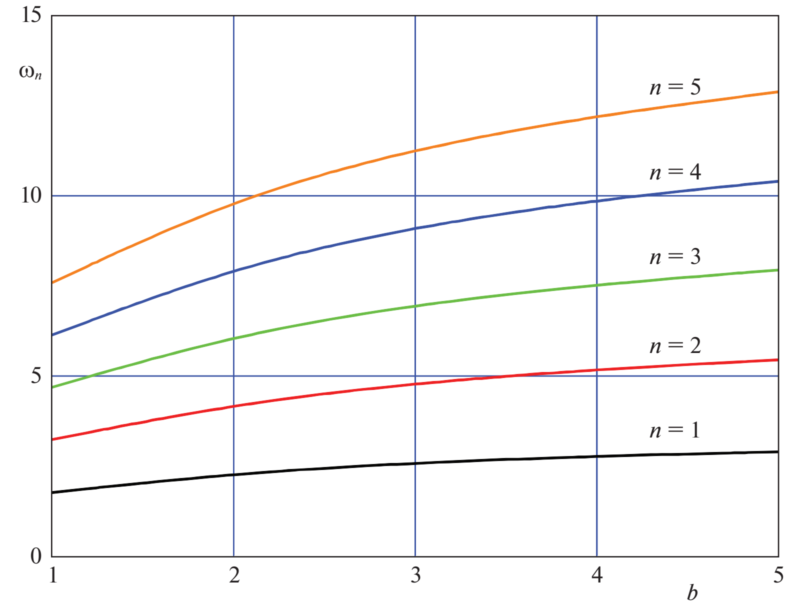

Рис. 2. Зависимость собственных частот сейш ω_n от параметра пологости дна b.

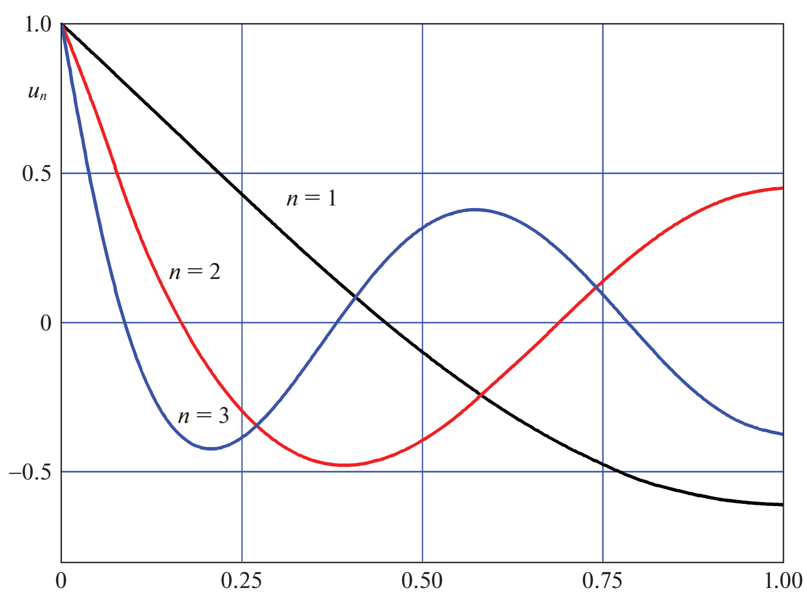

Рис. 3. Профили собственных форм сейш u_n для первых трех мод ($b = 3$).

Таким образом, был разработан алгоритм, позволяющий применять метод ускоренной сходимости для краевых задач, с регулярными особенностями ($H(z) = \mathrm{const} \cdot z + \underline{\underline{O}}(z^2)$) на одной из граничных точек задачи.

Работа выполнена по теме государственного задания № АААА-А20-120011690132-4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: ОГИЗ, 1947. 928 с.
2. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
3. *Букреев В.И., Стурова И.В., Чеботников А.В.* Сейшевые колебания в прямоугольном канале с резким расширением поперечного сечения // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 4. С. 22–32.
4. *Акуленко Л.Д., Калиниченко В.А., Нестеров С.В.* Сейши в канале с резким изменением рельефа дна // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 3. С.
5. *Siegenthaler C.* Seiches and the slide/seiche dynamics; subcritical and supercritical subaquous mass fows and their deposits. Examples from Swiss lakes // Swiss J. Geosci. 2021. V. 114(17). https://doi.org/10.1186/s00015-021-00394-6
6. *Magdalena I., Karima N., Rif'atin H.Q.* Resonant periods of seiches in semi-closed basins with complex bottom topography // Fluids. 2021. V. 6(181). https://doi.org/10.3390/fluids6050181
7. *Akulenko L.D., Nesterov S.V.* High-Precision Methods in Eigenvalue Problems and Their Applications. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC Press, 2005. 255 p.

Natural Frequencies and Seiche in the Channel of Variable Depth

S. V. Nesterov[a,#]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: bayd@ipmnet.ru*

Standing waves (seiches) in a rectangular channel of variable depth are considered in the case when the channel depth monotonically changes from zero. The modified accelerated convergence method was used to solve the problem. The dependences of seiche forms from channel width were obtained for different bottom profiles. The behavior of natural frequencies for channel depth profiles is analyzed.

Keywords: channel, standing wave, seiches, natural frequencies, accelerated convergence method

REFERENCES

1. *Lamb H.* Hydrodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1993.
2. *Sretensky L.* The Theory of Wave Motion of Fluid. Moscow: Nauka, 1977. 815 p. (in Russian)
3. *Bukreev V.I., Sturova I.V., Chebotnikov A.V.* Seiche oscillations in a rectangular channel with an abrupt expansion of the cross section // J. Appl. Mec.&Techn. Phys., 2013, vol. 54, no. 4, pp. 531–540.
4. *Akulenko L.D., Kalinichenko V.A., Nesterov S.V.* Seiches in a channel with a sharp variation in the bottom relief // Fluid Dyn., 2012, no. 3, pp. 387–394.
5. *Siegenthaler C.* Seiches and the slide/seiche dynamics; subcritical and supercritical subaquous mass fows and their deposits. Examples from Swiss Lakes // Swiss J. Geosci., 2021. vol. 114(17). https://doi.org/10.1186/s00015-021-00394-6
6. *Magdalena I., Karima N., Rif'atin H.Q.* Resonant periods of seiches in semi-closed basins with complex bottom topography // Fluids, 2021, vol. 6(181). https://doi.org/10.3390/fluids6050181
7. *Akulenko L.D., Nesterov S.V.* High-Precision Methods in Eigenvalue Problems and Their Applications. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2005. 255 p.

EDN: NIHLLP
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА **2022, том 86, № 3, с. 370–380**

УДК 532.59

К 120-летию Л.Н. Сретенского

СТОЯЧИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. А. Калиниченко[1,*]

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**e-mail: kalin@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 10.03.2022 г.
После доработки 02.04.2022 г.
Принята к публикации 05.04.2022 г.

Обобщены теоретические и численные результаты анализа дисперсионного уравнения стоячих волн на поверхности вязкой жидкости, опубликованные Л.Н. Сретенским в 1941 г. Предложен механизм вязкой регуляризации волнового движения, согласно которому наблюдаемые в эксперименте эффекты связаны с наличием области коротковолновой отсечки, где вязкая диссипация становится доминирующим фактором и происходит подавление коротковолновых возмущений, ответственных за разрушение стоячей волны.

Ключевые слова: стоячая волна, вязкая жидкость, дисперсионное уравнение, затухающие колебания, апериодическое затухание

DOI: 10.31857/S0032823522030067

1. Введение. Задача затухания гравитационно-капиллярных волн на поверхности бесконечно глубокой жидкости впервые сформулирована в работах [1, 2] более столетия назад; классические решения для малой и большой вязкости обобщены в монографии Ламба [3].

В 1941 г. Л.Н. Сретенский опубликовал результаты исследования стоячих волн на поверхности тяжелой вязкой жидкости [4]. Приведенное в [4] решение дисперсионного уравнения справедливо для жидкости произвольной вязкости и имело целый ряд весьма интересных следствий. Как подчеркивается в [5], “значение этой работы не только в получении ряда интересных результатов физического характера. Еще в XIX веке Г. Ламб обратил внимание на возможность представить поле скоростей в виде суперпозиции потенциального и чисто соленоидального полей. В работе Сретенского эта точка зрения проводится последовательно, показана эффективность такого представления и дано его обоснование”.

Разделение поля скоростей жидкости на потенциальную и вихревую части использовалось в [6, 7] при решении задач о волнах в вязкой жидкости, ограниченном рассмотрением предельных по вязкости случаев.

Следует особо отметить работы [8, 9], в которых при рассмотрении гравитационно-капиллярных волн учитывалась конечная глубина вязкой жидкости. Это приводит к двухпараметрическому дисперсионному уравнению.

В [10] для описания пространственных стоячих волн в вязкой жидкости бесконечной глубины используются переменные Лагранжа, и приведены асимптотики дисперсионного уравнения.

Далее как обобщение результатов [4] рассматриваются дисперсионные свойства линейных гравитационных стоячих волн на поверхности вязкой жидкости бесконечной глубины; приводятся данные эксперимента [11, 12] качественно подтверждающие основные положения [4].

2. Дисперсионное уравнение. Ставится задача исследования малых волновых движений тяжелой вязкой жидкости бесконечной глубины при отсутствии каких-либо напряжений на свободной поверхности. Двумерные колебания жидкости описываются в декартовой системе координат (x, y) с началом на невозмущенной поверхности; ось y — вертикальна.

Линеаризованные уравнения Навье–Стокса и уравнение неразрывности имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta u, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta v - g, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.1}$$

Здесь ρ, ν, g — плотность, кинематическая вязкость и ускорение силы тяжести.

Если движение вязкой жидкости представить в виде

$$u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{p}{\rho} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - gy, \tag{2.2}$$

то из (2.1) следует, что функция φ удовлетворяет уравнению Лапласа, и ψ — уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} - \nu\Delta\psi = 0 \tag{2.4}$$

В этом случае потенциальная часть φ движения жидкости полностью отделена от вихревой его части ψ.

Пусть малые смещения свободной поверхности задаются функцией

$$y = \eta(x, t)$$

Тогда задача (2.3), (2.4) замыкается граничными условиями на свободной поверхности $y = 0$: кинематическим условием и условиями равенства нулю тангенциального и нормального напряжений

$$v = \frac{\partial\eta}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -\frac{p}{\rho} + 2\nu\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Учитывая соотношения (2.2), получаем следующие граничные условия задачи (2.3), (2.4)

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\psi + \frac{2\nu}{g}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right\}\bigg|_{y=0} \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = 2\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\bigg|_{y=0} \tag{2.6}$$

Для свободной поверхности справедливо следующее выражение

$$\eta = \left\{\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{2\nu}{g}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right\}\bigg|_{y=0} \tag{2.7}$$

Таким образом, задача об определении стоячих волн на поверхности безграничной вязкой жидкости приводится к решению граничной задачи (2.3–2.6). Ищем решения в следующем виде

$$\varphi = Ae^{ky}\cos kx, \quad \psi = Be^{my}\sin kx, \tag{2.8}$$

где k, m — некоторые константы, A, B — неизвестные функции времени.

Поскольку ψ удовлетворяет уравнению теплопроводности (2.4), то

$$\frac{dB}{dt} = \nu(m^2 - k^2)B$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$B = B_0 e^{-\omega^* t}, \quad \psi = B_0 e^{-\omega^* t + my}\sin kx, \tag{2.9}$$

где $\omega^* = \nu(k^2 - m^2) = b + i\omega$ — комплексная частота колебаний жидкости; B_0 — постоянная интегрирования.

Функцию $A(t)$ находим при подстановке φ, ψ в граничное условие (2.6)

$$-\omega^* B_0 e^{-\omega^* t}\sin kx = 2\nu[-k^2 B_0 e^{-\omega^* t}\sin kx - k^2 A\sin kx]$$

$$A = -\frac{\omega^* - 2\nu k^2}{2\nu k^2}B_0 e^{-\omega^* t}$$

Итак

$$\varphi = -\frac{\omega^* - 2\nu k^2}{2\nu k^2}B_0 e^{-\omega^* t + ky}\cos kx \tag{2.10}$$

Подставляя (2.9), (2.10) в граничное условие (2.5), получим

$$(\omega^* - 2\nu k^2)^2 + gk = 4\nu^2 mk^3 \tag{2.11}$$

Если ввести новые переменные (ϑ, ζ) по формулам

$$\vartheta = \frac{\nu k^2}{\omega_0}, \quad \zeta = -\frac{\omega^* - 2\nu k^2}{\omega_0}; \quad \omega_0 = (gk)^{1/2} \tag{2.12}$$

то (2.10) принимает вид

$$[1 + \zeta^2]^2 = 16\vartheta^3(\zeta - \vartheta) \tag{2.13}$$

Уравнение (2.13) связывает переменные (ϑ, ζ), устанавливая зависимость между длиной стоячей волны и ее частотой. Если известна пара значений (ϑ, ζ), то длина λ стоячей волны и величина ω^*, характеризующая временные изменения волнового процесса, находятся следующим образом

$$\lambda = 2\pi\left(\frac{\nu^2}{g}\right)^{1/3}\vartheta^{-2/3}, \quad \omega^* = \left(\frac{g^2}{\nu}\right)^{1/3}(2\vartheta - \zeta)\theta^{1/3}, \tag{2.14}$$

Отметим, что рассматриваемая задача характеризуется двумя пространственными масштабами — длиной стоячей волны $\lambda = 2\pi/k$ и стоксовым вязким масштабом $\delta_\nu = \sqrt{\nu/\omega_0}$. Именно соотношением этих масштабов $\vartheta = 4\pi^2(\delta_\nu/\lambda)^2$ определяются различные режимы волнового движения вязкой жидкости.

3. Решение дисперсионного уравнения. В работе [4] дисперсионное уравнение (2.13) решалось численно методом Греффа (квадрирование корней многочлена). Для диапазона значений $0.06 \le \vartheta \le 10$ приведены [4] таблицы, содержащие значения комплексных

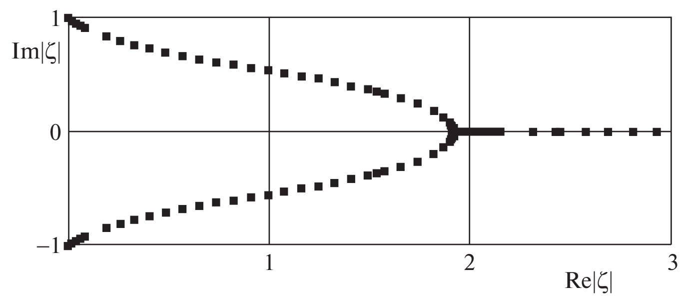

Рис. 1. Корни уравнения (2.13) на комплексной ζ-плоскости при $0.0001 \le \vartheta \le 1.7$.

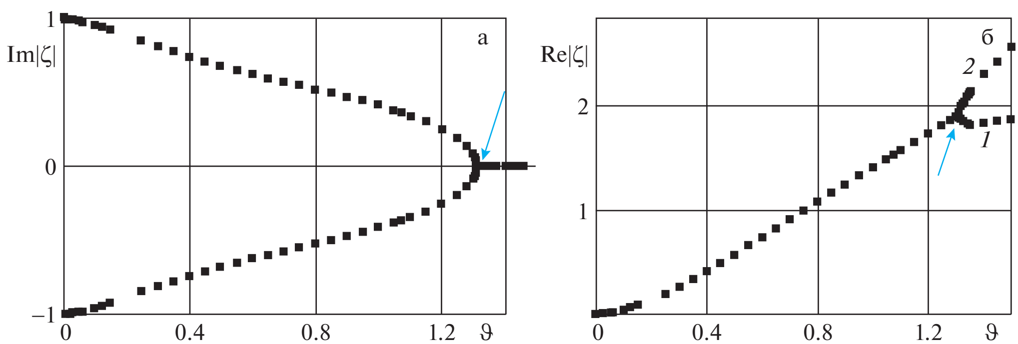

Рис. 2. Зависимость комплексного корня ζ дисперсионного уравнения от параметра ϑ: а – $\mathrm{Im}\,\zeta$, б – $\mathrm{Re}\,\zeta$. Стрелкой отмечено значение $\vartheta = 1.31$.

корней уравнения (2.13) и соответствующие оценки для частоты и коэффициента затухания стоячих волн. В настоящей работе численное решение (2.13) проводилось с использованием стандартных процедур пакета Mathematica. Отметим высокую точность проведенных [4] расчетов – сравнение вычисленных величин показало совпадение с точностью до 10^{-3}.

Для каждого конкретного значения θ можно определить корни $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, ζ_4 уравнения (2.13). Из этих четырех корней два корня отбрасывались, поскольку соответствующая им величина m

$$m = \frac{1}{4}\left(\frac{g}{\nu^2}\right)^{1/3}\frac{1+\zeta^2}{\vartheta^{4/3}}$$

имеет отрицательную действительную часть, что противоречит экспоненциальному затуханию завихренности с глубиной.

Имеющие физический смысл корни уравнения (2.13) при $0.0001 \le \vartheta \le 1.7$ показаны на рис. 1. Зависимости $\zeta(\vartheta)$ представлены на рис. 2, на котором стрелками отмечено значение $\vartheta = 1.31$. Ниже этого значения имеем пару комплексно сопряженных корней, отвечающих затухающему колебательному режиму; выше ($\vartheta > 1.31$) – движение жидкости носит затухающий апериодический характер.

Проведем анализ данных на рис. 2 в соответствии с предельными оценками [3, 8].

В случае длинных волн, т.е. при $\vartheta \ll 1$ правую часть (2.13) можно приравнять нулю, и соответствующие корни равны

$$\zeta = \pm i$$

или с учетом (2.12)

$$\omega^* = \pm i\omega_0 - 2\nu k^2$$

Знак для корня или частоты может быть выбран любым, поскольку он влияет только на фазу волны. Таким образом, в длинноволновом пределе вязкость жидкости на частоту волны не влияет.

При $\vartheta > 1.31$ имеем два корня ζ_1, ζ_2, отвечающие апериодическому затуханию — ветви 1, 2 на рис. 2б. Их приближенные значения

$$\zeta_1 = 2\vartheta - \frac{1}{2\vartheta}, \quad \zeta_2 = 1.09\vartheta$$

Соответствующие коэффициенты затухания равны

$$b_1 = \frac{g}{2\nu k}, \quad b_2 = 0.91\nu k^2$$

Проведенные оценки [8] показывают для ζ_1 равные вклады потенциальной φ и вихревой ψ частей движения жидкости в апериодическое затухание. В целом движение вязкой жидкости определяется начальной деформацией ее свободной поверхности и медленным возращением к горизонтальному невозмущенному состоянию.

В случае второго корня ζ_2 быстрое затухание начальных возмущений связано с преобладанием вихревой части движения [8].

Для представления дисперсионных зависимостей $\omega^*(\lambda)$ стоячих волн на поверхности жидкости различной вязкости введем безразмерную комплексную частоту и безразмерную длину волны

$$\Omega^* = \omega^*\left(\frac{\nu}{g^2}\right)^{1/3} = (2\vartheta - \zeta)\vartheta^{1/3}, \quad \lambda^* = \frac{\lambda}{2\pi}\left(\frac{g}{\nu^2}\right)^{1/3} = \vartheta^{-2/3}$$

В этих переменных дисперсионные кривые представлены на рис. 3.

Кривая *1* на рис. 3а соответствует зависимости частоты $\mathrm{Im}\,\Omega^*$ стоячей волны от ее длины λ^*. Видно, что частота монотонно растет с уменьшением длины, достигает максимума $\mathrm{Im}\,\Omega^* = 0.546$ при $\lambda^* = 1.898$ и затем быстро уменьшается до нуля при $\lambda^* = 0.833$. Ниже этого значения периодических движений вязкой жидкости не существует. Таким образом, критическое значение длины волны $\lambda^*_{\rm cr} = 0.833$ устанавливает коротковолновый предел существования гравитационных волн на свободной поверхности жидкости, ниже которого стоячие волны отсутствуют.

Кривые *2* на рис. 3а и б соответствуют зависимости коэффициента затухания $\mathrm{Re}\,\Omega^*$ стоячей волны от ее длины λ^*. Для него характерен монотонный рост, и при $\lambda^*_{\rm cr} = 0.833$ безразмерный коэффициент затухания составляет величину $\mathrm{Re}\,\Omega^* = 0.758$. Кривые *3* и *4* на рис. 3б определяют апериодическое затухание — соответствующие корни ζ_1 и ζ_2 дисперсионного уравнения (2.13). С уменьшением $\lambda^* < < 0.833$ безразмерный коэффициент затухания $\mathrm{Re}\,\Omega^*$ или спадает до нуля (кривая *3*), или растет до бесконечности (кривая *4*).

4. Применение результатов анализа в эксперименте. В экспериментах [11, 12] обнаружено, что увеличение кинематической вязкости жидкости в 50 раз по сравнению с водой кардинально изменяет динамику волнового движения — наблюдается регуляриза-

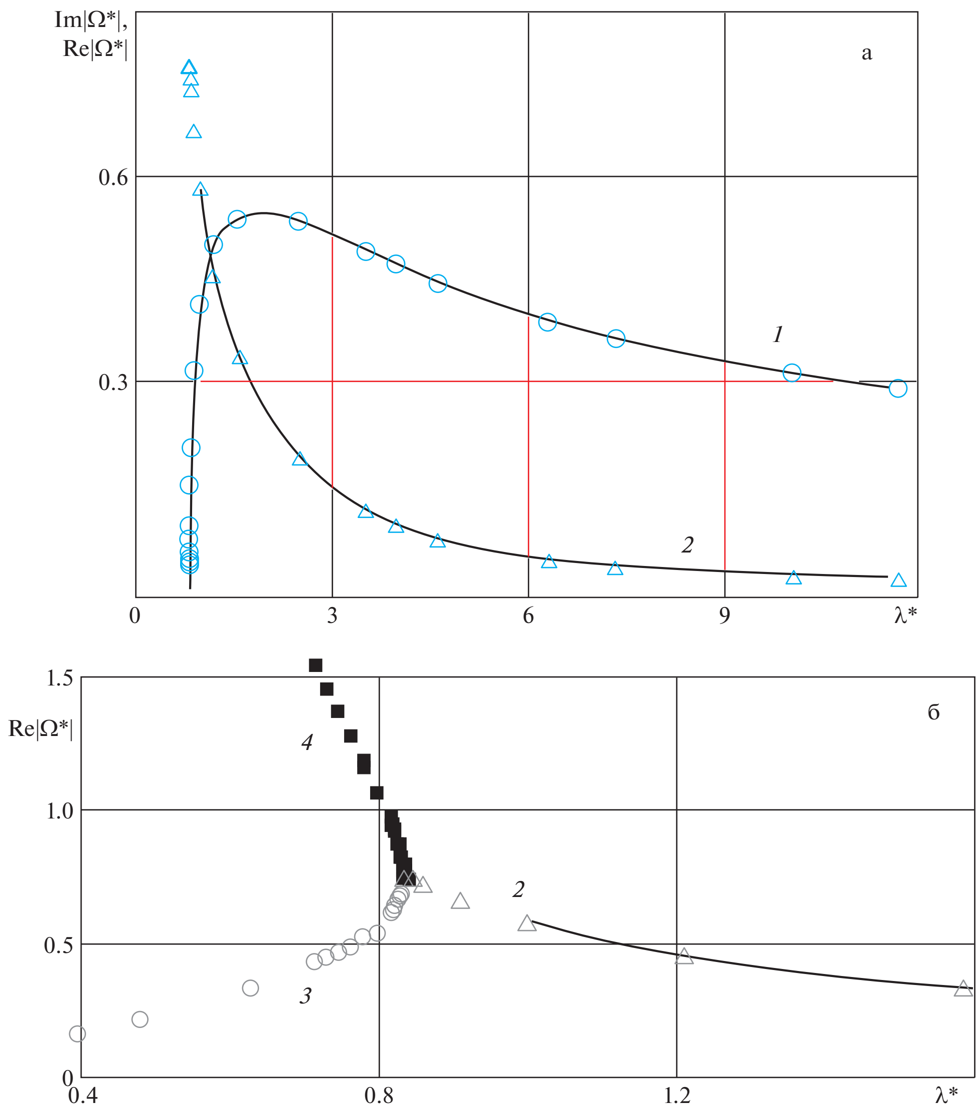

Рис. 3. а – зависимости безразмерных частоты (*1*) и коэффициента затухания (*2*) от длины стоячей волны. б – коэффициент затухания в окрестности критического значения параметра $\vartheta = 1.31$ – переход от затухающих колебаний (*2*) к апериодическому режиму (*3*, *4*).

ция стоячих гравитационных волн с полным подавлением процесса их разрушения в виде струйного выброса из гребня и последующего его распада, рис. 4.

В экспериментах [11, 12] по изучению влияния вязкости на интенсивные колебания жидкости использовался режим параметрического возбуждения второй моды ($n = 2$) стоячих гравитационных волн на свободной поверхности жидкости глубиной $h = 15$ см в вертикально колеблющемся прямоугольном сосуде длиной $L = 50$ см, шириной $W = 4$ см и высотой 50 см. Наблюдаемые двумерные волновые движения могут рассматриваться а б

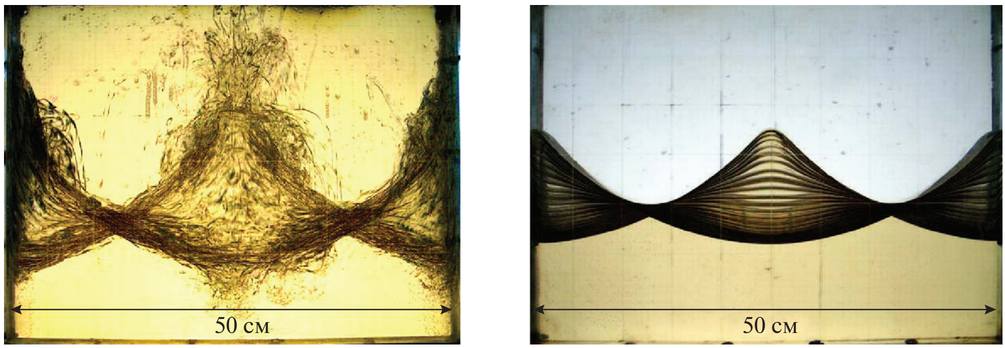

Рис. 4. а – Разрушающаяся волна на свободной поверхности воды (ν = 1 сСт); б – регулярная волна высоты H = 12.6 см на поверхности водного раствора сахара (ν = 85.97 сСт): частоты волн ω = 10.10 с$^{-1}$; скорость съемки 30 к/с; огибающие получены при наложении 60 кадров (три периода волны).

как волны на поверхности глубокой воды, поскольку $\omega_0^2 = gk\,\mathrm{th}\,kh \sim gk$; здесь $\lambda = 50$ см, $k = 2\pi/\lambda$.

Механизм регуляризации разрушающихся волн (рис. 4) нельзя объяснить простым увеличением вязкости на два порядка. Действительно, эксперименты показали пятикратное увеличение коэффициента затухания – $b_{\mathrm{exp}} = 0.157$ с$^{-1}$ для воды и 0.752 с$^{-1}$ для раствора сахара. Однако показанная на рис. 4 волновая картина наблюдалась в стационарном режиме колебаний воды и раствора сахара.

Рассмотрим влияние вязкости жидкости на динамику нерегулярных и разрушающихся волн – рис. 5.

Для воды последовательность кадров, отображающих зарождение, развитие и схлопывание каверны на стадии формирования гребня в центральной части сосуда приведена на рис. 5а. При переходе впадина–гребень центральная часть жидкости перемещается вверх, и в интервале 0.096–0.160 с на волновом профиле видны мелкомасштабные возмущения размерами не более 5 см. При $t = 0.200$ с в середине профиля волны наблюдается сформировавшаяся каверна, последующее схлопывание которой приводит к струйному всплеску с отрывом капель.

При ν = 85.97 сСт профили волн на поверхности раствора сахара – абсолютно гладкие для всего полупериода – рис. 5б. Видно, что волна нелинейная, но регулярная, ее профиль – без каких-либо мелкомасштабных возмущений и признаков разрушения.

Единственной причиной отличия волновых картин на рис. 5 является вязкость рабочей жидкости. Увеличение вязкости колеблющейся жидкости до 85.97 сСт приводит к полному подавлению процесса разрушения и регуляризации стоячей волны: исчезают мелкомасштабные возмущения, приводящие к образованию коллапсирующей каверны. Таким образом, вязкость жидкости является своеобразным фильтром короткомасштабных возмущений.

Для интерпретации полученных экспериментальных результатов используем результаты численного анализа дисперсионного уравнения (2.13) в виде зависимостей $\omega(\lambda)$ и $b(\lambda)$ – рис. 6. Частота свободных стоячих гравитационных волн на поверхности бесконечно глубокой идеальной жидкости ($\nu = 0$) определяется соотношением $\omega_0 = (gk)^{1/2}$ и возрастает до бесконечности при уменьшении длины волны – кривая *1* на рис. 6а. Если учесть вязкость колеблющейся жидкости, то частота волны принима-

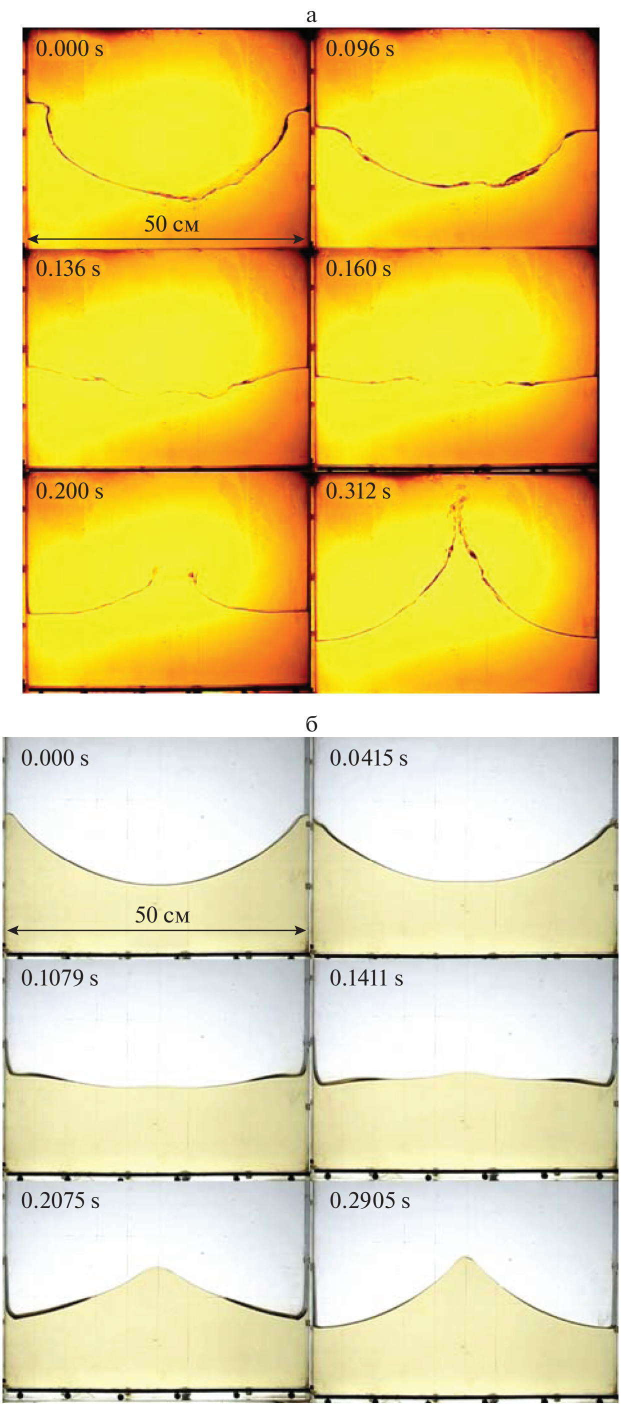

Рис. 5. Последовательности видеокадров, иллюстрирующих (а) процесс разрушения гравитационных волн Фарадея на свободной поверхности воды и (б) регулярную волновую моду на поверхности водного раствора сахара ($\nu = 85.97$ сСт) в течение половины периода волны; момент времени указан в верхнем левом углу кадра.

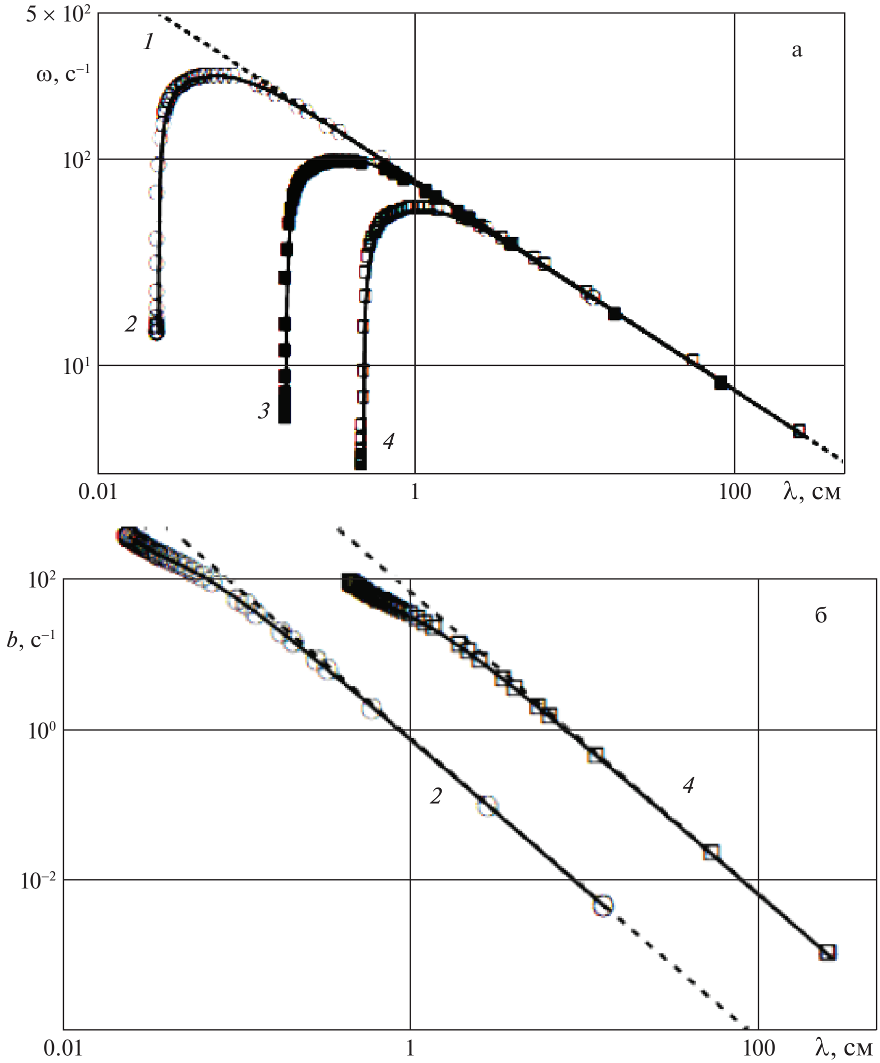

Рис. 6. Зависимости $\omega(\lambda)$ и $b(\lambda)$: кривые *1 – 4* – ν = 0, 1, 16.24, и 85.97 сСт.

ет нулевое значение $\omega = 0$ при некоторой критической длине волны λ_{cr}. Для воды (кривая *2*) эта величина равна $\lambda_{cr} = 0.02$ см. При увеличении вязкости до 16.24 сСт (52% раствор сахара) имеем $\lambda_{cr} = 0.15$ см (кривая *3*). Для 63% раствора сахара (кривая *4*) критическая длина волны оценивается как $\lambda_{cr} = 0.44$ см.

Следовательно, имеются критические значения длины волны λ_{cr}, устанавливающие коротковолновый предел возбуждения гравитационных волн. При $\lambda < \lambda_{cr}$ вязкость жидкости полностью подавляет всякое волновое движение. Увеличение вязкости приводит к возрастанию этого предела. Этот результат подтверждает данные эксперимента о вязкой регуляризации разрушающихся стоячих волн и позволяет объяснить коротковолновой отсечкой отсутствие мелкомасштабных возмущений на профилях волн вязкой жидкости. Заниженные (по сравнению с экспериментальными) расчетные значения λ_{cr} можно объяснить тем, что в дисперсионном соотношении (2.13) не учтены конечная глубина жидкости, а также вязкие потери на боковых стенках и дне сосуда.

Если учесть поверхностное натяжение жидкостей σ и рассмотреть гравитационно-капиллярные волны, для которых $\omega_0 = (gk + \sigma k^3/\rho)^{1/2}$, то дисперсионное уравнение (2.13) не изменится, а значения критической длины волны для воды, и 63% раствора сахара $\lambda_{cr} = 4.8\ 10^{-6}$, 0.04 см оказываются существенно меньше соответствующих величин для гравитационных волн.

На рис. 6б для воды (кривая *2*) и раствора сахара (кривая *4*) представлены зависимости коэффициента затухания от длины волны, полученные при численном решении (2.13). Для этих жидкостей для второй волновой моды ($\lambda = 50$ см) имеем 0.0003 и 0.0246 c^{-1} соответственно. Пунктирные зависимости на рис. 6б рассчитаны по формуле $b = 2\nu k^2$ без учета дна и боковых стенок. Именно по этой причине расчетные значения коэффициента затухания существенно меньше экспериментальных.

Таким образом, из (2.13) следует, что именно вязкость жидкости обеспечивает отсечку коротковолновых возмущений, ответственных за разрушение волн.

Заключение. Обобщены теоретические и численные результаты анализа дисперсионного уравнения стоячих волн на поверхности вязкой жидкости, опубликованные Л.Н. Сретенским в 1941 г.

Предложен механизм вязкой регуляризации волнового движения, согласно которому наблюдаемые в эксперименте эффекты связаны с наличием области коротковолновой отсечки, где вязкая диссипация становится доминирующим фактором и происходит подавление коротковолновых возмущений, ответственных за разрушение стоячей волны.

Работа выполнена по теме государственного задания № АААА-А20-120011690131-7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bassett A.B.* A Treatise on Hydrodynamics. Vol. 2, Art. 519. London: Deighton, Bell and Co. 1888. 362 P. (Reprinted by Dover, New York, N.Y. 1961.)
2. *Tait P.G.* Note on ripples in a viscous liquid // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1890. V. 17. P. 110–114.
3. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
4. *Сретенский Л.Н.* О волнах на поверхности вязкой жидкости // Тр. ЦАГИ. 1941. № 541. С. 1–34.
5. *Моисеев Н.Н.* Некоторые вопросы гидродинамики поверхностных волн // Механика в СССР за 50 лет. Т. 2. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. С. 55–78.
6. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: ГИФМЛ. 1959. 700 с.
7. *Wehausen J.V.*, *Laitone E.V.* Surface waves // in: Encyclopedia of Physics. Springer, 1960. V. IX. P. 446–778.
8. *LeBlond H.H., Mainardi F.* The viscous damping of capillary-gravity waves // Acta Mech. 1987. V. 68. № 3–4. P. 203–222.
9. *Саночкин Ю.В.* Влияние вязкости на свободные поверхностные волны в жидкостях // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 4. С. 156–164.
10. *Абрашкин А.А., Бодунова Ю.П.* Пространственные стоячие волны на поверхности вязкой жидкости // Тр. НГТУ им. Р.Е. Алексеева. МЖГ. 2011. № 2(87). С. 49–54.
11. *Базилевский А.В., Калиниченко В.А., Рожков А.Н.* Влияние вязкости жидкости на поверхностные волны Фарадея в журнале // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 6. С. 30–42.
12. *Базилевский А.В., Калиниченко В.А., Рожков А.Н.* Вязкая регуляризация разрушающихся волн Фарадея // Письма в ЖЭТФ. 2018. Т. 107. Вып. 11. С. 716–721.

Standing Gravitational Waves on the Surface of a Viscous Liquid

V. A. Kalinichenko[a,#]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia*
[#]*e-mail: kalin@ipmnet.ru*

The review summarizes the theoretical and numerical results of the analysis of the dispersion equation of standing waves on the surface of a viscous fluid, published by L.N. Sretensky in 1941. A mechanism for viscous regularization of wave motion is proposed, according to which the effects observed in the experiment are associated with the presence of a short-wavelength cutoff region, where viscous dissipation becomes the dominant factor and short-wavelength perturbations responsible for breaking of a standing wave are suppressed.

Keywords: standing wave, viscous liquid, dispersion equation, damped oscillations, aperiodic damping

REFERENCES

1. *Bassett A.B.* A Treatise on Hydrodynamics. Vol. 2, Art. 519. London: Deighton, Bell & Co. 1888. 362 p. (Reprinted by Dover, New York, N.Y. 1961.)
2. *Tait P.G.* Note on ripples in a viscous liquid // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1890, vol. 17, pp. 110–114.
3. *Lamb H.* Hydrodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1932.
4. *Sretensky L.N.* Concerning waves on the surface of a viscous fluid // Trudy Tsentral. Aero-Gidrodinam. Inst., 1941, no. 541, pp. 1–34. (in Russian)
5. *Moiseev N.N.* Some questions of hydrodynamics of surface waves // in: Mechanics in the USSR for 50 Years. Vol. 2. Mechanics of Liquid and Gas. Moscow: Nauka, 1970. pp. 55–78.
6. *Levich V.G.* Physicochemical Hydrodynamics. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1962. 700 p.
7. *Wehausen J.V., Laitone E.V.* Surface waves // in: Encyclopedia of Physics. Springer Verlag, 1960. Vol. IX, pp. 446–778.
8. *LeBlond H.H., Mainardi F.* The viscous damping of capillary-gravity waves // Acta Mech., 1987. vol. 68, no. 3–4, pp. 203–222.
9. *Sanochkin Yu.V.* Viscosity effect on free surface waves in fluids // Fluid Dyn., 2000, vol. 35(4), pp. 599–604.
10. *Abrashkin A.A., Bodunova Yu.P.* Spatial standing waves on the surface of viscous fluid // Proc. R.E. Alekseev's NSTU, 2011, no. 2(87), pp. 49–54. (in Russian)
11. *Bazilevskii A.V., Kalinichenko V.A., Rozhkov A.N.* Effect of fluid viscosity on the Faraday surface waves // Fluid Dyn., 2018, vol. 53, no. 6, pp. 750–761.
12. *Bazilevskii A.V., Kalinichenko V.A., Rozhkov A.N.* Viscous regularization of breaking Faraday waves // JETP Lett., 2018, vol. 107, no. 11, pp. 684–689.

EDN: RDNVER
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2022, том 86, № 3, с. 381–393

УДК 532.5

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЦИРКУЛЯЦИИ ВОКРУГ ЦИЛИНДРА, ОБТЕКАЕМОГО ВБЛИЗИ ПЛОСКОСТИ

А. Г. Петров[1,*], Д. В. Маклаков[2,]**

[1] Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
[2] Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия
**e-mail: petrovipmech@gmail.com*
***e-mail: dmaklak@kpfu.ru*

Поступила в редакцию 07.01.2022 г.
После доработки 31.03.2022 г.
Принята к публикации 05.04.2022 г.

Рассматривается плоская задача обтекания кругового цилиндра потенциальным потоком жидкости со скоростью, направленной параллельно плоскости. Циркуляция поля скорости определяется из постулата Гольдштика: максимальная скорость на границе круга должна быть минимальна. Строится точное решение этой задачи. Проводится сопоставление распределения давления на цилиндре и плоскости с экспериментальными данными и численными расчетами.

Ключевые слова: потенциальное течение, циркуляция, круговой цилиндр около плоскости

DOI: 10.31857/S0032823522030092

1. Введение. Плоской задаче потенциального обтекания кругового цилиндра около плоскости посвящено много работ. В монографии [1] показано, что линии тока двух точечных вихрей с противоположными циркуляциями яляются окружностями, а одна из них прямой линией. Таким образом, строится решение задачи о линиях тока циркуляционного обтекания кругового цилиндра около плоскости. Эта задача аналогична эквипотенциальным поверхностям между заряженным цилиндрическим проводником и плоскостью. Более сложной является задача обтекания кругового цилиндра около плоскости. В элементарных функциях строится решение только для случая контакта кругового цилиндра и плоскости. В общем случае задачи обтекания двух и более круговых цилиндров решение строится в виде рядов [2–8]. Интересно, что расход жидкости между круговыми цилиндрами, как показал Лагалли [2, 3], выражается достаточно простой аналитической формулой. Седов Л.И. [9] для задачи о бипланах выразил комплексный потенциал обтекания, через эллиптические функции, из которого можно получить и решение для двух круговых цилиндров.

В задаче обтекания цилиндра около плоскости величина циркуляции остается неопределенной, так как постулат Чаплыгина–Жуковского из-за отсутствия острой кромки здесь неприменим. В данной работе для определения циркуляции принимается минимаксный принцип Гольдштика: максимальное абсолютное значение скорости на поверхности цилиндра должно быть минимально [10]. Приводится [10] следующая аргументация в пользу выдвинутого постулата. “Согласно современной точке зрения циркуляция на крыловом профиле возникает вследствие отрыва и уноса вихря, после чего циркуляция устанавливается такой, чтобы обтекание было безотрывным. В начальной стадии обтекания гладкого профиля также отрываются и уносятся вихри, вследствие чего возникает циркуляция, уменьшающая возможность отрыва. В качестве основной гипотезы можно допустить, что взаимодействие тела с потоком вырабатывает циркуляцию, максимально препятствующую отрыву... Чтобы высказанная гипотеза приняла определенную форму принципа выбора циркуляции, должен быть решен вопрос о том, какая характеристика потока является наиболее адекватной мерой склонности потока к отрыву. Естественной характеристикой подобного рода является максимальное значение скорости на контуре; чем оно выше, тем больше перепад давления и тем более вероятен отрыв, обусловленный действием вязкости при восстановлении давления. Таким образом, в качестве возможного варианта обобщения постулата о циркуляции ниже рассматривается минимаксный вариационный принцип: при реальном обтекании циркуляция принимает такое значение, которое минимизирует максимальную скорость на контуре. Очевидно, что данный принцип в предельном случае крылового профиля дает классический результат, а при симметричном обтекании – нулевую циркуляцию”.

Приняв постулат Гольдштика, можно вычислить скорость на донной поверхности и на круговом цилиндре, а с помощью интеграла Бернулли определить давление на этих поверхностях. Давление может быть определено также из эксперимента или из прямого численного решения уравнений Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса. Сравнение давлений покажет насколько приемлем принятый постулат.

Представлены [11, 12] результаты экспериментального и численного исследования обтекания круглого цилиндра, расположенного на различных высотах над границей плоскости. Изучалось [13, 14] движение цилиндра в потоке между двумя параллельными плоскостями. Развитие неустойчивости равновесия цилиндра приводит к автоколебаниям его между двумя стенками. Этот эффект качественно описывается в [13]. Из-за имеющейся циркуляции возникает аналог силы Жуковского, которая притягивает цилиндр к одной из плоскостей. При касании цилиндра циркуляция и сила Жуковского меняют знак, и цилиндр движется к противоположной стенке. Для некоторых частных случаев движение цилиндра подробно описано [14] с помощью прямого численного решения уравнений Навье–Стокса. Актуальность задачи обтекания кругового цилиндра около плоскости существенно повысилась в связи со строительством трубопроводов по дну водоемов. При течении в зазоре между трубой и дном может возникнуть донное напряжение, превышающее критическое значение, при котором начнется вымывание донной поверхности под трубой. Это может привести к аварии.

В настоящей работе рассматривается плоская задача обтекания кругового цилиндра потенциальным потоком жидкости, со скоростью, направленной параллельно плоскости. Выбор циркуляции из принципа Гольдштика определяет единственное течение, близкое к реальному. Из него можно получить максимальные скорости под цилиндром и, пользуясь теорией русловых процессов [15], определить возможность размыва дна.

2. Постановка задачи. Аналитическое представление комплексного потенциала. Цилиндр радиуса R обтекается слева направо вблизи плоской стенки двумерным установившимся безвихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости. Скорость набегающего потока на бесконечности – U, циркуляция вокруг цилиндра – Γ, расстояние цилиндра от стенки – H. Начало декартовой системы координат расположено на стенке с осью ординат, проходящей через центр O цилиндра (см. рис. 1а).

В физической плоскости введем комплексную переменную $z = x + iy$ и комплексный потенциал течения $W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ – потенциал течения, а $\psi(x, y)$ – функция тока. Для аналитической функции $W(z)$ поставим следующую краевую задачу:

$$\operatorname{Im} W(x) = 0; \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

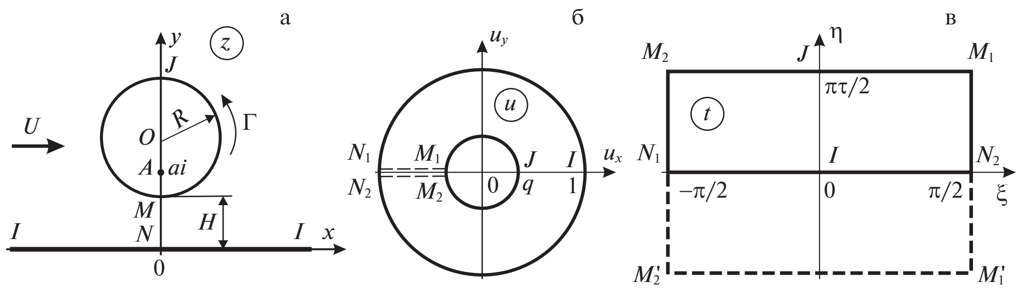

Рис. 1. а) Схема обтекания цилиндра в физической плоскости $z = x + iy$. б) Параметрическая плоскость $u = u_x + iu_y$. в. Параметрическая плоскость $t = \xi + i\eta$.

$$\operatorname{Im} W[iH + R(i + e^{i\sigma})] = Q; \quad 0 \le \sigma < 2\pi \tag{2.2}$$

$$\operatorname{Re}[W(iy - 0] - W(iy + 0)] = \Gamma; \quad 0 \le y \le H \tag{2.3}$$

$$\operatorname{Re} W[i(H + 2R)] = 0, \quad \left|\frac{dW}{dz}\right|_{z\to\infty} = U, \tag{2.4}$$

где Q – подлежащий определению расход жидкости между цилиндром и стенкой, Γ – циркуляция вокруг цилиндра. Следует указать, что условие (2.3) означает, что функция комплексного потенциала испытывает скачок, равный Γ, при переходе справа налево через отрезок MN (рис. 1а). На данном этапе решения задачи считаем, что циркуляция Γ – задана. Первое условие (2.4) введено для того, чтобы краевая задача (2.1)–(2.4) для $W(z)$ имела единственное решение. Из него следует, что потенциал $\varphi(x, y)$ в крайней верхней точке цилиндра обращается в нуль. Второе условие (2.4) означает, что скорость набегающего потока на бесконечности – U.

Отобразим конформно область течения на кольцо в параметрической плоскости u с внешним радиусом единица, а внутренним q (рис. 1б). Конформные отображения $u(z)$ и обратное $z(u)$ имеют вид

$$u = \frac{z - ai}{z + ai} \Leftrightarrow z = ai\frac{1 + u}{1 - u}, \tag{2.5}$$

где

$$a = R\sqrt{(h+1)^2 - 1}, \quad h = H/R, \quad q = h + 1 - \sqrt{(h+1)^2 - 1} \tag{2.6}$$

Отметим, что точка A с комплексной координатой $z = ai$ всегда находится в нижней половине круга: $a \in (H, H + R)$. По величине параметр a равен длине касательной, проведенной из начала координат к обтекаемой окружности. Кроме того, отображения (2.5) – дробнолинейные, и точка $z = ai$ является образом точки $u = 0$ при отображении $z = z(u)$. В плоскости u преобразование инверсии относительно обеих окружностей переводит начало координат в бесконечно удаленную точку $u = \infty$, которая, в свою очередь, переходит в точку $z = -ai$. Следовательно, в плоскости z точка $z = -ai$ будет симметрична точке $z = ai$ как относительно прямой $y = 0$, так и относительно обтекаемой окружности в смысле преобразования инверсии, то есть $(H + R - a)(H + R + a) = R^2$. Из этого соотношения следует первая формула в (2.6).

Разрежем кольцо в плоскости u по отрезку MN и отобразим кольцо с разрезом на прямоугольник в плоскости t (рис. 1в):

$$t = \frac{1}{2i}\ln u = \frac{1}{2i}\ln\frac{z - ai}{z + ai} \Leftrightarrow z = -a\operatorname{ctg} t \tag{2.7}$$

Основание прямоугольника равно π, а высота $\pi|\tau|/2$, где

$$\tau = -\frac{\ln q}{\pi} i \Leftrightarrow q = e^{-\pi|\tau|} \tag{2.8}$$

Кроме того, легко доказать, что параметры h и a выражаются через q так:

$$h = \frac{1}{2}\left(q + \frac{1}{q}\right) - 1, \quad a = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{q} - q\right) \tag{2.9}$$

Из (2.7) следует, что

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dt} \bigg/ \frac{dz}{dt} = \frac{1}{a}\sin^2 t \frac{dW}{dt} \tag{2.10}$$

Функции $\frac{dW}{dz}(t)$ и $\sin^2 t$ являются π-периодическими, поэтому $\frac{dW}{dt}(t)$ также π-периодическая функция. Кроме того, из граничных условий (2.1), (2.2) вытекает, что

$$\operatorname{Im}\frac{dW}{dt}(\xi) = 0, \quad \operatorname{Im}\frac{dW}{dt}(\xi + \pi\tau/2) = 0; \quad \xi \in \mathbb{R}$$

Эти условия позволяют продолжить функцию $\frac{dW}{dz}(t)$ на всю комплексную плоскость $t = \xi + i\eta$ по принципу симметрии Римана–Шварца. Про этом

$$\frac{dW}{dt}(t + \pi) = \frac{dW}{dt}(t), \quad \frac{dW}{dt}(t + \pi\tau) = \frac{dW}{dt}(t)$$

Следовательно, $\frac{dW}{dt}(t)$ – эллиптическая функция с периодами π и $\pi\tau$. В качестве ячейки периодов возьмем прямоугольник с вершинами $-\pi/2 - \pi\tau/2$, $\pi/2 - \pi\tau/2$, $\pi/2 + \pi\tau/2$, $-\pi/2 + \pi\tau/2$. Комплексно сопряженная скорость dw/dz всюду конечна в плоскости $z = x + iy$. Значит, функция $\frac{dW}{dz}(t)$ всюду конечна в прямоугольнике периодов. Функция $\sin^2 t$ имеет в этом прямоугольнике единственный нуль второго порядка в точке $t = 0$. Отсюда и (2.10) заключаем, что $\frac{dW}{dt}(t)$ имеет в прямоугольнике периодов единственный полюс второго порядка в точке $t = 0$, и главная часть разложения в ряд Лорана $\frac{dW}{dt}(t)$ в окрестности $t = 0$ будет A/t^2, где A – постоянная. Так как

$$\lim_{z\to\infty}\frac{dW}{dz}(z) = \lim_{t\to 0}\frac{dW}{dz}(t) = U,$$

из (2.10) выводим, что $A = Ua$.

Функции $\frac{dW}{dt}(t)$ и $W(t)$ построим с помощью теории тэта-функций Якоби ([16], гл. 21). Четыре тэта-функции определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(t,q) &= 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}q^{(n-1/2)^2}\sin(2n-1)t \\
\vartheta_2(t,q) &= 2\sum_{n=1}^{\infty}q^{(n-1/2)^2}\cos(2n-1)t \\
\vartheta_3(t,q) &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\cos 2nt \\
\vartheta_4(t,q) &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nt
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Таблица 1. Таблица приведения для тэта-функций

t	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	ϑ_4
$\pm\pi$	$-\vartheta_1$	$-\vartheta_2$	ϑ_3	ϑ_4
$\pm\pi\tau$	$-M\vartheta_1$	$M\vartheta_2$	$M\vartheta_3$	$-M\vartheta_4$
$\pm\pi/2$	$\pm\vartheta_2$	$\mp\vartheta_1$	ϑ_4	ϑ_3
$\pm\pi\tau/2$	$\pm iN\vartheta_4$	$N\vartheta_3$	$N\vartheta_2$	$\pm iN\vartheta_1$

Как видно из формул (2.11), при $q \ll 1$ эти функции являются быстро сходящимися рядами. Тэта-функции входят в ядро пакета Wolfram Mathematica [17] и их вычисление не представляет никаких затруднений. В дальнейшем для краткости параметр q опускаем и будем писать $\vartheta_1(t)$ вместо $\vartheta_1(t,q)$, кроме того, как и в [16], условимся, что тэта-функция без аргумента, означает, что аргумент равен нулю, например, $\vartheta_2 = \vartheta_2(0)$, $\vartheta_1' = \vartheta_1'(0)$.

Следует отметить, что тэта-функции не являются двоякопериодическими, а величины π и $\pi\tau$ называют квазипериодами. Поэтому при добавлении к аргументу t периодов π и $\pi\tau$ и полупериодов $\pi/2$ и $\pi\tau/2$ тэта-функции переходят друг в друга и получают множители периодичности, аналогично формулам приведения для тригонометрических функций. Таблица приведения для тэта-функций приведена ниже.

В таблице 1 множители периодичности M и N принимают значения

$$M = q^{-1}e^{\mp 2it}, \quad N = q^{-1/4}e^{\mp it},$$

где верхний знак минус берется при прибавлении, а нижний плюс – при вычитании $\pi\tau$ и $\pi\tau/2$.

Следуя ([16], с. 350), выводим

$$\frac{dW}{dt} = Uaf(t) + B, \quad f(t) = -\frac{d}{dt}\frac{\vartheta_1'(t)}{\vartheta(t)} \tag{2.12}$$

Все тэта-функции на действительной оси принимают действительные значения, поэтому в (2.12) константа B – действительная. Циркуляция $\Gamma = W(t+\pi) - W(t)$. С помощью формул приведения устанавливаем, что функция $\vartheta_1'(t)/\vartheta_1(t)$ является π-периодической. Интегрируя (2.12), находим $B = \Gamma/\pi$ и

$$W(t) = UaF(t) + \frac{\Gamma}{\pi}t, \quad F(t) = -\frac{\vartheta_1'(t)}{\vartheta_1(t)} \tag{2.13}$$

Расход жидкости между цилиндром и твердой стенкой

$$Q = \operatorname{Im}\left[W(\xi + \pi\tau/2) - W(\xi)\right], \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \xi \neq 0$$

С помощью формул приведения для тэта-функций устанавливаем, что

$$F(t + \pi\tau/2) = -\frac{\vartheta_1'(t+\pi\tau/2)}{\vartheta_1(t+\pi\tau/2)} = i - \frac{\vartheta_4'(t)}{\vartheta_4(t)}$$

Отсюда и (2.6), (2.8) выводим

$$Q = Ua + \Gamma|\tau|/2 = Ua - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\left(h + 1 - \sqrt{(h+1)^2 - 1}\right)$$

Эта формула в несколько ином виде выведена Лагалли [2].

Теперь согласно (2.7) можем записать в явном виде функцию комплексного потенциала

$$W(z) = UaF\left(\frac{1}{2i}\ln\frac{z - ia}{z + ia}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\frac{z - ia}{z + ia} \tag{2.14}$$

Отметим, что последний член в формуле (2.14) – это потенциал обтекания двух вихрей противоположной интенсивности Γ и $-\Gamma$, расположенных в точках $z = ia$ и $z = -ia$, соответственно.

3. Комплексно сопряженная скорость. Максимальная и минимальная циркуляции. Как видно из (2.10) и (2.13), комплексно сопряженная скорость $\frac{dW}{dz}(t)$ выражается через эллиптическую функцию $f(t)$, вычисление которой требует вычисления первой и второй производной от функции $\vartheta_1(t)$. Получим два других представления этой функции, не содержащие производных. Введем следующие константы:

$$\beta_1 = \frac{(\vartheta_1')^2}{\vartheta_3^2},\quad \gamma_1 = \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3},\quad \beta_2 = \frac{(\vartheta_1')^2}{\vartheta_4^2},\quad \gamma_2 = \frac{\vartheta_4''}{\vartheta_4} \tag{3.1}$$

и докажем, что

$$f(t) = \beta_1\frac{\vartheta_3^2(t)}{\vartheta_1^2(t)} - \gamma_1 \quad \text{и} \quad f(t) = \beta_2\frac{\vartheta_4^2(t)}{\vartheta_1^2(t)} - \gamma_2 \tag{3.2}$$

В самом деле, с помощью формул приведения убеждаемся, что функции $\beta_1\vartheta_3^2(t)/\vartheta_1^2(t)$ и $\beta_2\vartheta_4^2(t)/\vartheta_1^2(t)$ являются двоякопериодическими с периоодами π и $\pi\tau$. Их главные части разложений в ряд Лорана в окрестности точки $t = 0$ одинаковы и равны $1/t^2$. Поэтому согласно ([16], с. 350)

$$\beta_1\frac{\vartheta_3^2(t)}{\vartheta_1^2(t)} = f(t) + B_1,\quad \beta_2\frac{\vartheta_4^2(t)}{\vartheta_1^2(t)} = f(t) + B_2,$$

где B_1 и B_2 – постоянные. Раскладывая левые и правые части этих выражений в окрестности $t = 0$, находим, что $B_1 = \gamma_1$ и $B_2 = \gamma_2$, откуда и следуют формулы (3.2).

Функции $\vartheta_3(t)$ и $\vartheta_4(t)$ имеют нули первого порядка в точках $t = \pm\pi/2 + \pi\tau/2$ и $t = \pi\tau/2$, соответственно. Поэтому, если рассмотреть течения с комплексно сопряженными скоростями

$$f_1(t) = U\sin^2 t\frac{\beta_1\vartheta_3^2(t)}{\vartheta_1^2(t)} \quad \text{и} \quad f_2(t) = U\sin^2 t\frac{\beta_2\vartheta_4^2(t)}{\vartheta_1^2(t)},\quad t = \frac{1}{2i}\ln\frac{z - ai}{z + ai}, \tag{3.3}$$

то эти течения будут циркуляционными. У первого обе критические точки сольются и будут находиться в крайней нижней точке цилиндра, а у второго – в крайне верхней точке. Соответствующие циркуляции будут

$$\Gamma_{\min} = Ua\gamma_1\pi,\quad \Gamma_{\max} = Ua\gamma_2\pi, \tag{3.4}$$

где $\Gamma_{\min}$ и $\Gamma_{\max}$ – минимально и максимально возможные из циркуляций, при которых критические точки располагаются на цилиндре.

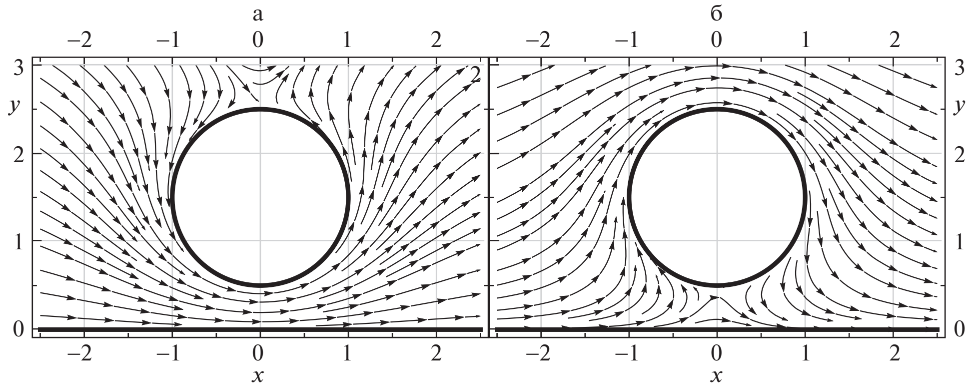

Рис. 2. Линии тока при $h = 0.2$. а) $\Gamma_{\max} = 30.1268$, б) $\Gamma_{\min} = -7.28855$.

Замечаем, что

$$\sin^2 t = \left[\sin\left(\frac{1}{2i}\ln\frac{z-ai}{z+ai}\right)\right]^2 = \frac{a^2}{z^2+a^2}$$

Теперь с помощью формулы (2.10) записываем комплексно сопряженную скорость в явном виде:

$$\frac{dW}{dz}(z) = U\,\frac{a^2}{z^2+a^2}\,f\left(\frac{1}{2i}\ln\frac{z-ai}{z+ai}\right) + \frac{\Gamma}{\pi}\frac{a}{z^2+a^2} \tag{3.5}$$

Здесь для вычисления функции $f(t)$ можно использовать любую из формул (3.2).

В дальнейшем, при проведении числовых расчетов всегда полагаем, что $U = 1$ и $R = 1$. Отсюда $h = H$, а величины циркуляций относятся к UR.

На рис. 2 показаны линии тока $\Psi(x, y) = \mathrm{Im}(W(x + iy)) = \mathrm{const}$ при $h = 0.2$ для $\Gamma = \Gamma_{\max}$ (а) и $\Gamma = \Gamma_{\min}$ (б).

При заданной циркуляции подъемная сила L, действующая на цилиндр, вычисляется по формуле Чаплыгина. Для коэффициента подъемной силы $C_L = 2L/(\rho U^2 R)$ получим

$$C_L = \mathrm{Im}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{dW}{dz}_{|z=(1+h)i+e^{i\sigma}}\right]^2 e^{i\sigma}d\sigma$$

4. Определение циркуляции по принципу Гольдштика. Пусть циркуляция $\Gamma = \alpha\Gamma_{\min} + (1-\alpha)\Gamma_{\max}$, $\alpha \in [0,1]$. Ясно, что тогда $\Gamma \in [\Gamma_{\min}, \Gamma_{\max}]$, а комплексно сопряженная скорость течения с такой циркуляцией имеет вид

$$\frac{dw}{dz} = \alpha f_1(t) + (1-\alpha)f_2(t), \quad t = \frac{1}{2i}\ln\frac{z-ai}{z+ai},$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – функции, введенные формулами (3.3). Согласно принципу Гольдштика максимальная скорость на профиле должна бы быть минимальной. Это означает, что необходимо найти параметр $\alpha \in [0,1]$ из условий

$$\max_{\xi\in[0,\pi/2]}\left|\alpha(f_1(\xi + \pi\tau/2) + (1-\alpha)f_2(\xi + \pi\tau/2)\right| \to \min; \quad \alpha \in [0,1]$$

Здесь в силу симметрии рассматриваем только левую половину окружности. Из равенств (2.8) и (2.9) следует, что

$$|\sin^2(\xi + \pi\tau/2)| = h/2 + \sin^2\xi; \quad \xi \in \mathbb{R}$$

Использовав формулы приведения для тэта-функций, придем к следующей задаче

$$\max_{\xi\in[0,\pi/2]} |\alpha V_1(\xi) + (1-\alpha)V_2(\xi)| \to \min; \quad \alpha \in [0,1], \tag{4.1}$$

где

$$V_1(\xi) = -U\left(\frac{h}{2} + \sin^2\xi\right)\frac{\vartheta_2^2(\xi)}{\vartheta_4^2(\xi)}, \quad V_2(\xi) = U\left(\frac{h}{2} + \sin^2\xi\right)\frac{\vartheta_1^2(\xi)}{\vartheta_4^2(\xi)}$$

Функции $|V_1(\xi)|$ и $V_2(\xi)$ определяют распределения скоростей по окружности для минимальной $\Gamma_{\min}$ и максимальной $\Gamma_{\max}$ циркуляций соответственно. Обозначим $V_{1\max} = -V_1(0)$, $V_{2\max} = V_2(\pi/2)$. С помощью тождества $\vartheta_{1'} = \vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4$ (см. [16], с. 345) и формул приведения найдем

$$V_{1\max} = U\frac{h}{2}\vartheta_2^4, \quad V_{2\max} = U\left(\frac{h}{2} + 1\right)\vartheta_2^4$$

Обе функции $V_1(\xi)$ и $V_2(\xi)$ являются монотонно возрастающими на отрезке $[0, \pi/2]$. Функция $V_1(\xi)$ возрастает от $-V_{1\max}$ до нуля, а $V_2(\xi)$ от нуля до $V_{2\max}$. Следовательно при $\alpha \in (0,1)$ функция $\alpha V_1(\xi) + (1-\alpha)V_2(\xi)$ также монотонно возрастает и принимает на концах отрезка значения разных знаков. Отсюда вытекает, что максимум модуля этой функции обязательно достигается на концах отрезка $[0, \pi/2]$. Минимаксная задача (4.1) упрощается и принимает вид:

$$\max[\alpha V_{1\max}, (1-\alpha)V_{2\max})] \to \min; \quad \alpha \in [0,1] \tag{4.2}$$

Отметим, что $V_{1\max}$ и $V_{2\max}$ – максимальные скорости на поверхности цилиндра с минимальной $\Gamma_{\min}$ и максимальной $\Gamma_{\max}$ циркуляциями соответственно. Кроме того, эти величины определяют скорости в крайней верхней точке цилиндра J и в крайней нижней нижней точке M:

$$V_J = \alpha V_{1\max}, \quad V_M = (1-\alpha)V_{2\max}$$

Решение задачи (4.2) достигается, когда

$$\alpha V_{1\max} = (1-\alpha)V_{2\max} \Rightarrow \alpha = \frac{V_{2\max}}{V_{1\max} + V_{2\max}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1+h}\right)$$

Циркуляция, определенная по принципу Гольдштика, имеет вид

$$\Gamma_G = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{\min} + \Gamma_{\max} + \frac{\Gamma_{\min} - \Gamma_{\max}}{h+1}\right) \tag{4.3}$$

При такой циркуляции скорости в верхней и нижней точках цилиндра равны между собой:

$$V_J = V_M = \frac{U}{4}\left(h + 1 - \frac{1}{h+1}\right)\vartheta_2^4$$

На рис. 3 показаны линии тока $\Psi(x,y) = \mathrm{Im}[W(x+iy)] = \mathrm{const}$ при $h = 0.2$ для $\Gamma = \Gamma_G$.

5. Асимптотические формулы для $0 < h \le 1$. Когда расстояние цилиндра от стенки $h \to 0$, радиус внутренней окружности $q \to 1$, поэтому при малых h ряды для тэта-функций (2.11) утрачивают свойство быстрой сходимости. Чтобы исправить эту ситуа-

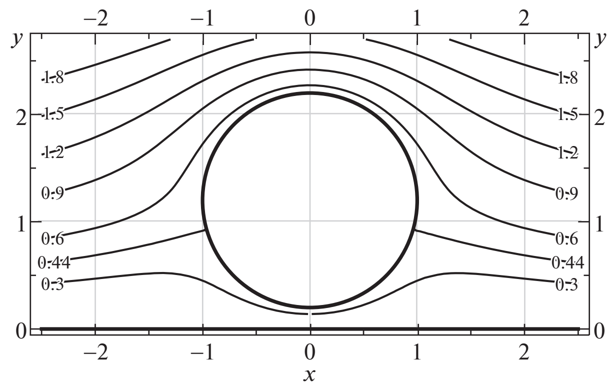

Рис. 3. Линии тока для обтекания цилиндра с циркуляцией $\Gamma_G = -2.27173$ при $h = 0.2$ ($Q = 0.438305$).

цию, воспользуемся мнимым преобразованием Якоби ([16], с. 351). Для рассматриваемого прямоугольника периодов эти преобразования приобретают вид:

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(t,q) &= -iA\exp(-t^2/\delta)\vartheta_1(i\pi t/\delta, q_1)\\
\vartheta_2(t,q) &= A\exp(-t^2/\delta)\vartheta_4(i\pi t/\delta, q_1)\\
\vartheta_3(t,q) &= A\exp(-t^2/\delta)\vartheta_3(i\pi t/\delta, q_1)\\
\vartheta_4(t,q) &= A\exp(-t^2/\delta)\vartheta_2(i\pi t/\delta, q_1),
\end{aligned} \tag{5.1}$$

где $\delta = -\ln q$, $q_1 = \exp(-\pi^2/\delta)$, $A = \sqrt{\pi/\delta}$.

Замечаем, что если $h \le 1$, то $q_1 \le 5.56277\times 10^{-4}$. Теперь в формулах (2.12), (2.13) и (3.1) преобразуем тэта-функции с помощью (5.1). Получаем новые представления для $f(t)$, $F(t)$, γ_1 и γ_2, которые раскладываем по степеням q_1 до членов q_1^2 включительно. В результате

$$f(t) = \delta^{-2}\left[2\delta + \pi^2\operatorname{csch}^2(\pi t/\delta) + 8\pi^2\operatorname{ch}(2\pi t/\delta)q_1^2\right] \tag{5.2}$$

$$F(t) = \delta^{-1}\left[2t - \pi\operatorname{cth}(\pi t/\delta) + 4\pi\operatorname{sh}(2\pi t/\delta)q_1^2\right] \tag{5.3}$$

$$\gamma_1 = -\frac{2}{\delta} + \frac{8\pi^2 q_1}{\delta^2} - \frac{16\pi^2 q_1^2}{\delta^2}, \quad \gamma_2 = \frac{\pi^2 - 2\delta}{\delta^2} + \frac{8\pi^2 q_1^2}{\delta^2} \tag{5.4}$$

Теперь можно в формулах (2.14), (3.4) и (3.5) заменить $F(t)$, γ_1, γ_2 и $f(t)$ на их приближенные аналоги. При $h \le 1$ соотношения (5.2)–(5.4) фактически дают точное аналитическое решение задачи, выраженное в элементарных функциях. Наихудшие по точности результаты получаются при $h = 1$. Представление о точности приближенных формул при $h \in (0, 2.5)$ дает таблица 2.

С помощью формул (2.14) и (5.3) предельным переходом при $h \to 0$ для любой конечной циркуляции Γ получим

$$\lim_{h\to 0}\frac{dW}{dz}(z) = \pi R U \operatorname{cth}\frac{\pi R}{z}$$

Таблица 2. Сравнение точных и приближенных характеристик течения при различных h

Характ.	Γ_G	Q	C_L	V_J	V_M	V_N
h				0.7		
Точн.	−0.701466	1.24937	0.865393	2.17162	2.17162	1.62772
Прибл.	−0.701466	1.24937	0.865395	2.17162	2.17162	1.62772
h				1		
Точн.	−0.419165	1.64419	0.492318	2.12448	2.12448	1.46697
Прибл.	−0.419166	1.64419	0.492340	2.12448	2.12446	1.46696
h				2.5		
Точн.	−0.0748012	3.33119	0.0792842	2.04080	2.04080	1.15987
Прибл.	−0.0749209	3.33115	0.0823604	2.04081	2.03911	1.15910

Этот результат совпадает с решением, приведенным в монографии [1] при $h = 0$. Кроме того, если циркуляция определяется по принципу Гольдштика, то

$$\lim_{h\to0}\Gamma_G = -2\pi RU, \quad \lim_{h\to0}V_J = \lim_{h\to0}V_M = \lim_{h\to0}V_N = U\pi^2/4,$$

если же $\Gamma = 0$, то

$$\lim_{h\to0}V_J = U\pi^2/4, \quad \lim_{h\to0}V_M = \lim_{h\to0}V_N = +\infty$$

Распределения скорости $V_b(x)$ на плоскости $y = 0$, рассчитанные по точным и приближенным формулам для значений зазора

$$h = 0.01,\ 0.05,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.5,\ 1,\ 1.5,\ 2.5$$

представлены на рис. 4 а. Для расчета использовались формулы (3.5) и (4.3), но точные значения $f(t)$ и Γ находились с помощью (3.2) и (3.1), а приближенные – с помощью (5.2) и (5.4), соответственно. Как видно из рисунка, точные и приближенные графики неразличимы. Кроме того, скорость $V_b(x)$ имеет наибольшее значение в точке $x = 0$. С увеличением зазора максимальная скорость монотонно убывает.

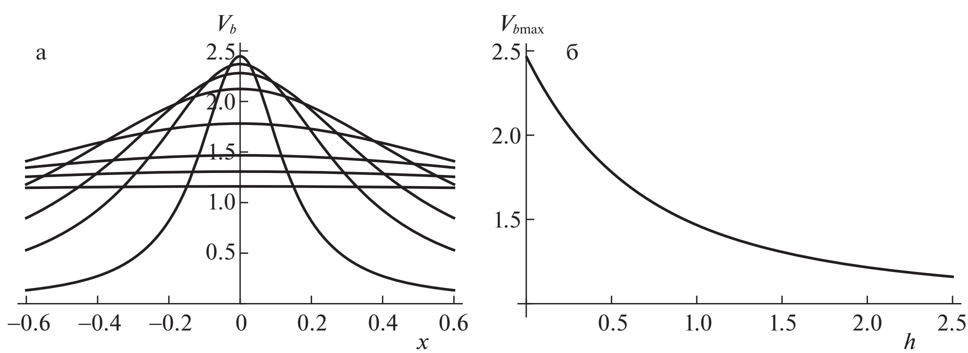

Рис. 4. а) Графики скоростей на плоскости при различных h. б) Зависимость максимального значения скорости на плоскости от h.

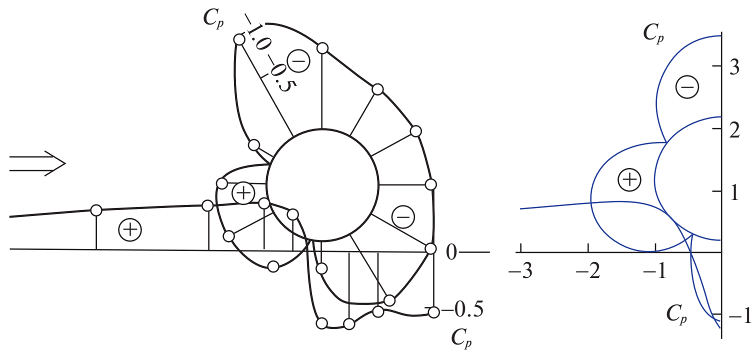

Рис. 5. Эпюры давлений на плоскости и на поверхности цилиндра при $h = 0.2$.

С помощью соотношений (3.5), (5.2) и (5.4) выводится приближенная формула для максимальных значений скорости на дне

$$V_{b\max} = U\frac{\pi^2[8(3h+4)q_1 + h]}{2\delta^2(h+1)} \tag{5.5}$$

Ее можно получить, из формулы (3.5), подставив в нее значение аргумента $z = 0 \Rightarrow t = \pi/2$

$$V_{b\max} = \frac{dW}{dz}(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\Gamma_G}{a\pi}$$

Правую часть с помощью (3.4), (5.2) и (5.4) следует выразить через параметры δ и q_1 и в асимптотических разложениях по δ и q_1 учесть только главные члены.

Полученная формула при $h = 2.5$ дает $V_{b\max} = 1.15903$, а для меньших значений h все значащие цифры, полученные по этой формуле, совпадают с приведенными в таблице 2.

На рис. 4б показана зависимость от h максимального значения скорости $V_{b\max} = V_b(0)$, рассчитанная по точным формулам и приближенной формуле (5.5). Как и на рис. 4а, графики полностью сливаются.

Для безразмерной зависимости $V_{b\max}(h)$ удобна интерполяционная формула $V_{b\max} = \frac{2.47 + 1.144h}{1 + 1.44h}$. По этой формуле $V_{b\max}(0.7) = 1.629$, $V_{b\max}(1) = 1.481$, $V_{b\max}(2.5) = 1.159$, а по данным таблицы 2: 1.627, 1.467 и 1.159.

6. Обсуждение результатов. Выбор циркуляции по постулату Гольдштика приводит к обтеканию кругового цилиндра, при котором распределение давления по закону Бернулли на наветренной стороне кругового цилиндра и плоскости качественно согласуются с экспериментом. Экспериментальные и расчетные значения максимальных скоростей на плоскости и круговом цилиндре за счет вязкости примерно в полтора раза меньше приведенных выше по модели идеальной жидкости. С учетом коэффициента для скорости на окружности $k = 0.65$ и на дне $k = 0.7$, как видно из рис. 5, имеется даже и количественное согласие. На нем слева приведены экспериментально найденные [11] эпюры коэффициента давления C_p на оси x и окружности при зазоре между осью x и границей круга $h = 0.2$. Число Рейнольдса было достаточно большим, порядка 10^4. Справа приведены эпюры давления $C_p = 1 - (kV)^2$ на окружности и оси x.

Для других достаточно малых зазоров минимальное давление под цилиндром меняется в небольших пределах. Это соответствует малому изменению максимальной скорости в нижней точке цилиндра. По приведенной теории, как показывает рис. 3 в диапазоне относительных зазоров $h \in (0, 0.5)$ отношение максимальной скорости под цилиндром к скорости на бесконечном удалении от него изменяется в небольших пределах от 1.8 до 2.4.

Работа выполнена по теме государственного задания (госрегистрации АААА-А20-120011690138-6), по теме РФФИ № 21-57-53019 ГФЕН_а и за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета (“ПРИОРИТЕТ-2030”).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Милн-Томсон Л.М.* Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 655 с.
2. *Lagally M.* The frictionless current in the outer areas of double circuits // Z. Angew. Math. Mech. 1929. V. 9. P. 299–305.
3. *Lagally M.* The frictionless flow in the region around two circles // NACA Technic. Memor. No. 626. 1931.
4. *Мазур В.Ю.* Движение кругового цилиндра вблизи вертикальной стенки // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 3. С. 75–79.
5. *Wang Q.X.* Interaction of two circular cylinders in inviscid flow // Phys. Fluids. 2004. V. 16. P. 4412–4425.
6. *Crowdy D.G.* Analytical solution for uniform potential flow past multiple cylinders // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2006. V. 25. P. 459–470.
7. *Crowdy D.G., Surana A., Yick K.-Y.* The irrotational motion generated by two planar stirrers in inviscid fluid // Phys. Fluids. 2007. V. 19. P. 018103.
8. *Alassar R.S., El-Gebeily M.A.* Inviscid flow past two cylinders // J. Fluids Engng. Trans. ASME. 2009. V. 131.
9. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Физматлит, 1980. 448 с.
10. *Гольдштик М.А., Ханин В.М.* Взаимодействие цилиндра со свободной поверхностью и струей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 5. С. 50–58.
11. *Bearman P.W., Zdravkovich M.M.* Flow around a circular cylinder near a plane boundary // J. Fluid Mech. 1978. V. 89. Pt. 1. P. 33–47.
12. *Price S.J., Sumner D., Smith J.G., Leong K., Paigdoussis M.P.* Flow visualization around a circular cylinder near to a plane wall // J. Fluids&Struct. 2002. V. 16(2.2). P. 175–191.
13. *Kharlamov A.A.* Modeling of transverse self-oscillations of a circular cylinder in an incompressible fluid flow in a plane channel with circulation // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2012. V. 53(2.1). P. 38–42.
14. *Andronov P.R., Dynnikov Y.A., Dynnikova G.Ya., Guvernyuk S.V.* Flow-induced oscillations of circular cylinder in a narrow channel // Aerosp. Sci.&Technol. 2019. V. 93. P. 105348.
15. *Петров А.Г., Потапов И.И.* Избранные задачи русловых процессов. М.: Ленанд, 2019. 244 с.
16. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Ч. 2. М.: ГИФМЛ, 1963. 515 с.
17. *Wolfram S.* The Mathematica Book. New York: Wolfram Media, 2003.

On the Determination of Circulation for a Flow around a Cylinder near a Plane Wall

A. G. Petrov[a,#] and D. V. Maklakov[b,##]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*
[b] *N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, Kazan, Russia*
[#] *e-mail: petrovipmech@gmail.com*
[##] *e-mail: dmaklak@kpfu.ru*

A two-dimensional problem of the potetial flow around a circular cylinder near a plane wall with an incident velocity directed parallel to the wall is considered. The circulation of the velocity field is determined from Goldschtick’s postulate: the maximum velocity at the boundary of the circle should be minimal. An exact solution to this problem is being constructed.

The pressure distribution on the cylinder and wall is compared with experimental data and numerical calculations.

Keywords: potential flow, circulation, circular cylinder near a plane wall

REFERENCES

1. *Miln-Thomson L.M.* Theoretical Hydrodynamics. London: Macmillan, 1960.
2. *Lagally M.* The frictionless current in the outer areas of double circuits // Z. Angew. Math. Mech., 1929, vol. 9, pp. 299–305.
3. *Lagally M.* The frictionless flow in the region around two circles // NACA Technic. Memor. No. 626. 1931.
4. *Mazur V.Yu.* Motion of a circular cylinder near a vertical wall // Fluid Dyn., 1966, vol. 1, no. 3, pp. 49–51.
5. *Wang Q.X.* Interaction of two circular cylinders in inviscid flow // Phys. Fluids, 2004, vol. 16, pp. 4412–4425.
6. *Crowdy D.G.* Analytical solution for uniform potential flow past multiple cylinders // Eur. J. Mech. B/Fluids, 2006, vol. 25, pp. 459–470.
7. *Crowdy D.G., Surana A., Yick K.-Y.* The irrotational motion generated by two planar stirrers in inviscid fluid // Phys. Fluids, 2007, vol. 19, pp. 018103.
8. *Alassar R.S., El-Gebeily M.A.* Inviscid flow past two cylinders // J. Fluids Engng. Trans. ASME, 2009, vol. 131.
9. *Sedov L.I.* Plane Problems of Hydrodynamics and Aerodynamics. Moscow: Nauka, 1980.
10. *Gol'dshtik M.A., Khanin V.M.* Interaction of a cylinder with a free surface and a jet // Fluid Dyn., 1977, vol. 12, no. 5, pp. 683–690.
11. *Bearman P.W., Zdravkovich M.M.* Flow around a circular cylinder near a plane boundary // J. Fluid Mech., 1978, vol. 89, Pt. 1, pp. 33–47.
12. *Price S.J., Sumner D., Smith J.G., Leong K., Paigdoussis M.P.* Flow visualization around a circular cylinder near to a plane wall // J. Fluids&Struct., 2002, vol. 16(2.2), pp. 175–191.
13. *Kharlamov A.A.* Modeling of transverse self-oscillations of a circular cylinder in an incompressible fluid flow in a plane channel with circulation // J. Appl. Mech. Techn. Phys., 2012, vol. 53(2.1), pp. 38–42.
14. *Andronov P.R., Dynnikov Y.A., Dynnikova G.Ya., Guvernyuk S.V.* Flow-induced oscillations of circular cylinder in a narrow channel // Aerosp. Sci.&Technol., 2019, vol. 93, pp. 105348.
15. *Petrov A.G., Potapov I.I.* Selected Problems of Riverbed Processes. Moscow: Lenand, 2019. 244 p.
16. *Whittaker E.T., Watson G.N.* A Course of Modern Analysis. Cambridge: Univ. Press, 1927.
17. *Wolfram S.* The Mathematica Book. N.Y.: Wolfram Media, 2003.

EDN: LLPWJY
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА **2022, том 86, № 3, с. 394–403**

УДК 539.3

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЧАСТИЧНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ

© 2022 г. Н. Б. Золотов[1], Д. А. Пожарский[1,*]

[1] *Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия*
**e-mail: pozharda@rambler.ru*

Поступила в редакцию 03.03.2022 г.
После доработки 29.03.2022 г.
Принята к публикации 05.04.2022 г.

Рассматриваются две периодические контактные задачи с неизвестными областями контакта о бесконечной прямолинейной цепочке одинаковых жестких штампов на упругом полупространстве. Часть поверхности полупространства в виде полуплоскости находится в условиях скользящей или жесткой заделки, что позволяет получить корректные интегральные уравнения относительно контактного давления. Учитываются силы трения Кулона в направлении перпендикулярном границе закрепленной полуплоскости. Для решения задач применяется метод нелинейных интегральных уравнений, позволяющий одновременно определить область контакта и контактные давления. Рассчитаны механические характеристики, изучен переход от дискретной к непрерывной области контакта бесконечной длины.

Ключевые слова: периодический контакт, упругое полупространство, интегральные уравнения

DOI: 10.31857/S0032823522030122

Большинство публикаций в области периодического контакта посвящено плоским задачам [1, 2]. Для исследования пространственных периодических контактных задач для круговых инденторов разработан метод локализации [3, 4]. Рассматривались двоякопериодические контактные задачи [5–7]. Анализировались эффекты трения, износа, сцепления и адгезии при периодическом контакте упругих тел [8–10]. Изучалась периодическая система сферических инденторов на вязкоупругом полупространстве [11]. Для решения трехмерных периодических контактных задач применялись регулярный асимптотический метод [5, 12], численный метод быстрого преобразования Фурье с включением эффекта перколяции (слияния соседних областей контакта) [7], а также разработанный Б.А. Галановым [13] метод нелинейных граничных интегральных уравнений при заранее неизвестных областях контакта [12].

Интегральное уравнение трехмерной контактной задачи о прямолинейной периодической цепочке штампов на упругом полупространстве некорректно, поскольку ядро представляется расходящимся рядом. В настоящей статье для получения корректного интегрального уравнения предлагается фиксировать часть границы полупространства скользящей или жесткой заделкой с введением дополнительной линии раздела граничных условий, которая параллельна оси цепочки. В отличие от рассмотренных ранее аналогичных задач (несжимаемый клин с жестко заделанной гранью [12], полупространство без трения [2]) учитываются силы трения Кулона, действующие перпендикулярно границе зоны фиксации при произвольном коэффициенте Пуассона. Более того, привлекая аппарат обобщенных функций, можно показать, что для

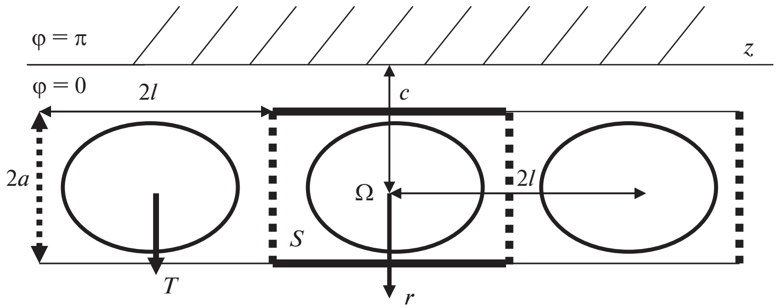

Рис. 1. Неизвестные области контакта содержатся в заданных прямоугольниках. Слияние областей возможно на точечных линиях. Ось z – линия раздела.

трехмерного клина скользящая заделка одной грани обеспечивает корректность интегрального уравнения периодической задачи для линейной цепочки на другой грани только для случая полупространства. Это связано с тем, что символ ядра должен быть типа тангенса гиперболического. Показано, что переход от дискретного к непрерывному пространственному линейно-периодическому контакту связан с образованием новых интегрируемых особенностей ядра на линии перехода.

1. Постановка задач. Изучим квазистатические периодические контактные задачи о линейной цепочке одинаковых жестких штампов (период $2l$), внедренных в поверхность упругого полупространства на величину δ и начинающих достаточно медленно двигаться без перекоса перпендикулярно оси цепочки. В цилиндрических координатах r, φ, z полупространство описывается неравенствами $r > 0$, $0 \le \varphi \le \pi$, $|z| < \infty$. Вне области контакта, расположенной на полуплоскости $\varphi = 0$, часть поверхности полупространства в виде полуплоскости $\varphi = \pi$ подчинена условиям скользящей или жесткой заделки (задачи А и Б соответственно). Граница закрепленной полуплоскости параллельна оси цепочки и удалена от нее на расстояние c (рис. 1). Пусть штампы достаточно вытянуты вдоль оси цепочки, поэтому можно приближенно считать, что силы трения коллинеарны направлению движения (и направлены против движения). Задачи симметричны по координате z (ось z направлена по линии раздела граничных условий). К штампам приложены нормальные силы P на расстоянии H от линии раздела и касательные силы $T = \mu P$ (μ – коэффициент трения Кулона). Предполагается, что неизвестные области контакта априори содержатся в заданных соприкасающихся прямоугольниках со сторонами $2l$ и $2a$ (рис. 1). В прямоугольнике, содержащем начало координат и область контакта Ω, форма основания штампа описывается функцией $f(r,z)$, которая продолжается периодическим образом по z с периодом $2l$. Для определенности далее берем

$$f(r,z) = \frac{(r-c)^2}{2R_1} + \frac{z^2}{2R_2} \quad (R_1 < R_2) \tag{1.1}$$

Граничные условия контактных задач имеют вид (Ω^* – объединенная область контакта; r, φ, z – цилиндрические координаты)

$$\begin{gathered}
\varphi = 0\colon u_\varphi = \delta - f(r,z), \quad \tau_{r\varphi} = \mu\sigma_\varphi, \quad \tau_{\varphi z} = 0, \quad (r,z) \in \Omega^* \\
\sigma_\varphi = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0, \quad (r,z) \notin \Omega^* \\
\text{А)} \quad \varphi = \pi\colon u_\varphi = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0 \\
\text{Б)} \quad \varphi = \pi\colon u_\varphi = u_r = u_z = 0
\end{gathered} \tag{1.2}$$

При заданных параметрах упругости G (модуль сдвига), ν (коэффициент Пуассона), величинах a, c, l, δ, μ и функции $f(r,z)$ требуется определить область контакта Ω и контактное давление $q(r,z) = -\sigma_\varphi(r,0,z)$, $(r,z) \in \Omega$, затем при использовании интегральных условий равновесия штампов могу быть найдены величины P и H.

2. Интегральные уравнения. Упругое полупространство с закрепленной полуплоскостью является частным случаем трехмерного клина с углом раствора π, для которого в известных функциях Грина [14][1] (а также в ядрах интегральных уравнений соответствующих контактных задач) исчезают интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Используя эти функции для условий (1.2) ([14], с. 128), принцип суперпозиции и периодичность контактных задач, относительно контактного давления получим интегральное уравнение ($\theta = G/(1-\nu)$)

$$\iint\limits_{\Omega} q(x,y)K(x,y,r,z)dxdy = 2\pi\theta[\delta - f(r,z)], \quad (r,z) \in \Omega \tag{2.1}$$

с ядром в форме

$$K(x,y,r,z) = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{sh}(\pi u)W(u)K_{iu}(\beta r)\left[K_{iu}(\beta x) + \mu_*\int_0^\infty W_1(t)\frac{\mathrm{sh}(\pi t)K_{it}(\beta x)dt}{\mathrm{ch}(\pi t) - \mathrm{ch}(\pi u)}\right]\times$$
$$\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\cos(\beta(z - y + 2lk))dud\beta$$

$$\mu_* = \mu\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \tag{2.2}$$

$$\text{А)} \quad W(u) = \mathrm{th}(\pi u), \quad W_1(t) = \mathrm{cth}(\pi t)$$
$$\text{Б)} \quad W(u) = \frac{2\kappa\,\mathrm{sh}(2\pi u)}{2\kappa\,\mathrm{ch}(2\pi u) + \kappa^2 + 1}, \quad \kappa = 3 - 4\nu, \quad W_1(t) = \mathrm{th}(\pi t)$$

Здесь $K_{iu}(r)$ – цилиндрическая функция Бесселя. Отметим, что символы $W(u)$ и $W_1(u)$ возникают также в ядре интегрального уравнения плоских контактных задачах с трением о действии одного штампа на упругую полуплоскость, часть границы которой (полуось) находится в условиях скользящей или жесткой заделки ([14], с. 31):

$$K(x,r) = \int_0^\infty \frac{W(u)}{u}\cos\left(u\ln\frac{r}{x}\right)du - \mu_*\int_0^\infty \frac{W(u)W_1(u)}{u}\sin\left(u\ln\frac{r}{x}\right)du \tag{2.3}$$

Преобразуем ядро (2.2) к форме удобной для вычислений. Воспользуемся представлением [15]

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\cos(\beta(z - y + 2lk)) = 2\pi\cos(\beta(z-y))\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(2\beta l - 2\pi k), \tag{2.4}$$

где $\delta(x)$ – δ-функция Дирака. Учитывая значения пределов

$$\frac{2}{\pi}\lim_{\beta\to 0}\int_0^\infty \mathrm{sh}(\pi u)\, W(u)K_{iu}(\beta x)K_{iu}(\beta r)du = \int_0^\infty \frac{W(u)}{u}\cos\left(u\ln\frac{r}{x}\right)du$$

[1] https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_2089067

$$\frac{2}{\pi}\lim_{\beta\to 0}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{W(u)W_1(t)\,\mathrm{sh}(\pi u)\mathrm{sh}(\pi t)}{\mathrm{ch}(\pi t)-\mathrm{ch}(\pi u)} K_{it}(\beta x)K_{iu}(\beta r)dtdu =$$
$$= -\int_0^\infty \frac{W(u)W_1(u)}{u}\sin\left(u\ln\frac{r}{x}\right)du,$$

возникающих в ядре (2.2), (2.4) при $k = 0$ и соответствующих плоским задачам, преобразуем его к виду

$$K(x,y,r,z) = \frac{1}{l}\int_0^\infty \frac{W(u)}{u}\cos\left(u\ln\frac{r}{x}\right)du - \frac{\mu_*}{l}\int_0^\infty \frac{W(u)W_1(u)}{u}\sin\left(u\ln\frac{r}{x}\right)du +$$
$$+\frac{4}{\pi l}\int_0^\infty \mathrm{sh}(\pi u)W(u)\sum(u,u)du + \frac{4\mu_*}{\pi l}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{W(u)W_1(t)\,\mathrm{sh}\,(\pi u)\,\mathrm{sh}\,(\pi t)}{\mathrm{ch}(\pi t)-\mathrm{ch}(\pi u)}\sum(t,u)dtdu \qquad (2.5)$$
$$\sum(t,u) = \sum_{k=1}^\infty K_{it}\left(\frac{\pi k}{l}x\right)K_{iu}\left(\frac{\pi k}{l}r\right)\cos\left(\frac{\pi k}{l}(z-y)\right)$$

Для выделения главных членов из части ядра (2.5), не учитывающей силы трения (без μ_*), используем интегралы и ряд [12, 16, 17] (C — постоянная Эйлера)

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ut)-\exp(-u)}{u}du = -\ln|t|, \qquad \int_0^\infty \mathrm{ch}\,(\pi u)K_{iu}(tx)K_{iu}(tr)du = \frac{\pi}{2}K_0(t|r-x|)$$
$$\sum_{k=1}^\infty K_0(kr)\cos(kz) = \frac{\pi}{2\sqrt{r^2+z^2}} + \frac{1}{2}\left(\mathrm{C}+\ln\frac{r}{4\pi}\right) + \qquad (2.6)$$
$$+\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^\infty\left[\frac{1}{\sqrt{(2\pi k-z)^2+r^2}} + \frac{1}{\sqrt{(2\pi k+z)^2+r^2}} - \frac{1}{\pi k}\right],$$

а для членов ядра, включающих μ_*, возьмем интеграл ([14], с. 79),

$$\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{W_0(u,t)\,\mathrm{sh}\,(\pi u)\,\mathrm{sh}\,(\pi t)}{\mathrm{ch}(\pi t)-\mathrm{ch}(\pi u)}K_{it}(\beta x)K_{iu}(\beta r)\cos(\beta(z-y))d\beta dtdu = -\frac{r-x}{R^2}$$
$$W_0(u,t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{cth}\frac{\pi u}{2}\,\mathrm{th}\frac{\pi t}{2} + \mathrm{th}\frac{\pi u}{2}\,\mathrm{cth}\frac{\pi t}{2}\right), \qquad R = \sqrt{(r-x)^2+(z-y)^2},$$

значение которого встречается в контактной задаче с трением Кулона для полупространства со свободной поверхностью вне зоны контакта [4, 14].

В результате представим ядро (2.5) в форме

$$K(x,y,r,z) = \frac{1}{R} - \mu_*\frac{r-x}{R^2} + \sum_{k=1}^\infty\left[\frac{1}{R_k^+} + \frac{1}{R_k^-} - \frac{1}{kl} - \mu_*\left(\frac{r-x}{(R_k^+)^2} + \frac{r-x}{(R_k^-)^2}\right)\right] +$$
$$+\frac{1}{l}\int_0^\infty\left\{[W(u)-1]\cos\left(u\ln\frac{r}{x}\right) + \exp(-u)\right\}\frac{du}{u} - \frac{\mu_*}{l}\int_0^\infty [W(u)W_1(u)-1]\sin\left(u\ln\frac{r}{x}\right)\frac{du}{u} +$$
$$+\frac{1}{l}\ln\frac{|r-x|}{4l\,|\ln(r/x)|} + \frac{\mathrm{C}}{l} + \frac{4}{\pi l}\int_0^\infty [\,\mathrm{sh}\,(\pi u)W(u) - \mathrm{ch}(\pi u)]\sum(u,u)du +$$
$$+\frac{4\mu_*}{\pi l}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{[W(u)W_1(t) - W_0(u,t)]\,\mathrm{sh}\,(\pi u)\,\mathrm{sh}\,(\pi t)}{\mathrm{ch}(\pi t)-\mathrm{ch}(\pi u)}\sum(t,u)dtdu$$
$$R_k^\pm = \sqrt{(r-x)^2+(z-y\pm 2kl)^2} \qquad (2.7)$$

В формуле (2.7) улучшена сходимость всех интегралов с учетом асимптотического поведения символов в бесконечности. Ядро (2.7) интегрального уравнения линейно-периодической контактной задачи включает члены, входящие в ядра известных интегральных уравнений как пространственных, так и плоских контактных задач с трением для одного штампа (см. формулу (2.3)) [4, 14]; в пределе при $l \to \infty$ оно переходит в известное для одного штампа. Однако логарифмическая особенность плоской задачи в формуле (2.7) нейтрализована рядом (2.6), поскольку ($x > 0$)

$$\lim_{r\to x} \ln \frac{|r-x|}{|\ln(r/x)|} = \ln|x| \tag{2.8}$$

В задаче А в отличие от задачи Б

$$W(u)W_1(u) - 1 \equiv 0, \tag{2.9}$$

что приводит к исчезновению второго интегрального слагаемого в формуле (2.7). Тождество (2.9) связано с совпадением символов $W(u)W_1(u) \equiv 1$ в ядре (2.3) плоских задач с трением для полуплоскости при скользящей заделке по полуоси и при свободной границе вне зоны контакта ([14], с. 31). По этой же причине в задаче А в отличие от задачи Б последний интеграл в формуле (2.7) не является сингулярным, так как в этом случае

$$\lim_{t\to u} \frac{[W(u)W_1(t) - W_0(u,t)]\,\mathrm{sh}(\pi u)\,\mathrm{sh}(\pi t)}{\mathrm{ch}(\pi t) - \mathrm{ch}(\pi u)} = -\frac{1}{\mathrm{ch}(\pi u)}$$

Ядро (2.2) для задачи А может быть представлено в другой форме, в которой его часть, не учитывающая трение, свободна от квадратур и логарифмических членов. На основе разложения

$$\mathrm{sh}(\pi u)W(u) = \mathrm{sh}(\pi u)\,\mathrm{th}(\pi u) = \mathrm{ch}(\pi u) - \frac{1}{\mathrm{ch}(\pi u)}$$

и значений интегралов [14]

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{ch}(\pi u)K_{iu}(\beta x)K_{iu}(\beta r)\cos(\beta(z-y))\,d\beta du = \frac{\pi^2}{4R}$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{\mathrm{ch}(\pi u)}K_{iu}(\beta x)K_{iu}(\beta r)\cos(\beta(z-y))\,d\beta du = \frac{\pi}{2R}\,\mathrm{arctg}\,\frac{R}{2\sqrt{xr}}$$

ядро (2.2) для задачи А приводится к виду

$$\begin{aligned} K(x,y,r,z) &= \frac{1}{R}\left(1 - \frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\,\frac{R}{2\sqrt{xr}}\right) - \mu_*\frac{r-x}{R^2} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{R_k^+}\left(1 - \frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\,\frac{R_k^+}{2\sqrt{xr}}\right) + \frac{1}{R_k^-}\left(1 - \frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\,\frac{R_k^-}{2\sqrt{xr}}\right) - \mu_*\left(\frac{r-x}{(R_k^+)^2} + \frac{r-x}{(R_k^-)^2}\right)\right] + \\ &+ \frac{4\mu_*}{\pi l}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{[W(u)W_1(t) - W_0(u,t)]\,\mathrm{sh}(\pi u)\,\mathrm{sh}(\pi t)}{\mathrm{ch}(\pi t) - \mathrm{ch}(\pi u)}\sum(t,u)\,dtdu \end{aligned} \tag{2.10}$$

Пример. Эквивалентность форм (2.7) и (2.10) проверим, отбрасывая член R^{-1}, в частном случае $r = x \neq 0$, $z = y$, $l = 1$, $\mu = 0$. При учете предела (2.8) и интеграла [17]

$$\int_0^\infty \frac{K_{iu}^2(x)}{\mathrm{ch}(\pi u)}du = \frac{\pi}{2}E_1(2x), \quad E_1(x) = \int_x^\infty \frac{\exp(-t)}{t}dt$$

можно численно убедиться в справедливости равенства

$$\ln\frac{x}{4} + C + \int_0^{\infty}[\text{th}(\pi u) - 1 + \exp(-u)]\frac{du}{u} - 2\sum_{k=1}^{\infty}E_1(2\pi kx) = -\frac{1}{\pi x} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(1 - \frac{2}{\pi}\text{arctg}\frac{k}{x}\right)$$

3. Численный анализ. Для решения контактных задач применим метод, предложенный Галановым [13], позволяющий одновременно определить область контакта и давления в этой области. В этом методе интегрирование в уравнении (2.1), (1.1) распространяется на прямоугольник S, содержащий область Ω (рис. 1). Предположения об отсутствии контакта и обращения в нуль давления в дополнительной области $S\backslash\Omega$ приводят к системе интегрального уравнения и интегрального неравенства

$$\int_S q(N)K(N,M)dN = d(M); \quad q(M) \geq 0, \quad M \in \Omega$$

$$\int_S q(N)K(N,M)dN > d(M); \quad q(M) = 0, \quad M \in S\backslash\Omega \tag{3.1}$$

$$N = x, y, \quad M = r, z, \quad d(M) = 2\pi\theta[\delta - f(M)]$$

После введения нелинейных операторов

$$p^+(M) = \sup\{p(M), 0\}, \quad p^-(M) = \inf\{p(M), 0\}$$

и представления искомого давления в форме

$$q = q(M) = q^+(M) + q^-(M)$$

система (3.1) сводится к решению нелинейного операторного уравнения типа Гаммерштейна

$$\Theta p = 0 \quad (M \in \Omega), \quad \Theta p \equiv p^- + Kp^+ - d, \tag{3.2}$$

где $p = p(M)$, $p^{\pm} = p^{\pm}(M)$, $d = d(M)$

$$Kp^+ = \int_S p^+(N)K(N,M)dN \tag{3.3}$$

При этом интегральное неравенство (3.1) удовлетворяется автоматически. Можно доказать эквивалентность системы (3.1) и уравнения (3.2) [12–14].

При численном решении уравнения (3.2) применяется модифицированный метод Ньютона, основанный на построении последовательных приближений по формулам

$$p_{n+1} = p_n - (F'p_n)^{-1}\,\Theta p_n, \quad p_n = p_n(M); \quad n = 0, 1, \ldots, \quad p_0 = d,$$

где F – дифференцируемый оператор, аппроксимирующий оператор Θ по равномерной метрике [12–14].

В отличие от задач для одного штампа [13, 14] ядра (2.7) и (2.10) в прямоугольнике S имеют не только классическую особенность R^{-1}, но и дополнительные интегрируемые особенности $(R_1^{\pm})^{-1}$ в точках $r = x$, $z - y = \pm 2l$ на сторонах S, обозначенных точками на рис. 1. При расчете значений ядра в интегралах типа (3.3) особенности сглаживались по формуле ($k = 0;1$)

$$(r - x)^2 + (z - y \pm 2kl)^2 \to (r - x)^2 + (z - y \pm 2kl)^2 + \frac{h_1 h_2}{16},$$

где h_1 и h_2 – шаги сетки соответственно по осям r и z.

Таблица 1. Значения вдавливающей силы $P(\delta)$, $A = \varepsilon = 1$, $B = 0.2$, $\lambda = 2$, $\nu = 0.25$

δ	1	1.5	2	1	1.5	2
	Задача А			Задача Б		
$\mu = 0.2$	0.2348	0.3838	0.5465	0.2416	0.3959	0.5652
$\mu = 0$	0.2354	0.3856	0.5487	0.2422	0.3978	0.5670
$\mu = -0.2$	0.2355	0.3868	0.5497	0.2423	0.3990	0.5678

Таблица 2. Значения вдавливающей силы $P(\lambda)$, $A = \varepsilon = 1$, $B = 0.2$, $\nu = 0.25$

λ	1.5	4	6	1.5	4	6
	Задача А			Задача Б		
$\delta = 1$						
$\mu = 0.2$	0.2578	0.1952	0.1782	0.2662	0.1997	0.1818
$\mu = -0.2$	0.2588	0.1955	0.1784	0.2671	0.2000	0.1821
$\delta = 1.5$						
$\mu = 0.2$	0.4273	0.3165	0.2878	0.4434	0.3241	0.2939
$\mu = -0.2$	0.4328	0.3168	0.2879	0.4484	0.3244	0.2941

Введем безразмерные обозначения (штрихи далее опускаем)

$$r' = \frac{r - c}{l}, \quad x' = \frac{x - c}{l}, \quad z' = \frac{z}{l}, \quad y' = \frac{y}{l}, \quad A = \frac{l}{2R_1}, \quad B = \frac{l}{2R_2}, \quad \lambda = \frac{c}{l}$$

$$q'(r', z') = \frac{q(r, z)}{2\pi\theta}, \quad \varepsilon = \frac{a}{l}, \quad \delta' = \frac{\delta}{l}, \quad P' = \frac{P}{2\pi\theta l^2}, \quad S' \leftrightarrow S, \quad \Omega' \leftrightarrow \Omega$$

Параметр λ характеризует относительную удаленность цепочки штампов от линии раздела.

Значения вдавливающей силы P от осадки δ и от параметра λ приведены соответственно в табл. 1 и 2 при разных коэффициентах трения. Значения P растут при увеличении осадки и снижаются при отдалении цепочки от линии раздела. В задаче Б соответствующие значения силы больше, чем в задаче А, различие между решениями задач А и Б снижается с ростом λ. Трение слабо влияет на зависимости $P(\delta)$ и $P(\lambda)$. При $\mu > 0$, когда штампы начинают удаляться от линии раздела, значения P несколько меньше, чем при $\mu < 0$, причем разница значений P при изменении знака μ снижается с ростом λ. При $\nu \to 0.5$ решения контактных задач А и Б сближаются, что вызвано совпадением ядер (2.7) обеих задач при $\nu = 0.5$.

Для достаточно вытянутых вдоль линии раздела штампов (при малых B) при росте δ наблюдается выход области контакта на боковые стороны прямоугольника S (показаны точками на рис. 1), что означает начало перколяции (слияние областей контакта). На рис. 2 показаны зависимости $\max B(\delta)$ и $\min \delta(\lambda)$, при которых начинается слияние областей контакта. При отдалении цепочки от линии раздела для начала перколяции при фиксированной осадке обычно необходимо сделать штампы более вытянутыми (уменьшить значение B). В задаче Б (жесткая заделка) для начала перколяции, как правило, требуется меньшая осадка, чем в задаче А (скользящая заделка).

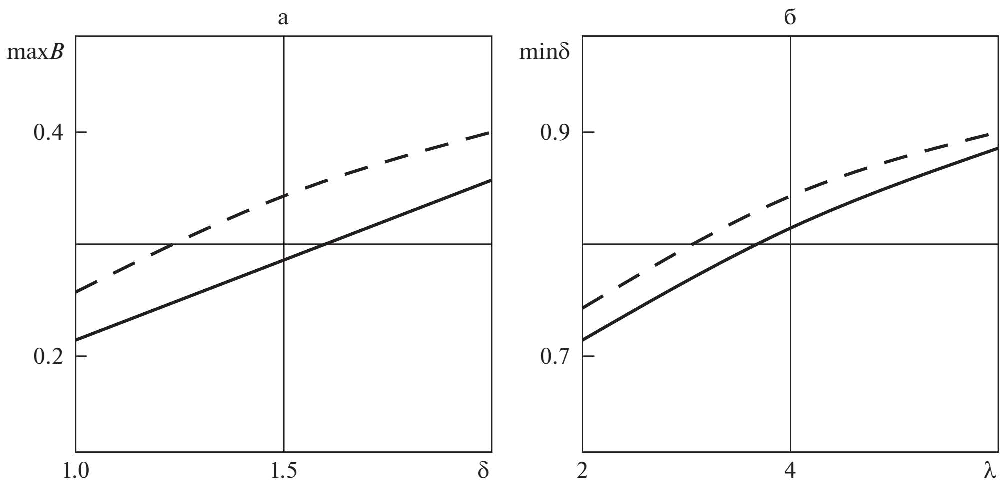

Рис. 2. Графики max $B(\delta)$ (а: задача А, $A = \varepsilon = 1$, $\mu = 0$; $\lambda = 4$ – сплошная линия, $\lambda = 1.2$ – пунктир) и min $\delta(\lambda)$ (б: $A = \varepsilon = 1$, $B = \mu = 0.2$, $\nu = 0.25$; задача А – пунктир, задача Б – сплошная линия) для начала перколяции.

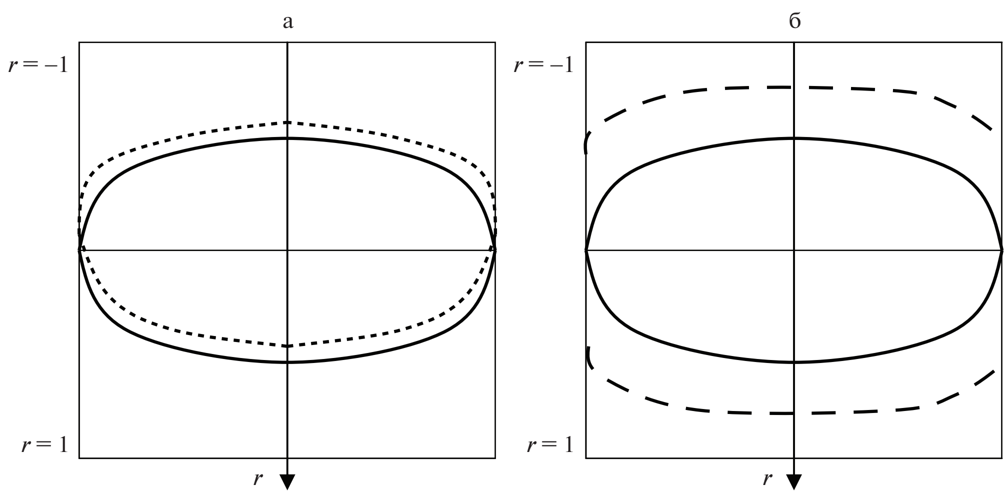

Рис. 3. Области контакта при $A = \varepsilon = 1$, $B = 0.2$, $\lambda = 4$, $\nu = 0.25$; а) симметризация от трения (задача А, $\delta = 1$; $\mu = 0$ – точки, $\mu = 0.2$ – сплошная линия); б) эволюция при росте осадки (задача Б, $\mu = 0.2$; $\delta = 1$ – сплошная линия, $\delta = 2$ – пунктир).

При отсутствии трения, а также при движении в сторону линии раздела ($\mu < 0$), область контакта смещается к линии раздела относительно оси цепочки, проходящей через точку начального касания. Движение в положительном направлении полуоси r ($\mu > 0$) может выравнивать (симметризовать) область контакта относительно оси цепочки (рис. 3а, начало перколяции). Площадь области контакта существенно возрастает при увеличении осадки δ, что может приводить к удлинению линии слияния соседних областей контакта (рис. 3б). При равных значениях осадки площадь области контакта, как правило, несколько больше в задаче Б, чем в задаче А.

Заключение. Закрепление части границы полупространства в виде полуплоскости позволяет получить корректные интегральные уравнения при линейно-периодическом пространственном контакте. Установлена структура ядер интегральных уравнений задач линейно-периодического контакта с трением при произвольной форме штампов, включающая известные члены ядер интегральных уравнений соответствующих плоских и пространственных контактных задач с трением для одного штампа. Порядок дополнительных интегрируемых особенностей ядра на линиях, где возможна перколяция, такой же, как у известной особенности R^{-1}. Трение перпендикулярно оси цепочки незначительно влияет на интегральную характеристику контактных давлений, вызывает изменение геометрии области контакта.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (код проекта 22-21-00013).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Xu Y., Jackson R.L.* Periodic contact problems in plane elasticity: the fracture mechanics approach // ASME J. Trib. 2018. V. 140. № 1. P. 011404.
2. *Пожарский Д.А.* Периодические контактные и смешанные задачи теории упругости (обзор) // Изв. вузов. Сев.-Кавк. рег. Естеств. науки. 2021. № 2. С. 22–33.
3. *Горячева И.Г.* Периодическая контактная задача для упругого полупространства // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 1036–1044.
4. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
5. *Александров В.М.* Двоякопериодические контактные задачи для упругого слоя // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 307–315.
6. *Jin F., Wan Q., Guo X.* A double-Westergaard model for adhesive contact of a wavy surface // Int. J. Solids Struct. 2016. V. 102–103. P. 66–76.
7. *Yastrebov V.A., Anciaux G., Molinari J.-F.* The contact of elastic regular wavy surfaces revisited // Tribol. Lett. 2014. V. 56. P. 171–183.
8. *Goryacheva I.G., Torskaya E.V.* Modeling of fatigue wear of a two-layered elastic half-space in contact with periodic system of indenters // Wear. 2010. V. 268. № 11–12. P. 1417–1422.
9. *Солдатенков И.А.* Периодическая контактная задача теории упругости. Учет трения, износа и сцепления // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 2. С. 337–351.
10. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Y.* Combined effect of surface microgeometry and adhesion in normal and sliding contacts of elastic bodies // Friction. 2017. V. 5. № 3. P. 339–350.
11. *Goryacheva I., Yakovenko A.* The periodic contact problem for spherical indenters and viscoelastic half-space // Tribol. Int. 2021. V. 161. P. 107078.
12. *Пожарский Д.А.* Периодическая контактная задача для упругого клина // ПММ. 2015. Т. 79. Вып. 6. С. 864–872.
13. *Галанов Б.А.* Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 827–835.
14. *Пожарский Д.А.* Фундаментальные решения статики упругого клина и их приложения. Ростов-на-Дону: ООО “ДГТУ-Принт”, 2019. 312 с.
15. *Гельфанд И.М., Г.Е. Шилов.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 486 с.
16. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.
17. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 752 с.

Periodic Contact Problems for a Half-Space with Partially Fixed Boundary

N. B. Zolotov[a] **and D. A. Pozharskii**[a,#]

[a] *Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia*
[#]*e-mail: pozharda@rambler.ru*

Two periodic contact problems with unknown contact domains are considered for an infinite linear chain of identical rigid punches on an elastic half-space. A part of the half-space surface in the form of half-plane is subject to sliding or rigid support providing correct integral equations with respect to the contact pressure. The Coulomb friction forces are taken into account in the perpendicular direction to the fixed half-plane boundary. The method of nonlinear boundary integral equations is used for solving the problems which allows us to determine the contact domain and the contact pressure simultaneously. Mechanical characteristics are calculated. It is investigated the passage from discrete to continuous contact zones of infinite length.

Keywords: periodic contact, elastic half-space, integral equations

REFERENCES

1. *Xu Y., Jackson R.L.* Periodic contact problems in plane elasticity: the fracture mechanics approach // ASME J. Trib., 2018, vol. 140, no. 1, pp. 011404.
2. *Pozharskii D.A.* Periodic contact and mixed problems of the elasticity theory (review) // Izv. Vuzov. Severo-Kavkazskii Region. Estestvennye Nauki, 2021, no. 2, pp. 22–33. (in Russian)
3. *Goryacheva I.G.* The periodic contact problem for an elastic half-space // JAMM, 1998, vol. 62, no. 6, pp. 959–966.
4. *Goryacheva I.G.* Mechanics of Frictional Interaction (Mekhanika friktsionnogo vzaimodeistviya). Moscow: Nauka, 2001. 478 p. (in Russian)
5. *Aleksandrov V.M.* Doubly periodic contact problems for and elastic layer // JAMM, 2002, vol. 66, no. 2, pp. 297–305.
6. *Jin F., Wan Q., Guo X.* A double-Westergaard model for adhesive contact of a wavy surface // Int. J. Solids Struct., 2016, vol. 102–103, pp. 66–76.
7. *Yastrebov V.A., Anciaux G., Molinari J.-F.* The contact of elastic regular wavy surfaces revisited // Tribol. Lett., 2014, vol. 56, pp. 171–183.
8. *Goryacheva I.G., Torskaya E.V.* Modeling of fatigue wear of a two-layered elastic half-space in contact with periodic system of indenters // Wear, 2010, vol. 268, no. 11–12, pp. 1417–1422.
9. *Soldatenkov I.A.* The periodic contact problem of the plane theory of elasticity. Taking friction, wear and adhesion into account // JAMM, 2013, vol. 77, no. 2, pp. 245–255.
10. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Y.* Combined effect of surface microgeometry and adhesion in normal and sliding contacts of elastic bodies // Friction, 2017, vol. 5, no. 3, pp. 339–350.
11. *Goryacheva I., Yakovenko A.* The periodic contact problem for spherical indenters and viscoelastic half-space // Tribol. Int., 2021, vol. 161, pp. 107078.
12. *Pozharskii D.A.* Periodic contact problem for an elastic wedge // JAMM, 2015, vol. 79, no. 6, pp. 604–610.
13. *Galanov B.A.* The method of boundary equations of the Hammerstein-type for contact problems of the theory of elasticity when the regions of contact are not known // JAMM, 1985, vol. 49, no. 5, pp. 634–640.
14. *Pozharskii D.A.* Fundamental Solutions of Elastic Wedge Statics and Applications (Fundamental'nye resheniya statiki uprugogo klina i ikh prilozheniya). Rostov-on-Don: DGTU, 2019. 312 p. (in Russian)
15. *Gel'fand I.M., Shilov G.E.* Genaralized Functions and Actions on Them (Obobschennye funktsii i deistviya nad nimi). Moscow: Fizmatgiz, 1959. 486 p. (in Russian)
16. *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integral and Series. Vol. 1. Elementary Functions. N.Y.: Gordon and Breach Science Publ., 1986. 798 p.
17. *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integral and Series. Vol. 2. Special Functions. N.Y.: Gordon & Breach Science Publ., 1986. 750 p.

EDN: NWSSJH
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2022, том 86, № 3, с. 404–423

УДК 539.3

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОГО КОНТАКТА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ

© 2022 г. А. А. Бобылев[1,2,*]

[1] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

[2] *Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*

**e-mail: abobylov@gmail.com*

Поступила в редакцию 29.10.2021 г.
После доработки 02.03.2022 г.
Принята к публикации 10.03.2022 г.

Рассмотрены задачи дискретного контакта упругой полосы и жесткого штампа с заранее неизвестными площадками фактического контакта. Получена вариационная формулировка задач в виде граничного вариационного неравенства с использованием оператора Пуанкаре–Стеклова, отображающего на части границы упругой полосы нормальные напряжения в нормальные перемещения. При аппроксимации этого оператора используется дискретное преобразование Фурье, для численной реализации которого применяются алгоритмы быстрого преобразования Фурье. Приведена эквивалентная вариационному неравенству задача минимизации, в результате аппроксимации которой получена задача квадратичного программирования с ограничениями в виде равенств и неравенств. Для численного решения этой задачи использован алгоритм на основе метода сопряженных градиентов, учитывающий специфику множества ограничений. Построены однопараметрические семейства штампов с поверхностным рельефом, в качестве параметра которых выступает число микровыступов. В результате вычислительных экспериментов установлено существование для каждого семейства штампов единой огибающей контактного давления, единой огибающей нормализованных контактных усилий и единой огибающей относительных величин фактических площадей контакта микровыступов. Форма и положение этих огибающих для семейства штампов зависят от параметров внешней нагрузки и отношения размера номинальной области контакта к толщине полосы.

Ключевые слова: дискретный контакт, упругая полоса, граничное вариационное неравенство, преобразование Фурье, метод сопряженных градиентов

DOI: 10.31857/S0032823522030031

1. Введение. При контактном взаимодействии твердых тел область фактического контакта, как правило, дискретна. Размеры и положение пятен фактического контакта зависят от условий контактного взаимодействия, механических характеристик тел и их поверхностной микроструктуры. Для описания дискретного (множественного) контакта твердых тел предложены различные математические модели, учитывающие параметры макро- и микрогеометрии реальных поверхностей и условия их контактного взаимодействия [1–4]. Большинство этих моделей основано на классической теории контактного взаимодействия деформируемых тел [5, 6]. Подробный обзор современного состояния исследований в области механики дискретного контакта, включая основные подходы к постановке задач, методы аналитического и численного решения, конкретные результаты и области их практического использования, приведен в статье [7].

В настоящей работе рассматриваются задачи дискретного контакта упругой полосы и жесткого штампа конечных размеров. На части границы полосы, по которой возможен контакт со штампом, задаются условия одностороннего контакта, трение на площадках контакта отсутствует. Такие задачи не являются периодическими вследствие неравномерного распределения нагрузки между отдельными пятнами контакта.

При решении краевых задач для упругой полосы преимущественно применяется интегральное преобразование Фурье [8]. В ряде случаев удается получить аналитические выражения для трансформант Фурье искомых функций, однако выполнить аналитически обратное преобразование Фурье этих трансформант весьма затруднительно, поэтому используют приближенные методы. Асимптотические методы представлены в монографиях [9, 10]. Численные методы, как правило, основаны на дискретном преобразовании Фурье (ДПФ), при реализации которого применяются алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ) [11, 12]. Подробный обзор современного состояния исследований и анализ различных аспектов применения ДПФ и БПФ в контактных задачах приведен в [13, 14].

Задачи дискретного контакта с односторонними связями являются нелинейными вследствие наличия в постановке граничных условий в виде неравенств. Для их численного решения требуется применение итерационных алгоритмов. Наиболее распространенный подход к построению вычислительных алгоритмов решения контактных задач с односторонними связями состоит в применении вариационных методов [15–17]. Отметим, что вариационные формулировки также используются для исследования проблемы существования, единственности и регулярности решения контактных задач [18–20]. Вариационные формулировки смешанных задач для упругой полосы приведены в [9].

В результате аппроксимации вариационных формулировок контактных задач с односторонними связями методами конечных или граничных элементов получают задачи квадратичного программирования, для решения которых в настоящее время наиболее эффективными считаются алгоритмы, разработанные на основе метода сопряженных градиентов (МСГ).

Впервые алгоритм решения задач квадратичного программирования на основе МСГ был предложен в [21]. Идея алгоритма состояла в использовании стратегии рабочего списка активных ограничений-неравенств (активного набора) и применении МСГ для нахождения минимума на текущем рабочем подпространстве. Была доказана теоретическая сходимость алгоритма за конечное число шагов. При практическом использовании алгоритма оказалось, что скорость сходимости итерационного процесса существенно зависит от количества и вида ограничений. Поэтому впоследствии были предложены различные модификации базового алгоритма, адаптированные для решения конкретных классов прикладных задач. Приведено [22, 23] описание и анализ алгоритмов на основе МСГ для решения контактных задач с односторонними связями.

Один из наиболее известных алгоритмов [24], отличается от базового алгоритма [21] учетом специфики множества ограничений решаемой задачи квадратичного программирования. При аппроксимации граничной вариационной формулировки контактной задачи количество ограничений в виде неравенств (условий неположительности нормальных напряжений при одностороннем контакте) совпадает с количеством неизвестных. Поэтому в алгоритме [24] при нарушении неактивных ограничений применяется метод проекции точки на допустимое множество, позволяющий включать в рабочий список сразу несколько ограничений, что существенно снижает количество рестартов по сравнению с алгоритмом [21]. Для сокращения вычислительных затрат также допускается, в отличие от алгоритма [21], исключение ограничений из рабочего списка до нахождения минимума на текущем рабочем подпространстве.

Следует отметить, что алгоритм [24] имеет существенное ограничение. В нем учитывается только одно уравнение равновесия штампа (для сил) и, следовательно, только поступательное движение штампа. Это не позволяет использовать алгоритм для решения контактных задач при внецентренном нагружении штампа, когда необходимо учитывать его повороты. Кроме того, на каждом шаге итерационного процесса дважды выполняется операция умножения матрицы Гессе минимизируемой функции на вектор, тогда как в алгоритме [21] эта операция выполняется лишь один раз. При изменении размерности рабочего подпространства рестарт алгоритма [24], как и алгоритма [21], производится с направления антиградиента, что замедляет их сходимость.

Автором предложен [25] новый алгоритм решения задач дискретного контакта для упругой полуплоскости, разработанный на основе МСГ. Основная идея этого алгоритма состоит в применении линейного преобразования переменных, позволяющего свести ограничения в виде равенств, которые аппроксимируют уравнения равновесия штампа и содержат все переменные задачи, к простым ограничениям, содержащим только одну переменную. Такие ограничения несложно учесть в алгоритме МСГ. Этот прием позволяет рассматривать оба уравнения равновесия штампа и задавать значение момента внешних сил. Кроме того, в качестве направления рестарта в алгоритме [25] используется редукция направления поиска с предыдущего шага на новое рабочее подпространство, при этом после рестарта для сохранения сопряженности направления поиска вычисляются по трехчленной формуле. Отметим также, что в алгоритме [25] операция умножения матрицы Гессе на вектор дважды выполняется только в случае уменьшения размерности рабочего подпространства.

В настоящей работе для решения задачи квадратичного программирования используется алгоритм МСГ [25], позволяющий рассматривать случаи внецентренного нагружения жесткого штампа.

2. Постановка задачи. Пусть аналогично [9] невесомая однородная изотропная упругая полоса в прямоугольной системе координат Ox_1x_2 занимает область $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \le \infty,\ 0 \le x_2 \le h\}$. Границу полосы $x_2 \equiv 0$ обозначим Γ_0, а границу $x_2 \equiv h$ – через Γ_1. Далее под $\mathbf{u}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ будем понимать соответственно вектор перемещений и тензоры деформаций и напряжений в точке $\mathbf{x} \in \Omega$. Предполагается, что полоса находится в условиях плоской деформации, деформации малы, а массовые силы и напряжения в недеформированном состоянии отсутствуют. Напряженно-деформированное состояние полосы описывается системой уравнений:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \operatorname{def} \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ в } \Omega, \tag{2.1}$$

где $\operatorname{def} \equiv 1/2(\operatorname{grad} + \operatorname{grad}^{\mathrm{T}})$, $\mathbf{S}$ – тензор модулей упругости.

По границе Γ_0 полоса соединена с недеформируемым основанием. В случае идеального контакта граничные условия имеют вид

$$\mathbf{u} = 0 \text{ на } \Gamma_0 \tag{2.2}$$

В полосу вдавливается гладкий жесткий штамп. Часть границы Γ_1, по которой возможен контакт полосы со штампом, обозначается Γ_p. Положение и предельные размеры Γ_p, т.е. номинальная область контакта, задаются априори, исходя из геометрических соображений. Предполагается, что часть границы Γ_p является односвязной и конечной.

Форма основания штампа описывается функцией $\Phi(x_1)$, значение которой в точке $\mathbf{x} \in \Gamma_p$ равно расстоянию от этой точки до поверхности штампа, измеренному вдоль направления внешней нормали к границе Γ_p. Расстояние $\Phi(x_1)$ отсчитывается по отношению к недеформированному состоянию полосы. Для определенности будем полагать

$\min\limits_{\mathbf{x}\in\Gamma_p} \Phi(x_1) = 0$. В задачах дискретного контакта функция $\Phi(x_1)$ является мультимодальной (многоэкстремальной). Положение штампа определяется вектором перемещений $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2)$ и углом поворота φ_3. Главный вектор $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ и главный момент M_3 внешних сил, приложенных к штампу, считаются заданными. В качестве центра приведения выбирается точка $\mathbf{x}^c = (x_1^c, x_2^c)$. Далее рассматривается задача нормального контакта полосы со штампом, поэтому будем полагать $F_1 = 0$ и $\delta_1 = 0$.

Контактное взаимодействие упругой полосы с жестким штампом описывается условиями одностороннего гладкого контакта:

$$\begin{gathered} u_2 \leq \Phi + \delta_2 + \varphi_3(x_1 - x_1^c), \quad \sigma_{22} \leq 0, \quad \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{22}\left[u_2 - \Phi - \delta_2 - \varphi_3(x_1 - x_1^c)\right] = 0 \text{ на } \Gamma_p \end{gathered} \tag{2.3}$$

Остальная часть границы Γ_1 полосы свободна от внешних нагрузок:

$$\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0 \text{ на } \Gamma_1 \backslash \Gamma_p \tag{2.4}$$

Уравнения равновесия жесткого штампа имеют вид:

$$\int\limits_{\Gamma_p} \sigma_{22}\, d\Gamma_p = F_2, \quad \int\limits_{\Gamma_p} \sigma_{22}(x_1 - x_1^c)\, d\Gamma_p = M_3 \tag{2.5}$$

Отметим, что соотношения (2.5), по существу, представляют собой нелокальные граничные условия.

Для существования решения рассматриваемой контактной задачи далее будем предполагать, что внешние силы и моменты, приложенные к жесткому штампу, удовлетворяют следующим условиям:

– компонента F_2 ограничена по абсолютной величине и $F_2 < 0$;

– значения F_2 и M_3 согласованы между собой таким образом, что существует распределение нормальных напряжений $\sigma_{22} \leq 0$ на Γ_p, удовлетворяющее уравнениям равновесия штампа (2.5).

Для замыкания постановки контактной задачи необходимо задать условия на бесконечности. Обычно в качестве таковых используются условия, характеризующие определенный порядок изменения перемещений и напряжений на бесконечности. Как правило, эти условия носят чисто математический характер. Более естественным является условие конечности потенциальной энергии деформации полосы

$$\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}\, d\Omega < \infty, \tag{2.6}$$

которое вполне замыкает постановку задачи и определяет поведение решения на бесконечности [9].

Задача (в дифференциальной постановке) состоит в определении полей перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ и напряжений $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$, удовлетворяющих уравнениям (2.1), граничным условиям (2.2)–(2.4), уравнениям равновесия штампа (2.5) и условию (2.6). Также необходимо найти смещение δ_2 и поворот φ_3 штампа. Подчеркнем, что фактические зоны контакта полосы со штампом заранее неизвестны и подлежат определению.

3. Функциональные пространства. Решение $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ задачи (2.1)–(2.6), принадлежащее классу функций $[C^2(\Omega)]^2 \cap [C^1(\overline{\Omega})]^2$, является классическим решением. Переход к вариационной формулировке задачи позволяет определить обобщенное решение. Введем необходимые для этого функциональные пространства [27, 28]. Обозначим

$$\mathbf{H}^1(\mathrm{div};\Omega) = \left\{\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \colon \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \in \mathbf{L}_2(\Omega)\right\}, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{H}^1(\Omega) = [H^1(\Omega)]^2$, $\mathbf{L}_2(\Omega) = [L_2(\Omega)]^2$ – прямые произведения пространств Соболева. Пространство $\mathbf{H}^1(\mathrm{div};\Omega)$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$(\mathbf{v},\mathbf{w})_{\mathbf{H}^1(\mathrm{div};\Omega)} = (\mathbf{v},\mathbf{w})_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + (\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}),\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}))_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \tag{3.2}$$

Для однородной изотропной полосы несложно получить неравенство

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})d\Omega \le c_1 \|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{H}^1(\mathrm{div};\Omega)} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\mathrm{div};\Omega) \tag{3.3}$$

с положительной постоянной c_1, не зависящей от $\mathbf{v}$. Следовательно, элементы пространства $\mathbf{H}^1(\mathrm{div};\Omega)$ удовлетворяют условию конечности потенциальной энергии деформации полосы (2.6).

Выделим в $\mathbf{H}^1(\mathrm{div};\Omega)$ подпространство

$$\mathbf{V} = \left\{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\mathrm{div};\Omega)\colon \mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \text{ в } \Omega; \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ на } \Gamma_0\right\} \tag{3.4}$$

Можно увидеть, что

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\mathrm{div};\Omega)} = \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \tag{3.5}$$

Из результатов [18] с учетом (3.5) следует, что существует постоянная $c_2 > 0$, зависящая лишь от Ω, такая, что

$$\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})d\Omega \ge c_2 \|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{H}^1(\mathrm{div};\Omega)} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \tag{3.6}$$

Неравенство (3.6) представляет собой первое неравенство Корна.

Используя далее результаты [9, 29], можно показать, что существуют линейные непрерывные операторы следа

$$\gamma_u : \mathbf{V} \to [H^{1/2}(\Gamma_1)]^2, \quad \gamma_t : \mathbf{V} \to [H^{-1/2}(\Gamma_1)]^2, \tag{3.7}$$

определяющие для полей перемещений $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ векторные функции перемещений $\gamma_u\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ и напряжений $\gamma_t\mathbf{v} = (\sigma_{12},\sigma_{22})$ на Γ_1 такие, что

$$\|\gamma_u\mathbf{v}\|_{[H^{1/2}(\Gamma_1)]^2} \le c_3 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\mathrm{div};\Omega)}, \quad \|\gamma_t\mathbf{v}\|_{[H^{-1/2}(\Gamma_1)]^2} \le c_4 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\mathrm{div};\Omega)}, \tag{3.8}$$

где c_3, c_4 – положительные постоянные, не зависящие от $\mathbf{v}$.

Обратно, существует линейный непрерывный оператор

$$\tau_t : [H^{-1/2}(\Gamma_1)]^2 \to \mathbf{V}, \tag{3.9}$$

такой, что для заданного $\mathbf{t} \in [H^{-1/2}(\Gamma_1)]^2$ можно построить функцию $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, обладающую свойством $\gamma_t\mathbf{v} = \mathbf{t}$.

Введем пространство сужений на Γ_p функций из $H^{1/2}(\Gamma_1)$

$$H^{1/2}(\Gamma_p) = \left\{v = w|_{\Gamma_p}\colon w \in H^{1/2}(\Gamma_1)\right\} \tag{3.10}$$

и оснастим его нормой

$$\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_p)} = \inf_{w\in H^{1/2}(\Gamma_1)} \left\{\|w\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)}\colon v = w|_{\Gamma_p}\right\} \tag{3.11}$$

Имеет место вложение пространств $H^{1/2}(\Gamma_p) \subset L_2(\Gamma_p)$ [30]. Двойственным к пространству $H^{1/2}(\Gamma_p)$ является пространство $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ – пополнение $L_2(\Gamma_p)$ по норме

$$\|p\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)} = \sup_{\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_p)}=1} \left|(p,v)_{L_2(\Gamma_p)}\right|, \tag{3.12}$$

т.е. отношение двойственности ${}_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)}\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^{1/2}(\Gamma_p)}$ порождается продолжением стандартного скалярного произведения в $L_2(\Gamma_p)$ и имеет место плотное вложение пространств [30]

$$L_2(\Gamma_p) \subset \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p) \tag{3.13}$$

Для упрощения обозначений указанное отношение двойственности далее будем обозначать как $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Заметим, что тривиальное продолжение функции $p \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ на Γ_1 принадлежит пространству $H^{-1/2}(\Gamma_1)$, т.е. существует функция $p^* \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$ такая, что $\operatorname{supp} p^* \subset \overline{\Gamma}_p$, p является сужением p^* на Γ_p и выполняется равенство [29]

$$\|p\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)} = \|p^*\|_{H^{-1/2}(\Gamma_1)} \tag{3.14}$$

Поэтому с учетом (3.9) существует линейный непрерывный оператор

$$\tau_p : [\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)]^2 \to \mathbf{V} \tag{3.15}$$

такой, что для заданного $\mathbf{p} \in [\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)]^2$ можно построить функцию $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, обладающую свойством $\gamma_t \mathbf{v}|_{\Gamma_p} = \mathbf{p}$.

4. Интегральное представление решения. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу для упругой полосы: найти поле перемещений $\mathbf{u}$, удовлетворяющее уравнениям (2.1), граничным условиям (2.2) и (2.4), а также условиям

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = q \text{ на } \Gamma_p \tag{4.1}$$

Показано [9], что для любого $q \in L_2(\Gamma_p)$ данная задача имеет единственное решение $\mathbf{u}$ и выполняется интегральное тождество (обобщенная формула Грина)

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})d\Omega = \int_{\Gamma_p} qv_2 d\Gamma_p \qquad \forall \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbf{V} \tag{4.2}$$

Из (4.2) с учетом (3.6) следует оценка

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\mathrm{div};\Omega)} \le c_5 \|q\|_{L_2(\Gamma_p)} \tag{4.3}$$

с положительной постоянной c_5, не зависящей от q. Следовательно, с помощью решения вспомогательной краевой задачи можно определить линейный непрерывный оператор $\mathbf{G}_s : q \mapsto \mathbf{u}$ из $L_2(\Gamma_p)$ в $\mathbf{V}$.

Решение вспомогательной краевой задачи для $q \in L_2(\Gamma_p)$ имеет вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}(x_2, \alpha) Q(\alpha) \exp(-i\alpha x_1) d\alpha \tag{4.4}$$

$$Q(\alpha) = \int_{\Gamma_p} q(x_1) \exp(i\alpha x_1) dx_1 \tag{4.5}$$

Выражение для ядра $\mathbf{U}(x_2, \alpha)$ приведено, например, в [31]. Учитывая плотность вложения (3.13), оператор $\mathbf{G}_s$ можно продолжить по непрерывности на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ и с учетом (3.15) рассматривать как оператор, действующий из $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ в $\mathbf{V}$.

Таким образом, использование интегрального представления (4.4)–(4.5) в предположении, что $\Phi \in H^{1/2}(\Gamma_p)$, позволяет свести решение контактной задачи (2.1)–(2.6) к нахождению нормальных напряжений $\sigma_{22} = q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$, удовлетворяющих следующей системе уравнений и неравенств:

$$q \le 0 \text{ на } \Gamma_p \quad (\text{в смысле } \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)) \tag{4.6}$$

$$u_2(q) \le \Phi + \delta_2 + \varphi_3(x_1 - x_1^c) \text{ на } \Gamma_p \quad (\text{в смысле } H^{1/2}(\Gamma_p)) \tag{4.7}$$

$$q\left[u_2(q) - \Phi - \delta_2 - \varphi_3(x_1 - x_1^c)\right] = 0 \text{ на } \Gamma_p \quad (\text{в смысле } \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)) \tag{4.8}$$

$$\langle q, 1\rangle = F_2, \quad \langle q, x_1 - x_1^c\rangle = M_3 \tag{4.9}$$

Перемещения $\mathbf{u} = \mathbf{G}_s q$, соответствующие решению $q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ системы (4.6)–(4.9), будем называть обобщенным решением контактной задачи (2.1)–(2.6).

5. Оператор Пуанкаре–Стеклова. Введем оператор Пуанкаре–Стеклова $G_{ps} : q \mapsto w$, отображающий посредством решения (4.4)–(4.5) нормальные напряжения $q(x_1) \equiv \sigma_{22}(x_1, h)$ на части Γ_p границы упругой полосы в нормальные перемещения $w(x_1) \equiv u_2(x_1, h)$ на Γ_p.

Соответствующее решению (4.4)–(4.5) выражение для оператора Пуанкаре–Стеклова $G_{ps} : q \mapsto w$ для $p \in L_2(\Gamma_p)$ имеет вид:

$$w(x_1) = \int_{\Gamma_p} K_s(x_1 - \xi_1) q(\xi_1) d\xi_1 \tag{5.1}$$

Отметим, что ядро $K_s(\cdot)$ интегрального представления (5.1) является разностным [31]. Учитывая плотность вложения (3.13), оператор G_{ps} можно продолжить по непрерывности на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ и с учетом (3.7), (3.10), (3.15) рассматривать как оператор, действующий из $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ в $H^{1/2}(\Gamma_p)$.

Введем на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p) \times \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ непрерывную билинейную форму

$$g_{ps}(p, q) = \langle p, G_{ps} q\rangle \tag{5.2}$$

Учитывая плотность вложения (3.13), из (4.2) получим, что

$$g_{ps}(p, q) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega, \tag{5.3}$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{G}_s q$, $\mathbf{v} = \mathbf{G}_s p$.

Для изотропной упругой полосы билинейная форма $g_{ps}(p, q)$ является симметричной. Используя (3.6), далее получим неравенство

$$g_{ps}(q, q) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega \ge c_0 \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega \ge c_0 c_2 \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}^1(\mathrm{div};\Omega)}, \tag{5.4}$$

из которого с учетом (3.8) и (3.14) следует оценка

$$g_{ps}(q, q) \ge c_6 \|q\|^2_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)} \tag{5.5}$$

с положительной постоянной c_6, не зависящей от q. Следовательно, билинейная форма $g_{ps}(p,q)$ и оператор Пуанкаре—Стеклова G_{ps} являются положительно определенными на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$.

6. Вариационная формулировка задачи. Для решения системы (4.6)—(4.9), содержащей уравнения и неравенства, используется вариационный подход [15—20]. Образуем множество статически допустимых нормальных напряжений на Γ_p

$$\Sigma = \left\{p \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)\colon\ p \le 0; \langle p,1\rangle = F_2; \langle p, x_1 - x_1^c\rangle = M_3\right\} \tag{6.1}$$

Можно показать, что множество Σ является замкнутым выпуклым множеством в $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$. Кроме того, в соответствии со сделанными при постановке задачи предположениями это множество является непустым.

Пусть $q \in \Sigma$ — решение системы (4.6)—(4.9). Тогда для произвольного $p \in \Sigma$ получим следующую оценку

$$\begin{aligned}\langle p-q, G_{ps}q - \Phi\rangle &= \langle p-q, G_{ps}q - \Phi - \delta_2 - \varphi_3(x_1 - x_1^c)\rangle + \\ &+ \langle p-q, \delta_2 + \varphi_3(x_1 - x_1^c)\rangle = \langle p, G_{ps}q - \Phi - \delta_2 - \varphi_3(x_1 - x_1^c)\rangle - \\ &- \langle q, G_{ps}q - \Phi - \delta_2 - \varphi_3(x_1 - x_1^c)\rangle + \\ &+ \delta_2\langle p,1\rangle + \varphi_3\langle p, x_1 - x_1^c\rangle - \delta_2\langle q,1\rangle - \varphi_3\langle q, x_1 - x_1^c\rangle = \\ &= \langle p, G_{ps}q - \Phi - \delta_2 - \varphi_3(x_1 - x_1^c)\rangle \ge 0\end{aligned} \tag{6.2}$$

Из (6.2) следует, что искомые нормальные напряжения $q \in \Sigma$ удовлетворяют граничному вариационному неравенству

$$g_{ps}(p-q,q) - \phi(p-q) \ge 0 \quad \forall p \in \Sigma, \tag{6.3}$$

где $\phi(\cdot)$ — определенная на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ линейная форма

$$\phi(p) = \langle p, \Phi\rangle \tag{6.4}$$

Отметим, что неравенство (6.3) не содержит неизвестных смещения δ_2 и поворота φ_3 жесткого штампа. Как нетрудно видеть из преобразований (6.2), это является следствием того, что элементы множества статически допустимых нормальных напряжений Σ удовлетворяют уравнениям равновесия штампа (4.9).

Используя известные приемы [15, 32], можно доказать обратное утверждение: решение q вариационного неравенства (6.3) удовлетворяет системе уравнений и неравенств (4.6)—(4.9).

Учитывая, что билинейная форма $g_{ps}(p,q)$ является положительно определенной, а множество Σ — непустым замкнутым выпуклым множеством в $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$, вариационное неравенство (6.3) эквивалентно задаче минимизации граничного функционала: найти $q \in \Sigma$ такой, что

$$J(q) = \inf_{p\in\Sigma}\left\{J(p) = \frac{1}{2}g_{ps}(p,p) - \phi(p)\right\} \tag{6.5}$$

Кроме того, решение вариационного неравенства (6.3) и задачи минимизации (6.5) существует и единственно [15, 19, 20].

Отыскав нормальные напряжения $q \equiv \sigma_{22}$ на Γ_p как решение задачи (6.5), можно определить напряженно-деформированное состояние всей полосы, используя (4.4)—(4.5).

7. Аппроксимация задачи. Выбор метода аппроксимации задачи минимизации (6.5) определяется, в первую очередь, возможностью построения эффективной с вычислительной точки зрения аппроксимации оператора Пуанкаре–Стеклова G_{ps}, ядро интегрального представления (5.1) которого имеет вид [31]

$$K_s(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tilde{K}_s(\alpha h)\cos\alpha z d\alpha \tag{7.1}$$

$$\tilde{K}_s(t) = \frac{2(1-\nu^2)h}{Et}\frac{2\kappa \operatorname{sh} 2t - 4t}{2\kappa \operatorname{ch} 2t + \kappa^2 + 1 + 4t^2}, \quad \kappa = 3 - 4\nu \tag{7.2}$$

Аналитическое выражение для интеграла (7.1) неизвестно. Применение квадратурных формул для вычисления этого несобственного интеграла представляет собой трудоемкую вычислительную задачу. Альтернативный подход состоит в следующем. Нетрудно видеть, что $\tilde{K}_s(\alpha h)$ является косинус-трансформантой Фурье функции $K_s(z)$. Подвергнем (5.1) преобразованию Фурье и в соответствии с теоремой о свертке [11] получим

$$\tilde{w}(\alpha) = \tilde{K}_s(\alpha h)\tilde{q}(\alpha), \tag{7.3}$$

где $\tilde{w}(\alpha)$, $\tilde{q}(\alpha)$ – трансформанты Фурье соответственно нормальных перемещений $w(x_1)$ на Γ_1 и тривиального продолжения на Γ_1 нормальных напряжений $q(x_1)$. Следовательно, вычисление оператора Пуанкаре–Стеклова G_{ps} сводится к выполнению пары (прямого и обратного) преобразований Фурье и перемножению спектров (7.3).

В численном анализе использование преобразования Фурье наиболее эффективно в случае периодических функций благодаря дискретности их спектра и, как следствие, переходе от непрерывного преобразования к дискретному [11, 12]. Поэтому основная идея используемого ниже подхода состоит в аппроксимации искомых нормальных напряжений на Γ_p сеточными функциями, периодическими на всей границе Γ_1, и применении алгоритмов БПФ. Для уменьшения возникающей при этом ошибки периодичности вводится расширенная вычислительная область Γ_c [13, 14].

Выберем односвязную конечную вычислительную область $\Gamma_c \subset \Gamma_1$ так, чтобы выполнялись условия

$$\Gamma_p \Subset \Gamma_c, \quad L = \operatorname{diam}\Gamma_c = \chi \operatorname{diam}\Gamma_p; \quad \chi \in \mathbb{N}, \quad \chi > 1, \tag{7.4}$$

где χ – коэффициент расширения вычислительной области. Далее аналогично (3.10)–(3.12) введем пространство $H^{1/2}(\Gamma_c)$ и двойственное ему пространство $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$. Используя результаты [30], можно показать, что сужения функций из $H^{1/2}(\Gamma_c)$ на Γ_p принадлежат пространству $H^{1/2}(\Gamma_p)$, а тривиальное продолжение q_0 функции $q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ на Γ_c принадлежит пространству $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$. Обозначим через $\hat{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$ подпространство функций из $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$, имеющих носитель на $\overline{\Gamma}_p$. Учитывая (7.4), аналогично [33] продолжим периодически функции из $\hat{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$ на всю границу Γ_1 с периодом L и образуем пространство $\hat{H}_\sharp^{-1/2}(\Gamma_1)$ L-периодических функций. Далее функции из $\hat{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$ будем отождествлять с их периодическими продолжениями на Γ_1. Тем самым определим оператор $\Pi : \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p) \to \hat{H}_\sharp^{-1/2}(\Gamma_1)$, ставящий в соответствие функции из $q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ периодическое продолжение $q_{\text{per}} \in \hat{H}_\sharp^{-1/2}(\Gamma_1)$ на Γ_1 ее тривиального продолжения $q_0 \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$ на Γ_c.

Обозначим через $\widehat{L}_2(\Gamma_c)$ подпространство функций из $L_2(\Gamma_c)$, имеющих носитель на $\overline{\Gamma}_p$. Используя (3.13), можно показать, что имеет место плотное вложение пространств $\widehat{L}_2(\Gamma_c) \subset \widehat{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$. Функции из $\widehat{L}_2(\Gamma_c)$ можно рассматривать как L-периодические, следовательно система функций $\exp(i2\pi k x_1/L)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, является плотной в $\widehat{L}_2(\Gamma_c)$ [34]. Поэтому $q \in \widehat{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$ можно аппроксимировать с заданной точностью конечным отрезком ряда Фурье

$$q_f = \sum_{|k| \le K_f} c_k^q \exp(i2\pi k x_1/L); \quad c_k^q \in \mathbb{Z}, \quad c_k^q = (c_{-k}^q)^* \tag{7.5}$$

Для вычисления коэффициентов Фурье c_k^q с помощью ДПФ введем сеточные функции. Построим на Γ_c регулярную (равномерную) сетку T_c, состоящую из M одноузловых граничных элементов нулевого порядка размером $\delta_e = L/M$. Узлы T_c обозначим s_m, $m = \overline{1, M}$. Часть T_c, расположенную на Γ_p и содержащую N элементов, обозначим T_p. Из (7.4) следует, что $N = M/\chi$.

Далее векторы и матрицы будем обозначать большими латинскими буквами, а их элементы — соответствующими малыми латинскими буквами.

Введем на T_c сеточные функции нормальных напряжений и перемещений

$$\mathbf{Q}_c = (q(s_1), q(s_2), \ldots, q(s_M)), \quad \mathbf{W}_c = (w(s_1), w(s_2), \ldots, w(s_M)) \tag{7.6}$$

а также редукции этих функций на T_p

$$\mathbf{Q}_p = \mathbf{R}_{pc}\mathbf{Q}_c, \quad \mathbf{W}_p = \mathbf{R}_{pc}\mathbf{W}_c, \tag{7.7}$$

где $\mathbf{R}_{pc}$ — прямоугольная матрица размеров $N \times M$, в каждой строке которой имеется ровно один ненулевой элемент, равный 1.

Обратные операции тривиального продолжения (дополнения нулевыми элементами) $\mathbf{Q}_p$ и $\mathbf{W}_p$ на T_c могут быть выполнены с помощью транспонированной матрицы $\mathbf{R}_{pc}^T$

$$\mathbf{Q}_c = \mathbf{R}_{pc}^T\mathbf{Q}_p, \quad \mathbf{W}_c = \mathbf{R}_{pc}^T\mathbf{W}_p \tag{7.8}$$

Известно [11, 12], что спектр сеточной функции является периодическим и представляет собой бесконечный ряд сдвинутых копий спектра аппроксимируемой функции. Расстояние в частотной области между соседними копиями спектра равно частоте дискретизации $\omega_0 = 2\pi/\delta_e$. Для исключения эффекта наложения частот, а также возможности восстановления периодической функции по ее сеточной аппроксимации будем полагать, что число гармоник K_f в (7.5) и количество узлов M сетки T_c удовлетворяют условию

$$K_f < M/2, \tag{7.9}$$

вытекающему из теоремы Котельникова—Шеннона [11, 12].

Введем матрицу Фурье порядка M

$$\mathbf{F}_c = [f_{nm}]; \quad f_{nm} = \omega^{(n-1)(m-1)}, \quad \omega = \exp(-2\pi i/M) \tag{7.10}$$

Матрица Фурье обратима и при этом обратная матрица имеет вид

$$\mathbf{F}_c^{-1} = \mathbf{F}_c^*/M, \tag{7.11}$$

где $\mathbf{F}_c^*$ — эрмитово сопряженная матрица.

Используя матрицу $\mathbf{F}_c$, вычислим образы Фурье $\tilde{\mathbf{Q}}_c$ и $\tilde{\mathbf{W}}_c$ соответственно сеточных функций нормальных напряжений и перемещений

$$\tilde{\mathbf{Q}}_c = (\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{M-1}) = \mathbf{F}_c\mathbf{Q}_c = \mathbf{F}_c\mathbf{R}_{pc}^T\mathbf{Q}_p \tag{7.12}$$

$$\tilde{\mathbf{W}}_c = (\tilde{w}_0, \tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_{M-1}) = \mathbf{F}_c\mathbf{W}_c = \mathbf{F}_c\mathbf{R}_{pc}^T\mathbf{W}_p \tag{7.13}$$

Сеточные функции $\mathbf{Q}_c$ и $\mathbf{W}_c$ являются вещественными, поэтому из свойств ДПФ следует, что компоненты $\tilde{\mathbf{Q}}_c$ и $\tilde{\mathbf{W}}_c$ удовлетворяют условиям

$$\tilde{q}_{M-m} = \tilde{q}_m^*, \quad \tilde{w}_{M-m} = \tilde{w}_m^*, \quad m = 1, 2, \ldots, M-1 \tag{7.14}$$

Для сеточных функций соотношение (7.3) примет вид

$$\tilde{\mathbf{W}}_c = \tilde{\mathbf{K}}_s\tilde{\mathbf{Q}}_c, \quad \tilde{\mathbf{K}}_s = \mathrm{diag}(\tilde{k}_0, \tilde{k}_1, \ldots, \tilde{k}_{M-1}), \tag{7.15}$$

где с учетом (7.14)

$$\tilde{k}_m = \tilde{k}_{M-m} = \tilde{K}_s\left(2\pi mh/L\right), \quad m = 1, 2, \ldots, M/2 \tag{7.16}$$

$$\tilde{k}_0 = \lim_{t\to 0}\tilde{K}_s(t) = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)h}{(1-\nu)E} \tag{7.17}$$

Можно показать, что $\tilde{k}_0$ представляет собой коэффициент податливости рассматриваемой упругой полосы для случая приложения равномерной нормальной нагрузки по всей границе Γ_1.

Из (7.12)–(7.13) и (7.15) следует, что сеточная аппроксимация $\mathbf{G}_{ps} : \mathbf{Q}_p \mapsto \mathbf{W}_p$ оператора Пуанкаре–Стеклова G_{ps} имеет вид

$$\mathbf{G}_{ps} = \mathbf{R}_{pc}\mathbf{F}_c^*\tilde{\mathbf{K}}_s\mathbf{F}_c\mathbf{R}_{pc}^T/M \tag{7.18}$$

Учитывая, что все диагональные элементы матрицы $\tilde{\mathbf{K}}_s$ положительны, можно показать, что $\mathbf{G}_{ps}$ является симметричной положительно-определенной квадратной матрицей порядка N. При численной реализации формировать матрицу $\mathbf{G}_{ps}$ в явном виде не требуется, достаточно программно реализовать вычисление произведений каждой из матриц в правой части (7.18) на векторы. Учитывая, что матрицы $\mathbf{R}_{pc}$ и $\mathbf{R}_{pc}^T$ содержат только N ненулевых элементов равных 1, вычисление произведений этих матриц на векторы сводится к выполнению N операций присваивания. Умножение диагональной матрицы $\tilde{\mathbf{K}}_s$ на вектор требует выполнения M операций умножения. Для вычисления произведений матриц $\mathbf{F}_c$ и $\mathbf{F}_c^*$ на векторы целесообразно использовать алгоритмы БПФ. Поэтому далее будем полагать $M = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$. В этом случае число операций для выполнения одного преобразования имеет порядок $O(Mm) = O(M\log_2 M)$ [11, 12].

Далее для аппроксимации задачи (6.5) применим гранично-элементный подход [35–37]. Для вычисления билинейной $g_{ps}(\cdot,\cdot)$ и линейной $\phi(\cdot)$ форм используем квадратурную формулу прямоугольников, узлы которой совпадают с узлами сетки T_p. Тем самым определяются аппроксимирующие билинейная $g_{ps}^h(\cdot,\cdot)$ и линейная $\phi^h(\cdot)$ формы в пространстве $\mathbb{R}^N$

$$g_{ps}^h(\mathbf{P}_p, \mathbf{Q}_p) = \mathbf{P}_p^T\mathbf{G}_{ps}\mathbf{Q}_p\delta_e, \quad \phi^h(\mathbf{P}_p) = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_p\delta_e, \tag{7.19}$$

где $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^N$ – сеточная аппроксимация на T_p функции $\Phi(x_1)$, описывающей форму основания штампа.

При аппроксимации множества статически допустимых нормальных напряжений Σ, определенного формулой (6.1), применяется комбинированный подход. Для аппроксимации ограничений в виде неравенств используется коллокационный метод, а при аппроксимации ограничений в виде равенств – квадратурная формула прямоугольников, узлы которой совпадают с узлами сетки T_p. В результате получается замкнутое выпуклое множество статически допустимых узловых нормальных напряжений

$$\Sigma_h = \left\{ \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^N : q_n \le 0, n \in I_N = \{1, 2, \ldots, N\};\ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i q_i = F_2;\ \sum_{i=1}^{N} \vartheta_i q_i = M_3 \right\} \tag{7.20}$$

Коэффициенты λ_i и ϑ_i вычисляются по формулам

$$\lambda_i = \delta_e, \quad \vartheta_i = \delta_e (x_1^i - x_1^c); \quad i \in I_N, \tag{7.21}$$

где x_1^i – координата i-го узла сетки T_p.

В результате для задачи минимизации (6.5) получим сеточную аппроксимацию – задачу квадратичного программирования: найти сеточную функцию нормальных напряжений $\mathbf{Q}_p \in \mathbb{R}^N$ такую, что

$$J_h(\mathbf{Q}_p) = \min_{\mathbf{Q} \in \Sigma_h} \left\{ J_h(\mathbf{Q}) = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \mathbf{G}_{ps} \mathbf{Q} \delta_e - \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q} \delta_e \right\} \tag{7.22}$$

Отметим, что размерность задачи (7.22) равна N – количеству узлов сетки на Γ_p и не зависит от размера вычислительной области Γ_c, т.е. от выбора коэффициента расширения вычислительной области χ.

8. Решение задачи квадратичного программирования. Одна из сложностей, возникающих при численном решении задачи (7.22), состоит в наличии ограничений в виде равенств, содержащих все переменные задачи. В [25] для упрощения вида ограничений предложено линейное преобразование переменных позволяющее свести эти ограничения к простым ограничениям, содержащим только одну переменную. Для численного решения полученной в результате преобразования задачи квадратичного программирования с простыми ограничениям в настоящей работе используется вариант МСГ, подробно рассмотренный в [25] при решении задач дискретного контакта для упругой полуплоскости.

9. Численные результаты. Разработанный алгоритм реализован на языке FORTRAN с применением NVIDIA HPC SDK. Для выполнения БПФ использовалась библиотека cuFFT, позволяющая с помощью технологии CUDA производить вычисления на графических процессорах.

Для верификации алгоритма и разработанного программного обеспечения проведено сравнение численных решений ряда задач дискретного контакта, в частности, рассмотренных ниже задач для штампов с регулярным поверхностным рельефом с решениями, полученными с помощью известного алгоритма [24]. Учитывая возможности последнего, при постановке контактных задач использовалось лишь первое из уравнений равновесия штампа (2.5) и полагалось $\varphi_3 = 0$. Проведенные расчеты показали, что среднеквадратичные относительные расхождения решений (сеточных функций нормальных напряжений) не превышают 2×10^{-5}.

Кроме того, получены численные решения задач о вдавливании в упругую полосу штампа, форма основания которого описывается функцией

$$\Phi(x_1) = \vartheta a (x_1/a)^2, \tag{9.1}$$

где a – размер области контакта Γ_p, $\vartheta > 0$ – безразмерный параметр.

Несложно показать аналитически, что в случае нагружения такого штампа с эксцентриситетом ea относительно точки начального контакта $x_1 = 0$ распределение нормальных напряжений будет соответствовать распределению при отсутствии эксцентриситета, смещенному на величину ea, осадка штампа δ_2 уменьшится на ϑae^2, а сам штамп повернется на угол $\varphi_3 = 2\vartheta e$. Проведенные расчеты подтвердили эти выводы.

Далее приведен анализ результатов решения задач дискретного контакта, в которых область фактического контакта состояла из совокупности отдельных пятен контакта. Рассматривались задачи для гладких штампов с регулярным поверхностным рельефом, состоящим из K микровыступов. Номинальная область контакта полагалась равной $\Gamma_p = \{0 \le x_1 \le a,\ x_2 = h\}$. Форма основания штампов задавалась функцией

$$\Phi(x_1) = \Phi_1(x_1) + \Phi_2(\xi_1)/K, \tag{9.2}$$

где $\Phi_1(x_1)$ – выпуклая функция, определяющая макроформу штампа; $\Phi_2(\xi_1)$ – строго выпуклая функция, характеризующая форму микровыступов; $\xi_1 = \{Kx_1/a\}$ – “ быстрая” координата, $\{\cdot\}$ – дробная часть числа.

Для заданной пары функций $\Phi_1(x_1)$ и $\Phi_2(\xi_1)$ формула (9.2) определяет однопараметрическое семейство штампов $\Xi(K)$, в качестве параметра которого выступает число микровыступов K. Штампы, принадлежащие к одному семейству, имеют одинаковую макроформу, а их микровыступы являются подобными.

Расчеты выполнялись для следующего класса жестких штампов:

$$\Phi_1(x_1) = \alpha_1 a(2x_1/a - 1)^{m_1}, \quad \Phi_2(\xi_1) = \alpha_2 a(2\xi_1 - 1)^{m_2}, \tag{9.3}$$

где $\alpha_1 \ge 0$, $\alpha_2 > 0$, $m_1 > 1$, $m_2 > 1$ – безразмерные параметры.

Из формул (9.2)–(9.3) следует, что однопараметрическое семейство штампов $\Xi(K)$ определяется заданным набором параметров α_1, α_2, m_1, m_2. Рассмотрим в качестве примера семейство штампов $\Xi(K)$ при $\alpha_1 = 3\times 10^{-5}$, $\alpha_2 = 10^{-4}$, $m_1 = m_2 = 2$. На рис. 1, а–б изображены профили штампов соответственно с 16 и 128 микровыступами. Следует отметить, что на обоих рисунках масштабы изображения по вертикальной и горизонтальной осям отличаются на пять порядков.

Нормальная компонента главного вектора (погонная сила) и главный момент внешних сил, приложенных к штампу, задавались в виде:

$$F_2 = -faE^*, \quad M_3 = eF_2 a, \tag{9.4}$$

где $E^* = E/(1-\nu^2)$ – приведенный модуль упругости; $f > 0$ – безразмерный параметр; e – безразмерный параметр, характеризующий эксцентриситет равнодействующей внешней нагрузки относительно центра приведения $\mathbf{x}^c = (0.5a, h)$. При проведении расчетов значения параметров внешней нагрузки f и e выбирались таким образом, чтобы решение контактной задачи существовало и пятна контакта для отдельных микровыступов оставались изолированными друг от друга.

Введем на множестве микровыступов сеточную координату $i = \overline{1, K}$, и обозначим через Γ_i часть Γ_p, соответствующую микровыступу с сеточной координатой i. Далее для каждого штампа введем пары сеточных функций:

– значений $\mathbf{P} = [p_i]$ и координат $\mathbf{X}_p = [(x_1)_i]$ максимумов контактного давления на микровыступах

$$p_i = \max_{\Gamma_i} p(\xi_1), \quad (x_1)_i = \arg\max_{\Gamma_i} p(\xi_1) \tag{9.5}$$

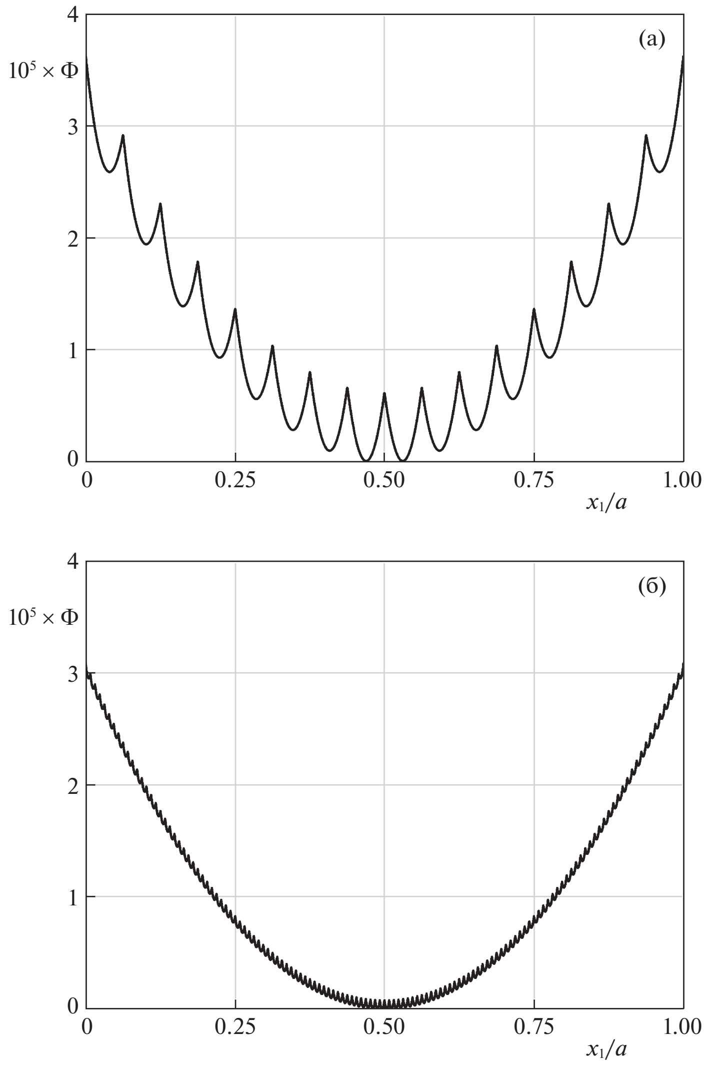

Рис. 1.

– нормализованных контактных усилий $\mathbf{R} = [r_i]$ и координат $\mathbf{X}_r = [(x_1)_i]$ точек их приложения на микровыступах

$$r_i = \frac{K}{|F_2|}\int_{\Gamma_i} p\,d\xi_1, \quad \int_{\Gamma_i} p(\xi_1 - x_1)\,d\xi_1 = 0 \tag{9.6}$$

– относительных величин площадей $\mathbf{S} = [s_i]$ и координат $\mathbf{X}_s = [(x_1)_i]$ центров тяжести пятен фактического контакта на микровыступах

$$s_i = \frac{1}{\operatorname{meas}\Gamma_i}\int_{\Gamma_i}[p > 0]\,d\xi_1, \quad \int_{\Gamma_i}[p > 0](\xi_1 - x_1)\,d\xi_1 = 0, \tag{9.7}$$

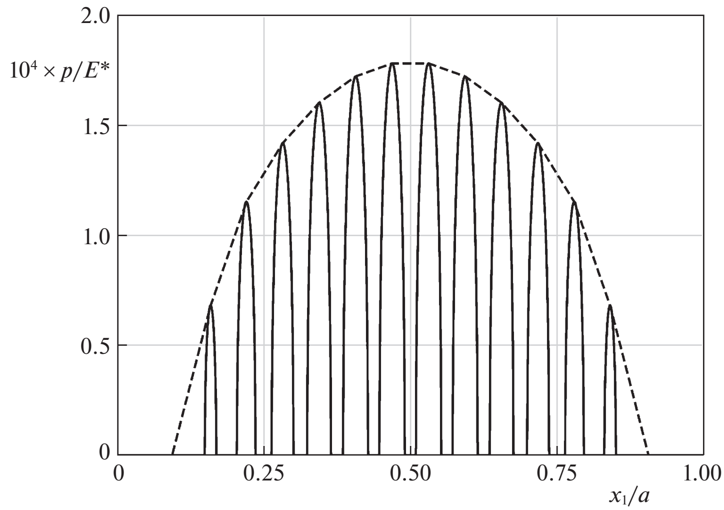

Рис. 2.

где $[\cdot]$ – скобка Айверсона (функция равная 1 для истинного аргумента и равная 0 в противном случае).

Для каждой пары функций $\{\mathbf{P}, \mathbf{X}_p\}$, $\{\mathbf{R}, \mathbf{X}_r\}$ и $\{\mathbf{S}, \mathbf{X}_s\}$ путем интерполяции построим на Γ_p непрерывные функции $p(x_1)$, $r(x_1)$ и $s(x_1)$, называемые далее соответственно огибающей контактного давления, огибающей нормализованных контактных усилий и огибающей относительных величин фактических площадей контакта микровыступов.

На рис. 2 в качестве примера приведено распределение контактного давления $p \equiv -\sigma_{22}$ на Γ_p для штампа, изображенного на рис. 1, а. Толщина полосы принималась равной $h = a/5$. Параметры внешней нагрузки в (9.4) полагались следующими: $f = 2\times10^{-5}$ и $e = 0$. Сплошная кривая соответствует контактному давлению, а пунктирная – огибающей контактного давления.

В результате обработки результатов расчетов установлена следующая закономерность: если условия нагружения штампов таковы, что пятна контакта отдельных микровыступов остаются изолированными друг от друга, то для однопараметрического семейства штампов $\Xi(K)$ существуют единая огибающая контактного давления $\tilde{p}(x_1)$, единая огибающая нормализованных контактных усилий $\tilde{r}(x_1)$ и единая огибающая относительных величин фактических площадей контакта $\tilde{s}(x_1)$ микровыступов, форма и положение которых зависят от параметров f и e внешней нагрузки, а также отношения размера a номинальной области контакта к толщине полосы h.

Для подтверждения этой закономерности на рис. 3, а–в приведены множества точек, соответствующих парам сеточных функций $\{\mathbf{P}, \mathbf{X}_p\}$, $\{\mathbf{R}, \mathbf{X}_r\}$ и $\{\mathbf{S}, \mathbf{X}_s\}$ сразу для шести штампов, имеющих 16, 32, 64, 128, 256 и 512 микровыступов. Значения параметров принимались следующими: $\alpha_1 = 3\times10^{-5}$, $\alpha_2 = 10^{-4}$, $m_1 = 4$, $m_2 = 2$, $f = 2\times10^{-5}$, $e = 0.1$ и $h = a/5$.

При проведении расчетов необходимое количество N граничных элементов определялось путем сравнения решений, полученных на вложенных сетках при их двукратном последовательном измельчении. При решении рассмотренных выше задач

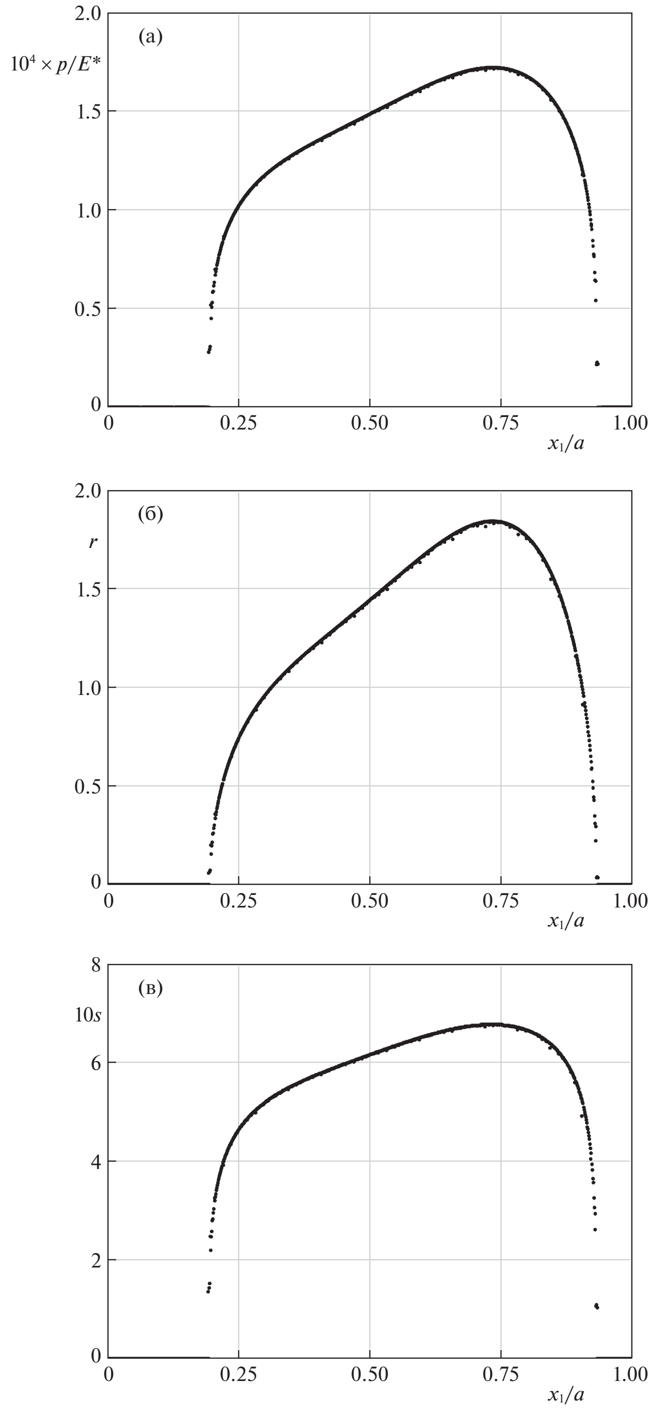
(а)
$10^4 \times p/E^*$
2.0
1.5
1.0
0.5
0
0
0.25
0.50
0.75
1.00
x_1/a
(б)
r
2.0
1.5
1.0
0.5
0
0
0.25
0.50
0.75
1.00
x_1/a
(в)
$10s$
8
6
4
2
0
0
0.25
0.50
0.75
1.00
x_1/a

Рис. 3.

для штампов с регулярным поверхностным рельефом каждый микровыступ Γ_i аппроксимировался сеткой из 1024 граничных элементов. Наибольшее количество элементов сетки для штампа с 512 микровыступами составляло $2^{19} = 524288$ элементов.

Заключение. Для решения задач дискретного контакта упругой полосы и жесткого штампа с заранее неизвестными площадками фактического контакта в настоящей работе применяется вариационный подход. Построено граничное вариационное неравенство с использованием оператора Пуанкаре—Стеклова, отображающего на части границы упругой полосы нормальные напряжения в нормальные перемещения. Получена эквивалентная задача минимизации граничного функционала на множестве статически допустимых нормальных напряжений.

Оператор Стеклова—Пуанкаре для упругой полосы строится с помощью интегрального преобразования Фурье, поэтому при аппроксимации этого оператора используется ДПФ. Для численной реализации прямого и обратного ДПФ применяются алгоритмы БПФ.

В результате аппроксимации вариационной формулировки с использованием гранично-элементного подхода получена задача квадратичного программирования с ограничениями в виде равенств и неравенств. Для численного решения этой задачи использован алгоритм на основе МСГ [25], учитывающий специфику множества ограничений и позволяющий получать решения контактных задач при внецентренном нагружении штампа, когда необходимо учитывать его повороты.

Построены однопараметрические семейства штампов с поверхностным рельефом, в качестве параметра которых выступает число микровыступов. Штампы, принадлежащие к одному семейству, имеют одинаковую макроформу, а их микровыступы являются подобными. В результате вычислительных экспериментов установлено существование для каждого семейства штампов единой огибающей контактного давления, единой огибающей нормализованных контактных усилий и единой огибающей относительных величин фактических площадей контакта микровыступов. Форма и положение этих огибающих для семейства штампов зависят от параметров внешней нагрузки и отношения размера номинальной области контакта к толщине полосы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
2. *Аргатов И.И., Дмитриев Н.Н.* Основы теории упругого дискретного контакта. СПб.: Политехника, 2003. 233 с.
3. *Попов В.Л.* Механика контактного взаимодействия и физика трения. От нанотрибологии до динамики землетрясений. М.: Физматлит, 2013. 352 с.
4. *Barber J.R.* Contact Mechanics. Cham: Springer, 2018. 585 p.
5. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
6. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
7. *Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y.* Development of discrete contact mechanics with applications to study the frictional interaction of deformable bodies // Mech. Solids. 2020. V. 55. P. 1441—1462.
8. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
9. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
10. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
11. *Chu E.* Discrete and Continuous Fourier Transforms: Analysis, Applications and Fast Algorithms. Boca Raton: CRC Press, 2008. 423 p.
12. *Brigham E.O.* The Fast Fourier Transform and Its Applications. Englewood Cliff: Prentice Hall, 1988. 448 p.
13. *Wang Q.J., Zhu D.* Interfacial Mechanics: Theories and Methods for Contact and Lubrication. Boca Raton: CRC Press, 2019. 636 p.

14. *Wang Q.J., Sun L., Zhang X. et al.* FFT-based methods for computational contact mechanics // Front. Mech. Eng. 2020. V. 6, 61. P. 92–113.
15. *Kravchuk A.S., Neittaanmäki P.J.* Variational and Quasi-Variational Inequalities in Mechanics. Dordrecht: Springer, 2007. 329 p.
16. *Wriggers P.* Computational Contact Mechanics. Berlin: Springer, 2006. 518 p.
17. *Yastrebov V.A.* Numerical Methods in Contact Mechanics. New York: ISTE/Wiley, 2013. 416 p.
18. *Eck C., Jarušek J., Krbec M.* Unilateral Contact Problems: Variational Methods and Existence Theorems. Boca Raton: CRC Press, 2005. 398 p.
19. *Sofonea M., Matei A.* Mathematical Models in Contact Mechanics. Cambridge: Univ. Press, 2012. 280 p.
20. *Capatina A.* Variational Inequalities and Frictional Contact Problems. Cham: Springer, 2014. 235 p.
21. *Поляк Б.Т.* Метод сопряженных градиентов в задачах на экстремум // ЖВММФ. 1969. Т. 9. № 4. С. 807–821.
22. *Dostál Z.* Optimal Quadratic Programming Algorithms. With Applications to Variational Inequalities. New York: Springer, 2009. 284 p.
23. *Dostál Z., Kozubek T., Sadowská M. et al.* Scalable Algorithms for Contact Problems. New York: Springer, 2016. 340 p.
24. *Polonsky I.A., Keer L.M.* A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques // Wear. 1999. V. 231. № 2. P. 206–219.
25. *Бобылев А.А.* Применение метода сопряженных градиентов к решению задач дискретного контакта для упругой полуплоскости // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 2. С. 154–172.
26. *Beale E.M.L.* A derivative of conjugate gradients // in: Numerical Methods for Nonlinear Optimization. London: Acad. Press, 1972. P. 39–43.
27. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 372 с.
28. *McLean W.* Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations. Cambridge: Univ. Press, 2000. 357 p.
29. *Sauter S.A., Schwab C.* Boundary Element Methods. Berlin; Heidelberg: Springer, 2011. 652 p.
30. *Hsiao G.C., Wendland W.L.* Boundary Integral Equations. Berlin; Heidelberg: Springer, 2008. 620 p.
31. *Александров В.М., Чебаков М.И.* Введение в механику контактных взаимодействий. Ростов-на-Дону: ООО “ ЦВВР”, 2007. 114 с.
32. *Хлуднев А.М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010. 252 с.
33. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
34. *Serov V.* Fourier Series, Fourier Transform and Their Applications to Mathematical Physics. Cham: Springer, 2017. 534 p.
35. *Gwinner J., Stephan E.P.* Advanced Boundary Element Methods. Treatment of Boundary Value, Transmission and Contact Problems. Cham: Springer, 2018. 652 p.
36. *Rjasanow S., Steinbach O.* The Fast Solution of Boundary Integral Equations. New York: Springer, 2007. 284 p.
37. *Steinbach O.* Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems: Finite and Boundary Elements. New York: Springer, 2008. 386 p.

An Algorithm for Solving Discrete Contact Problems for an Elastic Strip

A. A. Bobylev[a,b,#]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
[b] *Moscow Centre for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*
[#] *e-mail: abobylov@gmail.com*

Discrete contact problems for an elastic strip and a rigid punch are considered. Real areas of contact are unknown in advance. A variational formulation of the problems in the form of a boundary variational inequality is obtained by using the Poincaré–Steklov operator that maps normal stresses into normal displacements on a part of the elastic strip boundary. To approximate this operator the discrete Fourier transform is used. The fast Fourier transform algorithms are applied for numerical realization. A minimization problem equivalent to the variational inequality is formulated. A quadratic programming problem with equality and inequality restrictions is obtained by approximating the minimization problem. To solve the problem numerically an algorithm based on the conjugate gradient method is used. The algorithm takes into account the specificity of the constraint set. One-parameter families of punches with a surface relief are constructed, the parameter of which is the number of microprotrusions. As a result of computational experiments, it was established that a single contact pressure envelope, a single normalized contact traction envelope and a single relative contact area envelope exist for the one-parameter family of the punches. The form and position of the envelopes for the punch family depend on the external load parameters and the ratio of the nominal contact area to the strip thickness.

Keywords: discrete contact, elastic strip, boundary variational inequality, Fourier transform, conjugate gradient method

REFERENCES

1. *Goryacheva I.G.* Contact Mechanics in Tribology. Dordrecht: Springer, 1998. 346 p.
2. *Argatov I.I., Dmitriev N.N.* Fundamentals of the Theory of Elastic Discrete Contact. St. Petersburg: Polytechnics, 2003. 233 p. (in Russian)
3. *Popov V.L.* Contact Mechanics and Friction. Physical Principles and Applications. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. 362 p.
4. *Barber J.R.* Contact Mechanics. Cham: Springer, 2018. 585 p.
5. *Galin L.A.* Contact Problems of Elasticity and Viscoelasticity Theories. Moscow: Nauka, 1980. 304 p. (in Russian)
6. *Johnson K.L.* Contact Mechanics. Cambridge: Univ. Press, 1985. 452 p.
7. *Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y.* Development of discrete contact mechanics with applications to study the frictional interaction of deformable bodies // Mech. Solids, 2020, vol. 55, pp. 1441–1462.
8. *Ufland Ya.S.* Integral Transforms in Problems of the Elasticity Theory. Leningrad: Nauka, 1967. 402 p. (in Russian)
9. *Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A.* Nonclassical Mixed Problems of the Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1974. 456 p. (in Russian)
10. *Aleksandrov V.M., Mhitaryan S.M.* Contact Problems for Bodies with Thin Coatings and Stringers. Moscow: Nauka, 1983. 488 p. (in Russian)
11. *Chu E.* Discrete and Continuous Fourier Transforms: Analysis, Applications and Fast Algorithms. Boca Raton: CRC Press, 2008. 423 p.
12. *Brigham E.O.* The Fast Fourier Transform and Its Applications. Englewood Cliff: Prentice Hall, 1988. 448 p.
13. *Wang Q.J., Zhu D.* Interfacial Mechanics: Theories and Methods for Contact and Lubrication. Boca Raton: CRC Press, 2019. 636 p.
14. *Wang Q.J., Sun L., Zhang X. et al.* FFT-based methods for computational contact mechanics // Front. Mech. Engng., 2020, vol. 6(61), pp. 92–113.
15. *Kravchuk A.S., Neittaanmäki P.J.* Variational and Quasi-Variational Inequalities in Mechanics. Dordrecht: Springer, 2007. 329 p.
16. *Wriggers P.* Computational Contact Mechanics. Berlin: Springer, 2006. 518 p.
17. *Yastrebov V.A.* Numerical Methods in Contact Mechanics. N.Y.: ISTE/Wiley, 2013. 416 p.
18. *Eck C., Jarušek J., Krbec M.* Unilateral Contact Problems: Variational Methods and Existence Theorems. Boca Raton: CRC Press, 2005. 398 p.
19. *Sofonea M., Matei A.* Mathematical Models in Contact Mechanics. Cambridge: Univ. Press, 2012. 280 p.
20. *Capatina A.* Variational Inequalities and Frictional Contact Problems. Cham: Springer, 2014. 235 p.
21. *Polyak B.T.* The conjugate gradient method in extremal problems // USSR Comput. Math. Math. Phys, 1969, vol. 9, no. 4, pp. 94–112.
22. *Dostál Z.* Optimal Quadratic Programming Algorithms. With Applications to Variational Inequalities. N.Y.: Springer, 2009. 284 p.

23. *Dostál Z., Kozubek T., Sadowská M. et al.* Scalable Algorithms for Contact Problems. N.Y.: Springer, 2016. 340 p.
24. *Polonsky I.A., Keer L.M.* A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques // Wear, 1999, vol. 231, no. 2, pp. 206–219.
25. *Bobylev A.A.* Application of the conjugate gradient method to solving discrete contact problems for an elastic half-plane // Mech. Solids, 2022, no. 2. (In Press)
26. *Beale E.M.L.* A derivative of conjugate gradients // in: Numerical Methods for Nonlinear Optimization. London: Acad. Press, 1972, pp. 39–43.
27. *Lions J.L., Magenes E.* Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. Berlin;Heidelberg: Springer, 1972. 360 p.
28. *McLean W.* Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations. Cambridge: Univ. Press, 2000. 357 p.
29. *Sauter S.A., Schwab C.* Boundary Element Methods. Berlin;Heidelberg: Springer, 2011. 652 p.
30. *Hsiao G.C., Wendland W.L.* Boundary Integral Equations. Berlin; Heidelberg: Springer, 2008. 620 p.
31. *Aleksandrov V.M., Chebakov M.I.* Introduction into Contact Interaction Mechanics. Rostov-on-Don: TsVVR, 2007. 114 p. (in Russian)
32. *Khludnev A.M.* Elasticity Problems in Non-smooth Domains. Moscow: Fizmatlit, 2010. 252 p. (in Russian)
33. *Sanchez-Palencia E.* Non-homogeneous Media and Vibration Theory. Berlin: Springer, 1980. 398 p.
34. *Serov V.* Fourier Series, Fourier Transform and Their Applications to Mathematical Physics. Cham: Springer, 2017. 534 p.
35. *Gwinner J., Stephan E.P.* Advanced Boundary Element Methods. Treatment of Boundary Value, Transmission and Contact Problems. Cham: Springer, 2018. 652 p.
36. *Rjasanow S., Steinbach O.* The Fast Solution of Boundary Integral Equations. N.Y.: Springer, 2007. 284 p.
37. *Steinbach O.* Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems: Finite and Boundary Elements. N.Y.: Springer, 2008. 386 p.

EDN: MSKJEG
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА **2022, том 86, № 3, с. 424–444**

УДК 539.3

КОНТАКТ С МЕЖМОЛЕКУЛЯРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОГО СЛОЯ (САМОСОГЛАСОВАННЫЙ ПОДХОД): ДИССИПАЦИЯ ЭНЕРГИИ ПРИ ИНДЕНТИРОВАНИИ И СИЛА ТРЕНИЯ

© 2022 г. И. А. Солдатенков[1],*

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
**e-mail: iasoldat@hotmail.com*

Поступила в редакцию 31.12.2021 г.
После доработки 31.03.2022 г.
Принята к публикации 05.04.2022 г.

Рассматривается контакт бесконечно протяженного плоского индентора и вязкоупругого слоя в рамках самосогласованного по Дерягину подхода с поверхностным (традиционная постановка) и объемным (уточненная постановка) приложением сил межмолекулярного взаимодействия. С привлечением первого начала термодинамики решена задача по определению диссипации энергии в вязкоупругом слое при заданном законе подвода/отвода индентора. На основе этого решения произведен расчет силы трения при скольжении шероховатого контртела по вязкоупругому слою. Результаты расчетов свидетельствуют о существенном влиянии скачкообразного изменения контактного зазора во времени на диссипацию энергии и силу трения.

Ключевые слова: контактная задача, вязкоупругий слой, межмолекулярное взаимодействие, диссипация энергии, трение

DOI: 10.31857/S0032823522030109

При изучении контакта деформируемых тел силы межмолекулярного взаимодействия впервые учитывались применительно к герцевскому контакту [1]. В дальнейшем был разработан ряд эффективных подходов к решению контактных задач такого типа, среди которых следует отметить подходы, использующие концепцию поверхностной энергии – модели JKR и DMT [2, 3]. Эти подходы также использовались для расчета адгезионного контакта слоистых [4–7] и вязкоупругих тел [8–11].

Строгая постановка контактной задачи, учитывающая межмолекулярное взаимодействие, предполагает существование некоторого зазора r между контактирующими телами. Величина этого зазора должна обеспечивать баланс сил, обусловленных контактной деформацией тел и их межмолекулярным взаимодействием (самосогласованный подход по Дерягину [12]). При таком подходе возможны постановки задачи с поверхностным (традиционная постановка [13–15]) и объемным (уточненная постановка [16–20]) приложением сил межмолекулярного взаимодействия.

Одной из характерных особенностей адгезионного контакта является возможность скачкообразного изменения его параметров. Впервые подобное изменение было теоретически описано применительно к подпружиненному контакту твердых тел при наличии сил Лондона–Ван-дер-Ваальса [21]. В дальнейшем скачкообразное изменение параметров адгезионного контакта упругих тел рассматривалось во многих исследованиях, среди которых отметим работы [12–14, 22], использующие самосогласованный подход при постановке задачи.

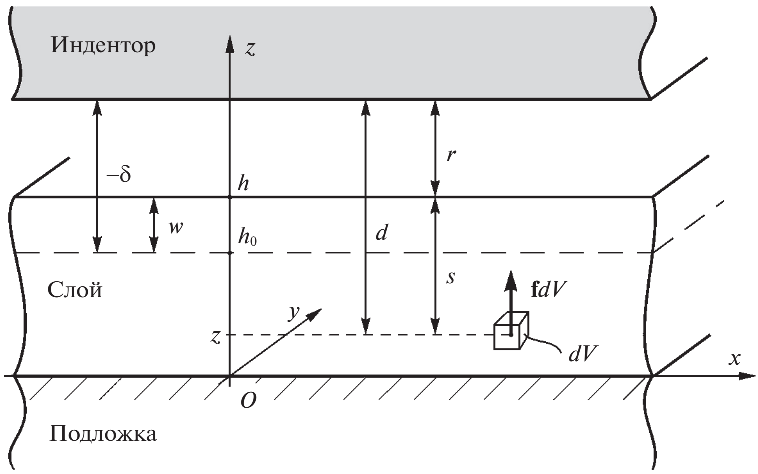

Рис. 1. Контактное взаимодействие индентора с основанием, состоящим из вязкоупругого слоя, связанного с абсолютно жесткой подложкой.

Аналогичная самосогласованному подходу концепция используется в теории бесконтактного трения, допускающей существование контактного зазора между трущимися поверхностями [23–27]. Были рассмотрены различные механизмы такого трения, например, эмиссия фононов, джоулева диссипация, эффекты сил Ван-дер-Ваальса.

Ранее был выполнен расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) и диссипации энергии в вязкоупругом слое при наличии сил межмолекулярного взаимодействия (самосогласованный подход, традиционная и уточненная постановки задачи) при заданном контактном зазоре $r(t)$ [28], а также был выполнен расчет зазора $r(t)$ при заданном законе внедрения $\delta(t)$ индентора [29].

В данной работе, на основе полученных ранее результатов [28, 29], определяется диссипация энергии в вязкоупругом слое в режиме подвода/отвода индентора при заданном законе его внедрения. На основе решения этой задачи произведен расчет силы трения скольжения шероховатого контртела по вязкоупругому слою в режиме бесконтактного трения. Изучается влияние скачкообразного изменения контактного зазора во времени на диссипацию энергии и силу трения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим контактное взаимодействие бесконечно протяженного плоского индентора и основания, состоящего из вязкоупругого слоя, связанного с подложкой, причем индентор и подложка являются абсолютно жесткими (рис. 1). Считается, что индентор и слой разделены контактным зазором r, обеспечивающим баланс сил вязкоупругого и межмолекулярного взаимодействий контактирующих тел (самосогласованный подход) [12]. Свяжем с основанием систему координат $Oxyz$, совместив ее плоскость Oxy с границей раздела слоя и подложки. Контакт индентора и слоя считается плоскопараллельным, что обуславливает зависимость всех контактных характеристик только от координаты z и времени t. Толщину слоя в недеформированном состоянии обозначим через h_0, а в деформированном – через h.

Межмолекулярное взаимодействие индентора и основания определяется парными взаимодействиями их молекул (гипотеза Гамакера). Соответствующая сила F зависит от свойств пары молекул и расстояния l между ними. Существуют разные формы такой зависимости, и в дальнейшем будет использоваться известный закон Леннард-Джонса [30]:

$$F(l) = \frac{a_1}{l^m} - \frac{a_2}{l^n}, \tag{1.1}$$

где a_1, a_2, m, n — параметры взаимодействия, причем обычно полагают $m = 7$, $n = 13$.

При определенных допущениях [14, 31] суммирование парных взаимодействий молекул позволяет для каждой точки слоя рассчитать объемную силу $\mathbf{f}$, обусловленную межмолекулярным взаимодействием. Эта сила направлена вдоль оси z и зависит от расстояния $d = r + s = r + h - z$ между точкой ее приложения и индентором (рис. 1), причем толщину h слоя здесь можно заменить постоянным значением h_0, что допустимо при малых деформациях. Таким образом, если обозначить через f_i, $i = 1,2,3$ компоненты объемной силы в системе координат $Oxyz$, то

$$f_1 = f_2 \equiv 0, \quad f_3(z,t) = f(r(t) + h_0 - z) \tag{1.2}$$

Суммирование парных взаимодействий молекул позволяет также определить полную силу p воздействия индентора на основание, приходящуюся на единицу площади его поверхности (верхней границы):

$$p(t) = \Phi(r(t)), \quad \Phi(r) = -\int\limits_0^\infty f(r + s)ds, \tag{1.3}$$

которая в рамках самосогласованного подхода интерпретируется как контактное давление [12–14, 19]. Кроме того, исключив из контактного давления p силу воздействия индентора на подложку, можно определить фиктивное контактное давление p_c, обусловленное межмолекулярным воздействием индентора только на слой:

$$p_c(t) = \Phi_c(r(t)), \quad \Phi_c(r) = -\int\limits_0^{h_0} f(r + s)ds \tag{1.4}$$

Выражения для функций $f(d)$ и $\Phi(r)$ в случае закона Леннард-Джонса приведены в [28, 29], тогда как функция $\Phi_c(r)$ имеет вид

$$\Phi_c(r) = -\frac{A_{1c}}{r_{ec}^k}\left\{\left[\left(\frac{r_{ec}}{r}\right)^k - \left(\frac{r_{ec}}{H}\right)^k\right] - \left[\left(\frac{r_{ec}}{r}\right)^l - \left(\frac{r_{ec}}{H}\right)^l\right]\right\}, \tag{1.5}$$

где $k = m - 4$, $l = n - 4$, $H = h_0 + r$, величины A_{1c}, r_{ec} выражаются известным образом через параметры закона (1.1) [28, 29].

Традиционная постановка контактной задачи при наличии межмолекулярного взаимодействия подразумевает, что определяемое по формуле (1.3) контактное давление прикладывается к поверхности слоя, в результате чего он деформируется [12–15]. Ниже также рассматривается уточненная постановка, в которой естественным образом предполагается, что деформация слоя порождается объемными силами (1.2), распределенными по его глубине, тогда как поверхность слоя свободна от нагрузок [16–20]. В качестве параметра нагружения слоя в обеих постановках выступает зазор r, однозначно определяющий объемную силу f_i по формуле (1.2) и контактное давление p по формуле (1.3).

Замечание 1. В работах [28, 29] расчет НДС слоя при традиционной постановке задачи выполнялся в предположении, что к его поверхности прикладывается контактное давление p. Однако это давление, согласно выражению (1.3), определяется межмолекулярным воздействием индентора не только на слой, но и на недеформируемую подложку. В связи с этим, представляется более корректным выполнять расчет НДС слоя, полагая, что он нагружается фиктивным контактным давлением p_c вида (1.4), обусловленным межмолекулярным воздействием индентора только на слой.

Деформационные свойства слоя описываются линейным законом наследственного типа [32–34]

$$\sigma_{ij}(z,t) = \delta_{ij}\lambda\theta(z,t) + 2\mu\varepsilon_{ij}(z,t) - \delta_{ij}\int\limits_{-\infty}^{t}\Lambda(t-\tau)\theta(z,\tau)d\tau - 2\int\limits_{-\infty}^{t}\mathrm{M}(t-\tau)\varepsilon_{ij}(z,\tau)d\tau \equiv$$
$$\equiv \delta_{ij}\lambda\theta(z,t) + 2\mu\varepsilon_{ij}(z,t) + \sigma_{ij}^{v}(z,t), \tag{1.6}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ – компоненты тензоров деформаций и напряжений, $\theta = \varepsilon_{kk}$, причем здесь и далее применяется правило суммирования по повторяющимся индексам. Величины λ и μ представляют собой мгновенные модули упругости (постоянные Ламе), а функции Λ, M характеризуют вязкие свойства материала слоя и выражаются через ядра сдвиговой R_1 и объемной R_2 релаксации:

$$\Lambda(t) = KR_2(t) - \frac{2}{3}\mu R_1(t), \quad \mathrm{M}(t) = \mu R_1(t), \tag{1.7}$$

причем $K = \lambda + 2\mu/3$ – мгновенный модуль объемной упругости.

Для построения полной системы уравнений НДС слоя соотношение (1.6) следует дополнить формулой Коши и уравнением равновесия [32, 33]:

$$\varepsilon_{ij}(z,t) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(z,t) + u_{j,i}(z,t)), \quad \sigma_{ij,j}(z,t) + f_i(z,t) = 0$$

в которых u_i – компоненты вектора перемещений, объемная сила f_i обусловлена межмолекулярным взаимодействием и определяется равенствами (1.2). Здесь и далее для записи частной производной функции используется общепринятое обозначение с запятой.

Для дальнейших выкладок потребуется конкретизировать ядра интегральных операторов в соотношении (1.6). Не ограничивая общности рассмотрения, пренебрежем объемной ползучестью материала слоя и положим [34]: $R_1(t) = R_0e^{-\alpha t}$, $R_2(t) \equiv 0$, так что, в силу соотношений (1.7):

$$\Lambda(t) = \Lambda_0 e^{-\alpha t}, \quad \mathrm{M}(t) = \mathrm{M}_0 e^{-\alpha t}, \tag{1.8}$$

где α, R_0 – заданные параметры, причем $\alpha = 1/t_r$, t_r – время релаксации, $\Lambda_0 = -2\mu R_0/3$, $\mathrm{M}_0 = \mu R_0$. Кроме того, введем в рассмотрение длительные (равновесные) модули упругости $\lambda^\infty, \mu^\infty$, а также мгновенный B и длительный B^∞ коэффициенты упругой податливости слоя:

$$B = \frac{1}{\lambda + 2\mu}, \quad B^\infty = \frac{1}{\lambda^\infty + 2\mu^\infty} = \frac{\alpha}{\beta}B,$$

причем $\beta = \alpha - B\mathrm{N}_0 > 0$, $\mathrm{N}_0 = 4\mu R_0/3$ [28].

В качестве контактной характеристики будем использовать внедрение δ индентора в слой, отсчитываемое от поверхности слоя в недеформированном состоянии, т.е. от уровня $z = h_0$ (рис. 1). Отметим, что внедрение δ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, причем последний случай изображен на рис. 1. Имеет место условие контакта

$$r(t) + w(t) = -\delta(t), \tag{1.9}$$

связывающее внедрение δ с зазором r и перемещением $w = h - h_0$ поверхности слоя вдоль оси z.

Считается, что до момента времени $t = 0$ взаимодействие индентора с основанием является стационарным с постоянными во времени внедрением δ^s и зазором r^s, т.е.

$$\delta(t) = \delta^s, \quad r(t) = r^s; \quad t \le 0 \tag{1.10}$$

Далее будет рассматриваться непрерывная зависимость $\delta(t)$, отвечающая переходу слоя из начального стационарного состояния (1.10) в другое стационарное состояние с конечным внедрением δ_m индентора, т.е.

$$\delta(t) \in C(-\infty, \infty); \quad \delta(t) = \delta^s, \quad t \le 0; \quad \delta(t) = \delta_m, \quad t \ge t_m, \tag{1.11}$$

где t_m — время перемещения индентора, $0 < t_m$. Для такой зависимости будут рассмотрены режимы подвода индентора:

$$\dot{\delta}(t) > 0, \quad t \in (0, t_m); \quad \delta^s < \delta_m \tag{1.12}$$

и отвода индентора:

$$\dot{\delta}(t) < 0, \quad t \in (0, t_m); \quad \delta^s > \delta_m \tag{1.13}$$

Здесь и далее точкой над символом функции обозначается ее производная по времени.

Подобный характер изменения внедрения $\delta(t)$ позволяет допустить асимптотическое поведение функции $r(t)$ на бесконечности:

$$r(t) \to r_m, \quad t \to \infty, \tag{1.14}$$

где r_m — значение контактного зазора в стационарном состоянии с внедрением δ_m.

Начальное r^s и конечное r_m значения зазора, отвечающие начальному δ^s и конечному δ_m внедрению, находятся из уравнения [29]

$$B^\infty h_0 Z\left(\begin{Bmatrix} r^s \\ r_m \end{Bmatrix}\right) - \begin{Bmatrix} r^s \\ r_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta^s \\ \delta_m \end{Bmatrix} \tag{1.15}$$

Здесь и далее функция $Z(r)$ определяется по правилу

$$Z(r) = \begin{pmatrix} \Phi_c(r) \\ \Psi(r) \end{pmatrix},$$

причем верхний/нижний вариант в круглых скобках отвечает традиционной/уточненной постановке задачи.

Изменение зазора r во времени описывается дифференциальным уравнением:

$$\dot{r}(t) = \frac{\dot{\delta}(t) - \beta\left[B^\infty h_0 Z(r(t)) - r(t) - \delta(t)\right]}{B h_0 Z'(r(t)) - 1}, \tag{1.16}$$

в котором штрих у символа функции обозначает ее производную по аргументу.

Уравнение (1.16), как и прежде [29], получается путем дифференцирования по t условия контакта (1.9), в котором граничное перемещение w, как компонента НДС слоя, известным образом выражается через функцию $r(t)$. Однако здесь для расчета НДС при традиционной постановке задачи используется фиктивное контактное давление p_c (Замечание 1), поэтому в уравнении (1.16) присутствует функция $\Phi_c(r)$, тогда как прежде использовалась функция $\Phi(r)$.

Далее будет допускаться возможность существования у функции $r(t)$ нескольких точек разрывов первого рода [35], что, в свою очередь, обусловлено тем, что знаменатель в правой части дифференциального уравнения (1.16) может принимать нулевые значения [29]. Решение такого уравнения может быть построено при помощи известных численных методов (например, метода Рунге–Кутты четвертого порядка точности [36]) с привлечением специальной процедуры учета разрывов функции [29].

Как указывалось выше, при рассматриваемом плоскопараллельном контакте индентора и слоя (рис. 1), компоненты $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ НДС слоя зависят только от координаты z и времени t, поэтому все они равны нулю, кроме ε_{33}, $\sigma_{11} = \sigma_{22}$, σ_{33} [28]. Для этих компонент ранее были получены формулы [28], которые без труда переносятся на рассматриваемый случай функции $r(t)$ с несколькими точками разрыва первого рода:

$$\varepsilon_{33}(z,t) = \frac{B\mathrm{N}_0}{\alpha} w^s_{,z}(z)e^{-\beta t} + \tilde{w}_{,z}(z,t) \tag{1.17}$$

$$\sigma_{11}(z,t) = \sigma_{22}(z,t) = 2\mu_* \frac{\beta}{\alpha} w^s_{,z}(z)e^{-\beta t} + \tilde{\sigma}(z,t), \quad \sigma_{33}(z,t) = -X_{,z}(z,t), \tag{1.18}$$

где $\mu_* = [1 - (\alpha - R_0)/\beta]\mu$, $w^s(z) = -B^\infty X^s(z)$,

$$\tilde{w}(z,t) = -B\left[X(z,t) + B\mathrm{N}_0\int_0^t e^{-\beta(t-\tau)}X(z,\tau)d\tau\right]$$

$$\tilde{\sigma}(z,t) = -B\left[\lambda X_{,z}(z,t) + \frac{3}{2}KB\mathrm{N}_0\int_0^t e^{-\beta(t-\tau)}X_{,z}(z,\tau)d\tau\right] \tag{1.19}$$

$$X(z,t) = \begin{pmatrix} p_c(t)z \\ \mathcal{R}(f_3)(z,t)\end{pmatrix}, \quad X^s(z) = \begin{pmatrix} p^s_c z \\ \mathcal{R}(f^s)(z)\end{pmatrix}$$

В равенствах (1.19), как и прежде, верхний/нижний вариант в круглых скобках отвечает традиционной/уточненной постановке задачи, причем записи верхнего варианта предполагают, что НДС слоя обусловлено фиктивным контактным давлением p_c, согласно Замечанию 1. Присутствующие в равенствах (1.19) функции $f_3(z,t)$ и $p_c(t)$ определяются по формулам (1.2) и (1.4), $f^s(z) = f(r^s + h_0 - z)$, $p^s_c = \Phi_c(r^s)$. Оператор $\mathcal{R}$ был определен ранее [28], здесь же только отметим, что он действует на функцию по аргументу z.

Из определения (1.6) величины σ^V_{ij} и формул (1.17), (1.18) вытекает соотношение

$$\varepsilon_{33}(z,t) = -B[X_{,z}(z,t) + \sigma^V_{33}(z,t)], \tag{1.20}$$

которое будет использоваться в следующем разделе.

Важной особенностью формул (1.17), (1.18) является то, что их правые части и, следовательно, компоненты НДС слоя, выражаются через функцию $X(z,t)$. Согласно равенствам (1.2), (1.4) и (1.19), эта функция целиком определяется функцией $r(t)$, которая, будучи решением дифференциального уравнения (1.16), находится по известному внедрению $\delta(t)$ индентора. Указанные обстоятельства позволят нам в дальнейшем на основе формул (1.17), (1.18) рассчитать диссипацию энергии в вязкоупругом слое при заданном внедрении $\delta(t)$, ввиду того, что диссипация энергии целиком определяется эволюцией во времени НДС слоя [28]. В свою очередь, это позволит найти гистерезисные потери при подводе–отводе индентора и силу трения скольжения шероховатого индентора о вязкоупругий слой.

2. Расчет диссипации энергии. При деформировании некоторого объема $V = Sh_0$ вязкоупругого слоя площадью S на промежутке времени $[t_1, t_2]$ происходит диссипация энергии $D_{[t_1,t_2]}$, определяемая как теплота, выделенная объемом V за это время. Согласно первому началу термодинамики [33]:

$$D_{[t_1,t_2]} = \int\limits_V W_{[t_1,t_2]} dV - [U(t_2) - U(t_1)], \qquad (2.1)$$

где U — внутренняя энергия, которая является функцией состояния слоя и при неизменной температуре определяется эволюцией его НДС,

$$W_{[t_1,t_2]} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sigma_{ij}(\tau) d\varepsilon_{ij}(\tau) \qquad (2.2)$$

— удельная работа деформации на промежутке $[t_1, t_2]$. Здесь для простоты опускается аргумент z у функций, интеграл (2.2) понимается в смысле Стилтьеса [35].

В дальнейшем также будет использоваться удельная потенциальная энергия П упругой деформации. Она определяется через компоненты ε_{ij} по известной формуле [37], которая для рассматриваемого случая НДС имеет вид [28]

$$\Pi(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2B}\varepsilon_{33}^2, \quad \Pi^\infty(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2B^\infty}\varepsilon_{33}^2, \qquad (2.3)$$

причем последнее выражение определяет потенциальную энергию с длительными модулями упругости λ^∞ и μ^∞, которая отвечает стационарному состоянию слоя.

Как указывалось в предыдущем разделе, функция $r(t)$ может иметь разрывы первого рода. Учитывая это, допустим, что функции $\varepsilon_{ij}(t)$ и $\sigma_{ij}(t)$ тоже имеют точку разрыва $\hat{t} \in [t_1, t_2]$ первого рода, являясь кусочно-гладкими.

Отметим, что при наличии у функций $\varepsilon_{ij}(t)$ и $\sigma_{ij}(t)$ разрывов в одной и той же точке $\hat{t}$, интеграл Стилтьеса (2.2), представляющий работу деформации, не существует [35]. Однако, исходя из физического смысла работы, можно выполнить регуляризацию этого интеграла. Для этого следует заменить скачкообразное изменение функции $r(t)$ в произвольно малой окрестности $(\hat{t} - \mu, \hat{t} + \mu)$ точки $\hat{t}$ некоторым непрерывным изменением и вычислить соответствующие функции $\varepsilon_{ij}(t)$, $\sigma_{ij}(t)$ и интеграл (2.2). После этого для полученного интеграла необходимо выполнить предельный переход $\mu \to 0$, приводящий к исходным разрывам функций $r(t)$, $\varepsilon_{ij}(t)$ и $\sigma_{ij}(t)$ в точке $\hat{t}$. В результате, как и прежде [28], выражение (2.2) для удельной работы деформации можно представить в следующем виде

$$W_{[t_1,t_2]} = \Pi(\varepsilon_{ij}^+(\hat{t})) - \Pi(\varepsilon_{ij}^-(\hat{t})) + \sigma_{ij}^v(\hat{t})\left[\varepsilon_{ij}^+(\hat{t}) - \varepsilon_{ij}^-(\hat{t})\right] + \int\limits_{t_1}^{t_2} \sigma_{ij}(\tau)\dot{\varepsilon}_{ij}(\tau) d\tau, \qquad (2.4)$$

где $\varepsilon_{ij}^\pm(\hat{t}) = \lim\limits_{t\to\hat{t}\pm 0} \varepsilon_{ij}(t)$, функция $\sigma_{ij}^v(t)$ определена в соотношении (1.6), а интеграл понимается в смысле Римана и берется отдельно по полуинтервалам $[t_1, \hat{t})$ и $(\hat{t}, t_2]$ непрерывности подынтегрального выражения. Выражение (2.4) без труда обобщается на случай нескольких точек разрыва первого рода функций $\varepsilon_{ij}(t)$ и $\sigma_{ij}(t)$ — в этом случае в правой части равенства (2.4) следует выполнить суммирование по всем точкам разрыва.

В соответствии с допущениями (1.11) и (1.14), далее будет рассматриваться процесс деформирования слоя из стационарного состояния $\varepsilon_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}^s$, $\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}^s$, $t \le 0$, отвечающего $\delta(t) = \delta^s$, $r(t) = r^s$, в асимптотически стационарное состояние $\varepsilon_{ij}(t) \to \varepsilon_{ij}^\infty$,

$\sigma_{ij}(t) \to \sigma_{ij}^{\infty}$, $t \to \infty$, отвечающее $\delta(t) = \delta_m$, $r(t) = r_m$. Для каждого такого состояния внутренняя энергия U вязкоупругого слоя определяется по формуле [28]

$$U = \int\limits_V \Pi^{\infty}(\varepsilon_{ij})\,dV \tag{2.5}$$

Подстановка выражения (2.5) в равенство (2.1) позволяет получить следующее выражение для удельной диссипации энергии d^{∞} за время рассматриваемого процесса деформирования слоя:

$$d^{\infty} \equiv \frac{1}{S}\lim_{t\to\infty} D_{[0,t]} = \int\limits_0^{h_0} \left\{W^{\infty}(z) - \left[\Pi^{\infty}(\varepsilon_{ij}^{\infty}(z)) - \Pi^{\infty}(\varepsilon_{ij}^{s}(z))\right]\right\}dz, \tag{2.6}$$

причем $W^{\infty} = \lim\limits_{t\to\infty} W_{[0,t]}$. При выводе этого выражения интегрирование по объему $V = Sh_0$ слоя было сведено к интегрированию по его толщине ввиду того, что компоненты ε_{ij}, σ_{ij} НДС слоя зависят только от координаты z и времени t.

В силу соотношений (2.3), (2.4), правая часть равенства (2.6) определяется эволюцией во времени компонент ε_{ij}, σ_{ij} НДС слоя. Заменим в (2.6) эти компоненты их выражениями (1.18) и (1.20), отметив, что выражение (1.20) содержит непрерывную по z функцию $\sigma_{33}^{v}(z,t)$ и, поэтому, позволяет эффективно определять скачки функций в правой части равенства (2.4). В результате можно установить, что

$$d^{\infty} = \frac{BN_0}{\alpha} B^{\infty}[\beta I^{\infty} - (K^{\infty} - K^{s})/2], \tag{2.7}$$

где

$$I^{\infty} = \lim_{t\to\infty} I(t), \quad K^{\infty} = \lim_{t\to\infty} K(t,t), \quad K^{s} = K(0,0)$$

$$I(t) = \int\limits_0^t [K(\tau,\tau) - e^{-\beta\tau}K(0,\tau) - \beta\int\limits_0^{\tau} e^{-\beta(\tau-s)}K(\tau,s)ds]d\tau \tag{2.8}$$

$$K(t,\tau) = \int\limits_0^{h_0} \left(\frac{p_c(t)p_c(\tau)}{\mathcal{R}(f_3)_{,z}(z,t)\,\mathcal{R}(f_3)_{,z}(z,\tau)}\right)dz$$

Формула (2.7) позволяет рассчитать диссипацию энергии в вязкоупругом слое при заданном внедрении $\delta(t)$. Действительно, правая часть равенства (2.7) целиком определяется функцией $r(t)$, т.к. через эту функцию, согласно формулам (1.2) и (1.4), определяются функции $f_3(z,t)$ и $p_c(t)$. В свою очередь, функция $r(t)$ находится из дифференциального уравнения (1.16) по заданному внедрению $\delta(t)$.

В качестве примера были выполнены расчеты диссипации энергии при линейном изменении внедрения δ индентора за время t_m от начального δ^s до конечного δ_m значений:

$$\delta(t) = \begin{cases} \delta^s, & t \le 0 \\ \delta^s + \dot{\delta}t, & t \in (0,t_m), \\ \delta_m, & t \ge t_m \end{cases} \tag{2.9}$$

где $\dot{\delta}$ – постоянная скорость внедрения. Целью расчетов было построение зависимости диссипации энергии d^{∞} от конечного внедрения δ_m при неизменном значении δ^s.

Время t_m перемещения индентора определялось по формуле $t_m = (\delta_m - \delta^s)/\dot{\delta}$, что обеспечивало одинаковую скорость $\dot{\delta}$ внедрения для каждого значения δ_m. Для определенности рассматривался режим подвода (1.12).

Расчеты проводились при следующих значениях параметров задачи: $m = 7$, $n = 13$, $r_{ec} = 1$ нм, $r_{eb} = 0.5 r_{ec}$, $h_0 = 5$ нм, $\delta^s = -4 r_{ec}$, $\dot{\delta} = 2.625$ мкм/с, $\lambda \simeq 2.08$ МПа, $\mu \simeq 3.13$ МПа, $R_0 = 0.8 \times 10^3$ с$^{-1}$, $t_r = 10^{-3}$ с, при этом значения мгновенного и длительного коэффициентов упругой податливости слоя составляли $B = 0.12$ МПа$^{-1}$ и $B^\infty = 0.2$ МПа$^{-1}$, соответственно. Кроме того, полагалось, что $A_{1c} = (6\pi)^{-1} A_H$ [12] и $A_{1b} = 10 A_{1c}$, где A_H – постоянная Гамакера, $A_H = 10^{-19}$ Дж.

Для графического представления результатов расчетов здесь и далее будут использоваться безразмерные величины: $\tilde{t} = t/t_r$, $\tilde{r} = r/r_{ec}$, $\tilde{r}_m = r_m/r_{ec}$, $\tilde{\delta}_m = \delta_m/h_0$, $\tilde{d}^\infty = d^\infty/d_*$, где $d_* = (B^\infty - B) h_0 p_*^2$, $p_* = A_{1c}/r_{ec}^{m-4}$. Сплошная/штриховая линия на графиках отвечает уточненной/традиционной постановке задачи. Для обеспечения условия малости деформаций, при расчетах значения внедрения $\delta(t)$ полагались существенно меньшими толщины h_0 слоя.

Отметим, что величина p_* может быть использована в качестве оценки контактного давления, определяемого по формуле (1.3), причем p_* выражается через постоянную Гамакера [12] или поверхностную энергию [14]. Величина d_* совпадает с удвоенным значением диссипации энергии d^∞ в случае ступенчатого изменения контактного давления от 0 до p_* при традиционной постановке задачи [28]. Для выбранных параметров задачи $p_* \simeq 5.305$ МПа, $d_* \simeq 1.126 \times 10^{-2}$ Дж/м^2.

На рис. 2 показаны расчетные зависимости диссипации энергии d^∞ от конечного внедрения δ_m при уточненной и традиционной постановках задачи.

Представленные зависимости имеют особенности в виде разрывов и изломов, которые вызваны резкими изменениями вида функции $r(t)$ с ростом внедрения δ_m. В свою очередь, эти изменения обусловлены немонотонным характером функции $Z(r)$ и могут быть объяснены с помощью графического описания эволюции контактного зазора r в процессе подвода/отвода индентора [29]. Таким образом можно установить, что разрыв зависимости $d^\infty(\delta_m)$ происходит при $\delta_m = \delta_+^\infty$, причем величина δ_+^∞ известным образом определяется видом функции $Z(r)$ и ее значения в безразмерном виде $\tilde{\delta}_+^\infty = \delta_+^\infty/h_0$ показаны на рис. 2. Сам разрыв обусловлен появлением скачка у функции $r(t)$ с резким изменением ее конечного значения r_m, тогда как излом зависимости $d^\infty(\delta_m)$ связан с возникновением ситуации, когда скачок функции $r(t)$ происходит в период $(0, t_m)$ изменения внедрения $\delta(t)$.

Подобные изменения вида функции $r(t)$ иллюстрируются рис. 3, на котором эта функция показана для точек А ($\tilde{\delta}_m = -0.52$), В ($\tilde{\delta}_m = -0.464$) и С ($\tilde{\delta}_m = -0.44$), расположенных на графике $d^\infty(\delta_m)$ до и после разрыва/излома (рис. 2). Для определенности используется уточненная постановка задачи.

Согласно вышеизложенному, и это подтверждается расчетами, зависимость $d^\infty(\delta_m)$ представляется гладкой линией без разрыва и излома, если для каждого значения δ_m

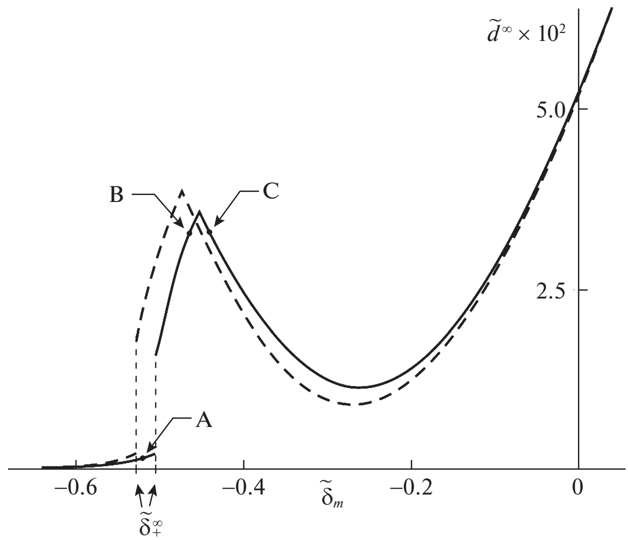

Рис. 2. Зависимости диссипации энергии d^{∞} от конечного внедрения δ_m. Точки A, B и C соответствуют значениям $\tilde{\delta}_m = -0.52$, -0.464 и -0.44. Сплошная/штриховая линия отвечает уточненной/традиционной постановке задачи.

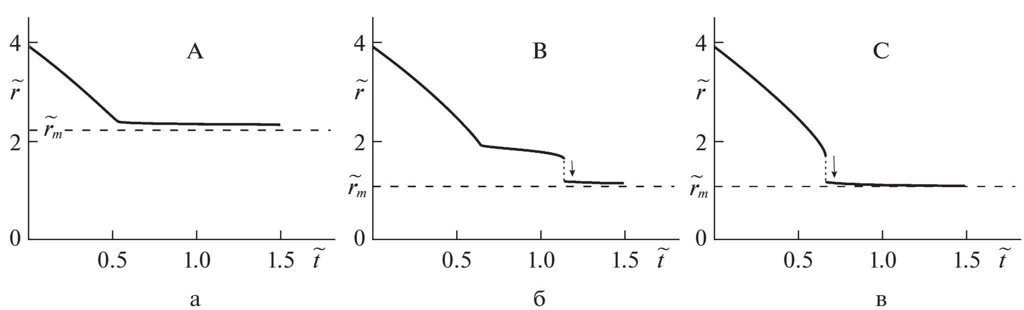

Рис. 3. Зависимости контактного зазора r от времени t в режиме подвода индентора для точек A, B и C на рис. 2.

функция $r(t)$ не имеет скачков и значение r_m, как решение уравнения (1.15), непрерывно зависит от δ_m. Для выполнения этих условий достаточно, чтобы [29]

$$B^{\infty} h_0 Z'(r) < 1; \quad r \in (0, \infty) \tag{2.10}$$

Нарушение условия (2.10) приводит к скачкообразному росту диссипации энергии d^{∞} при достижении внедрением δ_m критического значения δ_+^{∞} (рис. 2).

Представленные на рис. 2 графики демонстрируют близость значений диссипации энергии d^{∞} для уточненной и традиционной постановок задачи при больших значениях δ_m. Такая близость объясняется тем, что при больших внедрениях индентора за-

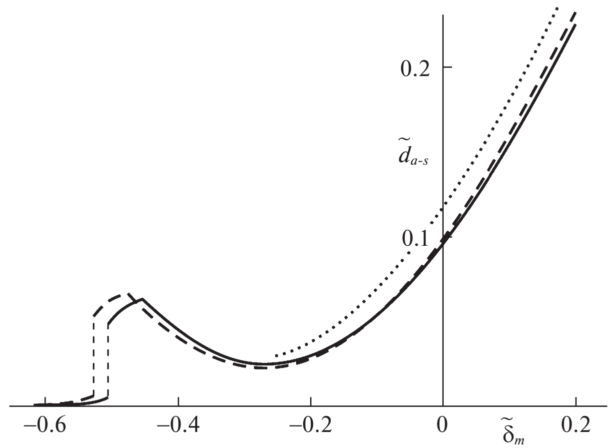

Рис. 4. Зависимости гистерезисных потерь d_{a-s} от конечного внедрения δ_m. Сплошная/штриховая линия отвечает уточненной/традиционной постановке задачи. Пунктирная линия отвечает традиционной постановке задачи при допущении, что слой нагружается контактным давлением p.

зор r становится малым и межмолекулярное взаимодействие обуславливается главным образом малыми значениями аргумента функции $f(r+s)$, присутствующей в равенствах (1.2)–(1.4). В свою очередь, это приводит к тому, что функции $K(t,\tau)$ и, следовательно, значения диссипации энергии d^∞ для уточненной и традиционной постановок задачи, определяемые по формулам (2.7), (2.8), становятся близкими друг к другу. Указанные обстоятельства подтверждают правомерность использования фиктивного контактного давления p_c для расчета НДС слоя при традиционной постановке задачи (Замечание 1).

Замечание 2. В режиме подвода (1.12)/отвода (1.13) индентора, приложенная к нему внешняя сила совершает работу

$$A^{\text{ext}} = \int_0^{t_m} p(t)d\delta(t),$$

причем, по закону сохранения энергии:

$$A^{\text{ext}} = d^\infty + \Delta U + \Delta E,$$

где ΔU и ΔE – изменения внутренней энергии слоя и энергии поля межмолекулярного взаимодействия, приходящиеся на единицу площади слоя. Последнее равенство означает, что работа A^{ext} внешней силы не может служить мерой диссипации энергии в слое.

3. Гистерезисные потери при индентировании определяются как суммарная диссипация энергии d_{a-s} за цикл подвод–отвод индентора [38]:

$$d_{a-s} = d^\infty\Big|_{\text{app}} + d^\infty\Big|_{\text{ret}}, \tag{3.1}$$

где $d^\infty\Big|_{\text{app}}$ и $d^\infty\Big|_{\text{ret}}$ – величины диссипации энергии в режиме подвода (1.12) и отвода (1.13) индентора. Эти величины могут быть найдены на основе результатов предыдущего раздела, однако, при этом следует учитывать определенную специфику цикла подвод—отвод индентора.

Действительно, этот цикл подразумевает, что после подвода и формирования стационарного состояния слоя (формула (1.14)), происходит отвод индентора в стационарное состояние, совпадающее с начальным для режима подвода состоянием. Другими словами, между начальными и конечными значениями внедрения и зазора, отвечающими режимам подвода и отвода индентора имеют место следующие соотношения:

$$\delta^s\Big|_{\text{ret}} = \delta_m\Big|_{\text{app}}, \quad \delta_m\Big|_{\text{ret}} = \delta^s\Big|_{\text{app}}, \quad r^s\Big|_{\text{ret}} = r_m\Big|_{\text{app}}, \quad r_m\Big|_{\text{ret}} = r^s\Big|_{\text{app}} \tag{3.2}$$

Таким образом, величины $d^\infty\Big|_{\text{app}}$ и $d^\infty\Big|_{\text{ret}}$ в выражении (3.1) для суммарной диссипации энергии находятся при помощи формулы (2.7) с учетом соотношений (3.2).

В качестве примера были выполнены расчеты гистерезисных потерь d_{a-s} при линейном законе (2.9) изменения внедрения $\delta(t)$ в режимах подвода и отвода индентора. Расчеты проводились при значениях параметров задачи, указанных в предыдущем разделе.

На рис. 4 показаны расчетные зависимости гистерезисных потерь d_{a-s} от конечного внедрения $\delta_m = \delta_m\Big|_{\text{app}}$ с использованием безразмерной величины $\tilde{d}_{a-s} = d_{a-s}/d_*$. Как и следовало ожидать, имея ввиду результаты предыдущего раздела (рис. 2), при больших внедрениях δ_m уточненная и традиционная постановки задач дают близкие значения d_{a-s}.

Пунктирная линия на рис. 4 отвечает традиционной постановке задачи при допущении, что слой нагружается контактным давлением p, определяемым по формуле (1.3). Как видно, использование в качестве нагрузки фиктивного контактного давления p_c приводит к более корректным результатам расчетов (штриховая линия на рис. 2), что вполне согласуется с замечанием 1.

Обращает на себя внимание то, что зависимости $d_{a-s}(\delta_m)$ являются немонотонными и имеют локальные максимумы и минимумы. Кроме того, эти зависимости имеют особенности в виде разрывов и изломов, причины появления которых указаны в предыдущем разделе.

4. Трение скольжения. Рассмотрим межмолекулярное взаимодействие вязкоупругого слоя с шероховатым контртелом, скользящим по нему с постоянной скоростью V_s вдоль оси x (рис. 5). Предполагается, что шероховатость контртела образована множеством одинаковых неровностей трапецеидальной формы. Неровности считаются пологими, а горизонтальные части профиля контртела достаточно протяженными, так что

$$\rho \ll 1, \quad t_r \ll 2a_2/V_s, \quad t_r \ll L_0/V_s \tag{4.1}$$

Здесь и далее используются геометрические параметры неровностей, указанные на рис. 5.

Рассмотрим вначале взаимодействие со слоем единичной неровности контртела. Для этого выберем некоторый участок слоя произвольной ширины b (вдоль оси y) и длины Δx (вдоль оси x), причем $\Delta x \ll a_1 - a_2$, $\Delta x \ll 2a_2$. Принимая во внимание сделанные допущения, взаимодействие такого участка с проходящей над ним неровностью можно представить как равномерный подвод и последующий равномерный отвод поверхности контртела, которую можно считать расположенной параллельно подложке слоя (первое допущение (4.1)). Кроме того, можно считать, что после подвода/отвода поверхности контртела вязкоупругий материал слоя успевает релаксировать и прийти в стационарное состояние (второе и третье допущения (4.1)).

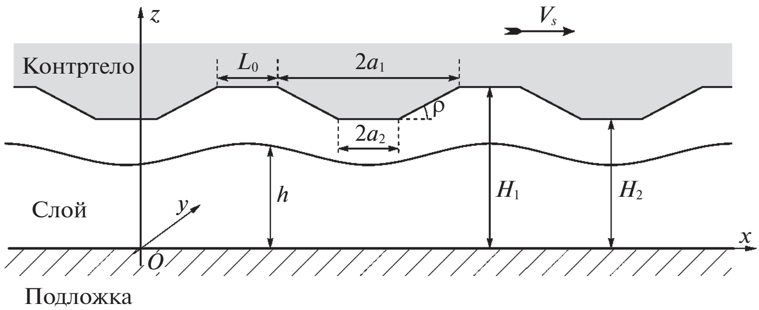

Рис. 5. Контактное взаимодействие вязкоупругого слоя с шероховатым контртелом, скользящим по нему с постоянной скоростью V_s.

Подобный характер взаимодействия скользящей неровности с выбранным участком слоя вполне соответствует постановке рассмотренной выше задачи о плоскопараллельном контакте индентора с вязкоупругим слоем при наличии режимов подвода (1.12) и отвода (1.13) с линейным законом (2.9) изменения внедрения $\delta(t)$ индентора. Параметры этой задачи связаны с параметрами задачи о скольжении контртела следующими равенствами:

$$\begin{gathered} \delta^s\Big|_{\text{app}} = h_0 - H_1 \equiv \delta_1, \quad \delta_m\Big|_{\text{app}} = h_0 - H_2 \equiv \delta_2 \\ \dot{\delta} = V_s \operatorname{tg}\rho = \frac{\delta_2 - \delta_1}{t_m}, \quad t_m = \frac{a_1 - a_2}{V_s}, \end{gathered} \tag{4.2}$$

где H_1, H_2 — зазоры между подложкой и горизонтальными частями профиля контртела, причем $g_m = H_1 - H_2 = \delta_2 - \delta_1$ — высота неровности (рис. 5).

С учетом вышесказанного, воспользуемся формулой (3.1) для определения диссипации энергии ΔD_1 на выбранном участке слоя при прохождении по нему единичной неровности, представив эту энергию в виде $\Delta D_1 = d_{a-s} b \Delta x$. Отсюда следует, что при прохождении неровностью пути l диссипация энергии в слое на этом пути составит

$$D_1 = d_{a-s} b\, l \tag{4.3}$$

Если ввести в рассмотрение силу F_1 трения неровности о слой, то по закону сохранения энергии, работа этой силы на пути l должна равняться диссипации энергии, т.е. $F_1 l = D_1$. Подстановка в это равенство выражения (4.3) позволяет установить, что

$$F_1 = b d_{a-s} \tag{4.4}$$

Аналогичное выражение для силы трения через диссипацию энергии было получено ранее для классического вязкоупругого контакта скольжения [39].

Вернемся теперь к рассмотрению контртела с множеством неровностей. Выделим некоторый участок контртела длиной $a \gg L \equiv L_0 + 2a_1$ и выбранной ранее шириной b, на котором располагается $N = a/L$ неровностей (рис. 5). В силу равенства (4.4), сила трения такого участка по слою составит $F = NF_1 = SL^{-1} d_{a-s}$, где $S = ab$ — площадь выделенного участка контртела. В результате, можно найти силу трения $\overline{\tau}$, приходящуюся на единицу площади контакта (среднее напряжение трения):

$$\overline{\tau} = \frac{F}{S} = \frac{1}{L} d_{a-s} \tag{4.5}$$

Нагрузка на контртело, приходящаяся на единицу площади контакта (среднее контактное давление) определяется по формуле:

$$\overline{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t)dt, \tag{4.6}$$

где $T = L/V_s$ — период циклических воздействий неровностей контртела на слой, p — контактное давление, которое рассчитывается по известному зазору $r(t)$ с использованием формулы (1.3).

Располагая величинами $\overline{\tau}$ и $\overline{p}$, можно определить коэффициент трения скольжения [40]

$$\mu_s = \frac{\overline{\tau}}{\overline{p}}, \tag{4.7}$$

который имеет физический смысл при положительных значениях давления $\overline{p}$.

На основе равенств (4.5), (4.6) и решения задачи о плоскопараллельном контакте индентора с вязкоупругим слоем (разд. 2 и 3), были выполнены расчеты величин $\overline{\tau}$ и $\overline{p}$ для различных значений максимального внедрения δ_2 контртела.

Расчеты проводились при $a_1 = 0.6$ мкм, $a_2 = 0.5$ мкм, $g_m = 5\times10^{-3}$ мкм, $L_0 = 1$ мкм, $V_s = 50$ мкм/с. Величина δ_1 определялась по формуле $\delta_1 = \delta_2 - g_m$ для каждого значения δ_2. Значения остальных параметров принимались такими же, как в разд. 2.

На рис. 6а и б изображены зависимости силы трения $\overline{\tau}$ и давления $\overline{p}$ от внедрения δ_2 при уточненной и традиционной постановках задачи с использованием безразмерной величины $\tilde{\delta}_2 = \delta_2/h_0$. На рис. 6в показаны кривые зависимости силы трения $\overline{\tau}$ от давления $\overline{p}$, построенные на основе графиков рис. 6а и б. Каждой точке на такой кривой отвечает некоторое значение внедрения δ_2 из указанного на рис. 6а или б диапазона, причем стрелками обозначено направление роста величины δ_2. Отметим, что неоднозначность зависимости $\overline{\tau}(\overline{p})$ обусловлена отсутствием монотонной зависимости давления $\overline{p}$ от внедрения δ_2 (рис. 6б).

Показанные на рис. 6а зависимости $\overline{\tau}(\delta_2)$ имеют особенности в виде разрывов и изломов, причины появления которых указаны в разд. 2. В частности, разрыв происходит при $\delta_2 = \delta_+^\infty$ и обусловлен появлением скачка у функции $r(t)$ с резким изменением ее конечного значения r_m. Аналогичное поведение функции $r(t)$ имеет место, когда значение δ_+^∞ принимает внедрение δ_1. Однако, соответствующее внедрение $\delta_2 = \delta_1 + g_m = \delta_+^\infty + g_m$ оказывается сравнимым с толщиной h_0 слоя, что противоречит условию малости деформаций. По этой причине, на рис. 6а дополнительные особенности зависимости $\overline{\tau}(\delta_2)$ не представлены.

Разрывы и изломы кривых зависимости силы трения $\overline{\tau}$ от давления $\overline{p}$ (рис. 6в) являются очевидным следствием наличия таких особенностей у соответствующих зависимостей $\overline{\tau}(\delta_2)$ (рис. 6а). Отметим, что ранее скачкообразное изменение силы трения

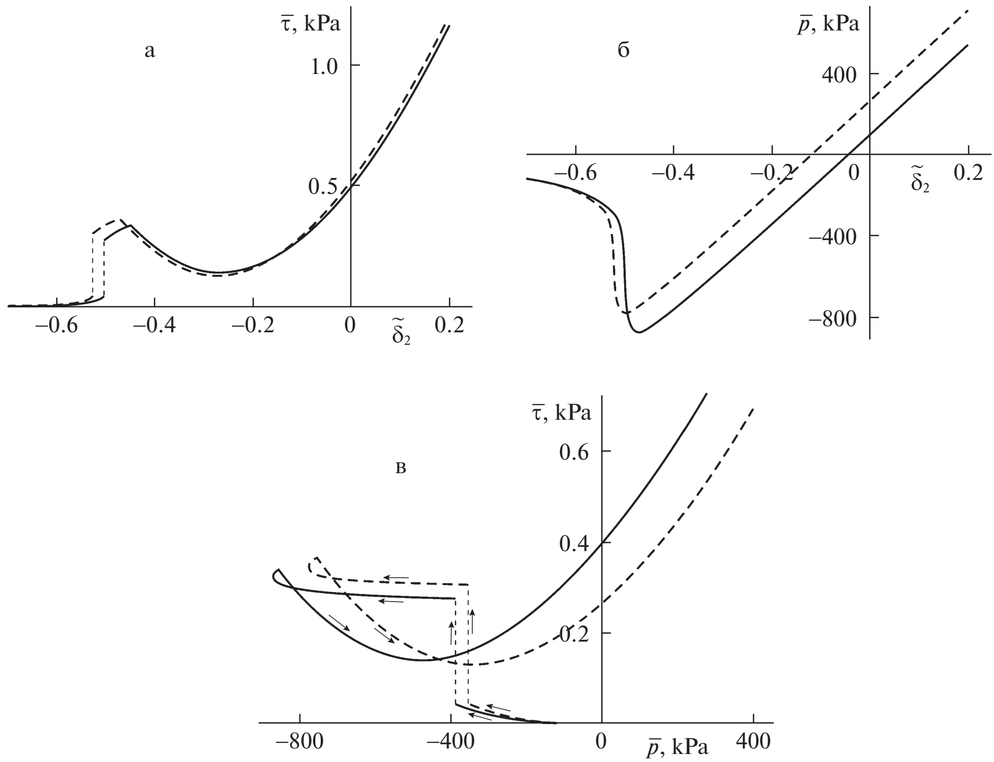

Рис. 6. Зависимости силы трения $\bar{\tau}$ (а) и давления $\bar{p}$ (б) от внедрения δ_2, а также силы трения $\bar{\tau}$ от давления $\bar{p}$ (в) при $h_0 = 5$ нм. Сплошная/штриховая линия отвечает уточненной/традиционной постановке задачи.

при изменении нормальной нагрузки наблюдалась экспериментально для зонда атомно-силового микроскопа [41].

Как и прежде, можно утверждать, что зависимости $\bar{\tau}(\delta_2)$ и $\bar{\tau}(\bar{p})$ являются гладкими (без разрывов и изломов), если выполняется условие (2.10). Для проверки этого утверждения были выполнены расчеты при прежних значениях параметров задачи, но уменьшенной толщине слоя $h_0 = 2$ нм, когда имеет место неравенство (2.10). На рис. 7а и б изображены соответствующие зависимости $\bar{\tau}(\delta_2)$ и $\bar{p}(\delta_2)$, а на рис. 7в – зависимость $\bar{\tau}(\bar{p})$, которые, как и следовало ожидать, являются гладкими.

Сравнение рис. 6в и 7в указывает на то, что уменьшение толщины h_0 слоя приводит к существенному росту силы трения $\bar{\tau}$ в области больших (в частности, положительных) значений давления $\bar{p}$.

Располагая значениями силы трения $\bar{\tau}$ и давления $\bar{p}$ (рис. 6 и 7), можно выполнить оценку коэффициента трения μ_s по формуле (4.7). В таблице 1 приводятся значения μ_s, полученные при давлении $\bar{p} = 1$ МПа. Как видно, коэффициент трения в рассматриваемом случае имеет достаточно низкие значения, что отвечает режиму сверхнизкого трения [42, 43]. Обращает на себя внимание, что увеличение толщины h_0 слоя приводит к не-

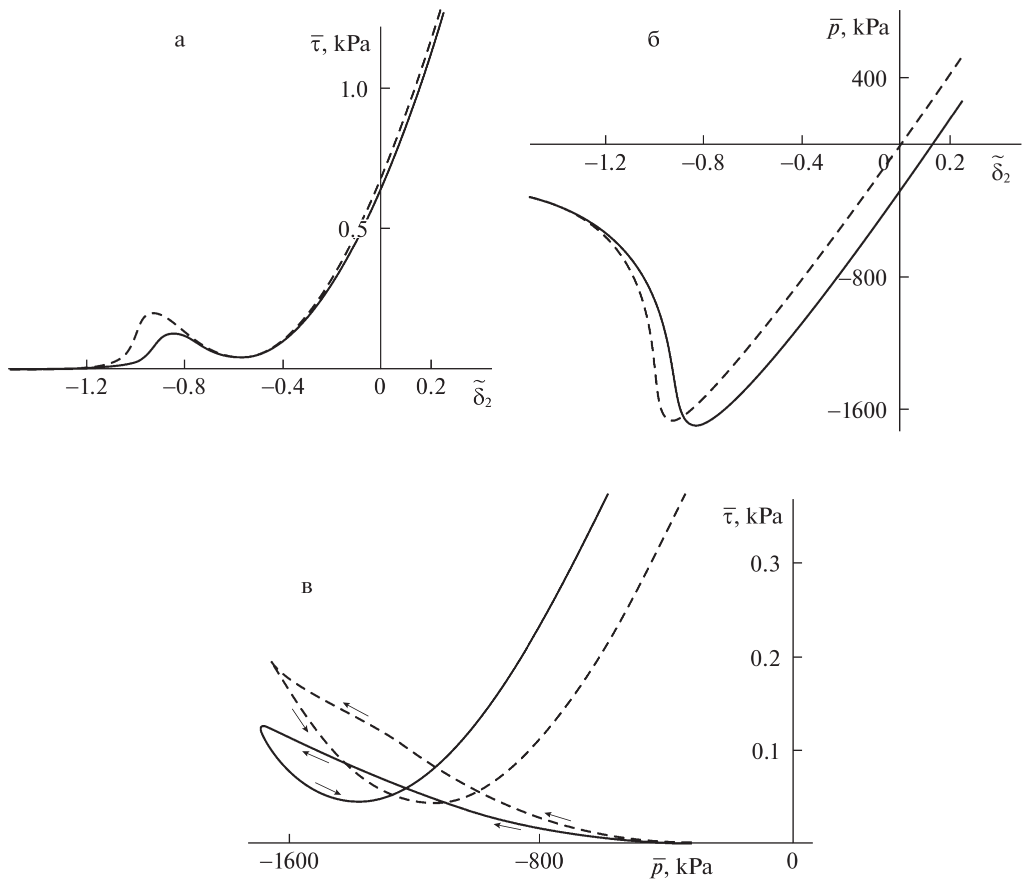

Рис. 7. Зависимости силы трения $\bar{\tau}$ (а) и давления $\bar{p}$ (б) от внедрения δ_2, а также силы трения $\bar{\tau}$ от давления $\bar{p}$ (в) при $h_0 = 2$ нм. Сплошная/штриховая линия отвечает уточненной/традиционной постановке задачи.

значительному уменьшению коэффициента трения μ_s. Использование традиционной постановки задачи вместо уточненной постановки приводит к существенному занижению оценки коэффициента трения.

Выводы

1. Выполнен расчет диссипации энергии в вязкоупругом слое в режиме подвода/отвода плоского индентора при наличии сил межмолекулярного взаимодействия (самосогласованный подход, традиционная и уточненная постановки задачи).

Таблица 1. Значения коэффициента трения

	Уточненная постановка задачи		Традиционная постановка задачи	
h_0, нм	2	5	2	5
$\mu_s \times 10^3$	2.41	2.25	1.98	1.76

2. Выявлен эффект скачкообразного роста диссипации энергии d^{∞} при достижении конечным внедрением δ_m индентора критического значения δ_{+}^{∞} (рис. 2 и 4). Реализация этого эффекта зависит, в конечном счете, от упругой податливости слоя и характера межмолекулярного взаимодействия (условие (2.10)).

3. На основе решения задачи о подводе/отводе плоского индентора выполнен расчет силы трения скольжения шероховатого контртела по вязкоупругому слою в режиме бесконтактного трения. Продемонстрирована возможность скачкообразного роста силы трения при увеличении внедрения контртела.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при финансовой поддержке РФФИ и БРФФИ в рамках научного проекта № 20-58-00007.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Derjaguin B.* Untersuchungen über die Reibung und Adhäsion, IV. Theorie des Anhaftens kleiner Teilchen // Kolloid-Zeitschrift. 1934. Bd. 69. H. 2. S. 155–164.
2. *Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D.* Surface energy and the contact of elastic solids // Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A. 1971. V. 324. № 1558. P. 301–313.
3. *Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Yu.P.* Effect of contact deformations on the adhesion of particles // J. Colloid Interface Sci. 1975. V. 53. № 2. P. 314–326.
4. *Sridhar I., Johnson K.L., Fleck N.A.* Adhesion mechanics of the surface force apparatus // J. Phys. D: Appl. Phys. 1997. V. 30. № 12. P. 1710–1719.
5. *Sergici A.O., Adams G.G., Müftü S.* Adhesion in the contact of a spherical indenter with a layered elastic half-space // J. Mech. Phys. Solids. 2006. V. 54. № 9. P. 1843–1861.
6. *Reedy E.D.* Thin-coating contact mechanics with adhesion // J. Mater. Res. 2006. V. 21. № 10. P. 2660–2668.
7. *Borodich F.M., Galanov B.A., Perepelkin N.V., Prikazchikov D.A.* Adhesive contact problems for a thin elastic layer: Asymptotic analysis and the JKR theory // Math. Mech. Solids. 2018. V. 24. № 5. P. 1405–1424.
8. *Greenwood J.A., Johnson K.L.* The mechanics of adhesion of viscoelastic solids // Philos. Mag. A. 1981. V. 43. № 3. P. 697–711.
9. *Горячева И.Г., Губенко М.М., Маховская Ю.Ю.* Скольжение сферического индентора по вязкоупругому основанию с учетом сил молекулярного притяжения // ПМТФ. 2014. Т. 55. № 1. С. 99–107.
10. *Lin Y.Y., Hui C.Y.* Mechanics of Contact and Adhesion between Viscoelastic Spheres: An Analysis of Hysteresis during Loading and Unloading // J. Polym. Sci. Pt. B: Polym. Phys. 2002. V. 40. P. 772–793.
11. *Haiat G., Phan Huy M.C., Barthel E.* The adhesive contact of viscoelastic spheres // J. Mech.&Phys. Solids. 2003. V. 51. № 1. P. 69–99.
12. *Muller V.M., Yushchenko V.S., Derjaguin B.V.* On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid plane // J. Coll. Interface Sci. 1980. V. 77. № 1. P. 91–101.
13. *Attard P., Parker J.L.* Deformation and adhesion of elastic bodies in contact // Phys. Rev. A. 1992. V. 46. № 12. P. 7959–7971.
14. *Greenwood J.A.* Adhesion of elastic spheres // Proc. R. Soc. Lond. A. 1997. V. 453. № 1961. P. 1277–1297.
15. *Солдатенков И.А.* Применение метода последовательных приближений к расчету упругого контакта при наличии молекулярной адгезии // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 5. С. 734–743.
16. *McMeeking R.M.* A Maxwell stress for material interactions // J. Colloid Interface Sci. 1998. V. 199. № 2. P. 187–196.

17. *Sauer R.A., Li S.* A contact mechanics model for quasi-continua // Int. J. Numer. Meth. Engng. 2007. V. 71. № 8. P. 931–962.

18. *He L.H.* Stress and deformation in soft elastic bodies due to intermolecular forces // J. Mech. Phys. Solids. 2013. V. 61. № 6. P. 1377–1390.

19. *Солдатенков И.А.* Контактная задача при объемном приложении сил межмолекулярного взаимодействия (уточненная постановка) // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 6. С. 877–893.

20. *Dolgov N.A., Romashin S.N., Frolenkova L.Yu., Shorkin V.S.* A model of contact of elastic bodies with account for their adhesion // Int. J. Nanomech. Sci.&Technol. 2015. V. 6. № 2. P. 117–133.

21. *Overbeek J.T.G., Sparnaay M.J.* Classical coagulation. London-van der Waals attraction between macroscopic objects // Discuss. Faraday Soc. 1954. V. 18. P. 12–24.

22. *Wu J.-J.* The jump-to-contact distance in atomic force microscopy measurement // J. Adhesion. 2010. V. 86. № 11. P. 1071–1085.

23. *Teodorovich E.V.* On the contribution of macroscopic van der Waals interactions to frictional force // Proc. R. Soc. Lond. A. 1978. V. 362. P. 71–77.

24. *Sokoloff J.B.* Theory of energy dissipation in sliding crystal surfaces // Rhys. Rev. B. 1990. V. 42. № 11. P. 760–765.

25. *Persson B.N.J., Zhang Z.* Theory of friction: Coulomb drag between two closely spaced solids // Rhys. Rev. B. 1998. V. 57. № 12. P. 7327–7334.

26. *Popov V.L.* Electronic and phononic friction of solids at low temperatures // Tribol. Int. 2001. V. 34. P. 277–286.

27. *Волокитин А.И., Перссон Б.Н.Дж.* Радиационная передача тепла и бесконтактное трение между наноструктурами // УФН. 2007. Т. 177. № 9. С. 921–951.

28. *Солдатенков И.А.* Контакт с межмолекулярным взаимодействием для вязкоупругого слоя (самосогласованный подход): расчет НДС и диссипации энергии // ПММ. 2020. Т. 84. № 1. С. 102–121.

29. *Солдатенков И.А.* Контакт с межмолекулярным взаимодействием для вязкоупругого слоя (самосогласованный подход): анализ особенностей процесса подвода/отвода индентора // ПММ. 2021. Т. 85. № 1. С. 44–65.

30. *Kaplan I.G.* Intermolecular Interactions: Physical Picture, Computational Methods and Model Potentials. Chichester: Wiley, 2006.

31. *Israelachvili J.N.* Intermolecular and Surface Forces. London: Academic, 2011.

32. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.

33. *Огибалов П.М., Ломакин В.А., Кишкин Б.П.* Механика полимеров. М.: Изд-во Московского ун-та, 1975. 528 с.

34. *Адамов А.А., Матвеенко В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н.* Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с.

35. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления (в 3-х томах). М.: Физматлит, 2003. Т. 1. 680 с. Т. 3. 728 с.

36. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 586 с.

37. *Хан Х.* Теория упругости. М.: Мир, 1988. 343 с.

38. *Ферри Дж.* Вязкоупругие свойства полимеров. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 535 с.

39. *Солдатенков И.А.* К расчету деформационной составляющей силы трения для стандартного вязкоупругого основания // Трение и износ. 2008. Т. 29. № 1. С. 12–21.

40. *Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С.* Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.

41. *Wang Y., Wang J.* Friction determination by atomic force microscopy in field of biochemical science // Micromachines. 2018. V. 9. № 7. 313.

42. *Deng Z., Smolyanitsky A., Li Q., Feng X.Q., Rachel J., Cannara R.J.* Adhesion-dependent negative friction coefficient on chemically modified graphite at the nanoscale // Nature Mater. 2012. V. 11. P. 1032–1037.

43. *Baykara M.Z., Vazirisereshk M.R., Martini A.* Emerging superlubricity: A review of the state of the art and perspectives on future research // Appl. Phys. Rev. 2018. V. 5. № 4. 041102.

Contact with Intermolecular Interaction Forces for a Viscoelastic Layer (Self-Consistent Approach): The Energy Dissipationi in Indentation and Friction Force

I. A. Soldatenkov[a,#]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: iasoldat@hotmail.com*

The contact of an infinitely extended plane indenter and a viscoelastic layer in the framework of the Derjaguin self-consistent approach with the surface (traditional formulation) and bulk (refined formulation) application of intermolecular interaction forces is considered. Using the first law of thermodynamics the problem on definition of the energy dissipation in the layer is solved for a given law of the indenter approach/retraction regime. The solution is used for calculation of the friction force in sliding of a rough counterbody on the viscoelastic layer. The calculation results testify the essential influence of the jump-like behavior of the contact gap in time on the energy dissipation and friction force.

Keywords: contact problem, viscoelastic layer, intermolecular interaction, energy dissipation, friction

REFERENCES

1. *Derjaguin B.* Untersuchungen über die Reibung und Adhäsion, IV. Theorie des Anhaftens kleiner Teilchen // Kolloid-Zeitschrift, 1934, Bd. 69, H. 2, S. 155–164.
2. *Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D.* Surface energy and the contact of elastic solids // Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A, 1971, vol. 324, no. 1558, pp. 301–313.
3. *Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Yu.P.* Effect of contact deformations on the adhesion of particles // J. Colloid Interface Sci., 1975, vol. 53, no. 2, pp. 314–326.
4. *Sridhar I., Johnson K.L., Fleck N.A.* Adhesion mechanics of the surface force apparatus // J. Phys. D: Appl. Phys., 1997, vol. 30, no. 12, pp. 1710–1719.
5. *Sergici A.O., Adams G.G., Müftü S.* Adhesion in the contact of a spherical indenter with a layered elastic half-space // J. Mech. Phys. Solids, 2006, vol. 54, no. 9, pp. 1843–1861.
6. *Reedy E.D.* Thin-coating contact mechanics with adhesion // J. Mater. Res., 2006, vol. 21, no. 10, pp. 2660–2668.
7. *Borodich F.M., Galanov B.A., Perepelkin N.V., Prikazchikov D.A.* Adhesive contact problems for a thin elastic layer: Asymptotic analysis and the JKR theory // Math.&Mech. Solids, 2018, vol. 24, no. 5, pp. 1405–1424.
8. *Greenwood J.A., Johnson K.L.* The mechanics of adhesion of viscoelastic solids // Philos. Mag. A, 1981, vol. 43, no. 3, pp. 697–711.
9. *Goryacheva I.G., Gubenko M.M., Makhovskaya Yu.Yu.* Sliding of a spherical indenter on a viscoelastic foundation with the forces of molecular attraction taken into account // J. Appl. Mech. & Techn. Phys., 2014, vol. 55, no. 1, pp. 81–88.
10. *Lin Y.Y., Hui C.Y.* Mechanics of contact and adhesion between viscoelastic spheres: An analysis of hysteresis during loading and unloading // J. Polym. Sci., Part B: Polym. Phys., 2002, vol. 40, pp. 772–793.
11. *Haiat G., Phan Huy M.C., Barthel E.* The adhesive contact of viscoelastic spheres // J. Mech.&Phys. of Solids, 2003, vol. 51, no. 1, pp. 69–99.

12. *Muller V.M., Yushchenko V.S., Derjaguin B.V.* On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid plane // J. Coll. Interface Sci., 1980, vol. 77, no. 1, pp. 91–101.

13. *Attard P., Parker J.L.* Deformation and adhesion of elastic bodies in contact // Phys. Rev. A, 1992, vol. 46, no. 12, pp. 7959–7971.

14. *Greenwood J.A.* Adhesion of elastic spheres // Proc. R. Soc. Lond. A, 1997, vol. 453, no. 1961, pp. 1277–1297.

15. *Soldatenkov I.A.* The use of the method of successive approximations to calculate an elastic contact in the presence of molecular adhesion // JAMM, 2012, vol. 76, no. 5, pp. 597–603.

16. *McMeeking R.M.* A Maxwell stress for material interactions // J. Colloid Interface Sci., 1998, vol. 199, no. 2, pp. 187–196.

17. *Sauer R.A., Li S.* A contact mechanics model for quasi-continua // Int. J. Numer. Meth. Engng. 2007. vol. 71. no. 8. pp. 931–962.

18. *He L.H.* Stress and deformation in soft elastic bodies due to intermolecular forces // J. Mech. Phys. Solids, 2013, vol. 61, no. 6, pp. 1377–1390.

19. *Soldatenkov I.A.* The contact problem with the bulk application of intermolecular interaction forces (a refined formulation) // JAMM, 2013, vol. 77, no. 6, pp. 629–641.

20. *Dolgov N.A., Romashin S.N., Frolenkova L.Yu., Shorkin V.S.* A model of contact of elastic bodies with account for their adhesion // Nanomech. Sci.&Technol., 2015, vol. 6, no. 2, pp. 117–133.

21. *Overbeek J.T.G., Sparnaay M.J.* Classical coagulation. London-van der Waals attraction between macroscopic objects // Discuss. Faraday Soc., 1954, vol. 18, pp. 12–24.

22. *Wu J.-J.* The jump-to-contact distance in atomic force microscopy measurement // J. Adhesion, 2010, vol. 86, no. 11, pp. 1071–1085.

23. *Teodorovich E.V.* On the contribution of macroscopic van der Waals interactions to frictional force // Proc. R. Soc. Lond. A, 1978, vol. 362, pp. 71–77.

24. *Sokoloff J.B.* Theory of energy dissipation in sliding crystal surfaces // Rhys. Rev. B, 1990, vol. 42, no. 11, pp. 760–765.

25. *Persson B.N.J., Zhang Z.* Theory of friction: Coulomb drag between two closely spaced solids // Rhys. Rev. B, 1998, vol. 57, no. 12, pp. 7327–7334.

26. *Popov V.L.* Electronic and phononic friction of solids at low temperatures // Tribol. Int., 2001, vol. 34, pp. 277–286.

27. *Volokitin A.I., Persson B.N.J.* Radiative heat transfer and noncontact friction between nanostructures // Phys. Uspekhi, 2007, vol. 50, no. 9, pp. 879 – 906.

28. *Soldatenkov I.A.* Contact with intermolecular interaction forces for a viscoelastic layer (self-consistent approach): Calculation of the stress-strain state and energy dissipation // Mech. Solids, 2020, vol. 55, no. 7, pp. 159–174.

29. *Soldatenkov I.A.* Contact with intermolecular interactions for a viscoelastic layer (self-consistent approach): feature analysis of the indenter approach/retract process // Mech. Solids, 2021, vol. 56, no. 7, pp. 1259–1276.

30. *Kaplan I.G.* Intermolecular Interactions: Physical Picture, Computational Methods and Model Potentials. Chichester: Wiley, 2006.

31. *Israelachvili J.N.* Intermolecular and Surface Forces. L.: Academic, 2011.

32. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity. An Introduction. N.Y.: Academic Press, 1971.

33. *Ogibalov P.M., Lomakin V.A., Kishkin B.P.* Mechanics of Polymers. Moscow: Moscow University Press, 1975. (in Russian)

34. *Adamov A.A., Matveenko V.P., Trufanov N.A., Shardakov I.N.* Methods of Applied Viscoelasticity. Ekaterinburg: Ural Branch RAS, 2003. (in Russian)

35. *Fikhtengolts G.M.* Course of Differential and Integral Calculus. Vol. 1, 3. Moscow: Fizmatlit, 2003. (in Russian)

36. *Kalitkin N.N.* Numerical Methods. Saint Petersburg: BHV-Petersburg, 2011. (in Russian)

37. *Hahn H.G.* Elastizitätstheorie. Grundlagen der linearen Theorie und Anwendungen auf eindimensionale, ebene und räumliche Probleme. Stuttgart: Teubner, 1985.

38. *Ferry J.D.* Viscoelastic Properties of Polymers. N.Y.: John Wiley&Sons, Inc., 1961.

39. *Soldatenkov I.A.* Calculation of the deformation component of the force of friction for a standard elastoviscous base // J. Friction&Wear, 2008, vol. 29, no. 1, pp. 7–14.

40. *Kragelsky I.V., Dobychin M.N., Kombalov V.S.* Friction and Wear: Calculation Methods. Oxford: Pergamon, 1982.

41. *Wang Y., Wang J.* Friction determination by atomic force microscopy in field of biochemical science // Micromachines, 2018, vol. 9, no. 7, p. 313.

42. *Deng Z., Smolyanitsky A., Li Q., Feng X.Q., Rachel J., Cannara R.J.* Adhesion-dependent negative friction coefficient on chemically modified graphite at the nanoscale // Nature Mater., 2012, vol. 11, pp. 1032–1037.

43. *Baykara M.Z., Vazirisereshk M.R., Martini A.* Emerging superlubricity: A review of the state of the art and perspectives on future research // Appl. Phys. Rev., 2018, vol. 5, no. 4, 041102.